ITsMOre than a UNIVERSITY

Дифф уравнение

КАРАСЕВА
M3135

(№1)

$(\sin y + y\sin x + 1/x)dx + (x\cos y - \cos x - 1/y)dy = 0$

$p(x,y) = \sin y + y\sin x + 1/x \qquad Q(x,y) = x\cos y - \cos x - 1/y$

$\frac{\partial p}{\partial y} = \cos y + \sin x \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \cos y + \sin x$

Значит, это у-ние в полных дифф-алах

$\exists\ u(x,y) = c$ - решение $(c \in \mathbb{R})$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \sin y + y\sin x + 1/x \Leftrightarrow u = \int \sin y\,dx +$
$+ \int y\sin x\,dx + \int \frac{1}{x}dx + C(y)$

$u(x,y) = \underline{\sin y - y\cos x} + \ln|x| + C(y)$

$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos y - \cos x + \frac{\partial C}{\partial y} = x\cos y - \cos x - 1/y$

$\frac{\partial C}{\partial y} = x\cos y - \cos y - 1/y$

$C = x\sin y - \sin x - \ln|y| + A$

$u(x,y) = \sin y - y\cos x + \ln|x| + x\sin y - \sin x - \ln|y|$
$= C$

Ответ: $x\sin y - y\cos x + \sin y - \sin x + \ln|x| - \ln|y| = C$
$(C \in \mathbb{R})$

№2 $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2-3x^2}{y^4}dy = 0$

$P(x,y) = \frac{2x}{y^3}$ $Q(x,y) = \frac{y^2-3x^2}{y^4}$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2x\cdot -3}{y^4} = \frac{-6x}{y^4}$

=> у-ние в пол. диф-ах

$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{y^4}\cdot -3\cdot 2x = \frac{-6x}{y^4}$

$\exists\ u(x,y) = C$, $C\in\mathbb{R}$
решение

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y^3} \Rightarrow u = \int\frac{2x}{y^3}dx = \frac{x^2}{y^3} + C(y)$

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y^2-3x^2}{y^4} = \frac{-3x^2}{y^4} + \frac{\partial C}{\partial y}$

$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{1}{y^2} \Rightarrow C = \frac{-1}{y} + A$ $(A\in\mathbb{R})$

$u(x,y) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y^2} + A$, $(A\in\mathbb{R})$

Ответ: $\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y^2} = C$, $(C\in\mathbb{R})$

№3 $(1-x^2y)dx + x^2(y-x)dy = 0$, ищи = $\varphi(x)$

$m(x,y)$ – интег. множитель.

$$\frac{\partial(m(1-x^2y))}{\partial y} = \frac{\partial(m(x^2(y-x))}{\partial x}$$

$$\frac{\partial m}{\partial y}(1-x^2y) - x^2 m = \frac{\partial m}{\partial x}(x^2(y-x)) + (2x(y-x) - x^2)m$$

$$\frac{\partial m}{\partial y}(1-x^2y) - \frac{\partial m}{\partial x}(x^2(y-x)) = 2x(y-x)m$$

$\exists$ m - зависит только от x, тогда:

$$-x^2(y-x)\cdot m' = 2x(y-x)m$$

$$-xm' = 2m \Leftrightarrow m' = \frac{-2}{x}m$$

$$m = C\cdot e^{\int\frac{-2}{x}dx} = C\cdot\frac{1}{x^2}$$ – так как мы умножаем на m все у-ние, то константу можно опустить

$$\frac{1}{x^2}((1-x^2y)dx + x^2(y-x)dy) = 0.$$

$$(1/x^2 - y)dx + (y-x)dy = 0$$

$$\frac{\partial(1/x^2 - y)}{\partial y} = -1 \quad \frac{\partial(y-x)}{\partial x} = -1$$ – теперь это УПД

$\exists$ $u(x,y) = C$, $(C\in\mathbb{R})$ – решение

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1/x^2 - y \Rightarrow u = \frac{-1}{x} - yx + C(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = y - x = -x + \frac{dC}{dy} \Rightarrow C'_y = y \Rightarrow C = \frac{y^2}{2} + A$$ $A\in\mathbb{R}$

Ответ: $\frac{-1}{x} - yx + \frac{y^2}{2} = C$, $C\in\mathbb{R}$

№4

$(2xy^2-3y^3)dx+(7-3xy^2)dy=0, \quad m=g(y)$

$m(x,y)$ – интегрирующий множитель

$$\frac{\partial(m(2xy^2-3y^3))}{\partial y}=\frac{\partial(m(7-3xy^2))}{\partial x}$$

$$\frac{\partial m}{\partial y}(2xy^2-3y^3)+m(4xy-9y^2)=$$

$$=\frac{\partial m}{\partial x}(7-3xy^2)$$

$\exists$ m – зависит только от y

$$m'(2xy^2-3y^3)=(6y^2-4xy)m$$

$$m'=\frac{6y^2-4xy}{2xy^2-3y^3}m \Leftrightarrow m'=\frac{-2}{y}m$$

$$m=C\cdot e^{\int\frac{-2}{y}dy}=C\cdot\frac{1}{y^2}$$

$$(2x-3y)dx+(7/y^2-3x)dy=0$$

$$\frac{\partial(2x-3y)}{\partial y}=-3 \quad \frac{\partial(7/y^2-3x)}{\partial x}=-3$$ это УПД

$\exists$ $u(x,y)=C$, $C\in\mathbb{R}$ – решение

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x-3y \Rightarrow u=x^2-3yx+C(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=7/y^2-3x=-3x+C' \Rightarrow C=\frac{-7}{y}+A,\ A\in\mathbb{R}$$

