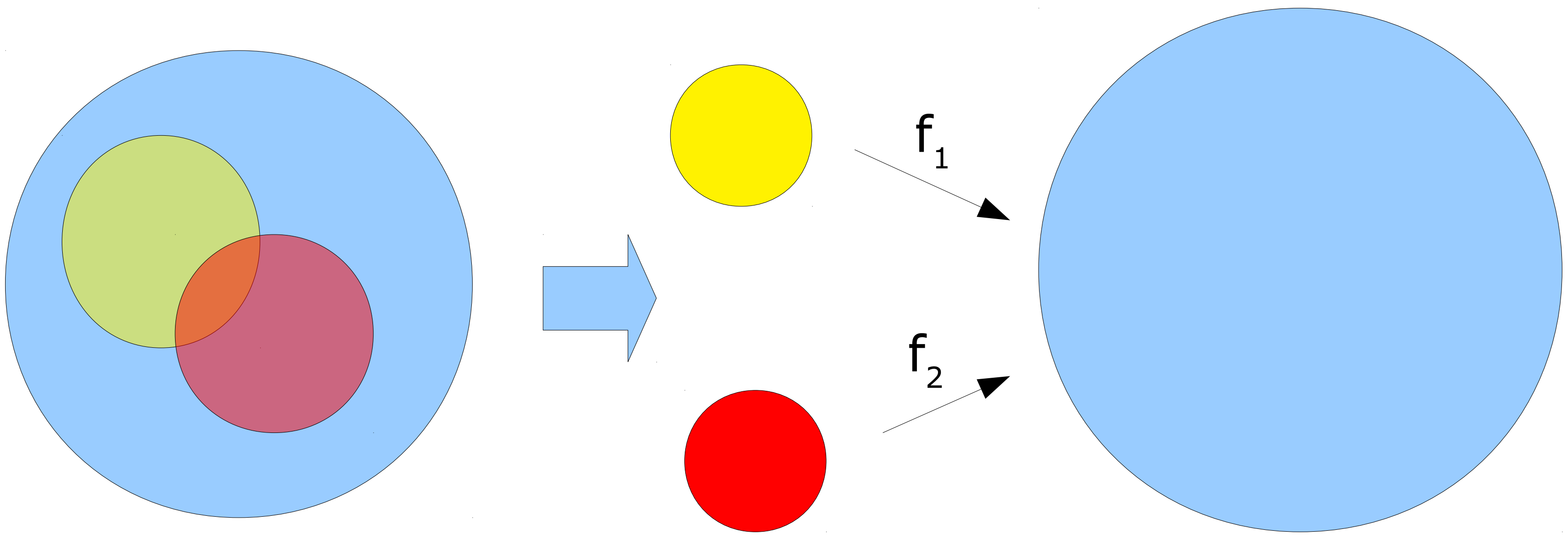
Immersive und submersive Systemtheorien

Prof. Dr. Hans-Gert Gräbe

http://bis.informatik.uni-leipzig.de/HansGertGraebe

In welchen Strukturen kann man komplexere Relationen von Systemen innerhalb von Obersystemen untersuchen?



Mathematische Formulierung der Fragestellung

Gesucht sind $f_1 : S_1 \to S$, $f_2 : S_2 \to S$.

Gibt es für diese Konstellation ein **universelles kategorielles Objekt,** d.h. ein universelles U und universelle Abbildungen $p_1 : S_1 \to U$, $p_2 : S_2 \to U$, so dass sich *für jedes Tripel (f_1, f_2, S)* die obige Konstellation als

$$f_1 = f \circ p_1 : S_1 \to U \to S,\ f_2 = f \circ p_2 : S_2 \to U \to S$$

für ein geeignetes $f = f_1 \oplus f_2 : U \to S$ schreiben lässt. U heißt in dem Fall **direkte Summe** und man schreibt $U = S_1 \coprod S_2$.

$$\begin{tikzcd} S_1 \arrow[dr, "f_1"] & \\ & S \\ S_2 \arrow[ur, "f_2"] & \end{tikzcd} \quad \Longrightarrow \quad \begin{tikzcd} S_1 \arrow[dr, "p_1"] & & \\ & U \arrow[r, "f"] & S \\ S_2 \arrow[ur, "p_2"] & & \end{tikzcd}$$

Mathematische Kategorien

Die meisten mathematischen Modelle bewegen sich in konkreten **Kategorien**, zum Beispiel der Kategorie der Mengen, der Vektorräume, der Faserbündel, der algebraischen Varietäten usw.

