2.ª Prova de Álgebra Linear e Geometria Analítica 16/01/2012

Duração: 2h00 min

Nome:____ N.º Folhas Supl.:____

Nº Mec.__________ Declaro que desisto _______________ Classificação:_______

Classificações Parciais:

1	2*a*)	2*b*)	2*c*)	2*d*)	3*a*)	3*b*)	3*c*)	4	5*a*)	5*b*)	5*c*)	5*d*)

[30] 1. Mostre que o sistema de equações

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ -x + 2y + 4z = 7 \\ -x + z = 1, \end{cases}$$

é um sistema de Cramer, ou seja, um sistema possível e determinado, e utilize a Regra de Cramer para o resolver.

2. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ definida por:

$$f(a, b, c) = (a - c) + (b + c)X + aX^2.$$

[10] a) Determine para que valor de $a \in \mathbb{R}$, $f(a, a, a) = 4X + 2X^2$.

[15] b) Determine a matriz da aplicação linear f relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e de $\mathbb{R}_2[X]$.

[20] c) Utilize matrizes de mudança de bases para determinar a matriz da aplicação linear f relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$ e à base $\mathcal{D} = (1 + X, X, 1 + X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

Nome:____ Nº Mec.______

[10] d) Seja $g : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear cuja matriz, em relação às bases $\mathcal{B} := (1, X, X^2)$ e $\mathcal{A} := ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ é $2I_3$ onde I_3 designa a matriz identidade de ordem 3.

Suponha que a matriz de f em relação às bases $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ é $3I_3$. Determine a matriz de $g \circ f$ em relação à base $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^3$.

3. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

[5] a) Calcule os produtos de matrizes AB e BA.

[18] b) Mostre que a matriz BA é invertível e calcule a sua inversa.

[12] c) Recorra às propriedades da função determinante, $|*|$, para determinar para que valores do parâmetro real λ, se tem $|(\lambda BA)^T| = 24$.

[30] 4. Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que tem como representação matricial em ralação à base canónica de $\mathbb{R}^2$ a matriz $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Averigúe se o operador T é diagonalizável e em caso afirmativo apresente uma base de $\mathbb{R}^2$ em relação à qual a matriz de T é diagonal.

5. Considere no espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, a função $< */* >$ definida por:
$< (x_1, y_1, z_1)/(x_2, y_2, z_2) >= 2x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

[10] a) Mostre que a função $< */* >$ define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

Nota: *Nas alíneas que se seguem considere o espaço vectorial E munido do produto interno acima definido.*

[15] b) Encontre uma base ortonormada para o subespaço vectorial $E =< (1, 0, 0), (0, 1, 0) >$.

[10] c) Determine uma base para $E^{\perp}$, o complemento ortogonal de E.

[15] d) Indique qual o vector de E mais próximo de $(0, 0, 1)$.

Bom trabalho

... Não esqueça que...

... *Tudo o que vale a pena ser feito*
merece e exige ser bem feito

Philip Chesterfield