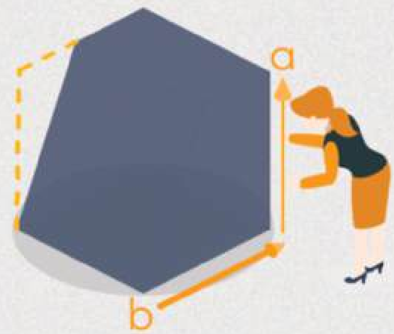


ԳԼՈՒԽ 3

ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ ԵՎ ՎԻՃԱԿԱԳՐՈՒԹՅՈՒՆ

Բաժին 1: Ներածություն անկախ և կախյալ պատահույթներ

Դասերի քանակը՝ 5

Դասեր

1. Հավանականությունների տեսության ներածություն:
2. Պայմանական հավանականություն և ծառաձև դիագրամներ:
3. Անկախ պատահույթներ:

Նպատակներ

Պատահույթների հավանականությունների մասին գիտելիքի զարգացումը, անկախ ու կախյալ պատահույթների, ծառաձև դիագրամների հետ ծանոթացումը:

Վերջնարդյունքներ

- Լուծի խնդիրներ՝ անկախ և կախյալ պատահույթների հավանականությունների վերաբերյալ, օգտվի ծառաձև դիագրամներից:
- Հասկանա Թոմաս Բայեսի ներդրումը վիճակագրության և հավանականության տեսության մեջ:
- Հասկանա Թոմաս Բայեսի ներդրումը մեքենայական ուսուցման մեջ:
- Հաղորդի մաթեմատիկական հայեցակարգը բանավոր:
Ծանոթանա հավանականության տեսության բառապաշարին:
- Ծանոթանա նմուշների տարածություն, պատահույթ, հավանականություն, պատահույթների միավորում և հատում, պատահույթի լրացում հասկացություններին:
- Գտնի պատահույթի հավանականությունը:
- Հասկանա պայմանական հավանականություն հասկացությունը:
- Ներկայացնի հավանականային իրավիճակը ծառաձև դիագրամով:
- Կիրառի պայմանական հավանականության սահմանումը:
- Կիրառի ամբողջական հավանականության օրենքը (the law of total probability):
- Սահմանի անկախ պատահույթներ:
Ստուգի երկու պատահույթների միմյանցից անկախությունը հավանականության բանաձևերի միջոցով:
- Կիրառի անկախ պատահույթների բանաձևը:
- Ստուգի երկու պատահույթների միմյանցից անկախ լինելը:

Ակնկալվող գիտելիք

Կիրառի հավանականության հիմնական գիտելիքները:

Դաս 1: Հավանականությունների տեսության ներածություն

ՆԱԽԱԲԱՆ ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔ (ՄՈՏ 10 ՐՈՊԵ)

Նպատակներ

Հասկանալ Թոմաս Բայեսի ներդրումը վիճակագրության և հավանականության տեսության մեջ:
Հասկանալ Թոմաս Բայեսի ներդրումը մեքենայական ուսուցման մեջ:
Հաղորդել մաթեմատիկական հայեցակարգը բանավոր:

Առաջադրանքի նկարագիր և իրականացման ուղեցույց

Երկրորդ կիսամյակում սովորողները կարող են ինքնուրույն ներկայացնել նախաբան առաջադրանքը, ինչը կզարգացնի մաթեմատիկական հասկացությունները բանավոր փոխանցելու և նյութը ներկայացնելու հմտությունները: Ուսուցիչը խրախուսում է տեխնոլոգիական գործիքների օգտագործումը և սովորողների կողմից նյութի հնարավորինս ինտերակտիվ մատուցումը: Ուսուցիչը կարող է կամ ինքը գնահատել այդ ներկայացումները կամ թողնել, որ սովորողներն իրենք գնահատեն՝ միավորային կամ ոչ միավորային տարբերակով: Ուսուցիչը պետք է մշակի նյութի ներկայացման հմտությունների և մաթեմատիկական բովանդակության վերաբերյալ ռուբրիկ, որը պետք է տրվի սովորողներին մինչ ներկայացման օրը: Եթե սովորողներն են գնահատում ներկայացումը, պետք է ունենան ռուբրիկը և ըստ այդմ՝ գնահատեն ներկայացումը:

Ստորև տրված է գնահատման ռուբրիկի օրինակ:

	Բանավոր ներկայացնելու հմտություն	Ներկայացնելու հմտություն	Մաթեմատիկական բովանդակություն
Զարգացման կարիք ունի	Ներկայացնողի ձայնը լսելի չէ: Միապաղաղ է:	Տեխնոլոգիական գործիքների կիրառումը նվազագույնն է: Ներկայացնողը չի հետևում լսարանի արձագանքին: Չկա փոխադարձ կապ, և սովորողները ներգրավված չեն:	Նյութում կան շատ անճշտություններ:
Լավ	Ներկայացնողի ձայնը լսելի է: Փոքր-ինչ միապաղաղ է:	Ներկայացնողը հետևում է միայն ուսուցչի կամ մեկ-երկու սովորողի արձագանքին: Բավականաչափ է կիրառում տեխնոլոգիական գործիքներ: Քիչ թվով սովորողների է ներգրավում ներկայացման ընթացքում:	Ներկայացվող նյութը ճշգրիտ է: Սովորողը մասամբ է հասկանում ներկայացվող նյութը և մասամբ կարողանում է պատասխանել դասընկերների հարցերին:
Գերազանց	Ներկայացնողի ձայնը բավականին լսելի է: Միապաղաղ չէ: Ձայնի տոնայնությունը հստակ փոփոխվում է:	Ներկայացնողը հետևում է բոլոր սովորողների արձագանքին: Կիրառում է զանազան տեխնոլոգիական գործիքներ: Ներգրավում է առավելագույն թվով սովորողների:	Ներկայացվող նյութը ճշգրիտ է, սկզբնաղբյուրները հստակ նշված են: Սովորողը հասկանում է իր հաղորդած նյութը և կարողանում է պատասխանել սովորողների հարցերին:

Երկրորդ կիսամյակում այս առաջադրանքը սովորողներին անհատապես կամ զույգով հանձնարարվող նախագծերի մի մասն է կազմում: Յուրաքանչյուր սովորողի կամ սովորողների զույգի հանձնարարվում է նախապատրաստել որևէ բաժնի նախաբան առաջադրանք: Այն կարող է լինել մաթեմատիկայի բնույթի կամ պատմության մասին կամ վերաբերի միջառարկայական խնդիրների լուծմանը: Սովորողների գնահատումը կատարվում է անհատապես նույնիսկ, եթե նրանք աշխատել են զույգով: Յուրաքանչյուր ներկայացմանը տրվում է ոչ ավել, քան 10 րոպե ժամանակ: Բովանդակության մաթեմատիկական մասի համար ուսուցիչը կարող է ընդլայնված բացատրություններ և ռեսուրսներ տրամադրել սովորողներին, եթե դրանք ներառված չեն ներկայացվող նյութի մեջ:

Այս դասի համար սովորողների զույգին հանձնարարվում է պատրաստել և ներկայացնել նյութ՝ հավանականության տեսության մեջ Թոմաս Բայեսի ունեցած ներդրման և մեքենայական ուսուցման մեջ տեսության կիրառման մասին:

Վիճակագրության և հավանականության տեսության զարգացմանը վերաբերող նյութերի օրինակներ, որոնք կարող են անհրաժեշտ լինել ուսուցչին.

- Թոմաս Բայեսն անգլիացի մաթեմատիկոս է, որը զգալի ներդրում է ունեցել վիճակագրության զարգացման մեջ:
- Նրա աշխատանքը քիչ ճանաչում է ունեցել կենդանության օրոք, բայց մահից հետո Բայեսի թեորեմը դառնում է Բայեսյան վիճակագրության և մեքենայական ուսուցման հիմնաքարը:
- Բայեսի թեորեմը մաթեմատիկական բանաձև է, որը նկարագրում է պատահույթի հավանականությունը՝ հիմնված պատահույթի վրա ազդող պայմանների նախնական իմացության վրա:
- Բայեսի թեորեմը, հիմնվելով նոր փաստերի կամ դիտարկումների վրա, հավանականությունների տեսության արդիականացման հիմք է ստեղծել:
- Թոմաս Բայեսի գաղափարները դարձել են մեքենայական ուսուցման անբաժանելի մասը:
- Մեքենայական ուսուցման մեջ Բայեսյան մեթոդներն ապահովում են համոզմունքները կամ մոդելներն արդիականացնելու հիմք՝ հիմնված նոր փաստերի կամ տվյալների վրա:
- Բայեսյան ցանցերը լայնորեն օգտագործվում են մեքենայական ուսուցման մեջ այնպիսի առաջադրանքների համար, ինչպիսին են հավանական պատճառաբանությունը, դասակարգումը և որոշումների կայացումը: Դրանք հնարավորություն են տալիս մոդելավորել փոփոխականների միջև կախվածությունը և արդիականացնելու համոզմունքները՝ նոր տեղեկատվությանը զուգընթաց:

ՆՅՈՒԹԻ ՄԱՏՈՒՑՈՒՄ ԵՎ ԶՈՒՅԳԵՐՈՎ ԱՇԽԱՏԱՆՔ (ՄՈՏ 10 ՐՈՊԵ)

Նպատակներ

Ծանոթանալ հավանականության տեսության բառապաշարին:
Ծանոթանալ նմուշների տարածություն, պատահույթ, հավանականություն, պատահույթների միավորում և հատում, պատահույթի լրացում հասկացություններին:
Գտնել որոշակի պատահույթի հավանականություն:

Առաջադրանքի նկարագիր և իրականացման ուղեցույց

Առաջադրանքի ընթացքում ուսուցիչը ներկայացնում է *հավանականություն* հասկացությունը և ծանոթացնում բառապաշարին: Սկզբում ուսուցիչը ներկայացնում է *նմուշների տարածություն* հասկացությունը: Նմուշների տարածությունը տվյալ իրավիճակի հնարավոր ելքերի բազմությունն է: Այն նշանակվում է Ω տառով: Օրինակ՝ մետաղադրամ նետելիս հնարավոր է երկու արդյունք՝ զինանշան կամ գիր: Այսպիսով, $\Omega=\{$զինանշան, գիր$\}$: Երբ նետում են կանոնավոր վեցանիստ զառ՝ համարակալված 1-6 թվերով, նմուշների տարածությունն է $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$: Երբ նետում են երկու մետաղադրամ, նմուշների տարածությունն է՝ $\Omega=\{$ զինանշան-զինանշան, զինանշան-գիր, գիր-զինանշան, գիր-գիր$\}$: Վերջապես, եթե նետում են երկու զառ և դիտարկում վերին նիստերի թվերը, ապա նմուշների տարածությունը բոլոր (a, b) տեսքի կարգավորված թվազույգերն են, որտեղ a-ն և b-ն 1-ից 6 թվերից մեկն են: Այս դեպքում, եթե խնդիրը վերին նիստերի թվերի գումարի մասին է, հնարավոր է օգտագործել աղյուսակ, որը ցույց է տալիս երկու զառերի արդյունքները և դրանց գումարը:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Այս աղյուսակը շատ օգտակար է: Այն օգնում է սովորողներին պատկերացնել հնարավոր ելքերը և դրանց հաճախականությունները: Սա անհրաժեշտ կլինի հաջորդ դասերի ժամանակ յուրաքանչյուր ելքի հավանականությունը հաշվելիս:

Նմուշների տարածության ցանկացած ենթաբազմություն կոչվում է *պատահույթ:* Օրինակ, երբ նետում են զառ, պատահույթ կարող է համարվել զույգ թիվ բացվելը՝ $A = \{2, 4, 6\}$, կամ կենտ թիվ բացվելը՝ $B = \{1, 3, 5\}$, կամ 4-ից մեծ թիվ բացվելը՝ $C = \{5, 6\}$, կամ պարզ թիվ բացվելը՝ $D = \{2, 3, 5\}$: Պատահույթի հավանականությունն ընդունում է արժեքներ 0-ից 1 միջակայքում և ցույց տալիս պատահույթի հանդես գալու հնարավորությունը: Օրինակ՝ չկեղծված մետաղադրամ նետելիս զինանշանի հանդես գալու հավանականությունը $\frac{1}{2}$ է, գրի հանդես գալու հավանականությունը ևս $\frac{1}{2}$ է: Իսկ չկեղծված զառ նետելիս 1 բացվելու հավանականությունը $\frac{1}{6}$ է, 5 բացվելու հավանականությունը ևս $\frac{1}{6}$ է:

Հավաստի պատահույթի հավանականությունը 1 է: Օրինակ՝ կանոնավոր զառ նետելիս 7-ից փոքր բնական թիվ բացվելու հավանականությունը 1 է:

Անհնար պատահույթի հավանականությունը 0 է: Ուսուցիչը հանձնարարում է սովորողներին օրինակներ բերել: Նա կարող է ավելացնել օրինակ. զառի վրա 10 թիվ բացվել չի կարող, հետևաբար՝ 10 բացվելու հավանականությունը 0 է:

A պատահույթի հավանականությունը նշանակում են $P(A)$-ով և հավասար է A-ի նպաստավոր ելքերի և հնարավոր բոլոր ելքերի հարաբերությանը: Այսպիսով,
$P(A) = \frac{A\text{−ի նպաստավոր ելքերի քանակ}}{\text{բոլոր հնարավոր ելքերի քանակ}}$:

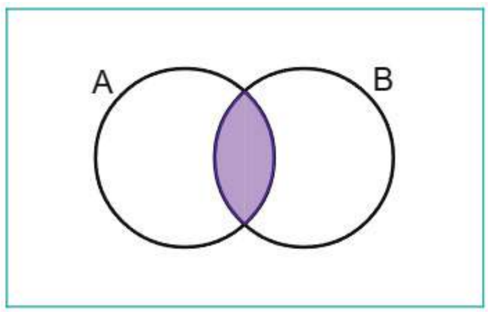
Ուսուցիչը տալիս է մի քանի րոպե ժամանակ, որպեսզի սովորողները, աշխատելով զույգերով, վերը նշված զառ նետելու օրինակում գտնեն A, B, C և D պատահույթների հավանականությունները: Սովորողները կիսվում են իրենց պատասխաններով և դատողություններով դասարանական քննարկման ընթացքում: Ուսուցիչը բացատրում է՝ ինչպես հաշվել հետևյալ հավանականությունները.

