

# Examen Parcial 1

Sea la siguiente tabla de la función  $f(x) = e^x$

x	f
0	1
0.2	1.2214
0.4	1.4918
0.6	1.8221

a) Calcule  $\sqrt[3]{e}$  por interpolación cuadrática. Utilice los primeros puntos 0, 0.2, 0.4 y posteriormente los puntos 0.2, 0.4, 0.6 y compare los resultados.

$$p_1 = 0.6125x^2 + 0.9845x + 1$$

$$p_2 = 0.74875x^2 + 0.90275x + 1.0109$$

$$e^{1/3} = 1.3956$$

$$p_1(\frac{1}{3}) = 1.3962$$

$$E_1 = |1.3956 - 1.3962| / 1.3956 = 0.00043$$

$$p_2(\frac{1}{3}) = 1.3950$$

$$E_2 = |1.3956 - 1.3950| / 1.3956 = 0.00043$$

Ambos polinomios tienen el mismo error relativo.

b) Calcule  $\sqrt[3]{e}$  por interpolación cúbica y compare este resultado con los del caso anterior

$$p_3 = 0.2271x^3 + 0.47625x^2 + 1.0027x + 1$$

$$p_3(\frac{1}{3}) = 1.39556$$

$$E_3 = \frac{|1.3956 - 1.39556|}{1.3956} = 0.00002786$$

El error de este polinomio es un orden de magnitud menor al error de los casos anteriores, por lo tanto, mejor aproximación.

Los polinomios anteriores se obtuvieron por medio de un programa en python

```
Python 3.8.5 Shell
File Edit Shell Debug Options Window Help

[[1.  0.  0.  ]
 [1.  0.2 0.04]
 [1.  0.4 0.16]]
b= [1.      1.2214 1.4918]
a= [1.      0.9845 0.6125]
p= 0.612499999999997*x**2 + 0.984500000000001*x + 1.0
>>>
= RESTART: C:\Users\PACO\Desktop\karen\MétodosNuméricos\InterpolaciónVander.py =
ingrese el valor de n:3
ingrese el valor de x_i:0.2
ingrese el valor de x_i:0.4
ingrese el valor de x_i:0.6
ingrese el valor de f_i:1.2214
ingrese el valor de f_i:1.4918
ingrese el valor de f_i:1.8221
[[1.  0.2 0.04]
 [1.  0.4 0.16]
 [1.  0.6 0.36]]
b= [1.2214 1.4918 1.8221]
a= [1.0109 0.90275 0.74875]
p= 0.748750000000001*x**2 + 0.902749999999997*x + 1.0109
>>>
= RESTART: C:\Users\PACO\Desktop\karen\MétodosNuméricos\InterpolaciónVander.py =
ingrese el valor de n:4
ingrese el valor de x_i:0
ingrese el valor de x_i:0.2
ingrese el valor de x_i:0.4
ingrese el valor de x_i:0.6
ingrese el valor de f_i:1
ingrese el valor de f_i:1.2214
ingrese el valor de f_i:1.4918
ingrese el valor de f_i:1.8221
[[1.  0.  0.  0.  ]
 [1.  0.2 0.04 0.008]
 [1.  0.4 0.16 0.064]
 [1.  0.6 0.36 0.216]]
b= [1.      1.2214 1.4918 1.8221]
a= [1.      1.00266667 0.47625 0.22708333]
p= 0.2270833333333354*x**3 + 0.476249999999993*x**2 + 1.002666666666667*x + 1.0
>>>
```

2 El polinomio  $p_3(x) = 2 - (x+1) + x(x+1) - 2x(x+1)(x-1)$  interpola los primeros 4 datos de la tabla

x	y
-1	2
0	1
1	2
2	-7
3	10

Añadase un término más a  $p_3(x)$  de manera que el polinomio resultante interpole a los datos de la tabla. Calcúlese el polinomio de Lagrange que interpola los datos de la tabla.

$$f[-1] = 2 \quad f[0] = 1 \quad f[1] = 2 \quad f[2] = -7 \quad f[3] = 10$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{1-2}{0+1} = -1 \quad f[x_1, x_2] = \frac{2-1}{1-0} = 1 \quad f[x_2, x_3] = \frac{-7-2}{2-1} = -9$$

$$f[x_3, x_4] = \frac{10+7}{3-2} = 17 \quad f[x_0, x_1, x_2] = \frac{1+1}{1+1} = 1$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{-9-1}{2} = -5 \quad f[x_2, x_3, x_4] = \frac{17+9}{3-1} = \frac{26}{2} = 13$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{-5-1}{3} = -\frac{6}{3} = -2$$

$$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{13+5}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{6+2}{4} = 2$$

