1 Aplicar el método de Euler con tamaño de paso $h=0.1$ para aproximar el valor $y(1)$ de la solución de la ecuación integral

$$y(t) = e^t + \int_0^t \cos(s+y(s))\,ds$$

transformándola previamente en un problema de valor inicial

$$\frac{d}{dt}y(t) = \frac{d}{dt}\left[e^t + \int_0^t \cos(s+y(s))\,ds\right]$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = e^t + \frac{d}{dt}\int_0^t \cos(s+y(s))\,ds$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = e^t + \cos(t+y(t))$$

$a=0 \quad b=1 \qquad h=0.1=\frac{1-0}{N} \Rightarrow N=\frac{1}{1/10}=10$

$y(0)=e^0=1$

Símbolo del sistema

```
Microsoft Windows [Versión 10.0.19042.985]
(c) Microsoft Corporation. Todos los derechos reservados.

C:\Users\PACO>cd C:\Users\PACO\Desktop\karen\MétodosNuméricos\Examen2

C:\Users\PACO\Desktop\karen\MétodosNuméricos\Examen2>python MetodoEuler.txt
Método de euler

Ingrese el intervalo

a= 0
b= 1
Ingrese n entero= 10

 Ingrese la función f(t,y)= exp(t)+cos(t+y)

 Ingrese el valor de la condición inicial y(0)= 1
y(ti+1)= 1.154030230586814
y(ti+1)= 1.2956968409004415
y(ti+1)= 1.4253400080287868
y(ti+1)= 1.5449329652832744
y(ti+1)= 1.6575685322263694
y(ti+1)= 1.7670730569469517
y(ti+1)= 1.877809227230505
y(ti+1)= 1.9946605631761474
y(ti+1)= 2.1231726290303183
y(ti+1)= 2.269833286252247

C:\Users\PACO\Desktop\karen\MétodosNuméricos\Examen2>
```

