

Mecânica e Campo Eletromagnético

2017/2018 – parte 1

Luiz Pereira

luiz@ua.pt



Tópicos

- **Informações Gerais: conteúdos e avaliação**
- **Cinemática de massas pontuais**
 - **Grandezas cinemáticas: generalização 3D**
 - **Posição e trajectória**
 - **Deslocamento e distância**
 - **Velocidade e aceleração**
 - **Equações do movimento obtidas a partir do cálculo**
 - Casos particulares de movimento rectilíneo
 - Uniforme
 - Uniformemente acelerado e retardado
 - **Movimento de projéteis no plano**
 - Caso particular de movimento curvilíneo descrito em coordenadas retangulares
 - **Exemplos de aplicação**

Avaliação Teórico-Prática - Contínua (optativa: Final)

É obrigatória a inscrição no PACO para avaliação final (até 13 de Outubro)

- **Avaliação Contínua**
Três avaliações
- **25% Laboratório + 75% TTP**
TTP: 15% AC1 + 15% AC2 + 70% Teste Final

- Exame Final
- 25 % Laboratório + 75% Exame Final

- **AC1 (1h) : semana de 16 a 20 Outubro**
- **AC2 (1h) : semana de 13 a 17 de Novembro**
- **Teste Final (2h): data provisória: 13 de Dezembro**

- **Laboratório**
 - Notas anteriores desde 2013/14 válidas
- **40% AC + 60% RI**

Reprovação para faltas > 20% das aulas

Programa

- Capítulo 1. Fundamentos de Mecânica Clássica
 - 1.1. Movimento Retilíneo 1D, 2D e 3D
 - 1.1.1. Cinemática da partícula
 - 1.1.2. Dinâmica da partícula
 - 1.1.3. Trabalho e Energia
 - 1.1.4. Dinâmica de um sistema de partículas
- Capítulo 2 - Sistemas oscilatórios

Programa

- Capítulo 3 - Campos elétrico e magnético
 - 3.1. Campo elétrico
 - 3.2. Potencial elétrico
 - 3.3. Lei de Gauss
 - 3.4. Capacidade e condensadores
 - 3.5. Corrente elétrica e resistência
 - 3.6. Campo magnético
 - 3.7. Indução Eletromagnética
 - 3.8. Equações de Maxwell

- Capítulo 4 – Fenómenos ondulatórios

Trabalhos de Laboratório

1.ª Série – MECÂNICA

- 1 – Dinâmica de Translação (movimento linear)
- 2 – Lançamento de Projéteis (movimento a duas dimensões)
- 3 – Dinâmica de Rotação (mecânica do corpo rígido e rotação)

2.ª Série – CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

- 4 – Condensador de placas paralelas (campo elétrico)
- 5 – Circuitos elétricos: Leis de Kirchoff (corrente elétrica e potencial)
- 6 – Bobinas de Helmholtz (campo magnético)

Bibliografia recomendada

- Dossier pedagógico da Unidade Curricular.
- Apontamentos on-line da Unidade Curricular (<http://elearning.ua.pt/>) e referência incluídas.
- R. A. Serway - Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics, Saunders Golden Sunburst Series.
- P.A. Tipler e G. Mosca - Física, Vol I, 5ª ed, Livros técnicos e Científicos Editora, S.A, Rio de Janeiro, 2006.
- Alonso & Finn- Física um curso universitário, Vol I e II, Edgard Bluecher.
- C. Kittel et al.- Curso de Fisica de Berkeley : Mecânica, Vol 1, Edgard Bluecher.
- H. J. Pain, The physics of Vibrations and Waves, Ed. Wiley.
- R. Resnick e D. Halliday - Física, 4ª ed, Livros Técnicos e Científicos Editora.
- R. Kip, Fundamentals of Electricity and Magnetism, McGraw Hill.

*A **Mecânica** é a ciência do movimento. Consiste num conjunto de regras e princípios que se aplicam a todos os tipos de movimento.*

Para a análise e previsão dos movimentos, resultantes de interações conhecidas, foram criados conceitos importantes, como:

- Quantidade de movimento
- Força
- Energia

No entanto, o principio da descrição do movimento baseia-se na cinemática...

