Домашнее задание КАРАСЕВА M3135

Системы линейных алгебраических у-ний

Задача №1

Решите однор. систему у-ний.

$$\begin{cases} 5x^1 - 8x^2 + 3x^3 + 3x^4 = 0 \\ 4x^1 - 6x_2 + 2x^3 + x^4 = 0 \end{cases}$$

Решение

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -8 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \times\left(-\tfrac{4}{5}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -8 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2/5 & -2/5 & -7/5 & 0 \end{array}\right) \times 20 = \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & -5 & -25 & 0 \\ 0 & 2/5 & -2/5 & -7/5 & 0 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -7/2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x^1 - x^3 - 5x^4 = 0 \\ x^2 - x^3 - 7/2\, x^4 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = x^3 + 5x^4$$
$$x_2 = x^3 + 7/2\, x^4 \qquad \exists\; x^3 = \alpha \quad x^4 = \beta \quad \alpha, \beta \in R$$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha + 5\beta \\ x_2 = \alpha + 7/2\,\beta \\ x^3 = \alpha \\ x^4 = \beta \end{cases}$$

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\alpha + \begin{pmatrix} 5 \\ 7/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\beta$$

Задача №2

Решите неоднородную систему у-ний

$$\begin{cases} x^1+2x^2+x^3-x^4+x^5=2 \\ 2x^1-x^2+x^3+x^4-x^5=1 \\ 3x^1+x^2-x^3+2x^4+x^5=-6 \\ 2x^1-x^2-2x^3+3x^4=-8 \\ x^1+2x^2-2x^3+x^4+2x^5=-7 \end{cases}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1&2&1&-1&1&2 \\ 2&-1&1&1&-1&1 \\ 3&1&-1&2&1&-6 \\ 2&-1&-2&3&0&-8 \\ 1&2&-2&1&2&-7 \end{array}\right) \begin{array}{c} \times(-2) \\ \times(-3) \\ \times(-2) \\ \times(-1) \end{array} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&2&1&-1&1&2 \\ 0&-5&-1&3&-3&-3 \\ 0&-5&-4&5&-2&-12 \\ 0&-5&-4&5&-2&-12 \\ 0&0&-3&2&1&-9 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-1) \\ \times(-1) \end{array} =$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&2&1&-1&1&2 \\ 0&-5&-1&3&-3&-3 \\ 0&0&-3&2&1&-9 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&-3&2&1&-9 \end{array}\right) \times(-1) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&2&1&-1&1&2 \\ 0&-5&-1&3&-3&-3 \\ 0&0&-3&2&1&-9 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{array}\right) \times\frac{2}{5} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&3/5&1/5&-1/5&4/5 \\ 0&-5&-1&3&-3&-3 \\ 0&0&-3&2&1&-9 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \frac{1}{5} \\ \times(-\frac{1}{3}) \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&3/5&0&-1 \\ 0&-5&0&7/3&-10/3&0 \\ 0&0&-3&2&1&-9 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&3/5&0&-1 \\ 0&1&0&-7/15&2/3&0 \\ 0&0&1&-2/3&-1/3&3 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x^1+3/5\,x^4=-1 \\ x^2-7/15\,x^4+2/3\,x^5=0 \\ x^3-2/3\,x^4-1/3\,x^5=3 \end{cases}$$

$x^1=-1-3/5\,x^4$

$x^2=7/15\,x^4-2/3\,x^5$

$x^3=3+2/3\,x^4+1/3\,x^5$

Пусть $x^4=\alpha$, $x^5=\beta$, $\alpha,\beta\in R$

$x_1 = -1 - \frac{3}{5}\alpha + 0\beta$

$x_2 = 0 + \frac{7}{15}\alpha - \frac{2}{5}\beta$

$x_3 = 3 + \frac{2}{5}\alpha + \frac{1}{3}\beta$

$x_4 = 0 + 1\alpha + 0\beta$

$x_5 = 0 + 0\alpha + 1\beta$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3/5 \\ 7/15 \\ 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\alpha + \begin{pmatrix} 0 \\ -2/5 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\beta$$

Задача 3

Исследовать совместность и найти общее решение в зависимости от значения параметра λ

$$\begin{cases} \lambda x^1 + x^2 + x^3 + x^4 = 1 \\ x^1 + \lambda x^2 + x^3 + x^4 = 1 \\ x^1 + x^2 + \lambda x^3 + x^4 = 1 \\ x^1 + x^2 + x^3 + \lambda x^4 = 1 \end{cases}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times(-\lambda) \\ \times(-1) \\ \times(-1) \end{array} =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1-\lambda & 2-\lambda-\lambda^2 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 3-2\lambda-\lambda^2 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array}\right)$$

Так мы привели матрицу к ступ. виду и видим, что Rg нашей матрицы и Rg расширенной матрицы равны.

Значит система совместна

(Заметим, что это верно даже при $\lambda = 1$)

Так как $Rg = 4$ и у нас 4 переменных $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ мы имеем 1 решение

Найдем его через Гаусс

$$(3-2\lambda-\lambda^2)\cdot x^4 = 1-\lambda$$

$$x^4 = \frac{1-\lambda}{3-2\lambda-\lambda^2} = \frac{\lambda-1}{\lambda^2+2\lambda-3} = \frac{1}{\lambda+3}$$

$$(\lambda-1)x^3 + (1-\lambda)\cdot x^4 = 0 \quad | : (\lambda-1)$$

$$x^3 - x^4 = 0 \Rightarrow x^3 = x^4 = \frac{1}{\lambda+3}$$

$$(\lambda-1)x^2 + (1-\lambda)x^4 = 0 \Rightarrow x^2 = x^4 = \frac{1}{\lambda+3}$$

$$x^1 + x^2 + x^3 + \lambda x^4 = 1$$

$$x^1 + \frac{1}{\lambda+3} + \frac{1}{\lambda+3} + \frac{\lambda}{\lambda+3} = 1$$

$$x^1 + \frac{\lambda+2}{\lambda+3} = 1 \qquad x^1 = \frac{1}{\lambda+3}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{\lambda+3} \quad \frac{1}{\lambda+3} \quad \frac{1}{\lambda+3} \quad \frac{1}{\lambda+3}\right)^T$

Задаче №4

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \end{array}$$

] $x_1 = 10$, $x_3 = 01$ —

базисные вектора

$x_1 = x_1$, $x_2 = x_1 - x_3$, $x_3 = x_3$, $x_4 = -4x_1 - x_3$

$-x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$4x_1 + x_3 + x_4 = 0$