第 2 章　线性方程组的解法（习题详细参考答案）

[习题 1]．在三位十进制的限制下，试分别用顺序 Gauss 消去法和列主元素 Gauss 消去法求解方程组

$$\begin{cases} 0.5x_1+1.1x_2+3.1x_3=6 \\ 5x_1+0.96x_2+6.5x_3=0.96 \\ 2x_1+4.5x_2+0.36x_3=0.02 \end{cases}$$

（精确解为 $x_1=-2.6, x_2=1, x_3=2$）

解：1. 顺序 Gauss 消元法

$k=1, m_{ik}=a_{i1}^{(1)}/a_{11}^{(1)} (i=2,3)$, 于是 $m_{21}=10 \quad m_{31}=4$

$$\left[A^{(1)},b^{(1)}\right]=\begin{bmatrix} 0.5 & 1.1 & 3.1 & 6 \\ 5 & 0.96 & 6.5 & 0.96 \\ 2 & 4.5 & 0.36 & 0.02 \end{bmatrix} \to \left[A^{(2)},b^{(2)}\right]=\begin{bmatrix} 0.5 & 1.1 & 3.1 & 6 \\ 0 & -10.0 & -24.6 & -59.0 \\ 0 & 0.1 & -12.04 & -23.98 \end{bmatrix}$$

$k=2, m_{ik}=a_{i2}^{(2)}/a_{22}^{(2)} (i=3)$, 于是 $m_{32}=-\dfrac{1}{100}$

$$\left[A^{(2)},b^{(2)}\right]=\begin{bmatrix} 0.5 & 1.1 & 3.1 & 6 \\ 0 & -10.0 & -24.6 & -59.0 \\ 0 & 0.1 & -12.04 & -23.98 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0.5 & 1\text{[illegible]} & \text{[illegible]} & 6 \\ 0 & \text{[illegible]} & \text{[illegible]}24.6 & -59.0 \\ \text{[illegible]} & \text{[illegible]} & -12.2 & -24.6 \end{bmatrix}$$

回代计算　求解 $A^{(3)}x=b^{(3)}$ 得 [illegible]

$$x_3=b_3^{(3)}/a_{33}^{(3)} \text{[illegible]}$$

$$x_2=(b_2^{(2)} \text{[illegible]} a_{22}^{(2)}=0\text{[illegible]}$$

$$x_1=(\text{[illegible]} -a_{12}^{(1)} \text{[illegible]} -2.62$$

2. 列主元 Gauss [illegible]法

$$k=1\text{时，}\left[A^{(1)},b^{(1)}\right]=\begin{bmatrix} \text{[illegible]} & \text{[illegible]} & 3.1 & 6 \\ \boxed{5} & \text{[illegible]}.96 & 6.5 & 0.96 \\ 2 & 4.5 & 0.36 & 0.02 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{交换1.2行}} \begin{bmatrix} 5 & 0.96 & 6.5 & 0.96 \\ 0.5 & 1.1 & 3.1 & 6 \\ 2 & 4.5 & 0.36 & 0.02 \end{bmatrix}$$

$$m_{21}=0.5/5=0.1 \qquad m_{31}=2/5=0.4$$

$$\left[A^{(2)},b^{(2)}\right]=\begin{bmatrix} 5 & 0.96 & 6.5 & 0.96 \\ 0 & 1.00 & 2.45 & 5.90 \\ 0 & 4.12 & -2.24 & -0.364 \end{bmatrix}$$

$$k=2\text{时，}\left[A^{(2)},b^{(2)}\right]=\begin{bmatrix} 5 & 0.96 & 6.5 & 0.96 \\ 0 & 1.00 & 2.45 & 5.90 \\ 0 & \boxed{4.12} & -2.24 & -0.364 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{交换2.3行}} \begin{bmatrix} 5 & 0.96 & 6.5 & 0.96 \\ 0 & 4.12 & -2.24 & -0.364 \\ 0 & 1.00 & 2.45 & 5.90 \end{bmatrix}$$

$$m_{32}=1.00/4.12=0.243$$

网站：www.91tech.net

联系方式：polylove@eyou.com，电话：89855012

$$\begin{bmatrix}1.2969 & 0.8648 & 0.8642\\ 0.2161 & 0.1441 & 0.1440\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1.2969 & 0.8648 & 0.8642\\ 0 & 1\times10^{-8} & -1\times10^{-8}\end{bmatrix}$$

回代后得 $x_2=-1$，$x_1=1.3331791$，此结果与精确解 $x_1=2$，$x_2=-2$ 相差甚远。系数矩阵 A 的条件数

$$cond_\infty(A)=\|A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1.2969 & 0.8648\\ 0.2161 & 0.1441\end{bmatrix}^{-1}=-285.582102\begin{bmatrix}0.1441 & -0.8648\\ -0.2161 & 1.2969\end{bmatrix}$$

$$Cond_\infty(A)=\|A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty=2.1617\times1.513\times10^8=3.2706521\times10^8$$