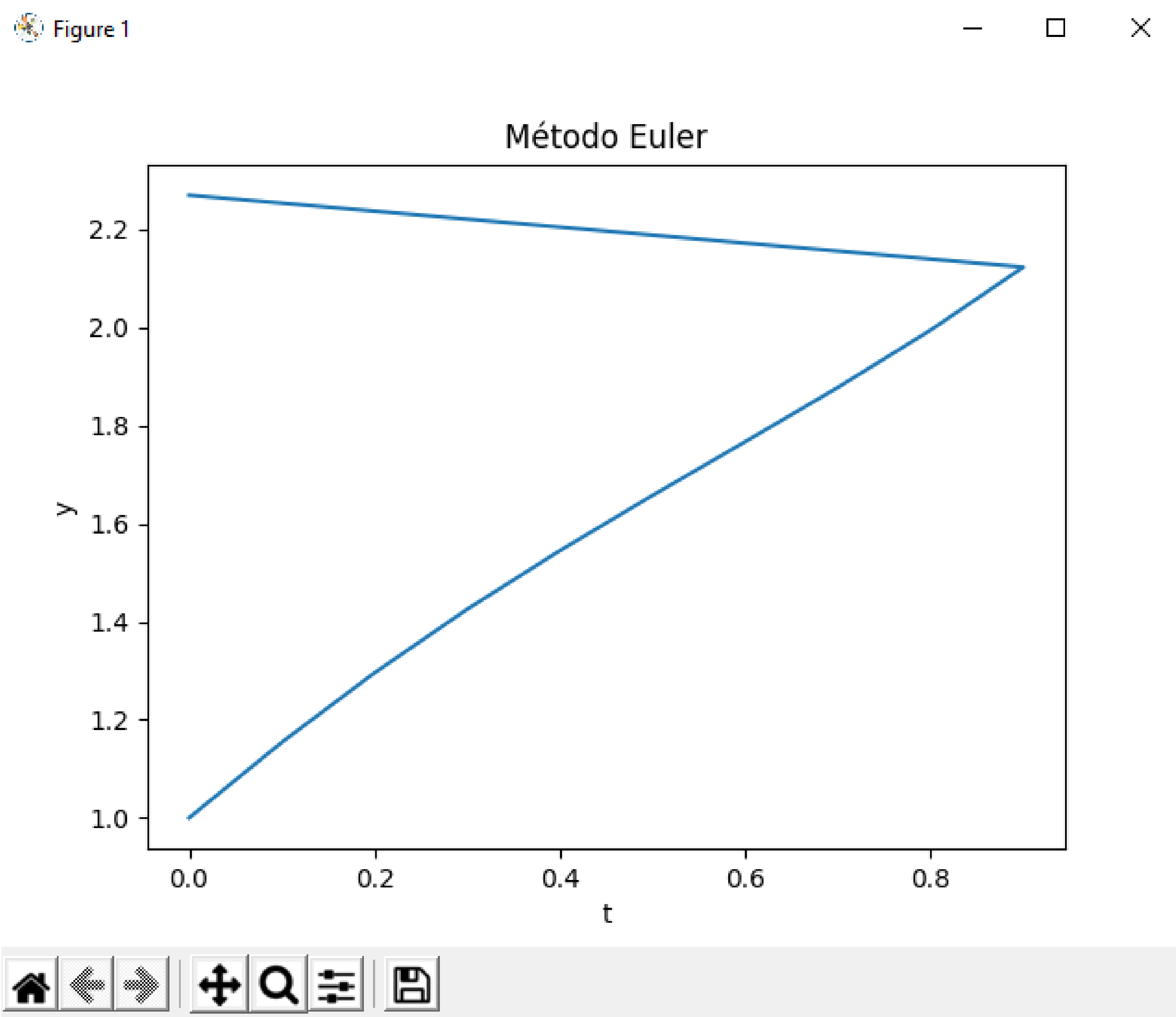


Figure 1
Método Euler
y
2.2
2.0
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
t

2 Adaptar el método de Euler para resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x' = x + ty + 1 \\ y' = t^2 x + ty + t^3 \end{cases}$$

en el intervalo $[0,1]$ con las condiciones iniciales $x(0)=1$ y $y(0)=1$ usando $h=0.2$

Partimos del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy}{dt} = g(t,y,x) \quad a \le t \le b \quad y(a) = \alpha$$

$$\frac{dx}{dt} = f(t,y,x) \quad a \le t \le b \quad x(a) = \beta$$

Dividimos el intervalo $[a,b]$ en N puntos (puntos malla)

$$h = \frac{b-a}{N} \text{ tamaño de paso.}$$

$\Rightarrow t_i = a + ih \quad$ para $i = 0, 1, 2, \dots, N$

Sup. que ambos problemas de valor inicial tienen solución única $y(t) \in C^2(a,b)$ y $x(t) \in C^2(a,b)$ usando el teorema de taylor

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + (t_{i+1} - t_i)y'(t_i) + \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2} y''(\xi_i)$$

para algún $\xi_i \in (t_i, t_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, N-1$

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + (t_{i+1} - t_i) x'(t_i) + \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2} x''(\eta_i)$$

para algún $\eta_i \in (t_i, t_{i+1})$ $i = 0, 1, \dots, N-1$

como $y(t_i)$ y $x(t_i)$ son soluciones de las ecuaciones diferenciales

$$y'(t_i) = g(t_i, y(t_i), x(t_i))$$
$$x'(t_i) = f(t_i, y(t_i), x(t_i))$$

$$\Rightarrow y(t_{i+1}) \approx y(t_i) + h\, g(t_i, y(t_i), x(t_i)), \quad y(a) = \alpha$$
$$x(t_{i+1}) \approx x(t_i) + h f(t_i, y(t_i), x(t_i)), \quad x(a) = \beta$$

