

Zusammenfassung Analysis I & II

Grundlagen

Binomischer Lehrsatz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Wobei $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Ausserdem:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

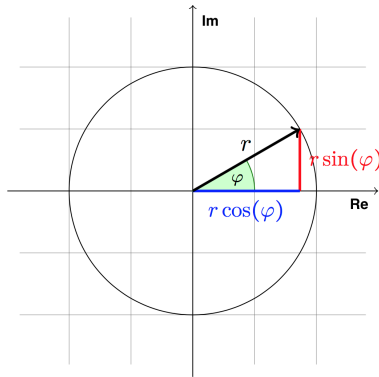
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Mitternachtsformel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Komplexe Zahlen



$$z = x + iy = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = re^{i\varphi}$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\arg(z) = \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (\text{je nach Quadrant})$$

$$x = r \cos(\varphi)$$

$$y = r \sin(\varphi)$$

$$zw = (re^{i\varphi}) \cdot (se^{i\psi}) = rse^{i(\varphi+\psi)}$$

$$\sqrt[q]{z} = \sqrt[q]{se^{i\phi}}, \text{ wobei } \phi = \frac{\varphi}{q} \mod \frac{2\pi}{q}$$

$$e^{i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)} = i, \quad e^{i\pi} = 1, \quad e^{-i\pi} = -1$$

$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$

$$\bar{z} = x - iy$$

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = -1$$

$$|z|^2 = z\bar{z}$$

$$|zw|^2 = (zw) \cdot \overline{(zw)} = |z|^2 |w|^2$$

Potenzgesetze / Logarithmus / Wurzelgesetze

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{\frac{b}{n}} = \sqrt[n]{a^b}$$

$$\log(0) = \text{undef.}$$

$$\log(1) = 0$$

$$x = \log_a(y) \Leftrightarrow a^x = y$$

$$-\log(x) = \log\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\log(x) - \log(y) = \log\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\log(x)}{\log(a)} = \log_a(x)$$

$$n \log x = \log x^n$$

$$\log_a(u) + \log_a(v) = \log_a(u \cdot v)$$

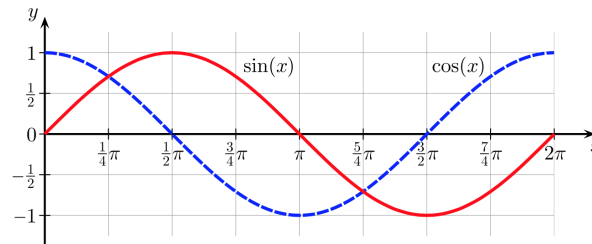
$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Trigonometrie



Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Winkel	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\sin(\cos^{-1}(x)) = \cos(\sin^{-1}(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

$$\sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})$$

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix})$$

$$\sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2} [-\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\cos(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2} (1 - \cos(2\alpha))$$

$$\sin^3(\alpha) = \frac{1}{4} (3 \sin(\alpha) - \sin(3\alpha))$$

$$\sin^4(\alpha) = \frac{1}{8} (\cos(4\alpha) - 4 \cos(2\alpha) + 3)$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2\alpha))$$

$$\cos^3(\alpha) = \frac{1}{4} (3 \cos(\alpha) + \cos(3\alpha))$$

$$\cos^4(\alpha) = \frac{1}{8} (\cos(4\alpha) + 4 \cos(2\alpha) + 3)$$

Lineare Algebra

Determinante

$$\det(a_{11}) = a_{11}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Matrixinverse

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{pmatrix}$$

Positive / Negative Definitheit Eine symmetrische $n \times n$ Matrix ist genau dann positiv definit, wenn die n Submatrizen

$$A_k = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k}$$

für $1 \leq k \leq n$ eine positive Determinante haben. Sie ist genau dann negativ definit, wenn obiges für $-A_k$ gilt (wenn n ungerade ist, gilt $\det(-A_k) = -\det(A_k)$, für gerade n nicht!). Für $n = 2$, eine Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

ist positiv definit, wenn $a > 0$ und $ad - b^2 > 0$. Sie ist negativ definit, wenn $a < 0$ und $ad - b^2 > 0$. Für $n = 3$, eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

ist positiv definit, wenn $a > 0$, $ae - b^2 > 0$ und $\det(A) > 0$

Differenzialrechnung

Stetigkeit

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heisst an der Stelle $a \in \Omega$ stetig, falls

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Was auch folgendermassen notiert werden kann:

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad n \rightarrow \infty, x_n = a : \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = f(a)$$

Bzw. mit der Definition der punktwisen Stetigkeit:

$$\forall x_0 \forall \varepsilon \exists \delta \forall x : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

Man nennt f auf Ω stetig, falls f in jedem Punkt auf Ω stetig ist. Um eine Funktion auf Stetigkeit an der Stelle a zu prüfen, muss man nachweisen, dass f auf Ω definiert ist, dass $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existiert (\neq und $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$) und dass $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Der **Abschluss** von Ω ist die Menge

$$\bar{\Omega} = \left\{ x \in \mathbb{R}^d; \exists (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \Omega : x_k \rightarrow x (k \rightarrow \infty) \right\}$$

f heisst an der Stelle $x_0 \in \bar{\Omega} \setminus \Omega$ **stetig ergänzbar**, falls $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) =: a$ existiert. $K \subset \mathbb{R}^d$ heisst **kompakt**, falls jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset K$ einen Häufungspunkt in K besitzt; d.h. falls eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ und ein $x_0 \in K$ existieren mit $x_k \rightarrow x_0$ ($k \rightarrow \infty, k \in \Lambda$). Beispiel: $[0, 1]$ ist kompakt, $]0, 1[$ nicht. Wenn K kompakt ist, ist es auch beschränkt und das Infimum / Supremum entsprechen dem Minimum / Maximum. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ heisst **gleichmässig stetig**, falls gilt

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in \Omega : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und auf $\bar{\Omega}$ stetig ergänzbar. Dann ist f gleichmässig stetig.

Rechenregeln Seien $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann sind $f + g$, $f - g$, fg , $\frac{f}{g}$ falls $g \neq 0$ und $g \circ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Kriterien für Stetigkeit

Folgenkriterium: Für jede Folge x_n in Ω mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$. Dies bedeutet, dass der Limes bei stetigen Funktionen in die Funktion hineingezogen werden kann!

Weierstrass-Kriterium: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon, a) > 0$, sodass für alle $|x - a| < \delta$ folgendes gilt: $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Lipschitz Stetigkeit f heisst Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L , wenn gilt:

$$\exists L \forall x, x_0 : \|f(x) - f(x_0)\| \leq L \cdot \|x - x_0\|$$

Es gelten die folgenden Implikationen: f Lipschitz stetig $\Rightarrow f$ glm. stetig $\Rightarrow f$ punktweise stetig

Zwischenwertsatz Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \leq f(b)$. Dann gibt es zu jedem $y \in [f(a), f(b)]$ ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.

Differenzialrechnung

Es sei $x_0 \in \Omega$ und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Die Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 ist der folgende Grenzwert (wenn existent; beide Grenzwerte äquivalent):

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Die Tangente der Kurve $y = f(x)$ an der Stelle $(x_0, f(x_0))$ ist die folgende Gerade: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. f heisst an der Stelle x_0 differenzierbar, falls die Ableitung an der Stelle x_0 existiert (d.h. der Grenzwert existiert). Ist f an jeder Stelle x_0 differenzierbar, so heisst f auf Ω differenzierbar.

Differenzierbare Funktionen sind immer stetig, die Umkehrung ist nicht wahr. Eine Funktion $f: \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist von der Klasse C^1 , wenn f in jedem Punkt $x_0 \in \Omega$ differenzierbar ist und die Ableitung $f': \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf Ω stetige Funktion ist.

Ableitungsregeln Sind $f, g: \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar, so sind es auch $f + g$, $f * g$ und $\frac{f}{g}$ (falls g keine Nullstellen hat). Die Ableitungen lauten:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \quad (\text{Summenregel})$$

$$(f \cdot g)(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \quad (\text{Produktregel})$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} \quad (\text{Quotientenregel})$$

Seien $f: \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $U \subset f(\Omega)$ an den Stellen x_0 bzw. $f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist die Komposition $g \circ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 differenzierbar und die Ableitung lautet:

$$(g \circ f)'(x_0) = (g(f(x_0)))' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Der **Umkehrsat** besagt: Sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$. Dann ist die Umkehrabbildung $f^{-1}: (f(a), f(b)) \rightarrow (a, b)$ differenzierbar mit Ableitung

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

wobei $y = f(x)$.

Beispiel: Berechne die Ableitung von $\log(x)$ ausgehend von e^x :

$$y = e^x \Rightarrow x = \log(y)$$

$$y' = e^x \Rightarrow x' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\log(y)}} = \frac{1}{y}$$

Somit ist $\log(x)' = \frac{1}{x}$

Monotone Funktionen $f: \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heisst monoton wachsend, wenn für alle $x, y \in \Omega$ $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ gilt. f heisst monoton fallend, wenn für alle $x, y \in \Omega$ $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ gilt. Bei streng monoton wachsend / fallend gilt $f(x) < f(y)$ bzw. $f(x) > f(y)$. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Falls $f'(x) \geq 0$ (> 0) für alle $x \in (a, b)$, so ist f auf $[a, b]$ (streng) monoton wachsend. Falls $f'(x) \leq 0$ (< 0) für alle $x \in (a, b)$, so ist f auf $[a, b]$ (streng) monoton fallend.

