

Matemática Discreta

Lógica Proposicional

Universidade de Aveiro 2016/2017

<http://moodle.ua.pt>

Sistemas matemáticos

- ▶ **Proposição:** afirmação que ou é verdadeira ou é falsa.
- ▶ **Axioma:** proposição evidente ou que, no contexto matemático em que se está a trabalhar, aceitamos como verdadeira.
- ▶ **Teorema:** proposição verdadeira que decorre dos axiomas por aplicação de certas regras, designadas por regras de inferência, ou dos desenvolvimentos determinados pela lógica.
- ▶ **Lema:** teorema “considerado” mais simples, que usualmente é utilizado para facilitar a demonstração de teoremas mais difíceis.
- ▶ **Corolário:** consequência imediata de outros teoremas.
- ▶ **Teoria ou sistema matemático:** conjunto de axiomas, regras de inferência e teoremas (onde se incluem lemas e corolários).

Conjectura

Afirmação não provada, para a qual existe a expectativa de se vir a encontrar uma prova.

Lógica (ou Cálculo) Proposicional

- **Proposição**: afirmação que é verdadeira ou falsa.
- **Princípio da não contradição**: uma proposição não pode ser verdadeira e falsa (ao mesmo tempo).
- **Princípio do terceiro excluído**: uma proposição ou é verdadeira ou é falsa (i.e., verifica-se sempre um destes casos e nunca um terceiro).
- O **valor lógico** de uma proposição é **verdadeiro** (V ou 1) ou **falso** (F ou 0).

Exemplos

São proposições:

1) $2 > 3$

2) Luís Vaz de Camões escreveu os Lusíadas

3) a equação $x^2 = 4$ tem duas soluções reais

Não são proposições:

1) $x > 3$

2) Apreciem a paisagem

3) $x^2 = 4$

Exemplos

São proposições:

1) $2 > 3$

→ Falso

2) Luís Vaz de Camões escreveu os Lusíadas

→ Verdadeiro

3) a equação $x^2 = 4$ tem duas soluções reais

→ Verdadeiro

Não são proposições:

1) $x > 3$

2) Apreciem a paisagem

3) $x^2 = 4$

Decomposição de proposições

Uma proposição

atômica não se pode decompor noutras proposições.

- Denotam-se por letras minúsculas: p, q, \dots

composta pode decompor-se em proposições atômicas e operadores lógicos.

Exemplo de proposição composta:

- Se o cão tem fome então o cão come muito,

proposições atômicas:

- p : "o cão tem fome"
- q : "o cão come muito"

operador lógico: \Rightarrow

$$p \Rightarrow q$$

Operadores lógicos (ou conectivos)

Negação	\neg	(não)
Conjunção	\wedge	(e)
Disjunção	\vee	(ou)
Implicação	\Rightarrow	(se ... então)
Equivalência	\Leftrightarrow	(se e só se (sse))

Tabelas de verdade

Tabela de verdade da **negação**:

p	$\neg p$
1	
0	

Tabelas de verdade

Tabela de verdade da **negação**:

p	$\neg p$
1	0
0	1

Tabelas de verdade (cont.)

Tabela de verdade da **conjunção**:

p	q	$p \wedge q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Tabela de verdade da **disjunção**:

p	q	$p \vee q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Tabelas de verdade (cont.)

Tabela de verdade da **conjunção**:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Tabela de verdade da **disjunção**:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Tabelas de verdade (cont.)

Tabela de verdade da implicação:

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Tabela de verdade da equivalência:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Tabelas de verdade (cont.)

Tabela de verdade da implicação:

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Tabela de verdade da equivalência:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Fórmulas bem formadas

Definição [Fórmula bem formada (fbf)]

1. Uma proposição atômica é uma fbf;
2. se r é uma fbf então (r) é uma fbf;
3. se r é uma fbf então $\neg r$ é uma fbf;
4. se r e s são fbf's então $r \wedge s$, $r \vee s$, $r \Rightarrow s$, $r \Leftarrow s$ e $r \Leftrightarrow s$ são fbf's.

Uma fórmula bem formada também se designa por **expressão lógica**.

Tautologias e contradições

Definição de tautologia e contradição

Uma **tautologia** é uma fórmula que tem valor lógico **1** qualquer que seja a interpretação.

Uma **contradição** é uma fórmula que tem valor lógico **0** qualquer que seja a interpretação.

Exemplo de tautologia: $p \vee \neg p$

Exemplo de contradição: $p \wedge \neg p$

Fórmulas válidas/não válidas, inconsistentes/consistentes e equivalentes

Definição [fórmulas válidas/não válidas]

Uma fbf diz-se **válida** se é uma tautologia, i.e., se é verdadeira sobre qualquer das suas possíveis interpretações.

Uma fbf diz-se **não válida (ou inválida)** se não é válida.

Definição [fórmulas inconsistentes/consistentes]

Uma fbf diz-se **inconsistente** se é uma contradição, i.e., se é falsa qualquer que seja a interpretação.

Uma fbf diz-se **consistente** se não é inconsistente.

Expressões lógicas equivalentes

Definição [fórmulas equivalentes]

Duas expressões lógicas, r e s , dizem-se **equivalentes** (\equiv) se $r \Leftrightarrow s$ é uma tautologia.

- Duas expressões lógicas com as mesmas variáveis são equivalentes quando têm a mesma tabela de verdade.
- Como consequência, podemos afirmar que $(p \Rightarrow q)$ é equivalente a $\neg p \vee q$ conforme decorre das respectivas tabelas de verdade.

Comutatividade, leis de De Morgan e associatividade

- Comutatividade:
 - ▶ $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
 - ▶ $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
- Leis de De Morgan:
 - ▶ $(\neg(p \wedge q)) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
 - ▶ $(\neg(p \vee q)) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
- Associatividade:
 - ▶ $((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$
 - ▶ $((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$

Idempotência, distributividade, lei da contraposição, lei da dupla negação

- Idempotência:
 - ▶ $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$
 - ▶ $(p \vee p) \Leftrightarrow p$
- Distributividade:
 - ▶ $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
 - ▶ $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$
- Lei da contraposição:
 - ▶ $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
- Lei da dupla negação:
 - ▶ $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$

Outras propriedades

Seja p uma proposição arbitrária.

$$\triangleright (p \wedge 1) \Leftrightarrow p;$$

$$\triangleright (p \vee 1) \Leftrightarrow 1;$$

$$\triangleright (p \wedge 0) \Leftrightarrow 0;$$

$$\triangleright (p \vee 0) \Leftrightarrow p;$$

$$\triangleright \neg 1 \Leftrightarrow 0;$$

$$\triangleright \neg 0 \Leftrightarrow 1;$$

Modus ponens e modus tollens

- Modus ponens:

$$\triangleright [p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$$

- Modus tollens:

$$\triangleright [(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$$

Utilização do "ou exclusivo" em fórmulas lógicas

- Para além do conectivo \vee que se designa também por *ou inclusivo*, por vezes adopta-se o *ou exclusivo* (ou *rejeição*) que se denota por $\dot{\vee}$.
- Este *ou exclusivo* aplicado às proposições p e q produz a proposição $p\dot{\vee}q$ que significa p ou q , mas não ambos.
- Assim, a proposição $p\dot{\vee}q$ é verdadeira quando uma e apenas uma das proposições p ou q é verdadeira.