Cálculo I

Cálculo com funções de uma variável

2007/2008

Virgínia Santos

Departamento de Matemática
Universidade de Aveiro

Conteúdo

Capítulo 1

Números reais

Vamos fazer o estudo dos números reais sob o ponto de vista axiomático.

Supomos a existência de um conjunto que denotamos por $\mathbb{R}$ cujos elementos são designados **números reais** e onde se definem uma operação de adição e uma operação de multiplicação. Para além disso, supomos fixado um certo subconjunto de $\mathbb{R}$ que denotamos por $\mathbb{R}^+$ a cujos elementos chamamos **números reais positivos**.

Admitimos então a veracidade de algumas propriedades que se tomam como axiomas e que serão subdivididos em **axiomas de corpo**, **axiomas de ordem** e **axioma do supremo**. A partir destes axiomas deduzem-se todas as propriedades dos números reais que são já conhecidas do ensino secundário.

Convém aqui referir que um outro processo de abordagem dos números reais é construtivo. Este processo parte dos números naturais, utiliza-os para a construção dos números racionais e, a partir destes, constroem-se os números irracionais. Obtém-se, deste modo, o conjunto dos números reais que se prova então possuir as propriedades desejadas.

1.1 Axiomas de corpo

No conjunto $\mathbb{R}$ supomos definidas uma operação binária designada **adição** e denotada pelo símbolo $+$

$$\begin{array}{rccc} +: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (a,b) & \longmapsto & a+b \end{array}$$

que a cada par de números reais (a,b) faz corresponder um número real $a+b$ univocamente determinado e uma operação binária designada **multiplicação** e denotada pelo símbolo $\cdot$

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (a,b) & \longmapsto & a\cdot b \end{array}$$

que a cada par de números reais (a,b) faz corresponder um e um só número real $a\cdot b$. Muitas vezes no uso da multiplicação omitimos o símbolo $\cdot$ e escrevemos ab em lugar de $a\cdot b$.

Estas duas operações satisfazem os axiomas seguintes:

1) comutatividade da adição

$a+b=b+a$, para todos os $a,b\in\mathbb{R}$.

2) associatividade da adição

$(a+b)+c=a+(b+c)$, para todos os $a,b,c\in\mathbb{R}$.

3) existência de elemento neutro para a adição

existe um número real que denotamos por 0 tal que, para todo o $a\in\mathbb{R}$, $a+0=a$.

4) existência de simétrico

para cada $a\in\mathbb{R}$ existe um número real que denotamos por $-a$ e que designamos por **simétrico** de a tal que $a+(-a)=0$.

5) comutatividade da multiplicação

$ab=ba$, para todos os $a,b\in\mathbb{R}$.

6) associatividade da multiplicação

$(ab)c=a(bc)$, para todos os $a,b,c\in\mathbb{R}$.

7) existência de elemento neutro para a multiplicação

existe um número real que denotamos por 1 e que é distinto de 0 tal que, para todo o $a\in\mathbb{R}$, $1a=a$.

8) existência de inverso

para cada número real $a\neq 0$ existe um número real que denotamos por $\frac{1}{a}$ e que designamos por **inverso** de a tal que $a\cdot\frac{1}{a}=1$.

9) distributividade da multiplicação relativamente à adição

$a(b+c)=ab+ac$, para todos os $a,b,c\in\mathbb{R}$.

Observação 1.1.

1. Os axiomas 1) a 9) conferem a $\mathbb{R}$ a estrutura de corpo.
2. Resulta dos axiomas 1) e 3) que, para todo o $a\in\mathbb{R}$, $0+a=a$ e resulta dos axiomas 5) e 7) que, para todo o $a\in\mathbb{R}$, $a1=a$.

   Dos axiomas apresentados concluímos também que $(-a)+a=0$, para todo o $a\in\mathbb{R}$, $\frac{1}{a}\cdot a=1$, para todo o $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$ e , para todos os $a,b,c\in\mathbb{R}$, $(a+b)c=ac+bc$.
3. Os axiomas apresentados permitem também concluir que: o elemento neutro da adição é único e o que o elemento neutro da multiplicação é também único; o simétrico de um número real é único e o inverso de um número real distinto de 0 é também único.
4. Ao elemento neutro da adição chamamos **zero** e ao elemento neutro da multiplicação podemos chamar **identidade** de $\mathbb{R}$; um número real distinto de 0 diz-se elemento não nulo.

Dos axiomas apresentados deduzem-se as propriedades da adição e multiplicação dos números reais que são por vezes designados por propriedades algébricas. Algumas destas propriedades estão incluídas na proposição seguinte. Apresentamos, a título de exemplo, a demonstração de algumas daquelas propriedades sendo as restantes demonstrações deixadas como exercício.

Proposição 1.2.

(i) Sejam $a,b,c\in\mathbb{R}$. Se $a+b=a+c$ então $b=c$.

(ii) Sejam $a,b,c\in\mathbb{R}$. Se $a\neq 0$ e $ab=ac$, então $b=c$.

(iii) Para todos os $a,b\in\mathbb{R}$ existe um único número real x tal que $a+x=b$.

(iv) Para todo o $b\in\mathbb{R}$ e para todo o $a\in\mathbb{R}$ não nulo, existe um único número real x tal que $ax=b$.

(v) Para todo o $a\in\mathbb{R}$, $a\cdot 0=0$, $(-1)a=-a$ e $-(-a)=a$.

(vi) Para todos os $a,b\in\mathbb{R}$ se $ab=0$ então $a=0$ ou $b=0$.

(vii) Para todos os $a,b\in\mathbb{R}$, $-(a+b)=(-a)+(-b)$, $-(ab)=(-a)b$ e $(-a)(-b)=ab$.

Demonstração: *(i)* Sejam $a,b,c\in\mathbb{R}$. Admitamos que $a+b=a+c$. Uma vez que existe o simétrico de a, $-a$, resulta da igualdade anterior que $(-a)+(a+b)=(-a)+(a+c)$. Atendendo aos axiomas 1) e 2) temos que $(a+(-a))+b=(a+(-a))+c$. Utilizando o axioma 4) concluímos que $0+b=0+c$, donde resulta, $b=c$.

(iv) Como a é não nulo o axioma 8) garante a existência do inverso de a. De $ax=b$ resulta então $\frac{1}{a}(ax)=\frac{1}{a}b$. Utilizando a comutatividade e a associatividade da multiplicação temos $(a\frac{1}{a})x=\frac{1}{a}b$ donde se conclui, atendendo aos axiomas 8) e 7), que $x=\frac{1}{a}\cdot b$.

(v) Pelos axiomas 3) e 9) temos $a0=a(0+0)=a0+a0$. Da igualdade $a0=a0+a0$ resulta, pelo axioma 3) $a0+0=a0+a0$. Atendendo a *(i)* concluímos então que $a0=0$.

Para provar que $-a=(-1)a$, isto é, para provar que $(-1)a$ é o simétrico de a, temos de provar que $a+((-1)a)=0$. Utilizando sucessivamente os axiomas 7), 5), 9), 4) e a igualdade anterior temos $a+((-1)a)=(1a)+((-1)a)=(a1)+(a(-1))=a(1+(-1))=a0=0$, como pretendíamos.

De modo análogo para provar que $-(-a)=a$, isto é, que a é o simétrico de $-a$ temos de provar que $(-a)+a=0$. Esta igualdade resulta com facilidade dos axiomas 4) e 1).

(vi) Sejam $a,b\in\mathbb{R}$ tais que $ab=0$. Se supusermos que $a\neq 0$ concluímos, por um raciocínio análogo ao utilizado em *(iv)*, que $b=0$.

Supondo $b\neq 0$ concluímos então que $a=0$.

(vii) Sejam $a,b\in\mathbb{R}$.

Para provar que $-(a+b)=(-a)+(-b)$ basta garantir que $(a+b)+((-a)+(-b))=0$. Utilizando sucessivamente os axiomas da comutatividade e da associatividade da adição, concluímos que $(a+b)+((-a)+(-b))=(a+(-a))+(b+(-b))$ donde resulta, atendendo aos axiomas 4) e 3), a igualdade pretendida.

Se provarmos que $ab+(-a)b=0$ concluímos que $(-a)b=-(ab)$. Utilizando sucessivamente os axiomas 5), 9), 4), 3) e uma das igualdades demonstrada em *(v)* temos $ab+(-a)b=ba+b(-a)=b(a+(-a))=b0=0$, como pretendíamos.

■

Observação 1.3.

1. O número real x referido em *(iii)* é igual a $b+(-a)$ e denota-se habitualmente por $b-a$.
2. O número real x referido em *(iv)* que provámos ser igual a $\frac{1}{a}\cdot b$ denota-se habitualmente por $\frac{b}{a}$.
3. Resulta de *(vii)* e do axioma 7) que $-a=(-1)a$.
4. De *(vii)*, do axioma 5) e da arbitrariedade de a e b resulta que $-(ab)=a(-b)$.

1.2 Axiomas de ordem

Supusemos a existência de um subconjunto de $\mathbb{R}$ que denotámos por $\mathbb{R}^+$ e a cujos elementos chamámos números reais positivos. Este conjunto satisfaz os axiomas seguintes:

10) Se $a,b\in\mathbb{R}^+$, então $a+b\in\mathbb{R}^+$ e $ab\in\mathbb{R}^+$.
11) Para todo o $a\in\mathbb{R}$, ou $a=0$ ou $a\in\mathbb{R}^+$ ou $-a\in\mathbb{R}^+$.
12) $0\notin\mathbb{R}^+$.

Observação 1.4.
O axioma 11) implica que o conjunto $\mathbb{R}^-:=\{-a,\ a\in\mathbb{R}^+\}$ é disjunto do conjunto $\mathbb{R}^+$. Aos elementos de $\mathbb{R}^-$ chamamos **números reais negativos**.

Uma vez que $-0=0$ o axioma 12) implica que $0\notin\mathbb{R}^-$. Então os conjuntos $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$ e $\{0\}$ são dois a dois disjuntos e, pelo axioma 10) temos que $\mathbb{R}=\mathbb{R}^+\cup\mathbb{R}^-\cup\{0\}$.

Resulta dos axiomas 10) e 11) que $1\in\mathbb{R}^+$.

Utilizaremos o símbolo $\mathbb{R}_0^+$ para denotar o conjunto $\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ e o símbolo $\mathbb{R}_0^-$ para denotar o conjunto $\mathbb{R}^-\cup\{0\}$

Estamos agora em condições de definir as relações de ordem em $\mathbb{R}$ que já conhecemos de estudos anteriores e que se designam respectivamente por **maior do que**, **menor do que**, **maior do que ou igual a** ou, abreviadamente, **maior ou igual a** e **menor do que ou igual a** ou, abreviadamente, **menor ou igual a**.

Definição 1.5.
Sejam $a,b\in\mathbb{R}$. Dizemos que a é **maior do que** b e escrevemos $a>b$ se $a-b\in\mathbb{R}^+$; dizemos que a é **menor do que** b e escrevemos $a<b$ se $b-a\in\mathbb{R}^+$; dizemos que a é **maior do que ou igual a** b e escrevemos $a\geq b$ se $a-b\in\mathbb{R}_0^+$ e dizemos que a é **menor do que ou igual a** b e escrevemos $a\leq b$ se $b-a\in\mathbb{R}_0^+$.

Vamos agora introduzir algumas convenções de notação que serão utilizadas no seguimento:

- Se $a<b$ e $b<c$ escrevemos abreviadamente $a<b<c$.
- Se $a\leq b$ e $b<c$ podemos escrever, abreviadamente $a\leq b<c$.

- Utilizamos a notação abreviada $a<b\leq c$ quando $a<b$ e $b\leq c$ e escrevemos $a\leq b\leq c$ se $a\leq b$ e $b\leq c$.

Dos axiomas 11) e 12) podemos deduzir uma propriedade importante dos números reais que é habitualmente conhecida por **propriedade tricotómica**.

Propriedade Tricotómica: Sendo $a,b\in\mathbb{R}$ vale uma e uma só das condições seguintes: ou $a<b$ ou $a=b$ ou $b<a$.

Na proposição que apresentamos a seguir estão incluídas regras já conhecidas do cálculo com desigualdades. As demonstrações destas propriedades utilizam os axiomas de corpo e os axiomas de ordem. Podem também ser utilizadas nestas demonstrações algumas das propriedades algébricas já demonstradas anteriormente.

Proposição 1.6.
Sejam $a,b,c\in\mathbb{R}$.

(i) Se $a<b$ e $b<c$, então $a<c$.

(ii) Se $a<b$, então $a+c<b+c$.

(iii) Se $a\leq b$ e $b\leq a$, então $a=b$.

(iv) Se $a<b$ e $c\in\mathbb{R}^+$, então $ac<bc$.

(v) Se $a<b$ e $c\in\mathbb{R}^-$, então $ac>bc$.

(vi) Se $a<b$, então $-a>-b$.

(vii) Se $a>0$, então $\frac{1}{a}>0$.

(viii) Se $a<0$, então $\frac{1}{a}<0$.

(ix) Se $ab>0$, então ou $a,b\in\mathbb{R}^+$ ou $a,b\in\mathbb{R}^-$.

Demonstração: *(i)* Por hipótese $b-a\in\mathbb{R}^+$ e $c-b\in\mathbb{R}^+$.

Pelo axioma 10), $(c-b)+(b-a)\in\mathbb{R}^+$. Mas, pelos axiomas 2), 4) e 3), $(c-b)+(b-a)=c-a$, o que permite concluir que $c-a\in\mathbb{R}^+$, como pretendíamos.

(ii) Pelos axiomas 3), 1) 4) e 2) tem-se, para todo o $c\in\mathbb{R}$, $b-a=b+0-a=b+(c-c)-a=b+c-c-a$ donde resulta, pela Proposição 1.2 *(vii)* e pelo axioma 1),

$$b-a=(b+c)-(a+c)\ .$$

Atendendo à hipótese, concluímos que $(b+c)-(a+c)\in\mathbb{R}^+$, o que prova que $a+c<b+c$.

(iii) Esta propriedade é consequência imediata da propriedade tricotómica.

(iv) Por hipótese, $b-a \in \mathbb{R}^+$. Sendo $c \in \mathbb{R}^+$ temos, pelo axioma 10) que $(b-a)c \in \mathbb{R}^+$.

Mas, pelo ponto 2. da Observação 1.1 temos $(b-a)c = bc - ac$, o que permite concluir que $ac < bc$, como pretendíamos.

(v) Sendo $a < b$ e $c \in \mathbb{R}^-$ temos que $-c \in \mathbb{R}^+$ e, pelo axioma 10), concluímos que $(b-a)(-c) \in \mathbb{R}^+$.

Uma vez que $(b-a)(-c) = ac - bc$, temos que $bc < ac$, como pretendíamos.

(vi) A demonstração desta propriedade utiliza a propriedade anterior e a Proposição 1.2 *(v)*.

(vii) Seja $a > 0$. Uma vez que $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ concluímos, pela Proposição 1.2, que não se pode ter $\frac{1}{a} = 0$.

Pelo axioma 11) tem-se então que ou $\frac{1}{a} > 0$ ou $\frac{1}{a} < 0$.

Admitamos que se tem $\frac{1}{a} < 0$. Então $-\frac{1}{a} > 0$ e, uma vez que $a > 0$ tem-se, pelo axioma 10), $a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) \in \mathbb{R}^+$.

Mas $a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) = -\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = -1 \in \mathbb{R}^-$, o que é absurdo.

O absurdo resulta de supor que $\frac{1}{a} < 0$ e, portanto, $\frac{1}{a} > 0$.

(viii) A demonstração desta propriedade é análoga à demonstração da propriedade anterior e, portanto é deixada como exercício.

(ix) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $ab \in \mathbb{R}^+$. Atendendo à Proposição 1.2 *(v)* e à propriedade tricotómica, temos que $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Então, pela propriedade tricotómica, ou $a > 0$ ou $a < 0$.

Suponhamos que $a > 0$. Atendendo a *(vii)* tem-se que $\frac{1}{a} > 0$ e, pelo axioma 10), tem-se $\frac{1}{a}(ab) > 0$, donde resulta que $b > 0$.

Se supusermos que $a < 0$ concluímos, por um raciocínio análogo que $b < 0$.

■

1.3 Axioma do supremo

Este axioma pode ser utilizado para garantir a existência de números irracionais.

Antes de apresentarmos este axioma temos necessidade de introduzir algumas definições.

Definição 1.7.

Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}$. Dizemos que $u \in \mathbb{R}$ é um **majorante** de S se, para todo o $s \in S$, $s \leq u$. Dizemos que $w \in \mathbb{R}$ é um **minorante** de S se $s \geq w$, para todo o $s \in S$.

Observação 1.8.

1. Se $u \in \mathbb{R}$ é um majorante de S, então qualquer número real $u' > u$ é também um majorante de S. Concluímos então que se S admite um majorante então admite uma infinidade de majorantes.

2. Por um raciocínio análogo ao anterior concluímos que se $S \subset \mathbb{R}$ admite um minorante então admite uma infinidade de minorantes.

Definição 1.9.

Um conjunto $S \subset \mathbb{R}$ diz-se **majorado** ou **limitado superiormente** se admite majorantes e diz-se **minorado** ou **limitado inferiormente** se admite minorantes. Se S é simultaneamente majorado e minorado dizemos que S é **limitado**.

Observação 1.10. Resulta da Definição 1.9 que um conjunto $S \subset \mathbb{R}$ é limitado se e só se existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que, para todo o $x \in S$, $|x| \leq M$.

Exemplo 1.11.

Consideremos o conjunto

$$S = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 2\}.$$

Qualquer elemento do conjunto $M = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$ é um majorante de S e qualquer elemento de $M' = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1\}$ é um minorante de S. Então S é um conjunto limitado. Notemos que 2 é o menor dos majorantes de S e -1 é o maior dos minorantes de S. Dizemos então que 2 é o supremo de S e que -1 é o ínfimo de S. Uma vez que $-1 \in S$ dizemos que -1 é o mínimo de S.

Formalizando temos:

Definição 1.12.

Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}$.

- Dizemos que $u \in \mathbb{R}$ é o **supremo** de S e escrevemos

$$\sup S = u$$

se u verifica as duas condições seguintes:

1) u é um majorante de S, isto é, $s \leq u$, para todo o $s \in S$;
2) se $u' \in \mathbb{R}$ é um majorante de S, isto é, se $s \leq u'$, para todo o $s \in S$ então $u \leq u'$.

- Dizemos que $w \in \mathbb{R}$ é o **ínfimo** de S e escrevemos

$$\inf S = w$$

se w verifica as duas condições seguintes:

1) w é um minorante de S, isto é, $s \geq w$, para todo o $s \in S$;
2) se $w' \in \mathbb{R}$ é um minorante de S, isto é, se $s \geq w'$, para todo o $s \in S$, então $w' \leq w$.

Observação 1.13.

1. A condição 2) da definição de supremo traduz que o supremo de um conjunto é o menor dos majorantes. Analogamente, a condição 2) da definição de ínfimo traduz que o ínfimo é o maior dos minorantes.

2. Nem todo o subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ admite supremo. Por exemplo o conjunto

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$$

não admite supremo. De facto, admitamos que $u \in \mathbb{R}$ é o supremo de S. Então, para todo o $s \in S$, $u \geq s$. Como $3 \in S$, temos que $u \geq 3$ donde $u+1 \geq 4$. Como $4 > 2$ temos $u+1 > 2$, pelo que $u+1 \in S$, o que é absurdo, uma vez que $u+1 > u$ e u é o supremo de S.

Analogamente, nem todo o subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ admite ínfimo. Como exercício, verifique que o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x < 3\}$ não admite ínfimo.

A proposição que apresentamos a seguir garante que o supremo de um conjunto, se existir, é único. Uma propriedade análoga é também estabelecida para o ínfimo.

Proposição 1.14. *Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}$. Então*

(i) O supremo de S, se existir, é único.

(ii) O ínfimo de S, se existir, é único.

Demonstração: *(i)* Seja $S \subset \mathbb{R}$. Admitamos que S admite supremo e que $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ são tais que $u_1 = \sup S$ e $u_2 = \sup S$.

Como $u_1 = \sup S$ e u_2 é um majorante de S, resulta da Definição 1.12 que

$$u_1 \leq u_2.$$

Por outro lado, uma vez que $u_2 = \sup S$ e u_1 é um majorante de S, concluímos que

$$u_2 \leq u_1.$$

As duas desigualdades obtidas implicam, atendendo à Proposição 1.6 *(iii)*, que

$$u_1 = u_2,$$

como pretendíamos.

(ii) A demonstração desta proposição é análoga à demonstração de *(i)* pelo que é deixada como exercício.

■

Como vimos no Exemplo 1.11

$$-1 = \inf\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 2\}.$$

Temos também $-1 = \inf\{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 2\}$.

No primeiro caso o conjunto considerado contém o seu ínfimo e no segundo caso o conjunto considerado não contém o seu ínfimo. Distinguimos as duas situações dizendo que, no primeiro caso, -1 é o mínimo do conjunto e escrevemos $-1 = \min\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 2\}$.

Formalizando esta ideia temos a definição seguinte:

Definição 1.15.

Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}$.

- Dizemos que $u \in \mathbb{R}$ é o **máximo** de S e escrevemos

$$\max S = u$$

se $u = \sup S$ e $u \in S$.

- Dizemos que $w \in \mathbb{R}$ é o **mínimo** de S e escrevemos

$$\min S = w$$

se $w = \inf S$ e $w \in S$.

Observação 1.16.

1. Nas definições que temos estado a apresentar não excluímos a hipótese do conjunto S ser o conjunto vazio.

   Não é difícil verificar que qualquer número real é um majorante do conjunto vazio e que nenhum número real satisfaz a condição 2) da definição de supremo. Consequentemente o conjunto vazio não admite supremo.

   Analogamente se prova que o conjunto vazio não admite ínfimo.

   Por maioria de razão, o conjunto vazio não admite máximo nem mínimo.

2. Resulta da Definição 1.15 que sendo S um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ temos que $u \in \mathbb{R}$ é o máximo do conjunto S se u verifica as condições seguintes:

   i) $u \in S$;

   ii) $u \geq x$, para todo o $x \in S$ e, para todo o $u' \in \mathbb{R}$ tal que $u' \geq x$, para todo o $x \in S$, tem-se $u \leq u'$.

3. Resulta também da Definição 1.15 que sendo S um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ temos que $w \in \mathbb{R}$ é o mínimo do conjunto S se w verifica as condições seguintes:

   i) $w \in S$;

   ii) $w \leq x$, para todo o $x \in S$ e, para todo o $w' \in \mathbb{R}$ tal que $w' \leq x$, para todo o $x \in S$, tem-se $w \geq w'$.

Estamos em condições de apresentar o axioma da completude, que também pode ser designado por axioma do supremo, e que exprime a ideia que os únicos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que não admitem supremo são o conjunto vazio ou os conjuntos que não são limitados superiormente.

13) Todo o conjunto $S \subset \mathbb{R}$ não vazio e limitado superiormente admite supremo.

Utilizando o axioma 13) podemos estabelecer a propriedade seguinte:

- Todo o conjunto S não vazio e limitado inferiormente admite ínfimo.

Por exemplo o conjunto

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$$

admite supremo. O $\sup S$ é um número que não é racional. Prova-se (ver, por exemplo, Introdução à Análise Matemática, J. Campos Ferreira, Fundação Calouste Gulbenkian, 5ª edição pág 38-40) que o supremo deste conjunto é uma solução da equação $x^2 = 2$ e não é um número racional.

O axioma do supremo é utilizado na demonstração de algumas propriedades interessantes:

Proposição 1.17.
O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente.

Demonstração: Admitamos que $\mathbb{N}$ é limitado superiormente. Como $\mathbb{N} \neq \emptyset$ e $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ o axioma do supremo garante a existência de $u \in \mathbb{R}$ tal que

$$u = \sup \mathbb{N}.$$

Como $u = \sup \mathbb{N}$ temos que $u - 1$ não é um majorante de $\mathbb{N}$ e, portanto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > u - 1$. Desta desigualdade resulta $n + 1 > u$ e, uma vez que $n + 1 \in \mathbb{N}$, concluímos que existe um número natural maior do que o supremo de $\mathbb{N}$, o que é absurdo.

O absurdo resulta de supor que $\mathbb{N}$ é limitado superiormente e, portanto, concluímos que $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente, como pretendíamos.

■

Seguem-se duas consequências importantes desta proposição.

Corolário 1.18.
Para todo o $a \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > a$.

Demonstração: Admitamos que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $n \leq a$. Então $\mathbb{N}$ é limitado superiormente o que, de acordo com a Proposição 1.17, é falso.

■

Corolário 1.19.
Seja $a \in \mathbb{R}^+$. Então, para todo o $b \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$.

Demonstração: Seja $a \in \mathbb{R}^+$. Então $a \neq 0$. Admitamos, por redução ao absurdo, que existe $b \in \mathbb{R}$ tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $na \leq b$. Como $a \neq 0$, a Proposição 1.6 *(iv)* e os axiomas de corpo garantem que $n \leq \frac{b}{a}$. Concluímos então que existe $u \in \mathbb{R}$, $u := \frac{b}{a}$, tal que $n \leq u$, isto é, concluímos que $\mathbb{N}$ é limitado superiormente, o que é falso.

■

A propriedade estabelecida no Corolário 1.19 é muitas vezes designada por Propriedade Arquimediana dos números reais. Utilizando o axioma do supremo podemos estabelecer também as propriedades seguintes dos números reais:

1. Se a, b são dois números reais tais que $a < b$, então existe um número racional q tal que $a < q < b$.

2. Se a, b são dois números reais tais que $a < b$ e $w > 0$ é um número irracional, então existe um número racional q tal que $a < wq < b$.

Observação 1.20.

1. A propriedade 1 estabelece que entre dois números reais distintos existe um número racional, donde resulta que entre dois números irracionais distintos existe um número racional.

2. A propriedade 2 garante que entre dois números reais distintos existe um irracional, donde resulta que entre dois números racionais distintos existe um número irracional.

Capítulo 2

Funções reais de variável real

2.1 Noções topológicas em $\mathbb{R}$

Definição 2.1.
Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.
Chamamos **vizinhança - ε de a** ou **vizinhança de centro a e raio ε** e denotamo-la por $V_\varepsilon(a)$ ao conjunto

$$V_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \varepsilon\}.$$

Observação 2.2.

1. Resulta imediatamente da Definição 2.1 que $a \in V_\varepsilon(a)$.
2. Como $|x-a| < \varepsilon$ é equivalente a $a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$ temos que

$$V_\varepsilon(a) =]a-\varepsilon\,, a+\varepsilon[.$$

3. Uma vez que $\varepsilon \neq 0$ temos que $V_\varepsilon(a) \neq \{a\}$.
4. Sendo ε e ε' dois números positivos se $\varepsilon > \varepsilon'$, então $V_{\varepsilon'}(a) \subset V_\varepsilon(a)$.

   De facto, sendo $x \in V_{\varepsilon'}(a)$, temos $|x-a| < \varepsilon'$. Como, por hipótese, $\varepsilon' < \varepsilon$ temos que $|x-a| < \varepsilon$ e, portanto, $x \in V_\varepsilon(a)$.
5. Uma vez que $V_\varepsilon(a) =]a-\varepsilon\,, a+\varepsilon[$ temos que, geometricamente, $V_\varepsilon(a)$ é o segmento de recta de extremos $a-\varepsilon$ e $a+\varepsilon$, extremos excluídos. Consequentemente a é o ponto médio deste segmento de recta, o que justifica a designação de vizinhança de centro a.

Definição 2.3.
Sejam S um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$.

- Dizemos que a é **ponto interior de** S se existe $\varepsilon > 0$ tal que $V_\varepsilon(a) \subset S$, isto é, se existe uma vizinhança - ε de a contida em S.

- Dizemos que a é **ponto exterior de** S se a é ponto interior do complementar de S em $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}\backslash S$, isto é, se existe $\varepsilon > 0$ tal que $V_\varepsilon(a) \subset \mathbb{R}\backslash S$.
- Dizemos que a é **ponto fronteiro de** S se a não é ponto interior nem ponto exterior de S, isto é, se, para todo o $\varepsilon > 0$, $V_\varepsilon(a)$ contém pontos de S e pontos de $\mathbb{R}\backslash S$.
- Ao conjunto dos pontos interiores de S chamamos **interior de** S e denotamo-lo por $\dot{S}$ ou $\text{int}(S)$.
- Chamamos **exterior de** S e denotamo-lo por $\text{ext}(S)$ ao conjunto dos pontos exteriores de S.
- Ao conjunto dos pontos fronteiros de S chamamos **fronteira de** S e denotamo-lo por $\text{frt}(S)$.

Exemplo 2.4.

1. Seja $S = [-1,1[\cup\{3\}$.

   Temos $\text{int}(S) =]-1,1[$, $\text{frt}(S) = \{-1,1,3\}$ e $\text{ext}(S) =]-\infty,-1[\cup]1,3[\cup]3,+\infty[$.
2. Seja $S = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$.

   Temos $\text{int}(S) = \emptyset$, $\text{ext}(S) = \mathbb{R}\backslash(S \cup \{0\})$ e $\text{frt}(S) = S \cup \{0\}$.
3. Sendo $S \subset \mathbb{R}$ temos

   $\text{int}(S) = \text{ext}(\mathbb{R}\backslash S)$, $\text{ext}(S) = \text{int}(\mathbb{R}\backslash S)$ e $\text{frt}(S) = \text{frt}(\mathbb{R}\backslash S)$.

   Consequentemente temos

   $\text{int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $\text{ext}(\mathbb{R}) = \emptyset$, $\text{frt}(\mathbb{R}) = \emptyset$, $\text{int}(\emptyset) = \emptyset$, $\text{ext}(\emptyset) = \mathbb{R}$ e $\text{frt}(\emptyset) = \emptyset$.

Como vimos no Exemplo 2.4 há casos em que o conjunto considerado coincide com o seu interior. Os conjuntos que satisfazem esta propriedade designam-se conjuntos abertos. Temos então a seguinte definição:

Definição 2.5.
Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}$. Dizemos que S **é aberto** se S coincide com o seu interior.

Exemplo 2.6.
Sendo $S = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1\}$ temos que S é aberto.

De entre as noções topológicas são também importantes as noções de **fecho** de um conjunto e de **conjunto fechado**.

Definição 2.7.
Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}$. Chamamos **fecho de** S e denotamo-lo por $\bar{S}$ à reunião de $\text{int}(S)$ com $\text{frt}(S)$.
O conjunto S diz-se **fechado** se $\bar{S} = S$.

Exemplo 2.8.

1. Consideremos o conjunto $S = [-1,1[\cup\{3\}$. Como vimos no Exemplo 2.4, $\text{int}(S) =]-1,1[$ e $\text{frt}(S) = \{-1,1,3\}$. Atendendo à Definição 2.7 temos então $\overline{S} = [-1,1] \cup \{3\} \neq S$ pelo que S não é fechado.

   Como $\text{int}(S) =]-1,1[\neq S$ temos que S não é aberto.
2. Como $\text{int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} = \text{frt}(\mathbb{R}) \cup \text{int}(\mathbb{R})$ temos que $\mathbb{R}$ é simultaneamente aberto e fechado.

   Analogamente, temos que o conjunto vazio é também simultaneamente aberto e fechado.

A noção que apresentamos a seguir é a noção de **ponto de acumulação** que, como veremos, assume um papel importante na definição de limite de uma função num ponto.

Definição 2.9.
Dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é um **ponto de acumulação** de $S \subset \mathbb{R}$ se toda a vizinhança de a contém um ponto de S distinto de a, isto é, se, para todo o $\varepsilon > 0$, $(V_\varepsilon(a) \setminus \{a\}) \cap S \neq \emptyset$.
A todo o ponto de S que não é ponto de acumulação de S chamamos **ponto isolado** de S.

Exemplo 2.10. Consideremos o conjunto $S =]-1,1] \cup \{2\}$.
Todo o ponto de $[-1,1]$ é um ponto de acumulação de S e $a = 2$ é um ponto isolado de S.

Observação 2.11.

1. Resulta da definição que $a \in S$ é ponto isolado de S se existe uma vizinhança - ε de a cuja intersecção com S se reduz a $\{a\}$, isto é, se existe $\varepsilon > 0$ tal que $V_\varepsilon(a) \cap S = \{a\}$.
2. Resulta da definição de ponto isolado que todo o conjunto $S \subset \mathbb{R}$ contém os seus pontos isolados. Por outro lado, nem todo o ponto de acumulação de S pertence a S. De facto, -1 é ponto de acumulação de $S =]-1,1[$ e -1 não pertence ao conjunto considerado.
3. Todo o ponto interior de S é ponto de acumulação de S. Consequentemente, se um conjunto S é aberto, então todo o ponto de S é ponto de acumulação de S.

Definição 2.12.
Um conjunto $S \subset \mathbb{R}$ diz-se **compacto** se é fechado e limitado.

Exemplo 2.13.

1. $S = [-1,1]$ é compacto.
2. $S = [0,+\infty[$ é fechado mas não é limitado pelo que não é compacto.
3. $S = \{2,3\}$ é fechado porque $\text{int}(S) = \emptyset$, $\text{frt}(S) = S$ e $\overline{S} = \emptyset \cup S = S$ e é limitado já que $\sup S = 3$ e $\inf S = 2$. Então S é compacto.

Exercícios 2.1

1. Prove que sendo $S \subset \mathbb{R}$, os conjuntos $\text{int}(S)$, $\text{ext}(S)$ e $\text{frt}(S)$ são dois a dois disjuntos e
$$\mathbb{R} = \text{int}(S) \cup \text{frt}(S) \cup \text{ext}(S)$$
2. Verifique que $\text{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$, $\text{ext}(\mathbb{Q}) = \emptyset$, $\text{frt}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.
3. Determine $\text{int}(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$, $\text{ext}(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ e $\text{frt}(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$.
4. Prove que sendo $a, b \in \mathbb{R}$, o intervalo $[a, b]$ é um compacto de $\mathbb{R}$.
5. Sejam $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$. Prove que $S = \{a_1, \cdots, a_n\}$ é um conjunto compacto.

2.2 Função real de variável real: definições

Sejam D e B dois conjuntos que supomos não vazios.

Uma **função** f de D para B que denotamos por $f : D \longrightarrow B$ é uma correspondência que a cada $x \in D$ associa um e um só elemento de B que denotamos por $f(x)$.

Ao conjunto D chamamos **domínio** de f e a B chamamos **conjunto de chegada** de f. Dado $x \in D$ ao elemento $y = f(x) \in B$ chamamos **imagem** de x por f. O conjunto das imagens chama-se **contradomínio** de f. Temos então que o contradomínio de f é o conjunto $\{f(x) : x \in D\}$.

Definição 2.14.

Seja $f : D \longrightarrow B$ uma função. Dizemos que:

- a função f é **injectiva** se, para todos os $x_1, x_2 \in D$, se $x_1 \neq x_2$ então $f(x_1) \neq f(x_2)$;
- a função f é **sobrejectiva** se o seu contradomínio coincide com o seu conjunto de chegada, isto é, se, para todo o $y \in B$, existe $x \in D$ tal que $y = f(x)$;
- a função f é **bijectiva** se f é simultaneamente injectiva e sobrejectiva.

Exemplo 2.15.

1. Seja $f : \{a, b, c\} \longrightarrow \{\alpha, \beta, \gamma\}$ tal que $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$ e $f(c) = \alpha$.

   Uma vez que o contradomínio de f é o conjunto $\{\alpha, \beta\}$ e o seu conjunto de chegada é o conjunto $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ temos que f não é sobrejectiva.

   Como $f(a) = f(c)$ e $a \neq c$ temos que f não é injectiva.

2. Seja $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ que a cada $n \in \mathbb{N}$ faz corresponder $f(n) = n + 4$. Então f é injectiva.

   Para mostrar que f é injectiva temos de provar que, para todos os $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, se $n_1 \neq n_2$, então $f(n_1) \neq f(n_2)$ o que é equivalente a provar que, para todos os $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, se $f(n_1) = f(n_2)$, então $n_1 = n_2$.

   Sejam então $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $f(n_1) = f(n_2)$. Temos
$$\begin{aligned} f(n_1) = f(n_2) &\iff n_1 + 4 = n_2 + 4 \\ &\iff n_1 = n_2 \end{aligned}$$
   como pretendíamos.

   No entanto f não é sobrejectiva. De facto, tem-se que $1 \in \mathbb{N}$ e, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n + 4 \neq 1$. Note-se que a equação $n + 4 = 1$ é impossível em $\mathbb{N}$.

3. A função f de domínio $\mathbb{R}$ e conjunto de chegada $\mathbb{R}_0^+$ que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa $f(x) = x^2$ é sobrejectiva mas não é injectiva.

   De facto, temos, por exemplo, $2 \neq -2$ e $f(2) = 4 = f(-2)$ o que prova que f não é injectiva.

   Para mostrar que f é sobrejectiva temos de provar que, para todo o $y \in \mathbb{R}_0^+$ existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = x^2$.

   Seja $y_0 \in \mathbb{R}_0^+$, arbitrário.

   Seja $x_0 := \sqrt{y_0} \in \mathbb{R}$. Então $f(x_0) = (\sqrt{y_0})^2 = y_0$.

   A arbitrariedade de y_0 permite-nos afirmar que, para todo o $y \in \mathbb{R}_0^+$ existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$ e, portanto, f é sobrejectiva.

Definição 2.16.

Seja $f : D \longrightarrow B$ uma função. Se $B \subset \mathbb{R}$ dizemos que f é uma **função real.** No caso em que D e B são ambos subconjuntos de $\mathbb{R}$ dizemos que f é uma **função real de variável real.**

De agora em diante vamos apenas ocupar-nos do estudo de funções reais de variável real. Por uma questão de simplificação de linguagem utilizaremos a designação função com o significado de função real de variável real.

Em alguns casos denotaremos o domínio de uma função f por $dom(f)$ ou D_f e o seu contradomínio por CD_f.

Em geral denotaremos uma função de domínio D por
$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

Definição 2.17.

- Seja c um número real. À função definida por
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = c \end{aligned}$$
  chamamos **função constante igual a** c. No caso em que $c = 0$, dizemos que f é a **função nula**.

- À função definida por

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)=x \end{array}$$

chamamos **função identidade**.

- À função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{se} \quad x\geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x<0 \end{cases}$$

chama-se **função módulo**.

Exercício :

Verifique que, para todo o $c\in\mathbb{R}$, a função constante igual a c não é injectiva nem sobrejectiva e que a função identidade é bijectiva.

Definição 2.18.
Seja $f:D\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função. Chamamos **zero** ou **raiz** de f a todo o $x\in\mathbb{R}$ tal que $f(x)=0$.

Observação 2.19. Resulta da Definição 2.18 que os zeros de uma função f são as abcissas dos pontos do gráfico cuja ordenada é igual a zero.

Exemplo 2.20.

1. Se $c\neq 0$ a função constante igual a c não tem zeros.
2. Todo o $x\in\mathbb{R}$ é raiz da função nula.
3. A função identidade tem um único zero $x=0$.
4. A função f definida por

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2-1 \end{array}$$

tem dois zeros $x=1$ e $x=-1$.

Definição 2.21.
Chamamos **gráfico** de $f:D_f\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ ao subconjunto de $\mathbb{R}^2$ denotado por G_f e definido do modo seguinte

$$G_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in D_f \;\text{ e }\; y=f(x)\}.$$

Exemplo 2.22.

1. O gráfico da função constante igual a c é o conjunto $G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=c\}$.

   Geometricamente este conjunto é representado pela recta de equação $y=c$.
2. O gráfico da função identidade é o conjunto $G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=x\}$ que, geometricamente, é representado pela recta de equação $y=x$.
3. O gráfico da função considerada no ponto 3. do Exemplo 2.20, $G_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=x^2-1\}$, é representado geometricamente pela parábola de equação $y=x^2-1$.

Vamos agora apresentar algumas operações que se podem realizar com funções.

Definição 2.23.
Sejam $f:D_f\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ e $g:D_g\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ duas funções.

