Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Построение множества достижимости»

Студент 315 группы
К. К. Салихова

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2020

1 Постановка задачи

Задано обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + \dot{x} + 2x + x\sin(x^2) - 2x^2\cos(x) = u, \quad x \in \mathbb{R},\ u \in \mathbb{R}, u \in [-\alpha,\, \alpha].$$

Задан начальный момент времени $t_0 = 0$ и начальная позиция: $x(t_0) = \dot{x}(t_0) = 0$. Необходимо по заданному параметру $\alpha > 0$ построить множество достижимости $\mathcal{X}[T] = \mathcal{X}(T, t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0))$ в заданный момент времени $t \geq t_0$.

Перепишем исходную систему в нормальной форме. Пусть $x_1 = x,\ x_2 = \dot{x}$, тогда:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u - x_2 - 2x_1 - x_1\sin(x_1^2) + 2x_1^2\cos(x_1), \\ x_1(0) = x_2(0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

2 Теоретическая часть.

Определение 1. *Множеством достижимости $\mathcal{X}[T]$ в момент времени T будем называть множество всех точек фазового пространства $\mathbb{R}^2$, в которые можно попасть на отрезке $[t_0, T]$ из начальной точки $x(t_0) = \dot{x}(t_0) = 0$ по решениям системы (1) при всевозможных допустимых кусочно-непрерывных управлениях $u(t)$.*

Выпишем функцию Гамильтона-Понтрягина для системы (1):

$$\mathcal{H}(\psi(t), x(t), u(t)) = \langle \psi(t),\, f(x(t), u(t)) \rangle = \psi_1 x_2 + \psi_2(u - x_2 - 2x_1 - x_1\sin(x_1^2) + 2x_1^2\cos(x_1)).$$

Теорема 1 (Принцип максимума Понтрягина)**.** *Пусть некоторому допустимому управлению u^* соответствует траектория $x^*\colon x^*(T) \in \partial\mathcal{X}[T]$, $\mathcal{H}$ - функция Гамильтона-Понтрягина. Тогда существует вектор-функция $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t)), \psi(t) \not\equiv 0$, такая что:*

1. *$\psi(t)$ - решение сопряженной системы:*

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}$$

2. *Почти всюду выполнено условие максимума:*

$$\mathcal{H}(\psi(t), x^*(t), u^*(t)) = \sup_{u(\cdot)\in\mathcal{P}} \mathcal{H}(\psi(t), x^*(t), u(t)).$$

Сопряженная система для рассматриваемой задачи выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = \psi_2(2 + \sin(x_1^2) + 2x_1^2\cos(x_1^2) - 4x_1\cos(x_1) + 2x_1^2\sin(x_1)), \\ \dot{\psi}_2 = \psi_2 - \psi_1. \end{cases}$$

Из условия максимума получаем, что:

$$u(t) = \begin{cases} \alpha, & \psi_2(t) > 0 \\ -\alpha, & \psi_2(t) < 0 \\ [-\alpha, \alpha], & \psi_2(t) = 0 \end{cases}$$

Лемма 1. *В данной задаче $\psi_2(t)$ имеет конечное число нулей.*

Доказательство. Будем доказывать от противного:
Пусть $\psi_2(t) \equiv 0$ на $[t_1, t_2]$. Тогда $\dot{\psi}_2(t) = 0$ на $[t_1, t_2]$:

$$\dot{\psi}_2(t) = 0 = -\psi_1(t).$$

Значит $\psi_1(t) \equiv 0$ на $[t_1, t_2]$, но это противоречит условию нетривиальности функции $\psi(t)$. ■

Таким образом, в данной задаче особый режим невозможен. Тогда можно утверждать, что:

$$u(t) = \alpha \operatorname{sgn} \psi_2(t).$$

Теорема 2. *Пусть $(x(t), u(t))$ - оптимальная пара для времени быстродействия T, $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ - решение сопряженной системы. Тогда $\forall \tau_1, \tau_2 : 0 < \tau_1 < \tau_2 < T$ справедливо следующее:*

1. *Если $\psi_2(\tau_1) = 0, \psi_2(\tau_2) = 0, x_2(\tau_1) = 0$, то $x_2(\tau_2) = 0$*
2. *Если $\psi_2(\tau_1) = 0, \psi_2(\tau_2) = 0, x_2(\tau_1) \neq 0$, то $x_2(\tau_2) \neq 0$, но существует $\tau \in (\tau_1, \tau_2) : x_2(\tau) = 0$*
3. *Если $x_2(\tau_1) = 0, x_2(\tau_2) = 0, x_2(\tau) \neq 0 \, \forall \tau \in (\tau_1, \tau_2), \psi_2(\tau_1) = 0$, то $\psi_2(\tau_2) = 0$*
4. *Если $x_2(\tau_1) = 0, x_2(\tau_2) = 0, x_2(\tau) \neq 0 \, \forall \tau \in (\tau_1, \tau_2), \psi_2(\tau_1) \neq 0$, то $\psi_2(\tau_2) \neq 0$, но существует $\tau \in (\tau_1, \tau_2) : \psi_2(\tau) = 0$.*

3 Реализация алгоритма.

