Struktury algebraiczne 1

**Zadanie 1.** W zbiorze  $\{a, b, c, d\}$  określamy działanie \* tabelą:

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	d	a	c
c	c	a	d	b
d	d	c	b	a

Zbadaj, czy \* a) jest działaniem przemiennym b) łącznym c) posiada element neutralny. d) Podaj elementy odwrotne do poszczególnych elementów.

**Zadanie 2.** W zbiorze  $\mathbb Z$  określamy działania  $\odot$ ,  $\circledast$  następująco:  $a\odot b=ab+a+b,\ a\circledast b=a+b+1.$  Zbadaj czy działanie

a) ⊙ jest rozdzielne względem ⊛

b)  $\odot$  jest rozdzielne względem  $\odot$ 

c)  $\circledast$  jest rozdzielne względem  $\odot$ 

d) \* jest rozdzielne względem \*.

**Zadanie 3.** W zbiorze dzielników liczby 6 określamy działania  $\circ$ ,  $\diamond$  następująco:  $a \circ b = NWW(a, b)$ ,  $a \diamond b = NWD(a, b)$ . Zbadaj własności tych działań.

Zadanie 4. Zbadaj czy jest grupą

a) 
$$(G, +)$$
, gdzie  $G = \{x \in \mathbb{R}; x = a\sqrt{2} + b\sqrt{3}, a, b \in \mathbb{Q}\}.$ 

b) G – zbiór obrotów wokół ustalonego punktu z operacją składania.

c) 
$$(G, *), G = \mathbb{R}, a * b = \frac{a+b}{2}.$$

d) 
$$(G, \circ), G = \mathbb{Z}, a \circ b = a + b + 2.$$

e) 
$$(G, \otimes)$$
  $G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}, x \otimes y = x + y + x \cdot y.$ 

Zadanie 5. Pokaż, że

a) 
$$(A, +, \cdot)$$
 jest pierścieniem, gdzie  $A = \{x \in \mathbb{R}, x = a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Z}\}$ 

b) 
$$(B, +, \cdot)$$
 jest pierścieniem, gdzie  $B = \{x \in \mathbb{Q}, x = a/2^k, a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ 

c) 
$$(\mathbb{Q}(2), +, \cdot)$$
 jest ciałem, gdzie  $\mathbb{Q}(2) = \{x \in \mathbb{R}; x = p + q\sqrt{2}; \ p, q \in \mathbb{Q}\}.$ 

**Zadanie 6.** Wypisz elementy ciała  $\mathbb{Z}_7$ . Zbuduj tabelę dla dodawania w  $\mathbb{Z}_7$  i dla mnożenia w  $\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}$ . Postępując analogicznie dla  $\mathbb{Z}_6$  uzasadnij, że nie jest to ciało.

Zadanie 7. Przedstaw w postaci algebraicznej liczby:

a) 
$$(4+i)(5-i)+(1+3i)(2+7i);$$
 b)  $\frac{1+2i}{i-3}+\frac{3+4i}{2-3i};$  c)  $\frac{(1-i)^2}{(-2+2i)^2i^{63}}.$ 

Zadanie 8. Zapisz podane liczby w postaci trygonometrycznej i wykładniczej:

a) 
$$z = 4;$$
 b)  $z = i;$  c)  $z = 1 + i;$  d)  $z = 1 + i\sqrt{3};$   
e)  $z = \sqrt{3} - i;$  f)  $z = -1 + i;$  g)  $z = -\sqrt{3} - i;$  h)  $z = -1 + i\sqrt{3}.$ 

Zadanie 9. Oblicz

a) 
$$(1+i)^{10}$$
; b)  $(\sqrt{3}-i)^{30}$ ; c)  $(2\sqrt{3}+2i)^{12}$ ; d)  $(-1+i\sqrt{3})^{20}$ .

Zadanie 10. Rozwiaż równania

a) 
$$z^2 + 49 = 0;$$
 b)  $z^2 - 6z + 13 = 0;$  c)  $z^4 - 4i\sqrt{3}z^2 - 16 = 0.$