Bijektive Funktionen Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton (wachsend oder fallend). Setze $f(a) = c$, $f(b) = d$. Dann ist $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ bijektiv und f^{-1} ist stetig.

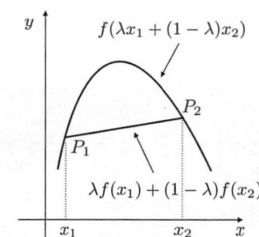
Sei $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend mit monotonen Limites

$-\infty < c := \lim_{x \downarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow b} f(x) =: d \leq \infty$. Dann ist $f:]a, b[\rightarrow]c, d[$ bijektiv und f^{-1} ist stetig.

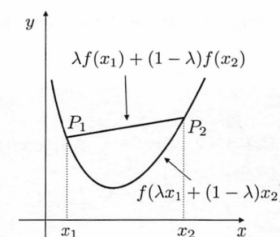
Konvexe Funktionen Eine Funktion $f: \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heisst konvex, wenn

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

für alle $x_1, x_2 \in \Omega$ und alle $\lambda \in [0, 1]$ gilt. f heisst konkav, wenn $-f$ konvex ist, d.h. wenn $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in \Omega$ und alle $\lambda \in [0, 1]$ gilt.



konkav



konvex

Sei $f \in C^2(\Omega)$. Dann ist f genau dann konvex (konkav), wenn $f''(x) \geq 0$ (≤ 0) für alle $x \in \Omega$ gilt.

Extrema Eine Funktion f hat an der Stelle x_e ein Maximum, wenn gilt $f'(x_e) = 0$ und $f''(x_e) < 0$. Sie hat ein Minimum, wenn gilt $f'(x_e) = 0$ und $f''(x_e) > 0$.

Mittelwertsatz Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $c \in (a, b)$ mit

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Newton-Verfahren Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Es wird, ausgehend von einem Startwert x_0 , die folgende Iteration

wiederholt, um Näherungswerte zu Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$ zu finden.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Die Taylorschen Formeln

Das folgende Polynom ist das Taylorpolynom m -ter Ordnung von $f(x)$ an der Stelle $x = a$:

$$\begin{aligned} P_m^a(x) &:= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{1}{m!}f^{(m)}(a)(x-a)^m \end{aligned}$$

Der Fehler der Approximation ist durch den m -ten Restterm gegeben: $R_m^a(x) := f(x) - P_m^a(x)$. Es gilt:

$$R_m^a(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{m+1}$$

wobei ξ eine Zahl ist, welche zwischen a und x liegt.

Taylorreihen Ist die Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in der Nähe von a unendlich oft differenzierbar, so wird die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$ die Taylorreihe von f um $x = a$ genannt. Sie besitzt einen eigenen Konvergenzradius ρ und konvergiert auf einer Umgebung von a , welche dem Konvergenzradius entspricht. Wenn sie konvergiert, muss die Taylorreihe von f an der Stelle x nicht zwingend gegen die Funktion $f(x)$ konvergieren. Damit die Taylorreihe von $f(x)$ gegen $f(x)$ konvergiert, muss der Fehlerterm gegen 0 konvergieren, d.h. $\lim_{m \rightarrow \infty} R_m^a(x) = 0$.

Falls $|f^{(m+1)}(x)| \leq M$ für $|x-a| < d$ gilt, so ist

$$|R_m^a(x)| \leq \frac{M}{(m+1)!}|x-a|^{m+1} \text{ für alle } |x-a| < d$$

Eine unendlich oft differenzierbare Funktion, welche die Eigenschaft besitzt, dass sie auf $\Omega \subset \mathbb{R}$ durch eine konvergente Taylorreihe dargestellt ist, nennt man (auf Ω) analytisch.

Methoden zur Bestimmung von Taylorreihen

1: Substitution Man nutzt bereits bekannte

Taylorentwicklungen aus. Beispiel: Gesucht ist die Taylorentwicklung der Funktion $\frac{1}{1+x^2}$ um den Punkt $x = 0$. Es gilt:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

2: Differentiation und Integration Taylorreihen dürfen problemlos differenziert / integriert werden. Beispiel: Gesucht ist die Taylorreihe der Funktion $\log(1-x)$. Man beginnt mit der geometrischen Reihe $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ und integriert auf beiden Seiten. Links bekommt man $\int \frac{1}{1-x} dx = -\log(1-x)$. Potenzreihen werden Glied für Glied integriert, die rechte Seite lautet also:

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} x^n dx = \int (1+x+x^2+\dots) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + C$$

Um C zu bestimmen, wird $x = 0$ eingesetzt, um $C = 0$ zu sehen. Es gilt also:

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots$$

3: Multiplikation und Divison Potenzreihen werden gemäss dem Cauchy-Produkt miteinander multipliziert, somit auch Taylorreihen.

Anwendung bei der Berechnung von Reihen Die Taylorreihen können teilweise auch benutzt werden, um den Wert von Reihen zu bestimmen, indem die Reihe so umgeformt wird, dass sie der Taylorreihe entspricht.

Integralrechnung

Eine Stammfunktion F zu einer gegebenen stetigen Funktion f ist eine Funktion, so dass $F'(x) = f(x)$ für alle x im Definitionsbereich von f gilt. D.h.

$$F(x) = \int f(x)dx = \int F'(x)dx$$

Ist F eine Stammfunktion, ist auch $F + C$ (mit $C \in \mathbb{R}$) eine. Differenzierbare Funktionen sind stetig und nach dem Hauptsatz integrierbar, die Umkehrungen gelten nicht (es gibt integrierbare Funktionen, welche nicht stetig sind, bspw. stückweise stetige Funktionen).

Elementare Integrale Siehe Anhang, können durch Umkehrung der Ableitung direkt angegeben werden.

Direkte Integrale Es gilt:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x))$$

D.h. wenn der Integrand die Form $f(g(x)) \cdot g'(x)$ hat, wird die Stammfunktion von f in $g(x)$ ausgewertet.

Partielle Integration

$$\int f' \cdot g dx = f \cdot g - \int f \cdot g' dx$$

Der Integrand wird also als Produkt von zwei Funktionen geschrieben, wobei die Funktion f' integriert (\uparrow) und g abgeleitet (\downarrow) wird. Als Merkhilfe kann die folgende Tabelle dienen:

\uparrow	1 (falls arc-Funktion oder Logarithmus vorkommt), $x^n, \frac{1}{1-x^2}, \frac{1}{1+x^2}, \dots$
\downarrow	$x^n, \log(x), \arcsin(x), \arccos(x), \arctan(x), \operatorname{arcsinh}(x),$ $\operatorname{arcosh}(x), \operatorname{arctanh}(x), \dots$
"egal"	$e^x, \sin(x), \cos(x), \sinh(x), \cosh(x), \dots$

Integrale rationaler Funktionen Integrale der Form $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ wobei $p(x)$ und $g(x)$ zwei Polynome sind.

- Falls $\operatorname{Grad}(p) \geq \operatorname{Grad}(q) \Rightarrow$ führe die Polynomdivision $p(x) : q(x)$ durch.
- Falls $\operatorname{Grad}(p) < \operatorname{Grad}(q) \Rightarrow$ führe die Partialbruchzerlegung (PBZ) durch (siehe Anhang für Anleitung).

Substitutionsregel Die Idee ist, eine Variablentransformation $y = g(x) \Leftrightarrow x = g^{-1}(y)$ durchzuführen. Ist f stetig und g wie oben, gilt dann:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(y)dy$$

Wobei $dy = g'(x)dx$. Der Ansatz lautet also: Um $\int f(y)dy$ zu berechnen, substituiere $y = g(x)$ im Integrand und ersetze das dy mit $g'(x)dx$ mit dem Ziel, das neue Integral $\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx$ leichter zu bestimmen.

Substitutionsansätze

- Integrale von Funktionen, die $e^x, \sinh(x), \cosh(x), \dots$ enthalten: Diese Integrale werden oft mit der Substitution $e^x = t$ ($dx = \frac{1}{t}dt$) gelöst.

- Integrale von Funktionen, die $\log x$ enthalten: Diese werden oft mit der Substitution $\log x = t$ ($dx = e^x dt$) gelöst.

- Integrale von Funktionen, die $\sqrt[n]{Ax+B}$ enthalten. Diese werden oft mit der Substitution $\sqrt[n]{Ax+B} = t$ gelöst.