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(D) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$:

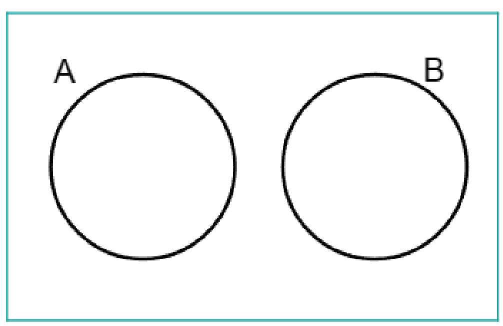
Առաջադրանքի ավարտին ուսուցիչը սովորողներին ներկայացնում է երկու պատահույթների հատման և միավորման, պատահույթի լրացման գաղափարները:

Ուսուցիչը նշում է, որ երբ երկու պատահույթներն էլ պետք է տեղի ունենան, ապա դա անվանում ենք A և B պատահույթների հատում և նշանակում $A \cap B$: Եթե $A \cap B = \emptyset$, ապա A և B պատահույթները կոչվում են անհամատեղելի: Օրինակ՝ ձեր դպրոցի երկու 10-րդ և 11-րդ դասարաններն անհամատեղելի են: Այնուամենայնիվ, ձեր դպրոցի 10-րդ դասարանը և ֆուտբոլի թիմը հնարավոր է անհամատեղելի չլինեն, քանի որ կարող են լինել 10-րդ դասարանի աշակերտներ, ովքեր նաև դպրոցի ֆուտբոլի թիմում են:

Ուսուցիչը պատկերում է պատահույթների հատումը Վեննի դիագրամի միջոցով: Այս դիագրամներով բացատրելը պարտադիր չէ: Որոշ ուսուցիչներ գուցե նախընտրեն բաց թողնել սա:

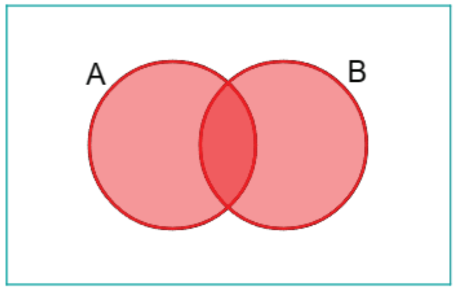


$A \cap B \neq \emptyset$, անհամատեղելի չեն:

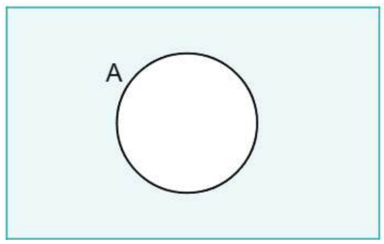


$A \cap B = \emptyset$, անհամատեղելի են:

Երբ կամ A պատահույթը, կամ B պատահույթը, կամ երկուսն էլ տեղի ունեն, ապա այդ պատահույթն անվանում են A և B պատահույթների միավորում և նշանակում $A \cup B$:



A պատահույթի լրացում պատահույթն անվանում են Ω նմուշների տարածության այն բոլոր ելքերի բազմությունը, որոնք A պատահույթին չեն պատկանում: Այն նշանակվում է $\overline{A}$:



Վեննի դիագրամի օգտագործումը կարևոր է դասը հետաքրքիր դարձնելու համար: Որոշ սովորողներ հնարավոր է ավելի հեշտ ըմբռնեն տեսողական տրվող նյութը, այդ իսկ պատճառով ներկայացման զանազան միջոցների օգտագործումը օգտակար է:

Ուսուցիչն ավարտում է առաջադրանքը զառի օրինակով, որին սովորողներն անդրադարձել էին առաջադրանքի սկզբում: Զառի նետման օրինակում դիտարկենք երկու պատահույթ՝ $A =$ {բացվել է զույգ թիվ}, $B =$ {բացվել է 4-ից մեծ թիվ}: Ուսուցիչը տալիս է մի քանի րոպե ժամանակ, որպեսզի սովորողները հաշվեն $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(\overline{A})$ և $P(\overline{B})$: Սովորողները հասկանում են, որ $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{5, 6\}$: Նրանք եզրակացնում են՝ $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ և $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$: Այնուհետև, զույգերով աշխատելով՝ սովորողները գտնում են.

$A \cap B = \{6\}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$,

$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$, $P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$,

$\overline{A} = \{1, 3, 5\}$, $P(\overline{A}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$,

$\overline{B} = \{1, 2, 3, 4\}$, $P(\overline{B}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$:

Առաջադրանքի ավարտին սովորողները կիսվում են իրենց պատասխաններով դասարանական քննարկման ընթացքում: Ուսուցիչը շեշտում է, որ $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, $P(\overline{B}) = 1 - P(B)$ և $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$: Սովորողները պետք է ստուգեն, որ նախորդ օրինակը բավարարում է նշված հատկություններին: Ուսուցիչը եզրակացնում է, որ այս հատկությունները սովորողները կարող են օգտագործել ցանկացած դեպքում:

ԻՆՔՆՈՒՐՈՒՅՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ (ՄՈՏ 15 ՐՈՊԵ)

Նպատակներ

Գտնել պատահույթի հավանականությունը:
Գտնել երկու պատահույթների միավորման, հատման և լրացման հավանականությունները:

Առաջադրանք

Խնդիր 1

Խաղաքարտերով խաղում կա 52 խաղաքարտ՝ 26 կարմիր և 26 սև, որտեղ 4 արքա՝ 2 կարմիր և 2 սև:

Դիտարկե՛ք հետևյալ պատահույթները.

$K = \{\text{արքա վերցնելը}\}$,

$R = \{\text{կարմիր քարտ վերցնելը}\}$:

Գտե՛ք $P(R)$, $P(K)$, $P(K \cap R)$, $P(K \cup R)$, $P(\overline{K})$ և $P(\overline{R})$ հավանականությունները:

Խնդիր 2

Երկու կանոնավոր քառանիստ զառ են նետել: Տ-ը ցույց է տալիս վերին նիստերի թվերի գումարը:

1) Գծե՛ք նմուշների տարածությունը ներկայացնող աղյուսակ:
2) Հաշվե՛ք $S = 5$ պատահույթի հավանականությունը:
3) Հաշվե՛ք $S \geq 5$ պատահույթի հավանականությունը:

Խնդիր 3

Դիցուք՝ $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,2$ և $P(A \cap B) = 0,1$:

Հաշվե՛ք $P(A \cup B)$, $P(\overline{A})$ և $P(\overline{B})$ հավանականությունները:

Լուծում՝

Խնդիր 1

$P(R) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$, $P(K) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$,

$P(K \cap R) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$, $P(K \cup R) = P(K) + P(R) - P(K \cap R) = \frac{1}{13} + \frac{1}{2} - \frac{1}{26} = \frac{14}{26} = \frac{7}{13}$,

$P(\overline{K}) = 1 - P(K) = \frac{12}{13}$, $P(\overline{R}) = 1 - P(R) = \frac{1}{2}$:

Խնդիր 2

1)

	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

2) $P(S = 5) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$:

3) $P(S \geq 5) = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$:

Խնդիր 3

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4$,

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,7$,

$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 0,8$:

Առաջադրանքի նկարագիր և իրականացման ուղեցույց

Սովորողներն աշխատում են ինքնուրույն: Առաջադրանքի ավարտին սովորողները կիսվում են իրենց պատասխաններով դասարանական քննարկման ժամանակ:

Դժվարանալու դեպքում սովորողներն աշխատում են զույգերով, որոնք կազմվում են հետևյալ կերպ՝ ամենաարագն ավարտած սովորողն ամենադժվարացողի հետ մոտեցմամբ: Ուսուցիչը կարող է հարցնել, թե ով օգնության կարիք ունի և ընտրել սովորողի, որը կօգնի դժվարացողներին, կամ ուսուցիչն ինքը կարող է օգնել: Առաջին խնդրի առաջին երեք ենթակետում սովորողները կիրառում են $P(A) = \frac{A\text{−ի նպաստավոր ելքեր}}{\text{բոլոր հնարավոր ելքեր}}$ բանաձևը: Նրանք նախ հաշվում են յուրաքանչյուր ենթաբազմության տարրերի քանակը: Առաջին խնդրի վերջին երեք ենթակետում սովորողները կիրառում են պատահույթների միավորման և լրացում պատահույթի հաշվման բանաձևերը: Եթե սովորողները չեն հիշում այդ բանաձևերը, նրանք կարող են դիմել իրենց դասընկերների օգնությանը: Անհրաժեշտության դեպքում ուսուցիչը միջամտում է: Հնարավոր է, որ որոշ սովորողներ փորձեն հաշվել $K \cup R$ կամ $\overline{K}$ ենթաբազմությունների տարրերի քանակը, վերջինս ավելի բարդ է, բայց ընդունելի է: Երկրորդ խնդրում որոշ սովորողներ հնարավոր է դժվարանան աղյուսակը կառուցելիս: Ուսուցիչը օգնում է այդ սովորողներին: Այնուհետև, սովորողները գտնում են պահանջվող հավանականությունները՝ հաշվելով նպաստավոր ելքերի հաճախականությունները: Վերջին օրինակում սովորողները կիրառում են պատահույթների միավորման և լրացում պատահույթի հաշվման բանաձևերը՝ պահանջվող հավանականությունները հաշվելու համար:

ՏՆԱՅԻՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

Հետևյալ խնդիրները հանձնարարել որպես տնային աշխատանք:

Գլուխ 5: Խնդիրներ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (էջ 160) հանձնարարել որպես տնային աշխատանք Կ. Առաքելյանի հեղինակած «*Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր 10*» դասագրքից:

Առաջադրանք

Հետևյալ փորձերի համար պարզե՛ք նմուշների տարածությունը և հաշվե՛ք պատահույթների հավանականությունը.

1. Չկեղծված զառը նետում են մեկ անգամ և գրանցում՝ բացված թիվը կենտ է, թե զույգ: Գտե՛ք զույգ բացվելու հավանականությունը:

2. Նետում են երկու մետաղադրամ: Գտե՛ք հավանականությունը, որ երկուսի վրա էլ կբացվի միևնույն երեսը:

3. Թղթախաղի տուփում կա 52 խաղաթուղթ, որից հանում են մեկ խաղաթուղթ: Գտե՛ք հավանականությունը, որ այն սիրտ նշանով է:

4. 52 խաղաթղթով տուփից հանում են մեկը, գրանցում նշանը և վերադաձնում տուփ: Ապա հանում են ևս մեկ խաղաթուղթ: Գտե՛ք կամայական հերթականությամբ ագռավի և խաչի նշաններ դուրս գալու հավանականությունը:

5. Նետում են զառ և մետաղադրամ: Գտե՛ք զինանշան և 6 բացվելու հավանականությունը:

6. Նետում են 2 վեցանիստ զառ և գրանցում կողային նիստերի վրա բացված երկու ամենամեծ թվերի արտադրյալը: Գտե՛ք հավանականությունը, որ արդյունքը մեծ է 24-ից: (Հուշում. Սովորական վեցանիստ զառի հանդիպակաց նիստերի գումարը 7 է, իսկ 1, 2 և 3 թվերով նիստերը ունեն մեկ ընդհանուր գագաթ)

(Առաջադրանքները Տավուշի մարզում նոր չափորոշիչների փորձարկման համար մշակված 10-րդ դասարանի «Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր» առարկայի խորացված ծրագրի ուսումնական նյութերից են:)

Դաս 2: Պայմանական հավանականություն և ծառաձև դիագրամներ

ՆՅՈՒԹԻ ՄԱՏՈՒՑՈՒՄ ԵՎ ԶՈՒՅԳԵՐՈՎ ԱՇԽԱՏԱՆՔ (ՄՈՏ 20 ՐՈՊԵ)

Նպատակներ

Հասկանալ պայմանական հավանականություն հասկացությունը:
Ներկայացնել իրավիճակը հավանականությունների ծառաձև դիագրամով:
Կիրառել պայմանական հավանականության սահմանումը:
Կիրառել ամբողջական հավանականության օրենքը:

Առաջադրանքի նկարագիր և իրականացման ուղեցույց

Ուսուցիչն օրինակով ներկայացնում է պայմանական հավանականություն հասկացությունը: Հավանականությունը, որ պատվաստված անհատը կունենա առողջական բարդություններ, եթե վարակվի վիրուսով, $0,01$ է: Եթե անհատը պատվաստված չէ, բարդություններ ունենալու հավանականությունը $0,3$ է: Հավանականությունը, որ պատահականորեն ընտրված անհատը պատվաստված է տվյալ վիրուսի դեմ, $0,9$ է:

Դիտարկե՛ք հետևյալ պատահույթները.

$V = \{$անհատը պատվաստված է$\}$,

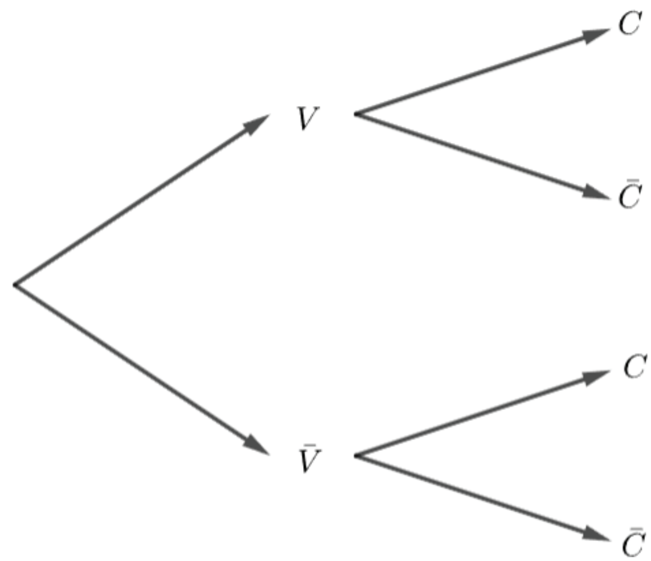
$C = \{$անհատը ունի առողջական բարդություններ$\}$:

Նախ՝ ուսուցիչը բացատրում է, որ առողջական բարդություններ ունենալը կախված է՝ արդյոք անհատը պատվաստված է, թե ոչ: Այս տիպի հավանականությունը կոչվում է *պայմանական հավանականություն:* Ուսուցիչը գրառում է $P(C|V)$: Սա բարդությունների հավանականությունն է, եթե հայտնի է, որ անձը պատվաստված է: Այսպիսով՝ $P(C|V) = 0,01$ և ցույց է տալիս պատվաստվածների խմբում բարդությունների առաջացման հավանականությունը: Այժմ ուսուցիչը հարցնում է սովորողներին՝ ինչ հավանականություն են ցույց տալիս $0,3$ և $0,9$ թվերը: $0,3$ թիվը չպատվաստված անհատի առողջական բարդություններ ունենալու հավանականությունն է: Այսպիսով, $P(C|\overline{V}) = 0,3$ և ցույց է տալիս չպատվաստվածների խմբում բարդությունների առաջացման հավանականությունը:

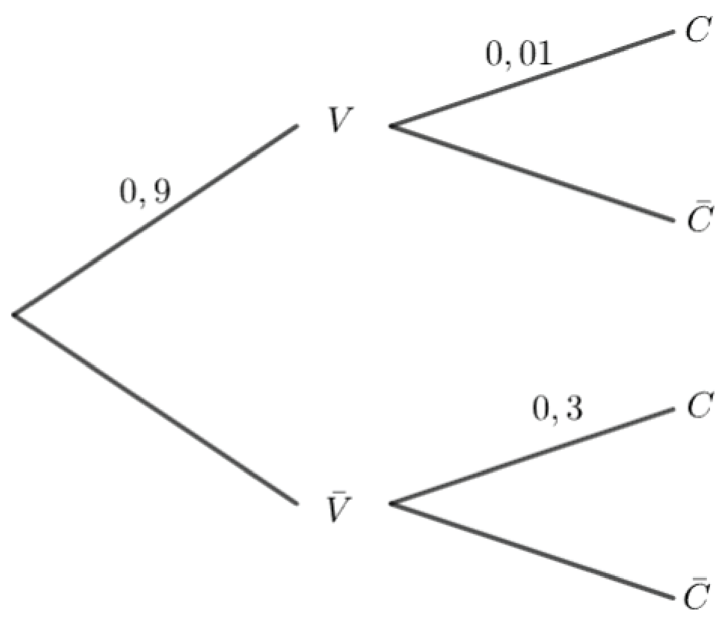
Վերջապես, $P(V) = 0,9$: Ուսուցիչը շեշտում է պայմանական հավանականության և հավանականության տարբերությունը: Պայմանական հավանականության դեպքում տեղի է ունենում պատահույթ, որն ազդում է երկրորդ պատահույթի տեղի ունենալու վրա: Այդ դեպքում նմուշների տարածության տարրերի քանակը նվազում է:

Այս փուլում ուսուցիչը բացատրում է՝ ինչպես խնդրի տվյալները ներկայացնել ծառաձև դիագրամի միջոցով: Էական է բացատրել, թե որ պատահույթից է պետք սկսել: Այս դեպքում ունենք երկու տարբերակ՝ սկսել V և $\overline{V}$ կամ C և $\overline{C}$: Քանի որ գիտենք $P(V)$ և

$P(C|V)$ հավանականությունները, ապա առաջին ճյուղերը կներկայացնեն V և $\overline{V}$ պատահույթները:



Ծառաձև դիագրամը նկարելուց հետո սովորողները պետք է համապատասխան ճյուղերի վրա ավելացնեն տրված հավանականությունները և ստանան՝