方程组病态严重，虽然使用列主元素 Gauss 消去法求解，且取八位十进制，也得不出好结果。

[习题 10]．设 A 是正交矩阵，试证:A 的（谱范数）条件数等于 1。

证明：利用 A 的正交性证明。因 A 是正交阵，故 $A^{-1}=A^T$．

$$\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}\qquad\therefore\quad \|A\|_2=1。$$

[习题 11]．设 A 是非奇异矩阵，$b\neq0,\tilde{x}$ 是方程组 $Ax=b$ 的一个近似解，x^* 表示其精确解，记 $r=b-A\tilde{x}$（称为残差），证明：$\dfrac{\|x^*-\tilde{x}\|}{\|x^*\|}\le cond(A)\dfrac{\|r\|}{\|b\|}$

证明：由

$$x^*=A^{-1}b=A^{-1}(r+A\tilde{x})$$

$$x^*-\tilde{x}=A^{-1}r$$

$$\|x^*-\tilde{x}\|\le\|A^{-1}\|\|r\|\qquad \|b\|\le\|A\|\|x^*\|$$

$$\|x^*\|\ge\frac{\|b\|}{\|A\|}\qquad\therefore\ \frac{\|x^*-\tilde{x}\|}{\|x^*\|}\le cond(A)\frac{\|r\|}{\|b\|}$$

[习题 12]．设 $A=\begin{bmatrix}1 & 0.99\\ 0.99 & 0.98\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ 已知方程组 $Ax=b$ 的精确解为 $x^*=(100,-100)^T$

(1) 计算 A 的（行范数）条件数

(2) 取 $\tilde{x}=(1,0)^T$，计算残差 $r=b-A\tilde{x}$，

(3) 取 $\tilde{x}=(100.5,-99.5)^T$，计算残差 $r=b-A\tilde{x}$。

本题计算结果说明什么问题？

解：(1)　$\|A\|_\infty=1.99$

$$A^{-1}=\frac{1}{-0.0001}\begin{bmatrix}0.98 & -0.99\\ -0.99 & 1\end{bmatrix}=-10000\begin{bmatrix}0.98 & -0.99\\ -0.99 & 1\end{bmatrix}$$

$$\|A^{-1}\|_\infty=1.99\times10^4\qquad cond(A)=\|A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty=3.9601\times10^4$$

(2) $r = b - A\tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0.99 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.01 \end{bmatrix}$

(3) $r = b - A\tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 100.5 \\ -99.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.995 \\ 1.985 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.995 \\ -0.985 \end{bmatrix}$

分析：（2）的$\|r\|_\infty <$（3）的$\|r\|_\infty$并不说明(2)的$\tilde{x}$的精度高于(3)的$\tilde{x}$。这是因为系数矩阵 A 的病态比较严重，残向量的范数小不一定能说明近似解的精度高。

[习题 13]．试判断下列迭代公式产生的向量序列$\{x^{(k)}\}$是否收敛，其中d_1, d_2, d_3是常数，$x^{(0)} \in R^3$任取，

（1）$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$

$k = 0,1,2\cdots$

（2）$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & -0.1 \\ 0 & -0.8 & 0.1 \\ -0.4 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$

$k = 0,1,2\cdots$

解：（1）迭代矩阵$G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & \text{[illegible]} & \text{[illegible]} \end{bmatrix}$　$\rho(G) = 5$　[illegible] G 的谱半径$\rho(G) = 5 > 1$，故$\{x^{(k)}\}$不收敛。

（2）迭代矩阵 [illegible] $\|_\infty =$ [illegible] $\{x^{(k)}\}$收敛。

[习题 14]．设 [illegible]

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \ \ x_3 = \text{[illegible]} \\ -x_1 + 4x_2 + 2\text{[illegible]} \\ 2x_1 - 5x_2 + 10x_3 = \text{[illegible]} \end{cases}$$

用 Jacobi 迭代法求解，要求满足$\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \|_\infty \le 10^{-4}$时迭代终止，并判断迭代过程是否收敛？

解：因系数矩阵是主对角线按行严格占优阵，故用下面的 Jacobi 迭代法求解必收敛：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.4x_2^{(k)} - 0.2x_3^{(k)} - 2.4 \\ x_2^{(k+1)} = 0.25x_1^{(k)} - 0.5x_3^{(k)} + 2.5 \\ x_3^{(k+1)} = -0.2x_1^{(k)} + 0.5x_2^{(k)} + 0.1, \quad k = 0,1,2,\cdots \end{cases}$$

$x^* = (-3.090900373, 1.094597704, 1.265449512)^T$

[习题 15]．讨论用 Jacobi 迭代法求解方程组$Ax = b$的收敛性，其中

（1）$A=\begin{bmatrix}2&-1&1\\1&1&1\\1&1&-2\end{bmatrix}$，（2）$A=\begin{bmatrix}1&2&-2\\1&1&1\\2&2&1\end{bmatrix}$，（3）$A=\begin{bmatrix}1&-2&2\\-1&1&-1\\-2&-2&1\end{bmatrix}$，（4）$A=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-1&1&-1\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}$

