Examen Parcial 1

1 Sea la siguiente tabla de la función $f(x) = e^x$

x	f
0	1
0.2	1.2214
0.4	1.4918
0.6	1.8221

a) Cálcule $\sqrt[3]{e}$ por interpolación cuadrática. Utilice los primeros puntos 0, 0.2, 0.4 y posteriormente los puntos 0.2, 0.4, 0.6 y compare los resultados.

$P_1 = 0.6125x^2 + 0.9845x + 1$
$P_2 = 0.74875x^2 + 0.90275x + 1.0109$

$e^{1/3} = 1.3956$

$P_1(\frac{1}{3}) = 1.3962 \qquad E_1 = |1.3956 - 1.3962| / |1.3956| = 0.00043$
$P_2(\frac{1}{3}) = 1.3950 \qquad E_2 = |1.3956 - 1.3950| / |1.3956| = 0.00043$

Ambos polinomios tienen el mismo error relativo.

b) Cálcule $\sqrt[3]{e}$ por interpolación cúbica y compare éste resultado con los del inciso anterior

$P_3 = 0.2271x^3 + 0.47625x^2 + 1.0027x + 1$
$P_3(\frac{1}{3}) = 1.39556$

$E_3 = \frac{|1.3956 - 1.39556|}{1.3956} = 0.00002786$

El error de éste polinomio es un orden de magnitud menor al error de los incisos anteriores, por lo tanto, mejor aproximación.

Los polinomios anteriores se obtuvieron por medio de un programa en python

Python 3.8.5 Shell

File Edit Shell Debug Options Window Help

```
[[1.   0.   0.  ]
 [1.   0.2  0.04]
 [1.   0.4  0.16]]
b= [1.     1.2214 1.4918]
a= [1.     0.9845 0.6125]
p= 0.612499999999997*x**2 + 0.984500000000001*x + 1.0
>>>
= RESTART: C:\Users\PACO\Desktop\karen\MétodosNuméricos\InterpolaciónVander.py =
ingrese el valor de n:3
ingrese el valor de x_i:0.2
ingrese el valor de x_i:0.4
ingrese el valor de x_i:0.6
ingrese el valor de f_i:1.2214
ingrese el valor de f_i:1.4918
ingrese el valor de f_i:1.8221
[[1.   0.2  0.04]
 [1.   0.4  0.16]
 [1.   0.6  0.36]]
b= [1.2214 1.4918 1.8221]
a= [1.0109  0.90275 0.74875]
p= 0.748750000000001*x**2 + 0.902749999999997*x + 1.0109
>>>
= RESTART: C:\Users\PACO\Desktop\karen\MétodosNuméricos\InterpolaciónVander.py =
ingrese el valor de n:4
ingrese el valor de x_i:0
ingrese el valor de x_i:0.2
ingrese el valor de x_i:0.4
ingrese el valor de x_i:0.6
ingrese el valor de f_i:1
ingrese el valor de f_i:1.2214
ingrese el valor de f_i:1.4918
ingrese el valor de f_i:1.8221
[[1.    0.    0.    0.   ]
 [1.    0.2   0.04  0.008]
 [1.    0.4   0.16  0.064]
 [1.    0.6   0.36  0.216]]
b= [1.     1.2214 1.4918 1.8221]
a= [1.         1.00266667 0.47625    0.22708333]
p= 0.227083333333354*x**3 + 0.476249999999993*x**2 + 1.00266666666667*x + 1.0
>>>
```

2 El polinomio $p_3(x) = 2-(x+1)+x(x+1)-2x(x+1)(x-1)$ interpola los primeros 4 datos de la tabla

x	y
-1	2
0	1
1	2
2	-7
3	10

Añadase un término más a $p_3(x)$ de manera que el polinomio resultante interpole a los datos de la tabla. Calcúlese el polinomio de Lagrange que interpola los datos de la tabla

$f[-1]=2 \quad f[0]=1 \quad f[1]=2 \quad f[2]=-7 \quad f[3]=10$

$f[x_0,x_1] = \frac{1-2}{0+1} = -1 \quad f[x_1,x_2] = \frac{2-1}{1-0} = 1 \quad f[x_2,x_3] = \frac{-7-2}{2-1} = -9$

$f[x_3,x_4] = \frac{10+7}{3-2} = 17 \quad f[x_0,x_1,x_2] = \frac{1+1}{1+1} = 1$

$f[x_1,x_2,x_3] = \frac{-9-1}{2} = -5 \quad f[x_2,x_3,x_4] = \frac{17+9}{3-1} = \frac{26}{2} = 13$

$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{-5-1}{3} = \frac{-6}{3} = -2$

$f[x_1,x_2,x_3,x_4] = \frac{13+5}{3} = \frac{18}{3} = 6$

$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4] = \frac{6+2}{4} = 2$

$p_4(x) = p_3(x) + f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$p_4(x) = 2-(x+1)+x(x+1)-2x(x+1)(x-1)+2(x+1)x(x-1)(x-2)$

