Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I — Ano lectivo 06/07

Resolução do Trabalho Teórico-Prático 3

1. Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ e f uma função definida em I.

   (a) Defina primitiva de f.

   Indicações para a resolução:
   Chama-se primitiva de f a toda a função F definida em I, onde I é um intervalo não degenerado de $\mathbb{R}$, tal que $F'(x) = f(x)$, para todo o $x \in I$.

   (b) Mostre que se F_1 e F_2 são duas primitivas de f, então existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $F_1 - F_2 = k$.

   Indicações para a resolução:
   Atendendo à hipótese temos , para todo o $x \in I$,

$$F_1'(x) = f(x) \tag{1}$$

   e

$$F_2'(x) = f(x). \tag{2}$$

   Como

$$(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

   para todo o $x \in I$, podemos concluir que existe $k \in \mathbb{R}$ tal que, para todo o $x \in I$,

$$(F_1 - F_2)(x) = k,$$

   donde se conclui que $F_1 - F_2 = k$.

   (c) Suponha que f é a função definida por $f(x) = x^3\,\mathrm{e}^{-x^2}$.
   Determine a primitiva de f que se anula na origem.

   Indicações para a resolução:
   Vamos, em primeiro lugar, determinar a família das primitivas de f. Para efeitos de aplicação do método de primitivação por partes consideremos

$$\begin{aligned} u'(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2} \quad &\Longrightarrow \quad u(x) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2} \\ v(x) = x^2 \quad &\Longrightarrow \quad v'(x) = 2x. \end{aligned}$$

   Temos então

$$\begin{aligned} F(x) = \int x^3\,\mathrm{e}^{-x^2}\,dx &= \int x^2 (x\,\mathrm{e}^{-x^2})\,dx \\ &= -\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{-x^2} - \int 2x\left(-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2}\right) dx \\ &= -\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{-x^2} + \int x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{-x^2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2} + C, \;\; C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   A primitiva de f que se anula na origem é a que satisfaz a condição

$$F(0) = 0 \Longleftrightarrow -\frac{1}{2} + C = 0 \Longleftrightarrow C = \frac{1}{2}\,,$$

   ou seja, é a função F definida por

$$F(x) = -\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{-x^2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2} + \frac{1}{2}\,.$$

2. Calcule os seguintes integrais indefinidos:

   (a) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}\,dx$

   Indicações para a resolução:

   Vamos aqui apresentar dois dos processos que se podem utilizar para calcular este integral indefinido.

   - Primeiro Processo

     Temos

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+2x+2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{2}{x^2+2x+2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2| + \int \frac{1}{(x^2+2x+1)+1}\,dx \\
&= \ln\sqrt{x^2+2x+2} + \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx \\
&= \ln\sqrt{x^2+2x+2} + \operatorname{arctg}(x+1) + C,\;\; C\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

   - Segundo Processo

     Efectuando a substituição definida por $x+1=\operatorname{tg}t$ com $t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, temos

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}\,dx &= \int \frac{(x+1)+1}{(x+1)^2+1}\,dx \\
&= \int \frac{\operatorname{tg}t+1}{\operatorname{tg}^2 t+1}\sec^2 t\,dt \\
&= \int \frac{\operatorname{tg}t+1}{\sec^2 t}\sec^2 t\,dt \\
&= \int (\operatorname{tg}t+1)\,dt \\
&= -\ln|\cos t| + t + C \\
&= -\ln\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\right| + \operatorname{arctg}(x+1) + C \\
&= \ln\sqrt{x^2+2x+2} + \operatorname{arctg}(x+1) + C,\;\; C\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

     Cálculos auxiliares:

     De $x+1=\operatorname{tg}t$ com $t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ resulta $t=\operatorname{arctg}(x+1)$.

     Atendendo a que $\sec^2 t=\operatorname{tg}^2 t+1$ e a que $t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ temos

$$\sec t = \sqrt{\operatorname{tg}^2 t+1} = \sqrt{(x+1)^2+1} = \sqrt{x^2+2x+2}.$$

     Uma vez que $\cos t = \dfrac{1}{\sec t}$ vem

$$\cos t = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

(b) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1-\cos x}\,dx.$

Indicações para a resolução:

Vamos aqui apresentar dois dos processos que se podem utilizar para calcular este integral indefinido.

- Primeiro Processo

  Temos

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\cos x}{1-\cos x}\,dx &= \int \frac{\cos x(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}\,dx \\
&= \int \frac{\cos x+\cos^2 x}{1-\cos^2 x}\,dx \\
&= \int \frac{\cos x+\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx \\
&= \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx + \int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx \\
&= \int (\operatorname{sen} x)^{-2}\cos x\,dx + \int \operatorname{cotg}^2 x\,dx \\
&= -\frac{1}{\operatorname{sen} x} + \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1)\,dx \\
&= -\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x - x + C,\ C \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

- Segundo Processo

  Efectuando a substituição definida por $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ obtemos $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ e, portanto,

$$
\begin{aligned}
\frac{\cos x}{1-\cos x} &= \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}} \\
&= \frac{1-t^2}{1+t^2-(1-t^2)} \\
&= \frac{1-t^2}{2t^2}.
\end{aligned}
$$

  Consequentemente

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\cos x}{1-\cos x}\,dx &= \int \frac{1-t^2}{2t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt \\
&= \int \frac{1-t^2}{t^2(1+t^2)}\,dt \\
&= \int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{2}{1+t^2}\right)dt \\
&= -\frac{1}{t} - 2\operatorname{arctg} t + C \\
&= -\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^{-1} - x + C \\
&= -\operatorname{cotg}\frac{x}{2} - x + C,\ C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

<u>Cálculos auxiliares:</u>

Decomposição da fracção $\dfrac{1-t^2}{t^2(1+t^2)}$ em fracções simples.

Vamos determinar $A,B,C,D \in \mathbb{R}$ por forma que se verifique a igualdade

$$\frac{1-t^2}{t^2(1+t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{Ct+D}{1+t^2}\,.$$

Uma vez que

$$\begin{aligned}
\frac{1-t^2}{t^2(1+t^2)} &= \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{Ct+D}{1+t^2} \\
&= \frac{At(t^2+1)+B(t^2+1)+(Ct+D)t^2}{t^2(1+t^2)} \\
&= \frac{A(t^3+t)+B(t^2+1)+Ct^3+Dt^2}{t^2(1+t^2)} \\
&= \frac{(A+C)t^3+(B+D)t^2+At+B}{t^2(1+t^2)}
\end{aligned}$$

e, atendendo à condição de igualdade de duas fracções e à condição de igualdade de dois polinómios, podemos concluir que

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=-1 \\ A=0 \\ B=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} C=0 \\ D=-2 \\ A=0 \\ B=1 \end{cases}$$

Temos então

$$\frac{1-t^2}{t^2(1+t^2)} = \frac{1}{t^2} - \frac{2}{1+t^2}.$$