Карасева М3235

№1 $y'' + 4y = 1/\sin 2x$

$y = e^{\lambda x}$ $y' = \lambda e^{\lambda x}$ $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$\lambda^2 e^{\lambda x} + 4e^{\lambda x} = 0$ (решение однородного $y''+4y=0$)

$\lambda^2+4=0$ $\lambda_1 = 2i$ $\lambda_2=-2i$

$y = C_1 \cdot e^{2ix} + C_2 \cdot e^{-2ix}$ (для однородного)

Метод вариации постоянных

$y = C_1(x) \cdot e^{2ix} + C_2(x) \cdot e^{-2ix}$ $C_1'(x) \cdot e^{2ix} + C_2'(x) \cdot e^{-2ix} = 0$

$y' = \underbrace{C_1'(x) \cdot e^{2ix} + C_2'(x) \cdot e^{-2ix}}_{0} + 2iC_1(x)e^{2ix} - 2iC_2(x)e^{-2ix}$

$y'' = 2iC_1'(x) \cdot e^{2ix} - 4C_1(x) \cdot e^{2ix} - 2iC_2'(x)e^{-2ix} - 4C_2 e^{-2ix}$

$2iC_1'(x) \cdot e^{2ix} - 4C_1(x) \cdot e^{2ix} - 2iC_2'(x)e^{-2ix} - 4C_2(x)e^{-2ix} + 4C_1(x)e^{2ix} + 4C_2(x)e^{-2ix} = \frac{1}{\sin 2x}$

$2iC_1'(x) \cdot e^{2ix} - 2iC_2'(x) \cdot e^{-2ix} = 1/\sin 2x$

$4iC_1'(x) \cdot e^{2ix} \underbrace{- 2iC_1'(x)e^{2ix} - 2iC_2'(x) \cdot e^{-2ix}}_{0} = \frac{1}{\sin 2x}$

$C_1'(x) = \frac{1}{4i \cdot e^{2ix} \cdot \sin 2x}$ $C_1' = \frac{-i(\cos(2x) - i\sin(2x))}{4\sin(2x)}$

$C_1 = -\frac{i\ln|\sin(2x)| + 2x}{8} + a_1$

$2iC_1'(x) \cdot e^{2ix} = \frac{1}{2\sin 2x} \Rightarrow -2iC_2'(x) \cdot e^{-2ix} = \frac{1}{2\sin 2x}$

$C_2'(x) = \frac{-1}{4i \cdot e^{-2ix} \cdot \sin 2x}$ $C_2' = \frac{i(i\sin 2x - \cos 2x)}{4\sin 2x}$

$C_2 = \frac{i\ln|\sin 2x| - 2x}{8} + a_2$

$y = \frac{-i\ln|\sin 2x| - 2x}{8} \cdot e^{2ix} + \frac{i\ln|\sin 2x| - 2x}{8} e^{-2ix} + a_1 e^{2ix} + a_2 e^{-2ix}$

$y(0+) = a_1 + a_2 = 0$

$y(\frac{\pi}{4}) = \frac{-\pi}{16} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} + \frac{-\pi}{16} \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} + a_1 e^{i\frac{\pi}{2}} + a_2 e^{-i\frac{\pi}{2}} = 4$

$y(\frac{\pi}{4}) = (\frac{-\pi}{16} + a_1) - (\frac{-\pi}{16} + a_2) = 4$

$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 - a_2 = 4 \end{cases}$ $a_1 = 2$ $a_2 = -2$

$y(\frac{\pi}{12}) = \frac{-i\ln\frac{1}{2} - \pi/6}{8}(\frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{i\ln\frac{1}{2} - \pi/6}{8}(\frac{-1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}) + i + \sqrt{3} - i + \sqrt{3}$

