Cálculo I

Problemas e Exercícios

2006/2007

Departamento de Matemática
Universidade de Aveiro

Conteúdo

Capítulo 1

Estudo de funções reais de variável real

1.1 Enunciados

1. Mostre que, para todos os $x,\ y \in \mathbb{R}$,

   (a) $|x+y| \leq |x|+|y|$

   (b) $|x-y| \leq |x|+|y|$

   (c) $|x-y| \geq |x|-|y|$

   (d) $|x+y| \geq ||x|-|y||$

   (e) $|x.y| = |x|.|y|$

   (f) $|x/y| = |x|/|y|,\ y \neq 0$

2. Em cada uma das alíneas que se seguem determine $f(x)$ sabendo que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e:

   (a) $f(x+1) = x^2+3x+5$, para todo o $x \in \mathbb{R}$

   (b) $f(3x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, para todo o $x \in \mathbb{R}$

3. Determine o domínio das seguintes funções:

   (a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{4+\sqrt{3x}}}$

   (b) $f(x) = \dfrac{3+2x^2}{\operatorname{tg} x - 1}$

   (c) $f(x) = \dfrac{1-\ln x}{2+\ln(3x-1)}$

   (d) $f(x) = \sqrt{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-x}}$

   (e) $f(x) = \sqrt{(\operatorname{sen} x - 1)\log_{1/2}(4-x)}$

   (f) $f(x) = \sqrt{\sqrt{2}-2|\operatorname{sen} x|}$

   (g) $f(x) = \ln(|2x-1|-|x|)$

   (h) $f(x) = \ln(\ln x)$

(i) $f(x) = \ln \dfrac{2+x}{2-x}$

4. Determine os valores de $m \in \mathbb{R}$ para os quais o domínio da seguinte função é $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \sqrt{mx^2 + (2m+1)x + m + 2}\,.$$

5. Determine o domínio e os zeros das seguintes funções:

   (a) $f(x) = \dfrac{|2x| - |-x+1|}{x^2+1}$

   (b) $g(x) = \dfrac{|x^3 - 2x + 1|}{|x-1| + |x^2 - 4x + 3|}$

6. Resolva as seguintes equações e inequações:

   (a) $4\ln(x/2) + 3\ln(x/3) = 5\ln(x) - \ln(27)$

   (b) $x\ln x = ax, a \in \mathbb{R}$

   (c) $16 \times 2^{|x+1|} = 4^{x+2}$

   (d) $\dfrac{1}{3^{x-1}}(x^2 - 3) < 0$

   (e) $x\log_{1/2}(1+x) < x$

   (f) $x10^x + 2\,.10^x = 0$

7. Sejam f e g duas funções reais de variável real de domínio $\mathbb{R}$ tais que $f(x) = 0$ se e só se $x = 1$ ou $x = 2$ e $g(x) = \cos(2x-1)$. Determine $x \in \mathbb{R}$ tal que $(f \circ g)(x) = 0$.

8. Sejam f e g duas funções reais de variável real definidas por $f(x) = \sqrt{x+1}$ e $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Prove que $(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{x+2}$ e que o domínio de $g \circ f$ é $[-1, +\infty[$.

9. Sejam f e g duas funções reais de variável real tais que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x(x^2 - 3x + 3)$ e $f(g(x)) = 1 - x^6$. Caracterize a função g.

   Sugestão: Observe que $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

10. Considere o seguinte

    Teorema: Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real de variável real. Se D é simétrico em relação à origem, então existem duas funções f_P e f_I tais que

    i) $f_P : D \longrightarrow \mathbb{R}$ é par;

    ii) $f_I : D \longrightarrow \mathbb{R}$ é ímpar;

    iii) $f = f_P + f_I$.

    Mostre que:

    (a) as funções dadas por $f_P(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ e por $f_I(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ satisfazem a tese do teorema;

(b) as funções f_P e f_I definidas pelo teorema são únicas (e por isso são designadas, respectivamente, *parte par* e *parte ímpar* de f.)

11. Considere o polinómio $p(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

 (a) Prove que $p(x)$ tem um zero no intervalo $]0,1[$.

 (b) Localize, em intervalos cujos extremos são inteiros consecutivos, os outros zeros de $p(x)$.

12. Seja h uma função real de variável real definida da seguinte forma:

$$h(x) = \begin{cases} -x+3 \text{ se } x < 1 \\ 1-x \quad \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

 (a) Calcule $h(-1)$ e $h(2)$.

 (b) Prove que para todo o $x \in [-1,2]$ se tem $h(x) \neq 1$. Será que esta conclusão contradiz o Teorema de Bolzano? Justifique.

13. Sejam $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real de variável real estritamente crescente e $x_1, x_2 \in D$. Demonstre a seguinte implicação

$$f(x_1) < f(x_2) \Longrightarrow x_1 < x_2 \, .$$

14. Seja f uma função real definida e contínua no intervalo $[0,1]$. Supondo que, para todo o $x \in [0,1]$, $0 \leq f(x) \leq 1$, mostre que f tem um ponto fixo no intervalo $[0,1]$, isto é, mostre que existe pelo menos um ponto $c \in [0,1]$ para o qual $f(c) = c$.

 Sugestão: Aplicar o Teorema de Bolzano à função g definida por $g(x) = f(x) - x$.

15. Prove que se g for uma função definida numa vizinhança da origem (excluindo eventualmente a origem) tal que $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$ então

$$\lim_{x \to 0} g(x) \operatorname{sen}(1/x) = 0 \, .$$

16. Sejam

 $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ e
 $q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$

 dois polinómios de coeficientes reais de graus n e m, respectivamente. Mostre que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \, .$$

17. Justifique que não existem os seguintes limites:

 (a) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \operatorname{tg} x$

(b) $\lim_{x\to 0} f(x)$, onde $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x) & \text{se } x < 0 \\ (1+x)^x & \text{se } x > 0 \end{cases}$

(c) $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$

18. Sendo
$$f(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{se } x \leq 2 \\ 1-x^2 & \text{se } x > 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} 10 & \text{se } x \leq 2 \\ x^2+3x & \text{se } x > 2 \end{cases}$$
calcule

(a) $\lim_{x\to 2} (f+g)(x)$

(b) $\lim_{x\to 2} (f-g)(x)$

(c) $\lim_{x\to 2} (f\times g)(x)$

(d) $\lim_{x\to 2} (f/g)(x)$

(e) $\lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)}{-x-1}$

(f) $\lim_{x\to -1^-} \frac{f(x)}{-x-1}$

19. Identifique o erro cometido na igualdade que apresentamos a seguir
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(1-1/x)}{x\sqrt{1-4/x^2}}$$

20. Calcule,caso exista, o limite considerado em cada uma das alíneas seguintes:

(a) $\lim_{x\to a} \frac{x^5-a^5}{x-a}$

(b) $\lim_{x\to 1} \frac{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1}{x-1}$

(c) $\lim_{t\to -2} \frac{t^3+2t^2+4t+8}{t^3-4t}$

(d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x-1}{\sqrt{x}+1}$

(e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+3}$

(f) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-x+8}-\sqrt{x^2-x-1}\right)$

(g) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^3+3}\right)$

(h) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x}}{x-\sqrt{x+5}}$

(i) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4+2x-1}{x+3}$

(j) $\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$

(k) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^3}\right)$

(l) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2x+51}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

21. Estude quanto à continuidade as funções seguintes:

(a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(x-1)}{x^2-x-2} & \text{se } x>2 \\ 1/3 & \text{se } x=2 \\ \dfrac{e^{x-2}-1}{3x-6} & \text{se } x<2 \end{cases}$

(b) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}(x^2-\sqrt[3]{x})}{x^2+5}$

(c) $f(t)=\begin{cases} \operatorname{sen}\left(t-\dfrac{\pi}{6}\right) & \text{se } t\geq 0 \\ \dfrac{2t}{1-e^{4t}} & \text{se } t<0 \end{cases}$

(d) $f(x)=\dfrac{|2x^2-2x-4|}{x^2(1+x)(x-3)}$

(e) $f(x)=\begin{cases} x^2\cos(1/x) & \text{se } x>0 \\ 0 & \text{se } x=0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}^2 x-x^2\cos(1/x)}{x^2} & \text{se } x\in]-\pi,0[\end{cases}$

22. Defina, no intervalo $[-1,1]$, a função g sabendo que g tem contradomínio $[0,\pi]$, $f(x)=2\cos x-1$ e $(f\circ g)(x)=x^2$.

23. Em cada uma das alíneas seguintes defina a função inversa de f. Nos casos que envolvem funções trigonométricas, considere as correspondentes restrições principais.

(a) $f(x)=\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

(b) $f(x)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2\arcsin(1-x)}{3}$

(c) $f(x)=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2-x}\right)$

(d) $f(x)=\dfrac{5\ln(x-3)-1}{4}$

(e) $f(x)=e^{1-2x}$

(f) $f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+2}$

24. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}+2k-1/2 & \text{se } x>0 \\ k & \text{se } x=0 \\ (2k^2+k)\dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{se } x<0 \end{cases}$$

(a) Determine $k \in \mathbb{R}$ por forma que f seja contínua em $x = 0$.

(b) Mostre que para todo o $x < 0$, $\mathrm{e}^{-1/x^2} \in]0,1[$.