- Integrale von Funktionen, die $\cos x, \sin x$ in geraden Potenzen oder $\tan x$ enthalten. Diese Integrale werden oft mit der Substitution $\tan x = t$ ($dx = \frac{1}{1+t^2}dt$) gelöst. Bei dieser Substitution wird $\sin^2 x$ zu $\frac{t^2}{1+t^2}$ und $\cos^2 x$ zu $\frac{1}{1+t^2}$

- Integrale von Funktionen, die $\cos x, \sin x$ in ungeraden Potenzen enthalten. Diese werden oft mit der Substitution $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t$ ($dx = \frac{2}{1+t^2}dt$) gelöst.

- Integrale mit $\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ im Nenner. Diese werden mithilfe der quadratischen Ergänzung auf eine der folgenden Fälle gebracht: $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcosh} x + C \text{ oder}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arcsinh} x + C.$$

- Integrale mit $\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ im Zähler. Diese werden mithilfe der quadratischen Ergänzung auf eine der folgenden Formen gebracht und dann mit der Substitution gelöst:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx \quad \text{Substitution } x = \sin t$$

$$\int \sqrt{x^2-1} dx \quad \text{Substitution } x = \cosh t$$

$$\int \sqrt{1+x^2} dx \quad \text{Substitution } x = \sinh t$$

Bestimmte Integrale

Das bestimmte Integral von f von a bis b ($a < b$) ist:

$$\int_a^b f(x)dx := F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Für $a > b$ setzt man: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. Ausserdem definiert man $\int_a^a f(x)dx = 0$. Das bestimmte Integral hat die folgenden Eigenschaften (1 - Linearität, 2 - Gebietsadditivität, 3 - Positivität, 4 - Monotonie und 5 - Dreiecksungleichung):

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \quad (1)$$

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \quad (2)$$

$$f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b], \text{ so ist } \int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad (3)$$

$$f(x) \geq g(x) \forall x \in [a, b], \text{ so ist } \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx \quad (4)$$

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx \quad (5)$$

Ist $f(x)$ ungerade, so gilt für alle um den Ursprung symmetrischen Integrale:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

Aus dem Hauptsatz der Integralrechnung folgt:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Flächenberechnung Ist $f(x) \geq 0$ auf dem Intervall $[a, b]$, entspricht $\int_a^b f(x)dx$ der Fläche, welche für $x \in [a, b]$ von der x -Achse und dem Graphen von f begrenzt wird. Ist $f(x) \leq 0$ auf $[a, b]$, ist diese Fläche gleich $-\int_a^b f(x)dx$. Im Allgemeinen betrachtet man Teilintervalle, in denen f positiv / negativ ist.

Gamma-Funktion Die Gamma-Funktion ist für $\alpha > 0$ wie folgt definiert:

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Sie hat die folgenden Eigenschaften:

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \text{ falls } n \in \mathbb{N}$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}, (0 < \alpha < 1)$$

Mit der Gamma-Funktion können Integrale der Form $\int_0^\infty x^\alpha e^{-g(x)} dx$ bestimmt werden, wobei $g(x) = t$ substituiert wird.

Riemannsche Summen

Ein Intervall $[a, b]$ wird in n Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ mit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ unterteilt. Die Länge jedes Intervalls ist $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Die Feinheit der Unterteilung ist die Länge des grössten Intervalls $\Delta_n = \max \{\Delta_i, i = 1, \dots, n\}$. In jedem der n Intervalle wird ein Punkt ausgewählt: $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ Die Riemannsche Summe von f bzgl. der Unterteilung Δx_k ist:

$$R_n := \sum_{k=1}^n \Delta x_k \cdot f(\zeta_k)$$

Wenn alle Folgen $\{R_n\}$ mit Feinheit $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = 0$ einen gemeinsamen Grenzwert R haben, bezeichnet man f als Riemann-integrierbar auf $[a, b]$ und den Grenzwert als Riemann-Integral von f auf $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta_k f(\zeta_k)$$

Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton bzw. stetig. Dann ist f über $[a, b]$ R-integrierbar. **Riemannsche Summen bei der Berechnung von Grenzwerten** Einige Grenzwerte können als Riemannsche Summen geschrieben werden und dann als Integral zwischen 0 und 1 berechnet werden. Es gilt die folgende Regel:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx$$

Differenzialgleichungen

In einer Differenzialgleichung kommt eine unbekannte Funktion $y(x)$ einer oder mehrerer Variablen und ihre Ableitungen vor. Im Falle von $y: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spricht man von einer gewöhnlichen Differenzialgleichung. Die Ordnung einer Differenzialgleichung ist die Ordnung der höchsten Ableitung, die in der Gleichung vorkommt. $y' + x = y$ ist also bspw. eine Differenzialgleichung erster Ordnung.

Eine Differenzialgleichung heisst **linear**, falls für je zwei Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ auch jede Linearkombination $ay_1(x) + by_2(x)$ eine Lösung derselben Gleichung ist. Dies ist genau der Fall, wenn y und alle Ableitungen linear vorkommen, also in Ausdrücken der Form:

$$a(x)y(x) + b(x), \quad c(x)y'(x) + d(x), \quad \text{etc.}$$

Eine Differenzialgleichung heisst **homogen**, falls keine Terme vorkommen, die rein von den Funktionsvariablen x abhängen. Ansonsten ist sie **inhomogen**.

$(x^2 - 1)y' + y^2 = 0$ ist z.B. eine nicht lineare homogene DGL

1. Ordnung, $y^{(4)} + y''' - 3y'' - xy = x^3$ eine lineare inhomogene DGL 4. Ordnung.

Das Grundprinzip für lineare, inhomogene Differenzialgleichungen sieht folgendermassen aus:

$$y(x) = y_{\text{Homogen}}(x) + y_p(x)$$

Wobei $y(x)$ die Gesamtlösung, $y_{\text{Homogen}}(x)$ die allg. Lösung des homogenen Problems und $y_p(x)$ eine partikuläre Lösung des inhomogenen Problems ist.

Differenzialgleichungen erster Ordnung

Trennung der Variablen Eine separierbare DGL ist eine Gleichung der Form:

$$y' = \frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y), \text{ mit } g(y) \neq 0$$

Diese können folgendermassen umgeformt werden:

$$\frac{dy}{g(y)} = h(x)dx$$

Anschließend können beide Seiten integriert werden:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)dx$$

$y(x)$ enthält eine Integrationskonstante C , welche man bei Anfangswertproblemen aus der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ bestimmen kann.

Variation der Konstanten Für die Lösung inhomogener Probleme $y' = h(x)y + b(x)$ oder auch für den Euleransatz (wobei aus $z_1 e^{\lambda x} z_1(x) e^{\lambda x}$ wird) wird der Grundsatz $y(x) = y_{\text{Homogen}}(x) + y_p(x)$ verwendet. Zuerst wird mittels Trennung der Variablen die Lösung des homogenen Problems gefunden. Anschließend wird eine partikuläre Lösung gesucht, indem die Integrationskonstante C als eine von x abhängige Funktion aufgefasst wird:

$$C \rightarrow C(x)$$

Dieser Ansatz wird dann in die ursprüngliche DGL eingesetzt, um die Funktion $C(x)$ zu bestimmen.

Für Gleichungen mit Ordnung ≥ 2 geht man folgendermassen vor: Angenommen man hat eine Lösung (f_1, \dots, f_k) für die homogene Gleichung gefunden, dann stellt man $f(x) = z_1(x)f_1(x) + \dots + z_k(x)f_k(x)$ auf und sucht eine Lösung, so dass $z'_1(x)f_1(x) + \dots + z'_k(x)f_k(x) = 0$, $z'_1(x)f'_1(x) + \dots + z'_k(x)f'_k(x) = 0$ bis $z'_1(x)f_1^{(k-2)}(x) + \dots + z'_k(x)f_k^{(k-2)}(x) = 0$ gilt. Die k -te Gleichung ist die Differenzialgleichung selber (die dank den ersten $k-1$ Gleichungen vereinfacht wurde). Für $k=2$ mit $f = z_1 f_1 + z_2 f_2$ muss das folgende Gleichungssystem gelöst werden:

$$\begin{aligned} z'_1 f_1 + z'_2 f_2 &= 0 \\ z'_1 f'_1 + z'_2 f'_2 &= b \end{aligned}$$

Substitution Bei einigen Differenzialgleichungen muss zuerst substituiert werden, damit diese separiert werden können. Die wichtigsten Substitutionen sind nachfolgend aufgelistet:

- $y' = h\left(\frac{y}{x}\right)$: $z(x) = \frac{y(x)}{x} \Leftrightarrow y(x) = xz(x)$ und somit $y' = z + xz'$
- $y' = h(ax + by + c)$: $z(x) = ax + by(x) + c \Leftrightarrow y = \frac{z-ax-c}{b}$ und somit $y' = \frac{z'-a}{b}$
- $y' = \frac{y}{x} h(xy)$: $z(x) = xy(x) \Leftrightarrow y(x) = \frac{z(x)}{x}$ und somit $y' = \frac{xz' - z}{x^2}$.

Die Idee bei der Substitution ist, einen neuen Term $z(x)$ einzuführen und die Differenzialgleichung dann mit $z(x), z'(x), \dots$ auszudrücken. Dabei kann es entweder hilfreich sein, das $y(x)$ abzuleiten und einzusetzen oder $z(x)$ abzuleiten, womit man teilweise sieht, wie die Terme ersetzt werden müssen.