Jede solche Kategorie zeichnet sich dadurch aus, dass dort die Begriffe **Objekt** und **Morphismus** eine klare Bedeutung haben.

Morphismen zwischen Vektorräumen sind zum Beispiel operationstreue Abbildungen, also lineare Abbildungen, die sich für endlichdimensionale Vektorräume durch Matrizen beschreiben lassen.

Nicht in jeder Kategorie existieren solche universellen Objekte.

Anmerkung: Die Konstruktion lässt sich leicht auf endlich viele S_i und sogar auf unendlich viele S_i, $i \in I$, verallgemeinern, und so ist es in der Mathematik auch gemeint.

Kategorie der Mengen

In dieser Kategorie existieren direkte Summen U sowohl für endliche als auch unendliche Indexmengen I. Dies ist gerade **die disjunkte Vereinigung** der Mengen S_i.

Die Abbildungen p_i sind gerade die Einbettungen $p_i : S_i \to U$ der Teilmengen in deren disjunkte Vereinigung.

Die Abbildung $f : U \to S$ ergibt sich wie folgt: Für jedes $a \in U$ existieren genau ein i und ein $a` \in S_i$ mit $a=p_i(a`)$. Setze $f(a)=f_i(a`)$.

Ist $|S_1| = a$, $|S_2| = b$, so ist $|S_1 \coprod S_2| = a+b$.

Das Ganze ist nicht mehr als die Summe seiner Teile.

Kategorie der Vektorräume

Auch in dieser Kategorie existieren direkte Summen U sowohl für endliche als auch unendliche Indexmengen I.

Die Abbildungen p_i sind gerade die Einbettungen $p_i : S_i \rightarrow U$ auf die i-te Koordinate von U

Die Abbildung $f : U \rightarrow S$ ergibt sich wie folgt: Jedes $a \in U$ lässt sich eindeutig als (endliche!) Linearkombination von Basisvektoren e_a darstellen, von denen die Bilder $f(e_a)$ bekannt sind. Setze nun f linear fort.

Ist $|S_1| = a$, $|S_2| = b$, so ist $|S_1 \coprod S_2| = a \cdot b$.

Das Ganze scheint mehr als die Summe seiner Teile zu sein. Ich komme darauf zurück.

Alle Pfeile umdrehen (TRIZ Prinzip 13)

Gesucht sind $f_1 : S_1 \leftarrow S$, $f_2 : S_2 \leftarrow S$.

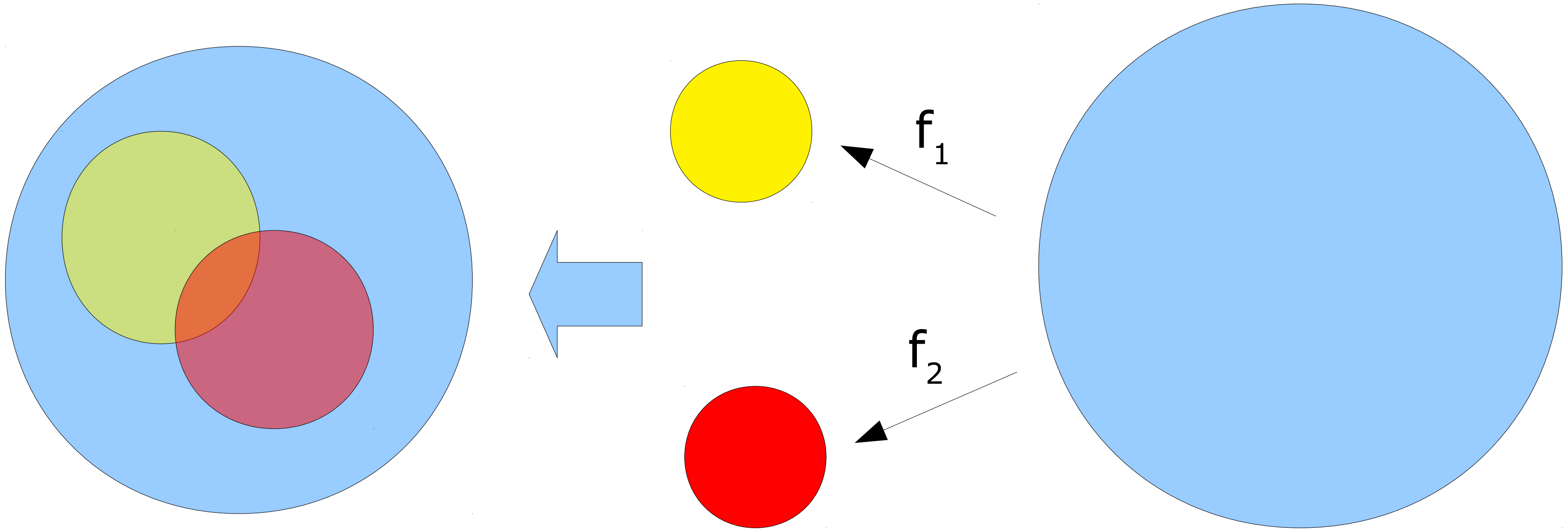
Gibt es für diese Konstellation ein **universelles kategorielles Objekt,** d.h. ein universelles U und universelle Abbildungen $p_1 : S_1 \leftarrow U$, $p_2 : S_2 \leftarrow U$, so dass sich *für jedes Tripel (f_1, f_2, S)* die obige Konstellation als

