МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики и информатики

Кафедра дискретной математики и алгоритмов

Применение регулярных выражений для распознавания подстрок в тексте

Курсовой проект

Казакова Александра Валерьевича
студента 3 курса,
специальности "Информатика"

Научный руководитель:

Лукьянов Иван Денисович

Ассистент кафедры

ДМА

Оглавление

Введение

Регулярные выражения – мощное, гибкое и эффективное средство обработки текстов. Универсальные шаблоны регулярных выражений сами по себе напоминают миниатюрный язык программирования, предназначенный для описания и разбора текста. При дополнительной поддержке со стороны конкретной утилиты или языка программирования регулярные выражения способны вставлять, удалять, выделять и выполнять самые невероятные операции с текстовыми данными любого вида. Они бывают очень простыми, вроде команды поиска в текстовом редакторе, или очень сложными, как специализированные языки обработки текстов.

Регулярные выражения тесно связаны с теорией автоматов и формальных языков, поэтому они часто распознаются с использованием инструментов данных разделов математики.

Поэтому для начала разберемся с теорией автоматов.

Конечные автоматы и регулярные языки

Языком будем называть множество слов над некоторым алфавитом.

Определение

Детерминированным конечным автоматом будем называть пятерку $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, где:

- Q – конечное множество состояний
- Σ – конечное множество, называемое алфавитом
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ – функция переходов
- $q_0 \in Q$ – начальное состояние
- $F \subseteq Q$ – множество конечных состояний

Определение

Автомат $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ распознает (допускает) строку $w = \overline{w_1 \dots w_n}$, если:

- $w_i \in \Sigma, \forall\, i = \overline{1, n}$
- существует последовательность $q_0 = r_0, r_1, \dots r_n$ такая что:
  - $r_n \in F$
  - $r_{i+1} = \delta(r_i, w_i), \forall\, i = \overline{0, n-1}$

Языком распознаваемым автоматом A называется $L = \{w \mid A \text{ допускает } w\}$.

Определение

Язык называется регулярным, если его распознает некоторый конечный автомат.

Различают детерминированные и недетерминированные конечные автоматы. Разница в том, что в детерминированных автоматах не может быть переходов по пустой строке, и множественных переходов по некоторому слову (то есть переходов в несколько состояний).

По сути функция перехода для недетерминированного автомата выглядит следующим образом:

$\delta: Q \times \Sigma \to \mathrm{B}(Q)$, где $\mathrm{B}(Q)$ – множество всех подмножеств Q.

Для недетерминированного автомата в определении распознаваемого условие $r_{i+1} = \delta(r_i, w_i)$ поменяется на $r_{i+1} \in \delta(r_i, w_i)$.

Также различают недетерминированные конечные автоматы с ε-переходами.

Для таких автоматов функция перехода выглядит следующим образом:

$\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathrm{B}(Q)$, где $\mathrm{B}(Q)$ − множество всех подмножеств Q, где ε – пустая строка.

Также для таких автоматов меняется определение распознаваемых слов:

<u>Определение</u>

Конечный автомат с ε-переходами $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ распознает (допускает) строку $w = \overline{w_1 \dots w_n}$, если:

- $w_i \in \Sigma, \forall\, i = \overline{1, n}$
- существует последовательность $r_0, r_1, \dots r_n$ такая что:
  - $r_0 \in E(q_0)$
  - $r_n \in F$
  - $r_{i+1} \in E(r')$, где $r' \in \delta(r_i, w_i), \forall\, i = \overline{0, n-1}$

Языком распознаваемым автоматом A называется $L = \{w \mid A \text{ допускает } w\}$.

<u>Определение</u>

ε-замыканием состояния конечного автомата будем называть множество $E(q) = \{q' \in Q \mid \exists\, q = q_0, q_1, \dots, q_k = q',\ q_{i+1} \in \delta(q_i, \varepsilon), i = \overline{0, n-1}\}$

ε-замыканием есть множество вершин, достижимых из q по ребрам с метками ε-замыканием множества состояний R конечного автомата будем называть множество

$$E(R) = \bigcup_{q \in R} E(q)$$

В дальнейшем по НКА будем понимать НКА с ε переходами.

