Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Задание 2 практикума по оптимальному управлению»

Студент 315 группы
К. И. Салихова

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2020

Содержание

Часть I

Теоретическая часть

1 Постановка задачи

Рассматривается система из двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 + u_2 \\ \dot{x_2} = u_1 + u_2 x_2 \end{cases}, t \in [0, T], \tag{1}$$

где $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, u = (u_1, u_2)' \in \mathbb{R}^2$. На возможные значения управляющих параметров u_1, u_2 наложены следующие ограничения:

Задача А. $u_1 \geq 0$, $u_2 \in [k_1, k_2]$, $k_1 < 0$, $k_2 > 0$.

Задача Б. $u_1 \in \mathbb{R}$, $u_2 \in [k_1, k_2]$, $k_1 < 0$, $k_2 > 0$.

Задан начальный момент времени $t_0 = 0$ и начальная позиция $x(0) : x_1(0) = 0, x_2(0) = 0$. Необходимо за счет выбора программного управления u перевести систему из заданной начальной позиции в такую позицию в момент времени T, в которой $|x_1(T) - L| \leq \varepsilon$, $|x_2(T) - S| \leq \varepsilon$. На множестве всех реализаций программных управлений, переводящих материальную точку в указанное множество, необходимо решить задачу оптимизации:

$$J = \int\limits_0^T (u_1(t) + u_1^2(t))\, dt \to \min_{u(\cdot)}$$

2 Вспомогательные утверждения

Главным утверждением, использующимся для решения задачи, является принцип максимума Понтрягина.

Рассматривается задача оптимального управления автономной системой

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad t \in [t_0, t_1],\ x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R}^m$$

с минимизацией функционала

$$J = \int\limits_{t_0}^T f_0(x(t), u(t))\, dt \to \inf_{u(\cdot)}$$

.

Введем следующие обозначения:

- Функционал Гамильтона-Понтрягина:

  $$\mathcal{H}(x, u, \tilde{\psi}) = \psi_0 f_0(x, u) + \langle \psi,\ f(x, u) \rangle,$$

  где $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n) \in \mathbb{R}^n,\ \psi_0 \in \mathbb{R}$

- $l(x, y, a) = a_1 g_1(x, y) + \ldots + a_s g_s(x, y)$, где $g_i(x(0), x(T)) \leq 0$, $i = \overline{1, m}$ и $g_i(x(0), x(T)) = 0$, $i = \overline{m+1, s}$.

Теорема 1 (Принцип максимума Понтрягина)**.** *Пусть* $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ — *решение поставленной задачи оптимального управления. Тогда найдутся* $\tilde{\psi} = (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n)$, $\tilde{\psi} \not\equiv 0$ *и числа* $a_1, \dots a_s$ *такие, что:*

1. $a = (a_1, \dots, a_s) \neq 0$, $a_1 \geq 0, \dots a_s \geq 0$
2. $\psi_0 \leqslant 0$ *и постоянна, а* $\psi(t)$ *является решением сопряженной системы*
$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), \tilde{\psi}(t)),$$
3. $\forall t \in [t_0, T] : \mathcal{H}(x^*(t), u^*(t), \tilde{\psi}(t)) \overset{\text{п.в.}}{=} \max\limits_{u \in \mathcal{P}(t)} \mathcal{H}(x^*(t), u, \tilde{\psi}(t))$
4. *Выполнены условия трансверсальности:*
$$\psi_i(t_0) = \frac{\partial l(x(0), x(T), a)}{\partial x_i},\ i = \overline{1, n},$$
$$\psi_i(T) = \frac{\partial l(x(0), x(T), a)}{\partial y_i},\ i = \overline{1, n},$$
5. *Выполнено условие нежесткости:*
$$a_j g_j(x(t_0), x(T)) = 0,\ j = \overline{1, m}.$$

3 Анализ поставленной задачи.

Для решения задачи, потребуется применить Принцип максимума. Сначала определим функции $g_i(x(0), x(T))$:

$$|x_1(T) - L| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} x_1(T) - L \leq \varepsilon, \\ x_1(T) - L \geq -\varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_1(x(0), x(T)) = x_1(T) - L - \varepsilon, \\ g_2(x(0), x(T)) = -x_1(T) + L - \varepsilon \end{cases}$$

$$|x_2(T) - S| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} x_2(T) - S \leq \varepsilon, \\ x_2(T) - S \geq -\varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_3(x(0), x(T)) = x_2(T) - S - \varepsilon, \\ g_4(x(0), x(T)) = -x_2(T) + S - \varepsilon \end{cases}$$

Кроме того:
$$g_5(x(0), x(T)) = x_1(0) = 0,\ g_6(x(0), x(T)) = x_2(0) = 0.$$

Из условия нежесткости:

$$a_j g_j(x(0), x(T)) = 0,\ j = \overline{1, m} \Rightarrow x_1(T) = \left[\begin{array}{l} L - \varepsilon, \\ L + \varepsilon \end{array} \right.,\ x_2(T) = \left[\begin{array}{l} S - \varepsilon, \\ S + \varepsilon. \end{array} \right.$$

Теперь распишем функцию Гамильтона-Понтрягина:

$$\mathcal{H}(x, \psi, u) = \psi_0(u_1 + u_1^2) + \psi_1(x_2 + u_2) + \psi_2(u_1 + u_2 x_2) = (\psi_0 u_1^2 + u_1(\psi_0 + \psi_2)) + u_2(\psi_1 + \psi_2 x_2) + \psi_1 x_2.$$

Далее, учитывая, что $\overline{\psi}$ является решением сопряженной системы, получим:

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \psi_1 = const, \tag{2}$$

$$\dot{\psi}_2 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2} = -\psi_1 - \psi_2 u_2. \tag{3}$$

Теперь определим возможные значения u_1^* и u_2^*, учитывая, что на u^* достигается максимум функции Гамильтона-Понтрягина:

$$u_2(\psi_1 + \psi_2 x_2) \to \max_{u_2} \Rightarrow u_2^* = \begin{cases} k_1, & \psi_1 + \psi_2 x_2 < 0, \\ k_2, & \psi_1 + \psi_2 x_2 > 0, \\ [k_1, k_2], & \psi_1 + \psi_2 x_2 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Для того, чтобы найти u_1^*, максимизируем функцию $f(u_1) = \psi_0 u_1^2 + u_1(\psi_0 + \psi_2)$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u_1} = 2\psi_0 u_1 + \psi_0 + \psi_2 = 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} = 2\psi_0 < 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow u_1^* = -\frac{\psi_0 + \psi_2}{2\psi_0}. \tag{5}$$

4 Задача А.

По условию $u_1 \geq 0$, значит:

$$u_1^* = \begin{cases} -\dfrac{\psi_0 + \psi_2}{2\psi_0}, & \psi_0 + \psi_2 \geq 0, \\ 0, & \psi_0 + \psi_2 < 0. \end{cases}$$

Также заметим, что при $u_1 \geq 0$ дифференциальное уравнение $\dot{x_2} = u_1 + u_2 x_2$ задает возрастающую функцию $x_2(t)$. А так как $x_2(0) = 0$, можно сделать вывод, что в Задаче А $x_2(t) \geq 0 \, \forall t \in [0, T]$.

4.1 Анормальный случай.

Если $\psi_0 = 0$, то

$$u_1^* = \begin{cases} \infty, & \psi_2 \geq 0, \\ 0, & \psi_2 < 0. \end{cases}$$

В этом случае получаем не конечное значение управления, а значит, не рассматриваем этот случай.

4.2 Нормальный случай.

Теперь рассмотрим случай, когда $\psi_0 \neq 0$. Для упрощения вычислений положим $\psi_0 = -\dfrac{1}{2} < 0$. Тогда:

$$u_1^* = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} + \psi_2, & \psi_2 \geq \dfrac{1}{2}, \\ 0, & \psi_2 < \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{6}$$

4.2.1 Решение основных дифференциальных уравнений.

