Zusammenfassung Analysis I

Grundlagen

Beweis durch vollständige Induktion: Es seien die Aussagen $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen. Es gilt:

1. $A(1)$ ist wahr (Induktionsverankerung)
2. $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $A(n)$ wahr $\Leftarrow A(n+1)$ wahr.

Dann ist die Aussage $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

Binomischer Lehrsatz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) x^{n-k} y^k$$

Wobei $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

Ausserdem:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \qquad a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

Mitternachtsformel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Natürliche Zahlen

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}, \quad \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

Potenzgesetze / Logarithmus / Wurzelgesetze

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{\frac{b}{n}} = \sqrt[n]{a^b}$$

$$\log(0) = \text{undef.}$$

$$\log(1) = 0$$

$$x = \log_a(y) \Leftrightarrow a^x = y$$

$$-\log(x) = \log(\frac{1}{x})$$

$$\log(x) - \log(y) = \log(\frac{x}{y})$$

$$\frac{\log(x)}{\log(a)} = \log_a(x)$$

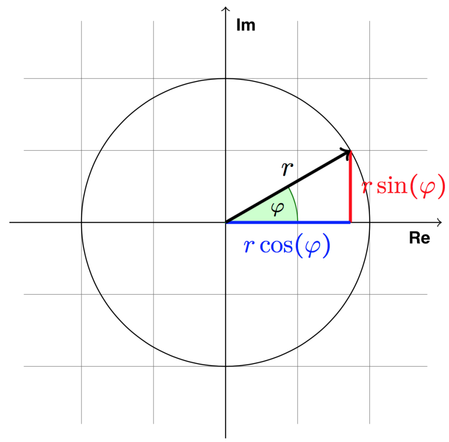
$$n \log x = \log x^n$$

$$\log_a(u) + \log_a(v) = \log_a(u \cdot v)$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} \qquad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Komplexe Zahlen



$$z = x + iy = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = re^{i\varphi}$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\arg(z) = \varphi = \arctan(\frac{y}{x}) \quad \text{(je nach Quadrant)}$$

$$x = r\cos(\varphi)$$

$$y = r\sin(\varphi)$$

$$zw = (re^{i\varphi}) \cdot (se^{i\psi}) = rse^{i(\varphi+\psi)}$$

$$\sqrt[q]{z} = \sqrt[q]{s}e^{i\phi}, \text{ wobei } \phi = \frac{\varphi}{q} \mod \frac{2\pi}{q}$$

$$e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)} = i, \ e^{i\pi} = 1, \ e^{-i\pi} = -1$$

$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$

$$\overline{z} = x - iy$$

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

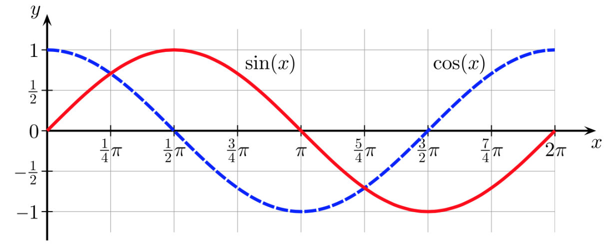
$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = -1$$

$$|z|^2 = z\overline{z}$$

$$|zw|^2 = (zw) \cdot \overline{(zw)} = |z|^2|w|^2$$

Trigonometrie



Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Winkel	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\sin\left(\cos^{-1}(x)\right) = \cos\left(\sin^{-1}(x)\right) = \sqrt{1 - x^2}$$

Supremum und Infimum

Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Eine Zahl $b \in \mathbb{R}$ heisst obere Schranke für A, falls $\forall a \in A$ gilt: $a \leq b$.
Eine untere Schranke für A ist eine Zahl $c \in \mathbb{R}$, so dass $\forall a \in A$ gilt: $a \geq c$.
Das Supremum von einer Menge A (geschrieben $\sup A$) ist die kleinste obere Schranke von A. Das Infimum von A (geschrieben $\inf A$) ist die grösste untere Schranke von A. Falls A nach oben und / oder nach unten unbeschränkt ist, so ist $\sup A = \infty$ / $\inf A = -\infty$.
Supremum / Infimum sind immer eindeutig. Sind sie Teil der Menge, so sind sie das Maximum / Minimum.

Rechenregeln

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B$$
$$\inf(A+B) = \inf A + \inf B$$
$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$$
$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$$

Wobei $A+B$ die folgende Menge bezeichnet:
$A+B := \{a+b | a \in A, b \in B\}$

Folgen und Reihen

Folgen

Eine Folge ist eine geordnete Liste von Zahlen, eine reelle Folge definiert also eine Abbildung von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$. Eine Folge **konvergiert** gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ sodass } \forall n \geq N \text{ gilt } |a_n - a| < \varepsilon$$

Man schreibt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Eine Folge **divergiert**, wenn

$$\forall K > 0 \exists N = N(K) \in \mathbb{N}, \text{ sodass } \forall n \geq N : |a_n| > K$$

Man schreibt $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.
Rechenregeln Sind a_n und b_n konvergent mit Grenzwerten a / b, dann folgt:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$$
$$\text{Falls } b_n, b \neq 0, \text{ so gilt } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$
$$\text{Falls } a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}, \text{ so gilt } a \leq b$$

Sandwich-Theorem Es seien die drei Folgen $b_n \leq a_n \leq c_n$ gegeben. Falls b_n und c_n konvergent sind mit $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, so ist auch a_n konvergent mit $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.
Monotonie Die Folge a_n heisst monoton wachsend, wenn $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n$ ab einem gewissen n_0. Die Folge heisst monoton fallend, wenn $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n$ ab einem gewissen n_0. Die Folge heisst streng monoton wachsend / fallend, wenn $a_{n+1} > a_n$ respektive $a_{n+1} < a_n$ gilt. Die Folge a_n ist nach oben / unten beschränkt, wenn es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n \leq C$ bzw. $a_n \geq C$. Monotonie kann mit der Ableitung gezeigt werden. Gilt $a'(x) \geq 0$ respektive $a'(x) \leq 0$, so ist die Folge monoton wachsend / monoton fallend.
Sei a_n nach oben (bzw. nach unten) *beschränkt und monoton* wachsend (bzw. fallend), dann ist a_n konvergent (beschränkte Folgen alleine sind nicht immer konvergent, bspw. $(-1)^n$).
Eine monoton wachsende / fallende Folge ist genau dann konvergent, wenn sie nach oben / unten beschränkt ist.
Teilfolgen Sei $\Lambda \subset \mathbb{N}$ eine unendliche Teilmenge der natürlichen Zahlen und a_n eine Folge. Die Folgenglieder a_n mit $n \in \Lambda$ bilden eine Teilfolge $\{a_n\}_{n\in\Lambda}$ von a_n. Eine Teilfolge von a_n besteht also aus einer Auswahl unendlich vieler Folgenglieder von a_n (es werden diejenigen Folgenglieder von a_n augewählt, für welche $n \in \Lambda$ gilt).