Cinemática

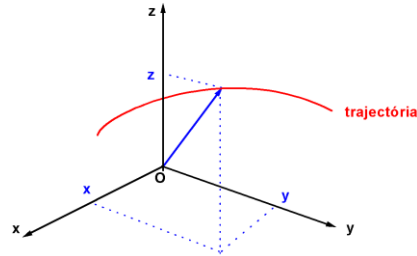
- **Objetivo:** descrever o movimento independentemente das causas que o provocam
 - Reconhecer a diferença entre **posição**, **espaço** e **deslocamento**
 - Reconhecer a diferença entre **velocidade** e **aceleração**
 - Identificar movimento **acelerado** e **retardado**
 - Ser capaz de determinar o **deslocamento**, **velocidade** e **aceleração usando equações do movimento**
 - Interpretar gráficos **posição vs tempo**, **velocidade vs t** e **aceleração vs t**

Estado de Movimento

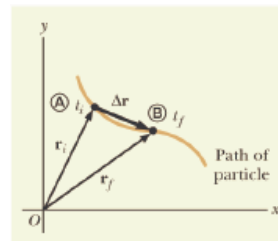
- **Referencial** em relação ao qual o movimento é analisado
- **Vetor posição:** fornece a posição da partícula em qualquer instante $[t, \vec{r}(t)]$

Posição e Trajetória

- Trajetória – lugar geométrico dos pontos ocupados por um ponto material (partícula) P ao longo do tempo (Ex. 2D)
- Deslocamento – grandeza vetorial, variação na posição,



$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$$



Posição e Trajetória (ex. 3D)

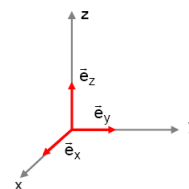
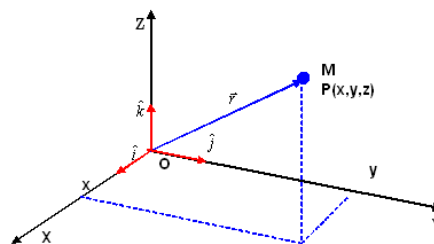
- Sistema de coordenadas cartesianas: posição de uma massa pontual M relativamente à origem
- Posição

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

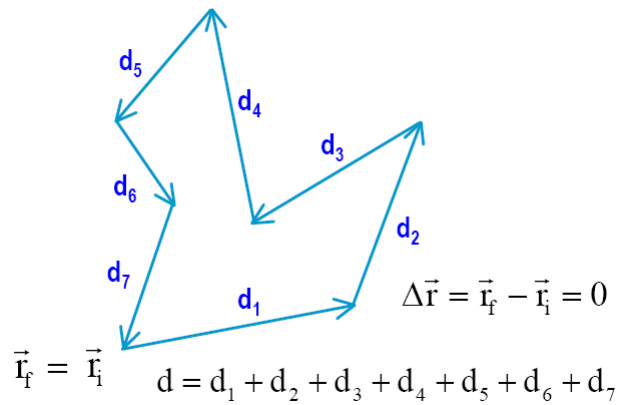
$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- Vetores unitários: versores

$$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$$



Deslocamento e distância



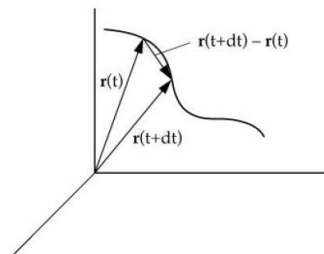
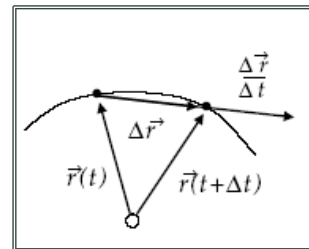
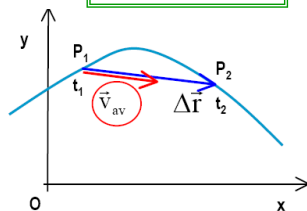
Velocidade