$p_4(x) = 2-\cancel{x}-1+x^2+\cancel{x}-2x^3+2x+(2x^3-2x)(x-2)$

$p_4(x) = 1+x^2-2x^3+2x+2x^4-2x^2-4x^3+4x$

$p_4(x) = 1+6x-x^2-6x^3+2x^4$ //

El polinomio de Lagrange es $P_L = 2x^4-6x^3-x^2+6x+1$

El polinomio de Lagrange se obtuvo por medio del programa

```
Python 3.8.5 Shell
File  Edit  Shell  Debug  Options  Window  Help
Python 3.8.5 (tags/v3.8.5:580fbb0, Jul 20 2020, 15:57:54) [MSC v.1924 64 bit (AM
D64)] on win32
Type "help", "copyright", "credits" or "license()" for more information.
>>>
= RESTART: C:\Users\PACO\Desktop\karen\MétodosNuméricos\InterpolacionLagrange.py
ingrese el valor de n:5
ingrese el valor de x_i:-1
ingrese el valor de x_i:0
ingrese el valor de x_i:1
ingrese el valor de x_i:2
ingrese el valor de x_i:3
ingrese el valor de f_i:2
ingrese el valor de f_i:1
ingrese el valor de f_i:2
ingrese el valor de f_i:-7
ingrese el valor de f_i:10
l_i= 0.0416666666666667*x*(x - 3.0)*(x - 2.0)*(x - 1.0)
l_i= -0.166666666666667*(x - 3.0)*(x - 2.0)*(x - 1.0)*(1.0*x + 1.0)
l_i= 0.5*x*(0.5*x + 0.5)*(x - 3.0)*(x - 2.0)
l_i= -0.5*x*(0.333333333333333*x + 0.333333333333333)*(x - 3.0)*(x - 1.0)
l_i= 0.166666666666667*x*(0.25*x + 0.25)*(x - 2.0)*(x - 1.0)
El polinomio es:  2.0*x**4 - 6.0*x**3 - 1.0*x**2 + 6.0*x + 1.0
>>> |
```

También se obtuvo realizando los cálculos a mano, dando el mismo resultado

$$l_0(x) = \prod_{j=1}^{4} \frac{x-x_j}{x_0-x_j} = \left(\frac{x+0}{-1+0}\right)\left(\frac{x-1}{-1-1}\right)\left(\frac{x-2}{-1-2}\right)\left(\frac{x-3}{-1-3}\right)$$

$$l_0(x) = x\left(\frac{x-1}{2}\right)\left(\frac{x-2}{3}\right)\left(\frac{x-3}{4}\right) = \frac{1}{24}(x)(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$l_1(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{4} \frac{x-x_j}{x_1-x_j} = \left(\frac{x+1}{0+1}\right)\left(\frac{x-1}{0-1}\right)\left(\frac{x-2}{0-2}\right)\left(\frac{x-3}{0-3}\right)$$

$$l_1(x) = -(x+1)(x-1)\left(\frac{x-2}{2}\right)\left(\frac{x-3}{3}\right) = -\frac{1}{6}(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$l_2(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq 2}}^{4} \frac{x-x_j}{x_2-x_j} = \left(\frac{x+1}{1+1}\right)\left(\frac{x+0}{1+0}\right)\left(\frac{x-2}{1-2}\right)\left(\frac{x-3}{1-3}\right)$$

$$l_2(x) = \left(\frac{x+1}{2}\right)(x)(x-2)\left(\frac{x-3}{2}\right) = \frac{1}{4}x(x+1)(x-2)(x-3)$$

$$l_3(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq 3}}^{4} \frac{x-x_j}{x_3-x_j} = \left(\frac{x+1}{2+1}\right)\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x-1}{2-1}\right)\left(\frac{x-3}{2-3}\right)$$

$$l_3(x) = \left(\frac{x+1}{3}\right)\left(\frac{x}{2}\right)(x-1)\left(\frac{x-3}{-1}\right) = -\frac{1}{6}x(x+1)(x-1)(x-3)$$

$$l_4(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq 4}}^{4} \frac{x-x_j}{x_4-x_j} = \left(\frac{x+1}{3+1}\right)\left(\frac{x}{3}\right)\left(\frac{x-1}{3-1}\right)\left(\frac{x-2}{3-2}\right)$$

$$l_4(x) = \left(\frac{x+1}{4}\right)\left(\frac{x}{3}\right)\left(\frac{x-1}{2}\right)(x-2) = \frac{1}{24}(x+1)(x)(x-1)(x-2)$$

$$\Rightarrow P_4(x) = \frac{1}{12}x(x-1)(x-2)(x-3) - \frac{1}{6}(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$+ \frac{1}{2}x(x+1)(x-2)(x-3) + \frac{7}{6}x(x+1)(x-1)(x-3)$$

$$+ \frac{10}{24}(x+1)(x)(x-1)(x-2)$$

$$\Rightarrow P_4(x) = \left(\frac{x^2-x}{12} - \frac{x^2-1}{6} + \frac{x^2+x}{2}\right)(x^2-5x+6)$$

