

title: "Отчёт по лабораторной работе №5 Математическое моделирование"

subtitle: "Модель хищник-жертва. Вариант №30"

author: "Выполнил: Фаик Карим Яссеревич"

## Цель работы

Изучить жесткую модель хищник-жертва и построить эту модель.

## Теоретическое введение

- Модель Лотки—Вольтерры — модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва», названная в честь её авторов, которые предложили модельные уравнения независимо друг от друга. Такие уравнения можно использовать для моделирования систем «хищник — жертва», «паразит — хозяин», конкуренции и других видов взаимодействия между двумя видами. [4]

Данная двухвидовая модель основывается на следующих предположениях [4]:

1. Численность популяции жертв  $x$  и хищников  $y$  зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (-ax(t) + by(t)x(t)) \\ \frac{dy}{dt} = (cy(t) - dy(t)x(t)) \end{cases}$$

В этой модели  $x$  – число жертв,  $y$  – число хищников. Коэффициент  $a$  описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников,  $c$  – естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников ( $xy$ ). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены  $-bxy$  и  $dxu$  в правой части уравнения).

Математический анализ этой (жёсткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние, всякое же другое начальное состояние приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени такая система вернётся в изначальное состояние.

Стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решения) будет находиться в точке  $x_0 = \frac{c}{a}$ ,  $y_0 = \frac{a}{b}$ . Если начальные значения задать в стационарном состоянии  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ , то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей  $x(0)$ ,  $y(0)$ . Колебания совершаются в противофазе.

## Задачи

1. Построить график зависимости численности хищников от численности жертв
2. Построить график зависимости численности хищников и численности жертв от времени
3. Найти стационарное состояние системы

## Задание

Вариант 30:

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.63x(t) + 0.019y(t)x(t) \\ \frac{dy}{dt} = 0.59y(t) - 0.018y(t)x(t) \end{cases}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях:  $x_0 = 7$ ,  $y_0 = 12$ . Найдите стационарное состояние системы.

## Выполнение лабораторной работы

### Построение математической модели. Решение с помощью программ

#### Julia

Код программы для нестационарного состояния:

```
using Plots
using DifferentialEquations

x0 = 7
y0 = 12

a = 0.63
b = 0.019
c = 0.59
d = 0.018

function ode_fn(du, u, p, t)
    x, y = u
    du[1] = -a*u[1] + b * u[1] * u[2]
    du[2] = c * u[2] - d * u[1] * u[2]
end

v0 = [x0, y0]
tspan = (0.0, 60.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)
X = [u[1] for u in sol.u]
Y = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt = plot(
    dpi=300,
    legend=false)

plot!(
    plt,
    X,
    Y,
    color=:blue)

savefig(plt, "out/lab05_1.png")

plt2 = plot(
    dpi=300,
    legend=true)

plot!(
```

```

plt2,
T,
X,
label="Численность жертв",
color=:red)

plot!(
plt2,
T,
Y,
label="Численность хищников",
color=:green)

savefig(plt2, "out/lab05_2.png")

```

Код программы для стационарного состояния:

```

using Plots
using DifferentialEquations

a = 0.63
b = 0.019
c = 0.59
d = 0.018

x0 = c / d
y0 = a / b

function ode_fn(du, u, p, t)
    x, y = u
    du[1] = -a*u[1] + b * u[1] * u[2]
    du[2] = c * u[2] - d * u[1] * u[2]
end

v0 = [x0, y0]
tspan = (0.0, 60.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)
X = [u[1] for u in sol.u]
Y = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt2 = plot(
    dpi=300,
    legend=true)

plot!(
plt2,
T,
X,
label="Численность жертв",
color=:red)

```

```
plot!(  
    plt2,  
    T,  
    Y,  
    label="Численность хищников",  
    color=:green)
```

```
savefig(plt2, "lab05_3.png")
```

В стационарном состоянии решение вида  $y(x) = \text{somefunction}$  будет представлять собой точку.

