Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo I — Agrupamento I 2016/2017

Ficha de Exercícios 1
Complementos de funções reais de variável real
(Funções trigonométricas inversas, Teoremas de Bolzano, Weierstrass, Rolle, Lagrange e Cauchy, Regra de Cauchy, contradomínios e extremos)

1. Em cada uma das alíneas que se seguem, caraterize a inversa da função considerada, indicando também o seu contradomínio.

   (a) f definida por $f(x) = \frac{1}{x+1}$;
   (b) f definida por $f(x) = 2 + \mathrm{e}^{x+1}$;
   (c) f definida por $f(x) = \log_3(2-x)$;
   (d) f definida por $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$.

2. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2} + 2k - 1/2 & \text{se } x > 0 \\ k & \text{se } x = 0 \\ (2k^2+k)\frac{1-\cos x}{x^2} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

   (a) Determine $k \in \mathbb{R}$ por forma que f seja contínua em $x = 0$;
   (b) Mostre que para todo o $x < 0$, $\mathrm{e}^{-1/x^2} \in]0,1[$;
   (c) Supondo $k = 1/2$, defina a inversa da restrição de f a $\mathbb{R}^+$.

3. Resolva as equações e inequações seguintes:

   (a) $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-x}$;
   (b) $2^x \leq \frac{1}{2}$;
   (c) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 \geq 0$;
   (d) $x^2\mathrm{e}^{x+1} - x\,\mathrm{e}^{x-1} < 0$;
   (e) $\frac{1-2^{3x-1}}{3^{x^2-2}-9} \leq 0$.

4. Justifique as igualdades seguintes:

   (a) $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x$, para todo o $x \in [-1\ ,\ 1]$;
   (b) $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x$, para todo o $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$;
   (c) $\cos(\arccos x) = x$, para todo o $x \in [-1\ ,\ 1]$;
   (d) $\arccos(\cos x) = x$, para todo o $x \in [0\ ,\ \pi]$;
   (e) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$, para todo o $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$;
   (f) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$;
   (g) $\operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg} x) = x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$;
   (h) $\operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg} x) = x$, para todo o $x \in]0\ ,\ \pi[$;
   (i) $\ln(\mathrm{e}^x) = x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$;
   (j) $\mathrm{e}^{\ln x} = x$, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$;

(k) sendo $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$.

   (i) $a^{\log_a x} = x$, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$

   (ii) $\log_a(a^x) = x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

5. Em cada uma das alíneas seguintes, defina a função inversa de f e indique o seu contradomínio. Nos casos que envolvem funções trigonométricas, considere as correspondentes restrições principais.

   (a) $f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{sen}\,\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$;
   (b) $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{2\mathrm{arcsen}\,(1-x)}{3}$;
   (c) $f(x) = \mathrm{tg}\,\left(\frac{\pi}{2-x}\right)$;
   (d) $f(x) = \frac{5\ln(x-3)-1}{4}$;
   (e) $f(x) = \mathrm{e}^{1-2x}$;

6. Defina a função *arccosec* que é habitualmente designada por função inversa da função cossecante. Para tal, tome a restrição da cossecante ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

7. Em cada uma das alíneas que se seguem, determine a função derivada da função considerada.

   (a) $f(x) = \sqrt[3]{(2x-1)^2}$;
   (b) $f(x) = x^2\mathrm{e}^{x^2}$;
   (c) $f(x) = \cos(\log_2(x^2))$;
   (d) $f(x) = (1-x^2)\ln x$;

8. Considere a função f definida por $f(x) = 5x^7 + 6x^3 + x + 9$. Sabendo que $f(-1) = -3$ e que f é invertível, determine $(f^{-1})'(-3)$.

9. Considere a função f definida por $f(x) = 4x^3 + x + 2$. Sabendo que f é invertível, determine $(f^{-1})'(2)$.

10. Sejam f e g duas funções reais de variável real definidas por $f(x) = x^3$ e $g(x) = \mathrm{sen}\,x$. Determine, utilizando o teorema da derivada da função inversa, as derivadas seguintes:

    (a) $(f^{-1})'(x)$, para $x \in \mathbb{R}^+$;
    (b) $(g^{-1})'(0)$.

