Домашнее задание № 13 Карасева М3135

Скалярное произведение (часть 1)

Задача 1.

$\boxed{1}$ $F(X,Y) = \det(XY)$

Не удовлетворяет св-ву однородности

$\det((\lambda X)Y) \neq \lambda \det(XY)$

$\overset{\shortparallel}{\lambda^n \det(XY)}$

$\boxed{2}$ $F(X,Y) = \mathrm{tr}\, X \cdot \mathrm{tr}\, Y$.

Не удовлетворяет св-ву положительной определенности

$\mathrm{tr}\, X \cdot \mathrm{tr}\, X = 0 \Rightarrow X = \mathbb{O}$

не выполняется например для

$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{3}$ $F(X,Y) = \mathrm{tr}(X \cdot Y)$

Не удовлетворяет св-ву положительной определен.

$\mathrm{tr}(X \cdot X) = 0 \Rightarrow X = \mathbb{O}$

не верно для $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: $X \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{tr}(X \cdot X) = 0$

$\boxed{4.}$ $F(X,Y) = tr(X^T Y)$

① Симметричность

$$tr(X^T Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} X^T_{ik} \cdot Y_{ki} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} X_{ki} Y_{ki}$$

$$tr(Y^T X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} Y^T_{ik} \cdot X_{ki} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} X_{ki} Y_{ki}$$

② Аддитивность по первому аргументу

$$tr((X_1 + X_2)^T \cdot Y) = tr((X_1^T + X_2^T) Y) =$$

$$= tr(X_1^T Y + X_2^T Y) = tr(X_1^T Y) + tr(X_2^T Y)$$

③ однородность

$$tr((\lambda X)^T Y) = tr((\lambda X^T) Y) = tr(\lambda (X^T Y)) = \lambda\, tr(X^T Y)$$

④ Положительная определённость

$tr(X^T \cdot X) = 0 \Rightarrow X = \mathbb{O}$?

$\Leftarrow$

$$tr(X^T \cdot X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} X^T_{ik} \cdot X_{ki} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (X_{ki})^2 = 0$$

тогда и только тогда: $\forall ik \;\; X_{ki} = 0$

$\Rightarrow X = \mathbb{O}$

$\boxed{5}$ $F(x y) = tr(x^T D y)$

① Симметричность

$$tr(x^T D y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (x^T D)_{ik} \cdot y_{ki} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} y_{ki} \cdot \sum_{j=1}^{n} x^T_{ij} D_{jk} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} y_{ki} \cdot x^T_{ik} \cdot D_{kk} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ki} \cdot y_{ki} \cdot D_{kk}$$

$$tr(y^T D x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (y^T D)_{ik} \cdot x_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ki} \sum_{j=1}^{n} y^T_{ij} D_{jk} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ki} \cdot y^T_{ik} \cdot D_{kk} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ki} \cdot y_{ki} \cdot D_{kk}$$

② Аддитивность по первому аргументу

$$tr((x_1 + x_2)^T D y) = tr((x_1^T + x_2^T) D y) =$$

$$= tr(x_1^T D y + x_2^T D y) = tr(x_1^T D y) + tr(x_2^T D y)$$

③ Однородность

$$tr((\lambda x)^T D y) = tr((\lambda x^T) D y) = tr(\lambda (x^T D y)) = \lambda\, tr(x^T D y)$$

④ Положительная определённость

$tr(x^T D x) \Rightarrow x = \Theta$?

$$tr(x^T D x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (x^T D)_{ik} \cdot x_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ki} \sum_{j=1}^{n} x^T_{ij} D_{jk} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ki} \cdot x^T_{ik} \cdot D_{kk} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (x_{ki})^2 D_{kk} = 0 \text{ . тк } D_{kk} > 0$$

верно тогда и только тогда : $\forall i,k \;\; x_{ki} = 0 \Rightarrow x = \Theta$

Задача 2

$\langle x,y\rangle_1 \quad \langle x,y\rangle_2$ — скалярное произведение

$\langle x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle_1 + \varphi\langle x,y\rangle_2$ — скаляр. произв ?

$\boxed{\lambda, \varphi > 0}$

1. Симметричность

$$+\begin{cases} \lambda\langle y,x\rangle_1 = \lambda\langle x,y\rangle_1 \\ \varphi\langle y,x\rangle_2 = \varphi\langle x,y\rangle_2 \end{cases}$$

$$\langle y,x\rangle = \lambda\langle y,x\rangle_1 + \varphi\langle y,x\rangle_2 = \lambda\langle x,y\rangle_1 + \varphi\langle x,y\rangle_2 = \langle x,y\rangle$$

2. Аддитивность по первому аргументу

$$+\begin{cases} \lambda\langle x_1+x_2,y\rangle_1 = \lambda\langle x_1,y\rangle_1 + \lambda\langle x_2,y\rangle_1 \\ \varphi\langle x_1+x_2,y\rangle_2 = \varphi\langle x_1,y\rangle_2 + \varphi\langle x_2,y\rangle_2 \end{cases}$$

$$\langle x_1+x_2,y\rangle = \lambda\langle x_1+x_2,y\rangle_1 + \varphi\langle x_1+x_2,y\rangle_2 = (\lambda\langle x_1 y\rangle_1 + \varphi\langle x_1 y\rangle_2) +$$
$$+ (\lambda\langle x_2 y\rangle_1 + \varphi\langle x_2 y\rangle_2) = \langle x_1 y\rangle + \langle x_2 y\rangle$$

3. Однородность.

$$\langle\alpha x,y\rangle = \lambda\langle\alpha x,y\rangle_1 + \varphi\langle\alpha x,y\rangle_2 = \alpha\lambda\langle x,y\rangle_1 +$$
$$+ \alpha\varphi\langle xy\rangle_2 = \alpha(\lambda\langle xy\rangle_1 + \varphi\langle xy\rangle_2) = \alpha\langle x,y\rangle$$

4. Положительная определённость

$\langle xx\rangle = 0 \Rightarrow x = \mathbb{0}$?

$$\langle x,x\rangle = \underbrace{\lambda}_{>0}\underbrace{\langle xx\rangle_1}_{\geq 0} + \underbrace{\varphi}_{>0}\underbrace{\langle xx\rangle_2}_{\geq 0} = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix}\langle xx\rangle_1 = 0 \\ \langle xx\rangle_2 = 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow x = \mathbb{0}$$

чтд.