- **Adição de funções**

Chamamos **soma** de f com g e denotamo-la por $f+g$ à função cujo domínio é $D_f\cap D_g$ e tal que a cada $x\in D_f\cap D_g$ faz corresponder $(f+g)(x):=f(x)+g(x)$.

$$\begin{array}{rrcl} f+g: & D_f\cap D_g & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (f+g)(x)=f(x)+g(x) \end{array}$$

- **Subtracção de funções**

Chamamos **diferença** de f e g e denotamo-la por $f-g$ à função cujo domínio é $D_f\cap D_g$ e tal que a cada $x\in D_f\cap D_g$ faz corresponder $(f-g)(x):=f(x)-g(x)$.

$$\begin{array}{rrcl} f-g: & D_f\cap D_g & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (f-g)(x)=f(x)-g(x) \end{array}$$

- **Multiplicação de funções**

Chamamos **produto** de f por g e denotamo-lo por fg à função cujo domínio é $D_f\cap D_g$ e tal que a cada $x\in D_f\cap D_g$ associa $(fg)(x):=f(x)g(x)$.

$$\begin{array}{rrcl} fg: & D_f\cap D_g & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (fg)(x)=f(x)g(x) \end{array}$$

- **Divisão de funções**

Chamamos **quociente** de f por g e denotamo-lo por f/g à função cujo domínio é o conjunto dos pontos de $D_f\cap D_g$ onde g não se anula e tal que a cada $x\in dom(f/g)$ faz corresponder $(f/g)(x):=\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

$$\begin{array}{rrcl} f/g: & \{x\in D_f\cap D_g : g(x)\neq 0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (f/g)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array}$$

- **Composição de funções**

Seja CD_f o contradomínio da função f. Se $CD_f \cap D_g \neq \emptyset$ podemos construir a **composta** de g com f que denotamos por $g \circ f$ [1] . Esta função tem por domínio o conjunto

$$D = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$$

e, a cada $x \in D$, faz corresponder

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

Exemplo 2.24. Consideremos as funções

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rrcl} g: & \mathbb{R}\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x}+1\,. \end{array}$$

1. Temos $D_f = \mathbb{R}$ e $D_g = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, pelo que $D_f \cap D_g = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Uma vez que

   (a) para todo o $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$,
   $$f(x)+g(x) = \frac{(x+1)^2}{x}\,,$$
   temos
   $$\begin{array}{rrcl} f+g: & \mathbb{R}\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{(x+1)^2}{x} \end{array}$$

   (b) para todo o $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$,
   $$f(x)-g(x) = \frac{x^2-1}{x}\,,$$
   temos
   $$\begin{array}{rrcl} f-g: & \mathbb{R}\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x^2-1}{x} \end{array}$$

   (c) para todo o $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$,
   $$f(x)\,g(x) = \frac{(x+1)^2}{x}\,,$$
   temos
   $$\begin{array}{rrcl} f+g: & \mathbb{R}\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{(x+1)^2}{x} \end{array}$$

[1] O símbolo $g \circ f$ lê-se "g após f".

   (d) $f(x) \neq 0$, para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, e, para todo o $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1\}$,
   $$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x+1}{x^2+x}\,,$$
   temos
   $$\begin{array}{rrcl} g/f: & \mathbb{R}\backslash\{0,-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x+1}{x^2+x} \end{array}$$

2. Como

$$\begin{aligned} D_{f\circ g} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \text{ e } g(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \text{ e } g(x) \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R}\backslash\{0\} \end{aligned}$$

e, para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f\left(1+\frac{1}{x}\right) \\ &= \left(1+\frac{1}{x}\right)+1 \\ &= 2+\frac{1}{x} \end{aligned}$$

temos que $f \circ g$ é uma função cujo domínio coincide com $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ e tal que, para todo o $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$$(f \circ g)(x) = \frac{1}{x}+2\,.$$

3. Como

$$\begin{aligned} D_{g\circ f} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \text{ e } f(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x+1 \neq 0\} \\ &= \mathbb{R}\backslash\{-1\} \end{aligned}$$

e, para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(x+1) \\ &= 1+\frac{1}{x+1} \\ &= \frac{x+2}{x+1} \end{aligned}$$

temos que a função composta $g \circ f$ tem por domínio $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ e, a cada $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, faz corresponder

$$(g \circ f)(x) = \frac{x+2}{x+1}\,.$$

Observação 2.25.

Quando pretendemos determinar o domínio da função composta, não podemos apenas olhar para a expressão analítica que a define. De facto, em muitos casos, para obter a expressão analítica que define a composta temos de efectuar simplificações que apenas são válidas em alguns subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Por exemplo, consideremos as funções f e g definidas, respectivamente, por $f(x) = \sqrt{x}$, para todo o $x \in \mathbb{R}_0^+$, e $g(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$, para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$. Temos que a função composta $g \circ f$ tem por domínio o conjunto

$$D = \{x \in \mathbb{R}_0^+ : \sqrt{x} \notin \{-1,1\}\} = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$$

sendo definida por

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{1-(\sqrt{x})^2} = \frac{1}{1-x}\,,$$

para todo o $x \in D$.

Note-se que a simplificação $(\sqrt{x})^2 = x$ apenas é válida em $\mathbb{R}_0^+$ o que implica que a igualdade $\dfrac{1}{1-(\sqrt{x})^2} = \dfrac{1}{1-x}$ só é válida em $\mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$. Se apenas tivermos em consideração a igualdade $(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{1-x}$ podemos cometer o erro de concluir que o domínio da composta é $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Definição 2.26.

Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e S um subconjunto não vazio de D_f. Chamamos **imagem de** S **por** f e denotamo-lo por $f(S)$ ao conjunto

$$f(S) = \{f(x) : x \in S\}.$$

Observação 2.27.

A imagem de D_f por f, $f(D_f)$, é o contradomínio de f.

Exemplo 2.28.

1. A imagem de qualquer conjunto $S \neq \emptyset$ pela função identidade coincide com o próprio conjunto S.

2. A imagem de qualquer conjunto $S \neq \emptyset$ pela função constante igual a c reduz-se ao conjunto $\{c\}$.

3. Dada a função módulo

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$$

   a imagem de $S_1 = [0,1]$ por f coincide com a imagem de $S_2 = [-1,1]$ por f.

4. Consideremos a função

$$\begin{array}{rrcl} f : & \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

   e os conjuntos $S_1 =]0,1]$ e $S_2 = [1,+\infty[$.

   Então $f(S_1) = [1,+\infty[$ e $f(S_2) =]0,1]$.

Definição 2.29.

Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e S um subconjunto de D_f, não vazio. Dizemos que f **é limitada em** S se o conjunto $f(S)$ é limitado.

Dizemos que f **é limitada** se f é limitada em D_f.

No caso em que f não é limitada dizemos que f **é ilimitada**.

Observação 2.30. Seja $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função.

1. Resulta da Definição 2.29 que f é limitada em $S \subset D_f$ se o conjunto $f(S) = \{f(x) : x \in S\}$ é limitado. Utilizando a Observação 1.10 concluímos que f é limitada em S se existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, para todo o $x \in S$.

   Consequentemente, f é limitada se existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, para todo o $x \in D_f$.

2. Resulta da Definição 2.29 que a função f é ilimitada se o seu contradomínio não é limitado. Utilizando a Observação 1.10 concluímos que f é ilimitada se, para todo o $M > 0$, existe $x_0 \in D_f$ tal que $|f(x_0)| > M$.

Exemplo 2.31.

1. A função constante igual a c é limitada.

2. A função identidade é ilimitada. No entanto, a função identidade é limitada em qualquer subconjunto limitado de $\mathbb{R}$.

3. Sejam f a função módulo e $S_1 = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 1\}$ e $S_2 = \{x \in \mathbb{R} : x > -1\}$ dois subconjuntos de $\mathbb{R}$. Uma vez que $f(S_1) = [0,1[$ e $f(S_2) = [0,+\infty[$ temos que f é limitada em S_1 e ilimitada em S_2.

4. Consideremos a função

$$\begin{array}{rrcl} f : & \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

   Uma vez que $f(]0,1]) = [1,+\infty[$ e $f([1,+\infty[) =]0,1]$ temos que f é limitada no intervalo $[1,+\infty[$ e ilimitada no intervalo $]0,1]$.

Sendo $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada num conjunto $S \subset D_f$, $S \neq \emptyset$, temos que $f(S)$ é um conjunto limitado. Então existem o supremo de $f(S)$ e o ínfimo de $f(S)$, o que dá coerência à definição seguinte.

Definição 2.32.

Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e S um subconjunto de D_f, não vazio.

Chamamos **supremo de** f **em** S e denotamo-lo por

$$\sup_S f \qquad \text{ou} \qquad \sup_{x\in S} f(x)$$

ao supremo do conjunto $f(S)$, caso exista.

Chamamos **ínfimo de** f **em** S e é denotado por

$$\inf_S f \qquad \text{ou} \qquad \inf_{x\in S} f(x)$$

ao ínfimo de $f(S)$, quando existe.

Chamamos **supremo de** f e denotamo-lo por

$$\sup f \qquad \text{ou} \qquad \sup_{x\in D} f(x)$$

ao supremo do contradomínio de f, quando existe.

Analogamente, **ínfimo de** f denotado por

$$\inf f \qquad \text{ou} \qquad \inf_{x\in D} f(x)$$

é o ínfimo do contradomínio de f, caso exista.

Exemplo 2.33. Sejam f a função identidade $S_1 =]-1,2[$ e $S_2 = [-1,2]$. Então $\sup_{S_1} f = 2 = \sup_{S_2} f$ e $\inf_{S_1} f = -1 = \inf_{S_2} f$.

No entanto, a função f não admite supremo nem ínfimo.

Decorre do exemplo apresentado que o supremo ou o ínfimo de uma função num conjunto pode ou não pertencer a esse conjunto. Faz então sentido a definição seguinte.

Definição 2.34. Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e S um subconjunto de D_f, não vazio.

Dizemos que $u \in \mathbb{R}$ é o **máximo de** f **em** S e escrevemos

$$u = \max_{x\in S} f(x)$$

se u é o supremo de f em S e $u \in f(S)$.

Dizemos que $u \in \mathbb{R}$ é o **máximo de** f e escrevemos

$$u = \max f \qquad \text{ou} \qquad u = \max_{x\in D} f(x)$$

se u é o supremo de f e u pertence ao contradomínio de f.

Dizemos que $w \in \mathbb{R}$ é o **mínimo de** f **em** S e escrevemos

$$w = \min_{x\in S} f(x)$$

se w é o ínfimo de f em S e $w \in f(S)$.

Dizemos que $w \in \mathbb{R}$ é o **mínimo de** f e escrevemos

$$w = \min f \qquad \text{ou} \qquad w = \min_{x\in D} f(x)$$

se w é o ínfimo de f e w pertence ao contradomínio de f.

Observe-se que se f é limitada em S, então f admite em S supremo e ínfimo mas pode não admitir máximo em S ou pode não admitir mínimo em S.

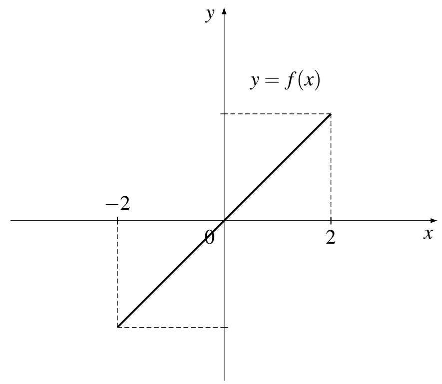
Exemplo 2.35.

1. A função constante igual a c tem máximo e mínimo ambos iguais a c.
2. Sejam f a função identidade e $S =]-1,2]$. Então $f(S) =]-1,2]$, pelo que f é limitada em S.

   Uma vez que $\sup_S f = 2$ e $2 \in f(S) =]-1,2]$, temos que $\max_{x\in S} f(x) = 2$. Por outro lado, uma vez que $\inf_S f = -1$ e $-1 \notin f(S)$, temos que f não admite mínimo em S.

   Uma vez que f não admite supremo nem ínfimo, temos que f não admite máximo nem mínimo.
3. A função módulo tem mínimo $w = 0$ e não tem máximo.

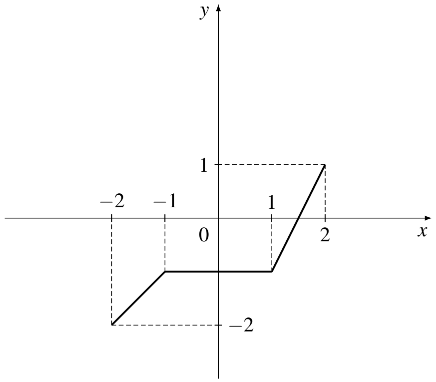
Consideremos a função $f : [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$.



Observando o gráfico da função f podemos constatar que à medida que x cresce, a curva que representa o gráfico de f sobe, o que significa que $f(x)$ também cresce.

Formalmente temos que, sendo $x_1, x_2 \in [-2,2]$, arbitrários, $f(x_1) = x_1$ e $f(x_2) = x_2$ e, portanto, se $x_1 > x_2$ então $f(x_1) > f(x_2)$. Consequentemente a função f satisfaz a propriedade seguinte: para todos os $x_1, x_2 \in [-2,2]$, se $x_1 > x_2$, então $f(x_1) > f(x_2)$.

Consideremos a função $g : [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [-2,-1] \\ -1 & \text{se } x \in]-1,1[\\ 2x-3 & \text{se } x \in [1,2] \end{cases}$.



Observando o gráfico da função g podemos constatar que à medida que x cresce, a curva que representa o gráfico de g sobe apesar de, no intervalo $]-1,1[$, apresentar um patamar. Podemos então concluir que, à medida que x cresce, $g(x)$ cresce ou mantém-se constante.

Não é difícil verificar que a função g satisfaz a propriedade seguinte: para todos os $x_1, x_2 \in [-2,2]$, se $x_1 > x_2$, então $g(x_1) \geq g(x_2)$.

Observe-se que as curvas que representam os gráficos das duas funções consideradas são curvas "crescentes"e, portanto, dizemos que as funções que lhes correspondem são funções crescentes. Uma vez que no primeiro caso considerado, a curva que representa o gráfico não apresenta patamares, dizemos que a função que lhe corresponde é uma função estritamente crescente. Formalizando, temos a seguinte definição.

Definição 2.36.

Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $S \subset D_f$ um conjunto não vazio.

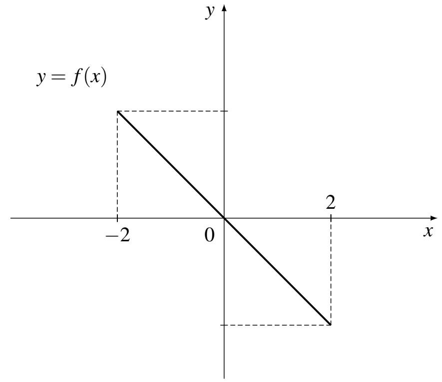
- Dizemos que f **é crescente em** S se, para todos os $x_1, x_2 \in S$, se $x_1 > x_2$ então $f(x_1) \geq f(x_2)$.

- Dizemos que f **é crescente** se f é crescente em D_f, isto é, se, para todos os $x_1, x_2 \in D$, se $x_1 > x_2$ então $f(x_1) \geq f(x_2)$.

- Se, para todos os $x_1, x_2 \in S$, se $x_1 > x_2$ então $f(x_1) > f(x_2)$ dizemos que f **é estritamente crescente** em S.

- Dizemos que f **é estritamente crescente** se f é estritamente crescente em D_f, ou seja, se, para todos os $x_1, x_2 \in D_f$, se $x_1 > x_2$, então $f(x_1) > f(x_2)$.

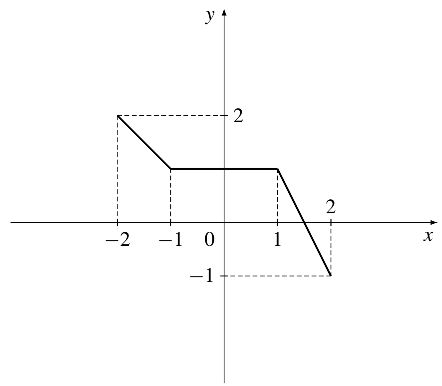
Consideremos a função $f : [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x$.



Observando o gráfico da função f podemos constatar que à medida que x cresce, a curva que representa o gráfico de f desce, o que significa que $f(x)$ decresce.

Sendo $x_1, x_2 \in [-2,2]$, arbitrários temos $f(x_1) = -x_1$ e $f(x_2) = -x_2$. Se $x_1 > x_2$, temos $-x_1 < -x_2$ e, portanto $f(x_1) < f(x_2)$. Consequentemente a função f satisfaz a propriedade seguinte: para todos os $x_1, x_2 \in [-2,2]$, se $x_1 > x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$.

Consideremos a função $g : [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \begin{cases} -x & \text{se} \quad x \in [-2,-1] \\ 1 & \text{se} \quad x \in]-1,1[\\ -2x+3 & \text{se} \quad x \in [1,2] \end{cases}$.



Observando o gráfico da função g podemos constatar que à medida que x cresce, a curva que representa o gráfico de g desce apesar de, no intervalo $]-1,1[$, apresentar um patamar. Podemos então concluir que, à medida que x cresce, $g(x)$ decresce ou mantém-se constante.

Não é difícil, verificar que a função g satisfaz a propriedade seguinte: para todos os $x_1, x_2 \in [-2,2]$, se $x_1 > x_2$, então $g(x_1) \leq g(x_2)$.

Observe-se que as curvas que representam os gráficos das duas funções consideradas são curvas "decrescentes"e, portanto, dizemos que as funções que lhes correspondem são funções decrescentes.

Uma vez que no primeiro caso considerado, a curva que representa o gráfico não apresenta patamares, dizemos que a função que lhe corresponde é uma função estritamente decrescente. Formalizando, temos a seguinte definição.

Definição 2.37. Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e S um subconjunto de D_f, não vazio.

- Dizemos que f **é decrescente em** S se, para todos os $x_1, x_2 \in S$, se $x_1 > x_2$ então $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- Dizemos que f **é decrescente** se é decrescente em D_f, ou seja, se, para todos os $x_1, x_2 \in D_f$, se $x_1 > x_2$ então $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- Se, para todos os $x_1, x_2 \in S$, se $x_1 > x_2$ então $f(x_1) < f(x_2)$ dizemos que f **é estritamente decrescente em** S.
- Dizemos que f **é estritamente decrescente** se f é estritamente decrescente em D_f, isto é, se, para todos os $x_1, x_2 \in D_f$, se $x_1 > x_2$ então $f(x_1) < f(x_2)$.

Exemplo 2.38. 1. A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in [0, +\infty[\\ -x+1 & \text{se} \quad x \in]-\infty, 0[\end{cases}$$

é crescente em $[0, +\infty[$ e decrescente em $]-\infty, 0[$.

De facto, dados $x_1, x_2 \in [0, +\infty[$ tais que $x_1 > x_2$, temos $f(x_1) = x_1$ e $f(x_2) = x_2$ pelo que $f(x_1) > f(x_2)$. Está então provado que, para todos os $x_1, x_2 \in [0, +\infty[$, se $x_1 > x_2$, então $f(x_1) > f(x_2)$ o que prova que f é estritamente crescente em $[0, +\infty[$.

Por outro lado, dados $x_1, x_2 \in]-\infty, 0[$ tais que $x_1 > x_2$ temos $f(x_1) = -x_1 + 1$ e $f(x_2) = -x_2 + 1$ pelo que

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= (-x_1 + 1) - (-x_2 + 1) \\ &= -x_1 + x_2 < 0\,. \end{aligned}$$

Está então provado que, para todos os $x_1, x_2 \in]-\infty, 0[$, se $x_1 > x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$ o que prova que f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$.

No intervalo $[-1, 0]$ a função f não é crescente. DE facto temos, por exemplo, $0 > -1$ e $f(0) < f(-1)$. No entanto, uma vez que f é estritamente decrescente em $[-1, 0[$ e $f(0) < f(x)$, para todo o $x \in [-1, 0[$, temos que, no intervalo $[-1, 0]$, a função f é estritamente decrescente.

2. A função $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x \in [-1, 0[\\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ 1 & \text{se} \quad x \in]0, 1] \end{cases}$$

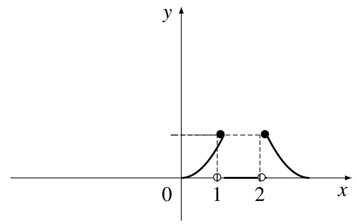
é crescente.

Observação 2.39. 1. Note-se que uma função f pode ser crescente [resp. decrescente] em dois subconjuntos S_1 e S_2 do seu domínio e não ser crescente [resp. decrescente] no conjunto $S_1 \cup S_2$.

Consideremos, por exemplo, a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \in [0, 1] \\ 0 & \text{se} \quad x \in]1, 2[\\ (x-3)^2 & \text{se} \quad x \in [2, 3] \end{cases}$$

para todo o $x \in [0, 3]$.



A função f é crescente no intervalo $[0, 1]$ e no intervalo $]1, 2[$ mas não é crescente no intervalo $[0, 2[$ já que se tem, por exemplo, $\frac{3}{2} > 1$ e $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0 < 1 = f(1)$.

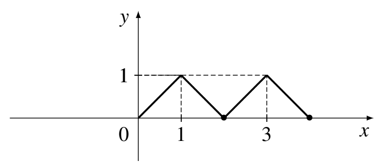
Analogamente temos que a função f é decrescente no intervalo $]1, 2[$ e no intervalo $[2, 3]$ mas não é decrescente no intervalo $]1, 3[$ já que se tem, por exemplo, $2 > \frac{3}{2}$ e $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0 < 1 = f(2)$.

2. Analogamente temos que uma função f pode ser estritamente crescente [resp. estritamente decrescente] em dois subconjuntos S_1 e S_2 do seu domínio e não ser estritamente crescente [resp. estritamente decrescente] no conjunto $S_1 \cup S_2$.

Consideremos, por exemplo, a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in [0, 1] \\ -x+2 & \text{se} \quad x \in]1, 2[\\ x-2 & \text{se} \quad x \in [2, 3[\\ -x+4 & \text{se} \quad x \in [3, 4] \end{cases}$$

para todo o $x \in [0, 4]$.



A função f é estritamente crescente no intervalo $[0, 1]$ e no intervalo $[2, 3[$ mas não é estritamente crescente no conjunto $[0, 1] \cup [2, 3[$ já que se tem, por exemplo, $2 > 1$ e $f(2) = 0 < 1 = f(1)$.

Analogamente, temos que a função f é estritamente decrescente no intervalo $]1,2[$ e no intervalo $[3,4]$ mas não é estritamente decrescente no conjunto $]1,2[\cup[3,4]$ já que se tem, por exemplo, $3 > \frac{3}{2}$ e $f(3) = 1 > \frac{1}{2} = f\left(\frac{3}{2}\right)$.

Na definição que se segue apresenta-se o conceito de função monótona que se utiliza para traduzir que uma função é crescente ou decrescente sem o referir explicitamente.

Definição 2.40. Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e S um subconjunto de D_f, não vazio.

- Dizemos que f **é estritamente monótona em** S se f é estritamente crescente ou estritamente decrescente em S.
- Se f é estritamente crescente ou estritamente decrescente dizemos que f **é estritamente monótona.**
- Dizemos que f **é monótona em** S se f é crescente ou decrescente em S e que é **monótona** se é crescente ou decrescente.

Exemplo 2.41. 1. Como vimos, a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,+\infty[\\ -x+1 & \text{se } x \in]-\infty,0[\end{cases}$$

é crescente em $[0,+\infty[$ e decrescente em $]-\infty,0[$. Consequentemente f não é monótona.

No entanto, f é monótona em $[0,+\infty[$ e em $]-\infty,0[$.

2. A função $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [-1,0[\\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x \in]0,1] \end{cases}$$

é monótona.

Exercícios 2.2

1. Em cada uma das alíneas que se seguem determine o domínio da função definida por

   (a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-4}$;

   (b) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3-3x-2x}$;

   (c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{-x}}{x^2+x+1}$.

2. Considere as funções f e g definidas, respectivamente, por $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x-4}{-x^2+3x}}$ e $g(x) = 3 - \sqrt{x+1}$.

   (a) Determine os domínios das funções f e g.

   (b) Determine os zeros das funções f e g.

   (c) Indique o contradomínio de g.

   (d) Defina as funções $f+g$ e $\dfrac{f}{g}$.

3. Sendo f, g e h definidas, respectivamente, por $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$ e $h(x) = \dfrac{1}{x-1}$, determine os domínios e as expressões analíticas de de $g\circ f$, $f\circ g$, $h\circ f$ e $f\circ h$.

4. Sendo f a função definida por $f(x) = |x^2-3x+2|$ determine o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < 1\}$.

5. Em cada uma das alíneas que se seguem determine, para a função considerada, o domínio, o contradomínio e averigue se são bijectivas.

   (a) f definida por $f(x) = \sqrt{x^2-1}$;

   (b) f definida por $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$;

   (c) f definida por $f(x) = x^2+x$.

6. Utilizando a definição, estude quanto à monotonia, as funções seguintes:

   (a) f definida por $f(x) = -x^3+1$;

   (b) g definida por $g(x) = \dfrac{1}{|x|+2}$.

7. Sejam f a função definida em $[1,+\infty[$ por $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ e g a função definida em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ por $g(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$. Mostre que f é limitada e que g é ilimitada.

2.3 Limites e continuidade

2.3.1 Limite de uma função num ponto

Seja $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Nesta secção vamos definir o **limite de uma função num ponto**. Vamos considerar o caso em que $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de D_f e atribuir significado à igualdade

$$\lim_{x\to a} f(x) = l\ ,$$

onde l é um número real, e vamos também considerar o caso em que a é um ponto isolado de D_f.

Definição 2.42.

Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D_f e $l \in \mathbb{R}$.

Dizemos que l **é o limite de** f **no ponto** a ou que $f(x)$ **tende para** l **quando** x **tende para** a e escrevemos

$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$

se, para todo o $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in D_f$, se

$$0 < |x-a| < \delta \ ,$$

então

$$|f(x) - l| < \varepsilon \ .$$

Se a é um ponto isolado de D_f escrevemos, por definição,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \ .$$

A condição que traduz que $f(x)$ tende para l quando x tende para a pode ser traduzida simbolicamente do modo seguinte:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \ \forall x \in D_f, \ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - l| < \varepsilon \ .$$

Observação 2.43.

Uma vez que a desigualdade $0 < |x-a| < \delta$ é equivalente à condição

$$x \in V_\delta(a) \backslash \{a\}$$

e $|f(x) - l| < \varepsilon$ equivale a

$$f(x) \in V_\varepsilon(l)$$

temos que a definição de limite pode traduzir-se, em termos de vizinhanças, do modo seguinte:

para todo o $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in D_f$, se $x \in V_\delta(a) \setminus \{a\}$, então $f(x) \in V_\varepsilon(l)$, que simbolicamente pode ser traduzido por

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in D, \ x \in V_\delta(a) \backslash \{a\} \ \Rightarrow \ f(x) \in V_\varepsilon(l).$$

A definição de limite pode ser traduzida do modo seguinte: para toda a vizinhança $V_\varepsilon(l)$ de l, por pequena que seja, existe uma vizinhança $V_\delta(a)$ de a tal que $f(x) \in V_\varepsilon(l)$ sempre que $x \in V_\delta(a)$, $x \neq a$.

Esta definição traduz que $f(x)$ está tão próximo de l quanto se queira desde que x, distinto de a, esteja suficientemente próximo de a.

Exemplo 2.44.

1. Seja f a função constante igual a c e a um ponto arbitrário de $\mathbb{R}$.

   Vamos provar, usando a definição de limite, que

$$\lim_{x \to a} f(x) = c \ .$$

Seja $\varepsilon > 0$, arbitrário.

Uma vez que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - c| = 0 < \varepsilon$, a implicação

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon$$

verifica-se, qualquer que seja $\delta > 0$.

Podemos então concluir que, para todo o $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (por exemplo $\delta = \varepsilon$) tal que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, se $0 < |x-a| < \delta$, então $|f(x) - c| < \varepsilon$, o que permite concluir que o limite de f em a é igual a c.

2. Vamos usar a definição para provar que sendo f a função identidade, temos

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x = a$$

para todo o $a \in \mathbb{R}$.

Seja $a \in \mathbb{R}$.

Seja $\varepsilon > 0$, arbitrário.

Atendendo à definição da função identidade temos, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - a| = |x - a| \ .$$

Se tomarmos $0 < \delta < \varepsilon$ podemos concluir que se $0 < |x-a| < \delta$, então $|f(x) - a| = |x - a| < \delta < \varepsilon$.

Acabámos de provar que, para todo o $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, se

$$0 < |x-a| < \delta$$

então

$$|f(x) - a| < \varepsilon \ ,$$

como pretendíamos.

Vamos agora apresentar algumas **propriedades dos limites**.

Proposição 2.45.

Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D_f e $l \in \mathbb{R}$.

Então são equivalentes:

(i) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$;

(ii) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) - l) = 0$;

(iii) $\lim\limits_{x \to a} |f(x) - l| = 0$.

Demonstração: Vamos ver que as equivalências referidas resultam imediatamente da definição.

Suponhamos que
$$\lim_{x\to a}|f(x)-l|=0\,.$$

Atendendo à Definição 2.42 temos que, para todo o $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que, para todo o $x\in D_f$, se $0<|x-a|<\delta$, então $||f(x)-l|-0|<\varepsilon$, o que é equivalente a que, para todo o $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que, para todo o $x\in D_f$, se $0<|x-a|<\delta$, então $|f(x)-l|<\varepsilon$, o que é equivalente a
$$\lim_{x\to a}f(x)=l\,.$$

Mas, por outro lado, temos que
$$\lim_{x\to a}(f(x)-l)=0$$
se e só se, para todo o $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que, para todo o $x\in D_f$, se $0<|x-a|<\delta$, então $|f(x)-l-0|<\varepsilon$ o que é equivalente a que, para todo o $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que, para todo o $x\in D_f$, se $0<|x-a|<\delta$, então $|f(x)-l|<\varepsilon$, ou seja
$$\lim_{x\to a}f(x)=l\,,$$
como pretendíamos.

■

A proposição que apresentamos a seguir garante a **unicidade do limite**.

Proposição 2.46.

Sejam $f:D_f\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função e $a\in\mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D_f. O limite de $f(x)$ quando x tende para a, se existir, é único.

Demonstração: Admitamos que existe $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ e que existem $l_1,l_2\in\mathbb{R}$ tais que $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l_1$, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l_2$ e $l_1\neq l_2$. Como $l_1\neq l_2$, ou $l_1>l_2$ ou $l_1<l_2$.

Admitamos, sem perda de generalidade, que se tem $l_1>l_2$. Consequentemente $l_1-l_2>0$.

Seja $0<\varepsilon<\dfrac{l_1-l_2}{2}$.

Uma vez que $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l_1$, existe $\delta_1>0$ tal que, para todo o $x\in D_f$, se
$$0<|x-a|<\delta_1\,,$$
então
$$f(x)\in\,]l_1-\varepsilon,l_1+\varepsilon[\,.$$

Por outro lado, uma vez que $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l_2$ existe $\delta_2>0$ tal que, para todo o $x\in D_f$, se
$$0<|x-a|<\delta_2\,,$$
então
$$f(x)\in\,]l_2-\varepsilon,l_2+\varepsilon[\,.$$

Seja $\delta:=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Então existe $x_0\in D_f$ tal que $0<|x_0-a|<\delta$ e
$$f(x_0)\in\,]l_1-\varepsilon,l_1+\varepsilon[$$
e
$$f(x_0)\in\,]l_2-\varepsilon,l_2+\varepsilon[\,.$$

Consequentemente,
$$f(x_0)\in\,]l_1-\varepsilon,l_1+\varepsilon[\,\cap\,]l_2-\varepsilon,l_2+\varepsilon[\,,$$
o que implica que $f(x_0)<l_2+\varepsilon$ e $f(x_0)>l_1-\varepsilon$. Temos então
$$l_1-\varepsilon<f(x_0)<l_2+\varepsilon$$
donde resulta que
$$2\varepsilon>l_1-l_2\iff\varepsilon>\frac{l_1-l_2}{2}$$
o que é absurdo já que, por construção, temos $\varepsilon<\dfrac{l_1-l_2}{2}$.

O absurdo resulta de supor que $l_1\neq l_2$ e, portanto, $l_1=l_2$.

■

Definição 2.47. Sejam $f:D_f\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função e a um ponto de acumulação de D_f. Dizemos que f é um **infinitésimo** quando x tende para a se o limite de f em a é igual a zero.

Exemplo 2.48.

1. Qualquer que seja $a\in\mathbb{R}$, a função nula é um infinitésimo quando x tende para a.
2. Qualquer que seja $a\in\mathbb{R}$, a função f definida por $f(x)=x-a$, para todo o $x\in\mathbb{R}$, é um infinitésimo quando x tende para a.

   De facto, uma vez que $\lim\limits_{x\to a}x=a$, a Proposição 2.45 garante que $\lim\limits_{x\to a}(x-a)=0$.

Sendo $f:D_f\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função e a um ponto de acumulação de D_f, vamos designar por **D_f-vizinhança de** a, a intersecção de D_f com uma vizinhança de a.

Exemplo 2.49. Seja f a função definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x)=\ln x$.

Uma D_f- vizinhança de $a=0$ é um intervalo do tipo $]0,\varepsilon[$, com $\varepsilon>0$.

Sendo $a=\dfrac{1}{2}$, a D_f-vizinhança de a de raio $\varepsilon=1$ é o intervalo $\left]0,\dfrac{3}{2}\right[=\left]-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right[\cap\mathbb{R}^+$.

A proposição que demonstramos a seguir estabelece que se existe o limite de f em a, então f é limitada em alguma D_f-vizinhança de a.

Proposição 2.50.

Sejam $f:D_f\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função e a um ponto de acumulação de D_f. Se existe $\lim\limits_{x\to a}f(x)$, então f é limitada numa D_f-vizinhança de a, isto é, existe $\delta>0$ tal que f é limitada em $D_f\cap V_\delta(a)$.

Demonstração: Admitamos que existe $l\in\mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$.

Pretendemos provar que existem $M>0$ e $\delta>0$ tais que, para todo o $x\in D_f\cap V_\delta(a)$, $|f(x)|\leq M$.

Tomemos $\varepsilon = 1$. Como $\lim_{x\to a} f(x) = l$, a definição de limite de uma função num ponto garante a existência de $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in D_f$, se

$$0 < |x-a| < \delta ,$$

então

$$|f(x) - l| < 1 ,$$

o que significa que, se

$$0 < |x-a| < \delta ,$$

então

$$l - 1 < f(x) < l + 1 .$$

Se $a \notin D_f$, seja $M > \max\{l+1, -l+1\}$. Temos então, para todo o $x \in D_f \cap V_\delta(a)$, $-M < f(x) < M$ o que significa que f é limitada em $D_f \cap V_\delta(a)$, como se pretendia.

Se $a \in D_f$ tome-se $M > \max\{f(a), l+1, -l+1\}$. Tal como no caso anterior temos, para todo o $x \in D_f \cap V_\delta(a)$, $-M < f(x) < M$, o que garante que f é limitada numa D_f-vizinhança de a.

■

A proposição que apresentamos a seguir reúne as propriedades dos limites que são muitas vezes conhecidas por **propriedades operatórias dos limites**.

Proposição 2.51.

Sejam f, g duas funções, $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de $D = D_f \cap D_g$ e $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$ e $\lim_{x\to a} g(x) = l_2$, então verificam-se as condições seguintes:

(i) $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = l_1 + l_2$;

(ii) $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = l_1 - l_2$;

(iii) $\lim_{x\to a}(\alpha f(x)) = \alpha l_1$, *para todo o* $\alpha \in \mathbb{R}$;

(iv) $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = l_1 l_2$;

(v) se $l_2 \neq 0$, *então* $\lim_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{l_1}{l_2}$.

Demonstração: *(i)* Seja $\varepsilon > 0$, arbitrário.

Vamos provar que existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in D$, se

$$0 < |x-a| < \delta ,$$

então

$$|(f(x)+g(x)) - (l_1+l_2)| < \varepsilon .$$

Observe-se em primeiro lugar que uma vez que

$$|(f(x)+g(x)) - (l_1+l_2)| = |(f(x)-l_1) + (g(x)-l_2)| \le |f(x)-l_1| + |g(x)-l_2| ,$$

se tivermos que $|f(x)-l_1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ e $|g(x)-l_2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ obtemos a desigualdade pretendida.

Uma vez que por hipótese $\varepsilon > 0$, temos $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$.

Como, por hipótese, $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$, temos que existe $\delta_1 > 0$ tal que, para todo o $x \in D$, se

$$0 < |x-a| < \delta_1 ,$$

então

$$|f(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Por outro lado, como $\lim_{x\to a} g(x) = l_2$, temos que existe $\delta_2 > 0$ tal que, para todo o $x \in D$, se

$$0 < |x-a| < \delta_2 ,$$

então

$$|g(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Seja $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Temos então que, para todo o $x \in D$, se

$$0 < |x-a| < \delta ,$$

então

$$|f(x)-l_1| + |g(x)-l_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} |(f(x)+g(x)) - (l_1+l_2)| &= |f(x) - l_1 + g(x) - l_2| \\ &\le |f(x)-l_1| + |g(x)-l_2| , \end{aligned}$$

podemos concluir que, para todo o $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para todo o $x \in D$, se

$$0 < |x-a| < \delta ,$$

então

$$|(f(x)+g(x)) - (l_1+l_2)| < \varepsilon ,$$

como pretendíamos.

(ii) A demonstração é análoga à anterior e é deixada como exercício.

(iii) Se $\alpha = 0$ então $\alpha f(x)$ é a função constante nula e, portanto, a igualdade verifica-se já que $\lim_{x\to a}(\alpha f(x)) = 0$ e $\alpha\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) = \alpha \cdot 0 = 0$.

Suponhamos $\alpha \neq 0$.

Seja $\varepsilon > 0$. Vamos provar que existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in D_f$, se

$$0 < |x-a| < \delta \ ,$$

então

$$|\alpha f(x) - \alpha l_1| < \varepsilon \ .$$

Notemos, em primeiro lugar, que

$$|\alpha f(x) - \alpha l_1| = |\alpha(f(x) - l_1)| = |\alpha||f(x) - l_1|$$

e, portanto,

$$|\alpha f(x) - \alpha l_1| < \varepsilon \Longleftrightarrow |\alpha||f(x) - l_1| < \varepsilon \Longleftrightarrow |f(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|} \ .$$

Consequentemente, se provarmos que

$$|f(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$$

garantimos que

$$|\alpha f(x) - \alpha l_1| < \varepsilon \ .$$

Basta ter em consideração que se $\varepsilon > 0$, então $\dfrac{\varepsilon}{|\alpha|} > 0$ e, atendendo a que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l_1$, temos que existe $\delta > 0$, tal que, para todo o $x \in D_f$, se

$$0 < |x-a| < \delta \ ,$$

então

$$|f(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|} \ .$$

Consequentemente, existe $\delta > 0$, tal que, para todo o $x \in D_f$, se

$$0 < |x-a| < \delta \ ,$$

então

$$|f(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$$

e temos o resultado pretendido.

(iv) Seja $\varepsilon > 0$.

Queremos provar que existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in D$, se

$$0 < |x-a| < \delta \ ,$$

então

$$|f(x)g(x) - l_1 l_2| < \varepsilon \ .$$

Como $f(x)g(x) - l_1 l_2 = f(x)(g(x) - l_2) + l_2(f(x) - l_1)$ temos que

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - l_1 l_2| &= |f(x)(g(x) - l_2) + l_2(f(x) - l_1)| \\ &\leq |f(x)||g(x) - l_2| + |l_2||f(x) - l_1| \ . \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l_1$ a Proposição 2.50 garante a existência de $M > 0$ e $\delta_1 > 0$ tais que, para todo o $x \in D$, se

$$0 < |x-a| < \delta_1 \ ,$$

então

$$|f(x)| < M \ .$$

Uma vez que $\varepsilon > 0$, temos $\dfrac{\varepsilon}{2(|l_2|+1)} > 0$ e, atendendo à definição de limite de uma função num ponto, sabemos que existe $\delta_2 > 0$ tal que, para todo o $x \in D$, se

$$0 < |x-a| < \delta_2 \ ,$$

então

$$|f(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{2(|l_2|+1)} \ .$$

Por outro lado também $\dfrac{\varepsilon}{2M} > 0$ e, como $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l_2$, existe $\delta_3 > 0$ tal que para todo o $x \in D$, se

$$0 < |x-a| < \delta_3 \ ,$$

então

$$|g(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2M} \ .$$

Seja $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Então, para todo o $x \in D$, se

$$0 < |x-a| < \delta \ ,$$

então

$$\begin{aligned} |f(x)||g(x) - l_2| + |l_2||f(x) - l_1| &< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |l_2| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|l_2|+1)} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|l_2|}{|l_2|+1} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \frac{\varepsilon}{2}\left(1 + \frac{|l_2|}{|l_2|+1}\right) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2 = \varepsilon \ , \end{aligned}$$

porque $\dfrac{|l_2|}{|l_2|+1} < 1$.

