Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Эллипсоидальные оценки для множества разрешимости»

Студент 415 группы
К. И. Салихова

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент И. В. Востриков

Москва, 2020

Содержание

1 Постановка задачи

Рассматривается линейная управляемая система:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in [t_0, t_1], \\ x(t_1) \in \mathcal{E}(x_1, X_1), \\ u(t) \in \mathcal{E}(p(t), P(t)). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $x_1 \in \mathbb{R}^n$, $X_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $X_1 = X_1^* > 0$, $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $p(t) \in \mathbb{R}^m$, $P(t) \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $P(t) = P^*(t) > 0$ при любых t из $[t_0, t_1]$. Функции $A(t)$, $B(t)$, $p(t)$, $P(t)$ непрерывны на $[t_0, t_1]$.

Необходимо построить:

1. Внутренние и внешние эллипсоидальные оценки множества разрешимости системы (1).

2. Проекции множества разрешимости на двумерную плоскость.

3. Трехмерную проекцию множества разрешимости.

2 Внутренние и внешние оценки для суммы эллипсоидов

Обозначим эллипсоид с центром $q \in \mathbb{R}^n$ и матрицей конфигурации $Q \in \mathbb{R}^{n\times n},\ Q = Q^* > 0$

$$\mathcal{E}(q, Q) = \{x\colon \langle (x-q),\, Q^{-1}(x-q)\rangle \leq 1\}.$$

Получим верхние и нижние оценки суммы по Минковскому $\mathcal{E}_-$, $\mathcal{E}_+$ конечного числа эллипсоидов $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n$:

$$\mathcal{E}_- \subset \mathcal{E}_1 + \ldots + \mathcal{E}_n \subset \mathcal{E}_+.$$

2.1 Внешняя оценка

Пусть $p_1, \ldots, p_n > 0$. Покажем, что

$$\mathcal{E}_+ = (p_1 + \ldots + p_n)\left(\frac{Q_1}{p_1} + \ldots + \frac{Q_n}{p_n}\right)$$

является внешней оценкой.

Действительно,

$$\rho(l|\mathcal{E}_+)^2 = \sum_{i=1}^{n}\langle l,\, Q_i l\rangle + \sum_{i>j}\left(\frac{p_j}{p_i}\langle l,\, Q_i l\rangle + \frac{p_i}{p_j}\langle l,\, Q_j l\rangle\right) \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n}\langle l,\, Q_i l\rangle + 2\sum_{i>j}\sqrt{\langle l,\, Q_i l\rangle\langle l,\, Q_j l\rangle} = \rho(l|\mathcal{E}_1 + \ldots + \mathcal{E}_n)^2.$$

Равенство здесь достигается тогда и только тогда, когда $p_i = \sqrt{\langle l,\, Q_i l\rangle},\ i = 1, \ldots, n$. Таким образом, опорный вектор $\mathcal{E}_+$ по направлению l совпадает с опорным ветором $\mathcal{E}_1 + \ldots + \mathcal{E}_n$, и потому

$$\mathcal{E}_1 + \ldots + \mathcal{E}_n = \bigcap_{l\in S_1}\mathcal{E}_+(l).$$

2.2 Внутренняя оценка

Пусть матрица конфигурации для $\mathcal{E}_-$

$$Q_- = Q_*^* Q_*, \quad Q_* = \sum_{i=1}^{n} S_i Q_i^{\frac{1}{2}},$$

где S_i — ортогональные матрицы.

С помощью неравенства Коши–Буняковского можно показать, что Q_- действительно является внутренней оценкой, и, более того $\rho(l|\mathcal{E}_-) = \rho(l|\mathcal{E}_1 + \ldots + \mathcal{E}_n)$ в том и только том случае, когда $S_i Q_i^{\frac{1}{2}} l = \lambda_i S_1 Q_1^{\frac{1}{2}} l$.

3 Эллипсоидальные оценки для интеграла

Рассмотрим выражение

$$I(t) = \mathcal{E}_0(0, Q_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \mathcal{E}(0, Q(\tau)) d\tau$$

— интеграл от эллипсоида $\mathcal{E}(0, Q(t)))$ по переменной $\tau \in [t_0, t]$. Введем разбиение $\{\tau_i\}_{i=1}^N$ отрезка интегрирования $[t_0, t]$ и будем представлять интеграл в виде сумм

$$I(t) = \lim_{N \to \infty} I_N,$$

где $I_N = \mathcal{E}_0 + \sum\limits_{i=1}^{N} \sigma \mathcal{E}_i, \quad \sigma = \dfrac{t - t_0}{N}, \quad \mathcal{E}_i = \mathcal{E}(0, Q(\tau_i)).$

