Домашняя работа КАРАСЕВА М3135

Линейные подпространства

Задача №1

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad E' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдем матрицу перехода от E к E'

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 1 & -3 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) / :(-3)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -4/3 & -1/3 & 1 & -1/3 & -5/3 & -1/3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1/3 & -2/3 & 1 & 1/3 & -1/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & -4/3 & -1/3 & 1 & -1/3 & -5/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 8/3 & -1/3 & 0 & 8/3 & 7/3 & 8/3 \\ 0 & 0 & 7/3 & 4/3 & 0 & 7/3 & 11/3 & 7/3 \end{array}\right) / :(8/3)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1/3 & -2/3 & 1 & 1/3 & -1/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & -4/3 & -1/3 & 1 & -1/3 & -5/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/8 & 0 & 1 & 7/8 & 1 \\ 0 & 0 & 7/3 & 4/3 & 0 & 7/3 & 11/3 & 7/3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -5/8 & 1 & 0 & -5/8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 & 1 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/8 & 0 & 1 & 7/8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 13/8 & 0 & 0 & 13/8 & 0 \end{array}\right) \Big/ : (13/8)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -5/8 & 1 & 0 & -5/8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 & 1 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/8 & 0 & 1 & 7/8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

это и есть матрица перехода

составим по ней формулы преобразования координат

$$X' = T_{ee'} \cdot X$$

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_4 \\ x_1 + x_2 + x_4 \\ x_2 + x_3 + x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$x_1' = x_1 + x_4$$
$$x_2' = x_1 + x_2 + x_3$$
$$x_3' = x_2 + x_3 + x_4$$
$$x_4' = x_3$$

Задание 2

$x_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\-2\end{pmatrix}$ $x_2 = \begin{pmatrix}3\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ $x_3 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$ $y_1 = \begin{pmatrix}2\\5\\-6\\-5\end{pmatrix}$ $y_2 = \begin{pmatrix}-1\\2\\-7\\-3\end{pmatrix}$

] базис X задаёт пр-во L_1, а Y задаёт L_2

Найдём базис $(L_1 + L_2)$

Приведём к Δ виду

$$\begin{pmatrix}1&3&-1&2&-1\\2&1&0&5&2\\-1&1&1&-6&-7\\-2&1&-1&-5&-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\2&-5&2&1&4\\-1&4&0&-4&-8\\-2&7&-3&-1&-5\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\2&-5&0&0&0\\-1&4&8/5&-16/5&-24/5\\-2&7&-1/5&2/5&3/5\end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & & \end{array} \\ \begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\2&-5&0&0&0\\-1&4&8/5&0&0\\-2&7&-1/5&0&0\end{pmatrix} \end{array}$$

Итак, $(L_1 + L_2)$ имеет размерность 3 возьмем 3 вектора (лин не завис) - это и будет базис

Базис $(L_1 + L_2)$: $\{x_1, x_2, x_3\}$

Найдём базис пересечения

Ну здесь заметим, что y_1 и y_2 лин завис от $x_1, x_2, x_3 \Rightarrow L_2 \subset L_1$

Значит $L_1 \cap L_2 = L_2$

Базис пересечение L_1 и L_2 : $\{y_1, y_2\}$

Задание №3

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Найдем базис суммы:

Приводим к Δ виду

$$\begin{array}{ccccc} b_1 & b_2 & b_3 & a_1 & a_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -5/2 & 11/2 & -11/2 \\ 0 & 3 & -5/2 & 11/2 & -11/2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -5/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5/2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ таки (как в задании №2) a_1 и a_2 - лин зависят от векторов b_1, b_2, b_3

Значит $\dim(L_1 + L_2) = 3$

базис $(L_1 + L_2)$: $\{b_1, b_2, b_3\}$

$\dim(L_1 \cap L_2) = 2$

базис $(L_1 \cap L_2) = \{a_1, a_2\}$

Задание № 4

$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ P: $X_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ Q: $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\exists\ X = X_1 \cdot Z_1 + X_2 \cdot Z_2 + Y_1 \cdot Z_3$

$\begin{cases} 4Z_1 + Z_2 + Z_3 = 2 \\ 3Z_1 + 2Z_2 + Z_3 = 0 \\ Z_1 + 3Z_2 + Z_3 = -1 \end{cases}$ найдем решение системы

$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right)$

$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3$ $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 9$

$Z_1 = -1$ $Z_2 = -3$ $Z_3 = 9$

(Z_1, Z_2, Z_3) – это коэфф. разложения X по векторам X_1, X_2, Y_1

Это разложение единственно так как эта система имеет единственное решение $(\Delta \neq 0)$