Как было показано выше:

$$u(t) = \alpha \operatorname{sgn} \psi_2(t).$$

Поэтому, возможно два режима движения:

$$S^+ = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \alpha - x_2 - 2x_1 - x_1 sin(x_1^2) + 2x_1^2 cos(x_1), \end{cases}$$

$$S^- = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\alpha - x_2 - 2x_1 - x_1 sin(x_1^2) + 2x_1^2 cos(x_1). \end{cases}$$

Предположим, что движение начинается в режиме S^+. Для того, чтобы построить границу множества достижимости, найдем траектории, удовлетворяющие Принципу максимума, и выберем из них только те, концы которых принадлежат границе. Для этого:

1. С помощью функции Matlab ode45, решим систему S^+ и сопряженную систему с начальными условиями (0, 0, 0, 0). Найдем момент времени $t_1 : x_2(t_1) = 0$.
2. Тогда, по Теореме 2 на $[0, t_1]$ произойдет переключение: $\psi_2(t^*) = 0$, $t^* \in [0, t_1]$.
3. Так как на $[0, t^*]$ управление было положительным, то и $\psi_2(t) > 0 \, \forall t \in [0, t^*)$. Но по построению $\psi_2(t^*) = 0$, значит в окрестности точки t^* функция $\psi_2(t)$ убывает, и $-\psi_1(t^*) = \dot{\psi}_2(t^*) < 0$. Из условия нормированности: $|\psi_1| = 1$, поэтому $\psi_1(t^*) = 1$. Таким образом, следующим шагом решим систему S^- и сопряженную систему с начальными условиями $(x_1(t^*), x_2(t^*), 1, 0)$. Найдем второй момент переключения $t^{**} : \psi_2(t^{**}) = 0$.

4. Аналогично получим, что $\psi_1(t^{**}) = -1$. Поэтому снова решим систему S^+ с начальными условиями $(x_1(t^{**}), x_2(t^{**}), -1, 0)$ до момента времени $\psi_2(t^{***}) = 0$.

5. Продолжаем поиск переключений, повторяя пункты 3 - 4, до тех пор, пока $t < T$.

Возможно, что движение начинается в режиме S^-. В этом случае алгоритм решения аналогичен.

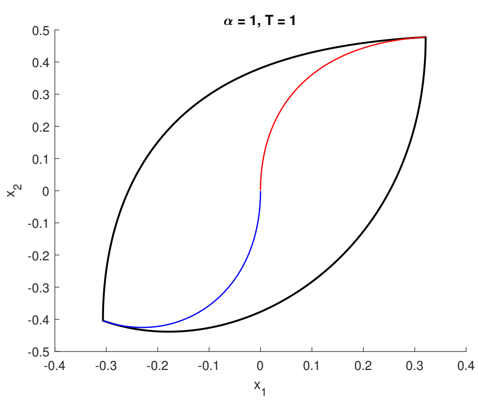
Теперь, нужно проверить кривую, составленную из полученных концов траекторий на самопересечение. Будем перебирать отрезки, удаляя самопересечения, так как все точки между точками пересечения лежат внутри множества достижимости, а не на его границе.

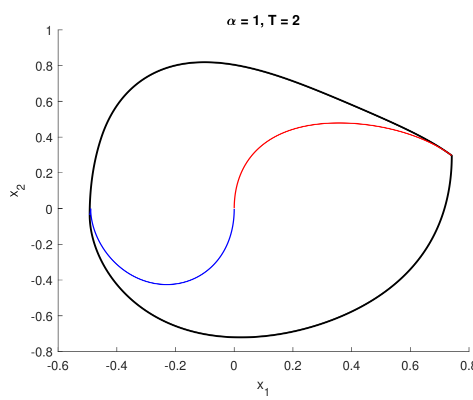
Точка с наибольшей координатой x_1 обязательно принадлежит границе, поэтому начнем перебор отрезков с нее. Если найдутся две точки на кривой: a_k и a_n, такие, что их индексы сильно различаются, а расстояние между ними мало, будем проверять, пересекаются ли отрезки $(a_{k-1} - a_k - a_{k+1})$ и $(a_{n-1} - a_n - a_{n+1})$. Если это так, то удалим отрезок $[a_k, a_n]$ из результирующей кривой.

