Дифф. ур-ние

Карасева М3255

$\boxed{№ 7.1}$

$(x - y^2)y' = 1$

$y^2y' - xy' + 1 = 0$

$y' = z \qquad \frac{dy}{dx} = z$

$y^2z - xz + 1 = 0$

$x = y^2 + \frac{1}{z}$

$dx = 2y\,dy - \frac{dz}{z^2} \quad |: dy$

$\frac{dx}{dy} = 2y - \frac{z'_y}{z^2}$

$\frac{1}{z} = 2y - \frac{z'_y}{z^2} \quad |\cdot z^2$

$z = 2yz^2 - z'_y$

$z' = (-1)\cdot z + 2y\cdot z^2$ ← урав-ние Бернули

$t = z^{-1}$

$t' = (-1)\cdot z^{-2}\cdot z'$

$z'\cdot z^{-2} = (-1)\cdot z^{-1} + 2y$

$-t' = -t + 2y \iff t' = t - 2y$ ← линейное

Метод Лагранжа

$t = C(y)\cdot e^{\int 1 dy} = C(y)\cdot e^y$

$t' = C'(y)\cdot e^y + e^y\cdot C(y) = e^y\cdot C(y) - 2y$

$C'(y) = \frac{-2y}{e^y} \qquad C(y) = (2(y+1)\cdot e^{-y} + C)$

$t = 2(y+1) + C \cdot e^y$

$t = \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{1}{2(y+1) + C \cdot e^y}$

$y' = \frac{1}{2(y+1) + C \cdot e^y}$

$\int (2(y+1) + C \cdot e^y)\, dy = \int dx$

$y^2 + 2y + C \cdot e^y = x + C_2$ ← Ответ

$\boxed{№ 7.2}$

$x - \frac{y}{y'} = \frac{2}{y}$

$z = y' = \frac{dy}{dx}$

$x = \frac{y}{z} + \frac{2}{y}$

$dx = \left(\frac{1}{z} - \frac{2}{y^2}\right) dy + \frac{-y}{z^2} dz$

$\cancel{\frac{1}{z}} = \cancel{\frac{1}{z}} - \frac{2}{y^2} - \frac{y}{z^2} \frac{dz}{dy}$

$\frac{2}{y^2} = \frac{-y}{z^2} z'_y \Leftrightarrow z' = \frac{-2z^2}{y^3}$

$\frac{dz}{dy} = \frac{-2z^2}{y^3} \Leftrightarrow \int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{-2}{y^3} dy$

$\frac{-1}{z} = \frac{1}{y^2} + C \Leftrightarrow z = \frac{y^2}{Cy^2 - 1}$

$y' = \frac{y^2}{Cy^2 - 1}$

$\int \frac{Cy^2 - 1}{y^2} dy = \int dx \Leftrightarrow Cy + \frac{1}{y} = x + C_2$

↑ Ответ

$\boxed{№7.4}$ $(xy^4-x)dx+(y+xy)dy=0$

$x=-1$ - особ. реш. $y^4-1=0$ $y=\pm1$ - особ. реш.

$x(y^4-1)dx+y(x+1)dy=0 \;\Big|: (x+1)(y^4-1)$

$\frac{x}{x+1}dx+\frac{y}{y^4-1}dy=0$ ← это УПД

$\exists\; u(x,y)=C,\; C\in\mathbb{R}$ - это решение

Тогда $u'_x=\frac{x}{x+1} \Rightarrow u=x-\ln|x+1|+C(y)$

$u'_y=\frac{y}{y^4-1}=C'(y)$

$C'(y)=\frac{y}{y^4-1}$

$C(y)=\frac{1}{4}\ln\frac{|y^2-1|}{y^2+1}$

Ответ: $x-\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln\frac{|y^2-1|}{y^2+1}=C,\; C\in\mathbb{R}$

$\boxed{№7.3}$ $y'+y=xy^3$

$y'=(-1)y+xy^3$ ← у-ние Бернулли

$z=\frac{1}{y^2} \Leftrightarrow z'=\frac{-2}{y^3}\cdot y'$ но заметим, что $y=0$ - реш

$y'=(-1)y+xy^3 \;\Big|\cdot\frac{-2}{y^3}$

$z'=\frac{2}{y^2}-2x=2z-2x.$ ← линейное

$z=C(x)\cdot e^{2x}$: $z'=C'e^{2x}+2e^{2x}\cdot C=2\cdot C\cdot e^{2x}-2x.$

$C'=\frac{-2x}{e^{2x}}$ $\quad C=\frac{2x+1}{2e^{2x}}+C$

$z=\frac{2x+1}{2}+C\cdot e^{2x}$

$\frac{1}{y^2}=x+\frac{1}{2}+C\cdot e^{2x}.$

$\boxed{N 7.6}$ $y''\cos y + (y')^2 \cdot \sin y = y'$

$z(y) = y' \Rightarrow y'' = z' / y' = z'/z$

$z'/z \cos y + z^2 \sin y = z$

$z' \cos y + z^3 \sin y = z^2$

$z' = (-\mathrm{tg}\, y) z + 1 \Leftarrow$ линейное

$z = C(y) \cdot e^{\int -\mathrm{tg} y\, dy} = C(y) \cdot e^{\ln|\cos y|} = C(y) \cdot |\cos y|$

$z' = C'(y) \cdot |\cos y| + C(y) \cdot \frac{\cos y}{|\cos y|} \cdot -\sin y = -\mathrm{tg}\, y \frac{C(y)|\cos y|}{} + 1$

$C'(y) = \frac{1}{|\cos y|} \Leftrightarrow C(y) = \frac{\cos y \cdot \ln(\mathrm{tg}\, y + \frac{1}{\cos y})}{|\cos y|} + A$

$z = \cos y \cdot \ln(\mathrm{tg}\, y + \frac{1}{\cos y}) + A|\cos y|$

$y' = \cos y \cdot \ln(\mathrm{tg}\, y + \frac{1}{\cos y}) + A|\cos y|$

$\int \frac{dy}{\cos y \cdot \ln(\mathrm{tg}\, y + 1/\cos y)} = \int dx$

$\ln(\ln(\mathrm{tg}\, y + \frac{1}{\cos y})) = x + C$

$\ln(\mathrm{tg}\, y + \frac{1}{\cos y}) = C \cdot e^x$

$\mathrm{tg}\, y + \frac{1}{\cos y} = e^{C \cdot e^x}$