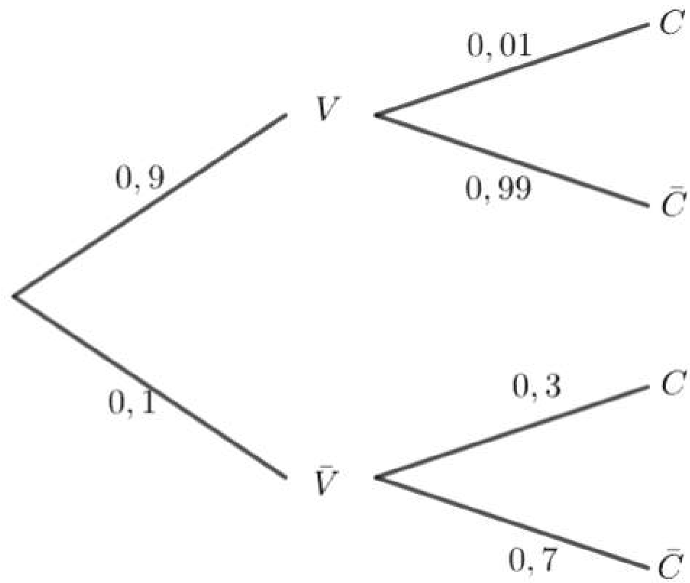


Այժմ սովորողները պետք է լրացնեն ծառաձև դիագրամի մյուս ճյուղերը:

Ուսուցիչը բացատրում է, որ յուրաքանչյուր հանգույցում ճյուղերի թվերի գումարը հավասար է լինելու 1-ի: Այսպիսով, $\overline{V}$ հավանականությունը գտնելու համար՝ $P(\overline{V}) = 1 - P(V) = 1 - 0,9 = 0,1$:

Նույնկերպ, $P(\overline{C}|V) = 1 - P(C|V) = 1 - 0,01 = 0,99$:

$P(\overline{C}|\overline{V}) = 1 - P(C|\overline{V}) = 1 - 0,3 = 0,7$:



Ուսուցիչը բացատրում է, որ $P(V \cap C)$ հավանականությունը գտնելու համար սովորողները պետք է բազմապատկեն V-ից C տանող ճյուղերի արժեքները՝ $P(V)$ և $P(C|V)$:

Ստանում են՝ $P(V \cap C) = P(V) \times P(C|V) = 0,9 \times 0,01 = 0,009$: Այս օրենքը հայտնի է որպես պայմանական հավանականության սահմանում: Այժմ ուսուցիչը բացատրում է, որ $P(C)$ հաշվելու համար սովորողները պետք է գումարեն բոլոր C-ով վերջացող ճյուղերի արժեքները: Ստացվում է՝ $P(V \cap C) + P(\overline{V} \cap C)$: Այնուհետև, կիրառելով պայմանական հավանականության սահմանումը, գտնում են՝

$P(\overline{V} \cap C) = P(\overline{V}) \times P(C|\overline{V}) = 0,1 \times 0,3 = 0,03$:

Ապա՝ $P(C) = P(V \cap C) + P(\overline{V} \cap C) = 0,009 + 0,03 = 0,039$: Այս օրենքը կոչվում է ամբողջական հավանականության օրենք: Ի վերջո, ուսուցիչը բացատրում է՝ ինչպես գտնել $P(V|C)$ հավանականությունը: Սովորողները կիրառում են պայմանական հավանականության սահմանումը՝ $P(V|C) = \frac{P(V\cap C)}{P(C)} = \frac{0,009}{0,039} = \frac{9}{39}$: Առաջադրանքի ավարտին ուսուցիչը բացատրում է $P(V|C)$, $P(C|V)$ և $P(V \cap C)$հավանականությունների տարբերությունը: Շատ սովորողներ կդժվարանան հասկանալ տարբերությունները: Այդ պատճառով ուսուցիչը պետք է դա հստակ բացատրի: Ուսուցիչը ավարտում է աշխատանքը՝ կրկնելով երկու բանաձևերը: Պայմանական հավանականության սահմանումն է՝ $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, իսկ ամբողջական հավանականության բանաձևը՝ $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$:

Նշում

Ուսուցիչը կարող է նախընտրել պայմանական հավանականությունը ներկայացնել հաջորդ օրինակի միջոցով (ներկայացված է ինքնուրույն աշխատանքի բաժնում) և տեղափոխել այս երկու օրինակները: Այդ օրինակը կօգնի ուսուցչին սկսել գնդակների վերաբերյալ գործնական օրինակով: Կարելի է օգտագործել իրական գունավոր գնդակներ: Որոշ սովորողներ հնարավոր է նախընտրեն շոշափելի օրինակներ՝ պայմանական հավանականություն հասկացությունն ավելի լավ հասկանալու համար: Այնուամենայնիվ, առաջադրանքում քննարկված օրինակն իրական կյանքից է, որտեղ պայմանական հավանականության հայեցակարգի բացատրությունը կարող է ավելի իրատեսական և համապատասխան լինել սովորողների մեծամասնության համար:

ԻՆՔՆՈՒՐՈՒՅՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ (ՄՈՏ 15 ՐՈՊԵ)

Նպատակներ

Ներկայացնել իրավիճակը հավանականությունների ծառածև դիագրամով:
Կիրառել պայմանական հավանականության սահմանումը:
Կիրառել ամբողջական հավանականության օրենքը:

Առաջադրանք

3 կապույտ և 4 կարմիր գնդակ պարունակող սափորից հաջորդաբար և առանց վերադարձնելու հանում ենք երկու գնդակ:

Դիցուք՝ B_1-ով նշանակենք այն պատահույթը, որ առաջին հանված գնդակը կապույտ է:

Դիցուք՝ R_1-ով նշանակենք այն պատահույթը, որ առաջին հանված գնդակը կարմիր է:

Դիցուք՝ B_2-ով նշանակենք այն պատահույթը, որ երկրորդ հանված գնդակը կապույտ է:

Դիցուք՝ R_2-ով նշանակենք այն պատահույթը, որ երկրորդ հանված գնդակը կարմիր է:

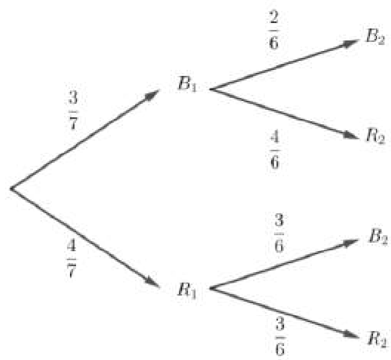
1) Հաշվե՛ք $P(B_1)$, $P(R_1)$, $P(B_2|B_1)$ և $P(B_2|R_1)$ հավանականությունները:
2) Գծե՛ք համապատասխան ծառածև դիագրամը:
3) Գտե՛ք հավանականությունը, որ երկու գնդակներն էլ կապույտ են:
4) Գտե՛ք հավանականությունը, որ երկրորդ գնդակը կապույտ է:

Գտե՛ք հավանականությունը, որ առաջին գնդակը կապույտ է, եթե հայտնի է, որ երկրորդ գնդակը նույնպես կապույտ է:

Լուծում՝

1) $P(B_1) = \frac{3}{7}$, $P(R_1) = \frac{4}{7}$, $P(B_2|B_1) = \frac{2}{6}$, $P(B_2|R_1) = \frac{3}{6}$,

2)



3) $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P(B_2|B_1) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{7}$,

4) $P(B_2) = P(B_1 \cap B_2) + P(R_1 \cap B_2) = \frac{1}{7} + \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$,

5) $P(B_1|B_2) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{7}} = \frac{1}{3}$:

Առաջադրանքի նկարագիր և իրականացման ուղեցույց

Սովորողներն աշխատում են ինքնուրույն: Առաջադրանքի ավարտին սովորողները կիսվում են իրենց պատասխաններով դասարանական քննարկման ժամանակ: Դժվարանալու դեպքում սովորողներն աշխատում են զույգերով, որոնք կազմվում են հետևյալ կերպ՝ ամենաարագն ավարտած սովորողն ամենադժվարացողի հետ մոտեցմամբ: Ուսուցիչը կարող է հարցնել, թե ով օգնության կարիք ունի և ընտրել սովորողի, որը կօգնի դժվարացողներին, կամ ուսուցիչն ինքը կարող է օգնել: Առաջին մասում որոշ սովորողներ հնարավոր է դժվարանան հաշվել $P(B_2|B_1)$ և $P(B_2|R_1)$ հավանականությունները: Այստեղ ուսուցիչը կարող է բացատրել, թե ինչպես գտնել այդ հավանականությունները: Իրավիճակի պատկերումը օգտակար կլինի: Այնուհետև, սովորողները գծում են ծառածև դիագրամ: Որոշ սովորողներ գուցե որոշեն նախ գտնել $\overline{B_1}$, ինչը օգտակար չէ: Ծառածև դիագրամը նկարելիս շատ սխալ պատկերացումներ կարող են լինել: Որոշ սովորողներ գուցե որոշեն տեղադրել B_1 և $\overline{B_1}$ առաջին ճյուղերի վրա: Նրանք նույնիսկ կարող է ցանկանան տեղադրել B_1 և B_2 առաջին ճյուղերի վրա: Երրորդ մասում պետք է կիրառել պայմանական հավանականության սահմանումը: Չորրորդ մասում պետք է կիրառել ամբողջական հավանականության բանաձևը՝ $P(B_2)$ հաշվելու համար: Երրորդ և չորրորդ մասերում որոշ սովորողներ կարող են նախընտրել օգտագործել ծառածև դիագրամը՝ բանաձևերի փոխարեն: Սա ընդունելի մոտեցում է: Վերջապես, վերջին մասում սովորողները պետք է կիրառեն պայմանական հավանականության սահմանումը: Ուսուցիչը նշում է, որ այս դեպքում փոխում ենք հերթականությունը: Մենք գիտենք $P(B_2|B_1)$ հավանականությունը և փորձում ենք գտնել$P(B_1|B_2)$ հավանականությունը: Որոշ սովորողներ հնարավոր է դժվարանան հասկանալ այս գաղափարը, հատկապես այն պատճառով, որ նրանց անհեթեթ կթվա գտնել B_1-ի հավանականությունը, եթե B_2 արդեն հայտնի է: Ուսուցիչը շեշտում է, որ պայմանական հավանականության դեպքում պարտադիր չէ պահել պատահույթների ժամանակագրական հերթականությունը:

ՏՆԱՅԻՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

Հետևյալ խնդիրները հանձնարարել որպես տնային աշխատանք:

1. Պարկում կա 5 կարմիր և 4 կապույտ ժետոն: Պատահականորեն ընտրում են մեկ ժետոն, գրանցոմ գույնը և առանց վերադաձնելու հանում են երկրորդ ժետոնը: Գտե՛ք հավանականությունը, որ.
ա. երկրորդ ժետոնը կարմիր է, երբ առաջինը կապույտ է,
բ. երկրորդ ժետոնը կապույտ է, երբ առաջինը կարմիր է,
գ. երկուսն էլ կապույտ են,
դ. հանել են մեկ կարմիր և մեկ կապույտ ժետոն:

2. 24 շոկոլադե սալիկ պարունակող արկղում կա 10-ը մուգ և 14 կաթնային շոկոլադե սալիկ: Լինդան պատահականորեն ընտրում է մեկ շոկոլադ և ուտում, ապա՝ երկրորդը: Գտե՛ք հավանականությունը, որ Լինդան կուտի.
ա. երկու մուգ շոկոլադ,
բ. մեկ մուգ և մեկ կաթնային շոկոլադ:

3. Ջենը միշտ աշխատանքի է գնում ավտոբուսով կամ տաքսիով: Եթե մի օր նա աշխատանքի է գնում ավտոբուսով, ապա հաջորդ օրը տաքսիով աշխատանքի գնալու հավանականությունը 0,4 է: Եթե նա մի օր նա աշխատանքի գնա տաքսիով, ապա հաջորդ օրն ավտոբուսով աշխատանքի գնալու հավանականությունը 0,7 է: Տրված է, որ Ջենը երկուշաբթի աշխատանքի է գնացել ավտոբուսով: Գտե՛ք հավանականությունը, որ նա չորեքշաբթի աշխատանքի կգնա տաքսիով:

4. Սյուն երկու մետաղադրամ ունի: Մեկը կանոնավոր է՝ մի երեսին գիր, մյուսին՝ զինանշան: Մյուսը մետաղադրամը կեղծ է՝ երկու երեսին էլ գիր: Սյուն պատահականորեն ընտրում է մետաղադրամներից մեկը և նետում:
ա. Գտե՛ք հավանականությունը, որ մետաղադրամի վրա զինանշան կբացվի:
բ. Եթե մետաղադրամի վրա գիր է բացվել, գտե՛ք հավանականությունը, որ Սյուն ընտրել էր կանոնավոր մետաղադրամը:

5. Հեռուստամրցաշարի մասնակցին առաջարկեցին ընտրել երեք դռներից մեկը: Դռներից մեկի ետևում մրցանակն իրական մեքենա է, իսկ մյուս երկուսի ետևում՝ խաղալիք մեքենա: Մասնակիցը պատահականորեն ընտրում է մեկ դուռ: Հաղորդավարը դրանից հետո բացում է մնացած երկու դռներից մեկը և գտնում խաղալիք մեքենա: Հաղորդավարն առաջարկում է մասնակցին փոխել իր ընտրությունը: Հիմնավորե՛ք, թե մասնակցին ի՞նչ կառաջարկեք անել, որպեսզի նա ունենա իրական մեքենա շահելու ամենամեծ հավանականությունը: Հաշվարկները պարզ ներկայացնել:

(Առաջադրանքները Տավուշի մարզում նոր չափորոշիչների փորձարկման համար մշակված 10-րդ դասարանի *«Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր»* առարկայի խորացված ծրագրի ուսումնական նյութերից են:)

Դաս 3: Անկախ պատահույթներ

ՆՅՈՒԹԻ ՄԱՏՈՒՑՈՒՄ (ՄՈՏ 15 ՐՈՊԵ)

Նպատակներ

Սահմանել անկախ պատահույթներ:
Ստուգել երկու պատահույթների միմյանցից անկախությունը հավանականության բանաձևերի միջոցով:

Առաջադրանքի նկարագիր և իրականացման ուղեցույց

Առաջադրանքի ընթացքում ուսուցիչը ներկայացնում է անկախ պատահույթներ հասկացողությունը: Նա բացատրում է, որ եթե պատահույթի իրականանալը չի ազդում մյուս պատահույթի իրականանալու վրա, ապա այդ երկու պատահույթները կոչվում են *անկախ*: Օրինակ՝ եղանակը չի ազդում երեխաների դպրոց հաճախելու վրա: Այնուամենայնիվ, այն կարող է ազդել, թե արդյոք նրանք գնալու են բացօթյա փառատոնի, թե ոչ: Առաջին դեպքում երկու պատահույթներն անկախ են, երկրորդում՝ կախյալ:

Եթե երկու՝ A և B, պատահույթներ անկախ են, ապա $P(A|B) = P(A)$: Բայց գիտենք, որ $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$,հետևաբար, եթե $P(A|B) = P(A)$, ստանում ենք՝

$P(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$:

Ուսուցիչը շարունակում է օրինակով: Դիցուք՝ $P(A) = 0,2$ և $P(B) = 0,3$: Հաշվե՛ք $P(A \cap B)$ հավանականությունը, եթե A և B պատահույթներն անկախ են: Ուսուցիչը տալիս է մի քանի րոպե ժամանակ որպեսզի սովորողները մտածեն: Այնուհետև, սովորողները կիսվում են իրենց պատասխաններով դասարանական քննարկման ընթացքում: Նրանցից շատերը կնկատեն, որ քանի որ երկու՝ A և B,պատահույթներն անկախ են, ապա $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,2 \times 0,3 = 0,06$: Երկու պատահույթների անկախությունը ստուգելու համար կարելի է ստուգել $P(A|B) = P(A)$ կամ $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$ պայմաններից որևէ մեկը:

ԶՈՒՅԳԵՐՈՎ ԱՇԽԱՏԱՆՔ (ՄՈՏ 10 ՐՈՊԵ)

Նպատակներ

Կիրառել անկախ պատահույթների բանաձևը:
Ստուգել, որ երկու պատահույթներ միմյանցից անկախ են:

Առաջադրանք

Ստուգե՛ք, արդյոք A և B պատահույթներն անկախ են.

