UNIVERSIDADE DE AVEIRO
Departamento de Matemática

Matemática Discreta

Teste $N^0 2$ de Matemática Discreta   26 de Junho de 2015

Responda de uma forma cuidada a cada uma das questões.

Tempo para a realização desta prova: 1 hora e 30 minutos.

1. Considere a expressão $(a+b+c)^3$.

   (2) **a)** Desenvolva esta expressão utilizando a fórmula multinomial.

   (1) **b)** Com base no desenvolvimento obtido anteriormente, determine $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N}$ sabendo que
   $$(a+2)^3 = \alpha_0 + a\alpha_1 + a^2\alpha_2 + a^3\alpha_3.$$

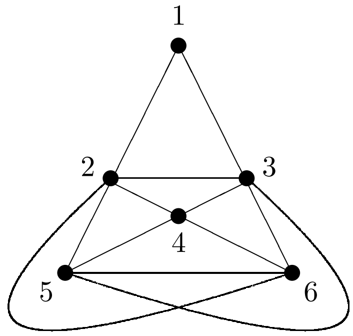
2. *(3)* Demonstre a igualdade
   $$\binom{n}{0}\binom{n}{k} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1} + \cdots + \binom{n}{k}\binom{n-k}{0} = \binom{n}{k}2^k.$$
   contando de dois modos distintos o número de colocações de k bolas numa caixa, escolhidas de um conjunto de n bolas (todas distintas) cada uma das quais é pintada com uma de duas cores (branca ou preta).

   (3) Resolva a equação de recorrência
   $$a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 8,$$
   com condições iniciais $a_0 = 4$ e $a_1 = 11$.

3. *(3)* Resolva a equação de recorrência $a_n = 2na_{n-1}$, com condição inicial $a_0 = 1$, com recurso à utilização da função geradora exponencial $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$.

4. *(2)* Determine o número binomial generalizado $\binom{-3/2}{3}$.

5. Considere o seguinte grafo simples $G = (V, E)$, com $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e E o conjunto das arestas que interligam os vértices de V em G:



*(2)***a)** Será possível obter um grafo bipartido que seja isomorfo a G? Justifique.

*(4)***b)** Suponha que as arestas de G têm custos associados de acordo com a seguinte matriz

$$W = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & \infty & \infty & \infty \\ 4 & 0 & 2 & 6 & 8 & 10 \\ 2 & 2 & 0 & 6 & 2 & 10 \\ \infty & 6 & 6 & 0 & 2 & 4 \\ \infty & 8 & 2 & 2 & 0 & 8 \\ \infty & 10 & 10 & 4 & 8 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Aplicando o algoritmo de Dijkstra, determine um caminho de custo mínimo entre os vértices 1 e 6.