Para el sistema de ecuaciones

$x' = x + ty + 1$

$y' = t^2 x + ty + t^3$

$\Rightarrow f(x,t,y) = x + ty + 1$

$g(y,t,x) = t^2 x + tx + t^3$

$h = 0.2 = \frac{1-0}{N} \Rightarrow N = \frac{1}{2/10} = \frac{10}{2} = 5$

$y(t_{i+1}) \approx y(t_i) + 0.2\, g(t_i, y(t_i), x(t_i))$

$x(t_{i+1}) \approx x(t_i) + 0.2\, f(t_i, y(t_i), x(t_i))$

$\Rightarrow y(t_{i+1}) \approx y(t_i) + 0.2(t_i^2 x(t_i) + t_i x(t_i) + t_i^3)$

$x(t_{i+1}) \approx x(t_i) + 0.2(x(t_i) + t_i y(t_i) + 1)$

$x(t_{i+1}) \approx 1.2 x(t_i) + 0.2 t_i y(t_i) + 0.2$

$\Rightarrow y(t_1) = y(t_0) + 0.2(t_0^2 x(t_0) + t_0 x(t_0) + t_0^3)$

$y(t_1) = 1$

$x(t_1) = 1.2 x(t_0) + 0.2 t_i y(t_i) + 0.2$

$x(t_1) = 1.2 + 0.2 = 1.4$

$\Rightarrow y(t_2) = y(t_1) + 0.2(t_1^2 x(t_1) + t_1 x(t_1) + t_1^3)$

$y(t_2) = 1 + 0.2(0.2^2(1.4) + 0.2 + (0.2)^3)$

