1. Complementos de funções reais de variável real

baseado no texto de Virgínia Santos, Cálculo com funções de uma variável, 2009/10, pp. 75 — 144

Isabel Brás

UA, 20/9/2016

Cálculo I – Agrup. I 16/17

Resumo dos Conteúdos

1. Funções Invertíveis — Definições, propriedades e exemplos
2. Trigonométricas Inversas (e trigonométricas diretas)
3. Derivação das funções inversas
4. Extremos e extremantes de uma função
5. Teoremas de Bolzano e de Weierstrass
6. Teorema de Rolle
7. Teorema de Lagrange
8. Teorema de Cauchy e Regra de Cauchy

Definição de Função e Notas Introdutórias

Definição

Uma função real de variável real f é uma correspondência que a cada elemento de $D_f \subset \mathbb{R}$ (domínio de f) faz corresponder um e um só elemento de $\mathbb{R}$. Notação: $f : D_f \to \mathbb{R}$.

1. As funções que consideraremos terão sempre domínio em $\mathbb{R}$. Assim, os domínios para elas considerados deverão ser sempre tomados como subconjuntos de $\mathbb{R}$, mesmo que tal esteja omisso.
2. Os alunos devem recapitular de forma autónoma, as várias definições básicas relativas a f.r.v.r., tais como contradomínio, injetividade, sobrejetividade, monotonia, etc. Recomenda-se a leitura atenta do texto "Preliminares sobre funções reais de variável real" disponível em http://elearning.ua.pt/ .

Função Invertível

Definição:

$f\colon D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função injetiva se, para todo o $x_1, x_2 \in D_f$,

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

Definição:

Seja $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, (onde $D_f \subset \mathbb{R}$), uma função injetiva. A função

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}\colon & CD_f & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & x \end{array}$$

onde x é tal que $f(x) = y$, é designada por função inversa de f.

Dizemos que uma função é invertível se admite inversa.

Observações:

- f é invertível sse f é injetiva;
- O contradomínio de f^{-1} é D_f;
- $\forall x \in D_f \quad f^{-1} \circ f(x) = x$;
- $\forall y \in CD_f \quad f \circ f^{-1}(y) = y$;
- $\forall x \in D_f \;\; \forall y \in CD_f \quad f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.
- Os gráficos de f e f^{-1} são simétricos relativamente à reta $y = x$.

Algumas propriedades das funções invertíveis

Proposição:

Se $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é estritamente monótona em D_f, então f é injetiva.

Proposição:

Se $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é estritamente crescente (resp. estritamente decrescente) em D_f, então f^{-1} é estritamente crescente (resp. estritamente decrescente) em CD_f.

Proposição:

Seja f uma função contínua e estritamente crescente (resp. estritamente decrescente) num intervalo $[a, b]$. Sejam $c, d \in \mathbb{R}$ tais que $f(a) = c$ e $f(b) = d$. Então:

(i) f^{-1} é estritamente crescente em $[c, d]$ (resp. estritamente decrescente em $[d, c]$);

(ii) f^{-1} é contínua.

Inversa da função exponencial natural

Função exponencial de base e :

$$\begin{array}{rccc} f & : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & e^x \end{array}$$

onde e é o número de Neper, i.e., $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$.

f é estritamente crescente e portanto invertível. A sua inversa é a função

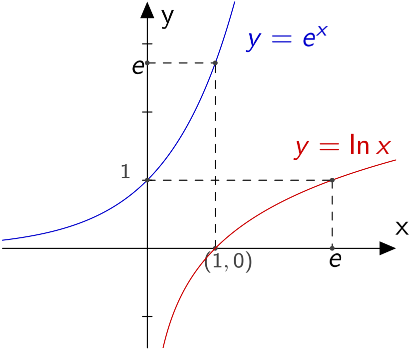
$$\begin{array}{rccc} f^{-1} & : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = \ln x \end{array}$$

onde $y = \ln x$ se e só se $e^y = x$, para todo o $y \in \mathbb{R}$ e todo o $x \in \mathbb{R}^+$.