Известна следующая теорема:

<u>Теорема</u>

Для любого недетерминированного автомата существует эквивалентный ему детерминированный автомат (автоматы называются эквивалентными если языки, распознаваемые ими равны).

Регулярные языки замкнуты относительно следующих операций:

1. Объединение: $A \cup B = \{w \mid w \in A \text{ или } w \in B\}$

2. Пересечение: $A \cap B = \{w \mid w \in A \text{ и } w \in B\}$
3. Дополнение: $\bar{A} = \{w \in \Sigma \cup \{\varepsilon\} | w \notin A\}$
4. Обращение: $A^R = \{a1 \dots ak \mid ak \dots a1 \in A\}$
5. Конкатенация: $A \circ B = \{vw \mid v \in A \text{ и } w \in B\}$
6. Замыкание Клини: $A^* = \{w_1 \dots w_k \mid k \geq 0 \text{ и } w_i \in A \text{ для всех } i\}$

Соответственно регулярные выражения определяются рекурсивно:

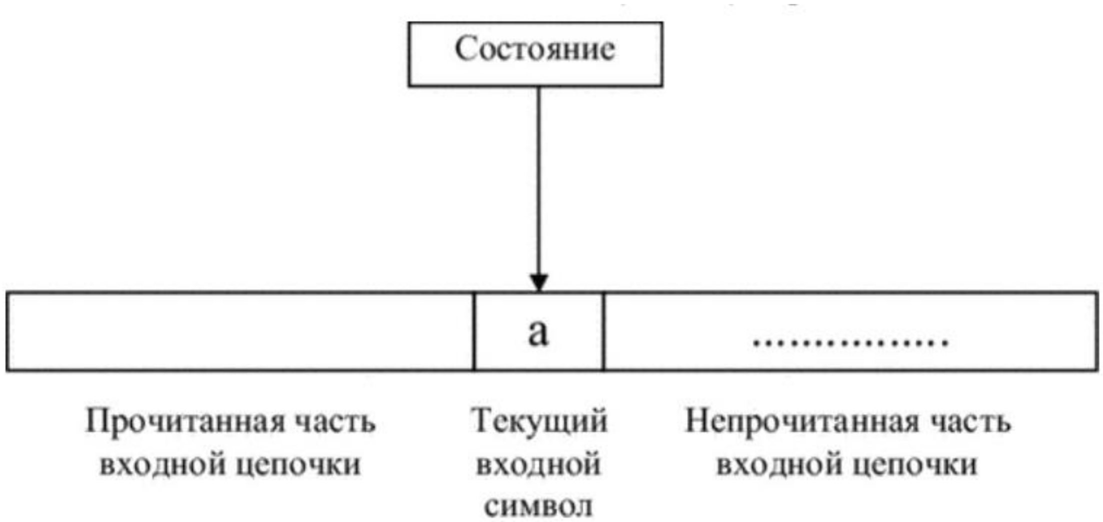
1. $\emptyset -$ регулярное выражение, обозначающее пустое множество
2. $e -$ регулярное выражение, обозначающее множество $\{e\}$
3. $a -$ регулярное выражение, обозначающее множество $\{a\}$
4. если p и q регулярные выражения, обозначающие регулярные языки P и Q соответственно, то:
    a. $pq = \{uw \mid u \in P \text{ и } w \in Q\}$
    b. $p|q = \{u \mid u \in P \text{ или } u \in Q\}$
    c. $p^* -$ минимальное надмножество множества P, замкнутое относительно конкатенации.

$L(R) -$ язык, которому соответствует регулярное выражение R

Регулярное выражение допускает строку w, если $w \in L(r)$.