Для начала предположим, что $\xi(t) = \psi_1 + \psi_2(t) x_2(t) \neq 0$, тогда: $u_2^* = k = \left[\begin{array}{l} k_1, \\ k_2. \end{array}\right.$ Тогда из (3):

$$\dot{\psi}_2(t) + k\psi_2(t) = -\psi_1$$

$$\dot{\psi}_2(t) + k\psi_2(t) = 0 \Rightarrow \psi_2(t) = ce^{-kt} \Rightarrow \dot{c}e^{-kt} = -\psi_1 \Rightarrow c = -\frac{\psi_1}{k}e^{kt} + c_1 \Rightarrow$$

$$\psi_2(t) = -\frac{\psi_1}{k} + c_1 e^{-kt} \Rightarrow \psi_2(t) = -\frac{\psi_1}{k} + (\psi_2^0 + \frac{\psi_1}{k})e^{-kt}, \text{ где } \psi_2^0 = \psi_2(0). \tag{7}$$

Теперь найдем $x_2(t)$. Рассмотрим случай, когда $u_1 \neq 0$. Тогда из (1) и (6):

$$x_2(t) = e^{kt} \int\limits_0^t (u_1 e^{-k\tau})\, d\tau = e^{kt} \int\limits_0^t \left[-\frac{1}{2} - \frac{\psi_1}{k} + (\psi_2^0 + \frac{\psi_1}{k})e^{-k\tau}\right] e^{-k\tau}\, d\tau =$$

$$= \left(\frac{1}{2k} + \frac{\psi_1}{k^2} - \frac{e^{kt}}{2k} - \frac{\psi_1}{k^2}e^{kt}\right) + \left(-\frac{\psi_2^0}{2k}e^{-kt} - \frac{\psi_1}{2k^2}e^{-kt} + \frac{\psi_2^0}{2k}e^{kt} + \frac{\psi_1}{2k^2}e^{kt}\right)$$

$$x_2(t) = \left(\frac{1}{2k} + \frac{\psi_1}{k^2} - \frac{e^{kt}}{2k}\right) + \frac{\psi_2^0}{k}\sinh kt - \frac{\psi_1}{k^2}\cosh kt. \tag{8}$$

Теперь, зная $x_2(t)$ и используя второе дифференциальное уравнение системы (1), найдем $x_1(t)$:

$$\dot{x_1} = \left(\frac{1}{2k} + \frac{\psi_1}{k^2} - \frac{e^{kt}}{2k}\right) + \frac{\psi_2^0}{k}\sinh kt - \frac{\psi_1}{k^2}\cosh kt + k \Rightarrow$$

$$x_1(t) = kt + \left(\frac{1}{2k} + \frac{\psi_1}{k^2}\right)t + \frac{\psi_2^0}{k^2}\cosh kt - \frac{\psi_1}{k^3}\sinh kt - \frac{e^{kt}}{2k^2} + \left(\frac{1}{2k^2} - \frac{\psi_2^0}{k^2}\right). \tag{9}$$

Если $u_1 = 0$ при $t \geq t_1$, то уравнения для x_2 и x_1 примут вид:

$$\dot{x_2}(t) = kx_2(t) \Rightarrow x_2(t) = c_1 e^{k(t-t_1)}, \tag{10}$$

$$\dot{x_1}(t) = x_2(t) + k \Rightarrow x_1(t) = k(t-t_1) + c_1\frac{1}{k}e^{k(t-t_1)} + c_2. \tag{11}$$

Очевидно, что если $t_1 = 0$, то $c_1 = 0, c_2 = 0$.

4.2.2 Случай 1: $\psi_1 > 0$, $\psi_2^0 \geq \frac{1}{2}$.

При данных условиях в начальный момент времени из (1) и (6) следует:

$$\psi_1 + \psi_2^0 x_2(0) = \psi_1 > 0 \Rightarrow u_2^*(0) = k_2,$$

$$\psi_2^0 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow u_1^*(0) = -\frac{1}{2} + \psi_2^0.$$

Таким образом, из (7), (8), (9) следует, что $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\psi_2(t)$ примут вид:

$$\psi_2(t) = -\frac{\psi_1}{k_2} + \left(\psi_2^0 + \frac{\psi_1}{k_2}\right)e^{-k_2 t}, \tag{12}$$

$$x_2(t) = \left(\frac{1}{2k_2} + \frac{\psi_1}{k_2^2} - \frac{e^{k_2 t}}{2k_2}\right) + \frac{\psi_2^0}{k_2}\sinh k_2 t - \frac{\psi_1}{k_2^2}\cosh k_2 t,$$

$$x_1(t) = k_2 t + \left(\frac{1}{2k_2} + \frac{\psi_1}{k_2^2}\right)t + \frac{\psi_2^0}{k_2^2}\cosh k_2 t - \frac{\psi_1}{k_2^3}\sinh k_2 t - \frac{e^{k_2 t}}{2k_2^2} + \left(\frac{1}{2k_2^2} - \frac{\psi_2^0}{k_2^2}\right).$$

По условию задачи $k_2 > 0$, поэтому $\psi_2(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} -\frac{\psi_1}{k_2} < 0$. Таким образом, так как $\psi_2^0 \geq \frac{1}{2}$, наступит такой момент времени t_1, что $\psi_2(t_1) = \frac{1}{2}$. Это значит, что в момент времени t_1 произойдет переключение по u_1, то есть $u_1^*(t) = 0$ при $t \geq t_1$. Тогда из (10) и (11) следует, что:

$$x_2(t) = e^{k_2(t-t_1)}x_2(t_1),\ t \geq t_1. \tag{13}$$

Посмотрим, что может произойти дальше. Так как $x_2(t)$ возрастает, а $\psi_2(t)$ по-прежнему уменьшается, наступит момент времени t_2, такой что $\xi(t_2) = \psi_1 + \psi_2(t_2)x_2(t_2) = 0$. То есть в момент времени t_2 произойдет второе переключение, но теперь по u_2: теперь $u_2^* = k_1$. Заметим, что далее никаких переключений быть не может, так как $\xi(t)$ теперь всегда будет принимать отрицательные значения, а $\psi_2(t) < \frac{1}{2}$, $\forall t > t_2 > t_1$.

Итак, данный случай описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \psi_2(t_1) = \dfrac{1}{2}, \\ \xi(t_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{\psi_1}{k_2} + \left(\psi_2^0 + \dfrac{\psi_1}{k_2}\right) e^{-k_2 t_1} = \dfrac{1}{2}, \\ \psi_1 + \psi_2(t_2) x_2(t_2) = 0. \end{cases}$$

Подставляя в эту систему $x_2(t)$ из (13) и $\psi_2(t)$ из (12), получим квадратное уравнение относительно ψ_1 и ψ_2^0. Решим его и получим две пары этих значений. Далее:

1. Нужно проверить, что полученные ψ_1, ψ_2^0 удовлетворяют ограничениям, которые мы приняли в случае 1.
2. Организуем перебор по параметрам t_1, t_2. Интегрируя и проверяя попадание в конечное множество, найдем подходящие параметры t_1^*, t_2^*.
3. Из полученных решений выбираем наилучшее с точки зрения задачи оптимизации.

4.2.3 Случай 2: $\psi_1 > 0, \psi_2^0 < \dfrac{1}{2}$.

При данных ограничениях имеем:

$$\psi_1 > 0 \Rightarrow u_2^* = k_2 \Rightarrow$$

$$\psi_2(t) = -\frac{\psi_1}{k_2} + \left(\psi_2^0 + \frac{\psi_1}{k_2}\right) e^{-k_2 t}. \tag{14}$$

Введем обозначение: $p = \psi_2^0 + \dfrac{\psi_1}{k_2}$. Если $p < 0$, то $\psi_2(t)$ возрастает, при этом:

$$\psi_2(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} -\frac{\psi_1}{k_2} < 0.$$

Но сейчас мы рассматриваем случай, когда: $\psi_2^0 < \dfrac{1}{2}$. Из этого следует, что для того, чтобы не получить противоречия, должно выполняться, что $\psi_2^0 < 0$. В этом случае получаем, что $\psi_2(t) < 0 < \dfrac{1}{2}\ \forall t \in [0, T]$.
Теперь рассмотрим случай, когда $p \geq 0$. Тогда $\psi_2(t)$ убывает. Так как мы предполагаем, что $\psi_2^0 < \dfrac{1}{2}$, в этом случае тоже получаем, что $\psi_2(t) < \dfrac{1}{2}\ \forall t \in [0, T]$.
Итак, в рассматриваемом случае:

$$\psi_2(t) < \frac{1}{2}\ \forall t \in [0, T] \Rightarrow \begin{cases} u_1^* = 0, \\ u_2^* = k_2 \end{cases} \Rightarrow (10), (11) \Rightarrow \begin{cases} x_2(t) = 0, \\ x_1(t) = k_2 t. \end{cases}$$

Таким образом, в данном случае искомая траектория существует, только если:

$$k_2 T = \left[\begin{array}{l} L - \varepsilon \\ L + \varepsilon \end{array} \right. \text{ и } 0 \in [S - \varepsilon,\, S + \varepsilon] \ (\mathrm{S} = 0).$$

4.2.4 Случай 3: $\psi_1 < 0, \psi_2^0 \geq \dfrac{1}{2}$.