$$+ (x^2+x)\left(\frac{7}{6}(x^2-4x+3) + \frac{10}{24}(x^2-3x+2)\right)$$

$$\Rightarrow P_4(x) = \left(\frac{x^2-x-2x^2+2+6x^2+6x}{12}\right)(x^2-5x+6)$$

$$+ (x^2+x)\left(\frac{28(x^2-4x+3)+10x^2-30x+20}{24}\right)$$

$$\Rightarrow P_4(x) = (5x^2+5x+2)(x^2-5x+6)/12$$

$$+ (x^2+x)\left(\frac{28x^2-112x+84+10x^2-30x+20}{24}\right)$$

$$\begin{array}{r} \overset{3}{28} \\ \times 4 \\ \hline 112 \end{array} \quad \begin{array}{r} \overset{2}{28} \\ \times 3 \\ \hline 84 \end{array}$$

$$\Rightarrow P_4(x) = (5x^4+5x^3+2x^2-25x^3-25x^2-10x+30x^2+30x+12)/12$$

$$+ (x^2+x)(38x^2-142x+104)/24$$

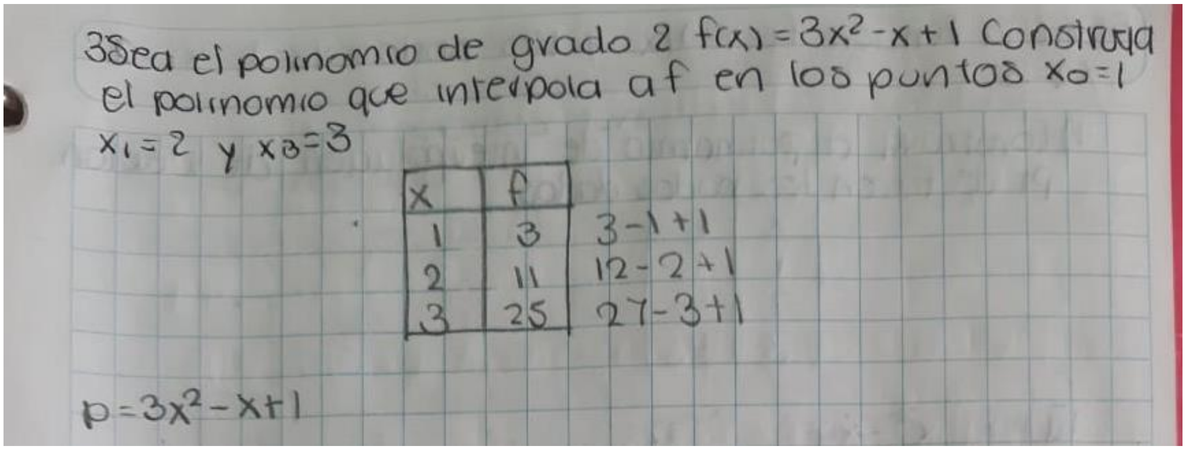
$$\Rightarrow P_4(x) = (5x^4-20x^3+7x^2+20x+12)/12 +$$

$$(38x^4-142x^3+104x^2+38x^3-142x^2+104x)/24$$

$$\Rightarrow P_4(x) = \frac{10x^4-40x^3+14x^2+40x+24}{24} + \frac{38x^4-104x^3-38x^2+104x}{24}$$

$$\Rightarrow P_4(x) = \frac{48x^4-144x^3-24x^2+144x+24}{24}$$

$$\Rightarrow P_4(x) = 2x^4-6x^3-x^2+6x+1$$



3 Sea el polinomio de grado 2 $f(x)=3x^2-x+1$ Construya el polinomio que interpola a f en los puntos $x_0=1$ $x_1=2$ y $x_2=3$

x	f	
1	3	$3-1+1$
2	11	$12-2+1$
3	25	$27-3+1$

$p=3x^2-x+1$

Que también se obtuvo por programa, el resultado se puede ver en la última ejecución

Python 3.8.5 Shell

File Edit Shell Debug Options Window Help

```
[[1.   0.2  0.04]
 [1.   0.4  0.16]
 [1.   0.6  0.36]]
b= [1.2214 1.4918 1.8221]
a= [1.0109  0.90275 0.74875]
p= 0.748750000000001*x**2 + 0.902749999999997*x + 1.0109
>>>
= RESTART: C:\Users\PACO\Desktop\karen\MétodosNuméricos\InterpolaciónVander.py =
ingrese el valor de n:4
ingrese el valor de x_i:0
ingrese el valor de x_i:0.2
ingrese el valor de x_i:0.4
ingrese el valor de x_i:0.6
ingrese el valor de f_i:1
ingrese el valor de f_i:1.2214
ingrese el valor de f_i:1.4918
ingrese el valor de f_i:1.8221
[[1.    0.    0.    0.   ]
 [1.    0.2   0.04  0.008]
 [1.    0.4   0.16  0.064]
 [1.    0.6   0.36  0.216]]
b= [1.     1.2214 1.4918 1.8221]
a= [1.         1.00266667 0.47625    0.22708333]
p= 0.227083333333354*x**3 + 0.476249999999993*x**2 + 1.00266666666667*x + 1.0
>>>
= RESTART: C:\Users\PACO\Desktop\karen\MétodosNuméricos\InterpolaciónVander.py =
ingrese el valor de n:3
ingrese el valor de x_i:1
ingrese el valor de x_i:2
ingrese el valor de x_i:3
ingrese el valor de f_i:3
ingrese el valor de f_i:11
ingrese el valor de f_i:25
[[1. 1. 1.]
 [1. 2. 4.]
 [1. 3. 9.]]
b= [ 3. 11. 25.]
a= [ 1. -1.  3.]
p= 3.0*x**2 - 1.0*x + 1.0
>>>
```

