КАРАСЕВА М3235

ВЕКL

(В) Порог, что $\text{Б}(n,p) \ni a \vdots 2$

Решение: Введём с.в. X - кол-во чётных чисел в мн-ве и индикаторную с.в. $X_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in \text{Б}(n,p) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$$EX = \sum_{\substack{i \vdots 2 \\ i<n}} EX_i = \frac{n}{2} p$$

Порог $t = \frac{1}{n}$

теперь докажем

Докажем, что:

1) если $p = o(1/n) \Rightarrow p(X \geq 1) \to 0$

2) если $p = \omega(1/n) \Rightarrow p(X \geq 1) \to 1$

Д-во:

1) $p = o(1/n) \Rightarrow p = \frac{\alpha(n)}{n}$ — $\alpha(n) \to 0$ бесконечно малое

$$EX = \frac{n}{2} \cdot \frac{\alpha(n)}{n} = \frac{1}{2} \alpha(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

По лемме $EX \to 0 \Rightarrow p(X=0) \to 1 \Rightarrow p(X \geq 1) \to 0$ чтд.

2) По лемме $p(X=0) \leq \frac{DX}{(EX)^2}$

Δ $\frac{DX}{(EX)^2} = \frac{EX^2}{(EX)^2} - 1$

$$EX^2 = \sum_{\substack{i,j<n \\ i \vdots 2,\ j \vdots 2}} E[X_i \cdot X_j]$$

а) $i = j$ $\sum_{\substack{i \vdots 2 \\ i<n}} EX_i^2 \overset{\text{т.к. индикаторная}}{=} \sum EX_i = EX = \frac{np}{2}$

б) $i \neq j$ $\sum_{\substack{i,j<n \\ i \neq j \vdots 2}} EX_i \cdot X_j = \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cdot p^2 \sim \frac{n^2 p^2}{4}$

$$\frac{EX^2}{(EX)^2} = \frac{\frac{np}{2} + \frac{n^2p^2}{4}}{\frac{n^2p^2}{4}} = \frac{2}{np} + 1 = \left[\begin{array}{l} p = \omega(1/n) \Rightarrow \\ \Rightarrow p = \frac{\beta(n)}{n},\ \beta(n) \to \infty \end{array} \right] =$$

$$= \frac{2}{\frac{n \cdot \beta(n)}{n}} + 1 = \frac{2}{\beta(n)} + 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$0 \leq p(X=0) \leq \frac{DX}{(EX)^2} = \frac{EX^2}{(EX)^2} - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow p(X=0) \to 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow p(X \geq 1) \to 1$

чтд

(E) Порог, что $G(n,p)$ содержит $x, y, z \le n$ т.е. $(x+y) \% n = z$. КАРАСЕВА М3235

Решение. Введём с.в. X - кол-во подходящих троек и индикаторную с.в. X_{ijk} $\begin{cases} 1, \text{ если } G(n,p) \supset i\,j\,k \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$

$$EX = \sum EX_{ijk} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{выбрали } i}}{n} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{выбрали } j}}{n} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{однозначно} \\ \text{определяется } k}}{1} \cdot p^3 \sim n^2 p^3$$

Порог $t = \frac{1}{n^{2/3}}$

Докажем, что: 1) если $p = o(\frac{1}{n^{2/3}}) \Rightarrow p(X \ge 1) \to 0$
2) если $p = \omega(1/n^{2/3}) \Rightarrow p(X \ge 1) \to 1$

Д-во: 1) $p = o(\frac{1}{n^{2/3}}) \Rightarrow p = \frac{\alpha(n) \to 0}{n^{2/3}}$

$$EX = n^2 \cdot \frac{(\alpha(n))^3}{n^2} = (\alpha(n))^3 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \overset{\text{по Маркову}}{\Rightarrow} p(X=0) \to 1 \to p(X \ge 1) \to 0$$ ч.т.д.

2) по лемме $p(X=0) \le DX/(EX)^2 = EX^2/(EX)^2 - 1$

Δ $EX^2 = \sum E[X_{ijk} \cdot X_{i'j'k'}]$

(а) тройки не имеют одинак. чисел

$$n \cdot n \cdot p^3 \cdot \underset{\wedge}{(n-3)} \cdot (n-3) \cdot p^3 \sim n^4 p^6$$

на самом деле здесь может быть $n-2$, если в первой тройке i и j совпадают, но так как нас интересует коэффициент перед старшей степенью n^4 для расчета пределов, мы можем опустить комбинаторные тонкости

б) тройки имеют 1 общее число

Т.к. нам надо выбирать уже только 3 числа комбинаторно посчитанный многочлен будет иметь старшую степень n^3 с каким-то коэффициентом c_1, который точно высчитывать не имеет смысла в пределе дальше будет понятно почему. $\sim c_1 n^3 p^6$

