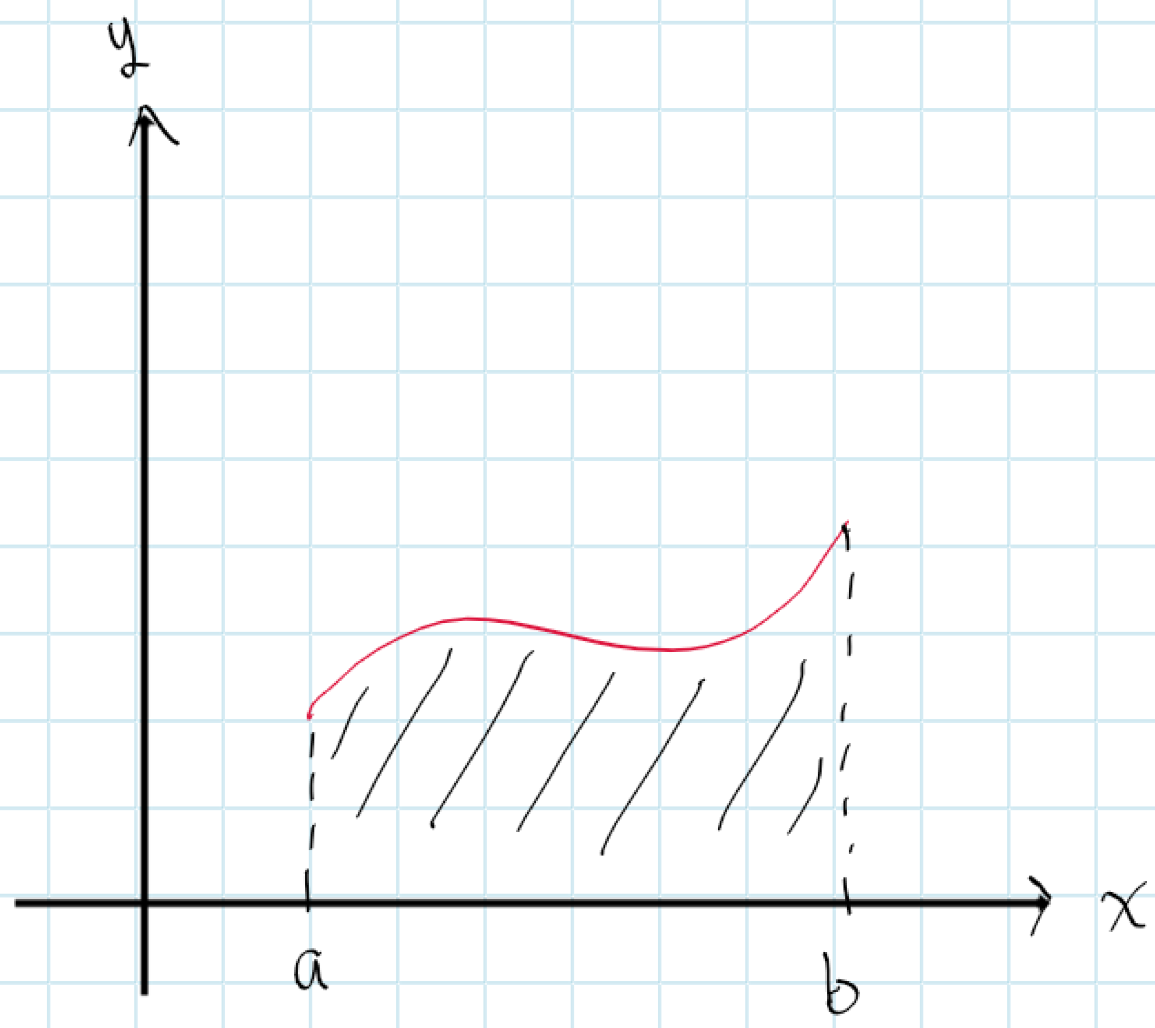
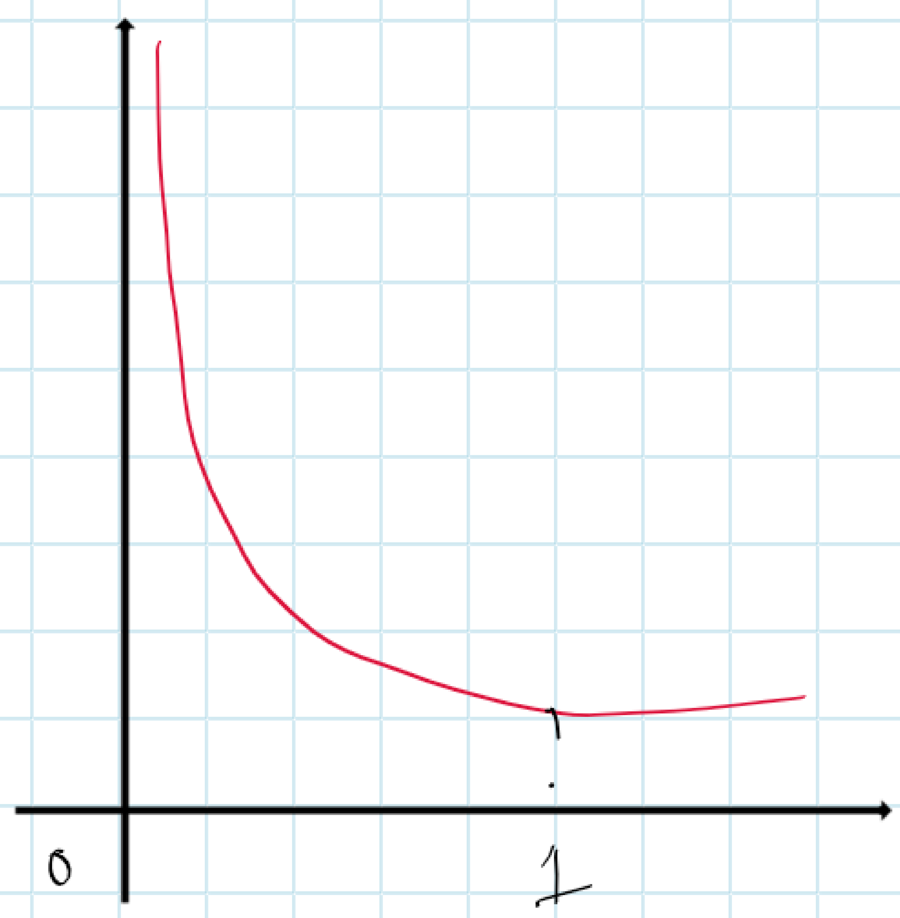