Differenzialgleichungen n -ter Ordnung

Euler-Ansatz Eine allgemeine lineare, homogene Differenzialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten lautet:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0$$

Solche Differenzialgleichungen werden mit dem Euler-Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ (wobei $\lambda \in \mathbb{C}$) ein zu bestimmender Parameter ist) gelöst, ein Einsetzen ergibt:

$$a_n \lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \dots + a_0 e^{\lambda x} = 0$$

$e^{\lambda x}$ kann gekürzt werden, womit man das charakteristische Polynom erhält:

$$\chi(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

Die Nullstellen von χ sind:

$$\chi(\lambda) = \prod_{k=1}^r (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sind dabei die r unterschiedlichen Nullstellen, m_k ist die Vielfachheit einer Nullstelle. Zu einer m -fachen Nullstelle λ gehören die m linear unabhängigen Lösungen:

$$z_1 \cdot e^{\lambda x}, z_2 \cdot x \cdot e^{\lambda x}, \dots, z_m \cdot x^{m-1} \cdot e^{\lambda x}$$

Wobei z_1, \dots, z_m Parameter sind, die mit allfälligen Initialbedingungen herausgefunden werden können. Diese Lösungen bilden ein Fundamentalsystem der Differenzialgleichung. Die allgemeine Lösung ist eine Linearkombination (mit Konstanten A, B, C, \dots vor den einzelnen Termen) aller Lösungen im Fundamentalsystem, wobei die Koeffizienten der Linearkombination aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden. Für nicht reelle Nullstellen $\alpha = \beta + i\gamma$ gilt, dass $\bar{\alpha}$ auch eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist. Um reelle Lösungen zu erhalten, können die beiden Lösungen $f_1(x) = e^{\alpha x}$ und $f_2(x) = e^{\bar{\alpha}x}$ mit $\tilde{f}_1(x) = \tilde{z}_1 e^{\beta x} \cos(\gamma x)$ sowie $\tilde{f}_2(x) = \tilde{z}_2 e^{\beta x} \sin(\gamma x)$ ersetzt werden.

Methode des direkten Ansatzes Für die Lösung inhomogener Probleme gilt der gleiche Grundsatz (homogene Lösung + partikuläre Lösung) wie für Differenzialgleichungen erster Ordnung:

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0 y(x) = b(x)$$

Für die Bestimmung der partikulären Lösung verwendet man die Methode des direkten Ansatzes. Dabei wird für $y_p(x)$ eine Funktion vom selben Typ wie $b(x)$ gewählt, in die Differenzialgleichung eingesetzt und es wird nach den Parametern aufgelöst. Wenn $b(x)$ die Summe von zwei Termen

ist (bspw. einem linearen und einem mit Sinus), wählt man für beide Terme den Ansatz. Im Anhang sind die wichtigsten Ansätze aufgelistet. Wenn es vorkommt, dass ein Teil der für $y_p(x)$ zu wählenden Funktion bereits in der Lösung des homogenen Problems vorhanden ist, wird der Ansatz zusätzlich mit x multipliziert.

Differenzialrechnung in \mathbb{R}^n

Partielle Ableitungen

Sei Ω eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion von n Variablen. Unter der partiellen Ableitung versteht man die Ableitung einer Funktion von mehreren Variablen nach einer dieser Variablen, wobei die anderen Variablen konstant gehalten werden. f heisst an der Stelle $a \in \Omega$ nach der Variablen x_i partiell differenzierbar, falls

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

existiert. Der Limes $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ (teilweise auch $\partial_{x_i} f(a)$ oder $\partial_i f(a)$) heisst partielle Ableitung von f nach x_i . Die n partiellen Ableitungen der Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ lassen sich in einem Vektor anordnen:

$$\text{grad}(f) = \nabla f := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Dieser wird Gradient von f genannt und das Symbol ∇ heisst Nabla (Nabla-Operator).

Die Regeln für die Bildung von partiellen Ableitungen sind dieselben wie für Ableitungen von Funktionen in einer Variable (es gelten die üblichen Produkt-, Quotient- und Kettenregeln). Höhere Ableitungen sind rekursiv definiert, es gilt bspw.:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f := \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$$

Zweifache partielle Ableitungen kann man in der $n \times n$ **Hesse-Matrix** anordnen:

$$\text{Hess}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Wenn die Ableitungen $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f$ und $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f$ gleich sind (f also C^2 ist), so ist die Hesse-Matrix symmetrisch.

Satz von Schwarz Der Satz von Schwarz besagt, dass für C^2 Funktionen die zweiten partiellen Ableitungen kommutieren, d.h. dass für $f \in C^2$ gilt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

Vektorwertige Funktionen

Betrachtet man m Funktionen $f_i(x_1, \dots, x_n), i = 1, \dots, m$ von n Variablen und ordnet man diese in einem Vektor an, so bekommt man eine vektorwertige Funktkon von n Variablen, d.h.:

$$f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad (x_1, \dots, x_n) \rightarrow \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Die vektorwertige Funktion $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ heisst an der Stelle $a \in \Omega$ partiell differenzierbar, falls jede der Komponenten f_i von f in a partiell differenzierbar ist. Das **Differenzial** von f ist die folgende Matrix:

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Diese $m \times n$ Matrix wird oft auch **Jacobi-Matrix** genannt.

Stetigkeit und Differenzierbarkeit in \mathbb{R}^n

Stetigkeit in \mathbb{R}^n

Eine Funktion von mehreren Variablen $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ heisst an der Stelle $x_0 \in \Omega$ stetig, falls

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Stetig sind Polynome, rationale Funktionen (wenn der Nenner nicht verschwindet), trigonometrische und hyperbolische Funktionen, die Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion, Potenzen und alle Kompositionen (und die Summe, Differenz, das Produkt sowie der Quotient; falls der Nenner ungleich 0 ist) solcher Funktionen. Für den Grenzwert gilt dabei: Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, wobei $x_k \in \mathbb{R}^n$ mit $x_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,n})$. Sei $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Die Folge (x_k) konvergiert zu y für $k \rightarrow \infty$ genau dann wenn eine der beiden Bedingungen erfüllt ist:

1. Für alle $i, 1 \leq i \leq n$, die Sequenz der reellen Zahlen $(x_{k,i})$ konvergiert nach y_i
2. Die Sequenz der reellen Zahlen $\|x_k - y\|$ konvergiert nach 0 für $k \rightarrow \infty$.

f hat den Limes y für $x \rightarrow x_0$ wenn für jede Folge (x_k) mit $x_k \rightarrow x$ für $k \rightarrow \infty$ die Sequenz $(f(x_k))$ nach y konvergiert. Wenn wir einen Grenzwert mit zwei Variablen gegen $(0, 0)$ bilden, gibt es unendlich viele Möglichkeiten, diesen Wert zu erreichen. Deswegen ist oft der **Polarkoordinaten-Trick** hilfreich. Dabei setzt man die Polarkoordinaten $x = r \cos \varphi$ und $y = r \sin \varphi$ ein und bildet den Grenzwert $\lim_{r \rightarrow 0}$. Wenn das Resultat von φ abhängig ist, existiert es nicht (da es von der "Richtung" abhängt).

Topologie

1. Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist beschränkt wenn die Menge $\|x\|$ für $x \in X$ in \mathbb{R} beschränkt ist.

2. Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist geschlossen, wenn für jede Sequenz (x_k) in X die in \mathbb{R}^n zu einem Vektor y konvergiert, $y \in X$ gilt.
3. Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt, wenn sie beschränkt und geschlossen ist.
4. Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist offen, wenn für alle $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass die Menge:

$$\{y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_i - y_i| < \delta \text{ für alle } i\}$$

in X enthalten ist. Eine Menge ist genau dann offen wenn das Komplement $(Y = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \notin X\})$ geschlossen ist.

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetige Abbildung. Für beliebige geschlossene (offene) Mengen $Y \subset \mathbb{R}^m$, die Menge

$$f^{-1}(Y) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in Y\} \subset \mathbb{R}^n$$

ist geschlossen (offen).

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere kompakte Menge und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f beschränkt und erreicht sein Minimum / Maximum.

Differenzierbarkeit in \mathbb{R}^n

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ heisst an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar, falls eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (also eine $m \times n$ Matrix) existiert für welche Folgendes gilt:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$$

Es wird $df(x_0) = A$ notiert.

Wenn alle partiellen Ableitungen für f auf Ω existieren und auf Ω stetig sind, dann ist f differenzierbar und stetig auf Ω und das Differenzial $df(x_0)$ entspricht der Jacobi-Matrix.