В начальный момент времени: $\xi(0) < 0$ значит, $u_2^*(0) = k_1 < 0$. Тогда:

$$\psi_2(t) = -\frac{\psi_1}{k_1} + \left(\psi_2^0 + \frac{\psi_1}{k_1}\right) e^{-k_1 t} \xrightarrow[t\to\infty]{} +\infty. \tag{15}$$

Таким образом, $\psi_2(t)$ возрастает (это значит, что переключений по u_1 здесь не может быть), $x_2(t) > 0$, как было выяснено выше. Из этого следует, что $\xi(t)$ возрастает, и наступит такой момент t_1 - переключение по u_2: $\xi(t_1) = 0$. После переключения $u_2^* = k_2$:

$$\psi_2(t) = -\frac{\psi_1}{k_2} + \left(\psi_2^1 + \frac{\psi_1}{k_2}\right) e^{-k_2(t-t_1)},$$

$$x_2(t) = \left(\frac{1}{2k_2} + \frac{\psi_1}{k_2^2} - \frac{e^{k_2(t-t_1)}}{2k_2}\right) + \frac{\psi_2(t_1)}{k_2}\sinh k_2(t-t_1) - \frac{\psi_1}{k_2^2}\cosh k_2(t-t_1) + x_2^1 e^{k_2(t-t_1)},$$

где $\psi_2^1 = \psi_2(t_1)$, $x_2^1 = x_2(t_1)$.

Далее задача разбивается на два случая:

1. $\xi(t)$ продолжает возрастать, а значит, переключений больше не будет. Остается решить систему уравнений:
$$\begin{cases} x_2(T) = \left[\begin{array}{l} S-\varepsilon, \\ S+\varepsilon, \end{array}\right. \\ x_1(T) = \left[\begin{array}{l} L-\varepsilon, \\ L+\varepsilon. \end{array}\right. \end{cases}$$

2. Наступит момент времени $t_2 : \xi(t_2) = 0$ и система попадет на кривую $\xi(t) = 0$, $t \in [t_2, t^*]$.

$$\xi(t) = \psi_2(t)x_2(t) + \psi_1 = 0 \Rightarrow x_2(t) = -\frac{\psi_1}{\psi_2(t)},$$

$$\dot{\xi}(t) = \dot{\psi_2}(t)x_2(t) + \psi_2(t)\dot{x_2}(t) = 0 \Rightarrow$$
$$\dot{\xi}(t) = (-\psi_1 - \psi_2(t)u_2(t))x_2(t) + \psi_2(t)(u_1 + u_2x_2) = -x_2(t)\psi_1 + \psi_2(t)u_1(t) \Rightarrow$$
$$\frac{\psi_1^2}{\psi_2(t)} + \left(-\frac{1}{2} + \psi_2(t)\right)\psi_2(t) = 0 \tag{16}$$

Заметим, что при $\psi_1 < 0$ и $\psi_2^0 \geq \dfrac{1}{2}$ уравнение (16) имеет единственное решение: $\psi_2(t) = \psi_1^* = const$. Поэтому $\dot{\psi_2}(t) = 0$:

$$-\psi_1 - \psi_2 u_2 = 0 \Rightarrow u_2(t) = -\frac{\psi_1}{\psi_2(t)} = -\frac{\psi_1}{\psi_1^*} = const,$$

$$x_2(t) = -\frac{\psi_1}{\psi_2(t)} = -\frac{\psi_1}{\psi_1^*} = const.$$

Из рассуждений, приведенных выше, можно сделать вывод о том, что на $[t_2, t^*]$ изменяется только $x_1(t)$, а $x_2(t)$ и, соответственно, $\xi(t)$ остаются неизменными. Значит, на кривой $\xi(t) = 0$ мы останемся до конца движения, поэтому $t^* = T$:

$$x_1(T) = (T - t_2)\frac{-2\psi_1}{\psi_1^*} + x_1(t_2)$$

Поэтому, в этом случае будем перебирать параметры t_1, t_2.

4.2.5 Случай 4: $\psi_1 < 0, \psi_2^0 \leq \frac{1}{2}$.

В начальный момент времени имеем: $u_1^* = 0, u_2^* = k_1$. Значит:

$$\psi_2(t) = -\frac{\psi_1}{k_1} + \left(\psi_2^1 + \frac{\psi_1}{k_1}\right)e^{-k_1 t}.$$

1. Если $\psi_2^0 \leq -\frac{\psi_1}{k_1}$, то $\psi_2(t)$ убывает, и $\psi_2(t) < 0 < \frac{1}{2}\,\forall t \in [0, T]$.
   Поэтому $u_1^*(t) = 0\,\forall t \in [0, T]$ и, как следует из (10) и (11), $x_2(t) = 0\,\forall t \in [0, T]$. Тогда $x_1(T) = k_1 T$. В этом случае задача имеет решение, только если $|k_1 T - L| \leq \varepsilon$ и $|S| \leq \varepsilon$.

2. Если $\psi_2^0 > -\frac{\psi_1}{k_1}$, то $\psi_2(t)$ возрастает. Тогда может наступить такой момент времени t_1: $\psi_2(t_1) = \frac{1}{2}$. Произойдет переключение по u_1: $u_1^* = -\frac{1}{2} + \psi_2$.
   Теперь, когда $\psi_2(t) > 0$, функция $\xi(t) = \psi_1 + \psi_2 x_2$ возрастает (т. к. $x_2(t)$ - положительная возрастающая функция). Значит, наступит такой момент времени t_2: $\xi(t_2) = 0$. Произойдет переключение по u_2. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \psi_2(t_1) = \frac{1}{2}, \\ \xi(t_2) = 0. \end{cases}$$

   Далее решаем задачу аналогично Случаю 2.

4.2.6 Случай 5: $\psi_1 = 0, \psi_2^0 > \frac{1}{2}$.

При $\psi_1 = 0$: $\xi(0) = 0$. Получили неоднозначность в выборе u_2: $u_2^*(0) \in [k_1, k_2]$. Однако далее $\psi_2(t)x_2(t) \neq 0\,\forall u_2 \in [k_1, k_2]$. В любой следующий момент времени:

$$\psi_2(t) = \psi_2^0 e^{-kt}, \text{ где } k - \text{либо } k_1, \text{ либо } k_2.$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2k} - \frac{e^{kt}}{2k} + \frac{\psi_2^0}{k}\sinh kt.$$

Легко заметить, что $\xi(t) = \psi_2(t)x_2(t) > 0$, поэтому $u_2 = k_2$. Так как значение u_2 в начальный момент времени ни на что не влияет, положим $u_2(0) = k_2$.

Так как $k_2 > 0$, то $\psi_2(t)$ убывает, значит, может наступить момент, когда $\psi_2(t_1) = \frac{1}{2}$, т.е. произойдет переключение по $u_1 : u_1^* = 0\,\forall t \geq t_1$. Получим, что $\psi_2^0 = \frac{1}{2e^{-k_2 t_1}}$, т.е. знаем оба параметра ψ_1, ψ_2^0.

Для решения задачи остается проверить, что $\psi_2^0 > \frac{1}{2}$, $|x_1(T) - L| \leq \varepsilon$, $|x_2(T) - S| \leq \varepsilon$.