Der Satz von **Bolzano—Weierstrass** lautet: Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ besitzt eine konvergente Teilfolge (also einen Häufungspunkt).
Limes superior / Limes inferior Sei a_n eine beschränkte und nicht notwendigerweise konvergente Folge. Für alle $n \in \mathbb{N}$ definiere

$$b_n := \sup\{a_k | k \geq n\} = \sup\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}$$

Explizit: $b_0 = \sup\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$, $b_1 = \sup\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$, usw... b_n ist immer konvergent und der Limes von b_n wird Limes superior von a_n genannt. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b =: \text{limsup}_{n\to\infty} a_n$$

Analog wird die Folge c_n definiert:

$$c_n := \inf\{a_k | k \geq n\} = \inf\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}$$

c_n ist immer konvergent und der Limes von c_n wird als Limes inferior bezeichnet:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c =: \text{liminf}_{n\to\infty} a_n$$

.
Ist a_n nach oben / unten unbeschränkt ist, ist der Limes superior ∞ bzw. der Limes inferior $-\infty$. Falls a_n selber konvergent ist, gilt

$$\text{limsup}_{n\to\infty} a_n = \text{liminf}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Cauchy-Folgen Eine Folge a_n heisst Cauchy-Folge, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ sodass für alle } n, m \geq N \text{ gilt}$$
$$|a_n - a_m| \leq \varepsilon$$

Konvergente Folgen sind immer Cauchy-Folgen und jede reelle / komplexe Cauchy-Folge ist konvergent (Folgen in $\mathbb{Q}$ nicht zwingend). Insbesondere konvergiert eine Folge in den reellen Zahlen genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Grenzwerte von Funktionen

Sei f eine Funktion, welche auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definiert ist, das den Punkt a enthält. f besitzt an der Stelle a den Grenzwert $L \in \mathbb{R}$, geschrieben $\lim_{x\to a} f(x) = L$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \text{ sodass für alle } |x - a| < \delta \text{ gilt } |f(x) - L| < \varepsilon$$

Eine alternative Definition ist die Folgende:
f hat an der Stelle x_0 den Grenzwert a, falls für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in Ω mit $x_k \to x_0$ $(k \to \infty)$ gilt $f(x_k) \to a$ $(k \to \infty)$.
f hat an der Stelle $a \in I$ den linksseitigen Grenzwert $L \in \mathbb{R}$, geschrieben $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \text{ sodass für alle } x \in (a - \delta, a) \text{ gilt } |f(x) - L| < \varepsilon$$

Analog hat f an der Stelle a den rechtsseitigen Grenzwert $L \in \mathbb{R}$, geschrieben $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \text{ sodass für alle } x \in (a, a + \delta) \text{ gilt } |f(x) - L| < \varepsilon$$

Falls f in a den Grenzwert L besitzt, so besitzt f an der Stelle a einen links- und rechtsseitigen Grenzwert und es gilt:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ bedeutet, dass

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0, \text{ sodass für alle } |x - a| < \delta \text{ gilt } f(x) > M$$

$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ bedeutet, dass

$$\forall N < 0 \quad \exists \delta > 0, \text{ sodass für alle } |x - a| < \delta \text{ gilt } f(x) < N$$

$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ bedeutet, dass

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0, \text{ sodass für alle } |x - a| < \delta \text{ gilt } |f(x)| > M$$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ bedeutet, dass

$$\forall M > 0 \quad \exists N > 0, \text{ sodass für alle } |x| > N \text{ gilt } |f(x)| > M$$

Rechenregeln Falls die Grenzwerte $\lim_{x\to a} f(x)$ und $\lim_{x\to a} g(x)$ existieren, gelten die folgenden Regeln:

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$
$$\lim_{x\to a}(cf(x)) = c \lim_{x\to a} f(x), \quad c \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$$
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}, \text{ falls } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$
$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^{\lim_{x\to a} g(x)}$$

Sandwich-Theorem Aus $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ für x in der Nähe von a und $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$ folgt $\lim_{x\to a} f(x) = L$.
Dominanz Es seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei Funktionen mit $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ und $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ für $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Man sagt, dass f die Funktion g dominiert, wenn $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ bzw. $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$. Falls $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$ sind $f(x)$ und $g(x)$ von gleicher Ordnung. Für $x \to +\infty$ gelten die folgenden Dominanzen:

$$\ldots < \log(\log(\log(x))) < \log(\log(x)) < x^\alpha < e^x, \alpha^x < x! < x^x$$

Für $x \to 0^+$ gilt:

$$\ldots < \log(\log(x)) < \log x < \left(\frac{1}{x}\right)^\alpha$$

Bei einigen Grenzwerten ist das Verhalten im Zähler / Nenner durch die dominanten Terme bestimmt, weswegen die anderen Terme ignoriert werden können.
Wurzeltrick Ein Limes der Form $\sqrt{\alpha} + \beta$ (bzw. $\sqrt{\alpha} - \beta$) wird mit $\frac{\sqrt{\alpha}-\beta}{\sqrt{\alpha}-\beta}$ (bzw. $\frac{\sqrt{\alpha}+\beta}{\sqrt{\alpha}+\beta}$) ergänzt.

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\alpha} + \beta = \lim_{x\to\infty} (\sqrt{\alpha} + \beta) \frac{\sqrt{\alpha} - \beta}{\sqrt{\alpha} - \beta}$$

Fundamentallimes $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ Es gilt

$$\lim_{x\to a} \left(1 + \frac{1}{\odot}\right)^\odot = e$$

wobei $\odot$ ein beliebiger Ausdruck in x ist, mit $\odot \to \infty$ für $x \to a$. Äquivalent dazu:

$$\lim_{x\to a} (1 + \odot)^{\frac{1}{\odot}} = e$$

wobei $\odot$ ein beliebiger Ausdruck in x ist, mit $\odot \to 0$ für $x \to a$.

Fundamentallimes $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ Es gilt:

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin \odot}{\odot} = 1$$

wobei $\odot$ ein beliebiger Ausdruck in x ist, für den $\odot \to 0$ für $x \to a$ gilt.

Der Satz von Bernoulli-de l'Hôpital Es seien f und g zwei in einer Umgebung des Punktes a (auch $a = \infty$) definierte und differenzierbare Funktionen, mit $g' \neq 0$. Falls entweder $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ oder $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$, so gilt:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Der Satz von Bernoulli-de l'Hôpital für die Fälle "$0 * \infty$", "$\infty - \infty$" Ein Grenzwert vom Typ "$0 * \infty$" kann umgeformt werden, damit man Bernoulli-de l'Hôpital anwenden kann. Haben wir $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ mit $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ und $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, kann folgendes gemacht werden:

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{1/g(x)} \quad (g(x) \text{ wird "bewegt" }) \Rightarrow \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$
$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{1/f(x)} \quad (f(x) \text{ wird "bewegt" }) \Rightarrow \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$$

Bei "$\infty - \infty$" werden die Brüche gleichnamig gemacht. **Der $e^{\log(x)}$-Trick** Bei Grenzwerten des Typs $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$, wobei der Grenzwert vom Typ "0^0", "∞^0" oder "1^∞" ist. Die Funktion wird wie folgt umgeschrieben:

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\cdot\log(f(x))}$$

Der Grenzwert für die Funktion im Exponent wird dann mit Bernoulli-de l'Hôpital berechnet (da e^x stetig ist, darf der Limes in den Exponenten gezogen werden).