Будем также использовать обозначение $p^+ = pp^*$

Работа конечного автомата представляет собой некоторую последовательность шагов, или тактов. Такт определяется текущим состоянием управляющего устройства и входным символом, обозреваемым в данный момент входной головкой. Сам шаг состоит из изменения состояния и, возможно, сдвига входной головки на одну ячейку вправо:



Конфигурацией будем называть пару $(q, w) \in Q \times T^* (T^* = T \cup \{\varepsilon\})$. (q_0, w) – начальная конфигурация, (q, ε), где $q \in F$ – заключительная (допускающая). Таким образом после каждого такта наш автомат меняет конфигурацию. Более формально тактом определим следующим образом:

Определение

Тактом будем называть бинарное отношение $\vdash$ на множестве конфигураций, такое что если $q' \in \delta(q, a)$, то $(q, aw) \vdash (q', w), \forall w \in T^*$.

Будем также рассматривать соответствующие транзитивное и рефлексивно-транзитивное замыкание нашего бинарного отношения $\vdash^+$, $\vdash^*$.

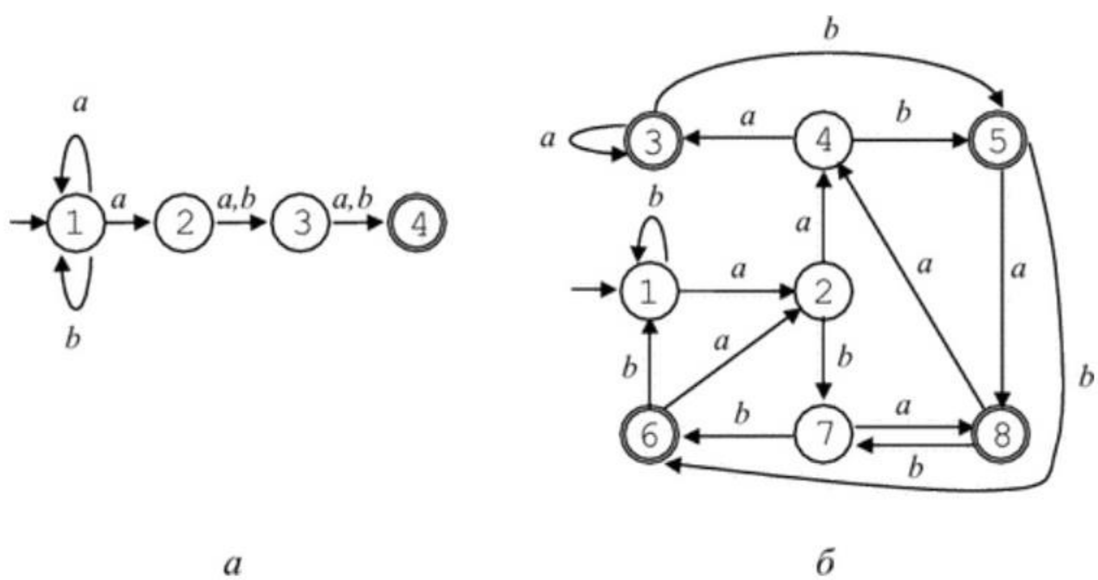
Таким образом автомат распознает строку w тогда и только тогда, когда $(q_0, w) \vdash^* (q, \varepsilon)$, где $q \in F$.

Конечные автоматы удобно представлять в виде ориентированного графа, в котором вершинами будут состояния нашего автомата, а между вершинами будет существовать ребро с меткой из алфавита $\Sigma \cup \{\varepsilon\}$, если соответствующий переход есть в функции переходов.

Пример

Рассмотрим регулярное выражение $R = (a|b) * a(a|b)(a|b)$

Конечные автоматы, соответствующие данному регулярному выражению:



а – недетерминированный конечный автомат, б – детерминированный.

- Попробуем проанализировать цепочку $w = ababa$ с помощью автомата из пункта а.