(c) Supondo $k = 1/2$, defina a inversa da restrição de f a $\mathbb{R}^+$.

25. Considere a função $f: \mathbb{R}\setminus[-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + \alpha\dfrac{|x|}{x}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Determine os valores de α para os quais f é invertível.

(b) Caracterize, quando exista, a função inversa de f.

26. Sendo f definida e contínua em $[0,1[$, diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes proposições:

(a) Se $f(1/4) = 5$ e $f(3/4) = -2$, então existe $x \in [0,1[$ tal que $f(x) = 0$.

(b) Se $f(1/4) = 5$ e $f(3/4) = 3$, então existe $x \in [0,1[$ tal que $f(x) = 4$.

27. (a) Sejam f e g duas funções reais de variável real tais que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xg(x)$. Prove que se g é contínua em $x = 0$, então f é diferenciável em $x = 0$ e $f'(0) = g(0)$.

(b) Recorrendo à alínea anterior determine $h'(0)$, sendo:

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x|x| \end{array}$$

28. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo tal que $0 \in \operatorname{int}(I)$.
Sejam $f,\ g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções tais que, para todo o $x \in I$,

$$-x^2 \leq f(x) \leq x^2 \qquad \text{e} \qquad x \leq g(x) \leq x + x^2\ .$$

Prove que $f'(0) = 0$ e $g'(0) = 1$.

29. Sejam $f,\ g,\ h : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ três funções tais que, para todo o $x \in D$,

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)\ .$$

Seja $a \in D$ um ponto do interior de D tal que $f(a) = h(a)$.

Prove que se existem $f'(a)$ e $h'(a)$ e $f'(a) = h'(a)$, então existe $g'(a)$ e $g'(a) = f'(a) = h'(a)$.

30. Utilizando a definição de derivada de uma função num ponto prove que:

(a) $(x^n)' = nx^{n-1}$, para todos os $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$

(b) sendo $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $(a^x)' = a^x \ln a$, para todo o $x \in \mathbb{R}$

(c) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ para todo o $x \in \mathbb{R}\setminus\{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

31. Seja f uma função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x > 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ x^2 - x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Indique, justificando, o valor lógico da proposição seguinte:

a função derivada de f é

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 2x - 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

32. Mostre que a derivada de uma função par [resp. ímpar] é uma função ímpar [resp. par].

33. Determine a derivada de cada uma das funções seguintes:

    (a) $f(x) = (1 + \sqrt[3]{x})^3$
    (b) $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$
    (c) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos x)$
    (d) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$
    (e) $f(x) = \dfrac{x - \operatorname{tg} x}{x + \operatorname{cotg} x}$
    (f) $f(x) = (5x)^x$, com $x > 0$
    (g) $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$
    (h) $f(x) = \operatorname{arccotg}(\operatorname{sen}(4x^3))$
    (i) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$
    (j) $f(x) = \operatorname{arcsen} \dfrac{1}{x^2}$

34. Sejam f e g duas funções reais de variável real definidas por $f(x) = x^3$ e $g(x) = \operatorname{sen} x$. Determine, utilizando o teorema da derivada da função composta ou o teorema da derivada da função inversa, as derivadas seguintes:

    (a) $(f \circ g)'(\pi/4)$
    (b) $(g \circ f)'(x)$, para $x \in \mathbb{R}$
    (c) $(f^{-1})'(x)$, para $x \in \mathbb{R}$
    (d) $(g^{-1})'(0)$.

35. Para cada uma das funções seguintes calcule $(f^{-1})'(x)$ utilizando o teorema da derivada da função inversa.

    (a) $f(x) = x^3 + 1$
    (b) $f(x) = \ln(\operatorname{arcsen} x)$, com $x \in]0, 1[$
    (c) $f(x) = \dfrac{x^2}{1 - x^2}$, com $x \in] - 1, 0[$
    (d) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ 1 - x^3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

36. Considere as funções f e g reais de variável real definidas da seguinte forma:
$f(x) = \ln x$ e $g(x) = \dfrac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}$.
Calcule $(f \circ g)'(x)$ de duas formas diferentes.

37. Determine $(f^{-1})'(1)$, sendo f a função definida por $f(x) = (x^3+2)^4$, para todo o $x \geq \sqrt[3]{-2}$.

38. Determine as equações cartesianas das rectas tangente e normal ao gráfico da função definida por $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ no ponto de abcissa $x = 2$.

39. Mostre que a normal à circunferência de equação $x^2+y^2 = r^2$ em qualquer ponto passa pelo seu centro.

40. Mostre que cada uma das funções seguintes é contínua no domínio considerado, mas não é aí diferenciável.

    (a) $f(x) = 1 + |\operatorname{sen} x|$, com $x \in [0, 2\pi]$

    (b) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e} + \ln(1-x) & \text{se } x < 0 \\ \mathrm{e}^{1-x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

41. Considere a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{1/x}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Estude f quanto à diferenciabilidade em $x = 0$.

42. Para cada $p \in \mathbb{Z}$ seja f_p a função definida por

$$f_p(x) = \begin{cases} x^p \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Indique para que valores de p a função f_p é:

    (a) uma função contínua;

    (b) uma função derivável;

    (c) uma função diferenciável;

    (d) uma função continuamente diferenciável, isto é, uma função com derivada contínua.

43. Sendo $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$, $x \in \mathbb{R}$, mostre que f possui exactamente uma raiz no intervalo $]1, 3]$.

44. Mostre que se $a > 0$ a equação $x^3 + ax + b = 0$ não pode ter mais que uma raiz real, qualquer que seja $b \in \mathbb{R}$.

45. Prove que a equação $4x^3 - 6x^2 + 1 = 0$ tem 3 zeros distintos e localize-os em intervalos de $\mathbb{R}$ cujos extremos sejam números inteiros consecutivos.

46. Verifique que $x=0$ é raiz da equação $e^x = 1+x$. Mostre que esta equação não pode ter outra raíz real.

47. Prove que:

    (a) para todo o $x \in]0,1[$ se tem $\text{arcsen}\, x > x$;

    (b) para todo o $x \geq 0$ se tem $\text{sen}\, x \leq x$;

    (c) para todo o $x > 0$ se tem $\ln x < x$.

48. Seja f uma função real de variável real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{se } x > 0 \\ \text{sen}(5x) - x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

    (a) Estude f quanto à continuidade.

    (b) Averigue se a função f é diferenciável para $x=0$.

    (c) Enuncie o Teorema de Rolle. Mostre que é aplicável à função f no intervalo $[0,1]$ e determine o ponto b desse intervalo tal que $f'(b) = 0$.

49. Seja $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função que verifica as condições seguintes:

    - f é contínua no seu domínio;
    - f é diferenciável em $\mathbb{R}^+$;
    - $f(0) = 0$;
    - f' é monótona crescente.

    Prove que a função g definida por $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$, é monótona crescente.

50. Sejam f e g funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$ tais que $f'(x) > g'(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$ e $f(a) = g(a)$. Prove que:

    (a) $f(x) > g(x)$, para todo o $x > a$

    (b) $f(x) < g(x)$, para todo o $x < a$.

51. Seja f uma função real de variável real. Mostre que se f admite terceira derivada no intervalo $[a,b]$ e $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$, então existe $c \in]a,b[$ tal que $f'''(c) = 0$.

52. Mostre que existe

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x - \text{sen}\, x}{x + \text{sen}\, x},$$

    mas não pode aplicar-se para o seu cálculo a regra de Cauchy.

53. Calcule, caso exista, o limite considerado em cad uma das alíneas que se seguem:

    (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2 \frac{x}{3}}{x^2}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-x}{x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\operatorname{arcsen} x}{3x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x \operatorname{sen} x}$

(e) $\lim\limits_{x\to -\pi/4} \dfrac{\cos(2x)}{1+\operatorname{cotg} x}$

(f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^p}$ com $p \in \mathbb{R}^+$

(g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{\ln(2-x)}$

(h) $\lim\limits_{x\to +\infty} [\ln((x+1)^p) - \ln(x^p)]$ com $p \in \mathbb{R}$

(i) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}(2x)}$

(j) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$

54. Determine, caso existam, os extremos locais das funções:

(a) $f(x) = (x-2)^{2/3}(2x+1)$

(b) $f(x) = 1-(x-2)^{4/5}$

(c) $f(x) = x\mathrm{e}^x$

(d) $f(x) = |\operatorname{sen} x|$

(e) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2}+1 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 4 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(g) $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x = 1/n \\ 0 \text{ se } x \neq 1/n \end{cases}$, com $n \in \mathbb{N}$

(h) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$

(i) $f(x) = 2\operatorname{sen} x + \cos(2x),\ \ x \in \left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right]$

(j) $f(x) = \begin{cases} 2x + \dfrac{1}{\pi}\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) & \text{se } x < 1 \\ x^2-6x+7 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

55. Exprima a área, A, de um rectângulo, como função de um dos seus lados, supondo o perímetro igual a 20. Faça um esboço do gráfico da função que define a área no intervalo $[0,10]$. Determine, analiticamente e graficamente, o valor do comprimento dos lados que torna a área máxima.

56. Sabendo que $x+y=a$, com a constante, calcule x e y por forma a que o seu produto seja máximo.

57. Sabendo que o produto de dois números positivos x e y é igual a uma constante k, determine para que valores de x e y é mínima a sua soma.