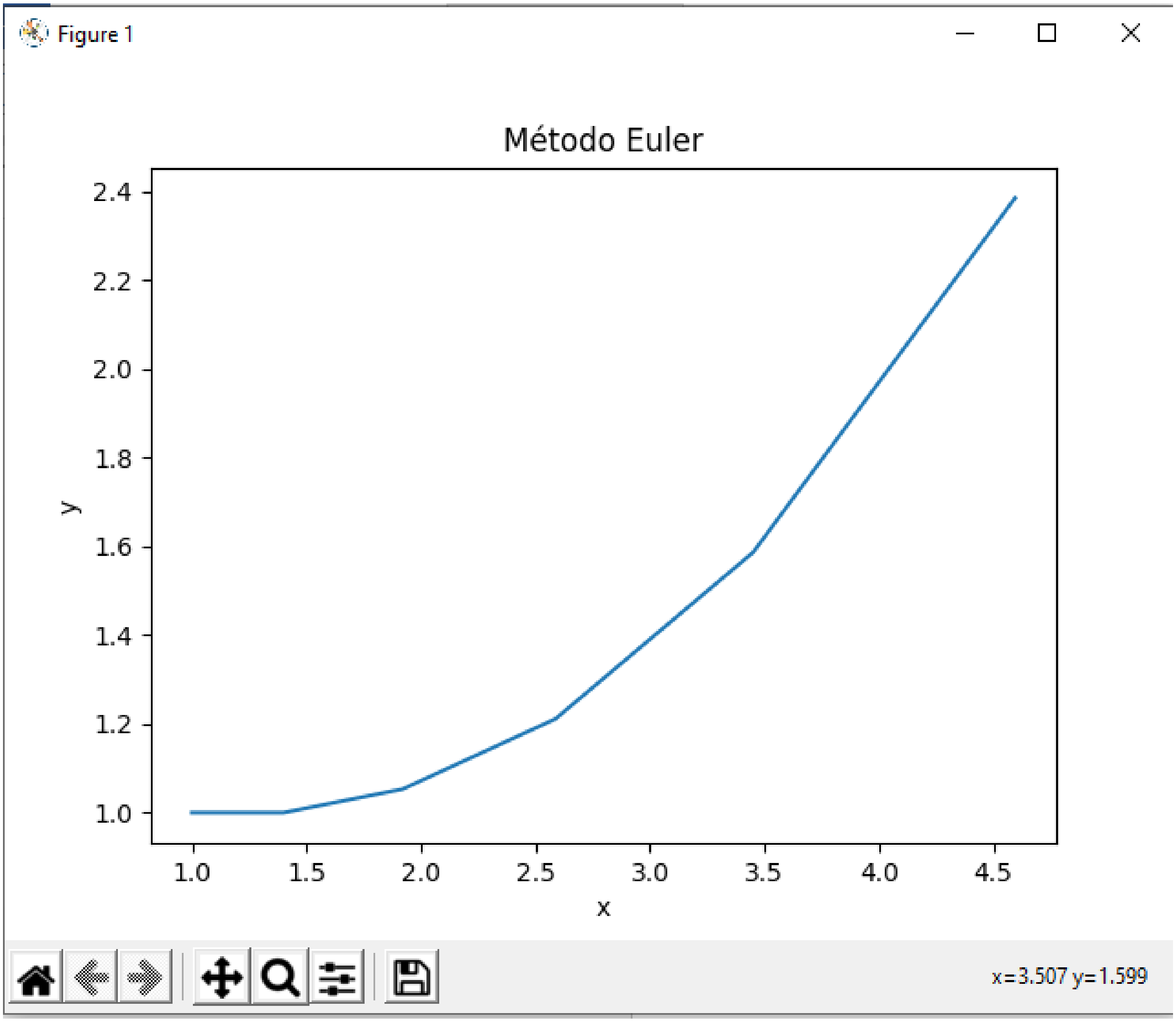
$y(t_2) = 1.0528$

$x(t_2) = 1.2 x(t_1) + 0.2 t_1 y(t_1) + 0.2$

$x(t_2) = 1.2(1.4) + (0.2)^2 + 0.2 = 1.92$

Símbolo del sistema

```
C:\Users\PACO\Desktop\karen\MétodosNuméricos\Examen2>python EulerSistema.txt
Método de euler para sistemas de ecuaciones diferenciales

Ingrese el intervalo

a= 0
b= 1
Ingrese n entero= 5

 Ingrese la función f(t,y,x)= x+t*y+1

 Ingrese la función g(t,x,y)= t**2*x+t*y+t**3

 Ingrese el valor de la condición inicial y(0)= 1

 Ingrese el valor de la condición inicial x(0)= 1
y(ti+1)= 1.0
x(ti+1)= 1.4
y(ti+1)= 1.0528
x(ti+1)= 1.92
y(ti+1)= 1.211264
x(ti+1)= 2.588224
y(ti+1)= 1.586167808
x(ti+1)= 3.45122048
y(ti+1)= 2.38411087872
x(ti+1)= 4.59525142528

C:\Users\PACO\Desktop\karen\MétodosNuméricos\Examen2>
```