$$p_4(x) = p_3(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

$$p_4(x) = 2 - (x+1) + x(x+1) - 2x(x+1)(x-1) + 2(x+1)x(x-1)(x-2)$$

$$p_4(x) = 2 - x - 1 + x^2 + x - 2x^3 + 2x + (2x^3 - 2x)(x-2)$$

$$p_4(x) = 1 + x^2 - 2x^3 + 2x + 2x^4 - 2x^2 - 4x^3 + 4x$$

$$p_4(x) = 1 + 6x - x^2 - 6x^3 + 2x^4 //$$

El polinomio de Lagrange es  $p_L = 2x^4 - 6x^3 - x^2 + 6x + 1$

El polinomio de Lagrange se obtuvo por medio del programa

```
Python 3.8.5 Shell
File Edit Shell Debug Options Window Help
Python 3.8.5 (tags/v3.8.5:580fbb0, Jul 20 2020, 15:57:54) [MSC v.1924 64 bit (AMD64)] on win32
Type "help", "copyright", "credits" or "license()" for more information.
>>>
= RESTART: C:\Users\PACO\Desktop\karen\MétodosNuméricos\InterpolacionLagrange.py
ingrese el valor de n:5
ingrese el valor de x_i:-1
ingrese el valor de x_i:0
ingrese el valor de x_i:1
ingrese el valor de x_i:2
ingrese el valor de x_i:3
ingrese el valor de f_i:2
ingrese el valor de f_i:1
ingrese el valor de f_i:2
ingrese el valor de f_i:-7
ingrese el valor de f_i:10
l_i= 0.04166666666666667*x*(x - 3.0)*(x - 2.0)*(x - 1.0)
l_i= -0.16666666666666667*(x - 3.0)*(x - 2.0)*(x - 1.0)*(1.0*x + 1.0)
l_i= 0.5*x*(0.5*x + 0.5)*(x - 3.0)*(x - 2.0)
l_i= -0.5*x*(0.3333333333333333*x + 0.3333333333333333)*(x - 3.0)*(x - 1.0)
l_i= 0.16666666666666667*x*(0.25*x + 0.25)*(x - 2.0)*(x - 1.0)
El polinomio es: 2.0*x**4 - 6.0*x**3 - 1.0*x**2 + 6.0*x + 1.0
>>> |
```

También se obtuvo realizando los cálculos a mano, dando el mismo resultado

$$\begin{aligned}
 l_0(x) &= \prod_{j=1}^4 \frac{x-x_j}{x_0-x_j} = \frac{(x+0)}{(-1+0)} \frac{(x-1)}{(-1-1)} \frac{(x-2)}{(-1-2)} \frac{(x-3)}{(-1-3)} \\
 l_0(x) &= x \left( \frac{x-1}{2} \right) \left( \frac{x-2}{3} \right) \left( \frac{x-3}{4} \right) = \frac{1}{24} (x)(x-1)(x-2)(x-3) \\
 l_1(x) &= \prod_{j=0,2,3,4} \frac{x-x_j}{x_1-x_j} = \frac{(x+1)}{(0+1)} \frac{(x-0)}{(0-1)} \frac{(x-2)}{(0-2)} \frac{(x-3)}{(0-3)} \\
 l_1(x) &= -(x+1)(x-1)(x-2)(x-3) = -\frac{1}{6} (x+1)(x-1)(x-2)(x-3) \\
 l_2(x) &= \prod_{j=0,1,3,4} \frac{x-x_j}{x_2-x_j} = \frac{(x+1)}{(1+1)} \frac{(x+0)}{(1+0)} \frac{(x-2)}{(1-2)} \frac{(x-3)}{(1-3)} \\
 l_2(x) &= \left( \frac{x+1}{2} \right) \left( \frac{x}{2} \right) \frac{(x-2)}{(2)} \frac{(x-3)}{(2)} = \frac{1}{4} x(x+1)(x-2)(x-3) \\
 l_3(x) &= \prod_{j=0,1,2,4} \frac{x-x_j}{x_3-x_j} = \frac{(x+1)}{(2+1)} \frac{(x)}{(2+0)} \frac{(x-1)}{(2-1)} \frac{(x-3)}{(2-3)} \\
 l_3(x) &= \left( \frac{x+1}{3} \right) \left( \frac{x}{2} \right) \frac{(x-1)}{(-1)} \frac{(x-3)}{(-1)} = \frac{1}{6} x(x+1)(x-1)(x-3) \\
 l_4(x) &= \prod_{j=0,1,2,3} \frac{x-x_j}{x_4-x_j} = \frac{(x+1)}{(3+1)} \frac{(x)}{(3+0)} \frac{(x-1)}{(3-1)} \frac{(x-2)}{(3-2)} \\
 l_4(x) &= \left( \frac{x+1}{4} \right) \left( \frac{x}{3} \right) \frac{(x-1)}{(2)} \frac{(x-2)}{(2)} = \frac{1}{24} (x+1)(x)(x-1)(x-2)
 \end{aligned}$$