58. Um rectângulo está inscrito num semi-círculo de raio fixo r. Exprima a área, A, do rectângulo em função da sua base, x, e determine o valor de x para o qual a área é máxima.

59. Uma caixa rectangular sem tampa, de capacidade v fixa, tem base quadrada de lado x. Exprima a área total da caixa em função de x e determine o valor de x para o qual a área é mínima.

60. Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$.

    (a) Calcule, aplicando a definição, a derivada da função no ponto de abcissa π.

    (b) Defina analiticamente a tangente à curva nesse ponto.

    (c) Represente, sob a forma de intervalos de números reais, o conjunto solução da condição $f'(x) > 0$.

61. Considere a função f definida por

$$f(x) = \frac{x^3 + kx^2 + 1}{x^2 - 2x} \ ,$$

onde k é um parâmetro real.

    (a) Determine k por forma que o gráfico da função tenha por assímptota da sua parte direita a recta de equação $y = x + 1$.

    (b) Indique a posição do gráfico relativamente aquela assímptota.

62. (a) Sejam n um número natural par e f a função definida por $f(x) = x^n$. Mostre que o gráfico de f não admite pontos de inflexão.

    (b) Seja $m > 2$ um número natural ímpar. Para cada m seja g a função definida por $g(x) = x^m$. Prove que g admite um único ponto crítico mas que, no entanto, g não admite extremos locais.

63. Determine as constantes reais a e b por forma que o gráfico da função

$$f(x) = ax^2 + \frac{b}{x}$$

tenha um ponto de inflexão para $x = 1$ e que a tangente ao gráfico neste ponto de inflexão seja paralela à recta de equação $y = 3x + 1$.

64. Sendo k um número real diferente de zero, considere a função f definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ do modo seguinte

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(\pi x)}{kx} & \text{se } x < 0 \\ \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Calcule os limites laterais de f no ponto zero e indique o valor de k para o qual é possível obter um prolongamento por continuidade de f a $\mathbb{R}$.

65. Faça o estudo e um esboço do gráfico das funções seguintes:

    (a) $f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 2}$

    (b) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ com $x \in [0, 2\pi]$

    (c) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

    (d) $f(x) = \mathrm{e}^{|\ln|x||}$

    (e) $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-x}$

    (f) $f(x) = x^2 \ln|x|$

66. Utilizando um contra-exemplo mostre que são falsas as seguintes proposições.

    (a) Se uma função não é diferenciável num ponto, então não é contínua nesse ponto.

    (b) Toda a função contínua num ponto é diferenciável nesse ponto.

    (c) Se $f' = g'$ então $f = g$.

    (d) Se f possui um máximo local em x_0, então $f'(x_0)$ existe e é nula.

1.2 Soluções

1. **(a)** Atenda a que, para todo o $a \in \mathbb{R}$, se tem $-|a| \leq a \leq |a|$; **(b)** Usar a alínea anterior;

(c) Fazer $x = y + (x - y)$ e usar a alínea a);

(d) Fazer $x = x + y - y$ e $y = x + y - x$ e usar a alínea a);

(e) Analisar os seguintes casos: $x \geq 0 \wedge y \geq 0$, $x \leq 0 \wedge y \geq 0$, $x \geq 0 \wedge y \leq 0$, $x \leq 0 \wedge y \leq 0$;

(f) Fazer $\dfrac{x}{y} = x.\dfrac{1}{y}$ e usar a alínea e).

2. **(a)** $f(x) = x^2 + x + 3$, para todo o $x \in \mathbb{R}$ **(b)** $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+9}$, para todo o $x \in \mathbb{R}$

3. **(a)** $[2, +\infty[$; **(b)** $\left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi \wedge x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$;

(c) $\left]\dfrac{1}{3}, \dfrac{1+e^2}{3e^2}\right[\cup \left]\dfrac{1+e^2}{3e^2}, +\infty\right[$; **(d)** $[0, +\infty[$; **(e)** $]-\infty, 3]$;

(f) $\cup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \dfrac{\pi}{4} + k\pi\right]$

(g) $\left]-\infty, \dfrac{1}{3}\right[\cup]1, +\infty[$; **(h)** $]1, +\infty[$; **(i)** $]-2, 2[$.

4. $m \geq 1/4$.

5. $D_f = \mathbb{R}$ e f tem zeros $x = 1$ ou $x = 1/3$; $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e g tem zeros $x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ou $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

6. **(a)** $x = 4$; **(b)** $x = \mathrm{e}^a$; **(c)** $x = 1$; **(d)** $x \in]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$;

(e) $x \in]-1, -1/2[\cup]0, +\infty[$; **(f)** $x = -2$.

7. $x = \dfrac{1}{2} + k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

8. —

9.
$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(x) = 1 - x^2 \end{array}$$

10. —

11. **(a)** —; **(b)** Um zero pertence a $]-1, 0[$ e o outro a $]2, 3[$.

12. **(a)** $h(-1) = 4$, $h(2) = -1$; **(b)** Não, já que a função não é contínua para $x = 1$.

13. —

14. —

15. —

16. —

17. —

18. **(a)** 7; **(b)** -13; **(c)** -30; **(d)** $\dfrac{-3}{10}$; **(e)** $-\infty$; **(f)** $+\infty$.

19. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(1-\frac{1}{x})}{-x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}$

20. **(a)** $5a^4$; **(b)** 1; **(c)** 1; **(d)** $+\infty$; **(e)** $+\infty$; **(f)** 0; **(g)** $-\infty$; **(h)** 0;

(i) $-\infty$ **(j)** $1/2$ **(k)** não existe **(l)** $\sqrt{2}$

21. **(a)** $D_f = \mathbb{R}$ e f é contínua em $\mathbb{R}$. **(b)** Tem domínio $\mathbb{R}$ e é aí contínua.

(c) Tem domínio $\mathbb{R}$ e é aí contínua. **(d)** Tem domínio $\mathbb{R} \setminus \{0, -1, 3\}$ e é aí contínua.

(e) Tem domínio $]-\pi, +\infty[$ e é contínua em $]-\pi, 0[\cup]0, +\infty[$.

22. $\begin{array}{rccl} g: & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \arccos \dfrac{x^2+1}{2} \end{array}$

23.

(a) $\begin{array}{rccl} f^{-1}: & [-1/2,1/2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \operatorname{arcsen}(2x)-\pi/2 \end{array}$

de contradomínio $[-\pi,0]$;

(b) $\begin{array}{rccl} f^{-1}: & [\pi/6,5\pi/6] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 1-\operatorname{sen}(3\pi/4-3x/2) \end{array}$

de contradomínio $[0,2]$;

(c) $\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \mathbb{R}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 2-\dfrac{\pi}{\operatorname{arctg} x} \end{array}$

de contradomínio $]-\infty,0[\cup]4,+\infty[$;

(d) $\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 3+\mathrm{e}^{\frac{4x+1}{5}} \end{array}$

de contradomínio $]3,+\infty[$;

(e) $\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{2}-\ln\sqrt{x} \end{array}$

de contradomínio $\mathbb{R}$;

(f) $\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & -2+\log_{1/3}x \end{array}$

de contradomínio $\mathbb{R}$.

24. **(a)** $k=\dfrac{1}{2}$ **(b)** —

(c) $\begin{array}{ccl} \left]\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{-\ln(x-\frac{1}{2})}} \end{array}$

de contradomínio $\mathbb{R}^+$.

25. **(a)** $\alpha\in[-1,+\infty[$; **(b)** $\begin{array}{rccl} f^{-1}: &]-\infty,-1-\alpha[\cup]1+\alpha,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f^{-1}(x)=\begin{cases} x-\alpha & \text{se} \quad x>1+\alpha \\ x+\alpha & \text{se} \quad x<-1-\alpha \end{cases} \end{array}$

26. **(a)** Verdadeira; **(b)** Verdadeira.

27. **(a)** Sugestão: Utilize a definição para determinar $f'(0)$. **(b)** $h'(0)=0$.

28. Sugestão: utilize a definição e os enquadramentos indicados no enunciado para calcular as derivadas laterais de f e g na origem.

29. Sugestão: utilize o enquadramento indicado para concluir que $f(a)=g(a)=h(a)$. Do enquadramento apresentado resulta que, para $k>0$,

$$\frac{f(a+k)-f(a)}{k}\leq\frac{g(a+k)-g(a)}{k}\leq\frac{h(a+k)-h(a)}{k}$$

donde se conclui que $h'_+(a)=f'_+(a)=g'_+(a)$.

Utilizando um racíocinio análogo conclua que $h'_-(a)=f'_-(a)=g'_-(a)$ e deduza o resultado pretendido.

30. —

31. Falsa.

32. Sugestão: utilize as definições de derivada de uma função num ponto e de função par e ímpar.

33. **(a)** $\dfrac{(1+\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{(1+\sqrt[3]{x})^2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}$; **(b)** $\dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x^3}}}$;

(c) $-\operatorname{sen} x\cos(\cos x)$; **(d)** $\dfrac{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}{2x}$; **(e)** $\dfrac{x(\operatorname{cotg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x) - \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x}{(x+\operatorname{cotg} x)^2}$;

(f) $(5x)^x(\ln(5x)+1)$; **(g)** $\operatorname{cotg} x$; **(h)** $\dfrac{-12x^2\cos(4x^3)}{1+\operatorname{sen}^2(4x^3)}$; **(i)** $\dfrac{2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$;

(j) $\dfrac{-2}{x\sqrt{x^4-1}} = \dfrac{-2\sqrt{(x^4-1)^2}}{x^5-x}$

34. **(a)** $3\dfrac{\sqrt{2}}{4}$; **(b)** $3x^2\cos(x^3)$; **(c)** $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; **(d)** 1.