Наш автомат может сделать следующую цепочку тактов:

$$(1, ababa) \vdash (1, baba) \vdash (1, aba) \vdash (2, ba) \vdash (3, a) \vdash (4, e).$$

Поскольку состояние 4 является заключительным, то наш автомат распознает строку w.

- Попробуем проанализировать цепочку $w = ababab$ с помощью автомата из пункта б.

Поскольку автомат детерминированный то цепочка тактов определяется однозначно, и она равна:

$$(1, ababab) \vdash (2, babab) \vdash (7, abab) \vdash (8, bab) \vdash (7, ab) \vdash (8, b) \vdash (7, e)$$

Поскольку состояние 7 не является заключительным, то наш автомат не распознает строку w.

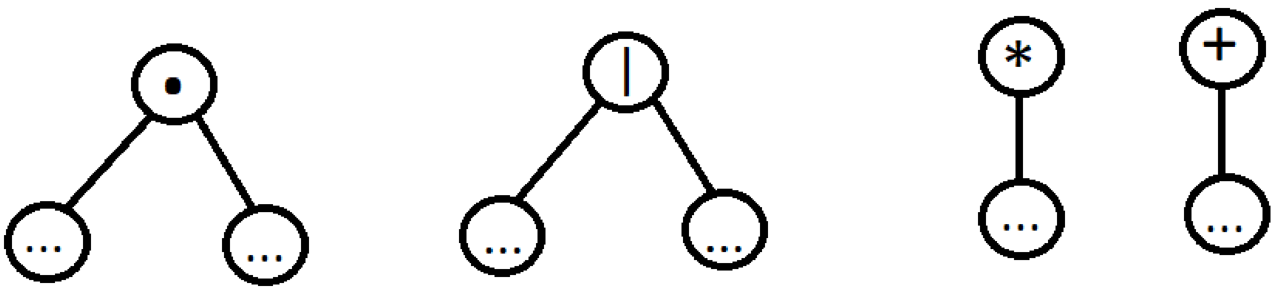
Абстрактные синтаксические деревья

Абстрактное синтаксическое дерево есть представление какого-либо вычисляемого выражения в виде дерева. Это может быть какое-нибудь арифметическое выражение, или же последовательность команд в языке программирования. В нашем случае дерево будет представлять регулярное выражение.

Внутренние вершины нашего дерево будут помечены некоторыми операндами нашего регулярного выражения. Варианты операндов:

- (“.”) – конкатенация двух регулярных выражений.
- (“|”) – дизъюнкция двух регулярных выражений.
- (“*”) – замыкание Клини некоторого регулярного выражения
- (“+”) – замыкание Клини без пустых строк некоторого регулярного выражения.

Листьями будет вершина обозначающая некоторый символ алфавита (“sym”).



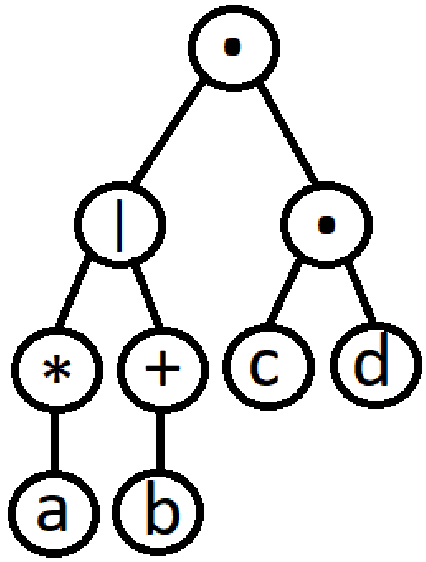
По сути абстрактное синтаксическое дерево для регулярного выражения задает в каком порядке можно проверять распознает ли регулярное выражение некоторую строку.

Нетрудно проанализировать распознавание некоторой строки регулярным выражением в случае если в синтаксическом дереве нету вершин (“.”). Однако даже для простейшего случай конкатенации (например a^+b^+) пришлось бы для строки находить множество префиксов, удовлетворяющих левой части конкатенации, множество суффиксов, удовлетворяющих правой части конкатенации и проверять что есть префикс и суффикс, составляющие всю строку, и распознаваемые соответствующими частями конкатенации. Это представляется довольно трудоемким и сложным процессом.