解：（1）Jacobi 迭代阵

$$A_J=-D^{-1}(L+U)=-\begin{bmatrix}1/2&&\\&1&\\&&-1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&+1/2&-1/2\\-1&0&-1\\1/2&1/2&0\end{bmatrix}$$

A_J 的特征多项式

$$\det(\lambda I-A_J)=\begin{bmatrix}\lambda&-0.5&0.5\\1&\lambda&1\\-0.5&-0.5&\lambda\end{bmatrix}=\lambda(\lambda^2+1.25);$$

其特征值为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=\sqrt{1.25}i$，$\lambda_3=-\sqrt{1.25}i$，故有 $\rho(A$ [illegible] $\sqrt{1.25}$

因而 Jacobi 迭代法不收敛。

（2）Jacobi 迭代阵

$$A_J=-D^{-1}(L+U)=-\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2&-2\\1&0&1\\2&2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-2&2\\-1&0&-1\\-2&-2&0\end{bmatrix}$$

A_J 的特征多项式

$$\det(\lambda I-A_J)=\begin{bmatrix}\lambda&2&-2\\1&\lambda&1\\2&2&\lambda\end{bmatrix}$$ [illegible]

故有 $\rho(A_J)=0$ [illegible] Jacobi 迭代法收敛。

（3）同理，收敛。　　　　（4）同理，发散。

[习题 16]. 讨论用 Gauss-Seidel 迭代法求解第 14 题的方程组，当满足 $\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|_\infty<10^{-4}$ 时结束迭代，并判断迭代过程是否收敛？

$$\begin{cases}5x_1+2x_2+x_3=-12\\-x_1+4x_2+2x_3=10\\2x_1-5x_2+10x_3=1\end{cases}$$

解：用下列 Gauss-Seidel 迭代法求解必收敛（理由同第 14 题）

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=-0.4x_2^{(k)}-0.2x_3^{(k)}-2.4\\x_2^{(k+1)}=0.25x_1^{(k+1)}-0.5x_3^{(k)}+2.5\\x_3^{(k+1)}=-0.2x_1^{(k+1)}+0.5x_2^{(k+1)}+0.1\end{cases}\qquad k=0,1,2,\cdots$$

[习题 17]. 讨论用 Gauss-Seidel 迭代法求解方程组 $Ax=b$ 的收敛性，其中 A 由第 15 题给出。

解：（1）迭代矩阵

$$G_G=-(D+L)^{-1}U=-\begin{bmatrix}2&0&0\\1&1&0\\1&1&-2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0&-1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0.5&0&0\\-0.5&1&0\\0&0.5&-0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=-\begin{bmatrix}0&-0.5&0.5\\0&0.5&0.5\\0&0&0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0.5&-0.5\\0&-0.5&-0.5\\0&0&-0.5\end{bmatrix}$$

可见，G_G 的特征值 $\lambda_1=0$、 $\lambda_2=\lambda_3=0.5$，故有 $\rho(G_G)=0.5<1$，所以 G-S 迭代法必收敛。

（2）迭代矩阵

$$G_G=-(D+L)^{-1}U=\begin{bmatrix}0&-2&2\\0&2&-3\\0&0&2\end{bmatrix},\quad \rho(G_G)=2>1,\quad \therefore 发散$$

（3）迭代矩阵

$$G_G=-(D+L)^{-1}U=\begin{bmatrix}0&2&-2\\0&2&-1\\0&8&-6\end{bmatrix},\quad \rho(G_G)=2^{[illegible]}\ [illegible],\quad \therefore 发散$$

（4）迭代矩阵

$$G_G=-(D+L)^{-1}U=\begin{bmatrix}[illegible]&[illegible].5&0\\ [illegible]&-0.5&[illegible]\\0&[illegible]&[illegible]\end{bmatrix},\quad \rho(G_G)=\alpha\in(-1,-2),\quad \therefore 发散$$

[习题 18]. 为求[illegible]

$$\begin{cases}x_1+2x_2-5x_3=[illegible]\\10x_1-2x_2-0x_3=[illegible]\\2x_1+10x_2-x_3=15\end{cases}$$

试写出一个必收敛的迭代公式，并说明收敛的理由。

解：把原方程改写为

$$\begin{cases}10x_1-2x_2-0x_3=3\\2x_1+10x_2-x_3=15\\x_1+2x_2-5x_3=10\end{cases}$$

由于此时的系数矩阵是主对角元素按行严格占优阵，故按此形式使用 Jacobi 迭代法必收敛，迭代公式为

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=0.2x_2^{(k)}+0.3\\x_2^{(k+1)}=-0.2x_1^{(k)}+0.1x_3^{(k)}+1.5\\x_3^{(k+1)}=0.2x_1^{(k)}+0.4x_2^{(k)}-2,\qquad k=0,1,2,\cdots\end{cases}$$