35. **(a)** $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$; **(b)** $\mathrm{e}^x\cos(\mathrm{e}^x)$; **(c)** $\dfrac{-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}(1+x)^2}$;

(d) $(f^{-1})'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}} & \text{se } x > 1 \\ \dfrac{-1}{2\sqrt{-x}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

36. $(f\circ g)'(x) = \sec x$.

37. $1/12$

38. Recta tangente: $y = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}x + \dfrac{\sqrt{5}}{5}$; Recta normal: $y = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}x + 2\sqrt{5}$.

39. —

40. **(a)** f não é diferenciável em π porque $f'_+(\pi) = 1$ e $f'_-(\pi) = -1$.

(b) f não é diferenciável em 0 porque $f'_+(0) = -\mathrm{e}$ e $f'_-(0) = -1$.

41. Como f não é contínua em $x = 0$, tem-se que f não é diferenciável neste ponto.

42. **(a)** $p > 0$; **(b)** $p > 1$; **(c)** $p > 1$; **(d)** $p > 2$.

43. Sugestão: Utilize o Teorema de Bolzano para garantir que f tem pelo menos uma raíz e o estudo dos zeros da derivada para garantir a unicidade.

44. Sugestão: Faça o estudo da primeira derivada de f.

45. f tem um zero em $]0,1[$, um em $]1,2[$ e outro em $]-1,0[$.

46. Sugestão: Atenda a que 0 é raíz da equação e ao comportamento da primeira derivada de f.

47. **(a)** Sugestão: Considere a função $f(x) = \operatorname{arcsen} x - x$ e prove que é positiva no intervalo considerado analisando o comportamento da primeira derivada; **b)** —; **c)** —.

48. **(a)** É contínua em $\mathbb{R}$; **(b)** f não é diferenciável em $x = 0$; **(c)** $b = 1/\mathrm{e}$.

49. Sugestão: Verifique que, nas condições indicadas, $g'(x) > 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$, aplicando o Teorema de Lagrange à função.

50. —

51. —

52. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x} = 1$.

53. **(a)** $1/9$; **(b)** não existe; **(c)** $2/3$; **(d)** $-1/2$; **(e)** -1; **(f)** 0; **(g)** 1; **(h)** 0;

(i) 1; **(j)** e^4.

54. **(a)** 3 é máximo local atingido em $x = 1$ e 0 é mínimo local atingido em $x = 2$;

(b) 1 é máximo local atingido em $x=2$; **(c)** $-\mathrm{e}^{-1}$ é um mínimo local atingido em $x=-1$;

(d) 1 é máximo local de f atingido nos pontos da forma $\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$; 0 é mínimo local atingido nos pontos da forma $k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$;

(e) Mínimo local 1 atingido em $x=0$; **(f)** Mínimo local 4 atingido em $x=0$;

(g) Os pontos do conjunto $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[\cup(\cup_{n\in\mathbb{N}}]1/(n+1),1/n[)$ são pontos de máximo e mínimo local, pelo que 0 é máximo e mínimo local, 1 é máximo local de f atingido nos pontos da forma $\dfrac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}$; 0 é mínimo local de f atingido no ponto $x=0$;

(h) Máximo local $\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$ atingido no ponto $x=\sqrt{\mathrm{e}}$;

(i) Máximo local $3/2$ atingido nos pontos $x=\pi/6$ e $x=5\pi/6$, mínimo local 1 atingido nos pontos $x=0$ e $x=\pi/2$, mínimo local -3 atingido no ponto $x=3\pi/2$;

(j) Máximo local 2 quando $x=1$, mínimo local -2 quando $x=3$.

55. $A=10x-x^2$ A área toma o valor máximo $A=25$ para $x=5$ e $y=5$.

56. O produto é máximo quando $x=y=\dfrac{a}{2}$.

57. A soma toma o valor mínimo $2\sqrt{k}$ para $x=y=\sqrt{k}$.

58. $A=\dfrac{1}{2}x\sqrt{4r^2-x^2}$. A área é máxima quando $x=\sqrt{2}r$.

59. $A=\dfrac{x^3+4v}{x}$. A área é mínima quando $x=\sqrt[3]{2v}$.

60. **(a)** -1; **(b)** $y=-x+(\pi-1)$; **(c)** $x\in\cup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi,\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\right[$.

61. **(a)** $k=-1$ **(b)** O gráfico de f está acima da assímptota.

62. —

63. $a=1$ e $b=-1$

64. $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\mathrm{sen}(\pi x)}{kx}=\dfrac{\pi}{k}$; $\lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$; $k=2$

65.

(a) **Domínio:** $\mathbb{R}$; **Sinal:** positiva em $\mathbb{R}$; **Zeros:** não tem; **Assímptotas verticais:** não tem; **Assímptotas não verticais:** $y=2x+1/4$ é assímptota vertical à direita e $y=-2x-1/4$ é assímptota não vertical à esquerda; **Monotonia:** decrescente no intervalo $]-\infty,-1/8]$ e crescente no intervalo$[1/8,+\infty[$; **Extremos locais:** mínimo local $\sqrt{31}/4$ em $x=-1/8$, não tem máximos locais; **Concavidades:** concavidade voltada para cima em todo o domínio; **Pontos de inflexão:** não tem.

(b) **Domínio:** $[0,2\pi]$; **Sinal:** positiva em $[0,3\pi/4[\cup]7\pi/4,2\pi]$, negativa em $]3\pi/4,7\pi/4[$ **Zeros:** $3\pi/4$ e $7\pi/4$; **Assímptotas verticais:** não tem; **Assímptotas não verticais:** não tem; **Monotonia:** crescente nos intervalos $[0,\pi/4]$ e $[5\pi/4,2\pi]$, decrescente no intervalo $[\pi/4,5\pi/4]$; **Extremos locais:** mínimo local $-\sqrt{2}$ em $x=5\pi/4$, máximo local $\sqrt{2}$ em $x=\pi/4$; **Concavidades:** concavidade voltada para baixo em $[0,3\pi/4[$ e em $]7\pi/4,2\pi]$, concavidade voltada para cima em $]3\pi/4,7\pi/4[$; **Pontos de inflexão:** $(3\pi/4,0)$ e $(7\pi/4,0)$.

(c) **Domínio:** $\mathbb{R}^+$; **Sinal:** negativa em $]0,1[$ e positiva em $]1,+\infty[$; **Zeros:** $x=1$; **Assímptotas verticais:** $x=0$; **Assímptotas não verticais:** $y=0$; **Monotonia:** decrescente em $[\mathrm{e},+\infty[$ e crescente em $]0,\mathrm{e}]$; **Extremos locais:** máximo local $\frac{1}{\mathrm{e}}$ em $x=\mathrm{e}$; **Concavidades:** concavidade voltada para cima em $]\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}},+\infty[$ e voltada para baixo em $]0,e\sqrt{\mathrm{e}}[$; **Pontos de inflexão:** $(\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}},\dfrac{3}{2\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}})$.

(d) **Domínio:** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; **Sinal:** positiva em todo o domínio; **Zeros:** não tem; **Assímptotas verticais:** $x=0$; **Assímptotas não verticais:** $y=x$ é assímptota não vertical à direita e $y=-x$ é assímptota não vertical à esquerda; **Monotonia:** decrescente nos intervalos $]-\infty,-1]$ e $]0,1]$ e crescente nos intervalos $[-1,0[$ e $[1,+\infty[$; **Extremos locais:** mínimo local 1 em $x=1$ e $x=-1$; **Concavidades:** concavidade voltada para cima em todo o domínio; **Pontos de inflexão:** não tem.

(e) **Domínio:** $\mathbb{R}$; **Sinal:** positiva em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; **Zeros:** $x=0$; **Assímptotas verticais:** não tem; **Assímptotas não verticais:** $y=0$ é assímptota não vertical à direita; **Monotonia:** decrescente em $]-\infty,0]$ e em $[2,+\infty[$ e crescente em $[0,2]$; **Extremos locais:** mínimo local 0 em $x=0$, máximo local $\dfrac{4}{e^2}$ em $x=2$; **Concavidades:** concavidade voltada para cima em $]-\infty,2-\sqrt{2}[$ e em $]2+\sqrt{2},+\infty[$, concavidade voltada para baixo em $]2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}[$; **Pontos de inflexão:** $\left(2-\sqrt{2},(2-\sqrt{2})^2\mathrm{e}^{-2+\sqrt{2}}\right)$ e $\left(2+\sqrt{2},(2+\sqrt{2})^2\mathrm{e}^{-2-\sqrt{2}}\right)$.

