

## 1 DLS

DLS-задача:

$$(E, \mathfrak{F}); \quad \mathfrak{F} \subset 2^E; \quad w : E \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}; \quad \operatorname{argmin}_{A \in \mathfrak{F}} \sum_{e \in A} w(e) = ?$$

**Isolating lemma:**

Если  $w(e)$  равномерно выбирается из  $\{1, 2, \dots, N\}$ , то вероятность того, что решение DLS единственно  $\geq (1 - \frac{1}{N})^{|E|}$

**Д-во:** тривиально.

## 2 Local search

Считаем, что каждому решению  $A \in S$ , где  $S$  - множество решений, сопоставлена некоторая окрестность  $N(A) \in 2^S$ . Алгоритм локального поиска:

- Стартуем из случайного решения
- Пока в окрестности решения, в котором мы находимся, есть решение лучше - переходим туда

По сути это просто аналог град. спуска для дискретного случая.

Система окрестностей **сильно связная**, если перемещаясь по окрестностям можно из любой точки (решения) попасть в любую другую. **Точная**, если начиная из любой точки мы обязательно попадем в глобальный оптимум (аналог сильной выпуклости в непрерывной оптимизации). **Полиномиально обозримая**, если для любой точки можно за полиномиальное время найти лучшую из ее окрестности.

Локальных оптимумов мб экспоненциально много!

Борьба с застреванием в локальных оптимумах:

- Множественные запуски из разных точек
- Переменная глубина: эвристика Кернигана-Лина
- Имитация отжига
- Табу-поиск

### 2.1 Kernigan-Lin

**Задача о разбиении графа** Найти такое подмножество вершин  $V' \subset V$ , что  $\alpha \leq \frac{|V'|}{|V|} \leq 1 - \alpha$  и при этом сумма весов ребер, ведущих из  $V'$  в  $V \setminus V'$  как можно меньше.

Окрестность вершин: из  $V$  в  $V'$  перетащить  $k$  вершин и обратно столько же.

Идея: разрешаем переходить в локальном поиске в точку похуже, но из всех зол выбираем меньшее. Перемещаясь в точку похуже, фиксируем изменения, чтоб на следующем шаге не скатиться обратно. Таким образом

мы надеемся выбраться из локального оптимума и найти что-то получше. Если нам удастся за сколько-то шагов найти что-то лучшее, чем локальный минимум, из которого мы выбирались, то продолжаем поиск, иначе завершаем.

## 2.2 Имитация отжига

- Есть некоторая "температура которая убывает с каждым шагом локального поиска.
- Мы всегда храним самую лучшую найденную нами точку и значение функции в ней.
- На каждом шаге мы случайно выбираем соседа текущей точки, причем чем выше температура, тем из более широкой окрестности мы выбираем.
- Если мы нашли что-то лучше, чем наш лучший результат на текущий момент, то запоминаем.
- Перемещаемся в новую точку лишь с какой-то вероятностью, зависящей от  $T$ .

## 2.3 Табу-поиск

Предпосылки: в любом решении, найденном локальным поиском, обнаруживаются какие-то одни и те же элементы (например, один и тот же предмет в задаче Knapsack).

### Табу-поиск: диаграмма