Acabámos de provar que, para todo o $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in D$, se

$$0 < |x-a| < \delta \,,$$

então

$$|f(x)g(x) - l_1 l_2| < \varepsilon \,,$$

como pretendíamos.

(v) Para provar a igualdade pretendida, vamos começar por provar que

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{l_2}$$

e, em seguida, usar *(iv)*.

Denotemos por D o domínio da função $1/g$.

Temos de provar que, para todo o $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in D$, se

$$0 < |x-a| < \delta$$

então

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{l_2} \right| < \varepsilon \,.$$

Note-se que

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{l_2} \right| = \frac{|l_2 - g(x)|}{|g(x) l_2|} = |l_2 - g(x)| \frac{1}{|g(x) l_2|} \,. \tag{2.1}$$

Tendo em mente a majoração do segundo factor desta igualdade vamos provar, em primeiro lugar, que existe $\delta_1 > 0$ tal que, para todo o $x \in D$, se $0 < |x-a| < \delta_1$, então

$$g(x) l_2 > \frac{(l_2)^2}{2} \,.$$

Atendendo à propriedade *(iii)* e a que $\lim_{x \to a} g(x) = l_2$ temos que $\lim_{x \to a} l_2\, g(x) = (l_2)^2$ o que, de acordo com a definição de limite, significa que, para todo o $\varepsilon > 0$, existe $\theta > 0$ tal que, para todo o $x \in D$, se $0 < |x-a| < \theta$ então $|l_2\, g(x) - (l_2)^2| < \varepsilon$.

Em particular, como $\dfrac{(l_2)^2}{2} > 0$, fazendo $\varepsilon = \dfrac{(l_2)^2}{2} > 0$ tem-se que, existe $\delta_1 > 0$ tal que, para todo o $x \in D$, se $0 < |x-a| < \delta_1$, então

$$|g(x) l_2 - (l_2)^2| < \frac{(l_2)^2}{2}$$

donde se deduz que

$$\frac{(l_2)^2}{2} < g(x) l_2 < \frac{3(l_2)^2}{2} \,,$$

ou seja,

$$g(x) l_2 > \frac{(l_2)^2}{2} \,,$$

como pretendíamos.

Então

$$\frac{1}{|g(x)\, l_2|} < \frac{2}{(l_2)^2} \,. \tag{2.2}$$

Por outro lado, sendo $\varepsilon > 0$ também $\dfrac{\varepsilon (l_2)^2}{2} > 0$ e, atendendo a que por hipótese $\lim_{x \to a} g(x) = l_2$ e à definição de limite, temos que, existe $\delta_2 > 0$ tal que, para todo o $x \in D_g$, se $0 < |x-a| < \delta_2$, então

$$|g(x) - l_2| < \frac{\varepsilon (l_2)^2}{2} \,. \tag{2.3}$$

Tomando $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, tem-se que, para todo o $x \in D$, se

$$0 < |x-a| < \delta \,,$$

então, atendendo a (2.1), (2.2) e (2.3), tem-se

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{l_2} \right| < \frac{\varepsilon (l_2)^2}{2} \frac{2}{{l_2}^2} = \varepsilon$$

como pretendíamos.

Temos então $\lim_{x \to a} f(x) = l_1$, $\lim_{x \to a} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{l_2}$ e, atendendo a que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \dfrac{1}{g(x)}$ e a (iv) concluímos então que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2} \,.$$

■

Exemplo 2.52. Utilizando a Proposição 2.51 e, atendendo a que, para todo o $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to a} x = a$ e, para todo o $c \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to a} c = c$, temos

i)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -1} (3x^2 - 2x) &= \lim_{x \to -1} (3x^2) + \lim_{x \to -1} (-2x) \\
&= 3 \lim_{x \to -1} x^2 - 2 \lim_{x \to -1} x \\
&= 3 \left(\lim_{x \to -1} x \right)^2 - 2 \lim_{x \to -1} x \\
&= 3(-1)^2 - 2(-1) \\
&= 5
\end{aligned}$$

ii) uma vez que $\lim\limits_{x\to -1}(3x^2-2x)\neq 0$, vem

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1}\frac{x^3}{3x^2-2x} &= \frac{\lim\limits_{x\to -1}x^3}{\lim\limits_{x\to -1}(3x^2-2x)}\\ &= \frac{\left(\lim\limits_{x\to -1}x\right)^3}{5}\\ &= \frac{-1}{5}\\ &= -\frac{1}{5}\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n) &= \lim_{x\to a}a_0+\lim_{x\to a}(a_1x)+\lim_{x\to a}(a_2x^2)+\cdots+\lim_{x\to a}(a_nx^n)\\ &= \lim_{x\to a}a_0+a_1\lim_{x\to a}x+a_2\lim_{x\to a}(x^2)+\cdots+a_n\lim_{x\to a}(x^n)\\ &= \lim_{x\to a}a_0+a_1\lim_{x\to a}x+a_2\left(\lim_{x\to a}x\right)^2+\cdots+a_n\left(\lim_{x\to a}x\right)^n\\ &= a_0+a_1a+a_2a^2+\cdots+a_na^n\end{aligned}$$

para todos os $a_0,a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{R}$ e, para todo o $a\in\mathbb{R}$.

A proposição que apresentamos a seguir é muitas vezes designada **lei do enquadramento**.

Proposição 2.53.

Sejam f, g, h funções de domínio $D\subset\mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de D.

Se, nalguma vizinhança $V_{\delta_1}(a)$ de a, temos

$$f(x)\le h(x)\le g(x)$$

para todo o $x\in(V_{\delta_1}(a)\setminus\{a\})\cap D$, e $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l=\lim\limits_{x\to a}g(x)$, então

$$\lim_{x\to a}h(x)=l.$$

Demonstração: Seja $\varepsilon>0$, arbitrário.

Como por hipótese $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$ tem-se que existe $\delta_2>0$ tal que, para todo o $x\in D$, se

$$0<|x-a|<\delta_2\ ,$$

então

$$|f(x)-l|<\varepsilon\ .$$

Também por hipótese $\lim\limits_{x\to a}g(x)=l$ o que implica que existe $\delta_3>0$ tal que, para todo o $x\in D$, se

$$0<|x-a|<\delta_3\ ,$$

então

$$|g(x)-l|<\varepsilon\ .$$

Atendendo a que $|g(x)-l|<\varepsilon$ equivale a $l-\varepsilon<g(x)<l+\varepsilon$ e $|f(x)-l|<\varepsilon$ equivale a $l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon$ temos que, sendo $\delta:=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$ então, para todo o $x\in D$, se

$$0<|x-a|<\delta\ ,$$

então

$$l-\varepsilon<f(x)\le h(x)\le g(x)<l+\varepsilon\ ,$$

donde resulta que

$$|h(x)-l|<\varepsilon\ .$$

Provámos que, para todo o $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que, para todo o $x\in D$, se $0<|x-a|<\delta$, então $|h(x)-l|<\varepsilon$ o que significa que que $\lim\limits_{x\to a}h(x)=l$, como pretendíamos.

■

Exemplo 2.54. Suponhamos que pretendemos calcular o limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)\ .$$

Para todo o $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, temos

$$\left|\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right|\le 1$$

donde resulta que, para todo o $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$,

$$\left|x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right|\le|x|\iff -|x|\le x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\le|x|$$

Uma vez que $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$ e que $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|)=0$ e, tendo em atenção a desigualdade $-|x|\le x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\le|x|$ e a Proposição 2.53, podemos concluir que

$$\lim_{x\to 0}\left(x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)=0\ .$$

O limite apresentado no exemplo anterior pode também ser calculado utilizando a proposição que apresentamos a seguir. Esta proposição garante-nos que **o produto de uma função limitada numa vizinhança de um ponto a por um infinitésimo quando x tende para a é um infinitésimo quando x**

tende para a.

Proposição 2.55.

Sejam f, g duas funções e a um ponto de acumulação de $D = D_f \cap D_g$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e existe $\delta_1 > 0$ tal que g é limitada em $\left(V_{\delta_1}(a) \setminus \{a\}\right) \cap D_g$, então

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = 0.$$

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$, arbitrário.

Queremos provar que existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in D$, se

$$0 < |x-a| < \delta\ ,$$

então

$$|f(x)g(x)| < \varepsilon\ .$$

Atendendo a que por hipótese g é limitada em $\left(V_{\delta_1}(a) \setminus \{a\}\right) \cap D_g$, existe $M > 0$ tal que, para todo o $x \in D$, se

$$0 < |x-a| < \delta_1\ ,$$

então

$$|g(x)| \leq M\ .$$

Por outro lado, atendendo a que $\dfrac{\varepsilon}{M} > 0$ e a que f é um infinitésimo quando x tende para a, a definição de limite de uma função num ponto garante que existe $\delta_2 > 0$ tal que, para todo o $x \in D$, se

$$0 < |x-a| < \delta_2\ ,$$

então

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}\ .$$

Tomando $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ temos que, para todo o $x \in D$, se $0 < |x-a| < \delta$, então

$$|f(x)\, g(x)| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon\ ,$$

como se pretendia.

■

Observação 2.56. A demonstração que apresentámos para a Proposição 2.55 utiliza a definição de limite de uma função num ponto. Podemos demonstrar esta proposição recorrendo às Proposições 2.53 e 2.45.

De facto, a hipótese garante que existe $M > 0$ tal que, para todo o $x \in (V_{\delta_1}(a) \setminus \{a\}) \cap D_g$,

$$|g(x)| \leq M$$

o que implica que, para todo o $x \in \left(V_{\delta_1}(a) \setminus \{a\}\right) \cap D_g$,

$$0 \leq |f(x)g(x)| \leq M|f(x)|\ . \tag{2.4}$$

Uma vez que f é um infinitésimo quando x tende para a, a Proposição 2.45 garante que $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$.

Atendendo à Proposição 2.51 podemos então concluir que $\lim_{x\to a}(M|f(x)|) = 0$.

Por outro lado temos que $\lim_{x\to a} 0 = 0$.

Tendo em atenção a desigualdade (2.4) e a Proposição 2.53 podemos então concluir que

$$\lim_{x\to a} |f(x)g(x)| = 0\ .$$

Atendendo à Proposição 2.45 temos que

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = 0\ ,$$

como pretendíamos.

Exemplo 2.57. Sejam a um número real, f a função definida por $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x^2-a^2}\right)$, para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{-a, a\}$ e g a função definida por $g(x) = \dfrac{x-a}{x+a}$, para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{-a\}$.

Pretendemos calcular, em função de $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, o limite

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to a}\left(\frac{x-a}{x+a} \cos\left(\frac{1}{x^2-a^2}\right)\right)\ .$$

Temos, para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{-a, a\}$ e, para todo o $a \in \mathbb{R}$,

$$-1 \leq \cos\frac{1}{x^2-a^2} \leq 1$$

e, portanto, a função g é uma função limitada, para todo o $a \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, para todo o $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\lim_{x\to a} \frac{x-a}{x+a} = 0$$

e, portanto, o para todo o $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a função f é um infinitésimo quando x tende para a.

Atendendo à Proposição 2.55 temos que, para todo o $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{x-a}{x+a} \cos\left(\frac{1}{x^2-a^2}\right)\right) = 0\ .$$

Apresentamos a seguir uma proposição que nos dá informação sobre o comportamento relativo, numa vizinhança de um ponto, das curvas que representam os gráficos de duas funções, conhecidos os seus limites nesse ponto. Vamos demonstrar que, se o limite de uma função f num ponto a é inferior ao limite de uma função g nesse mesmo ponto a, então, nalguma vizinhança de a, excepto o ponto a, a curva que representa o gráfico de f situa-se abaixo da curva que representa o gráfico de g.

Proposição 2.58.

Sejam f e g funções definidas em D e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D. Se $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$, $\lim_{x\to a} g(x) = l_2$ e $l_1 < l_2$, então existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in D$, se

$$0 < |x-a| < \delta \ ,$$

então

$$f(x) < g(x) \ .$$

Demonstração: Queremos provar que existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in D$, se

$$0 < |x-a| < \delta \ ,$$

então

$$f(x) < g(x) \ .$$

Como $l_1 < l_2$ temos que $l_2 - l_1 > 0$.

Seja $\varepsilon := \dfrac{l_2 - l_1}{2} > 0$.

Então, atendendo a que por hipótese $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$, a definição de limite de uma função num ponto garante que existe $\delta_1 > 0$ tal que, para todo o $x \in D$, se

$$0 < |x-a| < \delta_1 \ ,$$

então

$$l_1 - \varepsilon < f(x) < l_1 + \varepsilon \ .$$

Por outro lado, atendendo a que por hipótese $\lim_{x\to a} g(x) = l_2$, a definição de limite de uma função num ponto garante que existe $\delta_2 > 0$ tal que, para todo o $x \in D$, se

$$0 < |x-a| < \delta_2 \ ,$$

então

$$l_2 - \varepsilon < g(x) < l_2 + \varepsilon \ .$$

Da definição de ε resulta que $l_1 + \varepsilon = \dfrac{l_1 + l_2}{2}$ e $l_2 - \varepsilon = \dfrac{l_1 + l_2}{2}$.

Consequentemente, sendo $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ temos que, para todo o $x \in D$,

$$f(x) < \frac{l_1 + l_2}{2}$$

e

$$g(x) > \frac{l_1 + l_2}{2}$$

donde concluímos que se

$$0 < |x-a| < \delta \ ,$$

então

$$f(x) < \frac{l_1 + l_2}{2} < g(x) \ ,$$

e, portanto, $f(x) < g(x)$, como pretendíamos. ■

Como consequência da Proposição 2.58 temos o corolário seguinte que nos dá informação sobre o sinal de uma função numa vizinhança de um ponto onde calculamos o limite.

Corolário 2.59.

Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e a um ponto de acumulação de D_f. Se $\lim_{x\to a} f(x) = l$ e $l < 0$, então existe $\delta > 0$, tal que para todo o $x \in D_f$, se

$$0 < |x-a| < \delta \ ,$$

então

$$f(x) < 0 \ .$$

Demonstração: Seja g a função nula.

Então as funções f e g estão nas condições da Proposição 2.58 e, portanto existe $\delta > 0$, tal que para todo o $x \in D_f$, se

$$0 < |x-a| < \delta \ ,$$

então

$$f(x) < g(x) = 0 \ ,$$

como pretendíamos.

■

Analogamente se prova que se uma função tem limite positivo num ponto a, então, existe uma vizinhança de a, tal que f é positiva em todos os pontos dessa vizinhança excepto, possivelmente, no ponto a. Temos então o corolário seguinte cuja demonstração é deixada como exercício.

Corolário 2.60.

Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e a um ponto de acumulação de D_f. Se $\lim_{x\to a} f(x) = l$ e $l > 0$, então existe $\delta > 0$, tal que para todo o $x \in D_f$, se

$$0 < |x-a| < \delta \ ,$$

então

$$f(x) > 0 \ .$$

Demonstração: Exercício. ■

Corolário 2.61.

Sejam f e g duas funções de domínio $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D e $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$ e $\lim_{x\to a} g(x) = l_2$. Se existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in D \cap \big(V_\delta(a) \setminus \{a\}\big)$, $f(x) \le g(x)$, então $l_1 \le l_2$.

Demonstração: Admitamos que se tem $l_1 > l_2$.

Pela Proposição 2.58, existe $\delta_1 > 0$ tal que, para todo o $x \in \big(V_{\delta_1}(a) \setminus \{a\}\big) \cap D$,

$$f(x) > g(x) \, .$$

Seja $\delta_2 = \min\{\delta_1, \delta\}$.

Então, uma vez que $\big(V_{\delta_2}(a) \setminus \{a\}\big) \cap D \subset \big(V_{\delta_1}(a) \setminus \{a\}\big) \cap D$, temos que, para todo o $x \in \big(V_{\delta_2}(a) \setminus \{a\}\big) \cap D$, $f(x) > g(x)$ e, uma vez que $\big(V_{\delta_2}(a) \setminus \{a\}\big) \cap D \subset \big(V_{\delta}(a) \setminus \{a\}\big) \cap D$, garantimos que existe pelo menos um ponto $x_0 \in (V_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap D$ tal que $f(x_0) < g(x_0)$, o que é absurdo.

O absurdo resulta de supor que $l_1 > l_2$, pelo que se deve ter $l_1 \le l_2$, como pretendíamos.

■

2.3.2 Limites infinitos e limites no infinito

Nas duas definições que se seguem apresentamos dois conceitos de limite que se designam habitualmente **limites finitos no infinito**.

Definição 2.62.

Sejam $D_f \subset \mathbb{R}$ um conjunto tal que $]a, +\infty[\subset D_f$, para algum $a \in \mathbb{R}$, $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $l \in \mathbb{R}$. Dizemos que **o limite de** $f(x)$ **quando** x **tende para** $+\infty$ **é igual a** l e escrevemos

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$$

se, para todo o $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que, para todo o $x \in D_f$, se $x > M$, então $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Para traduzir simbolicamente que o limite de $f(x)$ quando x tende para $+\infty$ é igual a l podemos escrever

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists M > 0 : \ \forall x \in D_f, \ \ x > M \ \Rightarrow \ |f(x) - l| < \varepsilon \, .$$

Esta definição exprime a ideia de que $f(x)$ está tão próximo de l quanto se queira para valores de x "suficientemente grandes".

Definição 2.63.

Sejam $D_f \subset \mathbb{R}$ um conjunto tal que $]-\infty, a[\subset D_f$ para algum $a \in \mathbb{R}$, $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $l \in \mathbb{R}$. Dizemos que **o limite de** $f(x)$ **quando** x **tende para** $-\infty$ **é igual a** l e escrevemos

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$$

se, para todo o $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que, para todo o $x \in D_f$, se $x < -M$, então $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Para traduzir que o limite de $f(x)$ quando x tende para $-\infty$ é igual a l podemos escrever simbolicamente

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists M > 0 : \ \forall x \in D_f, \ \ x < -M \ \Rightarrow \ |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Esta definição traduz a ideia de que $f(x)$ está tão próximo de l quanto se queira para valores de x "suficientemente pequenos".

Exemplo 2.64.

Consideremos a função

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

Vamos provar que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad = \quad 0 \, .$$

Seja $\varepsilon > 0$, arbitrário. Temos de provar que existe $M > 0$ tal que, para todo o $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, se $x > M$, então $|f(x)| < \varepsilon$.

Uma vez que, para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\begin{array}{rcl} |f(x)| < \varepsilon & \Longleftrightarrow & \left|\dfrac{1}{x}\right| < \varepsilon \\ & \Longleftrightarrow & \dfrac{1}{|x|} < \varepsilon \\ & \Longleftrightarrow & |x| > \dfrac{1}{\varepsilon} \\ & \Longleftrightarrow & x < -\dfrac{1}{\varepsilon} \vee x > \dfrac{1}{\varepsilon} \end{array}$$

se tomarmos $M := \dfrac{1}{\varepsilon}$ temos que se $x > M$, então $|x| > \dfrac{1}{\varepsilon}$, o que implica que

$$|f(x)| = \frac{1}{|x|} < \varepsilon \, .$$

Está então provado que, para todo o $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que, para todo o $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, se $x > M$, então $|f(x)| < \varepsilon$, como pretendíamos.

Vamos também provar que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad = \quad 0.$$

Seja $\varepsilon > 0$, arbitrário. Temos de provar que existe $M > 0$ tal que, para todo o $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, se $x < -M$, então $|f(x)| < \varepsilon$.

Se tomarmos $M := \frac{1}{\varepsilon}$ temos que se $x < -M$, então $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$, o que implica que

$$|f(x)| = \frac{1}{|x|} < \varepsilon \,.$$

Está então provado que, para todo o $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que, para todo o $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, se $x < -M$, então $|f(x)| < \varepsilon$, como pretendíamos.

Observação 2.65. Observe-se que podemos estabelecer para os limites finitos no infinito a unicidade do limite e propriedades análogas às que foram demonstradas na Proposição 2.51 para o limite de uma função num ponto.

A título de exemplo apresentamos estas propriedades para o limite definido na Definição 2.62. Tal como no caso da Proposição 2.51, a demonstração destas propriedades, que deixamos como exercício, utiliza a definição.

Sejam então f e g duas funções e $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. Se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l_1$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = l_2$, então verificam-se as propriedades seguintes:

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)+g(x)) = l_1 + l_2$;

(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-g(x)) = l_1 - l_2$;

(iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\alpha f(x)) = \alpha l_1$, para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$;

(iv) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)g(x)) = l_1 l_2$;

(v) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{l_1}{l_2}$ se $l_2 \neq 0$.

Definimos a seguir um outro tipo de limites que são muitas vezes designados **limites infinitos**.

Definição 2.66.

Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D_f.

Dizemos que **o limite de** $f(x)$ **quando** x **tende para** a **é igual a** $+\infty$ e escrevemos

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

se, para todo o $L > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in D_f$, se $0 < |x-a| < \delta$, então $f(x) > L$.

Dizemos que **o limite de** $f(x)$ **quando** x **tende para** a **é igual a** $-\infty$ e escrevemos

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

se, para todo o $L > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in D_f$, se $0 < |x-a| < \delta$, então $f(x) < -L$.

Para traduzir simbolicamente que o limite de $f(x)$ quando x tende para a é igual a $+\infty$ escrevemos

$$\forall L > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \ \forall x \in D_f,\ \ 0 < |x-a| < \delta \ \ \Rightarrow \ \ f(x) > L \,.$$

Simbolicamente escrevemos

$$\forall L > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \ \forall x \in D_f,\ \ 0 < |x-a| < \delta \ \ \Rightarrow \ \ f(x) < -L \,,$$

para traduzir que o limite de $f(x)$ quando x tende para a é igual a $-\infty$.

Exemplo 2.67.

Consideremos a função

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x^2} \end{array}$$

Vamos provar, usando a Definição 2.66, que

$$\lim_{x\to 0} f(x) \ = \ +\infty$$

Seja $L > 0$, arbitrário. Temos de provar que existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, se $0 < |x| < \delta$, então $f(x) > L$.

Uma vez que, para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} f(x) > L \ &\Longleftrightarrow \ \frac{1}{x^2} > L \\ &\Longleftrightarrow \ x^2 < \frac{1}{L} \\ &\Longleftrightarrow \ |x| < \frac{1}{\sqrt{L}} \end{aligned}$$

se tomarmos $\delta := \frac{1}{\sqrt{L}}$ temos que se $|x| < \frac{1}{\sqrt{L}}$, então $x^2 < \frac{1}{L}$, o que implica que

$$f(x) = \frac{1}{x^2} > L \,.$$

Está então provado que, para todo o $L > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, se $|x| < \delta$, então $f(x) > L$, como pretendíamos.

Observação 2.68.

1. Dizer que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ traduz a ideia de que $f(x)$ toma valores "tão grandes" quanto se queira sempre que $x \neq a$ está suficientemente próximo de a.

   Analogamente $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ traduz a ideia de que $f(x)$ toma valores "tão pequenos" quanto se queira sempre que $x \neq a$ está suficientemente próximo de a.

2. Atendendo a que $0 < |x-a| < \delta$ é equivalente a $x \in V_\delta(a)\backslash\{a\}$ temos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ se e só se para todo o $L > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in D_f$, se $x \in V_\delta(a)\backslash\{a\}$, então $f(x) > L$

que se pode escrever simbolicamente

$$\forall L > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \ \forall x \in D_f,\ \ x \in V_\delta(a) \backslash \{a\} \ \ \Rightarrow \ \ f(x) > L\,.$$

Analogamente temos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ se e só se para todo o $L > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in D_f$, se $x \in V_\delta(a)\backslash\{a\}$, então $f(x) < -L$ que se pode escrever simbolicamente do modo seguinte

$$\forall L > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \ \forall x \in D_f,\ \ x \in V_\delta(a) \backslash \{a\} \ \ \Rightarrow \ \ f(x) < -L\,.$$

3. Podemos estabelecer para os limites infinitos propriedades análogas às que foram estabelecidas na Proposição 2.51. Para o estabelecimento dessas propriedades temos de estabelecer algumas convenções sobre operações que envolvem os símbolos $+\infty$ e $-\infty$. Convencionamos então que:

   - $(+\infty)+(+\infty) = +\infty$ e, para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$, $+\infty+\alpha = +\infty = \alpha+(+\infty)$;
   - $(-\infty)+(-\infty) = -\infty$ e, para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$, $-\infty+\alpha = -\infty = \alpha+(-\infty)$;
   - $(+\infty)\times(+\infty) = +\infty$, $(-\infty)\times(-\infty) = +\infty$ e $(+\infty)\times(-\infty) = -\infty = (-\infty)\times(+\infty)$;
   - para todo o $\alpha > 0$, $\alpha\times(+\infty) = +\infty = (+\infty)\times\alpha$ e $\alpha\times(-\infty) = -\infty = (-\infty)\times\alpha$;
   - para todo o $\alpha < 0$, $\alpha\times(+\infty) = -\infty = (+\infty)\times\alpha$ e $\alpha\times(-\infty) = +\infty = (-\infty)\times\alpha$.

   As convenções apresentadas não atribuem significado ao símbolos $0\times\infty$, $\infty\times 0$, ∞/∞ e $+\infty-\infty$ que são considerados símbolos de indeterminação.

   São também símbolos de indeterminação 0^0, $0/0$, 1^∞ e ∞^0.

   Tendo então em consideração as convenções apresentadas, e sempre que não nos encontremos perante um símbolo de indeterminação, valem para os limites infinitos propriedades análogas às estabelecidas para os limites finitos. Estas propriedades são úteis para o cálculo de limites.

A proposição que apresentamos a seguir é muito útil no cálculo de limites.

Proposição 2.69. *Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e aum ponto de acumulação de D_f.*

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ [resp. $f(x) < 0$], para todo o $x \in (V_\delta(a)\setminus\{a\})\cap D_f$, então $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)} = +\infty$ $\left[\text{resp.} \lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)} = -\infty\right]$.

Demonstração: Para provar que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)} = +\infty$ temos de provar que, para todo o $L > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que, para todo o $x \in D_f$, se

$$0 < |x-a| < \delta_1\,,$$

então

$$\frac{1}{f(x)} > L\,.$$

Sela $L > 0$, arbitrário.

Atendendo à hipótese, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$, para todo o $x \in (V_\delta(a)\setminus\{a\})\cap D_f$ e, portanto, para todo o para todo o $x \in (V_\delta(a)\setminus\{a\})\cap D_f$,

$$\frac{1}{f(x)} > L \Longleftrightarrow 0 < f(x) < \frac{1}{L}\,.$$

Seja $\varepsilon = \dfrac{1}{L}$. Uma vez que $L > 0$, temos $\varepsilon > 0$ e, como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, a definição de limite de uma função num ponto garante que existe $\delta_2 > 0$ tal que, para todo o $x \in D_f$, se

$$0 < |x-a| < \delta_2\,,$$

então

$$|f(x)| < \frac{1}{L}\,. \tag{2.5}$$

Seja $\delta_3 = \min\{\delta,\delta_2\}$. Então $(V_{\delta_3}(a)\setminus\{a\})\cap D_f \subset (V_\delta(a)\setminus\{a\})\cap D_f$, pelo que $f(x) > 0$, para todo o $x \in (V_{\delta_3}(a)\setminus\{a\})\cap D_f$.

Por outro lado, $(V_{\delta_3}(a)\setminus\{a\})\cap D_f \subset (V_{\delta_2}(a)\setminus\{a\})\cap D_f$, e, portanto, a desigualdade (2.5) verifica-se, para todo o $x \in (V_{\delta_3}(a)\setminus\{a\})\cap D_f$.

Podemos então concluir que, para todo o $x \in D_f$, se

$$0 < |x-a| < \delta_3\,,$$

então

$$|f(x)| < \frac{1}{L} \Longleftrightarrow 0 < f(x) < L \Longrightarrow f(x) > \frac{1}{L}$$

como pretendíamos. ∎

Exemplo 2.70. Uma vez que $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$ e a função módulo é positiva em qualquer vizinhança da origem que não contenha a origem temos

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|} = +\infty\,.$$

Temos também a propriedade seguinte:

Proposição 2.71. *Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e aum ponto de acumulação de D_f.*

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ $\left[\text{resp.} \lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty\right]$, então $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Demonstração: Admitamos que se tem $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$e vamos provar que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Seja $\varepsilon > 0$, arbitrário. Vamos provar que existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in D_f$, se $0 < |x-a| < \delta$, então $\left|\dfrac{1}{x}\right| = \dfrac{1}{|f(x)|} < \varepsilon$.

Seja $L = \dfrac{1}{\varepsilon}$. Como $\varepsilon > 0$ temos $L > 0$ e, uma vez que, por hipótese, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, existe $\delta_1 > 0$ tal que, para todo o $x \in \mathbb{D}_f$, se

$$0 < |x-a| < \delta_1\,,$$

então

$$f(x) > L > 0\,.$$

Desta desigualdade resulta que
$$0 < \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{L} = \varepsilon$$
o que implica que
$$\frac{1}{|f(x)|} < \varepsilon\,,$$
como pretendíamos. ■

Exemplo 2.72. Uma vez que $\lim\limits_{x\to 0} \ln|x| = -\infty$, temos
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln|x|} = 0\,.$$

A definição que apresentamos a seguir traduz a ideia de que $f(x)$ toma valores "tão grandes" quanto se queira para valores de x "suficientemente grandes". O limite definido é um dos limites habitualmente designados **limites infinitos no infinito**.

Definição 2.73.

Sejam $D_f \subset \mathbb{R}$ um conjunto tal que $[a,+\infty[\subset D_f$, para algum $a \in \mathbb{R}$ e $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que **o limite de** $f(x)$ **quando** x **tende para** $+\infty$ **é igual a** $+\infty$ e escrevemos
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
se, para todo $L > 0$, existe $M > 0$ tal que, para todo o $x \in D_f$, se $x > M$ então $f(x) > L$.

Podemos traduzir simbolicamente que o limite de $f(x)$ quando x tende para $+\infty$ é igual a $+\infty$ do modo seguinte:
$$\forall L > 0,\ \exists M > 0 :\ \forall x \in D_f,\ \ x > M \ \Rightarrow\ f(x) > L$$

Observação 2.74. 1. Podemos apresentar definições análogas à Definição 2.73 para os símbolos

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$;

(ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$;

(iii) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

que completam a lista de limites infinitos no infinito.

Estabeleça essas definições como exercício.

2. Tendo em consideração as convenções apresentadas na Observação 2.68, podemos estabelecer para os limites infinitos no infinito propriedades análogas às apresentadas na Proposição 2.51 e que são úteis no cálculo de limites.

3. Valem também para os limites no infinito propriedades análogas às que foram estabelecidas nas Proposições 2.109 e 2.110. Como exercício, enuncie essas propriedades.

Nota: Nos estudos no ensino secundário a definição adoptada para o limite de uma função foi a definição segundo Heine. Recorde-se que, de acordo com esta definição, sendo $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D_f e l um número real, temos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ se, para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f distintos de a e convergente para a, a correspondente sucessão $(f(x_n))$ converge para l. Prova-se que esta definição é equivalente à Definição 2.42.

2.3.3 Limites laterais

Antes de passarmos à definição dos limites laterais à esquerda e à direita é conveniente apresentarmos as definições de ponto de acumulação à esquerda e à direita.

Definição 2.75.

Seja $S \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio. Dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é um **ponto de acumulação à direita de** S se, para todo o $\varepsilon > 0$, $]a,a+\varepsilon[\cap S \neq \emptyset$.

Dizemos que a é um **ponto de acumulação à esquerda de** S se $]a-\varepsilon,a[\cap S \neq \emptyset$, para todo o $\varepsilon > 0$.

Observação 2.76.

1. Se designarmos o intervalo $[a,a+\varepsilon[$ por **vizinhança à direita de** a **de raio** ε dizemos que a é ponto de acumulação à direita de S se toda a vizinhança à direita de a intersecta S num ponto distinto de a.

2. De modo análogo, se designarmos $]a-\varepsilon,a]$ por **vizinhança à esquerda de** a **de raio** ε temos que a é ponto de acumulação à esquerda de S se toda vizinhança à esquerda de a intersecta S num ponto distinto de a.

3. Se a é um ponto de acumulação à esquerda [resp. à direita] de S então a é ponto de acumulação de S.

4. Se a é um ponto de acumulação de S então a é um ponto de acumulação à esquerda ou à direita de S. Nada nos garante que a seja um ponto de acumulação à esquerda e à direita de S.

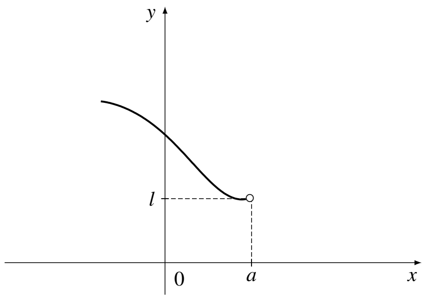
   Por exemplo, sendo $S =]-1,+\infty[$ temos que -1 é ponto de acumulação de S, é ponto de acumulação à direita de S mas não é ponto de acumulação à esquerda de S.

Definição 2.77.

Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação à esquerda de D_f e $l \in \mathbb{R}$. Dizemos que l **é o limite de** f **no ponto** a **à esquerda** ou que **o limite de** $f(x)$ **quando** x **tende para** a **por valores inferiores a** a **é igual a** l e escrevemos
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = l \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = l$$
se, para todo o $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in D_f$, se $-\delta < x-a < 0$, então $|f(x)-l| < \varepsilon$.

Podemos escrever simbolicamente a condição que traduz que o limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores inferiores a a é igual a l do modo seguinte

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in D_f,\ \ -\delta < x - a < 0\ \Rightarrow\ \ |f(x) - l| < \varepsilon\ .$$



Exemplo 2.78. Consideremos a função real de variável real f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se} \quad x < 1 \\ x-2 & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Vamos provar que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0\ .$$

Temos de provar que, para todo o $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, se $-\delta < x - 1 < 0$, então $|f(x)| < \varepsilon$.

Observe-se que, se $x < 1$, então $|f(x)| = |x-1| = -x+1$ e, portanto, $|f(x)|\varepsilon \Longleftrightarrow 0 < -x+1 < \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon + 1 < x < 1$.

Tomando $\delta = \varepsilon$ temos que se

$$-\varepsilon < x - 1 < 0\ ,$$

então, por definição de f, $f(x) = x - 1$ e, portanto, temos

$$-\varepsilon < x - 1 < 0 < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < f(x) < \varepsilon$$

ou seja

$$|f(x)| < \varepsilon$$

como pretendíamos.

Observação 2.79.

O limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores inferiores a a coincide com o limite da restrição de f ao conjunto $D_f \cap]-\infty, a[$.

Ao limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores menores do que a também podemos chamar limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores à esquerda de a.

De modo análogo definimos limite à direita.

Definição 2.80.

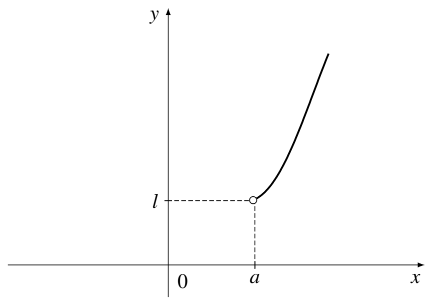
Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação à direita de D_f e $l \in \mathbb{R}$. Dizemos que l **é o limite de** f **no ponto** a **à direita** ou que **o limite de** $f(x)$ **quando** x **tende para** a **por valores superiores a** a **é** l e escrevemos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = l \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = l$$

se para todo o $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in D_f$, se $0 < x - a < \delta$, então $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Simbolicamente podemos traduzir esta condição do modo seguinte

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in D_f,\ \ 0 < x - a < \delta\ \Rightarrow\ \ |f(x) - l| < \varepsilon$$



Exemplo 2.81. Consideremos a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se} \quad x < 1 \\ x-2 & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Vamos provar que

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -1\ .$$

Temos de provar que, para todo o $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, se $0 < x - 1 < \delta$, então $|f(x) + 1| < \varepsilon$.

Tomando $\delta = \varepsilon$ temos que se

$$0 < x - 1 < \varepsilon\ ,$$

então, por definição de f, $f(x) = x - 2$ e, portanto, $f(x) + 1 = x - 1$. Consequentemente

$$0 < x - 1 < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < f(x) + 1 < \varepsilon$$

donde resulta, atendendo a que $-\varepsilon < 0$, que

$$-\varepsilon < f(x) + 1 < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x) + 1| < \varepsilon$$

como pretendíamos.

Valem para o limite à direita observações análogas às que foram feitas para o limite à esquerda. Estabeleça-as como exercício.

Exemplo 2.82.

Consideremos a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Temos então $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$.

No entanto, não existe o limite $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Para o demonstrar temos de verificar que, para todo o $l \in \mathbb{R}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo o $\delta > 0$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < \delta$ e $|f(x) - l| \geq \varepsilon$.

Seja então $l \in \mathbb{R}$. Vamos estudar separadamente os casos em que $l \neq 1$ e $l = 1$.

Suponhamos em primeiro lugar que $l \neq 1$.

Se tomarmos $\varepsilon = \dfrac{|l-1|}{2}$ temos que, para todo o $\delta > 0$ e, para todo o $x \in \mathbb{R}$ tal que $-\delta < x < 0$,

$$|f(x) - l| = |1 - l| \geq \frac{|l-1|}{2} = \varepsilon$$

como pretendíamos.

Suponhamos agora que $l = 1$ e tomemos $\varepsilon = 1/2$. Temos de provar que, para todo o $\delta > 0$, existe $x_0 \in V_\delta(0) \cap D_f$ tal que $|f(x_0) - 1| \geq 1/2$, isto é, vamos provar que, para todo o $\delta > 0$, existe $x_0 \in \mathbb{R} = D_f$ tal que $x_0 \in]-\delta, \delta[$ e $|f(x_0) - 1| \geq 1/2$.

Seja $\delta > 0$, arbitrário.

Suponhamos que temos $0 < \delta \leq 1/2$. Tomemos $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x_0 \in]0, \delta[$. Então $f(x_0) = x_0$ pelo que $f(x_0) - 1 = x_0 - 1 \in]-1, -1/2[$, o que implica que $|f(x_0) - 1| \geq 1/2$. Acabámos de provar que sendo $\delta \geq 1/2$, existe $x_0 \in \mathbb{R} = D_f$ tal que $x_0 \in]-\delta, \delta[$ e $|f(x_0) - 1| \geq 1/2$, como pretendíamos.

Suponhamos agora que $\delta > 1/2$. Tomemos $x_0 = 1/2$. Então $x_0 \in]-\delta, \delta[$ e $f(x_0) = 1/2$ donde resulta que $f(x_0) - 1 = -1/2$ e, portanto, $|f(x_0) - 1| \geq 1/2$. Está então provado que sendo $\delta < 1/2$, existe $x_0 \in \mathbb{R} = D_f$ tal que $x_0 \in]-\delta, \delta[$ e $|f(x_0) - 1| \geq 1/2$, como pretendíamos.

Vimos no exemplo anterior que podem existir e ser finitos ambos os limites laterais de uma função num ponto e não existir o limite da função no ponto considerado. A proposição que apresentamos a seguir estabelece, à custa dos limites laterais, uma condição necessária e suficiente para que o limite de uma função num ponto exista e seja finito.

Proposição 2.83.

Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação à direita e à esquerda de D_f e $l \in \mathbb{R}$. Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

se e só se existem e são iguais a l os limites laterais de f em a, isto é,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = l = \lim_{x \to a^-} f(x).$$

Demonstração: Admitamos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Seja $\varepsilon > 0$. Então existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in D_f$, se

$$0 < |x - a| < \delta \ ,$$

então

$$|f(x) - l| < \varepsilon \ .$$

Uma vez que $0 < |x - a| < \delta$ implica que $-\delta < x - a < 0$ concluímos que, para todo o $x \in D_f$, se

$$-\delta < x - a < 0 \ ,$$

então

$$|f(x) - l| < \varepsilon \ ,$$

o que permite concluir que

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = l \ .$$

De modo análogo e atendendo a que $0 < |x - a| < \delta$ implica que $0 < x - a < \delta$ concluímos também que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$.

Reciprocamente, admitamos que existem e são iguais a l os limites laterais à esquerda e à direita de f em a.