Ответ: $x^2-3yx-\frac{7}{y}=C,\ C\in\mathbb{R}$

№5 $(3y^2-x)dx+(2y^3-6xy)dy=0$

m - интегр. множитель $\dfrac{\partial(m\cdot(3y^2-x))}{\partial y}=\dfrac{\partial(m\cdot(2y^3-6xy))}{\partial x}$

$m'_x(2y^3-6xy)-m'_y(3y^2-x)=m(6y-(-6y))$

Пусть $\exists z(x,y)$: $m(z)$ - интегр. множитель

$m'_z(2y^3-6xy)\cdot z'_x-m'_z(3y^2-x)z'_y=12y\cdot m$

Заметим, что у нас было бы всего 2 различных слагаемых если $z'_x=const$
$z'_y=const\cdot y$

Пусть $z=x+y^2$ $\quad z'_x=1$ $\quad z'_y=2y$

$m'_z(2y^3-6xy-6y^3+2xy)=12ym$

$m'_z=\dfrac{12y}{-4y(x+y^2)}m=\dfrac{-3}{x+y^2}m=\dfrac{-3}{z}m$

$m=c\cdot e^{\int\frac{-3}{z}dz}=c\cdot z^{-3}=(x+y^2)^{-3}$

$\dfrac{3y^2-x}{(x+y^2)^3}dx+\dfrac{2y^3-6xy}{(x+y^2)^3}dy=0$

$\dfrac{\partial\left(\frac{3y^2-x}{(x+y^2)^3}\right)}{\partial y}=\dfrac{6y(x+y^2)^3-3(x+y^2)^2\cdot 2y(3y^2-x)}{(x+y^2)^6}=\dfrac{12y(x-y^2)}{(x+y^2)^4}$

$\dfrac{\partial\left(\frac{2y^3-6xy}{(x+y^2)^3}\right)}{\partial x}=\dfrac{-6y(x+y^2)^3-3(x+y^2)^2(2y^3-6xy)}{(x+y^2)^6}=\dfrac{12y(x-y^2)}{(x+y^2)^4}$

Пусть $u(x,y)=C$ $C\in\mathbb{R}$ - решение. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{3y^2-x}{(x+y^2)^3}\Rightarrow u=\dfrac{x-y^2}{(x+y^2)^2}+C(y)$

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{2y^3-6xy}{(x+y^2)^3}=\dfrac{-6xy}{(x+y^2)^3}+C'(y)\Rightarrow C=-\dfrac{2y^2+x}{2(x+y^2)^2}+A$

Ответ: $\dfrac{x-4y^2}{(x+y^2)^2}=C,\ C\in\mathbb{R}$

№6 $x\,dx + y\,dy + x(x\,dy - y\,dx) = 0$

$x\,dx - xy\,dx + y\,dy + x^2 dy = 0$

$(x - xy)dx + (y + x^2)dy = 0$

m – интегр. множитель $\dfrac{\partial(m(x-xy))}{\partial y} = \dfrac{\partial(m(y+x^2))}{\partial x}$

$m'_x(y+x^2) - m'_y(x - xy) = m(-x - 2x)$

Заметим, что если m зависит только от y:

$m'_y \cdot \dfrac{1}{m} = \dfrac{3}{1-y}$ ← зависит только от y.

$m' = \dfrac{3}{1-y} m \Rightarrow m = C \cdot e^{\int \frac{3}{1-y} dy} = C \cdot |y-1|^{-3}$

$\dfrac{-x}{(y-1)^2}dx + \dfrac{y+x^2}{(y-1)^3}dy = 0$

$\dfrac{\partial\left(\frac{-x}{(y-1)^2}\right)}{\partial y} = \dfrac{2x}{(y-1)^3}$ $\quad \dfrac{\partial\left(\frac{y+x^2}{(y-1)^3}\right)}{\partial} = \dfrac{2x}{(y-1)^3}$ – это УПД

$\exists\ u(x,y) = C,\ C \in \mathbb{R}$ – решение

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{-x}{(y-1)^2} \Rightarrow u = \int \dfrac{-x}{(y-1)^2}dx + C(y) = \dfrac{-x^2}{2(y-1)^2} + C(y)$

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{y+x^2}{(y-1)^3} = \dfrac{x^2}{(y-1)^3} + C'(y) \Rightarrow C'(y) = \dfrac{y}{(y-1)^3}$

$C(y) = \int \dfrac{y-1}{(y-1)^3}dy + \int \dfrac{1}{(y-1)^3}dy + A = \dfrac{-1}{y-1} - \dfrac{1}{2(y-1)^2} + A$

$= \dfrac{-2y + 2 - 1}{2(y-1)^2} + A = \dfrac{1-2y}{2(y-1)^2} + A$

Ответ: $\dfrac{1 - 2y - x^2}{2(y-1)^2} = C,\quad C \in \mathbb{R}$

№7 $y' = y^2 - 2e^x y + e^{2x} + e^x$

Найдём частное решение: $y = e^x$

Проверим: $e^x = e^{2x} - 2e^{2x} + e^{2x} + e^x \Leftrightarrow 0 = 0$ верное тождество

Сделаем замену $y = e^x + z(x)$

$\underline{e^x} + z'(x) = \underline{e^{2x}} + \cancel{2e^x z(x)} + z^2(x) \underline{- 2e^{2x}} - \cancel{2e^x z(x)} + \underline{e^{2x}} + \underline{e^x}$

$z' = z^2$

$\frac{dz}{dx} = z^2 \Leftrightarrow \int \frac{dz}{z^2} = \int dx \Leftrightarrow \frac{-1}{z} = x + C,\ C \in \mathbb{R}$

$z = \frac{-1}{x + C}$

Общее решение: $y = e^x - \frac{1}{x + C}$