4.2.7 Случай 6: $\psi_1 = 0, \psi_2^0 \leq \frac{1}{2}$.

В этом случае: $u_1(0) = 0$, а также:

$$\psi_2(t) = \psi_2^0 e^{-u_2 t}.$$

Далее рассмотрим несколько возможных случаев:

1. Если $\psi_2^0 \leq 0$, то $\psi_2(t) = \psi_2^0 e^{-u_2 t} < 0\,\forall t \in [0, T]$, $\forall u_2$. Тогда $u_1(t) \equiv 0$, $x_2(t) \equiv 0$ (это следует из (10)), $x_1(t) = u_2 t$, но значение $u_2(t)$ не определено $\forall t \in [0, T]$.
   Легко заметить, что в этом случае значение функционала всегда равно 0, поэтому знать конкретное значение u_2 нет необходимости.
   Важно лишь убедиться в том, что $x_1(T) \in [k_1 T, k_2 T]$, $|x_2(T) - S| \leq \varepsilon$.

2. Если $0 < \psi_2^0 \leq \frac{1}{2}$, то $\psi_2(t) = \psi_2^0 e^{-u_2 t} > 0$. Так как в **Задаче А** $x_2(t) > 0\,\forall t \in [0, T]$, то $\xi(t) = \psi_2(t) x_2(t) > 0$. Значит, $u_2^*(t) = k_2\,\forall t \in [0, T]$.
   Тогда $\psi_2(t)$ везде убывает, так как $k_2 > 0$. Но $\psi_2^0 \leq \frac{1}{2}$, значит $\psi_2(t) \leq \frac{1}{2}\,\forall t \in [0, T]$, и переключений по u_1 не будет: $u_1 \equiv 0$.
   Значит, должно выполняться: $|x_2(T) - S| = |S| \leq \varepsilon$, $|k_2 T - L| \leq \varepsilon$.

5 Задача Б.

5.1 Построение параметрического портрета для плоскости (ψ_2, x_2).

Для упрощения анализа задачи построим параметрический портрет для плоскости (ψ_2, x_2). Имеем следующие неравенства:

$$\xi(t) = \psi_1 + \psi_2 x_2 > 0 \Rightarrow \psi_2 x_2 > -\psi_1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_2 > -\dfrac{\psi_1}{\psi_2}, \\ \psi_2 > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 < -\dfrac{\psi_1}{\psi_2}, \\ \psi_2 < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\dot{\psi_2} = -\psi_1 - \psi_2 u_2 > 0 \Rightarrow \psi_2 u_2 < -\psi_1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \psi_2 < -\dfrac{\psi_1}{k_2}, \\ u_2 > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \psi_2 > -\dfrac{\psi_1}{k_1}, \\ u_2 < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\dot{x_2} = \psi_2 - \frac{1}{2} + u_2 x_2 > 0 \Rightarrow u_2 x_2 > \frac{1}{2} - \psi_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_2 > \dfrac{1}{2k_2} - \dfrac{\psi_2}{k_2}, \\ u_2 > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 < \dfrac{1}{2k_1} - \dfrac{\psi_2}{k_1}, \\ u_2 < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Тогда для $\psi_1 > 0$ схематичный параметрический портрет будет выглядеть следующим образом:

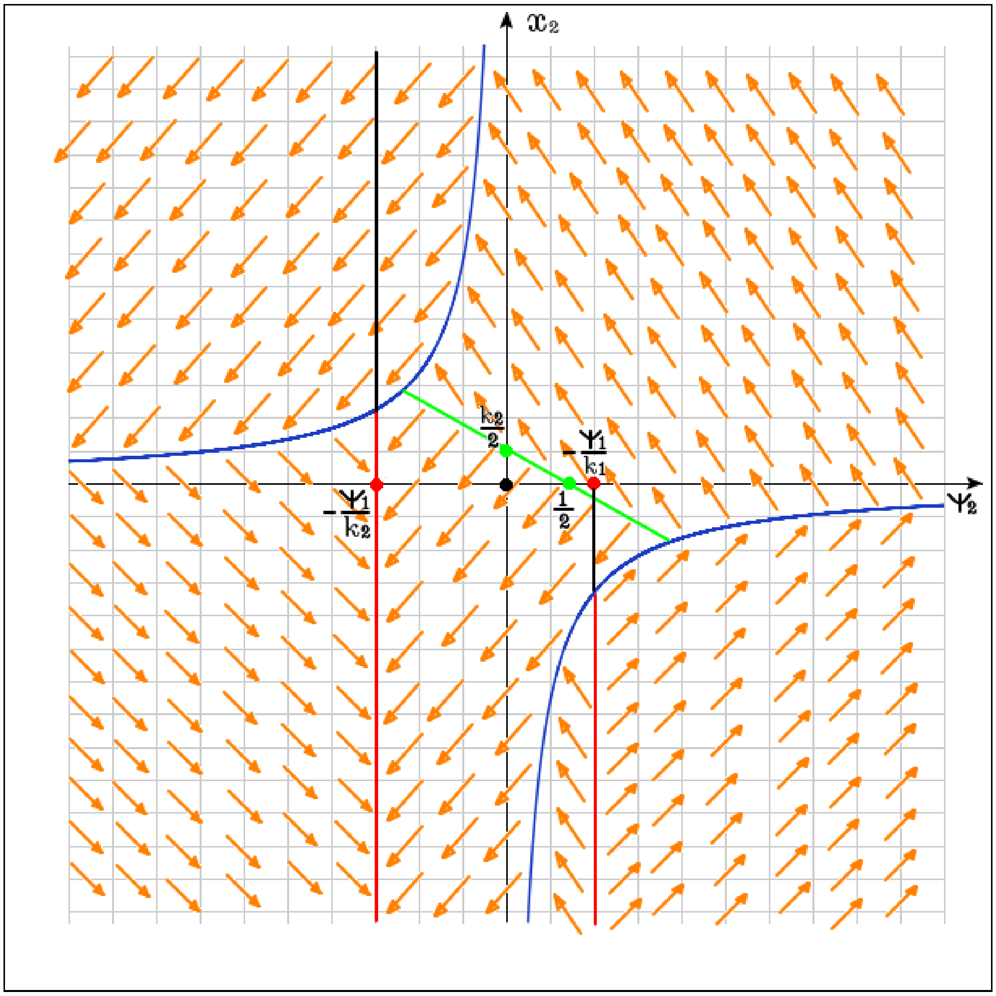

Рис. 1: $\psi_1 > 0$

А для $\psi_1 < 0$ вот так:

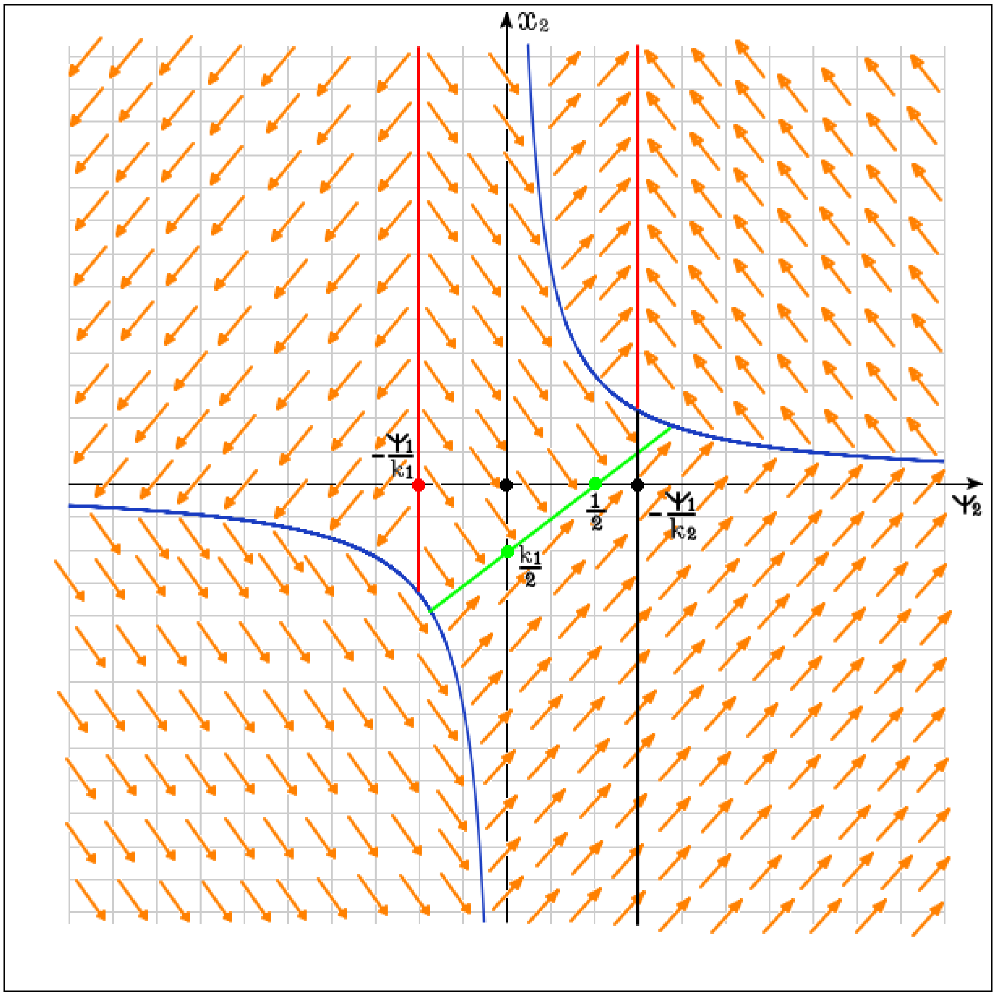

Рис. 2: $\psi_1 < 0$

5.2 Анормальный случай.

Как и в прошлой задаче, при $\psi_0 = 0$, управление u_1^* будет принимать бесконечные значения, поэтому данный случай не рассматривается.

5.3 Нормальный случай.

При $\psi_0 \neq 0$, как и в прошлой задаче, примем $\psi_0 = \frac{1}{2}$.

По условию $u_1 \in \mathbb{R}$, значит, $u_1^*(t) = -\frac{1}{2} + \psi_2 \, \forall t \in [0, T]$. Таким образом, в этой задаче переключения могут быть только по u_2.

5.3.1 Случай 1: $\psi_1 > 0, \psi_2^0 \geq \dfrac{1}{2}$.

В данном случае $u_2^*(0) = k_2$. Параметрический портрет на рис.1 говорит о том, что в этом случае должно быть одно или два переключения.
Составляем систему:

$$\begin{cases} \xi(t_1) = 0, \\ \xi(t_2) = 0. \end{cases} \tag{17}$$

При этом на отрезке $[0, t_1]$:

$$\psi_2(t) = -\frac{\psi_1}{k_2} + (\psi_2^0 + \frac{\psi_1}{k_2})e^{-k_2 t},$$

$$x_2(t) = \left(\frac{1}{2k_2} + \frac{\psi_1}{k_2^2} - \frac{e^{k_2 t}}{2k_2}\right) + \frac{\psi_2^0}{k_2}\sinh k_2 t - \frac{\psi_1}{k_2^2}\cosh k_2 t.$$

На отрезке $[t_1, t_2]$:

$$\psi_2(t) = -\frac{\psi_1}{k_1} + \left(\psi_2(t_1) + \frac{\psi_1}{k_1}\right)e^{-k_1(t-t_1)},$$

$$x_2(t) = \left(\frac{1}{2k_1} + \frac{\psi_1}{k_1^2} - \frac{e^{k_2(t-t_1)}}{2k_1}\right) + \frac{\psi_2(t_1)}{k_1}\sinh k_1(t-t_1) - \frac{\psi_1}{k_1^2}\cosh k_1(t-t_1) + x_2(t_1)e^{k_1(t-t_1)}.$$

На отрезке $[t_2, T]$:

$$\psi_2(t) = -\frac{\psi_1}{k_2} + \left(\psi_2(t_2) + \frac{\psi_1}{k_2}\right)e^{-k_2(t-t_2)},$$

$$x_2(t) = \left(\frac{1}{2k_2} + \frac{\psi_1}{k_2^2} - \frac{e^{k_2(t-t_2)}}{2k_2}\right) + \frac{\psi_2(t_2)}{k_2}\sinh k_2(t-t_2) - \frac{\psi_1}{k_2^2}\cosh k_2(t-t_2) + x_2(t_2)e^{k_2(t-t_2)}.$$

Таким образом, перебирая параметры (t_1, t_2), решим систему (17), найдем параметры ψ_1, ψ_2^0. Это позволит полностью решить задачу. Подробно это было разобрано в Случае 1 **Задачи А**.

5.3.2 Случай 2: $\psi_1 > 0, \psi_2^0 < \dfrac{1}{2}$.

Как и в прошлом случае, $u_2^*(0) = k_2 > 0$. На рис.1 видно, что при $\psi_2^0 < \frac{1}{2}$ плоскость $\xi(t) = 0$ мы никогда не пересечем, т.е. переключений не будет.

5.3.3 Случай 3: $\psi_1 < 0, \psi_2^0 \geq \dfrac{1}{2}$.

В Случае 3 **Задачи А** с аналогичными ограничениями на ψ_1 и ψ_2^0 мы убедились, что условие $u_1 \geq 0$ никак не влияло на рассуждения. Поэтому и при $u_1 \in \mathbb{R}$ они останутся верными.

5.3.4 Случай 4: $\psi_1 < 0, \psi_2^0 < \dfrac{1}{2}$.

В этом случае $u_2^*(0) = k_1$.

1. Если $\psi_2^0 > -\dfrac{\psi_1}{k_1}$, то, как видно на рис.2, может либо не быть переключений, либо их будет два.

2. Если $\psi_2^0 \leq -\dfrac{\psi_1}{k_1}$, то будет 2 переключения.

Таким образом, аналогично Случаю 1 этой задачи, решив систему (17), найдем необходимые параметры. Отличие будет лишь в том, что значения управления u_2^* будут меняться, начиная со значения k_1.

5.3.5 Случай 5: $\psi_1 = 0, \psi_2^0 \geq \dfrac{1}{2}$.

Как мы выяснили в соответствующем случае **Задачи А**, в рассматриваемом случае переключений по u_2 не будет, поэтому для решения задачи надо найти ψ_2^0 из уравнения: $x_2(T) = S + \varepsilon\,(S - \varepsilon)$.

5.3.6 Случай 6: $\psi_1 = 0, \psi_2^0 < \dfrac{1}{2}$.

Если $u_2 * (0) \neq 0$, то аналогично Случаю 6 **Задачи А**: $\xi(t) > 0 \, \forall t \in (0, T]$. Поэтому, переключений нет и $u_2 * = k_2$.
Пусть теперь $u_2(0) = 0$. Тогда из дифференциальных уравнений для ψ_2 и x_2 следует, что: $\psi_2 \equiv \psi_2^0$, $x_2 = (-\dfrac{1}{2} + \psi_2^0)t$.
Так как $\psi_2^0 < \dfrac{1}{2}$, возможно два случая:

1. $\xi(t) < 0$, если $\psi_2^0 > 0$. Тогда, пренебрегая первым моментом времени, можем утверждать, что $u_2^* = k_1 \, \forall t \in [0, T]$.

2. $\xi(t) > 0$, если $\psi_2^0 < 0$. Тогда аналогично, можем утверждать, что $u_2^* = k_2 \, \forall t \in [0, T]$.

Теперь, зная значение u_2, можно найти ψ_2^0 из уравнения $x_2(T) = S + \varepsilon\,(S - \varepsilon)$.

Часть II

Практическая часть.

6 Детали реализации алгоритма.

Для того, чтобы решить задачу, необходимо найти параметры ψ_1, ψ_2^0, по которым далее можно построить оптимальное решение. Возможны случаи: без переключений, с одним переключением, с двумя переключениями. Все дифференциальные уравнение были решены аналитически, поэтому численно осталось решить только системы, фигурирующие в анализе задачи.

