TSP-disco

May 2020

1 23-03 Лекция

1.1 Приближенные алгоритмы

Пусть в задаче минимизации f на множестве S: x_* - оптимальное решение, а x_A - решение, которое нашел алгоритм A, тогда можно определить

$$\text{Approximation ratio} : \frac{f(x_A)}{f(x_*)}$$

$$\text{Domination number} : \ \{x \in S | f(x) \geq f(x_A)\}$$

1.2 Алгоритм ближайшего соседа (NN)

Задача TSP заключается в построении для заданного множества точек, найти гамильтонов цикл по всем вершинам, который имеет суммарно минимальную длины. Рассматривают Евклидову(частный случай метрической), метрическую(выполнено нер-во треугольника для весов), общий TSP(ничего нельзя сказать про аппроксимацию алгоритмов).

Алгоритм ближайшего соседа начинает из произвольной вершины, на каждом шаге идет в ближайшую. Может совсем не давать точного решения, т.к., например, возникают пересекающиеся ребра, которые можно убрать, например, 2-заменами(k-заменами). Можно выполнить комбинацию: NN+k-замена. Запуск алгоритма можно делать несколько раз из разных вершин, при этом получать разные решения.

Рассматриваются только метрические задачи. При этом, существуют c_1, c_2, такие, что

- Для любой задачи с n точками approximation ratio алгоритма NN нет превосходит $c_1 \log n$
- Для любого достаточно большого n существует конкретная задача с n точками, для которой approximation ratio алгоритма NN не меньше $c_2 \log n$

1.3 Алгоритм кратчайших вставок

Алгоритм начинается с выбора кратчайшего ребра, после этого на каждом шаге выбираем еще не посещенную вершину, ближайшую к уже покрытым, вставляем вершину в текущий цикл вместо такого ребра, что "цена вставки"минимальна.

Оба алгоритма оказываются жадными. NI оказывается лучше тем, что в любой момент он имеет цикл для некоторого подграфа исходного графа.

В метрическом случае алгоритм NI строит цикл, вес которого не более, чем вдвое превосходит минимально возможный.

1.4 Алгоритм Кристофидеса

Алгоритм Кристофидеса или алгоритм Кристофидеса-Сердюкова — это алгоритм поиска приближённых решений задачи коммивояжёра для случаев, когда расстояния образуют метрическое пространство (симметричны и удовлетворяют неравенству треугольника). Алгоритм является аппроксимационным алгоритмом, который гарантирует, что решения находятся в пределах $3/2$ от длины оптимального решения. Он обладает лучшим аппроксимационным коэффициентом, который был доказан для задачи коммивояжёра на метрических пространствах общего вида, хотя известны лучшие приближения для некоторых специальных случаев.

Алгоритм можно описать на псевдокоде следующим образом(вход: граф $G = (V, w)$).

1. Создаём минимальное остовное дерево T графа G.
2. Пусть O будет набором вершин с нечётными степенями в T. Согласно лемме о рукопожатиях, O имеет чётное число вершин.
3. Находим совершенное паросочетание M минимального веса в порождённом подграфе, заданным вершинами из O.
4. Комбинируем рёбра M и T с образованием связного мультиграфа H, в котором каждая вершина имеет чётную степень.
5. Образуем эйлеров цикл в H.
6. Преобразуем цикл, найденный на предыдущем шаге, в гамильтонов цикл путём пропуска повторяющихся вершин (сокращение).