Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I — Segundo Mini-Teste (28/11/2006)

Resolução

1. Considere a função f de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definida por $f(x) = x\mathrm{e}^{1/x^2}$.

   (a) Estude f quanto à existência de extremos locais.

   Indicações para a resolução:
   Para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ temos

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \mathrm{e}^{1/x^2} + x\left(-\frac{2}{x^3}\right)\mathrm{e}^{1/x^2} \\
&= \mathrm{e}^{1/x^2} - \frac{2}{x^2}\,\mathrm{e}^{1/x^2} \\
&= \mathrm{e}^{1/x^2}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right) \\
&= \mathrm{e}^{1/x^2} \times \frac{x^2-2}{x^2}
\end{aligned}
$$

   Temos então, para todo o $x \in \setminus\{0\}$,

$$
\begin{aligned}
f'(x) = 0 \quad &\iff \quad \mathrm{e}^{1/x^2} \times \frac{x^2-2}{x^2} = 0 \\
&\iff \quad \underbrace{\mathrm{e}^{1/x^2} = 0}_{\text{Condição impossível em } \mathbb{R} \setminus \{0\}} \quad \vee \quad \frac{x^2-2}{x^2} = 0 \\
&\iff \quad x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

   Quadro de estudo do comportamento da primeira derivada.

	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	$+\infty$
e^{1/x^2}	$+$	$+$	$+$		$+$	$+$	$+$
$\dfrac{x^2-2}{x^2}$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
f'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	máx. local	$\searrow$		$\searrow$	mín. local	$\nearrow$

   Da análise do quadro anterior resulta que a função f tem um máximo local $f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2\mathrm{e}}$ em $x = -\sqrt{2}$ e um mínimo local $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2\mathrm{e}}$ em $x = \sqrt{2}$.

(b) Averigue se o gráfico de f admite assimptotas verticais.

Indicações para a resolução:

Uma vez que f tem domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ a recta de equação $x = 0$ é a única candidata a assimptota vertical do gráfico de f.

Temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} x\mathrm{e}^{1/x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{1/x^2}}{\frac{1}{x}} \\
&\underbrace{=}_{\text{R.C.}} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2}{x^3}\mathrm{e}^{1/x^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2}{x}\,\mathrm{e}^{1/x^2} \\
&= \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad x \to 0^+ \\ -\infty & \text{se} \quad x \to 0^- \end{cases}
\end{aligned}$$

o que permite concluir que a recta de equação $x = 0$ é uma assimptota vertical bilateral do gráfico de f.

2. Seja f uma função contínua em $[0, 1]$ e diferenciável em $]0, 1[$ tal que $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$. Mostre que existe $c \in]0, 1[$ tal que $f'(c) = 2c$.
Sugestão: Considere a função g definida por $g(x) = f(x) - x^2$.

Indicações para a resolução:

Uma vez que:

- a função g é contínua em $[0, 1]$, já que é a diferença de duas funções contínuas em $[0, 1]$;
- a função g é diferenciável em $]0, 1[$, já que é a diferença de duas funções diferenciáveis em $]0, 1[$;
- $g(0) = f(0) - 0^2 = 0$ já que, por hipótese, $f(0) = 0$;
- $g(1) = f(1) - 1^2 = 0$ já que, por hipótese, $f(1) = 1$;

o Teorema de Rolle garante que existe $c \in]0, 1[$ tal que $g'(c) = 0$.

Uma vez que, pelas propriedades das funções diferenciáveis, $g'(x) = f'(x) - 2x$, para todo o $x \in]0, 1[$, temos

$$\begin{aligned}
g'(c) = 0 &\iff f'(c) - 2c = 0 \\
&\iff f'(c) = 2c\,.
\end{aligned}$$

Está então provado que existe $c \in]0, 1[$ tal que $g'(c) = 2c$, como se pretendia.

3. Utilizando o método de primitivação por partes calcule $\displaystyle\int x \ln \frac{1}{x}\, dx$.

Indicações para a resolução:

Para efeitos de aplicação do método de primitivação por partes consideremos

$$f'(x) = x \implies f(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$g(x) = \ln \frac{1}{x} \implies g'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x}.$$

Temos então

$$\begin{aligned}\int x\ln\frac{1}{x}\,dx &= \frac{x^2}{2}\ln\frac{1}{x}-\int\frac{x^2}{2}\left(-\frac{1}{x}\right)\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\ln\frac{1}{x}+\int\frac{x}{2}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\ln\frac{1}{x}+\frac{x^2}{4}+C,\quad C\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

4. Utilizando a substituição definida por $x = \operatorname{sen} t$, com $t \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, calcule $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Indicações para a resolução:

Utilizando a substituição indicada temos

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}}(\operatorname{sen} t)'dt\\ &= \int\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos t}\,\cos t\,dt\\ &= \int\operatorname{sen}^2 t\,dt\\ &= \int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2t)\right)\,dt\\ &= \frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2t)+C\\ &= \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C,\quad C\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Cálculos auxiliares: Uma vez que considerámos a substituição $x = \operatorname{sen} t$, com $t \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, temos que $t = \operatorname{arcsen} x$.

Da relação fundamental da trigonometria resulta que $\cos^2 t = 1-\operatorname{sen}^2 t$. Como $t \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ temos $\cos t > 0$ e, portanto, $\cos t = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}$.

Temos então $\operatorname{sen}(2t) = 2\operatorname{sen} t\cos t = 2\,x\sqrt{1-x^2}$.