$x(ts) = 4.6495250883$

4 Usando el programa del ejercicio 3 resolver el siguiente PVI

$y'' + xy' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

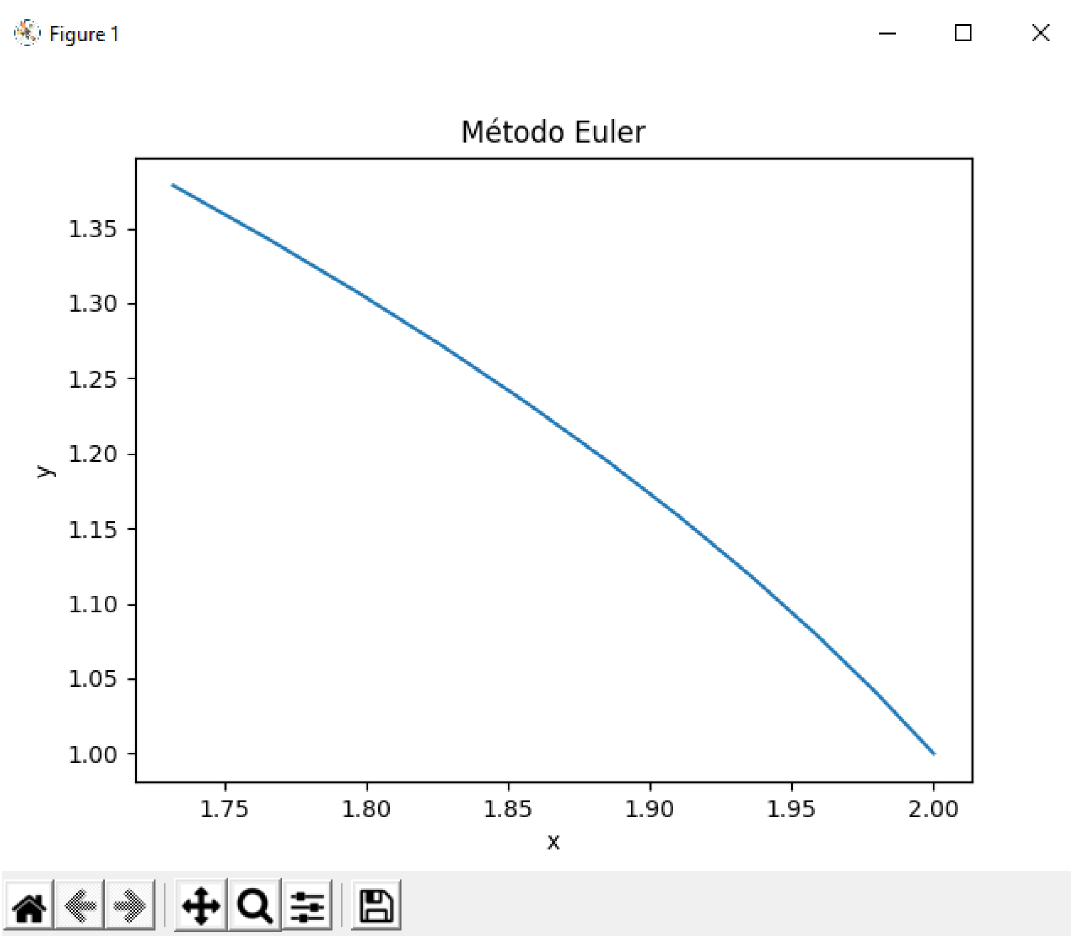
$y'' = -xy' - y = f(x, y, y')$ con $y(x_0) = y_0$ $y'(x_0) = u_0$

$\Rightarrow y' = u \Rightarrow y'' = u'$

$u' = -xu - y = f(x, y, u)$

con $y(0) = 1$ $u(0) = 2$, $y(0.2) = 1.3783$ $u(0.2) = 1.7319$

```
Símbolo del sistema
C:\Users\PACO\Desktop\karen\MétodosNuméricos\Examen2>python EulerSistema.txt
Método de euler para sistemas de ecuaciones diferenciales

Ingrese el intervalo

a= 0
b= 0.2
Ingrese n entero= 10

 Ingrese la función f(t,y,x)= -t*x-y

 Ingrese la función g(t,x,y)= x

 Ingrese el valor de la condición inicial y(0)= 1

 Ingrese el valor de la condición inicial x(0)= 2
y(ti+1)= 1.04
x(ti+1)= 1.98
y(ti+1)= 1.0796000000000001
x(ti+1)= 1.958408
y(ti+1)= 1.1187681600000001
x(ti+1)= 1.9352492736
y(ti+1)= 1.1574731454720002
x(ti+1)= 1.91055161127168
y(ti+1)= 1.1956841776974338
x(ti+1)= 1.8843452657842055
y(ti+1)= 1.233371083013118
x(ti+1)= 1.8566628916986885
y(ti+1)= 1.2705043408470917
x(ti+1)= 1.8275394790983492
y(ti+1)= 1.3070551304290587
x(ti+1)= 1.797012281739932
y(ti+1)= 1.3429953760638573
x(ti+1)= 1.7651207398297832
y(ti+1)= 1.378297790860453
x(ti+1)= 1.7319063976451188
```