Поэтому использовать синтаксические деревья для распознавания регулярных выражений мы не будем. Вместо этого синтаксические деревья будут использоваться для построение конечных автоматов, с помощью которых уже можно легко проверить распознавание некоторой строки.

Пример

Построим абстрактное синтаксическое дерево для регулярного выражения $R = (a^*|b^+)(cd)$.



Алгоритмы

Пускай у нас есть некоторое регулярное выражение R. Для распознавания строк этим регулярным выражением нам необходимо построить для него конечный автомат (неважно детерминированный или недетерминированный).

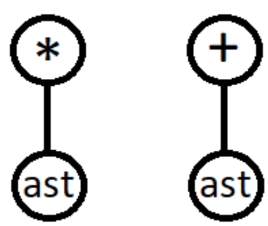
Однако прежде чем построить автомат нам необходимо построить абстрактное синтаксическое дерево.

Алгоритм для построения абстрактного синтаксического дерева

Для начала нам необходимо определиться с приоритетом операций. Наивысшим приоритетом у нас будут обладать операции " $*$ ", " $+$ ". Потом идет операция конкатенации, а последним идет операция дизъюнкции.

Алгоритм выглядит следующим образом:

- Храним последовательности АСД, которые будут объединены конкатенацией. Например для регулярного выражения $R = (a|b)cd^*|f(g^*e^+)^+$ мы имеем две последовательности: $s_1 = \{$АСД((a|b)), АСД(c), АСД(d^*)$\}$, $s_2 = \{$АСД(f), АСД(($g^*e^+)^+$)$\}$
- Идем по строке и смотрим текущий символ. Если символ равен:
  - "+" или "*", то мы берем последнее АСД из последней существующей последовательности АСД (назовем его ast) и заменяем его на АСД следующего вида (в зависимости от случая):



  - если мы встретили открывающую скобку, то мы рекурсивно строим АСД для выражения в скобках и добавляем его в последнюю последовательность.
  - если мы встретили закрывающую скобки, то мы объединяем последовательности дизъюнкцией и возвращаем полученное АСД из функции.
  - если мы встретили обычный символ, то добавляем в последнюю последовательность вершину с одним символом.
  - если мы встретили "|", то начинаем новую последовательность АСД и заполняем ее.
  - если закончилась строка, то мы объединяем последовательности дизъюнкцией и возвращаем полученное АСД из функции.

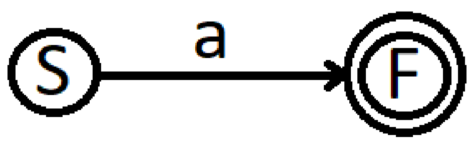
После отработки данного алгоритма мы получим АСД для нашего регулярного выражения.

Алгоритм для построения недетерминированного конечного автомата (НКА) из АСД

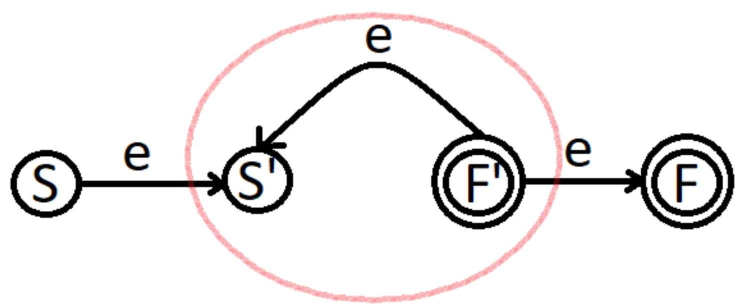
У построенных нами автоматов будет лишь одна заключительная вершина, поэтому будем обозначать начальную и заключительную вершину S и F соответственно.