- Самый сложный случай - с двумя переключениями, в котором необходимо делать перебор по $t_1 \in [0, T]$, $t_2 \in [t_1, T]$. Для каждой пары параметров (t_1, t_2) с помощью функции fsolve решается система из двух квадратных уравнений (в случае, когда $\xi(t_1) = 0, \xi(t_2) = 0$), или одного линейного и одного квадратного уравнений (в случае, когда $\psi_2(t_1) = \frac{1}{2}, \xi(t_2) = 0$). Так как данные системы могут иметь более одного решения, поиск производится в цикле по приближенным значениям искомого решения. Для оптимизации работы программы учитывается знак искомого параметра, например, $\psi_1 > 0$, $\psi_2^0 \leq \frac{1}{2}$.

- Случай с одним переключением проще. Здесь нужно решить систему из двух линейных уравнений (например, $x_1(T) = L - \varepsilon$, $x_2(T) = S - \varepsilon$), которая имеет не более одного решения.

- Случай без переключений тривиальный. В нем (как и в предыдущих двух пунктах) нужно проверить попадание траектории в конечное множество.

На каждом этапе сохраняем минимальное значение функционала и соответствующие ему траекторию и управление. Таким образом, к концу работы программы получим искомое оптимальное управление и траекторию.

Надо заметить, что в **Задаче А** функционал не может принимать значение, меньше нуля, поэтому, если в ходе работы программы было достигнуто значение $J = 0$, то можно завершить ее исполнение и полученное решение принять за ответ.

7 Примеры работы программы.

7.1 Задача А.

7.1.1 Случай без переключений.

Заданные параметры: $k_1 = -5$, $k_2 = 2$, $L = -35$, $S = 0.3$, $T = 7$, $\varepsilon = 0.5$. Значение функционала: $J = 0$.

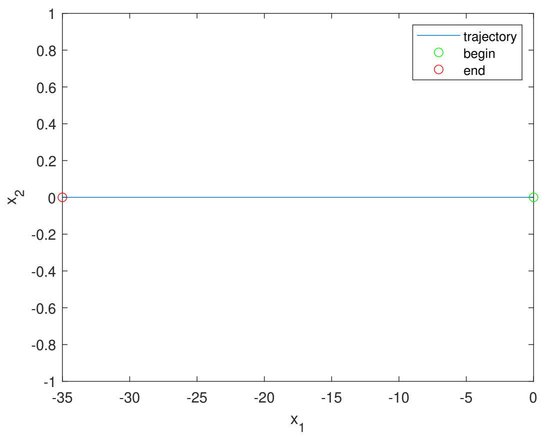

Рис. 3: Зависимость $x_2(x_1)$.

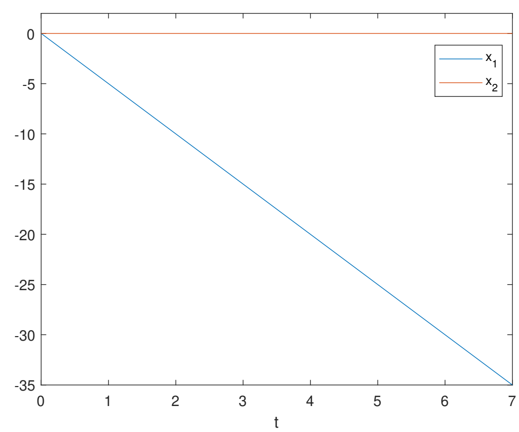

Рис. 4: Зависимость $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

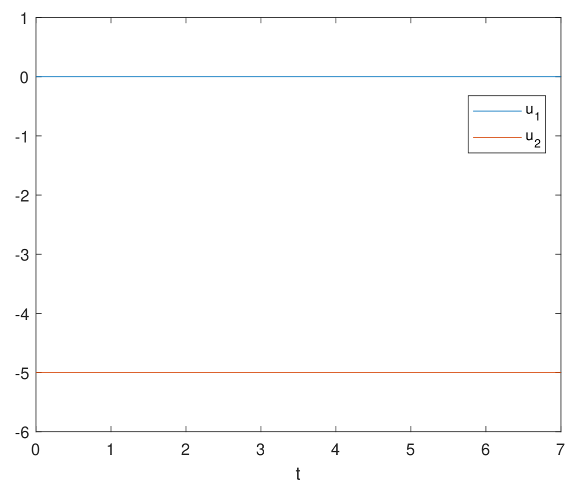

Рис. 5: Зависимость $u_1(t)$ и $u_2(t)$.

7.1.2 Случай с неопределенным значением u_2.

Заданные параметры: $k_1 = -1$, $k_2 = 3$, $L = 6$, $S = 0$, $T = 4$, $\varepsilon = 0.5$. Значение функционала: $J = 0$.

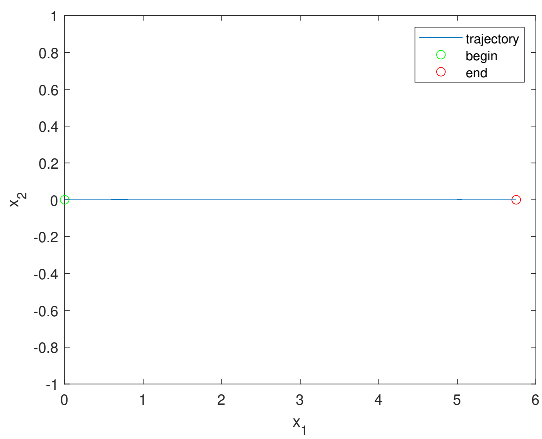

Рис. 6: Зависимость $x_2(x_1)$.

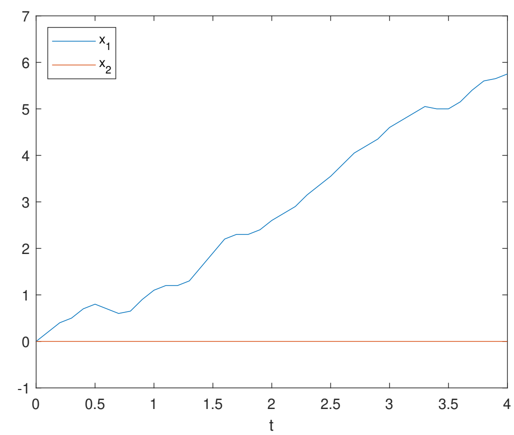

Рис. 7: Зависимость $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

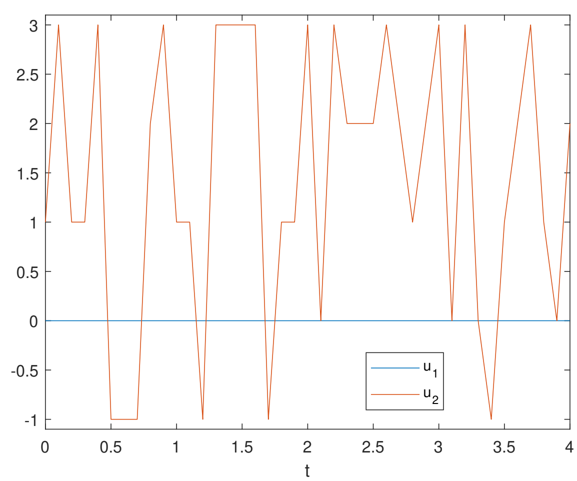

Рис. 8: Зависимость $u_1(t)$ и $u_2(t)$.

7.1.3 Случай с двумя переключениями.

Заданные параметры: $k_1 = -1$, $k_2 = 3$, $L = 8$, $S = 2.5$, $T = 3$, $\varepsilon = 1.5$. Значение функционала: $J = 0.0103$.

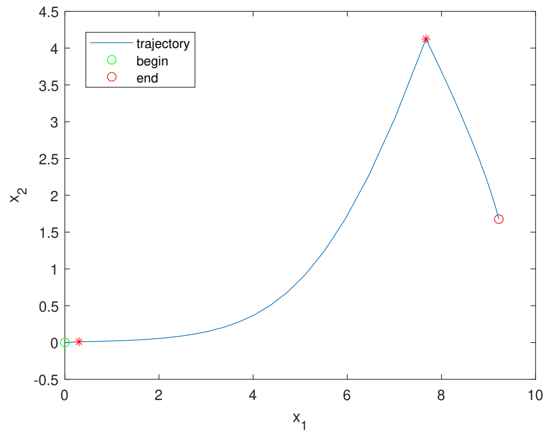

Рис. 9: Зависимость $x_2(x_1)$.