- Velocidade média

[L]/[T]

m/s

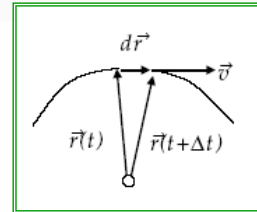
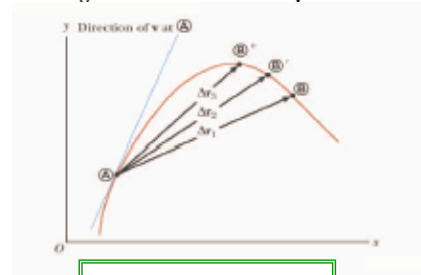
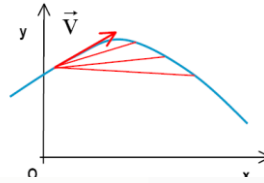
$$\vec{v}_{med} = \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t}$$



Velocidade

- Velocidade instantânea

$$\begin{aligned}
 \vec{v}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \\
 \vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \\
 &= v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} \\
 v &= |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}
 \end{aligned}$$



Posição, obtida pelo cálculo integral

- Dado que

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

- Então

$$\begin{aligned}
 \vec{r}(t) &= \int_{t_0}^t \vec{v}'(t') dt' + \vec{r}(t_0) \\
 \vec{r}(t) &= \left[\int_{t_0}^t v_x(t') dt' + x(t_0) \right] \hat{i} + \left[\int_{t_0}^t v_y(t') dt' + y(t_0) \right] \hat{j} + \left[\int_{t_0}^t v_z(t') dt' + z(t_0) \right] \hat{k} \\
 \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) &= \int_{t_0}^t \vec{v}'(t') dt'
 \end{aligned}$$

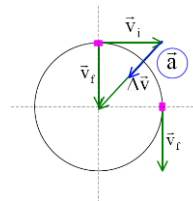
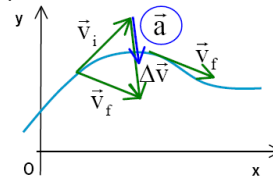
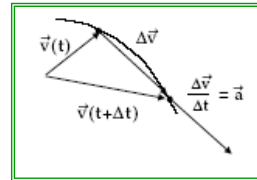
Aceleração

- **Aceleração média**

$$[L]/[T]^2$$

$$m/s^2$$

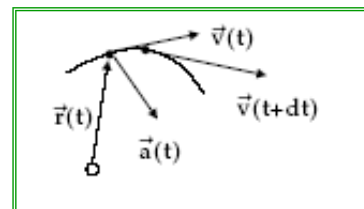
$$\vec{a}_{méd} = \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t}$$



Aceleração

- **Aceleração instantânea**

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \\ \vec{a}(t) &= \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}) \\ &= a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} \\ a &= |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\end{aligned}$$



$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2}$$

Velocidade, obtida pelo cálculo integral

- Dado que $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$
- Então

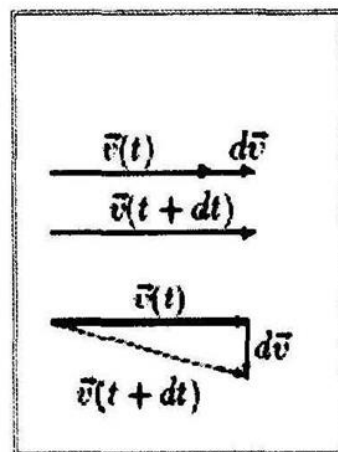
$$\vec{v}(t) = \int_{t_0}^t \vec{a}'(t') dt' + \vec{v}(t_0)$$

$$\vec{v}(t) = \left[\int_{t_0}^t a_x(t') dt' + v_x(t_0) \right] \hat{i} + \left[\int_{t_0}^t a_y(t') dt' + v_y(t_0) \right] \hat{j} + \left[\int_{t_0}^t a_z(t') dt' + v_z(t_0) \right] \hat{k}$$

$$\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0) = \int_{t_0}^t \vec{a}'(t') dt'$$

Aceleração

- Traduz a variação do vetor velocidade por intervalo de tempo
- Não tem que ter o sentido do movimento