5 Desarrollar un programa en base al método de RK4 que resuelva el sistema:

$$x' = f(t, x, y)$$
$$y' = g(t, x, y)$$

con $x(t_0) = x_0$ y $y(t_0) = y_0$

Para aproximar una solución $y(t)$ del problema con valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = f(t, y, x) \quad a \leq t \leq b \quad x(a) = x_0$$

$$\frac{dy}{dt} = g(t, y, x) \quad a \leq t \leq b \quad y(a) = y_0$$

Usando la fórmula de RK4

$$w_0 = x_0$$
$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$
$$v_0 = y_0$$
$$v_{i+1} = v_i + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

$$K_1 = h f(w_i, v_i, t_i)$$
$$K_2 = h f\left(w_i + \frac{K_1}{2}, v_i + \frac{l_1}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right)$$
$$K_3 = h f\left(w_i + \frac{K_2}{2}, v_i + \frac{l_2}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right)$$
$$K_4 = h f(w_i + K_3, v_i + l_3, t_i + h)$$
$$l_1 = h g(w_i, v_i, t_i)$$
$$l_2 = h g\left(w_i + \frac{K_1}{2}, v_i + \frac{l_1}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right)$$
$$l_3 = h g\left(w_i + \frac{K_2}{2}, v_i + \frac{l_2}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right)$$
$$l_4 = h g(w_i + K_3, v_i + l_3, t + h)$$

