Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I — Exame da Época Normal - Primeira Chamada

3 de Janeiro de 2007

Duração: **2h30m**

Justifique todas as respostas e indique os cálculos efectuados.

1. Considere a função f definida por $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x > 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{se} \quad x = 0 \\ x^2 \ln(-x) & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$.

   (a) Estude f quanto à continuidade na origem.

   Indicações para a resolução:

   A função f é contínua em $x = 0$ se $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

   Uma vez que

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0^-} x^2 \ln(-x) \\ &= \lim_{x \to 0^-} \frac{\ln(-x)}{\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}, \quad \text{pela Regra de Cauchy} \\ &= \lim_{x \to 0^-} \left(-\frac{x^2}{2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

   e $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$, concluímos que f não é contínua em $x = 0$.

   (b) Estude f quanto à diferenciabilidade na origem.

   Indicações para a resolução:

   Como f não é contínua na origem, podemos concluir que f não é aí diferenciável.

   (c) Estude f quanto à existência de extremos locais no intervalo $]-\infty, 0[$.

   Indicações para a resolução:

   Temos, para todo o $x \in]-\infty, 0[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \ln(-x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} \\ &= 2x \ln(-x) + x \\ &= x(2 \ln(-x) + 1), \end{aligned}$$

   pelo que, no intervalo considerado,

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff x(2\ln(-x) + 1) = 0 \\ &\iff \underbrace{x = 0}_{\text{Condição impossível em }]-\infty, 0[} \quad \vee \ 2\ln(-x) + 1 = 0 \\ &\iff \ln(-x) = -\frac{1}{2} \\ &\iff -x = \mathrm{e}^{-1/2} \\ &\iff x = -\mathrm{e}^{-1/2}. \end{aligned}$$

<u>Quadro de estudo do sinal da primeira derivada de f em $]-\infty,0[$</u>

	$-\infty$	$\mathrm{e}^{-1/2}$	0
x	$-$	$-$	$-$
$2\ln(-x)+1$	$+$	0	$-$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	mín. local	$\nearrow$

Da análise do quadro anterior resulta que a função f tem um mínimo local

$$f\left(-\mathrm{e}^{-1/2}\right)=\left(-\mathrm{e}^{-1/2}\right)^2\ln\left(\mathrm{e}^{-1/2}\right)=-\frac{1}{2\mathrm{e}}$$

em $x=-\mathrm{e}^{-1/2}$.

<u>Cálculos auxiliares:</u>

$$\begin{aligned}2\ln(-x)+1>0\wedge x\in]-\infty,0[&\iff \ln(-x)>-\frac{1}{2}\wedge x\in]-\infty,0[\\ &\iff -x>\mathrm{e}^{-1/2}\wedge x\in]-\infty,0[\\ &\iff x<-\mathrm{e}^{-1/2}.\end{aligned}$$

(d) Seja h a função definida por $h(x)=\mathrm{e}^x f(x)$, para todo o $x\in[0,1]$. Mostre que existe $c\in]0,1[$ tal que $h'(c)=\dfrac{(\mathrm{e}-2)\pi}{4}$.

Indicações para a resolução:

- Pelas propriedades das funções contínuas, f é contínua em $]0,1]$.
  Uma vez que $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$ e $f(0)=\dfrac{\pi}{2}$, f é contínua à direita em $x=0$.
  Podemos então concluir que f é contínua em $[0,1]$.
  Consequentemente, a função h é o produto de duas funções contínuas no intervalo $[0,1]$ e, portanto, é uma função contínua neste intervalo.
- A função h é diferenciável no intervalo $]0,1[$ já que é o produto de duas funções diferenciáveis neste intervalo.

Podemos então aplicar o Teorema de Lagrange que garante a existência de $c\in]0,1[$ tal que

$$\begin{aligned}h'(c)&=\frac{h(1)-h(0)}{1-0}\\&=\mathrm{e}\cdot\operatorname{arctg}1-\frac{\pi}{2}\\&=\mathrm{e}\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\\&=\frac{\mathrm{e}\,\pi-2\pi}{4}=\frac{(\mathrm{e}-2)\pi}{4}\end{aligned}$$

(e) Seja g definida por $g(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ a restrição de f a $\mathbb{R}^+$. Justifique que g é invertível e caracterize a sua inversa.