Seja $\varepsilon > 0$. Então existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que, para todo o $x \in D_f$, se

$$0 < x - a < \delta_1 \ ,$$

então

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

e se

$$-\delta_2 < x - a < 0 \ ,$$

então

$$|f(x) - l| < \varepsilon \ .$$

Tomemos $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então, para todo o $x \in D_f$, $x \neq a$, se

$$-\delta < x - a < \delta \ ,$$

então
$$|f(x)-l|<\varepsilon\,.$$
o que garante que
$$\lim_{x\to a} f(x)=l\,,$$
como pretendíamos.

■

Exemplo 2.84. Consideremos a função real de variável real definida por
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se} \quad x>0\\ -1 & \text{se} \quad x=0\\ \mathrm{e}^x & \text{se} \quad x<0\end{cases}$$

Uma vez que
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$$
e
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\mathrm{e}^x=1$$
temos que
$$\lim_{x\to 0} f(x)=1\,.$$

Observação 2.85.

Sejam f uma função real de variável real e a um ponto de $\operatorname{int}(D_f)$.

A Proposição 2.83 permite concluir que se os limites laterais de f em a são ambos finitos mas são distintos, ou se algum dos limites laterais de f em a não existe, então o limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ não existe.

Exemplo 2.86. 1. Consideremos a função real de variável real definida por
$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{se} \quad x\in\mathbb{R}^+\cap\mathbb{Q}\\ 0 & \text{se} \quad x\in\mathbb{R}^+\wedge x\notin\mathbb{Q}\\ 2 & \text{se} \quad x\in\mathbb{R}_0^-\end{cases}$$

Uma vez que não existe $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, podemos concluir que não existe o limite de f na origem.

2. Consideremos a função real de variável real definida por
$$f(x)=\frac{|x|}{x}\,,$$
para todo o $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Uma vez que
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

e
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$
temos que não existe o limite de f na origem.

Podemos também definir **limites laterais infinitos**.

Assim, dizemos que:

- **o limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores à direita de a é igual a $+\infty$** e escrevemos
$$\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$$
se, para todo o para todo o $L>0$, existe $\delta>0$ tal que, para todo o $x\in D_f$, se $0<x-a<\delta$, então $f(x)>L$;
- **o limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores à direita de a é igual a $-\infty$** e escrevemos
$$\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$$
se, para todo o para todo o $L>0$, existe $\delta>0$ tal que, para todo o $x\in D_f$, se $0<x-a<\delta$, então $f(x)<-L$;
- **o limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores à esquerda de a é igual a $+\infty$** e escrevemos
$$\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$$
se, para todo o para todo o $L>0$, existe $\delta>0$ tal que, para todo o $x\in D_f$, se $-\delta<x-a<0$, então $f(x)>L$;
- **o limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores à esquerda de a é igual a $-\infty$** e escrevemos
$$\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$$
se, para todo o para todo o $L>0$, existe $\delta>0$ tal que, para todo o $x\in D_f$, se $-\delta<x-a<0$, então $f(x)<-L$.

Podemos obter generalizações da Proposição 2.83 e estabelecer que sendo $f:D_f\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função e $a\in\mathbb{R}$ um ponto de acumulação à direita e à esquerda de D_f verificam-se as equivalências seguintes:

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ se e só se os limites laterais de f em a existem e são ambos iguais a $+\infty$, isto é $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.;
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ se e só se os limites laterais de f em a existem e são ambos iguais a $-\infty$, isto é $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$..

Podemos então concluir que se algum dos limites laterais de f em a é infinito, então o limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ou não existe ou existe mas é infinito.

Exemplo 2.87. 1. Consideremos a função real de variável real definida por

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\,,$$

para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Uma vez que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty = \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

podemos concluir que o $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe mas é $+\infty$.

2. Consideremos a função real de variável real definida por

$$f(x) = \frac{1}{x-1}\,,$$

para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Uma vez que

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

temos que não existe o limite de f em $x = 1$.

3. Consideremos f a função real de variável real definida por

$$f(x) = \mathrm{e}^{1/x}\,,$$

para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Uma vez que

$$\lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{1/x} = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to 0^-} \mathrm{e}^{1/x} = 0$$

temos que não existe o limite de f na origem.

Observação 2.88. Valem, para os limites laterais de f em a resultados análogos aos que foram estabelecidos na Proposição 2.109 e na Proposição 2.110. Como exercício, enuncie esses resultados.

Exemplo 2.89. 1. Consideremos a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 - 1$. Uma vez que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$ e existe $\delta > 0$ tal que, $f(x) < 0$, para todo o $x \in D_f \cap]a-\delta, 0[$ temos

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x^2-1} = -\infty\,.$$

2. Uma vez que $\lim\limits_{x\to 0} \ln|x| = -\infty$, temos

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln|x|} = 0\,.$$

2.3.4 Continuidade

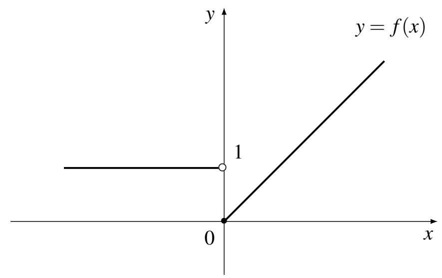
A noção de limite de uma função num ponto que estudámos no parágrafo anterior dá-nos informação sobre o comportamento da função numa vizinhança do ponto independentemente do que se passa no ponto.

Neste parágrafo vamos estudar a definição de continuidade de uma função num ponto do seu domínio que relaciona o comportamento da função numa vizinhança do ponto com o valor que a função toma no ponto. A noção intuitiva de continuidade de uma função num ponto leva-nos a relacionar este conceito com a ideia de percorrer uma representação do gráfico com a ponta de um lápis sem o levantar numa vizinhança do ponto. No entanto, isto nem sempre é possível.

Consideremos a função f definida do modo seguinte:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

O gráfico de f é o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que admite a seguinte representação:

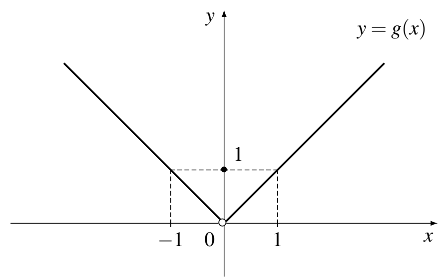


Observe-se que não é possível percorrer esta representação do gráfico de f com a ponta de um lápis sem levantar o lápis numa vizinhança de $x = 0$. Esta impossibilidade resulta do facto de os limites laterais de f em $x = 0$ serem distintos e, portanto, de não existir o limite de $f(x)$ quando x tende para zero.

Seja g a função definida por

$$g(x) = \begin{cases} |x| & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

O gráfico de g pode ser representado pela figura seguinte:



Observe-se que não é possível percorrer esta representação do gráfico de g com a ponta de um lápis sem levantar o lápis numa vizinhança de $x=0$. Esta impossibilidade resulta do facto de se ter $g(0)=1$ e $\lim_{x\to 0} g(x)=0 \neq g(0)=1$.

Se considerarmos uma representação do gráfico da função módulo verificamos que, contrariamente aos casos anteriores, é possível percorrer essa representação do gráfico com a ponta de um lápis sem levantar o lápis na vizinhança de $x=0$.

Este diferente comportamento da representação do gráfico de uma função numa vizinhança de um ponto está relacionado com a noção de continuidade de uma função num ponto.

Definição 2.90.

Sejam $f: D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in D_f$. Dizemos que f **é contínua em** a se o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ existe e é finito e $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Atendendo a que se $a \in D_f$ é um ponto isolado temos, por definição, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, resulta imediatamente da Definição 2.90 que uma função é contínua em todo o ponto isolado do seu domínio.

Notemos que nos exemplos considerados temos que:

1) não existe $\lim_{x\to 0} f(x)$, pelo que f não é contínua em $x=0$;

2) existe $\lim_{x\to 0} g(x)$ sendo $\lim_{x\to 0} g(x) = 0 \neq g(0)$ pelo que g não é contínua em $x=0$;

3) $\lim_{x\to 0} |x| = 0 = |0|$ e, portanto, a função módulo é contínua em $x=0$.

Observação 2.91.

Suponhamos que a não é um ponto isolado de D_f.

Atendendo à definição de limite de uma função num ponto temos que f é contínua em a se e só se $a \in D_f$ e, para todo o $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in D_f$, se $0 < |x-a| < \delta$, então $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Simbolicamente podemos escrever

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0: \ \forall x \in D_f,\ \ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon\ .$$

Uma vez que $a \in D_f$, a implicação anterior verifica-se para $x = a$ e, portanto, a condição anterior pode escrever-se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0: \ \forall x \in D_f,\ \ |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

ou, em termos de vizinhanças,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0: \ \forall x \in D_f,\ \ x \in V_\delta(a) \ \Rightarrow\ f(x) \in V_\varepsilon(f(a)).$$

Esta definição traduz a ideia de que $f(x)$ está arbitrariamente próximo de $f(a)$ sempre que x esteja suficientemente próximo de a.

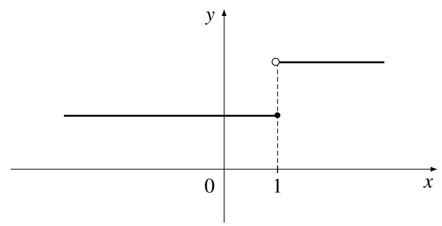
Definição 2.92.

Sejam $f: D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $S \subset D_f$, $S \neq \emptyset$ um conjunto aberto. Dizemos que f **é contínua em** S se f é contínua em todo o ponto de S.

Observação 2.93. No caso em que $S = [a,b]$ podemos falar de continuidade lateral. Dizemos que f **é contínua à direita em** a se $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ e que f **é contínua à esquerda em b** se $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

Analogamente, se $S = [a, +\infty[$ podemos falar de continuidade à direita em a e se $S =]-\infty, a]$ podemos falar de continuidade à esquerda em a.

De acordo com a Definição 2.90, a continuidade de uma função num ponto, implica a continuidade lateral. No entanto, uma função pode ser contínua à direita ou à esquerda de um ponto e não ser contínua nesse ponto, conforme se ilustra na figura seguinte.



Observação 2.94. Vimos na Definição 2.90 o que se entende por função contínua num ponto do seu domínio e na Definição 2.92 o que se entende por função contínua num subconjunto aberto do seu domínio.

Por uma questão de simplificação de linguagem, se $S \subset D_f$ é um intervalo, diremos que f é contínua em S se f for contínua em todos os pontos interiores de S e se se verificar continuidade lateral nos extremos do intervalo que pertencem ao intervalo.

Definição 2.95. Seja $f: D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Dizemos que f **é descontínua em** a se f não é contínua em a.

Resulta da Definição 2.95 que sendo $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D_f, f é descontínua em a se: $a \notin D_f$ ou não existe o limite de $f(x)$ quando x tende para a ou este limite existe e é finito mas é distinto de $f(a)$ ou este limite existe mas é infinito.

Definição 2.96. Dizemos que f **é descontínua em** $S \subset D_f$ se f não é contínua em S, ou seja, se existe $x_0 \in S$ tal que f não é contínua em x_0.

Exemplo 2.97. Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ x+1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Repare-se que f tem domínio $\mathbb{R}$ e é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Como $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe temos que f é descontínua em $x=0$.

Consequentemente f é descontínua em $\mathbb{R}$ e podemos afirmar que f é descontínua em qualquer intervalo que contenha $x=0$.

Proposição 2.98.

Se f é uma função contínua num ponto, então f é limitada numa vizinhança desse ponto.

Demonstração: Admitamos que f é contínua num ponto a do seu domínio.

Se a é um ponto isolado do domínio de f não há nada a provar.

Admitamos que a não é um ponto isolado. Como f é contínua em a, o limite de f em a existe e é finito.

Pela Proposição 2.50, f é limitada numa vizinhança de a.

■

Proposição 2.99.

Sejam f e g duas funções contínuas num ponto a. Então as funções $f+g$, αf $(\alpha \in \mathbb{R})$ e fg são contínuas em a. Se $g(a) \neq 0$, então f/g é também uma função contínua em a.

Demonstração: Vamos demonstrar que se f e g são contínuas em a, então $f+g$ é contínua em a. A demonstração das restantes propriedades é deixada como exercício.

Como o domínio de $f+g$ é o conjunto $D_f \cap D_g$, a hipótese garante que a pertence ao domínio de $f+g$. Atendendo a que, por hipótese,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

e

$$\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$$

tem-se, por definição de soma de funções e pelas propriedades dos limites, que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a}(f+g)(x) &= \lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) \\ &= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) \\ &= f(a)+g(a) \\ &= (f+g)(a)\,, \end{aligned}$$

donde se conclui que $f+g$ é contínua em a.

■

A Proposição 2.99 é utilizada para justificar a continuidade de algumas funções.

Exemplo 2.100. A função f definida por $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$ é contínua em todo o ponto $a \neq 0$ porque se trata do quociente de duas funções contínuas em a cujo denominador não se anula em a.

A proposição que apresentamos a seguir estabelece uma condição suficiente para a continuidade da função composta.

Proposição 2.101.

Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $g\circ f$ está definida. Se f é contínua em a e g é contínua em $f(a)$, então $g \circ f$ é contínua em a.

Demonstração: A hipótese garante que $a \in D_{g\circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in d_g\}$. De facto, como f é contínua em a, tem-se que $a \in D_f$ e, como g é contínua em $f(a)$, tem-se que $f(a) \in D_g$.

Para provar que $g\circ f$ é contínua em a temos de provar que, para todo o $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in D_{g\circ f}$, se

$$|x-a| < \delta\,,$$

então

$$|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon\,.$$

Seja $\varepsilon > 0$, arbitrário. Como g é contínua em $f(a)$ temos que existe $\delta_1 > 0$ tal que, para todo o $y \in D_g$, se

$$|y - f(a)| < \delta_1\,,$$

então

$$|g(y) - g(f(a))| < \varepsilon\,.$$

Uma vez que $\delta_1 > 0$ a continuidade de f em a garante a existência de $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in D_f$, se

$$|x-a| < \delta\,,$$

então

$$|f(x) - f(a)| < \delta_1\,.$$

Atendendo à definição de $D_{g\circ f}$ tem-se que, se $x \in D_{g\circ f}$, então $x \in D_f$ e, portanto, para todo o $x \in D_{g\circ f}$, se

$$|x-a| < \delta\,,$$

então

$$|f(x) - f(a)| < \delta_1\,.$$

Mas, uma vez que $f(x) \in D_g$, esta desigualdade implica que

$$|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon\,,$$

como pretendíamos.

■

Os resultados que apresentamos a seguir dizem respeito a funções definidas em intervalos de $\mathbb{R}$. A proposição que apresentamos em primeiro lugar é conhecida por **Teorema de Bolzano** ou **Teorema dos Valores Intermédios** e garante que uma função definida num intervalo fechado e limitado e contínua nesse intervalo não pode passar de um valor a outro sem passar pelos valores intermédios.

Teorema 2.102. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$ e $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Se f é contínua em $[a,b]$ e $f(a) \neq f(b)$, então, para todo o y entre [2] $f(a)$ e $f(b)$, existe $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = y$.*

Demonstração: Admitamos, sem perda de generalidade, que $f(a) < f(b)$.

[2] Dizemos que y está entre $f(a)$ e $f(b)$ se ou $f(a) < y < f(b)$ ou $f(b) < y < f(a)$.

Seja $k \in]f(a), f(b)[$ e consideremos o conjunto

$$X = \{x \in [a,b] : f(x) \leq k\}.$$

Uma vez que, por hipótese, $f(a) < k$ temos que $a \in X$ e, portanto, X é um conjunto não vazio.

Uma vez que b é um majorante de X temos que X é um conjunto majorado.

Então X é um conjunto não vazio e majorado e, pelo Axioma do Supremo, X admite supremo.

Designemos o supremo de X por c. Então $c \in [a,b]$ e $f(c) \leq k$. Vamos provar que $f(c) = k$. Para o efeito vamos provar que não se pode ter $f(c) < k$.

Admitamos, por redução ao absurdo, que $f(c) < k$. Como $c \in X$ temos que $c \leq b$ e, como $f(b) > k$, temos de ter $c < b$.

Seja g a função constante igual a k.

A função f e a função g sao duas funções contínuas em c tais que

$$f(c) < k = g(c).$$

Uma vez que $\lim_{x\to c} f(x) = f(c) < g(c) = \lim_{x\to c} g(x)$, a Proposição 2.58 garante que existe $\delta > 0$, tal que, para todo o $x \in [a,b] \cap V_\delta(c)$, $f(x) < g(x) = k$.

Em particular temos, para todo o $x \in [c,b] \cap V_\delta(c)$, $f(x) < k$.

Podemos supor $\delta < c - a$ e temos

$$f(x) < k,$$

para todo o $x \in]c-\delta, c]$. Consequentemente, os pontos do intervalo $]c-\delta, c[$ são pontos de X, o que contraria o facto de c ser o supremo de X.

A contradição resulta de supor que se tem $f(c) < k$, pelo que $f(c) = k$, como se pretendia. ■

Resulta do Teorema dos Valores Intermédios o corolário seguinte que permite localizar zeros de certas funções.

Corolário 2.103.

Se f é contínua em $[a,b]$ e $f(a)f(b) < 0$, então existe $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = 0$.

Demonstração: A hipótese garante que $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais contrários, pelo que $f(a) \neq f(b)$ e 0 está entre $f(a)$ e $f(b)$. Estamos então nas condições de aplicar o Teorema de Bolzano e podemos concluir que existe $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = 0$, como pretendíamos.

■

Exemplo 2.104. 1. Consideremos a função f definida por $f(x) = x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} + \ln(x^2)$.

Uma vez que:

- a função f é contínua no intervalo $\left[\dfrac{1}{\pi}, 1\right]$;
- $f\left(\dfrac{1}{\pi}\right) = \dfrac{1}{\pi}\operatorname{sen}\pi + \ln\left(\dfrac{1}{\pi^2}\right) = -\ln(\pi^2) < 0$, porque $\pi^2 > 1$ e a função logaritmo natural é positiva no intervalo $]1, +\infty[$;
- $f(1) = \operatorname{sen} 1 > 0$, porque $1 \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ e a função seno é positiva no primeiro quadrante;

temos $f\left(\dfrac{1}{\pi}\right) f(1) < 0$ e o Corolário 2.103 permite concluir que a função f admite uma raiz no intervalo $\left[\dfrac{1}{\pi}, 1\right]$, isto é, existe $x_0 \in \left[\dfrac{1}{\pi}, 1\right]$ tal que $f(x_0) = 0$.

2. Seja f a função definida por $f(x) = x - \mathrm{e}^{-x}$. Uma vez que:

- a função f é contínua no intervalo $[0,1]$;
- $f(0) = 0 - \mathrm{e}^0 = -1 < 0$;
- $f(1) = 1 - \mathrm{e}^{-1} = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}} = \dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}} > 0$, porque $\mathrm{e} > 1$;

temos que $f(0)f(1) < 0$ e o Corolário 2.103 permite concluir que a função f admite uma raiz no intervalo $]0,1[$.

A proposição que apresentamos a seguir é usualmente conhecida por **Teorema de Weierstrass** e garante que uma função contínua num intervalo fechado e limitado atinge máximo e mínimo globais nesse intervalo.

Proposição 2.105.

Sejam a, $b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$ e $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Se f é contínua em $[a,b]$, então f atinge em $[a,b]$ o máximo e o mínimo globais, isto é, existem $x_1, x_2 \in [a,b]$ tais que

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

para todo o $x \in [a,b]$, ou seja, o conjunto $f([a,b])$ admite máximo e mínimo .

Demonstração: Em primeiro lugar vamos demonstrar que se f é contínua em $[a,b]$, então o conjunto $f([a,b])$ é limitado e, portanto, existem $s, i \in \mathbb{R}$ tais que

$$s = \sup f([a,b])$$

e

$$i = \inf f([a,b]).$$

Em seguida demonstraremos que existe $x_1 \in [a,b]$ tal que $f(x_1) = s$ e que existe $x_2 \in [a,b]$ tal que $f(x_2) = i$, ou seja, que s é o máximo de $f([a,b])$ e que i é o mínimo de $f([a,b])$.

Vamos provar a existência de x_1 nas condições indicadas. Para x_2 procede-se de modo análogo.

Por definição de supremo de $f([a,b])$, temos $f(x) \leq s$, para todo o $x \in [a,b]$.

Seja $\delta > 0$. Como $s - \delta < s$ e f é contínua em $[a,b]$, o Teorema de Bolzano garante que existe $y \in [a,b]$ tal que $f(y) > s - \delta$.

Admitamos, por redução ao absurdo, que, para todo o $x \in [a,b]$, $f(x) < s$.

Consideremos a função

$$\begin{array}{rcl} g : [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{s-f(x)} \end{array}$$

Então g é uma função contínua em $[a,b]$. Consequentemente g é limitada em $[a,b]$.

Mas, para todo o $\delta > 0$, existe $y \in [a,b]$ tal que $f(y) > s - \delta$, ou seja, $s - f(y) < \delta$ donde resulta que $g(y) > \dfrac{1}{\delta}$.

Então g não é limitada superiormente, o que é falso, uma vez que g é uma função contínua num intervalo fechado e limitado.

A contradição resulta de supor que, para todo o $x \in [a,b]$, $f(x) < s$, donde resulta o pretendido.

■

Exercícios 2.3

1. Calcule, caso existam, os limites seguintes:
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2-1}$;
   (b) $\displaystyle\lim_{x\to1^+} \frac{1}{x^2-1}$;
   (c) $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{1}{x^2-1}$;
   (d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2x-1}{5x^2-x}$;
   (e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})$;
   (f) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$;
   (g) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x^3-2x-1}$;
   (h) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{1-x}$;
   (i) $\displaystyle\lim_{x\to2} (2x-\sqrt{x+2})$;
   (j) $\displaystyle\lim_{x\to2} \frac{x-2}{\sqrt{(2-x)^2}}$;
   (k) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{(x-a)^4-a^4}{x}$, onde a é um parâmetro real.
2. Prove que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, a função definida por $f(x) = x^n$, para todo o $x \in \mathbb{R}$, é uma função contínua em $\mathbb{R}$.
3. Utilize a Proposição 2.99 para provar que a função definida, para todo o $x \in \mathbb{R}$, por $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, onde $a_i \in \mathbb{R}$ para $i = 0,1,\ldots,n$, é uma função contínua em $\mathbb{R}$.
4. Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in D_f$ um ponto de acumulação à direita e à esquerda de D_f. Prove que f é contínua em a se e só se existem e são finitos os limites laterais $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\displaystyle\lim_{x\to a^-} f(x)$ e coincidem com $f(a)$.

5. Prove que se f é contínua em a e $f(a) > 0$, então f é positiva numa vizinhança de a.
6. Prove que se f é contínua em a e $f(a) < 0$, então f é negativa numa vizinhança de a.
7. Considere a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ m^2-1 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

   Determine $m \in \mathbb{R}$ por forma que f seja contínua em $x = 0$.
8. Seja f uma função contínua em $[a,b]$ cujos únicos zeros neste intervalo são $x = a$ e $x = b$. Mostre que f tem sinal constante em $[a,b]$.

2.4 Funções trigonométricas e exponenciais

2.4.1 Funções trigonométricas

Neste parágrafo vamos recordar as propriedades das funções trigonométricas bem como os seus gráficos já conhecidos dos estudos feitos no Ensino Secundário.

- **Função seno**

  Consideremos a função seno habitualmente denotada por sen e definida por

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{sen} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{sen} x \end{array}$$

1. O contradomínio desta função é o intervalo $[-1,1]$.
2. A função é periódica de período 2π, isto é,

$$\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen} x,$$

   para todo o $x \in \mathbb{R}$, donde resulta que

$$\operatorname{sen}(x+2k\pi) = \operatorname{sen} x,$$

   para todo o $x \in \mathbb{R}$ e, para todo o $k \in \mathbb{Z}$.
3. É uma função crescente em todo o intervalo do tipo

$$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi\,,\,\frac{\pi}{2}+\,2k\pi\right] \quad , \ \text{com} \ \ k \in \mathbb{Z}$$

e decrescente em qualquer intervalo do tipo

$$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi\,,\frac{3\pi}{2}+\,2k\pi\right]\quad,\ \text{com}\ \ k\in\mathbb{Z}\,.$$

4. Atinge o seu valor máximo igual a 1 nos pontos da forma

$$\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ,\text{com}\ k\in\mathbb{Z}$$

e o seu valor mínimo igual a -1 nos pontos da forma

$$\frac{3\pi}{2}+2k\pi\,,\ \ \text{com}\ \ k\in\mathbb{Z}\,.$$

com $k\in\mathbb{Z}$.

5. A função seno anula-se em todos os pontos da forma $k\pi$ com $k\in\mathbb{Z}$.

6. A função seno é contínua em $\mathbb{R}$.

Para provar que a função seno é contínua em $\mathbb{R}$ temos de provar que, para todo o $a\in\mathbb{R}$, se verifica a condição seguinte:

para todo o $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$, tal que, para todo o $x\in\mathbb{R}$, se

$$|x-a|<\delta\ ,$$

então

$$|\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}a|<\varepsilon\ .$$

Seja $a\in\mathbb{R}$.

Seja $\varepsilon>0$. Vamos então provar que existe $\delta>0$ tal que, para todo o $x\in\mathbb{R}$, se $|x-a|<\delta$ então $|\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}a|<\varepsilon$.

Basta atender à desigualdade seguinte:

$$|\operatorname{sen}x|\leq|x|,\tag{2.6}$$

para todo o $x\in\mathbb{R}$, e

$$\begin{aligned}|\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}a| &= \left|2\operatorname{sen}\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\right|\\ &= 2\left|\operatorname{sen}\frac{x-a}{2}\right|\left|\cos\frac{x+a}{2}\right|\\ &\leq 2\left|\operatorname{sen}\frac{x-a}{2}\right|,\end{aligned}$$

ou seja,

$$|\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}a|\leq 2\left|\operatorname{sen}\frac{x-a}{2}\right|\ .\tag{2.7}$$

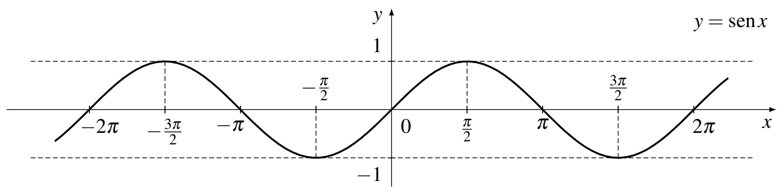
De (2.6) e (2.7) resulta que, para todos os $x,\ a\in\mathbb{R}$,

$$|\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}a|\leq 2\left|\operatorname{sen}\frac{x-a}{2}\right|\leq 2\left|\frac{x-a}{2}\right|=|x-a|.\tag{2.8}$$

Dado $\varepsilon>0$, se tomarmos $\delta=\varepsilon$ temos que se $|x-a|<\delta(=\varepsilon)$ então, atendendo a (2.8), $|\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}a|<\varepsilon$.

7. A função seno é uma função ímpar, isto é, $\operatorname{sen}(-x)=-\operatorname{sen}x$, para todo o $x\in\mathbb{R}$.

8. Um esboço do gráfico da função seno está representado na figura seguinte:



- **Função coseno** A função coseno denotada pelo símbolo cos e definida por

$$\begin{aligned}\cos:\mathbb{R}&\longrightarrow\mathbb{R}\\ x&\longmapsto\cos x\end{aligned}$$

satisfaz as propriedades seguintes

1. O coseno é uma função de contradomínio $[-1,1]$.

2. É periódica de período 2π, isto é,

$$\cos(x+2\pi)=\cos x\ ,$$

para todo o $x\in\mathbb{R}$, donde resulta que também

$$\cos(x+2k\pi)=\cos x\ ,$$

para todo o $x\in\mathbb{R}$ e para todo o $k\in\mathbb{Z}$.

3. É uma função par, isto é, $\cos(-x)=\cos x$, para todo o $x\in\mathbb{R}$.

4. É uma função crescente em todo o intervalo do tipo,

$$[-\pi+2k\pi\ ,\ 2k\pi]\ ,\ \ \text{com}\ \ k\in\mathbb{Z}$$

e é decrescente em todo o intervalo do tipo

$$[2k\pi\ ,\ \pi+2k\pi]\ ,\ \text{ com } k\in\mathbb{Z}\,.$$

5. Atinge o seu valor máximo igual a 1 em todos os pontos da forma

$$2k\pi\ ,\ \text{ com } k\in\mathbb{Z}$$

e o seu valor mínimo igual a -1 em todos os pontos da forma

$$\pi+2k\pi\ ,\ \text{ com } k\in\mathbb{Z}\,.$$

6. A função coseno anula-se em pontos da forma

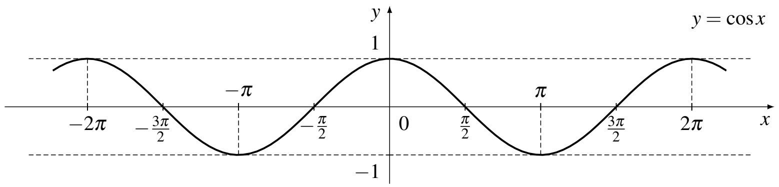
$$\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \text{com } k\in\mathbb{Z}\,.$$

7. A função coseno é contínua em $\mathbb{R}$. A verificação da continuidade da função coseno é feita de modo análogo à que foi feita para a função seno. Faça esse estudo como exercício, utilizando as propriedades das funções contínuas e a igualdade

$$\cos x=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\ ,$$

para todo o $x\in\mathbb{R}$.

8. Na figura que apresentamos a seguir está representado um esboço do gráfico da função coseno.



- **Função tangente**

A tangente, habitualmente denotada pelo símbolo tg, é uma função cujo domínio é o conjunto

$$D_{\text{tg}}=\left\{x\in\mathbb{R}:x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\,.$$

Temos

$$\begin{array}{rcl}\text{tg}:D_{\text{tg}} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \text{tg}\,x:=\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\end{array}$$

1. Esta função tem contradomínio $\mathbb{R}$.

2. É crescente em qualquer intervalo do tipo

$$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right[\ ,\ \text{ com } k\in\mathbb{Z}\,.$$

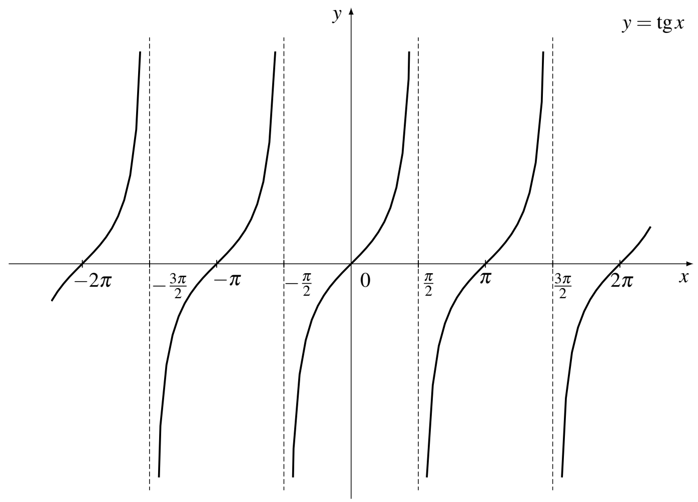
3. Atendendo a que o seno é uma função ímpar e o coseno é uma função par, concluímos que a tangente é uma função ímpar, isto é, $\text{tg}(-x)=-\,\text{tg}\,x$, para todo o $x\in D_{\text{tg}}$.

4. É uma função periódica de período π, isto é,$\text{tg}(x+\pi)=\text{tg}\,x$, para todo o $x\in D_{\text{tg}}$, donde se deduz que $\text{tg}(x+k\pi)=\text{tg}\,x$, para todo o $x\in D_{\text{tg}}$ e para todo o $k\in\mathbb{Z}$.

5. Atendendo a que $\text{tg}\,x=\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$, as propriedades das funções contínuas permitem-nos concluir que a função tangente é contínua em todo o seu domínio.

6. A função tangente anula-se em todos os pontos da forma $k\pi$ com $k\in\mathbb{Z}$.

7. Na figura seguinte está representado um esboço do gráfico da função tangente.



- **Função cotangente**

A cotangente denotada por cotg é uma função de domínio

$$D_{\text{cotg}}=\{x\in\mathbb{R}:\ x\neq k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}$$

e é definida do modo seguinte:

$$\begin{array}{rcl}cotg:D_{\text{cotg}} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \text{cotg}\,x=\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}x}\end{array}$$

1. O contradomínio da cotangente é o conjunto $\mathbb{R}$.

2. A função cotangente é decrescente em qualquer intervalo do tipo

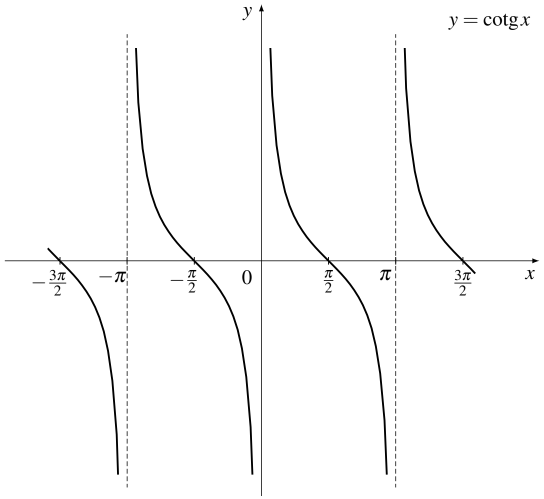
$$]k\pi\ ,\ (k+1)\pi[\ \ ,\ \ \text{com}\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

3. É uma função periódica de período π.

4. Como é o quociente de uma função par por uma função ímpar, a cotangente é uma função ímpar em D_{cotg}.

5. Utilizando argumentos análogos aos utilizados para a função tangente podemos concluir que a função cotangente é uma função contínua no seu domínio.

6. Um esboço do gráfico da função cotangente está representado na figura seguinte.



- **Função secante**

É uma função usualmente denotada por sec, cujo domínio é o conjunto

$$D_{\sec} = \{x \in \mathbb{R}:\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ \ ,\ \ \text{com}\ \ k \in \mathbb{Z}\}$$

e definida por

$$\begin{array}{rcl} \sec : D_{\sec} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sec x = \dfrac{1}{\cos x} \end{array}$$

1. O contradomínio da secante é o conjunto $]-\infty\ ,\ -1] \cup [1\ ,\ +\infty[$.

2. A função secante tem o mesmo sinal da função coseno, é crescente nos intervalos da forma

$$\left[2k\pi\ ,\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[\ \ ,\ \ \text{com}\ \ k \in \mathbb{Z}$$

e nos intervalos da forma

$$\left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ,\ \pi + 2k\pi\right]\ \ ,\ \ \text{com}\ \ k \in \mathbb{Z}\ .$$

É decrescente nos intervalos do tipo

$$\left[-\pi + 2k\pi\ ,\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[\ \ ,\ \ \text{com}\ \ k \in \mathbb{Z}$$

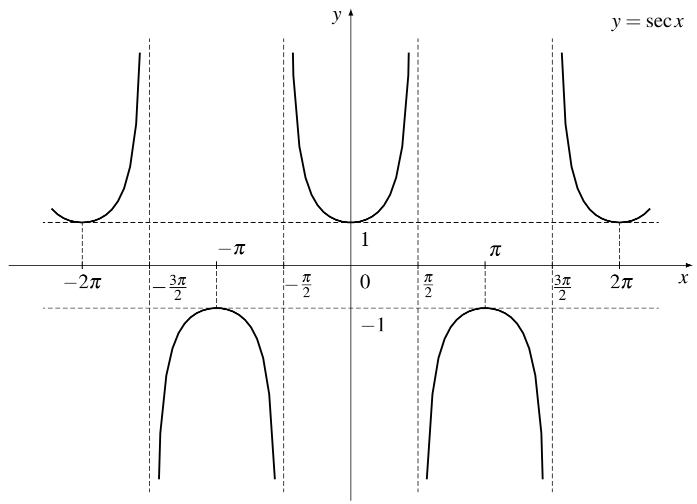
e nos intervalos do tipo

$$\left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ,\ 2k\pi\right]\ \ ,\ \ \text{com}\ \ k \in \mathbb{Z}\ .$$

3. Da definição da função secante, e atendendo a que a função coseno é uma função par, resulta que a função secante é uma função par.

4. Das propriedades das funções contínuas resulta que a função secante é contínua em todo o seu domínio.

5. Um esboço do gráfico da secante encontra-se representado na figura seguinte.



- **Função cosecante**

A função cosecante denotada por cosec é definida de modo análogo ao da função secante. Temos

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{cosec} : D_{\operatorname{cosec}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{cosec} x := \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} \end{array}$$

onde $D_{\operatorname{cosec}} = \{x \in \mathbb{R} : \ x \neq k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$.

1. O contradomínio da função cosecante é também o conjunto $]-\infty \ , \ -1] \cup [1 \ , \ +\infty[$.

2. A função cosecante tem o mesmo sinal da função seno, é crescente nos intervalos da forma

$$\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ , \ \pi + 2k\pi\right[\quad , \text{com } \ k \in \mathbb{Z}$$

e nos intervalos da forma

$$\left]\pi + 2k\pi \ , \ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right] \quad , \ \text{com } \ k \in \mathbb{Z} \ .$$

É decrescente nos intervalos do tipo

$$\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ , \ 2k\pi\right[\quad , \ \text{com } \ k \in \mathbb{Z}$$

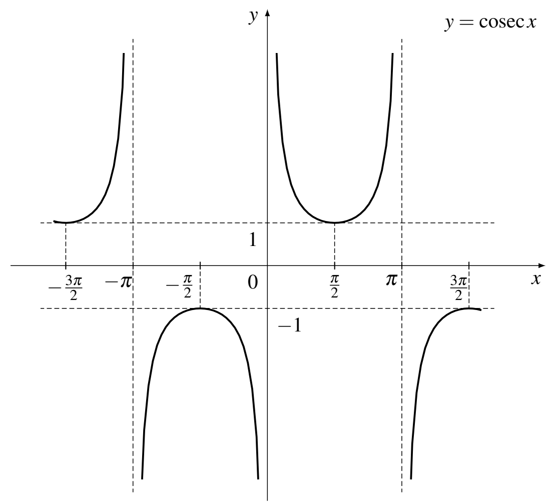
e nos intervalos do tipo

$$\left]2k\pi \ , \ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] \quad , \ \text{com } \ k \in \mathbb{Z} \ .$$

3. A cosecante é uma função ímpar.

4. Como a cosecante é o inverso do seno temos que a cosecante é função contínua em todo o seu domínio.

5. Na figura que apresentamos a seguir está representado um esboço do gráfico da função cosecante.



2.4.2 Função exponencial

- **Função exponencial de base e**

Seja e o número de Neper. Recorde que este número é um número irracional situado entre dois e três tendo-se

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Observação 2.106.

A definição do número de Neper exige que se garanta que a sucessão de termo geral $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é uma sucessão convergente. Para tal prova-se que:

1. (u_n) é uma sucessão monótona crescente;

2. (u_n) é limitada.

1. Para provar que (u_n) é monótona crescente utiliza-se a fórmula do binómio de Newton para obter uma expressão para $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ e uma expressão para $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, comparam-se as expressões obtidas e garante-se que

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad , \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. Atendendo a que $u_1 = 2$ e a que a sucessão (u_n) é monótona crescente temos que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2 \ ,$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado temos pela fórmula do binómio de Newton

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + C_1^n \frac{1}{n} + C_2^n \frac{1}{n^2} + \cdots + C_n^n \frac{1}{n^n}.$$

Como, para $k = 1, \ldots, n$

$$C_k^n \frac{1}{n^k} < \frac{1}{2^{k-1}}$$

temos

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$$

Mas

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

já que é a soma dos $n-1$ primeiros termos da progressão geométrica de primeiro termo $\frac{1}{2}$ e razão $\frac{1}{2}$.

Então

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

pelo que

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$$

e, portanto, a sucessão considerada é limitada, como pretendíamos.

Consideremos a função, habitualmente designada por função exponencial, que a cada $x \in \mathbb{R}$ faz corresponder e^x. Esta função foi estudada no Ensino Secundário. Vamos aqui recordar algumas das suas propriedades bem como o esboço do seu gráfico.

