$$y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y'' = (6x - e^x)^2$$

Решаем однородное $y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y'' = 0$.

$y = e^{\lambda x}$

$e^{\lambda x}(\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2) = 0$

$\lambda^2(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0$

$\lambda_{1,2} = 0 \qquad \lambda_{3,4} = 1 \pm i$

$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{(1+i)x} + C_4 \cdot e^{(1-i)x}$

$y = C_1 + C_2 x + C_3(e^x \cos x + i e^x \sin x) +$

$+ C_4(e^x \cos x - i e^x \sin x).$

$y = (C_3 + C_4) e^x \cos x + i(C_3 - C_4) e^x \sin x + C_1 + C_2 x$

$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x \cos x + C_4 e^x \cdot \sin x$

Метод неопределенных коэф.

$y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y'' = (-e^x + 6x)^2$

$y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y'' = e^{2x} - 12e^x \cdot x + 36x^2$

$$\begin{cases} y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y'' = 36x^2 \\ y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y'' = e^{2x} \\ y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y'' = -12e^x \cdot x \end{cases}$$

1) $y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y' = 36x^2$

$y_1 = x^2(a_1 + a_2 x + a_3 x^2)$

2) $y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y'' = e^{2x}$

$y_2 = a_4 e^{2x}$

3) $y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y'' = -2e^x \cdot x$

$y_3 = a_5 e^x + a_6 e^x x$

$y = y_1 + y_2 + y_3 = a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + a_4 e^{2x} + a_5 e^x + a_6 e^x \cdot x$

$y' = 2a_1 + 6x a_2 + 12 x^2 a_3 + 4e^{2x} a_4 + e^x a_5 + (2e^x + e^x x) a_6$

$y^{(3)} = 6a_2 + 24 x a_3 + 8e^{2x} \cdot a_4 + e^x \cdot a_5 + (3e^x + e^x x) a_6$

$y^{(4)} = 24 a_3 + 16 e^{2x} a_4 + e^x \cdot a_5 + (4e^x + e^x \cdot x) a_6$

Подставим:

$24a_3 + 16 a_4 e^{2x} + a_5 \cdot e^x + a_6 (4e^x + e^x x) -$

$- 2(6a_2 + 24 a_3 x + 8 a_4 \cdot e^{2x} + a_5 e^x + a_6 (3e^x + e^x x)) +$

$+ 2(2a_1 + 6a_2 x + 12 a_3 x^2 + 4 a_4 e^{2x} + a_5 e^x +$

$+ a_6 (2e^x + e^x \cdot x)) = e^{2x} + 36x^2 - 12 e^x - x$

$4a_1 - 12 a_2 + 24 a_3 + (a_5 - 2a_6) e^x + 8 a_4 e^{2x} +$

$(12 a_2 - 48 a_3) x + a_6 e^x \cdot x + 24 a_3 x^2 = e^{2x} - 12 e^x \cdot x + 36 x^2$

$4a_1 - 12 a_2 + 24 a_3 = 0$ $\quad 12 a_2 - 48 a_3 = 0$

$a_5 + 2a_6 = 0$ $\quad a_6 = -12$

$8 a_4 = 1$ $\quad 24 a_3 = 36$

$a_1 = 9 \quad a_2 = 6 \quad a_3 = 3/2 \quad a_4 = 1/8 \quad a_5 = 24 \quad a_6 = -12$

Ответ $y = \frac{e^{2x}}{8} + 24e^x + \frac{3x^4}{2} + 6x^3 + 9x^2 - 12e^x x$

Общее решение однородного уравнения будем искать в виде суммы общего решения однородного и частного у неоднородного

т.е $y = C_1 + C_2 x + C_3 \cdot e^x \cdot \cos x + C_4 e^x \cdot \sin x + 1/8 \cdot e^{2x} + 24e^x + 3/2 \cdot x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 12e^x x$

Решаем задачу Коши

$y' = \frac{e^{2x}}{4} + 12e^x + 6x^3 + 18x^2 + 18x - 12e^x \cdot x + C_2 + C_3 \cdot e^x \cdot \cos x - C_3 e^x \cdot \sin x + C_4 \cdot e^x \cos x + C_4 \cdot e^x \sin x$

$y'' = \frac{e^{2x}}{2} + 18x^2 + 36x - 12e^x \cdot x - 2C_3 \cdot e^x \sin x + 2C_4 \cdot e^x \cdot \cos x + 18.$

$y''' = e^{2x} - 12e^x + 36x - 12e^x \cdot x - 2C_3 \cdot e^x \cdot \cos(x) - 2C_3 \cdot e^x \sin(x) + 2C_4 \cdot e^x \cdot \cos(x) - 2C_4 e^x \sin x +$

$y(0) = \frac{193}{8} \quad C_1 + C_3 + \frac{193}{8} = \frac{193}{8}$

$y'(0) = \frac{53}{4} \quad C_2 + C_3 + C_4 + \frac{49}{4} = \frac{53}{4}$

$y''(0) = \frac{37}{2} \quad 2C_4 + \frac{37}{2} = \frac{37}{2}$

$y'''(0) = 25 \quad -2C_3 + 2C_4 + 25 = 25$

$C_1 = 0, \quad C_2 = 1 \quad C_3 = 0 \quad C_4 = 0.$