1) $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,8$ և $P(A \cap B) = 0,2$,

2) $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,8$ և $P(A \cap B) = 0,32$,

3) $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,3$ և $P(A \cup B) = 0,65$,

4) $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,2$ և $P(A \cap B) = 0$:

Լուծում՝

1) $P(A) \times P(B) = 0,16 \neq 0,2$, հետևաբար՝ A և B պատահույթներն անկախ չեն,

2) $P(A) \times P(B) = 0,32 = P(A \cap B)$, հետևաբար՝ A և B պատահույթներն անկախ են,

3) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,5 + 0,3 - 0,65 = 0,15$

a) $P(A) \times P(B) = 0,15$, հետևաբար՝ A և B պատահույթներն անկախ են,

4) $P(A) \times P(B) = 0,08 \neq 0$, հետևաբար՝ A և B պատահույթներն անկախ չեն:

Առաջադրանքի նկարագիր և իրականացման ուղեցույց

Սովորողներն առաջադրանքը կատարում են զույգերով: Ուսուցիչը օգնում է ամենադժվարացող զույգերին: Առաջադրանքի ավարտին սովորողները շտկում են իրենց պատասխանները համադասարանական քննարկման ընթացքում, որի ժամանակ ուսուցիչը ներգրավում է առավելագույն թվով սովորողների: Երրորդ օրինակում սովորողները նախ պետք է հաշվեն $P(A \cap B)$ հավանականությունը միավորման բանաձևի միջոցով: Վերջին օրինակում ուսուցիչը շեշտում է, որ չնայած A և B պատահույթներն անհամատեղելի են, բայց նրանք կախյալ են:

ՁԵՎԱՎՈՐՈՂ ԳՆԱՀԱՏՈՒՄ (20 րոպե)

Բաժնի ավարտին իրականացվում է ձևավորող գնահատում՝ գաղափարի ընկալման և ընթացիկ գիտելիքի վերաբերյալ: Էական է, որ ձևավորող գնահատումը համապատասխանի տվյալ բաժնի նպատակներին/վերջնարդյունքներին և ներառի ամբողջը: Այս գնահատումն արտացոլում է Գլուխ 3-ի Բաժին 1-ը: Կարևոր է իրականացնել թղթով և մատիտով գնահատում՝ սովորողների լուծման ընթացքին հետևելու և նրանց սխալ պատկերացումները բացահայտելու նպատակով:

Ստորև բերված է ձևավորող գնահատման օրինակ:

Խնդիր 1

Սափորում կա 10 գնդակ՝ 5 սև և 5 կարմիր: Թե սև, թե կարմիր գնդակները համարակալված են 1-ից մինչև 5 թվերով: Սափորից պատահականորեն հանում են մեկ գնդակ:

Դիտարկե՛ք հետևյալ պատահույթները.

$E = \{$հանել են զույգ թիվ$\}$,

$R = \{$հանել է կարմիր գնդակ$\}$:

1) Գտե՛ք $P(E)$, $P(R)$, $P(E \cap R)$, $P(E \cup R)$, $P(\overline{E})$ և $P(\overline{R})$:

2) Ստուգե՛ք, արդյոք E և R պատահույթներն անկախ են:

Խնդիր 2

Նետել են չկեղծված քառանիստ երկու զառ: P-ն ցույց է տալիս զառերի վրա բացված թվերի արտադրյալը:

1) Գծե՛ք նմուշների տարածությունը ներկայացնող աղյուսակը:

2) Գտե՛ք $P = 4$ պատահույթի հավանականությունը:

3) Գտե՛ք $P \geq 4$ պատահույթի հավանականությունը:

Խնդիր 3

Ավագ դպրոցի սովորողների 60%-ն ընդգրկված է «ԱԲ-սերունդ» ծրագրում: Եթե ուսանողն ընդգրկված է «ԱԲ-սերունդ» ծրագրում, հավանականությունը, որ նա կշարունակի իր ուսումն արհեստական բանականությանը, համակարգչային ծրագրավորմանը կամ համակարգչային ճարտարագիտությանն առընչվող ոլորտում, 65% է: Եթե սովորողն ընդգրկված չէ «ԱԲ-սերունդ» ծրագրում, հավանականությունը, որ նա կշարունակի իր ուսումը նշված ոլորտներում, 30% է: Պատահականորեն ընտրվել է մի սովորող:

Դիտարկե՛ք հետևյալ պատահույթները.

$G = \{$ընտրված սովորողն ընդգրկված է «ԱԲ-սերունդ» ծրագրում$\}$,

$A = \{$ընտրված սովորողը շարունակելու է իր ուսումն արհեստական բանականության, համակարգչային ծրագրավորման կամ համակարգչային ճարտարագիտությանն առընչվող ոլորտում$\}$:

1) Գծե՛ք համապատասխան ծառաձև դիագրամը:

2) Գտե՛ք հավանականությունը, որ ընտրված սովորողն ընդգրկված է «ԱԲ-սերունդ» ծրագրում և շարունակելու է իր ուսումն արհեստական բանականությանը, համակարգչային ծրագրավորմանը կամ համակարգչային ճարտարագիտությանն առընչվող ոլորտում:

3) Գտե՛ք հավանականությունը, որ ընտրված սովորողը շարունակելու է իր ուսումն արհեստական բանականությանը, համակարգչային ծրագրավորմանը կամ համակարգչային ճարտարագիտությանն առընչվող ոլորտում:

4) Գտե՛ք հավանականությունը, որ ընտրված սովորողն ընդգրկված է «ԱԲ-սերունդ», եթե նա գիտի, որ շարունակելու է իր ուսումն արհեստական բանականությանը, համակարգչային ծրագրավորմանը կամ համակարգչային ճարտարագիտությանն առընչվող ոլորտում:

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԿԱՐՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԳՆԱՀԱՏՈՒՄ

Կան այլ մաթեմատիկական կարողություններ, որ ուսուցիչը պետք է գնահատի տարբեր բաժինների ընթացքում՝ ռուբրիկ կամ սանդղակ օգտագործելով: Այս կարողություններից են հետազոտումը/փորձը, զանազան տեխնոլոգիական գործիքների կիրառումը, մաթեմատիկական մոդելավորումը, խնդիրների լուծումը, ներկայացումը, վերացական մտածողությունը, հաշվելը, մաթեմատիկորեն հաղորդակցվելը: Յուրաքանչյուր բաժնի ավարտին յուրաքանչյուր սովորողի հետ անհատապես կարելի է իրականացնել նմանատիպ գնահատում:
Կախված գնահատման արդյունքներից՝ ուսուցիչը կարող է յուրաքանչյուր սովորողի հետ անհատապես աշխատել ինքնուրույն կամ խմբային աշխատանքների ժամանակ՝ ուժեղացնելով անհրաժեշտ կարողությունը:
Տրված աղյուսակի օգնությամբ ուսուցիչը կարող է գնահատել յուրաքանչյուր սովորողի մաթեմատիկական կարողությունները:

	Առկա չէ	Պետք է բարելավել	Լավ	Գերազանց
Մաթեմատիկական մոդելավորում				
Խնդրի լուծում				
Ներկայացում				
Վերացական մտածողություն				
Հաշվում				
Մաթեմատիկորեն հաղորդակցում				
Տարբեր տեխնոլոգիական գործիքների փորձարկում				

ՏՆԱՅԻՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

Հետևյալ խնդիրները հանձնարարել որպես տնային աշխատանք:

Գլուխ 5: Խնդիրներ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (էջ 166) հանձնարարել որպես տնային աշխատանք Կ. Առաքելյանի հեղինակած *«Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր 10»* դասագրքից:

1. A և B պատահույթներն անհամատեղելի են և $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,5$:

ա. Գծե՛ք Վեննի դիագրամ՝ այս պատահույթները ցույց տալու համար:

բ. Գտե՛ք $P(A \cup B)$:

գ. Գտե՛ք $P\left(A^{'} \cap B^{'}\right)$:

2. A և B պատահույթներն անկախ են և $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{5}$:

Գտե՛ք

ա. $P(A \cap B)$:

բ. $P\left(A \cap B^{'}\right)$:

գ. $P\left(A^{'} \cap B^{'}\right)$:

3. Q և R երկու պատահույթներ են, այնպես որ $P(Q) = 0,2,\ P(R) = 0,4$ և $P\left(Q^{'} \cap R\right) = 0,4$: Գտե՛ք.

ա. Q և R պատահույթների միջև կապը:

բ. $P(Q \cup R)$:

գ. $P\left(Q^{'} \cap R^{'}\right)$:

4. Նետում են երկու կանոնավոր զառ և գրանցում դրանց վրա բացված թվերը: Ցույց տվե՛ք, որ բացված թվերի գումարը 4 է, և «երկու զառի վրա բացվում է նույն թիվը» պատահույթներն անհամատեղելի չեն:

5. Պարկում կա 3 կարմիր և 5 կապույտ գնդակ: Պատահականորեն ընտրում են մեկ գնդակ, գրանցում գույնը, գնդակը վերադարձնում պարկի մեջ: Հանում են երկրորդ գնդակը և գրանցում գույնը:
ա. Գտե՛ք հավանականությունը, որ երկու գնդակն էլ կապույտ են:
բ. Գտե՛ք հավանականությունը, որ երկրորդ գնդակը կապույտ է:.

6. Արկղում կա 24 էլեկտրական սարք, որից 4-ն անսարք են: Արկղից պատահականորեն ընտրում են երկու սարք: Գտե՛ք հավանականությունը, որ
ա. Կընտրեն 2 անսարք էլեկտրական սարք, եթե առաջին սարքը հանելուց հետո այն վերադարձրել են արկղի մեջ:
բ. Կընտրեն 2 անսարք էլեկտրական սարք, եթե առաջին սարքը հանելուց հետո այն չեն վերադարձրել արկղի մեջ:
գ. Կընտրեն 1 անսարք և 1 սարքին էլեկտրական սարք, եթե առաջինը հանելուց հետո չեն վերադարձրել արկղի մեջ:

7. Պարկում կա 1 կարմիր, 2 կապույտ և 3 կանաչ ժետոն: Պատահականորեն ընտրում են մեկ ժետոն, գրանցոմ գույնը, վերադաձնում պարկի մեջ և հանում երկրորդ ժետոնը:
ա. Գտե՛ք ծառաձև դիագրամ՝ ցույց տալով բոլոր հնարավոր ելքերը:
Գտե՛ք հավանականությունը, որ
բ. երկուսն էլ ունեն նույն գույնը,

գ. երկուսն էլ ունեն տարբեր գույներ:

8. Փոլն ու Ջիլը որոշեցին սեղանի խաղ խաղալ: Փոլի հաղթելու հավանականությունը 0,25 է, իսկ Ջիլինը՝ 0,3: Նրանք որոշեցին խաղալ 3 անգամ: Տրված է, որ խաղի արդյունքներն իրարից անկախ են: Գտե՛ք հավանականությունը, որ
ա. Փոլը 3 խաղն էլ կհաղթի:
բ. Բոլոր խաղերում կգրանցվի ոչ-ոքի:
գ. Ջիլը կհաղթի 2 անգամ, իսկ Փոլը՝ 1:

գ. Երկուսն էլ կհաղթեն մեկական անգամ:

(Առաջադրանքները Տավուշի մարզում նոր չափորոշիչների փորձարկման համար մշակված 10-րդ դասարանի *«Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր»* առարկայի խորացված ծրագրի ուսումնական նյութերից են:)

Բաժին 2: Պատահական մեծություններ, բաշխման օրենք, մաթեմատիկական սպասում և դիսպերսիա

Դասերի քանակը՝ 4

Դասեր

1) Դիսկրետ պատահական մեծություններ և բաշխման օրենք:
2) Մաթեմատիկական սպասում և պատահական մեծության դիսպերսիա:
3) Մաթեմատիկական սպասման և դիսպերսիայի հատկությունները:
4) Դիսկրետ հավասարաչափ բաշխում:

Նպատակներ

Դիսկրետ պատահական մեծությունների, դրանց մաթեմատիկական սպասման, դիսպերսիայի ու բաշխումների ուսումնասիրումը:

Վերջնարդյունքներ

- Իմանա և կիրառի դիսկրետ պատահական մեծությունների հատկությունները, հաշվի դրանց մաթեմատիկական սպասումը, դիսպերսիան, կազմի դրանց բաշխման աղյուսակը:
- Իմանա և կիրառի դիսկրետ հավասարաչափ բաշխման մաթեմատիկական սպասման և դիսպերսիայի բանաձևերը, հաշվի հավանականություններ:
- Կատարի պատահույթների հավանականության հաշվարկներ և գնահատում ֆինանսական որոշումներ կայացնելիս:
- Սահմանի դիսկրետ պատահական մեծություններ:
- Գտնի պատահական մեծության հնարավոր արժեքները:
- Որոշի պատահական մեծության բաշխման օրենքը:
- Սահմանի պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը, դիսպերսիան և ստանդարտ շեղումը:
- Հաշվի պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան:
- Սահմանի դիսկրետ հավասարաչափ բաշխված մեծություններ:
- Կիրառի դիսկրետ հավասարաչափ բաշխված մեծությունների մաթեմատիկական սպասման և դիսպերսիայի բանաձևերը:
- Արտածի $E(aX + b)$ և $Var(aX + b)$ բանաձևերը:
- Կիրառի $E(aX + b)$ և $Var(aX + b)$ բանաձևերը:

Ակնկալվող գիտելիք

Կիրառի հավանականության վերաբերյալ նախնական գիտելիքները:
Գծի և կիրառի ծառաձև դիագրամներ:

Մեթոդաբանություն

Դաս 1: Դիսկրետ պատահական մեծություններ և բաշխման օրենք

ՆՅՈՒԹԻ ՄԱՏՈՒՑՈՒՄ ԵՎ ԶՈՒՅԳԵՐՈՎ ԱՇԽԱՏԱՆՔ (ՄՈՏ 20 ՐՈՊԵ)

Նպատակներ
Սահմանել դիսկրետ պատահական մեծություններ:
Գտնել պատահական մեծության հնարավոր արժեքները:

Առաջադրանքի նկարագիր և իրականացման ուղեցույց
Առաջադրանքի ընթացքում ուսուցիչը ծանոթացնում է պատահական մեծություններին: Դիցուք` Ω-ն պատահական փորձի արդյունքում ստացված նմուշային տարածությունն է: Պատահական մեծությունը Ω-ի վրա որոշված ֆունկցիա է, որի պատկերը R-ի ենթաբազմություն է: Դիսկրետ պատահական մեծություն կոչվում է այն պատահական մեծությունը, որի նմուշային տարածությունը բաղկացած է հաշվելի թվով էլեմենտներից: Դիսկրետ պատահական մեծությունը հաճախ, բայց ոչ միշտ, հանդիսանում է դրական ամբողջ թիվ: Ուսուցիչը մի քանի օրինակ է բերում:

Դիցուք` 4 կարմիր և 5 կապույտ գնդակ պարունակող սափորից հաջորդաբար և վերադարձով հանում են երկու գնդակ: Պատահական մեծությունը կարող է ցույց տալ դուրս եկած կարմիր գնդակների քանակը: Հնարավոր արժեքներն են 0, 1 և 2: Ուսուցիչը որոշակի ժամանակ տրամադրում է` հնարավոր արժեքները գտնելու մեթոդը բացատրելու համար:

Մեկ այլ օրինակ է երկու մետաղադրամ նետելը: Ըստ խաղի կանոնների` յուրաքանչյուր անգամ գիր բացվելիս մասնակիցը վաստակում է 500 միավոր, իսկ զինանշան բացվելիս կորցնում է 200 միավոր: Պատահական մեծությունը ցույց է տալիս վաստակելու (կորցնելու) քանակը խաղի ընթացքում: Ուսուցիչը նշում է, որ շահույթը կարող է բացասական արժեք ունենալ, ինչը վկայում է կորցնելու մասին:

Սովորողները պետք է մտածեն բոլոր հնարավոր տարբերակների մասին: Ուսուցիչը տալիս է սովորողներին մի քանի րոպե ժամանակ` զույգերով աշխատելու համար: Այնուհետև, նրանք կիսվում են իրենց պատասխաններով դասարանական քննարկման ընթացքում: Սովորողները նախ որոշում են նմուշային տարածությունը: Հնարավոր է` անհրաժեշտ լինի կազմել ծառաձև դիագրամ: Երկու մետաղադրամ նետելու նմուշային տարածությունը որոշելուց հետո սովորողները յուրաքանչյուր ելքին վերագրում են համապատասխան արժեք. երկու գիր` 1000 միավոր, մի գիր, մի զինանշան` 300 միավոր, երկու զինանշան` 400 միավոր: Եթե զույգերը դժվարանում են գտնել այդ արժեքները, ուսուցիչը հուշում է կամ ցույց է տալիս առաջին հնարավոր արժեքը գտնելու տարբերակը և հանձնարարում զույգերով հաշվել մյուս արժեքները:

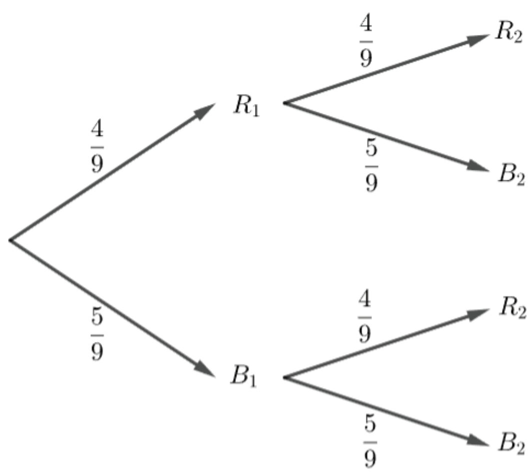
Ապա՝ ուսուցիչը բացատրում է, որ հնարավոր է այդ արժեքները գրառել ստորև բերված աղյուսակում:

$X = a$			
$P(X = a)$			

Աղյուսակը կոչվում է X մեծության բաշխման օրենք կամ հավանականությունների բաշխում: $P(X = a)$ - ն կոչվում է հավանականությունների ֆունկցիա: Առաջին օրինակի միջոցով ուսուցիչը ցույց է տալիս՝ ինչպես լրացնել աղյուսակը: Պատահական մեծության հնարավոր արժեքներն են 0, 1, 2: Հետևաբար՝ առաջին տողում գրում են այդ արժեքները:

$X = a$	0	1	2
$P(X = a)$			

Այնուհետև, նրանք գտնում են յուրաքանչյուր ելքի հավանականությունը: Ուսուցիչն առաջարկում է կազմել ծառաձև դիագրամ՝ հավանականությունները հեշտությամբ գտնել համար:



Ծառաձև դիագրամից գտնում են՝ $P(X = 0) = P(B_1 \cap B_2) = \frac{25}{81}$,

$P(X = 1) = P(R_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap R_2) = \frac{40}{81}$,

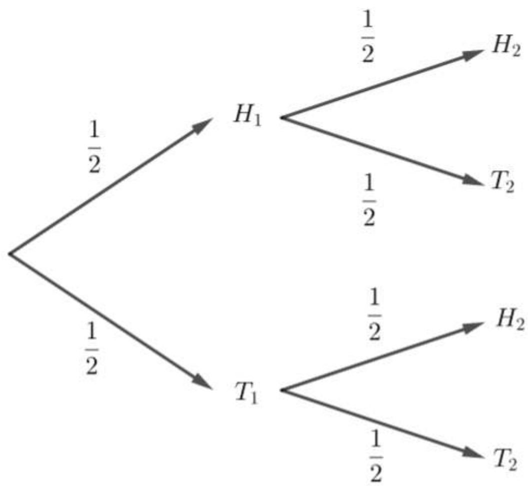
$P(X = 2) = P(R_1 \cap R_2) = \frac{16}{81}$:

Այնուհետև, սովորողները լրացնում են հետևյալ աղյուսակը.

$X = a$	0	1	2

$P(X = a)$	$\frac{25}{81}$	$\frac{40}{81}$	$\frac{16}{81}$

Առաջին օրինակի ավարտին սովորողները ստուգում են հավանականությունների գումարի՝ 1-ի հավասար լինելը։ Այնուհետև, ուսուցիչը որոշակի ժամանակ է տալիս, որպեսզի սովորողներն աշխատեն զույգերով և գրեն երկրորդ օրինակի բաշխման օրենքը։ Այս ընթացքում ուսուցիչն օգնում է դժվարացող սովորողներին։ Հնարավոր է, որ կարիք լինի նորից բացատրել նախորդ օրինակը։ Վերջացնելուն պես նրանք կիսվում են իրենց պատասխաններով դասարանական քննարկման ընթացքում։ Սովորողները նախ կազմում են ծառաձև դիագրամ։



Ապա՝ հաշվում են յուրաքանչյուր ելքի հավանականությունը։

Ծառաձև դիագրամից գտնում են՝ $P(X =- 400) = P(T_1 \cap T_2) =\frac{1}{4}$,

$P(X = 300) = P(H_1 \cap T_2) + P(T_1 \cap H_2) = \frac{1}{2}$,

$P(X = 1000) = P(T_1 \cap T_2) = \frac{1}{4}$։

Օրինակի ավարտին սովորողները լրացնում են աղյուսակում համապատասխան բաշխման օրենքը։

$X = a$	−400	300	1000
$P(X = a)$	0,25	0,5	0,25

Սովորողները ստուգում են հավանականությունների գումարի՝ 1-ի հավասար լինելը։

ԻՆՔՆՈՒՐՈՒՅՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ (ՄՈՏ 20 ՐՈՊԵ)

Նպատակներ

Որոշել պատահական մեծության բաշխման օրենքը:
Գտնել պատահական մեծության հնարավոր արժեքները:

Առաջադրանք

Խաղը կազմված է գիտության և արվեստի վերաբերյալ հավասար քանակով խաղաքարտերից: Մասնակիցները գիտեն, որ գիտության խաղաքարտ վերցնելու դեպքում 0,75 հավանականությամբ կտան ճիշտ պատասխան: Սակայն, եթե վերցնեն արվեստի քարտ, ապա ճիշտ պատասխանելու հավանականությունը 0,2 է: Դիցուք՝ S-ով նշանակենք այն պատահույթը, որ ընտրված խաղաքարտը գիտության վերաբերյալ է, իսկ R-ով, որ մասնակիցը ճիշտ է պատասխանել: Խաղին մասնակցելու համար վճարում են 500 դրամ: Եթե գիտության վերաբերյալ հարցին ճիշտ են պատասխանել, վաստակում են 1000 դրամ, իսկ արվեստի վերաբերյալ հարցին ճիշտ պատասխանելու համար՝ 2000 դրամ, իսկ սխալ պատասխանելու դեպքում ոչինչ չեն ստանում կամ կորցնում:

Դիցուք՝ X պատահական մեծությամբ նշանակված է մասնակիցների շահույթը:

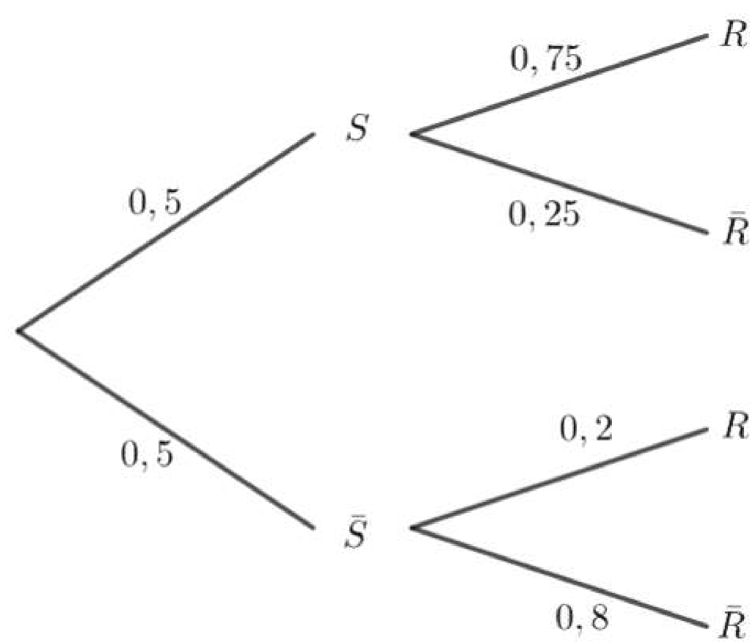
1) Գծե՛ք համապատասխան ծառաձև դիագրամը:

2) Գտե՛ք X-ի հնարավոր արժեքները:

3) Գտե՛ք X-ի բաշխման օրենքը:

Լուծում՝

1)



2) $X = \{-500,\ 500,\ 1500\}$:

3) $P(X = -500) = P(S \cap \overline{R}) + P(\overline{S} \cap \overline{R}) = 0,525,$

$P(X = 500) = P(S \cap R) = 0,375,$

$P(X = 1500) = P(\overline{S} \cap R) = 0,1$:

$X = a$	–500	500	1500
$P(X = a)$	0,525	0,375	0,1

Առաջադրանքի նկարագիր և իրականացման ուղեցույց

Սովորողներն աշխատում են ինքնուրույն: Դժվարանալու դեպքում սովորողներն աշխատում են զույգերով, որոնք կազմվում են հետևյալ կերպ՝ ամենաարագն ավարտած սովորողն ամենադժվարացողի հետ մոտեցմամբ: Ուսուցիչը կարող է հարցնել, թե ով օգնության կարիք ունի և ընտրել սովորողի, որը կօգնի դժվարացողներին, կամ ուսուցիչն ինքը կարող է օգնել: Առաջադրանքի ավարտին սովորողները կիսվում են իրենց պատասխաններով դասարանական քննարկման ժամանակ: Որոշ սովորողներ հնարավոր է դժվարանան հնարավոր արժեքները գտնելիս: Ուսուցիչը օգնում է՝ հուշելով, որ նրանք պետք է հաշվեն վաստակած գումարը և հանեն մասնակցության վճարը:

ՏՆԱՅԻՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

Հետևյալ խնդիրները հանձնարարել որպես տնային աշխատանք:

Գլուխ 5: Խնդիրներ 10, 11, 12, 13, 14, 15 (էջ 166) հանձնարարել որպես տնային աշխատանք Կ. Առաքելյանի հեղինակած *«Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր 10»* դասագրքից:

Առաջադրանք 1

1. Գտե՛ք, թե հետևյալ պատահական մեծություններից ո՞րն է դիսկրետ, որը՝ ոչ: Պատասխանը հիմնավորել.
ա. Մարտկոցի կյանքի տևողությունը:
բ. Շաբաթվա օրերի քանակը:
գ. Շախմատում հաղթելու համար պահանջվող քայլերի թիվը:

2. Չկեղծված զառը նետում են 4 անգամ և բացված 6 թվերի քանակը գրանցում որպես Y: Գրե՛ք Y-ի բոլոր հնարավոր արժեքները:

3. Պայուսակում կա 4 սկավառակ, որոնցից 2-ի վրա գրված է 2 թիվը, իսկ մյուս երկուսի վրա՝ 3 թիվը: Պայուսակից պատահականորեն հանում են մեկ սկավառակ, գրանցում

դրա վրա գրված թիվը և սկավառակը վերադարձնում պայուսակի մեջ: Հանում են երկրորդ սկավառակը և գրանցում վրայի թիվը:
ա. Գրե՛ք նմուշների տարածությունը. X դիսկրետ պատահական մեծությամբ նշանակված է այդ երկու թվերի գումարը:
բ. Գտե՛ք X -ի հավանականությունների բաշխումը:
գ. Գտե՛ք X -ի հավանականության ֆունկցիան:

4. X դիսկրետ պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականությունների բաշխումը.

x	1	2	3	4
$P(X = x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	k	$\frac{1}{4}$

Գտե՛ք k-ն:
5. X պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականության ֆունկցիան.

$P(X = x) = kx$, $x = 1,\ 2,\ 3,\ 4$:

Ցույց տվե՛ք, որ $k = \frac{1}{10}$
6. X պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականության ֆունկցիան.

$P(X = x) = \frac{x-1}{10}$, $x = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$:

Աղյուսակով ներկայացրե՛ք X-ի հավանականությունների բաշխումը:
7. X պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականության ֆունկցիան.

$P(X = x) = \{kx \qquad x = 1,\ 3\ k(x - 1) \quad x = 2,\ 4,$ որտեղ k -ն հաստատուն է:

ա. Գտե՛ք k -ն:
բ. Աղյուսակով ներկայացրե՛ք X -ի հավանականությունների բաշխումը:
8. X դիսկրետ պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականությունների բաշխումը.

x	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{1}{4} - a$	a	$\frac{1}{2} + a$

Գտե՛ք a-ն:

Առաջադրանք 2

1. Դիսկրետ պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականությունների բաշխումը.

x	0	1	2	3	4	5

$P(X = x)$	0,1	0,1	0,3	0,3	0,1	0,1

ա. Գտե՛ք հավանականությունը, որ $X < 3$:

բ. Գտե՛ք հավանականությունը, որ $X > 3$:

գ. Գտե՛ք հավանականությունը, որ $1 < X < 4$:

2. X դիսկրետ պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականությունների բաշխումը.

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

ա. Գտե՛ք $P(1 < X \leq 3)$:

բ. Գտե՛ք $P(X < 2)$

3. X դիսկրետ պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականությունների բաշխումը.

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	0,1	0,1	0,15	0,25	0,3	0,1

ա. Կազմե՛ք $F(x) = P(X \leq x)$ կումուլյատիվ բաշխման ֆունկցիայի աղյուսակը:

բ. Հաշվե՛ք $F(5)$ արժեքը:

գ. Հաշվե՛ք $F(2,2)$ արժեքը:

4. Դիսկրետ պատահական մեծության $F(x) = P(X \leq x)$ կումուլյատիվ բաշխման ֆունկցիան ներկայացված է հետևյալ աղյուսակում.

x	0	1	2	3	4	5	6
$F(x)$	0	0,1	0,2	0,45	0,5	0,9	1

ա. Բերե՛ք X-ի հավանականությունների բաշխման աղյուսակը:

բ. Հաշվե՛ք $P(X < 5)$ արժեքը:

գ. Հաշվե՛ք $P(2 \leq X < 5)$ արժեքը:

5. X պատահական մեծությունն ունի հետևյալ բաշխման ֆունկցիան.

$$P(X=x)=\begin{cases} kx, & x=1,3,5 \\ k(x-1), & x=2,4,6 \end{cases}$$

որտեղ k-ն հաստատուն է:

ա. Գտե՛ք k-ի արժեքը:

բ. Գծե՛ք X-ի հավանականությունների բաշխման աղյուսակը:

գ. Հաշվե՛ք $P(2 \leq X < 5)$:

դ. Գտե՛ք $F(4)$ արժեքը:

ե. Գտե՛ք $F(1,6)$ արժեքը:

6. X դիսկրետ պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականության ֆունկցիան.

$$P(X=x)=\begin{cases} 0,1, & x=-2,-1 \\ \alpha, & x=0,1 \\ 0,3, & x=2 \end{cases}$$

ա. Գտե՛ք α-ի արժեքը:

բ. Գծե՛ք X-ի հավանականությունների բաշխման աղյուսակը:

գ. Գտե՛ք $F(0,3)$ արժեքը:

7. X դիսկրետ պատահական մեծությունն ունի հետևյալ գումարային հավանականության ֆունկցիան.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x=0 \\ \frac{(x+k)^2}{16}, & x=1,2,3 \\ 1, & x>5 \end{cases}$$

ա. Գտե՛ք k-ի արժեքը:

բ. Գծե՛ք X-ի հավանականությունների բաշխումը

(Առաջադրանքները Տավուշի մարզում նոր չափորոշիչների փորձարկման համար մշակված 10-րդ դասարանի *«Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր»* առարկայի խորացված ծրագրի ուսումնական նյութերից են:)

Դաս 2: Մաթեմատիկական սպասում և պատահական մեծության դիսպերսիա

ՆՅՈՒԹԻ ՄԱՏՈՒՑՈՒՄ ԵՎ ԶՈՒՅԳԵՐՈՎ ԱՇԽԱՏԱՆՔ (ՄՈՏ 20 ՐՈՊԵ)

Նպատակներ

Սահմանել պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը, դիսպերսիան և ստանդարտ շեղումը:
Հաշվել պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան:

Առաջադրանքի նկարագիր և իրականացման ուղեցույց

Պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը փորձի միջին արդյունքն է: Օրինակ՝ նախորդ դասի օրինակներում, որտեղ X պատահական մեծությունը ցույց էր տալիս կարմիր գնդակների քանակը, մաթեմատիկական սպասումը կարմիր գնդակների դուրս գալու միջին թիվն է: Նույնկերպ, երբ X-ով նշանակված էր խաղի արդյունքում ստացած շահույթը, $E(X)$-ը միջին շահույթն է, որ մասնակիցը կարող է ունենալ: Ինչու՞ է կարևոր իմանալ $E(X)$-ի արժեքը: Որովհետև նույն խաղը կամ փորձը բազմիցս կրկնելու դեպքում արդյունքների միջին թվաբանականը կկենտրոնանա $E(X)$-ի արժեքի շուրջ:

$E(X)$-ի բանաձևն է $E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + ...$

Օրինակ՝ նախորդ դասի երկրորդ օրինակում ունեինք բաշխման հետևյալ օրենքը.

