Universidade de Aveiro Departamento de Matemática

# ALGA — Agrupamento IV (ECT, EET, TSI)

## Teste de Avaliação 1

1 de novembro de 2013 — Duração: **1h**

**5** valores

1. Sejam $A$ e $B$ matrizes reais $3 \times 3$ tais que $\det(A) = -2$ e $\det(B) = -3$.

   (a) Calcule $\det(A^T B^{-1})$. Indique as propriedades usadas.

   (b) Sabendo que $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$, calcule o determinante da matriz $C = \begin{bmatrix} 2a_1 + a_2 & a_1 & 3a_3 \\ 2b_1 + b_2 & b_1 & 3b_3 \\ 2c_1 + c_2 & c_1 & 3c_3 \end{bmatrix}$ usando apenas propriedades dos determinantes.

**7** valores

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-1 \end{bmatrix}$ e os vetores $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ \beta \\ \beta-1 \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$, sendo $\alpha$ e $\beta$ parâmetros reais.

   (a) Determine para que valores de $\alpha$

      i. $\det(A) = 0$; ii. a matriz $A$ é invertível; iii. $\operatorname{car}(A) = 3$; iv. $\operatorname{nul}(A) = 1$.

   (b) Determine para que valores de $\alpha$ e $\beta$ o sistema $AX = B$ é

      i. possível e determinado; ii. possível e indeterminado; iii. impossível.

   (c) Considere $\alpha = \beta = 0$ e resolva o sistema $AX = B$.

**8** valores

3. Considere os vetores $u = (1, 1, -1)$ e $v = (1, -1, 1)$ e a reta $\mathcal{R}$ definida pelas equações cartesianas

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

   (a) Verifique se o ponto $A(1, 1, 0)$ é um ponto da reta $\mathcal{R}$.

   (b) Calcule o vetor $w = u \times v$.

   (c) Determine uma equação vetorial da reta $\mathcal{R}$.

   (d) Obtenha uma equação geral (cartesiana) do plano $\mathcal{P}$ que passa no ponto $B(2,-1,-1)$ e é ortogonal ao vetor $u$.

   (e) Diga qual a posição relativa e a distância entre o plano $\mathcal{P}$ e a reta $\mathcal{R}$.