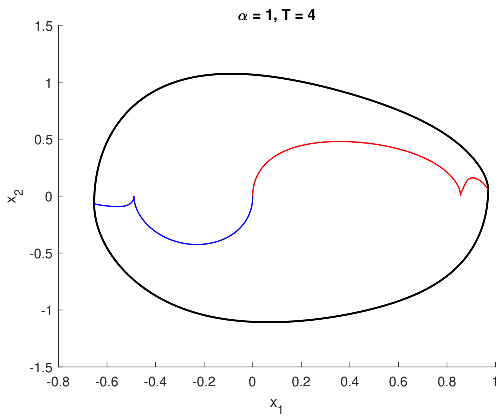
4 Примеры работы программы.

В этом разделе черным цветом показана граница множества достижимости, синим - кривая переключений $S^+ \longrightarrow S^-$, красным - кривая переключений $S^- \longrightarrow S^+$.

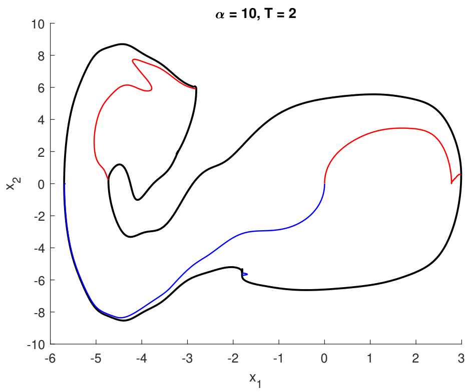
4.1 Эволюция множества достижимости.

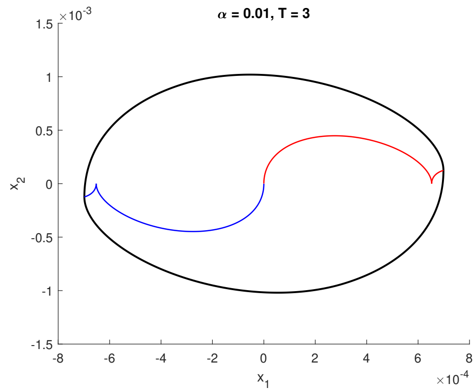






4.2 Другие примеры.





4.3 Неподвижные точки.

Неподвижные точки можно найти из системы:

$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ 2x_1 + x_1 sin(x_1^2) - 2x_1^2 cos(x_1) = u \end{cases} \tag{2}$$

Так как u принимает два значения, то и системы будет две, значит, возможны две неподвижные точки.
Матрица Якоби для нашей системы:

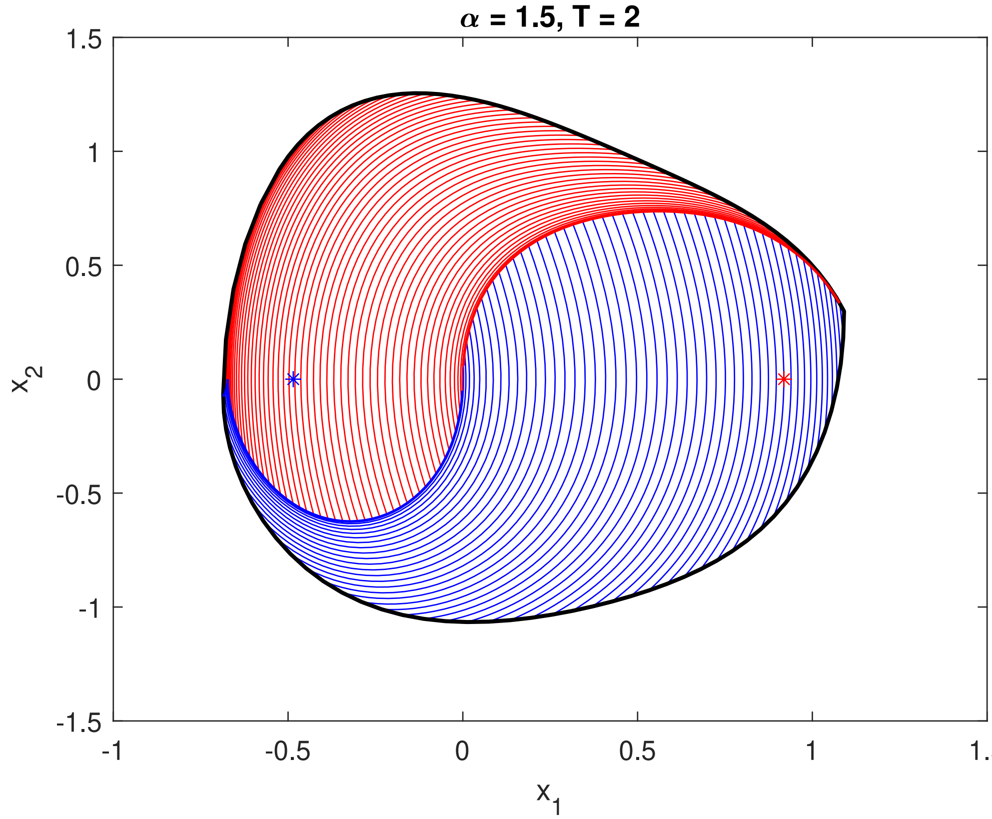
$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 - sin(x_1^3) - 2x_1^2 cos(x_1^2) + 4x_1 cos(x_1) - 2x_1^2 sin(x_1) & -1 \end{pmatrix}$$

