Matemática Discreta

Elementos de Teoria dos Grafos

Universidade de Aveiro 2016/2017

http://moodle.ua.pt

Grafos e subgrafos particulares

Problemas de caminho mais curto em grafos

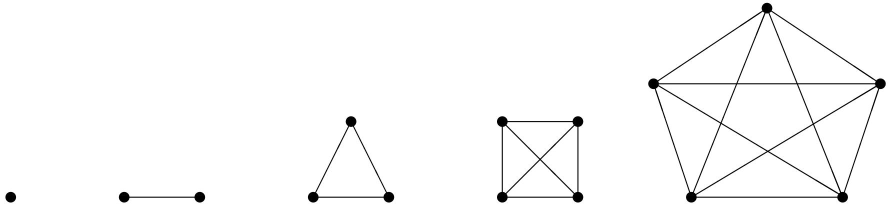
Algoritmo de Dijkstra

Grafos completos e grafos nulos

Definição (de grafo completo e grafo nulo)

Seja G um grafo simples de ordem $n > 0$. Diz-se que G é um grafo completo e denota-se por K_n quando todos os pares de vértices são adjacentes. Por sua vez, diz-se que G é um grafo nulo quando não tem arestas, ou seja, $E(G) = \emptyset$.

- Exemplos: grafos completos $K_1, \ldots, K_5$:



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

Grafos regulares

Observação 1: A menos de isomorfismos, existe um único grafo completo de ordem n, K_n.
Observação 2: Todo o grafo nulo é o complementar de um grafo completo. Podemos denotar o grafo nulo de ordem n por K_n^c.

Definição (de grafo regular)

Um grafo diz-se k-regular se todos os seus vértices têm grau k e diz-se regular se é k-regular para algum k. Os grafos 3-regulares designam-se por grafos cúbicos.

Exemplos: o grafo K_n é $(n-1)$-regular e o grafo nulo é 0-regular.

Grafos bipartidos

Definição (de bipartido)

Um grafo G diz-se bipartido se existe uma partição do seu conjunto de vértices em X e Y tal que não existem arestas entre qualquer par de vértices de X nem entre qualquer par de vértices de Y (ou seja, cada aresta de G tem um extremo em X e outro em Y). Esta partição (X, Y) do conjunto dos vértices de G designa-se por bipartição dos vértices e, neste caso, G denota-se pelo terno (X, Y, E) onde $E = E(G)$.

Teorema

Um grafo G é bipartido se e só se não tem circuitos de comprimento ímpar.

- Exercício: provar o teorema anterior.

Grafos com custos não negativos nas arestas

- Um grafo simples com custos nas arestas representa-se pelo terno $G = (V, E, W)$, onde $W = (w_{ij})$ denota a matriz de custos.
- w_{ij} representa o custo associado à aresta ij, se uma tal aresta existe, ou $w_{ij} = \infty$ se $ij \notin E(G)$.
- Assume-se $w_{ii} = 0$ para cada i.
- Note-se que o custo de um caminho no grafo (digrafo) G é igual à soma dos custos ou pesos das suas arestas (dos seus arcos).

Notação

- $Marca[v]$ - comprimento do caminho mais curto entre s e v de entre os caminhos já determinados;
- $Antecessor[v]$ - antecessor do vértice v no caminho mais curto entre s e v de entre os já determinados;
- *Temporarios* - conjunto dos vértices com marca temporária;
- z - vértice com menor marca temporária corrente, a qual vai passar a marca permanente.

Algoritmo de Dijkstra

- **Entrada**: Grafo G, vértices s e t;
- **Saída**: Marca.

1. Para todo $v \in V$ **faz** $Marca(v) \leftarrow \infty$; $Antecessor(v) \leftarrow 0$; $Marca(s) \leftarrow 0$; $Temporários \leftarrow V \setminus \{s\}$; $z \leftarrow s$;
2. **Repetir**

   2.1 $M \leftarrow \infty$;

   2.2 Para todo $u \in Temporários$ **fazer**

   Se $Marca(u) > Marca(z) + w_{z,u}$ **então**

   $$\begin{cases} Marca(u) \leftarrow Marca(z) + w_{z,u}; \\ Antecessor(u) \leftarrow z; \end{cases}$$

   Se $Marca(u) < M$ **então** $x \leftarrow u$; $M \leftarrow Marca(u)$;

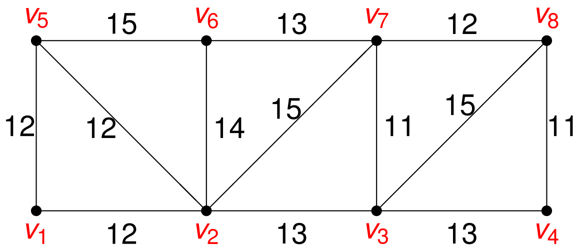
   2.3 $Temporários \leftarrow Temporários \setminus \{x\}$; $z \leftarrow x$;

   até $x = t$;

   devolver $Marca[t]$

Exemplo

Utilizando algoritmo de Dijkstra, vamos determinar um caminho mais curto (e a respectiva distância) entre os vértices v_5 e v_8 do grafo.



Resolução

- A Tabela a seguir apresenta os valores obtidos em cada passo da a aplicação do algoritmo de Dijkstra.

v_5	v_1	v_2	v_3	v_4	v_6	v_7	v_8
$(\mathbf{0}, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$
	$(\mathbf{12}, \mathbf{v_5})$	$(12, v_5)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(15, v_5)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$
		$(\mathbf{12}, \mathbf{v_5})$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(15, v_5)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$
			$(25, v_2)$	$(\infty, -)$	$(\mathbf{15}, \mathbf{v_5})$	$(27, v_2)$	$(\infty, -)$
			$(\mathbf{25}, \mathbf{v_2})$	$(\infty, -)$		$(27, v_2)$	$(\infty, -)$
				$(38, v_3)$		$(\mathbf{27}, \mathbf{v_2})$	$(40, v_3)$
				$(\mathbf{38}, \mathbf{v_3})$			$(39, v_7)$
							$(\mathbf{39}, \mathbf{v_7})$

- Note-se que nesta tabela, para cada vértice v, em cada passo determinamos um par $(Marca[v], Antecessor[v])$, onde $Marca[v]$ corresponde à distância corrente ao vértice inicial que aparece a negrito quando passa a permanente.