Velocidade e Aceleração

- **Ex. 1D**

- **MRU**

- **MRUA**

- **MRUR**



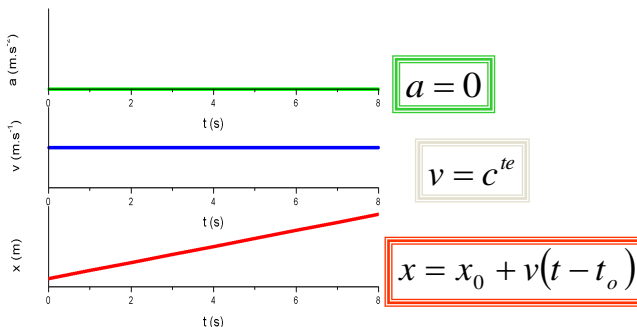
Casos particulares de movimento a 1D (retilíneo)

$$\text{Ex.: } \vec{v}(t) = v(t)\hat{i}$$

1) **Uniforme ($v=c^{te}$)**

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

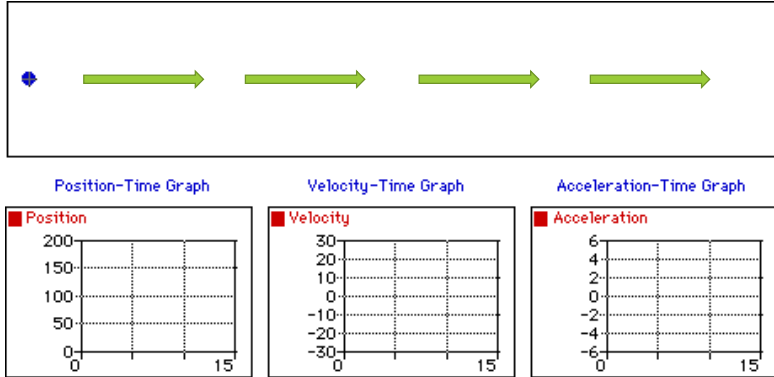
$$\begin{aligned} x(t) - x(t_0) &= \int_{t_0}^t v(t') dt' \\ x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t v(t') dt' \\ x(t) &= x_0 + v \int_{t_0}^t dt' \\ x(t) &= x_0 + v(t - t_0) \end{aligned}$$



Casos particulares de movimento a 1D (retilíneo)

- **Uniforme ($v=c^{te}$)**

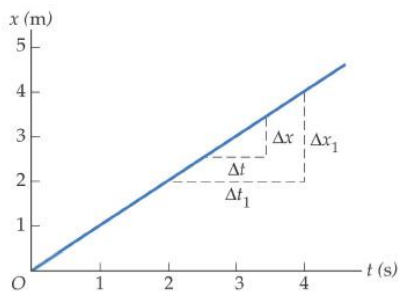
<http://www.PhysicsClassroom.com>



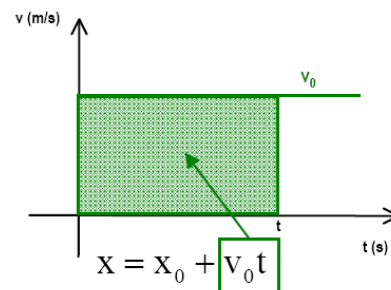
Valores arbitrários
e não correlacionados

Casos particulares de movimento a 1D (retilíneo)

- **Uniforme ($v=c^{te}$)**



Cálculo de v



Casos particulares de movimento a 1D (retilíneo)

2) Uniformemente variado
(a = c^{te}): acelerado ou
retardado

$$Ex.: \vec{a}(t) = a(t)\hat{i}$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

$$\begin{aligned} v(t) - v(t_0) &= \int_{t_0}^t a(t') dt' \\ v(t) &= v_0 + \int_{t_0}^t a(t') dt' \\ v(t) &= v_0 + a \int_{t_0}^t dt' \\ v(t) &= v_0 + a(t - t_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t) - x(t_0) &= \int_{t_0}^t v(t') dt' \\ x(t) - x(t_0) &= \int_{t_0}^t [v_0 + a(t' - t_0)] dt' \\ x(t) - x(t_0) &= v_0 \int_{t_0}^t dt' + a \int_{t_0}^t (t' - t_0) dt' \\ x(t) &= x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \end{aligned}$$

Casos particulares de movimento a 1D (retilíneo)