Задача 3

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\cos\varphi = \frac{x^T G y}{\sqrt{x^T G x}\sqrt{y^T G y}}$$

$$x^T G y = (1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = (0\ {-1}\ 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$x^T G x = (1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (0\ {-1}\ 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$y^T G y = (1\ 3\ 1)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = (-4\ 9\ {-5})\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 18$$

$$\cos\varphi = \frac{0}{\sqrt{36}} = 0 \Rightarrow \varphi = \pi/2$$

Задача 4

$t,\ t^3,\ t-t^3$ базис: $e_1 = 1\ \ e_2 = t\ \ e_3 = t^2\ \ e_4 = t^3$

Ортогонализируем базисные вектора

$$b_1(t) = 1$$

$$b_2(t) = t - \frac{\int_{-1}^{1} t\cdot 1\,dt}{\int_{-1}^{1} 1\cdot 1\,dt}\cdot 1 = t$$

$$b_3(t) = t^2 - \frac{\int_{-1}^{1} t^2\cdot 1\,dt}{\int_{-1}^{1} 1\cdot 1\,dt}\cdot 1 - \frac{\int_{-1}^{1} t^2\cdot t\,dt}{\int_{-1}^{1} t\cdot t\,dt}\cdot t = t^2 - \frac{1}{3}.$$

$$b_4(t) = t^3 - \frac{\int_{-1}^{1} t^3\cdot 1\,dt}{\int_{-1}^{1} 1\cdot 1\,dt}\cdot 1 - \frac{\int_{-1}^{1} t^3\cdot t\,dt}{\int_{-1}^{1} t\cdot t\,dt}\cdot t - \frac{\int_{-1}^{1} t^3(t^2-1/3)\,dt}{\int_{-1}^{1}(t^2-1/3)(t^2-1/3)\,dt}(t^2-1/3)$$

$$= t^3 - \frac{3}{5}t$$

$\frac{2}{7} - \frac{6}{25} = \frac{8}{175}$

Теперь b_1, b_2, b_3, b_4 — наш орт. базис

Найдём матрицу G

$$g_{11} = \int_{-1}^{1} 1\cdot 1\,dt = 2$$

$$g_{22} = \int_{-1}^{1} t\cdot t\,dt = \frac{2}{3}$$

$$g_{33} = \int_{-1}^{1}(t^2-1/3)(t^2-1/3)\,dt = \int_{-1}^{1}(t^4 - 2/3\,t^2 + 1/9)\,dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} t^4 dt - \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} t^2 dt + \frac{1}{9}\int_{-1}^{1} dt = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$$

$$g_{44} = \int_{-1}^{1}(t^3 - 3/5\,t)^2 dt = \int_{-1}^{1}(t^6 - 6/5\,t^4 + 9/25\,t^2)\,dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} t^6 dt - \frac{6}{5}\int_{-1}^{1} t^4 dt + \frac{9}{25}\int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{7} - \frac{12}{25} + \frac{6}{25} = \frac{8}{175}$$

$$G \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8/45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8/175 \end{pmatrix}$$

Выразим изначальные векторы через $b_1 \dots b_4$

$S_1 = t = (0\ 1\ 0\ 0)^T$; $S_2 = t^3 = (0\ 3/5\ 0\ 1)^T$

$S_3 = t - t^3 = (0\ 2/5\ 0\ -1)^T$

Теперь найдём длины сторон:

$$l_1 = \sqrt{S_1^T G S_1} = \sqrt{2/3}$$

$$l_2 = \sqrt{S_2^T G S_2} = \sqrt{2/7}$$

$$l_3 = \sqrt{S_3^T G S_3} = \sqrt{16/105}$$

Найдём углы:

$$\cos\varphi_1 = \frac{S_1^T G S_2}{l_1 \cdot l_2} = \frac{2/5}{\sqrt{\frac{4}{21}}} = \frac{2\sqrt{21}}{5\cdot 2} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{S_2^T G S_3}{l_2 \cdot l_3} = \frac{4/35}{\sqrt{\frac{32}{105\cdot 7}}} = \frac{4\cdot \cancel{7}\cdot\sqrt{15}}{\underset{5}{\cancel{35}}\cdot 4\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{10}}$$

$$\cos\varphi_3 = \frac{S_3^T G S_1}{l_3 \cdot l_1} = \frac{4/15}{\sqrt{\frac{32}{105\cdot 3}}} = \frac{4\cdot \cancel{3}\cdot\sqrt{35}}{\underset{5}{\cancel{15}}\cdot 4\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{7}{10}}$$

$$\varphi_1 = \arccos\left(\frac{\sqrt{21}}{5}\right)$$

$$\varphi_2 = \arccos\left(\sqrt{\frac{3}{10}}\right)$$

$$\varphi_3 = \arccos\left(\sqrt{\frac{7}{10}}\right)$$