Доп. задачи Мат. анализ Карасева

М3235

Равномерная сходимость последовательности

① Демидович № 2746

Исследовать на равномерную сходимость

$$f_n(x) = x^n$$

а) $0 \le x \le 1/2$

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0 = f(x)$$

$\forall$ $|f_n(x) - f(x)| = |x^n| = x^n$ — при фиксир. n функция возрастает $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sup |f_n(x) - f(x)| = (1/2)^n = \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon \Leftrightarrow 2^n > \frac{1}{\varepsilon} \qquad n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$$

тогда если $N_\varepsilon = \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon = \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$ т. ч. $\forall n > N_\varepsilon$ верно

$$\sup |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

значит ф-ция равномерно сходится на $x \in [0\ 1/2]$ по критерию Коши

б) $0 \le x \le 1$

б) $0 \le x \le 1$

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} x^n, & x \in [0, 1) \\ 1^n - 1 = 0, & x = 1 \end{cases}$$

$$\sup |f_n(x) - f(x)| = 1$$

$$\lim \sup |f_n(x) - f(x)| = 1 \ne 0$$

значит неравномерно сходится на $x \in [0, 1]$

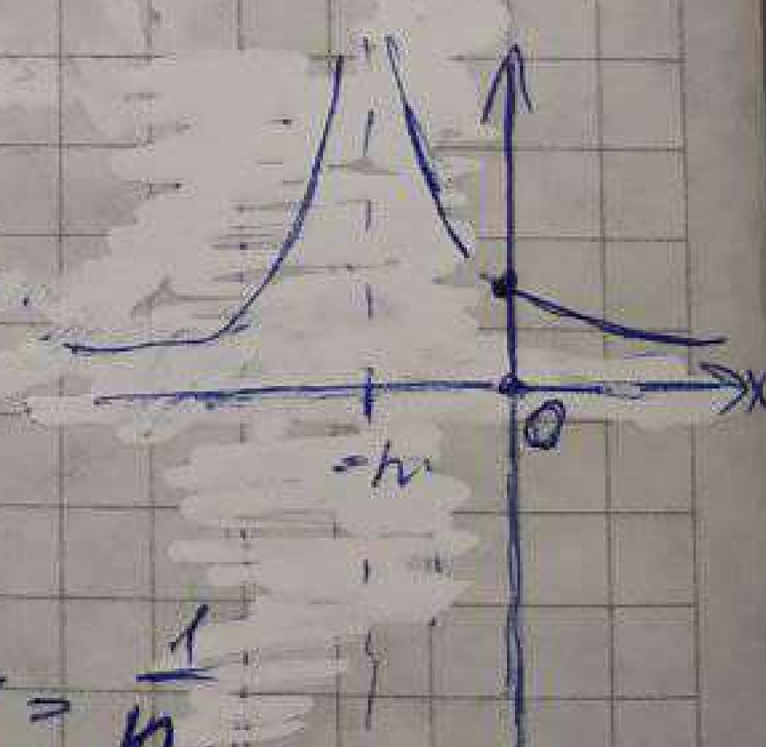
② Демидович №2749

Исследовать на равномерную сходимость

$$f_n(x) = \frac{1}{x+n} \qquad x \in (0, +\infty)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x+n} = 0 = f(x)$$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{n+x}\right| = \frac{1}{|x+n|}$$



т.к. $n \to +\infty$, $x \in (0, +\infty)$

$$\sup |f_n(x) - f(x)| = |f_n(0)| = \frac{1}{|n|} = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$\Rightarrow$ последоват. сх-ся равномерно

(3) Демидович № 2750 Исследо-ть на равномерную сходимость

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}, \quad x \in [0,1]$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{xn}{n+x+1} = x = f(x)$$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{xn}{n+x+1} - x\right| = \left|\frac{xn - xn - x^2 - x}{n+x+1}\right| =$$

$$\left|\frac{-x(x+1)}{n+x+1}\right| = \left|\frac{x(x+1)}{n+x+1}\right| = g(x)$$ на промежутке $x \in [0,1]$ можно убрать модуль.

$$= \frac{(2x+1)(n+x+1) - x^2 - x}{(x+n+1)^2} = \frac{2xn + 2x^2 + 2x + n + x + 1 - x^2 - x}{(x+n+1)^2} =$$

$$= \frac{2xn + x^2 + 2x + n + 1}{(x+n+1)^2} = \frac{x^2 + 2(n+1)x + n + 1}{(x+n+1)^2} =$$

$$= \frac{(x^2+2x+1) + 2xn + n}{(x+n+1)^2} = \frac{\overset{>0}{(x+1)^2} + \overset{>0}{n(2x+1)}}{\underset{>0}{(x+n+1)^2}}$$ при $x[0,1]$, $n \to +\infty$

монотонно возрастает на $x \in [0,1]$

$$\Rightarrow \sup|f_n(x) - f(x)| = g(1) = \left|\frac{1\cdot 2}{n+2}\right| = \frac{2}{n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+2} = 0 \Rightarrow$$ равном. сх-ть.