Indicações para a resolução:

Como a função g é a composta de duas funções injectivas, ela é injectiva e, portanto, é invertível.

Por definição de inversa de uma função temos que $D_{g^{-1}}=CD_g$ e $CD_{g^{-1}}=D_g$.

- *Determinação do contradomínio de g^{-1}*
  Como $D_g=\mathbb{R}^+$ temos que $CD_{g^{-1}}=\mathbb{R}^+$.

- *Determinação do domínio de g^{-1}*
  Quando x percorre D_g temos que $\dfrac{1}{x}$ percorre o intervalo $]0,+\infty[$. Logo $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ percorre $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ e, portanto, $D_{g^{-1}} = CD_g = \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.
- *Determinação da expressão analítica de g^{-1}*
  Temos, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$ e, para todo o $y \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$,

$$\begin{aligned} y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x} &\iff \frac{1}{x} = \operatorname{tg} y \\ &\iff x = \frac{1}{\operatorname{tg} y} \end{aligned}$$

  Então, para todo o $x \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $g^{-1}(x) = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$.

Logo g^{-1} é a função de contradomínio $\mathbb{R}^+$ definida por

$$\begin{array}{rccc} g^{-1}: & \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} \end{array}$$

2. Considere a função F definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \mathrm{e}^{1-t^2}dt$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

   Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^2}$.

   Sugestão: Utilize a Regra de Cauchy.

   Indicações para a resolução:

   Utilizando a Regra de Cauchy temos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{2x}$$

   se o limite do segundo membro desta igualdade existir.

   Uma vez que a função g definida por $g(x) = x^2$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e a função f definida por $f(t) = \mathrm{e}^{1-t^2}$ é contínua em $\mathbb{R}$, o Teorema Fundamental do Cálculo Integral garante que a função F é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$F'(x) = g'(x)f(g(x)) = 2x\,\mathrm{e}^{1-x^4},$$

   para todo o $x \in \mathbb{R}$.

   Portanto

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{2x} &= \lim_{x\to 0}\frac{2x\,\mathrm{e}^{1-x^4}}{2x} \\ &= \lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{1-x^4} = \mathrm{e} \end{aligned}$$

   e, atendendo à Regra de Cauchy, temos

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^2} = \mathrm{e}.$$

3. Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ e f uma função definida em I.

   (a) Defina primitiva de f e mostre que se F_1 e F_2 são duas primitivas de f, então existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $F_1 - F_2 = k$.

   Indicações para a resolução:

   Chama-se primitiva de f a toda a função F definida em I, onde I é um intervalo não degenerado de $\mathbb{R}$, tal que $F'(x) = f(x)$, para todo o $x \in I$.

   Sejam F_1 e F_2 duas primitivas de f. Atendendo à hipótese temos , para todo o $x \in I$,

   $$F_1'(x) = f(x)$$

   e

   $$F_2'(x) = f(x).$$

   Como

   $$(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

   para todo o $x \in I$, podemos concluir que existe $k \in \mathbb{R}$ tal que, para todo o $x \in I$,

   $$(F_1 - F_2)(x) = k,$$

   donde se conclui que $F_1 - F_2 = k$.

   (b) Suponha que f é a função definida por $f(x) = x^3 e^{-x^2}$. Determine a primitiva de f que se anula na origem.

   Indicações para a resolução:

   Vamos, em primeiro lugar, determinar a família das primitivas de f. Para efeitos de aplicação do método de primitivação por partes consideremos

   $$\begin{aligned} u'(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2} \quad &\Longrightarrow \quad u(x) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2} \\ v(x) = x^2 \quad &\Longrightarrow \quad v'(x) = 2x. \end{aligned}$$

   Temos então

   $$\begin{aligned} \int x^3\,\mathrm{e}^{-x^2}\,dx &= \int x^2 (x\,\mathrm{e}^{-x^2})\,dx \\ &= -\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{-x^2} - \int 2x\left(-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2}\right)dx \\ &= -\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{-x^2} + \int x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{-x^2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   A primitiva de f que se anula na origem é a função F que satisfaz a condição

   $$F(0) = 0 \Longleftrightarrow -\frac{1}{2} + C = 0 \Longleftrightarrow C = \frac{1}{2}\,,$$

   ou seja, é a função F definida por

   $$F(x) = -\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{-x^2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2} + \frac{1}{2}\,.$$