4 Sea el polinomio de grado tres $f(x)=3x^3-x+1$. Utilizando diferencias divididas, construya el polinomio que interpola a f en los puntos $x_0=-3$, $x_1=-1$ y $x_2=2$. Se añade a continuación un nuevo punto $x_3=1$. Sin hacer ningún cálculo adicional, razónese qué valor tomará la nueva diferencia dividida $f[x_0,x_1,x_2,x_3]$ y cual será el coeficiente directo (término de mayor grado) del nuevo polinomio de interpolación p_3 de f. Calcule p_3 según lo anterior ¿Qué ocurre si consideramos $x_3=1.2$?

x	f	
-3	-77	-81+3+1
-1	-1	-3+1+1
2	23	24-2+1

$-6x^2+14x+19=p_2$

Si agregamos el dato $x_3=1$ tendríamos 4 datos lo cual nos daría como resultado un polinomio de grado 3, es decir resultaría ser el polinomio original $f(x)=3x^3-x-1$ y ya que $f[x_0,x_1,x_2,x_3]$ es el único coeficiente que multiplica a x^3 la $f[x_0,x_1,x_2,x_3]$ tendrá que ser 3

$p_3(x)=-6x^2+14x+19+3(x+3)(x+1)(x-2)$

$p_3(x)=-6x^2+14x+19+3(x^2+4x+3)(x-2)$

$p_3(x)=-6x^2+14x+19+3(x^3+4x^2+3x-2x^2-8x-6)$

$p_3(x)=3x^3-x+1$

Con 1.2 obtendríamos el mismo resultado ya que seguiríamos dando 4datos.

Que se obtuvo por medio del programa de Newton, de igual manera el resultado se visualiza en la siguiente imagen en la última ejecución

Python 3.8.5 Shell

File Edit Shell Debug Options Window Help

```
l_i= 0.5*(x - 2.0)*(x - 1.0)*(1.0*x + 1.0)
l_i= -1.0*x*(0.5*x + 0.5)*(x - 2.0)
l_i= 0.5*x*(0.333333333333333*x + 0.333333333333333)*(x - 1.0)
El polinomio es:  0.333333333333333*x**3 - 1.33333333333333*x + 2.0
>>> 
= RESTART: C:\Users\PACO\Desktop\karen\MétodosNuméricos\InterpolacionLagrange.py
ingrese el valor de n:5
ingrese el valor de x_i:-1
ingrese el valor de x_i:0
ingrese el valor de x_i:1
ingrese el valor de x_i:2
ingrese el valor de x_i:3
ingrese el valor de f_i:2
ingrese el valor de f_i:1
ingrese el valor de f_i:2
ingrese el valor de f_i:-7
ingrese el valor de f_i:10
l_i= 0.0416666666666667*x*(x - 3.0)*(x - 2.0)*(x - 1.0)
l_i= -0.166666666666667*(x - 3.0)*(x - 2.0)*(x - 1.0)*(1.0*x + 1.0)
l_i= 0.5*x*(0.5*x + 0.5)*(x - 3.0)*(x - 2.0)
l_i= -0.5*x*(0.333333333333333*x + 0.333333333333333)*(x - 3.0)*(x - 1.0)
l_i= 0.166666666666667*x*(0.25*x + 0.25)*(x - 2.0)*(x - 1.0)
El polinomio es:  2.0*x**4 - 6.0*x**3 - 1.0*x**2 + 6.0*x + 1.0
>>> 
= RESTART: C:\Users\PACO\Desktop\karen\MétodosNuméricos\InterpolacionNewton.py =
ingrese el valor de n:3
ingrese el valor de x_i:-3
ingrese el valor de x_i:-1
ingrese el valor de x_i:2
ingrese el valor de f_i:-77
ingrese el valor de f_i:-1
ingrese el valor de f_i:23
38.0
8.0
-6.0
[[-77.  38.  -6.]
 [ -1.   8.   0.]
 [ 23.   0.   0.]]
-6.0*x**2 + 14.0*x + 19.0
>>> 
```

5 Sea la función $f(x) = 1/x$ y los nodos $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$

a) Construya el polinomio de interpolación de Newton p_2 de f con los nodos dados

x	f
1	1
2	1/2
3	1/3

$$p_N = \frac{1}{6}x^2 - x + \frac{11}{6}$$

b) Determine las constantes a_0, a_1, b_0, b_1 y b_2 para que la función

$$S(x) = \begin{cases} a_0 + a_1(x-1) + \frac{13}{18}(x-1)^2 - \frac{2}{9}(x-1)^3 & 1 \leq x \leq 2 \\ b_0 + b_1(x-2) + \frac{1}{18}(x-2)^2 + b_2(x-2)^3 & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

sea el spline cúbico con condiciones frontera $S'(1) = -1$ y $S'(3) = -1/9$ que interpola a f en los nodos dados

$a_0 = 2$ $a_1 = -1$ $b_0 = 17/18$ $b_1 = -2/9$ $b_2 \sim 0$

c) Estime el valor de $f(1,5)$ mediante $p_2(x)$ y $S(x)$ ¿cuál de estas dos aproximaciones es mejor?