$\downarrow$ lê-se

logaritmo de x ou logaritmo neperiano de x ou logaritmo natural de x

Ilustração gráfica das funções exponencial natural e logarítmica natural:



Propriedades do logaritmo natural:

Para todos $x, y \in \mathbb{R}^+$ e todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
2. $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$;
3. $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$.

Inversa da função exponencial de base a

$(a > 0,\ a \neq 1,\ a \neq e)$

Função exponencial de base a :

$$\begin{array}{rccc} g : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & a^x \end{array}$$

Se $a > 1$, g é estritamente crescente, e se $a < 1$, g é estritamente decrescente. Nos dois casos, g é portanto invertível. A inversa de g é a função

$$\begin{array}{rccc} g^{-1} : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = \log_a x \end{array}$$

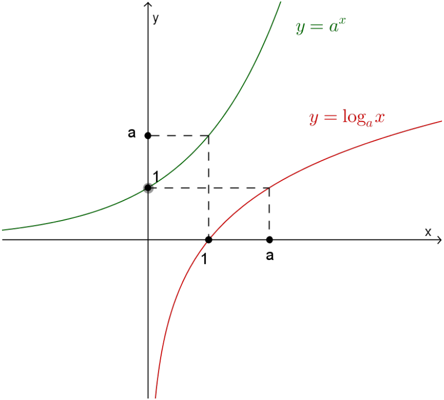
onde $y = \log_a x$ sse $a^y = x$, para todo o $y \in \mathbb{R}$ e todo o $x \in \mathbb{R}^+$.

$\downarrow$ lê-se

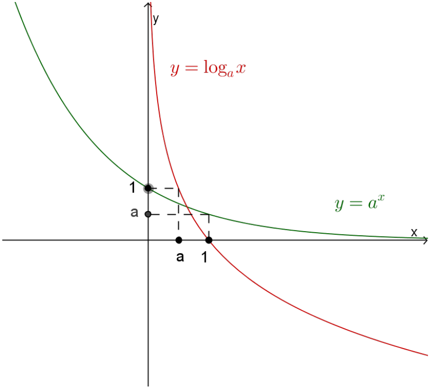
logaritmo de x na base a

Ilustração gráfica das funções exponencial e logarítmica de base a:

Caso $a > 1$:



Caso $0 < a < 1$:



Propriedades dos logaritmos:

Para todos $x, y \in \mathbb{R}^+$ e todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$,
2. $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$,
3. $\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a x$,
4. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$,

onde $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

Exercício:

Prove as propriedades anteriores.

Inversa da função seno

Função seno:

$$\begin{array}{rcrcl} \text{sen} & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \text{sen } x \end{array}$$

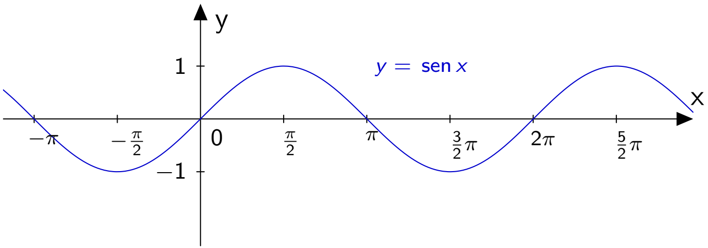
Algumas propriedades da função seno:

- Domínio: $\mathbb{R}$; Contradomínio: $[-1, 1]$
- Função periódica de período 2π, isto é,

$$\text{sen}\, x = \text{sen}\,(x + 2k\pi), \quad \text{qualquer que seja} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- Função ímpar
- Não é injetiva;

- Esboço gráfico da função seno:



A função seno não é injetiva em $\mathbb{R}$, mas a restrição

$$\begin{array}{rcl} f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{sen} x \end{array}$$

já é injetiva. f é a chamada restrição principal da função seno.

