

Matemática Discreta

Relações binárias

Universidade de Aveiro 2016/2017

<http://moodle.ua.pt>

Pares ordenados e produto cartesiano

Definição (de par ordenado)

Dados x e y , designa-se por **par ordenado** e denota-se por (x, y) o conjunto $\{\{x\}, \{x, y\}\}$, ou seja, $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Adicionalmente, dizemos que x é o primeiro elemento e y o segundo.

- Mais geralmente, temos o n -uplo ordenado:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= (x_1, (x_2, x_3, \dots, x_n)), \quad n \geq 3 \\ &= \{\{x_1\}, \{x_1, (x_2, x_3, \dots, x_n)\}\} \\ &= \{\{x_1\}, \{x_1, \{\{x_2\}, \{x_2, (x_3, \dots, x_n)\}\}\}\}.\end{aligned}$$

Produto cartesiano

Definição (produto cartesiano)

Sejam A e B dois conjuntos. Designa-se por produto cartesiano de A e B e denota-se por $A \times B$, o conjunto

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}.$$

- Se $A = B$, então $A^2 = A \times A = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in A\}$.

Relações binárias

Definição de relação binária (relação)

Uma relação binária (ou relação) \mathcal{R} entre os conjuntos A e B é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$.

- **Notação:** escreve-se $x\mathcal{R}y$ para indicar $(x, y) \in \mathcal{R}$.
- **Exemplo 1:** Sendo $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$, então

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\},$$

e

$$\mathcal{R} = \{(1, a), (1, c), (2, a)\} \subseteq A \times B$$

é uma relação entre A e B .

Casos particulares

- Se $A = B$, designamos $\mathcal{R} \subseteq A^2$ por relação binária definida em A (ou sobre A).
- Exemplo 2: a relação \leq definida em $A = \{1, 2, 3\}$ é o subconjunto de A^2 :

$$\leq = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}.$$

- Nota: usualmente, $(x, y) \in \leq$ denota-se por $x \leq y$.
- Exemplo 3: igualmente se conclui que sendo \leq uma relação binária definida em \mathbb{N} ,

$$\leq = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x \leq y\} \subseteq \mathbb{N}^2.$$

- A relação $I = \{(x, x) : x \in A\}$ designa-se por relação identidade de A ou definida em A .

Domínio e imagem

Definição (de domínio e imagem)

Sejam A e B dois conjuntos e \mathcal{R} uma relação binária entre A e B .

- Designa-se por domínio de \mathcal{R} e denota-se por $\text{dom}(\mathcal{R})$, o conjunto

$$\text{dom}(\mathcal{R}) = \{x \in A : (x, y) \in \mathcal{R} \text{ para algum } y \in B\}.$$

- Designa-se por imagem (ou contradomínio) de \mathcal{R} e denota-se por $\text{img}(\mathcal{R})$, o conjunto

$$\text{img}(\mathcal{R}) = \{y \in B : (x, y) \in \mathcal{R} \text{ para algum } x \in A\}.$$

Imagem e imagem recíproca

Definição (de imagem e imagem recíproca de um elemento)

Considere a relação binária $\mathcal{R} \subseteq A \times B$.

- Designa-se por **imagem** de $x \in A$ por \mathcal{R} e denota-se por $\mathcal{R}(x)$, o conjunto

$$\mathcal{R}(x) = \{y \in B : (x, y) \in \mathcal{R}\}.$$

- Designa-se por **imagem recíproca** de $y \in B$ por \mathcal{R} e denota-se por $\mathcal{R}^{-1}(y)$, o conjunto

$$\mathcal{R}^{-1}(y) = \{x \in A : (x, y) \in \mathcal{R}\}.$$

Relação inversa de \mathcal{R} : $\mathcal{R}^{-1} = \{(y, x) \in B \times A : (x, y) \in \mathcal{R}\}.$

Composição

Definição (de composição de relações)

Dadas duas relações \mathcal{R}_1 entre A e B e \mathcal{R}_2 entre B e C designa-se por **composição** de \mathcal{R}_1 com \mathcal{R}_2 (e escreve-se $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$), a relação entre A e C definida por

$$\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1 = \{(a, c) \in A \times C : \text{existe } b \in B \text{ tal que } (a, b) \in \mathcal{R}_1 \wedge (b, c) \in \mathcal{R}_2\}.$$

Exemplo: sendo $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$ e $C = \{\alpha, \beta\}$ e considerando as relações $\mathcal{R}_1 = \{(1, a), (1, b), (2, b)\} \subseteq A \times B$ e $\mathcal{R}_2 = \{(b, \beta), (c, \alpha)\} \subseteq B \times C$, vamos determinar

$$\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1.$$

Propriedades das relações binárias

Dada uma relação binária \mathcal{R} definida num conjunto A , dizemos que \mathcal{R} é

