Равномерная сходимость ряда

1. Демидович №2776

Исследовать на равном. сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \sin\frac{1}{3^n \cdot x} \qquad x \in (0, +\infty)$$

т.к. $\sin t \sim t$ при $t \to 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\frac{1}{3^n x} \sim \frac{1}{3^n x}$ при $n \to \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \sin\frac{1}{3^n x} \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{3^n \cdot x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{x}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{x}$ - диот ряд сх-ся $\Rightarrow$ исходный ряд сх-ся

Теперь предположим исходный ряд сходится равномерно

значит $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N(\varepsilon)$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall x \in (0, +\infty)$ $\Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} 2^k \cdot \sin\frac{1}{3^k \cdot x} \right| < \varepsilon$

$\exists\ \varepsilon = 1,\ n = N,\ p = 1$

$\left| 2^{N+1} \cdot \sin\frac{1}{3^{N+1} \cdot x} \right| < 1$ - верно для $\forall x \in (0, +\infty)$

Тогда $\exists\ x = \frac{2}{3^{N+1} \cdot \pi} \in (0, +\infty)$

$$\left| 2^{N+1} \cdot \sin\frac{3^{N+1} \cdot \pi}{3^{N+1} \cdot 2} \right| = \left| 2^{N+1} \cdot \sin\frac{\pi}{2} \right| = 2^{N+1} \geq 1$$

получаем противоречие

значит ряд сходится неравномерно.

② Демидович №2769

Исследовать характер сходимости

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1-x) x^n \qquad x \in [0,1]$$

$$x = 1 \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (1-1)\cdot 1^n = 0 = S(1)$$

$$x \in [0,1) \qquad S_N(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{N} x^n = (1-x)\cdot \frac{1-x^{N+1}}{(1-x)} \xrightarrow[N\to\infty]{} 1$$

$$\sup_{x\in[0,1]} |S_N(x) - S(x)| = \sup_{x\in[0,1)} |S_N(x) - S(x)| = \sup_{x\in[0,1)} |x^{N+1}| = 1$$

$\sup \not\to 0 \Rightarrow$ ряд сходится неравномерно

③ Демидович №2774 Д-ть равномерную сходимость.

в) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2} \qquad x \in [0,+\infty)$$

$$\left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right| \overset{x\geq 0}{=} \frac{x}{n^4x^2+1} = \left[\begin{matrix}\text{Замечание}\\ n^4x^2+1 \geq 2n^2x\end{matrix}\right] \leq \frac{x}{2n^2x} =$$

$$= \frac{1}{2n^2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ ← обобщённый гармонический ряд мажорирует над изначальным рядом ⇒

⇒ по признаку Вейерштрасса, он равномерно и абсолютно сходится на $[0,+\infty)$

④ Демидович №2774 Д-ть равномерную сходимость

к) $$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right) \qquad |x| < a$$

$$\left|\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)\right| \leq \ln\left(1+\frac{a^2}{n\ln^2 n}\right)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{a^2}{n\ln^2 n}\right) = \left[\overset{\text{Замечание}}{\ln(1+\alpha) \sim \alpha}, \ \alpha \to 0\right]$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a^2}{n\ln^2 n} = a^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n} \text{ — сходится}$$

Значит изначальный ряд сходится равномерно и абсолютно.

(5) Демидович № 2771

Исследовать характер сход-ти ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{((n-1)x+1)\cdot(nx+1)} \qquad x \in (0,+\infty)$$

$$\frac{x}{((n-1)x+1)\cdot(nx+1)} = \frac{1}{(n-1)x+1} - \frac{1}{nx+1}$$

$$S_N = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{(n-1)x+1} - \frac{1}{nx+1}\right) = 1 - \frac{1}{Nx+1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 1$$

$$r_N(x) = |S_N - S| = \left|1 - \frac{1}{Nx+1} - 1\right| = \frac{1}{Nx+1}$$

$$\exists\ x_0 = \frac{1}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \in (0,+\infty)$$

$$r_N(x_0) = \frac{1}{2} \not\xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$, значит ряд сходится

неравномерно.