Matemática Discreta

Estratégias de Demonstração: Princípio da gaiola dos pombos

Universidade de Aveiro 2016/2017

http://http://moodle.ua.pt

Princípio da gaiola dos pombos (ou de Dirichlet)

Teorema de Dirichlet

Algumas aplicações do princípio da gaiola dos pombos

Princípio da gaiola dos pombos (ou de Dirichlet)

Princípio da gaiola dos pombos

O princípio da gaiola dos pombos consiste na conclusão de que, dadas n bolas para serem introduzidas em m caixas, onde $n > m$, pelo menos uma das caixas terá de conter duas ou mais bolas.

- Generalizando, dadas n bolas para serem introduzidas em m caixas, onde $n > km$, pelo menos uma das caixas terá de conter $k + 1$ ou mais bolas.

Teorema de Dirichlet

Teorema (de Dirichlet)

$\forall \alpha \in \mathbb{R}^+$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $\exists q \in [n]$, tal que

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qn} \leq \frac{1}{q^2},$$

onde $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Princípio da gaiola dos pombos (cont.)

O princípio da gaiola dos pombos pode ainda ser apresentado de dois modos distintos:
I - Seja X um conjunto finito tal que $|X| = n$,

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_m,$$

onde $X_i \cap X_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Se $n > m$, então existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $|X_i| > 1$.
II - Sejam X e Y conjuntos arbitrários tais que $|X| = n$ e $|Y| = m$.
Se $n > m$ então não existe uma função $f : X \to Y$ tal que

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y,$$

ou seja, não existe nenhuma função injectiva de X em Y.

Exercícios

- Demonstre que, entre treze pessoas, pelo menos duas têm o seu aniversário no mesmo mês.
  a) Aplicando o princípio da gaiola dos pombos.
  b) Por redução ao absurdo.

- Sabendo que num torneio em que participam n equipas de futebol, todas as equipas jogam umas com as outras, demonstre que em cada jornada pelo menos duas equipas jogam o mesmo número de jogos.