Карасева М3235

Дифф. у-ние

Домашняя работа

(1) $x^2y'' - 4xy' + (6-x^2)y = 0$

] $y = az$, $y' = a'z + z'a$

$y'' = a''z + a'z' + z''a + z'a' = z''a + 2z'a' + a''z$

$x^2(az'' + 2a'z' + a''z) - 4x(a'z + az') + (6-x^2)az = 0$

коэф. перед. первой производной:

$2a'x^2 - 4xa = 0$

$a'x - 2a = 0 \Leftrightarrow a'x = 2a \Leftrightarrow \frac{da}{a} = \frac{2dx}{x}$

$\Leftrightarrow \ln a = 2\ln x + c \Leftrightarrow a = x^2$

$y = x^2z \Rightarrow y' = 2xz + x^2z'$

$y'' = 2z + 4xz' + x^2z''$

$x^2(2z + 4xz' + x^2z'') - 4x(2xz + x^2z') + (6-x^2)x^2z = 0$

$\cancel{2x^2z} + \cancel{4x^3z'} + x^4z'' - \cancel{8x^2z} - \cancel{4x^3z'} + \cancel{6x^2z} - x^4z = 0$

$x^4z'' - x^4z = 0.$

$z'' - z = 0$

(2) $(1+x^2)y'' + xy' + y = 0$

$\exists\ t = f(x) \Rightarrow y'_x = y'_t f'_x$

$y'_{xx} = y''_{tt}(f'_x)^2 + y'_t f''_{xx}$

Тогда:

$(1+x^2)(y''_{tt}(f'_x)^2 + y'_t f''_{xx}) + x y'_t f'_x + y = 0$

Коэфф. перед первой производной:

$f''_{xx}(1+x^2) + x f'_x = 0$

$\frac{f''}{f'} = \frac{-x}{1+x^2} \Leftrightarrow \ln|f'| = \frac{-1}{2}\ln|1+x^2|$

$f' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Leftrightarrow f = \ln|x+\sqrt{1+x^2}|$

$x = sh f \qquad f'' = \frac{-x}{(1+x^2)}$

$f' = \frac{1}{ch f} \qquad f'' = -\frac{sh f}{ch^3 f}$

$ch^2 f\left(y''_{tt}\cdot\frac{1}{ch^2 f} - y'_t\cdot\frac{sh f}{ch^3 f}\right) + sh f\cdot y'_t\cdot\frac{1}{ch f} + y = 0$

или $y''_{tt} + y = 0$.

③ $(1+x^2)y'' + 5xy' + 3y = 0$

$\exists\ y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n x^n,\ y' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n C_n x^{n-1}$

$y'' = \sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2}$

$(1+x^2)\sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + 5x\sum\limits_{n=1}^{\infty} n C_n x^{n-1} + 3\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n x^n =$

$= \sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + \sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} 5nC_n x^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} 3C_n x^n =$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)C_n x^n + \sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} 5nC_n x^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} 3C_n x^n =$

$= 2C_0 + 6C_1 x + 5C_1 x + 3C_0 + 3C_1 x + \sum\limits_{n=2}^{\infty}((n+2)(n+1) + n(n-1) + 5n + 3) \cdot C_n \cdot x^n$

$= 5C_0 + 14C_1 x + \sum\limits_{n=2}^{\infty}((n+2)(n+1) + n(n-1) + 5n + 3) \cdot C_n x^n$

$(n+1)(n+2)C_{n+2} + (n^2+4n+3)C_n = 0$

$(n+1)(n+2)C_{n+2} + (n+1)(n+3)C_n = 0$

$C_{n+2} = -\frac{n+3}{n+2} C_n$

Если $C_0 = 0$ $C_1 = 1$: $C_{2n} = 0$

$C_{2n+1} = \frac{-(2n+2)}{2n+1} \cdot \left(-\frac{2n}{2n-1}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{(-1)^{n+1} 2^{n+1} (n+1)!}{(2n+1)!!}$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(2n+1)!!} x^{2n+1}$ (1)

Если $c_0 = 1,\ c_1 = 0$, то $c_{2n+1} = 0$

$$c_{2n} = -\frac{2n+3}{2n+2}\left(-\frac{2n+1}{2n}\right)\cdot\frac{3}{2} = \frac{(-1)^n(2n+3)!!}{2^n(n+1)!}$$

Второй ряд: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+3)!!}{2^n(n+1)!} x^{2n}$ (2)

Общее решение представляет собой лин. комбинацию решений рядов (1) и (2)

Ответ: $C_1 \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(2n+1)!!} x^{2n+1} +$

$+ C_2 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+3)!!}{2^n(n+1)!} x^{2n}$

4) $(y')^2 - (y')^3 = y^2$

Пусть $y' = p \Rightarrow y^2 = p^2 - p^3$

$y = -\sqrt{p^2 - p^3} = -p\sqrt{1-p}$

$dy = p\,dx = -\sqrt{1-p} + \frac{p}{2\sqrt{1-p}} = \frac{3p-2}{2\sqrt{1-p}}$

$dx = \frac{3p-2}{2p\sqrt{1-p}}\,dp$

Ответ
$$\begin{cases} x = \int \frac{(3p-2)\,dp}{2p\sqrt{1-p}} = -3\sqrt{1-p} + \ln\frac{1+\sqrt{1-p}}{1-\sqrt{1-p}} + C \\ y = -p\sqrt{1-p} \end{cases}$$

Коши: $x = -3/2 \quad y = -3/8 \Rightarrow p^2 - p^3 = \frac{9}{64}$

$p_1 \approx -0{,}326 \quad p_2 \approx 0{,}575, \quad p_3 \approx 0{,}75$

1 не подходит.

$-1{,}5 = -0{,}398 + C_2 \ ; \ -0{,}401 + C_3 = -1{,}5 \quad C_{2,3} \approx -1{,}1$

(5) $xy'(y'+2)=y$

$y'=p$, $y=x(p^2+2p)$

$p\,dx = dy = (p^2+2p)dx + x(2p+2)dp$

$p(p+1)dx + 2x(p+1)dp = 0$

Если $p=-1$, то $y=-x$ – не подходит под нач. ус-вие

Значит $p \neq -1$

$p\,dx + 2x\,dp = 0$ $\qquad \frac{dx}{x} + \frac{2dp}{p} = 0.$

$\ln|x| + 2\ln|p| = \ln|C|$

$$\begin{cases} x = \frac{C}{p^2} \\ y = \frac{C(p+2)}{p} \end{cases}$$

Коши: $x=2$ $\quad y=-4.$

$C = 2p^2$

$-4 = 2p(p+2)$, $p^2+2p+2=0$ – нет решений