y
x
a
b


0
1

Si f es una función que se puede escribir como:

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x-a)^p}$$

donde $0<p<1$ y g es continua en $[a,b]$, entonces la integral impropia

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

existe.

* Aproximaremos a la integral usando la regla compuesta de Simpson, suponiendo que $g \in C^5[a,b]$.

Calculamos el cuarto polinomio de Taylor al rededor de a.

$$P_4(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + \frac{g''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{g'''(a)}{6}(x-a)^3 + \frac{g^{(4)}(a)}{24}(x-a)^4$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - P_4(x) + P_4(x)]\,dx$$

$$= \int_a^b \left[\frac{g(x)}{(x-a)^p} - P_4(x) + P_4(x)\right] dx$$

$$= \int_a^b \left(\frac{g(x) - P_4(x) + P_4(x)}{(x-a)^p}\right) dx$$

$$= \underbrace{\int_a^b \frac{g(x)-P_4(x)}{(x-a)^p}\,dx}_{} + \int_a^b \frac{P_4(x)}{(x-a)^p}\,dx$$

Notemos que:

$$\int_a^b \frac{P_4(x)}{(x-a)^p}\,dx = \int_a^b \left(\frac{g(a) + g'(a)(x-a) + \frac{1}{2}g''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6}g'''(a)(x-a)^3 + \frac{1}{24}g^{(4)}(a)(x-a)^4}{(x-a)^p}\right) dx$$

$$= \sum_{k=0}^{4} \int_a^b \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k-p}\,dx$$

$$= \sum_{k=0}^{4} \frac{g^{(k)}(a)}{k!} \int_a^b (x-a)^{k-p}\,dx$$

$$= \sum_{k=0}^{4} \frac{g^{(k)}(a)}{k!} \left[\frac{(x-a)^{k+1-p}}{k+1-p}\right]_a^b$$

$$= \sum_{k=0}^{4} \frac{g^{(k)}(a)}{k!} \cdot \frac{(b-a)^{k+1-p}}{k+1-p}$$

Para la integral $\int_a^b \frac{g(x)-P_4(x)}{(x-a)^p}\,dx.$ ←

calcularemos una aproximación usando la regla compuesta de Simpson definimos la siguiente función.

$$H(x) = \begin{cases} \frac{g(x)-P_4(x)}{(x-a)^p}, & \text{si} \quad a < x \leq b \\ 0, & \text{si} \quad x = a \end{cases}$$

En esta nueva función aplicamos la regla compuesta de Simpson.

