



Nome: _____ N° Mec: _____

Turma: _____

N° folhas suplementares: _____

Justifique todas as respostas e indique os cálculos efectuados

- _____ **60**
Pontos
1. Considere a função f definida em \mathbb{R} por $f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan(x^2)}{x} & \text{se } x > 0 \\ \alpha & \text{se } x = 0 \\ \frac{1-x}{x^3+x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$, onde α é um parâmetro real.
- (a) Determine os limites laterais de f na origem.
- (b) Pode indicar um valor para $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que f seja contínua em $x = 0$? Justifique a sua resposta.
- (c) O gráfico de f admite assíntotas verticais? Justifique a sua resposta.
- _____ **30**
Pontos
2. Mostre que, para todo o $a \in \mathbb{R}^+$, a equação $ax^3 + 2x - a = 0$ tem uma única raiz real no intervalo $]0, 1[$.
- _____ **70**
Pontos
3. Considere a função f definida em \mathbb{R} por $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.
- (a) Mostre que f é estritamente crescente.
- (b) Justifique que f é invertível e determine a expressão analítica que define a função inversa de f .
- (c) Mostre que existe $c \in]0, 1[$ tal que $f'(c) = \frac{e-1}{2e+2}$.
- _____ **40**
Pontos
4. Considere a função f definida em $] -4, +\infty[$ por $f(x) = \ln \frac{1}{x+4}$.
Determine o polinómio de Taylor de ordem 3 de f em torno de $a = -3$, utilize-o para determinar um valor aproximado de $\ln \frac{1}{2}$ e mostre que o erro cometido nessa aproximação é inferior a 0.25.