2.8 Bài tập tại lớp

1. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a. $\frac{n(n+1)}{2} \in O(n^3)$

b. $\frac{n(n+1)}{2} \in O(n^2)$

c. $\frac{n(n+1)}{2} \in \Theta(n^3)$

d. $\frac{n(n+1)}{2} \in \Omega(n)$

2.8 Bài tập tại lớp

1. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a. $\frac{n(n+1)}{2} \in O(n^3)$ ✓

b. $\frac{n(n+1)}{2} \in O(n^2)$ ✓

c. $\frac{n(n+1)}{2} \in \Theta(n^3)$ ✗

d. $\frac{n(n+1)}{2} \in \Omega(n)$ ✓

$$\frac{n(n+1)}{2} \approx \frac{1}{2}n^2$$

2.8 Bài tập tại lớp

2. Xác định lớp hiệu năng $\Theta\big(g(n)\big)$ của các hàm sau:

a. $(n^2+1)^{10}$

b. $\sqrt{10n^2+7n+3}$

c. $2n\lg(n+1)^2+(n+1)^2\lg\frac{n}{2}$ ($\lg n = \log_2 n$)

d. $2^{n+1}+3^{n-1}$

(Lưu ý, $g(n)$ phải đơn giản nhất có thể)

2.8 Bài tập tại lớp

2. Xác định lớp hiệu năng $\Theta(g(n))$ của các hàm sau:

$$(n^2+1)^{10}$$

Tính xấp xỉ: $(n^2+1)^{10} \approx (n^2)^{10} = n^{20} \in \Theta(n^{20})$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1)^{10}}{n^{20}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{10} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{10} = 1.$$

Vậy $(n^2+1)^{10} \in \Theta(n^{20})$.

2.8 Bài tập tại lớp

2. Xác định lớp hiệu năng $\Theta\big(g(n)\big)$ của các hàm sau:

$$\sqrt{10n^2 + 7n + 3}$$

Tính xấp xỉ: $\sqrt{10n^2 + 7n + 3} \approx \sqrt{10n^2} = \sqrt{10}n \in \Theta(n)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{10n^2 + 7n + 3}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{10 + \frac{7}{n} + \frac{3}{n^2}} = \sqrt{10}.$$

Vậy $\sqrt{10n^2 + 7n + 3} \in \Theta(n)$.

2.8 Bài tập tại lớp

2. Xác định lớp hiệu năng $\Theta(g(n))$ của các hàm sau:

$$2n\lg(n+1)^2 + (n+1)^2\lg\frac{n}{2}$$

Sử dụng tính chất:

$$2n\lg(n+1)^2 + (n+1)^2\lg\frac{n}{2} = 2n2\lg(n+1) + (n+1)^2(\lg n - 1)$$
$$\in \Theta(n\lg n) + \Theta(n^2\lg n) = \Theta(n^2\lg n).$$

Vậy $2n\lg(n+1)^2 + (n+1)^2\lg\frac{n}{2} \in \Theta(n^2\lg n)$.

2.8 Bài tập tại lớp

2. Xác định lớp hiệu năng $\Theta(g(n))$ của các hàm sau:

$$2^{n+1} + 3^{n-1}$$

Sử dụng tính chất:

$$2^{n+1} + 3^{n-1} = 2^n 2 + 3^n \frac{1}{3} \in \Theta(2^n) + \Theta(3^n) = \Theta(3^n).$$

Vậy $2^{n+1} + 3^{n-1} \in \Theta(3^n)$.

2.8 Bài tập tại lớp

3. Sắp xếp cấp độ tăng từ nhỏ đến lớn:

$(n-2)!$, $5\lg(n+100)^{10}$, 2^{2n}, $0.001n^4+3n^3+1$, $\ln^2 n$, $\sqrt[3]{n}$, 3^n.

2.8 Bài tập tại lớp

3. Sắp xếp cấp độ tăng từ nhỏ đến lớn:

$(n-2)!,\quad 5\lg(n+100)^{10},\quad 2^{2n},\quad 0.001n^4+3n^3+1,\quad \ln^2 n,$
$\sqrt[3]{n},\quad 3^n.$

Ta có:

$(n-2)! \in \Theta(\,(n-2)!),\quad 5\lg(n+100)^{10} = 50\lg(n+100) \in \Theta(\log n),$
$2^{2n} = (2^2)^n \in \Theta(4^n),\quad 0.001n^4+3n^3+1 \in \Theta(n^4),\quad \ln^2 n \in \Theta(\log^2 n),$
$\sqrt[3]{n} \in \Theta\left(n^{\frac{1}{3}}\right),\quad 3^n \in \Theta(3^n).$

Vậy thứ tự là:

$5\lg(n+100)^{10},\quad \ln^2 n,\quad \sqrt[3]{n}, 0.001n^4+3n^3+1,\quad 3^n,\quad 2^{2n},$
$(n-2)!.$

3.2 Bài tập tại lớp

Tính các tổng sau:

a. $\sum_{i=3}^{n+1} i$

b. $\sum_{i=0}^{n-1} i(i+1)$

c. $\sum_{j=1}^{n} 3^{j+1}$

d. $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} ij$

e. $\sum_{i=1}^{n} 1/i(i+1)$

3.2 Bài tập tại lớp

Tính các tổng sau:

a. $\sum_{i=3}^{n+1} i$

b. $\sum_{i=0}^{n-1} i(i+1)$

c. $\sum_{j=1}^{n} 3^{j+1}$

d. $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} ij$

e. $\sum_{i=1}^{n} 1/i(i+1)$

a.

$$\sum_{i=3}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{n+1} i - \sum_{i=0}^{2} i = \frac{(n+2)(n+1)}{2} - 3$$
$$= \frac{n^2+3n-4}{2}.$$

b.

$$\sum_{i=0}^{n-1} i(i+1) = \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + i = \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + \sum_{i=0}^{n-1} i$$
$$= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2}.$$

3.2 Bài tập tại lớp

Tính các tổng sau:

a. $\sum_{i=3}^{n+1} i$

b. $\sum_{i=0}^{n-1} i(i+1)$

c. $\sum_{j=1}^{n} 3^{j+1}$

d. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij$

e. $\sum_{i=1}^{n} 1/i(i+1)$

c.

$$\sum_{j=1}^{n} 3^{j+1} = 3\sum_{j=1}^{n} 3^{j} = 3\left[\sum_{j=0}^{n} 3^{j} - 1\right] = 3\left[\frac{3^{n+1}-1}{3-1} - 1\right] = \frac{3^{n+2}-9}{2}.$$

d.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij = \sum_{j=1}^{n} i \sum_{j=1}^{n} j = \sum_{j=1}^{n} i\,\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}\sum_{j=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

3.2 Bài tập tại lớp

Tính các tổng sau:

a. $\sum_{i=3}^{n+1} i$

b. $\sum_{i=0}^{n-1} i(i+1)$

c. $\sum_{j=1}^{n} 3^{j+1}$

d. $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} ij$

e. $\sum_{i=1}^{n} 1/i(i+1)$

$e.$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i+1)}$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{n}{n+1}.$$