Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Задача быстродействия для линейных систем»

Студент 315 группы
К. И. Салихова

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2020

Часть I
Теоретическая часть

1 Постановка задачи

Задана линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}\,(t) = Ax\,(t) + Bu\,(t) + f, \quad t \in [t_0, +\infty),$$

где $x(t),\ u(t),\ f \in \mathbb{R}^2,\ A \in \mathbb{R}^{2\times 2},\ B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. На значения управления $u(t)$ наложено ограничение: $u(t) \in \mathcal{P}$.

Множество допустимых управлений имеет вид:

$$\mathcal{P} = \left\{ (x, y) : \quad \begin{array}{l} \alpha \mid x - p_1 \mid \ + \delta \ (y - p_2)^2 \leq \gamma, \text{ при } x \geq p_1 \\ \beta \mid x - p_1 \mid \ + \delta \ (y - p_2)^2 \leq \gamma, \text{ при } x \leq p_1 \end{array} \right\}, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0,\ \delta > 0.$$

Начальное множество значений фазового вектора: $\mathcal{X}_0$ - квадрат со стороной длины k и центром в точке x_0 (стороны квадрата параллельны осям координат).

Целевое множество значений фазового вектора: $\mathcal{X}_1 = \{x_1\}$.

Необходимо написать программу, которая по заданным параметрам $A, B, f, t_0, p_1, p_2,$ $\alpha, \beta, \gamma, \delta, k, x_0, x_1$ определяет, разрешима ли задача быстродействия. Если задача разрешима, то необходимо найти минимальное время $T = (t_1 - t_0) > 0$, за которое можно перевести систему из множества $\mathcal{X}_0$ во множество $\mathcal{X}_1$.

Так как множество $\mathcal{X}_0$ по своей структуре сложнее, чем множество $\mathcal{X}_1$, для решения поставленной задачи будет удобнее «повернуть время вспять», т.е. решать задачу быстродействия из множества $\mathcal{X}_1$ во множество $\mathcal{X}_0$. При этом, не ограничивая общности (т. к. система является автономной и линейной), можно считать, что $t_0 = 0$.

2 Принцип максимума Понтрягина

Решение задачи опирается на принцип максимума Понтрягина для линейных систем.

Теорема 1 (Принцип максимума Понтрягина). *Пусть $(x^*(t),\ u^*(t))$ — оптимальная пара, t_1^* — соответствующее ей время перемещения. Тогда существует дифференцируемая по $t \in [t_0, t_1^*]$ функция $\psi(t) \not\equiv 0$, которая является решением сопряженной системы $\dot{\psi}(t) = -A^T\psi(t)$, и для которой выполнено:*

1. $\langle \psi(t),\ Bu^*(t) \rangle = \rho(\psi(t) \,|\, B\mathcal{P})$ *для почти всех* $t \in [t_0, t_1^*]$;
2. $\langle \psi(t_0),\ x^*(t_0) \rangle = \rho(\psi(t_0) \,|\, \mathcal{X}_0)$;
3. $\langle -\psi(t_1^*), x^*(t_1^*) \rangle = \rho(-\psi(t_1^*) \,|\, \mathcal{X}_1)$.

Из линейности скалярного произведения и положительной однородности опорной функции следует, что если функция $\psi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы, то функция $\alpha\psi(t),\ \forall\alpha > 0$ также будет удовлетворять условиям теоремы. Поэтому можно рассматривать только такие $\psi(t)$, что $\|\psi(t_0)\| = 1$.

Перебирая по единичному кругу параметр $\psi(t_0)$, найдем все возможные траектории и управления, удовлетворяющие Принципу максимума Понтрягина, а потом среди них будем искать оптимальные.

Для проверки пунктов теоремы необходимо вычислить опорные функции множеств $\mathcal{X}_0,\ \mathcal{X}_1,\ \mathcal{P}$, которые можно найти аналитически.

3 Вычисление опорных функций множеств $\mathcal{X}_0,\ \mathcal{X}_1,\ \mathcal{P}$

В этом разделе приведено аналитическое вычисление опорных функций для начального, целевого множества и множества допустимых управлений.

Так как $\mathcal{X}_1$ - одна точка:

$$\rho(l\,|\,\mathcal{X}_1) = \langle l,\ x_1\rangle\,.$$

Опорный вектор:

$$x^* = x_1.$$

Чтобы вычислить опорную функцию множества $\mathcal{X}_0$, представим $\mathcal{X}_0$ в виде суммы двух множеств:

$$\mathcal{X}_0 = \left\{(x,y) : \begin{array}{c} |x| \le \dfrac{k}{2} \\ |y| \le \dfrac{k}{2} \end{array}\right\} + \{x_0\}.$$

Тогда, зная вид опорной функции для квадрата с центром в начале координат, запишем опорную функцию для множества X_0, воспользовавшись свойством линейности опорной функции по второму аргументу:

