Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I — Época de Recurso

26 de Janeiro de 2009

Duração: **2h30m**

Justifique todas as respostas e indique os cálculos efectuados.

45 Pontos

1. Considere a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} & \text{se} \quad x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ x^2 \cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

   (a) Estude f quanto à continuidade em $x = 0$.

   (b) A função f é diferenciável em $x = 0$? Justifique.

   (c) Mostre que existe $c \in]1, 2[$ tal que $f'(c) = 1$.

20 Pontos

2. Considere a função g definida por $g(x) = \arccos(2x + 1) - \dfrac{\pi}{2}$. Caracterize a função inversa de g indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica que a define.

20 Pontos

3. Considere a função f definida pela expressão analítica $f(x) = \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

   (a) Determine o polinómio de Mac-Laurin, $p_3(x)$, de grau 3 para $f(x)$.

   (b) Calcule um majorante para o erro que se comete ao substituir $f(x)$ por $p_3(x)$ no intervalo $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$.

45 Pontos

4. Calcule os integrais indefinidos seguintes:

   (a) $\displaystyle\int \frac{x + 8}{x(x^2 + 4)}\, dx$

   (b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 - 9}}\, dx$

15 Pontos

5. Calcule o valor da área da região do plano situada entre $x = -\frac{1}{2}$ e $x = 0$ e limitada pelo eixo das abcissas e pelo gráfico da função h definida por $h(x) = \dfrac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

25 Pontos

6. Seja F a função definida por $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^2+2} t\, e^{(t-2)^2}\, dt$.

   (a) Determine, justificando, $F'(x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Mostre que F admite um único extremo local e classifique esse extremo.

30 Pontos

7. Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ e f e g duas funções diferenciáveis em I tais que $f'g$ é primitivável em I.

   (a) Mostre que, para todo o $x \in I$,

$$\int f'(x)g(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\, dx$$

   (b) Determine a primitiva de $g(x) = \ln(1 + x)$ que toma o valor 1 na origem.