Taylor-Entwicklungen Gewisse Grenzwerte lassen sich mit der Taylor-Entwicklung berechnen. Man betrachtet so viele Terme, bis sie sich nicht mehr gegenseitig aufheben. Die wichtigsten Taylor-Entwicklungen um $x = 0$ lauten:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
$$\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$
$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$
$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots$$
$$\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \cdots$$
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots$$

Substitution Ein Term wird mit t ersetzt. Bspw.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{t\to +\infty} \frac{e^{-t}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to +\infty} \frac{t}{e^t} = 0$$

wobei $t = \frac{1}{x}$ ersetzt wurde.

Reihen

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine gegebene reelle oder komplexe Folge. Anfangend von dieser Folge kann man eine neue Folge $(S_N)_{N\in\mathbb{N}_0}$ durch Summation der ersten N Glieder von a_n definieren:

$$S_N = a_0 + a_1 + \cdots + a_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$$

S_N heisst Partialsumme von a_n. Ist die Folge der Partialsummen von a_n konvergent, so heisst deren Limes $S = \lim_{N\to\infty} S_N$ (unendliche) Reihe der Folge a_n. Notiert wird

$$S = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Ist die Partialsummenfolge divergent, so heisst die Reihe divergent. Reihenrest heisst der Wert

$$R_N = S - S_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

$\lim_{N\to\infty} S_N = S$ ist gleichbedeutend mit $\lim_{N\to\infty} R_N = 0$. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert also genau dann, wenn $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = 0$ (was auch als **Cauchy-Kriterium** bekannt ist).

Rechenregeln Sind $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ zwei konvergente Reihen, so sind auch $\sum_n (a_n + b_n)$ und $\sum_n (a_n - b_n)$ konvergent und es gilt:

$$\sum_n (a_n \pm b_n) = \sum_n a_n \pm \sum_n b_n$$

Wenn $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ absolut konvergent sind, konvergiert die Reihe der Produkte absolut unabhängig von der Summationsreihenfolge und es gilt:

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} a_k b_l = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \sum_{l=1}^{\infty} b_l$$

Ausserdem gilt folgendes für **umgeordnete Reihen**: Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent und sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathrm{N}$ bijektiv. Dann ist auch die umgeordnete Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ konvergent und es gilt: $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Konvergenzkriterien

1: Mittels der Definition $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \overset{\text{Def.}}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n$ kann als Konvergenzkriterium benutzt werden. Man findet in Abhängigkeit von N eine allgemeine Formel für S_N und bildet den Grenzwert $\lim_{N\to\infty} S_N$. Existiert dieser, ist die Reihe konvergent.

2: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ Es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Die Bedingung $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ist notwendig (ist sie nicht erfüllt, konvergiert die Reihe nicht), aber nicht hinreichend (d.h. es existieren divergente Reihen, deren Giieder eine Nullfolge bilden, wie zum Beispiel $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$). Somit dient das Kriterium zum Beweis der Divergenz.

3: Majorantenkriterium und Minorantenkriterium Es seien $a_n, b_n > 0$ mit $a_n \geq b_n \quad \forall n$ ab einem gewissen n_0. Dann gilt

$$\sum_n a_n \text{ konvergiert } \Rightarrow \sum_n b_n \text{ konvergiert}$$

Es seien $a_n, b_n > 0$ mit $a_n \geq b_n \quad \forall n$ ab einem gewissen n_0. Dann gilt

$$\sum_n b_n \text{ divergiert } \Rightarrow \sum_n a_n \text{ divergiert}$$

Wichtige Vergleichsreihen sind:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ konvergiert } \Leftrightarrow |q| < 1 \text{ (Geometrische Reihe)}$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \text{ konvergiert } \Leftrightarrow s > 1 \text{ (Riemannsche } \zeta\text{-Funktion)}$$

Hilfreich kann ausserdem sein, dass $log(n) \leq n^\alpha$ (ab einem gewissen n_α) für alle $\alpha > 0$ (insbesondere also auch $\sqrt{n}$).

4: Vergleichskriterium Seien $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ zwei gegebene Reihen mit $a_n, b_n > 0$. Wenn der Grenzwert

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A \in (0,\infty)$ gilt, dann haben die Reihen das gleiche Konvergenzverhalten.
Falls $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, ist $\sum_n b_n$ "grösser" als $\sum_n a_n$. Es gilt:

$$\sum_n a_n \text{ divergent } \Rightarrow \sum_n b_n \text{ divergent}$$
$$\sum_n b_n \text{ konvergent } \Rightarrow \sum_n a_n \text{ konvergent}$$

Falls $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, so ist $\sum_n b_n$ "kleiner" als $\sum_n a_n$. Es gilt:

$$\sum_n a_n \text{ konvergent } \Rightarrow \sum_n b_n \text{ konvergent}$$
$$\sum_n b_n \text{ divergent } \Rightarrow \sum_n a_n \text{ divergent}$$

5: Quotientenkriterium Es sei $\sum_n a_n$ mit $a_n \neq 0$ gegeben. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1 \Rightarrow \sum_n a_n \text{ divergiert}$$
$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1 \Rightarrow \sum_n a_n \text{ konvergiert}$$
$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Kriterium versagt}$$

Existiert der Limes nicht, gilt $\liminf_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1$ für Divergenz und $\limsup_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$ für Konvergenz.
6: Wurzelkriterium Betrachte die Reihe $\sum_n a_n$. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_n a_n \text{ divergiert}$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \Rightarrow \text{ Kriterium versagt}$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_n a_n \text{ konvergiert}$$

Existiert der Limes nicht, wird $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ genommen. Wenn das Quotientenkriterium eine Entscheidung liefert (Konvergenz / Divergenz), liefert das Wurzelkriterium die gleiche Entscheidung (und umgekehrt). Wenn eines versagt, bringt das Anwenden des Anderen also nichts.
7: Integralkriterium Wenn die Glieder der Reihe $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ als Funktionswerte $a_n = f(n)$ einer im Intervall $[p,\infty)$ stetigen Funktion $f(x)$ dargestellt werden, gilt das Integralkriterium: Die Reihe $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ erfülle $a_n \geq 0$ und a_n monoton fallend (d.h. $a_{n+1} \leq a_n$). Dann gilt

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n \text{ konvergiert } \Leftrightarrow \int_p^{\infty} a(x)dx \text{ konvergiert}$$

$\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ und $\int_p^{\infty} f(x)dx$ haben dasselbe Konvergenzverhalten, aber nicht denselben Wert. Im Allgemeinen gilt:

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n \leq \int_p^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=p}^{\infty} a_n$$

8: Leibnitz-Kriterium Es sei die alternierende Reihe $\sum_n (-1)^n a_n$ gegeben. Wenn $a_n \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und a_n monoton fallend ist, konvergiert die Reihe $\sum_n (-1)^n a_n$.
9: Absolute Konvergenz Die Reihe $\sum_n^{a_n}$ heisst absolut konvergent, wenn $\sum_n |a_n|$ konvergent ist. Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent (die Umkehrung ist im Allgemeinen nicht wahr, nicht jede konvergente Reihe ist auch absolut konvergent).
10: Cauchy-Kondensationstest Sei $a_n \geq 0$ und monoton fallend. Dann gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert } \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konvergiert.}$$

11: Taylor-Entwicklung Zur Beurteilung des Konvergenzverhaltens von gewissen Reihen kann es hilfreich sein, die Funktionen zu entwickeln.
12: Kriterium von Raabe Es sei a_n eine Folge positiver Zahlen und es sei $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ (Quotientenkriterium versagt). Wenn der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) =: \alpha$$

existiert und $\alpha \neq 1$, so gilt für das Verhalten der Reihe $\sum na_n$: $\alpha < 1 \Rightarrow$ Divergenz und $\alpha > 1 \Rightarrow$ Konvergenz .