в) тройки имеют 2 общих числа (и автомат.-ки полностью совпадают)

$$n \cdot n \cdot p^3 \cdot p^3 = n^2 \cdot p^6$$

$$\frac{EX^2}{(EX)^2} = \frac{n^4p^6 + c_1 n^3 p^6 + n^2 \cdot p^6}{n^4 p^6} = 1 + \underset{\to 0}{\frac{c_1}{n}} + \underset{\to 0}{\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$0 \le p(X=0) \le \frac{DX}{(EX)^2} = \frac{\overset{\to 1}{EX^2}}{(EX)^2} - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow p(X=0) \to 0 \Rightarrow p(X \ge 1) \to 1$$ ч.т.д.

Карасева M3235

(K) $G(n,n,p) \supset$ 

Решение: Введём с.в. X - кол-во  и индикаторную с.в. $X^{a}_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если в } G(n,n,p) \supset a_i, a_j, a_k \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$$EX = \sum EX^{a}_{ijk} = \underset{\text{симметричность отн-но долей}}{2} \cdot n \cdot \binom{n}{3} \cdot p \sim \frac{1}{3} n^4 p^3$$

Тогда порог $t = \dfrac{1}{n^{4/3}}$

Докажем, что: а) $p = o(1/n^{4/3}) \Rightarrow p(X \geq 1) \to 0$

б) $p = \omega(1/n^{4/3}) \Rightarrow p(X \geq 1) \to 1$

а) $p = o(1/n^{4/3}) \Rightarrow p = \dfrac{\alpha(n)}{n^{4/3}}$, $\alpha(n) \to 0$ - зело малое

$$EX = 2 \cdot n \cdot \binom{n}{3} \cdot \frac{(\alpha(n))^3}{n^4} = \frac{2}{3!} \cdot (\alpha(n))^3 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0, \quad \alpha(n) \to 0$$

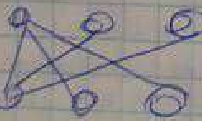
по лемме: $EX \to 0 \Rightarrow p(X=0) \to 1 \Rightarrow p(X \geq 1) \to 0$ чтд

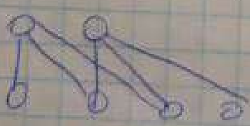
б) по лемме $p(X=0) \leq \dfrac{DX}{(EX)^2} = \dfrac{EX^2}{(EX)^2} - 1$

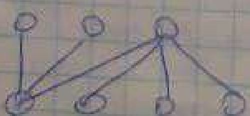
$\angle\ EX^2 = \sum E[X^{a}_{ijk} \cdot X^{a'}_{i'j'k'}]$

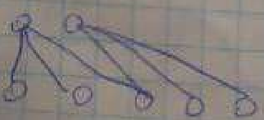
① $\overset{a}{ijk} = \overset{a'}{i'j'k'}$ $\quad 2n \cdot \binom{n}{3} \cdot p^3 \sim \dfrac{n^4 p^3}{3}$

②  выбираем 5 вершин, вероятность для 6 ребер $\sim C_1 n^5 p^6$ (какая-то константа)

③  6 вершин, 5 ребер $\sim C_2 n^6 p^5$

④  6 вершин, 6 ребер $\sim C_3 n^6 p^6$

⑤  7 вершин, 6 ребер. $\sim C_4 n^7 p^6$

⑥  7 вершин, 6 ребер. $\sim C_5 n^7 p^6$

⑦  абсолютно независимые лапы

$$2n \cdot \binom{n}{3} \cdot p^3 \cdot \left((n-1) \cdot \binom{n-3}{3} + (n-3) \cdot \binom{n-1}{3}\right) \cdot p^3 \sim \frac{n^8 p^6}{9}$$

$$\frac{EX^2}{(EX)^2} = \frac{\frac{n^8 p^6}{9} + \frac{n^4 p^3}{3} + C_1 n^5 p^6 + C_2 n^6 p^5 + C_3 n^6 p^6 + C_4 n^7 p^6 + C_5 n^7 p^6}{\frac{n^8 p^6}{9}} \to 1$$

$0 \leq p(X=0) \leq \dfrac{DX}{(EX)^2} = \dfrac{EX^2}{(EX)^2} - 1 \to 0 \Rightarrow p(X \geq 1) \to 1$ чтд.

(4) X = кол-во клозов, значения которых = 0.

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й клоз} = 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$EX = \sum EX_i = m \cdot EX_i = m \cdot \left(\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) =$$

↑общее число клозов

n – общее число литералов

если $n \to \infty$ $EX = \dfrac{m}{8}$.

А значит мат. ожидание числа клозов, которые = 1

равно 7/8