Проходимся по АСД и в зависимости от типа вершины делаем следующее:

- если у нас обычная символьная вершина, то строим автомат следующего вида:

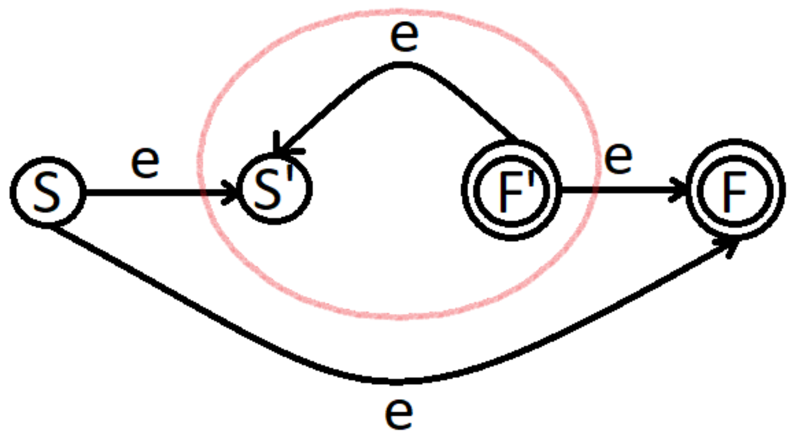


- если у нас вершина типа ($" + "$), то мы строим для внутреннего выражения автомат, а потом достраиваем его до автомата вида:



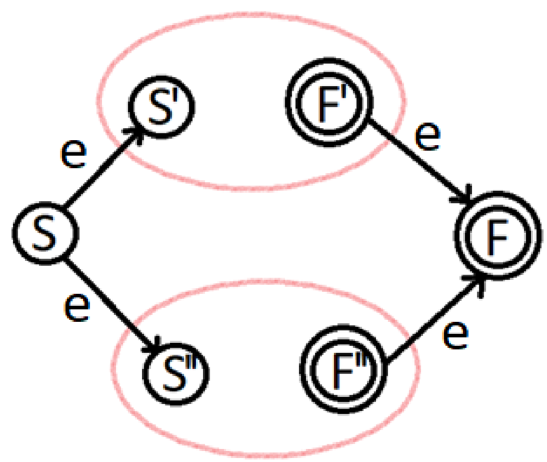
где S' и F' соответственно начальное и заключительное состояние для внутреннего регулярного выражения.

- если у нас вершина типа (" $*$ "), то мы строим для внутреннего выражения автомат, а потом достраиваем его до автомата вида:

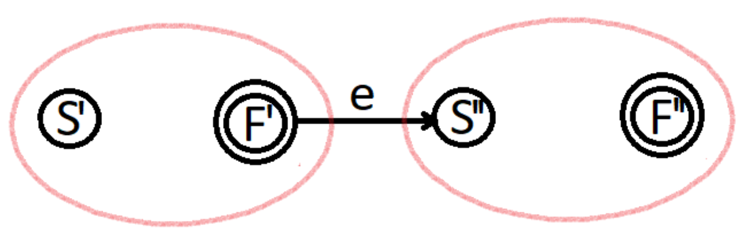


где S' и F' соответственно начальное и заключительное состояние для внутреннего регулярного выражения.

- если у нас вершина типа дизъюнкции, то мы строим автоматы для левого и правого внутренних выражений, а потом достраиваем его до следующего вида:



- если у нас вершина типа конъюнкции, то мы строим автоматы для левого и правого внутренних выражений, а потом достраиваем его до следующего вида:



Определение

Переходом множества состояний (R) по некоторому символу (a) будем называть множество:

$$Move(R, a) = \bigcup_{q \in R} \{q' \in Q \mid q' \in \delta(q, a)\}$$

Переходом множества R по некоторому символу a есть множество вершин в которые можно перейти из некоторого состояния множества R по ребру с меткой a.

