0.1. Calculadora

0.1.1. Diagramas de Clases

CLASE INTERFAZ ARITMÉTICA

* Tipo y Modificador: double.

* Método: raizcuadrada.

* Descripción: Método para realizar el calclo de una raíz cuadrada, recibiendo como parámetros datos tipo double.

* Tipo y Modificador: nodo

* Método: InterfazBotones().

* Modificador: Vuelve a la ventana inicial.

CLASE SistemadeEcuaciones

* Tipo y Modificador: int.

* Método: det2().

* Descripción: Método para realizar el determinante de 2x2 y 3x3.

* Tipo y Modificador: nodo

* Método: InterfazBotones().

* Modificador: retorna ventana inicial.

CLASE EcuacionCuadratica

* Tipo y Modificador: double.

* Método: raizcuadrada.

* Descripción: Método para realizar el calclo de una raíz cuadrada, recibiendo como parámetros datos tipo double.

* Tipo y Modificador: nodo

* Método: InterfazBotones().

* Modificador: retorna ventana inicial.

CLASE BinomioalCuadrado

* Tipo y Modificador: double.
* Método: raizcuadrada.
* Descripción: Método para realizar el calclo de una raíz cuadrada, recibiendo como parámetros datos tipo double.
* Tipo y Modificador: String.
* Método: sinpunto().
* Descripción: Método para distinguir entre los resultados tipo int y double.
* Tipo y Modificador: nodo
* Método: InterfazBotones().
* Modificador: retorna ventana inicial.

CLASE DiferenciadeCuadrados

* Tipo y Modificador: double.
* Método: raizcuadrada .
* Descripción: Método para realizar el calclo de una raíz cuadrada, recibiendo como parámetros datos tipo double.
* Tipo y Modificador: String.
* Método: sinpunto().
* Descripción: Método para distinguir entre los resultados tipo int y double.
* Tipo y Modificador: nodo
* Método: InterfazBotones().
* Modificador: retorna ventana inicial.

CLASE Sen

* Tipo y Modificador: String.
* Método: sinpunto().
* Descripción: Método para distinguir entre los resultados tipo int y double.
* Tipo y Modificador: nodo
* Método: InterfazBotones().

* Modificador: retorna ventana inicial.

CLASE Coseno

* Tipo y Modificador: String.

* Método: sinpunto().

* Descripción: Método para distinguir entre los resultados tipo int y double.

* Tipo y Modificador: nodo

* Método: InterfazBotones().

* Modificador: retorna ventana inicial.

CLASE Tangente

* Tipo y Modificador: String.

* Método: sinpunto().

* Descripción: Método para distinguir entre los resultados tipo int y double.

* Tipo y Modificador: nodo

* Método: InterfazBotones().

* Modificador: retorna ventana inicial.

CLASE LongituddeArco

* Tipo y Modificador: String.

* Método: sinpunto().

* Descripción: Método para distinguir entre los resultados tipo int y double.

* Tipo y Modificador: nodo

* Método: InterfazBotones().

* Modificador: retorna ventana inicial.

* Tipo y Modificador: void

* Método: paint(Graphics g).

* Modificador: reliza el contorno del círculo.

Derivadas

* Tipo y Modificador: nodo

* Método: InterfazBotones().

* Modificador: retorna ventana inicial.

Integrales

* Tipo y Modificador: nodo

* Método: InterfazBotones().

* Modificador: retorna ventana inicial.

Traspuesta

* Tipo y Modificador: String.

* Método: sinpunto().

* Descripción: Método para distinguir entre los resultados tipo int y double.

* Tipo y Modificador: nodo

* Método: InterfazBotones().

* Modificador: retorna ventana inicial.

traspuestas

* Tipo y Modificador: String.

* Método: sinpunto().

* Descripción: Método para distinguir entre los resultados tipo int y double.

* Tipo y Modificador: nodo

* Método: InterfazBotones().