Potenzreihen

Eine Potenzreihe ist eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

Der Konvergenzbereich ist die Menge von allen x, für welche der Ausdruck $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert:
$B_f = \{x \in \mathbb{R}(\text{ oder } \mathbb{C}) | \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergiert } \}$. Der Konvergenzbereich ist kreisförmig, d.h. ein $\rho \in [0,\infty]$ existiert (der Konvergenzradius), so dass für $|x| < p$ $f(x)$ konvergiert, für $|x| > p$ $f(x)$ divergiert und für $|x| = p$ der Einzelfall betrachtet werden muss. Die geometrische Reihe stellt die folgende Funktion dar (für $|x| < 1$):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ax^n = \frac{a}{1-x}$$

Im Falle von $x \neq 1$ gilt für die n-te Partialsumme s_n:

$$s_n = a\frac{x^{n+1}-1}{x-1} = a\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Für allgemeine Potenzreihen wird der Konvergenzradius folgendermassen berechnet:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$$
$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Differentiation und Integration Die durch $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ definierte Funktion ist auf $\{x||x| < \rho\}$ (im Innern des Konvergenzradius) differenzierbar / integrierbar. Es gilt:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$$
$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Cauchy-Produkt Seien $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ zwei Potenzreihen mit den Konvergenzradien $\rho_1 > 0$ und $\rho_2 > 0$. Für alle $|x| < \min\{\rho_1, \rho_2\}$ darf man die Potenzreihen multiplizieren und es gilt:

$$f(x)\cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n} a_m x^m b_{n-m} x^{n-m}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m}\right) x^n$$

Differenzialrechnung

Stetigkeit

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ heisst an der Stelle $a \in \Omega$ stetig, falls

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Was auch folgendermassen notiert werden kann:

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \; n\to\infty, x_n = a : \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(a)$$

Bzw. mit der Definition der punktweisen Stetigkeit:

$$\forall x_0 \forall\varepsilon \exists\delta \forall x : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

Man nennt f auf Ω stetig, falls f in jedem Punkt auf Ω stetig ist. Um eine Funktion auf Stetigkeit an der Stelle a zu prüfen, muss man nachweisen, dass f auf Ω definiert ist, dass $\lim_{x\to a} f(x)$ existiert ($\neq \infty$ und $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$) und dass $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Der **Abschluss** von Ω ist die Menge

$$\overline{\Omega} = \left\{x \in \mathbb{R}^d ; \exists (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \Omega : x_k \to x (k\to\infty)\right\}$$

f heisst an der Stelle $x_0 \in \overline{\Omega}\backslash\Omega$ **stetig ergänzbar**, falls $\lim_{x\to x_0} f(x) =: a$ existiert.
$K \subset \mathbb{R}^d$ heisst **kompakt**, falls jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ einen Häufungspunkt in K besitzt; d.h. falls eine Teilfolge $\Lambda \subset N$ und ein $x_0 \in K$ existieren mit $x_k \to x_0 \quad (k\to\infty, k \in \Lambda)$.
Beispiel: $[0,1]$ ist kompakt, $]0,1[$ nicht. Wenn K kompakt ist, ist es auch beschränkt und das Infimum / Supremum entsprechen dem Minimum / Maximum.
$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heisst **gleichmässig stetig**, falls gilt

$$\forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall x, y \in \Omega : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig und auf $\overline{\Omega}$ stetig ergänzbar. Dann ist f gleichmässig stetig.
Rechenregeln Seien $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $g : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Dann sind $f+g$, $f-g$, fg, $\frac{f}{g}$ falls $g \neq 0$ und $g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig.
Kriterien für Stetigkeit

Folgenkriterium: Für jede Folge x_n in Ω mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Dies bedeutet, dass der Limes bei stetigen Funktionen in die Funktion hineingezogen werden kann!
Weierstrass-Kriterium: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon, a) > 0$, sodass für alle $|x-a| < \delta$ folgendes gilt: $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$
Lipschitz Stetigkeit f heisst Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L, wenn gilt:

$$\exists L \forall x, x_0 : \|f(x) - f(x_0)\| \leq L \cdot \|x - x_0\|$$

Es gelten die folgenden Implikationen: f Lipschitz stetig $\Rightarrow f$ glm. stetig $\Rightarrow f$ punktweise stetig
Zwischenwertsatz Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \leq f(b)$. Dann gibt es zu jedem $y \in [f(a), f(b)]$ ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = y$.
Bisektionsverfahren Sei f auf $[a,b]$ stetig, $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Wir setzen $a_0 = a$ und $b_0 = b$ und wenden folgendes Verfahren an, um die Nullstelle einzugrenzen: Sei $[a_n, b_n]$ das n-te Teilintervall. Es gelte $f(a_n) < 0$ und $f(b_n) > 0$. Wir halbieren das Intervall und setzen $x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$. Nun werden drei Fälle unterschieden. Ist $f(x_n) = 0$, haben wir die Nullstelle gefunden. Ist $f(x_n) < 0$, setzen wir als neues Intervall $[x_n, b_n]$. Ist $f(x_n) > 0$, setzen wir als neues Intervall $[a_n, x_n]$.

Differenzialrechnung

Es sei $x_0 \in \Omega$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ Die Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 ist der folgende Grenzwert (wenn existent; beide Grenzwerte äquivalent):

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Die Tangente der Kurve $y = f(x)$ an der Stelle $(x_0, f(x_0))$ ist die folgende Gerade: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ f heisst an der Stelle x_0 differenzierbar, falls die Ableitung an der Stelle x_0 existiert (d.h. der Grenzwert existiert). Ist f an jeder Stelle x_0 differenzierbar, so heisst f auf Ω differenzierbar. Differenzierbare Funktionen sind immer stetig, die Umkehrung ist nicht wahr. Eine Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist von der Klasse C^1, wenn f in jedem Punkt $x_0 \in \Omega$ differenzierbar ist und die Ableitung $f' : \Omega \to \mathbb{R}$ eine auf Ω stetige Funktion ist.
Ableitungsregeln Sind $f, g : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar, so sind es auch $f + g$, $f * g$ und $\frac{f}{g}$ (falls g keine Nullstellen hat). Die Ableitungen lauten:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \quad \text{(Summenregel)}$$
$$(f \cdot g)(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0) \quad \text{(Produktregel)}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{g^2(x_0)} \quad \text{(Quotientenregel)}$$

Seien $f : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : U \to \mathbb{R}$ mit $U \subset f(\Omega)$ an den Stellen x_0 bzw. $f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist die Komposition $g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 differenzierbar und die Ableitung lautet:

$$(g \circ f)'(x_0) = (g(f(x_0)))' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Der **Umkehrsatz** besagt: Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ mit $f'(x) \neq 0 \; \forall x \in (a,b)$. Dann ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : (f(a), f(b)) \to (a,b)$ differenzierbar mit Ableitung

