Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I — Época de Recurso

13 de Julho de 2007

Duração: **2h30m**

Justifique todas as respostas e indique os cálculos efectuados.

1. Considere a função f definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1} & \text{se} \quad x \geq 0 \\ x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$.

   (a) Estude f quanto à continuidade na origem.

   Indicações para uma resolução:
   A função f é contínua em $x = 0$ se $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$.
   Uma vez que
   $$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) = 0$$
   porque é o produto de uma função limitada por um infinitésimo e
   $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x^2+1} = 0$$
   temos que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.
   Como $f(0) = \dfrac{0}{0^2+1} = 0$ temos que $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$ e, portanto, concluímos que f é contínua em $x = 0$.

   (b) Determine, caso existam, as assimptotas do gráfico de f.

   Indicações para uma resolução:

   - Assimptotas verticais
     Como a função f é contínua em $\mathbb{R}$ o gráfico de f não admite assimptotas verticais.
   - Assimptota não vertical à esquerda
     Temos
     $$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \to -\infty} \frac{x \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x} \\ &= \lim_{x \to -\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$
     o que permite concluir que, se o gráfico de f admitir assimptota não vertical à esquerda, então ela tem declive $m = 0$.
     Como
     $$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx) &= \lim_{x \to -\infty} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) \\ &= \lim_{x \to -\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \\ &= 1 \end{aligned}$$
     podemos concluir que a recta de equação $y = 1$ é a assimptota não vertical à esquerda do gráfico de f.

- Assimptota não vertical à direita
  Temos
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x}{x^2+1}}{x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+1}\\ &= 0\end{aligned}$$
  o que permite concluir que se o gráfico de f admitir assimptota não vertical à direita ela tem declive $m = 0$.
  Uma vez que
$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1} = 0$$
  podemos concluir que a recta de equação $y = 0$ é a assimptota não vertical à direita do gráfico de f.

(c) Estude f quanto à diferenciabilidade na origem.

Indicações para uma resolução:
Uma vez que
$$\lim_{h\to0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to0^-}\frac{h\,\mathrm{sen}\,\dfrac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to0^-}\left(\mathrm{sen}\,\frac{1}{h}\right)$$
não existe, temos que não existe $f'_-(0)$ e, portanto, f não é diferenciável na origem.

(d) Calcule o valor da área da região do plano situada entre $x = 0$ e $x = 1$ e limitada pelo gráfico de f e pelo eixo das abcissas.

Indicações para uma resolução:
Uma vez que, para todo o $x \in [0,1]$, se tem $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} \geq 0$, o valor pedido é dado por
$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx\\ &= \left.\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1\\ &= \frac{1}{2}\ln 2\end{aligned}$$

(e) Estude a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ e, em caso de convergência, calcule o seu valor.

Indicações para uma resolução:
Para estudar a natureza do integral impróprio considerado vamos estudar o limite
$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{x}{x^2+1}\,dx\,.$$
Uma vez que
$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C\,,\quad C\in\mathbb{R}$$
temos
$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{x}{x^2+1}\,dx &= \lim_{t\to+\infty}\left.\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^t\\ &= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right)\\ &= +\infty\end{aligned}$$
e, portanto, o integral impróprio considerado é divergente.

2. Considerando a restrição principal do seno, caracterize a função inversa da função g definida por $g(x) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arcsen}(x+1)$.

Indicações para uma resolução:

Por definição de inversa de uma função temos que $D_{g^{-1}} = CD_g$ e $CD_{g^{-1}} = D_g$.

- *Determinação do contradomínio de* g^{-1}
  Como $D_g = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x+1 \leq 1\} = [-2,0]$ temos que $CD_{g^{-1}} = [-2,0]$.
- *Determinação do domínio de* g^{-1}
  Para todo o $x \in [-2,0]$, $-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arcsen}(x+1) \leq \frac{\pi}{2}$ pelo que
  $$0 \leq \frac{\pi}{2} + \operatorname{arcsen}(x+1) \leq \pi$$
  e, portanto, $D_{g^{-1}} = CD_g = [0,\pi]$.
- *Determinação da expressão analítica de* g^{-1}
  Temos, para todo o $x \in [-2,0]$ e, para todo o $y \in [0,\pi]$,
  $$\begin{aligned} y = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arcsen}(x+1) &\iff \operatorname{arcsen}(x+1) = y - \frac{\pi}{2} \\ &\iff x+1 = \operatorname{sen}\left(y - \frac{\pi}{2}\right) \\ &\iff x = -1 + \operatorname{sen}\left(y - \frac{\pi}{2}\right) . \end{aligned}$$
  Uma vez que
  $$\operatorname{sen}\left(y - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} y \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos y \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos y$$
  temos $x = -1 - \cos y$.
  Então, para todo o $x \in [0,\pi]$, $\quad g^{-1}(x) = -1 - \cos x$.

Logo g^{-1} é a função de contradomínio $[-2,0]$ definida por

$$\begin{array}{rccc} g^{-1}: & [0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & -1-\cos x \end{array}$$

3. Seja h a função definida por $h(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Mostre que h possui exactamente um zero no intervalo $]1,3[$.

Indicações para uma resolução:

Uma vez que:

- a função f é uma função polinomial, logo contínua em $[1,3]$;
- $f(1) = 1 - 6 + 9 - 1 = 3 > 0$;
- $f(3) = 27 - 54 + 27 - 1 = -1 < 0$;

o Teorema de Bolzano garante que existe pelo menos um zero de f no intervalo $]1,3[$.

Vamos agora provar que f admite apenas um zero em $]1,3[$.