* Modificador: retorna ventana inicial.

deter2

* Tipo y Modificador: int.

* Método: det2().

* Descripción: Método para realizar el determinante de 2x2.

* Tipo y Modificador: nodo

* Método: InterfazBotones().

* Modificador: retorna ventana inicial.

deter3

* Tipo y Modificador: int.

* Método: det3().

* Descripción: Método para realizar el determinante de 3x3.

* Tipo y Modificador: nodo

* Método: InterfazBotones().

* Modificador: retorna ventana inicial.

0.1.2. Ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c \tag{1}$$

La ecuación 1 es una ecuación cuadrática cuyas raices tienen la forma de:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{2a} \tag{2}$$

La deducción de la ecuación anterior se presenta a continuación

Demostración. Dividiendo la Ec.(1) entre a, tenemos:

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x + \left(\frac{c}{a}\right) = 0$$

Sumando 0 a la expresión anterior

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x + \left(\frac{c}{a}\right) + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

Simplificando la expresión de la izquierda y notando que el trinomio de la izquierda es un cuadrado perfecto, entonces

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Despejando x

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

pero sacar la raiz cuadrada equivale al valor absoluto, entonces

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La cual es la ecuación (2). □

Por lo tanto, 2 es una solución de la Ec.1.

En la calculadora se utiliza Ec.2 para resolver toda ecuación cuadrática.

0.1.3. Sistemas de ecuaciones

Se trabajaron sistemas de ecuaciones de 2x2 y 3x3 por método de determinantes[1].

El sistema de ecuaciones tiene la forma de:

$$AX = B \tag{3}$$

Donde:
A: matriz de coeficientes de la matriz.
X: matriz que posee las incógnitas.
B: matriz con los términos independientes de las ecuaciones.

La regla de Cramer establece que la incógnita x_k de la solución del sistema, cuyos coeficientes están en la columna k de A, es:

$$x_k = \frac{|A_k|}{|A|} \tag{4}$$

donde $|A_k|$ es el determinante de la matriz A pero cambiando su columna número k por la columna de términos independientes B. $|A|$ es la determinante del sistema.

ejemplo de una matriz 2x2

Supongamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 5x - 2y = -2 \\ -3x + 7y = -22 \end{cases}$$

Tenemos que:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} -2 \\ -22 \end{pmatrix}$$

Encontrando $|x_k|$, $|y_k|$ y $|A|$, de la siguiente manera:

[1] También conocido como: Método de Cramer

$$|x_k|= \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -22 & 7 \end{vmatrix} = -58, \quad |y_k|= \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 22 \end{vmatrix} = -116, \quad |A|= \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 29$$

Con los valores anteriores y la Ec(4) llegamos a:

$$x = -2, \qquad y = -4$$

La solución del sistema propuesto.

0.1.4. Binomio al cuadrado

Para la programación de la *diferencia de cuadrados*, se tomó como base la Ec.(5), y para encontrar sus raices la Ec.(2).

Un binomio al cuadrado es una suma algebraica que se suma por sí misma, es decir, si tenemos el binomio a + b, el cuadrado de ese binomio es (a + b) (a + b) y se expresa como $(a + b)^2$.
El resultado de un binomio al cuadrado, siempre es un trinomio cuadrado perfecto.

Algebraicamente, un binomio al cuadrado se expresa y expande de la siguiente manera:

Demostración.

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{5}$$

□

Si tomamos a=cx, con c y b $\in \mathbb{R}$, entonces

$$(x + b)^2 = (cx)^2 + 2bx + b^2$$

Las raices del lado derecho pueden encontrarse utilizando la ecuación. 2.

0.1.5. Diferencia de cuadrados

Para la programación de la *diferencia de cuadrados*, se tomó como base la Ec.(6), y para encontrar sus raices la Ec. 2.