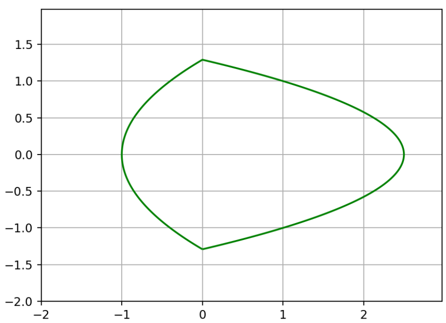
$$\rho(l\,|\,\mathcal{X}_0) = \frac{k}{2}(|l_1| + |l_2|) + \langle l,\ x_0\rangle$$

Множество всех опорных векторов X^* для $\mathcal{X}_0$ имеет вид

$$X^*(l) = \underset{x\in\{\ (\pm\frac{k}{2},\pm\frac{k}{2})\ \}}{\mathrm{Argmax}} \ \langle l,\ x\rangle + x_0,$$

причем, если l перпендикулярен одной из сторон, то $X^*(l)$ состоит из всех точек этой стороны, а если l не перпендикулярен ни одной из сторон, то $X^*(l)$ состоит только из одной точки. Множество $\mathcal{P}$ является пересечением двух парабол различной кривизны:

$$\mathcal{P} = \left\{(x,y) : \quad \begin{array}{l} \alpha|x-p_1| \ +\ \delta\ (y-p_2)^2 \le \gamma,\ \text{при}\ x \ge p_1 \\ \beta|x-p_1| \ +\ \delta\ (y-p_2)^2 \le \gamma,\ \text{при}\ x \le p_1 \end{array}\right\}, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0,\ \delta > 0.$$



Для простоты вычислений сделаем сдвиг множества $\mathcal{P}$ на $(-p_1, -p_2)$:

$$\mathcal{P} = \{(p_1, p_2)\} + \mathcal{P}_0$$

На рисунке изображено симметричное относительно оси абсцисс множество $\mathcal{P}_0$ при значениях параметров $\alpha = 2,\ \beta = 5,\ \gamma = 5,\ \delta = 3$. Найдем опорную функцию множества $\mathcal{P}_0$ сначала в случае $l_1 > 0$. Тогда активное ограничение:

$$\alpha x \ + \ \delta y^2 - \gamma = 0.$$

Используя функцию Лагранжа, найдем условный экстремум. Пусть $z_1 = \alpha x,\ z_2 = \sqrt{\delta} y$. Тогда $z_1 + z_2^2 - \gamma = 0$ и $z_1 = \gamma - z_2^2$.

$$L = l_1(\gamma - z_2^2) + l_2 z_2,$$

$$\frac{\partial L}{\partial z_2} = -2l_1 z_2 + l2 = 0,$$

$$z_2^* = \frac{l_2}{2l_1},\ z_1^* = \gamma - \frac{l_2^2}{4l_1^2}.$$

Если $l_1 > 0$, то $z_1^* \geq 0$, то есть:

$$\frac{l_2^2}{4l_1^2}\ \geq \gamma,$$

$$|l_2|\ \leq 2\sqrt{\gamma}|l_1|.$$

При $|l_2|\ > 2\sqrt{\gamma}|l_1|$ и $l_2 \geq 0$ опорным вектором (по геометрическим соображениям) является вектор: $(0, \sqrt{\frac{\gamma}{\delta}})$.

При $|l_2|\ > 2\sqrt{\gamma}|l_1|$ и $l_2 < 0$ опорным вектором является вектор: $(0, -\sqrt{\frac{\gamma}{\delta}})$.

Аналогично при $l_1 = 0$ и $l_2 \geq 0$ ($l_2 < 0$) опорными векторами являются: $(0, \sqrt{\frac{\gamma}{\delta}})$ ($(0, -\sqrt{\frac{\gamma}{\delta}})$).

Теперь рассмотрим случай, когда $l_1 < 0$. Тогда активное ограничение:

$$-\beta x \ + \ \delta y^2 - \gamma = 0.$$

Рассуждая аналогично и объединяя все вышесказанное, получим:

$$\rho(l\,|\,\mathcal{P}_0) = \begin{cases} \dfrac{l_1}{\alpha}(\gamma - \dfrac{l_2^2}{4l_1^2}) + \dfrac{l_2^2}{2\sqrt{\delta}l_1}, & |l_2| \leq 2\sqrt{\gamma}|l_1| \text{ и } l_1 > 0, \\ \dfrac{l_1}{\beta}(-\gamma + \dfrac{l_2^2}{4l_1^2}) - \dfrac{l_2^2}{2\sqrt{\delta}l_1}, & |l_2| \leq 2\sqrt{\gamma}|l_1| \text{ и } l_1 < 0, \\ \sqrt{\dfrac{\gamma}{\delta}}\mid l_2 \mid, & |l_2| > 2\sqrt{\gamma}|l_1| \text{ или } l_1 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Тогда опорная функция множества $\mathcal{P}$ имеет вид:

$$\rho(l\,|\,\mathcal{P}) = \begin{cases} \langle l, (p_1, p_2)\rangle + \dfrac{l_1}{\alpha}(\gamma - \dfrac{l_2^2}{4l_1^2}) + \dfrac{l_2^2}{2\sqrt{\delta}l_1}, \quad |l_2| \le 2\sqrt{\gamma}|l_1| \text{ и } l_1 > 0, \\ \langle l, (p_1, p_2)\rangle + \dfrac{l_1}{\beta}(-\gamma + \dfrac{l_2^2}{4l_1^2}) - \dfrac{l_2^2}{2\sqrt{\delta}l_1}, \quad |l_2| \le 2\sqrt{\gamma}|l_1| \text{ и } l_1 < 0, \\ \langle l, (p_1, p_2)\rangle + \sqrt{\dfrac{\gamma}{\delta}}|l_2|, \quad |l_2| > 2\sqrt{\gamma}|l_1| \text{ или } l_1 = 0. \end{cases} \tag{2}$$