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

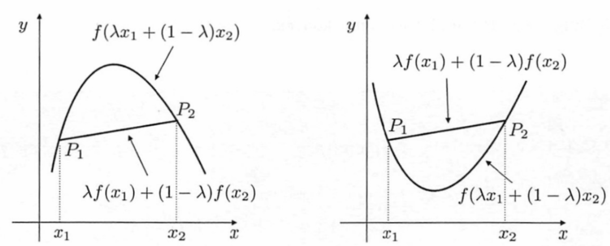
wobei $y = f(x)$.
Beispiel: Berechne die Ableitung von $log(x)$ ausgehend von e^x:

$$y = e^x \quad \Rightarrow \quad x = \log(y)$$
$$y' = e^x \quad \Rightarrow \quad x' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\log(y)}} = \frac{1}{y}$$

Somit ist $log(x)' = \frac{1}{x}$
Monotone Funktionen $f : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst monoton wachsend, wenn für alle $x, y \in \Omega$ $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ gilt. f heisst monoton fallend, wenn für alle $x, y \in \Omega$ $x \leq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(y)$ gilt. Bei streng monoton wachsend / fallend gilt $f(x) < f(y)$ bzw. $f(x) > f(y)$. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Falls $f'(x) \geq 0$ (> 0) für alle $x \in (a,b)$, so ist f auf $[a,b]$ (streng) monoton wachsend. Falls $f'(x) \leq 0$ (< 0) für alle $x \in (a,b)$, so ist f auf $[a,b]$ (streng) monoton fallend.
Bijektive Funktionen Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton (wachsend oder fallend). Setze $f(a) = c$, $f(b) = d$. Dann ist $f : [a,b] \to [c,d]$ bijektiv und f^{-1} ist stetig.
Sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend mit monotonen Limites $-\infty \leq c := \lim_{x \downarrow a} f(x) < \lim_{x \to b} f(x) =: d \leq \infty$. Dann ist $f :]a,b[\to]c,d[$ bijektiv und f^{-1} ist stetig.
Konvexe Funktionen Eine Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst konvex, wenn

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

für alle $x_1, x_2 \in \Omega$ und alle $\lambda \in [0,1]$ gilt. f heisst konkav, wenn $-f$ konvex ist, d.h. wenn $f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in \Omega$ und alle $\lambda \in [0,1]$ gilt.



konkav   konvex

Sei $f \in C^2(\Omega)$. Dann ist f genau dann konvex (konkav), wenn $f''(x) \geq 0 (\leq 0)$ für alle $x \in \Omega$ gilt.
Extrema Eine Funktion f hat an der Stelle x_e ein Maximum, wenn gilt $f'(x_e) = 0$ und $f''(x_e) < 0$. Sie hat ein Minimum, wenn gilt $f'(x_e) = 0$ und $f''(x_e) > 0$.
Mittelwertsatz Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann existiert ein $c \in (a,b)$ mit

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Newton-Verfahren Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Es wird, ausgehend von einem Startwert x_0, die folgende Iteration wiederholt, um Näherungswerte zu Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$ zu finden.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Die Taylorschen Formeln

Das folgende Polynom ist das Taylorpolynom m-ter Ordnung von $f(x)$ an der Stelle $x = a$:

$$P_m^a(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{m!} f^{(m)}(a)(x-a)^m$$

Der Fehler der Approximation ist durch den m-ten Restterm gegeben: $R_m^a(x) := f(x) - P_m^a(x)$. Es gilt:

$$R_m^a(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{m+1}$$

wobei ξ eine Zahl ist, welche zwischen a und x liegt.
Taylorreihen Ist die Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in der Nähe von a unendlich oft differenzierbar, so wird die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$ die Taylorreihe von f um $x = a$ genannt. Sie besitzt einen eigenen Konvergenzradius ρ und konvergiert auf einer Umgebung von a, welche dem Konvergenzradius entspricht. Wenn sie konvergiert, muss die Taylorreihe von f an der Stelle x nicht zwingend gegen die Funktion $f(x)$ konvergieren. Damit die Taylorreihe von $f(x)$ gegen $f(x)$ konvergiert, muss der Fehlerterm gegen 0 konvergieren, d.h. $\lim_{m\to\infty} R_m^a(x) = 0$.
Falls $|f^{(m+1)}(x)| \leq M$ für $|x-a| < d$ gilt, so ist

$$|R_m^a(x)| \leq \frac{M}{(m+1)!}|x-a|^{m+1} \text{ für alle } |x-a| < d$$

Eine unendlich oft differenzierbare Funktion, welche die Eigenschaft besitzt, dass sie auf $\Omega \subset \mathbb{R}$ durch eine konvergente Taylorreihe dargestellt ist, nennt man (auf Ω) analytisch.
Methoden zur Bestimmung von Taylorreihen
1: Substitution Man nutzt bereits bekannte Taylorentwicklungen aus. Beispiel: Gesucht ist die Taylorentwicklung der Funktion $\frac{1}{1+x^2}$ um den Punkt $x = 0$. Es gilt:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

2: Differentiation und Integration Taylorreihen dürfen problemlos differenziert / integriert werden. Beispiel: Gesucht ist die Taylorreihe der Funktion $log(1-x)$. Man beginnt mit der geometrischen Reihe $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ und integriert auf beiden Seiten. Links bekommt man $\int \frac{1}{1-x}dx = -\log(1-x)$. Potenzreihen werden Glied für Glied integriert, die rechte Seite lautet also:

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} x^n dx = \int \left(1 + x + x^2 + \cdots\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + C$$

Um C zu bestimmen, wird $x = 0$ eingesetzt, um $C = 0$ zu sehen. Es gilt also:
$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots$
3: Multiplikation und Divison Potenzreihen werden gemäss dem Cauchy-Produkt miteinander multipliziert, somit auch Taylorreihen.
Anwendung bei der Berechnung von Reihen Die Taylorreihen können teilweise auch benutzt werden, um den Wert von Reihen zu bestimmen, indem die Reihe so umgeformt wird, dass sie der Taylorreihe entspricht.

Folgen stetiger Funktionen

Eine Folge stetiger Funktionen ist eine Folge $f_n : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren Folgeglieder f_n stetige Funktionen auf Ω sind. Eine Folge stetiger Funktionen konvergiert punktweise gegen $f(x)$, falls

$$\forall x \in \Omega \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Die Grenzfunktion $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ heisst punktweiser Limes der Folge $f_n(x)$. Für die Überprüfung auf punktweise Konvergenz muss einfach x festgehalten werden und der Limes von $f_n(x)$ für $n \to \infty$ berechnet werden.
Eine Folge stetiger Funktionen konvergiert gleichmässig gegen f, falls

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Die gleichmässige Konvergenz impliziert die punktweise Konvergenz (aber nicht umgekehrt). Falls f_n gegen f gleichmässig konvergiert, ist f stetig (die Umkehrung ist ebenfalls nützlich, ist der punktweise Limes f von f_n unstetig, so konvergiert f_n nicht gleichmässig gegen f).
Kochrezept für gleichmässige Konvergenz *Schritt 1:* Berechne den punktweisen Limes von f_n auf Ω, d.h. $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für fixes $x \in \Omega$.
Schritt 2: Prüfe f_n auf gleichmässige Konvergenz:
Direkte Methode:
A: Berechne $\sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)|$, wozu es oft nützlich ist, die Ableitung nach x von $|f_n(x) - f(x)|$ zu berechnen und gleich Null zu setzen.
B: Bilde den Limes für $n \to \infty$: $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)|$
Indirekte Methode:
f unstetig $\Rightarrow$ keine gleichmässige Konvergenz.
Reihen stetiger Funktionen Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ und $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen. Wir betrachten die Folge der Partialsummen $S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} f_n(x)$. $S_N(x)$ bildet eine Folge stetiger Funktionen. Die Folge konvergiert punktweise auf Ω, falls für alle $x \in \Omega$ der Grenzwert