第 5 章 插值与逼近（详细参考答案）

[习题 1]. 给定数表

x	10	11	12	13	14
$f(x)$	210	230	240	235	230

试建立 $f(x)$ 的四次 Lagrange 插值多项式。

解：插值基函数为 $l_k(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j},\quad k=0,1,\cdots,n$

$$p_4(x)=\frac{x-11}{-1}\cdot\frac{x-12}{-2}\cdot\frac{x-13}{-3}\cdot\frac{x-14}{-4}\times 210+\frac{(x-10)(x-12)(x-13)(x-14)}{1\times(-1)\times(-2)\times(-3)}\times 230$$

$$+\frac{(x-10)(x-11)(x-13)(x-14)}{2\times1\times(-1)\times(-2)}\times 240+\frac{(x-10)(x-11)(x-\text{[illegible]})}{1\times2\times\text{[illegible]}}\times 235$$

$$+\frac{(x-10)(x-11)(x-12)(x-13)}{4\times3\times2\times1}\times 230$$

$$=8.75(x-11)(x-12)(x-13)(x-14)-38.3\text{[illegible]}(x-10)(x-12)(x-13)(x-14)$$

$$+60(x-10)(x-11)(x-\text{[illegible]})(x-14)-39\text{[illegible]}(x-10)(x-11)(x-12)(x-14)$$

$$+9.583333333(x\text{[illegible]})(x-\text{[illegible]})$$

[习题 2]. 设 $l_k(x)(k$ [illegible]) 是以 [illegible] $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为结点的 Lagrange 插值基函数，证明：

(1) $\sum_{k=0}^{n}x_k^m l_k(x)\equiv$ [illegible] $m=$ [illegible]

(2) $\sum_{k=0}^{n}(x_k-x)^m l_k(x)\equiv 0;$ [illegible] $=1,2,\cdots,n$

证明：(1) 令 $f(x)=x^m$ 则 $f(x)$ 的插值多项式为 $\sum_{k=0}^{n}x_k^m l_k(x)$。而该插值公式的余项为

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)\qquad 而\ (x^m)^{(n+1)}=0$$

故 $\sum_{k=0}^{m}x_k^m l_k(x)=x^m$。

(2) 方法 1:

$$\sum_{j=0}^{n}(x_j-x)^k l_j(x)=\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}x_j^{k-i}x^i l_j(x)\underline{\underline{利用\ (1)}}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}x_j^{k-i}x_j^i=(x_j-x_j)^2=0$$

x	-2	-1.5	0.5	1	1.5
$f(x)$	21	23	22	21	20

试建立差商表，并写出 $f(x)$ 的四次 Newton 插值多项式。

解：

x	$f(x)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
-2	21				
-1.5	23	4			
0.5	22	-0.5	-1.8		
1	21	-2	-0.6	0.4	
1.5	20	-2	0	0.2	-0.057142857

故四次 Newton 插值多项式为：

$$P_4(x)=21+4(x+2)-1.8(x+2)(x+1.5)+0.4(x+2)(x+1.5)9x-0.5)-$$

$$\frac{2}{35}(x+2)(x+1.5)(x-0.5)(x-1)$$

[习题 6]. 设实数 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 互异，证明差商具有下列性质：

(1) 若 $F(x)=cf(x)$，则 $F[x_0,x_1,\cdots,x_n]=cf[x_0,x_1,\cdots,x$

(2) 若 $F(x)=f(x)+g(x)$，则 $F[x_0,x_1,\cdots,x_n]=f[\cdots$ $\cdots_n]+g[x_0,x_1,\cdots,x_n]$

解：1）用数学归纳法证明：

当 $n=1$ 时 $f[x_0,x_1]$ $\cdots$ $\frac{\cdots f(x_0)}{\cdots x_0}$

$\because F(x)=cf$ $\cdots$ $[x_0,x$ $\cdots$ $,x_1]$

假设 $F[\cdots,x_n]=c$ $\cdots$ $,x_n]$ 成立，则

$F[x_0,x_1,\cdots,x_n,\cdots$ $\frac{\cdots_{+1},x_n,\cdots,x_1]-F[x_n,x_{n-1},\cdots,x_0]}{x_{n+1}-x_0}$

$$=\frac{cf[x_{n+1},x_n,\cdots,x_1]-cf[x_n,x_{n-1},\cdots,x_0]}{x_{n+1}-x_0}=cf[x_0,x_1,\cdots,x_{n+1}]$$

2）同理也可用数学归纳法证明。

[习题 7]. 设 $f(x)=\sum_{j=0}^{n}a_jx^j$，实数 $x_0,x_1,\cdots,x_m(m>n)$ 互异，试计算 $f[x_0,x_1,\cdots,x_k](k=n,n+1,\cdots,m)$ 的值。

解：

$\boxed{\begin{array}{l} x_0,x_1,\cdots,x_n\in[a,b] \text{ 则 n 阶差商与导数关系如下：} \\ f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!},\xi\in[a,b] \end{array}}$