A inversa de f é chamada de função arco seno, denota-se por arcsen , e define-se do seguinte modo

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{arcsen} : [-1, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = \operatorname{arcsen} x \end{array}$$

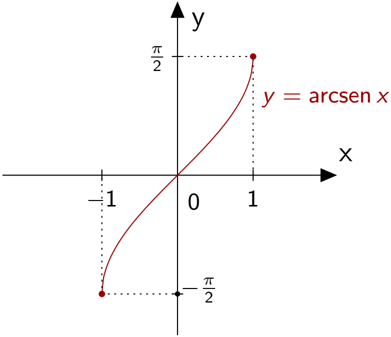
onde

$$y = \operatorname{arcsen} x \quad \text{sse} \quad \operatorname{sen} y = x, \quad \text{para todos os } x \in [-1, 1] \ \text{ e } \ y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

$\downarrow$ lê-se

arco cujo o seno é x

Esboço gráfico da função arco seno:



Inversa da função cosseno

Função coseno: $$\begin{array}{rccc} \cos : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \cos x \end{array}$$

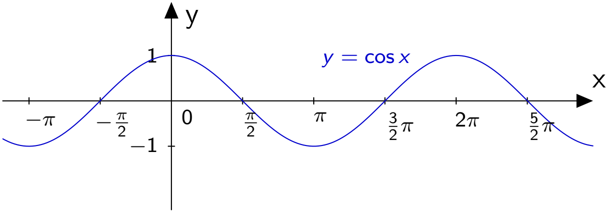
Algumas propriedades da função cosseno:

- Domínio: $\mathbb{R}$; Contradomínio: $[-1, 1]$
- Função periódica de período 2π, isto é,

  $$\cos x = \cos(x + 2k\pi), \quad \text{qualquer que seja} \ \ x \in \mathbb{R} \ \ \text{e} \ \ k \in \mathbb{Z}.$$

- Função par
- Não é injetiva.

- Esboço gráfico da função cosseno:



A função cosseno não é injetiva em $\mathbb{R}$, mas a restrição

$$\begin{array}{rcccc} h & : & [0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \cos x \end{array}$$

já é injectiva. h é a chamada restrição principal da função cosseno.
A inversa de h é chamada função arco cosseno, denota-se por arcos , e define-se do seguinte modo

$$\begin{array}{rcccc} \text{arcos} & : & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & y = \text{arcos}\, x \end{array}$$

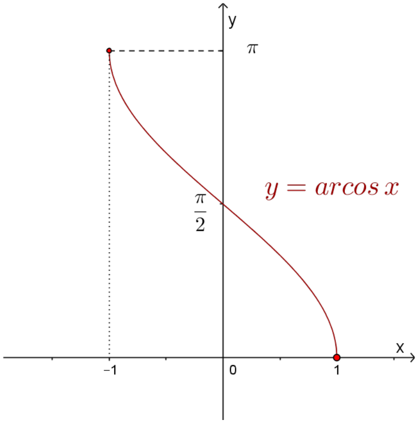
onde

$$y = \text{arcos}\, x \quad \text{sse} \quad \cos y = x, \quad \text{para todos os } x \in [-1,1] \text{ e } \quad y \in [0,\pi].$$

$\downarrow$ lê-se

arco cujo o cosseno é x

Esboço gráfico da função arco cosseno:



Inversa da função tangente

Função tangente:

$$\begin{array}{rccl} \text{tg} & : & D \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \text{tg}\, x \end{array}$$

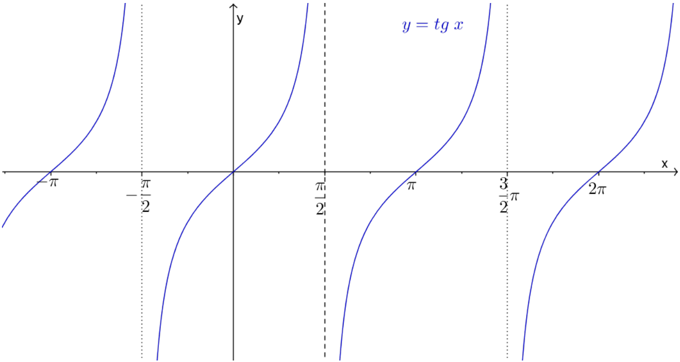
Algumas propriedades da função tangente:

- Domínio: $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
- Contradomínio: $\mathbb{R}$
- Função periódica de período π, isto é,

$$\text{tg}\, x = \text{tg}\,(x + k\pi), \quad \text{qualquer que seja } \ x \in D \ \text{ e } \ k \in \mathbb{Z}.$$

- Função ímpar
- Não é injetiva
- $(\text{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, para todo o $x \in D$

- Esboço gráfico da função tangente:



A restrição restrição principal da função tangente

$$\begin{array}{rccl} h & : \ ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \operatorname{tg} x \end{array}$$

é injetiva. A inversa de h é chamada função arco tangente, denota-se por arctg , e define-se do seguinte modo

$$\begin{array}{rcccl} \operatorname{arctg} & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & y = \operatorname{arctg} x \end{array}$$

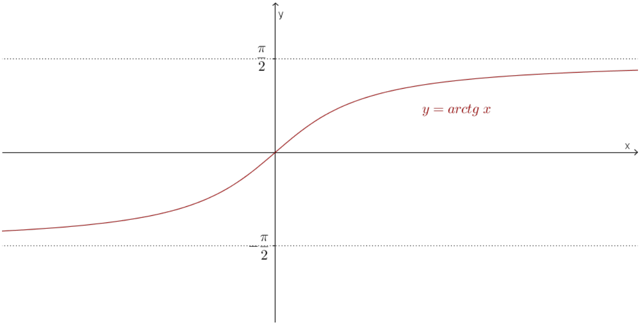
onde

$$y = \operatorname{arctg} x \quad \text{sse} \quad \operatorname{tg} y = x, \quad \text{para todos os } x \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ y \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[.$$

$\Big\downarrow$ lê-se

arco cuja tangente é x

Esboço gráfico da função arco tangente:



Inversa da função cotangente

Função cotangente:
$$\begin{array}{rcccc} \text{cotg} & : & D \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \text{cotg}\, x = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x} \end{array}$$

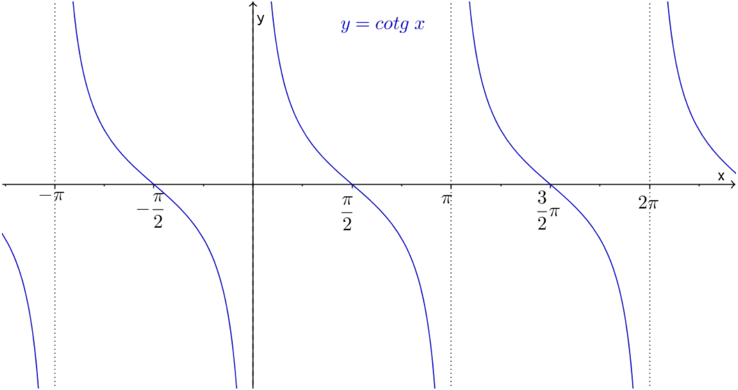
Algumas propriedades da função cotangente:

- Domínio: $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
- Contradomínio: $\mathbb{R}$
- Função periódica de período π, isto é,

$$\text{cotg}\, x = \text{cotg}\,(x + k\pi), \quad \text{qualquer que seja } \ x \in D \ \text{ e } \ k \in \mathbb{Z}.$$

- Função ímpar
- Não é injetiva.
- $(\text{cotg}\, x)' = -\dfrac{1}{\text{sen}^2 x}$, para todo o $x \in D$

- Esboço gráfico da função cotangente:



A restrição principal da função cotangente

$$\begin{array}{rcccc} h & : &]0,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \operatorname{cotg} x \end{array}$$

é injetiva. A inversa de h é chamada função arco cotangente, denota-se por arccotg , e define-se do seguinte modo

$$\begin{array}{rcccc} \operatorname{arccotg} & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & y = \operatorname{arccotg} x \end{array}$$