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} f_n(x)$$

existiert. Der punktweise Limes wird mit dem Symbol $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ bezeichnet. $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ konvergiert gleichmässig auf Ω, falls

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{x\in\Omega} |\sum_{n=0}^{N} f_n(x) - \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)| = 0$$

Das *Weierstrass-Kriterium* besagt: Betrachte die Reihe von Funktionen $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. Nimm an, dass eine Folge $M_n \geq 0$ existiert mit $|f_n(x)| \leq M_n$ für alle $x \in \Omega$ und $n \in \mathbb{N}$ und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ konvergiert. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ gleichmässig auf Ω. Die kleinste Folge, welche diese Bedingung erfüllt, ist $M_n = \sup_{x\in\Omega} |f_n(x)|$. Kann man also zeigen, dass $\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in\Omega} |f_n(x)|$, konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ gemäss dem Weierstrass-Kriterium.
Aus dem Weierstrass-Kriterium folgt: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für alle $R < \rho$ auf $[-R, R]$ gleichmässig konvergent.
Grenzwert und Ableitung vertauschen Sei $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen. Falls die Folgenglieder f_n auf Ω von der Klasse C^1 sind, $f_n \to f$ punktweise auf Ω und $f_n' \to g$ gleichmässig auf Ω, so ist f auf Ω von der Klasse C^1 und $f'(x) = g(x)$ für alle $x \in \Omega$. Ausserdem $f_n \to f$ gleichmässig auf Ω.
D.h. die gleichmässige Konvergenz der Folge der Ableitungen f_n' erlaubt das Vertauschen der Ableitung und des Grenzwerts:

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

Grenzwert und Integral vertauschen Sei $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen und $[a, b] \subset \Omega$. Falls $f_n \to f$ gleichmässig auf Ω, so ist f auf $[a, b]$ integrierbar und

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

Das heisst bei gleichmässiger Konvergenz dürfen Limes und Integral vertauscht werden!

Integralrechnung

Eine Stammfunktion F zu einer gegebenen stetigen Funktion f ist eine Funktion, so dass $F'(x) = f(x)$ für alle x im Definitionsbereich von f gilt. D.h.

$$F(x) = \int f(x)dx = \int F'(x)dx$$

Ist F eine Stammfunktion, ist auch $F + C$ (mit $C \in \mathbb{R}$) eine. Differenzierbare Funktionen sind stetig und nach dem Hauptsatz integrierbar, die Umkehrungen gelten nicht (es gibt integrierbare Funktionen, welche nicht stetig sind, bspw. stückweise stetige Funktionen).

Elementare Integrale Siehe Anhang, können durch Umkehrung der Ableitung direkt angegeben werden.
Direkte Integrale Es gilt:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x))$$

D.h. wenn der Integrand die Form $f(g(x)) \cdot g'(x)$ hat, wird die Stammfunktion von f in $g(x)$ ausgewertet.
Partielle Integration

$$\int f' \cdot g dx = f \cdot g - \int f \cdot g' dx$$

Der Integrand wird also als Produkt von zwei Funktionen geschrieben, wobei die Funktion f' integriert ($\uparrow$) und g abgeleitet ($\downarrow$) wird. Als Merkhilfe kann die folgende Tabelle dienen:

$\uparrow$	1 (falls arc-Funktion oder Logarithmus vorkommt), x^n, $\frac{1}{1-x^2}$, $\frac{1}{1+x^2}$, ...
$\downarrow$	x^n, $\log(x)$, $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $\arctan(x)$, $\text{arcsinh}(x)$, $\text{arcosh}(x)$, $\text{arctanh}(x)$, ...
"egal"	e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\sinh(x)$, $\cosh(x)$, ...

Integrale rationaler Funktionen Integrale der Form $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$ wobei $p(x)$ und $g(x)$ zwei Polynome sind.

- Falls Grad$(p) \geq$ Grad$(q) \Rightarrow$ führe die Polynomdivision $p(x) : q(x)$ durch.
- Falls Grad $(p) <$ Grad$(q) \Rightarrow$ führe die Partialbruchzerlegung (PBZ) durch (siehe Anhang für Anleitung).

Substitutionsregel Die Idee ist, eine Variablentransformation $y = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = g^{-1}(y)$ durchzuführen. Ist f stetig und g wie oben, gilt dann:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(y)dy$$

Wobei $dy = g'(x)dx$. Der Ansatz lautet also: Um $\int f(y)dy$ zu berechnen, substituiere $y = g(x)$ im Integrand und ersetze das dy mit $g'(x)dx$ mit dem Ziel, das neue Integral $\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx$ leichter zu bestimmen.
Substitutionsansätze

- Integrale von Funktionen, die e^x, $\sinh(x)$, $\cosh(x)$, ... enthalten: Diese Integrale werden oft mit der Substitution $e^x = t$ ($dx = \frac{1}{t}dt$) gelöst.
- Integrale von Funktionen, die $\log x$ enthalten: Diese werden oft mit der Substitution $\log x = t$ ($dx = e^x dt$) gelöst.
- Integrale von Funktionen, die $\sqrt[\alpha]{Ax + B}$ enthalten. Diese werden oft mit der Substitution $\sqrt[\alpha]{Ax + B} = t$ gelöst.
- Integrale von Funktionen, die $\cos x$, $\sin x$ in geraden Potenzen oder $\tan x$ enthalten. Diese Integrale werden oft mit der Substitution $\tan x = t$ $\left(dx = \frac{1}{1+t^2}dt\right)$ gelöst. Bei dieser Substitution wird $\sin^2 x$ zu $\frac{t^2}{1+t^2}$ und $\cos^2 x$ zu $\frac{1}{1+t^2}$

- Integrale von Funktionen, die $\cos x, \sin x$ in ungeraden Potenzen enthalten. Diese werden oft mit der Substitution $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t \quad \left(dx = \frac{2}{1+t^2}dt\right)$ gelöst.
- Integrale mit $\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ im Nenner. Diese werden mithilfe der quadratischen Ergänzung auf eine der folgenden Fälle gebracht: $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \operatorname{arcosh} x + C$ oder $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \operatorname{arcsinh} x + C$.
- Integrale mit $\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ im Zähler. Diese werden mithilfe der quadratischen Ergänzung auf eine der folgenden Formen gebracht und dann mit der Substitution gelöst:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx \quad \text{Substitution } x = \sin t$$
$$\int \sqrt{x^2-1}dx \quad \text{Substitution} \quad x = \cosh t$$
$$\int \sqrt{1+x^2}dx \quad \text{Substitution} \quad x = \sinh t$$

Bestimmte Integrale

Das bestimmte Integral von f von a bis b ($a < b$) ist:

$$\int_a^b f(x)dx := F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Für $a > b$ setzt man: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. Ausserdem definiert man $\int_a^a f(x)dx = 0$. Das bestimmte Integral hat die folgenden Eigenschaften (*1 - Linearität*, *2 - Gebietsadditivität*, *3 - Positivität*, *4 - Monotonie* und *5 - Dreiecksungleichung*):

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \ (1)$$
$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \ (2)$$
$$f(x) \geq 0 \forall x \in [a,b], \text{ so ist } \int_a^b f(x)dx \geq 0 \ (3)$$
$$f(x) \geq g(x) \forall x \in [a,b], \text{ so ist } \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx \ (4)$$
$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx \ (5)$$

Ist $f(x)$ ungerade, so gilt für alle um den Ursprung symmetrischen Integrale:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

Aus dem Hauptsatz der Integralrechnung folgt:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Flächenberechnung Ist $f(x) \geq 0$ auf dem Intervall $[a,b]$, entspricht $\int_a^b f(x)dx$ der Fläche, welche für $x \in [a,b]$ von der x-Achse und dem Graphen von f begrenzt wird. Ist $f(x) \leq 0$ auf $[a,b]$, ist diese Fläche gleich $-\int_a^b f(x)dx$. Im Allgemeinen betrachtet man Teilintervalle, in denen f positiv / negativ ist.