$$\Rightarrow P_4(x) = \frac{1}{12} x(x-1)(x-2)(x-3) - \frac{1}{6} (x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$+ \frac{1}{2} x(x+1)(x-2)(x-3) + \frac{1}{6} x(x+1)(x+1)(x-3)$$

$$+ \frac{10}{24} (x+1)(x)(x+1)(x-2)$$

$$\Rightarrow P_4(x) = \left( \frac{x^2-x}{12} - \frac{x^2-1}{6} + \frac{x^2+x}{2} \right) (x^2-5x+6)$$

$$+ (x^2+x) \left( \frac{1}{6} (x^2-4x+3) + \frac{10}{24} (x^2-3x+2) \right)$$

$$\Rightarrow P_4(x) = \left( \frac{x^2-x-2x^2+2+6x^2+6x}{12} \right) (x^2-5x+6)$$

$$+ (x^2+x) \left( \frac{28x^2-4x+3}{24} + \frac{10x^2-30x+20}{24} \right)$$

$$\Rightarrow P_4(x) = (5x^2+5x+2)(x^2-5x+6)/12$$

$$+ (x^2+x) \left( \frac{28x^2-12x+84+10x^2-30x+20}{24} \right)$$

$$\Rightarrow P_4(x) = (5x^4+5x^3+2x^2-25x^3-25x^2-10x+30x^2+30x+12)/12$$

$$+ (x^2+x)(38x^2-142x+104)/24$$

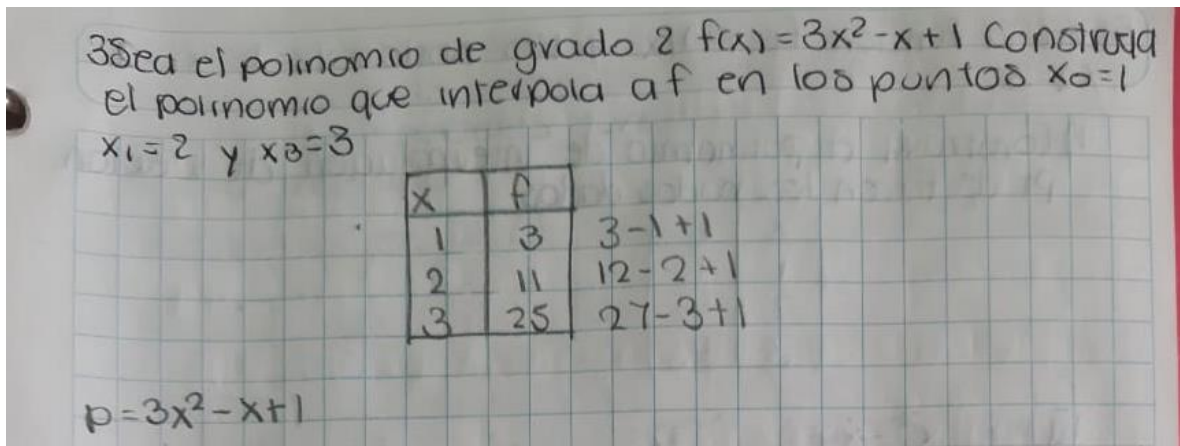
$$\Rightarrow P_4(x) = (5x^4-70x^3+7x^2+20x+12)/12 +$$

$$(38x^4-192x^3+104x^2+38x^3-142x^2+104x)/24$$

$$\Rightarrow P_4(x) = \frac{10x^4-40x^3+4x^2+40x+24}{24} + \frac{38x^4-109x^3-38x^2+104x}{24}$$

$$\Rightarrow P_4(x) = \frac{48x^4-144x^3-24x^2+144x+24}{24}$$

$$\Rightarrow P_4(x) = 2x^4-6x^3-x^2+6x+1 //$$



Que también se obtuvo por programa, el resultado se puede ver en la última ejecución

```
Python 3.8.5 Shell
File Edit Shell Debug Options Window Help

[[1.  0.2  0.04]
 [1.  0.4  0.16]
 [1.  0.6  0.36]]
b= [1.2214 1.4918 1.8221]
a= [1.0109  0.90275 0.74875]
p= 0.748750000000001*x**2 + 0.902749999999997*x + 1.0109
>>>
= RESTART: C:\Users\PACO\Desktop\karen\MétodosNuméricos\InterpolaciónVander.py =
ingrese el valor de n:4
ingrese el valor de x_i:0
ingrese el valor de x_i:0.2
ingrese el valor de x_i:0.4
ingrese el valor de x_i:0.6
ingrese el valor de f_i:1
ingrese el valor de f_i:1.2214
ingrese el valor de f_i:1.4918
ingrese el valor de f_i:1.8221
[[1.  0.  0.  0. ]
 [1.  0.2  0.04  0.008]
 [1.  0.4  0.16  0.064]
 [1.  0.6  0.36  0.216]]
b= [1.  1.2214 1.4918 1.8221]
a= [1.  1.00266667 0.47625  0.22708333]
p= 0.227083333333354*x**3 + 0.476249999999993*x**2 + 1.00266666666667*x + 1.0
>>>
= RESTART: C:\Users\PACO\Desktop\karen\MétodosNuméricos\InterpolaciónVander.py =
ingrese el valor de n:3
ingrese el valor de x_i:1
ingrese el valor de x_i:2
ingrese el valor de x_i:3
ingrese el valor de f_i:3
ingrese el valor de f_i:11
ingrese el valor de f_i:25
[[1. 1. 1.]
 [1. 2. 4.]
 [1. 3. 9.]]
b= [ 3. 11. 25.]
a= [ 1. -1.  3.]
p= 3.0*x**2 - 1.0*x + 1.0
>>>
```

