Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I — Teste Diagnóstico

Indicações para uma resolução das questões propostas.

1. (a) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+1}{x^2+2x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}=2$$

   (b) $$\lim_{x\to1}\frac{x^2-x}{x^3-2x+1}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x^2+x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x}{x^2+x-1}=1$$

   Cálculo auxiliar: decomposição em factores do polinómio x^3-2x+1

   Utilizando a Regra de Ruffini obtemos

   $$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & & 1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

   e, portanto, $x^3-2x+1=(x-1)(x^2+x-1)$

2. Observemos em primeiro lugar que o domínio da função f dada por $f(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}$ é o intervalo $]-1,+\infty[$.

   Uma vez que, para todo o $x\in]-1,+\infty[$, $\quad f'(x)=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}=\dfrac{x+2}{(x+1)^2}$

   temos $\quad f'(x)=0\iff\left(\dfrac{x+2}{(x+1)^2}=0\wedge x\in]-1,+\infty[\right)\iff(x=-2\wedge x\in]-1,+\infty[)$

   e, portanto, a equação dada é impossível.

3. (a) $|2x+1|\le2\iff-2\le2x+1\le2\iff-3\le2x\le1\iff-\dfrac{3}{2}\le x\le\dfrac{1}{2}\iff x\in\left[-\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right]$

   (b) $x^2+2x>3\iff x^2+2x-3>0\iff(x\in]-\infty,-3[\cup]1,+\infty[)$
   já que o primeiro membro da desigualdade $x^2+2x-3>0$ é representado geometricamente pela parábola que tem a concavidade voltada para cima e que intersecta o eixo das abcissas em $x=1$ e em $x=-3$.

4. Sendo D o domínio da função f dada por $f(x)=\dfrac{\sqrt{5-x}}{1-\ln x}$, temos
   $$D=\{x\in\mathbb{R}:5-x\ge0\wedge x>0\wedge1-\ln x\ne0\}\,.$$

   Uma vez que:

   - $5-x\ge0\iff x\le5$;
   - $1-\ln x=0\iff\ln x=1\iff x=\mathrm{e}$

   obtemos $D=\{x\in\mathbb{R}:x\le5\wedge x>0\wedge x\ne\mathrm{e}\}=]0,5]\setminus\{\mathrm{e}\}$.

5. A função considerada tem domínio $\mathbb{R}$ e temos, para todo o $x\in\mathbb{R}$,
   $$f'(x)=\mathrm{e}^{x^2-1}+x(2x)\mathrm{e}^{x^2-1}=(1+2x^2)\mathrm{e}^{x^2-1}>0\,,$$

   já que o último membro da igualdade é um produto de funções positivas.

   Como f tem derivada positiva, podemos concluir que é estritamente crescente.