Soluções do Capítulo 1:Funções reais de várias variáveis reais

February 27, 2017

Exercício 1.6

(a) $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x > 0 \wedge y < -x+1) \vee ((1 < x < 3) \wedge (0 < y < 2))\}$

$$\begin{array}{rcl} int(S_1) & = & S_1; \\ fr(S_1) & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x = 0 \wedge y \leq 1) \vee (y = -x+1 \wedge x > 0) \vee \\ & & \vee [(x = 1 \vee x = 3) \wedge (0 \leq y \leq 2)] \vee [(y = 0 \vee y = 2) \wedge (1 \leq x \leq 3)]\}; \\ S_1' & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x \geq 0 \wedge x + y \leq 1) \vee ((1 \leq x \leq 3) \wedge (0 \leq y \leq 2))\}. \end{array}$$

$S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \vee y = 0\}$

$$\begin{array}{rcl} int(S_2) & = & \emptyset; \\ fr(S_2) & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\} = S_2; \\ S_2' & = & S_2. \end{array}$$

$S_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 4 \vee x = 0\}$

$$\begin{array}{rcl} int(S_3) & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 4\}; \\ fr(S_3) & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}; \\ S_3' & = & \mathbb{R}^2. \end{array}$$

(b) S_1 - aberto e não limitado;
S_2 - fechado e não limitado;
S_3 - não é aberto nem fechado e não é limitado.

Exercício 1.8

(a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 2x\}$. O domínio de f é o conjunto de todos os pontos do plano que não pertencem à reta de equação $y = 2x$.

(b) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \wedge x \geq 0\}$. O domínio de f é o conjunto de todos os pontos do plano que distam menos de uma unidade do ponto $(0,0)$ e cuja abcissa é não negativa ou seja, é o interior do semicírculo de centro $(0,0)$ e raio 1 que se encontra à direita do eixo Oy, incluindo o eixo Oy.

(c) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -4 \leq y \leq -2\}$. O domínio de f é o conjunto de todos os pontos do plano que formam a faixa horizontal compreendida entre as retas de equações $y = -4$ e $y = -2$.

(d) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x > 0 \wedge y > x^2 + 1) \vee (x < 0 \wedge x^2 < y < x^2 + 1)\}$. O domínio de f é o conjunto de todos os pontos do plano com abcissa positiva e que estão acima da parábola de equação $y = x^2 + 1$ e de todos os pontos do plano com abcissa negativa que se situam entre as parábolas de equações $y = x^2$ e $y = x^2 + 1$.

(e) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 4 \wedge x^2 + y^2 < 16\}$. O domínio de f é o conjunto de todos os pontos do plano que constituem a coroa circular delimitada pelas circunferências de centro $(0,0)$ e raios 2 e 4, excluindo as circunferências.

Exercício 1.16

(a) $D_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -6x^2 - 3y^2 + 2z^2 > 6\}$. D_f é um conjunto aberto;

(b) $D_g = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \geq 0\}$. D_g é um conjunto fechado;

(c) $D_h = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$. D_h é um conjunto fechado;

(d) $D_j = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2} \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0\right\}$. D_j é um conjunto aberto;

(e) $D_m = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \neq a\}$.
Se $a < 0$, $D_m = \mathbb{R}^3$, porque $x^2 + y^2 + z^2 \neq a$ é uma condição universal.
Se $a > 0$, D_m é o conjunto de todos os pontos do espaço exceto a superfície esférica de centro $(0,0,0)$ e raio $\sqrt{a}$.
Se $a = 0$, $D_m = \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$. D_m é um conjunto aberto.

Exercício 1.17

$$\begin{aligned} D_h &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \backslash (0,0); \\ CD_h &= \{\frac{x^2}{x^2+y^2} : (x,y) \neq (0,0)\} = [0,1]. \end{aligned}$$

Exercício 1.18

(a) $C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = k + \sin(x)\}, \quad k \in \mathbb{R};$

(b) Quando $k \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, $C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{k}{x}\}$.
Quando $k = 0$, $C_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \vee y = 0\}$;

(c) $C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = k\}, \quad k \geq 0.$

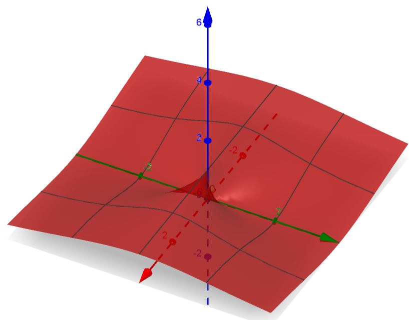

Figure 1: Representação gráfica da função h do exercício 1.17

Exercício 1.19

(a) $S_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z - k\}, \quad k \in \mathbb{R}$. Parabolóide elíptico.

(b) $S_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = k\}, \quad k \in \mathbb{R}$. Se $k > 0$, S_k é um hiperbolóide de uma folha. Se $k < 0$, S_k é um hiperbolóide de duas folhas. Se $k = 0$, S_0 é um cone elíptico.

(c) $S_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = k\}, \quad k \geq 0$. Se $k > 0$, as superfícies de nível são superfícies esféricas concêntricas (centradas na origem) de raio $\sqrt{k}$. Quando $k = 0$, $S_0 = \{(0, 0, 0)\}$.

Exercício 1.24 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.
Exercício 1.27

(a) $\frac{1}{5}$.

(b) 0.

Exercício 1.28

(a) Não existe.

(b) Não existe.

Exercício 1.33 F é contínua no seu domínio. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0 \wedge z \neq 0 \wedge x \neq y^2\}$.
Exercício 1.34

(a) f é contínua em $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 1\}$.

(b) f é contínua em $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq -y\} \cup \{(0,0)\}$.

(c) f é contínua em $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\} \cup \{(0,0)\}$.

Exercício 1.44

(a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{4xy}{(x^2-y^2)^2}$;
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{-2(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2}$;
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{4xy}{(x^2-y^2)^2}$.

(b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -y^2 \sin(xy)$;
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \cos(xy) - xy\sin(xy)$;
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -x^2 \sin(xy)$.

(b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$;
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$;
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

Exercício 1.53

(a) $D_u f(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{x+y}{x^2+y^2}$.

(b) $D_u f(x,y) = \frac{6}{5}xy^3 - \frac{12}{5}x^2y^2$.

(c) $D_u f(x,y) = \frac{-e^x+5z-2y}{\sqrt{30}}$.

(d) $D_u f(x,y) = \frac{y-2x}{3}\sin(xy) + \frac{2z+2y}{3}\cos(yz)$.

Exercício 1.54

(a) $4x + 2y - z = 3$.

(b) $\pi x + y + z = 2\pi$.

(c) $8x - 8y - z = 0$.