А общий вид опорного множества:

$$X^*(l) = \begin{cases} (\dfrac{\gamma}{\alpha} - \dfrac{l_2^2}{4\alpha l_1^2},\ \dfrac{l_2}{2l_1\sqrt{\delta}}), \quad |l_2| \le 2\sqrt{\gamma}|l_1| \text{ и } l_1 > 0, \\ (-\dfrac{\gamma}{\beta} + \dfrac{l_2^2}{4\beta l_1^2},\ -\dfrac{l_2}{2l_1\sqrt{\delta}}), \quad |l_2| \le 2\sqrt{\gamma}|l_1| \text{ и } l_1 < 0, \\ (p_1, p_2) + (0, \sqrt{\dfrac{\gamma}{\delta}}), \quad |l_2| > 2\sqrt{\gamma}|l_1| \text{ и } l_2 \ge 0, \\ (p_1, p_2) + (0, -\sqrt{\dfrac{\gamma}{\delta}}), \quad |l_2| > 2\sqrt{\gamma}|l_1| \text{ и } l_2 < 0, \\ (p_1, p_2) + (0, \sqrt{\dfrac{\gamma}{\delta}}), \quad l_1 = 0 \text{ и } l_2 \ge 0, \\ (p_1, p_2) + (0, -\sqrt{\dfrac{\gamma}{\delta}}), \quad l_1 = 0 \text{ и } l_2 < 0. \end{cases} \tag{3}$$

4 Аппрокисмация множества $\mathcal{X}_0$

Для проверки выполнения 3-его условия Принципа максимума нам понадобится вычислять нормаль к опорной гиперплоскости в некоторой точке множества $\mathcal{X}_0$. Поскольку $\mathcal{X}_0$ не является множеством с гладкой границей, нормаль не будет определена однозначно (в углах квадрата).

Для решения этой проблемы аппроксимируем множество $\mathcal{X}_0$ множеством $\mathcal{X}_0'$ - квадратом с мягкими углами:

$$\mathcal{X}_0' = \mathcal{X}_0 + B_\varepsilon(0).$$

Тогда опорная функция множества $\mathcal{X}_0'$ будет иметь вид:

$$\rho(l\,|\,\mathcal{X}_0') = \rho(l\,|\,\mathcal{X}_0) + \rho(l\,|\,B_\varepsilon(0)) = \frac{k}{2}(\ |l_1| + |l_2|\ ) + \langle l,\ x_0\rangle + \varepsilon\|l\|.$$

И соответсвующие опорные векторы:

$$X^*(l) = \underset{x \in \{\ (\pm\frac{k}{2}, \pm\frac{k}{2})\ \}}{\operatorname{Argmax}} \langle l,\ x\rangle + x_0 + \varepsilon\frac{l}{\|l\|},$$

причем, если l перпендикулярен одной из сторон, то $X^*(l)$ состоит из всех точек этой стороны, а если l не перпендикулярен ни одной из сторон, то $X^*(l)$ состоит только из одной точки.

5 Замена переменных

Как уже говорилось выше, так как целевое множество $\mathcal{X}_1$ представляет собой точку, удобно ввести обратное время. Так как заданная система автономна, можем сделать следующую замену переменных:

$$y(s) = x(-t),\ v(s) = u(-t)$$

$$s_0 = -T,\ s_1 = -t_0$$

Тогда в новых переменных поставленная задача примет вид:

$$y(s) = -Ay(s) - Bv(s) - f, \quad s \in [s_0, s_1],$$

$$y(s_0) = x_1, \quad y(s_1) \in \mathcal{X}_0, \quad v(s) \in \mathcal{P},$$

$$s_1 - s_0 \to inf.$$

Часть II

Практическая часть

1 Описание алгоритма

Для того, чтобы найти оптимальную траекторию движения, будем осуществлять перебор функций, удовлетворяющих Принципу максимума. Эти функции запараметризованы числом $\psi(0)$, которое, как было показано выше, удовлетворяет условию: $|\psi(0)| \leq 1$.

Ниже приведены шаги алгоритма вычисления субоптимального управления и траектории.

Шаг 1. Используем первый пункт ПМП.