Usar el problema para resolver el PVI

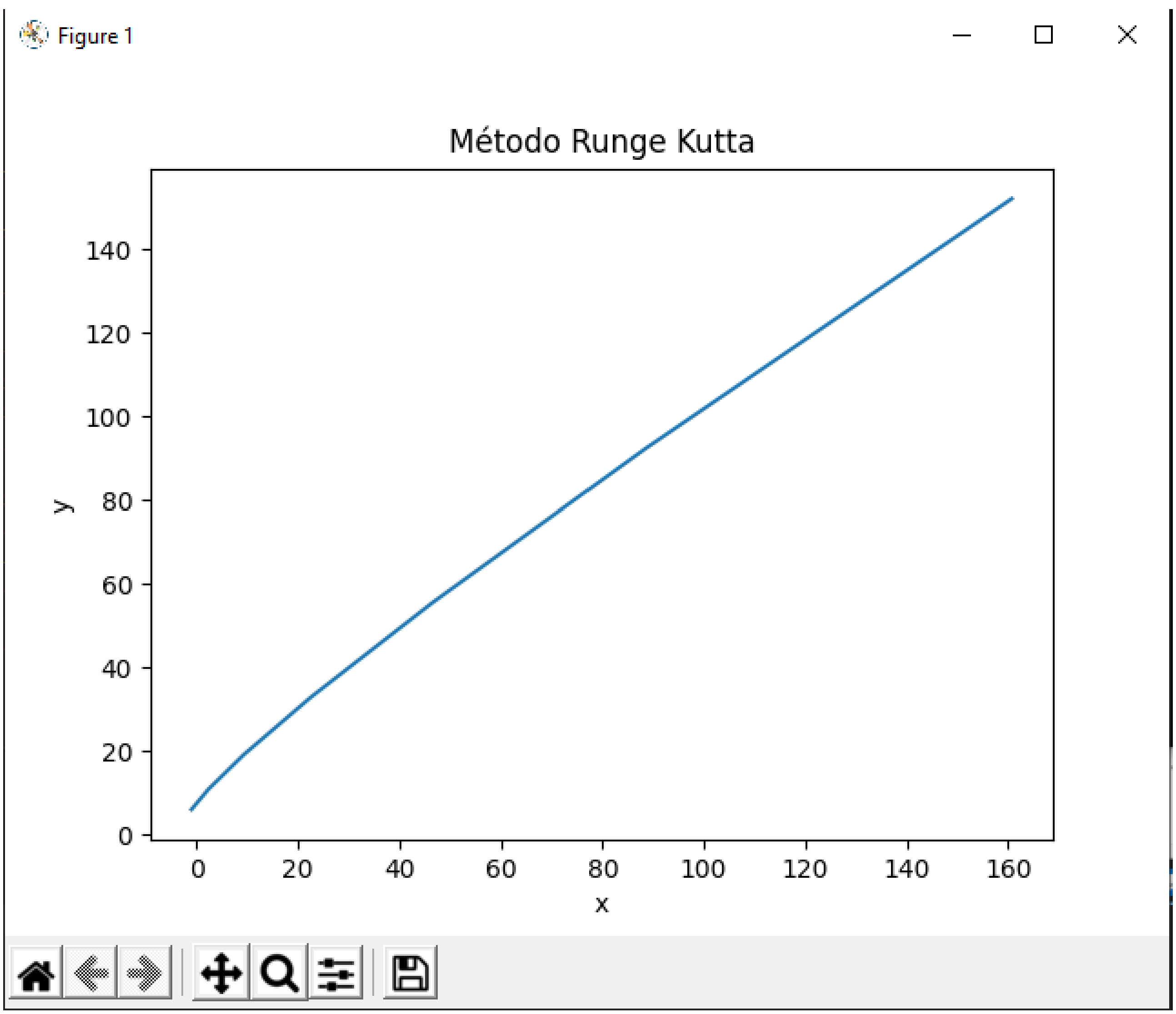
$$x' = 2x + 4y$$
$$y' = -x + 6y$$

con $x(0) = -1$, $y(0) = 6$ y aproximar $x(0.6)$ y $y(0.6)$ con tamaño de paso de $h = 0.2$ y $h = 0.1$. Comparar resultados

$$h = \frac{0.6 - 0}{N} = 0.2 \Rightarrow N = \frac{0.6}{0.2} = 3$$

Símbolo del sistema

```
C:\Users\PACO\Desktop\karen\MétodosNuméricos\Examen2>python RK4Sistema.txt
Método de RK4 para sistemas de ecuaciones diferenciales

Ingrese el intervalo

a= 0
b= 0.6
Ingrese n entero= 6

 Ingrese la función f(t,y,x)= 2*x+4*y

 Ingrese la función g(t,x,y)= -x+6*y

 Ingrese el valor de la condición inicial y(0)= 6

 Ingrese el valor de la condición inicial x(0)= -1
y(ti+1)= 10.888266666666667
x(ti+1)= 2.3839999999999995
y(ti+1)= 19.13317063111111
x(ti+1)= 9.33785287111111
y(ti+1)= 32.8538617389511
x(ti+1)= 22.554133061935403
y(ti+1)= 55.44196256272477
x(ti+1)= 46.510275848938
y(ti+1)= 92.30058893905394
x(ti+1)= 88.57285946402641
y(ti+1)= 152.00248653827714
x(ti+1)= 160.7563295543218
```



Símbolo del sistema

```
C:\Users\PACO\Desktop\karen\MétodosNuméricos\Examen2>python RK4Sistema.txt
Método de RK4 para sistemas de ecuaciones diferenciales

Ingrese el intervalo

a= 0
b= 0.6
Ingrese n entero= 3

 Ingrese la función f(t,y,x)= 2*x+4*y

 Ingrese la función g(t,x,y)= -x+6*y

 Ingrese el valor de la condición inicial y(0)= 6

 Ingrese el valor de la condición inicial x(0)= -1
y(ti+1)= 19.068266666666663
x(ti+1)= 9.24533333333333
y(ti+1)= 55.12026111999998
x(ti+1)= 46.03271935999997
y(ti+1)= 150.81918990335996
x(ti+1)= 158.94295868620793
```