$f(1.5) = 1/1.5 = 2/3 = 0.66667$
$p(1.5) = (3/2)^2/6 - 3/2 + 11/6 = 17/24 = 0.70833$
$S(3/2) = 2 - 1(3/2 - 1) + 13(3/2 - 1)^2/18 - 2(3/2 - 1)^3/18$
$S(3/2) = 2 - 1/2 + (13/18)(1/4) - (2/18)(1/8) = 5/3 = 1.6667$

$$E_p = \frac{|2/3 - 17/24|}{|2/3|} = \frac{1}{16} = 0.0625$$

$$E_s = \frac{|2/3 - 5/3|}{2/3} = \frac{3}{2} = 1.5$$

El error del spline es mucho mayor que el de Newton

El polinomio de Newton y el spline se calcularon por medio de los programas correspondientes, en la primera ejecución el de Newton y en la segunda el spline, los valores numéricos de los coeficientes que dio el programa, se pasaron a fracción al anotarlos a mano.

Python 3.8.5 Shell

File Edit Shell Debug Options Window Help

```
= RESTART: C:\Users\PACO\Desktop\karen\MétodosNuméricos\InterpolacionNewton.py =
ingrese el valor de n:3
ingrese el valor de x_i:1
ingrese el valor de x_i:2
ingrese el valor de x_i:3
ingrese el valor de f_i:1
ingrese el valor de f_i:0.5
ingrese el valor de f_i:0.33333333333333333333333
-0.5
-0.16666666666666669
0.16666666666666666
[[ 1.         -0.5         0.16666667]
 [ 0.5        -0.16666667  0.        ]
 [ 0.33333333  0.          0.        ]]
0.166666666666667*x**2 - 1.0*x + 1.83333333333333
>>>
= RESTART: C:\Users\PACO\Desktop\karen\MétodosNuméricos\InterpolacionSplines.py
ingrese el valor de n:3
ingrese el valor de x_i:1
ingrese el valor de x_i:2
ingrese el valor de x_i:3
ingrese el valor de f_i:1
ingrese el valor de f_i:0.5
ingrese el valor de f_i:0.33333333333333333333333333333333
ingrese el valor de S(a):-1
ingrese el valor de S(b):-0.11111111111111111111111111111
h= [1. 1.]
b= [1.5        1.         0.16666667]
A= [[2. 1. 0.]
 [1. 4. 1.]
 [0. 1. 2.]]
x= [0.72222222 0.05555556 0.05555556]
d= [-2.22222222e-01  1.85037171e-17]
bi= [-1.         -0.22222222]
si= -1.0*x - 0.222222222222222*(x - 1.0)**3 + 0.722222222222222*(x - 1.0)**2 + 2.0
si= -0.222222222222222*x**3 + 1.38888888888889*x**2 - 3.11111111111111*x + 2.94444444444
444
si= -0.222222222222222*x + 1.48029736616688e-16*(0.5*x - 1)**3 + 0.222222222222222*(0.5*
x - 1)**2 + 0.944444444444444
si= 1.85037170770859e-17*x**3 + 0.0555555555555554*x**2 - 0.444444444444444*x + 1.166666
66666667
```

Ln: 382 Col: 4

6 Hállese el polinomio de segundo grado de mejor aproximación de mínimos cuadrados para cada una de las siguientes funciones dadas en el intervalo indicado

a) $f(x)=1/x$ en $[1,2]$ $\quad f_0(x)=1 \quad f_1(x)=x \quad f_2(x)=x^2$

x	f
1	1
3/2	2/3
2	1/2

$$M=\begin{pmatrix} f_0(1) & f_1(1) & f_2(1) \\ f_0(2) & f_1(2) & f_2(2) \\ f_0(3) & f_1(3) & f_2(3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3/2 & 9/4 \\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

$$M^TM=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3/2 & 2 \\ 1 & 9/4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3/2 & 9/2 \\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 9/2 & 29/4 \\ 9/2 & 29/4 & 99/8 \\ 29/4 & 99/8 & 353/16\end{pmatrix}$$

$$M^Tb=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3/2 & 2 \\ 1 & 9/4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \\ 1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13/6 \\ 3 \\ 9/2\end{pmatrix}$$

$$|M^TM|=3\left(\frac{29}{4}\left(\frac{353}{16}\right)-\left(\frac{99}{8}\right)^2\right)-\frac{9}{2}\left(\frac{9}{2}\left(\frac{353}{16}\right)-\frac{29}{4}\left(\frac{99}{8}\right)\right)+\frac{29}{4}\left(\frac{9}{2}\left(\frac{99}{8}\right)-\left(\frac{29}{4}\right)^2\right)$$