3.1 Внешняя оценка

Матрица конфигурации внешней оценки интегральной суммы находится по формуле

$$Q_+^N = \left(p_0 + \sum_{i=1}^{N} p_i\right) \left(\frac{Q_0}{p_0} + \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i \sigma^2}{p_i}\right) = \left\{p_0 = \langle l, Q_0 l\rangle^{\frac{1}{2}},\ p_i = \sigma \langle l, Q_i l\rangle^{\frac{1}{2}}\right\} =$$
$$= \left(p_0 + \sum_{i=1}^{N} \sigma \langle l, Q_i l\rangle^{\frac{1}{2}}\right) \left(\frac{Q_0}{p_0} + \sum_{i=1}^{N} \sigma \frac{Q_i}{\langle l, Q_i l\rangle^{\frac{1}{2}}}\right).$$

При стремлении N к бесконечности получим следующую матрицу конфигурации для внешней оценки интеграла:

$$Q(\tau) = \left(p_0 + \int\limits_{t_0}^{t} p(\tau) d\tau\right) \left(\frac{Q_0}{p_0} + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{Q(\tau)}{p(\tau)} d\tau\right).$$

Таким образом, интеграл аппроксимируется пересечением эллипсоидов по различным направлениям l, то есть $I(t) = \bigcap\limits_{\|l\|=1} \mathcal{E}_+(l)$.

3.2 Внутренняя оценка

Аналогичными рассуждениями приходим к тому, что матрица конфигурации нижней оценки для интеграла имеет вид

$$Q_- = Q_*^* Q_*, \quad Q_* = S_0 Q_0^{\frac{1}{2}} + \int\limits_{t_0}^{t} S(\tau) Q^{\frac{1}{2}}(\tau) d\tau,$$

причем оценка будет точной по направлению l, если

$$S_0 Q_0^{\frac{1}{2}} l = \lambda(\tau) S(\tau) Q^{\frac{1}{2}}(\tau) l.$$

В качестве S_0 далее будем использовать единичную матрицу.

4 Эллипсоидальное оценивание множества разрешимости

Будем дополнительно предполагать, что в задаче (1) выполнено $B(t)Q(t)B^*(t) > 0$ при любых $t \in [t_0, t]$. Оценим множество разрешимости $\mathcal{W}[t]$.

Найдем траекторию $x(t)$ по формуле Коши:

$$x(t) = X(t, t_1)x(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t} X(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau,$$

где $X(t, \tau)$ — фундаментальная матрица, полученная как решение задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X(t,\tau)}{\partial \tau} = -X(t,\tau)A(\tau), \\ X(t,t) = I. \end{cases} \tag{2}$$

Множество разрешимости можно представить следующим образом:

$$\mathcal{W}(t, t_1, \mathcal{E}(x_1, X_1)) = X(t, t_1)\mathcal{E}(x_1, X_1) - \int\limits_{t}^{t_1} X(t, \tau)B(\tau)\mathcal{E}(p(\tau), P(\tau))d\tau.$$

Утверждение 1. *Пусть $\mathcal{E}(p, P)$ — эллипсоид с центром p и матрицей конфигурации P, а B — невырожденная квадратная матрица тогда $B\mathcal{E}(p, P) = \mathcal{E}(Bp, BpB^*)$.*

Доказательство.
Пусть $x \in \mathcal{E}(p, P)$, что равносильно $\langle x,\, P^{-1}x \rangle \leq 1$.

Рассмотрим теперь $B\mathcal{E}(p, P) = \mathcal{E}(q, Q)$, для него будет верно

$$\langle B^{-1}x, P^{-1}B^{-1}x \rangle = \langle x, \left(B^{-1}\right)^* P^{-1}B^{-1}x \rangle \leqslant 1.$$

Следовательно, $Q^{-1} = \left(B^{-1}\right)^* P^{-1}B^{-1}$ и $Q = BPB^*$, что и требовалось доказать. ■

Тогда множество $\mathcal{W}[t]$ может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}[t] = \mathcal{E}(X(t, t_1)x_1,\, X(t, t_1)X_1X^*(t, t_1)) - \\ - \int\limits_{t}^{t_1} \mathcal{E}(X(t, \tau)B(\tau)p(\tau),\, X(t, \tau)B(\tau)P(\tau)B^*(\tau)X^*(t, \tau))d\tau = \\ = \mathcal{E}(X(t, t_1)x_1,\, X(t, t_1)X_1X^*(t, t_1)) + \int\limits_{t_1}^{t} \mathcal{E}(X(t, \tau)p_B(\tau),\, X(t, \tau)P_B(\tau)X^*(t, \tau))d\tau. \end{aligned}$$

Здесь $p_B(\tau) = B(\tau)p(\tau)$, $P_B(\tau) = B(\tau)P(\tau)B^*(\tau)$.