Ejemplo. Usar la regla compuesta de Simpson con $h = 0.25$ para aproximar

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}\,dx. \qquad g(x) = e^x.$$

- Polinomio de Taylor de grado 4 al rededor de $x=0$. (para $g(x)$).

$$P_4(x) = g(0) + g'(0)\,x + \frac{g''(0)\,x^2}{2} + \frac{g'''(0)\,x^3}{6} + \frac{g^{(4)}(0)\,x^4}{24}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}.}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{e^x - P_4(x)}{\sqrt{x}}\,dx + \int_0^1 \frac{P_4(x)}{\sqrt{x}}\,dx.} \longrightarrow \text{Calcularemos las dos integrales.}$$

Calculamos la segunda integral.

$$\int_0^1 \frac{P_4(x)}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}}{x^{1/2}}\,dx.$$

$$= \int_0^1 \left(x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{3/2} + \frac{1}{6}x^{5/2} + \frac{1}{24}x^{7/2} \right) dx.$$

$$= \lim_{M\to 0^+} \left[2x^{1/2} + \frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{1}{5}x^{5/2} + \frac{1}{21}x^{7/2} + \frac{1}{108}x^{9/2} \right]_M^1$$

$$= 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{21} + \frac{1}{108} \approx 2.923544974.$$

Ahora aproximamos $\int_0^1 \frac{e^x - P_4(x)}{\sqrt{x}}\,dx.$

Definimos:

$$H(x) = \begin{cases} \frac{e^x - P_4(x)}{\sqrt{x}}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Aproximamos $\int_0^1 H(x)\,dx$, para esto usamos la regla compuesta de Simpson.

Teorema: Si $f \in C^4[a,b]$, n es par, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_j = a + jh$ para cada $j = 0, 1, \dots, n$. Existe $\mu \in (a,b)$ tal que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(b) \right] - \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\mu).$$

$h = 0.25 \Rightarrow$ $x_j = 0 + jh$

$n = 4$

$x_0 = 0$
$x_1 = 0.25$
$x_2 = 0.5$
$x_3 = 0.75$
$x_4 = 1$

$$H(x) = \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24}}{\sqrt{x}}$$

$$\int_0^1 H(x)\,dx \approx \frac{0.25}{3}\left[H(0) + 2\sum_{j=1}^{1} H(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{2} H(x_{2j-1}) + H(1) \right]$$

$$= \frac{0.25}{3}\left[0 + 2H(x_2) + 4H(x_1) + 4H(x_3) + H(1) \right].$$

$$= \frac{0.25}{3}\left[0 + 2H(0.5) + 4H(0.25) + 4H(0.75) + H(1) \right]$$

$$= \frac{0.25}{3}\left[2(0.00040013) + 4(0.00001697) + 4(0.0026026059 4) + 0.00994849512 \right]$$

$$\approx 0.00176911657$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}\,dx \approx 0.00176911657 + 2.923544974.$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}\,dx \approx 2.925314091$$

Para una singularidad en el extremo derecho.

Se puede realizar la sig. sustitución.

$$\underline{z = -x}, \qquad dz = -dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-b}^{-a} f(-z)\,dz}.$$

⊛ Singularidad infinita:

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx.$$

para $p>1$.

Si hacemos: $t = x^{-1} \Rightarrow dt = -x^{-2}\,dx$

$$\Rightarrow dx = -x^2\,dt = -t^{-2}\,dt.$$

Así, $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \int_{\frac{1}{a}}^{0} -\frac{t^p}{t^2}\,dt = \int_0^{\frac{1}{a}} \frac{1}{t^{2-p}}\,dt.$

Notemos que debe pasar $0 < 2-p < 1$.

singularidad en el extremo izquierdo.