Resolução do Trabalho Teórico-Prático 3

1. Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+2x+2}.$$

(a) Calcule $\int f(x)\,dx$.

Indicações para a resolução:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-1}{x^2+2x+2}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2x+2}\,dx - \int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2-2}{x^2+2x+2}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{(x+1)^2+1}\,dx - 2\int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\ln((x+1)^2+1) - 2\arctan(x+1) + C,\ \ C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

(b) Determine a primitiva de f que toma o valor 1 para $x = -1$.

Indicações para a resolução: A primitiva de f que toma o valor 1 para $x = -1$ tem de satisfazer a seguinte condição

$$\frac{1}{2}\ln((-1+1)^2+1) - 2\arctan(-1+1) + C = 1 \Leftrightarrow C = 1.$$

Logo a primitiva pedida é a função definida por

$$\frac{1}{2}\ln((x+1)^2+1) - 2\arctan(x+1) + 1.$$

2. Seja I um intervalo (não degenerado) de $\mathbb{R}$ e f e g duas funções diferenciáveis em I. Prove que

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Indicações para a resolução:

Uma vez que $f \cdot g$ é diferenciável em I e, para todo o $x \in I$

$$(f \cdot g)'(x) = (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

temos que

$$f'(x)g(x) = (f(x)g(x))' - f(x)g'(x)$$

e, portanto,

$$\int f'(x)g(x)\,dx = \int \Big((f(x)g(x))' - f(x)g'(x)\Big)\,dx$$

$$= \int (f(x)g(x))'\,dx - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Como fg é uma primitiva de $(fg)'$ podemos concluir que

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

3. Calcule os seguintes integrais indefinidos:

   (a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}\,dx$

   Indicações para a resolução:
   Considere-se a mudança de variável definida por $x = 3\,\mathrm{sen}\,t$ com $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$.
   Tem-se que

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{9\,\mathrm{sen}^2 t\sqrt{9-9\,\mathrm{sen}^2 t}} 3\cos t\,dt = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\mathrm{sen}^2 t}\,dt$$
$$= \frac{1}{9}\int \mathrm{cosec}^2 t\,dt = -\frac{1}{9}\cot t + C, C \in \mathbb{R}.$$

   Uma vez que $\frac{x}{3} = \mathrm{sen}\,t$ com $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, temos que $\cos t = \sqrt{1-\frac{x^2}{9}} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$ e, portanto,

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}\,dx = -\frac{1}{9}\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} + C, C \in \mathbb{R}.$$

   (b) $\displaystyle\int (\ln x)^2\,dx$

   Indicações para a resolução:
   Usando o método de primitivação por partes duas vezes tem-se que

$$\int (\ln x)^2\,dx = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\,dx = x(\ln x)^2 - 2\Big(x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,dx\Big)$$
$$= x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C, C \in \mathbb{R}.$$