4 Sea el polinomio de grado tres  $f(x) = 3x^3 - x + 1$ . Utilizando diferencias divididas, construya el polinomio que interpola a  $f$  en los puntos  $x_0 = -3$ ,  $x_1 = -1$  y  $x_2 = 2$ . Se añade a continuación un nuevo punto  $x_3 = 1$ . Sin hacer ningún cálculo adicional, razónese qué valor tomará la nueva diferencia dividida  $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$  y cuál será el coeficiente directo (término de mayor grado) del nuevo polinomio de interpolación  $p_3$  de  $f$ . Calcule  $p_3$  según lo anterior. ¿Qué ocurre si consideramos  $x_3 = 1$ ?

$x$	$f$
-3	-77
-1	-1
2	23

$$-6x^2 + 14x + 19 = p_2$$

Si agregamos el dato  $x_3 = 1$  tendríamos 4 datos lo cual nos daría como resultado un polinomio de grado 3, es decir resultaría ser el polinomio original  $f(x) = 3x^3 - x + 1$  y ya que  $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$  es el único coeficiente que multiplica a  $x^3$  la  $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$  tendrá que ser 3.

$$p_3(x) = -6x^2 + 14x + 19 + 3(x+3)(x+1)(x-2)$$

$$p_3(x) = -6x^2 + 14x + 19 + 3(x^2 + 4x + 3)(x-2)$$

$$p_3(x) = -6x^2 + 14x + 19 + 3(x^3 + 4x^2 + 3x - 2x^2 - 8x - 6)$$

$$p_3(x) = 3x^3 - x + 1$$

Con 1, 2 obtendríamos el mismo resultado ya que seguiríamos dando 4 datos.

Que se obtuvo por medio del programa de Newton, de igual manera el resultado se visualiza en la siguiente imagen en la última ejecución

```
Python 3.8.5 Shell
File Edit Shell Debug Options Window Help

l_i= 0.5*(x - 2.0)*(x - 1.0)*(1.0*x + 1.0)
l_i= -1.0*x*(0.5*x + 0.5)*(x - 2.0)
l_i= 0.5*x*(0.3333333333333333*x + 0.3333333333333333)*(x - 1.0)
El polinomio es: 0.3333333333333333*x**3 - 1.3333333333333333*x + 2.0
>>>
= RESTART: C:\Users\PACO\Desktop\karen\MétodosNuméricos\InterpolacionLagrange.py
ingrese el valor de n:5
ingrese el valor de x_i:-1
ingrese el valor de x_i:0
ingrese el valor de x_i:1
ingrese el valor de x_i:2
ingrese el valor de x_i:3
ingrese el valor de f_i:2
ingrese el valor de f_i:1
ingrese el valor de f_i:2
ingrese el valor de f_i:-7
ingrese el valor de f_i:10
l_i= 0.04166666666666667*x*(x - 3.0)*(x - 2.0)*(x - 1.0)
l_i= -0.16666666666666667*(x - 3.0)*(x - 2.0)*(x - 1.0)*(1.0*x + 1.0)
l_i= 0.5*x*(0.5*x + 0.5)*(x - 3.0)*(x - 2.0)
l_i= -0.5*x*(0.3333333333333333*x + 0.3333333333333333)*(x - 3.0)*(x - 1.0)
l_i= 0.16666666666666667*x*(0.25*x + 0.25)*(x - 2.0)*(x - 1.0)
El polinomio es: 2.0*x**4 - 6.0*x**3 - 1.0*x**2 + 6.0*x + 1.0
>>>
= RESTART: C:\Users\PACO\Desktop\karen\MétodosNuméricos\InterpolacionNewton.py =
ingrese el valor de n:3
ingrese el valor de x_i:-3
ingrese el valor de x_i:-1
ingrese el valor de x_i:2
ingrese el valor de f_i:-77
ingrese el valor de f_i:-1
ingrese el valor de f_i:23
38.0
8.0
-6.0
[[-77.  38.  -6.]
 [ -1.   8.   0.]
 [ 23.   0.   0.]]
-6.0*x**2 + 14.0*x + 19.0
>>>
```