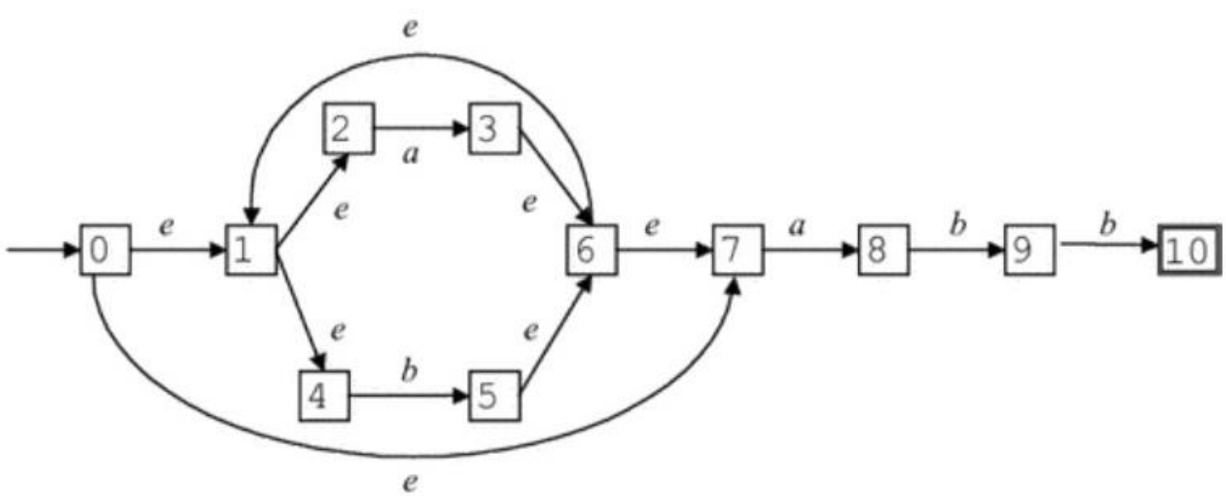
Алгоритм для распознавания строки:

- изначально инициируем множество $R = N_e(\{q_0\})$
- далее для каждого символа $w_i \in w$ делаем следующее:
$$R \coloneqq Move(R, w_i)$$
$$R \coloneqq E(R)$$
- если после проделывания всех операций $R \cap F \neq \emptyset$, то слово удовлетворяет регулярному выражению

Нетрудно заметить, что мы по сути по определению находим последовательность $r_0, \dots, r_n$ из определения распознаваемости строки конечным автоматом с ε-переходами.

Пример

Рассмотрим следующим НКА:



Проверим на нем строку $w = aabb$

- Изначально $R = \{0, 1, 2, 4\}$
- Далее делаем итерации:
  - $R \coloneqq \{3,6,7,1,2,4\}$
  - $R \coloneqq \{8,3,6,7,1,2,4\}$

- $R \coloneqq \{9,5,6,7,1,2,4\}$
- $R \coloneqq \{10,5,6,7,1,2,4\}$

- Поскольку $R \cap F = \{10\} \neq \emptyset$, то строка распознается нашим регулярным выражением.

Алгоритм для построения детерминированного конечного автомата (ДКА) из НКА

Нам необходимо построить новый детерминированный конечный автомат $\bar{A} = (\bar{Q}, \Sigma, \bar{\delta}, \overline{q_0}, \bar{F})$ (алфавит останется таким же) из НКА A.