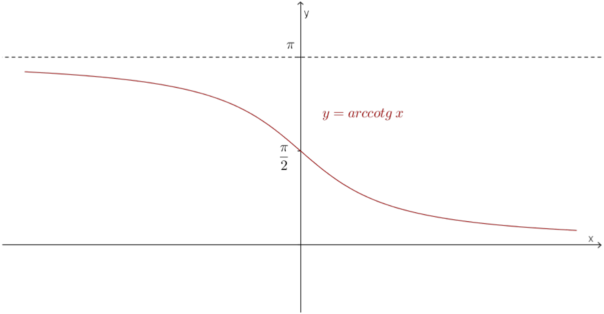
onde

$$y = \operatorname{arccotg} x \quad \text{sse} \quad \operatorname{cotg} y = x, \quad \text{para todos os } x \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ y \in]0,\pi[.$$

$\downarrow$ lê-se

arco cuja cotangente é x

Esboço gráfico da função arco cotangente:



Inversa da função secante

Função secante:

$$\begin{array}{rccc} \sec : & D \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{\cos x} \end{array}$$

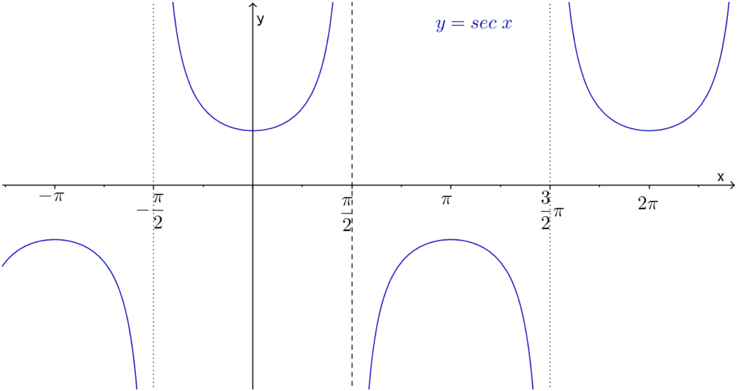
Algumas propriedades da função secante:

- Domínio: $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
- Contradomínio: $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$
- Função periódica de período 2π, isto é,

$$\sec x = \sec(x + 2k\pi), \quad \text{qualquer que seja} \ \ x \in D \ \ \text{e} \ \ k \in \mathbb{Z}.$$

- Função par;
- Não é injetiva;
- $(\sec x)' = \operatorname{tg} x \sec x$, qualquer que seja $x \in D$.

- Esboço gráfico da função secante:



A restrição restrição principal da função secante

$$\begin{array}{rcl} h \ : \ [0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sec x \end{array}$$

é injetiva. A inversa de h é chamada função arco secante, denota-se por arcsec , e define-se do seguinte modo

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{arcsec} \ : \ ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = \operatorname{arcsec} x \end{array}$$

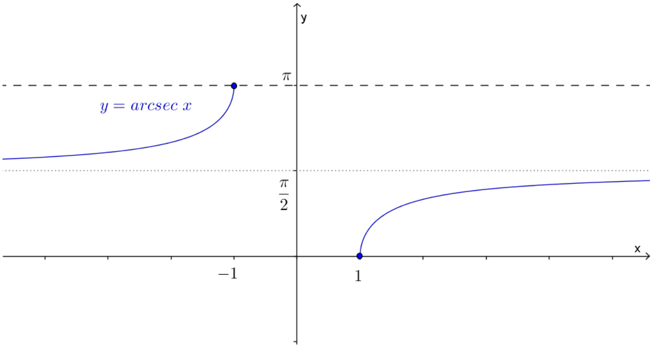
onde, para todos os $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ e $y \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$,

$$y = \operatorname{arcsec} x \quad \text{sse} \quad \sec y = x, \ .$$

$\big\downarrow$ lê-se

arco cuja secante é x

Esboço gráfico da função arco secante:



Inversa da função cossecante

Função cossecante:

$$\begin{array}{rcccl} \text{cosec} & : & D \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & y = \text{cosec}\, x = \frac{1}{\text{sen}\, x} \end{array}$$

Algumas propriedades da função cossecante:

- Domínio: $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\}$
- Contradomínio: $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$
- Função ímpar
- $(\text{cosec}\ x)' = -\,\text{cotg}\ x\, \text{cosec}\ x$, para todo o $x \in D$.

