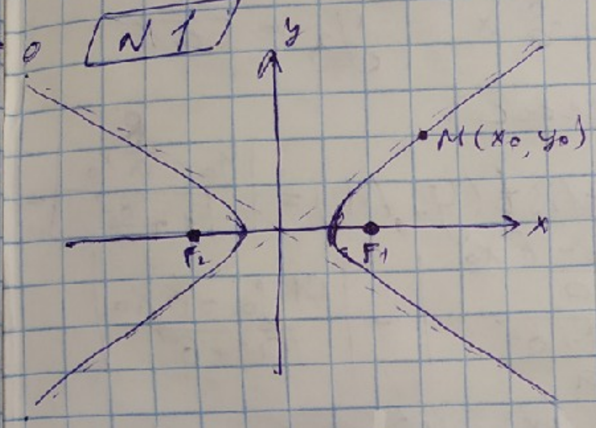
Домашнее задание №6

Прямая и п-ть в п-ве

$\boxed{№1}$



Дано: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

асимптоты: $y = \pm \frac{b}{a} x$

$y_1 = \frac{b}{a} x \qquad y_2 = -\frac{b}{a} x$

$$dist(y_1, M) = \left| \frac{y_0 - \frac{b}{a} x_0}{\sqrt{1^2 + \frac{b^2}{a^2}}} \right|$$

$$dist(y_2, M) = \left| \frac{y_0 + \frac{b}{a} x_0}{\sqrt{1^2 + \frac{b^2}{a^2}}} \right|$$

$$dist(y_1, M) \cdot dist(y_2, M) = \left| \frac{\left(y_0 - \frac{b}{a} x_0\right)\left(y_0 + \frac{b}{a} x_0\right)}{1^2 + \frac{b^2}{a^2}} \right| =$$

$$= \left| \frac{y_0^2 - \frac{b^2}{a^2} x_0^2}{1^2 + \frac{b^2}{a^2}} \right|$$

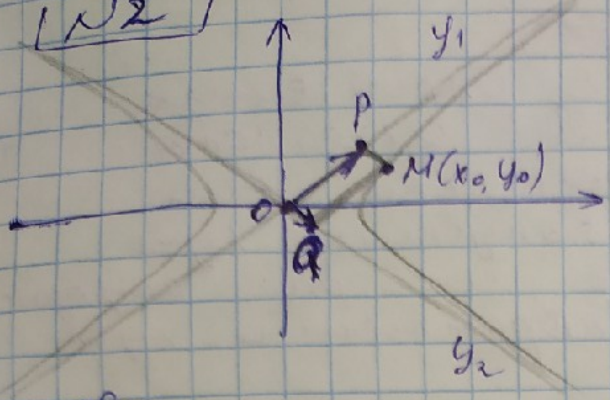
$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \rightarrow x_0^2 = \frac{a^2 b^2 + y_0^2 a^2}{b^2}$$

$$\left| \frac{y_0^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^2 \cdot b^2 + y_0^2 a^2}{b^2}}{1 + \frac{b^2}{a^2}} \right| = \left| \frac{y_0^2 - b^2 - y_0^2}{1 + \frac{b^2}{a^2}} \right| = \frac{b^2}{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

Таким образом, полученное произведение не зависит от x_0, y_0 ⇒ одинаково для любой точки и равно

$$\frac{b^2}{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

|N2|



$S_{\square} = |\vec{OP}| \cdot dist(y_1, M) =$

$= |\vec{OQ}| \cdot dist(y_2, M) \Rightarrow$

$\Rightarrow S^2_{\square} = |\vec{OP}| \cdot |\vec{OQ}| \cdot dist_1 \cdot dist_2$

$S^2_{\square} = |\vec{OP}| \cdot |\vec{OQ}| \cdot \sin\varphi \cdot \frac{dist_1 \cdot dist_2}{\sin\varphi}$

φ - угол между асимптотами

$S^2_{\square} = S_{\square} \cdot \frac{dist_1 \cdot dist_2}{\sin\varphi}$

$S_{\square} = \frac{dist_1 \cdot dist_2}{\sin\varphi}$

найдём $\sin\varphi$: $y_1 - \frac{b}{a}x = 0$ $\quad y_2 + \frac{b}{a}x = 0$

$\vec{S}_1 = \{1, -\frac{b}{a}\}$ $\quad \vec{S}_2 = \{1, \frac{b}{a}\}$

$\vec{S}_1 \times \vec{S}_2 = \{0, 0, \frac{2b}{a}\} \Rightarrow |\vec{S}_1 \times \vec{S}_2| = \frac{2b}{a}$

$|\vec{S}_1| = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$; $|\vec{S}_2| = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$

$\sin\varphi = \frac{|\vec{S}_1 \times \vec{S}_2|}{|\vec{S}_1| \cdot |\vec{S}_2|} = \frac{\frac{2b}{a}}{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\frac{2b}{a}}{\frac{a^2+b^2}{a^2}} = \frac{2ba}{a^2+b^2}$