$$|M^TM|=\frac{327}{16}-\frac{1377}{32}+\frac{725}{32}=\frac{1}{16}$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 13/6 & 9/2 & 29/4 \\ 3 & 29/4 & 99/8 \\ 9/2 & 99/8 & 353/16\end{vmatrix}=\frac{13}{6}\left(\frac{29}{4}\left(\frac{353}{16}\right)-\left(\frac{99}{8}\right)^2\right)-\frac{9}{2}\left(\frac{3(353)}{16}-\frac{9}{2}\left(\frac{99}{8}\right)\right)$$
$$+\frac{29}{4}\left(\frac{3(99)}{8}-\frac{9(29)}{8}\right)=\frac{1417}{96}-\frac{189}{4}+\frac{261}{8}=\frac{13}{96}$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 3 & 9/2 & 13/6 \\ 9/2 & 29/4 & 3 \\ 29/4 & 99/8 & 9/2\end{vmatrix}=3\left(\frac{29}{4}\left(\frac{9}{2}\right)-\frac{3\times 99}{8}\right)-\frac{9}{2}\left(\left(\frac{9}{2}\right)^2-\frac{3\times 29}{4}\right)+\frac{13}{6}\left(\frac{9\times 99}{16}-\left(\frac{29}{4}\right)^2\right)$$
$$=-\frac{27}{2}+\frac{27}{4}+\frac{325}{48}=\frac{1}{48}$$

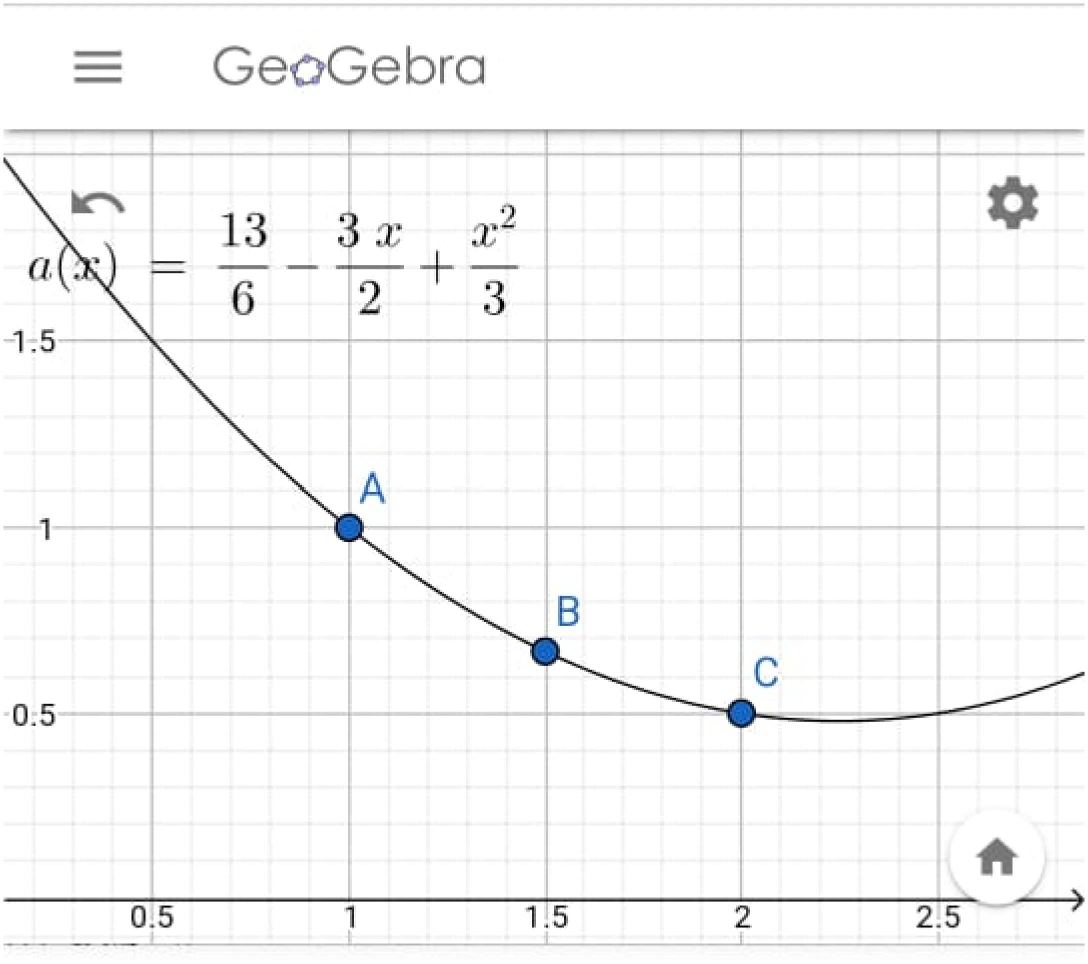
$\Rightarrow a_0=\Delta_1/|M^TM|=13/96/1/16=13/6$

$a_3=\Delta_3/|M^TM|=1/48/1/16=1/3$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 3 & 13/6 & 29/4 \\ 9/2 & 3 & 99/8 \\ 29/4 & 9/2 & 353/16\end{vmatrix}=3\left(\frac{3\times 353}{16}-\frac{9\times 99}{16}\right)-\frac{13}{6}\left(\frac{9\times 353}{32}-\frac{29}{4}\left(\frac{99}{8}\right)\right)$$
$$+\frac{29}{4}\left(\left(\frac{9}{2}\right)^2-\frac{29\times 3}{4}\right)=\frac{63}{2}-\frac{663}{32}-\frac{87}{8}=-\frac{3}{32}$$