5 Sea la función  $f(x) = 1/x$  y los nodos  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 3$

a) Construya el polinomio de interpolación de Newton  $p_2$  de  $f$  con los nodos dados

x	f
1	1
2	1/2
3	1/3

$$p_2 = \frac{1}{6}x^2 - x + \frac{11}{6}$$

b) Determine las constantes  $a_0, a_1, b_0, b_1$  y  $b_2$  para que la función

$$S(x) = \begin{cases} a_0 + a_1(x-1) + \frac{13}{18}(x-1)^2 - \frac{2}{9}(x-1)^3 & 1 \leq x \leq 2 \\ b_0 + b_1(x-2) + \frac{1}{18}(x-2)^2 + b_2(x-2)^3 & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Sea el spline cúbico con condiciones frontera  $S'(1) = -1$  y  $S'(3) = -1/9$  que interpola a  $f$  en los nodos dados

$$a_0 = 1 \quad a_1 = -1 \quad b_0 = 1/2 \quad b_1 = -2/9 \quad b_2 = 0$$

c) Estime el valor de  $f(1.5)$  mediante  $p_2(x)$  y  $S(x)$   
¿Cuál de estas dos aproximaciones es mejor?

$$f(1.5) = 1/1.5 = 2/3 = 0.66667$$

$$p(1.5) = (3/2)^2/6 - 3/2 + 11/6 = 17/24 = 0.70833$$

$$S(3/2) = 1 - 1(3/2 - 1) + (13/18)(3/2 - 1)^2 - (2/18)(3/2 - 1)^3$$

$$S(3/2) = 1 - 1/2 + (13/18)(1/4) - (2/18)(1/8) = 2/3 = 0.6667$$

$$E_p = \frac{|2/3 - 17/24|}{1/24} = \frac{1}{16} = 0.0625$$

$$E_s = \frac{|2/3 - 2/3|}{2/3} = 0$$

El error del spline es mucho menor que el del polinomio de Newton  $\therefore$  mejor aproximación

[illegible][illegible]

6) Hállese el polinomio de segundo grado de mejor aproximación de mínimos cuadrados para cada una de las siguientes funciones dadas en el intervalo indicado

a)  $f(x) = 1/x$  en  $[1, 2]$   $f_0(x) = 1$   $f_1(x) = x$   $f_2(x) = x^2$

x	f
1	1
3/2	2/3
2	1/2

$$M = \begin{pmatrix} f_0(1) & f_1(1) & f_2(1) \\ f_0(3/2) & f_1(3/2) & f_2(3/2) \\ f_0(2) & f_1(2) & f_2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3/2 & 9/4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M^T M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3/2 & 2 \\ 1 & 9/4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3/2 & 9/2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9/2 & 29/4 \\ 9/2 & 29/4 & 99/8 \\ 29/4 & 99/8 & 353/16 \end{pmatrix}$$

$$M^T b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3/2 & 2 \\ 1 & 9/4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/6 \\ 3 \\ 9/2 \end{pmatrix}$$

$$|M^T M| = 3 \left( \frac{29}{4} \cdot \frac{353}{16} - \left( \frac{99}{8} \right)^2 \right) - \frac{9}{2} \left( \frac{9}{4} \cdot \frac{353}{16} - \frac{29}{4} \cdot \frac{99}{8} \right) + \frac{29}{4} \left( \frac{9}{2} \cdot \frac{99}{8} - \left( \frac{29}{4} \right)^2 \right)$$

$$|M^T M| = \frac{327}{16} - \frac{1377}{32} + \frac{725}{32} = \frac{1}{16}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 13/6 & 9/2 & 29/4 \\ 3 & 29/4 & 99/8 \\ 9/2 & 99/8 & 353/16 \end{vmatrix} = \frac{13}{6} \left( \frac{29}{4} \cdot \frac{353}{16} - \left( \frac{99}{8} \right)^2 \right) - \frac{9}{2} \left( \frac{3}{4} \cdot \frac{353}{16} - \frac{9}{2} \cdot \frac{99}{8} \right) + \frac{29}{4} \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{99}{8} - \frac{9}{4} \cdot \frac{99}{8} \right) = \frac{13}{96}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 9/2 & 13/6 \\ 9/2 & 29/4 & 3 \\ 29/4 & 99/8 & 9/2 \end{vmatrix} = 3 \left( \frac{29}{4} \cdot \frac{9}{2} - \frac{3 \cdot 99}{8} \right) - \frac{9}{2} \left( \left( \frac{9}{2} \right)^2 - \frac{3 \cdot 29}{4} \right) + \frac{13}{6} \left( \frac{99}{4} - \frac{29^2}{4} \right) = -\frac{27}{2} + \frac{27}{4} + \frac{325}{96} = \frac{1}{48}$$