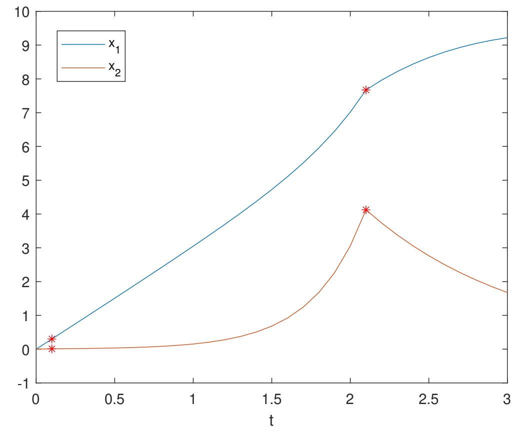

Рис. 10: Зависимость $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

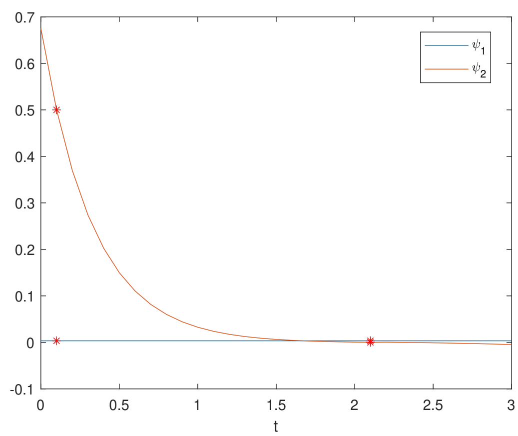

Рис. 11: Зависимость $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$.

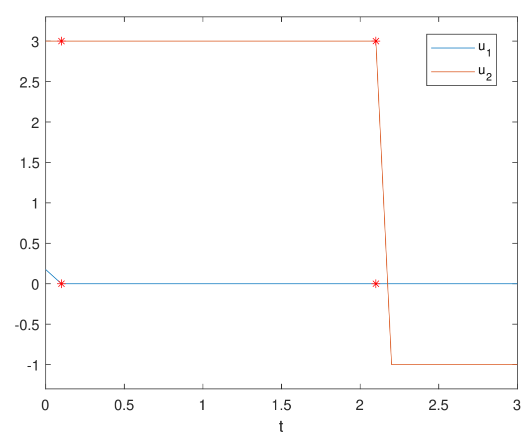

Рис. 12: Зависимость $u_1(t)$ и $u_2(t)$.

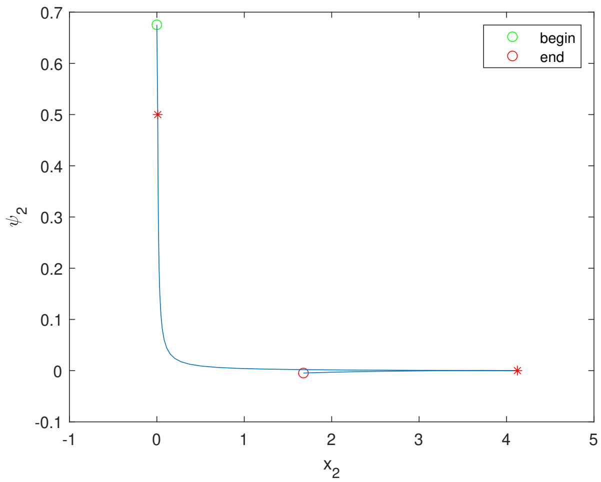

Рис. 13: Зависимость $\psi_2(x_2)$.

7.2 Задача Б.

7.2.1 Случай с двумя переключениями.

Заданные параметры: $k_1 = -1$, $k_2 = 3$, $L = -10$, $S = -4$, $T = 2$, $\varepsilon = 1$. Значение функционала: $J = -0.5$.

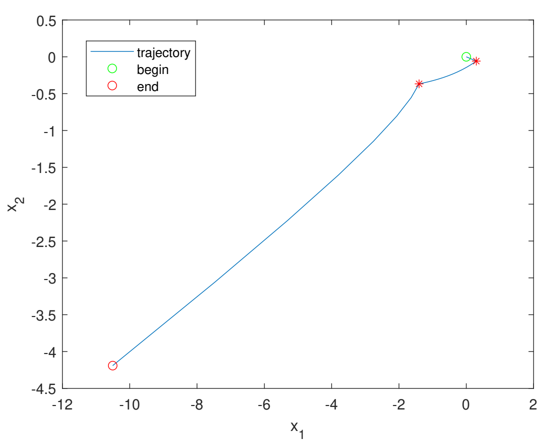

Рис. 14: Зависимость $x_2(x_1)$.

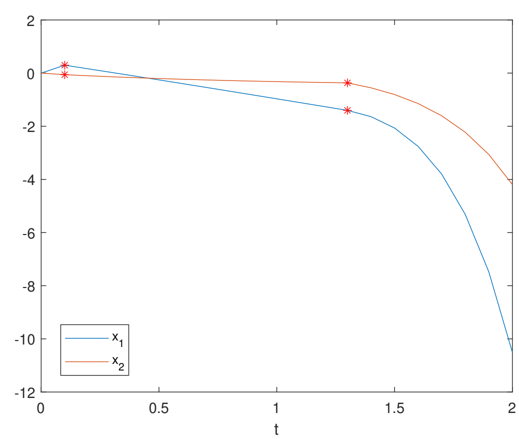

Рис. 15: Зависимость $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

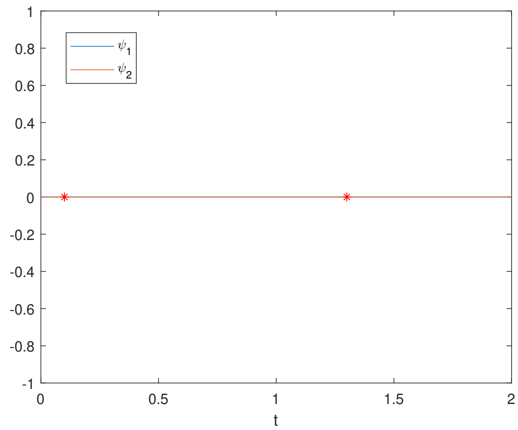

Рис. 16: Зависимость $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$.

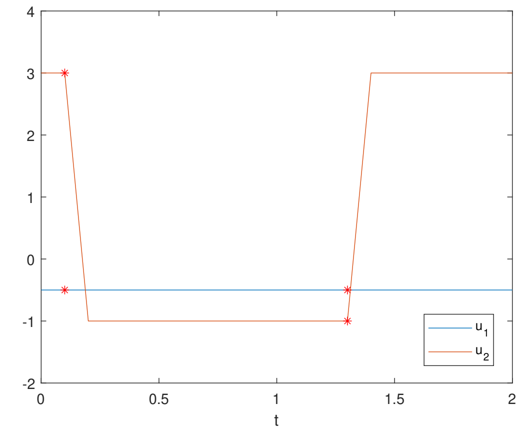

Рис. 17: Зависимость $u_1(t)$ и $u_2(t)$.

7.2.2 Анализ полученных решений для Задачи А и Задачи Б при одинаковых входных параметрах.

Заданные параметры: $k_1 = -1$, $k_2 = 1$, $L = 6$, $S = 5$, $T = 2$, $\varepsilon = 2$. Значения функционалов: $J_1 = 1.0070$, $J_2 = 0.9366$. При этом в **Задаче А** наблюдаем одно переключение по u_1, а в **Задаче Б** переключений не произошло.

