$A v_i = \lambda_i v_i$

Домашняя работа КАРАСЕВА M3135

Матрицы лин. преобразований в различных базисах. Собственные значения и собственные векторы лин. преобразований.

Задача №1

$e_1 = 1 \quad e_2 = x \quad e_3 = x^2$

$$T_{e\to\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \qquad T_{\varphi\to e} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1/4 & -9/4 & 3/2 \\ 1/4 & 3/4 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$A' = T_{\varphi\to e} \cdot A \cdot T_{e\to\varphi} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1/4 & -9/4 & 3/2 \\ 1/4 & 3/4 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3/2 & -9/4 & 1/4 \\ -1/2 & 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -15/4 & -4 & -5 \\ 9/4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Задача №2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

① $x = e_1 + e_2 + 2e_3 = \{1, 1, 2\}$

$$Ax = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$ — этот вектор не коллинеарен x (т.к. коор-ты не пропорциональны)

Значит не существует λ : $Ax = \lambda x$ $\to$

$\to$ x — не собств. вектор.

② $x = 3e_1 - 3e_2 - 4e_3 = \{3, -3, -4\}$

$$Ax = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix}$$

– этот вектор опять не коллинеарен x => он не собственный

Задача №3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-t & -1 & -1 \\ 0 & -1-t & 0 \\ 0 & 2 & 1-t \end{vmatrix} = 0$$

$(2-t)(-1-t)(1-t) = 0 \rightarrow t = 1, 2, -1$

Спектр: $\delta(-1, 1, 2)$

$$-1: \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \end{array} \qquad \begin{matrix} e_2 = -e_3 \\ e_1 = 0 \\ e_3 = e_3 \end{matrix} \qquad v_{c.в} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$1: \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} e_1 = e_3 \\ e_2 = 0 \\ e_3 = e_3 \end{matrix} \qquad v_{c.в} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \alpha$$

$$2: \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} e_1 = e_1 \\ e_2 = 0 \\ e_3 = 0 \end{matrix} \Rightarrow v_{c.в} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \alpha \quad , \alpha \in \mathbb{R}$$

Задача №4

$\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

① ищем спектр.

$$\begin{vmatrix} 5-t & -2 & 0 \\ 2 & -5-t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = 0$$

$$(5-t)(-5-t)(1-t) + 2\cdot 2(1-t) = 0$$

$$(1-t)(4-(5-t)(5+t)) = 0$$

$$(1-t)(4-(25-t^2)) = 0$$

$$(1-t)(4-25+t^2) = 0$$

$$(1-t)(t^2-21) = 0$$

$$\sigma(-\sqrt{21}, 1, \sqrt{21})$$

② ищем собственные векторы

$$1: \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} e_1 = 0 \\ e_2 = 0 \\ e_3 = e_3 \end{matrix} \quad v_{c.s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\alpha$$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{21}: \begin{pmatrix} 5-\sqrt{21} & -2 & 0 \\ 2 & -5-\sqrt{21} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{21} \end{pmatrix} \boxed{+} \times \frac{-2}{5-\sqrt{21}} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 5-\sqrt{21} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{21} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} e_1(5-\sqrt{21}) - 2e_2 = 0 \\ e_2 = \frac{5-\sqrt{21}}{2} e_1 \\ e_3 = 0 \end{matrix}$$

$$v_{c.s} = \left(1, \frac{5-\sqrt{21}}{2}, 0\right)^T \cdot \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

1 - корень характер. мн-на

$k = \ldots$

$-\sqrt{21}: \begin{pmatrix} 5+\sqrt{21} & -2 & 0 \\ 2 & -5+\sqrt{21} & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sqrt{21} \end{pmatrix} \boxed{+} \frac{-2}{5+\sqrt{21}} \Rightarrow$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 5+\sqrt{21} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sqrt{21} \end{pmatrix}$ $\quad e_1(5+\sqrt{21}) - 2e_2 = 0$

$e_2 = (5+\sqrt{21})/2 \cdot e_1$

$e_3 = 0$

$v_{cв} = \begin{pmatrix} 1 \\ (5+\sqrt{21})/2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}$

Теперь выберем какие-нибудь 3 собст. век. и докажем, что они лин. нез.

$$\begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 5-\sqrt{21} & 5+\sqrt{21} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boxed{+} \times \frac{-2}{5-\sqrt{21}} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 25+\sqrt{21} \\ 0 & 5-\sqrt{21} & 5+\sqrt{21} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

мы привели к Δ виду и заметили, что векторы лин. нез $\Rightarrow$ являются базисом $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \varphi$ - диагонализируемый

(3) выберем всё те же 3 вектора v_1, v_2, v_3

$e = i, j, k \quad T_{e\to v} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 5-\sqrt{21} & 5+\sqrt{21} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \cancel{T_{v\to e} = \begin{pmatrix} 0 & 5+\sqrt{21} & -5+\sqrt{21} \\ 0 & -2 & +2 \\ 4\sqrt{21} & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

$\cancel{A' = T_{v\to e} \cdot A} \cdot T_{e\to v}$

$T_{v\to e} = ?$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 5-\sqrt{21} & 5+\sqrt{21} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 10+2\sqrt{21} - 10 + 2\sqrt{21} = 4\sqrt{21}$$

$$T_{v\to e} = \frac{1}{4\sqrt{21}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5+\sqrt{21} & -5+\sqrt{21} \\ 0 & -2 & 2 \\ 4\sqrt{21} & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{5\sqrt{21}+21}{4\cdot 21} & \frac{-\sqrt{21}}{2\cdot 21} & 0 \\ \frac{-5\sqrt{21}+21}{4\cdot 21} & \frac{\sqrt{21}}{2\cdot 21} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{5\sqrt{21}+21}{4\cdot 21} & \frac{-\sqrt{21}}{2\cdot 21} & 0 \\ \frac{-5\sqrt{21}+21}{4\cdot 21} & \frac{\sqrt{21}}{2\cdot 21} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 5-\sqrt{21} & 5+\sqrt{21} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{5+\sqrt{21}}{4} & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{5-\sqrt{21}}{4} & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 5-\sqrt{21} & 5+\sqrt{21} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{21} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{21} \end{pmatrix}$$