La diferencia de cuadrados de dos términos es igual al producto de la suma de estos términos por la diferencia de estos términos. Es decir:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \tag{6}$$

A continuación se muestra la deducción:

Demostración.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

□

Si tomamos a=cx, con c y b $\in \mathbb{R}$, entonces

$$(cx+b)(cx-b) = (cx)^2 - b^2$$

Las raices del lado derecho pueden encontrarse utilizando la ecuación. 2.

0.1.6. Suma y diferencia de cubos

Para la creación del algoritmo para la *suma y diferencia de cubos*, se tomaron dichos casos, así como el procedimiento mostrado en (9), para encontrar las raices del sistema.

La suma o diferencia de dos cubos puede factorizarse en un producto de un binomio por un trinomio.

Tenemos los siguientes dos casos con sus respectivas expansiones:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \tag{7}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \tag{8}$$

La demostración se puede encontrar expandiendo el lado derecho de la igualdad y simplificando de ser necesario.

Para encontrar las raices de una ecuación de la forma de Ec.7 u 8, nótese que tendriamos las siguientes situaciones[2]

$$\begin{cases} (ax-b) = 0 \\ (ax^2 + ab + b^2) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Del primer caso encontramos una raiz de la ecuación por simple despeje. Del segundo caso encontramos dos raices que pueden ser encontradas con la Ec(2).
La ecuación se satisface pues cumple la existencia de tres soluciones para el sistema.

[2]Tomando de ejemplo la Ec.7:

0.2. Funciones trigonométricas

Para calcular la función seno, coseno y tangente de un ángulo escogido por el usuario, se utilizaron series de Taylor alrededor de 0, tomando en cuenta 10 iteraciones, es decir, hasta el décimo coeficiente de la aproximación.

Recordando que la serie de Taylor se define como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + ... \tag{10}$$

0.2.1. Seno

Para encontrar la aproximación de seno, se utilizó la Ec.(10) para encontrar la serie que lo definía.
Para ello, se calcularon nueve derivadas + término sin derivar. Se llegó a la siguiente expresión:

$$senx = \sum_{n=0}^{10} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... \tag{11}$$

0.2.2. Coseno

Para encontrar la aproximación de coseno, se utilizó la Ec.(10) para encontrar la serie que lo definía.
Para ello, se calcularon nueve derivadas + término sin derivar. Se llegó a la siguiente expresión:

$$cosx = \sum_{n=0}^{10} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... \tag{12}$$

0.2.3. Tangente

Para encontrar la aproximación de tangente, se utilizó la Ec.(10) para encontrar la serie que lo definía.
Para ello, se calcularon nueve derivadas + término sin derivar. Se llegó a la siguiente expresión:

$$tanx = \sum_{n=0}^{10} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + ... \tag{13}$$

0.2.4. Longitud de arco

La *longitud de arco* la medida de la distancia o camino recorrido a lo largo de una curva o dimensión lineal. Su deducción la podemos encontrar utilizando principios del calculo diferencial e integral para una variable.

La expresión matemática empleada en la calculadora tiene la forma más simplificada. La cual se enuncia a continuación.

$$S = R\theta \tag{14}$$

Donde:
S: longitud de arco
R: radio de la circunferencia.
θ: ángulo descrito en un tiempo [t, $t + \delta t$]

Gráficamente la longitud de arco es:

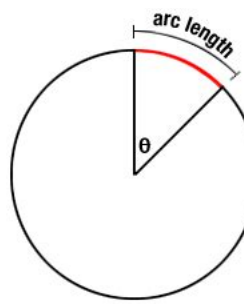

Figura 1: Longitud de arco

Donde se puede observar que para la longitud de un círculo completo, sería equivalente a encontrar el perímetro de un círculo, donde S=(2π)R.

