Teorema: Supongamos que $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (nodos) son números distintos en el intervalo $[a,b]$ y $f \in C^{n+1}[a,b]$. Entonces, para cada $x \in [a,b]$, existe un número $\underline{\xi(x)}$ (desconocido) entre $\min\{x_0, \ldots, x_n\}$ y $\max\{x_0, \ldots, x_n\}$ y por lo tanto en (a,b), con:

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (x - x_k).$$

donde $P(x)$ es un polinomio de interpolación.

Consideremos el siguiente conjunto de nodos

$$\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \quad \text{en } [a,b].$$

el polinomio de interpolación de Lagrange.

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \underbrace{l_i(x)}_{\text{polinomios fundamentales de Lagrange}}$$

donde: $$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Por el resultado anterior:

$$f(x) = P_n(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)}.$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b P_n(x)\,dx + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \left(f^{(n+1)}(\xi(x)) \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right) dx.$$

donde $\xi(x) \in [a,b]$ para cada x.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b \left(\sum_{i=0}^{n} f_i \, l_i(x) \right) dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left(f_i \int_a^b l_i(x)\,dx \right)$$

consideremos $a_i = \int_a^b l_i(x)\,dx$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} f_i \, a_i}$$

con un error dado por:

$$\boxed{E(f) = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \left(f^{(n+1)}(\xi(x)) \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right) dx.}$$

Regla del trapecio.

Consideremos los nodos $x_0 = a$ y $x_1 = b$ $\Rightarrow$ $h = b - a$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} P_1(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1) f''(\xi(x))\,dx.$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left(l_0(x) f(x_0) + l_1(x) f(x_1) \right) dx + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1) f''(\xi(x))\,dx.$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1} \cdot f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \cdot f(x_1) \right) dx + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1) f''(\xi(x))\,dx$$

$$= \left[\frac{(x-x_1)^2 f(x_0)}{2(x_0-x_1)} + \frac{(x-x_0)^2 f(x_1)}{2(x_1-x_0)} \right]_{x_0}^{x_1} + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1) f''(\xi(x))\,dx.$$

Analizaremos la segunda integral.

$$\int_{x_0}^{x_1} \underbrace{(x-x_0)(x-x_1)}_{g(x)} \underbrace{f''(\xi(x))}_{w(x)}\,dx.$$

Teorema del valor medio para integrales.

Supongamos que $f \in C[a,b]$ y la integral de Riemann de g existe en $[a,b]$ y $g(x)$ no cambia de signo en $[a,b]$. Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que:

$$\int_a^b f(x) g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Consideremos $g(x) = (x-x_0)(x-x_1)$ en $[x_0,x_1]$ la cual tiene signo negativo en $[x_0,x_1]$, i.e. $g(x)$ no cambia de signo en $[x_0,x_1]$.

entonces existe $\xi \in (x_0,x_1)$ tal que:

$$\int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1) f''(\xi(x))\,dx = f''(\xi)\int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1)\,dx.$$

$$\int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1) f''(\xi(x))\, dx = f''(\xi)\int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1)\, dx.$$

$$= f''(\xi)\int_{x_0}^{x_1}\left(x^2-(x_0+x_1)x + x_0x_1\right) dx$$

$$= f''(\xi)\left[\frac{x^3}{3} - \frac{(x_0+x_1)x^2}{2} + x_0x_1x\right]_{x_0}^{x_1}$$

$$= f''(\xi)\left(\frac{x_1^3}{3} - \frac{(x_0+x_1)x_1^2}{2} + x_0x_1^2 - \frac{x_0^3}{3} + \frac{(x_0+x_1)x_0^2}{2} - x_1x_0^2\right)$$

$$= f''(\xi)\left(\left(\frac{x_1^3}{3} - \frac{x_1^3}{2}\right) - \frac{x_0x_1^2}{2} + x_0x_1^2 - \frac{x_0^3}{3} + \frac{x_0^3}{2} + \frac{x_1x_0^2}{2} - x_1x_0^2\right)$$

$$= f''(\xi)\left(-\frac{x_1^3}{6} + \frac{x_0x_1^2}{2} + \frac{x_0^3}{6} - \frac{x_1x_0^2}{2}\right)$$

$$= -\frac{h^3}{6} f''(\xi)$$

$x_0 = a$ y $x_1 = b$

$\Rightarrow h = b-a$
$= x_1 - x_0.$

Así.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \left[\frac{(x-x_1)^2 f(x_0)}{2(x_0-x_1)} + \frac{(x-x_0)^2 f(x_1)}{2(x_1-x_0)}\right]_{x_0}^{x_1} + \frac{1}{2}\left(-\frac{h^3}{6} f''(\xi)\right).$$

$$= \frac{(x_1-x_0)^2 f(x_1)}{2(x_1-x_0)} - \frac{(x_0-x_1)^2 f(x_0)}{2(x_0-x_1)} - \frac{h^3}{12} f''(\xi).$$

