Каррсева М3235 Кр. Мат. анализ

№1 $f_n(x) = \ln\left(x^2 + \frac{2}{n}\right)$

$$f = \lim_{n\to\infty} \ln\left(x^2+\frac{2}{n}\right) = \ln x^2$$

$$\Delta \quad \left|\ln\left(x^2+\frac{2}{n}\right) - \ln(x^2)\right| = \left|\ln\left(1+\frac{2}{nx^2}\right)\right|$$

а) $x \in (0, +\infty)$

$\exists\ x = \frac{1}{n} \to 0$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} \left|\ln\left(1+\frac{2}{n\cdot(1/n)^2}\right)\right| = \lim_{n\to\infty} |\ln(1+2n)| \to \infty$$

сходится неравномерно

б) $x \in (0{,}1; +\infty)$

$$\left|\ln\left(1+\frac{2}{nx^2}\right)\right| \le \ln\left(1+\frac{200}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

сходится равномерно

№2 $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+(-1)^n)^n}{2^n+3^n} x^n$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{(2+(-1)^n)^n}{2^n+3^n}\right|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{2+(-1)^n}{\sqrt[n]{2^n+3^n}} \text{ (верхний предел)} =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{3}{\sqrt[n]{3^n+2^n}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln \sqrt[n]{2^n+3^n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln(2^n+3^n)}{n}} =$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2^n+3^n)}{n}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln 3^n + \ln((2/3)^n+1)}{n}} =$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln 3^n + \ln 1}{n}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln 3^n}{n}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{n \ln 3}{n}} =$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty} \ln 3} = e^{\ln 3} = 3$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{3}{\sqrt[n]{2^n+3^n}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{3}{3} = 1$$

$1/R = 1$ Ответ: $R = 1$

N3 $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{2x-1}$

$$\operatorname{arctg} \frac{2x+1}{2x-1} = \int_0^x \frac{\frac{2(2t-1)-2(2t+1)}{(2t-1)^2}}{1+\left(\frac{2t+1}{2t-1}\right)^2} dt =$$

$$= \int_0^x \frac{4t-2-4t-2}{(2t-1)^2+(2t+1)^2} dt = \int_0^x \frac{-4dt}{4t^2-4t+1+4t^2+4t+1} =$$

$$= \int_0^x \frac{-2dt}{4t^2+1} = -2\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4t)^{2n} dt =$$

$$= -2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x (4t)^{2n} dt = -2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n+1} x^{2n+1}}{2n+1} =$$

$$= -2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} 4^{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{(2n+3)\, x^{2n+1}}{(2n+1)\, 16 \cdot x^{2n+3}} = |x^2| \frac{2n+3}{(2n+3)} \cdot \frac{1}{16}$$

$|x| < 1/4$

$R = 1/4$

№4 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{n+1} + \frac{2}{2n+1} \right) =$

$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = 2\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \dots\right) -$

$- \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \dots$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 2 \ln 2 = \ln 4$

№5 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{xe^{-nx}}{\sqrt{n}}$ диф-ма на $x\in(0,+\infty)$

1) $f(x)$ - непрерывна на $x\in(0,+\infty)$

2) $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(e^{-nx}+e^{-nx}\cdot(-n)\cdot x\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}(1-xn)}{\sqrt{n}}=$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-xn}{\sqrt{n}\cdot e^{nx}}$

] $\varepsilon>0$ рассмотрим равномер. сходимость на $[\varepsilon,+\infty)$

$$\frac{(1-xn)}{\sqrt{n}\,e^{nx}}\leq\frac{1}{\sqrt{n}\,e^{nx}}\leq\frac{1}{\sqrt{n}\,e^{n\varepsilon}}=\frac{1}{e^{\varepsilon}}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}\cdot e^{n}}}_{\to 0}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

Значит равномер. сходится по Вейерштрассу

на промежутке $0<x$ всегда можем найти ε такое что $\varepsilon<x$

Значит при таком x будет равномерная сходимость, а из нее следует диф-мость

чтд.

$$= (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...) = \ln 4$$

$$... (-1)^{n+1} = 2\ln 2$$

№6 $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n!!)^2}$ удов. $xy''+y'+xy=0$?

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n!!)^2}\cdot(2n)\cdot x^{2n-1}$$

$$y''=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n!!)^2}\cdot(2n)\cdot(2n-1)\cdot x^{2n-2}$$

$$x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n!!)^2}\cdot(2n)(2n-1)\cdot x^{2n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n!!)^2}\cdot(2n)\cdot x^{2n-1}+$$

$$+x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n!!)^2}\cdot x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n!!)^2}(2n)(2n-1)\cdot x^{2n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n!!)^2}\cdot 2n\cdot x^{2n-1}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n!!)^2}\cdot x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{((2(n+1))!!)^2}\cdot 2(n+1)\cdot(2n+1)\cdot x^{2n+1}+$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{((2n+2)!!)^2}\cdot(2n+2)\cdot x^{2n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n!!)^2}\cdot x^{2n+1}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{(2n!!)^2}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n!!)^2}\cdot\frac{1}{2n+2}+\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^n}{(2n!!)^2}\right)\cdot x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n!!)^2}\cdot x^{2n+1}\left(1-\frac{2n+1}{2n+2}-\frac{1}{2n+2}\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n!!)^2}x^{2n+1}\left(\frac{2n+2-2n-1-1}{2n+2}\right)=0$$