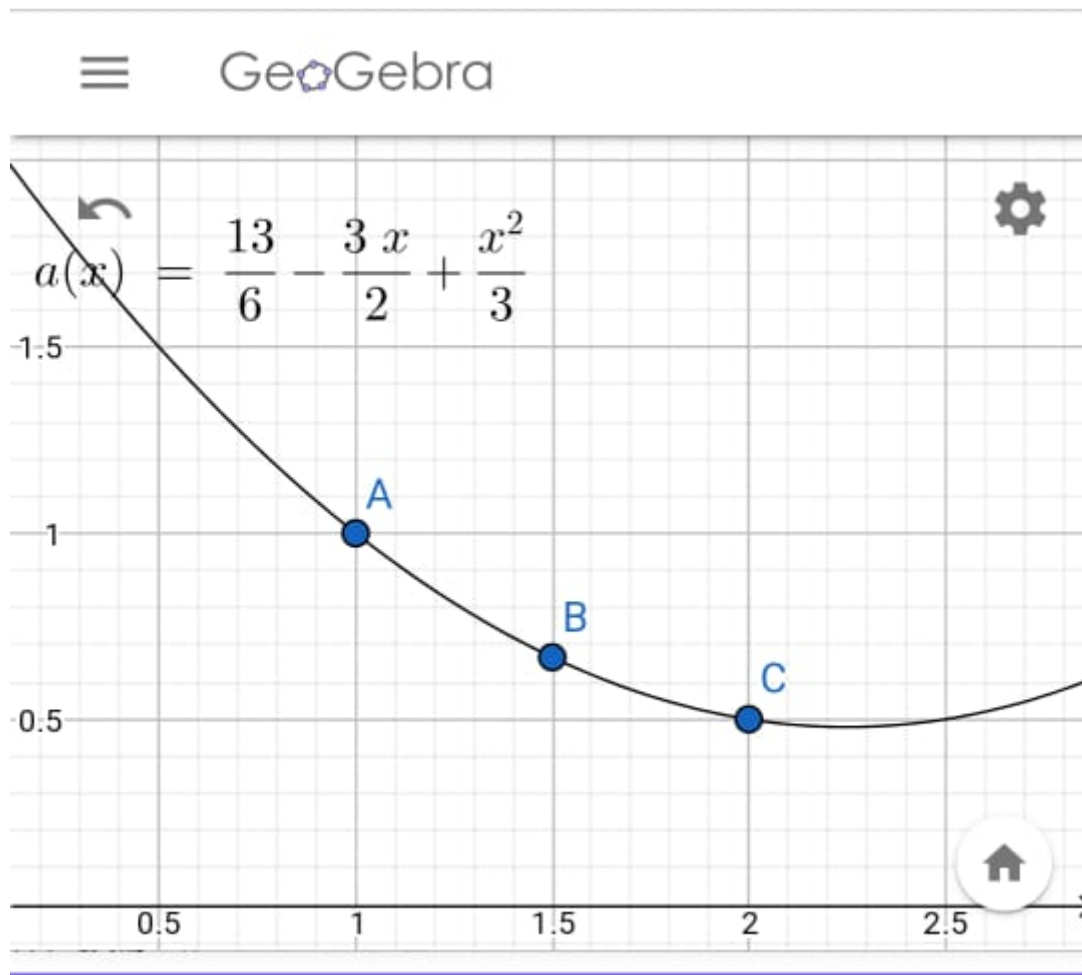
$$\Rightarrow a_0 = \Delta_1 / |M^T M| = 13/96 / 1/16 = 13/6$$

$$a_3 = \Delta_3 / |M^T M| = 1/48 / 1/16 = 1/3$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 13/6 & 29/4 \\ 9/2 & 3 & 99/8 \\ 29/4 & 9/2 & 353/16 \end{vmatrix} = \frac{3}{16} \left( \frac{3 \cdot 353}{16} - \frac{9 \cdot 99}{8} \right) - \frac{13}{6} \left( \frac{9 \cdot 353}{32} - \frac{29 \cdot 99}{8} \right) + \frac{29}{4} \left( \left( \frac{9}{2} \right)^2 - \frac{29 \cdot 3}{4} \right) = -\frac{3}{32}$$

$$\Rightarrow a_2 = \Delta_2 / |M^T M| = -3/32 / 1/16 = -3/2 \Rightarrow P = 13/6 - 3x/2 + x^2/3$$

Que se graficó para comprobar que la curva pasara cercana a los nodos, el resultado es que no solo se acerca a los puntos, sino que pasa por ellos.