1. Como $e > 0$ temos que $\mathrm{e}^x > 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

2. A função exponencial é uma função crescente e contínua em todo o seu domínio.

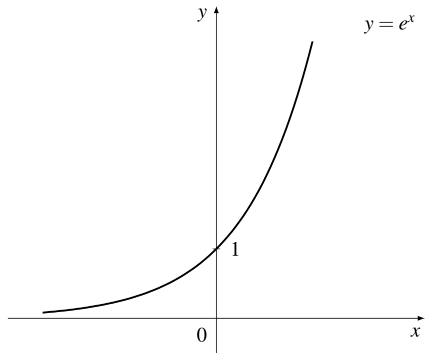
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$.

4. Valem as regras usuais das potências:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{x+y} &= \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y \\ \mathrm{e}^{x-y} &= \mathrm{e}^x / \mathrm{e}^y \\ (\mathrm{e}^x)^y &= \mathrm{e}^{xy} \end{aligned}$$

   para todos os $x, y \in \mathbb{R}$.

5. Um esboço do gráfico da função exponencial encontra-se representado na figura seguinte:



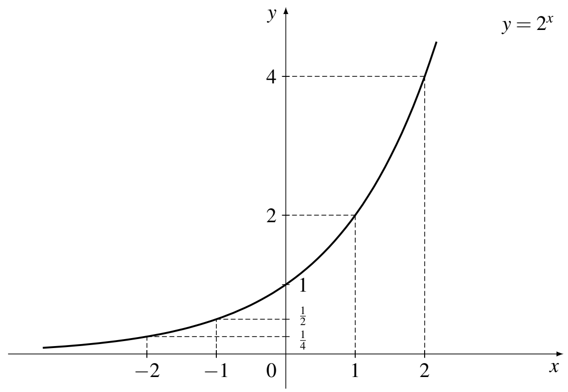
- **Função exponencial de base** a, $(a > 0)$

A função exponencial de base a é uma função de domínio $\mathbb{R}$ que a cada $x \in \mathbb{R}$ faz corresponder a^x. Já recordámos algumas propriedades da função exponencial de base e.

Se $a = 1$, então $a^x = 1$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Neste caso estamos perante a função constante igual a 1. Vamos portanto considerar apenas o caso em que $a > 0$ e $a \neq 1$.

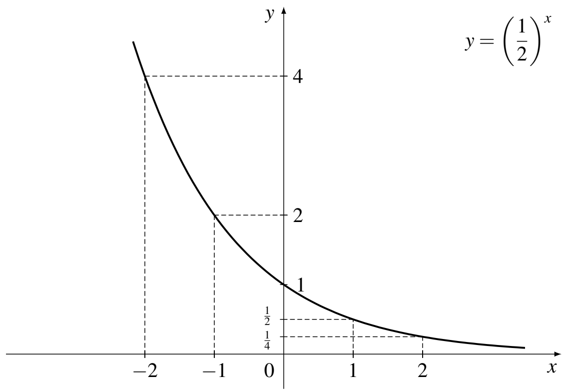
Caso em que $a > 1$ Esta função tem as mesmas propriedades que a função exponencial de base e. De facto temos:

1. $a^x > 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$;
2. a^x é crescente e contínua em todo o seu domínio.
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.
4. O contradomínio da função exponencial de base a é o conjunto $\mathbb{R}^+$.
5. Na figura seguinte apresentamos, a título de exemplo, um esboço do gráfico da função exponencial de base 2.



caso em que $0 < a < 1$ Neste caso temos:

1. O contradomínio da função exponencial de base a é $\mathbb{R}^+$.
2. A função é contínua em $\mathbb{R}$ e decrescente em $\mathbb{R}$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$.
4. Na figura seguinte está representado, a título de exemplo, um esboço do gráfico da função exponencial de base $\dfrac{1}{2}$.



Finalmente convém observar que valem para a função exponencial de base a, $(a > 0)$, as propriedades usuais das potências:

$$a^{x+y} = a^x a^y \;\; ; \;\; a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \;\; ; \;\; (a^x)^y = a^{xy}$$

para todos os $x, y \in \mathbb{R}^+$.

2.4.3 Funções hiperbólicas

As funções que apresentamos a seguir são definidas à custa da função exponencial.

- **Função seno hiperbólico**

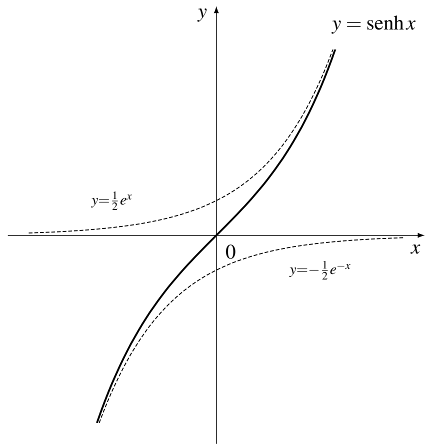
Consideremos a função

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{senh} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{senh} x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$$

O símbolo senh lê-se *seno hiperbólico* e o símbolo senh$x$ lê-se *seno hiperbólico de x*.

Resulta da definição que se trata de uma função de contradomínio $\mathbb{R}$ e contínua em $\mathbb{R}$.

Na figura seguinte está representado um esboço do gráfico da função seno hiperbólico.



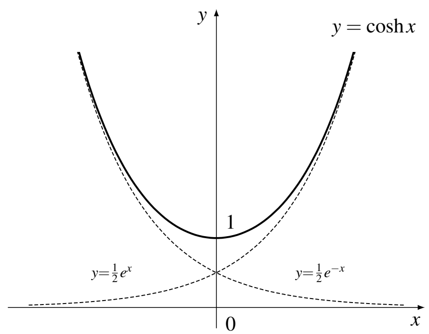
- **Função coseno hiperbólico**

Chamamos coseno hiperbólico à função denotada cosh e definida por

$$\begin{array}{rcl} \cosh : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cosh x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}$$

Esta função tem contradomínio $[1\ ,\ +\infty[$ e é contínua em $\mathbb{R}$ (Porquê ?).

O símbolo cosh$x$ lê-se *coseno hiperbólico de x*. Um esboço do gráfico desta função está representado na figura seguinte:



Uma vez que

$$\begin{array}{rcl} \cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x & = & (\dfrac{e^x + e^{-x}}{2})^2 - (\dfrac{e^x - e^{-x}}{2})^2 \\ & = & \dfrac{e^{2x} + e^{-2x} + 2 - e^{2x} - e^{-2x} + 2}{4} \\ & = & 1 \end{array}$$

temos que todo o ponto de coordenadas $(\operatorname{senh} x, \cosh x)$ satisfaz a equação da hipérbole de equação $x^2 - y^2 = 1$, o que justifica as designações adoptadas para estas funções.

Utilizando estas duas funções podemos também definir a tangente hiperbólica e a cotangente hiperbólica denotadas, respectivamente, por tgh e cotgh e definidas do modo seguinte:

$$\begin{aligned} \operatorname{tgh} x &= \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \\ &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{cotgh} x &= \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \end{aligned}$$

Verifique, como exercício, que a tangente hiperbólica tem domínio $\mathbb{R}$ e que a cotangente hiperbólica tem por domínio o conjunto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exercícios 2.4

1. Resolva as equações e inequações seguintes:

   (a) $e^x = e^{-x}$;

   (b) $2^x \leq \frac{1}{2}$;

   (c) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 \geq 0$;

   (d) $x^2 e^{x+1} - x e^{x-1} < 0$;

   (e) $\dfrac{1 - 2^{3x-1}}{3^{x^2-2} - 9} \leq 0$;

2. Calcule, caso existam, os limites seguintes:

   (a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3^x - 2^x}{3^{x+1} + 2^{x-3}}$;

   (b) $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1 - \cos t}{\operatorname{sen} t}$;

   (c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{e^{2t-4} - 1}{t - 2}$;

   (d) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2}$;

   (e) $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x$;

   (f) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$;

   (g) $\lim\limits_{x \to +\infty} x \left(e^{1/x} - 1 \right)$;

   (h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{1 - \cos x}$;

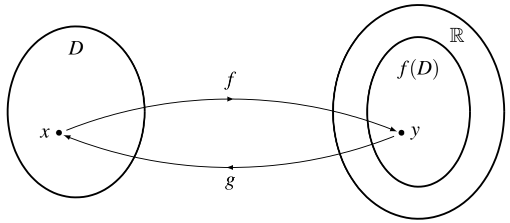
   (i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2}$;

   (j) $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x \left(\cos \dfrac{1}{x} - 1 \right)$

2.5 Inversa de uma função

Seja $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função injectiva. Então, para cada $y \in f(D_f)$, existe um e um só $x \in D_f$ tal que $f(x) = y$.

Podemos então definir uma função g de domínio $f(D_f)$ e tal que, a cada $y \in f(D_f)$ faz corresponder o (único) elemento $x \in D_f$ tal que $y = f(x)$.



À função g chamamos **função inversa de** f e denotamo-la habitualmente por f^{-1}.

Resulta da definição que o contradomínio de f^{-1} coincide com o domínio de f e que o domínio de f^{-1} coincide com o contradomínio de f.

É também consequência da definição que, para todo o $x \in D_f$,

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x.$$

Exercício :

Prove que, para todo o $y \in f(D_f)$, $(f \circ f^{-1})(y) = y$.

Definição 2.107.
Dizemos que uma **função é invertível** se admite inversa.

Resulta da definição que f é invertível se e só se f é injectiva.

Exemplo 2.108.

1. Seja

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x+1 \end{aligned}$$

Não é difícil verificar que f é uma função bijectiva.

Podemos então determinar f^{-1}. De acordo com a definição, f^{-1} tem domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $\mathbb{R}$. A cada $y \in \mathbb{R}$ a função f^{-1} faz corresponder o único $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = 2x+1$. Podemos resolver esta equação em ordem a x e obtemos

$$x = \frac{y-1}{2}.$$

Temos então que f^{-1} é a função de contradomínio $\mathbb{R}$ definida do modo seguinte

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x-1}{2}. \end{aligned}$$

2. Consideremos a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Esta função tem contradomínio $\mathbb{R}_0^+$.

Como f não é injectiva não podemos definir a inversa de f. No entanto, podemos considerar a função

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}_0^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

que é a restrição de f a $\mathbb{R}_0^+$.

Esta função é injectiva e tem contradomínio $\mathbb{R}_0^+$.

Podemos então definir $(f_1)^{-1}$. Esta função tem domínio $\mathbb{R}_0^+$, contradomínio $\mathbb{R}_0^+$ e é tal que, a cada $y \in \mathbb{R}_0^+$ faz corresponder o único $x \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $y = x^2$. Como sabemos, sendo $x, y \in \mathbb{R}_0^+$, esta equação tem uma única solução $x = \sqrt{y}$.

Então $(f_1)^{-1}$ é a função de contradomínio $\mathbb{R}_0^+$ definida por

$$\begin{aligned} (f_1)^{-1} : \mathbb{R}_0^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

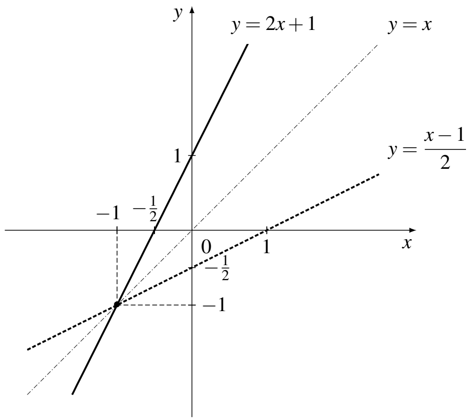
Podemos também considerar a restrição de f a $\mathbb{R}_0^-$

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{R}_0^- &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Esta função é injectiva e tem por contradomínio $\mathbb{R}_0^+$. Podemos então considerar $(f_2)^{-1}$ que é a função de contradomínio $\mathbb{R}_0^-$ definida por

$$\begin{aligned} (f_2)^{-1} : \mathbb{R}_0^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto -\sqrt{x}. \end{aligned}$$

Há uma relação interessante entre o gráfico de uma função e o gráfico da sua inversa. No caso do primeiro exemplo apresentado no Exemplo 2.108 o gráfico de f é a recta de equação $y = 2x+1$ e o gráfico de f^{-1} é a recta de equação $y = \dfrac{x-1}{2}$ que estão representadas na figura seguinte



Não é difícil verificar que estas duas rectas são simétricas relativamente à recta de equação $y = x$, isto é, que se o ponto (a,b) pertence à recta de equação $y = 2x+1$, então o ponto (b,a) pertence à recta de equação $y = \dfrac{x-1}{2}$.

De facto, seja (a,b) uma ponto da recta de equação $y = 2x+1$. Então temos $b = 2a+1$ e, portanto, $a = \dfrac{b-1}{2}$ o que significa que o ponto (b,a) pertence à recta de equação $y = \dfrac{x-1}{2}$.

Esta relação entre o gráfico de uma função e o gráfico da sua inversa verifica-se sempre.

De facto, se denotarmos por G_f o gráfico da função $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ e por $G_{f^{-1}}$ o gráfico de f^{-1} temos que

$$G_f = \{(x\ ,\ f(x)) :\ x \in D_f\}$$

e

$$G_{f^{-1}} = \{(f(x)\ ,\ x) :\ x \in D_f\}\ .$$

É então muito simples verificar que estes dois conjuntos são simétricos relativamente à recta de equação $y = x$.

Já vimos que uma função é invertível se e só se é injectiva. O estudo da injectividade de uma função a partir da definição nem sempre é uma questão simples de resolver. A proposição que apresentamos a seguir é uma condição suficiente para que uma função seja injectiva.

Proposição 2.109.

Se $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é estritamente monótona em D_f, então f é injectiva.

Demonstração: Admitamos que f é estritamente crescente em D_f. Queremos provar que, para todos os $x_1, x_2 \in D_f$, se $x_1 \neq x_2$ então $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Sejam $x_1, x_2 \in D_f$ tais que $x_1 \neq x_2$. Então ou $x_1 > x_2$, ou $x_2 > x_1$.

Suponha-se que se tem $x_1 > x_2$. Como f é estritamente crescente só podemos ter $f(x_1) > f(x_2)$. No caso em que $x_2 > x_1$ temos $f(x_1) > f(x_2)$.

Concluímos então que ou $f(x_1) > f(x_2)$ ou $f(x_1) < f(x_2)$ o que permite concluir que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

No caso em que f é estritamente decrescente a demonstração é análoga.

■

Algumas das propriedades de uma função f são transmitidas à sua função inversa f^{-1}.

Proposição 2.110.

Se $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é estritamente crescente em D_f, então f^{-1} é estritamente crescente em CD_f.

Demonstração: Queremos provar que f^{-1} é estritamente crescente em CD_f, isto é, queremos provar que, para todos os $y_1, y_2 \in CD_f$, se $y_1 > y_2$, então $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$.

Vamos fazer a demonstração por redução ao absurdo.

Admitamos que existem $y_1, y_2 \in CD_f$ tais que $y_1 > y_2$ e $f^{-1}(y_1) \leq f^{-1}(y_2)$.

Como f é estritamente crescente em D_f, a Proposição 2.109 garante que f é injectiva e, portanto, existem $x_1, x_2 \in D_f$, únicos, tais que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$.

Temos então $f(x_1) > f(x_2)$ e $x_1 \leq x_2$. Uma vez que, por definição de função, não podemos ter $f(x_1) > f(x_2)$ e $x_1 = x_2$, concluímos que existem $x_1, x_2 \in D_f$ tais que $x_1 < x_2$ e $f(x_1) > f(x_2)$ o que contraria a hipótese de f ser estritamente crescente.

A contradição resulta de supor que f^{-1} não é estritamente crescente e, portanto, f^{-1} é estritamente crescente.

■

Pode enunciar-se um resultado análogo para funções estritamente decrescentes. Como exercício enuncie e demonstre esse resultado.

Suponhamos que f é uma função definida num intervalo $[a\ ,\ b]$ com $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Se f é contínua em $[a\ ,\ b]$, o Teorema de Bolzano garante que o contradomínio de f é um intervalo.

Mais, se admitirmos que f é estritamente crescente em $[a\ ,\ b]$ e que $c, d \in \mathbb{R}$ são tais que $f(a) = c$ e $f(b) = d$, então o contradomínio de f é o intervalo $[c\ ,\ d]$.

Temos a seguinte proposição:

Proposição 2.111.

Seja f uma função contínua e estritamente crescente num intervalo $[a\ ,\ b]$. Sejam $c, d \in \mathbb{R}$ tais que $f(a) = c$ e $f(b) = d$. Então:

(i) f^{-1} é estritamente crescente em $[c\ ,\ d]$;

(ii) f^{-1} é contínua em $[c\ ,\ d]$.

Demonstração: A condição *(i)* é consequência imediata da Proposição 2.110.

A demonstração de *(ii)* pode ser encontrada em Cálculo (Vol I) de Tom Apostol (pág 175), Editora Reverté.

■

2.5.1 Inversas das funções trigonométricas

Nesta secção vamos definir as funções que são habitualmente designadas por inversas trigonométricas.

Inversa da função seno Como sabemos a função

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

tem por contradomínio o intervalo $[-1\ ,\ 1]$ e é periódica, pelo que não é injectiva. No entanto, esta função é injectiva no intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Seja f a restrição da função seno ao intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ que habitualmente se designa **restrição principal da função seno**. Temos então

$$\begin{aligned} f : \left[-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

que é uma função injectiva e tem contradomínio $[-1, 1]$.

Podemos definir a inversa de f que é a função de domínio $[-1\ ,\ 1]$ e contradomínio $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ tal que, a cada $y \in [-1\ ,\ 1]$, faz corresponder $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ tal que $y = \operatorname{sen} x$.

Esta função denota-se habitualmente pelo símbolo arcsen que se lê “arcoseno”. Temos então a função de contradomínio $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$

$$\begin{aligned} \operatorname{arcsen} : [-1\ ,\ 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \operatorname{arcsen} x \end{aligned}$$

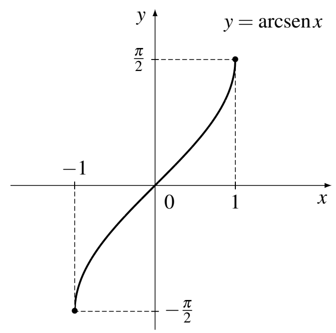
Para todo o $u \in [-1\ ,\ 1]$ e para todo o $v \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, temos

$$\operatorname{sen} v = u \ \text{ se e só se } \ \operatorname{arcsen} u = v.$$

Convém aqui referir que o símbolo $\operatorname{arcsen} x$ se lê “arco cujo seno é x”.

Como f é uma função contínua e estritamente crescente no intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, temos que arcsen é uma função contínua e estritamente crescente no intervalo $[-1\ ,\ 1]$.

Na figura seguinte está representado um esboço do gráfico da função arcsen.



Observação 2.112.

Tal como foi definida, a função arcoseno é a função inversa da restrição principal da função seno. No entanto, por abuso de linguagem, à função arcsen chamamos habitualmente inversa da função seno.

Poderíamos ter considerado qualquer outra restrição da função seno a qualquer um dos outros intervalos onde a função seno é injectiva e cuja imagem é o intervalo $[-1\ ,\ 1]$. A inversa desta restrição da função seno é uma nova função de domínio $[-1\ ,\ 1]$ distinta da função arcoseno.

Inversa da função coseno Já sabemos que a função

$$\begin{aligned} \cos : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos x \end{aligned}$$

não é uma função injectiva no seu domínio.

A sua restrição ao intervalo $[0, \pi]$, que se designa **restrição principal da função coseno**, é a função f de contradomínio $[-1\ ,\ 1]$ definida por

$$\begin{aligned} f : [0\ ,\ \pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos x \end{aligned}$$

e que é uma função injectiva, logo invertível.

A inversa de f é a função de domínio $[-1\ ,\ 1]$ e contradomínio $[0\ ,\ \pi]$ tal que, a cada $y \in [-1\ ,\ 1]$ faz corresponder o único $x \in [0\ ,\ \pi]$ tal que $y = \cos x$.

Esta função denota-se habitualmente por arccos que se lê “arco coseno”. Temos então

$$\begin{aligned} \arccos : [-1\ ,\ 1] &\longrightarrow [0\ ,\ \pi] \\ x &\longmapsto \arccos x \end{aligned}$$

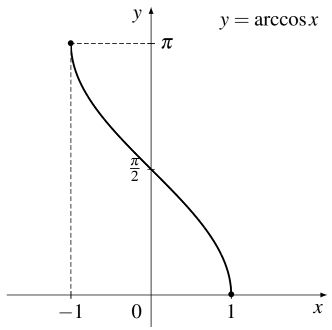
O símbolo $\arccos x$ lê-se “arco cujo coseno é x”.

Resulta da definição da função arco coseno que, para todos os $u \in [-1\ ,\ 1]$, $v \in [0\ ,\ \pi]$,

$$\arccos u = v \ \text{ se e só se } \ u = \cos v\ .$$

Atendendo a que a função f é contínua e estritamente decrescente em $[0\ ,\ \pi]$ temos que a função arccos é contínua e estritamente decrescente em $[-1\ ,\ 1]$.

Um esboço do gráfico da função arco coseno encontra-se representado na figura seguinte.



A função que acabámos de definir é, por abuso de linguagem, designada por inversa da função coseno apesar de, como vimos, ela ser a inversa da restrição principal da função coseno.

Tal como para a função seno deve aqui observar-se que poderíamos ter escolhido qualquer outra restrição da função coseno a um qualquer outro intervalo onde a função coseno seja injectiva e assuma todos os valores de $[-1\ ,\ 1]$. Invertendo esta restrição da função coseno obteríamos uma nova função de domínio $[-1,1]$ e que seria, evidentemente, distinta da função arcocoseno.

Inversa da função tangente A função tangente tem domínio $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ e contradomínio $\mathbb{R}$.

Esta função não é injectiva no seu domínio pelo que não podemos determinar a sua inversa.

Consideremos a função

$$\begin{array}{rcl} f:\left]-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{tg} x \end{array}$$

que é habitualmente designada **restrição principal da função tangente**. Esta função é bijectiva, contínua e estritamente crescente em $\left]-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$.

Podemos determinar f^{-1} que é uma função de domínio $\mathbb{R}$, contradomínio $\left]-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$, contínua e estritamente crescente em $\mathbb{R}$.

Esta função é habitualmente denotada pelo símbolo arctg e é tal que a cada $y\in\mathbb{R}$ faz corresponder o único $x\in\left]-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$ tal que $\operatorname{tg} x = y$.

O símbolo arctg lê-se "arco tangente". Temos então a função de contradomínio $\left]-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$

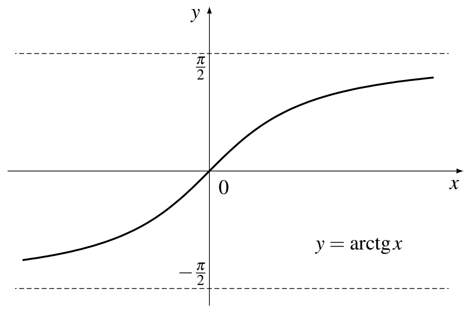
$$\begin{array}{rcl} \operatorname{arctg}:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{arctg} x \end{array}$$

Resulta da definição da função arcotangente que, para todo o $u\in\mathbb{R}$ e, para todo o $v\in\left]-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$, temos

$$\operatorname{arctg} u = v \ \text{ se e só se }\ u = \operatorname{tg} v\,.$$

O símbolo $\operatorname{arctg} x$ lê-se "arco cuja tangente é x".

Na figura seguinte apresentamos um esboço do gráfico da função arco tangente.



Tal como nos casos anteriores esta função é, por abuso de linguagem, habitualmente designada por função inversa da função tangente. Valem também para esta função considerações análogas às que foram feitas para as funções seno e coseno, relativamente à escolha do domínio da restrição cuja inversa vamos determinar.

Inversa da função cotangente Como vimos a função cotangente

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{cotg}:\mathbb{R}\backslash\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{cotg} x \end{array}$$

é sobrejectiva mas não é injectiva, pelo que não é invertível.

Consideremos a restrição da função cotangente ao intervalo $]0\ ,\ \pi[$

$$\begin{array}{rcl} f:]0\ ,\ \pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{cotg} x \end{array}$$

que habitualmente se designa **restrição principal da função cotangente**.

Esta função é injectiva, pelo que podemos determinar a sua inversa que é a função de domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $]0\ ,\ \pi[$ que a cada $y\in\mathbb{R}$ faz corresponder o único $x\in]0\ ,\ \pi[$ tal que $\operatorname{cotg} x = y$.

A função f^{-1} é habitualmente denotada por arccotg que se lê "arco cotangente" é a função de contradomínio $]0\ ,\ \pi[$ definida por

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{arccotg}:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{arccotg} x \end{array}$$

O símbolo $\operatorname{arccotg} x$ lê-se habitualmente "arco cuja cotangente é x".

Resulta da definição da função arco cotangente que, para todo o $u \in \mathbb{R}$ e, para todo o $v \in]0\ ,\ \pi[$, $\operatorname{arccotg} u = v$ se e só se $\operatorname{cotg} v = u$.

Valem, para esta função, considerações análogas às que foram feitas para os casos anteriores.

Como exercício faça um esboço do gráfico da função arccotg.

2.5.2 Inversa da função exponencial

Inversa da função exponencial de base e Como vimos a função

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x \end{array}$$

é uma função injectiva de contradomínio $\mathbb{R}^+$.

Podemos definir a inversa de f que é uma função de domínio $\mathbb{R}^+$ e contradomínio $\mathbb{R}$ e tal que, a cada $y \in \mathbb{R}^+$, faz corresponder o único $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = \mathrm{e}^x$.

Esta função é usualmente denotada pelo símbolo log ou pelo símbolo ln. Temos então

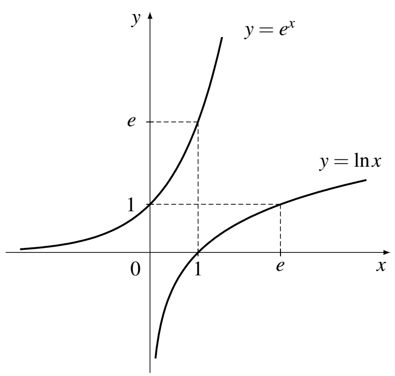
$$\begin{array}{rcl} \ln:\mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array}$$

O símbolo $\ln x$ lê-se "logaritmo de x" ou "logaritmo neperiano de x". O símbolo ln lê-se "logaritmo" ou "logaritmo neperiano".

Temos então, para todo o $u \in \mathbb{R}^+$ e, para todo o $v \in \mathbb{R}$, $\ln u = v$ se e só se $u = \mathrm{e}^v$.

Uma vez que f é estritamente crescente e contínua em $\mathbb{R}$ a função logaritmo é contínua e estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$.

Na figura seguinte apresentam-se esboços dos gráficos das funções logaritmo e exponencial.



A partir das propriedades da função exponencial deduzimos algumas propriedades da função logaritmo. Temos então, para todos os $x, y \in \mathbb{R}^+$,

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
2. $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
3. $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$, para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$.

Vamos, a título de exemplo, provar a primeira igualdade. As outras duas igualdades verificam-se analogamente e as suas verificações são deixadas como exercício.

Verificação de 1. : Sejam $x, y \in \mathbb{R}^+$. Por definição de logaritmo temos

$$\mathrm{e}^{\ln(xy)} = xy$$

e

$$\mathrm{e}^{\ln x}\mathrm{e}^{\ln y} = xy$$

donde resulta que

$$\mathrm{e}^{\ln(xy)} = \mathrm{e}^{\ln x}\mathrm{e}^{\ln y}.$$

Atendendo às propriedades da exponencial temos então

$$\mathrm{e}^{\ln(xy)} = \mathrm{e}^{\ln x + \ln y}.$$

Como a exponencial é uma função injectiva a igualdade anterior implica que

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y,$$

como pretendíamos.

Inversa da função exponencial de base a**, com** $a > 0$**,** $a \neq 1$ **e** $a \neq$ **e.** Atendendo a que a função exponencial de base a

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a^x \end{array}$$

é uma função de domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $\mathbb{R}^+$ e injectiva em $\mathbb{R}$, podemos definir a sua inversa.

Esta função de domínio $\mathbb{R}^+$ e contradomínio $\mathbb{R}$ representa-se habitualmente pelo símbolo $\log_a$ que se lê "logaritmo de base a". A cada $y \in \mathbb{R}^+$ esta função faz corresponder o único $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = a^x$.

Temos

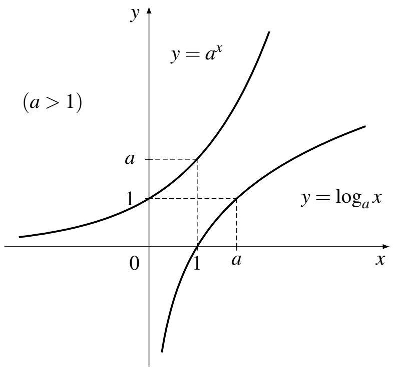
$$\begin{array}{rcl} \log_a:\mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \log_a x \end{array}$$

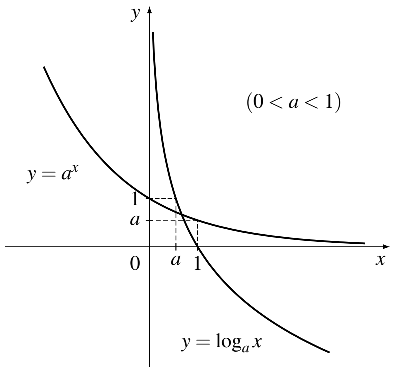
O símbolo $\log_a x$ lê-se "logaritmo de x na base a".

Como vimos, para todo o $a > 1$, a função exponencial de base a é uma função contínua e estritamente crescente em $\mathbb{R}$. Consequentemente, para $a > 1$, a função logaritmo de base a é uma função contínua e estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$.

Para $a \in]0\ ,\ 1[$, a função exponencial de base a é uma função contínua e estritamente decrescente em $\mathbb{R}$ e, portanto, a função logaritmo de base a é uma função contínua e estritamente decrescente em $\mathbb{R}^+$.

Nas duas figuras seguintes estão representados esboços dos gráficos das funções exponenciais de base a e das suas inversas.





Exercícios 2.5

1. Em cada uma das alíneas que se seguem, caracterize a inversa da função considerada.

   (a) f definida por $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$;

   (b) f definida por $f(x) = 2 + e^{x+1}$;

   (c) f definida por $f(x) = \log_3(2-x)$;

   (d) f definida por $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$.

2. Considere a função

$$\begin{array}{rcl} f: \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sec x \end{array}$$

   (a) Justifique que f é injectiva e tem contradomínio $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

   (b) Justifique que f é invertível, e determine a função inversa de f que é habitualmente representada pelo símbolo arcsec que se lê "arco secante".

3. Defina a função arccosec que é habitualmente designada por função inversa da função cosecante.
   Sugestão: Tome a restrição da cosecante ao intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

4. Justifique as igualdades seguintes:

   (a) $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x$, para todo o $x \in [-1\ ,\ 1]$

   (b) $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x$, para todo o $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$

   (c) $\cos(\arccos x) = x$, para todo o $x \in [-1\ ,\ 1]$

   (d) $\arccos(\cos x) = x$, para todo o $x \in [0\ ,\ \pi]$

   (e) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$, para todo o $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$

   (f) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$

   (g) $\operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg} x) = x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$

   (h) $\operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg} x) = x$, para todo o $x \in]0\ ,\ \pi[$

   (i) $\ln(e^x) = x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$

   (j) $e^{\ln x} = x$, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$

   (k) sendo $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$

      (i) $a^{\log_a x} = x$, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$

      (ii) $\log_a(a^x) = x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$

5. Prove que sendo $a > 0$, $a \neq 1$ tem-se:

   (a) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, para todos os $x, y \in \mathbb{R}^+$;

   (b) $\log_a(\dfrac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$, para todos os $x, y \in \mathbb{R}^+$;

   (c) $\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a x$, para todos os $x \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

6. Mostre que $e^{3\ln 2 - \ln x} = \dfrac{8}{x}$ e indique o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ em que esta simplificação é válida.

7. Calcule os limites seguintes:

   (a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln(3x^2+2) - \ln(x^2))$;

   (b) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$;

   (c) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$;

   (d) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^x$;

   (e) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{\ln x}}$;

   (f) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos(2x))^{\frac{1}{x^2}}$;

   (g) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$;

8. Considere a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\ln x} & \text{se } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

   Estude f quanto à continuidade.

9. Resolva as equações e inequações seguintes:

   (a) $2\ln x - \ln(x-1) = 2\ln 2$;

   (b) $x\log_3 x - x \leq 0$;

   (c) $x\log_2(x+1) > x$;

   (d) $(x^2-1)\log_{\frac{1}{4}} x \geq 0$.

2.6 Derivação e diferenciabilidade

Nesta secção vamos definir o conceito de derivada de uma função num ponto que pode ser apresentado intuitivamente do modo seguinte.

Seja $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e fixemos um ponto a pertencente ao interior de D_f. Para cada $x \in D$, $x \neq a$, consideremos a recta PQ definida pelos pontos $P = (a, f(a))$ e $Q = (x, f(x))$. A recta considerada é uma recta secante ao gráfico de f em a e o seu declive é dado pelo quociente

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Note-se que esta razão dá-nos a **taxa de variação média** da função f no intervalo $[a,x]$, com $x > a$, ou no intervalo $[x,a]$, com $x < a$.

Quando a abcissa do ponto Q se aproxima de a, a recta PQ aproxima-se da tangente ao gráfico de f no ponto P, se esta tangente existir.

Consequentemente, caso exista o limite,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \tag{2.9}$$

ele coincide com o declive da tangente ao gráfico de f no ponto P. Mais ainda, este limite, dá-nos a **taxa de variação instantânea** de f em a.

Como veremos, o limite 2.9 chama-se derivada da função f em a.

2.6.1 Derivada de uma função num ponto

Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in D_f$ um ponto interior de D_f.

Definição 2.113.

Chama-se **derivada da função** f **no ponto** a e denota-se por $f'(a)$, ao limite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

se este limite existir, podendo ser finito, $+\infty$ ou $-\infty$.

Se uma função admite derivada num ponto dizemos que é **derivável** nesse ponto.

Se $f'(a)$ é finito dizemos que f **é diferenciável em** a.

Exemplo 2.114.

1. Sendo $c \in \mathbb{R}$, a derivada da função constante igual a c é nula em qualquer ponto do seu domínio. De facto temos, para todo o $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0. \end{aligned}$$

2. Sendo f a função identidade em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$, temos, para todo o $a \in \mathbb{R}$, $f'(a) = 1$.

   De facto,

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a+h-a}{h} = 1 \end{aligned}$$

3. Sendo f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

   temos

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{2}{h}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(-\frac{2}{h^2}\right) = -\infty. \end{aligned}$$

Observação 2.115.

Resulta da Definição 2.113 que

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

De facto, efectuando a mudança de variável definida por $a+h = x \Longleftrightarrow h = x-a$, temos

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(h)}{h} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}. \end{aligned}$$

Definição 2.116.

Seja $a \in D_f$ um ponto de acumulação à esquerda de D_f.

Chamamos **derivada lateral de** f **à esquerda de** a e denotamo-la por $f'_-(a)$ ou $f'_e(a)$ ao limite

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

se este limite existir, podendo ser finito, $+\infty$ ou $-\infty$.

Seja $a \in D_f$ um ponto de acumulação à direita de D_f.

Chamamos **derivada lateral de** f **à direita de** a e denotamo-la por $f'_+(a)$ ou $f'_d(a)$ ao limite

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

se este limite existir, podendo ser finito, $+\infty$ ou $-\infty$.

Proposição 2.117.

Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in D_f$ um ponto interior de D_f. Então f é diferenciável em a se e só se existem $f'_+(a)$ e $f'_-(a)$, são finitas e $f'_-(a) = f'_+(a)$.

Demonstração: Pela Definição 2.113 temos

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Como por hipótese a é um ponto de acumulação à direita e à esquerda de D_f, a Proposição 2.83 garante que o limite considerado existe e é finito se e só se os limites laterais

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'_+(a)$$

e

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'_-(a)$$

existem, são finitos e tomam o mesmo valor o que demonstra o resultado. ■

Exemplo 2.118.

1. A função f definida por $f(x) = |x|$, para todo o $x \in \mathbb{R}$, não é diferenciável em $x = 0$ porque:

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \end{aligned}$$

   e

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = -1 \end{aligned}$$

2. A função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x^4 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ x^3 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

   é diferenciável em $x = 0$ porque

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{h^3-0}{h} = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2+h^4}{h} = 0 \end{aligned}$$

A proposição que apresentamos a seguir relaciona a continuidade de uma função num ponto interior do seu domínio com a diferenciabilidade da função nesse mesmo ponto e estabelece que a diferenciabilidade de uma função num ponto é uma condição suficiente para a continuidade nesse ponto.

Proposição 2.119.
Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in D_f$ um ponto interior de D_f. Se f é diferenciável em a, então f é contínua em a.

Demonstração: Para todo o $x \in D_f \setminus \{a\}$ temos $f(x) = f(a) + (x-a)\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Atendendo a esta igualdade temos que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left(f(a) + (x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right). \tag{2.10}$$

Por hipótese f é diferenciável em a e, portanto existe e é finito o limite

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Da igualdade (2.10) resulta, atendendo às propriedades dos limites,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) + 0\cdot \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f(a).$$

o que prova que f é contínua em a.

■

Observação 2.120.
Notemos que a Proposição 2.119 estabelece que a diferenciabilidade de uma função num ponto interior do seu domínio implica a continuidade da função nesse mesmo ponto. No entanto, o recíproco não é verdadeiro. Como vimos no Exemplo 2.118-1 a função módulo $f(x) = |x|$ não é diferenciável em $x = 0$ e, no entanto, f é contínua em $x = 0$.

Aplicando a lei da conversão à Proposição 2.119 temos que se f não é contínua num ponto do interior do seu domínio, então f não é aí diferenciável.

Exemplo 2.121. Consideremos a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Uma vez que não existe o limite $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, tem-se que f não é contínua em $x = 0$ e, portanto, não é aí diferenciável.

2.6.2 Função derivada

Definição 2.122. Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $D' \subset D_f$ o conjunto de pontos interiores de D_f onde f é diferenciável. Chamamos **função derivada de** f e denotamo-la por f' à função definida do modo seguinte:

$$\begin{aligned} f' : D' &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f'(x). \end{aligned}$$

Exemplo 2.123.

1. Sendo, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = k$ (k, constante) temos que f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e f' é a função nula.
2. Sendo f definida por $f(x) = x$ a função identidade em $\mathbb{R}$ temos que $f'(x) = 1$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Portanto f' é a função constante igual a um.
3. Sendo f definida por $f(x) = |x|$, para todo o $x \in \mathbb{R}$, temos que f é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x > 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

4. Sendo f a função seno temos, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x(\cos h - 1) + \cos x \operatorname{sen} h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\operatorname{sen} x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\operatorname{sen} h}{h}\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\operatorname{sen} x \frac{-2\operatorname{sen}^2(h/2)}{h} + \cos x \frac{\operatorname{sen} h}{h}\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \left(-2\operatorname{sen} x \frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h} \operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right) + \cos x \frac{\operatorname{sen} h}{h}\right) \end{aligned}$$

Uma vez que

$$\lim_{h\to 0} \frac{2\operatorname{sen}(h/2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2} = 1$$

e

$$\lim_{h\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right) = 0$$

temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2\operatorname{sen} x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 \\ &= \cos x \,. \end{aligned}$$

Podemos então concluir que a função seno é diferenciável em $\mathbb{R}$ e, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \cos x \,.$$

5. Sendo f a função coseno temos, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \operatorname{sen} x \frac{\operatorname{sen} h}{h} \right) \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\cos x \frac{-2\operatorname{sen}^2(h/2)}{h} - \operatorname{sen} x \frac{\operatorname{sen} h}{h} \right) \\ &= \cos x \cdot 0 - \operatorname{sen} x \cdot 1 \\ &= -\operatorname{sen} x \,. \end{aligned}$$

Podemos então concluir que a função coseno é diferenciável em $\mathbb{R}$ e, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x \,.$$

6. Sendo f a função exponencial temos, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(e^x \frac{e^h - 1}{h} \right) \\ &= e^x \,. \end{aligned}$$

Podemos então concluir que a função exponencial é diferenciável em $\mathbb{R}$ e, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = e^x \,.$$

Vamos aqui estabelecer algumas convenções de notação. Conhecida a expressão analítica que define a função f, $f(x)$, o símbolo $(f(x))'$ designa a expressão analítica de f'.