4. Considere a função f definida por $f(x) = \dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$.

   (a) Calcule o integral indefinido $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

   Indicações para a resolução:
   Utilizando a substituição definida por $x = \operatorname{tg} t$, com $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, temos

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\,dx &= \int \frac{1}{\operatorname{tg}^2 t\sqrt{\operatorname{tg}^2 t+1}}\,(\operatorname{tg} t)'dt \\
&= \int \frac{1}{\operatorname{tg}^2 t \sec t}\,\sec^2 t\,dt \\
&= \int \frac{\sec t}{\operatorname{tg}^2 t}\,dt \\
&= \int \frac{\cos t}{\operatorname{sen}^2 t}\,dt \\
&= -\frac{1}{\operatorname{sen} t} + C \\
&= -\operatorname{cosec} t + C \\
&= -\operatorname{cosec}(\operatorname{arctg} x) + C \\
&= -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C, \quad C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

   Cálculos auxiliares: Uma vez que considerámos a substituição $x = \operatorname{tg} t$, com $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, temos que $x > 0$. Consequentemente, podemos escrever $\operatorname{cotg} t = \dfrac{1}{x}$.
   Da fórmula fundamental da trigonometria resulta que $\operatorname{cosec}^2 t = 1 + \operatorname{cotg}^2 t$. Como $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ temos $\operatorname{cosec} t > 0$ e, portanto, $\operatorname{cosec} t = \sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 t}$. Temos então $\operatorname{cosec} t = \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} = \sqrt{\dfrac{1+x^2}{x^2}}$ e, uma vez que $x > 0$, podemos escrever $\operatorname{cosec} t = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

   (b) Calcule o valor da área da região do plano situada entre $x = 1$ e $x = 2$ e limitada pelo eixo das abcissas e pelo gráfico de f.

   Indicações para a resolução:
   Uma vez que, para todo o $x \in [1,2]$, se tem $f(x) \geq 0$ o valor pedido é dado por

$$\begin{aligned}
\int_1^2 f(x)\,dx &= \int_1^2 \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\,dx \\
&= \left. -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right]_1^2 \\
&= -\frac{\sqrt{2^2+1}}{2} + \frac{\sqrt{1^2+1}}{1} \\
&= -\frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{2}
\end{aligned}$$

5. Determine a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$ e, em caso de convergência, indique o seu valor.

Indicações para a resolução:

Utilizando a definição temos que a natureza do integral impróprio considerado depende do limite

$$L = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}\,dx.$$

Uma vez que

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}\,dx &= \int \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx \\
&= -\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C \\
&= \ln \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x+1|} + \operatorname{arctg} x + C, \quad C \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{t\to+\infty} \left. \ln \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x+1|} + \operatorname{arctg} x \right]_0^t \\
&= \lim_{t\to+\infty} \left(\ln \frac{\sqrt{t^2+1}}{t+1} + \operatorname{arctg} t - \ln 1 - \operatorname{arctg} 0 \right) \\
&= \lim_{t\to+\infty} \left(\ln \frac{\sqrt{t^2+1}}{t+1} + \operatorname{arctg} t \right) \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

o que permite concluir que o integral impróprio considerado é convergente e tem o valor $\frac{\pi}{2}$.

<u>Cálculos auxiliares:</u>

Decomposição da fracção $\dfrac{2x}{(x+1)(x^2+1)}$ em fracções simples.

Temos $\dfrac{2x}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$, com A, B e C constantes reais a determinar.

Da igualdade

$$\begin{aligned}
\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \\
&= \frac{A(x^2+1) + B(x^2+x) + C(x+1)}{(x+1)(x^2+1)} \\
&= \frac{(A+B)x^2 + (B+C)x + A + C}{(x+1)(x^2+1)}
\end{aligned}$$

resulta o sistema

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B+C=2 \\ A+C=0 \end{cases} \iff \begin{cases} A=-B \\ B+C=2 \\ -B+C=0 \end{cases} \iff \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \\ C=1 \end{cases}$$

Consequentemente

$$\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2+1}.$$