$\approx 1{,}79$

№2 $y''' - 8y'' + 16y' = 64(1 - x^2)$

$y(0) = 1/3$
$y'(0) = 5/2$
$y''(0) = -4$

$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 16\lambda = 0$

$\lambda_1 = 0 \quad \alpha(\lambda_1) = 1$

$\lambda_2 = 4 \quad \alpha(\lambda_2) = 2$

Решение одн. ур-я $y_0 = C_1 + C_2 e^{4x} + C_3 x e^{4x}$

$y = (ax^2 + bx + c)x = ax^3 + bx^2 + cx$

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

$y'' = 6ax + 2b$

$y''' = 6a$

$6a - 48ax - 16b + 48ax^2 + 32bx + 16c = 64 - 64x^2$

$x^2(48a + 64) + x(32b - 48a) + 6a - 16b + 16c - 64 = 0$

$a = -4/3$
$b = -2$
$c = 5/2$

$y = C_1 + C_2 e^{4x} + C_3 x e^{4x} + (-4/3 x^3 - 2x^2 + 5/2 x)$

$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 1/3 \\ y'(0) = 4C_2 + 5/2\, C_3 = 5/2 \\ y''(0) = 16C_2 + 8C_3 - 4 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1/3 \\ 4C_2 + C_3 = 0 \\ 16C_2 + 8C_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1/3 \\ C_2 = 0 \\ C_3 = 0 \end{cases}$

$y = 1/3 - 4/3 x^3 - 2x^2 + 5/2 x$

$y(1) = -1/2 = -0,5$

№5

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y + 10\cos t \\ \dot{y} = 3x \end{cases}$$

$x = 1/3\,\dot{y} \Rightarrow \dot{x} = 1/3\,\ddot{y} \Rightarrow \ddot{y} = -2\dot{y} + 3y + 30\cos t$

$$\ddot{y} + 2\dot{y} - 3y = 30\cos t$$

Решение однородного

$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \quad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -3$

$$y = C_1 e^{t} + C_2 e^{-3t}$$

Метод вариации постоянных

$$\begin{cases} C_1'(t)e^{t} + C_2'(t)e^{-3t} = 0 \\ C_1'(t)e^{t} - 3C_2'(t)e^{-3t} = 30\cos t \end{cases}$$

Метод Крамера:

$$\begin{vmatrix} e^{t} & e^{-3t} \\ e^{t} & -3e^{-3t} \end{vmatrix} = -4e^{-2t}; \quad \begin{vmatrix} 0 & e^{-3t} \\ 30\cos t & -3e^{-3t} \end{vmatrix} = -30\cos t\, e^{-3t}$$

$$\begin{vmatrix} e^{t} & 0 \\ e^{t} & 30\cos t \end{vmatrix} = 30\cos t\, e^{t}$$

$$C_1'(t) = \frac{-30\cos t \cdot e^{-3t}}{-4e^{-2t}} = \frac{15}{2}\cos t \cdot e^{-t} \Rightarrow C_1(t) = \frac{15}{4}(\sin t - \cos t)e^{-t} + C_3$$

$$C_2'(t) = \frac{30\cos t \cdot e^{t}}{-4e^{-2t}} = \frac{-15}{2}\cos t \cdot e^{3t} \Rightarrow C_2(t) = \frac{-3}{4}(\sin t + 3\cos t)e^{3t} + C_4$$

$$y(t) = \left(\left(\frac{15}{4}\sin t - \frac{15}{4}\cos t\right)e^{-t} + C_3\right)\cdot e^{t} + \left(\frac{-15}{20}e^{3t}(\sin t + 3\cos t) + C_4\right)e^{-3t} =$$

$$= C_3 e^{t} + C_4 e^{-3t} + 3\sin t - 6\cos t$$

$$x = 1/3\,\dot{y} = \frac{C_3}{3}\cdot e^{t} - \frac{3C_4}{3}e^{-3t} + \frac{3\cos t}{3} + \frac{6\sin t}{3} = \frac{C_3}{3}e^{t} - C_4 e^{-3t} + \cos t + 2\sin t$$

$r(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} C_1/3 - C_2 + 1 = 1 \\ C_1 + C_2 - 6 = -6 \end{cases} \qquad \begin{matrix} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{matrix}$

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + 2\sin\frac{\pi}{2} = 2$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\sin\frac{\pi}{2} - 6\cos\frac{\pi}{2} = 3$$