$$= \frac{(x_1-x_0) f(x_1)}{2} - \frac{(x_0-x_1) f(x_0)}{2} - \frac{h^3}{12} f''(\xi).$$

$$= \frac{(x_1-x_0)}{2}\left(f(x_1)+f(x_0)\right) - \frac{h^3}{12} f''(\xi).$$

$$= \left(\frac{b-a}{2}\right)\left(f(b)+f(a)\right) - \frac{h^3}{12} f''(\xi).$$

$$= \frac{h}{2}\left(f(x_1)+f(x_0)\right) \underbrace{- \frac{h^3}{12} f''(\xi)}_{\text{expresión para el error de truncamiento.}}$$

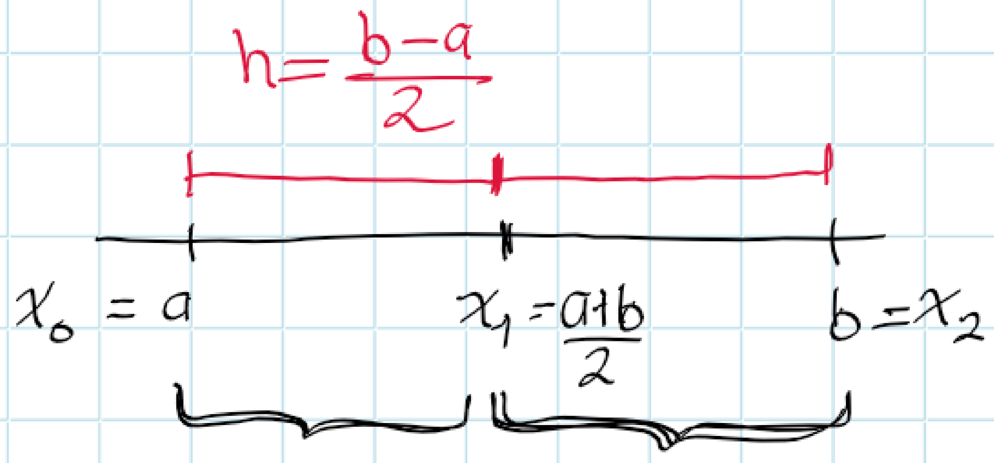
$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \frac{h}{2}\left(f(x_1)+f(x_0)\right) - \frac{h^3}{12} f''(\xi).}$$

Observación. Para aquellas funciones cuya segunda derivada sea nula, la regla del trapecio se hace exacta.

ej. Cualquier polinomio de grado 1 o menor.

Regla de Simpson.

Consideremos 3 nodos : $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$.



$x_1 - x_0 = h$

$\Rightarrow x_0 - x_1 = -h.$

tercer derivada

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b P_2(x)\,dx + \frac{1}{6}\int_a^b (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\, f'''(\xi(x))\,dx.$$

Polinomio de Taylor al rededor de x_1.

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x-x_1) + \frac{f''(x_1)}{2}(x-x_1)^2 + \frac{f'''(x_1)}{6}(x-x_1)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{24}(x-x_1)^4.$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \left[f(x_1)(x-x_1) + \frac{f'(x_1)}{2}(x-x_1)^2 + \frac{f''(x_1)}{6}(x-x_1)^3 + \frac{f'''(x_1)}{24}(x-x_1)^4 \right]_{x_0}^{x_2}$$

$$+ \frac{1}{24}\int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))\,(x-x_1)^4\,dx.$$

Analicaremos la integral: $\displaystyle\int_{x_0}^{x_2} \underbrace{f^{(4)}(\xi(x))}_{w(x)}\,\underbrace{(x-x_1)^4}_{g(x)}\,dx.$

notemos que $(x-x_1)^4$ no cambia de signo en $[x_0, x_2]$, el teorema del valor medio para integrales afirma lo siguiente.

$$\int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))\,(x-x_1)^4\,dx = f^{(4)}(\xi)\int_{x_0}^{x_2}(x-x_1)^4\,dx = \frac{f^{(4)}(\xi)}{5}(x-x_1)^5\Big|_{x_0}^{x_2}$$

donde $\xi \in (x_0, x_2)$

$$\Rightarrow \frac{1}{24}\int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))\,(x-x_1)^4\,dx = \frac{f^{(4)}(\xi)}{120}\left[(x_2-x_1)^5 - (x_0-x_1)^5\right]$$

$$= \frac{f^{(4)}(\xi)}{120}\left(h^5 - (-h^5)\right)$$

$$= \frac{f^{(4)}(\xi)}{120}\,2h^5$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{24}\int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))\,(x-x_1)^4\,dx = \frac{f^{(4)}(\xi)}{60}\,h^5}$$