Uma vez que f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)\,,$$

temos

$$f'(x) = 0 \iff x = 1 \vee x = 3\,.$$

Dado que, por um Corolário do Teorema de Rolle, entre dois zeros de f' existe, no máximo, um zero de f tem-se que no intervalo $]1,3[$ existe, no máximo, um zero de f.

Podemos então concluir que no intervalo $]1,3[$ existe exactamente um zero de f.

4. Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ e f uma função definida em I.

   (a) Defina primitiva de f e mostre que se F é uma primitiva de f, então, para todo o $k \in \mathbb{R}$, $G = F + k$ é também uma primitiva de f.

   Indicações para uma resolução:

   Chama-se primitiva de f a toda a função F definida em I, onde I é um intervalo não degenerado de $\mathbb{R}$, tal que $F'(x) = f(x)$, para todo o $x \in I$.

   Para provar que G é uma primitiva de f temos de provar que, para todo o $x \in I$, $G'(x) = f(x)$.

   Para todo o $x \in I$ temos, atendendo a que a derivada da soma é a soma das derivadas e a que a derivada da função constante é a função nula, $G'(x) = F'(x)$. Como F é uma primitiva de f, temos $F'(x) = f(x)$, para todo o $x \in I$, e, portanto, $G'(x) = f(x)$, para todo o $x \in I$, como pretendíamos.

   (b) Suponha que f é a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = 2x \operatorname{arctg} x$. Determine a primitiva de f que se anula em $x = 1$.

   Indicações para uma resolução:

   Vamos, em primeiro lugar, determinar a família das primitivas de f. Para efeitos de aplicação do método de primitivação por partes consideremos

$$\begin{aligned} u'(x) = 2x \quad &\Longrightarrow \quad u(x) = x^2 \\ v(x) = \operatorname{arctg} x \quad &\Longrightarrow \quad v'(x) = \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

   Temos então

$$\begin{aligned} \int 2x \operatorname{arctg} x \, dx &= x^2 \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx \\ &= x^2 \operatorname{arctg} x - \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\ &= x^2 \operatorname{arctg} x - x + \operatorname{arctg} x + C \\ &= (x^2+1) \operatorname{arctg} x - x + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   A primitiva de f que se anula em $x = 1$ é a função F que satisfaz a condição

$$F(1) = (1^2+1) \operatorname{arctg} 1 - 1 + C = 0 \Longleftrightarrow C = 1 - \frac{\pi}{2}\,,$$

   ou seja, é a função F definida por

$$F(x) = (x^2+1) \operatorname{arctg} x - x + 1 - \frac{\pi}{2}\,.$$

5. Em cada uma das alíneas que se seguem calcule o integral indefinido considerado.

   (a) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(x^2+2x+2)}\, dx$

   Indicações para uma resolução:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x+1)(x^2+2x+2)}\, dx &= \int \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{x+2}{x^2+2x+2}\right) dx \\ &= -\ln|x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+2x+2}\, dx \\ &= -\ln|x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\, dx + \frac{1}{2}\int \frac{2}{(x+1)^2+1}\, dx \\ &= -\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+1) + C \\ &= \ln\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{|x+1|} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+1) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares:

Decomposição da fracção $\dfrac{x}{(x+1)(x^2+2x+2)}$ em fracções simples.

Uma vez que o polinómio x^2+2x+2 não tem raízes reais temos

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

com A, B, C constantes reais a determinar. Da igualdade

$$\begin{aligned} \frac{x}{(x+1)(x^2+2x+2)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2} \\ &= \frac{A(x^2+2x+2)+B(x^2+x)+C(x+1)}{(x+1)(x^2+2x+2)} \\ &= \frac{(A+B)x^2+(2A+B+C)x+2A+C}{(x+1)(x^2+2x+2)} \end{aligned}$$

resulta

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+B+C=1 \\ 2A+C=0 \end{cases} \iff \begin{cases} C=2 \\ A=-1 \\ B=1 \end{cases}$$

e, portanto,

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+2x+2)} = -\frac{1}{x+1} + \frac{x+2}{x^2+2x+2}\,.$$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Indicações para uma resolução:

Efectuando a substituição definida por $x = \operatorname{sen} t$ com $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ temos

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{(1-\operatorname{sen}^2 t)\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}}\cos t\,dt \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 t\cos t}\cos t\,dt \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 t}\,dt \\ &= \int \sec^2 t\,dt \\ &= \operatorname{tg} t + C \\ &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C\,, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares:

Como $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ temos $\cos t > 0$ pelo que $\cos t = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{1-x^2}$ e, portanto, $\operatorname{tg} t = \dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

6. Considere a função F definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \mathrm{e}^{t^2}\,dt$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Estude F quanto à existência de extremos locais.

Indicações para uma resolução:

Uma vez que a função g definida por $g(x) = x^2$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e a função f definida por $f(t) = \mathrm{e}^{t^2}$ é contínua em $\mathbb{R}$, o Teorema Fundamental do Cálculo Integral garante que a função F é diferenciável, logo contínua, em $\mathbb{R}$ e

$$F'(x) = g'(x)f(g(x)) = 2x\mathrm{e}^{x^4},$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Como a função exponencial é positiva em $\mathbb{R}$ temos $F'(x) = 0 \iff x = 0$, $F'(x) > 0 \iff x > 0$ e $F'(x) < 0 \iff x < 0$ e, portanto, F admite em $x = 0$ um mínimo local $F(0) = \displaystyle\int_0^0 \mathrm{e}^{t^2}\,dt = 0$.