- **reflexiva**: se $(x, x) \in \mathcal{R}$ para todo $x \in A$ ou, de modo equivalente, se $I \subseteq \mathcal{R}$, onde I denota a relação identidade;
- **simétrica**: se $(x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{R}$, para todos $x, y \in A$ ou, de modo equivalente, se $\mathcal{R}^{-1} \subseteq \mathcal{R}$;
- **Anti-simétrica**: se $[(x, y) \in \mathcal{R} \wedge (y, x) \in \mathcal{R}] \Rightarrow x = y$, para todos $x, y \in A$ ou, de modo equivalente, se $\mathcal{R}^{-1} \cap \mathcal{R} \subseteq I$;
- **Transitiva**: se $[(x, y) \in \mathcal{R} \wedge (y, z) \in \mathcal{R}] \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{R}$, para todos $x, y, z \in A$ ou, de modo equivalente, se $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$.

Relação de ordem parcial e conjunto parcialmente ordenado

Definição (de ordem parcial)

Uma relação binária diz-se uma **relação de ordem parcial** se é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

- **Exemplos** de relações de ordem parcial:
 - A relação \leq definida em \mathbb{N} .
 - A relação $|$ (divide) definida no conjunto $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$.

Definição (de conjunto parcialmente ordenado)

Se \mathcal{R} é uma relação de ordem parcial sobre o conjunto A , o par (A, \mathcal{R}) define um **conjunto parcialmente ordenado** (cpo).

Relação de ordem total e conjunto totalmente ordenado

Definição (de relação de ordem total ou linear)

Uma relação de ordem parcial, \mathcal{R} , definida num conjunto A diz-se uma **relação de ordem total** (ou **relação de ordem linear**) se quaisquer que sejam $a, b \in A$ se verifica $(a, b) \in \mathcal{R}$ ou $(b, a) \in \mathcal{R}$.

Definição (de conjunto totalmente ordenado)

Diz-se que o par (A, \mathcal{R}) define um **conjunto totalmente ordenado** quando \mathcal{R} é uma relação de ordem total sobre A .

Nota: a proposição $(a, b) \in \mathcal{R} \vee (b, a) \in \mathcal{R}$, quaisquer que sejam $a, b \in A$, designa-se por **dicotomia**.

Exemplos: 1) (\mathbb{N}, \leq) é um conjunto totalmente ordenado;
2) a relação $|$ não é uma relação de ordem total no conjunto $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$.

Relações de equivalência

Definição (de relação de equivalência)

Uma relação binária diz-se uma **relação de equivalência** se é reflexiva, simétrica e transitiva.

Exemplos:

- A relação $\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$ é uma relação de equivalência em $A = \{a, b, c\}$.
- A relação \mathcal{R} definida por $x \mathcal{R} y$ se $x - y$ é divisível por 2 é uma relação de equivalência em \mathbb{Z} .

Definição (de classe de equivalência)

Se \mathcal{R} é uma relação de equivalência definida em A e $x \in A$, então o subconjunto $[x]_{\mathcal{R}} = \{y \in A : (x, y) \in \mathcal{R}\}$ diz-se a **classe de equivalência** de x e x um seu **representante** (quando não existem dúvidas em relação a \mathcal{R} , essa classe denota-se, simplesmente, por $[x]$).

Propriedades

Teorema

Se \mathcal{R} é uma relação de equivalência definida num conjunto A , então

- 1) $[a] \neq \emptyset$, para todo $a \in A$;
- 2) $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow [a] = [b]$, para todos $a, b \in A$;
- 3) $A = \bigcup_{a \in A} [a]$.

Definição (de conjunto quociente)

Sendo \mathcal{R} uma relação de equivalência definida num conjunto A , o conjunto das classes de equivalência de A designa-se por **conjunto quociente** e denota-se por A/\mathcal{R} , ou seja,

$$A/\mathcal{R} = \{[x] : x \in A\}$$

Partições

Definição (de partição de um conjunto)

Se A é um conjunto não vazio, então uma colecção de subconjuntos $P \subseteq \mathcal{P}(A)$ tal que

- 1) $S \neq \emptyset$, para todo $S \in P$;
- 2) $S_1 \neq S_2 \Rightarrow S_1 \cap S_2 = \emptyset$, quaisquer que sejam $S_1, S_2 \in P$;
- 3) $A = \bigcup_{S \in P} S$.

diz-se uma **partição** de A .

Nota: os elementos de uma partição P designam-se por **blocos** de P .

Partições e conjuntos quociente

Teorema

Se \mathcal{R} é uma relação de equivalência definida num conjunto não vazio A , então o conjunto quociente A/\mathcal{R} é uma partição de A .

Teorema

Seja P uma partição de um conjunto não vazio A e \mathcal{R} a relação definida por $x \mathcal{R} y$ se e só se x e y pertencem ao mesmo bloco de P . Então \mathcal{R} é uma relação de equivalência em A .

Nas condições do teorema anterior, diz-se que \mathcal{R} é a relação **induzida** pela partição P .