**Universidade de Aveiro**
**Departamento de Matemática**

**Cálculo II -Agrupamento II** **2016/2017**

## Soluções - *ACETATOS*: Sucessões e Séries de funções

Exer. 4.17 (a) *Sugestão:* aplique o Critério de Weierstrass.
(b) *Sugestão:* aplique o Teorema 4.12 (1).

Exer. 4.18 (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{16^n x^{2n}}{(2n)!}$ (b) $2\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right)^2$

Exer. 4.19 *Sugestão:* aplique o Critério de Weierstrass: Sendo a série de funções dada $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, note que $|f_n(x)| \leq a_n$, considerando: (a) $a_n = \dfrac{\sqrt{2}}{n^{3/2}}$; (b) $a_n = \dfrac{\ln 2}{n^2+1}$; (c) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$; (d) $a_n = \dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^2+1}$; (e) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$; (f) $a_n = \dfrac{1}{n^{5/4}}$.

Exer. 4.34 —

Exer. 4.35 (cf. Soluções do Exer. 1 da Ficha de Exercícios nº 6)

Exer. 4.38 (cf. Soluções do Exer. 2 da Ficha de Exercícios nº 6)

Exer. 4.39 (cf. Soluções do Exer. 3 da Ficha de Exercícios nº 6)

Exer. 4.40 (cf. Soluções do Exer. 4 da Ficha de Exercícios nº 6)

Exer. 4.41 1. (a) $y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + 2x e^{3x}(\ln x - 1)$, com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

2. (a) (Solução geral de uma EDO linear homogénea com coeficientes constantes)
$y = c_1 + c_2 \cos(3x) + c_3 \sin(3x), c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

2. (b) (Solução geral de uma EDO linear completa com coeficientes constantes)
$y = c_1 + c_2 \cos(3x) + c_3 \sin(3x) - \dfrac{1}{15}\sin(3x)$, com $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

2. (c) Atendendo à hipótese considerada e ao cálculo da alínea anterior, pelo Princípio de Sobreposição, podemos garantir que uma solução particular da EDO $y''' + 4y' = f(x) + \cos(3x)$ é $y_p = e^{x^2} - \dfrac{1}{15}\sin(3x)$.
Uma vez que a EDO homogénea associada é a mesma equação da alínea (a), a solução geral da EDO dada é da forma $y = c_1 + c_2\cos(3x) + c_3\sin(3x) + e^{x^2} - \dfrac{1}{15}\sin(3x)$, com $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Exer. 4.42 1. (a) Verdadeira. Por hipótese, a série de potências dada é convergente em $]-3;3[$. Em particular, a série correspondente a $x=2$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n 2^n$, converge. Logo pela condição necessária de convergência, tem-se que

$$\lim_{n\to\infty} a_n 2^n = 0.$$

1. (b) Verdadeira. (cf. Teorema 4.23 - Unicidade de representação em série de potências)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n,$$ donde se conclui que

$f^{(n)}(1) = \frac{(-1)^{n+1}}{n} n! = (-1)^{n+1}(n-1)!$, ou seja $f^{(100)}(1) = (-1)^{101} 99! = -99!$.

2. *Errata:* onde está $b$, deverá estar $n$

Domínio de convergência: $D = ]-1, 7]$, sendo a série absolutamente convergente para todo o $x \in ]-1, 7[$ e simplesmente convergente para $x = 7$.

3. $$f(x) = \frac{x}{1-x^2} = x.\frac{1}{1-x^2} = x.\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n = x.\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1},$$ com $-1 < x < 1$.