$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=f$

[习题 39]. 证明：函数系 $\{\sin x, \sin 2x, \sin 3x\}$ 在点集 $X = \{\frac{\pi}{4}i, i = 0,1,\cdots,8\}$ 上线性无关。

[习题 40]. 利用最小二乘原则求一个形如 $y = a + bx^2$ 的经验公式，使它于下列数据拟合

x	19	25	31	38	44
$f(x)$	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

解：

$$A = \begin{bmatrix} 19 & 361 \\ 25 & 625 \\ 31 & 961 \\ 38 & 1444 \\ 44 & 1936 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} 19.0 \\ 32.3 \\ 49.0 \\ 73.3 \\ 97.8 \end{bmatrix}$$

法方程为：$A^T A c = A^T y$　解方程得到 $c_0 = 1.835198048, c_1 = 0.051689483$

[习题 41]. 给定数表

x	−0.75	−0.5	−0.25	0	0.25	0.5	[illegible]75
$f(x)$	0.33	0.88	1.44	2.00	2.56	3.1[illegible]	[illegible]

试分别用一次、二次、三次多项式根据最小二乘原则拟合这些数据，并[illegible]

解：可用构造正交多项式的方法

1. 一次　$1, x$ 为关于点集 x 的正交多项式系。

2. 二次　$1, x, x^2 - 0.4375$

3. 三次　$1, x, x^2 - 0.43$[illegible]点集[illegible]项式系。

[习题 42]. 欲求一个形如[illegible]的经验[illegible]与实验数据

t	1	[illegible]	4	[illegible]	16	32	64
s	4.2[illegible]	[illegible]02	[illegible]	3.59	3.44	3.02	2.59

相拟合，试用最小二乘法确定其[illegible]c 和 λ。

解：$\ln s = \ln c + \lambda \ln t$　记[illegible]$s, c_0 = \ln c, \lambda = c_1, x = \ln t$ 则

x	0	0.69314718	1.386294361	2.079441542	2.772588722	3.465735903	4.15888308
y	1.439835128	1.391281903	1.342864803	1.278152203	1.235471471	1.105256831	0.951657875

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0.69314718 \\ 1 & 1.386294361 \\ 1 & 2.079441542 \\ 1 & 2.772588722 \\ 1 & 3.465735903 \\ 1 & 4.158883083 \end{bmatrix}$$

法方程为：$A^T A c = A^T y$　解方程得到 c_0, c_1，然后回代即可得到本题的解。

[习题 43]. 给定数表

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9

第6章 数值积分（详细参考答案）

[习题1]. 记 $I(f)=\int_{-1}^{1}f(x)dx$，求下列求积公式的代数精度：

（1） $I(f)\approx\frac{2}{3}[f(-1)+f(0)+f(1)]$ （2） $I(f)\approx\frac{1}{3}[f(-1)+4f(0)+f(1)]$

解：（1）当 $f(x)=1$，$f(x)=x$ 时，求积公式都成为等式。而当 $f(x)=x^2$ 时，求积公式左端值不等于右端值，故此求积公式具有一次代数精度。

（2）当 $f(x)=1$，$f(x)=x$，$f(x)=x^2$ 时，求积公式都成为等式。而当 $f(x)=x^3$ 时，求积公式左端值不等于右端值，故此求积公式具有二次代数精度。

[习题2]. 给定求积公式 $\int_{-2h}^{2h}f(x)dx\approx\lambda_0f(-h)+\lambda_1f(0)+\lambda_2f(h)(h>0)$，试确定 $\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2$，使此求积公式的代数精度尽量高。

解：当 $f(x)=1$ 时，$4h=\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2$；当 $f(x)=x$ 时，$0=-\lambda_0h+\lambda_2h$

当 $f(x)=x^2$ 时，$\frac{16h^3}{3}=\lambda_0h^2+\lambda_2h^2$，当 $f(x)=x^3$ 时，$0=-\lambda_0h^3+\lambda_2h^3$

解之得：$\lambda_1=-\frac{4h}{3},\lambda_2=\frac{8h}{3},\lambda_0=\frac{8h}{3}$

当 $f(x)=x^4$ 时，求积公式左端值≠右端值，故求积公式代数精度为3。

[习题3]. 试确定节点 x_0,x_1，使求积公式 $\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx f(x_0)+f(x_1)$ 具有尽可能高的代数精度。

解：当 $f(x)=1$ 时，$2=1+1$，左边=右边。

当 $f(x)=x$ 时，$0=x_0+x_1$ 当 $f(x)=x^2$ 时，$\frac{2}{3}=x_0^2+x_1^2$

当 $f(x)=x^3$ 时，$0=x_0^3+x_1^3$ 当 $f(x)=x^4$ 时，$\frac{2}{5}\neq x_0^4+x_1^4$

解之得：$x_0=-\frac{\sqrt{3}}{3},x_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 故有三次代数精度。