A função cossecante não é injetiva em D, mas é-o em $[-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}]$ (restrição principal da cossecante). À inversa dessa restrição chama-se função arco cossecante. (Escreva a sua definição formal!)

Diferenciabilidade (breve recapitulação)

Definição:

Sejam $f\colon D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in D_f$ um ponto interior de D_f. Caso exista o limite

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \text{ (podendo ser } +\infty \text{ ou } -\infty\text{)},$$

a $f'(a)$ chama-se derivada da função f no ponto a. Neste caso, f diz-se derivável em a. Se $f'(a)$ for finita dizemos que f é diferenciável em a.

Observações:

- $a \in \mathbb{R}$ é um ponto interior de $S \subset \mathbb{R}$ se existir uma vizinhança de a contida em S, *i.e.*, se, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $V_\varepsilon(a) \subset S$.
- f diz-se diferenciável num subconjunto aberto[a] de D_f se for diferenciável em cada um dos pontos.

[a] conjunto constituído apenas por pontos interiores, por exemplo um intervalo aberto

Teorema da derivada da função inversa:

Sejam $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função estritamente monótona e contínua e f^{-1} a inversa de f. Se f é diferenciável em $x_0 \in]a, b[$ e $f'(x_0) \neq 0$, então f^{-1} é diferenciável em $y_0 = f(x_0)$ e

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \, .$$

Exercício:

Sendo $f : [1, 4] \to \mathbb{R}$ contínua e estritamente crescente tal que $f(2) = 7$ e $f'(2) = \frac{2}{3}$, podemos concluir que existe $(f^{-1})'(7)$? Caso exista, qual é o seu valor?

Derivação das funções trigonométricas inversas

Resulta do Teorema da derivada da função inversa que:

1. $(\operatorname{arcsen} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ , \quad \forall x \in]-1,1[$

2. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ , \quad \forall x \in]-1,1[$

3. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}\ , \quad \forall x \in \mathbb{R}$

4. $(\operatorname{arccotg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}\ , \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Exercício:

Prove as igualdades de 1 a 4, usando o Teorema da Derivada da Função Inversa.

Extremos locais de uma função

Definições:

Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D_f$.

- a é um maximizante local de f se existir $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in V_\delta(a) \cap D_f \quad f(x) \leq f(a)\,.$$

  Nesse caso, $f(a)$ diz-se um máximo local de f.
- a é um minimizante local de f se existir $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in V_\delta(a) \cap D_f \quad f(a) \leq f(x)\,.$$

  Neste caso, $f(a)$ diz-se um mínimo local de f.
- Máximos e mínimos locais chamam-se extremos locais.
- Maximizantes e minimizantes locais chamam-se extremantes locais.

Extremos globais de uma função

Definições:

Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D_f$.

- a é um maximizante global de f se

$$\forall x \in D_f \quad f(x) \leq f(a)$$

  Nesse caso, $f(a)$ diz-se o máximo global de f.

- a é um minimizante global de f se

$$\forall x \in D_f \quad f(a) \leq f(x)\ .$$

  Neste caso, dizemos que $f(a)$ é o mínimo global de f.

- Máximo e mínimo global chamam-se extremos globais.
- Maximizantes e minimizantes globais chamam-se extremantes globais.

Continuidade (breve recapitulação)

Definições:

Sejam $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D_f$ e $S \subset D_f$.

(i) f é contínua em x_0 se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe e é finito e $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Caso contrário, dizemos que f é descontínua em x_0.

(ii) f é contínua em S se f é contínua em todo o ponto de S.

Observações (continuidade em intervalos):

1. Se $S = [a, b]$ podemos falar em continuidade lateral:
   se $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ dizemos que f é contínua à direita em a e
   se $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ dizemos que f é contínua à esquerda em b;
2. Se $S = [a, +\infty[$ (resp. $S =]-\infty, a]$) podemos falar de continuidade à direita em a (resp. continuidade à esquerda em a);
3. Sendo S um intervalo, f é contínua em S se f é contínua no interior de S e contínua lateralmente nos extremos de S que pertencem a S.

