Дифф. уравнение

Карастра М32235

$\boxed{№1}$

$$2y' = x + \ln y'$$

$$y' = z \Leftrightarrow z = \frac{dy}{dx}$$

$$2z = x + \ln z$$

$$2dz = dx + \frac{dz}{z} \quad \Big| \cdot z$$

$$2z\,dz = dy + dz$$

$$\int (2z - 1)\,dz = \int dy$$

$$z^2 - z = y + C \Leftrightarrow y = z^2 - z + C, \; C \in \mathbb{R}$$

$$x = 2z - \ln z$$

Ответ: $\begin{cases} x = 2z - \ln z \\ y = z^2 - z + C, \; C \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\boxed{№2}$

$$4y = x^2 + (y')^2$$

$$y = x^2/4 + (y')^2/4 \quad] \; y' = z \Leftrightarrow dy = z\,dx$$

$$y = x^2/4 + z^2/4$$

$$dy = \frac{x\,dx}{2} + \frac{z\,dz}{2}$$

$$2z\,dx = x\,dx + x\,dz$$

$$\underbrace{(2z - x)}_{p(x,z)}\,dx + \underbrace{(-x)}_{q(x,z)}\,dz = 0$$

$$p'_z = 2 \quad q'_x = -1$$

ищем интегрирующий множитель:

$$m'_z(2z - x) + 2m = m'_x(-x) - m$$

$$m'_z(2z - x) + x \cdot m'_x = -3m$$

Заметим, что $\frac{-3}{x}$ — зависит только от x

Значит $m(x)$

$x m' = -3m$

$m' = \frac{-3}{x} m$

$m = C \cdot e^{-3\int \frac{dx}{x}} = x^{-3}$

$\frac{2z - x}{x^3} dx + \frac{-1}{x^2} dz = 0$ - это УПД

$\exists\ u(x, z) = C$ - это решение

$u'_z = \frac{-1}{x^2} \Leftrightarrow u = \frac{-z}{x^2} + C(x)$

$u'_x = \frac{2z - x}{x^3} = \frac{2z}{x^3} + C'(x)$

$C' = \frac{-1}{x^2}. \quad C = \frac{1}{x} + A, \ A \in \mathbb{R}$

$\frac{-z}{x^2} + \frac{1}{x} = C$

$z = x^2 (C - \frac{1}{x})$

$y' = x^2 (C - 1/x)$

$\int dy = \int x^2 (C - 1/x) dx$

$y = \frac{C x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C_2 \quad , \ C, C_2 \in \mathbb{R}$

$\boxed{N3}$ $y' = tg(y-2x)$

$z \Rightarrow y - 2x \iff dz = dy - 2dx \iff$

$\iff dy = dz + 2dx \iff \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} + 2$

$z' + 2 = tg\, z$

$z' = tg\, z - 2$

$$\int \frac{dz}{tg\, z - 2} = \int dx$$

$$\frac{\ln(tg\, z - 2) - \ln\left(\frac{1}{\cos z}\right) - 2z}{5} = x$$

$$\ln(tg(y-2x) - 2) - \ln\left(\frac{1}{\cos(y-2x)}\right) - 2y + 4x = 5x$$

Ответ: $\ln(tg(y-2x)-2) - \ln\left(\frac{1}{\cos(y-2x)}\right) - 2y - x = 0$

$\boxed{N4}$ $yy' + xyy'' = x(y')^2 + x^3$

$y = e^{1/2 z}$ $\quad y' = e^{1/2 z} \cdot 1/2 \cdot z'$ $\quad y'' = e^{1/2 z} \cdot 1/4 z' \cdot z' + z'' e^{1/2 z} \cdot 1/2$

$$e^{1/2 z} \cdot e^{1/2 z} \cdot 1/2 z' + x \cdot e^{1/2 z} \cdot e^{1/2 z} \left(1/4 (z')^2 + 1/2 z''\right) = x \cdot e^{z} \cdot 1/4 \cdot (z')^2 + x^3$$

$$1/2 z' + \cancel{1/4\, x (z')^2} + 1/2\, x z'' = \cancel{1/4\, x (z')^2} + x^3$$

$xz'' + z' = 2x^3$

$t = z' \qquad z'' = t'$

$xt' + t = 2x^3$

$t' = \frac{-1}{x} t + 2x^2$ - линейное у-ние

$$t = \left(C + \int 2x^2 \cdot e^{-\int \frac{-1}{x} dx} dx\right) e^{\int \frac{-1}{x} dx} =$$

$$= \left(C + \frac{x^4}{2}\right) \cdot \frac{1}{x} = \frac{C}{x} + \frac{x^3}{2}$$

$$z' = \frac{c}{x} + \frac{x^3}{2}$$

$$z = c\ln x + \frac{x^4}{8} + c_2 \quad (z = 2\ln y)$$

$$2\ln y = c\ln x + \frac{x^4}{8} + c_2$$

Ответ: $y = e^{c\ln x + \frac{x^4}{16} + c_2}$

$\boxed{N5}$ $2xy' - y = y'\ln(yy')$

$$y' = z \iff z = \frac{dy}{dx}$$

$$2zx = z\ln yz + y$$

$$x = \frac{\ln yz}{2} + \frac{y}{2z}$$

$$dx = \left(\frac{z}{2yz} + \frac{1}{2z}\right)dy + \left(\frac{y}{2yz} - \frac{y}{2z^2}\right)dz$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2y} + \frac{1}{2z} + \left(\frac{1}{2z} - \frac{y}{2z^2}\right)\frac{dz}{dy}$$