[习题4]. 试以 $x_0=-h,x_1=0,x_2=h,(0<h<1)$ 为求积结点，推出计算积分 $\int_{-1}^{1}f(x)dx$ 的插值型求积公式及其截断误差；并确定 h 的值，使此求积公式具有尽可能高的代数精度。

解：$\lambda_0^{(1)}=\int_{-1}^{1}\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_0-x_2}dx=\int_{-1}^{1}\frac{x^2-hx}{2h^2}dx=\frac{1}{3h^2}$

$$\lambda_1^{(1)}=\int_{-1}^{1}\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\cdot\frac{x-x_2}{x_1-x_2}dx=\int_{-1}^{1}\frac{x^2-h^2}{-h^2}dx=2-\frac{2}{3h^2}$$

$$\lambda_2^{(1)}=\int_{-1}^{1}\frac{x-x_0}{x_2-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_2-x_1}dx=\int_{-1}^{1}\frac{x^2+hx}{2h^2}dx=\frac{1}{3h^2}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{3h^2}[f(-h)+(6h^2-2)f(0)+f(h)]$$

截断误差 $R=\int_{-1}^{1}\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}x(x^2-h^2)dx,\xi\in(-1,1)$，且依赖于 x。

当 $h=\sqrt{0.6}$ 时，求积公式达到最高代数精度：五次。

[习题 5]. 试证：$n+1$ 个结点的求积公式如果具有 n 次或大于 n 次的代数精度，则它是插值型求积公式。

证明：只需证明在所给条件下求积公式（6.1）中的求积系数 λ_k 为 $\lambda_k=\int_a^b l_k(x)dx,k=0,1,\cdots,n$，其中 $l_k(x)(k=0,1,\cdots,n)$ 是以求积结点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为插值结点的 Lagrange 插值基函数。为此，利用所给求积公式计算积分 $\int_a^b l_i(x)dx(i=0,1,\cdots,n)$ 的值即可证明。

[习题 6]. 试推出下列两个求积公式的截断误差表达式，并判断其代数精度。

（1） $\int_a^b f(x)dx\approx(b-a)f(a)$ （2） $\int_a^b f(x)dx\approx(b-a)f(\frac{a+b}{2})$

解：（1）设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有一阶连续导数，在区间 $[a,x]$ 上 [illegible] 用 Lagrange 中值定理即可推出求积公式的截断误差为 $R=\frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2,\eta\in(a,b)$ 求积公式 [illegible] 代数精度。

（2）设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有 [illegible] 续导数，[illegible] 在点 $x_0=\frac{a+b}{2}$ 处展开的一阶 Taylor 公式即可推出求积公式的截断误差为 R [illegible] $(b-$[illegible]$,b)$ 求积公式具有一次代数精度。

[习题 7]. 试以 $x_0=0,$ [illegible] $x_2=2$[illegible] 点，推出计算积分 $\int_0^{3h} f(x)dx$ 的插值型求积公式，并利用 $f(x)$ 的 Taylor 级数展开式证明此求积 [illegible] 断误差为 $R=\frac{3}{8}h^4f^{(3)}(0)+O(h^5)$。

解：$x_0=0,x_1=h,x_2=2h$ $\qquad l_k(x)=\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i},k=0,1,\cdots,n$

$$\lambda_0=\int_0^{3h}\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_0-x_2}dx=\int_0^{3h}\frac{x-h}{-h}\cdot\frac{x-2h}{-2h}dx=\frac{3}{4}h$$

$$\lambda_1=\int_0^{3h}\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\cdot\frac{x-x_2}{x_1-x_2}dx=\int_0^{3h}\frac{x}{h}\cdot\frac{x-2h}{-h}dx=0$$

$$\lambda_2=\int_0^{3h}\frac{x-x_0}{x_2-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_2-x_1}dx=\tfrac{9}{4}h$$

$\therefore$ 插值型的求积公式为 $\int_0^{3h}f(x)dx\approx\frac{3h}{4}f(0)+\frac{9h}{4}f(2h)$

将 $f(2h)$ 在 $x=0$ 处展开，得

$$f(2h)=f(0)+2hf'(0)+\frac{1}{2}(2h)^2f^{(2)}(0)+\frac{1}{6}(2h)^3f^{(3)}(0)+\frac{1}{24}(2h)^4f^{(4)}(\xi),\xi\in(0,2h)$$

于是，得到 I_h 的另外一种表达式，$I_h=3hf(0)+\frac{9}{2}h^2f'(0)+\frac{9}{2}h^3f^{(2)}(0)+3h^4f^{(3)}(0)+O(h^5)$

再将被积函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处展开，有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\frac{1}{6}f^{(3)}(0)x^3+\frac{1}{24}f^{(4)}(\eta)x^4,\eta\in(0,x)$$

积分得 $I=\int_0^{3h}f(x)dx=3hf(0)+\frac{1}{2}(3h)^2f'(0)+\frac{1}{6}(3h)^3f^{(2)}(0)+\frac{1}{24}(3h)^4f^{(3)}(0)+O(h^5)$

