Домашняя работа № 15 M3135 Карасова

«Спектральный проектор. Спектральная теорема. Функции от матриц.»

Задача №1

$$T: \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Проверим, что T — лин. преобразование

Докажем, что $(X_1 + X_2)^T = X_1^T + X_2^T$

Д-во:
$$\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & c_1+c_2 \\ b_1+b_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}^T$$

Докажем, что $(\lambda X)^T = \lambda X^T$

Д-во:
$$\left(\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda c \\ \lambda b & \lambda d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T$$

чтд.

Докажем, что $T^2 = 1$

? $(X^T)^T = 1 \cdot X$

Д-во: $\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T\right)^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot 1$ чтд

Теперь будем искать матрицу оператора T

Станд. базис:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_1 \qquad E_2^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_3$$

$$E_3^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_2 \qquad E_4^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_4$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем с. ч. (собст. числа)

$$\begin{vmatrix} 1-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-t)\begin{vmatrix} -t & 1 & 0 \\ 1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-t)^2\begin{vmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-t)^2(t^2-1) = 0$$

$$(t-1)^2(t-1)(t+1) = 0$$

$$(t-1)^3(t+1) = 0$$

с.ч.: -1 (кратность 1); 1 (кратность 3)

Ищем собств. векторы

$$-1: \begin{array}{c} \begin{matrix} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} E_1 = 0 \\ E_2 = -E_3 \\ E_3 = E_3 \\ E_4 = 0 \end{matrix} \to v_{c.в} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \alpha$$

$\alpha \in R$

$$1: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} E_1 = E_1 \\ E_2 = E_3 \\ E_3 = E_3 \\ E_4 = E_4 \end{matrix} \to$$

$$v_{cв} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha_3 \quad ; \ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$$

Задача №2

$$A: \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

собст. числа:

$$\begin{vmatrix} 4-t & 0 & 0 \\ 0 & 5-t & -1 \\ 0 & -1 & 5-t \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (4-t)(5-t)^2 - (4-t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4-t)((5-t)^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (4-t)(4-t)(6-t) = 0$$

С.ч: 4, 6

$$4: \begin{array}{c} \begin{matrix} i & j & k \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} i = i \\ j = k \\ k = k \end{matrix} \qquad v_{c.в} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha_2$$

$$6: \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} i = 0 \\ j = -k \\ k = k \end{matrix} \qquad v_{cв} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \alpha$$

Теперь выберем 3 собст вектора (мин. независ.)

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 4 & 4 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ -1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_1 = T\tilde{\mathcal{P}}\cdot T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ -1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ -1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Проверим полученные проекторы:

$$4\cdot\mathcal{P}_1 + 6\mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} = A$$

1) $$\cos^2 A = \cos^2 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} + \cos^2 6 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \\ 0 & -1/2 & \end{pmatrix}$$

2) $\ln A = \ln 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} + \ln 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

3) $a^A = a^4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} + a^6 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

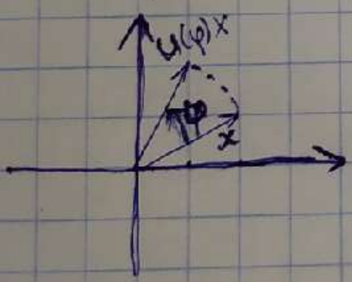
4) $\sqrt{A} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} + \sqrt{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\frac{\sqrt{6}}{2} & 1-\frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 & 1-\frac{\sqrt{6}}{2} & 1+\frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}$

Задача 3

Вероятно, в задании опечатка и V_3 должно быть V_2, так как иначе поворот вокруг точки не однозначен.

$U(\varphi) : V_2 \to V_2 \qquad 0 \le \varphi < 2\pi$



$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = A$

$\begin{vmatrix} \cos\varphi - t & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - t \end{vmatrix} = 0$

$\underbrace{(\cos\varphi - t)^2}_{\ge 0} + \underbrace{\sin^2\varphi}_{\ge 0} = 0.$

$\begin{cases} (\cos\varphi - t)^2 = 0 \\ \sin^2\varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \cos\varphi \\ \varphi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t = 1 \\ \varphi = 0 \end{cases} \; !$

По сути матрица поворота будет выглядеть $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ только в этом случае у нас будет с.ч $t=1$

$\left(\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) \to v_{с.в.} =$ все векторы V_2

для всех остальных $\varphi \neq 0$

у нас нет собст чисел