$X = a$	–400	300	1000
$P(X = a)$	0,25	0,5	0,25

Մաթեմատիկական սպասումը կլինի.

$E(X) = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + p_3 \cdot x_3 = 0,25 \times (-400) + 0,5 \times 300 + 0,25 \times 1000 = 300$:

Հետևաբար՝ միջին շահույթը, որ կարող ենք ունենալ այս խաղում 300 է: Ուսուցիչը տալիս է մի քանի րոպե ժամանակ, որպեսզի սովորողները գտնեն նախորդ դասի երրորդ օրինակի մաթեմատիկական սպասումը:

$X = a$	–500	500	1500
$P(X = a)$	0,525	0,375	0,1

Մաթեմատիկական սպասումը կլինի.

$E(X) = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + P_3 \cdot x_3 =- 500 \times 0,525 + 500 \times 0,375 + 0,1 \times 1500 = 75$:

Ուսուցիչը բացատրում է, որ կարևոր է նաև իմանալ, թե որքանով են տարբեր արժեքները մոտ մաթեմատիկական սպասմանը: Որոշ սովորողներ կառաջարկեն գտնել յուրաքանչյուր արժեքի և մաթեմատիկական սպասման տարբերությունների միջինը: Սակայն տարբերության դեպքում բացասական և դրական արժեքները կկրճատվեն, և դա հստակ ցուցանիշ չի լինի: Դա է պատճառը, որ ավելի նպատակահարմար է գտնել այդ տարբերությունների քառակուսիների միջին թվաբանականը: Արդյունքը, որ ստանում ենք, կարելի է մոտարկել դիսպերսիայի՝ $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ բանաձևով: Դիսպերսիայից քառակուսի արմատ հանելով՝ ստանում ենք σ ստանդարտ շեղումը, վերջինս արտահայտում է մաթեմատիկական սպասումից պատահական մեծության ունեցած ցրվածությունը: Այսպիսով, $\sigma = \sqrt{Var(X)}$: Այնուհետև, նախորդ օրինակի վրա ուսուցիչը ցույց է տալիս $E(X^2)$-ի հաշման եղանակը: Նա ստանում է.

$X = a$	-400	300	1000
X^2	160000	9000	1000000
$P(X = a)$	0,25	0,5	0,25

որտեղից $E(X^2) = 160000 \times 0,25 + 9000 \times 0,5 + 1000000 \times 0,25 = 335000$:

Ապա՝ կիրառում է $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 245000$ բանաձևը:

Հաջորդիվ, հաշվում է դիսպերսիայի քառակուսի արմատը և գտնում ստանդարտ շեղումը. $\sigma = \sqrt{Var(X)} \approx 495$: Հետևաբար՝ միջինում հնարավոր արժեքները 495 դրամով տարբերվում են սպասվող արժեքից: Սա գաղափար է տալիս արժեքների ցրման մասին:

Ուսուցիչը բացատրում է, որ հաշվարկներն արագացնելու համար սովորողները կարող են օգտագործել հաշվիչներ, Excel կամ Python ծրագրերը: Սա նաև կբարելավի սովորողների համակարգչային գրագիտությունը: Այնուհետև, ուսուցիչը որոշ ժամանակ է տալիս, որպեսզի սովորողներն աշխատեն զույգերով և գտնեն մաթեմատիկական սպասումը, դիսպերսիան և ստանդարտ շեղումը երկրորդ օրինակի դեպքում: Այս ընթացքում ուսուցիչը օգնում է դժվարացող սովորողներին: Հնարավոր է՝ նպատակահարմար լինի նորից բացատրել նախորդ օրինակը: Վերջում նրանք կիսվում են իրենց պատասխաններով դասարանական քննարկման ընթացքում: Սովորողները ստանում են.

$X = a$	-500	500	1500
X^2	250000	250000	2250000
$P(X = a)$	0,525	0,375	0,1

Ապա՝ նրանք հաշվում են.

$E(X^2) = 250000 \times 0,525 + 250000 \times 0,375 + 2250000 \times 0,1 = 450000$:

Կիրառելով դիսպերսիայի բանաձևը՝ ստանում են. $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 450000 - 5625 = 444375$:

Հաջորդիվ, սովորողները քառակուսի արմատ են հանում դիսպերսիայի արժեքից և գտնում ստանդարտ շեղումը՝ $\sigma = \sqrt{E(X)} \approx 667$:

ԻՆՔՆՈՒՐՈՒՅՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ (ՄՈՏ 20 ՐՈՊԵ)

Նպատակներ
Որոշել պատահական մեծության բաշխման օրենքը:
Գտնել պատահական մեծության հնարավոր արժեքները:
Հաշվել պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան:
Կատարել պատահույթների հավանականության հաշվարկներ և գնահատում ֆինանսական որոշումներ կայացնելիս:

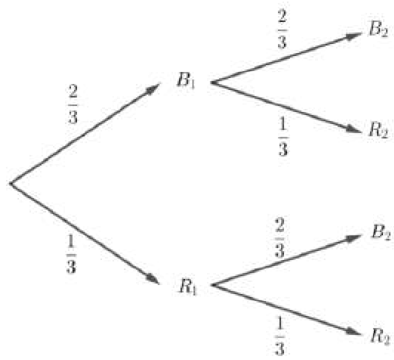
Առաջադրանք

Խնդիր 1

Սափորում կա 6 սև և 3 կարմիր գնդակ: Սափորից հաջորդաբար և վերադարձով պատահականորեն վերցնում են երկու գնդակ: Կարմիր գնդակի ընտրվելու դեպքում շահում ենք 300 դրամ, իսկ սև գնդակի ընտրվելու դեպքում կորցնում ենք 100 դրամ: Դիցուք՝ X-ով նշանակված է ընտրված կարմիր գնդակների քանակը ցույց տվող պատահական մեծությունը:
Դիցուք՝ Y-ով նշանակված է շահույթը ցույց տվող պատահական մեծությունը:
1) Գծե՛ք համապատասխան ծառաձև դիագրամը:
2) Գտե՛ք X-ի հնարավոր արժեքները:
3) Գտե՛ք Y-ի հնարավոր արժեքները:
4) Գրե՛ք Y-ի բաշխման օրենքը:
5) Գտե՛ք $E(Y)$:
6) Գտե՛ք $Var(Y)$: Այնուհետև՝ հաշվե՛ք Y-ի ստանդարտ շեղումը՝ σ:

Խնդիր 2
Ապահովագրական ընկերությունը $450 արժեքով վաճառում է $10000 արժողությամբ կյանքի ապահովագրման փաթեթ այն անձանց, ովքեր 97% հավանականությամբ կապրեն մեկ տարի: Որքա՞ն գումար է ակնկալում տարեկան վաստակել ընկերությունը մեկ նման փաթեթի վաճառքից:

Լուծում՝
Խնդիր 1
1)



2) $X = \{0,\ 1,\ 2\}$,
3) $Y = \{-\ 200,\ 200,\ 600\}$,
4)

$X = a$	$-\ 200$	200	600
$P(X = a)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

1) $E(Y) = \frac{200}{3} = 66,67$

$X = a$	$-\ 200$	200	600
X^2	40000	40000	360000
$P(X = a)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

2) $E(Y^2) = \frac{680000}{9} = 75555,6$,
$Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 75555,6 - 4444,89 = 71110,71$,
$\sigma(Y) = \sqrt{Var(Y)} = 266,67$:

Խնդիր 2

$X = a$	450	-9550
$P(X = a)$	0,97	0,03

$E(X) = 450 \times 0,97 - 9550 \times 0,03 = \$150$

Ապահովագրական ընկերությունը յուրաքանչյուր նման վաճառքից ակնկալում է վաստակել $150:

Առաջադրանքի նկարագիր և իրականացման ուղեցույց

Սովորողներն աշխատում են ինքնուրույն: Դժվարանալու դեպքում սովորողներն աշխատում են զույգերով, որոնք կազմվում են հետևյալ կերպ՝ ամենաարագն ավարտած սովորողն ամենադժվարացողի հետ մոտեցմամբ: Ուսուցիչը կարող է հարցնել, թե ով օգնության կարիք ունի և ընտրել սովորողի, որը կօգնի դժվարացողներին, կամ ուսուցիչն ինքը կարող է օգնել: Առաջադրանքի ավարտին սովորողները կիսվում են իրենց պատասխաններով դասարանական քննարկման ժամանակ: Առաջին երկու մասերի նպատակն է սովորողների համար հստակ դարձնել պատահական մեծության սահմանումն իրական կյանքին առընչվող խնդրի համատեքստում: Այն նաև օգնում է ուսուցչին ներկայացնել տարբեր պատահական մեծությունների առնչության գաղափարը, որը կօգտագործվի հաջորդ դասում: Շատ դեպքերում սովորողներն ուղղակի տրամաբանությունից ելնելով են սահմանում պատահական մեծությունները, ինչն անընդունելի է, քանի որ որոշ իրավիճակներում հնարավոր է սահմանել տարբեր պատահական մեծություններ: Երկրորդ խնդրում սովորողները հնարավոր է դժվարանան հնարավոր արժեքները գտնել: Ուսուցիչը կարող է որոշ հուշումներ տալ: Այս խնդիրը օրինակ է ֆինանսական մաթեմատիկայից և նպաստում է սովորողներին հասկանալ հավանականությունների և մաթեմատիկական սպասման վրա հիմնված որոշումներ կայացնելու և գների ընտրության կարևորությունը:

ՏՆԱՅԻՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

Հետևյալ խնդիրները հանձնարարել որպես տնային աշխատանք:

Գլուխ 5: Խնդիրներ 16, 17 (էջ 169) հանձնարարել որպես տնային աշխատանք Կ. Առաքելյանի հեղինակած *«Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր 10»* դասագրքից:

Առաջադրանք 1

1. X-ի հետևյալ բաշխումների համար հաշվե՛ք $E(X)$ և $E(X^2)$:

ա.

x	2	4	6	8
$P(X = x)$	0,3	0,3	0,2	0,2

բ.

x	1	2	3	4
$P(X = x)$	0,1	0,4	0,1	0,4

գ. Ոչ կանոնավոր զառն ունի հետևյալ հավանականությունների բաշխումը.

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	0,1	0,1	0,1	0,2	0,4	0,1

Հաշվե՛ք $E(X)$ և $E(X^2)$:

2. X պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականության ֆունկցիան.

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x = 2, 3, 6 \\ 0, & \text{մնացած արժեքների համար} \end{cases}$$

ա. Կազմե՛ք X-ի հավանականությունների բաշխման աղյուսակը:

բ. Հաշվե՛ք $E(X)$ և $E(X^2)$:

գ. Մեկնաբանե՛ք՝ արդյոք $[E(X)]^2 = E(X^2)$:

3. Երկու մետաղադրամ նետում են 50 անգամ և գրանցվում են, թե քանի անգամ է գիր բացվել:

ա. Կազմե՛ք գիր բացվելու քանակի հավանականությունների բաշխման աղյուսակը՝ ենթադրելով, որ երկու մետաղադրամները նետվում են միաժամանակ և կեղծված չեն:

բ. Հաշվե՛ք, թե ինչ հաճախականությամբ եք սպասում, որ գիր կբացվի 0, 1 կամ 2 անգամ:

Գիր բացվելու քանակ (Գ)	0	1	2
Հաճախականություն (f)	7	22	21

գ. Ստուգե՛ք, թե արդյոք իրական հաճախականությունները հիմնավորում են, որ մետաղադրամները կեղծված չեն: Պատասխանը հիմնավորել:

4. X պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականությունների բաշխումը.

x	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0,1	a	b	0,2	0,1

Գտե՛ք a և b-ն, եթե $E(X) = 2,9$:

5. Հինգ բաժին ունեցող կանոնավոր պտուտակի նիստերի վրա գրված են 1-ից 5 թվերը: Պտուտակը պտտում են 500 անգամ: Հաշվարկներով ցույց տվե՛ք, թե քանի անգամ եք սպասում, որ կբացվի 3 թիվը:

Առաջադրանք 2

1. Տրված է հետևյալ հավանականությունների բաշխումը:

x	-1	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

ա. Գտե՛ք $E(X)$:

2. Հետևյալ X պատահական մեծությունների հավանականությունների բաշխման համար գտե՛ք մաթեմատիկական սպասումն ու դիսպերսիան:
ա.

x	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

բ.

x	-1	0	1
$P(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

գ.

x	-2	-1	1	2
$P(X = x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

3. Y-ը կանոնավոր զառը նետելիս բացված թիվն է: Գտե՛ք $E(Y)$ և $Var(Y)$:

4. Երկու կանոնավոր խորանարդաձև զառերի վրա բացված թվերի S գումարի համար.
ա. Գտե՛ք S-ի բաշխումը:
բ. Գտե՛ք $E(S)$:
գ. Գտե՛ք $Var(S)$:

5. Նետում են երկու կանոնանվոր քառանիստ զառ: D-ն բացված թվերի դրական տարբերությունն է:
ա. Գտե՛ք D-ի բաշխումը և ցույց տվե՛ք, որ $P(D = 3) = \frac{1}{8}$:
բ. Գտե՛ք $E(D)$:
գ. Գտե՛ք $Var(D)$:

6. Կանոնավոր մետաղադրամը նետում են այնքան, մինչև բացվի զինանշան կամ մինչև երեք նետում անելը: T պատահական մեծությունը ցույց է տալիս նետումների քանակը:
ա. Ցույց տվեք, որ T-ն ունի հետևյալ բաշխումը.

t	1	2	3
$P(T = t)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

բ. Գտե՛ք T-ի սպասումն ու դիսպերսիան:

7. X պատահական մեծությունն ունի հետևյալ բաշխումը.

x	1	2	3
$P(X = x)$	a	b	a

Որտեղ a և b հաստատուններ են:

ա. Գտե՛ք $E(X)$-ի արտահայտությունը:

բ. Գտե՛ք a և b, եթե $Var(X) = 0,75$:

(Առաջադրանքները Տավուշի մարզում նոր չափորոշիչների փորձարկման համար մշակված 10-րդ դասարանի *«Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր»* առարկայի խորացված ծրագրի ուսումնական նյութերից են:)

Դաս 3: Մաթեմատիկական սպասման և դիսպերսիայի հատկությունները

ՆՅՈՒԹԻ ՄԱՏՈՒՑՈՒՄ ԵՎ ԶՈՒՅԳԵՐՈՎ ԱՇԽԱՏԱՆՔ (ՄՈՏ 20 ՐՈՊԵ)

Նպատակներ

Արտածել $E(aX + b)$ և $Var(aX + b)$ բանաձևերը:
Կիրառել $E(aX + b)$ և $Var(aX + b)$ բանաձևերը:

Առաջադրանքի նկարագիր և իրականացման ուղեցույց

Այս առաջադրանքի միջոցով ուսուցիչը ընդլայնում է մաթեմատիկական սպասման գաղափարը: Որոշ իրավիճակներում պատահական մեծության բոլոր արժեքները կարող են բազմապատկվել որևէ հաստատունով: Հետևաբար՝ X-ի փոխարեն ստացվում է aX: Օրինակ՝ երբ խանութի բոլոր ապրանքների վրա սահմանված է նույն զեղչը, ապա կարելի է ասել, որ X-ի բոլոր արժեքները բազմապատկվել են նույն a հաստատունով: Այսպիսով, մեզ հետաքրքիր է մաթեմատիկական սպասման և դիսպերսիայի հետ տեղի ունեցող փոփոխությունները: Ուսուցիչը պարզ օրինակ է բերում, որպեսզի սովորողները գտնեն մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան: Այնուհետև, բազմապատկելով բոլոր արժեքները տրված հաստատունով, գտնում են մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան: Նույնկերպ, սովորողները լուծում են օրինակ, որտեղ բոլոր արժեքներին գումարվում կամ հանվում է a հաստատունը:

X	4	12	20
$P(X)$	0,5	0,3	0,2

$E(X) = 9,6,$

X	4	12	20
X^2	16	144	400
$P(X)$	0,5	0,3	0,2

$E(X^2) = 131,2,$

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 39,04:$

Դիտարկենք դեպք, երբ արժեքները բազմապատկվում են 0,75 հաստատունով:

$Y = 0.75X$	3	9	15
$P(Y)$	0,5	0,3	0,2

$E(Y) = E(0,75X) = 7,2 = 0,75 \times 9,6 = 0,75E(X)$

$Y = 0.75X$	3	9	15
Y^2	9	81	225
$P(Y)$	0,5	0,3	0,2

$E(Y^2) = 73,8$,

$Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 21,96 = 0,75^2 \times 39,04$:

Նշված կապը բացահայտելու համար սովորողներին հնարավոր է՝ անհրաժեշտ լինի որոշակի ժամանակ և օգնություն: Սովորողները եզրակացնում են, որ $E(aX) = aE(X)$ և $Var(aX) = a^2Var(X)$: Այնուհետև, դիտարկում են ոչ թե բազմապատկելու, այլ արժեքներից հաստատունի հանելու դեպքը (բերված օրինակում հաստատունը 2 է):

$Y = X - 2$	2	10	18
$P(Y)$	0,5	0,3	0,2

$E(Y) = E(X - 2) = 7,6 = 9,6 - 2 = E(X) - 2$,

$Y = X - 2$	2	10	18
Y^2	4	100	324
$P(Y)$	0,5	0,3	0,2

$E(Y^2) = 96,8$,

$Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 39,04 = Var(X)$:

Սովորողները եզրակացնում են, որ $E(X + a) = E(X) + a$ և $Var(X + a) = Var(X)$:

Առաջադրանքի ավարտին սովորողները եզրակացնում են՝

$E(aX) = aE(X)$, $E(X + b) = E(X) + b$,

$Var(aX) = a^2Var(X)$, $Var(X + b) = Var(X)$:

Վերջում ուսուցիչը նշում է, որ նրանք կարող են միավորել այդ երկու բանաձևերը և ստանալ՝ $E(aX + b) = aE(X) + b$ և $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$:

ԻՆՔՆՈՒՐՈՒՅՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ (ՄՈՏ 20 ՐՈՊԵ)

Նպատակ
Կիրառել $E(aX + b)$ և $Var(aX + b)$ բանաձևերը:

Առաջադրանք

Խնդիր 1

Հայտնի է, որ $E(X) = 4$, $Var(X) = 3$:
Գտե՛ք հետևյալ արժեքները.
ա) $E(3X)$,

բ) $E(X - 2)$,

գ) $Var(3X)$,

դ) $Var(X - 2)$,

ե) $E(X^2)$:

Խնդիր 2
X մեծության համար տրված է բաշխման հետևյալ աղյուսակը.

$X = a$	0	1	2
$P(X = a)$	0,25	0,5	0,25

Երկու տարբեր եղանակով գտե՛ք $E(Y)$ և $Var(Y)$ արժեքները, որտեղ $Y = 2X + 1$:

Լուծում՝
Խնդիր 1

ա) $E(3X) = 12$,

բ) $E(X - 2) = 2$,

գ) $Var(3X) = 27$,

դ) $Var(X - 2) = 3$,

ե) $E(X^2) = Var(X) + (E(X))^2 = 4 + 9 = 13$:

Խնդիր 2

1-ին եղանակ

$X = a$	0	1	2
X^2	0	1	4
$P(X = a)$	0,25	0,5	0,25

$E(X) = 1,$

$E(X^2) = 1,5,$

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1,5 - 1 = 0,5,$

$E(Y) = 2E(X) + 1 = 3,$

$Var(Y) = 4 \times Var(X) = 2$:

2-րդ եղանակ

X	0	1	2
$Y = 2X + 1$	1	3	5
Y^2	1	9	25
$P(X)$	0,25	0,5	0,25

$E(Y) = 0,25 + 1,5 + 1,25 = 3,$

$E(Y^2) = 0,25 + 4,5 + 6,25 = 11,$

$Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 11 - 9 = 2$:

Առաջադրանքի նկարագիր և իրականացման ուղեցույց

Սովորողներն աշխատում են ինքնուրույն: Դժվարանալու դեպքում սովորողներն աշխատում են զույգերով, որոնք կազմվում են հետևյալ կերպ՝ ամենաարագն ավարտած սովորողն ամենադժվարացողի հետ մոտեցմամբ: Ուսուցիչը կարող է հարցնել, թե ով օգնության կարիք ունի և ընտրել սովորողի, որը կօգնի դժվարացողներին, կամ ուսուցիչն ինքը կարող է օգնել: Առաջադրանքի ավարտին սովորողները կիսվում են իրենց պատասխաններով դասարանական քննարկման ժամանակ: Առաջին խնդրում սովորողները կիրառում են բանաձևեր: Երկրորդ խնդիրը սովորողները կարող են լուծել երկու եղանակով: Առաջին եղանակը համեմատաբար հեշտ է: Նրանք կարող են փորձել լուծել երկրորդ եղանակով, հատկապես եթե նրանց անհրաժեշտ է կիրառել բանաձևերի արտածում:

ՏՆԱՅԻՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

Հետևյալ խնդիրները հանձնարարել որպես տնային աշխատանք:

Գլուխ 5: Խնդիրներ 18 (էջ 169) հանձնարարել որպես տնային աշխատանք Կ. Առաքելյանի հեղինակած *«Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր 10»* դասագրքից:

1. $E(X) = 4,\ Var(X) = 10$: Գտնել

ա. $E(2X)$ բ. $Var(2X)$

2. $E(X) = 2$, $Var(X) = 6$: Գտնել

ա. $E(3X)$ բ. $E(3X + 1)$ գ. $E(X - 1)$ դ. $E(4 - 2X)$

ե. $Var(3X)$ զ. $Var(3X + 1)$ է. $Var(X - 1)$

3. X պատահական մեծության միջինը (մաթ սպասումը) 3 է, իսկ դիսպերսիան՝ 9: Գտնել.

ա. $E(2X + 1)$ բ. $E(2 + X)$ գ. $Var(2X + 1)$ դ. $Var(2 + X)$

1. X պատահական մեծության միջինը (մաթ սպասումը) μ է, իսկ ստանդարտ շեղումը՝ σ: Գտնել

ա. $E(4X)$ բ. $E(2X + 2)$ գ. $E(2X - 2)$

դ. $Var(2X + 2)$ ե. $Var(2X - 2)$

4. Y պատահական մեծության միջինը (մաթ սպասումը) 2 է, իսկ դիսպերսիան՝ 9: Գտնել

ա. $E(3Y + 1)$ բ. $E(2 - 3Y)$ գ. $Var(3Y + 1)$

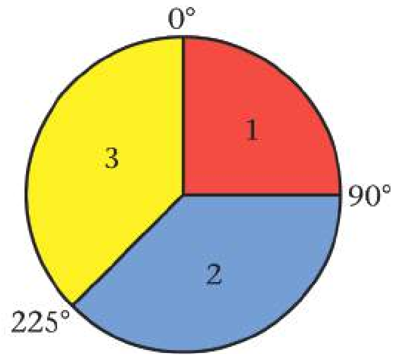
դ. $Var(2 - 3Y)$ ե. $E(Y^2)$ զ. $E[(Y - 1)(Y + 1)]$

5. T պատահական մեծության միջինը (մաթ սպասումը) 20 է, իսկ ստանդարտ շեղումը՝ 5: Պահանջվում է նորմավորել T-ն հետևյալ վանաձևով. $S = 3T + 4$:Գտնել $E(S)$ և $Var(S)$:

6. Կանոնավոր պտուտակը պատրաստված է դիագրամում պատկերված սկավառակից, իսկ X պատահական մեծությունը ցույց է տալիս պտույտից հետո պտուտակի ցույց տված թիվը:

ա. Գտնել X-ի բաշխումը բ. Հաշվել $E(X)$ գ. Գտնել $Var(X)$

դ. Գտնել $E(2X + 1)$ զ. Գտնել $Var(3X - 1)$:



7. X դիսկրետ պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականությունների բաշխումը.

x	-1	0	1	2
$P(X = x)$	$0,2$	$0,5$	$0,2$	$0,1$

ա. Գտնել $E(X)$ բ. Գտնել $Var(X)$ գ. Գտնել $E(\frac{1}{3}X + 1)$ դ. Գտնել $Var(\frac{1}{3}X + 1)$

Դաս 4: Դիսկրետ հավասարաչափ բաշխում

ՆՅՈՒԹԻ ՄԱՏՈՒՑՈՒՄ ԵՎ ԶՈՒՅԳԵՐՈՎ ԱՇԽԱՏԱՆՔ (ՄՈՏ 10 ՐՈՊԵ)

Նպատակներ

Սահմանել դիսկրետ հավասարաչափ բաշխված մեծություններ:
Սահմանել դիսկրետ հավասարաչափ բաշխված մեծությունների մաթեմատիկական սպասումը
և դիսպերսիան:

Առաջադրանքի նկարագիր և իրականացման ուղեցույց

Առաջադրանքի նպատակն է սահմանել դիսկրետ հավասարաչափ բաշխում: Ուսուցիչը բերում է զառի օրինակը: Սովորողները նկատում են, որ զառը նետելիս թվերից յուրաքանչյուրի բացվելու հավանականությունները հավասար են: Ուսուցիչը նշում է, որ եթե պատահույթի յուրաքանչյուր արժեքի հավանականությունը նույնն է, ապա այդ պատահույթը կոչվում է դիսկրետ հավասարաչափ բաշխված: Այն դիսկրետ է, քանի որ պատահական մեծության հնարավոր արժեքները ոչ բացասական ամբողջ թվեր են:

$X = a$	1	2	3	4	5	6

X^2	1	4	9	16	25	36
$P(X = a)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$E(X) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} = \frac{21}{6} = 3,5,$

$E(X^2) = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{9}{6} + \frac{16}{6} + \frac{25}{6} + \frac{36}{6} = \frac{91}{6},$

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{91}{6} - \frac{441}{36} = \frac{35}{12}$:

Եթե կա n հնարավոր ելք, ապա յուրաքանչյուրի հավանականությունը $\frac{1}{n}$ է:
Ուսուցիչը տալիս է $E(X) = \frac{n+1}{2}$ և $Var(X) = \frac{(n+1)(n-1)}{12}$ բանաձևերը:
Ուսուցիչը հանձնարարում է սովորողներին կիրառել այդ բանաձևերը նախորդ օրինակի վրա.
$E(X) = \frac{7}{2} = 3,5,$
$Var(X) = \frac{7\times5}{12} = \frac{35}{12}$:

ԻՆՔՆՈՒՐՈՒՅՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ (ՄՈՏ 10 ՐՈՊԵ)

Նպատակ

Կիրառել դիսկրետ հավասարաչափ բաշխված մեծությունների մաթեմատիկական սպասման
և դիսպերսիայի բանաձևերը:

Առաջադրանք

Սափորում կա 10 գնդակ՝ համարակալված 1-ից 10 թվերով: Բոլոր գնդակները նույն հավանականությամբ կարող են ընտրվել:

1) Գտե՛ք այն գնդակի ընտրվելու հավանականությունը, որի վրա գրված է 3:
2) Գտե՛ք այն գնդակի ընտրվելու հավանականությունը, որի վրա գրված է 3-ից փոքր թիվ:
3) Գտե՛ք մաթեմատիկական սպասումը:
4) Գտե՛ք դիսպերսիան:

Լուծում

1) $P(X = 3) = \frac{1}{10} = 0,1,$
2) $P(X < 3) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2}{10} = 0,2,$
3) $E(X) = \frac{11}{2} = 5,5,$
4) $Var(X) = \frac{(10+1)(10-1)}{12} = 8,25$:

Առաջադրանքի նկարագիր և իրականացման ուղեցույց

Սովորողներն աշխատում են ինքնուրույն: Դժվարանալու դեպքում սովորողներն աշխատում են զույգերով, որոնք կազմվում են հետևյալ կերպ՝ ամենաարագն ավարտած սովորողն ամենադժվարացողի հետ մոտեցմամբ: Ուսուցիչը կարող է հարցնել, թե ով օգնության կարիք ունի և ընտրել սովորողի, որը կօգնի դժվարացողներին, կամ ուսուցիչն ինքը կարող է օգնել: Առաջադրանքի ավարտին սովորողները կիսվում են իրենց պատասխաններով դասարանական քննարկման ժամանակ: Բոլոր մասերում սովորողները կարող են կիրառել բանաձևերը և ստանալ պատասխանները: Երկրորդ մասում նրանք պետք է վերաձևակերպեն $X < 3$ պատահույթը՝ $X = 1$, 2 պատահույթի:

ՁԵՎԱՎՈՐՈՂ ԳՆԱՀԱՏՈՒՄ (20 րոպե)

Բաժնի ավարտին իրականացվում է ձևավորող գնահատում՝ գաղափարի ընկալման և ընթացիկ գիտելիքի վերաբերյալ: Էական է, որ ձևավորող գնահատումը համապատասխանի տվյալ բաժնի նպատակներին/վերջնարդյունքներին և ներառի ամբողջը: Այս գնահատումն արտացոլում է Գլուխ 3-ի բաժին 2-ը:
Ստորև բերված է ձևավորող գնահատման օրինակ:

Խնդիր 1

Խաղը կայանում է մետաղադրամը երկու անգամ նետելու դեպքում: Մասնակիցը շահում է 5 եվրո յուրաքանչյուր գիր դուրս գալիս և կորցնում 2 եվրո՝ զինանաշանի դուրս գալու դեպքում: Դիցուք՝ X-ով նշանակված է շահույթը ցույց տվող պատահական մեծությունը:

1) Որոշե՛ք X-ի հնարավոր արժեքները:

2) Գծե՛ք համապատասխան ծառաձև դիագրամը:

3) Գտե՛ք X-ի բաշխման օրենքը:

4) Հաշվե՛ք $P(X < 4)$.