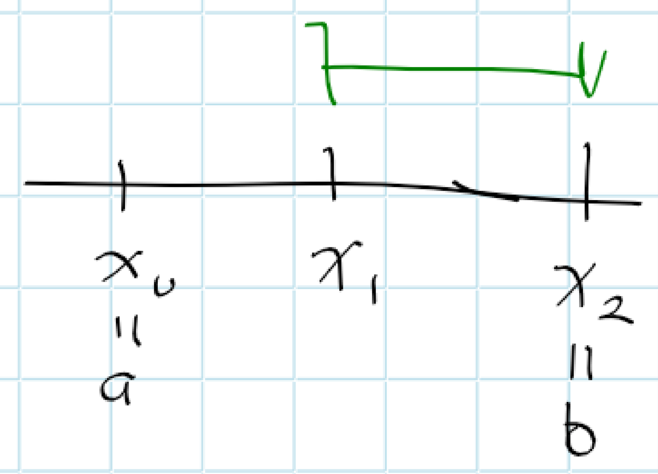
Desarrollamos la primer expresión.

$$\left[f(x_1)(x-x_1) + \frac{f'(x_1)}{2}(x-x_1)^2 + \frac{f''(x_1)}{6}(x-x_1)^3 + \frac{f'''(x_1)}{24}(x-x_1)^4 \right]_{x_0}^{x_2}$$

$h = x_2 - x_1$

$-h = x_0 - x_1$

$$\Rightarrow f(x_1)\,h + \frac{f'(x_1)}{2}h^2 + \frac{f''(x_1)}{6}h^3 + \frac{f'''(x_1)}{24}h^4 + f(x_1)\,h - \frac{f'(x_1)}{2}h^2 + \frac{f''(x_1)}{6}h^3 - \frac{f'''(x_1)}{24}h^4$$

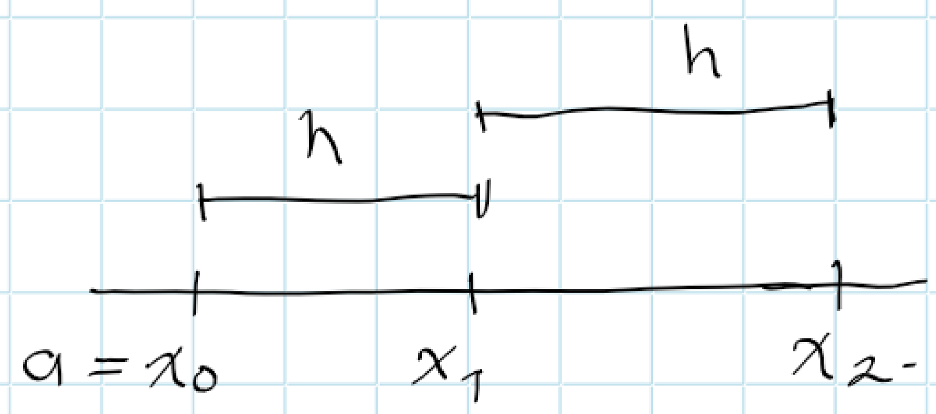


$$= 2hf(x_1) + \frac{f''(x_1)}{3}h^3$$

Por tanto.

Contiene a la segunda derivada.

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = 2h\,f(x_1) + \underbrace{\frac{f''(x_1)}{3}h^3} + \underline{\frac{f^{(4)}(\xi)}{60}h^5}$$



Recordemos la fórmula del punto medio de la segunda derivada.

$$\boxed{f''(x_0) = \frac{1}{h^2}\Big(f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h) \Big) - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi_1)}$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = 2h\,f(x_1) + \frac{h^3}{3}\left[\frac{1}{h^2}\Big(f(x_1-h) - 2f(x_1) + f(x_1+h) \Big) - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi_1) \right] + \frac{f^{(4)}(\xi)}{60}h^5$$

$$= 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3}\left[\frac{1}{h^2}\Big(f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2) \Big) - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi_1) \right] + \frac{f^{(4)}(\xi)\,h^5}{60}$$

$$= 2hf(x_1) + \frac{h}{3}f(x_0) - \frac{h}{3}2f(x_1) + \frac{h}{3}f(x_2) - \frac{h^5}{36}f^{(4)}(\xi_1) + \frac{f^{(4)}(\xi)\,h^5}{60}$$

$$= \frac{h}{3}f(x_0) + \frac{4}{3}\cdot hf(x_1) + \frac{h}{3}f(x_2) - \frac{h^5}{12}\underbrace{\left[\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{3} - \frac{f^{(4)}(\xi)}{5} \right]}$$

existe $\psi \in (x_0, x_2)$. tal que:

$$f^{(4)}(\psi) = \frac{f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi)}{2}$$

$\psi \in (x_0, x_2)$.

Teorema del valor medio. ← Bajo ciertas condiciones de continuidad.

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\Big[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) \Big] - \frac{h^5}{12}\Big[f^{(4)}(x)$$

$$= \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$