(f) **Domínio:** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; **Sinal:** positiva em $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ e negativa em $]-1,1[\setminus\{0\}$ **Zeros:** $x=1$ ou $x=-1$; **Assímptotas verticais:** não tem; **Assímptotas não verticais:** não tem; **Monotonia:** decrescente em $]-\infty,-1/\sqrt{e}]$ e em $]0,1/\sqrt{e}]$ e crescente em $]-1/\sqrt{e},0[$ e em $[1/\sqrt{e},+\infty[$; **Extremos locais:** mínimo local $-\dfrac{1}{2e}$ em $x=-1/\sqrt{e}$, máximo local $-\dfrac{1}{2e}$ em $x=1/\sqrt{e}$; **Concavidades:** concavidade voltada para cima em $]-\infty,-1/\sqrt{\mathrm{e}^3}[$ e em $]1/\sqrt{\mathrm{e}^3},+\infty[$, concavidade voltada para baixo em $]0,1/\sqrt{\mathrm{e}^3}[$ e em $]1/\sqrt{\mathrm{e}^3},0[$; **Pontos de inflexão:** $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^3}},-\dfrac{3}{2\mathrm{e}^3}\right)$ e $\left(\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^3}},-\dfrac{3}{2\mathrm{e}^3}\right)$.

66. —

Capítulo 2

Fórmula de Taylor

2.1 Enunciados

1. Desenvolva $p(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ segundo potências de $x - 4$.

2. Considere um polinómio do terceiro grau, $p(x)$, que satisfaz as condições:

$$p(3) = 0,\ p'(3) = -1,\ p''(3) = 2,\ p'''(3) = 1.$$

   Calcule $p(2)$ e $p'(0)$.

3. Considere a função f definida por $f(x) = \sqrt{x}$.

   (a) Mostre que, numa vizinhança de 1, $f(x) \simeq 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2$.

   (b) Determine um valor aproximado de $\sqrt{1,01}$ e mostre que o erro cometido é inferior a 10^{-7}.

4. Estabeleça a fórmula de Taylor de ordem n, com resto de Lagrange, no ponto a, para as funções:

   (a) $f(x) = \cos(x^2)$; $a = 0$; $n = 4$.

   (b) $g(x) = (1+x)^m$ $(m \in \mathbb{N})$; $a = 0$; $n = 3$.

   (c) $h(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$; $a = 1$; $n = 3$.

5. Seja $g(x) = \ln(1 - ax)$ com $a \in \mathbb{R}$.

   (a) Determine, em função de a, o domínio de g sob a forma de intervalo de números reais.

   (b) Prove, usando o método de indução, que a derivada de ordem n da função g é dada por $g^{(n)}(x) = -(n-1)!a^n(1-ax)^{-n}$ (para todo o $n \in \mathbb{N}$).

   (c) Tome na expressão de $g(x)$, $a = 1$.

      i. Escreva a fórmula de MacLaurin de ordem n para g.

      ii. Mostre que $|R_n(x)| < \dfrac{1}{n+1}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$.

      iii. Utilize a alínea anterior para obter uma aproximação de $\ln(3/4)$ com erro inferior a $0,01$.

6. Considere a função $f(x) = x(\ln x)^2$

   (a) Prove que existe $a \in]1, \mathrm{e}[$ tal que $f'(a) = \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$.
   Sugestão: Use o Teorema de Lagrange.

   (b) Prove que, numa vizinhança de $x = 1$ contida em $\left]\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right[$, podemos aproximar f pelo polinómio $p(x) = (x-1)^2$ e mostre que o erro cometido nessa aproximação é inferior a $\dfrac{4}{3}|x-1|^3$.

7. Considere a função definida por $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ Determine o polinómio de Taylor de f de segunda ordem relativamente a $x_0 = 4$ e mostre que o erro cometido, ao aproximarmos $f(x)$ por este polinómio na vizinhança definida por $|x-4| < 1$, é inferior a $\dfrac{1}{2^4}$.

8. Determine o polinómio de Taylor de $2^{\underline{a}}$ ordem de $f(x) = e^{x^2-1}$ em torno do ponto $x_0 = 1$, e mostre que para $0 < x < 1$, o erro cometido na aproximação de f por aquele polinómio é inferior a $\dfrac{10}{3}$.

9. Seja $f(x) = 2\ln x + x^2$.

   (a) Calcule o polinómio de Taylor de $3^{\underline{a}}$ ordem, $p_3(x)$, relativamente ao ponto $x = 1$.

   (b) Determine os valores de $\varepsilon \in]0, 1[$ por forma que na vizinhança definida por $|x-1| < \varepsilon$, o erro cometido ao aproximarmos $f(x)$ por $p_3(x)$ seja inferior a $\dfrac{1}{2^5}$.

PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA

É um resultado que permite demonstrar com relativa facilidade várias propriedades referentes ao conjunto dos números naturais. Pode enunciar-se do seguinte modo:

> Seja $\phi(n)$ uma condição em n ($n \in \mathbb{N}$).
> **Se**
> **(i)** $\phi(1)$ (ϕ transforma-se numa proposição verdadeira se $n = 1$);
> **(ii)** $\phi(n) \Rightarrow \phi(n+1)$ (se $\phi(n)$ é verdadeira então $\phi(n+1)$ é também verdadeira);
> **então**
> $\phi(n)$, para todo $n \in N$ ($\phi(n)$ é verdadeira para todo o número natural).

Nota: a (i) é frequente chamar **base de indução** e a (ii) **propriedade hereditária**; $\phi(n)$ é a **hipótese de indução** e $\phi(n+1)$ é a **tese de indução**.

2.2 Soluções

1. $p(x) = -56 + 21(x-4) + 37(x-4)^2 + 11(x-4)^3 + (x-4)^4$.

2. $p(2) = 11/6; p'(0) = -5/2$.

3. **(a)** — **(b)** $\sqrt{1.01} \simeq p_2(1.01) = 1.0049875$.

4. **(a)** $\cos(x^2) = 1 - \dfrac{x^4}{2} + R_4(x)$ onde $R_4(x) = \dfrac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5$, para algum ξ entre x e 0;

(b) $(1+x)^m = 1 + mx + \dfrac{m(m-1)}{2}x^2 + \dfrac{m(m-1)(m-2)}{6}x^3 + R_3(x)$ onde $R_3(x) = \dfrac{m(m-1)(m-2)(m-3)(1+\theta)^{m-4}}{24}x^4$ para algum θ entre x e 0;

(c) $\mathrm{e}^{-x^2} = \dfrac{1}{\mathrm{e}} - \dfrac{2}{\mathrm{e}}(x-1) + \dfrac{1}{\mathrm{e}}(x-1)^2 + \dfrac{2}{3\mathrm{e}}(x-1)^3 + \dfrac{\mathrm{e}^{-\xi^2}(12 - 48\xi^2 + 16\xi^4)}{4!}(x-1)^4$ com ξ entre x e 1.

5. **(a)** $D_g = \begin{cases}]-\infty, 1/a[& \text{se } a > 0 \\ ]1/a, +\infty[& \text{se } a < 0 \\ \mathbb{R} & \text{se } a = 0 \end{cases}$ **(b)** —;

(c.i) $\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \frac{1}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+1}}$ com $\theta \in]0,1[$. **(c.ii)** —;

(c.iii) $p_{99}(\dfrac{1}{4}) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{99} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^k}{k}$.

6. **(a)** —; **(b)** —.

7. $p_2(x) = \dfrac{16}{3} + \dfrac{8}{9}(x-4) + \dfrac{1}{27}(x-4)^2$.

8. $p_2(x) = 1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2$.

9. **(a)** $p_3(x) = 1 + 4(x-1) + \dfrac{2}{3}(x-1)^3$; **(b)** $\varepsilon \in \left]0, \dfrac{1}{3}\right]$.

Capítulo 3

Técnicas de Primitivação

3.1 Enunciados

1. Calcule cada um dos seguintes integrais indefinidos:

   (a) $\displaystyle\int \left(4x^3 - 5x + 9\right) \mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+7}$

   (c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x}} \mathrm{d}x$

   (d) $\displaystyle\int \cos x \operatorname{sen}^3 x \, \mathrm{d}x$

   (e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$

   (f) $\displaystyle\int x^{-1} (\ln x)^3 \, \mathrm{d}x$

   (g) $\displaystyle\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\, \mathrm{d}x$

   (h) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{8-x^2}}$

   (i) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x \, \mathrm{d}x$

   (j) $\displaystyle\int \frac{1}{x \ln x} \mathrm{d}x$

   (k) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+5} \mathrm{d}x$

   (l) $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$

2. Calcule, usando a técnica de primitivação por partes, os seguintes integrais indefinidos:

   (a) $\displaystyle\int x^2 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int x^3 \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int x 3^x \, \mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1+x^2)^{\;2}}\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int x \operatorname{arcsen} x^2\,\mathrm{d}x$

3. Calcular os seguintes integrais indefinidos de funções racionais:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{(x-1)\ (x-2)\ (x-3)}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{(2x+1)\ (x^2+1)}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^3-3x^2+2x-3}{x^4+2x^2+1}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int \frac{x^2+3x+1}{x^2-2x-3}\,\mathrm{d}x$

4. Calcule, usando a técnica de primitivação por substituição, os integrais indefinidos:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-25}}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int x\sqrt{2x+3}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int x(2x+5)^{10}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2x+1}}$

(e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}$

(f) $\displaystyle\int \frac{\ln(2x)}{x\ln(4x)}\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int \sqrt{9-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}\,\mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$

(k) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$
Sugestão: Considere a substituição $\cos x = t$.