故 $I-I_h=\frac{27}{8}h^4f^{(3)}(0)-3h^4f^{(3)}(0)+O(h^5)=\frac{3}{8}h^4f^{(3)}(0)+O(h^5)$

[习题 8]. 试分别用 $n=6$ 的复化梯形公式和 $m=3$ 的复化 Simpson 公式[illegible]算积分 $\int_1^2\frac{e^{-x}}{x}dx$ 的近似值，并问：所得的近似值至少有几位有效数字？

解：由 $n=6$ 的复化梯形公式，$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{h}{2}[f(a)+f(b[illegible](a+kh)]$　　（6.12）

$$\int_1^2\frac{e^{-x}}{x}dx=\frac{1}{12}[0.367879+0.067668+2(0.266[illegible]48753+0.087209+0.197780$$

$+0.113325)]=$ [illegible]，$|R$ [illegible]6，所得近似值至少有二位有效数字。

用 $n=6$ 的复化梯形[illegible]得：

$$\int_1^2\frac{e^{-x}}{x}dx=\frac{1}{18}\{[illegible]\frac{}{2})+[illegible]\frac{}{[illegible]66667}+\frac{e^{-1.5}}{1.5}+\frac{e^{-1.833333}}{1.833333}]+2\times[\frac{e^{-1.333333}}{1.333333}+\frac{e^{-1.666667}}{1.666667}]\}$$

$$=\frac{1}{18}\{[0.367879+0.0[illegible]]+4\times[0.266917+0.148753+0.087207]+2\times[0.197780+0.113325]\}$$

$=0.170514$

$|R_s|\le0.0001025$，所得近似值至少有三位有效数字。

[习题 9]. 若用 $n+1$ 个结点的复化梯形公式计算积分 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ 的近似值，则 n 取何值时能保证计算结果有四位有效数字（假定计算过程无舍入误差）？

解：$|R_T|=-\frac{b-a}{12}(\frac{1}{n})^2f^{(2)}(\eta)=-\frac{b-a}{12}\cdot(\frac{1}{n})^2\max\limits_{1\le x\le2}|f^{(2)}(\eta)|\le0.0005$

这里 $\frac{1}{12}\cdot(\frac{1}{n})^2\times\max\limits_{1\le x\le2}(4x^2-2)e^{-x^2}\le0.0005$　　则 $n\ge58$

注：先判断该积分值的第一位非零数字在哪个数位上，然后确定复化梯形值的绝对误差限，最后利用复化梯形公式的截断误差确定 n 的值。以下是两个常用式子的各阶导数值，供参考：

$(e^{\frac{1}{x}})' = -x^{-2}e^{\frac{1}{x}}$ $\qquad$ $(e^{\frac{1}{x}})'' = 2x^{-3}e^{\frac{1}{x}} + x^{-4}e^{\frac{1}{x}}$

$(e^{\frac{1}{x}})^{(3)} = -6x^{-4}e^{\frac{1}{x}} - 6x^{-5}e^{\frac{1}{x}} - x^{-6}e^{\frac{1}{x}}$ $\qquad$ $(e^{\frac{1}{x}})^{(4)} = (\frac{1}{x^8} + \frac{12}{x^7} + \frac{36}{x^6} + \frac{24}{x^5})e^{\frac{1}{x}}$

$(e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2}$ $\qquad$ $(e^{-x^2})^{(2)} = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$

$(e^{-x^2})^{(3)} = 12xe^{-x^2} - 8x^3e^{-x^2}$ $\qquad$ $(e^{-x^2})^{(4)} = 12e^{-x^2} - 48x^2e^{-x^2} + 16x^4e^{-x^2}$

[习题10]. 设 T_m 是 2^m+1 个结点的复化梯形值，试证：$S_m = \frac{4T_{m+1}-T_m}{3}$ 就是 $2^{m+1}+1$ 个结点的复化Simpson值。

解：$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh)]$

$$T_m = \frac{D}{2\cdot 2^m}[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{2^m} f(a+k\frac{D}{2(2^m+1)})]$$

$$T_{m+1} = \frac{D}{2\cdot 2^{m+1}}[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{2^{m+1}} f(a+k\frac{D}{2(2^{m+1}+1)})]$$

$2^{m+1}+1$ 个结点的复化 Simpson 公式为：

$$\frac{D}{3\cdot 2^m}[f(a)+f(b)+4\sum_{i=1}^{m+1} f(\text{[illegible]}) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(\text{[illegible]})]$$

$$\frac{4T_{m+1}-T_m}{3} = \frac{D}{2(\text{[illegible]})}[\text{[illegible]}+f(b)\text{[illegible]}\sum_{k=1} f(a+k\frac{D}{2\cdot 2^{m+1}}) + 2\cdot\frac{D}{2^{m+1}}\sum_{k=1}^{2^m} f(a+k\frac{D}{2^{(2^m+1)}})$$

注：利用复化梯形公式（6.12）[illegible]结构证明 $\frac{4T_{m+1}-T_m}{3}$ 就是 $2^{m+1}+1$ 个结点的复化 Simpson 值（对照公式（6.14）的右端。