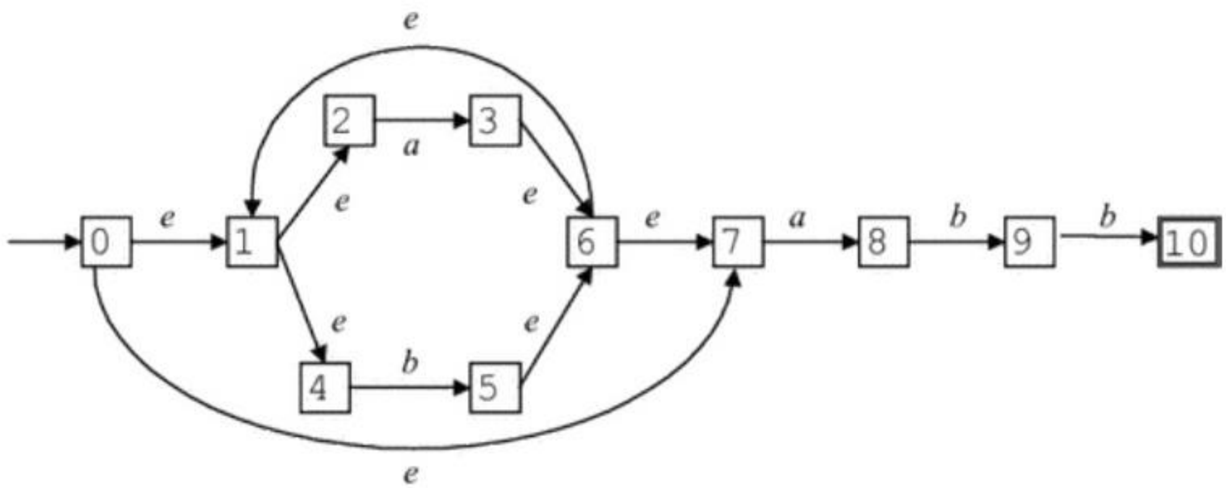
В новом автомате состояниями будут неупорядоченные множества состояний автомата A, поскольку на самом-то деле в автомате $\bar{A}$ состояние будет включать в себя состояния автомата A.

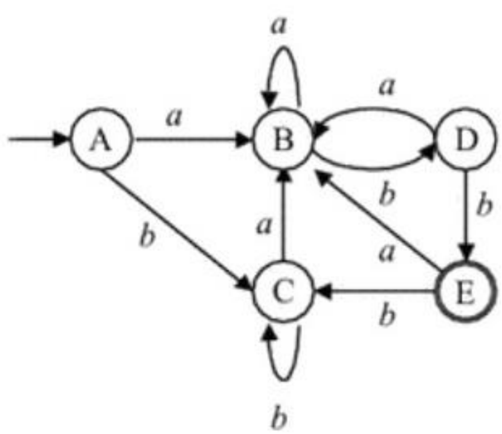
Изначально $\bar{Q}, \bar{\delta}$.

- $\overline{q_0} = E(q_0)$
- Добавляем $\overline{q_0}$ в $\bar{Q}$, как не посещенное состояние.
- Пока в $\bar{Q}$ есть не посещенное состояние делаем следующее:
  - Берем не посещенное состояние R.
  - Помечаем его как посещенное
  - Для каждого входного символа a из алфавита Σ рассматриваем $S = E(Move(R, a))$
  - Если S не пустое множество
    - Если S не содержится в $\bar{Q}$, то добавляем S в $\bar{Q}$ как не помеченное состояние
    - Определяем $\bar{\delta}(R, a) = S$
- Определяем $\bar{F} = \{R | R \in \bar{Q}, R \cap F \neq \emptyset\}$

Если объяснять на пальцах, то алгоритм по сути перебирает все возможные наборы состояний, которые могут быть посещены некоторой последовательностью символов из алфавита. Все эти наборы являются новыми состояниями для детерминированного автомата. Из любого набора состояний можно единственным образом перейти в некоторый другой набор состояний. Эти переходы и записываются в функцию переходов нового конечного детерминированного автомата. Те состояния, которые включают в себе хотя бы одно заключительное состояние исходного НКА и будут являться заключительными состояниями для нового ДКА.

Пример





Снизу изображен результат работы алгоритма на НКА сверху.

Преимущества ДКА над НКА:

- в ДКА нету ε-переходов, а значит при проверки строки не надо делать затратную операцию $E(R)$
- Также в ДКА в любой момент времени в R рассматривается лишь одно состояние, что значительно сокращает время переходов.

Соответственно с помощью ДКА можно намного быстрее обработать строку.