Для построения внешних и внутренних оценок множества $\mathcal{W}[t]$ воспользуемся внешними и внутренними оценками для интеграла, которые мы получили выше.

4.1 Внешняя оценка

Пусть $\mathcal{E}(q_+(t), Q_+(t))$ - внешняя эллипсоидальная оценка множества $\mathcal{W}[t]$. Параметры задаются формулами

$$q_+ = X(t, t_1)x_1 + \int\limits_{t_1}^{t} X(t, \tau)B(\tau)q(\tau)d\tau,$$

$$Q_+(t) = \left(p_0 - \int\limits_{t_1}^{t} p(\tau)d\tau\right)\left(\frac{X(t, t_1)X_1X^*(t, t_1)}{p_0} - \int\limits_{t_1}^{t} \frac{X(t, \tau)B(\tau)P(\tau)B^*(\tau)X^*(t, \tau)}{p(\tau)}d\tau\right),$$

где

$$p_0 = \langle l, X(t, t_1)X_1X^*(t, t_1)l\rangle^{\frac{1}{2}},$$
$$p(\tau) = \langle l, X(t, \tau)B(\tau)Q(\tau)B^*(\tau)X^*(t, \tau)l\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Выбранные таким образом p позволяют получить оценку, точную в направлении l.

4.2 Внутренняя оценка

Теперь получим внутреннюю эллипсоидальную оценку $\mathcal{E}(q_-(t), Q_-(t))$.

Будем искать матрицу конфигурации в виде:

$$X_-(t) = Q_*^*(t)Q_*(t),$$

$$\text{где } Q_*(t) = X_1^{\frac{1}{2}}X^*(t, t_1) + \int\limits_{t}^{t_1} S(\tau)P^{\frac{1}{2}}(\tau)B^*(\tau)X^*(t_1, \tau)d\tau.$$

Эта оценка точна по направлению l, если для любых τ будет выполнено:

$$\lambda(\tau)X_1^{\frac{1}{2}}X^*(t, t_1)l = S(\tau)^{\frac{1}{2}}(\tau)B^*(\tau)X^*(t, \tau)l. \tag{3}$$

Матрица $S(\tau)$ ортогональна, поэтому:

$$\lambda(\tau) = \frac{\left\|P^{\frac{1}{2}}(\tau)B^*(\tau)X^*(t, \tau)l\right\|}{\left\|X_Q^{\frac{1}{2}}X^*(t, t_1)l\right\|}.$$

Найдем теперь $S(\tau)$ из сингулярного разложения векторов

$$a = \lambda(\tau)X_1^{\frac{1}{2}}X^*(t, t_1)l = U_1d_1v_1,$$

$$b = P^{\frac{1}{2}}(\tau)B^*(\tau)X^*(t, \tau)l = U_2d_2v_2.$$

Здесь U_1, U_2 — ортогональные матрицы, $d_1 = (d_{11}, 0, \ldots, 0)^T$, $d_2 = (d_{21}, 0, \ldots, 0)^T$, $v_1, v_2 \in \{-1, 1\}$. Так как нормы векторов совпадают, и $d_1 \geq 0$, $d_2 \geq 0$, верно $d1 = d2$.

Положим $S(\tau) = \dfrac{v_1}{v_2}U_1U_2^*$. Тогда $S(\tau)$ окажется ортогональной, равенство (3) будет выполнено.

5 Описание алгоритма

1. Зададим входные данные.
2. Зададим количество направлений N. Сгенерируем N направлений l_0, равномерно разбивающих окружность в плоскоти (l_1, l_2).
3. Найдем фундаментальную матрицу, как функцию $X(t, \cdot)$, из системы (2).
4. По формулам из Раздела 4 вычислим внутренние и внешние аппроксимации для каждого направления l_0. Эти оценки являются точными по этому направлению.
5. По каждой из оценок вычислим опорный вектор по направлению l_0. Множество разрешимости - объединение этих опорных векторов.
6. Для построение аппроксимации трубки разрешимости в каждый момент времени t будем отстраивать множество разрешимости.