Por exemplo, sendo f a função definida por $f(x) = \cos^3 x$ temos

$$f'(x) = (\cos^3 x)' = -3 \operatorname{sen} x \cos^2 x \,.$$

Para designar $f'(a)$ utiliza-se também o símbolo $(f(x))'_{x=a}$.

Retomando o exemplo anterior temos

$$\begin{aligned} f'(\pi) &= (-3 \operatorname{sen} x \cos^2 x)_{x=\pi} \\ &= -3 \operatorname{sen} \pi \cos^2 \pi \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dada a função derivada, que também se designa por **função derivada de primeira ordem**, podemos determinar os pontos onde esta função é diferenciável e construir uma nova função, que denotamos por f'', que a cada x faz corresponder $f''(x) := (f')'(x)$. Esta nova função designa-se por **função derivada de segunda ordem** ou **função derivada de ordem dois** de f.

Procedendo de modo análogo dada a função derivada de ordem $n-1$ de f, que denotamos por $f^{(n-1)}$, podemos construir a **função derivada de ordem** n, que denotamos por $f^{(n)}$, que a cada x faz corresponder $f^{(n)}(x) := (f^{(n-1)})'(x)$.

Exemplo 2.124.

1. Sendo f definida por $f(x) = x$ a função identidade temos $f^{(n)}(x) = 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$ e para todo o $n \geq 2$.

2. Seja f definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Então f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e temos

$$\begin{aligned} f' : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) = \cos x \end{aligned}$$

A função f' é diferenciável em $\mathbb{R}$ e temos

$$\begin{aligned} f'' : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f''(x) = -\operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} f''' : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'''(x) = -\cos x \end{aligned}$$

2.6.3 Propriedades das funções diferenciáveis

A proposição que apresentamos a seguir estabelece um conjunto de propriedades que podem ser úteis no cálculo de derivadas.

Proposição 2.125.

Sejam f e g duas funções diferenciáveis num ponto a. Então:

(a) *$f+g$ é diferenciável em a e $(f+g)'(a) = f'(a)+g'(a)$;*

(b) *αf é diferenciável em a e $(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)$, para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$;*

(c) *$f-g$ é diferenciável em a e $(f-g)'(a) = f'(a)-g'(a)$;*

(d) *fg é diferenciável em a e $(fg)'(a) = f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$;*

(e) *se $g(a) \neq 0$, então $\frac{f}{g}$ é diferenciável em a e*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Demonstração: (a) A hipótese garante que

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

e

$$g'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\ .$$

Atendendo à definição de derivada de uma função num ponto tem-se que

$$(f+g)'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h}\ ,$$

donde resulta, pela definição de soma de funções e pelas propriedades dos limites, que

$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+g(a+h)-f(a)-g(a)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\\ &= f'(a)+g'(a)\ ,\end{aligned}$$

como pretendíamos.

(b) Atendendo à definição temos

$$(\alpha f)'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{(\alpha f)(a+h)-(\alpha f)(a)}{h}$$

ou seja, pela definição de produto de uma função por um número real,

$$(\alpha f)'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{\alpha f(a+h)-\alpha f(a)}{h}$$

donde resulta, pela hipótese,

$$\begin{aligned}(\alpha f)'(a) &= \alpha\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\\ &= \alpha f'(a)\ ,\end{aligned}$$

como pretendíamos.

(c) Para provar esta igualdade utilizam-se as duas igualdades provadas nas alíneas anteriores.

(d) Queremos provar que

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a)+f(a)g'(a)\ .$$

Temos, por definição,

$$(fg)'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{(fg)(a+h)-(fg)(a)}{h}\ ,$$

donde resulta, atendendo à definição de fg,

$$(fg)'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h}\ ,$$

ou seja

$$\begin{aligned}(fg)'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a+h)+f(a)g(a+h)-f(a)g(a)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a+h)}{h}+\frac{f(a)g(a+h)-f(a)g(a)}{h}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}g(a+h)+f(a)\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right)\ .\end{aligned}$$

A hipótese garante que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) \tag{2.11}$$

e que

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h} = g'(a) \tag{2.12}$$

sendo ambos os limites finitos.

Como g é diferenciável em a, tem-se que g é contínua em a e, portanto,

$$\lim_{h\to 0}g(a+h) = g(a)\ . \tag{2.13}$$

Utilizando as igualdades (2.11), (2.12) e (2.13) e as propriedades dos limites concluímos a igualdade pretendida.

(e) Vamos demonstrar que, nas condições da hipótese, se $g(a)\neq 0$, então

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Por definição

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{(\frac{f}{g})(a+h)-(\frac{f}{g})(a)}{h}$$

donde resulta, atendendo à definição de $\dfrac{f}{g}$,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(a+h)}{g(a+h)}-\frac{f(a)}{g(a)}}{h}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{f(a+h)}{g(a+h)}-\frac{f(a)}{g(a)}}{h} &= \frac{f(a+h)g(a)-f(a)g(a+h)}{hg(a+h)g(a)}\\
&= \frac{f(a+h)g(a)-f(a)g(a)-f(a)g(a+h)+f(a)g(a)}{hg(a+h)g(a))}\\
&= \frac{(f(a+h)-f(a))g(a)-(g(a+h)-g(a))f(a)}{hg(a+h)g(a)}\\
&= \frac{1}{g(a)}\cdot\frac{1}{g(a+h)}\left(g(a)\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f(a)\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right),
\end{aligned}$$

donde resulta que

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{g(a+h)}\frac{1}{g(a)}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}g(a)-\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\cdot f(a)\right)\right).$$

Como, por hipótese, g é diferenciável em a tem-se que g é contínua em a, e portanto

$$\lim_{h\to 0} g(a+h) = g(a)$$

que é não nulo, por hipótese. Consequentemente

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(a+h)} = \frac{1}{g(a)}.$$

A hipótese garante que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

e que

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h} = g'(a)$$

sendo ambos os limites finitos.

Utilizando as propriedades dos limites temos então

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \frac{1}{g(a)}\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(a+h)}\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot g(a)\right)-\\
&\quad -\lim_{h\to 0}\left(\frac{g(a+h)-g(a)}{h}f(a)\right)\\
&= \frac{1}{(g(a))^2}(g(a)f'(a)-f(a)g'(a)),
\end{aligned}$$

como pretendíamos.

■

Exemplo 2.126.

1. Utilizando a proposição anterior temos que, sendo p definida por

   $$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

   onde $n\in\mathbb{N}$ e $a_i\in\mathbb{R}$, para todo o $i\in\{0,1,\ldots,n\}$, uma função polinomial de grau n temos

   $$p'(x) = na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1$$

   para todo o $x\in\mathbb{R}$.

2. Sendo f definida por $f(x)=\mathrm{e}^x\cos x$, para todo o $x\in\mathbb{R}$, temos

   $$f'(x) = (\mathrm{e}^x)'\cos x+\mathrm{e}^x(\cos x)' = \mathrm{e}^x\cos x-\mathrm{e}^x\operatorname{sen}x = \mathrm{e}^x(\cos x-\operatorname{sen}x),$$

   para todo o $x\in\mathbb{R}$.

3. Sendo f definida em $D_f=\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ por $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\operatorname{sen}x}$ temos, para todo o $x\in D_f$

   $$\begin{aligned}
   f'(x) &= \frac{(\mathrm{e}^x)'\operatorname{sen}x-\mathrm{e}^x(\operatorname{sen}x)'}{\operatorname{sen}^2x}\\
   &= \frac{\mathrm{e}^x\operatorname{sen}x-\mathrm{e}^x\cos x}{(\operatorname{sen}x)^2}\\
   &= \mathrm{e}^x\left(\frac{1}{\operatorname{sen}x}-\frac{1}{\operatorname{sen}x}\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}\right)\\
   &= \mathrm{e}^x\operatorname{cosec}x(1-\operatorname{cotg}x).
   \end{aligned}$$

A proposição que apresentamos a seguir estabelece uma regra de derivação habitualmente designada por **regra da derivada da função composta** ou **regra da cadeia**.

Proposição 2.127.
Sejam $f: D_f\longrightarrow\mathbb{R}$ e $g: D_g\longrightarrow\mathbb{R}$ duas funções tais que $g\circ f$ está definida. Se f é diferenciável em

a e g é diferenciável em $f(a)$, então $g \circ f$ é diferenciável em a e

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Demonstração: Atendendo à definição de derivada de uma função num ponto e à definição de composição de funções temos

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{(g \circ f)(a+h) - (g \circ f)(a)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h}\end{aligned}$$

Admitamos em primeiro lugar que, numa vizinhança de a, f é a função constante igual a k. Então

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(k) - g(k)}{h} = 0\,.$$

Uma vez que a derivada da função constante igual a k é nula, a igualdade $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$, neste caso, verifica-se trivialmente.

Suponha-se então que, em alguma vizinhança de a, f não é a função constante. Então, para valores de h suficientemente próximos de zero temos $f(a+h) - f(a) \neq 0$. Temos então

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left(\frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{f(a+h) - f(a)} \cdot \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right)\end{aligned}$$

Como f é diferenciável em a temos, pela Proposição 2.119, que f é contínua em a e, portanto

$$\lim_{h \to 0} (f(a+h) - f(a)) = 0.$$

Consideremos a mudança de variável definida por $f(a+h) - f(a) = k$. Quando $h \to 0$ também $k \to 0$ e temos que

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{f(a+h) - f(a)} &= \lim_{k \to 0} \frac{g(f(a)+k) - g(f(a))}{k} \\ &= g'(f(a)).\end{aligned}$$

Consequentemente, utilizando as propriedades dos limites, e, atendendo a que $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$, temos

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{f(a+h) - f(a)} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= g'(f(a)) f'(a),\end{aligned}$$

como pretendíamos.

■

Exemplo 2.128. Sendo f a função definida por $f(x) = \operatorname{tg} x$, para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$, temos que f é aí diferenciável, tendo-se $f'(x) = \sec^2 x$.

Por outro lado, sendo g a função definida por $g(x) = e^x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$, temos que g é aí diferenciável tendo-se $g'(x) = e^x$.

A composta $g \circ f$ é uma função cujo domínio coincide com o domínio de f. Utilizando a proposição anterior temos que $g \circ f$ é diferenciável em todo o ponto de D_f tendo-se $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) f'(x)$, ou seja,

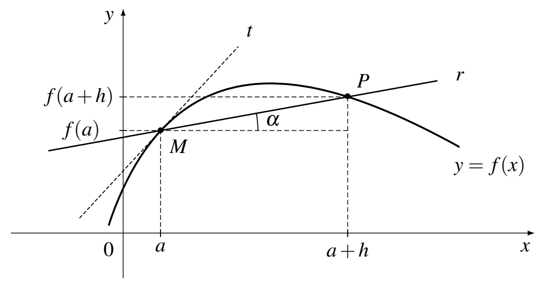
$$(g \circ f)'(x) = e^{\operatorname{tg} x} \sec^2 x\,.$$

2.6.4 Interpretação geométrica

Admitamos que $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em $a \in int(D_f)$.

Vamos ver como podemos interpretar geometricamente a derivada $f'(a)$ no caso em que f é diferenciável em a.

Consideremos a figura seguinte



Para cada $h \neq 0$ o quociente

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

é o declive da recta que passa pelos pontos $M = (a, f(a))$ e $P = (a+h\ ,\ f(a+h))$ que, como sabemos, coincide com $\operatorname{tg} \alpha$.

Intuitivamente verificamos que, quando h tende para zero, o ponto M permanece fixo e o ponto P vai ocupando diferentes posições sobre a curva $y = f(x)$; a recta r vai mudando de direcção e tende para a recta t, tangente à curva no ponto M. Consequentemente, quando h tende para zero, o declive da recta que passa pelos pontos $M = (a, f(a))$ e $P = (a+h\ ,\ f(a+h))$ tende para o declive da recta t, tangente à curva no ponto M. Uma vez que $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$ temos que o declive da recta tangente à curva no ponto de abcissa $x = a$ coincide com $f'(a)$.

Dizemos então que a recta que passa por $M = (a, f(a))$ e tem declive $f'(a)$ é a tangente à curva no ponto M que, na figura, está designada por t.

Consequentemente a tangente à curva no ponto M tem por equação

$$y - f(a) = f'(a)(x-a).$$

No caso em que $f'(a) = 0$ a tangente à curva no ponto $M = (a, f(a))$ é uma recta horizontal que tem por equação $y = f(a)$.

Exemplo 2.129. A tangente à curva $y = x^2+1$ no ponto $M = (0,1)$ é a recta horizontal de equação $y = 1$.

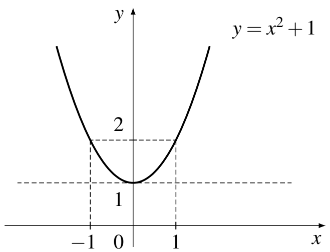
De facto, considerando a função f definida por $f(x) = x^2+1$ temos que $f'(0) = 0$, donde resulta que a tangente ao gráfico de f no ponto M é a recta de declive nulo que passa por M, ou seja, a recta de equação $y = 1$.

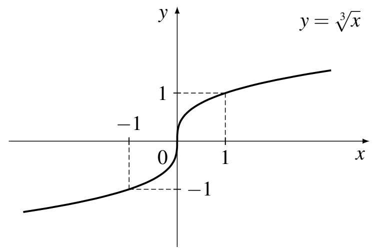
Observação 2.130. No caso em que $f'(a)$ é $+\infty$ ou $-\infty$ a tangente à curva no ponto $M = (a, f(a))$ é a recta vertical de equação $x = a$.

Exemplo 2.131. Se considerarmos a função f definida por $f(x) = \sqrt[3]{x}$ temos que

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}\\ &= +\infty\end{aligned}$$

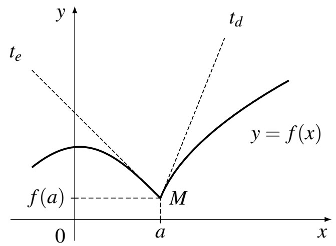
Consequentemente a tangente à curva $y = \sqrt[3]{x}$ que passa pelo ponto $M = (0,0)$ é a recta vertical de equação $x = 0$.





Observação 2.132. Podemos interpretar geometricamente a derivada lateral à esquerda e a derivada lateral à direita. No primeiro caso, e supondo que a derivada lateral é finita, temos que $f'_-(a)$ é o declive da semi-recta tangente à curva no ponto $M = (a, f(a))$ à esquerda do ponto M e designamo-la por semi-tangente à esquerda de M; no segundo caso, e supondo que a derivada lateral é finita, temos que $f'_+(a)$ é o declive da semi-recta tangente à curva no ponto M à direita do ponto M que designamos por semi-tangente à direita de M.

Na figura seguinte estão representadas as semi-tangentes à esquerda e à direita de uma curva num ponto $M = (a, f(a))$



t_d é a semi-tangente à curva $y = f(x)$ à direita de M

t_e é a semi-tangente à curva $y = f(x)$ à esquerda de M.

No caso em que as derivadas laterais são infinitas as semi-tangentes à esquerda ou à direita coincidem e têm a equação $x = a$.

Exemplo 2.133.

1. A semi-recta de equação $y = x$ com $x \geq 0$ é a semi-tangente à curva $y = |x|$ à direita do ponto $M = (0,0)$ e a semi-recta de equação $y = -x$ com $x \leq 0$ é a semi-tangente à curva $y = |x|$ à esquerda do ponto $M = (0,0)$.

2. Consideremos a função f definida por $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Uma vez que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{h}}$$

temos que

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt[3]{h}} = +\infty$$

e

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{\sqrt[3]{h}} = -\infty\,.$$

Consequentemente, não existe recta tangente ao gráfico de f na origem, mas existem duas semi-tangentes que coincidem com a semi-recta de equação $x = 0$.

Definição 2.134.

Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in int(D_f)$ um ponto onde f é diferenciável. Chamamos **normal à curva** $y = f(x)$ **no ponto** $M = (a, f(a))$ à recta que passa pelo ponto M e é perpendicular à tangente à curva nesse ponto.

Atendendo à relação que existe entre os declives de duas rectas perpendiculares temos que a normal à curva $y = f(x)$ no ponto $M = (a, f(a))$ é a recta que passa por este ponto e tem declive $-\dfrac{1}{f'(a)}$, quando $f'(a) \neq 0$.

Exercício :

Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e a um ponto interior a D_f tal que f é diferenciável em a. Determine uma equação da recta normal à curva $y = f(x)$ no ponto $M = (a, f(a))$.

2.6.5 Derivação de funções inversas

Suponhamos que $f : [a\ ,\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função estritamente monótona e contínua em $[a\ ,\ b]$.

Seja
$$f^{-1} : f([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}$$
a inversa de f.

A proposição que apresentamos a seguir estabelece que, sob certas condições, o produto do valor da derivada de f em $x_0 \in]a\ ,\ b[$ pelo valor da derivada de f^{-1} em $y_0 = f(x_0)$ é igual a um.

Proposição 2.135.

Sejam $f : [a\ ,\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e estritamente monótona em $[a\ ,\ b]$ e f^{-1} a inversa de f. Se f é diferenciável em $x_0 \in]a\ ,\ b[$ e $f'(x_0) \neq 0$, então f^{-1} é diferenciável em $y_0 = f(x_0)$ tem-se $(f^{-1})'(y_0)f'(x_0) = 1$, ou seja, atendendo a que $f'(x_0) \neq 0$,
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Demonstração: Seja $x_0 \in]a\ ,\ b[$ tal que f é diferenciável em x_0 e $f'(x_0) \neq 0$. Seja $y_0 := f(x_0)$.

Queremos provar que $(f^{-1})'(y_0)$ existe e é o inverso de $f'(x_0)$, ou seja, queremos provar que
$$\lim_{k \to 0} \frac{f^{-1}(y_0+k) - f^{-1}(y_0)}{k} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Seja $h := f^{-1}(y_0+k) - f^{-1}(y_0)$. Como $f^{-1}(y_0) = x_0$ temos que
$$f^{-1}(y_0+k) = x_0 + h$$
donde resulta que
$$y_0 + k = f(x_0+h)$$
e, portanto,
$$k = f(x_0+h) - f(x_0)$$
Como f é estritamente monótona temos que $h \neq 0$ se e só se $k \neq 0$. Temos então, para $k \neq 0$,
$$\begin{aligned}\frac{f^{-1}(y_0+k) - f^{-1}(y_0)}{k} &= \frac{h}{f(x_0+h) - f(x_0)} \\ &= \frac{1}{\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}.\end{aligned}$$
Como f é contínua, a Proposição 2.111, garante que f^{-1} é também contínua e portanto
$$\lim_{k \to 0}(f^{-1}(y_0+k) - f^{-1}(y_0)) = 0\ .$$
Consequentemente, $h \to 0$ sempre que $k \to 0$.

Atendendo à igualdade que estabelecemos anteriormente temos então que
$$\lim_{k \to 0} \frac{f^{-1}(y_0+k) - f^{-1}(y_0)}{k} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$
donde resulta, atendendo à hipótese,
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\ ,$$
como pretendíamos.

■

Utilizando a proposição anterior podemos provar o seguinte resultado, cuja demonstração é deixada como exercício.

Proposição 2.136.

Sejam $D_f \subset \mathbb{R}$ um conjunto de interior não vazio, $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função estritamente monótona e a um ponto interior de D_f. Se f é diferenciável em a, f^{-1} é contínua em $f(a)$ e $f'(a) \neq 0$, então f^{-1} é diferenciável em $f(a)$ e
$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Demonstração: Exercício.

■

Vamos utilizar as proposições anteriores para calcular as derivadas das funções inversas trigonométricas e da função inversa da função exponencial que determinámos na secção anterior.

- Derivada da função arcoseno

Como a função seno é uma função estritamente crescente em $\left[-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$ e, para todo o $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos x \neq 0$, a Proposição 2.136 garante que, para todo o $y \in]-1\ ,\ 1[$, a derivada $(\text{arcsen})'(y)$ existe e é finita. Mais ainda, sendo $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$ tal que $\operatorname{sen} x = y$, temos
$$(\text{arcsen})'(y) = \frac{1}{(\operatorname{sen} x)'_x}\ ,$$
ou seja, uma vez que $(\operatorname{sen} x)'_x = \cos x$,
$$(\text{arcsen})'(y) = \frac{1}{\cos x}\ .$$

Atendendo a que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ e a que, para $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos x \geq 0$ temos $\cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}$ e, como $\operatorname{sen} x = y$, temos $\cos x = \sqrt{1 - y^2}$.

Então

$$(\operatorname{arcsen})'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

ou, atendendo a que y é uma variável muda,

$$(\operatorname{arcsen})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ ,$$

para todo o $x \in]-1\ ,\ 1[$.

- Derivada da função arco coseno

Por um raciocínio análogo ao anterior concluímos que, para todo o $y \in]-1\ ,\ 1[$ a derivada $(\arccos)'(y)$ existe e é finita. Mais ainda, sendo $x \in]0\ ,\ \pi[$ tal que $\cos x = y$, temos

$$(\arccos)'(y) = \frac{1}{(\cos x)'_x} \ ,$$

ou seja, atendendo a que $(\cos x)'_x = -\operatorname{sen} x$,

$$(\arccos)'(y) = \frac{-1}{\operatorname{sen} x} \ .$$

Como, para $x \in]0\ ,\ \pi[$, $\operatorname{sen} x \geq 0$ temos, atendendo à fórmula fundamental da trigonometria, $\operatorname{sen} x = \sqrt{1-\cos^2 x}$ e, como $\cos x = y$, vem $\operatorname{sen} x = \sqrt{1-y^2}$, pelo que

$$(\arccos)'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} \ .$$

Temos então, para todo o $x \in]-1\ ,\ 1[$

$$(\arccos)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \ .$$

- Derivada da função arcotangente

A função tangente é uma função estritamente crescente em $\left]-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$ e a sua derivada é não nula em todo o ponto deste intervalo.

Pela Proposição 2.136 temos que, para todo o $y \in \mathbb{R}$ existe $(\operatorname{arctg})'(y)$, é finita e, sendo $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$ tal que $\operatorname{tg} x = y$ temos

$$(\operatorname{arctg})'(y) = \frac{1}{(\operatorname{tg} x)'_x} \ ,$$

ou seja, uma vez que $(\operatorname{tg} x)'_x = \sec^2 x$,

$$(\operatorname{arctg})'(y) = \frac{1}{\sec^2 x}$$

Uma vez que, para todo o $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ e como $\operatorname{tg} x = y$, temos que

$$(\operatorname{arctg})'(y) = \frac{1}{1+y^2} \ .$$

Concluímos então que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$(\operatorname{arctg})'(x) = \frac{1}{1+x^2} \ .$$

- Derivada da função arco cotangente

Por um raciocínio análogo ao anterior concluímos que, para todo o $y \in \mathbb{R}$, existe $(\operatorname{arccotg})'(y)$ e é finita e temos

$$(\operatorname{arccotg})'(y) = \frac{-1}{\operatorname{cosec}^2 x}$$

sendo $x \in]0\ ,\ \pi[$ tal que $\operatorname{cotg} x = y$.

Por outro lado, atendendo a que, para todo o $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x$ temos

$$(\operatorname{arccotg})'(y) = \frac{-1}{1+y^2}.$$

Temos então que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$(\operatorname{arccotg})'(x) = \frac{-1}{1+x^2}.$$

- Derivada da função logaritmo natural

A função exponencial é uma função estritamente crescente e diferenciável em $\mathbb{R}$ sendo a sua derivada não nula em $\mathbb{R}$.

A Proposição 2.136 garante que, para todo o $y \in \mathbb{R}^+$, sendo $x \in \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{e}^x = y$, temos

$$(\ln)'(y) = \frac{1}{(\mathrm{e}^x)'_x}$$

ou seja, uma vez que $(\mathrm{e}^x)'_x = \mathrm{e}^x$,

$$(\ln)'(y) = \frac{1}{\mathrm{e}^x} \ .$$

Consequentemente,

$$(\ln)'(y) = \frac{1}{y}$$

ou, equivalentemente,

$$(\ln)'(x) = \frac{1}{x} \ .$$

- Derivada da função logaritmo de base a, com $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Por um raciocínio análogo ao do caso anterior e, atendendo a que para todo o $x \in \mathbb{R}$, $(a^x)' = a^x \ln a$ temos que, para todo o $y \in \mathbb{R}^+$,

$$(\log_a)'(y) = \frac{1}{a^x \ln a}$$

sendo $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = y$.

Então

$$(\log_a)'(y) = \frac{1}{y \ln a},$$

ou seja,

$$(\log_a)'(x) = \frac{1}{x \ln a},$$

para todo o $x \in \mathbb{R}^+$.

Exercícios 2.6

1. Utilize a Proposição 2.127 para verificar as seguintes igualdades:

   (a) $\left(e^{x^2+1}\right)' = 2xe^{x^2+1}$

   (b) $\left(\cos\left(e^x\right)\right)' = -e^x \operatorname{sen}(e^x)$

2. Calcule $(g \circ f)'(0)$ sendo f e g as funções definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ x^2 \operatorname{sen} x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

   e

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-1} & \text{se} \quad x \neq 1 \\ 1 & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$$

3. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$ cujo gráfico é uma recta. Mostre que a tangente ao gráfico da função em qualquer ponto é a própria recta.

4. Considere a função f definida por $f(x) = x^2 \ln x + 11x - \frac{x^2}{2}$. Determine, caso exista, $a \in \mathbb{R}^+$ por forma que a tangente ao gráfico de f no ponto $x = a$ tenha declive $m = 11$.

5. Considere as funções f e g definidas, respectivamente, por $f(x) = \sqrt{x}(x^4 + 3)$ e $g(x) = 12\sqrt{x}$. Determine, caso exista, $a \in \mathbb{R}$ por forma que as tangentes aos gráficos de f e g no ponto $x = a$ sejam paralelas.

6. Considere a função f definida por $f(x) = 5x^7 + 6x^3 + x + 9$. Sabendo que $f(-1) = -3$ e que f é invertível, determine $(f^{-1})'(-3)$.

7. Considere a função f definida por $f(x) = 4x^3 + x + 2$. Sabendo que f é invertível, determine $(f^{-1})'(2)$.

8. Em cada uma das alíneas que se seguem, determine a função derivada da função considerada.

   (a) $f(x) = (x-1)(x^2+3x)$;

   (b) $f(x) = \sqrt[3]{(2x-1)^2}$;

   (c) $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$;

   (d) $f(x) = x^2 e^{x^2}$;

   (e) $f(x) = \operatorname{arcsen} \sqrt{x}$;

   (f) $f(x) = 3^{\operatorname{tg} x}$;

   (g) $f(x) = e^{\frac{x^3}{\sqrt{x-1}}}$;

   (h) $f(x) = \cos(\log_2(x^2))$;

   (i) $f(x) = (1-x^2) \ln x$;

   (j) $f(x) = (1+x^2) \operatorname{arctg} x$;

   (k) $f(x) = x^2 - \dfrac{\ln(x^2)}{x}$.

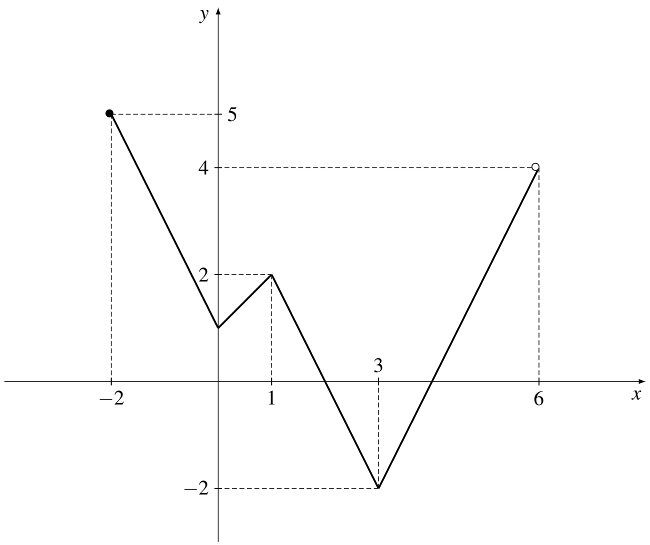
2.7 Estudo analítico de funções

2.7.1 Teoremas de Rolle, de Lagrange e de Cauchy

Na Definição 2.34 apresentámos os conceitos de mínimo e máximo de uma função num subconjunto do seu domínio e de mínimo e máximo de uma função. No contexto do estudo analítico de funções interessa-nos introduzir algumas definições que traduzam o comportamento da função quer em todo o seu domínio quer localmente, ou seja, numa vizinhança de alguns pontos.

Consideremos, por exemplo, a função f definida em $D_f = [-2,6[$ por

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{se} \quad x \in [-2,0] \\ x+1 & \text{se} \quad x \in]0,1] \\ -2x+4 & \text{se} \quad x \in]1,3[\\ 2x-8 & \text{se} \quad x \in [3,6[\end{cases}$$



Da análise do gráfico de f podemos concluir que:

- para todo o $x \in D_f$, $f(x) \geq -2 = f(3)$ o que, de acordo com a Definição 2.34, significa que $f(3)$ é o mínimo de f;

- para todo o $x \in V_1(0) =]-1,1[$, $f(x) \geq 1 = f(0)$ o que, de acordo com a Definição 2.34, significa que $f(0)$ é um mínimo de f na vizinhança $V_1(0)$ de $a = 0$;

- para todo o $x \in D_f$, $f(x) \leq 5 = f(-2)$ o que, de acordo com a Definição 2.34, significa que $f(-2)$ é o máximo de f;

- para todo o $x \in V_{1/2}(1) =]1/2, 3/2[$, $f(x) \leq 2 = f(1)$ o que, de acordo com a Definição 2.34, significa que $f(1)$ é um mínimo de f na vizinhança $V_{1/2}(1)$ de $a = 1$.

No contexto do estudo analítico de funções, dizemos então que:

- $f(3)$ é o mínimo absoluto ou global de f e que $a = 3$ é um minimizante global ou absoluto de f;

- $f(0)$ é um mínimo local de f e que $a = 0$ é um minimizante local de f;

- $f(-2)$ é o máximo absoluto ou global de f e que $a = -2$ é um maximizante global ou absoluto de f;

- $f(1)$ é um mínimo local de f e que $a = 1$ é um minimizante local de f.

Formalizando, temos a seguinte definição.

Definição 2.137.

Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D_f$.

Dizemos que a é um **maximizante local** ou **ponto de máximo local** ou **ponto de máximo relativo** para f em D_f se existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in V_\delta(a) \cap D_f$, $f(x) \leq f(a)$.

Dizemos que a é um **minimizante local** ou **ponto de mínimo local** ou **ponto de mínimo relativo** para f em D_f se existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in V_\delta(a) \cap D_f$, $f(x) \geq f(a)$.

Se a é um ponto de mínimo local para f em D_f dizemos que $f(a)$ é um **mínimo local** ou **mínimo relativo** de f em D_f.

Se a é um ponto de máximo local para f em D_f dizemos que $f(a)$ é um **máximo local** ou **máximo relativo** de f em D_f.

Dizemos que a é um **maximizante global** ou **maximizante absoluto** ou **ponto de máximo absoluto** ou **ponto de máximo global** para f em D_f se, para todo o $x \in D_f$, $f(x) \leq f(a)$.

Dizemos que a é um **minimizante global** ou **minimizante absoluto** ou **ponto de mínimo absoluto** ou **ponto de mínimo global** para f em D_f se, para todo o $x \in D_f$, $f(x) \geq f(a)$.

No caso em que a é um ponto de mínimo absoluto para f em D_f, dizemos que $f(a)$ é o **mínimo absoluto** ou **mínimo global** de f em D_f.

No caso em que a é um ponto de máximo absoluto para f em D_f, dizemos que $f(a)$ é o **mínimo absoluto** ou **máximo global** de f em D_f.

Observação 2.138.

1. Resulta da Definição 2.137 que todo o mínimo absoluto para f em D_f é um mínimo relativo para f em D_f e que todo o máximo absoluto para f em D_f é um máximo relativo para f em D_f.

2. Notemos que $f(x) \geq f(a) \Leftrightarrow f(x) - f(a) \geq 0$ e $f(x) \leq f(a) \Leftrightarrow f(x) - f(a) \leq 0$.

   Assim, $f(a)$ é um máximo local [resp. mínimo local] se e só se a diferença $f(x) - f(a)$ é não negativa [resp. não positiva] numa vizinhança de a.

   Analogamente temos que $f(a)$ é um máximo absoluto [resp. mínimo absoluto] se e só se aquela diferença é não negativa [resp. não positiva] em D_f.

Exemplo 2.139.

1. Atendendo a que $x^2 \geq 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$, concluímos que $x = 0$ é um ponto de mínimo absoluto para a função f definida por $f(x) = x^2$ em $\mathbb{R}$. No entanto esta função não admite máximo absoluto em $\mathbb{R}$. De facto, admitamos que $k \in \mathbb{R}_0^+$ é máximo absoluto de f em $\mathbb{R}$. Seja $x_0 = \sqrt{k+1}$. Então x_0 é um ponto do domínio de f e $f(x_0) = k+1 > k$, o que é absurdo dado que, por hipótese, k é o máximo absoluto de f em $\mathbb{R}$.

2. Consideremos a função f definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$. Todo o ponto da forma $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$ é um ponto de máximo absoluto para f em $\mathbb{R}$, já que, para todo o $k \in \mathbb{Z}$ e, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq 1$ e $f\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$.

   Note que esta função admite uma infinidade de pontos de máximo global mas apenas um máximo global.

3. $x = \pi$ é um ponto de mínimo absoluto para $f(x) = \cos x$ em $[0\ ,\ \pi]$.

4. Consideremos a função f definida por $f(x) = x+1$. Esta função não admite máximo nem mínimo globais em $\mathbb{R}$. (Seja $a \in \mathbb{R}$. Como $f(a-2) = a-1 < a$, concluímos que a não pode ser máximo global de f em $\mathbb{R}$. De modo análogo, uma vez que $f(a) > a$, temos que a não pode ser mínimo global de f em $\mathbb{R}$.)

   No entanto, $x = 1$ é um ponto de mínimo absoluto de f em $[1\ ,\ 2]$ e $x = 2$ é um ponto de máximo absoluto de f em $[1\ ,\ 2]$.

5. Consideremos a função f definida no intervalo $[1,2]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in [1,2[\\ 2 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$$

   Uma vez que $f(2) = 2 \geq 1 = f(1)$ e, para todo o $x \in [1,2[$, $f(x) \geq f(1)$, temos $f(x) \geq f(1)$ para todo o $x \in [1,2]$, pelo que $x = 1$ é um ponto de mínimo absoluto. Por outro lado, para todo o $x \in [1,2[$, $f(x) = 1 \leq 2 = f(2)$, pelo que $f(x) \leq f(2)$, para todo o $x \in [1,2]$ e, portanto, $x = 2$ é um ponto de máximo absoluto.

Na definição que apresentamos a seguir introduzimos alguns termos que serão utilizados posteriormente.

Definição 2.140.

Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D_f$.

Dizemos que $f(a)$ é um **extremo local** ou **extremo relativo** para f em D_f se a é um ponto de máximo local ou ponto de mínimo local para f em D_f.

Dizemos que $f(a)$ é um **extremo absoluto** para f em D_f se a é um ponto de máximo absoluto ou ponto de mínimo absoluto para f em D_f.

No caso em que $f(a)$ é um extremo local para f em D_f dizemos que f **admite em** a **um extremo local** ou ainda que a **é um extremante local** de f em D_f.

Analogamente, se $f(a)$ é um extremo absoluto para f em D_f dizemos que f **admite em** a **um extremo absoluto** ou ainda que a **é um extremante absoluto** de f em D_f.

Exemplo 2.141. Tendo em atenção o Exemplo 2.139 temos que:

- $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$ e $\operatorname{sen}(-\pi/2) = -1$ são extremos absolutos da função seno em $\mathbb{R}$, todo o ponto da forma $\pi/2 + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$ e todo o ponto da forma $-\pi/2 + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$ é um extremante absoluto de f em $\mathbb{R}$;

- $f(1) = 1$ e $f(2) = 2$ são extremos absolutos em $[1,2]$ da função f definida em $[1,2]$ por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in [1,2[\\ 2 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$ e que todo o ponto do intervalo $[1,2]$ é um extremante absoluto desta função em $[1,2]$.

A proposição que apresentamos a seguir é uma condição necessária para que $c \in]a\ ,\ b[$ seja um extremante local de uma função $f :]a\ ,\ b[\longrightarrow \mathbb{R}$.

Proposição 2.142.

Seja $f :]a\,,b[\longrightarrow \mathbb{R}$. *Se* f *admite um extremo relativo em* $c \in]a\,,b[$ *e* f *é diferenciável em* c, *então* $f'(c) = 0$.

Demonstração: Recorrendo à função f vamos definir em $]a,b[$ a função g do modo seguinte:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} & \text{se} \quad x \neq c \\ f'(c) & \text{se} \quad x = c \end{cases}$$

Como, por hipótese, f é diferenciável em c, tem-se $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$. Atendendo à definição de g conclui-se que $\lim\limits_{x \to c} g(x) = g(c)$. Esta última igualdade significa que g é contínua em c.

Pretendemos provar que $f'(c) = 0$, ou seja, que $g(c) = 0$. Para isso vamos ver que não podemos ter $g(c) > 0$ nem $g(c) < 0$.

Suponhamos que $g(c) > 0$. Como g é contínua em c concluímos que existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in V_\delta(c) \cap]a\,,b[$, $g(x) > 0$.

Sendo $x \neq c$ temos então que, para todo o x em $V_\delta(c) \cap]a\,,b[$, $f(x) - f(c)$ e $x - c$ têm o mesmo sinal, ou seja,

$$f(x) > f(c) \;\text{ se }\; x > c$$

e

$$f(x) < f(c) \;\text{ se }\; x < c$$

o que contraria a hipótese de f admitir um extremo relativo em c.

Supondo $g(c) < 0$, um raciocínio análogo ao anterior conduz também a uma contradição.

A contradição resulta de supor que $g(c) \neq 0$ e, portanto, temos de ter $g(c) = 0$. Mas, por definição de g, $g(c) = f'(c)$ pelo que $f'(c) = 0$.

■

Observação 2.143.

1. O recíproco da proposição anterior não é verdadeiro. Por exemplo, a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^3$ tem derivada nula em $x = 0$ e, no entanto, f não admite extremo relativo em $x = 0$. De facto, temos $f(\varepsilon) > 0$, para todo o $\varepsilon > 0$, e $f(\varepsilon) < 0$, para todo o $\varepsilon < 0$, o que prova que a diferença $f(x) - f(0) = f(x)$ não tem sinal constante, qualquer que seja a vizinhança da origem.

2. Pode acontecer que não exista derivada de f num ponto e, no entanto, f admita extremo nesse ponto. Por exemplo, a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = |x|$ não tem derivada na origem e, no entanto, f admite um extremo local em $x = 0$.

3. Consideremos a função f definida por

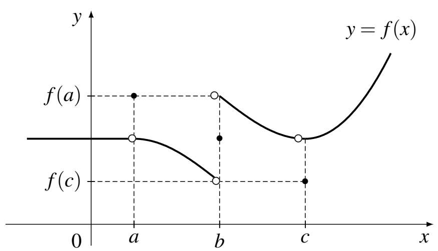
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & se \quad x \neq 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \end{cases}$$

Temos $f(x) \geq 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$, pelo que $x = 0$ é um minimizante global de f em $\mathbb{R}$. No entanto,

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{h^2} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^3} \end{aligned}$$

e, portanto $f'(0)$ não existe.

4. Sejam f uma função real de variável real de domínio D_f e x_0 um ponto interior de D_f. Admitamos que f não é contínua em x_0. Então, como vimos, f não é diferenciável em x_0. No entanto, tal como os gráficos que apresentamos a seguir ilustram, (tomando, respectivamente, $x_0 = a$, $x_0 = b$ e $x_0 = c$)



a função f pode admitir ou não extremo local em x_0. Para decidir se existe extremo local em x_0 é necessário comparar os valores dos limites laterais em x_0 e o valor de f em x_0.

A condição que estabelecemos na Proposição 2.142 garante que se a derivada de uma função é finita num extremante local, então, nesse ponto, ela é nula.

É também importante estabelecer um critério que nos permita concluir quando é que uma dada função admite extremo num dado ponto. Utilizando a Proposição 2.142 já sabemos que os únicos candidatos a extremantes locais são os zeros da primeira derivada de f, os pontos onde a derivada é infinita ou os pontos onde não existe derivada.

