Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I - Segundo Semestre — Exame da Época Normal - 2ª Chamada

Classificação: ________
Valores

14 de Junho de 2007

65 Pontos

1. Considere a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \ln(2-x) & \text{se} \quad x < 1 \\ \operatorname{arctg}(x-1) & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

(a) Estude f quanto à continuidade em $x = 1$.

Indicações para a resolução:
Uma vez que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \ln(2-x) = \ln(1) = 0$$

e

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \operatorname{arctg}(x-1) = \operatorname{arctg}(0) = 0$$

podemos concluir que

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 0.$$

Como $f(1) = 0$ e

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

podemos concluir que f é contínua em $x = 1$.

(b) Prove que a função f não é diferenciável em $x = 1$.

Indicações para a resolução:
Observe-se que

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\ln(2-x)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\frac{-1}{2-x}}{1} = -1 = f'(1^-)$$

(a segunda igualdade resulta da aplicação da Regra de Cauchy)

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{1}{1+(x-1)^2}}{1} = 1 = f'(1^+)$$

(a segunda igualdade resulta da aplicação da Regra de Cauchy).

Como

$$f'(1^-) \neq f'(1^+)$$

podemos concluir que não existe $f'(1)$ e, portanto, f não é diferenciável em $x = 1$.

(c) A função f é integrável em $[3, 5]$? Justifique.

Indicações para a resolução: Uma vez que f é contínua em $[3, 5]$ (porque é a composta de duas funções contínuas), podemos concluir pelos critérios de integrabilidade que f é é integrável em $[3, 5]$.

(d) Determine a função inversa da restrição de f ao intervalo $[1, +\infty[$.

Indicações para a resolução: Denotemos por g a restrição de f ao intervalo $[1, +\infty[$.
Então $g(x) = \operatorname{arctg}(x-1)$ e $D_g = [1, +\infty[= CD_{g^{-1}}$.
Uma vez que, para todo o $x \geq 1$,

$$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \operatorname{arctg}(x-1) \geq \operatorname{arctg}(0) = 0 \quad \text{(porque a função arcotangente é crescente)}$$

temos que

$$g(x) = \operatorname{arctg}(x-1) \geq 0.$$

Atendendo a que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$$

podemos concluir que $CD_g = [0, \frac{\pi}{2}[= D_{g^{-1}}$.
Sejam $x \in [1, +\infty[$ e $y \in [0, \frac{\pi}{2}[$ tais que $\operatorname{arctg}(x-1) = y$. Uma vez que

$$\operatorname{arctg}(x-1) = y \Leftrightarrow x - 1 = \operatorname{tg} y \Leftrightarrow x = 1 + \operatorname{tg} y$$

podemos concluir que

$$\begin{array}{rccc} g^{-1}: & [0, \frac{\pi}{2}[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \hookrightarrow & 1 + \operatorname{tg} x. \end{array}$$

30 Pontos

2. Considere a função F definida em $\mathbb{R}$ por $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} t \ln(1 + e^t)\, dt$.

(a) Calcule $F'(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Indicações para a resolução: Denotemos por f e g as funções definidas em $\mathbb{R}$, respectivamente, por $f(t) = t \ln(1 + e^t)$ e $g(x) = x^2$.
Uma vez que f é contínua em $\mathbb{R}$ e g é diferenciável em $\mathbb{R}$, podemos concluir pelo Teorema Fundamental do Cálculo Integral que F é diferenciável em $\mathbb{R}$ e, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = f(g(x))g'(x) = x^2 \ln(1 + e^{x^2})2x = 2x^3 \ln(1 + e^{x^2}).$$

(b) Estude a função F quanto à monotonia e existência de extremos locais.

Indicações para a resolução: Uma vez que,

$$F'(x) = 2x^3 \ln(1 + e^{x^2})$$

e, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$\ln(1 + e^{x^2}) > 0,$$

podemos concluir que o sinal de F' depende apenas do sinal de x^3. Como

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

e

$$F'(x) < 0 \;\text{ para todo o } x \in \mathbb{R}^-$$

e

$$F'(x) > 0 \text{ para todo o } x \in \mathbb{R}^+$$

podemos concluir (pela continuidade de F) que F é estritamente decrescente em $\mathbb{R}^-$ e estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$.
Logo

$$F(0) = \int_0^0 t\ln(1+e^t)\,dt = 0$$

é mínimo local de F.

35 Pontos

3. Considere a função f definida por $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

(a) Usando o Teorema de Lagrange mostre que existe $c \in]1,2[$ para o qual $f'(c) = \dfrac{1-2e}{2e^2}$.