[习题11]. 试用区间逐次分半的复化梯形公式计算积分 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ 的近似值 T_m，要求 $|T_m - T_{m-1}|/|T_m| \le 10^{-4}$。

解：根据公式 $T_m = \frac{1}{2}T_{m-1} + h_m\sum_{i=1}^{2^{m-1}} f(a+(2i-1)h_m)$ $\qquad$ (6.16)

$$T_0 = \frac{1-0}{2}[e^{-0}+e^{-1}] = 0.683940$$

$$T_1 = \frac{1}{2}T_0 + h_1\sum_{i=1}^{1} f(a+h_1) = 0.34196986 + 0.5x = 0.731370251$$

$$T_2 = \frac{1}{2}T_1 + 0.25\sum_{i=1}^{2} f(a+(2i-1)h_m) = \frac{1}{2}T_1 + 0.25\times e^{-(0.25)^2} + 0.25e^{-(0.75)^2} = 0.742984097$$

第 7 章 常微分方程组初值问题的数值解法（习题详细参考答案）

[习题 1]. 试写出用 Euler 法求解初值问题

$$\begin{cases} y' = y(t-y), & 0 \le t \le 0.5 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

的计算公式，取步长 $h = 0.1$，并写出求解结果。

解：用 Euler 法求解的计算公式为：

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_{n+1} = y_n + hy_n(t_n - y_n), & n = 0,1,2,3 \end{cases}$$

t	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
s	1	0.91	0.828	0.7760016	0.739	0.714

[习题 2]. 试写出用 Euler 法求解初值问题

$$\begin{cases} y' = t - y, & 0 \le t \le 0.8 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

的计算公式，取步长 $h = 0.2$，写出求解结果，并与精确解 $y($[illegible]$t-1$ 作比较。

解：用 Euler 法求解的计算公式为：

$$\begin{cases} y_0 = 2 \\ y_{n+1} = y_n + h(t_n - y_n) \qquad n = 0, \ldots \end{cases}$$

t_n	0	0.2	0.4	0.6	0.8
y_n	[illegible]	[illegible]	1.32	1.136	1.0288
$y(t_n)$	2	[illegible]9	1.41096	1.24643	1.147986
e_n	0	[illegible]2259	0.90960	0.110434	0.119166

[习题 3]. 试写出用改进的 Euler 法求解初值问题

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2}{y-t} + 1, 0 \le t \le 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

的计算公式，取步长 $h = 0.2$，并写出求解结果。

解：用改进的 Euler 法的计算公式为：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}\left[\dfrac{2}{y_n - t_n} + 1 + \dfrac{2}{y_n + ht_n - (t_n + h)} + 1\right] \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

其中 $h = 0.2, t_n = 0.2n$

即：
$$\begin{cases} y(0)=2 \\ k_1=\dfrac{2}{y_n-t_n}+1 \\ k_2=\dfrac{2}{y_n+hk_1-(t_n+h)}+1 \\ y_{n+1}=y_n+\dfrac{h}{2}(k_1+k_2) \end{cases} \quad n=0,1,2,3,4,$$

n	0	1	2	3	4	5
t_n	0	0. 2	0. 4	0. 6	0. 8	1. 0
y_n	2	2. 390909	2. 766460	3. 129855	3. 483316	3. 828462
k_1	2	1. 912863	1. 845144	1. 790559	1. 745346	
k_2	1. 909091	1. 842644	1. 788803	1. 744057	1. 706119	

[习题 4]. 试写出用中点公式(7. 20)求解初值问题 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}=2\sqrt{y-[illegible]} \\ y(0)=[illegible] \end{cases}$ 的计算公式，取步长 $h=0.2$，并写出求解过程，再与精确解 $y(t)=1+(t+1)^2$ 作比较。

解：用中点公式(7. 20)的[illegible]为
$$\begin{cases} y[illegible]k_2\times 0.2 \\ [illegible]\sqrt{y_n-1} \\ [illegible]=2\sqrt{(y_n+0.1k_1-1)} \end{cases} \quad n=0,1,2,3,4$$

n	0	1	2	3	4
t_n	0	0.2	0.4	0.6	0.8
y_n	2	1.6562	1.410973	1.246450	1.148004
k_1	-2	-1.4562	-1.010973	-0.6464505	
k_2	-1.7	-1.21058	-0.8098755	-0.4818054	
k_3	-1.73	-1.235142	-0.8299653	-0.4982699	
k_4	-1.454	-1.009172	-0.6449758	-0.3467965	
$y(t_n)$	2	1.656192	1.410960	1.246435	1.147967
e_n	0	-8×10^{-6}	-13×10^{-6}	-15×10^{-6}	-17×10^{-6}

[习题 5]. 试写出用四阶 Runge-Kutta 方法(7. 27)求解初值问题(7. 67)的计算公式，取步长 $h=0.2$，并写出计算结果，再与精确解作比较。

解：