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{2z} - \frac{1}{2y} = \frac{z-y}{2z^2}\, z'_y$$

$$\frac{\cancel{y-z}}{2yz} \cdot \frac{2z^2}{\cancel{z-y}} = z'_y$$

$$z' = \frac{-1}{y}\, z$$

$$z = c \cdot e^{\int \frac{-1}{y}dy} = c \cdot \frac{1}{y}$$

$$y' = \frac{c}{y} \iff \int \frac{y\,dy}{c} = \int dx$$

$$c \cdot y^2 = x + c_2$$

Ответ: $c \cdot y^2 = x + c_2, \quad c, c_2 \in \mathbb{R}$

$\boxed{№6}$ $y = 2xy' + y^2 (y')^3$

$y' = z$

$2zx = y - y^2 z^3$

$x = \frac{y}{2z} - \frac{y^2 z^2}{2}$

$dx = \left(\frac{1}{2z} - yz^2\right)dy + \left(\frac{-y}{2z^2} - y^2 z\right)dz$

$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2z} - yz^2 + \left(\frac{-y}{2z^2} - y^2 z\right)\frac{dz}{dy}$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{2z} - yz^2 - \left(\frac{y + 2y^2 z^3}{2z^2}\right) z'_y$

$\frac{1 + 2yz^3}{2z} = -\frac{y(1 + 2yz^3)}{2z^2} z'_y$

$\frac{1 + 2yz^3}{2z} \cdot \frac{2z^2}{(-y)\cdot(1 + 2yz^3)} = z'_y$

$z'_y = \frac{-1}{y} z$

$z = C \cdot e^{\int -\frac{1}{y} dy} = C \cdot \frac{1}{y}$

$y' = \frac{C}{y}$

$\int \frac{y\,dy}{C} = \int dx$

$C \cdot y^2 = x + C_2$

Ответ: $Cy^2 = x + C_2$, $C, C_2 \in \mathbb{R}$

$\boxed{N7}$ $y + xy' = 4\sqrt{y'}$

$\sqrt{y'} = z \qquad y' = z^2 = \frac{dy}{dx}$

$xz^2 = 4z - y \iff x = \frac{4}{z} - \frac{y}{z^2}$

$dx = \frac{-1}{z^2}dy + \left(\frac{-4}{z^2} + \frac{2y}{z^3}\right)\cdot dz$

$\frac{dx}{dy} = \frac{-1}{z^2} + \frac{2y-4z}{z^3} \cdot \frac{dz}{dy}$

$\frac{1}{z^2} = \frac{-1}{z^2} + \frac{2(y-2z)}{z^3}\frac{dz}{dy}$

$\frac{dz}{dy} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{z^2}} \cdot \frac{z^{\cancel{3}}}{\cancel{2}(y-2z)}$

$(y-2z)\,dz = z\,dy$

$\underset{p(y,z)}{z}\,dy + \underset{q(y,z)}{(2z-y)}\,dz = 0$

$p'_z = 1 \qquad q'_y = -1$

Ищем интегрирующий множитель

$m'_z \cdot z + m = m'_y(2z-y) - m$

$m'_y(2z-y) - m'_z \cdot z = 2m$

Заметим, что $\frac{2}{-z}$ – зависит только от z

значит, $m(z)$

$m' = \frac{-2}{z}m \Rightarrow m = c\cdot e^{\int \frac{-2}{z}dz} = \frac{1}{z^2}$

$\frac{1}{z}dy + \frac{2z-y}{z^2}dz = 0$ – это УПД

$\exists\ u(y,z) = C,\ C \in \mathbb{R}$ – это решение

$u'_y = \frac{1}{z} \Leftrightarrow u = y/z + C(z)$

$u'_z = \frac{2z - y}{z^2} = \frac{-y}{z^2} + C'(z)$

$C'(z) = \frac{2}{z} \Leftrightarrow C = 2\ln z + A, \; A \in \mathbb{R}$

Решение: $y/z + 2\ln z = C$

$y = -2z\ln z + C\cdot z$

$x = \frac{4}{z} + \frac{2z\ln z + C\cdot z}{z^2} = \frac{4}{z} + \frac{2\ln z + C}{z} =$

$= \frac{2\ln z + (C+4)}{z}$

Ответ: $\begin{cases} y = -2z\ln z + C\cdot z \\ x = \frac{2\ln z + (C+4)}{z} \end{cases}$