Задачи на непрерывность или дифференцируемость

① Демидович №2792

Показать, что $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ непрерывна и имеет непрерывную производную в области $x \in (-\infty, +\infty)$

Решение:

$\forall \left| \frac{\sin nx}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ — обобщенный гармонический ряд мажорирует над исходным рядом $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ по признаку Вейерштрасса, он сходится равномерно

Еще мы знаем, что $\frac{\sin nx}{n^3}$ — функция непрерывная для всех $x \in (-\infty, +\infty)$

Из равномер. сход-ти ряда и непрерывности $\frac{\sin nx}{n^3}$ следует непрерывность суммы ряда.

Теперь рассмотрим производную:

$\left(\frac{\sin nx}{n^3} \right)' = \frac{\cos nx}{n^2}$

По аналогичным рассуждениям: гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ мажорирует над $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ равномерная сх-ть + непрерывность $\frac{\cos nx}{n^2}$ .. итд...

② Демидович №2795

Определить область сущ-ния функции и исследовать её на непрерывность

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n$$

Используем радикальный признак Коши

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(x+\frac{1}{n}\right)^n} = |x|$$

при $|x| > 1$ – ряд расходится

при $|x| = 1$ $\quad \left(x+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$

значит ряд тоже расходится

Итак, область существования $f(x) = (-1, 1)$

Проверим равномер. сх-ть на $|x| \leq 1-\delta$

$$\left|\left(x+\frac{1}{n}\right)^n\right| \leq \left(1-\delta+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-\delta+1/n)^n \text{ – сходится} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(x+\frac{1}{n}\right)^n \text{ – равном. сходится (по Вейерштрассу)}$$

$(x+1/n)^n$ – непрерывна на $|x| < 1$

равномер. сх-ть + непрерыв. $(x+1/n)^n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (x+1/n)^n \text{ – непрерывна на } |x| < 1$$

③ Демидович №2809

Законно ли почленное дифф-ние ряда

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$?

Решение:

1) $\operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$ - имеет непрерыв. производную $x \in \mathbb{R}$

2) $\Delta \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1/n^2}{1+\left(\frac{x}{n^2}\right)^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\frac{x^2}{n^2}} =$

$= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+x^2} \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - обобщ. гармон. ряд

мажорирует над исход. рядом =>

=> исходный ряд сходится равномерно $x \in \mathbb{R}$ (по Вейерштрассу)

Из пунктов 1) и 2) следует, что

ряд можно почленно дифф-ть на $x \in \mathbb{R}$