(4) Демидович № 2752 Исслед-ть на равномерную сх-ть

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$$

а) $x \in [0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2xn}{x^2n^2+1} = 0 = f(x)$$

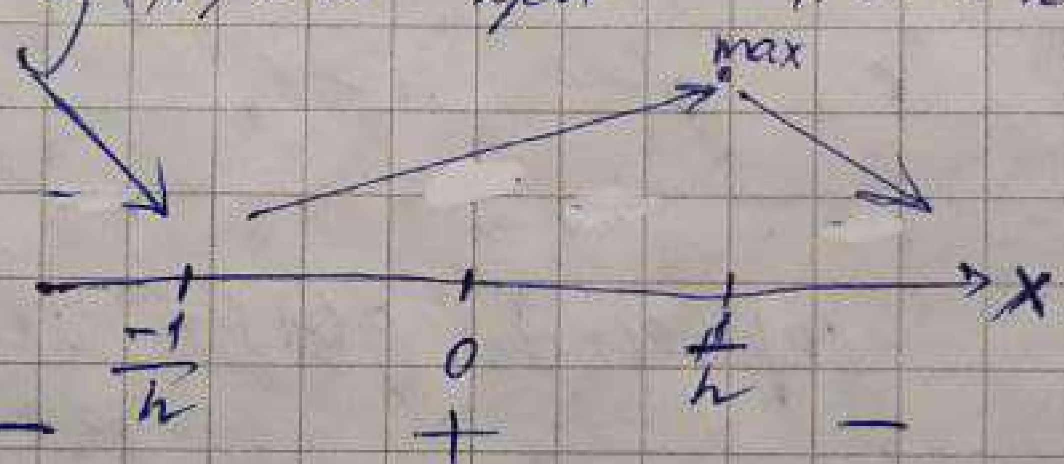
$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{2nx}{n^2x^2+1} - 0\right| = 2n\cdot\frac{|x|}{n^2x^2+1} =$$

т.к. $x \geq 0$

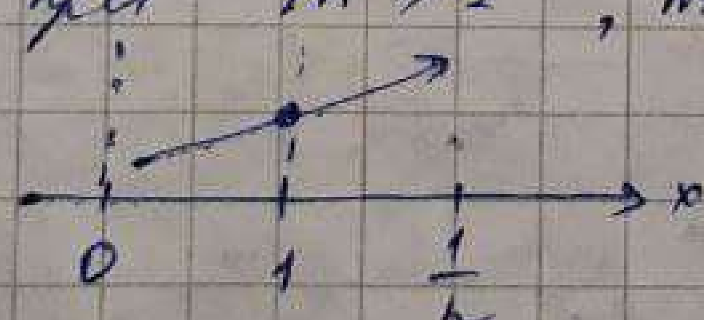
$$= 2n\cdot\frac{x}{n^2x^2+1} = g(x)$$

$$g'(x) = 2n\cdot\frac{n^2x^2+1-2n^2x^2}{(n^2x^2+1)^2} = 2n\,\frac{1-n^2x^2}{(n^2x^2+1)^2}$$

