Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I - Segundo Semestre — Exame da Época Normal - 1ª Chamada

31 de Maio de 2007

Duração: **2h30m**

Justifique todas as respostas e indique os cálculos efectuados.

50 Pontos

1. Considere a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\ln x) & \text{se} \quad x > 1 \\ 0 & \text{se} \quad x = 1 \\ \frac{x^2}{1-x} & \text{se} \quad x < 1 \end{cases}$$

   (a) Estude f quanto à continuidade em $x = 1$.

   (b) A função f é diferenciável em $x = 1$? Justifique.

   (c) Determine a função inversa da restrição de f ao intervalo $]1, +\infty[$.

25 Pontos

2. Considere a função F definida em $\mathbb{R}$ por $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^3} \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t^2}dt$.
   Prove que F é monótona crescente em $\mathbb{R}$.

25 Pontos

3. Mostre que a equação $x^2 - x \operatorname{sen} x - \cos x = 0$ tem duas e só duas soluções em $[-\pi, \pi]$.

50 Pontos

4. Considere a função f definida por $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$.

   (a) Determine a primitiva de f que se anula no ponto $x = e^2$.

   (b) Calcule o valor da área da região do plano situada entre $x = e$ e $x = e^3$ e limitada pelo eixo das abcissas e pelo gráfico de f.

   (c) Determine a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x}\, dx$ e, em caso de convergência, indique o seu valor.

50 Pontos

5. Calcule os seguintes integrais indefinidos:

   (a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

   (b) $\displaystyle\int \frac{x-2}{x(1+x^2)}dx$