b)  $f(x) = \cos(\pi x)$  en  $[0, 1]$

$$Q_{11} = \int_0^1 1 \cdot 1 dx = x \Big|_0^1 = 1 \quad Q_{12} = \int_0^1 1 \cdot x dx = x^2/2 \Big|_0^1 = 1/2$$

$$Q_{13} = \int_0^1 1 \cdot x^2 dx = x^3/3 \Big|_0^1 = 1/3 \quad Q_{21} = \int_0^1 x \cdot 1 dx = x^2/2 \Big|_0^1 = 1/2$$

$$Q_{22} = \int_0^1 x \cdot x dx = x^3/3 \Big|_0^1 = 1/3 \quad Q_{23} = \int_0^1 x \cdot x^2 dx = x^4/4 \Big|_0^1 = 1/4$$

$$Q_{31} = \int_0^1 x^2 \cdot 1 dx = x^3/3 \Big|_0^1 = 1/3 \quad Q_{33} = \int_0^1 x^2 \cdot x^2 dx = x^5/5 \Big|_0^1 = 1/5$$

$$Q_{32} = \int_0^1 x^2 \cdot x dx = x^4/4 \Big|_0^1 = 1/4$$

$$b_1 = \int_0^1 \cos(\pi x) dx = \sin(\pi x) \Big|_0^1 = \sin(\pi) - \sin(0) = 0$$

$$b_2 = \int_0^1 x \cos(\pi x) dx = x \sin(\pi x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \sin(\pi x) dx = \cos(\pi x) \Big|_0^1 = -\frac{2}{\pi^2}$$

$$b_3 = \int_0^1 x^2 \cos(\pi x) dx = x^2 \sin(\pi x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \sin(\pi x) (2x) dx$$

$$b_3 = -\frac{2}{\pi} \left( x \cos(\pi x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \cos(\pi x) dx \right) = -\frac{2}{\pi^2}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2/\pi^2 \\ -2/\pi^2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{10} - \frac{1}{12} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{9} \right) = \frac{1}{240} - \frac{1}{120} + \frac{1}{216} = \frac{1}{2160}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 \\ -2/\pi^2 & 1/3 & 1/4 \\ -2/\pi^2 & 1/4 & 1/5 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \left( -\frac{2}{5\pi^2} + \frac{1}{2\pi^2} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{-1}{2\pi^2} + \frac{2}{3\pi^2} \right)$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{\pi^2} \left( -\frac{1}{20} + \frac{1}{18} \right) = \frac{1}{\pi^2 180}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & -2/\pi^2 & 1/4 \\ 1/3 & -2/\pi^2 & 1/5 \end{vmatrix} = -\frac{2}{\pi^2 5} + \frac{1}{2\pi^2} + \frac{1}{3} \left( \frac{-1}{\pi^2} + \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{\pi^2} \left( \frac{1}{10} - \frac{1}{9} \right)$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{90\pi^2}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & -2/\pi^2 \\ 1/3 & 1/4 & -2/\pi^2 \end{vmatrix} = -\frac{2}{3\pi^2} + \frac{1}{2\pi^2} - \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{\pi^2} + \frac{2}{3\pi^2} \right)$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{\pi^2} \left( -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) = 0$$

