Домашняя работа КАРАСЕВА М3135

Линейные подпространства

Задача 1.

(1) множество векторов n-мер, имеющих угол $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ с данной прямой.

] $\vec{a}, \vec{b}$ – вектора имеющие угол $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ с нашей прямой, тогда $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ этот вектор всегда лежит гр-но между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ → $\vec{c}$ тоже составляет с данной прямой угол $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

– это линейное подпр-во

(2) множество вырожденных матриц $\det A=0$

] $A=\begin{pmatrix}3&6\\4&8\end{pmatrix}$ $\det A=0$ $B=\begin{pmatrix}1&3\\4&12\end{pmatrix}$ $\det B=0$

$C=A+B=\begin{pmatrix}4&9\\8&20\end{pmatrix}$ $\det C=80-72=8$

– это множество не является лин подпространством

(3) Множество однородных многочленов, степени не выше n

] $A=\alpha_1 x^{k_1} y^{n-k_1}+\alpha_2 x^{k_2} y^{n-k_2} \dots$

$B=\beta_1 x^{m_1} y^{n-m_1}+\beta_2 x^{m_2} y^{n-m_2} \dots$

$= A+B = \alpha_1 x^{k_1} y^{n-k_1} + \beta_1 x^{m_1} y^{n-m_1} + \alpha_2 x^{k_2} y^{n-k_2} + \beta_2 x^{m_2} y^{n-m_2} + \ldots$

т.к все слагаемые в исходных многочленах были однородны, то и в многочлене, являющимся результатом их суммы, все эти же слагаемые так же будут однородны

– это линейное подпрос-во

(4) множество функций, таких что:

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ (если a - для всех одинаково)

$\exists f(x) : \lim_{x \to a+} f(x) = \infty$ $g(x) : \lim_{x \to a+} g(x) = \infty$

тогда $\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = \infty + \infty = \infty$

– это линейное подпрост-во.

(5) множество функций монотонно возрастающих на $[a, b]$

$\exists f(x) \nearrow$ на $[a, b]$ и $g(x) \nearrow$ на $[a, b]$

Значит $f'(x)$ на $[a, b] > 0$ и $g'(x)$ на $[a, b] > 0$

$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) + g(x)$ – моно возрастает на $[a, b]$

– это линейное подпространство.

Задание №2

1) $x_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -15 \end{pmatrix}$ $x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 15 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -3 & 6 & -15 \\ 0 & -4 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -15 \\ 0 & -4 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -15 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim L = 2$ базис (x_1, x_2)

2) $A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ -6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$2A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $2A_2 + A_3 = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \neq A_1$

$\dim L = 3$ базис (A_1, A_2, A_3)

Задание №3

$p_1(t) = 2t + t^5$, $p_2(t) = t^3 - t^5$, $p_3(t) = t + t^5$

степень 1 3 5

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times(-2) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times 2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rg\,A = 3$$

$\det A = -1 + 2 = 1$

Значит $p_1(t), p_2(t), p_3(t)$ – лин. незав. и образуют базис пространства нечет. многочленов степени ≤ 5

$p(t) = 5t - t^3 + 2t^5 = ?$

Введём базис e:

$e_1 = t$ $e_2 = t^3$ $e_3 = t^5$

$$T_{e\to p} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad p_e = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad p_p = ?$$

$$p_e = T_{e\to p} \cdot p_p \Rightarrow p_p = (T_{e\to p})^{-1} p_e$$

$$(T_{e\to p})^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$p_p = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$p(t) = 5t - t^3 + 2t^5 = 4(2t + t^5) + 2(t^3 - t^5) - 3(t + t^3)$$

Задача 4

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -3 & 4 & -7 \\ 3 & 4 & -4 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{array} =$$

$\frac{3}{5}$ $\quad -4/5 \quad 7/5$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -8/5 & 4/5 & 3/5 \\ 2 & -1 & -8/5 & 4/5 & -17/5 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 4/5 & 3/5 \\ 2 & -1 & 4/5 & -17/5 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 4/5 & 0 \\ 2 & -1 & 4/5 & -4 \end{pmatrix}$$

$-3/4$

это базис

Задача 5

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \quad X_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_3 + 3\alpha_4 - \alpha_5 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5 = 0 \\ -2\alpha_2 + \alpha_3 + 5\alpha_4 - 3\alpha_5 = 0 \\ \alpha_1 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3 + 9\alpha_4 - 5\alpha_5 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 9 & -5 & 0 \end{array}\right) \times 2 = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 6 & -3 & -15 & 9 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -10 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 9 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 9 & -5 & 0 \end{array}\right) \times -\frac{3}{2} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 3/2 & -1/2 & 0 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & -5/2 & 3/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 3/2 & -1/2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} \alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3 - \frac{5}{2}\alpha_4 + \frac{3}{2}\alpha_5 = 0 \\ \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_3 + \frac{3}{2}\alpha_4 - \frac{1}{2}\alpha_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\frac{1}{2}\alpha_3 - \frac{3}{2}\alpha_4 + \frac{1}{2}\alpha_5 \\ \alpha_2 = \frac{1}{2}\alpha_3 + \frac{5}{2}\alpha_4 - \frac{3}{2}\alpha_5 \end{cases}$$

$\alpha_3 = p$

$\alpha_4 = q$ $\quad t, p, q \in R$

$\alpha_5 = t$

$\alpha_1 = -\frac{1}{2}p - \frac{3}{2}q + \frac{1}{2}t$

$\alpha_2 = 1/2\,p + 5/2\,q - 3/2 \cdot t$

$\alpha_3 = p$

$\alpha_4 = q$

$\alpha_5 = t$