6 Примеры работы алгоритма

Сначала проиллюстрируем внешнюю и внутренню аппроксимацию суммы эллипсов $\mathcal{E}(q_1, Q_1)$, $\mathcal{E}(q_2, Q_2), \mathcal{E}(q_3, Q_3)$, где:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}, q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, q_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

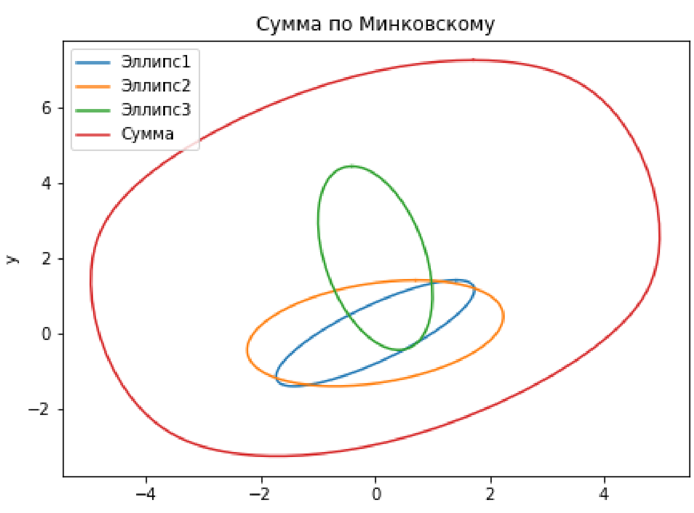

Рис. 1: Сумма эллипсов.

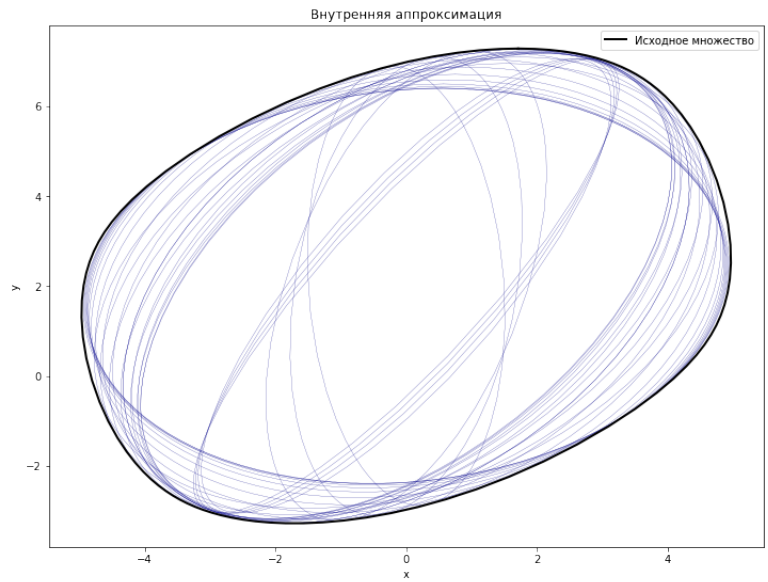

Рис. 2: Внутренние оценки.

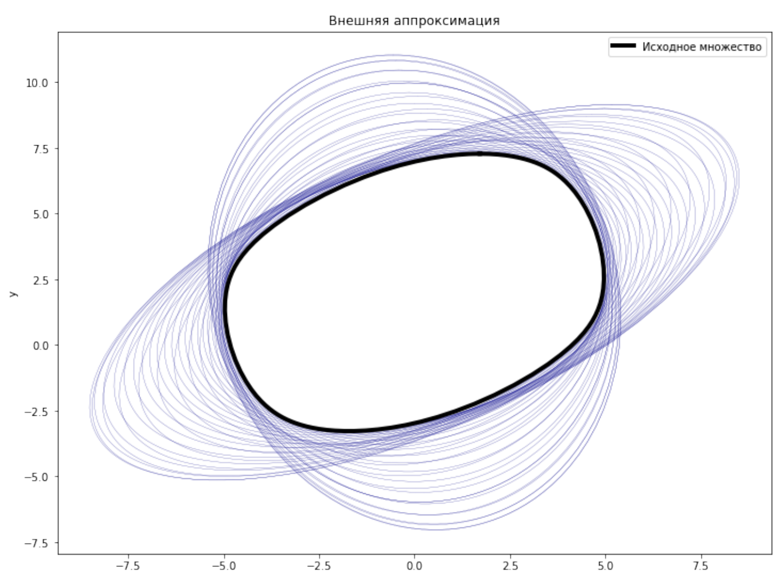

Рис. 3: Внешние оценки.