Gamma-Funktion Die Gamma-Funktion ist für $\alpha > 0$ wie folgt definiert:

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

Sie hat die folgenden Eigenschaften:

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$$
$$\Gamma(n) = (n-1)! \text{ falls } n \in \mathbb{N}$$
$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$
$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}, (0 < \alpha < 1)$$

Mit der Gamma-Funktion können Integrale der Form $\int_0^\infty x^\alpha e^{-g(x)}dx$ bestimmt werden, wobei $g(x) = t$ substituiert wird.

Riemannsche Summen

Ein Intervall $[a,b]$ wird in n Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ mit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ unterteilt. Die Länge jedes Intervalls ist $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Die Feinheit der Unterteilung ist die Länge des grössten Intervalls $\Delta_n = \max\{\Delta_i, i = 1, \ldots, n\}$. In jedem der n Intervalle wird ein Punkt ausgewählt: $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ Die Riemannsche Summe von f bzgl. der Unterteilung Δx_k ist:

$$R_n := \sum_{k=1}^n \Delta x_k \cdot f(\xi_k)$$

Wenn alle Folgen $\{R_n\}$ mit Feinheit $\lim_{n\to\infty} \Delta_n = 0$ einen gemeinsamen Grenzwert R haben, bezeichnet man f als Riemann-integrierbar auf $[a,b]$ und den Grenzwert als Riemann-Integral von f auf $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \Delta_k f(\xi_k)$$

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton bzw. stetig. Dann ist f über $[a,b]$ R-integrierbar. **Riemannsche Summen bei der Berechnung von Grenzwerten** Einige Grenzwerte können als Riemannsche Summen geschrieben werden und dann als Integral zwischen 0 und 1 berechnet werden. Es gilt die folgende Regel:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx$$

Uneigentliche Integrale

Uneigentliche Integrale von Typ I und Typ II können auch kombiniert werden, in welchem Fall das Integral aufgeteilt wird und die beiden Integralle separat untersucht werden.

Typ I

Bei diesen Integralen ist das Integrationsgebiet unbeschränkt. Sie sind also von der Form $\int_a^\infty f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^\infty f(x)dx$. Man definiert: Sei $f(x)$ auf $[a,\infty)$ stetig. Dann setzt man

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)dx$$

falls der Grenzwert existiert. Dieser Wert heisst uneigentliches Integral.
Sei $f(x)$ auf $(-\infty, b]$ stetig. Dann setzt man

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^b f(x)dx$$

falls der Grenzwert existiert. Dieser Wert heisst uneigentliches Integral
Falls beide Grenzwerte $\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^a f(x)dx$ und $\lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)dx$ existieren, definiert man:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx := \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx$$

Konvergenzkriterien
1: Direkte Berechnung+Definition Einige uneigentliche Integrale können direkt berechnet werden und die Konvergenz kann mittels der Definition nachgewiesen werden. So kann berechnet werden:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx \text{ konvergiert } \Leftrightarrow \quad p > 1$$

2: Vergleichskriterium Es seien f, g auf $[a,\infty)$ stetig mit $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,\infty)$. Dann gilt:

$$\text{Ist } \int_a^\infty g(x)dx \text{ konvergent, so auch } \int_a^\infty f(x)dx$$
$$Ist \int_a^\infty f(x)dx \text{ divergent , so auch } \int_a^\infty g(x)dx$$

Das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ ist ein wichtiges Vergleichsmittel.
3: Absolute Konvergenz

$$\int_a^\infty |f(x)|dx < \infty \Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx < \infty$$

4: Grenzwert-Tests
Test 1: $f(x), g(x)$ auf $[a,\infty)$ stetig und $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = A \neq \infty$. Dann gilt:

$$\int_a^\infty |g(x)|dx < \infty \text{ konvergiert } \Leftrightarrow \int_a^\infty |f(x)|dx \text{ konvergiert.}$$

Test 2: $f(x)$ auf $[a,\infty)$ stetig und $\lim_{x\to\infty} x^p f(x) = A \neq \infty$ für ein $p > 1$. Dann gilt:

$$\int_a^\infty |f(x)|dx \text{ und } \int_a^\infty f(x)dx \text{ konvergiert}$$

Test 3: $f(x)$ auf $[a,\infty)$ stetig und $\lim_{x\to\infty} xf(x) = A \neq 0, \infty$, so divergiert $\int_a^\infty f(x)dx$.
5: Leibnitz-Kriterium Sei $f(x)$ eine stetige Funktion auf $[a,\infty)$. Ist die Funktion $f(x)$ monoton fallend und gilt $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ so konvergieren die uneigentlichen Integrale:

$$\int_a^\infty f(x)\sin(x)dx \quad bzw. \int_a^\infty f(x)\cos(x)dx$$

Typ II

Uneigentliche Integrale vom Typ II haben ein beschränktes Integrationsgebiet, aber innerhalb oder am Rand liegt eine Unstetigkeitsstelle des Integranden f. Es sind also Integrale der Form:

$$\int_a^b f(x)dx, \text{ wobei } \lim_{x\to c} f(x) \text{ für ein } c \in [a,b] \text{ nicht existiert.}$$

Sei $f(x)$ auf $(a,b]$ stetig. Dann setzt man

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

falls der Grenzwert existiert. Dieser Wert heisst uneigentliches Integral.
Sei $f(x)$ auf $[a,b)$ stetig. Dann setzt man

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

falls der Grenzwert existiert. Dieser Wert heisst uneigentliches Integral.
Falls der Integrand eine Unstetigkeit innerhalb des Integrationsbereiches (bspw. an der Stelle $c \in (a,b)$) besitzt, definiert man (falls beide Intervalle konvergieren):

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Konvergenzkriterien
1: Direkte Berechnung + Definition Teilweise ist es möglich, das Integral direkt zu berechnen und anschliessend mit der Definition den Grenzwert zu bestimmen.
2: Vergleichskriterium Es seien f, g auf $(a,b]$ stetig und $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in (a,b]$. Dann gilt:

$$\text{Ist} \int_a^b g(x)dx \text{ konvergent, so ist es auch } \int_a^b f(x)dx$$

$$\text{Ist} \int_a^b f(x)dx \text{ divergent, so ist es auch } \int_a^b g(x)dx$$