• Uniformemente variado (a = c^{te}): acelerado ou retardado

Eliminando t:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ v = \frac{dx}{dt} = v_0 + at \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v = v_0 + at \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a} \\ \text{substituindo em } x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \end{array} \right.$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Casos particulares de movimento a 1D (retilíneo)

- **Uniformemente variado ($a = c^{te}$): acelerado (retardado)**

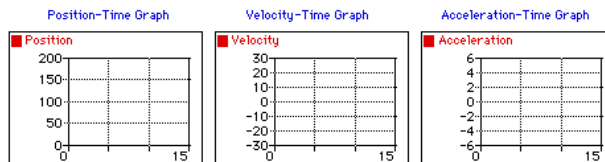
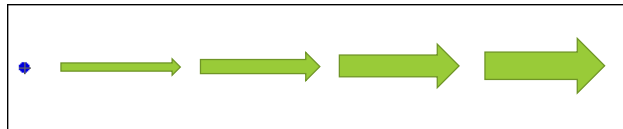
$$a = c^{te}$$

$$v(t) = v_o + a(t - t_o)$$

$$x(t) = x_o + v_o(t - t_o) + \frac{1}{2}a(t - t_o)^2$$

$$v^2 = v_o^2 + 2a(x - x_o)$$

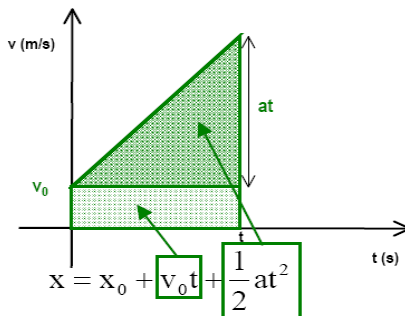
<http://www.PhysicsClassroom.com>



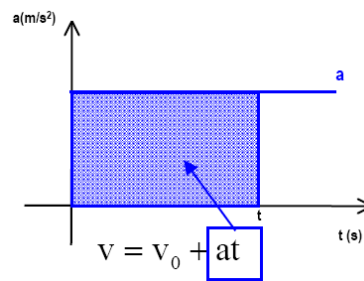
Valores
arbitrários
e não
correlacionados

Casos particulares de movimento a 1D (retilíneo)

- **Uniformemente variado ($a = c^{te}$): acelerado**



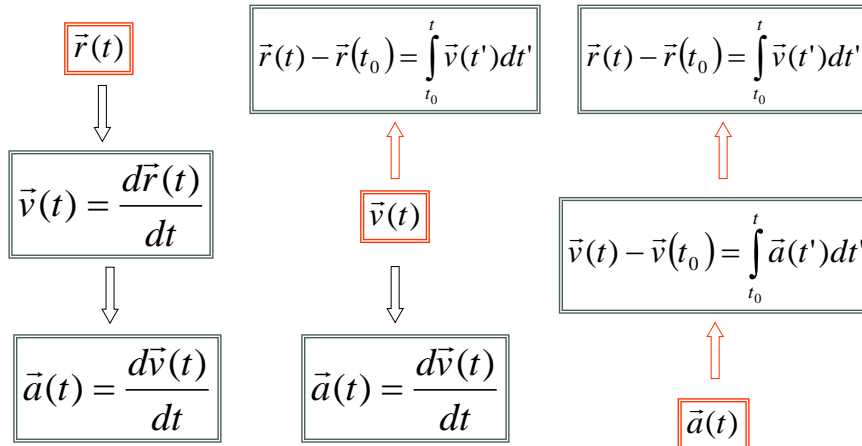
Cálculo de $x - x_o$



Cálculo de $v - v_o$

Cinemática 3D (equações cinemáticas)