Indicações para a resolução:
Uma vez que f é contínua em $[1,2]$ e diferenciável em $]1,2[$, podemos concluir pelo Teorema de Lagrange que existe $c \in]1,2[$ para o qual

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = f'(c).$$

Como $f(2) = \dfrac{e^{-2}}{2} = \dfrac{1}{2e^2}$ e $f(1) = \dfrac{e^{-1}}{1} = \dfrac{1}{e}$ temos que

$$f'(c) = \frac{\frac{1}{2e^2} - \frac{1}{e}}{2-1} = \frac{1-2e}{2e^2}$$

como queríamos demonstrar.

(b) Considere $g(x) = x^2 f(x)$. Determine a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ e, em caso de convergência, indique o seu valor.

Indicações para a resolução:
Vamos estudar o seguinte limite

$$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t g(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t xe^{-x}\,dx.$$

Usando o método de primitivação por partes podemos concluir que

$$\int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

logo

$$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t g(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\Big[-xe^{-x} - e^{-x}\Big]_1^t = \lim_{t\to+\infty}\left(-te^{-t} - e^{-t} + \frac{1}{e} + \frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}$$

pois

$$\lim_{t\to+\infty}\left(-te^{-t}\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{t}{e^t}\right) = 0.$$

Portanto, podemos concluir que o integral dado é convergente e

$$\int_1^{+\infty} g(x)\,dx = \frac{2}{e}.$$

20
Pontos

4. Calcule o valor da área da região do plano situada entre os gráficos das funções f e g definidas, respectivamente, por

$$f(x) = \frac{4 + \operatorname{sen}^2 x}{1 + 4x^2} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + 4x^2}$$

e pelas rectas de equações $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$.

Indicações para a resolução: Uma vez que as funções f e g são contínuas em $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ e, para todo o $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$,

$$f(x) = \frac{4 + \operatorname{sen}^2 x}{1 + 4x^2} > \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + 4x^2} = g(x)$$

podemos afirmar que a área pedida é dada pelo seguinte integral de Riemann:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (f(x) - g(x))\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4}{1 + 4x^2}\, dx.$$

Como

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4}{1 + 4x^2}\, dx = \frac{4}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{1 + (2x)^2}\, dx = 2\Big[\operatorname{arctg}(2x)\Big]_0^{\frac{1}{2}} = 2\left(\operatorname{arctg}(1) - \operatorname{arctg}(0)\right) = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

podemos concluir que a área é igual a $\frac{\pi}{2}$.

50
Pontos

5. Calcule os seguintes integrais indefinidos:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2}}\, dx$

Indicações para a resolução:

Fazendo a mudança de variável definida por

$$x = 3 \operatorname{sen} t = \varphi(t),\ t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

temos que φ é invertível e diferenciável e $\varphi'(t) = 3\cos t$.

Logo

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx &= \int \frac{9\operatorname{sen}^2 t}{\sqrt{9-9\operatorname{sen}^2 t}} 3\cos t\,dt \\
&= 9\int \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\sqrt{9\cos^2 t}} 3\cos t\,dt \\
&= 9\int \operatorname{sen}^2 t\,dt \\
&= 9\int \frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt \\
&= \frac{9}{2}t - \frac{9}{2}.\frac{1}{2}\int 2\cos(2t)\,dt \\
&= \frac{9}{2}t - \frac{9}{4}\operatorname{sen}(2t) + C \\
&= \frac{9}{2}t - \frac{9}{4} 2\operatorname{sen} t\cos t + C \\
&= \frac{9}{2}t - \frac{9}{2}\operatorname{sen} t\cos t + C, \qquad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Uma vez que $x = 3\operatorname{sen} t$, e $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, temos que $t = \operatorname{arcsen}\frac{x}{3}$ e

$$\cos t = \sqrt{1-\frac{x^2}{9}} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$$

e, portanto,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \frac{9}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{3} - \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

(b) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2(x-1)}\,dx$

Indicações para a resolução: Vamos decompor a fracção própria numa soma de elementos simples:

$$\frac{x+3}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$$

onde A, B e C são constantes reais a determinar.

Atendendo a que

$$\frac{x+3}{x^2(x-1)} = \frac{Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2}{x^2(x-1)}$$

tem-se que

$$x+3 = Ax^2 - Ax + Bx - B + Cx^2$$

donde

$$\begin{cases} A+C &= 0 \\ B-A &= 1 \\ -B &= 3 \end{cases}$$

e, portanto,

$$\begin{cases} A &= -4 \\ B &= -3 \\ C &= 4 \end{cases}$$

Logo,

$$\frac{x+3}{x^2(x-1)} = \frac{-4}{x} + \frac{-3}{x^2} + \frac{4}{x-1}$$

o que permite concluir que

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+3}{x^2(x-1)}\,dx &= -4\int \frac{1}{x}\,dx - 3\int \frac{1}{x^2}\,dx + 4\int \frac{1}{x-1}\,dx \\
&= -4\ln|x| - 3\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 4\ln|x-1| + C \\
&= -4\ln|x| + \frac{3}{x} + 4\ln|x-1| + C \\
&= \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)^4 + \frac{3}{x} + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$