Das wichtigste Vergleichsintegral ist $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx$, das konvergent ist, wenn $p < 1$.
3: Absolute Konvergenz

$$\int_a^b |f(x)|dx < \infty \Rightarrow \int_a^b f(x)dx < \infty$$

4: Beschränkte Funktion auf beschränktem Intervall
Es sei f auf $(a,b]$ stetig. Gilt $\lim_{x\to a^+} f(x) = A < \infty$, so konvergiert das Integral $\int_a^b f(x)dx$.
5: Grenzwert-Tests
Test 1: $f(x), g(x)$ auf $(a,b]$ stetig und $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq \infty$. Dann gilt:

$$\int_a^b |g(x)|dx < \infty \text{ konvergiert } \Leftrightarrow \int_a^b |f(x)|dx \text{ konvergiert.}$$

Test 2: $f(x), g(x)$ auf $(a,b]$ stetig und $\lim_{x\to a^+} (x-a)^p f(x) = A \neq \infty$ für ein $0 < p < 1$. Dann gilt:

$$\int_a^b |f(x)|dx \text{ und somit auch } \int_a^b f(x)dx \text{ konvergiert}$$

Test 3: $f(x)$ auf $(a,b]$ stetig und $\lim_{x\to a^+} (x-a)f(x) = A \neq 0, \infty$, so divergiert $\int_a^b f(x)dx$.
6: Leibnitz-Kriterium Sei $f(x)$ auf $(a,b]$ definiert und stetig. Ist die Funktion $f(x)(x-a)^2$ monoton wachsend und gilt $\lim_{x\to a^+} f(x)(x-a)^2 = 0$, so konvergieren die Integrale:

$$\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{1}{x-a}\right)dx \quad \int_a^b f(x)\cos\left(\frac{1}{x-a}\right)dx$$

Anhang

Elementare Integrale

$f'(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	c	$cx + C$
$r \cdot x^{r-1}$	x^r	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + C$
$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln\|x\| + C$
$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$-\ln\|\cos(x)\| + C$
e^x	e^x	$e^x + C$
$c \cdot e^{cx}$	e^{cx}	$\frac{1}{c} \cdot e^{cx} + C$
$\ln(c) \cdot c^x$	c^x	$\frac{c^x}{\ln(c)} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$	$x(\ln\|x\| - 1) + C$
$\frac{1}{\ln(a) \cdot x}$	$\log_a\|x\|$	$\frac{x}{\ln(a)}(\ln\|x\| - 1) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$
$\cosh(x)$	$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x) + C$
$\sinh(x)$	$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\sinh(x) + C$
$\frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\tanh(x)$	$\log(\cosh(x)) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arcsinh}(x)$	$x \cdot \operatorname{arcsinh}(x) - \sqrt{x^2+1} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arccosh}(x)$	$x \cdot \operatorname{arccosh}(x) - \sqrt{x^2-1} + C$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arctanh}(x)$	$x \cdot \operatorname{arctanh}(x) + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C$

Trigonometrische Substitution

Ausdruck	Substitution	Identität
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\sin\theta,\ -\frac{\pi}{2} \leq 0 \leq \frac{\pi}{2}$	$1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a\tan\theta,\ -\frac{\pi}{2} \leq 0 \leq \frac{\pi}{2}$	$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\sec\theta,\ 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ oder $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$	$\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$

Anleitung Partialbruchzerlegung

1. Nullstellen des Nenners berechnen
2. Zuordnung eines Partialbruchs zur Nullstelle:
   Reelle Nullstellen: Wenn x_1 eine einfache Nullstelle ist $\rightarrow \frac{A}{x-x_1}$. Wenn es eine zweifache Nullstelle ist $\rightarrow \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{(x-x_1)^2}$. Bei einer r-fachen Nullstelle $\rightarrow$ $\frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(x-x_1)^r}$
   Nichtreelle Nullstellen: Aus quadratischem Term $x^2 + px + q$ wird $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$
3. Ansatz zur Partialbruchzerlegung aufstellen, Koeffizienten $((A, B, C \ldots))$ berechnen.
   Bspw. $\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3} = \frac{A(x-x_2)(x-x_3)+B(x-x_1)(x-x_3)+C(x-x_1)(x-x_2)}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}$

Wichtige Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty}\tan^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^a} = 0 \quad \forall a > 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0 \qquad \lim_{n\to 0}\frac{e^n - 1}{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!} = \infty \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln(n) = \infty \qquad \lim_{x\to 0+}x^a\log x = 0 \quad \forall a > 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\tan^{-1}(n) = \frac{\pi}{2} \qquad \tan^{-1}(0) = 0$$

Wichtige Reihen / Summenformeln

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \qquad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty \quad \text{(harmonisch)}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad n^2 = \sum_{k=1}^{n}2k-1$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Axiome der reellen Zahlen

Es gibt eine Operation, genannt Addition: $+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, (x,y)\to x+y$, auf $\mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

A.i) Assoziativität: $\forall x,y,z \in \mathbb{R} : x + (y+z) = (x+y)+z$,

A.ii) Neutrales Element: $\exists 0 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = x$,

A.iii) Inverses Element: $\forall x \in \mathbb{R}\exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0$ (Element ist eindeutig bestimmt),

A.iv) Kommutativität: $\forall x,y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$.

Es gibt eine weitere Operation, genannt Multiplikation: $\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, (x,y)\to x\cdot y = xy$, auf $\mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

M.i) Assoziativität: $\forall x,y,z \in \mathbb{R} : x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$,

M.ii) Neutrales Element: $\exists 1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\forall x \in \mathbb{R} : x \cdot 1 = x$,

M.iii) Inverses Element: $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\exists\mathbb{R} : x \cdot y = 1$,

M.iv) Kommutativität: $\forall x,y \in \mathbb{R} : x\cdot y = y \cdot x$.

Zudem gibt es auf $\mathbb{R}$ eine Ordnung $\leq$ mit den folgenden Eigenschaften:

O.i) Reflexivität: $\forall x \in X, x \leq x$,

O.ii) Transitivität: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$,

O.iii) Identivität: $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x \Rightarrow x = y$,

O.iv) Die Ordnung ist total: $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y$ oder $y \leq x$.

Die Ordnung ist konsistent mit Addition und Multiplikation:

K.i) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$,

K.ii) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y, 0 \leq z \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$

Diese Axiome gelten bereits in $\mathbb{Q}$, die entscheidende weitere Eigenschaft in $\mathbb{R}$ ist das Vollständigkeitsaxiom:

V) $\mathbb{R}$ ist ordnungsvollständig: Zu je zwei nicht leeren Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ für alle $a \in A$, $b \in B$ gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, sodass gilt:

$$a \leq c \leq b, \quad \forall a \in A, b \in B$$

Eine wichtige Folgerung aus den Axiomen ist die **Dreiecksungleichung**:

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Das **Archimedische Prinzip** besagt: Zu jeder Zahl $0 < b \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b < n$.

Anleitung Integralsubstitution

Bei bestimmten Integralen kann die Grenze mitsubstituiert werden oder die Stammfunktion ermittelt werden und am Schluss eingesetzt werden.

1. Eine geeignete Substitution $u = g(x)$ finden (oftmals Terme in Wurzeln / Potenzen / Brüche).
2. $du = g'(x)dx$ aufschreiben.
3. Prüfen, ob Integral mit du dem ursprünglichen Integral entspricht. Ansonsten allenfalls Terme, die noch übrig sind, substitutieren oder Faktoren vor das du hängen.