5.3 Séries (trigonométricas) de Fourier

Nesta secção vamos discutir a possibilidade de representar funções "pouco regulares" (mesmo descontínuas) através de séries de funções trigonométricas, da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)] = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)]$$

onde $\omega > 0$ e $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Repare-se que uma tal série convergirá absoluta e uniformemente em $\mathbb{R}$ sempre que as séries numéricas a_n e b_n são absolutamente convergentes.
Exemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^3} \cos(nx) + (-1)^n \frac{1}{n^2} \sin(nx) \right]$$

Se a série trigonométrica convergir, sua função soma é periódica de período $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

5.3.1 Série e coeficientes de Fourier

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se **periódica de período** T ou T-**periódica** se existir $T > 0$ tal que $f(x + T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Referimo-nos ao período de f como sendo o menor valor de T que verifica a igualdade anterior.

Uma mudança de vatiável $x \mapsto \frac{T}{2\pi}x$ permite transformar uma T-periódica numa função 2π-periódica.

Por isso consideramos apenas funções 2π-periódicas.

5.3.1 Série e coeficientes de Fourier

Relações de otogonalidade:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,dx = 0,\ \ m,\ n \in \mathbb{N}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função 2π-periódica tal que

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right]$$

Se esta série trigonométrica convergir uniformemente, podemos verificar que a_n e b_n são completamente determinadas pela função f.

5.3.1 Série e coeficientes de Fourier

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função 2π-periódica. Chama-se **série de Fourier de** f à série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

onde a_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ e b_n $(n \in \mathbb{N})$ são dados pelas fórmulas

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \text{ e } b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

Exemplo: $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0 \\ \pi, & 0 \le x < \pi \end{cases}$

5.3.2 Convergência da série de Fourier

Uma função diz-se **seccionalmente diferenciável** se tem derivada seccionalmente contínua.

Teorema (Teorema de Dirichlet)
Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função 2π-periódica t e seccionalmente diferenciável (em $\mathbb{R}$) e $c \in \mathbb{R}$. Então a série de Fourier de f converge no ponto c para

$$\frac{f(c^+) + f(c^-)}{2}$$

(a média dos limites laterais de f no ponto c).

Exemplo: $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$;

5.3.1 Série e coeficientes de Fourier

A **série de Fourier de senos** de $f : [0, \pi[$ é a serie de Fourier da sua extensão ímpar, ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

onde $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$.

A **série de Fourier de cossenos** de $f : [0, \pi[$ é a serie de Fourier da sua extensão par, ou seja,

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

onde $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$.