(l) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x-\cos x}\,\mathrm{d}x$

(m) $\int \frac{1}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x$

5. Calcule:

(a) $\int \mathrm{e}^{3\cos^2 x}\operatorname{sen} x\cos x\,\mathrm{d}x$

(b) $\int e^{3x}\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$

(c) $\int x\ arctg x\,\mathrm{d}x$

(d) $\int \mathrm{e}^{ax}\ \cos(bx)\,\mathrm{d}x\ \ a,b\in\mathbb{R}^+$

(e) $\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5}$

(f) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$

(g) $\int \frac{x^2\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

(h) $\int x\cos x^2\,\mathrm{d}x$

(i) $\int \cos^2\theta\ \ d\theta$

(j) $\int \operatorname{sen}(5x)\operatorname{sen}(3x)\,\mathrm{d}x$

(k) $\int \frac{\mathrm{d}x}{5-3\cos x}$

(l) $\int \cos^4\theta\ \operatorname{sen}(2\theta)\ d\theta$

(m) $\int \operatorname{sen}^3\alpha\cos^4\alpha\ d\alpha$

(n) $\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\operatorname{sen} x}\,\mathrm{d}x$

(o) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}\,\mathrm{d}x$

(p) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+4}}$

(q) $\int \operatorname{cosec}^4 x\,\mathrm{d}x$

(r) $\int \operatorname{sen}(3x)\cos(4x)\,\mathrm{d}x$

(s) $\int \cos(x)\cos(5x)\,\mathrm{d}x$

6. Encontre uma função f tal que $f'(x)+\operatorname{sen} x=0$ e $f(0)=2$.

7. Calcule as seguintes primitivas:

(a) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}\,\mathrm{d}x$

(b) $\int \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int \frac{3}{e^{2x}+2e^{x}+3}\,dx$

(d) $\displaystyle\int (x^2-4)^{-\frac{3}{2}}\,dx$

(e) $\displaystyle\int x\cos(\ln x)\,dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{x^4-3x^3+4x}{(x-1)(x^2-2x+2)}\,dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{[1-\cos x]\ \operatorname{sen} x}\,dx$

(i) $\displaystyle\int \frac{2x\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2}\,dx$

(j) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^4}\,dx$

(k) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$

(l) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$

(m) $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx$

3.2 Soluções

1. **(a)** $x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 9x + c,\ c \in \mathbb{R}$; **(b)** $\frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{7}} + c,\ c \in \mathbb{R}$; **(c)** $-2\sqrt{1-x} + c,\ c \in \mathbb{R}$; **(d)** $\frac{\sin^4 x}{4} + c,\ c \in \mathbb{R}$; **(e)** $2\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + c,\ c \in \mathbb{R}$; **(f)** $\frac{(\ln x)^4}{4} + c,\ c \in \mathbb{R}$; **(g)** $\frac{2x^2\sqrt{x}}{5} + x + c,\ c \in \mathbb{R}$; **(h)** $\operatorname{arcsen} \frac{x}{2\sqrt{2}} + c,\ c \in \mathbb{R}$; **(i)** $\operatorname{tg} x - x + c,\ c \in \mathbb{R}$; **(j)** $\ln|\ln x| + c,\ c \in \mathbb{R}$; **(k)** $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}$; **(l)** $e^{\operatorname{arcsen} x} + c,\ c \in \mathbb{R}$.

2. **(a)** $x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + c,\ c \in \mathbb{R}$

(b) $-x^3 \cos x + 3x^2 \operatorname{sen} x + 6x \cos x - 6 \operatorname{sen} x + c,\ c \in \mathbb{R}$ **(c)** $x\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{(\ln 3)^2} + c,\ c \in \mathbb{R}$

(d) $-\frac{x}{2+2x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + c,\ c \in \mathbb{R}$ **(e)** $\frac{1}{2}\left(x \cos(\ln x) + x \operatorname{sen}(\ln x)\right) + c,\ c \in \mathbb{R}$

(f) $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c,\ c \in \mathbb{R}$; **(g)** $x \ln x - x + c,\ c \in \mathbb{R}$;

(h) $\frac{1}{2}x^2 \operatorname{arcsen} x^2 + \frac{1}{2}\sqrt{(1-x^4)} + c,\ c \in \mathbb{R}$.

3. **(a)** $\frac{3}{2}\ln|x-1| - 7\ln|x-2| + \frac{13}{2}\ln|x-3| + c,\ c \in \mathbb{R}$;

(b) $\frac{3}{10}\ln|x+\frac{1}{2}| + \frac{1}{10}\ln(x^2+1) + \frac{2}{5}\operatorname{arctg} x + c,\ c \in \mathbb{R}$;

(c) $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 3\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2x^2+2} + c,\ c \in \mathbb{R}$ **(d)** $\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c,\ c \in \mathbb{R}$

(e) $x + \frac{19}{4}\ln|x-3| + \frac{1}{4}\ln|x+1| + c,\ c \in \mathbb{R}$.

4. **(a)** $\frac{\sqrt{x^2-25}}{25x} + c,\ c \in \mathbb{R}$; **(b)** $\frac{(2x+3)^2\sqrt{2x+3}}{10} - \frac{(2x+3)\sqrt{2x+3}}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}$; **(c)** $\frac{1}{4}\left(\frac{(2x+5)^{12}}{12} - \frac{5(2x+5)^{11}}{11}\right) + c,\ c \in \mathbb{R}$; **(d)** $\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right| + c,\ c \in \mathbb{R}$; **(e)** $2\operatorname{arctg}\sqrt{\mathrm{e}^x - 1} + c,\ c \in \mathbb{R}$; **(f)** $\ln x - \ln 2 \ln|\ln(4x)| + c,\ c \in \mathbb{R}$ (a 1a. parcela poderia ser $\ln(2x)$ — Porquê?; **(g)** $\frac{2}{5}(\cos^2 x - 5)\sqrt{\cos x} + c,\ c \in \mathbb{R}$; **(h)** $\frac{9}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x-1}{3} + \frac{(x-1)\sqrt{9-(x-1)^2}}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}$; **(i)** $\frac{13}{9}\ln\left(\sqrt{9x^2+6x+2} + 3x + 1\right) + \frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2} + c,\ c \in \mathbb{R}$; **(j)** $-\operatorname{tg}\frac{x}{2} + x + c,\ c \in \mathbb{R}$; **(k)** $\frac{1}{6}\ln\frac{\cos^2 x - \cos x + 1}{(\cos x + 1)^2} - \frac{1\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2\cos x - 1}{\sqrt{3}} + c,\ c \in \mathbb{R}$; **(l)** $\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x/2}{\operatorname{tg} x/2 + 1}\right| + c,\ c \in \mathbb{R}$; **(m)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg} x/2\right) + c,\ c \in \mathbb{R}$;

5. **(a)** $-\frac{1}{6}e^{3\cos^2 x} + c,\ c \in \mathbb{R}$; **(b)** $\frac{1}{10}\left(-\mathrm{e}^{3x}\cos x + 3\mathrm{e}^{3x}\operatorname{sen} x\right) + c,\ c \in \mathbb{R}$;

(c) $\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + c,\ c \in \mathbb{R}$;

(d) $\frac{a^2}{a^2+b^2}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a^2}\mathrm{e}^{ax}\operatorname{sen}(bx)\right) + c,\ c \in \mathbb{R}$;

(e) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\left(x + \frac{1}{2}\right) + c,\ c \in \mathbb{R}$;

(f) $\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2 - x + 1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + c,\ c \in \mathbb{R}$;

(g) $x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c,\ c \in \mathbb{R}$; **(h)** $\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(x^2\right) + c,\ c \in \mathbb{R}$;

(i) $\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\theta) + c,\ c \in \mathbb{R}$; **(j)** $\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{16}\operatorname{sen}(8x) + c,\ c \in \mathbb{R}$;

(k) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + c,\ c \in \mathbb{R}$; **(l)** $-\frac{1}{3}\cos^6\theta + c,\ c \in \mathbb{R}$;

(m) $-\dfrac{\cos^5 x}{5}+\dfrac{\cos^7 x}{7}+c,\ c\in\mathbb{R}$; **(n)** $\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{cosec}\dfrac{x}{2}-\operatorname{cotg}\dfrac{x}{2}\right|+c,\ c\in\mathbb{R}$;

(o) $2\operatorname{arcsen}\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}-\dfrac{x+1}{2}\sqrt{-x^2-2x+1}+2\sqrt{-x^2-2x+1}+c,\ c\in\mathbb{R}$;

(p) $-\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{x^2+4}{x^2}}+c,\ c\in\mathbb{R}$; **(q)** $-\operatorname{cotg}x-\dfrac{\operatorname{cotg}^3 x}{3}+c,\ c\in\mathbb{R}$;

(r) $-\dfrac{1}{14}\cos(7x)+\dfrac{1}{2}\cos x+c,\ c\in\mathbb{R}$; **(s)** $\dfrac{1}{12}\operatorname{sen}(6x)+\dfrac{1}{8}\operatorname{sen}(4x)+c,\ c\in\mathbb{R}$.

6. $f(x)=\cos x+1$.