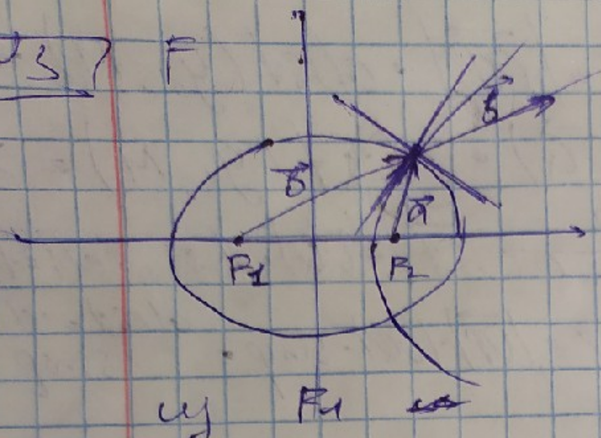
$dist_1 \cdot dist_2 = \frac{b^2}{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$

(из N1)

$S_{\square} = \frac{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}{\frac{2ab}{a^2+b^2}} = \frac{ab}{2}$

Ответ: $\frac{ab}{2}$

№3 F



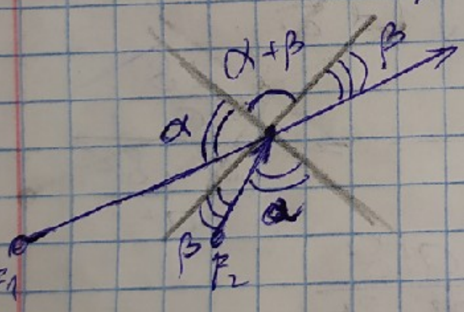
Из оптических св-в гиперболы следует, что если мы выпустим луч из F_2 то он отразится на продолжении луча из F_1

А из оптических св-в эллипса знаем, что луч из одного фокуса отразится в другом фокусе

для эллипса

для гиперболы

Теперь обсудим нормали развернутый угол:



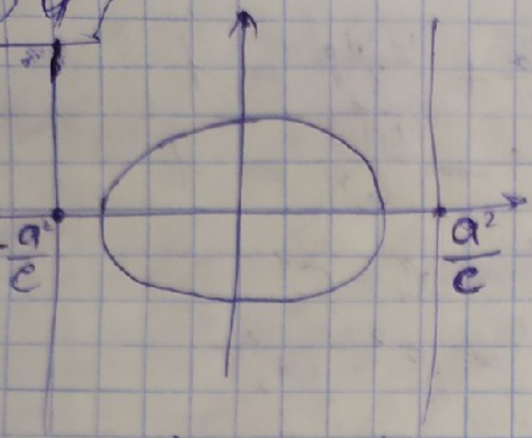
$$\alpha + (\alpha+\beta) + \beta = 180^\circ$$

$$2(\alpha+\beta) = 180^\circ$$

$$\alpha+\beta = 90^\circ$$

$(\alpha+\beta)$ – и есть угол между касательными

№4



$$d = \frac{a^2}{c}$$

$$c = a^2/d$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

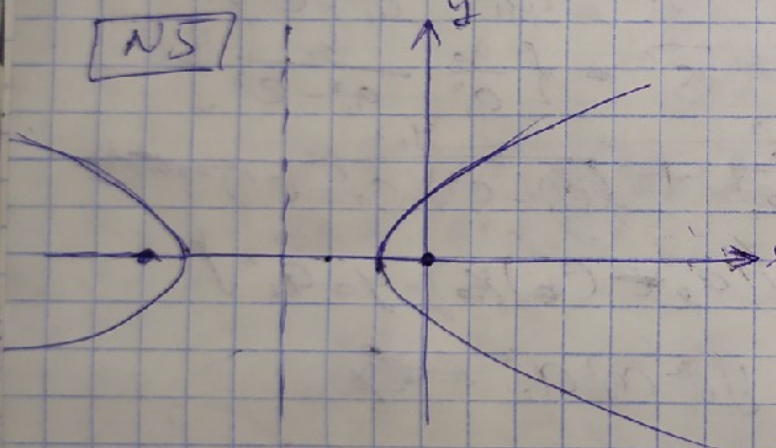
$$a^4/d = a^2 + b^2$$

$$b^2 = a^4/d - a^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^4/d - a^2} = 1$$ — это и есть искомое семейство, где a — параметр.

$$x^2 + \frac{y^2}{a^2/d - 1} = a^2$$

№5



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$ — обыч. гипер. сместим ее на вектор $\{-c, 0\}$

$$\frac{(x+c)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\frac{\left(x + \sqrt{a^2 + b^2}\right)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

— это и есть искомое семейство, где a, b — параметры.