Домашнее задание 20 КАРАСЕВА M_{3435}

Ортогональность

Задание 1

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Чтобы A была матрицей Грама

$$\begin{cases} \sin\alpha = -\sin\alpha \\ \cos\alpha > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sin\alpha = 0 \\ \cos\alpha \geq 0 \end{cases} \quad \alpha = 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$$

Задание 2

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle e_1, e_1\rangle = tR\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1$$

$$\langle e_1, e_2\rangle = tR\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\langle e_1, e_3\rangle = tR\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = -1$$

$$\langle e_1, e_4\rangle = tR\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\langle e_2, e_1\rangle = tR\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\langle e_2, e_2\rangle = tR\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1$$

$$\langle e_2, e_3\rangle = tR\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\langle e_2, e_4\rangle = tR\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = -1$$

$$\langle e_3, e_1\rangle = tr\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right) = -1$$

$$\langle e_3, e_2\rangle = tr\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\langle e_3, e_3\rangle = tr\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right) = 2$$

$$\langle e_3, e_4\rangle = tr\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\langle e_4, e_1\rangle = tr\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\langle e_4, e_2\rangle = tr\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right) = -1$$

$$\langle e_4, e_3\rangle = tr\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\langle e_4, e_4\rangle = tr\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right) = 2$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\-1&0&2&0\\0&-1&0&2\end{pmatrix}$$

Задание 3

$$A = \begin{pmatrix}1&1\\2&0\\1&1\end{pmatrix} \qquad \Gamma = \begin{pmatrix}1&-2&3\\-2&5&-8\\3&-8&14\end{pmatrix}$$

Найдем вектор b, такой что

$$\begin{cases}(a_1, b) = 0 & \text{I}\\ (a_2, b) = 0 & \text{II}\end{cases}$$

$$\text{I}\quad (1\ 2\ 1)\begin{pmatrix}1&-2&3\\-2&5&-8\\3&-8&14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = 0$$

$$(0\ 0\ 1)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (b_1, b_2, 0)$$

$$\text{II } (101)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -8 \\ 3 & -8 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$(4 \;\; -10 \;\; 17)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$4b_1 - 10b_2 + 17b_3 = 0$$

$$\text{I и II} \to \quad 4b_1 - 10b_2 = 0$$

$$b_1 = 2{,}5b_2$$

$$b = \begin{pmatrix} 2{,}5b_2 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\alpha, \; \alpha \in R$$

базис $L^{\perp} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Задание 4

L – подпр-во верхних треуг. матриц

X – подпр-во матриц.

$$X = L + L^{\perp}$$

$L^{\perp} = X - L \Rightarrow$ подпр-во матриц с элементами ниже главной диагонали

Задание 5

$$x = 35t^4 - 15t^3 - 15t^2 - 8t + 4$$

$$L = \mathrm{span}(1, t, t^2)$$

y – орт. проекция на L

$$x = \sum_{i=1}^{3} c_i a_i + z$$

$$\langle x, a_j \rangle = \sum_{i=1}^{k} c_i \langle a_i, a_j \rangle$$

$$\Gamma_L \cdot c = \begin{pmatrix} \langle x, a_1 \rangle \\ \langle x, a_2 \rangle \\ \langle x, a_3 \rangle \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}$$

$\langle x, a_1 \rangle = 12$

$\langle x, a_2 \rangle = -34/3$

$\langle x, a_3 \rangle = 20/3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -34/3 \\ 20/3 \end{pmatrix} \Rightarrow c = \begin{pmatrix} 1 \\ -17 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$y = 15t^2 - 17t + 1$$

Задание 6.

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad x_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad x_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Проверим линейную независимость

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -7 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow$$ лин. независ. (так как имеем 3 лин. незав. столбца)

$b_1 = x_1 = (1\ 2\ 1\ 3)^T$

$b_2 = x_2 - \frac{\langle x_2, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} \cdot b_1 = (2\ -1\ 0\ 0)^T$

$b_3 = x_3 - \frac{\langle x_3, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} \cdot b_1 - \frac{\langle x_3, b_2 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle} b_2 = (1\ 2\ -8\ 1)^T$

Искомая система

$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$