11. Determine a derivada de cada uma das funções seguintes:

    (a) $f(x) = \mathrm{arccotg}\,(\mathrm{sen}\,(4x^3))$;
    (b) $f(x) = \mathrm{arcsen}\,\frac{1}{x^2}$;
    (c) $f(x) = (1+x^2)\,\mathrm{arctg}\,x$;
    (d) $f(x) = \mathrm{arcsen}\sqrt{x}$.

12. Considere a função f definida por $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. Estude f quanto à monotonia.

13. Considere a função f definida em $\mathbb{R}_0^+$ por $f(x) = \ln(1+x) - x$. Mostre que f é decrescente e diga, justificando se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: $f(x) < 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$.

14. Sendo $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$, $x \in \mathbb{R}$, mostre que f possui exatamente um zero no intervalo $]1, 3]$.

15. Mostre que se $a > 0$ a equação $x^3 + ax + b = 0$ não pode ter mais que uma raiz real, qualquer que seja $b \in \mathbb{R}$.

16. Prove que a equação $4x^3 - 6x^2 + 1 = 0$ tem 3 zeros distintos e localize-os em intervalos de $\mathbb{R}$ cujos extremos sejam números inteiros consecutivos.

17. Considere a função polinomial p definida por $p(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$. Prove que a equação $p'(x) = 0$ tem exatamente três soluções reais distintas.

18. Prove que:

    (a) para todo o $x \in]0, 1]$ se tem $\operatorname{arcsen} x > x$;

    (b) para todo o $x \geq 0$ se tem $\operatorname{sen} x \leq x$;

    (c) para todo o $x > 0$ se tem $\ln x < x$.

19. Verifique que $x = 0$ é um extremante local da f.r.v.r. definida por $h(x) = 2x^5 - x^3 + x^2 + 2$. Classifique-o e calcule o respetivo extremo local.

20. Seja f uma função real de variável real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{se } x > 0 \\ \operatorname{sen}(5x) - x & \text{se } x \leq 0 \end{cases} .$$

    (a) Estude f quanto à continuidade.

    (b) Averigue se a função f é diferenciável para $x = 0$.

    (c) Enuncie o Teorema de Rolle. Mostre que é aplicável à função f no intervalo $[0, 1]$ e determine o ponto b desse intervalo tal que $f'(b) = 0$.

21. Sejam f e g funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$ tais que $f'(x) > g'(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$ e $f(a) = g(a)$. Prove que:

    (a) $f(x) > g(x)$, para todo o $x > a$;

    (b) $f(x) < g(x)$, para todo o $x < a$.

22. Seja f uma função real de variável real. Mostre que se f admite terceira derivada no intervalo $[a, b]$ e $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'''(c) = 0$.

23. Mostre que existe $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x}$, mas que não se pode aplicar a regra de Cauchy no seu cálculo .

24. Calcule, caso exista, o limite considerado em cada uma das alíneas que se seguem:

    (a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{3}}{x^2}$;

    (b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - x}{x}$;

    (c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{arcsen} x}{3x}$;

    (d) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x \operatorname{sen} x}$;

    (e) $\displaystyle\lim_{x \to -\pi/4} \frac{\cos(2x)}{1 + \operatorname{cotg} x}$;

    (f) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^p}$ com $p \in \mathbb{R}^+$;

    (g) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{1 - x}{\ln(2 - x)}$;

    (h) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} - x \right)$.

    (i) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}(2x)}$;

    (j) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x+3}$;

    (k) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} [\ln((x+1)^p) - \ln(x^p)]$ com $p \in \mathbb{R}$;

    (l) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^x$;

    (m) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (\ln(3x^2 + 2) - \ln(x^2))$;

    (n) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{\ln x}}$;

    (o) $\displaystyle\lim_{x \to 0} (\cos(2x))^{\frac{1}{x^2}}$;

    (p) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$.

25. Considere a função $f\colon [0,e] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+(\ln x)^2} & se \quad x \in]0,e] \\ 0 & se \quad x = 0\,. \end{cases}$

   (a) Estude f quanto à continuidade.

   (b) Calcule, caso exista, $f'_+(0)$.

   (c) Estude a função quanto à existência de extremos absolutos. Caso existam, calcule-os e classifique-os.

   (d) Identifique o contradomínio de f. Justifique.

26. Considere $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} -x+1 & se \quad x < 0 \\ x+2 & se \quad x \geq 0 \end{cases}$.

   (a) Estude a continuidade de f.

   (b) Mostre que:

      A função f não tem mínimo global em $[-1,1]$.

