Matemática Discreta

LPO6

Universidade de Aveiro 2016/2017

http://moodle.ua.pt

Resolventes de cláusulas

Aplicação do princípio da resolução à lógica de primeira ordem

Formulação geral da implementação do princípio da resolução

Implementação em excel do algoritmo de resolução

Unificador mais geral de dois ou mais literais e factores

Definição (factor)

Se σ é o unificador mais geral de dois ou mais literais (com o mesmo sinal) de uma cláusula C, então $C\sigma$ é um factor de C.

Exemplo: Considerando a cláusula

$$C = P(x) \vee P(f(y)) \vee Q(x),$$

verifica-se que os literais $L_1 : P(x)$ e $L_2 : P(f(y))$ têm o unificador mais geral $\sigma = \{f(y)/x\}$. Então

$$C\sigma = P(f(y)) \vee Q(f(y))$$

é um factor de C.

Resolvente binária

Definição (de resolvente binária)

Sejam L_1 e L_2 literais das cláusulas C_1 e C_2 as quais não têm qualquer variável em comum. Se L_1 e $\neg L_2$ têm o mesmo unificador mais geral σ, então $(C_1\sigma - L_1\sigma) \cup (C_2\sigma - L_2\sigma)$ diz-se resolvente binária de C_1 e C_2.

Exemplo: Considerando as cláusulas

$C_1 : \; P(x) \vee Q(x)$ e $C_2 : \neg P(a) \vee R(y)$,

onde a é uma constante. Os literais $L_1 : P(x)$ e $\neg L_2 : P(a)$ têm o unificador mais geral $\sigma = \{a/x\}$. Assim,

$$(C_1\sigma - L_1\sigma) \cup (C_2\sigma - L_2\sigma) = Q(a) \vee R(y).$$

Logo, $Q(a) \vee R(y)$ é a resolvente binária de C_1 e C_2.

Resolventes de cláusulas

Definição (de resolvente de cláusulas)

Designa-se por resolvente das cláusulas C_1 e C_2, uma das seguintes resolventes:

1. uma resolvente binária de C_1 e C_2;
2. uma resolvente binária de C_1 e um factor de C_2;
3. uma resolvente binária de um factor de C_1 e C_2;
4. uma resolvente binária de um factor de C_1 e de um factor de C_2.

Exemplo

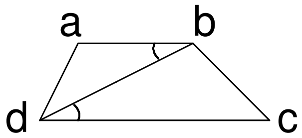
Vamos considerar as cláusulas
$C_1 = P(x) \vee P(f(y)) \vee R(g(y))$ e $C_2 = \neg P(f(g(a))) \vee Q(b)$.

- $C_{1'} = P(f(y)) \vee R(g(y))$ é um factor de C_1;
- $R(g(g(a))) \vee Q(b)$ é uma resolvente binária de um factor de $C1'$ e C_2
- $R(g(g(a))) \vee Q(b)$ é uma resolvente de C_1 e C_2.

Aplicação do princípio de resolução à lógica de primeira ordem

Exemplo de aplicação

Vamos provar, utilizando o princípio da resolução, que os ângulos internos alternos formados pelas diagonais de um trapézio $T(a,b,c,d)$ são iguais.



- A_1: $(\forall x)(\forall y)(\forall u)(\forall v)\ T(x,y,u,v) \Rightarrow P(x,y,u,v)$ (a recta que contém o segmento xy é paralela à recta que contém o segmento uv);
- A_2: $(\forall x)(\forall y)(\forall u)(\forall v)\ P(x,y,u,v) \Rightarrow E(x,y,v,u,v,y)$ (os ângulos xyv e uvy são iguais);
- A_3: $T(a,b,c,d)$.

Aplicação do princípio de resolução à lógica de primeira ordem (cont.)

- Vamos provar que os ângulos internos alternos formados pelas diagonais de um trapézio são iguais, provando que
- $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \neg E(a,b,d,c,d,b)$ é inconsistente.
- Ou seja, que o conjunto de cláusulas:

$$\begin{aligned} S \;=\; \{ & \neg T(x,y,u,v) \vee P(x,y,u,v), \\ & \neg P(x,y,u,v) \vee E(x,y,v,u,v,y), \\ & T(a,b,c,d), \\ & \neg E(a,b,d,c,d,b)\} \end{aligned}$$

é inconsistente.

Procedimento de aplicação do princípio da resolução

A implementação da aplicação do princípio da resolução a um conjunto de cláusulas, S, pode fazer-se de acordo com os seguintes passos:
1) Determinar as resolventes dos pares das cláusulas de S.
2) Juntar as resolventes determinadas em 1) ao conjunto S.
3) Determinar, as resolventes que decorrem do conjunto anteriormente obtido e repetir este procedimento, até que se obtenha a cláusula vazia $\diamondsuit$.

Sendo $S^0, S^1, \ldots, S^n$ os conjuntos de resolventes, obtém-se
$S^0 = S$;
$S^n = \{$ resolvente de C_1 e $C_2 \ : \ C_1 \in S^0 \cup S^1 \cup \cdots \cup S^{n-1}$ e $C_2 \in S^{n-1}\}$,
$n = 1, 2, \ldots$

Implementação em Excel

- INPUT: S (conjunto de cláusulas)
  1. $k = 0$;
  2. $S^0 = S$;
  3. Criar um número de colunas igual ao número de literais de S^0 e identificá-las pelos respectivos literais;
  4. Criar um número de linhas igual ao número de cláusulas de S^0 e identificá-las pelas respectivas cláusulas;
  4. Para cada linha e coluna:
     - se o correspondente literal aparece em S^0 não negado atribuir o valor 1;
     - se aparece negado atribuir o valor -1;
     - se não faz parte da cláusula atribuir o valor 0.

Implementação em Excel (cont.)

- Enquanto existirem pelo menos duas linhas que contenham duas células, associadas à mesma coluna, com sinais contrários, obter S^{k+1} pela "adição", $\oplus$, dos respectivos pares de linhas, onde:

$\oplus$	-1	0	1
-1	-1	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	1

- Se resultar uma linha de zeros (correspondente à cláusula vazia) então STOP (conclui-se que S é inconsistente); senão fazer $k = k + 1$;

Implementação em Excel (cont.)

- Exemplo: Seja $S^0 = \{P, \neg U, \neg S \vee U, \neg P \vee S\}$

	Número da cláusula	P	S	U
S^0	(1^a): P	1	0	0
	(2^a): $\neg U$	0	0	-1
	(3^a): $\neg S \vee U$	0	-1	1
	(4^a): $\neg P \vee S$	-1	1	0
S^1	(5^a)=(1^a) $\oplus$ (4^a)	0	1	0
	(6^a)=(2^a) $\oplus$ (3^a)	0	-1	0
	(7^a)=(3^a) $\oplus$ (4^a)	-1	0	1
S^2	(8^a)=(1^a) $\oplus$ (7^a)	0	0	1
	(9^a)=(2^a) $\oplus$ (7^a)	-1	0	0
	(10^a)=(3^a)$\oplus$ (5^a)	0	0	1
	(11^a)=(4^a)$\oplus$ (6^a)	-1	0	0
	(12^a)=(5^a)$\oplus$ (6^a)	0	0	0