0.3. Cálculo

0.3.1. Casos de derivada

Cuando surgen cuestiones concernientes a la razón entre dos cantidades variables, entramos en los dominios del *Cálculo Diferencial*. Son por tanto objeto de estudio del cálculo diferencial temas como la pendiente (razón entre la diferencia de las ordenadas y las abscisas de dos puntos en el plano cartesiano) de la recta tangente a una gráfica en un punto dado de ésta, etc.

La derivada matemáticamente puede describirse como:

$$f'(x) = \lim_{\delta x \longrightarrow 0} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{x} \tag{15}$$

Encontramos a continuación los principales casos:

Derivada una constante

Sea C una constante sobre los reales. Su derivada es:

$$\frac{dC}{dx} = 0 \tag{16}$$

Lo cual indica que toda derivada de una constante, será cero. Lo cual concuerda con la realidad, pues la derivada representa una tasa de cambio, por lo que una constante no varía con el tiempo.

Derivada de una potencia

Una función potencial es aquella donde la x está elevada a un exponente. Para calcular su derivada, el exponente pasa a multiplicar a la x y se le resta 1 al exponente:

$$\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1} \tag{17}$$

Derivada de una suma o resta de dos funciones

Sea f(x) y g(x) funciones definidas sobre los reales. Al depender de x, podemos encontrar su tasa de cambio dada por:

$$\frac{d[f(x) + g(x)]}{dx} = f'(x) \pm g'(x) \tag{18}$$

Derivada de un cociente

La derivada de un cociente de funciones es igual a la derivada del numerador, por el denominador sin derivar, menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador, todo ello dividido entre el denominador sin derivar al cuadrado:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2} \tag{19}$$

Derivada de un producto

La derivada del producto de dos funciones es igual a la derivada de al primera función, por la segunda sin derivar, más la primera sin derivar, por la derivada de la segunda:

$$\frac{d[f(x).g(x)]}{dx} = f'(x)g(x) + g'(x)f(x) \tag{20}$$

Regla de la cadena

Es una fórmula para la derivada de una composición de funciones. Tiene la forma de:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{df}\frac{df}{dx} \tag{21}$$

Donde f es diferenciable en x y en g.

0.3.2. Casos de integración

Se entiende por método de integración a la integral de las diferentes técnicas elementales usadas (a veces de forma combinada) para calcular una antidelrivada o integral indefinida de una función. Así, dada una función f(x), un método de integración nos permite encontrar otra función F(x) tal que:

$$F(x) = \int f(x)dx \tag{22}$$

Integral de una constante

La integral de una constante es igual al producto de dicha constante por la variable x

$$\int kdx = kx + c \tag{23}$$

Donde k y c son constantes reales.

Integral de una potencia

La integral de una potencia de x es igual a x elevado a la potencia más uno y dividido por la potencia más uno.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \tag{24}$$

Integrales exponenciales

Las integrales exponenciales son las integrales que se hacen en torno al número de euler (e), de las más importantes.

$$\int e^x dx = e^x + c \tag{25}$$

Integrales de un logaritmo

Las integrales logarítmicas son las integrales más simples que nos podemos encontrar. Se definen de la siguiente manera:

$$\int lnxdx = xlnx - x + c$$

Integración por partes

En el cálculo y en general en el análisis matemático, integración por partes es el proceso que encuentra la integral de un producto de funciones en términos de la integral de sus derivadas y antiderivadas.

Tiene la siguiente forma

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Donde u y v son funciones diferenciable e integrables. u y v resultan de una sustitución.

0.4. Algebra Lineal

Para la creación de la calculadora utilizamos los siguientes métodos. Se proporciona una breve explicación de la misma.

0.4.1. Matriz Transpuesta

Sea A una matriz con m filas y n columnas. La matriz traspuesta, denotada con A^t se expresa matemáticamente como:

$$(A^t)_{ij} = A_{ji}, \quad 1 < i < m \quad y \quad 1 < j < n \tag{26}$$

En forma matricial se define como:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}^t = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} \tag{27}$$

0.4.2. Matriz Inversa

La matriz inversa de una matriz dada, es la matriz que multiplicada por la original da como resultado la matriz identidad. La matriz inversa es útil para resolver sistemas de ecuaciones lineales, de allí la importancia de saber calcularla. Se representa como A^{-1}.

