Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Exame da 2ª chamada

19 de Janeiro de 2007 — Duração: 3 horas

Nome: ____

Nº mecanográfico: ____________________ **Curso:** ____________________________

Caso pretenda desistir assine a seguinte declaração.
Declaro que desisto. ____

Questão	1a	1b	1c	1d	2a	2b	2c	3	4a	4b	4c	total
Cotação	10	5	10	5	10	10	10	10	10	10	10	100
Classificação												

Questão	5a	5b	5c	6a	6b	6c	7a	7b	7c	7d	total
Cotação	5	20	10	10	15	5	10	10	5	10	100
Classificação											

IMPORTANTE: *Justifique resumidamente todas as suas afirmações e indique os cálculos que efectuou.*

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) Mostre que o sistema $AX = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um sistema de Cramer e resolva-o utilizando a regra de Cramer.

   (b) Seja $B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ um vector de $\mathbb{R}^3$. Discuta o sistema $AX = B$ em função dos parâmetros reais a, b e c.

(c) Calcule o volume do paralelipípedo com arestas correspondentes aos vectores coluna de A.

(d) Verifique que o elemento $(3, 2)$ da matriz A^{-1} é -1.

2. Considere o subconjunto $S = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : \; a = b + 2c, \; d = 0\}$.

    (a) Mostre que S é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^4$.

    (b) i. Determine uma base de S cujos vectores sejam unitários, i.e., de comprimento 1.

ii. Se possível, determine ainda um vector não nulo ortogonal aos vectores da base que obteve na subalínea anterior.

3. Prove, utilizando as propriedades dos produtos interno e externo, sem fazer o cálculo explícito dos dois membros da equação a seguir, que se X e Y são vectores de $\mathbb{R}^3$ então

$$|(X \times Y) \cdot (Y \times X)| = ||X \times Y||^2,$$

onde $\times$ denota o produto externo e $\cdot$ o produto interno.

4. Considere o subconjunto $S = \{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ das matrizes reais de ordem 4.

(a) Mostre que S *não* é um subespaço vectorial do espaço $M_4(\mathbb{R})$ das matrizes reais de ordem 4 com entradas em $\mathbb{R}$.

(b) Mostre que, se $A, B \in S$ então $det(AB) = det(A^2)$ e $det(AB) = det(B^2)$.

(c) Determine, caso exista, a matriz inversa do elemento genérico $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ de S.

5. Considere a transformação linear $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $L(1,0,0) = (1,0,0)$, $L(0,1,0) = (0,\alpha,0)$ e $L(0,0,1) = (\alpha,1,\beta)$, com α e β constantes reais.

   (a) Construa a matriz $A = [L]_{\mathcal{C},\mathcal{C}}$ desta transformação linear relativamente à base canónica $\mathcal{C} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

   (b) i. Determine o núcleo $Ker(L)$ da transformação linear em função dos valores de α e β.

   ii. Utilizando o teorema das dimensões e os resultados obtidos na subalínea anterior indique a dimensão da imagem $Im(L)$ da transformação linear em função dos valores de α e β.

   iii. Discuta a injectividade e sobrejectividade de L em função dos valores de α e β.

(c) Usando matrizes de mudança de base, construa a matriz $B = [L]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ da transformação relativamente à base $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$.

6. (a) Prove que se uma matriz quadrada A é diagonalizável, i.e., existe uma matriz P invertível tal que $D = P^{-1}AP$ com D matriz diagonal, então a matriz P diagonalizante de A também é diagonalizante para $A^2 = AA$.

(b) Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Determine P tal que $P^{-1}AP = D$ onde D é uma matriz diagonal. Use o resultado enunciado na alínea anterior para diagonalizar a matriz A^2.

(c) Apresente uma matriz B de ordem 3 *não diagonal* com valores próprios 0, 1 e -1.

7. Considere dois planos π e δ de $\mathbb{R}^3$ de equações cartesianas

$$\pi : x + y + z = 0,$$

e

$$\delta : x - y + z = 1.$$

(a) Calcule a distância entre os dois planos π e δ.

(b) Obtenha o ângulo formado pelos dois planos.

(c) Determine uma equação vectorial da recta que passa pelo ponto $P = (0, -1, 0)$ e que é ortogonal ao plano π.

(d) Calcule a distância do ponto $P = (0, -1, 0)$ ao plano π.