7. **(a)** $\dfrac{2}{1-\sqrt{x}}+c,\ c\in\mathbb{R}$; **(b)** $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}e^{2x}+c,\ c\in\mathbb{R}$;

(c) $x-\dfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+2e^x+3)-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{e^x+1}{\sqrt{2}}\right)+c,\ c\in\mathbb{R}$; **(d)** $\dfrac{-|x|}{4\sqrt{x^2-4}}+c,\ c\in\mathbb{R}$;

(e) $\dfrac{1}{5}x^2\left(2\cos(\ln x)+\operatorname{sen}(\ln x)\right)+c,\ c\in\mathbb{R}$;

(f) $-\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}+\ln|x|-\dfrac{1}{2}\ln|x^2+1|+c,\ c\in\mathbb{R}$;

(g) $\dfrac{x^2}{2}+2\operatorname{arctg}(1-x)+2\ln|1-x|-3\ln(2-2x+x^2)+c,\ c\in\mathbb{R}$;

(h) $-\dfrac{3}{4}\ln(1-\cos x)-\dfrac{1}{4}\ln(1+\cos x)-\dfrac{1}{2(1-\cos x)}+c,\ c\in\mathbb{R}$

(i) $\dfrac{1}{2(1+x^2)}\left(x+(x^2-1)\operatorname{arctg}x\right)+c,\ c\in\mathbb{R}$

(j) $\dfrac{\sqrt{2}}{8}\Big(\ln(1+\sqrt{2}x+x^2)-\ln(1-\sqrt{2}x+x^2)+2\operatorname{arctg}(1+\sqrt{2}x)-2\operatorname{arctg}(1-\sqrt{2}x)\Big)+c,\ c\in\mathbb{R}$

(k) $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2)+c,\ c\in\mathbb{R}$

(l) $\dfrac{\sqrt{2}}{8}\Big(\ln(1-\sqrt{2}x+x^2)-\ln(1+\sqrt{2}x+x^2)+2\operatorname{arctg}(1+\sqrt{2}x)-2\operatorname{arctg}(1-\sqrt{2}x)\Big)+c,\ c\in\mathbb{R}$

(m) $\dfrac{1}{4}\ln(1+x^4)+c,\ c\in\mathbb{R}$

Capítulo 4

Integral de Riemann. Teorema fundamental do cálculo integral.

4.1 Enunciados

1. Calcule as somas de Riemann, $S_f(\mathscr{P},\mathscr{C})$, para as funções indicadas, considerando $\mathscr{P}$ partições regulares (n intervalos de igual amplitude) e considerando $x_i^* = x_i$, ou seja, cada ponto de $\mathscr{C}$ é o limite superior dos intervalos $[x_{i-1},x_i]$ definidos pela partição $\mathscr{P}$.

   (a) $f(x) = x^2$ em $[0,1]$ com $n = 5$.

   (b) $f(x) = \text{sen}(\pi x)$ em $[0,1]$ com $n = 6$.

2. Calcule a soma de Riemann, $S_f(\mathscr{P},\mathscr{C})$, onde $x_i^* = x_{i-1}$ para todo $i \in \{1,2,\cdots,n\}$, considerando a função $f(x) = 1/x$ definida em $[1,6]$ e a partição $\mathscr{P} = \{1,2.3,3.1,4.3,5,6\}$.

3. Calcule a soma de Riemann, $S_f(\mathscr{P},\mathscr{C})$, para a função $f(x) = x^2+2x$ definida em $[1,4]$ sendo $\mathscr{P}$ a partição regular de $[1,4]$ em 5 intervalos e tomando $x_i^* = \dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}$.

4. Calcule a soma de Riemann para a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ em $[1,6]$ com $\mathscr{P} = \{1,2,2.9,3.1,4,5.3,6\}$ e $x_i^* = \dfrac{3x_{i-1}+2x_i}{5}$.

5. Sabendo que, em cada uma das alíneas que se seguem, a função dada é integrável no intervalo considerado, calcule os integrais dados através do cálculo de $\lim\limits_{n\to\infty} S_f(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n)$ para partições regulares do intervalo de integração.

   (a) $\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x$.

   Sugestão: Utilize a igualdade $1+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n^3}{3}+\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{n}{6}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

   (b) $\displaystyle\int_0^3 (2x+1)\,\mathrm{d}x$.

6. Sabendo que a função f definida por $f(x) = x^3$ é integrável em $[0,b]$, para todo o $b > 0$, mostre que

$$\int_0^b x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}b^4$$

Sugestão: Utilize a igualdade $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

7. Suponha que f é contínua em $[a,b]$ e que $f(x) \geq 0$ para todo o $x \in [a,b]$.

   (a) Mostre que se existe $\bar{x}$ em $[a,b]$ tal que $f(\bar{x}) > 0$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$.

   (b) Diga, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa:

$$\text{Se } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \text{ então } f(x) = 0 \text{ para todo o } x \in [a,b]$$

8. Diga, justificando, se as seguintes funções são integráveis.

   (a) $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos(x^2 - 2x)$.

   (b) $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x \text{ se } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ 2 \quad \text{se } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

   (c) $f : [-2,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \in [-2,0[\\ 2 & \text{se } x = 0 \\ x & \text{se } x \in]0,1] \end{cases}$$

9. Exprima, em termos de integrais definidos, a área da região do primeiro quadrante limitada pela parábola de equação $y = x^2 - 2x + 2$ e pela recta que lhe é tangente no ponto $(2,2)$.

10. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \dfrac{x^3}{2x-2}$.

    (a) Represente graficamente a função f.

    (b) Exprima, em termos de integrais definidos, a área da região do plano limitada pelo eixo OX, pelas rectas de equações $x = -1$ e $x = \frac{1}{2}$ e pelo gráfico de f.

11. Seja F a função definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, sendo a função f definida por

$$f(t) = \begin{cases} 2t^2 + 1 & \text{se } t \leq 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen} t}{t} & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

    Verifique que $F'(x) = f(x)$ para todo o x.

12. Seja F uma função definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^{\operatorname{sen} x} (x+1)^2 \arcsin t\,\mathrm{d}t$, para todo o $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Calcule $F'(x)$.

13. Determine $k \in \mathbb{R}$ de modo que $f'(1) = 0$, sendo f a função definida por:

$$f(x) = \int_{x^2}^{k \log x} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t.$$

14. Mostre que $f''(1) = 1$ sendo f a função definida por $f(x) = \displaystyle\int_0^{\ln x} x \mathrm{e}^{t^2}\, \mathrm{d}t$.

15. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $\mathbb{R}$. Seja $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$\Psi(x) = \int_{-2x}^{x^5} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

   (a) Mostre que Ψ é diferenciável e calcule $\Psi'(x)$.

   (b) Supondo que $f(x) < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, mostre que Ψ é decrescente em $\mathbb{R}$.

16. Seja F a função definida por:

$$F(x) = \int_0^x \left(\int_0^t \mathrm{e}^{-u^2} du \right) \mathrm{d}t$$

Calcule $F''(x)$.

17. Considere a função Ψ definida por $\Psi(x) = \displaystyle\int_0^x (2 + \cos^2 u)\, du$. Mostre que Ψ é uma função estritamente crescente em $\mathbb{R}$.

18. Seja f a função contínua em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \left(\int_0^t g(v) dv \right) \mathrm{d}t$, onde g é uma função contínua em $\mathbb{R}$.
Calcule o valor de $f''(1)$ sabendo que $g(1) = 2$ e $\displaystyle\int_0^1 g(v) dv = 1$.

19. Seja f uma função real de variável real contínua e positiva em $\mathbb{R}$. Mostre que a função F definida por:

$$F(x) = \int_0^{6x - x^2} f(t)\, \mathrm{d}t$$

admite um só extremo no ponto de abcissa $x = 3$. Classifique esse extremo.

20. Sabendo que f é uma função real de variável real diferenciável e que tem recta tangente $y = x$ na origem, prove que a função F definida por

$$F(x) = \int_{x-1}^{x^2 - 1} (t + x) f(t)\, \mathrm{d}t$$

admite um mínimo local no ponto de abcissa $x = 1$.

4.2 Soluções

1. **(a)** $\frac{11}{25}$; **(b)** $\frac{\sqrt{3}+2}{6}$.

2. $1.3+\frac{8}{23}+\frac{12}{31}+\frac{7}{43}+\frac{1}{5}$.

3. 36.51.

4. $\frac{5}{7}+\frac{45}{118}+\frac{10}{149}+\frac{45}{173}+\frac{65}{226}+\frac{35}{279}$.

5. **(a)** $\frac{8}{3}$; **(b)** 12;

6. —

7. **(a)** — **(b)** Falso.

8. **(a)** f é integrável em $[0,4]$; **(b)** f não é integrável em $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$;

(c) f é integrável em $[-2,1]$.

9. $A=\int_0^1 (x^2-2x+2)\,\mathrm{d}x+\int_1^2 (x^2-4x+4)\,\mathrm{d}x$.

10. **(a)** — **(b)** $A=\int_{-1}^0 \frac{x^3}{2x-2}\,\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{2x-2}\,\mathrm{d}x$.

11. —

12. $F'(x)=2(x+1)\int_0^{\operatorname{sen} x} \operatorname{arcsen} t\,\mathrm{d}t+x(x+1)^2\cos x$.

13. $k=\frac{2}{\mathrm{e}}$.

14. —

15. **(a)** $\psi'(x)=5x^4 f(x^5)+2f(-2x)$; **(b)** —.