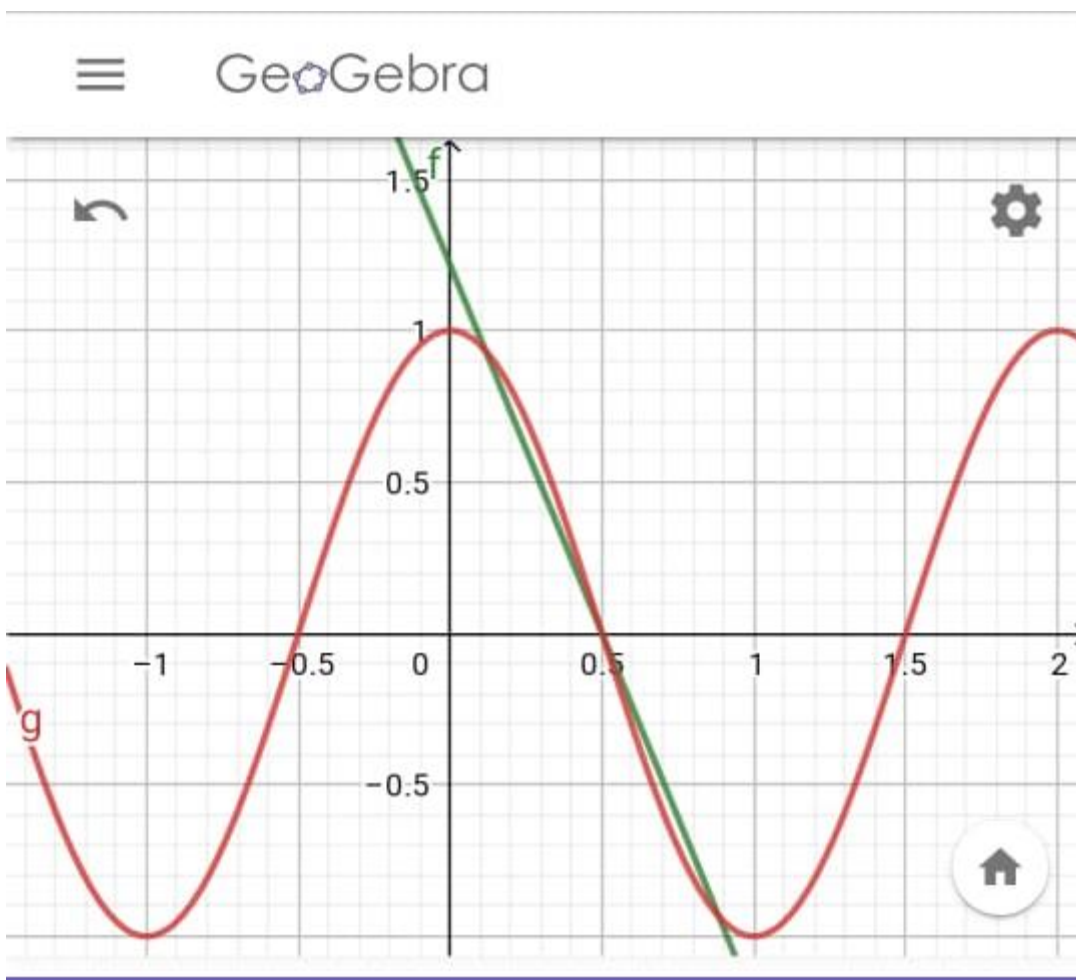
$$\Rightarrow a_0 = \left( \frac{1}{\pi^2 180} \right) / \frac{1}{2160} = \frac{12}{\pi^2}$$

$$a_1 = \frac{-1}{90\pi^2} / \frac{1}{2160} = -\frac{24}{\pi^2}$$

$$a_3 = 0$$

$$\Rightarrow p = \frac{12}{\pi^2} - \frac{24}{\pi^2} x$$

Este polinomio también se graficó, para comprobar la curva fuera cercana al coseno en el intervalo



7 Encuentre la mejor aproximación de mínimos cuadrados en los puntos  $(-\pi/2, 1)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(\pi/2, 1/2)$  y  $(\pi, 1)$  del tipo  $u(x) = a + r \sin(x + \alpha)$  con  $\alpha, r \in \mathbb{R}$  y  $\alpha \in [0, 2\pi]$

x	f
$-\pi/2$	1
0	0
$\pi/2$	1/2
$\pi$	1

Los puntos son periodicos en un inter-

valo de  $3\pi/2$

$$\Rightarrow u(-\pi/2) = u(\pi)$$

$$\Rightarrow a + r \sin(-\pi/2 + \alpha) = a + r \sin(\pi + \alpha)$$

$$\Rightarrow \sin(-\pi/2 + \alpha) = \sin(3\pi/2 + \alpha)$$

$$\Rightarrow \sin(-\pi/2) \cos(\alpha) + \sin \alpha \cos(-\pi/2) = \sin(3\pi/2) \cos(\alpha) + \sin \alpha \cos(3\pi/2)$$

$$\Rightarrow -\cos \alpha = -\sin \alpha \quad \text{impar}$$

$$\Rightarrow \alpha = n\pi/4 \quad \text{Para nuestro caso } \alpha = 5\pi/4$$

$$f_0 = 1 \quad f_1 = \sin(x + 5\pi/4) = \sin(5\pi/4) \cos(x) + \sin(x) \cos(5\pi/4)$$

$$f_1 = -\sqrt{2} \cos(x)/2 - \sqrt{2} \sin(x)/2$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & -\sqrt{2}/2 \\ 1 & -\sqrt{2}/2 \\ 1 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \Rightarrow M^T M = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad M^T b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M^T M = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad M^T b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M^T b = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 3\sqrt{2}/4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 3\sqrt{2}/4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a = 5/8$$

$$r = 3\sqrt{2}/8$$

$$\Rightarrow P = \frac{5}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{8} \sin\left(x + \frac{5\pi}{4}\right)$$

Quizá el  $5/2$  en el apunte no se justificó de la mejor manera, pero a pesar de que al resolver el sistema se obtenía que  $\alpha$  debía valer  $n\pi/4$  (con  $n$  impar), al sustituir en la condición de periodicidad no se satisfizo más que para  $n=5$ , por lo cual al  $\alpha$  se le dio el valor de  $5\pi/4$ .

De igual manera el resultado anterior se graficó, obteniendo una gráfica no tan alejada de los puntos  $x_1$  y  $x_2$ .