Создаем равномерную сетку значений параметра $\psi(0) = \psi^0$. Далее, с помощью функции Matlab ode45, решаем следующую задачу Коши для всех значений параметра ψ^0:

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = -A^T\psi(t), \ t \in [0,1], \\ \psi(0) = \psi^0 \end{cases} \tag{4}$$

Далее, используя первое условие Принципа максимума, в каждом узле сетки вычислим значение $u(t)$, которое является опорным вектором множества $\mathcal{P}$ по направлению $B^T\psi(t)$. На этом шаге следует заметить, что матрица B является невырожденной. Если это не так, то будем следовать следующему алгоритму:

1. С помощью функции jordan(B) найдем жорданову форму J и матрицу собственных векторов V матрицы B. Тогда $B = VJV^{-1}$.
2. С помощью функции diag(J) определим индексы нулевых собственных значений матрицы B и увеличим элементы с этими индексами на малое $\varepsilon > 0$. Получим матрицу J'.
3. Перейдем к матрице $B' = VJ'V^{-1}$ с ненулевым определителем.

Также из Принципа максимума следует, что $\psi(t) \not\equiv 0$.Таким образом, $B^T\psi(t) \neq 0$.

Шаг 2. Используем второй пункт ПМП.

Вычислим значение $x(0)$, которое является опорным вектором множества $\mathcal{X}_0$ по направлению ψ^0. После того, как мы выполним замену переменных, начальным множеством станет множество $\mathcal{X}_1$, состоящее из одной точки. Значит, $y(0) = x_1$. Теперь, зная $u(t)$иx^0, можем решить задачу Коши:

$$\begin{cases} \dot{y}(s) = -Ay(s) - Bu(s) - f, \ s \in [0,1], \\ y(0) = x_1 \end{cases} \tag{5}$$

Таким образом, мы нашли $y(s)$.

Шаг 3. Проверка попадания в $\mathcal{X}_0$.

Теперь, зная пару $(y(s), u(s))$ для всех ψ^0, нужно проверить, попадает ли траектория во множество $\mathcal{X}_0$. Для этого, учитывая, что $\mathcal{X}_0$ - квадрат с центром в точке x_0

и со стороной длины k, будем проверять условие:

$$x \in \mathcal{X}_0 \Leftrightarrow \begin{cases} |(x - x_0)(1)| \ \leq \ \dfrac{k}{2}, \\ |(x - x_0)(2)| \ \leq \ \dfrac{k}{2} \end{cases} \tag{6}$$

Как только траектория достигнет множества $\mathcal{X}_0$, будем фиксировать время s_1^*. Если последующие траектории за время s_1^* не достигнут множества $\mathcal{X}_0$, значит эти траектории не являются оптимальными, и мы должны исключить их из рассмотрения. Если какая-либо из последующих траекторий достигнет целевого множества быстрее, чем за s_1^*, то мы можем обновить значение s_1^*. Таким образом, в конце перебора s_1^* - оптимальное время, а соответствующая этому времени траектория - искомая оптимальная траектория.

Шаг 4. Если ни одна из траекторий не попала в $\mathcal{X}_0$.
Продолжим траектории на отрезок [1, 2] и повторим Шаг 3.
Будем продолжать вычисления до тех пор, пока $s \leq t_{max}$, где t_{max} — заранее заданный параметр алгоритма. Если к этому времени ни одна из траекторий не достигла $\mathcal{X}_0$, считаем, что задача не имеет решения.

2 Проверка условия трансверсальности

Для оценки точности полученного решения будем проверять выполнение 3-его пункта Принципа максимума.

Условие трансверсальности означает, что конечная точка траектории является опорным вектором для множества $\mathcal{X}_0'$ по направлению $y^*(s_1^*)$, где $y^*(s)$ - найденная оптимальная траектория.

Найдем опорную гиперплоскость в точке $y_1 = y^*(s_1^*)$ и нормаль к ней. Создадим единичную сетку для перебора значения l и выберем его так, чтобы на нем минимизировалась разность:

$$|\langle l, \ y_1 \rangle - \rho(l \,|\, \mathcal{X}_0')|.$$

Если условие трансверсальности выполнено, то вектор $\frac{\psi(s_1^*)}{\|\psi(s_1^*)\|}$ совпадает с вектором l. Поэтому для оценки точности решения будем смотреть на величину угла между этими векторами:

$$\phi = \arccos\langle \frac{\psi(s_1^*)}{\|\psi(s_1^*)\|}, \ -l \rangle.$$

3 Локализация и уточнение вычислений

Если ошибка в условии трансверсальности получилась большой, то будем поступать следующим образом:

1. На следующей итерации будем перебирать параметр ψ^0 не по всему кругу, а только в окрестности оптимального значения этого параметра на прошлой итерации.

2. Измельчим разбиение в указанной окрестности и снова запустим алгоритм.

3. Будем повторять эти действия до тех пор, пока ошибка в условии трансверсальности не станет достаточно маленькой.

4 Примеры

Пример 1.