Teorema de Bolzano

Teorema dos valores intermédios ou Teorema de Bolzano:

Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função. Se f é contínua em $[a,b]$ e $f(a) \neq f(b)$, então,
para todo o y entre $f(a)$ e $f(b)$, existe $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = y$.

Corolário:

Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema de Weierstrass

Teorema de Weierstrass (ou Teorema dos valores mínimo e máximo):

Sejam $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ e $[a, b] \subset D_f$, onde $a < b$. Se f é contínua em $[a, b]$, então f atinge em $[a, b]$ máximo e mínimo globais (isto é, existem $x_1,\ x_2 \in [a, b]$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2),\ \ \forall x \in [a, b]$).

Observação sobre o Teorema de Weierstrass:

- Esses máximo e mínimo globais poderão ser atingidos nos extremos do intervalo.

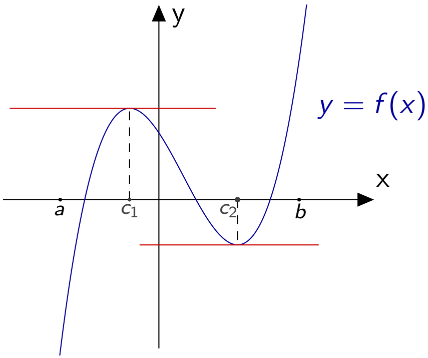
Condição necessária de existência de extremo local

(em pontos onde f é diferenciável)

Proposição (Teorema de Fermat):

Seja $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $c \in]a, b[$. Se c é um extremante local de f então $f'(c) = 0$.

Ilustração gráfica:



Observações:

- O recíproco da proposição do slide anterior não é verdadeiro. De facto, existem funções com derivada nula em determinado ponto e esse ponto não é extremante.
  Veja, por exemplo, $f(x) = x^3$, no ponto $x = 0$.
- Pode acontecer que a derivada de f não exista num dado ponto x_0, mas x_0 ser extremante. Veja os seguintes exemplos:
  - $f(x) = |x|$, no ponto $x_0 = 0$.
  - $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$, no ponto $x_0 = 0$

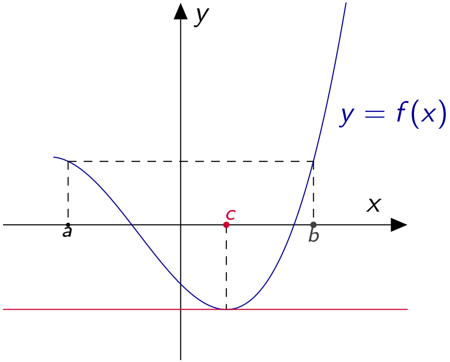
Definição:

Seja $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $c \in int(D_f)$. Se $f'(c) = 0$ dizemos que c é ponto crítico de f.

Teorema de Rolle :

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$. Se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$

Ilustração Gráfica:



Corolários do Teorema de Rolle

Corolário:

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$. Então entre dois zeros de f existe pelo menos um zero de f'.

Corolário:

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$. Então entre dois zeros consecutivos de f' existe, no máximo, um zero de f.

Exercício:

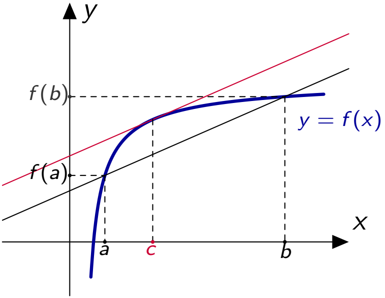
Mostrar que a função definida por $f(x) = \operatorname{sen} x - x$ tem um único zero no intervalo $[-\pi\,,\,\pi]$.

Teorema de Lagrange:

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$. Então, existe $c \in]a, b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

Ilustração Gráfica:



Consequências do Teorema de Lagrange (sobre a monotonia)

Proposição:

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em I e diferenciável em $int(I)$. Então

(i) Se $f'(x) = 0$, para todo o $x \in int(I)$, então f é constante em I.

(ii) Se $f'(x) \geq 0$, para todo o $x \in int(I)$, então f é crescente em I.

(iii) Se $f'(x) \leq 0$, para todo o $x \in int(I)$, então f é decrescente em I.