Тогда собственные значения можно найти из уравнения:

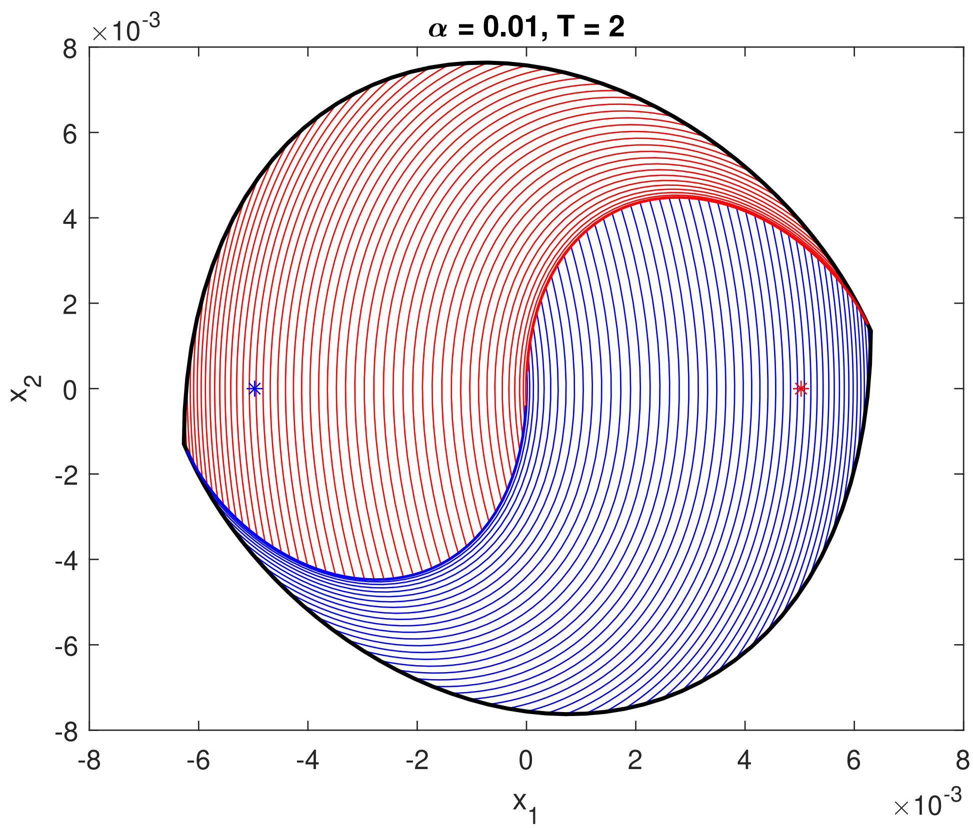
$$\lambda^2 + \lambda + k = 0, \text{ где}$$

$$k = 2 + sin(x_1^2) + 2x_1^2 cos(x_1^2) - 4x_1 cos(x_1) + 2x_1^2 sin(x_1).$$

Аналитически найти решение системы (2) не предоставляется возможным, поэтому найдем его численно. Затем, найдем соответствующие значения λ.
Решая систему (2) при разных значениях α, получим, что в любом случае каждая неподвижная точка принадлежит той части множества достижимости, где проходят траектории противоположного режима движения. А при увеличении времени T неподвижные точки приближаются к границе множества достижимости, но также остаются на стороне противоположной системы. Поэтому неподвижные точки не оказывают влияние на вид множества достижимости.
В этом можно убедиться, глядя на следующие графики. Здесь, синим цветом изображены тректории системы S^-, красным - тректории системы S^+, синей и красной звездочками - неподвижные точки системы S^- и S^+ соответственно.



α = 1.5, T = 2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
x_2
x_1



α = 0.01, T = 2
×10^-3
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
x_2
x_1
×10^-3

Список литературы

[1] Комаров Ю.А. Лекции по оптимальному управлению. ВМК МГУ, 2020.

[2] Понтрягин Л. С. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1976.