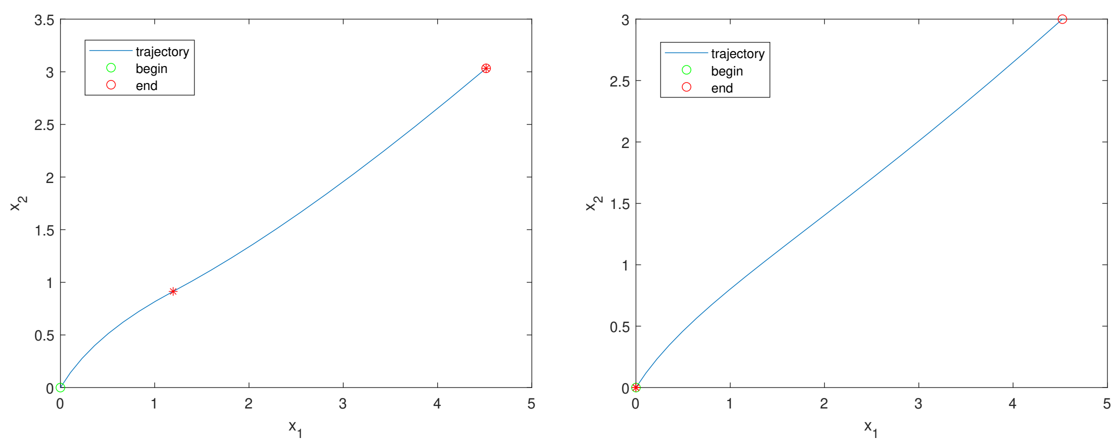

Рис. 18: Зависимость $x_2(x_1)$.

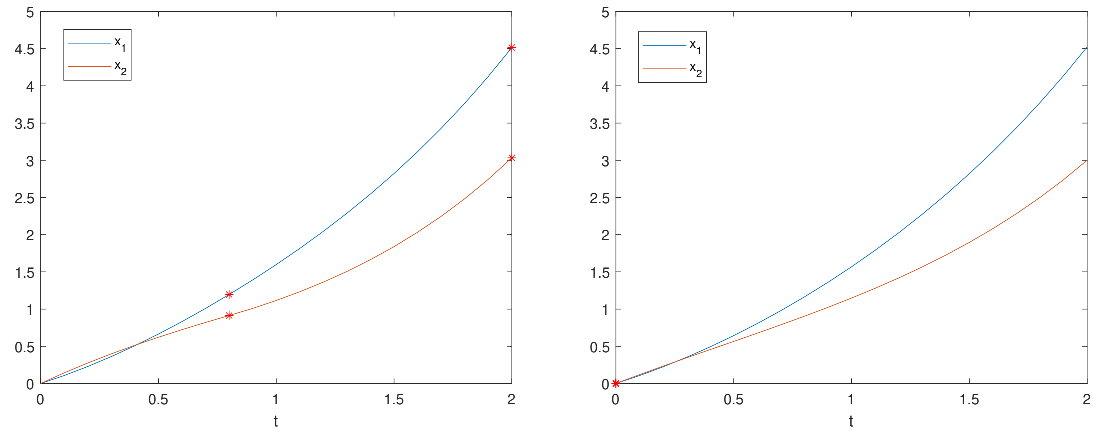

Рис. 19: Зависимость $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

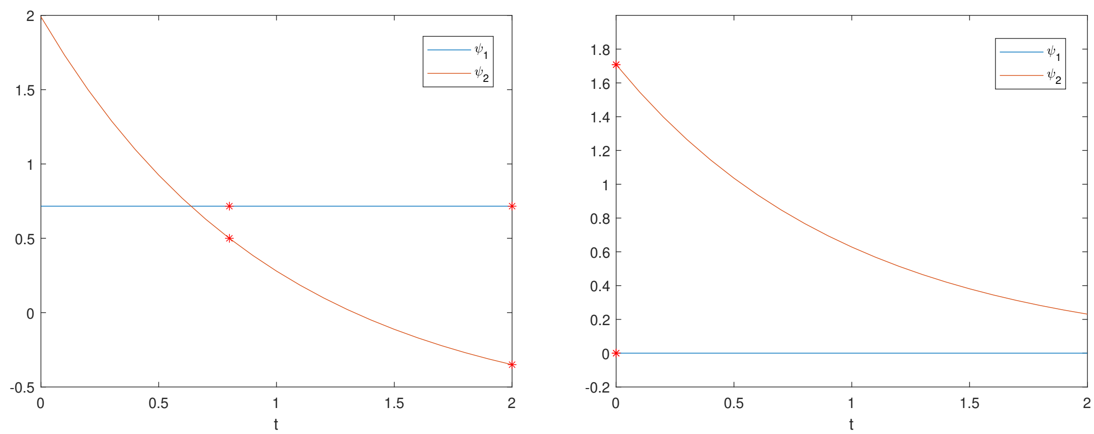

Рис. 20: Зависимость $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$.

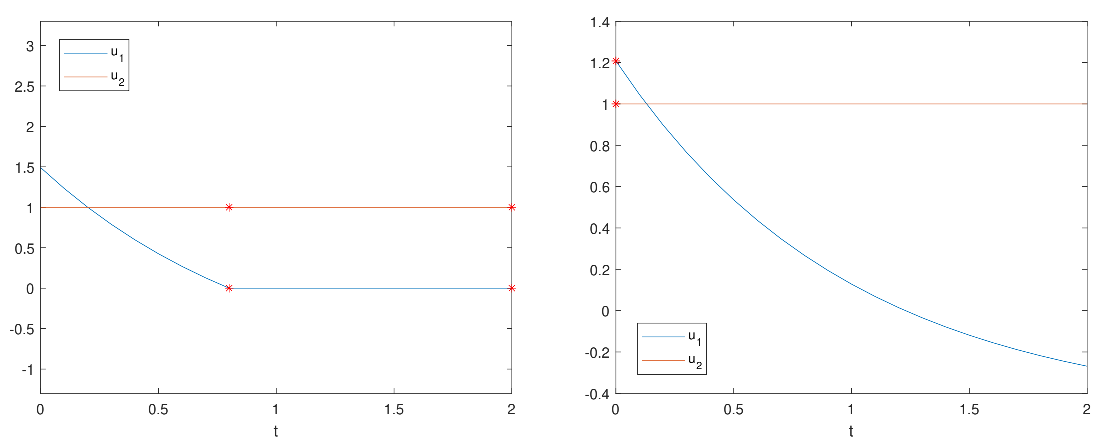

Рис. 21: Зависимость $u_1(t)$ и $u_2(t)$.

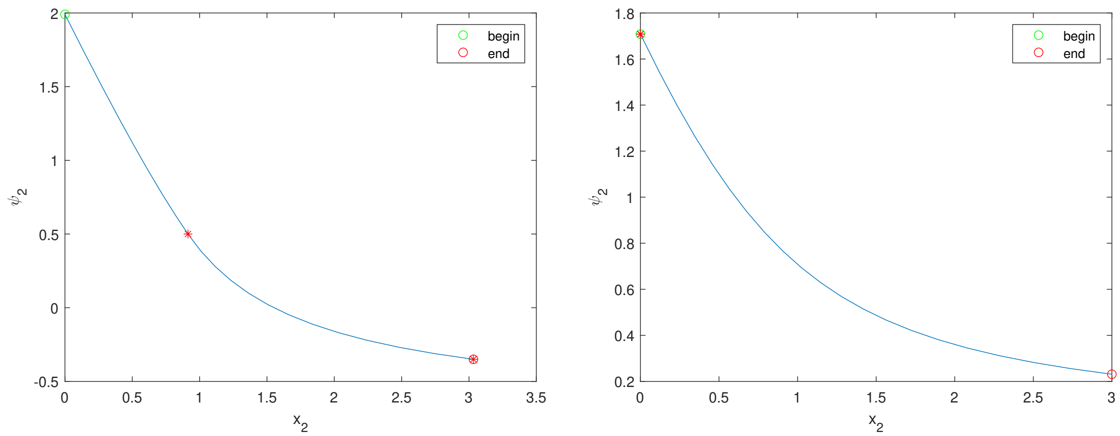

Рис. 22: Зависимость $\psi_2(x_2)$.

Список литературы

[1] Комаров Ю.А. Лекции по оптимальному управлению. - ВМК МГУ, 2020.

[2] Васильев Ф.П. Методы оптимизации. – М.: “Факториал Пресс”, 2002.