#### Результаты работы кода на Julia

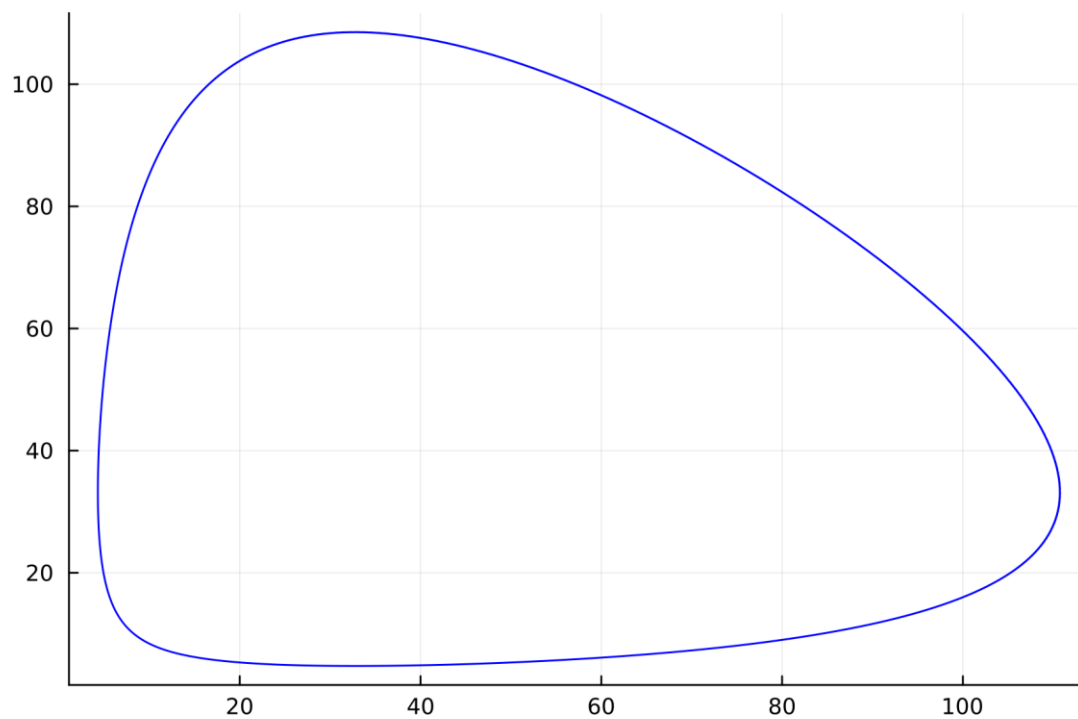


График численности хищников от численности жертв

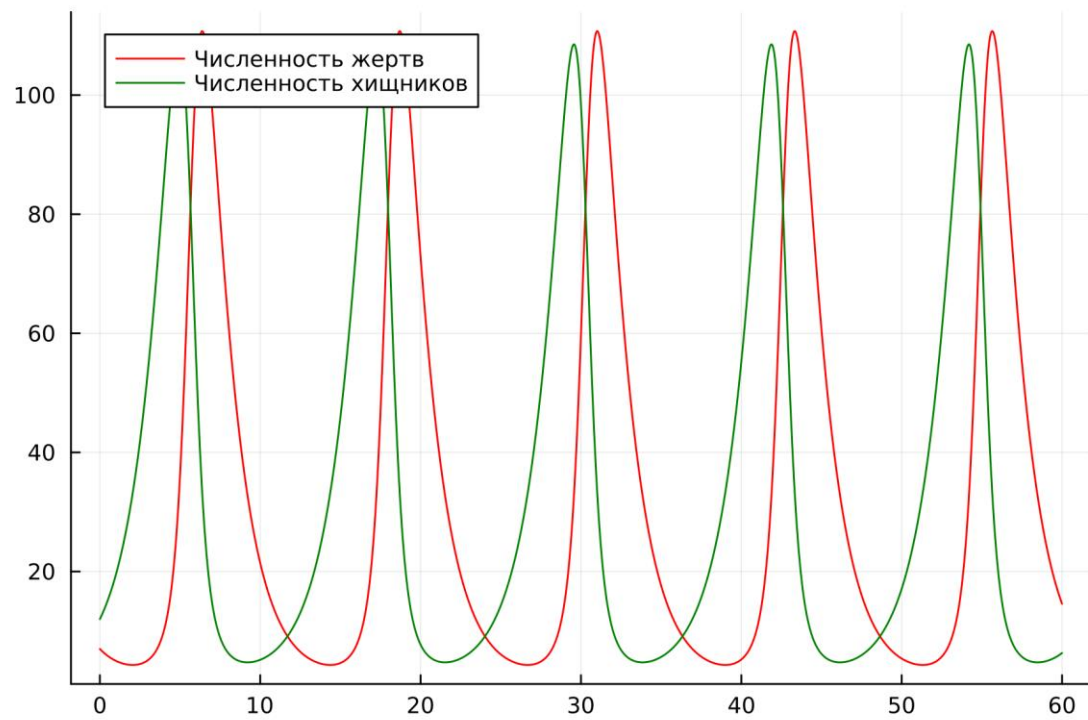
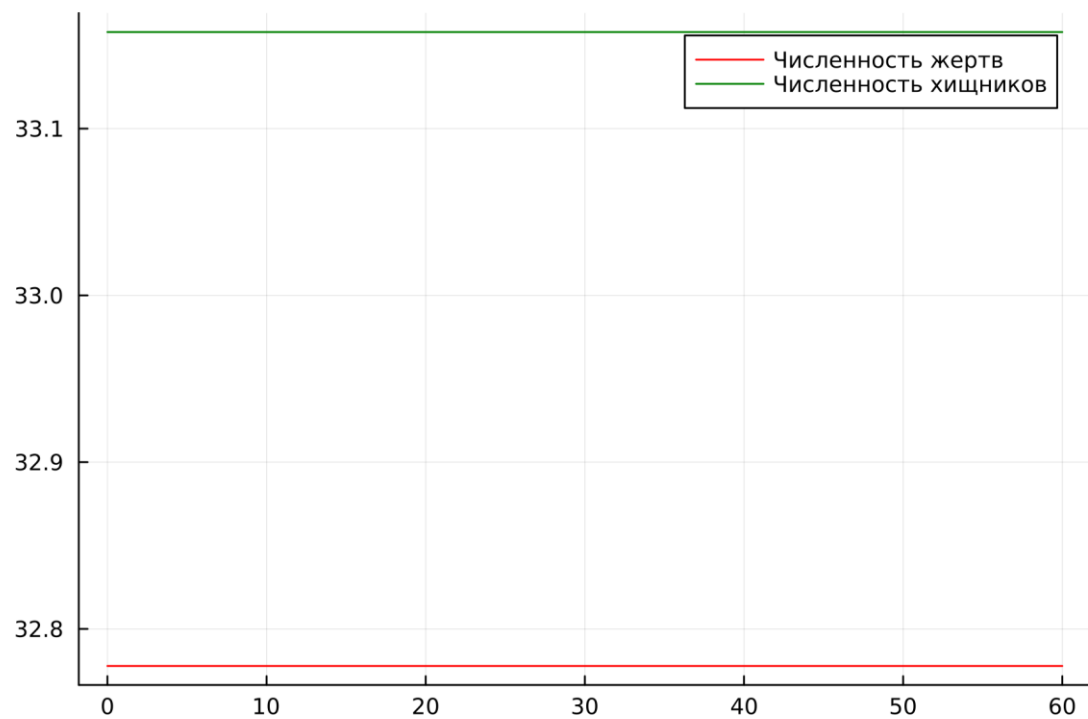


График численности жертв и хищников от времени



Стационарное состояние

OpenModelica

Код программы для нестационарного состояния:

```

model lab05_1
Real a = 0.63;
Real b = 0.019;
Real c = 0.59;
Real d = 0.018;
Real x;
Real y;
initial equation
x = 7;
y = 12;
equation
der(x) = -a*x + b*x*y;
der(y) = c*y - d*x*y;
end lab05_1;

```

Код программы для стационарного состояния:

```

model lab05_2
Real a = 0.63;
Real b = 0.019;
Real c = 0.59;
Real d = 0.018;
Real x;
Real y;
initial equation
x = c / d;
y = a / b;
equation
der(x) = -a*x + b*x*y;
der(y) = c*y - d*x*y;
end lab05_2;

```

В стационарном состоянии решение вида  $y(x) = \text{somefunction}$  будет представлять собой точку.

