Самостоятельная работа М3235

Карасева

№1 $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$

а) $x \in [-3, 3]$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ x\in[-3,3]}} f_n(x) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ x\in[-3,3]}} e^{-(x-n)^2} = 0$$

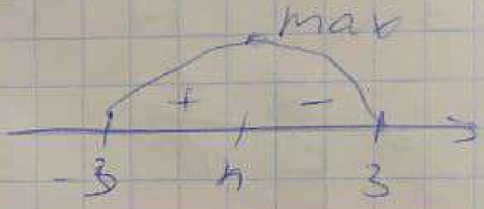
$$|e^{-(x-n)^2} - 0| = g(x) = e^{-(x-n)^2}$$

$$g'(x) = e^{-(x-n)^2}\cdot(-2)(x-n)$$

1) $g'(x) = 0 \quad x = n$

2) $g'(x) > 0 \quad x < n$

3) $g'(x) < 0 \quad x > n$



$\sup(g(x)) = g(n) = 1$, $-3 \le n \le 3$

$n > 3$

$$\sup(g(x)) = g(3) = e^{-(3-n)^2}$$

$$e^{-(3-n)^2} < \varepsilon$$

$$-(3-n)^2 < \ln\varepsilon$$

$$(3-n)^2 > -\ln\varepsilon \quad \forall n > 3$$ равном. сходится

Значит $\exists N(\varepsilon) = 3$ (Критерий Коши) б) $x \in \mathbb{R}$

Аналогично $g(x) = e^{-(x-n)^2}$

и $\sup(g(x)) = 1$ для $x \in \mathbb{R}$

Значит, не равномерно сходится

$\boxed{№2}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3\cancel{x})^n}{n\sqrt{n+x}}$ $x \in [0, \frac{1}{3}]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n\sqrt{n+x}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3\cdot 1/3)^n}{n\sqrt{n+x}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+x}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} =$$

$= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ - обобщенный гармонический ряд мажорирует

над изначальным рядом =>

-> по признаку Вейерштрасса он

равномерно сходится в промежутке

$x \in [0, 1/3]$

$\boxed{N3}$ $f_n = \ln\left(1 + \frac{\cos nx}{\sqrt{n+x}}\right)$, $x \in [0, +\infty)$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ x\in[0,+\infty)}} \ln\left(1+\frac{\cos nx}{\sqrt{n+x}}\right) = 0$$

$$|f_n - 0| = \left|\ln\left(1+\frac{\cos nx}{\sqrt{n+x}}\right)\right| \le \left|\ln\left(1+\frac{\cos nx}{\sqrt{n}}\right)\right| \le$$

$$\le \left|\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right| \le \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \to 0$$

Значит ряд равномерно сходится

$\boxed{N4}$

$$f_n = \frac{1}{n}\operatorname{arctg} x^n \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} x^n}{n} = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi/2}{n}, & x \ge 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-\pi/2}{n} & 0 \le x < 1 \end{cases}$$

ограничен.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} x^n}{n} = 0$$

$$|f_n - 0| = \left|\frac{\operatorname{arctg} x^n}{n}\right| \le \left|\frac{\pi/2}{n}\right| \to 0$$

Значит равномерно сходится

$$\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} x^n}{n}\right)' = 0' = 0$$

$$f_n' = \frac{1}{n} \cdot \frac{x^{n-1} \cdot n}{1 + x^{2n}} \qquad f_n'(1) = \frac{1}{2} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = 1/2$$

$$0 \ne 1/2$$