Antes de estabelecermos uma condição que nos permite classificar os candidatos a extremantes locais vamos apresentar os **Teoremas de Rolle, de Lagrange e de Cauchy**.

Proposição 2.144. ***(Teorema de Rolle)***

Seja f uma função contínua em $[a\,,b]$ e diferenciável em $]a\,,b[$. Se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in]a\,,b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Demonstração: Como $[a\,,b]$ é um compacto e f é contínua em $[a\,,b]$, o Teorema de Weierstrass garante que f atinge em $[a\,,b]$ o seu máximo M e o seu mínimo m.

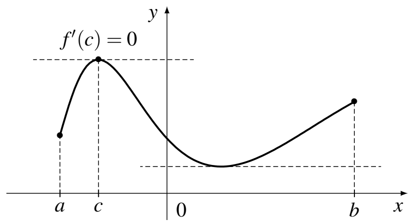
Se $M = m$, então f é constante em $[a\,,b]$ e, portanto, $f'(c) = 0$, para todo o $c \in]a\,,b[$.

Se $M \neq m$, então, um destes valores pelo menos, é distinto de $f(a) = f(b)$. Admitamos que é, por exemplo, $M \neq f(a)$. Seja $c \in]a\,,b[$ tal que $f(c) = M$. Note-se que como $M \neq f(a) = f(b)$, temos que $a \neq c$ e $b \neq c$.

Como $f(x) \leq f(c)$, para todo o $x \in]a,b[$, f admite um extremo relativo em $c \in]a\,,b[$. Por outro lado f é diferenciável em $]a\,,b[$. Consequentemente a Proposição 2.142 garante que $f'(c) = 0$.

■

Geometricamente o Teorema de Rolle garante que se f é contínua em $[a\,,b]$ e diferenciável em $]a\,,b[$, se $f(a) = f(b)$, então em algum ponto $c \in]a\,,b[$ a tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $P = (c, f(c))$ é uma recta horizontal.



É consequência imediata do Teorema de Rolle que se f é uma função contínua num intervalo $[a\,,b]$ e diferenciável em $]a\,,b[$, entre dois zeros da função no intervalo $[a\,,b]$ existe, pelo menos, um zero da derivada. De facto, sejam c e d com $c < d$ dois zeros da função f em $[a,b]$. A hipótese garante que f é contínua em $[c,d]$, diferenciável em $]c,d[$ e que $f(c) = f(d)$. Logo, pelo Teorema de Rolle, temos que existe $\alpha \in]c,d[$ tal que $f'(\alpha) = 0$.

Acabámos de demonstrar o seguinte corolário do Teorema de Rolle:

Corolário 2.145.

Seja f uma função contínua num intervalo $[a\,,b]$ e diferenciável em $]a\,,b[$. Então entre dois zeros de f em $]a\,,b[$ existe pelo menos um zero de f'.

Corolário 2.146.

Seja f uma função contínua num intervalo $[a\,,b]$ e diferenciável em $]a\,,b[$. Sejam $c,d \in]a\,,b[$ dois zeros consecutivos de f'. Então em $]c\,,d[$ existe, no máximo, um zero de f.

Demonstração: Por contraposição vamos admitir que f pode ter mais do que um zero em $]c,d[$. Suponhamos que existem z_1, z_2 em $]c\,,d[$ tais que $f(z_1) = f(z_2) = 0$. Então, pelo Teorema de Rolle, existe $z \in]z_1\,,z_2[$ tal que $f'(z) = 0$, o que contraria o facto de c e d serem dois zeros consecutivos de f'.

■

O Teorema de Rolle e as duas consequências que referimos são utilizadas para localizar zeros de funções.

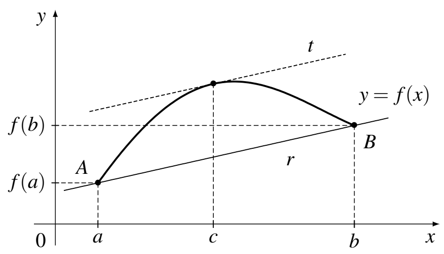
Exemplo 2.147.

Vamos provar que a função definida por $f(x) = \operatorname{sen} x - x$ tem um único zero, $x = 0$, no intervalo $[-\pi\,,\pi]$.

Temos que f é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$ tendo-se $f'(x) = \cos x - 1$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Consequentemente, no intervalo $[-\pi\,,\pi]$, f' tem um único zero $x = 0$.

Então $x = 0$ é um zero de f e de f'. Se existir $c \neq 0$ tal que $f(c) = 0$ e $c \in [-\pi\,,\pi]$, então, pelo Teorema de Rolle, entre 0 e c existe um zero de f' o que é falso.

O resultado que apresentamos a seguir é uma generalização do Teorema de Rolle e é habitualmente designado por Teorema de Lagrange. Este teorema garante que sendo f uma função contínua num intervalo $[a\,,b]$ e diferenciável em $]a\,,b[$, existe pelo menos um ponto $c \in]a\,,b[$ tal que a tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(c, f(c))$ é uma recta paralela ao segmento de recta de extremos $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$, ou seja, a tangente referida tem declive $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. A situação descrita está representada na figura seguinte:



Proposição 2.148. ***(Teorema de Lagrange)***

Seja f uma função contínua em $[a\,,b]$ e diferenciável em $]a\,,b[$. Então existe pelo menos um ponto $c \in]a\,,b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Demonstração: Consideremos a função g definida em $[a\,,b]$ por

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,x.$$

Então g é a diferença de duas funções contínuas em $[a,b]$ e diferenciáveis em $]a,b[$ e, portanto, é uma função contínua em $[a\,,b]$ e diferenciável em $]a\,,b[$.

Uma vez que

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot a \\ &= \frac{bf(a)-af(a)-af(b)+af(a)}{b-a} \\ &= \frac{bf(a)-af(b)}{b-a} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g(b) &= f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot b \\ &= \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}, \end{aligned}$$

o Teorema de Rolle garante a existência de pelo menos um ponto $c \in]a\,,b[$ tal que $g'(c) = 0$. Atendendo a que, pelas propriedades das funções diferenciáveis, temos

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,,$$

para todo o $x \in]a\,,\,b[$, vem

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Mas $g'(c) = 0$ e, portanto, obtemos

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0\,,$$

ou seja,

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

como pretendíamos. ■

Observação 2.149.

1. Suponhamos que a função f contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$ é tal que $f(a) = f(b)$. Pelo Teorema de Lagrange existe, pelo menos um ponto $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$, conforme nos garante o Teorema de Rolle. Consequentemente, o Teorema de Lagrange é uma generalização do Teorema de Rolle.
2. Como $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ é o declive da recta que passa pelos pontos $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$ temos

que a tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(c, f(c))$ é uma recta paralela à recta que passa pelos pontos A e B.

3. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e f uma função contínua em I e diferenciável no interior de I. Sejam $x_1, x_2 \in I$, arbitrários com ,$x_1 \neq x_2$.

   Admitamos, sem perda de generalidade, que $x_1 < x_2$. Então f é contínua em $[x_1, x_2]$ e diferenciável em $]x_1, x_2[$ e o Teorema de Lagrange garante que existe $w \in]x_1, x_2[$ tal que $f'(w) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, ou seja, $f'(w)(x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1)$, o que é equivalente a

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) f'(w) \, . \tag{2.14}$$

   Utilizando a igualdade (2.14), vamos ver que o sinal de f' no interior de I determina a monotonia de f em I.

   (a) Admitamos que se tem $f'(w) = 0$, para todo o $w \in \mathrm{int}(I)$.

   Sejam $x_1, x_2 \in I$, arbitrários, tais que $x_1 \neq x_2$.

   Resulta da igualdade (2.14) que $f(x_1) - f(x_2) = 0 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

   Dada a arbitrariedade de x_1, x_2 podemos concluir que, para todos os $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ tem-se $f(x_1) = f(x_2)$ e, portanto, f é constante em I.

   Acabámos de provar que **se f' é nula no interior de I, então f é constante em I.**

   (b) Admitamos que se tem $f'(w) \geq 0$, para todo o $w \in \mathrm{int}(I)$.

   Sejam $x_1, x_2 \in I$, arbitrários, tais que $x_1 > x_2 \Longleftrightarrow x_1 - x_2 > 0$. Neste caso, o segundo membro da igualdade (2.14) é não negativo, uma vez que é o produto de um número positivo por um número não negativo. Consequentemente, temos $f(x_1) \geq f(x_2)$.

   Dada a arbitrariedade de x_1, x_2 podemos concluir que, para todos os $x_1, x_2 \in I$, se $x_1 > x_2$, então $f(x_1) \geq f(x_2)$ o que permite concluir que f é crescente em I.

   Acabámos de provar que **se f' é não negativa no interior de I, então f é crescente em I.**

   (c) Admitamos que se tem $f'(w) \leq 0$, para todo o $w \in \mathrm{int}(I)$.

   Sejam $x_1, x_2 \in I$, arbitrários, tais que $x_1 > x_2 \Longleftrightarrow x_1 - x_2 > 0$. Neste caso, o segundo membro da igualdade (2.14) é não positivo, uma vez que é o produto de um número positivo por um número não positivo. Consequentemente, temos $f(x_1) \leq f(x_2)$.

   Dada a arbitrariedade de x_1, x_2 podemos concluir que, para todos os $x_1, x_2 \in I$, se $x_1 > x_2$, então $f(x_1) \leq f(x_2)$ o que permite concluir que f é decrescente em I.

   Acabámos de provar que **se f' é não positiva no interior de I, então f é decrescente em I.**

   (d) Admitamos que se tem $f'(w) > 0$, para todo o $w \in \mathrm{int}(I)$.

   Sejam $x_1, x_2 \in I$, arbitrários, tais que $x_1 > x_2 \Longleftrightarrow x_1 - x_2 > 0$. Neste caso, o segundo membro da igualdade (2.14) é positivo, uma vez que é o produto de dois números positivos. Consequentemente, temos $f(x_1) > f(x_2)$.

   Dada a arbitrariedade de x_1, x_2 podemos concluir que, para todos os $x_1, x_2 \in I$, se $x_1 > x_2$, então $f(x_1) > f(x_2)$ o que permite concluir que f é estritamente crescente em I.

   Acabámos de provar que **se f' é positiva no interior de I, então f é estritamente crescente em I.**

   (e) Admitamos que se tem $f'(w) < 0$, para todo o $w \in \mathrm{int}(I)$.

   Sejam $x_1, x_2 \in I$, arbitrários, tais que $x_1 > x_2 \Longleftrightarrow x_1 - x_2 > 0$. Neste caso, o segundo membro da igualdade (2.14) é negativo, uma vez que é o produto de um número positivo por um número negativo. Consequentemente, temos $f(x_1) < f(x_2)$.

   Dada a arbitrariedade de x_1, x_2 podemos concluir que, para todos os $x_1, x_2 \in I$, se $x_1 > x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$ o que permite concluir que f é estritamente decrescente em I.

   Acabámos de provar que **se f' é negativa no interior de I, então f é estritamente decrescente em I.**

Concluímos então que, nas condições do Teorema de Lagrange, o sinal de f' num intervalo aberto I dá-nos informação sobre a monotonia de f em I.

A proposição que apresentamos a seguir é habitualmente designada por Teorema de Cauchy e generaliza o Teorema de Lagrange. Do Teorema de Cauchy deduz-se uma regra muito útil no cálculo de limites que é usualmente designada por Regra de Cauchy.

Proposição 2.150. ***(Teorema de Cauchy)***

Sejam f, g duas funções contínuas em $[a\,, b]$ e diferenciáveis em $]a\,, b[$. Se $g'(x) \neq 0$, para todo o $x \in]a\,, b[$, então existe pelo menos um ponto $c \in]a\,, b[$ tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Demonstração: Consideremos a função h definida em $[a\,, b]$ por

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x) \, .$$

Não é difícil verificar que a função h é contínua em $[a\,, b]$, diferenciável em $]a\,, b[$ e que $h(a) = h(b)$. Então, o Teorema de Rolle garante a existência de $c \in]a\,, b[$ tal que $h'(c) = 0$.

Pelas propriedades das funções diferenciáveis temos, para todo o $x \in]a, b[$,

$$h'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a))f'(x) \, .$$

Consequentemente, $h'(c) = (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c)$ pelo que temos

$$(f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0 \, , \tag{2.15}$$

Atendendo à hipótese temos $g'(c) \neq 0$.

Por outro lado, uma vez que $g'(x) \neq 0$, para todo o $x \in]a,b[$, temos $g(a) \neq g(b)$. De facto se tivermos $g(a) = g(b)$ podemos concluir, pelo Teorema de Rolle, que existe $c \in]a,b[$ tal que $g'(c) = 0$, o que contraria a hipótese.

Consequentemente a igualdade (2.15) é equivalente à igualdade pretendida. ∎

Utilizando o Teorema de Cauchy podemos estabelecer uma regra que se revela de grande utilidade no cálculo de limites e que é habitualmente conhecida por **Regra de Cauchy**. Em cada uma das proposições que se seguem apresentamos o seu enunciado para os casos seguintes: limite lateral à direita num ponto de acumulação à direita; limite lateral à esquerda num ponto de acumulação à esquerda; limite bilateral num ponto interior; limites no infinito. A demonstração destas proposições sai do âmbito deste curso, pelo que é omitida. Pode ser consultada em "Introdução à Análise Matemática", J. Campos Ferreira, Fundação Calouste Gulbenkian, 5ª edição, pág 386.

Proposição 2.151. *Sejam $a,b \in \mathbb{R}$ tais que $a<b$ e f e g duas funções definidas no intervalo $]a,b[$ tais que $g(x) \neq 0$, para todo o $x \in]a,b[$.*

Suponhamos que f e g são diferenciáveis em $]a,b[$ e que $g'(x) \neq 0$, para todo o $x \in]a,b[$.

Se os limites $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)$ são ambos nulos ou são ambos infinitos e existe o limite

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

então também existe o limite

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

e temos

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemplo 2.152. Vamos calcular o limite $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{e^{1/x}}$, utilizando a Regra de Cauchy.

Sendo f e g definidas em $\mathbb{R}^+$, respectivamente, por $g(x)=e^{1/x}$ e $f(x)=\ln x$ temos que $g(x)\neq 0$ para todo o $x\in\mathbb{R}^+$. Para além disso, f e g são diferenciáveis neste intervalo, e $g'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{1/x} \neq 0$, para todo o $x\in\mathbb{R}^+$. Uma vez que:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$;
- $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty$;
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}e^{1/x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-x}{e^{1/x}} = 0$

temos, pela Regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{e^{1/x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{(e^{1/x})'} = 0.$$

Proposição 2.153. *Sejam $a,b \in \mathbb{R}$ tais que $a<b$ e f e g duas funções definidas no intervalo $]a,b[$ tais que $g(x) \neq 0$, para todo o $x \in]a,b[$.*

Suponhamos que f e g são diferenciáveis em $]a,b[$ e que $g'(x) \neq 0$, para todo o $x \in]a,b[$.

Se os limites $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to b^-} g(x)$ são ambos nulos ou são ambos infinitos e existe o limite

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

então também existe o limite

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$$

e temos

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemplo 2.154. Vamos calcular o limite $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{e^{x-1}-1}{\sqrt{1-x^2}}$, utilizando a Regra de Cauchy.

Sendo f e g definidas em $]-1,1[$, respectivamente, por $f(x)=e^{x-1}-1$ e $g(x)=\sqrt{1-x^2}$, temos que $g(x)\neq 0$, para todo o $x\in]-1,1[$. Para além disso, f e g são diferenciáveis neste intervalo, e $g'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \neq 0$, para todo o $x\in]-1,1[$. Uma vez que:

- $\lim\limits_{x\to 1^-} (e^{x-1}-1) = 0$;
- $\lim\limits_{x\to 1^-} \sqrt{1-x^2} = 0$;
- $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{e^{x-1}}{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{-\sqrt{1-x^2}\,e^{x-1}}{x} = 0$

temos, pela Regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{e^{x-1}-1}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(e^{x-1}-1\right)'}{(\sqrt{1-x^2})'} = 0.$$

No caso em que f e g são funções definidas num intervalo aberto $I=]a,b[$, e $c\in\mathbb{R}$ é tal que $c\in I$, a Regra de Cauchy pode enunciar-se do modo seguinte:

Proposição 2.155. *Sejam $I=]a,b[\subset\mathbb{R}$ um intervalo aberto, c um ponto de I e f,g duas funções definidas em I tais que $g(x)\neq 0$, para todo o $x\in I\backslash\{c\}$. Admitamos que f e g são diferenciáveis em $I\backslash\{c\}$. Se $g'(x)\neq 0$, para todo o $x\in I\backslash\{c\}$ e f e g tendem ambas para zero ou tendem ambas para infinito quando x tende para c e existe o limite $\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, então existe o limite $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ e temos*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemplo 2.156. 1. Vamos calcular o limite $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{arcsen} x}$, utilizando a Regra de Cauchy.

Sendo f e g definidas em $]-1,1[$, respectivamente, por $f(x)=x$ e $g(x)=\operatorname{arcsen} x$ temos que $g(x)\neq 0$, para todo o $x\in]-1,1[$. Para além disso, f e g são diferenciáveis neste intervalo, e $g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \neq 0$, para todo o $x\in]-1,1[$. Uma vez que:

- $\lim_{x\to 0} x = 0$;
- $\lim_{x\to 0} \operatorname{arcsen} x = 0$;
- $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1$

temos, pela Regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{arcsen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x)'}{(\operatorname{arcsen} x)'} = 1\,.$$

2. Vamos calcular o limite $\lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}-x}{(x-1)^2}$.

   Para o cálculo deste limite utilizaremos a Regra de Cauchy duas vezes consecutivas.

   Sejam f e g as funções definidas por $f(x) = e^{x-1} - x$ e $g(x) = (x-1)^2$. As funções f e g são funções de domínio $\mathbb{R}$ e, portanto, definidas num qualquer intervalo aberto I que contenha 1 como ponto interior. Além disso, $g(x) \neq 0$ para todo o $x \neq 1$ e, portanto, $g(x) \neq 0$, para todo o $x \in I \setminus \{1\}$. Por outro lado f e g são diferenciáveis em $\mathbb{R}$ e, portanto, são diferenciáveis no intervalo I. Por outro lado $g'(x) = 2(x-1) \neq 0$, para todo o $x \neq 1$ e, portanto, $g'(x) \neq 0$, para todo o $x \in I \setminus \{1\}$. Como f e g tendem ambas para zero quando x tende para 1 estamos nas condições da Regra de Cauchy. Para aplicar esta regra temos de averiguar se existe o limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{(e^{x-1}-x)'}{((x-1)^2)'} = \lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}-1}{2(x-1)}.$$

   Não é difícil verificar que as funções φ e ψ definidas, respectivamente, por $\varphi(x) = e^{x-1} - 1$ e $\psi(x) = 2(x-1)$ estão nas condições da Regra de Cauchy e, para aplicar esta regra, temos de averiguar se existe o limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{(e^{x-1}-1)'}{(2(x-1))'} = \lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

   Então, pela Regra de Cauchy, temos

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}-1}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

   Utilizando uma vez mais a Regra de Cauchy temos

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}-x}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}-1}{2(x-1)} = \frac{1}{2}.$$

Observação 2.157. Notemos que se não existir o limite $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ não podemos aplicar a Regra de Cauchy. No entanto, isso não significa que não exista o limite $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Por exemplo sendo f dada por $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ e g dada por $g(x) = x$ temos que $g(x) \neq 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Por outro lado temos que f e g são funções diferenciáveis em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Além disso temos

$g'(x) \neq 0$, para todo o $x \neq 0$, pelo que f e g estão nas condições da Regra de Cauchy. O limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(x^2 \cos \frac{1}{x}\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \left(2x \cos \frac{1}{x} + \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)$$

não existe. Então a Regra de Cauchy nada permite concluir sobre o limite $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{x}$.

Como $\frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{x} = x \cos \frac{1}{x}$ e $\lim_{x\to 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$, concluímos que o limite dado é igual a zero.

No caso em que x tende para $+\infty$ a Regra de Cauchy pode ser enunciada do modo seguinte:

Proposição 2.158. *Sejam f e g duas funções definidas num intervalo $]a\,,+\infty[$ tais que $g(x) \neq 0$ para todo o $x \in]a\,,+\infty[$. Admitamos que f e g são diferenciáveis em $]a\,,+\infty[$ e que $g'(x) \neq 0$, para todo o $x \in]a\,,+\infty[$.*

Se f e g tendem ambas para zero ou tendem ambas para infinito quando x tende para $+\infty$ e existe o limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

então também existe o limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

e temos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Exemplo 2.159. Vamos calcular o limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccotg} x}$, utilizando a Regra de Cauchy.

Sendo f e g definidas, respectivamente, por $f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ e $g(x) = \operatorname{arccotg} x$ temos que f e g estão definidas em $\left]\frac{\pi}{2}\,,+\infty\right[$ e $g(x) \neq 0$ para todo o $x \in \left]\frac{\pi}{2}\,,+\infty\right[$. Por outro lado f e g são diferenciáveis neste intervalo, e $g'(x) = -\frac{1}{1+x^2} \neq 0$, para todo o $x \in \left]\frac{\pi}{2}\,,+\infty\right[$. Como f e g tendem ambas para zero quando $x \to +\infty$, f e g satisfazem as condições para aplicar a Regra de Cauchy. Para aplicar esta regra temos de averiguar se existe o limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'}{(\operatorname{arccotg} x)'}\,.$$

Uma vez que

$$\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)' = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{1+\frac{1}{x}} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}$$

e $(\operatorname{arccotg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$ temos

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'}{(\operatorname{arccotg} x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{-1}{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{x^2+x} = 1.$$

Então, pela Regra de Cauchy, temos

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccotg} x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'}{(\operatorname{arccotg} x)'} = 1.$$

Para o caso em que x tende para $-\infty$ temos:

Proposição 2.160. *Sejam f e g duas funções definidas num intervalo $]-\infty, a[$ tais que $g(x) \neq 0$ para todo o $x \in]-\infty, a[$. Admitamos que f e g são diferenciáveis em $]-\infty, a[$ e que $g'(x) \neq 0$, para todo o $x \in]-\infty, a[$.*

Se f e g tendem ambas para zero ou tendem ambas para infinito quando x tende para $-\infty$ e existe o limite

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

então também existe o limite

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

e temos

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemplo 2.161. Vamos calcular o limite

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)}{\frac{1}{x}},$$

utilizando a Regra de Cauchy.

Consideremos as funções f e g definidas em $\mathbb{R}^-$ por $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ e $g(x) = \dfrac{1}{x}$, respectivamente. Temos que f e g são contínuas e diferenciáveis em $\mathbb{R}^-$, $g(x) \neq 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}^-$ e $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \neq 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}^-$.

Uma vez que:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$;

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\frac{1}{x^2-x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2-x} = 1$;

temos, pela Regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = 1\,.$$

Além da Regra de Cauchy, é também útil para o levantamento de indeterminações do tipo $\dfrac{0}{0}$ a regra que apresentamos a seguir e que é por vezes designada por **Regra de L'Hôpital**. Esta regra pode ser útil em alguns casos em que não é possível aplicar a Regra de Cauchy.

Proposição 2.162. *Sejam f, g duas funções definidas num intervalo aberto I e $c \in I$. Admitamos que $g(x) \neq 0$ para todo o $x \in I\backslash\{c\}$ e que f e g são contínuas em c e $f(c) = g(c) = 0$. Se $f'(c)$ e $g'(c)$ são ambas finitas e $g'(c) \neq 0$, então*

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Consideremos as funções f e g tais que $g(x) = e^{2x} - 1$ e f é definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} & se \quad x \neq 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \end{cases}$$

Pretendemos calcular $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Não é difícil verificar que as funções f e g satisfazem as condições da Regra de Cauchy.

Mas, uma vez que

$$\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to0}\frac{2x\operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{2e^{2x}} = \lim_{x\to0}\left(\frac{x\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{e^{2x}} - \frac{1}{2}\frac{\cos\frac{1}{x}}{e^{2x}}\right),$$

e este limite não existe não podemos aplicar a Regra de Cauchy.

Seja I um aberto de $\mathbb{R}$ que contém a origem. As funções f e g são ambas contínuas em $x = 0$ e $f(0) = g(0) = 0$.

Como $g'(0) = (2e^{2x})_{x=0} = 2$ e

$$f'(0) = \lim_{h\to0}\frac{h^2\operatorname{sen}\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to0} h\operatorname{sen}\frac{1}{h} = 0$$

podemos aplicar a Regra de L'Hôpital e temos

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{e^{2x}-1}=\frac{f'(0)}{g'(0)}=\frac{0}{2}=0.$$

2.7.2 Extremos locais de uma função real de variável real

A proposição que apresentamos a seguir permite-nos utilizar o comportamento da primeira derivada de uma função contínua num intervalo para a determinação de extremantes locais nesse intervalo.

Proposição 2.163.

Seja $f: D_f\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função contínua em $[a\,,b]\subset D_f$ e diferenciável em $]a\,,b[$ excepto possivelmente num ponto $c\in]a\,,b[$.

(i) Se $f'(x)>0$, para todo o $x<c$, e $f'(x)<0$, para todo o $x>c$, então f admite em c um máximo relativo;

(ii) Se $f'(x)<0$, para todo o $x<c$, e $f'(x)>0$, para todo o $x>c$, então f admite em c um mínimo relativo.

Demonstração: Vamos demonstrar a condição *(i)*. A demonstração de *(ii)* é deixada como exercício.

(i) Utilizando a Observação 2.149 temos que f é estritamente crescente em $[a\,,c]$ e estritamente decrescente em $[c\,,b]$. Então $f(x)<f(c)$, para todo o $x\in[a\,,b]$, $x\neq c$. Como f é contínua em $x=c$ podemos concluir que f admite em c um máximo relativo.

■

Observação 2.164.

Resulta da Proposição 2.163 que os extremos relativos de uma função contínua num intervalo ocorrem nos pontos onde a primeira derivada muda de sinal independentemente de nesses pontos a derivada existir ou não. Por outro lado, a Proposição 2.142 garante que se a derivada existir e for finita, então ela deverá ser igual a zero.

Note-se também que, como vimos anteriormente, no caso em que a função não é contínua num ponto c (e, portanto, não é diferenciável em c) tem de ser feito um estudo local, pois pode existir extremo ou não.

Exemplo 2.165.

1. Seja f uma função definida por $f(x)=4x+\dfrac{1}{x}$, para todo o $x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

   Temos $f'(x)=\dfrac{4x^2-1}{x^2}$, para todo o $x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Como o denominador desta fracção é positivo temos que o sinal de f' coincide com o sinal de $4x^2-1$.

   Temos então $f'(x)>0$ se $x\in\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ e $f'(x)<0$ se $x\in\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[\backslash\{0\}$ e, portanto, f é estritamente crescente em $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]$ e em $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ e estritamente decrescente em $\left[-\frac{1}{2},0\right[$ e em $\left]0,\frac{1}{2}\right]$.

   Como f é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ e, numa vizinhança de $-\frac{1}{2}$, f' é positiva à esquerda de $-\frac{1}{2}$ e negativa à direita de $-\frac{1}{2}$, f admite em $x=-\frac{1}{2}$ um máximo relativo $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-4$. Por outro lado como, numa vizinhança de $\frac{1}{2}$, f' é positiva à direita de $\frac{1}{2}$ e negativa à esquerda de $\frac{1}{2}$ temos que f admite em $x=\frac{1}{2}$ um mínimo relativo $f\left(\frac{1}{2}\right)=4$.

2. Consideremos a função f definida por

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{se} \quad x\geq 0\\ -x & \text{se} \quad x<0\end{cases}$$

   Como $f'(0)$ não existe temos

$$f'(x)=\begin{cases}2x & \text{se} \quad x>0\\ -1 & \text{se} \quad x<0\end{cases}$$

   Mas, uma vez que f é contínua em $x=0$ e, numa vizinhança de $x=0$, f' é positiva à direita de $x=0$ e negativa à esquerda de $x=0$, temos, pela Proposição 2.163, que em $x=0$ f admite um mínimo relativo $f(0)=0$.

3. Vamos determinar os extremos locais da função f definida em $\mathbb{R}^-$ por $f(x)=x^2\ln(-x)$.

   Temos, para todo o $x\in]-\infty,0[$,

$$\begin{aligned}f'(x)&=2x\ln(-x)+x^2\cdot\frac{1}{x}\\&=2x\ln(-x)+x\\&=x(2\ln(-x)+1),\end{aligned}$$

   pelo que, no intervalo considerado,

$$\begin{aligned}f'(x)=0&\iff x(2\ln(-x)+1)=0\\&\iff \underbrace{x=0}_{\text{Condição impossível em }]-\infty,0[}\quad\vee\ 2\ln(-x)+1=0\\&\iff \ln(-x)=-\frac{1}{2}\\&\iff -x=e^{-1/2}\\&\iff x=-e^{-1/2}.\end{aligned}$$

   Uma vez que

$$\begin{aligned}2\ln(-x)+1>0\wedge x\in]-\infty,0[&\iff \ln(-x)>-\frac{1}{2}\wedge x\in]-\infty,0[\\&\iff -x>e^{-1/2}\wedge x\in]-\infty,0[\\&\iff x<-e^{-1/2}.\end{aligned}$$

   podemos construir o quadro seguinte, onde se apresenta o estudo do sinal da primeira derivada de f.

	$-\infty$	$e^{-1/2}$	0
x	$-$	$-$	$-$
$2\ln(-x)+1$	$+$	0	$-$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	mín. local	$\nearrow$

Da análise do quadro anterior e, atendendo a que f é contínua em $x=-e^{-1/2}$, resulta que a função f tem um mínimo local

$$f\left(-e^{-1/2}\right)=\left(-e^{-1/2}\right)^2\ln\left(e^{-1/2}\right)=-\frac{1}{2e}$$

em $x=-e^{-1/2}$.

4. Consideremos a função f de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ definida por $f(x)=xe^{1/x^2}$ e vamos estudar f quanto à existência de extremos locais.

   Para todo o $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{1/x^2}+x\left(-\frac{2}{x^3}\right)e^{1/x^2} \\ &= e^{1/x^2}-\frac{2}{x^2}e^{1/x^2} \\ &= e^{1/x^2}\left(1-\frac{2}{x^2}\right) \\ &= e^{1/x^2}\times\frac{x^2-2}{x^2}. \end{aligned}$$

   Temos então, para todo o $x\in\setminus\{0\}$,

$$\begin{aligned} f'(x)=0 &\iff e^{1/x^2}\times\frac{x^2-2}{x^2}=0 \\ &\iff \underbrace{e^{1/x^2}=0}_{\text{Condição impossível em }\mathbb{R}\setminus\{0\}} \vee \frac{x^2-2}{x^2}=0 \\ &\iff x=\sqrt{2}\vee x=-\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Podemos resumir no quadro seguinte o estudo do comportamento da primeira derivada de f.

	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	$+\infty$
e^{1/x^2}	$+$	$+$	$+$		$+$	$+$	$+$
$\frac{x^2-2}{x^2}$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
f'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	máx. local	$\searrow$		$\searrow$	mín. local	$\nearrow$

Da análise do quadro anterior e, atendendo a que f é contínua em $x=-\sqrt{2}$ e em $x=\sqrt{2}$, resulta que a função f tem um máximo local $f(-\sqrt{2})=-\sqrt{2e}$ em $x=-\sqrt{2}$ e um mínimo local $f(\sqrt{2})=\sqrt{2e}$ em $x=\sqrt{2}$.

Vimos que sendo f uma função diferenciável definida numa vizinhança de um ponto c, uma condição necessária para que f admita em c um extremo relativo é que c seja uma raiz da primeira derivada de f.

Definição 2.166.
Chamamos **ponto crítico** ou **ponto de estacionaridade** de f a toda a raiz da primeira derivada de f.

A Proposição 2.163 garante-nos que se c é um ponto de estacionaridade de f, f é diferenciável numa vizinhança de c e f' muda de sinal em c, então c é um extremante local de f.

A proposição que apresentamos a seguir estabelece uma condição suficiente para que um ponto de estacionaridade de f seja um extremante local. Esta condição depende apenas do sinal da segunda derivada no ponto de estacionaridade.

Proposição 2.167.
Seja c um ponto crítico de f num intervalo $]a\,,b[$. Admitamos que f é contínua em $]a\,,b[$ e f'' existe e é finita em todo o ponto de $]a\,,b[$. Então verificam-se as condições seguintes:

(i) se $f''(c)>0$, então f admite em c um mínimo relativo;

(ii) se $f''(c)<0$, então f admite em c um máximo relativo.

Demonstração: (i) Uma vez que, por hipótese, c é um ponto crítico de f em $]a,b[$, temos $f'(c)=0$ e, portanto,

$$f''(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(c+h)-f'(c)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(c+h)}{h}.$$

Como, por hipótese, $f''(c)>0$, o Corolário 2.60 garante que o quociente $\frac{f'(c+h)}{h}$ é positivo em alguma vizinhança da origem. Consequentemente, existe $\delta>0$ tal que, para todo o $h\in\mathbb{R}$ tal que

$c+h \in]a,b[$, se $h \in]-\delta,\delta[$, então $\dfrac{f'(c+h)}{h} > 0$, donde resulta que $f'(c+h)$ e h têm o mesmo sinal e, portanto, podemos concluir que f' é negativa à esquerda de c e positiva à direita de c.

Atendendo à hipótese e à Proposição 2.163 concluímos que f admite em c um mínimo relativo.

(ii) A demonstração de (ii) é análoga à de (i) e é deixada como exercício.

■

Exemplo 2.168.

1. Consideremos a função f definida por $f(x) = x\mathrm{e}^x$.

   Uma vez que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (1+x)\mathrm{e}^x$ temos que $x=-1$ é o único ponto crítico de f.

   Atendendo a que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = (2+x)\mathrm{e}^x$, temos $f''(-1) = \mathrm{e}^{-1} > 0$ e, portanto, f admite um mínimo local $f(-1) = -\mathrm{e}^{-1}$ em $x=-1$.

2. Determinar, se possível, os extremos locais e absolutos da função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{se} \quad x \le 1 \\ x & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

no conjunto $D = [-\sqrt{2}, 4]$.

Como f é contínua em D e D é compacto, o Teorema de Weierstrass garante que f atinge em D o seu máximo e o seu mínimo globais. São candidatos a extremantes:

(a) os extremos do intervalo;

(b) os pontos críticos de f em $]-\sqrt{2}, 4[$, isto é, os pontos de $]-\sqrt{2}, 4[$ onde f' se anula;

(c) os pontos de $]-\sqrt{2}, 4[$ onde f' não existe ou é infinita.

Como

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2-(1+h)^2-1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h^2-2h}{h} = -2$$

e

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h-1}{h} = +\infty$$

temos que não existe $f'(0)$. Utilizando as propriedades das funções diferenciaveis temos

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{se} \quad x < 1 \\ 1 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Consequentemente, temos $f'(x) = 0$ se e só $x = 0$.

São candidatos a extremantes locais em $]-\sqrt{2}, 4[$ os pontos: $x = -\sqrt{2}$, $x = 4$, $x = 0$, $x = 1$.

Como f' é positiva à direita de $x=1$ e negativa à esquerda de $x=1$, e f é contínua em $x=1$, temos que $x=1$ é um ponto de mínimo local.

Para determinar a natureza local do ponto crítico $x=0$ podemos fazer o estudo do sinal da segunda derivada neste ponto. Como

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{se} \quad x < 1 \\ 0 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

temos que f'' é negativa em $x=0$ e, portanto, $x=0$ é um ponto de máximo local.

Atendendo a que $f'(x) > 0$ em $]1, 4[$ temos que f é estritamente crescente em $[1, 4]$ e, uma vez que f é contínua em $x=4$, podemos concluir que $x=4$ é um ponto de máximo local.

Por outro lado, $f'(x) > 0$ em $]-\sqrt{2}, 0[$ e, portanto, f é estritamente crescente em $[-\sqrt{2}, 0]$ e, dado que f é contínua em $x=-\sqrt{2}$, concluímos que $x=-\sqrt{2}$ é um ponto de mínimo local.

Como $f(-\sqrt{2}) = 0$, $f(1) = 1$, $f(0) = 2$ e $f(4) = 4$ temos que f tem um mínimo absoluto igual a zero em $x=-\sqrt{2}$ e tem um máximo absoluto igual a 4 em $x=4$.

2.7.3 Concavidades. Pontos de inflexão

Definição 2.169.

Seja f uma função diferenciável num intervalo $]a, b[$. Dizemos que **o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em** $]a, b[$ se, para todo o $c \in]a, b[$, o gráfico de f está situado acima da tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$, isto é, sendo $x \in]a, b[$, $x \neq c$, $f(x)$ é superior à ordenada do ponto da tangente cuja abcissa é igual a x.

Dizemos que **o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em** $]a, b[$ se, para todo o $c \in]a, b[$, o gráfico de f está situado abaixo da tangente no ponto $(c, f(c))$, isto é, para todo o $x \in]a, b[$, $x \neq c$, $f(x)$ é inferior à ordenada do ponto da tangente cuja abcissa é igual a x.

Observação 2.170.

Uma vez que a tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$ tem por equação

$$y = f(c) + f'(c)(x-c),$$

temos que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]a, b[$ se, para todo o $c \in]a, b[$ e, para todo o $x \in]a, b[$, $x \neq c$,

$$f(x) > f(c) + f'(c)(x-c)$$

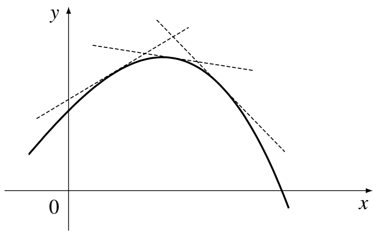
ou seja,

$$f(x) - f(c) > f'(c)(x-c) \; .$$

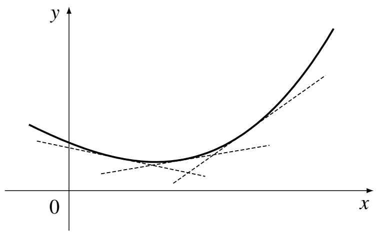
De modo análogo concluímos que o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]a, b[$ se para todo o $c \in]a, b[$ e, para todo o $x \in]a, b[$, $x \neq c$,

$$f(x) - f(c) < f'(c)(x-c).$$

Na figura que apresentamos a seguir estão representados um exemplo de uma função cujo gráfico tem a concavidade voltada para cima e um exemplo de uma função cujo gráfico tem a concavidade voltada para baixo.



Concavidade voltada para baixo



Concavidade voltada para cima

Vamos ver que podemos relacionar o sinal da segunda derivada de f com o sentido da concavidade do gráfico de f.

Proposição 2.171.

Seja f uma função diferenciável em $]a\,,b[$ tal que f'' existe e é finita em cada ponto de $]a\,,b[$.

(i) Se $f''(x) > 0$, para todo o $x \in]a\,,b[$, então o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]a\,,b[$;

(ii) Se $f''(x) < 0$, para todo o $x \in]a\,,b[$, então o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]a\,,b[$.

Demonstração: (i) Admitamos que $f''(x) > 0$, para todo o $x \in]a\,,b[$. Para provar que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]a\,,b[$ temos de provar que sendo $c \in]a\,,b[$ temos, para todo o $x \in]a\,,b[$, $x \neq c$,

$$f(x) - f(c) > f'(c)(x-c).$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $x > c$. Pelo Teorema de Lagrange (aplicado à função f no intervalo $[c\,,x]$) temos que, existe $\xi \in]c\,,x[$ tal que

$$f(x) - f(c) = f'(\xi)(x-c).$$

Então, subtraindo $f'(c)(x-c)$ a ambos os membros desta igualdade, temos

$$\begin{aligned} f(x) - f(c) - f'(c)(x-c) &= f'(\xi)(x-c) - f'(c)(x-c) \\ &= (f'(\xi) - f'(c))(x-c). \end{aligned}$$

Uma vez que a função f' está nas condições do Teorema de Lagrange no intervalo $[c\,,\xi]$ temos que existe $\eta \in]c\,,\xi[$ tal que

$$f'(\xi) - f'(c) = f''(\eta)(\xi - c).$$

Substituindo na igualdade anterior temos

$$f(x) - f(c) - f'(c)(x-c) = f''(\eta)(\xi - c)(x-c).$$

Como $f''(\eta) > 0$, por hipótese, e ξ, c e x são tais que $\xi - c > 0$ e $x - c > 0$ temos que

$$f(x) - f(c) - f'(c)(x-c) > 0$$

o que prova que

$$f(x) - f(c) > f'(c)(x-c)$$

como pretendíamos.