№4

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x - y + 3z \\ \dot{y} = -5x - 3y + 5z \\ \dot{z} = -x - 3y + z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & -1 & 3 \\ -5 & -3 & 5 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -5-\lambda & -1 & 3 \\ -5 & -3-\lambda & 5 \\ -1 & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_{2,3} = -2 \pm 2i \end{matrix}$$

$$\lambda = -3 \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -5 & 0 & 5 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -2+2i \quad \begin{pmatrix} -3-2i & -1 & 3 \\ -5 & -1-2i & 5 \\ -1 & -3 & 3-2i \end{pmatrix} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 3-i \\ 4-3i \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\lambda = -2-2i \quad \begin{pmatrix} -3+2i & -1 & 3 \\ -5 & -1+2i & 5 \\ -1 & -3 & 3+2i \end{pmatrix} \qquad X_3 = \begin{pmatrix} 3+i \\ 4+3i \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$Y = C_1 e^{-3t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{(-2+2i)t} \begin{pmatrix} 3-i \\ 4-3i \\ 5 \end{pmatrix} + C_3 e^{(-2-2i)t} \begin{pmatrix} 3+i \\ 4+3i \\ 5 \end{pmatrix} =$$

$$= C_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 3\cos 2t + \sin 2t \\ 4\cos 2t + 3\sin 2t \\ 5\cos 2t \end{pmatrix} + C_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} 3\sin 2t - \cos 2t \\ 4\sin 2t - 3\cos 2t \\ 5\sin 2t \end{pmatrix}$$

a) $$e^{(-2+2i)t} \begin{pmatrix} 3-i \\ 4-3i \\ 5 \end{pmatrix} = e^{-2t} (\cos 2t + i \sin 2t) \begin{pmatrix} 3-i \\ 4-3i \\ 5 \end{pmatrix} =$$

$$= e^{-2t} \begin{pmatrix} 3\cos 2t + \sin 2t \\ 4\cos 2t + 3\sin 2t \\ 5\cos 2t \end{pmatrix} + \underbrace{e^{-2t} \cdot i \begin{pmatrix} -\cos 2t + 3\sin 2t \\ -3\cos 2t + 4\sin 2t \\ 5\sin 2t \end{pmatrix}}_{\text{сократится с сопряженным}}$$

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 0 \\ 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}$$

№5 $\dot{x} = -x^3 + 3x^2 t - 3x t^2 + t^3 + 1$

решение $x = t$, $t \geq 0$

Замена $x = t + z(t) \Rightarrow x' = 1 + z'$

$$1 + z' = -(t+z)^3 + 3(t+z)^2 t - 3(t+z)t^2 + t^3 + 1$$

$$z' = -z^3$$

$$\frac{dz}{dt} = -z^3 \qquad \int \frac{dz}{z^3} = \int dt \qquad \frac{z^{-2}}{2} = t + C$$

$$2z^2 = \frac{1}{t+C} \qquad z = \frac{1}{\sqrt{2t+C}}$$

$$x = t + z = t + \frac{1}{\sqrt{2t+C}}$$

$x = t$

$\frac{1}{\sqrt{2t+C}} = 0 \Rightarrow C = 1$

$t_0 = 0$

$$|x(0) - \varphi(0)| = \left|\frac{1}{\sqrt{C}}\right| < \delta \qquad \frac{1}{\sqrt{C}} < \delta \Rightarrow C > \frac{1}{\delta^2}$$

$$|x(t) - \varphi(t)| = \left|\frac{1}{\sqrt{2t+C}}\right| < \varepsilon \qquad \frac{1}{\sqrt{2t+C}} < \varepsilon \Rightarrow 2t + C > \frac{1}{\varepsilon^2}$$

$$\exists\, \delta = \varepsilon \Rightarrow \underline{2t + \frac{1}{\varepsilon^2} > 2t + C > \frac{1}{\varepsilon^2}}, \text{ а т}$$

так как $t \geq 0 \Rightarrow$ это верно всегда $\Rightarrow$ устойчиво

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2t+C}}\right| \xrightarrow[t \to \infty]{} 0 \qquad \text{асимптотически устойчиво}$$

№6

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y - 7 \\ \dot{y} = -x + 5y - 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y - 7 = 0 \\ -x + 3y - 17 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = -2 \\ y = 3 \end{matrix}$$

$$x = x_1 - 2$$
$$y = y_1 + 3$$

$$\begin{cases} \dot{x} = x_1 - 2 + 3y_1 + 9 - 7 \\ \dot{y} = -x_1 + 2 + 3y_1 + 15 - 17 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = x_1 + 3y_1 \\ \dot{y} = -x_1 + 5y_1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 2 & V_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = 4 & V_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0 \Rightarrow \text{узел}$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 > 0$ $\Rightarrow$ неустой. узел