(iv) Se $f'(x) > 0$, para todo o $x \in int(I)$, então f é estritamente crescente em I.

(v) Se $f'(x) < 0$, para todo o $x \in int(I)$, então f é estritamente decrescente em I.

Condição suficiente para a existência de extremo local para função contínua (em ponto onde esta poderá ser não diferenciável):

Proposição:

Seja $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b] \subset D_f$ e diferenciável em $]a, b[$, exceto possivelmente em $c \in]a, b[$. Então,

(i) se

$$f'(x) > 0, \quad \text{para todo o } \ x < c \quad \text{e} \quad f'(x) < 0, \quad \text{para todo o } \ x > c,$$

então, $f(c)$ é um máximo local de f ;

(ii) se

$$f'(x) < 0, \quad \text{para todo o } \ x < c \quad \text{e} \quad f'(x) > 0, \quad \text{para todo o } \ x > c,$$

então, $f(c)$ é um mínimo local de f .

Condição suficiente de segunda ordem para que um ponto crítico seja extremante

Proposição:

Seja c um ponto crítico de f num intervalo $]a\,,\,b[$. Admitamos que f é contínua em $]a\,,\,b[$ e f'' existe e é finita em todo o ponto de $]a\,,\,b[$. Então verificam-se as condições seguintes:

(i) se $f''(c) > 0$, então f admite em c um mínimo local;

(ii) se $f''(c) < 0$, então f admite em c um máximo local.

Teorema de Cauchy:

Sejam f e g duas funções contínuas em $[a, b]$ e diferenciáveis em $]a, b[$. Se $g'(x) \neq 0$, para todo o $x \in]a, b[$, então existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} .$$

Observação:

Do Teorema de Cauchy pode estabelecer-se uma regra — Regra de Cauchy — de grande utilidade no cálculo de limites quando ocorrem indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$.
Nos cinco slides seguintes enunciam-se as várias formas dessa regra.

Regra de Cauchy

Proposição (RC.1):

Sejam f e g funções diferenciáveis em $I =]a, b[$ tais que, para todo o $x \in I$, $g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$.
Se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a^+} g(x) \quad \text{são ambos nulos ou ambos infinitos}$$

e existe o limite

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

então

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ .$$

Regra de Cauchy (cont.)

Proposição (RC.2):

Sejam f e g funções diferenciáveis em $I =]a, b[$ tais que, para todo o $x \in I$, $g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$.
Se

$$\lim_{x \to b^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to b^-} g(x) \quad \text{são ambos nulos ou ambos infinitos}$$

e existe o limite

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

então

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \, .$$

Regra de Cauchy (cont.)

Proposição (RC.3):

Sejam $I =]a, b[$ e $c \in I$. Sejam f e g funções definidas em $I \setminus \{c\}$ e diferenciáveis em $I \setminus \{c\}$, tais que $g(x) \neq 0$, para todo o $x \in I \setminus \{c\}$. Se

$$g'(x) \neq 0, \quad \text{para todo o} \quad x \in I \setminus \{c\},$$

$$\lim_{x \to c} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to c} g(x) \quad \text{são ambos nulos ou ambos infinitos}$$

e existe o limite

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

então

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Regra de Cauchy (cont.)

Proposição (RC.4):

Sejam f e g funções definidas em $I =]a, +\infty[$ e diferenciáveis em I, com $g(x) \neq 0$, para todo o $x \in I$.
Suponhamos que $g'(x) \neq 0$, para todo o $x \in I$.
Se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) \quad \text{são ambos nulos ou ambos infinitos}$$

e

$$\text{existe} \ \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

então

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Regra de Cauchy (cont.)

Proposição (RC.5):

Sejam f e g funções definidas em $I =]-\infty, b[$ e diferenciáveis em I, com $g(x) \neq 0$, para todo o $x \in I$.
Suponhamos que $g'(x) \neq 0$, para todo o $x \in I$.
Se

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} g(x) \quad \text{são ambos nulos ou ambos infinitos}$$

e

$$\text{existe} \lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

então

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$