

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Exame Final

14 de Janeiro de 2008 Duração: 2 horas 30 minutos

| Nome: | | | | | | | |
|--|--------|--|--|--|--|--|--|
| Nº mecanográfico: | Curso: | | | | | | |
| Caso pretenda desistir assine a seguinte declaração. Declaro que desisto. | | | | | | | |

| Questão | 1a | 1b | 2a | 2b | 3a | 3b | 3c | 3d | 4 | total |
|--------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-------------|
| Cotação | 15 | 10 | 10 | 10 | 15 | 10 | 10 | 10 | 15 | 105 |
| Classificação | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | |
| Questão | 5a | 5b | 6a | 6b | 7a | 7b | 7c | 8a | 8b | total |
| Questão Cotação | 5a 10 | 5b 10 | 6a 15 | 6b 10 | 7a 10 | 7b 10 | 7c 10 | 8a 10 | 8b 10 | total 95 |

IMPORTANTE: Justifique resumidamente todas as suas afirmações e indique os cálculos que efectuou.

1. Considere o seguinte sistema linear nas incógnitas x, y, z, onde a é um parâmetro real.

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

- (a) Determine os valores do parâmetro a para os quais o sistema é impossível.
- (b) Considere a=2. Resolva o sistema, pelo método de eliminação de Gauß-Jordan, e indique o espaço nulo da matriz dos coeficientes do sistema.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Utilizando propriedades dos determinantes, transforme a matriz A numa matriz triangular do tipo 4×4 cujo determinante seja igual a $\det(A)$.
- (b) Calcule $\det(A)$ e indique os valores de a e b para os quais A é invertível.

- 3. (a) Seja A uma matriz quadrada. Justifique que, se $2A^2 + A I = 0$, então A é invertível.
 - (b) Sendo B e C duas matrizes reais do tipo 4×4 , sabendo que $\det(A) = -2$ e $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = C^{-1}BC$, determine $\det(B)$.
 - (c) Diga, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira. Se A é uma matriz quadrada com os elementos diagonais todos iguais a zero, então A é não invertível.
 - (d) Diga, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira. Se A é do tipo 20×25 e car(A) < 5, então a dimensão do espaço nulo de A é superior a 15.

4. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

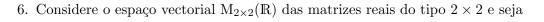
Seja $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear que é representada pela matriz A relativamente à base B = ((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)). Determine T(1,2,3).

5. Considere as rectas

$$\mathcal{R}: \quad \frac{x-3}{-2} = y - 4 = -z + 1,$$

$$S: \quad \frac{x-5}{2} = 1 - y = z - 4.$$

- (a) Determine a posição relativa das duas rectas.
- (b) Escreva a equação vectorial do plano $\mathcal P$ que as contém.



$$S = \{ M \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid M = M^{\mathrm{T}} \}.$$

- (a) Averigue se S é subespaço vectorial de $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$
- (b) Verifique que $\dim(S) = 3$.

7. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Mostre que v=(-1,1,1) é um vector próprio de A.
- (b) Calcule os valores próprios de A.
- (c) A matriz A é diagonalizável? Justifique.

- 8. (a) Diagonalize a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.
 - (b) Considere a cónica

$$3x^2 + 3y^2 + 4xy + \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0.$$

Escreve a sua equação reduzida e classifique-a.