$\Rightarrow a_2=\Delta_2/|M^TM|=-3/32/1/16=-3/2 \Rightarrow P=13/6-3x/2+x^2/3$

Que se graficó para comprobar que la curva pasara cercana a los nodos, el resultado es que no solo se acerca a los puntos, sino que pasa por ellos.



b) $f(x) = \cos(\pi x)$ en $[0,1]$

$a_{11} = \int_0^1 1 \cdot 1\, dx = x\Big|_0^1 = 1 \qquad a_{12} = \int_0^1 1 \cdot x\, dx = x^2/2 \Big|_0^1 = 1/2$

$a_{13} = \int_0^1 1 \cdot x^2 dx = x^3/3 \Big|_0^1 = 1/3 \qquad a_{21} = \int_0^1 x \cdot 1\, dx = x^2/2\Big|_0^1 = 1/2$

$a_{22} = \int_0^1 x \cdot x\, dx = x^3/3\Big|_0^1 = 1/3 \qquad a_{23} = \int_0^1 x\, x^2 dx = x^4/4\Big|_0^1 = 1/4$

$a_{31} = \int_0^1 x^2 \cdot 1\, dx = x^3/3\Big|_0^1 = 1/3 \qquad a_{33} = \int_0^1 x^2 x^2 dx = x^5/5\Big|_0^1 = 1/5$

$a_{32} = \int_0^1 x^2 x\, dx = x^4/4\Big|_0^1 = 1/4$

$b_1 = \int_0^1 \cos(\pi x)\, dx = \mathrm{sen}(\pi x)\Big|_0^1 = \mathrm{sen}(\pi) - \mathrm{sen}(0) = 0$

$b_2 = \int_0^1 x\cos(\pi x)\, dx = \cancelto{0}{\dfrac{x\,\mathrm{sen}(\pi x)}{\pi}\Big|_0^1} - \int_0^1 \dfrac{\mathrm{sen}(\pi x)}{\pi} dx = \dfrac{\cos(\pi x)}{\pi^2}\Big|_0^1 = \dfrac{-2}{\pi^2}$

$b_3 = \int_0^1 x^2 \cos(\pi x)\, dx = \cancelto{0}{\dfrac{x^2\,\mathrm{sen}(\pi x)}{\pi}\Big|_0^1} - \int_0^1 \dfrac{\mathrm{sen}(\pi x)}{\pi}(2x)\, dx$

$b_3 = -\dfrac{2}{\pi}\left(-\dfrac{x\cos(\pi x)}{\pi}\Big|_0^1 - \cancelto{0}{\int \dfrac{\cos(\pi x)}{\pi} dx} \right) = \dfrac{-2}{\pi^2}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2/\pi^2 \\ -2/\pi^2 \end{pmatrix}$$

$\Delta = \left(\dfrac{1}{15} - \dfrac{1}{16}\right) - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{12}\right) + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{9}\right) = \dfrac{1}{240} - \dfrac{1}{120} + \dfrac{1}{216} = \dfrac{1}{2160}$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 \\ -2/\pi^2 & 1/3 & 1/4 \\ -2/\pi^2 & 1/4 & 1/5 \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{2}{5\pi^2} + \dfrac{1}{2\pi^2}\right) + \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2\pi^2} + \dfrac{2}{3\pi^2}\right)$

$\Delta_1 = \dfrac{1}{\pi^2}\left(-\dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{18}\right) = \dfrac{1}{\pi^2 180}$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & -2/\pi^2 & 1/4 \\ 1/3 & -2/\pi^2 & 1/5 \end{vmatrix} = -\dfrac{2}{\pi^2 5} + \dfrac{1}{2\pi^2} + \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{\pi^2} + \dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{1}{\pi^2}\left(\dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{9}\right)$

$\Delta_2 = \dfrac{-1}{90\pi^2}$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & -2/\pi^2 \\ 1/3 & 1/4 & -2/\pi^2 \end{vmatrix} = -\frac{2}{3\pi^2} + \frac{1}{2\pi^2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\pi^2} + \frac{2}{3\pi^2}\right)$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{\pi^2}\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) = 0$$

