

## Representação e minimização funções booleanas

### Tópicos

- Formas canónicas
- Minimização de funções Booleanas
- Sistematização da aplicação do método de Karnaugh

### Definições

**Termo mínimo** de ordem  $i$ ,  $m_i$ :

Produto lógico das  $n$  variáveis booleanas independentes, em que cada uma delas aparece uma e uma só vez, não complementada ou complementada consoante toma valores **1** ou **0**, respectivamente, na  $i$ -ésima combinação das variáveis independentes.

**Termo máximo** de ordem  $i$ ,  $M_i$ :

Soma lógica das  $n$  variáveis booleanas independentes, em que cada uma delas aparece uma e uma só vez, não complementada ou complementada consoante toma valores **0** ou **1**, respectivamente, na  $i$ -ésima combinação das variáveis independentes.

### Formas canónicas

1ª forma canónica:  $f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{2^n-1} f_i \cdot m_i$

2ª forma canónica:  $f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \prod_{i=0}^{2^n-1} (f_i + M_i)$

3ª forma canónica:  $f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = (\prod_{i=0}^{2^n-1} (f_i \cdot m_i))'$

4ª forma canónica:  $f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = (\sum_{i=0}^{2^n-1} (f_i + M_i))'$

### Exercícios

1. Considere a seguinte função booleana  $f(x, y, z) = x'y + z' + xy'z$ .
  - a. Obtenha directamente da expressão o respectivo mapa de Karnaugh
  - b. Determine as formas canónicas através dos termos mínimos identificados no mapa de Karnaugh
  - c. Determine de novo as formas canónicas mas agora de forma algébrica partindo da expressão booleana de  $f(x, y, z)$ .

2. Relativamente às variáveis independentes  $x, y$ , e  $z$ , determine as formas canónicas das funções booleanas  $f, g, h$  e  $w$  expressas na seguinte tabela de verdade:

x	y	z	f	g	h	w
0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	0	0	1

3. Determine representações algébricas mínimas das funções representadas nos seguintes mapas de Karnaugh:

K1

ab \ cd	00	01	11	10
00	1	1		
01				
11		1	1	
10		1	1	

K2

ab \ cd	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01				
11				
10				

K3

ab \ cd	00	01	11	10
00	1			1
01				
11				
10	1			1

K4

ab \ cd	00	01	11	10
00		1	1	
01			1	
11		1	1	
10		1	1	

4. Recorde os conceitos de implicante e implicante primo essencial. Identifique-os no mapa K4 do exercício anterior.
5. Considere a função  $f(a, b, c, d) = a'c' + b'c' + acd + a'bc'$
- Desenhe o respectivo mapa de Karnaugh a partir da expressão.
  - Obtenha de novo, a partir do mapa de Karnaugh, uma expressão algébrica mínima para  $f$ .
6. Determine as formas mais simples (em soma de produtos) das duas funções seguintes. Compare os resultados obtidos e comente.

a.  $f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \sum m_{x_0, x_1, x_2, x_3} (0, 1, 4, 5, 12, 13)$

b.  $g(x_0, x_1, x_2, x_3) = \prod M_{x_0, x_1, x_2, x_3} (2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 15)$

7. Determine as formas mais simples (em soma de produtos) das seguintes funções: (tome nota da ordem das variáveis)

a.  $f(w, x, y, z) = \sum m_{w, x, y, z} (0, 1, 2, 4, 6, 9, 11)$

b.  $f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \sum m_{x_0, x_1, x_2, x_3} (0, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14)$

c.  $f(x_3, x_2, x_1, x_0) = \sum m_{x_3, x_2, x_1, x_0} (0, 1, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 14)$

d.  $f(x_4, x_3, x_2, x_1, x_0) = \sum m_{x_4, x_3, x_2, x_1, x_0} (0, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 17, 18, 20, 24, 25, 28, 30)$

8. Por vezes, a saída que corresponde a uma dada combinação das variáveis de entrada que não se conhece ou é irrelevante. Esta circunstância pode ajudar na simplificação da função booleana, pois dá liberdade para se criarem novas adjacências no mapa de Karnaugh. Obtenha a expressão simplificada para as seguintes funções:

K1

ab \ c	00	01	11	10
0		x	x	1
1	1	x	1	

K2

ab \ cd	00	01	11	10
00		1	1	
01	1	x		x
11	x		x	1
10		1	1	

9. Simplifique as seguintes funções com combinações de entrada irrelevantes

a.  $f(x_3, x_2, x_1, x_0) = \sum m_{x_3, x_2, x_1, x_0} (4, 5, 6, 8, 9, 10, 13) + \sum d_{x_3, x_2, x_1, x_0} (0, 7, 15)$

b.  $f(x_3, x_2, x_1, x_0) = \sum m_{x_3, x_2, x_1, x_0} (1, 3, 5, 7, 9) + \sum d_{x_3, x_2, x_1, x_0} (6, 12, 13)$

c.  $f(x_3, x_2, x_1, x_0) = \prod M_{x_3, x_2, x_1, x_0} (1, 2, 3, 11, 12, 14) \cdot \prod d_{x_3, x_2, x_1, x_0} (0, 7, 15)$

10. Mostre, através de um exemplo com 4 variáveis independentes, que uma função booleana pode admitir mais que uma forma mínima.

11. Preencha mapas de Karnaugh de 4 variáveis de forma a encontrar funções que obedeçam aos seguintes critérios:

- As formas mínimas SOP e POS têm o mesmo nº de termos e variáveis.
- A forma mínima SOP tem menos termos e variáveis que a forma mínima POS.
- A forma mínima POS tem menos termos e variáveis que a forma mínima SOP.