5) Հաշվե՛ք X-ի մաթեմատիկական սպասումը, դիսպերսիան և ստանդարտ շեղումը:

6) Պատկերացրե՛ք՝ շահույթը և կորուստը կրկնապատկվել են: Այսպիսով, գիր դուրս գալու դեպքում մասնակիցը շահում է 10 եվրո, իսկ զինանշան դուրս գալու դեպքում կորցնում է 4 եվրո: Նոր պատահական մեծությունը նշանակված է Y-ով:

Գտե՛ք $E(Y)$ և $Var(Y)$:

Խնդիր 2

Նետել են քսանանիստ կանոնավոր զառ, որի նիստերը համարակալված են 1ից 20 թվերով: Դիցուք՝ X պատահական մեծությամբ նշանակված է զառը նետելիս բացված միավորների քանակը:

1) Գտե՛ք $E(X)$:

2) Գտե՛ք $Var(X)$:

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԿԱՐՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԳՆԱՀԱՏՈՒՄ

Կան այլ մաթեմատիկական կարողություններ, որ ուսուցիչը պետք է գնահատի տարբեր բաժինների ընթացքում՝ ռուբրիկ կամ սանդղակ օգտագործելով: Այս կարողություններից են հետազոտումը/փորձը, զանազան տեխնոլոգիական գործիքների կիրառումը, մաթեմատիկական մոդելավորումը, խնդիրների լուծումը, ներկայացումը, վերացական մտածողությունը, հաշվելը, մաթեմատիկորեն հաղորդակցվելը: Յուրաքանչյուր բաժնի ավարտին յուրաքանչյուր սովորողի հետ անհատապես կարելի է իրականացնել նմանատիպ գնահատում:

Կախված գնահատման արդյունքներից՝ ուսուցիչը կարող է յուրաքանչյուր սովորողի հետ անհատապես աշխատել ինքնուրույն կամ խմբային աշխատանքների ժամանակ՝ ուժեղացնելով անհրաժեշտ կարողությունը:

Տրված աղյուսակի օգնությամբ ուսուցիչը կարող է գնահատել յուրաքանչյուր սովորողի մաթեմատիկական կարողությունները:

	Առկա չէ	Պետք է բարելավել	Լավ	Գերազանց
Մաթեմատիկական մոդելավորում				
Խնդրի լուծում				
Ներկայացում				
Վերացական մտածողություն				
Հաշվում				
Մաթեմատիկորեն հաղորդակցում				
Տարբեր տեխնոլոգիական գործիքների փորձարկում				

ՏՆԱՅԻՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ
Հետևյալ խնդիրները հանձնարարել որպես տնային աշխատանք:

1. X-ը դիսկրետ հավասարաչափ բաշխված պատահական մեծություն է $1, 2, 3, 4$ և 5 արժեքներով: Հաշվե՛ք X-ի մաթեմատիկական սպասումն ու դիսպերսիան:

2. Պարկում կա 7 միատեսակ գնդակ, որոնց վրա գրված են 1-7 թվերը: Պատահականորեն հանում են մեկ գնդակ: X-ը գնդակի վրայի թիվն է:
ա. Գտե՛ք $E(X)$:
բ. Գտե՛ք $Var(X)$:

3. Կանոնավոր զառը նետում են մեկ անգամ: X-ը զառի վրա բացված թիվն է:
ա. Հաշվե՛ք X-ի մաթեմատիկական սպասումն ու դիսպերսիան:
բ. Հաշվե՛ք հավանականությունը, որ X-ը միջինից գտնվում է մեկ ստանդարտ շեղման միջակայքում:
4. 2, 4, 6, ..., 20 զույգ թվերով խաղաքարտերի տուփից պատահականորեն ընտրում են մեկ խաղաքարտ: X-ը խաղաքարտի վրայի թիվն է:
ա. Գտե՛ք $P(X > 15)$:
բ. Գտե՛ք X-ի մաթեմատիկական սպասումն ու դիսպերսիան:

5. Կրկնե՛ք նախորդ խնդիրը կենտ թվերի համար:

6. Թղթի վրա առանձնացնում են հատված, որը բաժանում են 4 հավասար մասերի և ստացված հատվածները համարակալում են 1, 2, 3 և 4 թվերով: Խնջույքի ընթացքում խաղ են խաղում, որի ժամանակ կապում են որևէ մեկի աչքերը, ով հատվածի վրա կետ է դնում: Գրանցում են հատվածի համարը, որին պատկանում է կետը: Առաջարկվում է որպես բաշխում դիտարկել հավասարաչափ դիսկրետ բաշխումը (1, 2, 3 , 4) բազմության վրա: Մեկնաբանե՛ք այս առաջարկը:

7. Արդար խաղի համար օգտագործում են կանոնավոր պտուտակ: Մեկ պտույտ անելու համար պետք է վճարել 5 ցենտ: Պտուտակը պտտելուց բացված թիվը ցույց է տալիս շահած գումարը:

Կրկնություն և ամփոփիչ գնահատում

Դասերի քանակը՝ 2

1. Վերուսուցանում և կրկնության խնդիրներ:
2. Ամփոփիչ գնահատում և ամփոփիչ գնահատման վերլուծություն:

Դաս 1: Վերուսուցանում և կրկնության խնդիրներ

ՎԵՐՈՒՍՈՒՑԱՆՈՒՄ (ՄՈՏ 20 ՐՈՊԵ)

Նպատակներ

Վերանայել Գլուխ 3-ի Բաժին 1 և 2-ի դժվար հատվածները:

Առաջադրանքի նկարագիր և իրականացման ուղեցույց

Դասի ընթացքում ուսուցիչը կրկնում է սովորողների համար դժվար ցանկացած թեմա: Նա կարող է ընտրել, թե որ մասերը վերանայել՝ հիմնվելով ձևավորող գնահատումների արդյունքների վրա: Թեմաների վերանայման ընթացքում ուսուցիչը հանձնարարում է որոշ սովորողների իրենց ներդրումն ունենալ: Դասընկերներին ուսուցանելը կարող է օգտակար լինել և՛ այն սովորողի համար, ով բացատրում է, և՛ ում բացատրում են: Դասընկերոջը բացատրելու ընթացքում ուսուցիչը ստուգում է՝ արդյոք թյուրըմբռնումներ չկան: Ինչ վերաբերում է դժվարացող սովորողներին, որոշ դեպքերում հնարավոր է՝ նրանք նյութն ավելի լավ ըմբռնեն, եթե այն բացատրվի դասընկերոջ կողմից: Այս առաջադրանքն իրականացվում է ամբողջ դասարանով կամ փոքր խմբերով. տևողությունը կարող է տարբեր լինել՝ կախված սովորողների դժվարություններից:

ԻՆՔՆՈՒՐՈՒՅՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ (ՄՈՏ 20 ՐՈՊԵ)

Նպատակ

Վերանայել Գլուխ 3-ի Բաժին 1 և 2-ի հիմնական հասկացությունները

Առաջադրանքի նկարագիր և իրականացման ուղեցույց

Սովորողներն ինքնուրույն են կատարում կրկնության խնդիրները: Դժվարանալու դեպքում սովորողներն աշխատում են զույգերով, որոնք կազմվում են հետևյալ կերպ՝ ամենաարագն ավարտած սովորողն ամենադժվարացողի հետ մոտեցմամբ: Ուսուցիչը կարող է հարցնել, թե ով օգնության կարիք ունի և ընտրել սովորողի, ով կօգնի դժվարացողներին, կամ ուսուցիչն ինքը կարող է օգնել: Կրկնության խնդիրները կարող են ընտրվել ձևավորող գնահատման այն հատվածներից, որոնք ամենադժվարն են եղել սովորողների համար: Խնդիրները լուծելու ընթացքում ուսուցիչը պատասխանում է սովորողների հարցերին և անհատապես վերուսուցանում գլխի առանձին մասերը:

Նմուշ խնդիրներ

Խնդիր 1

Սափորում կա 12 գնդակ՝ 8 սև և 4 կարմիր: Սև գնդակները համարակալված են 1-ից 8 թվերով: Կարմիր գնդակները համարակալված են 1-ից 4 թվերով: Սափորից պատահականորեն վերցնում են մեկ գնդակ:

Դիտարկե՛ք հետևյալ պատահույթները.

$M =$ {4-ի բազմապատիկ է դուրս եկել},

$B =$ {կարմիր գնդակ է դուրս եկել}:

1) Գտե՛ք $P(M)$, $P(B)$, $P(M \cap B)$, $P(M \cup B)$, $P(\overline{M})$ և $P(\overline{B})$:

2) Ստուգե՛ք M և B պատահույթներն անկախ են, թե ոչ:

Խնդիր 2

Կինոթատրոնի տնօրենին հետաքրքրում է իր հանդիսատեսի նախընտրած ֆիլմերի ոճը, ինչպես նաև, թե որքան է օգտվում քաղցրավենիքի բաժնից: Մի քանի ամսվա ուսումնասիրությունը ցույց է տվել, որ հանդիսատեսի 40% նախընտրում է մարտաֆիլմեր, 35%-ը՝ մուլտֆիլմեր, իսկ մնացածը՝ կատակերգություններ: Մարտաֆիլմեր դիտողների կեսը գնում է քաղցրավենիք, մուլտֆիլմ դիտողների 80%-ն է գնում քաղցրավենիք, իսկ կատակերգություն դիտողների՝ 70%-ը: Պատահական հանդիսատեսի հետ հարցազրույց են անցկացնում նրա՝ կինոթատրոնից դուրս գալիս: A, T, C և S տառերով են նշանակված հետևյալ պատահույթները.

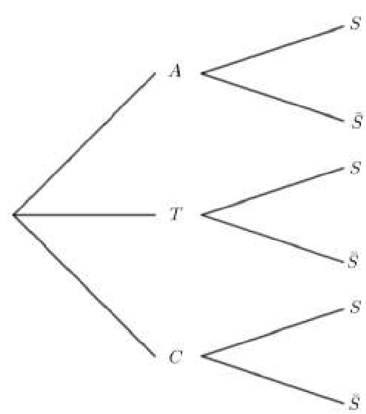
$A = \{$հանդիսատեսը դիտել է մարտաֆիլմ$\}$,

$T = \{$հանդիսատեսը դիտել է մուլտֆիլմ$\}$,

$C = \{$հանդիսատեսը դիտել է կատակերգություն$\}$,

$S = \{$հանդիսատեսը գնել է քաղցրավենիք$\}$:

1) Կրկնօրինակե՛ք և լրացրե՛ք հետևյալ ծառաձև դիագրամը.



2) Ցույց տվե՛ք, որ $P(F) = 0,665$:

3) Պատահականորեն հարցազրույց են վերցնում քաղցրավենիք գնած հանդիսատեսից: Որքա՞ն է հավանականությունը, որ նա մուլտֆիլմ է դիտել:

4) Կինոթատրոնի տոմսն արժե 2000 դրամ: Քաղցրավենիքն արժե 1000 դրամ:

X պատահական մեծությամբ նշանակված է կինոթատրոն այցելելու ծախսը:

ա) Որոշե՛ք X-ի հավանականությունների բաշխման օրենքը:

բ) Որոշե՛ք հանդիսատեսի կինոթատրոն այցելելու միջին ծախսը:

գ) Հաշվե՛ք համապատասխան դիսպերսիան և ստանդարտ շեղումը:

դ) Արձակուրդների ընթացքում բոլոր գները կրկնապատկվում են:

Մաթեմատիկական սպասումը կրկնապատկվու՞մ է: Դիսպերսիան կրկնապատկվու՞մ է:

Այս խնդիրները ֆրանսիական բակալավրիատի պաշտոնական քննության նմուշներից են:

Խնդիր 3

Սափորում կա 100 գնդակ՝ համարակալված 1-ից 100 թվերով: Բոլոր գնդակները նույն հավանականությամբ կարող են դուրս գալ:

1) Գտե՛ք այն գնդակի դուրս գալու հավանականությունը, որի վրա գրված է 22:

2) Գտե՛ք այն գնդակի դուրս գալու հավանականությունը, որի վրա գրված է 22-ից փոքր թիվ:

3) Գտե՛ք մաթեմատիկական սպասումը:

4) Գտե՛ք դիսպերսիան:

Դաս 2: Ամփոփիչ գնահատում

Տևողություն՝ 35 րոպե:

Գլխի վերջում տեղի է ունենում ամփոփիչ գնահատում՝ գաղափարի ընկալման և ընթացիկ գիտելիքի վերաբերյալ: Շատ կարևոր է, որ ամփոփիչ գնահատումը համապատասխանի դասերի հիմնական նպատակներին:

Այս գնահատումը արտացոլում է Գլուխ 5-ի 1 և 2 բաժինների նյութերը:

Ամփոփիչ գնահատման օրինակ

Խնդիր 1

Խաղաքարտերը 52 են՝ 13 ագռավ, 13 խաչ, 13 սիրտ, 13 ագուռ: Յուրաքանչյուր տեսակի մեջ կա մեկ թագուհի: Դիտարկե՛ք հետևյալ պատահույթները.

Q = {թագուհի վերցնելու},
H = {սիրտ վերցնելու}:

1) Գտե՛ք $P(H)$, $P(Q)$, $P(H \cap Q)$, $P(H \cup Q)$, $P(\overline{H})$ և $P(\overline{Q})$:
2) Արդյո՞ք H և Q պատահույթներն անկախ են:

Խնդիր 2

Իր կայունության քաղաքականությունը բարելավելու նպատակով ընկերությունն իրականացրել է վիճակագրական հետազոտություն՝ իր ստեղծած թափոնների վերաբերյալ: Հետազոտության արդյունքում թափոնները դասակարգվում են՝ ըստ երեք տեսակի.

- 69% միներալներ են և ոչ վտանգավոր թափոններ,
- 28% ոչ միներալներ են և ոչ վտանգավոր թափոններ,
- մնացածը՝ վտանգավոր թափոններ:

Հետազոտության արդյունքում նաև պարզվում է.

- 73%-ը միներալների և ոչ վտանգավոր թափոնների վերամշակվող է,
- 49%-ը ոչ միներալների և ոչ վտանգավոր թափոնների վերամշակվող է,
- 35%-ը վտանգավոր թափոնների վերամշակվող է:

Պատահականորեն թափոն է ընտրվում: Դիտարկե՛ք հետևյալ պատահույթները.

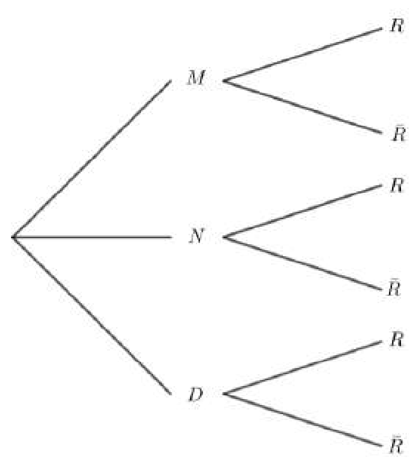
$M =$ {թափոնը միներալ է և ոչ վտանգավոր},

$N =$ {թափոնը ոչ միներալ է և ոչ վտանգավոր},

$D =$ {թափոնը վտանգավոր է},

$R =$ {թափոնը վերամշակվող է}:

1) Կրկնօրինակե՛ք և լրացրե՛ք հետևյալ ծառաձև դիագրամը:



2) Գտե՛ք հավանականությունը, որ ընտրված թափոնը վտանգավոր է և վերամշակվող:

3) Գտե՛ք $P(M \cap \overline{R})$ հավանականությունը և մեկնաբանե՛ք արդյունքը խնդրի համատեքստում:

4) Ցույց տվե՛ք, որ $P(R) = 0,6514$:

5) Ենթադրենք ընտրված թափոնը վերամշակելի է: Որքա՞ն է հավանականությունը, որ այդ թափոնը ոչ միներալ է և ոչ վտանգավոր:

5) Գործարանի արտադրանքից պատահականորեն վերցնում են 3 թափոն: Յուրաքանչյուրի վերամշակելի լինելն անկախ է մյուսինից:

X պատահական մեծությամբ նշանակված է ընտրանքում եղած վերամշակելի թափոնների քանակը։

ա) Գտե՛ք X-ի հնարավոր արժեքների բազմությունը։

բ) Գտե՛ք X-ի հավանականությունների բաշխման օրենքը։

գ) Հաշվե՛ք X-ի մաթեմատիկական սպասումը, դիսպերսիան և ստանդարտ շեղումը։

Այս խնդիրները ֆրանսիական բակալավրիատի պաշտոնական քննության նմուշներից են։

Դասի ավարտին ուսուցիչը վերլուծում է ամփոփիչ գնահատման արդյունքները, որոշում դասարանում տարածված սխալները և սովորողների թույլ կողմերը։ Ըստ անհրաժեշտության՝ կարող է որոշ թեմաներ նորից բացատրել։

ԳԼՈՒԽ 4

ԹՎԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