## Результаты работы кода на OpenModelica

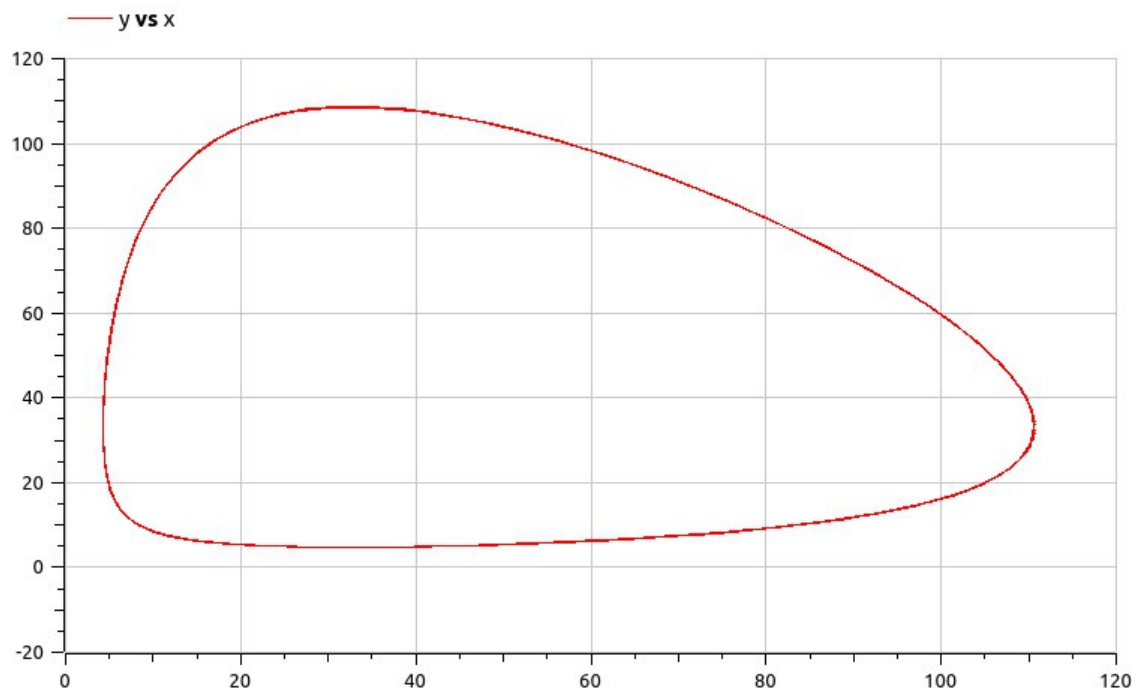


График численности хищников от численности жертв

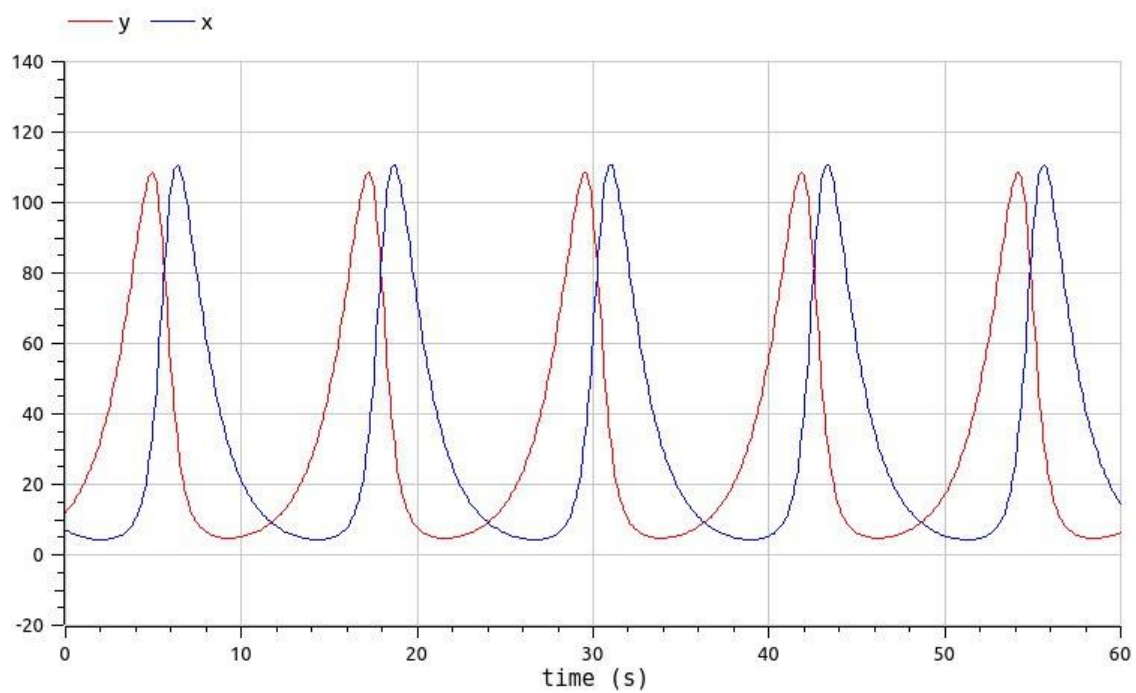
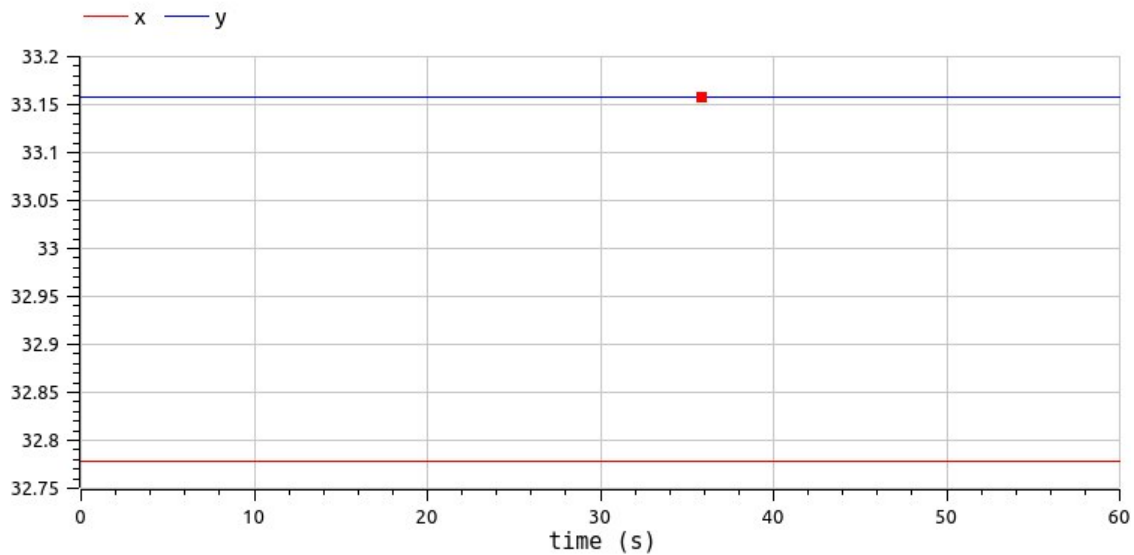


График численности жертв и хищников от времени





*Стационарное состояние*

## Анализ полученных результатов. Сравнение языков.

В итоге проделанной работы мы построили график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв на языках Julia и OpenModelica. Построение модели хищник-жертва на языке openModelica занимает меньше строк, чем аналогичное построение на Julia.

## Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы была изучена модель хищник-жертва и построена модель на языках Julia и Open Modelica.

## Список литературы. Библиография

- [1] Документация по Julia: <https://docs.julialang.org/en/v1/>
- [2] Документация по OpenModelica: <https://openmodelica.org/>
- [3] Решение дифференциальных уравнений: <https://www.wolframalpha.com/>
- [4] Модель Лотки—Вольтерры: [https://math-it.petrus.ru/users/semenova/MathECO/Lectures/Lotka\\_Volterra.pdf](https://math-it.petrus.ru/users/semenova/MathECO/Lectures/Lotka_Volterra.pdf)