Wenn $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbare Funktionen auf Ω sind, dann ist $f + g$ differenzierbar mit dem Differenzial $d(f + g) = df + dg$. Wenn $m = 1$, dann ist fg differenzierbar. Wenn $m = 1$ und $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \Omega$, dann ist f/g differenzierbar.

f ist von der Klasse C^1 , wenn die Funktion differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen stetig sind. f ist von der Klasse C^k , wenn die Funktion differenzierbar und alle partiellen Ableitungen von der Klasse C^{k-1} sind. Für Funktionen der Klasse k , ist die Reihenfolge der ersten k partiellen Ableitungen irrelevant, für $k = 2$ gilt also bspw. $\partial_{x,y}f = \partial_{y,x}f$.

Kettenregel Sei

$$f \circ g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l, x \rightarrow g(x) \rightarrow f(g(x))$$

die Zusammensetzung der differenzierbaren Funktionen $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ mit $U \subset g(\Omega)$. Die zusammengesetzte Abbildung $f \circ g$ ist dann auf Ω differenzierbar und für das Differenzial gilt die Kettenregel:

$$d(f \circ g)(x) = df(g(x)) \cdot dg(x)$$

Insbesondere also für die Jacobi-Matrix:

$$J_{f \circ g}(x_0) = J_f(g(x_0)) J_g(x_0)$$

Eine wichtige Anwendung sind Polarkoordinaten, wobei $x = r \cos \theta$ und $y = r \sin \theta$, also $g(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ und somit $h(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ (eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ wird in Polarkoordinaten ausgedrückt, also durch $h = f \circ g$ ersetzt). Via Kettenregel erhält man $\partial_r h = \cos(\theta) \partial_x f + \sin(\theta) \partial_y f$ und $\partial_\theta h = -r \sin(\theta) \partial_x f + r \cos(\theta) \partial_y f$ (wobei die partiellen Ableitungen von f an der Stelle $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ evaluiert werden).

Tangent space Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Funktion. Der Graph der linearen Approximation (für $x_0 \in X$)

$$g(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)$$

ist der Tangent space an der Stelle x_0 .

Directional Derivative Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion, $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor ungleich 0 und $x_0 \in X$. Man sagt, f hat ein directional derivative $w \in \mathbb{R}^m$ in der Richtung v , wenn die Funktion g auf der Menge $I = \{t \in \mathbb{R} \mid x_0 + tv \in X\}$, definiert durch

$$g(t) = f(x_0 + tv)$$

eine Ableitung an der Stelle $t = 0$ hat und dieses zu w identisch ist. Für differenzierbare Funktionen gilt, dass für beliebige $x_0 \in X$, f ein directional derivative an der Stelle x_0 hat und dieses identisch zu $df(x_0)(v)$ ist.

Change of variable / Umkehratz Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar sowie $x_0 \in X$. f ist eine "change of variable" um x_0 , wenn:

- ein Radius $r > 0$ existiert so dass f auf dem Ball

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r\}$$

die Eigenschaft hat, dass das Bild $Y = f(B)$ offen in \mathbb{R}^n ist.

- eine differenzierbare Abbildung $g : Y \rightarrow B$ existiert, so dass $f \circ g = \text{Id}_Y$ und $g \circ f = \text{Id}_B$

Der Umkehratz besagt: Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Für $x_0 \in X$ mit $\det(J_f(x_0)) \neq 0$ (die Jacobi-Matrix von f an der Stelle x_0 also invertierbar ist), dann ist f eine "change of variable" um x_0 . Die Jacobi-Matrix von g an der Stelle x_0 ist dann bestimmt durch:

$$J_g(f(x_0)) = J_f(x_0)^{-1}$$

Wenn f von der Klasse C^k ist, so ist auch f von der Klasse C^k . **Implicit Function Theorem** Sei $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ von der Klasse C^k mit $k \geq 1$. Sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ so dass $g(x_0, y_0) = 0$. Wir nehmen an, dass

$$\partial_{y_g}(x_0, y_0) \neq 0$$

Dann existiert eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$, die x_0 beinhaltet sowie ein offener Intervall $I \subset \mathbb{R}$, der y_0 beinhaltet und eine

Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ von der Klasse C^k , so dass das Gleichungssystem

$$\begin{cases} g(x, y) = 0 \\ x \in U, \quad y \in I \end{cases}$$

äquivalent zu $y = f(x)$ ist. Es gilt $f(x_0) = y_0$. Der Gradient von f an der Stelle x_0 ist gegeben durch:

$$\nabla f(x_0) = -\frac{1}{(\partial_{y_g})(x_0, y_0)} \nabla_{x_g}(x_0, y_0)$$

wobei $\nabla_{x_g} = (\partial_{x_1} g, \dots, \partial_{x_n} g)$.

Taylorpolynome Sei $k \geq 1$ eine natürliche Zahl, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion der Klasse C^k auf X und $x_0 \in X$ fix. Das k -te Taylorpolynom von f an der Stelle x_0 ist das Polynom mit n Variablen von Grad $\leq k$, gegeben durch:

$$T_k f(y; x_0) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) y_i + \dots$$

$$+ \sum_{m_1 + \dots + m_n = k} \frac{1}{m_1! \dots m_n!} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}}(x_0) y_1^{m_1} \dots y_n^{m_n}$$

Wobei die letzte Summe über die Kombinationen von n nicht-negativen natürlichen Zahlen (es kann also auch $m_i = 0$ sein) iteriert so dass die Summe k ist.

Für $k = 2$ ist dies äquivalent zu:

$$f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot y + \frac{1}{2} y^t \text{Hess}_f(x_0, y_0) y$$

y ist dabei $(x - x_0, y - y_0)!$

Für ein $x_0 \in X$ wird $E_k f(x; x_0)$ folgendermassen definiert:

$$f(x) = T_k f(x - x_0; x_0) + E_k f(x; x_0)$$

Es gilt:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{E_k f(x; x_0)}{\|x - x_0\|^k} = 0$$

Kritische Punkte Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Wenn für ein $x_0 \in X$ $f(y) \leq f(x_0)$ für alle y nahe genug bei x_0 (lokales Maximum bei x_0) oder $f(y) \geq f(x_0)$ für alle y nahe genug bei x_0 (lokales Minimum bei x_0) gilt, dann ist $df(x_0) = 0$ ($\nabla f(x_0) = 0$), also äquivalent

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$$

für $1 \leq i \leq n$. Punkte $x_0 \in X$ mit $\nabla f(x_0) = 0$ werden somit kritische Punkte von f genannt.

Auf einer offenen Menge müssen Punkte, bei welchen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ maximal / minimal ist, nicht zwingend existieren. Wenn f auf einer kompakten Menge \overline{X} definiert ist hingegen schon, wobei in diesem Fall obige Bedingung nicht gilt. Deswegen wird in diesem Fall die kompakte Menge oft unterteilt mit $\overline{X} = X \cup B$, wobei X offen ist und B die "Grenze" ist. f muss dann ebenfalls an der Grenze B evaluiert werden.

Kritische Punkte werden *nicht-degeneriert* genannt, wenn die Determinante der Hesse-Matrix nicht 0 ist.

Sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion der Klasse C^2 und x_0 ein nicht-degenerierter kritischer Punkt von f . Mit p und q wird die Anzahl positiver / negativer Eigenwerte von $\text{Hess}_f(x_0)$ bezeichnet. Wir unterscheiden drei Fälle:

1. $p = n / q = 0$ (Hess bei x_0 ist also eine positiv-definite symmetrische Matrix): f hat ein lokales Minimum bei x_0
2. $p = 0 / q = n$ (Hess bei x_0 ist also eine negativ-definite symmetrische Matrix): f hat ein lokales Maximum bei x_0
3. Ansonsten, wenn also $pq \neq 0$, die Funktion f hat kein lokales Extremum bei x_0 . Man sagt, dass f bei x_0 einen Sattelpunkt hat.

(Eigenschaften für Definitheit sind im Abschnitt "Lineare Algebra" beschrieben)

Lagrange multipliers Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen der Klasse C^1 . Wenn $x_0 \in X$ ein lokales Extremum der Funktion f beschränkt auf die Menge

$$Y = \{x \in X | g(x) = 0\}$$

ist, dann ist entweder $\nabla g(x_0) = 0$ oder es existiert ein λ so dass:

$$\begin{cases} \nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0) \\ g(x_0) = 0 \end{cases}$$

D.h. es existiert ein λ so dass (x_0, λ) ein kritischer Punkt der differenzierbaren Funktion $h : X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit:

$$h(x, \lambda) = f(x) - \lambda g(x)$$

λ wird Lagrange Multiplier an der Stelle x_0 genannt.

Integralrechnung in \mathbb{R}^n

Wegintegral

1. Sei $I = [a, b]$ ein geschlossener, beschränkter Intervall in \mathbb{R} . Sei

$$f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$$

eine stetige Funktion von I nach \mathbb{R}^n , d.h. f_i ist stetig für $1 \leq i \leq n$. Dann ist:

$$\int_a^b f(t) dt = \left(\int_a^b f_1(t) dt, \dots, \int_a^b f_n(t) dt \right) \in \mathbb{R}^n$$

2. Eine parametrisierte Kurve in \mathbb{R}^n ist eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, die stückweise stetig ist, d.h. es existiert ein $k \geq 1$ und eine Partition

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b$$

so dass f auf $]t_{j-1}, t_j[$ C^1 ist für $1 \leq j \leq k$. γ ist eine parametrisierte Kurve oder ein pathx zwischen $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$.

3. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve, $X \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, die das Bild von γ beinhaltet und $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion. Das Integral

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \in \mathbb{R}$$

wird Wegintegral von f entlang γ genannt und wird folgendermassen aufgeschrieben:

$$\int_{\gamma} f(s) \cdot ds, \quad \text{oder} \quad \int_{\gamma} f(s) \cdot d\vec{s}$$

Orientierte Reparametrisierungen Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve. Eine orientierte Reparametrisierung von γ ist eine parametrisierte Kurve $\sigma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass $\sigma = \gamma \circ \varphi$, wobei $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ eine stetige Abbildung ist, die auf $]a, b[$ differenzierbar ist, streng wachsend ist und $\varphi(a) = c$ sowie $\varphi(b) = d$ erfüllt. Für solche orientierte Reparametrisierungen gilt:

$$\int_{\gamma} f(s) \cdot d\vec{s} = \int_{\sigma} f(s) \cdot d\vec{s}$$

Konservative Vektorfelder Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ und $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Wenn für alle x_1, x_2 in X das Wegintegral

$$\int_{\gamma} f(s) \cdot d\vec{s}$$

unabhängig von der parametrisierten Kurve γ in X von x_1 zu x_2 ist, wird das Vektorfeld konservativ genannt. Ein Vektorfeld ist genau dann konservativ, wenn

$$\int_{\gamma} f(s) \cdot d\vec{s} = 0$$

für beliebige geschlossene $(\gamma(a) = \gamma(b))$ parametrisierte Kurven in X .

Potenzial Sei X eine offene Menge und f ein konservatives Vektorfeld. Dann existiert eine C^1 Funktion g auf X so dass $f = \nabla g$. Wenn beliebige zwei Punkte auf X mit einer parametrisierten Kurve verbunden werden können (X somit "path-connected" ist), dann ist g bis zur Addition einer Konstante eindeutig. g wird Potenzial für f genannt. Die Gleichung $\nabla g = f$ ist linear. Wenn somit f_1 und f_2 konservativ mit den Potenzialen g_1 und g_2 sind, so ist es auch $af_1 + bf_2$ mit den Potenzialen $ag_1 + bg_2$. Um ein Potenzial (wenn man weiss, dass ein Vektorfeld konservativ ist) zu finden, kann folgender Ansatz verwendet werden: Man findet durch Integration von $f_1(x)$ hinsichtlich x_1 (mit den anderen Variablen fixiert) eine Funktion g , so dass

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = f_1(x)$$

Dies ergibt eine Funktion mit einer Teilfunktion g_1 , die nur von (x_2, \dots, x_n) abhängt. Somit kann weiter

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} = f_2(x)$$

gelöst werden, wobei mit der "partiellen" Formel für g (die g_1 beinhaltet), gestartet wird. Dies wird solange wiederholt, bis keine unbekannten Funktionen mehr vorhanden sind.

Wenn ein Potenzial existiert, ist das Vektorfeld zwingend konservativ, es kann also auch ein Potenzial gesucht werden, um zu zeigen, dass ein Vektorfeld konservativ ist. Für konservative Vektorfelder gilt (wobei f das Potenzial ist):

$$\int_{\gamma} f(s) \cdot d\vec{s} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Eigenschaften konservativer Vektorfelder Eine notwendige (im Allgemeinen, siehe unten, nicht ausreichende!)

Eigenschaft für konservative Vektorfelder: Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld der Klasse C^1 mit:

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

Wenn f konservativ ist, dann gilt

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

für alle Zahlen $1 \leq i \neq j \leq n$. Für $n = 2$ ist die Bedingung somit einfach:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y}$$

Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist sternförmig (um x_0), wenn ein $x_0 \in X$ existiert, so dass für alle $x \in X$ das Liniensegment, das x_0 mit x verbindet, in X enthalten ist.

Wenn X eine sternförmige, offene Teilmenge von \mathbb{R}^n ist, so ist obige Eigenschaft ausreichend, d.h. alle Vektorfelder mit ihr sind konservativ.

Rotation eines Vektorfeldes Sei $X \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge und $f : x \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein C^1 Vektorfeld. Die Rotation (curl) von f ist das folgende stetige Vektorfeld auf X :

$$\text{curl}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial_y f_3 - \partial_z f_2}{\partial_x f_2 - \partial_y f_1} \end{pmatrix}$$

Für $n = 3$ ist die vorher genannte Bedingung erfüllt, wenn die Rotation des Vektorfeldes 0 ist.

Das Riemann-Integral in \mathbb{R}^n

Für alle beschränkten, geschlossenen Teilmengen $X \subset \mathbb{R}^n$ und alle stetigen Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, kann man das Integral von f über X definieren, notiert mit:

$$\int_X f(x) dx$$

Dabei handelt es sich um eine reelle Zahl und es erfüllt die folgenden Bedingungen:

1. **Compatibility:** Für $n = 1$ und $X = [a, b]$ (mit $a \leq b$) ist das Integral von f über X das Riemann-Integral von f :

$$\int_{[a,b]} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

2. **Linearity:** Wenn f und g stetig auf X sind und a, b reelle Zahlen sind, dann:

$$\int_X (af_1(x) + bf_2(x)) dx = a \int_X f_1(x) dx + b \int_X f_2(x) dx$$

3. **Positivity:** Wenn $f \leq g$, dann:

$$\int_X f(x) dx \leq \int_X g(x) dx$$

Wenn $f \geq 0$ somit:

$$\int_X f(x) dx \geq 0$$

Wenn $Y \subset X$ kompakt ist und $f \geq 0$:

$$\int_Y f(x) dx \leq \int_X f(x) dx$$

4. Upper Bound / triangle inequality:

$$\left| \int_X f(x) dx \right| \leq \int_X |f(x)| dx$$

$$\left| \int_X (f(x) + g(x)) dx \right| \leq \int_X |f(x)| dx + \int_X |g(x)| dx$$

5. **Volume:** Für $f = 1$ ist das Integral von f das Volumen in \mathbb{R}^n der Menge X und wenn $f \geq 0$, das Integral von f ist das Volumen der Menge:

$$\{(x, y) \in X \times \mathbb{R} | 0 \leq y \leq f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Wenn X ein beschränktes Rechteck ist, also $X = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ und $f = 1$, dann gilt:

$$\int_X dx = (b_n - a_n) \cdots (b_1 - a_1)$$

6. **Multiple integral / Fubini's Theorem** Wenn n_1, n_2 natürliche Zahlen ≥ 1 sind so dass $n = n_1 + n_2$, definiere für $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$:

$$Y_{x_1} = \{x_2 \in \mathbb{R}^{n_2} | (x_1, x_2) \in X\} \subset \mathbb{R}^{n_2}$$

Sei X_1 die Menge der $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ so dass Y_{x_1} nicht leer ist. X_1 ist kompakt in \mathbb{R}^{n_1} und Y_{x_1} ist kompakt in \mathbb{R}^{n_2} für alle $x_1 \in X_1$. Wenn die Funktion auf X_1

$$g(x_1) = \int_{Y_{x_1}} f(x_1, x_2) dx_2$$

stetig ist, dann:

$$\int_X f(x_1, x_2) dx = \int_{X_1} g(x_1) dx_1 = \int_{X_1} \left(\int_{Y_{x_1}} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1$$

Tauscht man die Rolle von x_1 und x_2 aus, erhält man:

$$\int_X f(x_1, x_2) dx = \int_{X_2} \left(\int_{Z_{x_2}} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2$$

wobei $Z_{x_2} = \{x_1 | (x_1, x_2) \in X\}$.

Eine Teilmenge von \mathbb{R}^2 heisst y -Normalbereich, wenn sie sich wie folgt darstellen lässt:

$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$ Beim x -Normalbereich sind die Rollen vertauscht: $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | c \leq y \leq d, h(y) \leq x \leq k(y)\}$ Für einen y -Normalbereich gilt mit Fubini's Theorem:

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx = \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} f(x, y) dy dx$$

Und für einen x -Normalbereich:

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx = \int_c^d \int_{h(y)}^{k(y)} f(x, y) dx dy$$

Das Konzept lässt sich auf \mathbb{R}^n erweitern, wobei die Grenzen immer von den vorherigen Variablen abhängen müssen.

7. **Domain additivity:** Wenn X_1 und X_2 kompakte Teilmengen von \mathbb{R}^n sind und f stetig auf $X_1 \cup X_2$ ist, dann gilt:

$$\int_{X_1 \cup X_2} f(x) dx = \int_{X_1 \cap X_2} f(x) dx + \int_{X_1 \setminus X_2} f(x) dx + \int_{X_2 \setminus X_1} f(x) dx$$

Insbesondere also wenn $X_1 \cap X_2$ leer ist:

$$\int_{X_1 \cup X_2} f(x) dx = \int_{X_1} f(x) dx + \int_{X_2} f(x) dx$$

Vernachlässigbare Teilmengen

1. Sei $1 \leq m \leq n$ eine natürliche Zahl. Eine parametrisierte m -Menge in \mathbb{R}^n ist eine stetige Abbildung

$$f : [a_1, b_1] \times \dots \times [a_m, b_m] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

die C^1 auf $]a_1, b_1[\times \dots \times]a_m, b_m[$ ist.