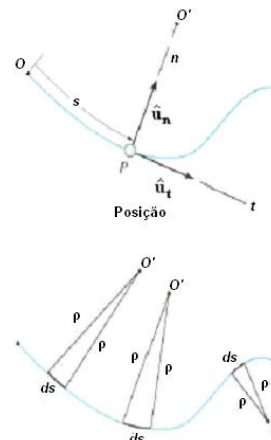
Genericamente



Movimento curvilíneo geral

Componentes tangencial e normal

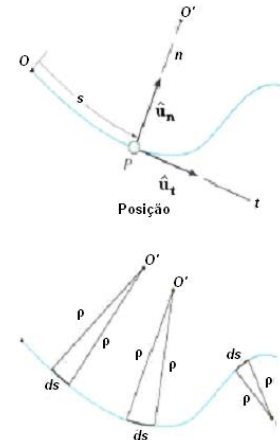
- Quando uma partícula se movimenta ao longo de uma trajetória curvilínea por vezes é conveniente descrever o movimento usando sistemas de coordenadas distintas das cartesianas.
- Quando a trajetória do movimento é conhecida são frequentemente utilizadas as coordenadas nas direções tangente, \hat{t} , e normal, \hat{n} , à trajetória
- O referencial pode ser entendido como um sistema de eixos perpendiculares acoplados ao movimento da partícula:
 - \hat{t} – sempre na direção do movimento
 - \hat{n} – perpendicular ao \hat{t} e sempre dirigido para o centro de curvatura



Movimento curvilíneo geral

Componentes tangencial e normal

- O centro de curvatura O' localiza-se sempre do lado côncavo da trajetória; o raio de curvatura ρ é definido como a distância, medida na perpendicular, da curva ao centro de curvatura num dado ponto.
- A posição da partícula, em qualquer instante, pode ser descrita por uma só coordenada medida sobre a curva a partir de uma origem fixa, igual ao comprimento do arco, $s(t)$.



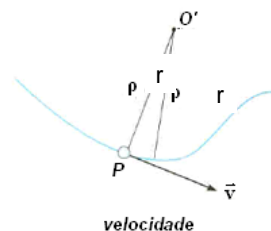
Versores unitários \hat{u}_t, \hat{u}_n

Movimento curvilíneo geral

Componentes tangencial e normal

- A velocidade da partícula tangente à trajetória em qualquer instante será:

$$\vec{v}(t) = \frac{ds}{dt} \hat{u}_t = v \hat{u}_t$$



Movimento curvilíneo geral

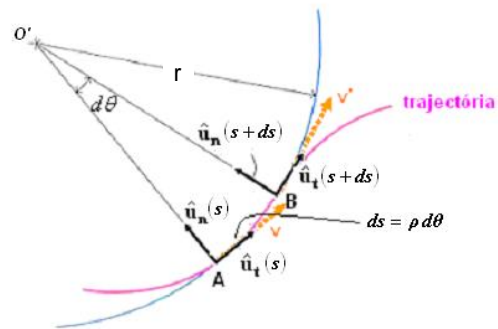
Componentes tangencial e normal

- Num dado intervalo de tempo dt a partícula movimenta-se de **A** para **B**
- O incremento da variável da trajetória s corresponde a

$$ds = r d\theta$$

- A *intensidade* da velocidade é então

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt}$$



Movimento curvilíneo geral

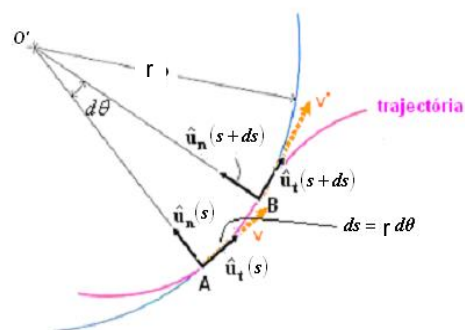
Componentes tangencial e normal

- O **vetor velocidade** é tangente à trajetória em qualquer instante

$$\vec{v} = v \hat{u}_t$$

com

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt}$$



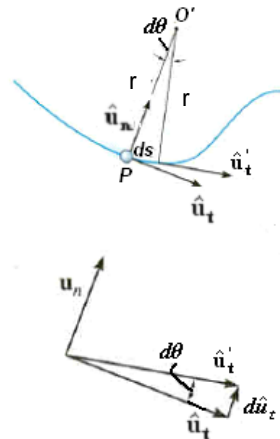
Movimento curvilíneo geral

Componentes tangencial e normal

- Para determinar o vetor aceleração temos que diferenciar o vetor velocidade.
- O vetor aceleração reflete a alteração na **intensidade, direção e sentido da velocidade**