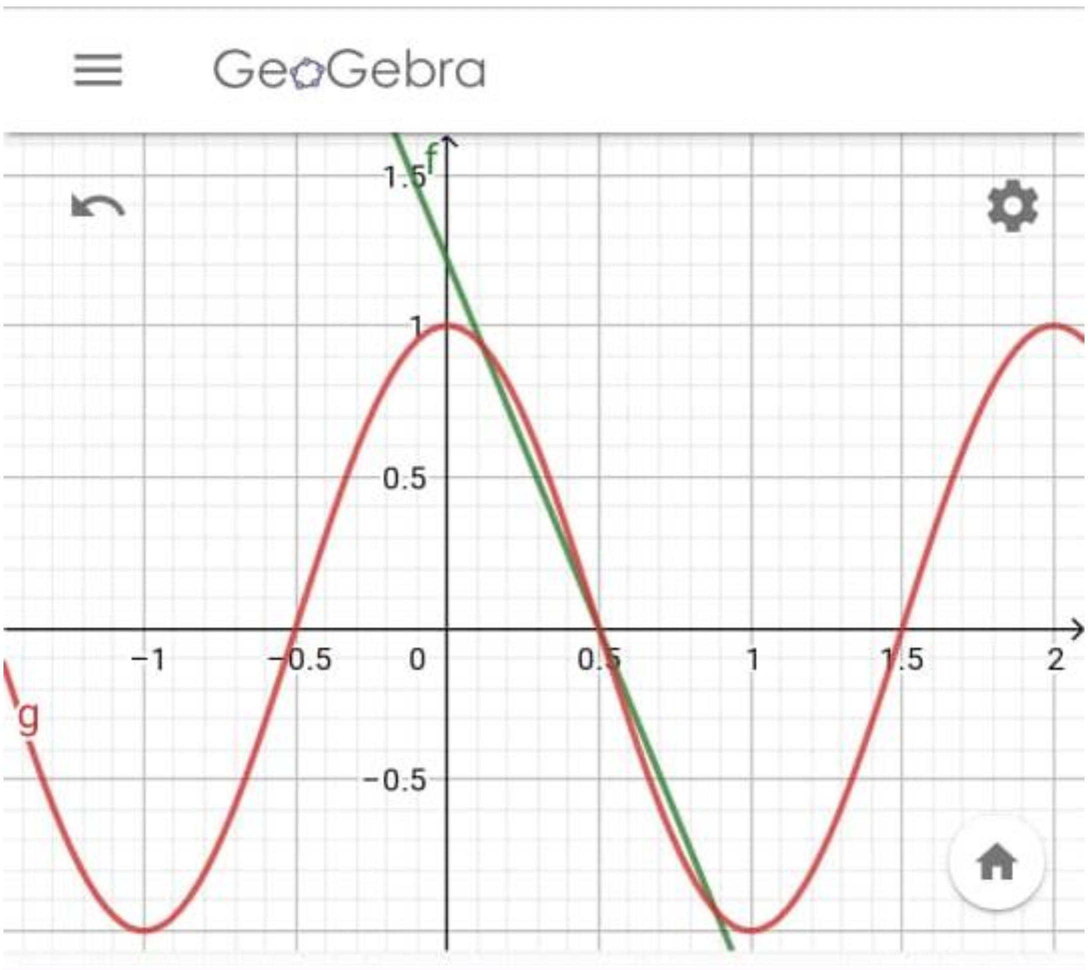
$$\Rightarrow a_0 = \left(\frac{1}{\pi^2 180}\right) \Big/ \frac{1}{2160} = \frac{12}{\pi^2}$$

$$a_1 = \frac{-1}{90\pi^2} \Big/ \frac{1}{2160} = \frac{-24}{\pi^2}$$

$$a_3 = 0$$

$$\Rightarrow P = \frac{12}{\pi^2} - \frac{24}{\pi^2}x$$

Este polinomio también se graficó, para comprobar la curva fuera cercana al coseno en el intervalo



7 Encuentre la mejor aproximación de mínimos cuadrados en los puntos $(-\pi/2,1)$, $(0,0)$, $(\pi/2,1/2)$ y $(\pi,1)$ del tipo $u(x) = a + r\sin(x+\alpha)$ con $\alpha, r \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in [0, 2\pi]$

x	f
$-\pi/2$	1
0	0
$\pi/2$	1/2
π	1

Los puntos son periodicos en un intervalo de $3\pi/2$

$\Rightarrow u(-\frac{\pi}{2}) = u(\pi)$

$\Rightarrow a + r\sin(-\pi/2+\alpha) = a + r\sin(\pi+\alpha)$

$\Rightarrow \sin(-\pi/2+\alpha) = \sin(3\pi/2+\alpha)$

$\Rightarrow \sin(-\pi/2)\cos(\alpha) + \sin\alpha\cos(-\pi/2) = \sin(\pi)\cos(\alpha) + \sin\alpha\cos(\pi)$

$\Rightarrow -\cos\alpha = -\sin\alpha \Rightarrow \alpha = n\pi/4$ (impar) Para nuestro caso $\alpha = 5\pi/4$

$f_0 = 1 \quad f_1 = \sin(x+5\pi/4) = \sin(5\pi/4)\cos(x) + \sin(x)\cos(5\pi/4)$

$f_1 = -\sqrt{2}\cos(x)/2 - \sqrt{2}\sin(x)/2$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & -\sqrt{2}/2 \\ 1 & -\sqrt{2}/2 \\ 1 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \Rightarrow M^TM = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & -\sqrt{2}/2 \\ 1 & -\sqrt{2}/2 \\ 1 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$M^TM = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } M^Tb = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M^Tb = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 3\sqrt{2}/4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 3\sqrt{2}/4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow a = 5/8$
$r = 3\sqrt{2}/8$

$$\Rightarrow P = \frac{5}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{8}\,\text{sen}\left(x + \frac{5\pi}{4}\right)$$

Quizá el 5/2 en el apunte no se justificó de la mejor manera, pero a pesar de que al resolver el sistema se obtenía que alfa debía valer nπ/4 (con n impar), al sustituir en la condición de periodicidad no se satisfizo más que para n=5, por lo cual al alfa se le dio el valor de 5π/4.

De igual manera el resultado anterior se graficó, obteniendo una gráfica no tan alejada de los puntos x_1 y x_2.