2. Eine Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ ist vernachlässigbar, wenn eine natürliche Zahl $k \geq 0$ existiert und parametrisierte m_i -Mengen $f_i : X_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $1 \leq i \leq k$ und $m_i < n$ so dass $X \subset f_1(X_1) \cup \dots \cup f_k(X_k)$.

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge, die vernachlässigbar ist. Dann gilt für alle stetigen Funktionen auf X :

$$\int_X f(x) dx = 0$$

Uneigentliche Integrale Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränkter Intervall und $J = [a, +\infty[$ für ein $a \in \mathbb{R}$. Sei f eine stetige Funktion auf $X = J \times I$. f ist Riemann-integrierbar auf X wenn der folgende Limes existiert:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{[a, x] \times I} f(x, y) dx dy = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x \left(\int_I f(x, y) dy \right) dx$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_I \left(\int_a^x f(x, y) dx \right) dy$$

Sei f stetig auf \mathbb{R}^2 und $f \geq 0$. Man sagt, dass f auf \mathbb{R}^2 Riemann-integrierbar ist, wenn der Limes existiert:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[-R, R]^2} f(x, y) dx dy$$

Mit Fubini's Formel erhalten wir für den obigen Integral auch:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy$$

Wenn $|f| \leq g$ und man weiss, dass das unbestimmte Integral von g existiert, folgt daraus die Existenz des unbestimmten Integrals von f .

Change of variable Seien $\bar{X} \subset \mathbb{R}^n$ und $\bar{Y} \subset \mathbb{R}^n$ kompakte Teilmengen, $\varphi : \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$ eine stetige Abbildung. Wir nehmen an, dass wir $\bar{X} = X \cup B$ und $\bar{Y} = Y \cup C$ schreiben können, wobei X und Y offen sind, B und C vernachlässigbar sind und

φ auf X eine C^1 bijektive Abbildung von X nach Y ist. Dann gilt:

$$\int_{\bar{X}} f(\varphi(x)) |\det(J_{\varphi}(x))| dx = \int_{\bar{Y}} f(y) dy$$

Eine wichtige Anwendung sind Polarkoordinaten mit

$$\bar{Y}_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

Man definiert $\varphi : \bar{X}_R \rightarrow \bar{Y}_R$ mit $\bar{X}_R = [0, R] \times [-\pi, \pi]$ und

$$\varphi(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

Die Jacobi-Matrix ist

$$J_{\varphi}(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

und $\det(J_{\varphi}(r, \theta)) = r$. Somit ergibt sich:

$$\int_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_0^R \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

Eine weitere wichtige Anwendung sind Kugelkoordinaten (r, θ, φ) in \mathbb{R}^3 , wobei $r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ und $0 \leq \varphi \leq \pi$. Die Determinante ist $-r^2 \sin(\varphi)$, somit ergibt sich:

$$\int_B f(x, y, z) dx dy dz =$$

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi) r^2 \sin(\varphi) d\varphi d\theta dr$$

Ausserdem existieren in \mathbb{R}^2 elliptische Koordinaten $(0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi)$ mit $x = ra \cos \varphi, y = rb \sin \varphi, dx dy = ab r dr d\varphi$. Und in \mathbb{R}^3 Zylinderkoordinaten $(0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta < 2\pi, -\infty < z < \infty)$ mit $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z$ und $dx dy dz = r dr d\varphi dz$.

Anwendungen des Integrals

1. **Massenschwerpunkt:** Sei X eine kompakte Teilmenge von \mathbb{R}^n so dass das Volumen von X positiv ist. Der Massenschwerpunkt von X ist der Punkt $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ so dass $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ mit

$$\bar{x}_i = \frac{1}{\text{Vol}(X)} \int_X x_i dx$$

2. **Flächeninhalt:** Man betrachtet eine stetige Funktion $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ die C^1 auf $]a, b[\times]c, d[$ ist. Sei

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in [a, b] \times [c, d], z = f(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3$$

der Graph von f . Der Flächeninhalt dieser Oberfläche ist gegeben durch:

$$\int_a^b \int_c^d \sqrt{1 + (\partial_x f(x, y))^2 + (\partial_y f(x, y))^2} dx dy$$

Green-Formel

Eine einfache parametrisierte Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist eine geschlossene parametrisierte Kurve so dass $\gamma(t) \neq \gamma(s)$ ausser wenn $t = s$ oder $\{s, t\} = \{a, b\}$ und so dass $\gamma'(t) \neq 0$ für $a < t < b$.

Sei $X \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte Menge mit der Grenze ∂X die Vereinigung von endlich vielen einfachen parametrisierten Kurven $\gamma_1, \dots, \gamma_k$. Wir nehmen an, dass $\gamma_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Eigenschaft hat, dass X immer "links" vom Tangentenvektor $\gamma_i'(t)$ an der Stelle $\gamma_i(t)$ liegt. Sei $f = (f_1, f_2)$ ein Vektorfeld der Klasse C^1 definiert auf einer offenen Menge, die X enthält.

Dann gilt:

$$\int_X \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy = \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} f \cdot d\vec{s}$$

Mit dem Vektorfeld $f(x, y) = (0, x)$ (und anderen so dass

$\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1$) hat man die eine Möglichkeit, das Volumen als Wegintegral zu berechnen: Sei $\gamma_i = (\gamma_{i,1}, \gamma_{i,2}) : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^2$, dann haben wir:

$$\text{Vol}(X) = \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} x \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^k \int_{a_i}^{b_i} \gamma_{i,1}(t) \gamma_{i,2}'(t) dt$$

Anhang

Elementare Integrale

$f'(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	c	$cx + C$
$r \cdot x^{r-1}$	x^r	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + C$
$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln x + C$
$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$2\sin(x)\cos(x)$	$\sin^2(x)$	$\frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x)) + C$
$-2\sin(x)\cos(x)$	$\cos^2(x)$	$\frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x)) + C$
$\cos^2(x) - \sin^2(x)$	$\sin(x)\cos(x)$	$-\frac{1}{2}(\cos^2(x)) + C$
$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$-\ln \cos(x) + C$
e^x	e^x	$e^x + C$
$c \cdot e^{cx}$	e^{cx}	$\frac{1}{c} \cdot e^{cx} + C$
$\ln(c) \cdot c^x$	c^x	$\frac{c^x}{\ln(c)} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$x(\ln x - 1) + C$
$\frac{1}{\ln(a) \cdot x}$	$\log_a x $	$\frac{x}{\ln(a)}(\ln x - 1) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$
$\cosh(x)$	$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x) + C$
$\sinh(x)$	$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\sinh(x) + C$
$\frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\tanh(x)$	$\log(\cosh(x)) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arcsinh}(x)$	$x \cdot \operatorname{arcsinh}(x) - \sqrt{x^2 + 1} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$	$\operatorname{arccosh}(x)$	$x \cdot \operatorname{arccosh}(x) - \sqrt{x^2 - 1} + C$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arctanh}(x)$	$x \cdot \operatorname{arctanh}(x) + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^4 t dt &= \int_0^{2\pi} \sin^4 t dt = \frac{3\pi}{4} & \int_0^{2\pi} \cos^3 t dt &= \int_0^{2\pi} \sin^3 t dt = 0 \\ \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \pi & \int_0^{2\pi} \sin t \cos^2 t dt &= \int_0^{2\pi} \cos t \sin^2 t dt = 0 \\ & & \int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt &= \int_0^{2\pi} \sin t dt = \int_0^{2\pi} \cos t dt = 0 \end{aligned}$$

Trigonometrische Substitution

Ausdruck	Substitution	Identität
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin \theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan \theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta, 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \text{ oder } \pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$	$\sec^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta$

Ansätze für Methode des direkten Ansatzes

Inhomogener Term $b(x)$	Ansatz für $y_p(x)$
$\sum_{i=0}^m b_i x^i$	$\sum_{i=0}^m A_i x^i$
$e^{\alpha x} \sum_{i=0}^m b_i x^i$	$e^{\alpha x} \sum_{i=0}^m A_i x^i$
$\sin(\omega x) \sum_{i=0}^m b_i x^i + \cos(\omega x) \sum_{i=0}^m c_i x^i$	$\sin(\omega x) \sum_{i=0}^m A_i x^i + \cos(\omega x) \sum_{i=0}^m B_i x^i$
$\sinh(\omega x) \sum_{i=0}^m b_i x^i + \cosh(\omega x) \sum_{i=0}^m c_i x^i$	$\sinh(\omega x) \sum_{i=0}^m A_i x^i + \cosh(\omega x) \sum_{i=0}^m B_i x^i$
$e^{\alpha x} \sin(\omega x) \sum_{i=0}^m b_i x^i + e^{\alpha x} \cos(\omega x) \sum_{i=0}^m c_i x^i$	$e^{\alpha x} \sin(\omega x) \sum_{i=0}^m A_i x^i + e^{\alpha x} \cos(\omega x) \sum_{i=0}^m B_i x^i$

