Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Exame de Recurso

2 de Fevereiro de 2009 Duração: 2 horas 30 minutos

Nome: ______________________ **Nº mec.:** __________

Curso: ______________ **Melhoria de Nota:** ☐ **Nº folhas suplementares:** ____

Caso pretenda desistir assine a seguinte declaração.
Declaro que desisto. ______________________

Questão	1	2	3a	3b	4	5	6	total
Cotação	10	05	15	10	20	10	15	85
Classificação								

Questão	7a	7b	8a	8b	8c	8d	9	10a	10b	total
Cotação	10	15	15	10	10	10	20	10	15	115
Classificação										

Classificação total
valores

IMPORTANTE: *Justifique resumidamente todas as suas afirmações, indique os cálculos que efectuou e explicite a sua resposta.*

1. Usando o método de eliminação de Gauss, resolva o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 5 \\ 4x + y + 2z = 9 \end{cases}$$

2. Considere o parâmetro $k \in \mathbb{R}$, a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & k & 2 \\ 1 & 1 & k+1 \end{bmatrix}$ e o vector $B = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{bmatrix}$. Usando o método de eliminação de Gauss, obtenha a forma escalonada por linhas da matriz ampliada $[A \mid B]$.

3. Considere o parâmetro $k \in \mathbb{R}$, a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & k^2-14 \end{bmatrix}$ e o vector $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ k+5 \end{bmatrix}$. Usando o método de eliminação de Gauss, obteve-se a forma escalonada por linhas da matriz ampliada $[A \mid B]$ dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 4 \\ 0 & -7 & 14 & | & -7 \\ 0 & 0 & k^2-16 & | & k-4 \end{bmatrix}.$$

   (a) Indique, justificando, os valores de k para os quais o sistema $AX = B$, com $X \in \mathbb{R}^3$, é
      i. possível e determinado,
      ii. possível e indeterminado,
      iii. impossível.

   (b) Considere $k = 1$. Verifique se pode escrever o vector $(4, 5, 6)$ como combinação linear das colunas de A. Em caso afirmativo indique essa combinação linear.

4. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ cuja forma escalonada reduzida por linhas é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) Uma base para o espaço das colunas de A, $\mathcal{C}(A)$ é ______________________________. Justifique.

   (b) Uma base para o espaço das linhas de A, $\mathcal{L}(A)$, é ______________________________. Justifique.

   (c) A característica de A, $\mathrm{car}(A)$, é ____________. Justifique.

   (d) A nulidade de A, $\mathrm{nul}(A)$, é ________________. Justifique.

5. Se A for uma matriz 64×17 com característica 11, qual o número máximo de vectores $X \in \mathbb{R}^{17}$ linearmente independentes que satisfazem $AX = 0$? Justifique.

6. Sabendo que $\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = 2$, calcule $\det \begin{bmatrix} a_1 & 2b_1 & 4c_1 + a_1 \\ a_2 & 2b_2 & 4c_2 + a_2 \\ a_3 & 2b_3 & 4c_3 + a_3 \end{bmatrix}$.

7. Seja $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ y - z = 0\}$ um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Indique uma base e a dimensão de U.

   (b) Calcule a projecção ortogonal do vector $u = (1, 2, 3)$ sobre o subespaço U.

8. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $f(1,1,1) = (1,2,3)$, $f(0,1,1) = (1,1,1)$ e $f(0,0,1) = (2,3,4)$.

   (a) Determine a matriz M de f relativamente à base canónica $\mathcal{C} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$.

   (b) Calcule $f(2,3,2)$.

   (c) Obtenha uma base para a imagem de f.

   (d) Verifique que f não é injectiva.

9. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Determine, se possível, uma matriz P invertível, com $\det(P) = 5$ e tal que $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

10. Considere as matrizes $P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) Verifique que P é uma matriz ortogonal e determine a matriz D diagonal tal que $P^T AP = D$.

   (b) Considere a cónica $4xy + x + y = 0$. Determine uma sua equação reduzida e classifique-a.