Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I — Ano lectivo 06/07

Resolução do Trabalho Teórico-Prático 1

Seja $f: \ D_f \subset \mathbb{R} \ \longrightarrow \ \mathbb{R}$ uma função.

a) Defina *zero* (ou *raiz*) de f.

Resolução:

Chama-se zero de f a todo o $x_0 \in D_f$ tal que $f(x_0) = 0$.

b) Seja $g: \ D_g \subset \mathbb{R} \ \longrightarrow \ \mathbb{R}$ uma função tal que $g \circ f$ está definida.

i) Mostre que se $y_0 \in D_g$ é um zero de g e $y_0 \in CD_f$, então $g \circ f$ admite pelo menos um zero.

Resolução:

Por hipótese tem-se que $y_0 \in D_g$ é um zero de g, o que significa que

$$g(y_0) = 0\ . \tag{1}$$

Também por hipótese $y_0 \in CD_f$, o que significa que existe $x_0 \in D_f$ tal que

$$f(x_0) = y_0\ . \tag{2}$$

Uma vez que $D_{g\circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$, podemos concluir que $x_0 \in D_{g\circ f}$.
Conjugando (1) e (2) e, atendendo à definição de composta, concluímos que existe $x_0 \in D_{g\circ f}$ tal que $g(f(x_0)) = 0 \Longleftrightarrow (g\circ f)(x_0) = 0$ o que, de acordo com a definição apresentada na alínea anterior, significa que x_0 é um zero de $g \circ f$.

ii) Seja h a restrição de f ao conjunto $D_{g\circ f}$. Mostre que se h não é injectiva, então $g \circ f$ não é injectiva.

Resolução:

Por definição de restrição de uma função temos que

$$\begin{array}{rccl} h: & D_{g\circ f} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & h(x) = f(x)\ . \end{array}$$

Admitamos que h não é injectiva. Então, por definição de função injectiva e por definição de h, existem $x_1, x_2 \in D_{g\circ f}$ tais que $x_1 \neq x_2$ e $f(x_1) = f(x_2)$.
Desta última igualdade resulta que $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, ou seja, por definição de composição de funções, $(g\circ f)(x_1) = (g\circ f)(x_2)$.
Está então provado que existem $x_1, x_2 \in D_{g\circ f}$ tais que $x_1 \neq x_2$ e $(g\circ f)(x_1) = (g\circ f)(x_2)$, o que significa que $g\circ f$ não é injectiva.

c) Suponha que a função f é definida por $f(x) = \dfrac{x^3+x^2-3x+1}{x^2+x+1}$, para todo o $x \in D_f$, e que a função g é definida por $g(x) = \ln x$, para todo o $x \in D_g$.

i) Determine o domínio da função $g \circ f$.

Resolução:

Inicialmente vamos determinar o domínio das funções f e g separadamente.

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{x \in \mathbb{R} : x^2+x+1 \neq 0\right\} \\ &= \mathbb{R} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{atendendo a } (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_g &= \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \\ &= \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Tendo em conta a definição de domínio de uma função composta obtemos

$$\begin{aligned} D_{g\circ f} &= \left\{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \wedge \frac{x^3+x^2-3x+1}{x^2+x+1} > 0\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^3+x^2-3x+1}{x^2+x+1} > 0\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : -1-\sqrt{2} < x < -1+\sqrt{2} \vee x > 1\right\}, \text{ atendendo a } (\mathbf{2}*) \\ &=]-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}[\cup]1, +\infty[\end{aligned}$$

Cálculos Auxiliares $(*)$

Determinação de D_f

Uma vez que

$$x^2+x+1 = 0 \quad \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2-4\times 1\times 1}}{2\times 1} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{x = \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}}_{\textbf{Condição Impossível em } \mathbb{R}},$$

concluímos que $x^2+x+1 \neq 0$ para todos os $x \in \mathbb{R}$.

Cálculos Auxiliares $(2*)$

Zeros do numerador da fracção considerada

Tendo em conta a regra de Ruffini e uma vez que $x = 1$ é uma raiz do polinómio x^3+x^2-3x+1, podemos fazer a seguinte simplificação

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & & 1 & 2 & -1 \\ \hline & 1 & 2 & -1 & \mathbf{0} \end{array} \quad \rightarrow \quad x^3+x^2-3x+1 = (x-1)(x^2+2x-1)$$

Assim

$$\begin{aligned} x^3+x^2-3x+1 = 0 &\Leftrightarrow (x-1)(x^2+2x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x-1 = 0 \vee x^2+2x-1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times 1\times(-1)}}{2\times 1} \\ &\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{-2\pm\sqrt{8}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{-2\pm 2\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1\pm\sqrt{2}, \end{aligned}$$

o que nos permite concluir que os zeros do numerador são $x=0$, $x=-1-\sqrt{2}$, $x=-1+\sqrt{2}$. Uma vez que já sabemos os zeros do numerador podemos construir o seguinte quadro de sinais

x	$-\infty$	$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x^2+2x-1	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\mathbf{x^3+x^2-3x+1}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$

Zeros do denominador da fracção considerada

Tendo em conta os cálculos efectuados em $(*)$ podemos dizer que o denominador não tem zeros reais. Uma vez que o denominador não tem zeros podemos dizer que o seu gráfico corresponde a uma parábola que não intersecta o eixo das abcissas e que se encontra voltada para cima (porque o coeficiente do x^2 é positivo).

Assim, obtemos o seguinte quadro de sinais

x	$-\infty$		$+\infty$
$\mathbf{x^2+x+1}$	$+$	$+$	$+$

Elaboração e estudo do quadro de sinal

Uma vez que anteriormente se estudou a variação do sinal do numerador e do denominador podemos construir um quadro para estudar a variação do sinal da nossa fracção

x	$-\infty$	$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		1	$+\infty$
x^3+x^2-3x+1	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
x^2+x+1	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\mathbf{\dfrac{x^3+x^2-3x+1}{x^2+x+1}}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$

Da análise do quadro anterior resulta

$$\frac{x^3+x^2-3x+1}{x^2+x+1}>0 \quad\Leftrightarrow\quad -1-\sqrt{2}<x<-1+\sqrt{2} \vee x>1$$

ii) Determine o(s) zero(s) da função $g \circ f$.

Resolução:

Pretendemos determinar os valores de $x \in D_{g\circ f}$ tais que

$$(g \circ f)(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(f(x)) = \ln(f(x)) = 0.$$

Uma vez que $\ln(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1$ concluímos que

$$\begin{aligned}
\ln(f(x)) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) = 1\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x^3+x^2-3x+1}{x^2+x+1} = 1\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x^3+x^2-3x+1}{x^2+x+1} - 1 = 0\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x^3+x^2-3x+1-x^2-x-1}{x^2+x+1} = 0\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x^3-4x}{x^2+x+1} = 0\\
&\Leftrightarrow \quad x^3-4x = 0 \wedge \qquad \underbrace{x^2+x+1 \neq 0}_{\textbf{Condição universal em } \mathbb{R}}\\
&\Leftrightarrow \quad x(x^2-4) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x^2-4 = 0\\
&\Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = \pm 2.
\end{aligned}$$

Logo, os zeros de $g \circ f$ são -2, 0 e 2.

iii) O que pode afirmar sobre a injectividade da função $g \circ f$?

Resolução:

Como a função $g \circ f$ tem mais do que um zero concluímos que se trata de uma função não injectiva, uma vez que temos $-2, 0 \in D_{g\circ f}$ com $-2 \neq 0$ e $(g \circ f)(-2) = (g \circ f)(0) = 0$.