Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I — Segundo Mini-Teste

Resolução

Duração: **1h15m**

Justifique todas as respostas e indique os cálculos efectuados.

1. Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \mathrm{e}^x$.

   (a) Escreva a fórmula de Mac-Laurin de ordem n (com resto de Lagrange) para a função f.

   Indicações para uma resolução:
   A fórmula de Mac-Laurin de ordem n (com resto de Lagrange) é dada por

   $$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k\,!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)\,!} x^{n+1} \ ,$$

   para algum ξ entre 0 e x.
   Uma vez que $f(0) = \mathrm{e}^0 = 1$ e, para todo o $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x) = \mathrm{e}^x$, obtemos

   $$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,!} x^k + \frac{\mathrm{e}^\xi}{(n+1)\,!} x^{n+1} \ ,$$

   para algum ξ entre 0 e x.

   (b) Seja p_n o polinómio de Mac-Laurin de ordem n da função f.
   Mostre que, para todo o $x \in]-1, 0[$, o erro que se comete quando se aproxima $f(x)$ por $p_n(x)$ é inferior a $\dfrac{1}{(n+1)!}$.

   Indicações para uma resolução:
   O erro que se comete quando se aproxima $f(x)$ por $p_n(x)$ é dado por

   $$|R_n(x)| = \left| \frac{\mathrm{e}^\xi}{(n+1)\,!} x^{n+1} \right| = \left| \frac{\mathrm{e}^\xi}{(n+1)\,!} \right| |x|^{n+1} = \frac{\mathrm{e}^\xi}{(n+1)\,!} |x|^{n+1} \,.$$

   Atendendo a que $x \in]-1, 0[$ temos $|x| < 1$ e, portanto,

   $$|x|^{n+1} < 1 \,. \tag{1}$$

   Uma vez que $x \in]-1, 0[$ e ξ está entre 0 e x temos $-1 < \xi < 0$ e, como a função exponencial é estritamente crescente, temos

   $$\mathrm{e}^{-1} < \mathrm{e}^\xi < 1 \,. \tag{2}$$

   Utilizando as desigualdades (1) e (2) obtemos, para todo o $x \in]-1, 0[$,

   $$|R_n(x)| = \frac{\mathrm{e}^\xi}{(n+1)\,!} |x|^{n+1} < \frac{1}{(n+1)\,!} \,,$$

   como pretendíamos.

Cálculo I — Segundo Mini-Teste

2. Sejam f e g duas funções diferenciáveis tais que $f \circ g$ está definida e h a função definida por $h(x) = g'(x)f(g(x))$. Sabendo que f é primitivável e que F é uma primitiva de f, mostre que $F \circ g$ é uma primitiva de h.

   Indicações para uma resolução:

   Temos de provar que $(F \circ g)'(x) = h(x)$.

   Utilizando o teorema da derivada da função composta temos $(F \circ g)'(x) = g'(x)F'(g(x))$, ou seja, uma vez que F é uma primitiva de f, $(F \circ g)'(x) = g'(x)f(g(x)) = h(x)$, como pretendíamos.

3. Calcule:

   (a) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1-\ln^4 x}}\, dx$, efectuando a substituição definida por $\ln x = t$.

   Indicações para uma resolução:
   Efectuando a substituição definida por $\ln x = t$ que é equivalente a $x = \mathrm{e}^t$ obtemos

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1-\ln^4 x}}\, dx &= \int \frac{t}{\mathrm{e}^t\sqrt{1-t^4}}\,\mathrm{e}^t\, dt \\
&= \int \frac{t}{\sqrt{1-(t^2)^2}}\, dt \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2t}{\sqrt{1-(t^2)^2}}\, dt \\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{arcsen}(t^2) + C \\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{arcsen}(\ln^2 x) + C, \quad C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

   (b) $\displaystyle\int \frac{x+4}{x(x^2+2)}\, dx$

   Indicações para uma resolução:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+4}{x(x^2+2)}\, dx &= \int \left(\frac{2}{x} + \frac{-2x+1}{x^2+2}\right) dx \\
&= \int \frac{2}{x}\, dx - \int \frac{2x}{x^2+2}\, dx + \int \frac{1}{x^2+2}\, dx \\
&= 2\ln|x| - \ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x/\sqrt{2}\right)^2 + 1}\, dx \\
&= \ln\frac{x^2}{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{2}} + C, \quad C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

   <u>Cálculos auxiliares:</u>
   Decomposição da fracção $\dfrac{x+4}{x(x^2+2)}$ em fracções simples.
   Temos $\dfrac{x+4}{x(x^2+2)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+2}$, com A, B e C constantes reais a determinar.
   Da igualdade

$$\begin{aligned}
\frac{x+4}{x(x^2+2)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2} \\
&= \frac{A(x^2+2) + Bx^2 + Cx}{x(x^2+2)} \\
&= \frac{(A+B)x^2 + Cx + 2A}{x(x^2+2)}
\end{aligned}$$

resulta o sistema

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=1 \\ 2A=4 \end{cases} \iff \begin{cases} B=-2 \\ C=1 \\ A=2 \end{cases}$$

Consequentemente

$$\frac{x+4}{x(x^2+2)} = \frac{2}{x} + \frac{-2x+1}{x^2+2}.$$

4. Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 \cos x$.

   (a) Calcule o integral indefinido $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

   Indicações para uma resolução:
   Para efeitos de aplicação do método de primitivação por partes

   sendo $u'(x) = \cos x$ temos $u(x) = \operatorname{sen} x$
   e sendo $v(x) = x^2$ temos $v'(x) = 2x$.

   Temos então

   $$\int x^2 \cos x\,dx = x^2 \operatorname{sen} x - \int 2x \operatorname{sen} x\,dx$$

   Utilizando uma vez mais o método de primitivação por partes

   sendo $u'(x) = \operatorname{sen} x$ temos $u(x) = -\cos x$
   e sendo $v(x) = 2x$ temos $v'(x) = 2$

   pelo que

   $$\begin{aligned} \int x^2 \cos x\,dx &= x^2 \operatorname{sen} x - \left(-2x\cos x + \int 2\cos x\,dx\right) \\ &= x^2 \operatorname{sen} x + 2x\cos x - \int 2\cos x\,dx \\ &= x^2 \operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x + C \\ &= (x^2-2)\operatorname{sen} x + 2x\cos x + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   (b) Determine a primitiva de f que se anula em $x = \pi$.

   Indicações para uma resolução:
   De acordo com a alínea anterior a primitiva de f que se anula em $x = \pi$ é a função F dada por $F(x) = (x^2-2)\operatorname{sen} x + 2x\cos x + C$ e que satisfaz a condição $F(\pi) = 0$. Uma vez que

   $$F(\pi) = 0 \iff (\pi^2-2)\operatorname{sen}\pi + 2\pi\cos\pi + C = 0 \iff C = 2\pi$$

   a primitiva pedida é a função F dada por $F(x) = (x^2-2)\operatorname{sen} x + 2x\cos x + 2\pi$.