Matemática Discreta

Estratégias de Demonstração: Da Implicação

Universidade de Aveiro 2016/2017

http://moodle.ua.pt

Estratégias de demonstração da implicação

- Prova directa
- Demonstração por contraposição
- Demonstração por redução ao absurdo

A implicação

- A implicação $p \Rightarrow q$ significa que se a proposição p é verdadeira então q também é uma proposição verdadeira.

- Usualmente, dada a implicação $p \Rightarrow q$, a proposição p designa-se por hipótese ou antecedente e a proposição q designa-se por tese ou consequente.

- Os teoremas escrevem-se, usualmente, na forma de implicações deste tipo, onde p denota a hipótese do teorema e q a tese do teorema.

Prova directa

Prova directa da implicação

A prova directa da implicação $p \Rightarrow q$, consiste em admitir a hipótese p como verdadeira e, considerando apenas esse facto como adquirido (para além dos axiomas e teoremas já conhecidos), mostrar que a tese q é verdadeira.

Exemplo. Vamos demonstrar a seguinte proposição:

> Proposição. Se m é um número inteiro par e n um número inteiro arbitrário, então mn é um número inteiro par.

Prova: Seja m um número inteiro par. Então

$\exists k \in \mathbb{Z} : m = 2k$ (por definição de número inteiro par)

$\Rightarrow mn = (2k)n$ (dado que $a = b \Rightarrow ac = bc$)

$\Rightarrow mn = 2(kn)$ (associatividade da multiplicação)

Logo, mn é um número inteiro par (por definição).

Prova directa (cont.)

Prova directa da equivalência

A prova directa da equivalência consiste na prova directa das implicações nos dois sentidos.

Exemplo

Vamos demonstrar o seguinte teorema:

Teorema. $(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow (x = u \wedge y = v)$.

Demonstração por contraposição

A a demonstração por contraposição baseia-se na tautologia do cálculo proposicional

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p).$$

- Esta técnica de demonstração consiste em provar $p \Rightarrow q$ com recurso à demonstração da implicação $\neg q \Rightarrow \neg p$.

- A prova directa da implicação $\neg q \Rightarrow \neg p$ garante que se $\neg q$ é verdadeira então $\neg p$ é verdadeira, ou seja, se a tese é falsa a hipótese também é falsa.

Demonstração por contraposição (cont.)

Exemplo

Vamos demonstrar a seguinte proposição:

> Proposição. Se m^2 é um número inteiro ímpar então m é um número inteiro ímpar.

Trata-se da implicação $p \Rightarrow q$, onde a hipótese é p: "m^2 é um número inteiro ímpar" e a tese é q: "m é um número inteiro ímpar". Esta implicação é equivalente a $\neg q \Rightarrow \neg p$, ou seja, se m não é um número inteiro ímpar então m^2 não é um número inteiro ímpar".

Prova: m número inteiro par $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : m = 2k$
$\Rightarrow m^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$
$\Rightarrow m^2$ é número inteiro par.

Demonstração por contraposição (cont.)

Exercício

Demonstre o seguinte teorema:

> Teorema. Seja $\sim$ uma relação de equivalência definida no conjunto X e $x, y \in X$. Se $[x] \neq [y]$, então $[x] \cap [y] = \emptyset$.

Demonstração por redução ao absurdo

A a demonstração por redução ao absurdo baseia-se na tautologia do cálculo proposicional

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q).$$

a partir da qual, por aplicação da leis de De Morgan, se obtém a tautologia

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$$

ou a tautologia

$$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q).$$

- Para se provar a implicação $p \Rightarrow q$, admite-se p verdadeiro e q falso (ou seja, nega-se a implicação) e procura-se obter uma contradição.

Exemplo

Vamos demonstrar a seguinte proposição:

Proposição. Se n^2 é um número inteiro par, então n é um número inteiro par.

Prova: n^2 é par e n é ímpar $\Rightarrow n^2 + n$ é ímpar e $n(n+1)$ é par
$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z} : m$ é ímpar e m é par
o que é uma contradição.