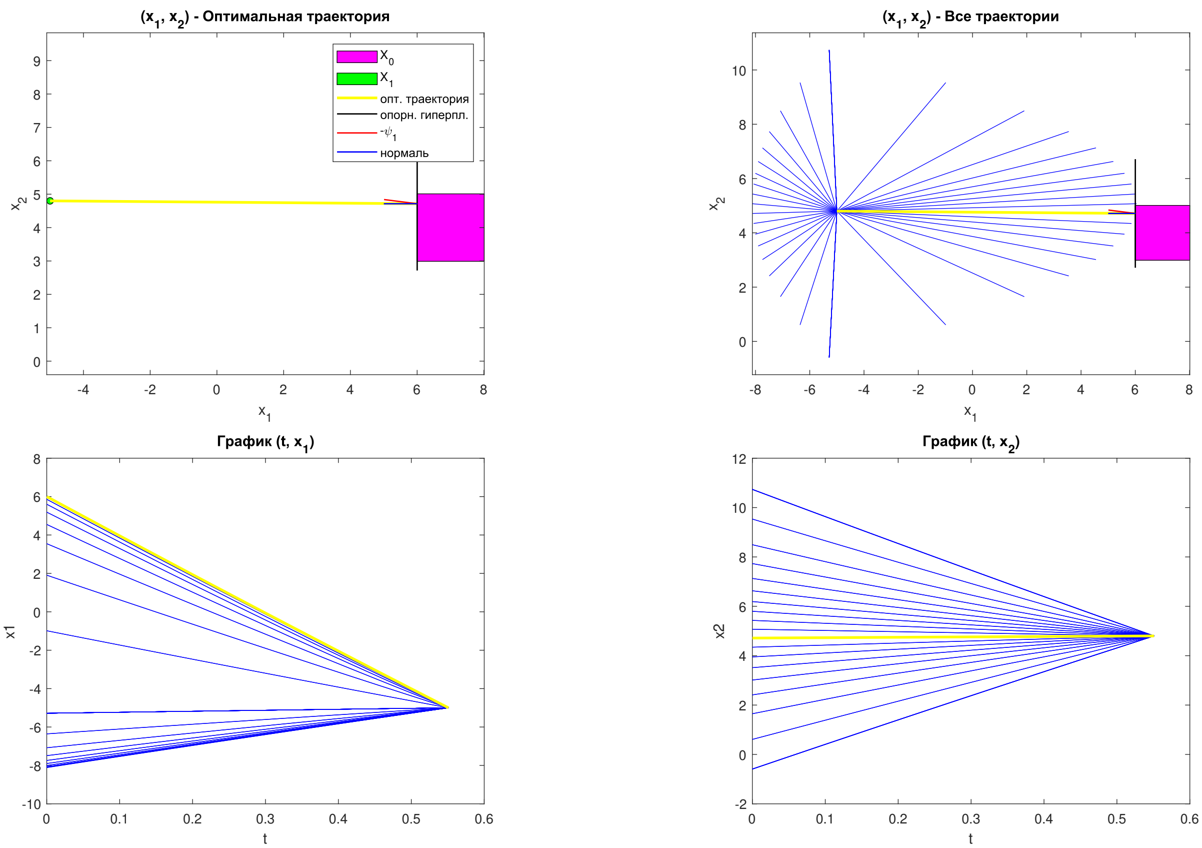
$$A = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix},\ f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

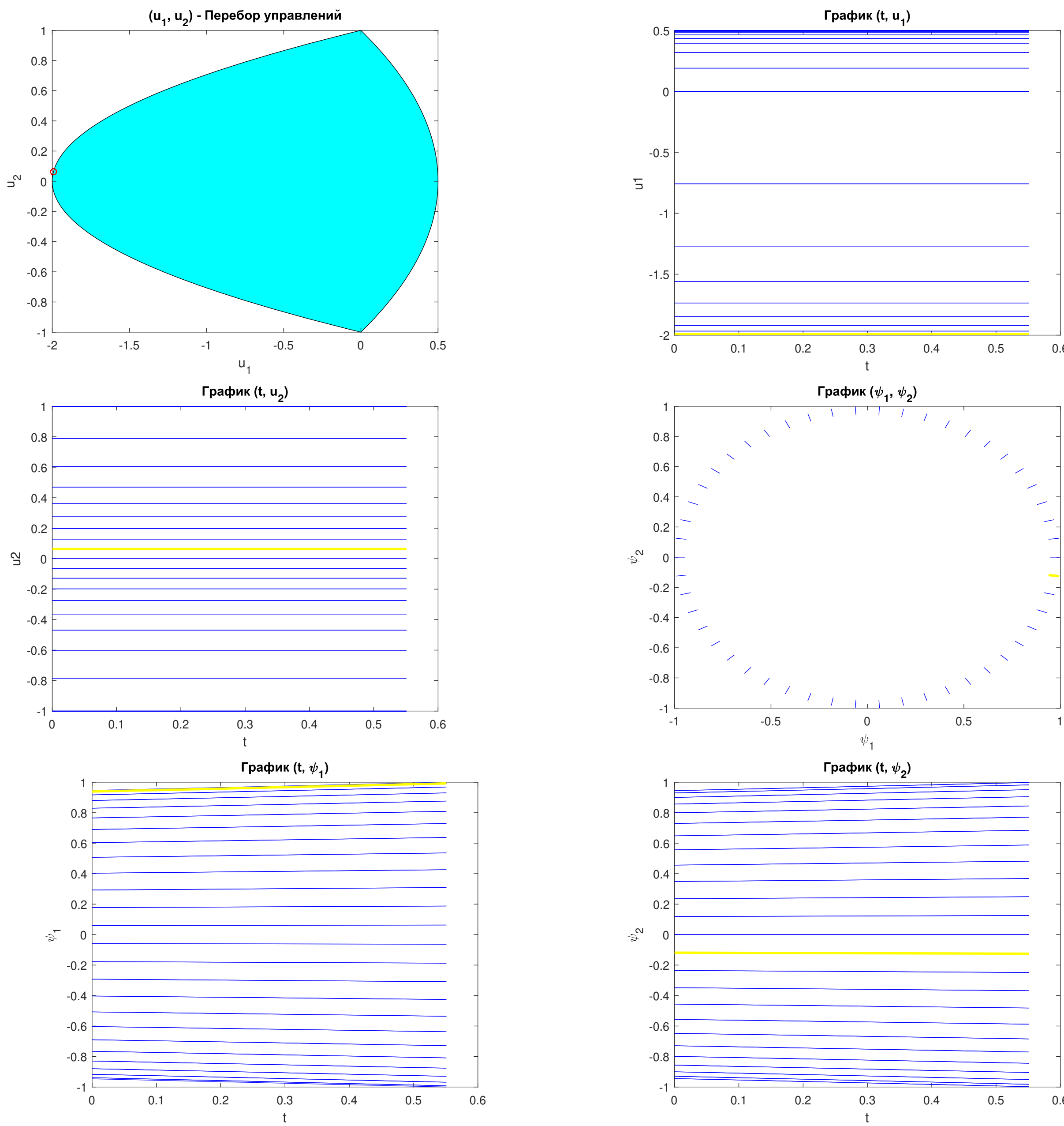
$\mathcal{X}_0$ - квадрат со стороной длины $k = 2$ и центром в точке $x_0 = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\quad \mathcal{X}_1 = \left\{ x_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 4.8 \end{bmatrix} \right\}$,