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[v\hat{u}_t] = \frac{dv}{dt}\hat{u}_t + v\frac{d\hat{u}_t}{dt}$$

$$\frac{d\hat{u}_t}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{u}_n$$



Movimento curvilíneo geral

Componentes tangencial e normal

- Assim, e como $v = r \frac{d\theta}{dt}$ então

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_t + v\frac{d\hat{u}_t}{dt}$$

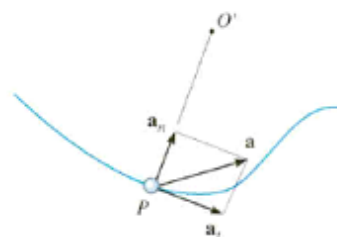
$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_t + \frac{v^2}{r}\hat{u}_n \Leftrightarrow \vec{a}(t) = a_t\hat{u}_t + a_n\hat{u}_n$$

com

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$



Aceleração

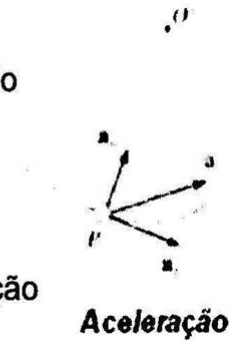
Componentes normal e tangencial do vetor aceleração

 a_t

■ Traduz a variação no módulo do vector velocidade

 a_N

■ Traduz a variação na direcção do vector velocidade



Movimento curvilíneo geral

Casos particulares:

1. Movimento retilíneo



$$a_t = \frac{dv}{dt} \neq 0$$



$$a_n = \frac{v^2}{r(=\infty)} = 0$$

$$\vec{a}(t) = a_t \hat{u}_t + a_n \hat{u}_n$$



Módulo de v varia (a_t paralela à velocidade)

Direção do vector velocidade não se altera e ρ é infinito

Movimento curvilíneo geral

Casos particulares:

2. Movimento ao longo de uma curva com $v=c^{te}$

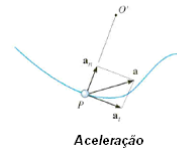


$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0$$



$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

$$\vec{a}(t) = a_t \hat{u}_t + a_n \hat{u}_n$$



Módulo de v não varia (a_t nula)

a_n representa a variação no tempo da direção e sentido do vetor velocidade

Movimento curvilíneo geral

Casos particulares:

2. Movimento ao longo de uma curva com $v=c^{te}$

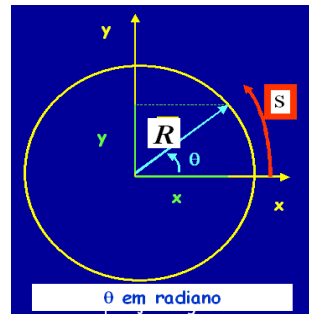


$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0$$



$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

$$\vec{a}(t) = a_t \hat{u}_t + a_n \hat{u}_n$$



Movimento circular uniforme

Movimento curvilíneo geral

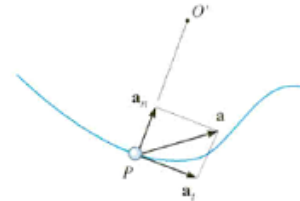
Casos particulares:

3. Componente tangencial $a_t = c^{te}$

$$\Rightarrow a_t = \frac{dv}{dt} = c^{te}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{v^2}{r}$$

$$\vec{a}(t) = a_t \hat{u}_t + a_n \hat{u}_n$$



Aceleração

Neste caso, e segundo esta direcção, tem-se

$$D(t) = D_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a_t (t - t_0)^2$$

$$v(t) = v_0 + a_t (t - t_0)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a_t(D - D_0)$$

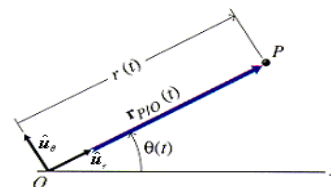
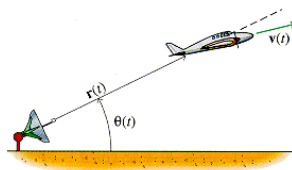
Movimento curvilíneo geral