$g'(x) = 0$ при $x = \pm\frac{1}{n}$

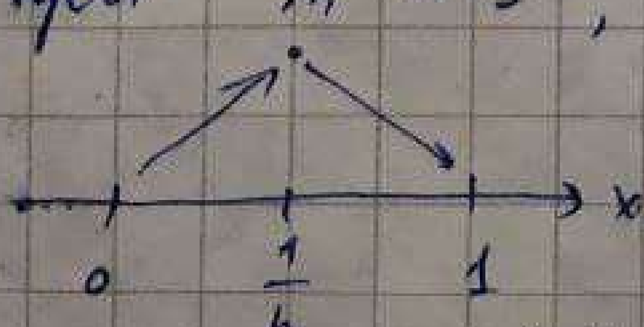


при $1/n \geq 1$, т.е. $n \leq 1$



$$\sup(g(x)) = g(1) = \frac{2n}{n^2+1}$$

при $1/n < 1$, т.е. $n > 1$



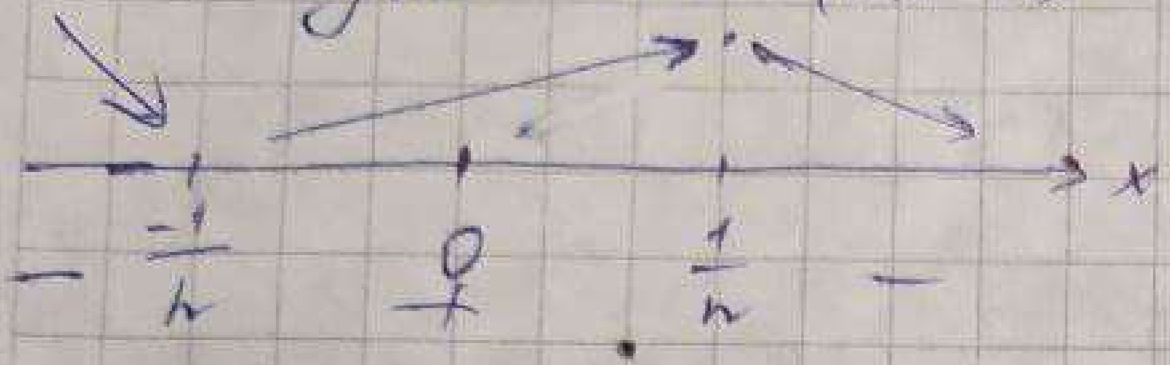
$$\sup(g(x)) = g(1/n) = 1$$

$$\sup(g(x)) = \begin{cases} \frac{2n}{n^2+1}, & n \leq 1 \\ 1, & n > 1 \end{cases} \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \text{неравномер. схо-ся}$$

б) $x \in (1, +\infty)$

Аналогично рассматриваем $g(x) = \frac{2nx}{n^2x^2+1}$

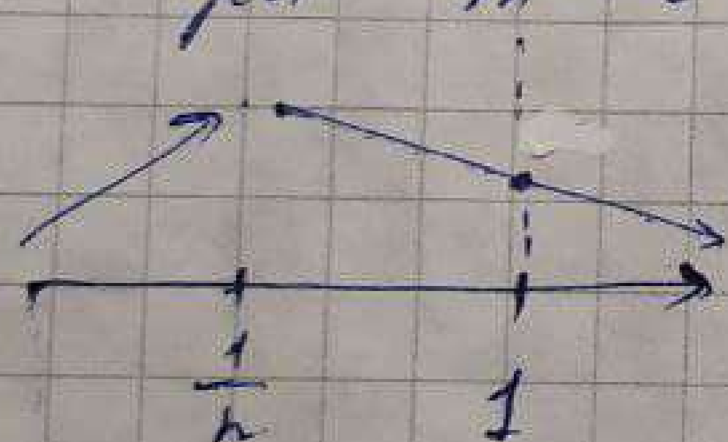
$g'(x) = 2n \cdot \frac{1-n^2x^2}{(n^2x^2+1)^2}$ $\quad g'(x) = 0$ при $x = \pm\frac{1}{n}$



при $1/n \geq 1$, т.е. при $n \leq 1$

$\sup(g(x)) = g(1/n) = 1$

при $1/n < 1$, т.е. при $n > 1$



$\sup(g(x)) = g(1) = \frac{2n}{n^2+1}$

$\sup(g(x)) = \begin{cases} 1, & n \leq 1 \\ \frac{2n}{n^2+1}, & n > 1 \end{cases} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Следовательно, равном. сх-ся

⑤ Демидович №2753 Исследовать на равномер. сходимость

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(x^2 + \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} = |x| = f(x)$$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x|\right|$$

т.к. $n \to +\infty \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1/n^2} > |x|$

$$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x|$$

Заметим: $x^2 + \frac{1}{n^2} \leq \left(|x| + \frac{1}{|n|}\right)^2$

$$0 \leq |f_n(x) - f(x)| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| \leq \sqrt{\left(|x| + \frac{1}{|n|}\right)^2} - |x| =$$

$$= \left||x| + \frac{1}{|n|}\right| - |x| = \frac{1}{|n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\Rightarrow \sup|f_n(x) - f(x)| \to 0 \Rightarrow$ равном. сход-ся