$$\mathcal{P} = \left\{ (x, y) : \quad \begin{matrix} 2|x| \ + \ y^2 \leq 1, \text{ при } x \geq 0 \\ \frac{1}{2}|x| \ + \ y^2 \leq 1, \text{ при } x \leq 0 \end{matrix} \right\}.$$

За одну итерацию работы программы получаем значение $t_1^* = 0.5510$, а ошибка условия трансверсальности $7.2000°$.

После второй итерации получаем $t_1^* = 0.5490$, и ошибку условия трансверсальности $2.0571°$.





Пример 2.

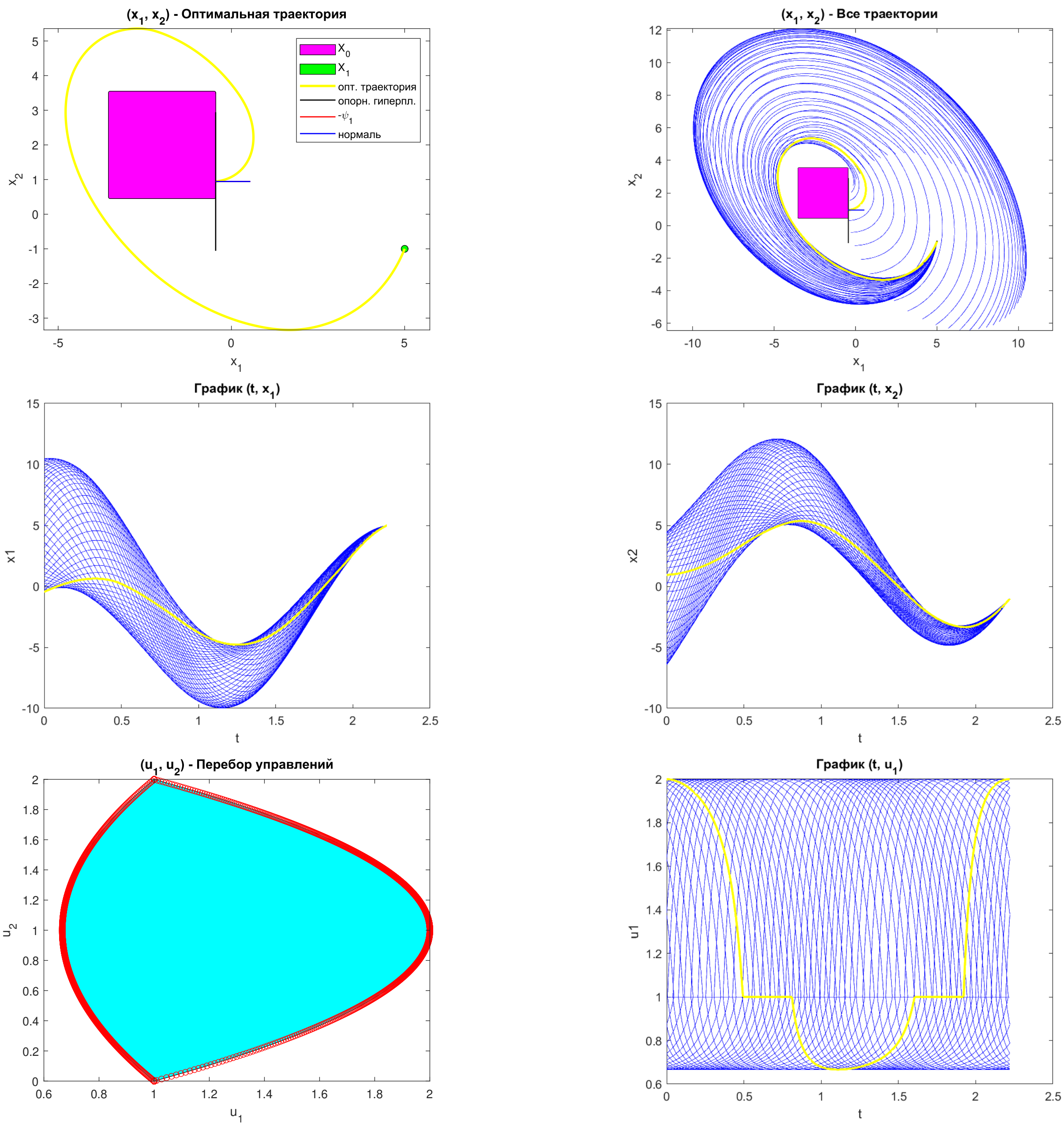
Теперь рассмотрим матрицу A с комплексными собственными значениями.