Anleitung Partialbruchzerlegung

1. Nullstellen des Nenners berechnen

2. Zuordnung eines Partialbruchs zur Nullstelle:

Reelle Nullstellen: Wenn x_1 eine einfache Nullstelle ist $\rightarrow \frac{A}{x-x_1}$. Wenn es eine zweifache Nullstelle ist $\rightarrow \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{(x-x_1)^2}$. Bei einer r-fachen Nullstelle $\rightarrow \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x-x_1)^r}$

Nichtreelle Nullstellen: Aus quadratischem Term $x^2 + px + q$ wird $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$

3. Ansatz zur Partialbruchzerlegung aufstellen, Koeffizienten $((A, B, C \dots))$ berechnen.

Bspw. $\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3} = \frac{A(x-x_2)(x-x_3) + B(x-x_1)(x-x_3) + C(x-x_1)(x-x_2)}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}$

Wichtige Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tan^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n) = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^{-1}(n) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^a} = 0 \quad \forall a > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{e^n - 1}{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \log x = 0 \quad \forall a > 0$$

$$\tan^{-1}(0) = 0$$

Beispiele

Differenzialgleichungen *Trennung der Variablen:*

$$(x^2 + 1)y' + y^2 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{1+x^2} \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = -\int \frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow y(x) = \frac{1}{\arctan(x) + C}$$

Variation der Konstanten: $y' - y = 1, y(0) = 0$ Mittels Trennung der Variablen kommt man auf $\log|y| = x + C$ und somit $y_H(x) = Ae^x$. Also ist $y_p(x) = A(x)e^x$ und einsetzen ergibt: $A'e^x + Ae^x - Ae^x = 1 \Rightarrow A' = e^{-x} \Rightarrow A(x) = -e^{-x}$ und somit $y_p(x) = 1$. Die Allgemeine Lösung ist $y(x) = Ae^x - 1$, mit der Anfangsbedingung ergibt sich $A = 1$ und somit $y(x) = e^x - 1$.

Methode des direkten Ansatzes & (komplexer) Euler-Ansatz: $y'' - 4y' + 13y = xe^x$ Das charakteristische Polynom lautet $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$, also ist $\lambda = 2 \pm 3i$ und $y_h(x) = e^{2x}(\tilde{A}\sin(3x) + \tilde{B}\cos(3x))$. Der Ansatz lautet $y_p(x) = e^x(ax + b)$. Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung ergibt $a = \frac{1}{10}$ und $b = \frac{1}{50}$, somit $y_p(x) = (\frac{x}{10} + \frac{1}{50})e^x$

Substitution: $y' = (x - y)^2 + 1, y(1) = -1$. Die Gleichung hat die Form $y' = h(ax + by + c)$ mit $h(z) = z^2 + 1, a = 1, b = -1$ und $c = 0$. Mit $z(x) = x - y \Rightarrow y = x - z(x) \Rightarrow y' = 1 - z'$ erhält man $z' = -z^2$, was man mit der Trennung der Variablen zu $z = \frac{1}{x+C}$ löst. Eine Rücktransformation ergibt $y(x) = x - \frac{1}{x+C}$ und aus der Anfangsbedingung folgt $C = -1/2$.

Substitution: $y' = \frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{x^2} + 1 \right)$. Mit $z(x) = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = z + xz'$ erhält man $z' = \frac{1}{2x}(z - 1)^2$, was separierbar ist.

Grenzwerte in mehreren Variablen Sei $f(x, y) = \frac{y}{x-1}$ auf

Wichtige Reihen / Summenformeln

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \quad (\text{harmonisch})$$

$$n^2 = \sum_{k=1}^n 2k - 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Anleitung Integralsubstitution

Bei bestimmten Integralen kann die Grenze mitsubstituiert werden oder die Stammfunktion ermittelt werden und am Schluss eingesetzt werden.

1. Eine geeignete Substitution $u = g(x)$ finden (oftmals Terme in Wurzeln / Potenzen / Brüche).
2. $du = g'(x)dx$ aufschreiben.
3. Prüfen, ob Integral mit du dem ursprünglichen Integral entspricht. Ansonsten allenfalls Terme, die noch übrig sind, substituieren oder Faktoren vor das du hängen.

der Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq 1\}$. Existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x, y)$? Würde er existieren, wäre er auf der Linie mit $y = 0$ gleich 0. Da aber die Linie $y = x - 1$ durch $(1, 0)$ geht und er auf dieser Linie nicht existiert, existiert er nicht.

Richtungsableitungen Sei $f(x, y) = \sin(x^2) \cos(y^2)$, $a = (0, 2)$, $u = \frac{2}{\sqrt{5}}(\frac{1}{2}, 1)$. Berechne $D_u f(a)$: Per Definition

gilt: $D_u f(a) = \frac{d}{dt}(f(a + tu))|_{t=0}$. Mit Einsetzen finden wir $D_u f(a) = \frac{d}{dt}(f(a + tu))|_{t=0}$. Ableitung (mit der Produktregel) und einsetzen von $t = 0$ ergibt 0.

Tangentialebene Sei $f(x, y) = 2x^3 - y^2$. Berechne die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $(x_0, y_0) = (1, 1)$: Es gilt $z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) * (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) * (y - y_0)$. Da $z_0 = f(x_0, y_0) = 1$ ist, bekommen wir $z - 1 = 6 * (x - 1) - 2 * (y - 1)$.

Umkehrsatze Betrachte die Abbildung $f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Berechne $d(f^{-1})(0, 1)$: Da $f(1\pi/2) = (0, 1)$, muss die Matrix $df(1, \pi/2)$ invertiert werden.

Lagrange-Multiplis Finde Maxima und Minima von $f = xy$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 2$. Wir erhalten die beiden Bedingungen $y = \lambda 2x$ und $x = \lambda 2y$, durch Gleichstellen von λ also $x^2 = y^2 \Rightarrow y = \pm x$. Einsetzen in $g(x)$ ergibt die kritischen Punkte $(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$.

Parametrisierte Kurven Parametrisiere eine Kurve, die die Ellipse mit Gleichung $(x - 3)^2 + 4y^2 = 4$ einmal im Gegenuhrzeigersinn durchläuft: Die Gleichung wird in Form einer Kreisgleichung $a^2 + b^2 = r^2$ mit $a = x - 3, b = 2y$ und

$r = 2$ geschrieben. Da der Kreis mit $a = r \cos t, b = r \sin t, t \in [0, 2\pi]$ parametrisiert werden kann, setzt man $x - 3 = 2 \cos t$ und $2y = 2 \sin t$ und erhält als Kurve $t \rightarrow (3 + 2 \cos t, \sin t)$.

Konservative Vektorfelder Finde das Potential g für:

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x^2 \cos(yz) + z \sin(y) \\ -3x^3 z \sin(yz) + xz \cos(y) + 2y \\ -3x^3 y \sin(yz) + x \sin(y) + 2z \end{pmatrix}$$

Wegen $\frac{\partial g}{\partial x} = 6x^2 \cos(yz) + z \sin(y)$ haben wir den Ansatz: $g(x, y, z) = 3x^3 \cos(yz) + xz \sin(y) + h(y, z)$. Um $\frac{\partial g}{\partial y} = -3x^3 z \sin(yz) + xz \cos(y) + 2y$ zu erfüllen, muss $-3x^3 z \sin(yz) + xz \cos(y) + \frac{\partial h}{\partial y} = -3x^3 z \sin(yz) + xz \cos(y) + 2y$ gelten. Somit ist $h(y, z) = y^2 + k(z)$ und wegen $\frac{\partial g}{\partial z} = -3x^3 y \sin(yz) + x \sin(y) + 2z$ muss $-3x^3 y \sin(yz) + x \sin(y) + k'(z) = -3x^3 y \sin(yz) + x \sin(y) + 2z$ gelten, womit $k(z) = z^2 + c$ folgt. Für $c = 0$ haben wir also:

$$g(x, y, z) = 3x^3 \cos(yz) + xz \sin(y) + y^2 + z^2$$

Integral change of variable Berechne $\int_D (|x| - y^2) dx dy$ wobei D die um $(0, 1)$ zentrierte Disk mit Radius 2 ist: Mit Polarkoordinaten, wobei $(x, y) = (r \cos \theta, 1 + r \sin \theta)$ gilt: $\int_0^2 \int_0^{2\pi} (|r \cos \theta| - (1 + r \sin \theta)^2) r dr d\theta$ Dies ergibt $\frac{32}{3} - 8\pi$.
Satz von Green Berechne den Flächeninhalt der Einheitsdisk mithilfe des Satzes von Green: Der Rand der Disk wird mit $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \rightarrow (\cos t, \sin t)$ parametrisiert. Mit $f(x, y) = (0, x)$ erhalten wir $\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi$