Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Exame de Recurso

28 de Janeiro de 2008 Duração: 2 horas 30 minutos

Nome: ____________________

Nº mecanográfico: __________ **Curso:** __________

Caso pretenda desistir assine a seguinte declaração.
Declaro que desisto. ____________________

Questão	1a	1b(i)	1b(ii)	1b(iii)	2a	2b(i)	2b(ii)	2b(iii)	total
Cotação	15	10	10	10	15	15	15	15	105
Classificação									

Questão	3a	3b	3c	3d	4	5a	5b	total
Cotação	15	15	15	15	15	10	10	95
Classificação								

IMPORTANTE: *Justifique resumidamente todas as suas afirmações e indique os cálculos que efectuou.*

1. Considere a matriz
$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & a-3 & 0 & 2 \\ 2 & a-4 & 1 & b \end{bmatrix},$$
em que $a, b \in \mathbb{R}$.
   (a) Indique para que valores de a e b se tem
      i. $\text{car}(B) = 2$.
      ii. $\text{car}(B) = 3$.
   (b) Considere $a = 1$ e $b = 4$.
      i. Determine uma base para o espaço das colunas de B.
      ii. Verifique que $(0, -1, -1)$ pertence ao espaço das colunas de B.
      iii. Resolva o sistema $BX = 0$.

2. (a) Calcule o determinante da matriz
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & \alpha & 0 \end{bmatrix}$$
e indique para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ a matriz A é invertível.
   (b) Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras.
      i. Se A e B são matrizes quadradas tais que $\det(A) = 2$ e $\det(B) = 3$, então $\det(A + B) = 5$.
      ii. Se A é uma matriz quadrada tal que $A^2 = A$ e se $B = I - A$, então $B^2 = B$ e $AB = 0$.
      iii. Se A é uma matriz quadrada tal que $A = I - A^2$, então A é invertível.

3. Considere a base canónica $\mathcal{C} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$ e seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear definida por
$$f(1,0,0) = (1, \alpha, 0), \qquad f(0,1,0) = (0, 1, -\alpha), \qquad f(0,0,1) = (\alpha, 0, -1),$$
com $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Obtenha a matriz de f relativa a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e determine os valores do parâmetro α para os quais f é sobrejectiva.

(b) Seja $\alpha = -1$. Determine o núcleo de f e indique a sua dimensão.

(c) Determine a matriz de mudança de base da base canónica de $\mathbb{R}^3$ para a base

$$\mathcal{B} = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$$

de $\mathbb{R}^3$.

(d) Considere $\alpha = -1$. Determine a matriz de f relativamente a base $\mathcal{B} = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ de $\mathbb{R}^3$.

4. Considere as rectas concorrentes

$$\mathcal{R} : (x,y,z) = (1,1,0) + \lambda(1,1,3),\ \lambda \in \mathbb{R},$$
$$\mathcal{S} : (x,y,z) = (1,2,5) + \mu(1,0,-2),\ \mu \in \mathbb{R}.$$

Escreva a equação vectorial do plano $\mathcal{P}$ que contém a recta $\mathcal{R}$ e é perpendicular ao plano que contém $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$.

5. (a) Diagonalize a matriz $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

(b) Determine os valores do parâmetro α para os quais a cónica definida por

$$5x^2 + 5y^2 + 2xy + 2x - 2y + \alpha = 0$$

é uma elipse.