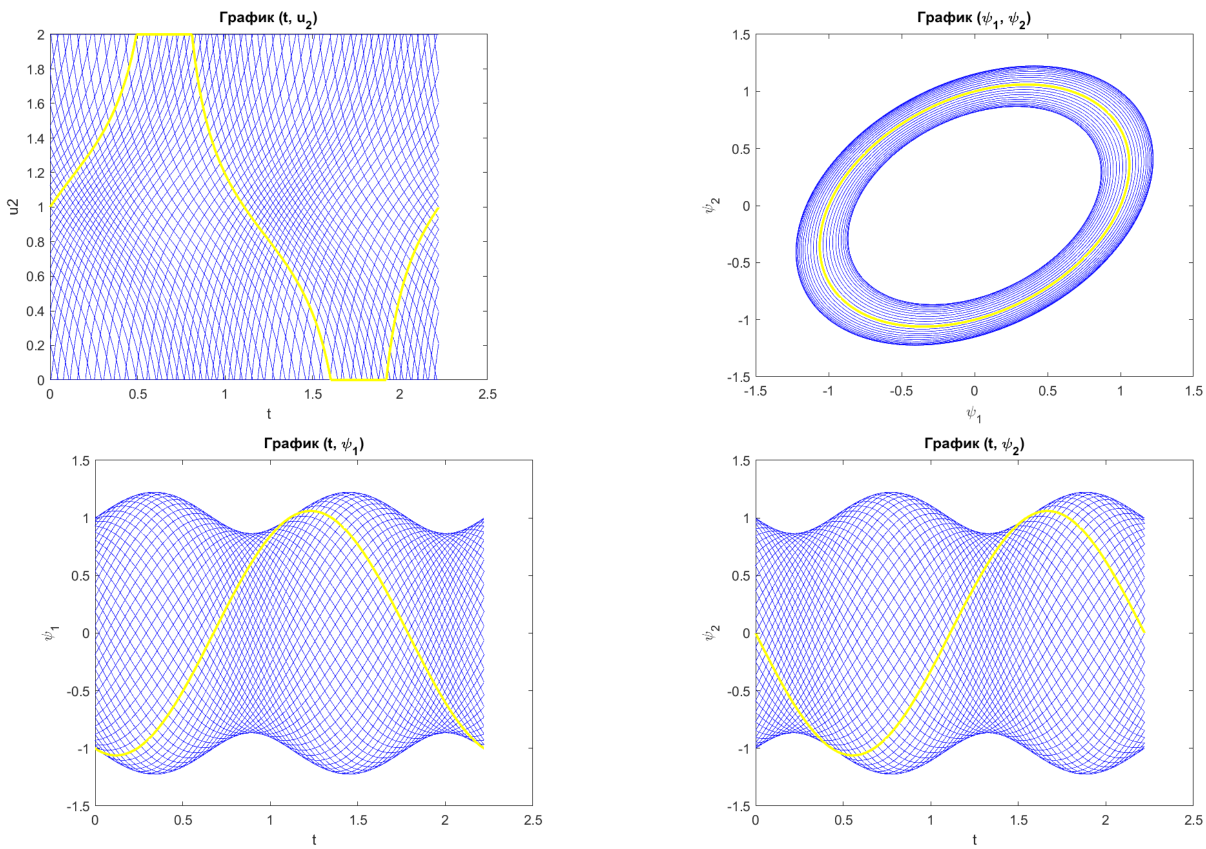
$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},\ f = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$\mathcal{X}_0$ - квадрат со стороной длины $k = 3$ и центром в точке $x_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\quad \mathcal{X}_1 = \left\{ x_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$,

$$\mathcal{P} = \left\{ (x, y): \quad \begin{array}{l} |x-1| \ + \ (y-1)^2 \leq 1, \text{ при } x \geq 1 \\ 3|x-1| \ + \ (y-1)^2 \leq 1, \text{ при } x \leq 1 \end{array} \right\}.$$

За одну итерацию работы программы получаем значение $t_1^* = 2.2210$, и сразу небольшую ошибку условия трансверсальности $0.0758°$.





