Самостоятельная

Карасева М3235

$\boxed{N 2}$ $y'' + y = \sin(x-1)$ $\quad y(0) = y'(0) = 0$

Решение однородного $\quad y'' + y = 0$

$\exists\ y = e^{\lambda x} \quad y' = \lambda e^{\lambda x} \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$\lambda^2 + 1 = 0 \qquad \lambda = \pm i$

$y = C_1 e^{ix} + C_2 \cdot e^{-ix}$

$y' = \underbrace{C_1' e^{ix} + C_2' \cdot e^{-ix}}_{=0} + iC_1 e^{ix} - iC_2 e^{-ix}$

$y'' = iC_1' e^{ix} - C_1 e^{ix} - iC_2' e^{-ix} - C_2 e^{-ix}$

$iC_1' e^{ix} - \cancel{C_1 e^{ix}} - iC_2' e^{-ix} - \cancel{C_2 e^{-ix}} + \cancel{C_1 e^{ix}} + \cancel{C_2 e^{-ix}} = \sin(x-1)$

$2iC_1' e^{ix} = \sin(x-1)$

$C_1' = \frac{\sin(x-1)}{2i e^{ix}} \qquad C_1 = \frac{ie^{i-2ix} - 2e^{-i}x}{8} + a_1$

$C_2' = \frac{-\sin(x-1) \cdot e^{ix}}{2i} \qquad C_2 = \frac{-ie^{2ix-i}}{8} - \frac{e^{i}x}{4} + a_2$

Ответ: $y = \frac{ie^{i-ix} - 2e^{ix-i} \cdot x}{8} - \frac{ie^{ix-i} + 2e^{i-ix}x}{8} + a_1 e^{ix} + a_2 e^{-ix}$

$\boxed{№3}$ $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}$

Решение $y'' - 3y' + 2y = 0$

$\exists \quad y = e^{\lambda x} \quad y' = \lambda e^{\lambda x} \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0. \qquad \lambda = 2$

$\lambda = 1$

$y = C_1 e^x + C_2 \cdot e^{2x}$

$y' = \underbrace{C_1' e^x + C_2' e^{2x}}_{=0} + C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}$

$y'' = C_1' e^x + C_1 e^x + 2C_2' e^{2x} + 4C_2 e^{2x}$

$C_1' e^x + \cancel{C_1 e^x} + 2C_2' e^{2x} \cancel{+ 4C_2 e^{2x}} \cancel{- 3C_1 e^x} \cancel{- 6C_2 e^{2x}} +$

$+ \cancel{2C_1 e^x} + \cancel{2C_2 e^{2x}} = \frac{1}{1+e^x}$

$C_2' e^{2x} = \frac{1}{1+e^x} \qquad C_2 = -\ln(e^x+1) + e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + x + a_1$

$C_1' e^x = \frac{-1}{1+e^x} \qquad C_1 = -\ln(e^x+1) + e^{-x} + x + a_2$

Ответ: $y = -e^x \ln(e^x+1) + xe^x + a_2 e^x - e^{2x}\ln(e^x+1) + e^x + xe^{2x} + a_1$

$\boxed{N4}$

$$\begin{cases} \dot{x} = y - z \\ \dot{y} = -y + z \\ \dot{z} = x - z \end{cases}$$

$$P \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1-\lambda-\lambda^2 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1-\lambda-\lambda^2 \\ -1-\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$1 - (-1-\lambda)(-1-\lambda-\lambda^2) = 0.$$

$$1 - (\lambda^2+\lambda+1)(\lambda+1) = 0$$

$$-\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda = 0. \Leftrightarrow -\lambda(\lambda^2+2\lambda+2) = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0. \\ \lambda_2 = -1+i \\ \lambda_3 = -1-i \end{cases}$$

$$\lambda_1 = 0: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_3. \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = X_1$$

$$\lambda_2 = -1+i \quad \begin{pmatrix} 1-i & 1 & -1 \\ 0 & -i & 1 \\ 1 & 0 & -i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 0 & -i & 1 \\ 1 & 0 & -i \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 \\ 1 & 0 & -i \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x_1 = i x_3 \\ x_2 = 1/i \, x_3 \\ x_3 = x_3 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} i \\ 1/i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot i = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} = X_2$$

$$\lambda_3 = -1 - i \quad \begin{pmatrix} 1+i & 1 & -1 \\ 0 & i & 1 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= -i x_3 \\ x_2 &= -1/i \, x_3 \\ x_3 &= x_3 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ i \end{pmatrix} = x_3$$

Ответ

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1+i} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1-i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ (-1+i)/4 & (1+i)/4 & -i/2 \\ (1+i)/4 & (-1+i)/4 & -i/2 \end{pmatrix}$$