Coordenadas polares

- Uma outra opção na descrição do movimento consiste em localizar a partícula através da distância radial, r e a posição angular θ em relação a uma direcção fixa.

$$\vec{r}(t) = r \hat{u}_r$$

Versores unitários $\hat{u}_r, \hat{u}_\theta$



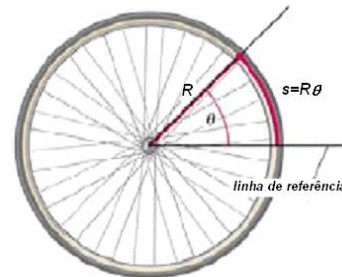
Movimento Circular: Posição angular

Grandezas angulares

- Para este tipo de movimento (caso particular do movimento curvilíneo geral) a distância (**comprimento do arco**) s , o raio R e o ângulo θ relacionam-se por

$$\theta = \frac{s}{R}$$

- $\theta > 0$ no sentido contrário ao sentido dos ponteiros de um relógio (anti horário) a partir da linha de referência
- θ é medido em radiano



$$1 \text{ rev} = 360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

$$\theta_{\text{rad}} = \frac{\pi}{180} \theta_{\text{graus}}$$

Movimento Circular: Velocidade angular média

Grandezas angulares

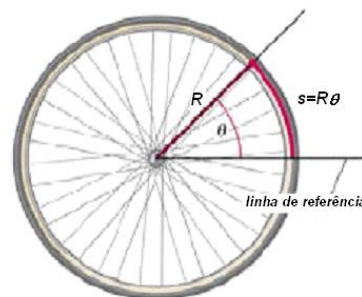
- À medida que o corpo roda θ altera-se com o tempo. Podemos definir o **deslocamento angular** $\Delta\theta$, como

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$$

- O que nos permite estabelecer a **velocidade angular média** como

$$\omega_{\text{méd}} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i}$$

$$\text{rad/s} = \text{s}^{-1}$$



$$1 \text{ rev} = 360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

Movimento Circular: Velocidade angular instantânea

Grandezas angulares

- velocidade angular instantânea

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\text{rad/s} = \text{s}^{-1}$$

- $\omega > 0$ para uma rotação no sentido anti horário
- $\omega < 0$ para uma rotação no sentido horário

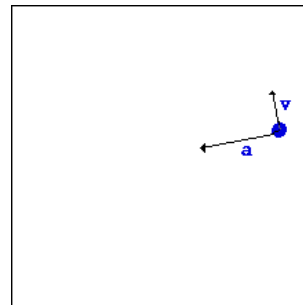
Movimento Circular: Período do movimento

Movimento periódico

- O **período do movimento**, **T**, corresponde ao tempo que a partícula demora a efetuar uma rotação completa

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$



$$\omega = 2\pi f \quad f = \frac{1}{T} \quad \text{s}^{-1} = \text{Hz}$$

Movimento Circular: Aceleração angular média e instantânea

Grandezas angulares

- Podemos definir,

$$\alpha_{\text{méd}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i}$$

$$\text{rad/s}^2 = \text{s}^{-2}$$

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

Movimento Circular Uniforme

Grandezas angulares versus grandezas lineares

$$\omega = c^{te}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\theta(t) - \theta(t_0) = \int_{t_0}^t \omega(t') dt'$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega \int_{t_0}^t dt'$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega(t - t_0)$$

$$s = R\theta$$

Movimento Circular Uniformemente acelerado ou retardado

Grandezas angulares versus grandezas lineares

$$\alpha = c^{te}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\omega(t) - \omega(t_0) = \int_{t_0}^t \alpha(t') dt'$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \omega \int_{t_0}^t dt'$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$$

$$v = R\omega$$

$$\theta(t) - \theta(t_0) = \int_{t_0}^t \omega(t') dt'$$

$$\theta(t) - \theta(t_0) = \int_{t_0}^t [\omega_0 + \alpha(t' - t_0)] dt'$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$$

$$s = R\theta$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

Movimento Circular versus movimento linear

Linear	Circular (Rotação)
x	θ
v	ω
a	α
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$

Movimento Circular: Grandezas angulares versus grandezas lineares

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(R\theta) = \omega R$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = \alpha R$$