Теперь рассмотрим систему:

$$A(t) = \begin{pmatrix} cos(t) & -sin(t) & 0 \\ sin(t) & cos(t) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B(t) = \begin{pmatrix} cos(t) & -sin(t) & 0 \\ sin(t) & cos(t) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ P(t) = \begin{pmatrix} |cos(t)|+1 & 0 & 0 \\ 0 & |cos(t)|+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$p(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ X_1 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 13 \end{pmatrix},\ x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t_1 = 10.$$

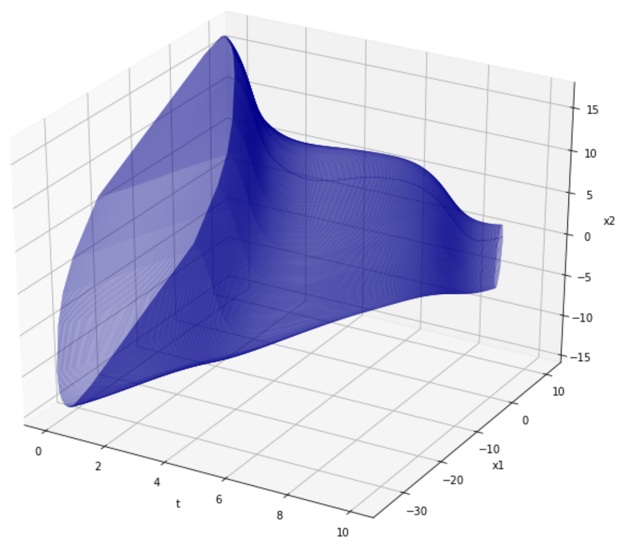

Рис. 4: Проекция множества разрешимости на на координатную плоскость Ox_2x_3.

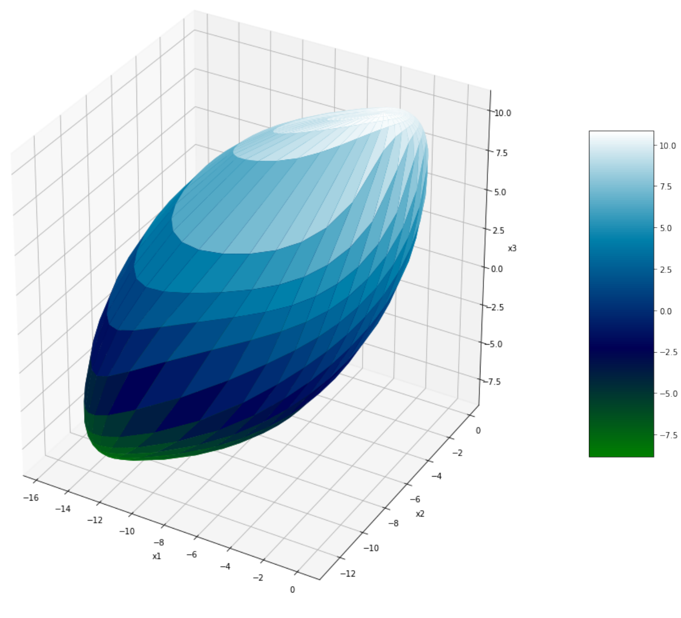

Рис. 5: Множество разрешимости в момент $t = 5$.

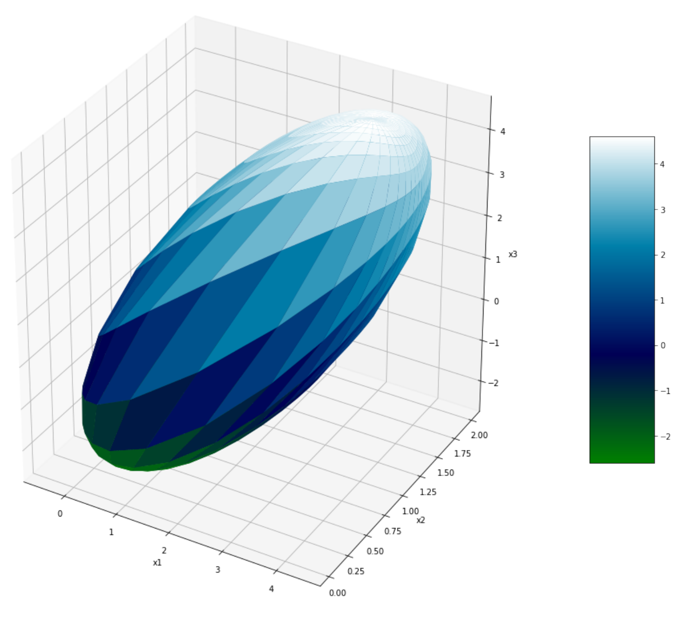

Рис. 6: Множество разрешимости в момент $t = 10$.