Пример 3. Исследование непрерывности зависимости времени от входных параметров.

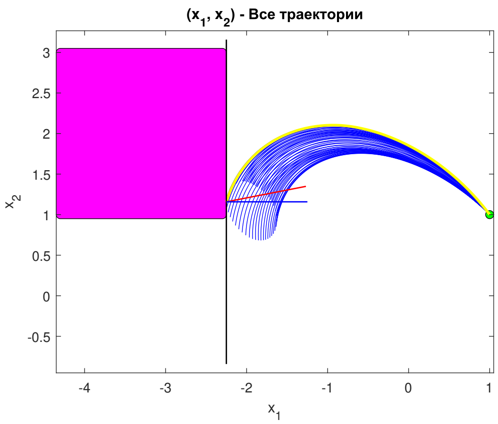
Для исследования непрерывности зависимости времени от входных параметров, выберем матрицу A так, чтобы она имела комплексные собственные значения с положительной действительной частью. Тогда получим «раскручивающуюся» траекторию - неустойчивый фокус в точке $(0, 0)$.

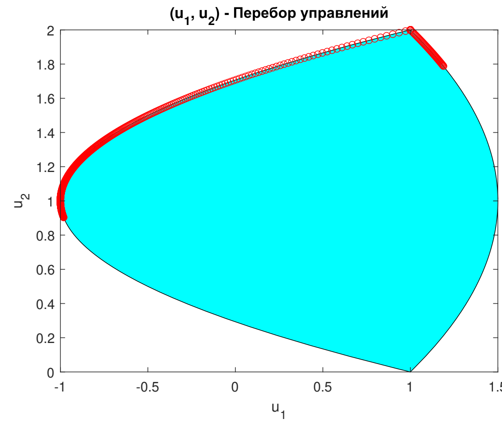
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix},\ B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},\ f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$\mathcal{X}_0$ - квадрат со стороной длины $k = 2$ и центром в точке $x_0 = \begin{bmatrix} -3.3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\quad \mathcal{X}_1 = \left\{ x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$,

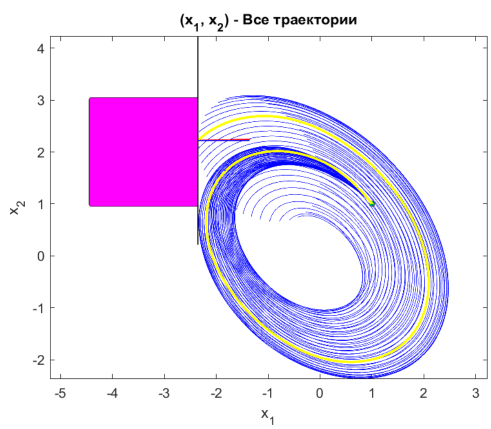
$$\mathcal{P} = \left\{ (x, y) : \quad \begin{matrix} 2|x-1| \ + \ (y-1)^2 \leq 1, \text{ при } x \geq 1 \\ \frac{1}{2}|x-1| \ + \ (y-1)^2 \leq 1, \text{ при } x \leq 1 \end{matrix} \right\}.$$

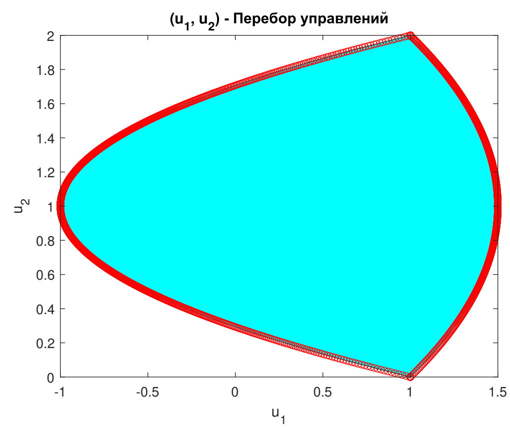
За одну итерацию работы программы получаем значение $t_1^* = 0.7336$. Посмотрим на графики траекторий и перебора управлений:





Теперь рассмотрим аналогичный пример, только лишь немного сдвинем множество $\mathcal{X}_0$. Пусть теперь $\mathcal{X}_0$ - квадрат со стороной длины $k = 2$ и центром в точке $x_0 = \begin{bmatrix} -3.4 \\ 2 \end{bmatrix}$. После первой итерации работы программы получим знаечение $t_1^* = 2.6850$:





Видим, что при небольшом изменении входных параметров, время изменяется скачком. Значит, зависимость результирующего времени быстродействия от входных параметров разрывная.

Список литературы

[1] Рублев И.В. Лекции по оптимальному управлению. ВМК МГУ, 2019.