   (c) A afirmação anterior contradiz o Teorema de Weierstrass? Justifique.

27. Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x^2) & se \quad x \leq 0 \\ \\ \ln(1+x) & se \quad x > 0. \end{cases}$

   (a) Estude f quanto à continuidade em $x = 0$.

   (b) Estude f quanto à diferenciabilidade em $x = 0$.

   (c) Estude f quanto à existência de extremos locais.

   (d) Mostre que existe pelo menos um $\theta \in]-1,0[$ tal que $f'(\theta) = -\frac{\pi}{4}$.

   (e) Mostre que a equação $f(x) = 1 - x^2$ possui exactamente uma solução em $]-1,0[$.

   (f) Considere a função g definida em $\mathbb{R}_0^-$ por $g(x) = f(x)$. Justifique que g é invertível e determine a função inversa de g indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica que a define.

(Miniteste 1, Cálculo I, 2008/2009)

28. Verifique que $x = 1$ é solução da equação $e^{x-1} = x$ e que esta equação não pode ter outra raiz real.

(Exame de Recurso, Cálculo I, 2008/2009)

29. Considere a função f definida pela expressão analítica $f(x) = \operatorname{arcsen}(1-x) + \sqrt{2x - x^2}$.

   (a) Determine o domínio de f.

   (b) Mostre que $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}$.

   (c) Justifique que f atinge um máximo global y_M e um mínimo global y_m. Determine também esses valores.

   (d) Determine o contradomínio de f.

(Miniteste 1, Cálculo I, 2007/2008 (semestre extraordinário))

30. A dinâmica de uma população de uma certa espécie, em ambiente limitado, foi traduzida pela seguinte função real de variável real de domínio $\mathbb{R}_0^+$, definida por

$$p(t) = \frac{1000}{1 + 9e^{-t}}\,,$$

onde $p(t)$ representa o número de indivíduos no tempo t, contado em anos. Observe-se que se trata de um modelo contínuo usado para aproximar um fenómeno de natureza discreta. Na realidade o número de indivíduos é sempre inteiro e pretende-se fazer uma previsão do número de indivíduos no final de cada ano.

(a) Qual é o número inicial de indivíduos na população?

(b) O modelo prevê a extinção da população? Justifique.

(c) Estude a monotonia da função $p(t)$.

(d) No estabelecimento do modelo supôs-se que existe um número máximo de indivíduos que o ambiente poderá suportar. Qual será? Justifique.

(e) Determine a função inversa de p. Explique o seu significado no contexto do problema.

(f) Comente a seguinte afirmação, dizendo se é verdadeira ou falsa:
Antes do final do primeiro ano a população terá duplicado.

31. Numa experiência laboratorial para obter cloreto de sódio, colocou-se numa tina uma certa quantidade de água do mar e expôs-se a uma fonte de calor. Em cada instante t a quantidade de água existente na tina é dada pela expressão

$$Q(t) = 10^3 - 10^3 \log_{10}(t+1)$$

(t em minutos e Q em cm^3).

(a) Mostre que $Q(t) = 10^3 \times \log_{10}\left(\frac{10}{t+1}\right)$.

(b) Determine $Q(0)$ e interprete o seu significado no contexto do problema.

(c) Determine o valor de t que satisfaz $Q(t) = 250$. Interprete o resultado obtido.

(d) De acordo com este modelo, em que instante a tina fica sem água?

32. Considere a função real $N(t)$, de domínio $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty[$, definida por

$$N(t) = a\,e^{-kt}, \text{ onde } a \text{ e } k \text{ são parâmetros(constantes) reais positivos.}$$

A função $N(t)$ é frequentemente usada como modelo do decaimento radioativo de uma substância radioativa. Onde $N(t)$ representa o número de átomos radioativos no instante t, contado em anos, numa amostra de determinado radioisótopo. O parâmetro k é a chamada constante de desintegração.

(a) Estude N quanto à monotonia.

(b) Verifique se N tem extremos absolutos e, em caso afirmativo, identifique-os e indique os respetivos extremantes.

(c) Determine o contradomínio de N.

(d) Sabendo que para determinada substância $k = 10^{-10}\ln(4)$, calcule a sua meia-vida, isto é, calcule o instante de tempo em que o número de átomos radioativos numa amostra é metade do número de átomos radioativos no instante inicial de tempo.

(Primeira Prova, Cálculo I, 2013/2014)