Дифф. уравнения
ДЗ №2

Карасева.
М3135

№1 $xy' = y(\ln y - \ln x)$ $x \neq 0.$

$y' = \frac{y}{x} \cdot \ln \frac{y}{x}.$

$z = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = zx \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \cdot x + \frac{dx}{dx} \cdot z$

$\frac{dz}{dx} \cdot x + z = z \cdot \ln z$

$\frac{dz}{dx} \cdot x = z \cdot \ln z - z$

$\frac{dz}{z\ln z - z} = \frac{dx}{x}$

Проверим: $z\ln z - z = 0.$
$z(\ln z - 1) = 0$
$\left[\begin{array}{l} z = 0. \Rightarrow y = 0 \quad y' = 0 \text{ - решение.} \\ z = e \Rightarrow y = ex \quad y' = e \text{ - решение} \end{array}\right.$

$\int \frac{dz}{z\ln z - z} = \int \frac{dx}{x}$

$\int \frac{dz}{z(\ln z - 1)} = \int \frac{dx}{x}$

$\int \frac{d(\ln z - 1)}{\ln z - 1} = \int \frac{dx}{x}.$

$\ln|\ln z - 1| = \ln|x| + C$

Ответ: $\ln|\ln y/x - 1| = \ln|x| + C.$

$y = 0.$
$y = ex.$

№2

$2x+3y-5+(3x+2y-5)y'=0$

$(2x+3y-5)dx+(3x+2y-5)dy=0$

Проверим:

$\frac{\partial(2x+3y-5)}{\partial y}=3$

$\frac{\partial(3x+2y-5)}{\partial x}=3$

Значит это у-ние в полных дифференциалах

$\exists\ u(x,y)=C$

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=2x+3y-5\\ \frac{\partial u}{\partial y}=3x+2y-5\end{cases}$$

$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+3y-5 \Rightarrow u(x,y)=\int(2x+3y-5)dx+C(y)$

$u(x,y)=\frac{1}{4}(2x+3y-5)^2+C(y)$

Тогда: $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{4}\cdot 2(2x+3y-5)\cdot 3+C'(y)=$

$=3/2(2x+3y-5)+C'(y)$

$3x+9/2\,y-15/2+C'(y)=3x+2y-5$

$C'(y)=-\frac{5}{2}y+5/2$

$C(y)=-\frac{5}{2}\int(y-1)dy=-\frac{5}{4}\cdot(y-1)^2+A$

Ответ: $\frac{1}{4}(2x+3y-5)^2-\frac{5}{4}(y-1)^2=A$

$\boxed{N 4}$

$$4y^6 + x^3 = 6xy^5y'$$

$$y' = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot x} y + \frac{x^2}{6} \cdot y^{-5}$$

$$I \quad z = y^6$$

$$z' = 6 \cdot y^5 \cdot y' \iff y^5 \cdot y' = \frac{z'}{6}$$

$$y' \cdot y^5 = \frac{2}{3x} \cdot y^6 + \frac{x^2}{6}$$

$$\frac{z'}{6} = \frac{2}{3x} \cdot z + \frac{x^2}{6} \quad / \cdot 6$$

$$z' = 4/x \cdot z + x^2$$

$$z = \left(C + \int x^2 \cdot e^{-\int 4/x \cdot dx} \cdot dx\right) \cdot e^{\int 4/x \, dx}$$

$$z = \left(C + \int x^2 \cdot e^{-4\ln|x|} \cdot dx\right) \cdot e^{4\ln|x|}$$

$$z = \left(C + \int x^2 \cdot x^{-4} \cdot dx\right) \cdot x^4$$

$$z = (C - x^{-1}) \cdot x^4$$

$$z = Cx^4 - x^3$$

$$y^6 = Cx^4 - x^3$$

$$y = \sqrt[6]{Cx^4 - x^3}$$

№6 жители $= y(t)$

по условию естественного прироста:

$$y' = ny + mt$$

$\exists$ $u = ny + mt \iff \frac{du}{dt} = ny' + m$

$$\frac{du}{dt} = nu + m$$

$$\int \frac{du}{nu+m} = \int dt$$

$$\frac{1}{n} \ln|nu+m| = t + c$$

$$\ln|nu+m| = nt + c$$

$$nu + m = c \cdot e^{nt}$$

$$n(ny+mt) + m = c \cdot e^{nt}$$

$$n^2 y + mnt + m = c \cdot e^{nt}$$

$$y(t) = c \cdot e^{nt} - \frac{mt}{n} - \frac{m}{n^2}$$

$\exists$ к моменту $t=0$ число жителей $= A_0$ и с этого момента начинается миграция

$$y(0) = C - \frac{m}{n^2} = A_0 \Rightarrow C = A_0 + \frac{m}{n^2}$$

До миграции функция была такой:

$$y(t) = \left(A_0 + \frac{m}{n^2}\right) \cdot e^{nt} - \frac{mt}{n} - \frac{m}{n^2}$$

А что изменится после начала миграции?

$$y'(t) = ny + mt + Rt = ny + \overbrace{(m+R)}^{\text{новой } m} t$$

Ответ: $y(t) = \left(A_0 + \frac{m+R}{n^2}\right) \cdot e^{nt} - \frac{(m+R)t}{n} - \frac{(m+R)}{n^2}$

$\boxed{N7}$ $\omega(t)$ - вес капли

$\omega'(t) = -m \Leftrightarrow \omega(t) = -mt + C$

$\omega(0) = C = M$

$\omega(t) = M - mt$

$F_{\text{воздуха}} = k v \cdot S$

γ - плотность жидкости

$$\frac{\omega(t)}{\gamma} = V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$R^3 = \frac{3\omega}{4\pi\gamma} \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3\omega}{4\pi\gamma}}$$

$$S = \cancel{2}4\pi R^2 = 4\pi\sqrt[3]{\frac{9\omega^2}{16\pi^2\gamma^2}} = \sqrt[3]{\frac{36\pi\omega^2}{\gamma^2}} =$$

$$= \underbrace{\sqrt[3]{\frac{36\pi}{\gamma^2}}}_{\substack{\parallel \\ A\text{ - константа}}}\omega^{2/3}$$

$$F = k \cdot v \cdot A \cdot \omega^{2/3}$$

$$v = 0 + \vec{a}t$$

$$\vec{a} = \frac{\omega(t)g - F}{\omega(t)} = g - \frac{k v \cdot A \cdot \omega^{2/3}}{\omega} = g - \frac{kvA}{\omega^{1/3}}$$

$$v = \left(g - \frac{kvA}{\omega^{1/3}}\right)t$$

$$v = gt - \frac{ktvA}{\omega^{1/3}} = gt - \frac{ktvA}{M - mt}$$

$$v\left(1 + \frac{kt}{M - mt}\right) = gt$$

$$v = \frac{gt(M - mt)}{M - mt + ktA}$$

Ответ: $v = \dfrac{gt(M - mt)}{M - mt + k \cdot \sqrt[3]{\frac{36\pi}{\gamma^2}} \cdot t}$