16. $F''(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$.

17. —

18. $f''(1)=10$.

19. $x=3$ é um ponto de máximo de F.

20. **Sugestão:** Calcule o sinal da 2ª derivada no ponto de abcissa $x=1$.

Capítulo 5

Cálculo de integrais definidos e de áreas

5.1 Enunciados

1. Calcule os seguintes integrais definidos:

   (a) $\displaystyle\int_1^4 (x^2-4x-3)\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x\,\mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$

   (d) $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,\mathrm{d}x$

   (e) $\displaystyle\int_e^{e^2} \left(\frac{1}{x\ln x}+\frac{1}{1-x}+\ln^2 x\right)\mathrm{d}x.$

   (f) $\displaystyle\int_0^1 e^{ax}\cos^2(bx+c)\,\mathrm{d}x$, onde a, b, e c são constantes reais não simultaneamente nulas.

2. Calcular, por substituição, os seguintes integrais definidos:

   (a) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}\,\mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$

   (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$

3. Mostre que a área da região limitada de $\mathbb{R}^2$ delimitada pelos gráficos das funções f e g definidas, respectivamente, por $f(x)=1/x$ e $g(x)=x^2$ e pelas rectas $x=2$ e $y=0$ é igual a $1/3+\ln 2$.

4. Seja $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq (x-3)^2,\, y\geq x-1,\, y\leq 4\}$.

   (a) Represente geometricamente a região A.

   (b) Calcule a área da região A.

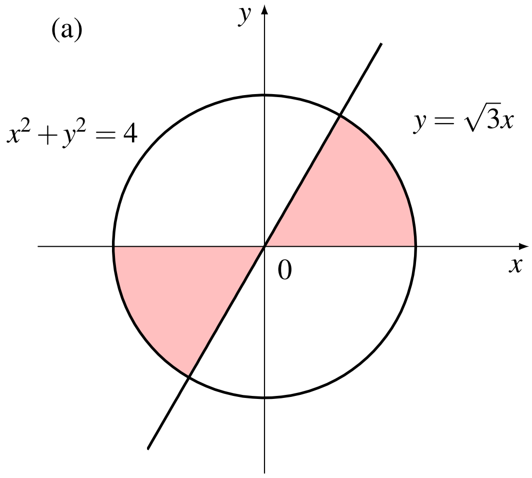
5. Determine a área da região limitada de $\mathbb{R}^2$ delimitada pelos gráficos das funções f e g definidas, respectivamente, por $f(x) = \sqrt{4+x^2}$ e $g(x) = x$, e pelas rectas $x = -2$ e $x = 2$.

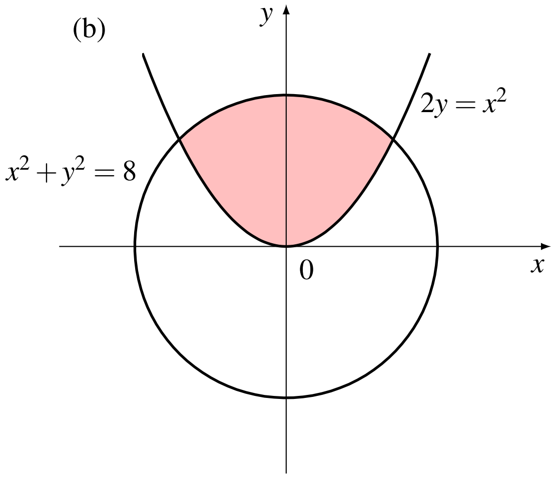
6. Determine a área da região limitada do plano delimitada pelo gráfico da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$, situada à direita do eixo OY e acima do gráfico da recta $y = -\sqrt{3}x$.

7. Determine a área da região limitada pelos gráficos das funções f e g definidas, respectivamente, por:
$$f(x) = \frac{1+\cos^2 x}{1+e^{2x}} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{\cos^2 x}{1+e^{2x}},$$
com $x \in [\ln 2, \ln 5]$.

8. (a) Determine o domínio de cada uma das seguintes funções:
$$f(x) = e^{x^2} + \sqrt{1-x^2} \quad \text{e} \quad g(x) = e^{x^2} - \sqrt{1-x^2}.$$
   (b) Qual a área da região do plano situada entre os gráficos de f e g?

9. Recorrendo ao Cálculo Integral, determine a área da região sombreada representada nas figuras seguintes:





5.2 Soluções

1. **(a)** -18; **(b)** $\dfrac{8}{15}$; **(c)** Se $a=0$, $-\dfrac{1}{3}$; Se $a\neq 0$, $\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{a}$; **(d)** $\dfrac{\mathrm{e}^2+1}{4}$;
(e) $\ln\dfrac{2}{1+\mathrm{e}}-\mathrm{e}+2\mathrm{e}^2$; **(f)** $\dfrac{be^a}{a^2+b^2}\left(\operatorname{sen}(b+c)+\dfrac{a}{b}\cos(b+c)\right)-\dfrac{b}{b^2+c^2}\left(\operatorname{sen}c+\dfrac{a}{b}\cos c\right)$.

2. **(a)** $\dfrac{8}{3}$; **(b)** $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$; **(c)** $\ln\dfrac{1}{2(e+1)}$; **(d)** $\dfrac{1}{2}\ln 2$.

3. —

4. **(a)** —; **(b)** $\dfrac{37}{6}$.

5. $4\sqrt{2}+2\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)$.

6. $\dfrac{5\pi}{12}$.

7. $\ln\dfrac{5\sqrt{130}}{52}$.

8. **(a)** $D_f=D_g=[-1,1]$; **(b)** π.

9. **(a)** $\dfrac{4\pi}{3}$; **(b)** $\dfrac{4}{3}+2\pi$.

Capítulo 6

Integrais impróprios

6.1 Enunciados

1. Determine a natureza dos integrais impróprios seguintes e, em caso de convergência, calcule o seu valor:

   (a) $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}}\,dx$;

   (b) $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \cos(3x)\,dx$;

   (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2+x^2}\,dx$, com $a \in \mathbb{R}^+$;

   (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t e^{-st}\,dt$, com $s \in \mathbb{R}^+$;

   (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{(4-x)^2}\,dx$;

   (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$;

   (g) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{4}{x^2-4}\,dx$;

   (h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x e^{-x^2}\,dx$;

   (i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$.

2. Faça um esboço do gráfico da função real de variável real F dada por

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

   onde f é a função real de variável real definida por

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{se} \quad |t| \leq 1 \\ 0 & \text{se} \quad |t| > 1 \end{cases}$$

3. Calcule, caso sejam convergentes, os seguintes integrais impróprios:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$;

(b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}x$;

(c) $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{1}{9-x^2}\,\mathrm{d}x$;

(d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \ln x\,\mathrm{d}x$;

(e) $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{1}{|x|}\,\mathrm{d}x$;

(f) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}\,\mathrm{d}x$;

(g) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$;

(h) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}}\,\mathrm{d}x$.

4. Mostre que o integral impróprio

$$\int_0^1 \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x$$

diverge.

5. Calcule, caso sejam convergentes, os seguintes integrais impróprios:

(a) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$;

(c) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$.

6. Estude a natureza dos seguintes integrais impróprios:

(a) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos(3x)}{x^3}\,\mathrm{d}x$;

(b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\ln(1+\sqrt{x})}\,\mathrm{d}x$;

(c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$;

(d) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$;

(e) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4+3x+2}}\,\mathrm{d}x$;

(f) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x\ln(x+1)}\,\mathrm{d}x$;

(g) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$;

(h) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^3+2x+1}\,\mathrm{d}x$;

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$;

(j) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$;

(k) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{x^3}\,\mathrm{d}x$;

(l) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$.

7. Estude, em função de $k \in \mathbb{R}$, a natureza do seguinte integral impróprio

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^k \ln x}\,\mathrm{d}x$$

8. Seja f uma função real contínua em $[0,t]$, para todo o $t > 0$, e suponha que existem constantes $M > 0$ e $\gamma > 0$ tais que, para todo $t \geq 0$ se tem $|f(t)| \leq M\mathrm{e}^{\gamma t}$. Prove que o integral impróprio

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$$

é convergente para $s > \gamma$.

6.2 Soluções

1. **(a)** $2e^{-2}$; **(b)** Divergente; **(c)** $\dfrac{\pi}{2a}$; **(d)** $\dfrac{1}{s^2}$; **(e)** $\dfrac{1}{2}$; **(f)** Divergente; **(g)** $\ln 5$;
(h) $-\dfrac{1}{2}$; **(i)** 2;

2. —

3. **(a)** -1; **(b)** Divergente; **(c)** Divergente; **(d)** -1; **(e)** Divergente;
(f) Divergente; **(g)** π; **(h)** $\sqrt{2}\,\text{arcsen}\sqrt{2}$.

4. —

5. **(a)** 2; **(b)** Diverge; **(c)** $\dfrac{\pi}{2}$.

6. **(a)** Convergente; **(b)** Convergente; **(c)** Convergente; **(d)** Convergente;
(e) Convergente; **(f)** Divergente; **(g)** Divergente; **(h)** Divergente;
(i) Convergente; **(j)** Divergente; **(k)** Divergente; **(l)** Convergente.

7. Se $k > 1$ converge, se $k \leq 1$ diverge.

8. —