Se utilizó el siguiente procedimiento para encontrar la matriz inversa.

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{vmatrix} d & -c \\ -b & a \end{vmatrix}^t = \frac{1}{det(A)} \begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix} \tag{28}$$

0.4.3. Determinante

Es una forma multilineal alternada de un cuerpo. Esta definición indica una serie de propiedades matemáticas y generaliza el concepto de determinante haciéndolo aplicable en numerosos campos.

En la calculadora se muestran dos casos de determinantes; de 2x2 y 3x3. El determinante se definirá como: $|A|$=det(A)

Determinante 2x2

Supogamos una matriz de la sigueinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Calculando en determinante, encontramos:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb \tag{29}$$

Determinante de 3x3

Para encontrar el determinante de una matriz 3x3, utilizamos el método de Sarrus. Es decir

Supongamos una matrix A de la forma

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Su determinante es

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - (gec + hfa + idb) \tag{30}$$

0.4.4. Diagramas de Flujo

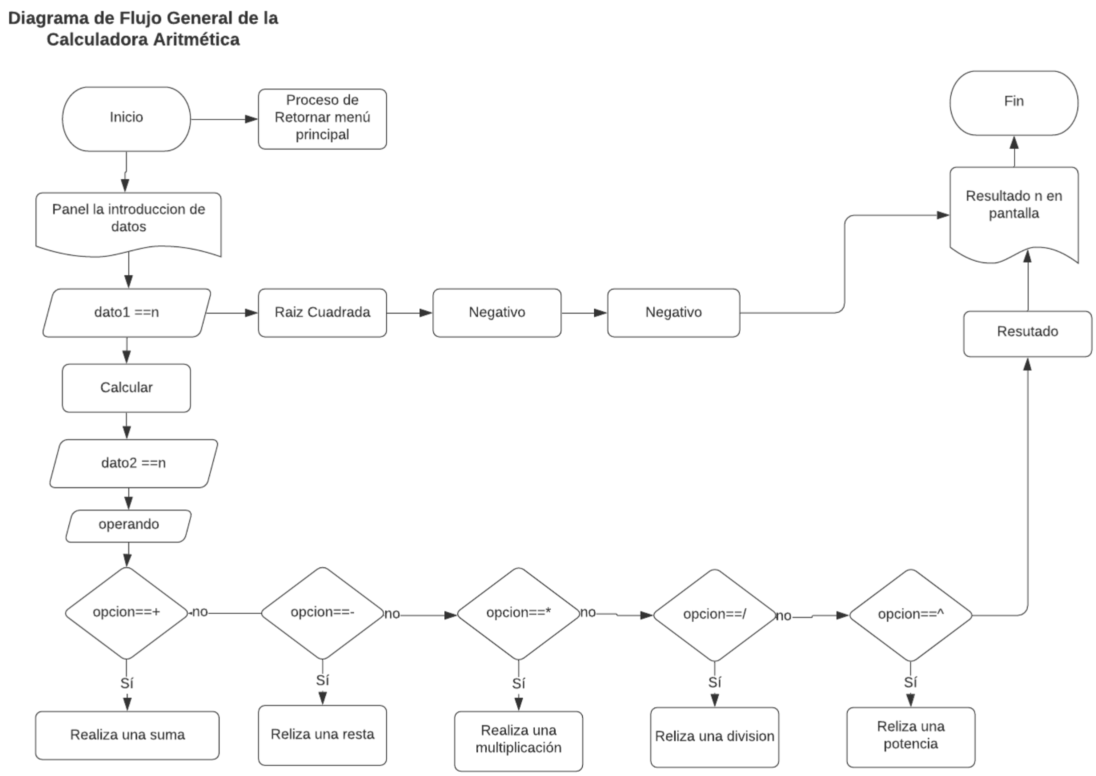

Figura 2: Diagrama de flujo general de la calculadora aritmética

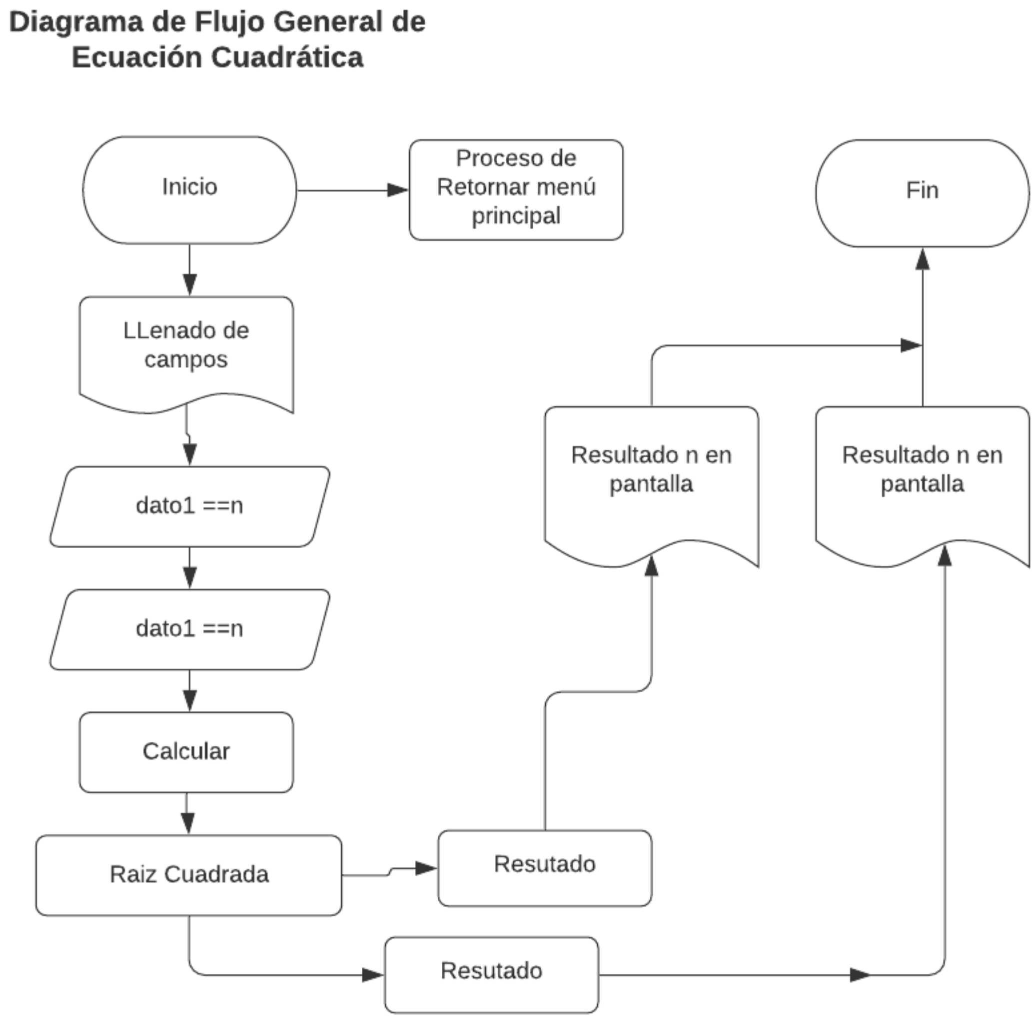

Figura 3: Diagrama de flujo general Ecuación Cuadática

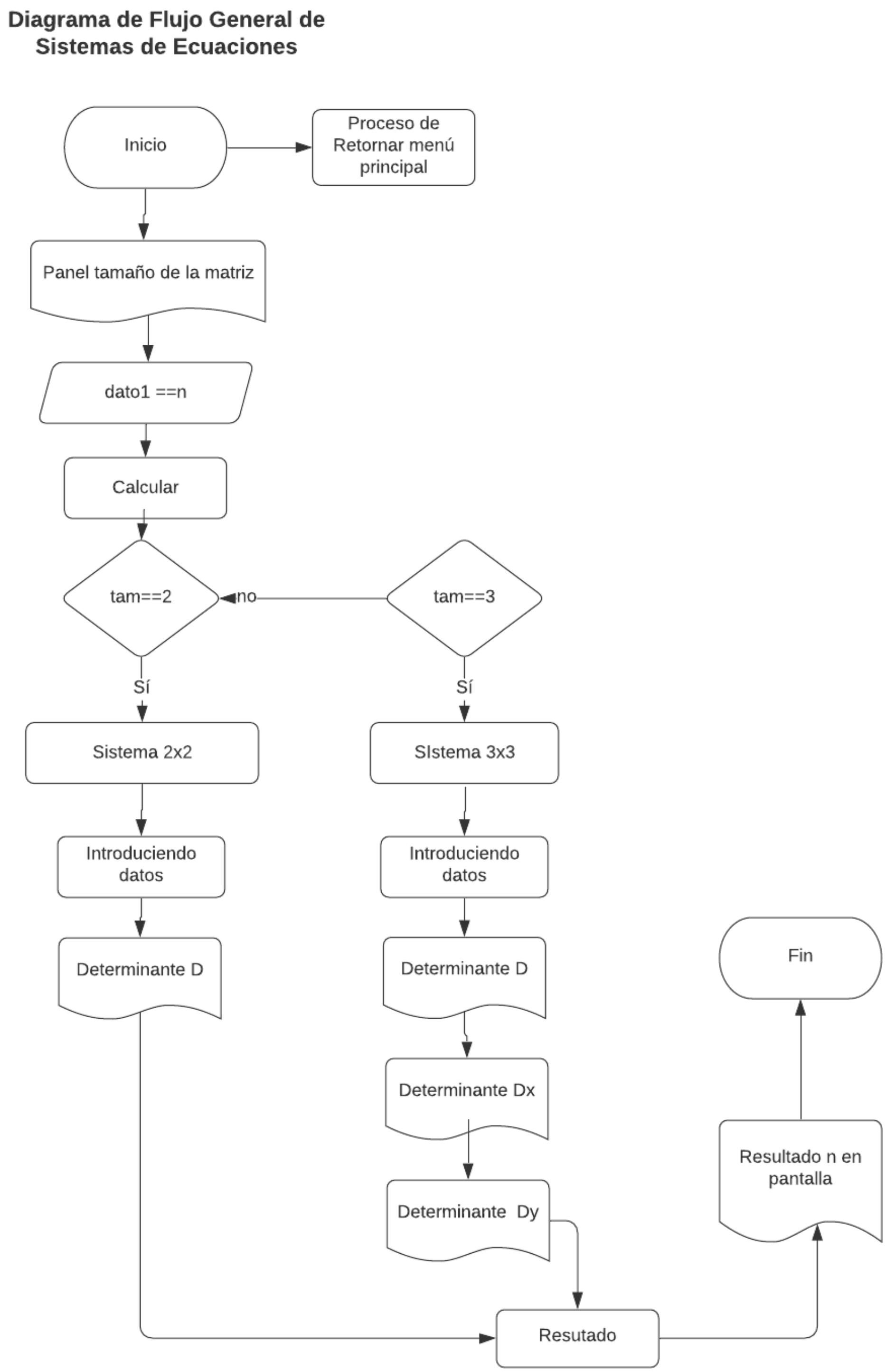

Figura 4: Diagrama de flujo general de los sistemas de ecuaciones