$$f_1 = p_1 \circ f : S_1 \leftarrow U \leftarrow S,\; f_2 = p_2 \circ f : S_2 \leftarrow U \leftarrow S$$

für ein geeignetes $f = f_1 \otimes f_2 : S \rightarrow U$ schreiben lässt. U heißt in dem Fall **direktes Produkt** und man schreibt $U = S_1 \prod S_2$.

$$\begin{tikzcd} S_1 & \\ & S \arrow[ul, "f_1"'] \arrow[dl, "f_2"] \\ S_2 & \end{tikzcd} \quad \Longrightarrow \quad \begin{tikzcd} S_1 & & \\ & U \arrow[ul, "p_1"'] \arrow[dl, "p_2"] & S \arrow[l, "f"'] \\ S_2 & & \end{tikzcd}$$

Wie ändert sich dabei die Perspektive auf den Systembegriff?



Kategorie der Mengen

In dieser Kategorie existieren direkte Produkte U sowohl für endliche als auch unendliche Indexmengen I. Dies ist gerade **das karthesische Produkt**.

Die Abbildungen p_i sind gerade die Projektionen $p_i : U \rightarrow S_i$ des Produkts auf die einzelnen Komponenten.

Die Abbildung $f : S \rightarrow U$ ergibt sich wie folgt: Für jedes $a \in S$ ist $f(a) = (f_i(a)) \in U$.

Ist $|S_1| = a$, $|S_2| = b$, so ist $|S_1 \prod S_2| = a \cdot b$.

Das Ganze ist deutlich mehr als die Summe seiner Teile, der größte Teil der „Information" ist relationaler Natur.

Kategorie der Vektorräume

Auch in dieser Kategorie existieren direkte Produkte U sowohl für endliche als auch unendliche Indexmengen I.

Für endliche Indexmengen unterscheiden sich die direkte Summe und das direkte Produkt von Vektorräumen (auf den ersten Blick) nicht.

Das direkte Produkt besteht aber nur aus Vektoren, die nur an *endlich* vielen Stellen von null verschiedene Einträge haben, das direkte Produkt ist das *volle kartesische Produkt*.

Ist der Grundkörper abzählbar (etwa K=$\mathbb{Q}$) und I auch, so bleibt die direkte Summe abzählbar, das direkte Produkt ist aber bereits überabzählbar.

Auch hier ist enthält also das direkte Produkt deutlich mehr Information als die direkte Summe.

Submersive und immersive Systemtheorien

Systemtheorien machen selten einen Unterschied zwischen diesen beiden Zugängen.

Zur Unterscheidung der Zugänge bezeichnet man Systemtheorien, in denen das erste Modellierungsprinzip dominiert, als **immersive Systemtheorien**. Man erkennt sie daran, dass ihre Konstruktionen wesentlich auf Einbettungen (Immersionen) aufbauen.

Systemtheorien, die auf dem zweiten Modellierungsprinzip aufbauen, bezeichnet man als **submersive Systemtheorien**. Man erkennt sie daran, dass ihre Konstruktionen wesentlich auf Projektionen (Submersionen) aufbauen und damit auf Prozessen gestaffelter Komplexitätsreduktion.

Die Theorie dynamischer Systeme ist eine submersive Systemtheorie.