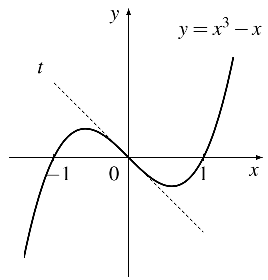
(ii) A demonstração de (ii) é análoga à anterior e é deixada como exercício.

■

Exemplo 2.172.

Consideremos a função f definida por $f(x) = x^3 - x$.

Como $f''(x) = 6x$ temos $f''(x) > 0$ se $x > 0$ e $f''(x) < 0$ se $x < 0$. Então o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima quando $x > 0$ e tem a concavidade voltada para baixo quando $x < 0$. Em $x = 0$ a segunda derivada muda de sinal e o gráfico da função f muda o sentido da concavidade. Dizemos que $(0\,,f(0))$ é um ponto de inflexão do gráfico de f.



Note-se que a tangente ao gráfico de f no ponto $(0\,,0)$ atravessa o gráfico, isto é, os pontos do gráfico à direita de $(0\,,0)$ estão situados acima da tangente e os pontos à direita de $(0\,,0)$ estão situados abaixo da tangente.

Definição 2.173.

Seja f uma função definida num intervalo $]a\,,b[$ duas vezes diferenciável em $]a\,,b[$ excepto possivelmente num ponto $c \in]a\,,b[$. Dizemos que o ponto $(c\,,f(c))$ é um **ponto de inflexão** do gráfico de f se a segunda derivada de f muda de sinal em $x = c$, isto é, se $f''(x) > 0$ se $x \in]a\,,c[$ e $f''(x) < 0$ se $x \in]c\,,b[$, ou $f''(x) < 0$ se $x \in]a\,,c[$ e $f''(x) > 0$ se $x \in]c\,,b[$.

Exemplo 2.174.

Consideremos a função definida por $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$. Temos $f'(x) = -\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ e $f''(x) = \dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$ para $x \neq 0$, pelo que $f''(x) > 0$ se $x > 0$ e $f''(x) < 0$ se $x < 0$. Então $(0\,,\,1)$ é um ponto de inflexão do gráfico de f.

Observe-se que $x = c$ pode ser a abcissa de um ponto de inflexão do gráfico de f e, no entanto, f'' não existir ou não ser finita em $x = c$. Se f'' é finita em $x = c$ e $(c\,,\,f(c))$ é ponto de inflexão do gráfico de f, então $f''(c) = 0$.

2.7.4 Assimptotas ao gráfico de uma função

Definição 2.175.

Seja f uma função cujo domínio contém um intervalo da forma $]a\,,+\infty[$, para algum $a \in \mathbb{R}$. Dizemos que a recta de equação $y = mx + b$ é uma **assimptota ao gráfico de f à direita** (ou quando $x \to +\infty$) se o limite $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - mx - b) = 0$.

Se o domínio de f contém um intervalo da forma $]-\infty\,, a[$ para algum $a \in \mathbb{R}$, dizemos que a recta de equação $y = mx + b$ é uma **assimptota ao gráfico de f à esquerda** (ou quando $x \to -\infty$) se o limite $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - mx - b) = 0$.

Suponhamos que a recta de equação $y = mx + b$ é uma assimptota ao gráfico de f à direita. Então temos

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - mx - b) = 0,$$

o que significa que existe uma função φ definida no domínio de f tal que

$$\varphi(x) = f(x) - mx - b \tag{2.16}$$

e $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = 0$.

Atendendo à igualdade (2.16) temos, para todo o $x \neq 0$,

$$\frac{f(x)}{x} = m + \frac{b}{x} + \frac{\varphi(x)}{x}.$$

Desta igualdade resulta que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(m + \frac{b}{x} + \frac{\varphi(x)}{x}\right) = m.$$

Por outro lado, resulta de (2.16) que $f(x) - mx = b + \varphi(x)$ e, portanto,

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty}(b + \varphi(x)) = b.$$

Reciprocamente admitamos que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = m$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - mx) = b$. Então

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - mx - b) = 0$$

o que garante que a recta de equação $y = mx + b$ é uma assimptota ao gráfico de f à direita.

Acabámos de provar a seguinte proposição que caracteriza as assimptotas à direita.

Proposição 2.176.

Seja f uma função cujo domínio contém um intervalo da forma $]a\,,+\infty[$ para algum $a \in \mathbb{R}$. A recta de equação $y = mx + b$ é uma assimptota ao gráfico de f à direita se e só se existem e são finitos os limites $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - mx)$ e temos

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$$

e

$$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - mx).$$

Para as assimptotas à esquerda temos um resultado análogo cuja demonstração é deixada como exercício.

Proposição 2.177.

Seja f uma função cujo domínio contém um intervalo da forma $]-\infty\,, a[$, para algum $a \in \mathbb{R}$. A recta de equação $y = mx + b$ é uma assimptota ao gráfico de f à esquerda se e só se existem e são finitos os limites $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ e $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - mx)$ e temos

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$$

e

$$b = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - mx).$$

Exemplo 2.178.

Consideremos a função definida por $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x + \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x + \operatorname{arctg} x - x) = \lim_{x\to+\infty}(\operatorname{arctg} x) = \frac{\pi}{2}$$

Portanto a recta de equação

$$y = x + \frac{\pi}{2}$$

e uma assimptota ao gráfico de f à direita.

Por outro lado,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x + \operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

e

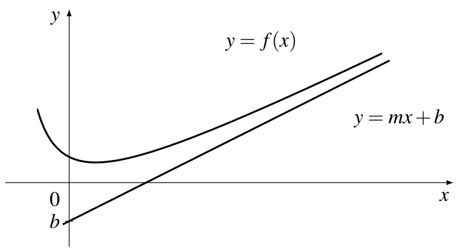
$$\lim_{x\to-\infty}(x + \operatorname{arctg} x - x) = -\frac{\pi}{2}$$

pelo que a recta de equação
$$y = x - \frac{\pi}{2}$$
é uma assimptota ao gráfico de f à esquerda.

Observação 2.179.

Dizer que a recta r de equação $y = mx + b$ é uma assimptota ao gráfico de f à direita significa dizer que a distância de cada ponto $P = (x, f(x))$ do gráfico de f à recta de equação $y = mx + b$ tende para zero quando $x \to +\infty$. De facto, basta atender a que a distância de P a r é dada por
$$\frac{|f(x) - mx - b|}{\sqrt{1+m^2}}$$
e temos
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|f(x) - mx - b|}{\sqrt{1+m^2}} = 0$$
se e só se
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx - b) = 0.$$

Geometricamente temos a situação representada na figura seguinte:



Para a assimptota à esquerda temos uma interpretação análoga.

Observemos que no caso em que $m = 0$ e $b \in \mathbb{R}$ a assimptota é a recta de equação $y = b$ que é uma recta paralela ao eixo das abcissas. Diz-se então que se trata de uma **assimptota horizontal**.

Definição 2.180.

Sejam $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e a um ponto de acumulação de D_f. A recta de equação $x = a$ diz-se uma **assimptota vertical** ao gráfico de f se se verifica uma das condições seguintes: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$.

Exemplo 2.181.

1. O gráfico da função definida por $f(x) = \operatorname{tg} x$ admite como assimptota vertical toda a recta de equação
$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}.$$

De facto, para todo o $k \in \mathbb{Z}$,
$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)^+} \operatorname{tg} x = -\infty$$
e
$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)^-} \operatorname{tg} x = +\infty.$$

2. A recta $x = 0$ é uma assimptota vertical ao gráfico da função f definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = \ln x$ já que 0 é um ponto de acumulação de $\mathbb{R}^+$ e
$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$$

2.7.5 Esboço do gráfico de uma função

Vamos utilizar os resultados das secções anteriores para fazermos o esboço do gráfico de uma função.

Para obter um esboço do gráfico de uma função devemos ter em atenção:

(1) o domínio da função;

(2) os pontos de intersecção com os eixos;

(3) o sinal da função;

(4) as assimptotas do gráfico;

(5) os intervalos de monotonia e os extremantes locais;

(6) os pontos de inflexão e as concavidades.

Exemplo 2.182.

Vamos fazer um esboço do gráfico da função f definida por $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.

A função tem domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Uma vez que $\dfrac{x^2+1}{x} = 0$ é uma equação impossível e $x = 0$ não pertence ao domínio da função o seu gráfico não intersecta os eixos coordenados.

Como $x^2 + 1 > 0$, para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, o sinal de f é o sinal do denominador. Então $f(x) > 0$ se $x > 0$ e $f(x) < 0$ se $x < 0$ o que significa que, à direita do eixo OY o gráfico de f está situado acima do eixo OX e à esquerda do eixo OY o gráfico de f está situado abaixo do eixo OX.

Como 0 é um ponto de acumulação do domínio de f,
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{x} = +\infty$$
e
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{x} = -\infty$$
temos que a recta de equação $x = 0$ é uma assimptota vertical ao gráfico de f.

Vamos averiguar se o gráfico de f admite assimptota não vertical à direita.

Uma vez que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2}=1$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-x\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2+1}{x}=0\end{aligned}$$

a recta de equação $y=x$ é uma assimptota do gráfico de f à direita.

Como

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$$

e

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=0$$

temos que a recta de equação $y=x$ é também uma assimptota do gráfico de f à esquerda.

Para fazer o estudo dos intervalos de monotonia vamos fazer o estudo da primeira derivada de f. Temos, para todo o $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$,

$$f'(x)=\frac{2x^2-x^2-1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$$

Como o denominador de $f'(x)$ é positivo em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ temos que o sinal de f' é o sinal do numerador e, portanto,

$$f'(x)>0 \text{ se } x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$$

e

$$f'(x)<0 \text{ se } x\in]-1,1[$$

pelo que f é estritamente crescente em $]-\infty,-1[$ e em $]1,+\infty[$ e estritamente decrescente em $[-1,1]$.

Uma vez que numa vizinhança de -1, $f'(x)$ é positiva à esquerda de -1 e negativa à direita de -1 e f é contínua em $x=-1$, temos que -1 é um ponto de máximo local; f admite um máximo local, $f(-1)=-2$ em $x=-1$.

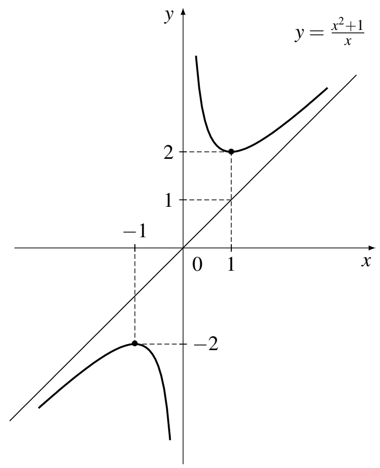
Por outro lado, atendendo a que, numa vizinhança de $x=1$, $f'(x)$ é positiva à direita de 1 e negativa à esquerda de 1 e f é contínua em $x=1$, temos que $x=1$ é um ponto de mínimo local de f; temos então que f admite em $x=1$ um mínimo local $f(1)=2$.

Vamos fazer o estudo da segunda derivada para sabermos o sentido das concavidades do gráfico de f e averiguarmos se existem pontos de inflexão. Temos, para todo o $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$,

$$f''(x)=\frac{2x^3-2x(x^2-1)}{x^4}=\frac{2x}{x^4}=\frac{2}{x^3}$$

e, uma vez que, $f''(x)>0$ se $x\in]0,+\infty[$ e $f''(x)<0$ se $x\in]-\infty,0[$ temos que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]0,+\infty[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty,0[$.

Como f'' muda de sinal em $x=0$ e 0 não pertence ao domínio de f temos que o gráfico de f não tem pontos de inflexão.



Exercícios 2.7

1. Considere a função f definida em $\mathbb{R}_0^+$ por $f(x)=\ln(1+x)-x$. Mostre que g é decrescente e diga, justificando se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: $g(x)<0$, para todo o $x\in\mathbb{R}^+$.

2. Considere a função g definida em $[0,\pi]$ por $g(x)=\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}(2x)$.

   (a) Determine os zeros da função g.

   (b) Estude, quanto à existência de assimptotas a função f definida em $[0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ por $f(x)=\frac{g(x)}{\cos x}$.

3. Considere a função f de domínio $[0,2\pi]$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}1+\ln(\pi-x) & \text{se } 0\le x<\pi\\ \cos(2x) & \text{se } \pi\le\le 2\pi\end{cases}$$

   (a) Estude f quanto à continuidade.

   (b) Determine os zeros de f.

4. Estude os intervalos de concavidade da função f definida por $f(x)=x\ln|x|$.

5. Determine as equações das assimptotas ao gráfico de cada uma das funções seguintes:

   (a) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$;

   (b) $f(x)=(x+1)\,e^{1/x}$;

(c) $f(x) = \sqrt{4x^2 - 2x + 3}$;

(d) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$;

(e) $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1}{x}$.

6. Considere a função f definida por $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. Estude f quanto à monotonia.

7. Seja f uma função contínua e diferenciável num intervalo I. Suponha que a derivada de f em qualquer ponto do interior de I é não nula. Mostre que f é injectiva.

8. Mostre que, para todos os $x,\ y \in \mathbb{R}$,

(a) $|x+y| \leq |x| + |y|$;

(b) $|x-y| \leq |x| + |y|$;

(c) $|x-y| \geq |x| - |y|$;

(d) $|x+y| \geq ||x| - |y||$;

(e) $|x.y| = |x|.|y|$;

(f) $|x/y| = |x|/|y|,\ y \neq 0$.

9. Defina, no intervalo $[-1,1]$, a função g sabendo que g tem contradomínio $[0,\pi]$, $f(x) = 2\cos x - 1$ e $(f \circ g)(x) = x^2$.

10. Em cada uma das alíneas seguintes defina a função inversa de f. Nos casos que envolvem funções trigonométricas, considere as correspondentes restrições principais.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

(b) $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2\arcsen(1-x)}{3}$

(c) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2-x}\right)$

(d) $f(x) = \dfrac{5\ln(x-3) - 1}{4}$

(e) $f(x) = \mathrm{e}^{1-2x}$

(f) $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+2}$

11. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2} + 2k - 1/2 & \text{se } x > 0 \\ k & \text{se } x = 0 \\ (2k^2 + k)\dfrac{1 - \cos x}{x^2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

(a) Determine $k \in \mathbb{R}$ por forma que f seja contínua em $x = 0$.

(b) Mostre que para todo o $x < 0$, $\mathrm{e}^{-1/x^2} \in]0,1[$.

(c) Supondo $k = 1/2$, defina a inversa da restrição de f a $\mathbb{R}^+$.

12. Considere a função $f: \mathbb{R}\setminus[-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + \alpha\dfrac{|x|}{x}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Determine os valores de α para os quais f é invertível.

(b) Caracterize, quando exista, a função inversa de f.

13. Determine a derivada de cada uma das funções seguintes:

(a) $f(x) = \operatorname{arccotg}(\operatorname{sen}(4x^3))$

(b) $f(x) = \arcsen\dfrac{1}{x^2}$

14. Sejam f e g duas funções reais de variável real definidas por $f(x) = x^3$ e $g(x) = \operatorname{sen} x$. Determine, utilizando o teorema da derivada da função inversa, as derivadas seguintes:

(a) $(f^{-1})'(x)$, para $x \in \mathbb{R}$

(b) $(g^{-1})'(0)$.

15. Para cada uma das funções seguintes calcule $(f^{-1})'(x)$ utilizando o teorema da derivada da função inversa.

(a) $f(x) = x^3 + 1$

(b) $f(x) = \ln(\arcsen x)$, com $x \in]0,1[$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x^2}$, com $x \in]-1,0[$

(d) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ 1 - x^3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

16. Determine $(f^{-1})'(1)$, sendo f a função definida por $f(x) = (x^3+2)^4$, para todo o $x \geq \sqrt[3]{-2}$.

17. Sendo $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$, $x \in \mathbb{R}$, mostre que f possui exactamente uma raiz no intervalo $]1,3]$.

18. Mostre que se $a > 0$ a equação $x^3 + ax + b = 0$ não pode ter mais que uma raiz real, qualquer que seja $b \in \mathbb{R}$.

19. Prove que a equação $4x^3 - 6x^2 + 1 = 0$ tem 3 zeros distintos e localize-os em intervalos de $\mathbb{R}$ cujos extremos sejam números inteiros consecutivos.

20. Verifique que $x = 0$ é raiz da equação $e^x = 1 + x$. Mostre que esta equação não pode ter outra raiz real.

21. Prove que:

(a) para todo o $x \in]0,1[$ se tem $\arcsen x > x$;

(b) para todo o $x \geq 0$ se tem $\operatorname{sen} x \leq x$;

(c) para todo o $x > 0$ se tem $\ln x < x$.

22. Seja f uma função real de variável real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x\ln x & \text{se } x > 0 \\ \operatorname{sen}(5x) - x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

(a) Estude f quanto à continuidade.

(b) Averigue se a função f é diferenciável para $x = 0$.

(c) Enuncie o Teorema de Rolle. Mostre que é aplicável à função f no intervalo $[0,1]$ e determine o ponto b desse intervalo tal que $f'(b) = 0$.

23. Sejam f e g funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$ tais que $f'(x) > g'(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$ e $f(a) = g(a)$. Prove que:

(a) $f(x) > g(x)$, para todo o $x > a$

(b) $f(x) < g(x)$, para todo o $x < a$.

24. Seja f uma função real de variável real. Mostre que se f admite terceira derivada no intervalo $[a,b]$ e $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$, então existe $c \in]a,b[$ tal que $f'''(c) = 0$.

25. Mostre que existe

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x},$$

mas não pode aplicar-se para o seu cálculo a regra de Cauchy.

26. Calcule, caso exista, o limite considerado em cada uma das alíneas que se seguem:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{3}}{x^2}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - x}{x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\arcsen x}{3x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x \operatorname{sen} x}$

(e) $\lim\limits_{x\to -\pi/4} \dfrac{\cos(2x)}{1 + \operatorname{cotg} x}$

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^p}$ com $p \in \mathbb{R}^+$

(g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 - x}{\ln(2 - x)}$

(h) $\lim\limits_{x\to+\infty} [\ln((x+1)^p) - \ln(x^p)]$ com $p \in \mathbb{R}$

(i) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}(2x)}$

(j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$

27. Sendo k um número real diferente de zero, considere a função f definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ do modo seguinte

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(\pi x)}{kx} & \text{se } x < 0 \\ \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Calcule os limites laterais de f no ponto zero e indique o valor de k para o qual é possível obter um prolongamento por continuidade de f a $\mathbb{R}$.

Soluções dos exercícios propostos

Exercícios 2.1

1. —
2. —
3. $\text{int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \emptyset$, $\text{ext}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \emptyset$ e $\text{frt}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.
4. —
5. —

Exercícios 2.2

1. (a) $[-1,+\infty[\setminus\{2\}$;

   (b) $\mathbb{R}\setminus\left\{0, \frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right\}$;

   (c) $\mathbb{R}_0^-$.

2. (a) $D_f =]-\infty,0]\cup[2,3[$; $D_g = [-1,+\infty[$.

   (b) $x = 2$ é zero de f e $x = 8$ é zero de g.

   (c) $]-\infty,3]$.

   (d) $D_f+g = [-1,0]\cup[2,3[$ e $(f+g)(x) = \sqrt{\frac{2x-4}{-x^2+3x}} + 3 - \sqrt{x+1}$;

   $D_{\frac{f}{g}} = [-1,0]\cup[2,3[$ e $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{\frac{2x-4}{-x^2+3x}}}{3-\sqrt{x+1}}$

3. $D_{g\circ f} = \mathbb{R}_0^+$ e $(g\circ f)(x) = x$; $D_{f\circ g} = \mathbb{R}$ e $(f\circ g)(x) = |x|$; $D_{h\circ f} = \mathbb{R}_0^+\setminus\{1\}$ e $(h\circ f)(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$;
   e $D_{f\circ h} =]1,+\infty[$ e $(f\circ h)(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

4. $A = \left]\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right[$.

5. (a) $D_f =]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$, $CD_f = \mathbb{R}_0^+$, não é injectiva, logo não é bijectiva;

   (b) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $CD_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, é bijectiva;

   (c) $D_f = \mathbb{R}$, $CD_f = [-1/4,+\infty[$, não é injectiva, logo não é bijectiva.

6. (a) monótona decrescente;

   (b) não é monótona.

7. —

Exercícios 2.3

1. (a) 0;

   (b) $+\infty$;

   (c) não existe;

   (d) $\frac{3}{5}$;

   (e) 0;

   (f) $\frac{1}{2}$;

   (g) 0;

   (h) $+\infty$;

   (i) 2;

   (j) não existe;

   (k) $-4a^3$, para todo o a.

2. —
3. —
4. —
5. —
6. —
7. Para todo o $m\in\mathbb{R}$, f é descontínua em $x = 0$.
8. —

Exercícios 2.4

1. (a) $x = 0$;

   (b) $x \in]-\infty,-1]$;

   (c) $x \in [0,1]$;

   (d) $x \in]0,e^{-2}[$;

   (e) $x \in]-\infty,-2[\cup\left[\frac{1}{3},2\right[$;

2. (a) $\frac{1}{3}$;

   (b) 0;

   (c) 2;

   (d) $+\infty$;

   (e) $-\infty$;

   (f) $-\infty$;

(g) 1;

(h) não existe;

(i) 1;

(j) 0

Exercícios 2.5

1. (a) $\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathbb{R}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x}-1 \end{array}$

   de contradomínio $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$;

   (b) $\begin{array}{rccc} f^{-1}: &]2,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & -1+\ln(x-2) \end{array}$

   de contradomínio $\mathbb{R}$;

   (c) $\begin{array}{rccc} f^{-1}: &]-\infty,2[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 2-3^x \end{array}$

   de contradomínio $\mathbb{R}$.

2. (a) —

   (b) —

3. —

4. —

5. —

6. A simplificação é válida em $\mathbb{R}^+$.

7. Calcule os limites seguintes:

   (a) $\ln 3$;

   (b) 1;

   (c) 1;

   (d) 1;

   (e) e;

   (f) 0;

   (g) 1;

8. f é contínua em $[0,1]$.

9. (a) $x=2$;

   (b) $x\in]0,3]$;

   (c) $x\in]-1,0[\cup]1,+\infty[$

   (d) $x=1$.

Exercícios 2.6

1. —

2. 0

3. —

4. não existe.

5. $a=1$

6. $(f^{-1})'(-3)=\dfrac{1}{54}$.

7. $(f^{-1})'(2)=1$.

8. (a) $f'(x)=3x^2+4x-3$;

   (b) $f'(x)=\dfrac{4}{3\sqrt[3]{2x-1}}$;

   (c) $f'(x)=\dfrac{1}{1-\operatorname{sen}x}$;

   (d) $f'(x)=2xe^{x^2}(1+x^2)$;

   (e) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$;

   (f) $f'(x)=\dfrac{1}{\ln 3}\sec x\operatorname{cosec}x$;

   (g) $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^3}(-x+6\sqrt{x}-6)}{2(\sqrt{x}-1)^2}e^{\frac{x^3}{\sqrt{x}-1}}$;

   (h) $f'(x)=\dfrac{-2\operatorname{sen}(\log_2(x^2))}{x\ln 2}$;

   (i) $f'(x)=\dfrac{1-x^2(2\ln x+1)}{x}$;

   (j) $f'(x)=2x\operatorname{arctg}x+1$;

   (k) $f(x)=\dfrac{2x^3-2+\ln(x^2)}{x^2}$.

Exercícios 2.7

1. verdadeira.

2. (a) 0, $\dfrac{2\pi}{3}$ e π.

   (b) AV: $x=\pi$; ANV: não tem.

3. (a) contínua em $[0,2\pi]\setminus\{\pi\}$.

   (b) $\dfrac{3\pi}{4}$, $\dfrac{5\pi}{4}$, $\dfrac{7\pi}{4}$ e $\pi-e^{-1}$.

4. concavidade voltada para cima em $]0,+\infty[$ e para baixo em $]-\infty,0[$.

5. (a) AV: $x=2$; ANV: $x=1$ assimptota não vertical bilateral;

   (b) AV: $x=0$; ANV: não tem;

   (c) AV: não tem; ANV: não tem;

   (d) AV: não tem; ANV: $x=0$ assimptota não vertical bilateral;

   (e) AV: $x=0$; ANV: $x=0$ assimptota não vertical à direita.

6. A função f é crescente em $]-\infty,0]$, decrescente em $[0,+\infty[$ e tem máximo $f(0)=1$ em $x=0$.

7. —

8. (a) Atenda a que, para todo o $a\in\mathbb{R}$, se tem $-|a|\leq a\leq |a|$;

   (b) Usar a alínea anterior;

   (c) Fazer $x=y+(x-y)$ e usar a alínea a);

   (d) Fazer $x=x+y-y$ e $y=x+y-x$ e usar a alínea a);

   (e) Analisar os seguintes casos: $x\geq 0\wedge y\geq 0$, $x\leq 0\wedge y\geq 0$, $x\geq 0\wedge y\leq 0$, $x\leq 0\wedge y\leq 0$;

   (f) Fazer $\dfrac{x}{y}=x.\dfrac{1}{y}$ e usar a alínea e).

9. $$\begin{array}{rccl} g: & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \arccos\dfrac{x^2+1}{2} \end{array}$$

10. (a) $$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & [-1/2,1/2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \operatorname{arcsen}(2x)-\pi/2 \end{array}$$
   de contradomínio $[-\pi,0]$;

   (b) $$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & [\pi/6,5\pi/6] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 1-\operatorname{sen}(3\pi/4-3x/2) \end{array}$$
   de contradomínio $[0,2]$;

   (c) $$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \mathbb{R}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 2-\dfrac{\pi}{\operatorname{arctg} x} \end{array}$$
   de contradomínio $]-\infty,0[\cup]4,+\infty[$;

   (d) $$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 3+e^{\frac{4x+1}{5}} \end{array}$$
   de contradomínio $]3,+\infty[$;

   (e) $$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{2}-\ln\sqrt{x} \end{array}$$
   de contradomínio $\mathbb{R}$;

   (f) $$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & -2+\log_{1/3}x \end{array}$$
   de contradomínio $\mathbb{R}$.

11. (a) $k=\dfrac{1}{2}$

   (b) —

   (c) $$\begin{array}{ccl} \left]\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{-\ln(x-\frac{1}{2})}} \end{array}$$
   de contradomínio $\mathbb{R}^+$.

12. (a) $\alpha\in[-1,+\infty[$;

   (b) $$\begin{array}{rccl} f^{-1}: &]-\infty,-1-\alpha[\cup]1+\alpha,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f^{-1}(x)=\begin{cases} x-\alpha & \text{se} \quad x>1+\alpha \\ x+\alpha & \text{se} \quad x<-1-\alpha \end{cases} \end{array}$$

13. (a) $\dfrac{-12x^2\cos(4x^3)}{1+\operatorname{sen}^2(4x^3)}$;

   (b) $\dfrac{-2}{x\sqrt{x^4-1}}=\dfrac{-2\sqrt{(x^4-1)^2}}{x^5-x}$

14. (a) $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$;

   (b) 1.

15. (a) $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$;

   (b) $e^x\cos(e^x)$;

   (c) $\dfrac{-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}(1+x)^2}$;

   (d) $(f^{-1})'(x)=\begin{cases} \dfrac{-1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}} & \text{se } x>1 \\ \dfrac{-1}{2\sqrt{-x}} & \text{se } x<0 \end{cases}$

16. Sugestão: Utilize o Teorema de Bolzano para garantir que f tem pelo menos uma raiz e o estudo dos zeros da derivada para garantir a unicidade.

17. Sugestão: Faça o estudo da primeira derivada de f.

18. f tem um zero em $]0,1[$, um em $]1,2[$ e outro em $]-1,0[$.

19. Sugestão: Atenda a que 0 é raiz da equação e ao comportamento da primeira derivada de f.

20. (a) Sugestão: Considere a função $f(x)=\operatorname{arcsen}x-x$ e prove que é positiva no intervalo considerado analisando o comportamento da primeira derivada;

   (b) —;

   (c) —.

21. (a) É contínua em $\mathbb{R}$;

(b) f não é diferenciável em $x = 0$;

(c) $b = 1/\mathrm{e}$.

22. —

23. —

24. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x} = 1$.

25. (a) $1/9$;

(b) não existe;

(c) $2/3$;

(d) $-1/2$;

(e) -1;

(f) 0;

(g) 1;

(h) 0;

(i) 1;

(j) e^4.

26. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen}(\pi x)}{kx} = \dfrac{\pi}{k}$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$; $k = 2$

Capítulo 3

Fórmula de Taylor

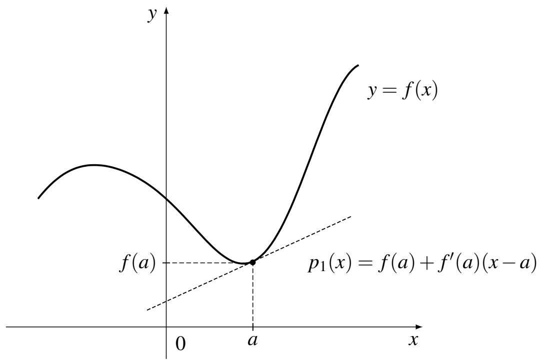
Seja $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida e diferenciável num intervalo aberto I.

Seja $a \in I$ tal que $f(a)$ e $f'(a)$ são conhecidos. Admitamos que não conhecemos $f(x)$ para todo o $x \neq a$ pertencente a uma vizinhança de a contida em I e que pretendemos calcular valores aproximados de $f(x)$ nessa vizinhança de a. Como os polinómios são funções cujos valores são fáceis de obter podemos utilizar polinómios para obter as aproximações pretendidas.

O exemplo mais simples consiste em (no caso em que f é diferenciável em a) aproximar $f(x)$ por

$$p_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

que, geometricamente, consiste em substituir, numa vizinhança de a, o gráfico de f pela recta que lhe é tangente no ponto $(a, f(a))$.



Neste capítulo vamos apresentar a **Fórmula de Taylor** que, para uma determinada função f, nos permite obter um polinómio p_n nas potências de $x - a$ que nos dá valores aproximados para $f(x)$, para todo o x numa vizinhança de um ponto $a \in I$. A fórmula apresentada permite-nos também calcular o erro que se comete quando se substitui $f(x)$ por $p_n(x)$.

Consideremos, por exemplo, a função f definida por $f(x) = \mathrm{e}^x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

O polinómio do primeiro grau que aproxima f em torno de $a = 0$ é

$$p_1(x) = 1 + x\ .$$

Como facilmente se verifica, temos $p_1(0) = f(0)$ e $p_1'(0) = f'(0)$.

Tomando, por exemplo, $x = 0.1$ temos $p_1(0.1) = 1.1$. Uma vez que sabemos que $f(0.1)$ é aproximado por 1.1051709, temos que o valor encontrado coincide com $f(0.1)$ até à segunda casa decimal.

Consideremos o polinómio do segundo grau

$$p_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2\ ,$$

onde c_0, c_1 e c_2 são constantes reais a determinar por forma que

$$\begin{cases} p_2(0) &= f(0) \\ p_2'(0) &= f'(0) \\ p_2''(0) &= f''(0)\ . \end{cases}$$

Ora, $p_2(0) = c_0$, $p_2'(0) = c_1$ e $p_2''(0) = 2c_2$. Por outro lado, como $f(x) = \mathrm{e}^x$, $f'(x) = \mathrm{e}^x$ e $f''(x) = \mathrm{e}^x$, temos $f(0) = \mathrm{e}^0 = 1 = f'(0) = f''(0)$.

Temos então $c_0 = c_1 = 1$ e $c_2 = 1/2$ pelo que resulta

$$p_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2\ .$$

Se calcularmos o valor que este polinómio toma em $x = 0.1$ temos

$$p_2(0.1) = 1.105$$

e, portanto, o valor encontrado coincide, até à terceira casa decimal, com a aproximação de $f(0.1)$ indicada acima.

Não é difícil verificar que, para cada $n \geq 3$, o polinómio p_n definido por

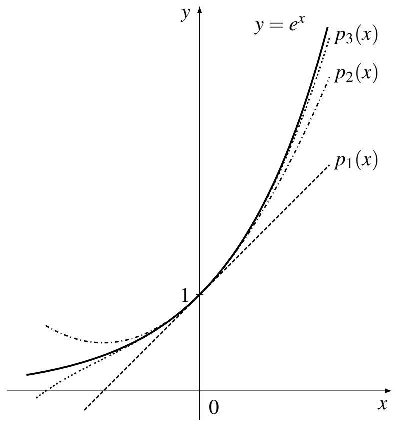
$$\begin{aligned} p_n(x) &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k \end{aligned}$$

é tal que, para todo o $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$, se tem

$$p_n{}^{(k)}(0) = f^{(k)}(0),$$

onde, como habitualmente, $f^{(0)}(0) = f(0)$, $p_n{}^{(0)}(0) = p_n(0)$ e, para cada $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ $f^{(k)}$ designa a derivada de ordem k da função f e $p_n{}^{(k)}$ designa a derivada de ordem k do polinómio p_n.

Na figura seguinte estão representados os gráficos de f e dos polinómios p_1, p_2 e p_3 no intervalo $[-1, 1]$. Observe-se que, no intervalo considerado, o gráfico de p_3 constitui uma melhor aproximação do gráfico de f do que os gráficos de p_1 ou de p_2.



Da observação da figura resulta também que a aproximação de $f(x)$ por $p_3(x)$ (ou por $p_1(x)$ ou por $p_2(x)$) é tanto melhor quanto mais próximo da origem estiver o ponto x.

Retomemos o caso geral considerando de novo a função $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, onde I é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$.

Suponhamos que f é diferenciável até à ordem $n+1$ no ponto $a \in I$.

Vamos calcular o polinómio p_n de grau n nas potências de $x - a$ tal que, para todo o $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$, se verifique

$$p_n{}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)\ ,$$

onde, como habitualmente, $f^{(0)}(a) = f(a)$, $p_n{}^{(0)}(a) = p_n(a)$ e, para cada $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ $f^{(k)}$ designa a derivada de ordem k da função f e $p_n{}^{(k)}$ designa a derivada de ordem k do polinómio p_n.

Temos $p_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n$ com $c_0, c_1, \cdots, c_n$ constantes reais a determinar por forma que as igualdades acima referidas se verifiquem.

De $p_n(a) = f(a)$ resulta que

$$c_0 = f(a)\ .$$

Atendendo a que, para todo o $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$, se tem

$$p_n{}^{(k)}(a) = k!\,c_k$$

concluímos que

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\ ,$$

para todo o $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Uma vez que $0! = 1$ e $f^{(0)}(a) = f(a)$, podemos escrever

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\ ,$$

para todo o $k \in \{0,1,\cdots,n\}$. Consequentemente temos

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}(x-a)^k . \end{aligned}$$

Definição 3.1. Ao polinómio p_n definido por

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}(x-a)^k \\ &= f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2\,!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n\,!}(x-a)^n \end{aligned}$$

chamamos **polinómio de Taylor de ordem n da função f no ponto a**.

No caso em que $a=0$ o polinómio de Taylor de ordem n da função f no ponto $a=0$ é o polinómio

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k\,!}x^k \\ &= f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2\,!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}x^n \end{aligned}$$

que se designa por **polinómio de Mac-Laurin de ordem n da função f**.

Exemplo 3.2.

1. Consideremos a função f definida por

$$f(x)=\frac{1}{x+1} ,$$

para todo o $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Vamos determinar o polinómio de Mac-Laurin de ordem seis da função f.

Resulta da definição que

$$\begin{aligned} p_6(x) &= \sum_{k=0}^{6} \frac{f^{(k)}(0)}{k\,!}x^k \\ &= f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2\,!}x^2+\cdots+\frac{f^{(6)}(0)}{6\,!}x^6 . \end{aligned}$$

Atendendo a que

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f'(0) &= \left.\frac{-1}{(x+1)^2}\right|_{x=0} \\ &= -1 \\ f''(0) &= \left.\frac{2}{(x+1)^3}\right|_{x=0} \\ &= 2 \\ f'''(0) &= \left.\frac{-3\,!}{(x+1)^4}\right|_{x=0} \\ &= -3\,! \\ f^{(4)}(0) &= \left.\frac{4\,!}{(x+1)^5}\right|_{x=0} \\ &= 4\,! \\ f^{(5)}(0) &= \left.\frac{-5\,!}{(x+1)^6}\right|_{x=0} \\ &= -5\,! \\ f^{(6)}(0) &= \left.\frac{6\,!}{(x+1)^7}\right|_{x=0} \\ &= 6\,! \end{aligned}$$

temos

$$p_6(x)=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6 .$$

2. Vamos determinar o polinómio de Taylor de ordem três da função f definida, para todo o $x \in \mathbb{R}$, por $f(x)=\operatorname{sen} x+x$ em torno do ponto $a=\pi$.

Temos

$$p_3(x)=f(\pi)+f'(\pi)(x-\pi)+\frac{f''(\pi)}{2}(x-\pi)^2+\frac{f'''(\pi)}{3\,!}(x-\pi)^3 .$$

Como

$$\begin{aligned} f(\pi) &= \pi \\ f'(\pi) &= \cos x+1|_{x=\pi} \\ &= 0 \\ f''(\pi) &= -\operatorname{sen} x|_{x=\pi} \\ &= 0 \\ f'''(\pi) &= -\cos x|_{x=\pi} \\ &= 1 \end{aligned}$$

vem que

$$p_3(x)=\pi+\frac{1}{6}(x-\pi)^3 .$$

3. Determinar o polinómio de Taylor de ordem n da função f definida por $f(x)=\ln(x-1)$, para todo o $x>1$, em torno do ponto $a=2$.

Vamos começar por obter uma expressão para a derivada de ordem k da função f.

Temos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{x-1} \\
f''(x) &= \frac{-1}{(x-1)^2} &= \frac{(-1)(2-1)\,!}{(x-1)^2} \\
f'''(x) &= \frac{2}{(x-1)^3} &= \frac{(-1)^{3-1}(3-1)\,!}{(x-1)^3} \\
f^{(4)}(x) &= \frac{-2\times 3}{(x-1)^4} &= \frac{(-1)^{4-1}(4-1)\,!}{(x-1)^4} \, .
\end{aligned}$$

Vamos usar o princípio de indução matemática para provar que, para todo o $k \geq 1$ se tem

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)\,!}{(x-1)^k} \, . \quad (*)$$

Temos de provar que:

1) a igualdade $(*)$ se verifica para $k=1$.

   De facto, para $k=1$, temos

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} = \frac{(-1)^{1-1}0\,!}{(x-1)^1} .$$

2) se a igualdade $(*)$ se verifica para $k-1$, então também se verifica para k.

   Admitamos que a igualdade se verifica para $k-1$. Então temos

$$f^{(k-1)}(x) = \frac{(-1)^{k-2}(k-2)\,!}{(x-1)^{k-1}} \, .$$

   Atendendo a que $f^{(k)}$ é a derivada de $f^{(k-1)}$ temos

$$\begin{aligned}
f^{(k)}(x) &= \left((-1)^{k-2}(k-2)\,!(x-1)^{-(k-1)}\right)' \\
&= (-1)^{k-2}(k-2)\,!(-1)(k-1)(x-1)^{-(k-1)-1} \\
&= (-1)^{k-1}(k-1)\,!(x-1)^{-k} \\
&= \frac{(-1)^{k-1}(k-1)\,!}{(x-1)^k} \, ,
\end{aligned}$$

   como pretendíamos.

Temos então, para todo o $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}
f^{(k)}(2) &= \frac{(-1)^{k-1}(k-1)\,!}{(2-1)^k} \\
&= (-1)^{k-1}(k-1)\,! \, .
\end{aligned}$$

Como

$$p_n(x) = f(2) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(2)}{k\,!}(x-2)^k$$

temos

$$p_n(x) = \ln 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)\,!}{k\,!}(x-2)^k \, .$$

Atendendo a que $\ln 1 = 0$ e à igualdade

$$\frac{(k-1)\,!}{k\,!} = \frac{(k-1)\,!}{(k-1)\,!\,k} = \frac{1}{k} \, ,$$

podemos escrever

$$p_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{(k-1)}}{k}(x-2)^k \, .$$

Observação 3.3. O polinómio de Taylor (ou polinómio de Mac-Laurin) de ordem n de uma função não é necessariamente um polinómio de grau n.

Consideremos, por exemplo, a função f definida em $]-1,1[$ por

$$f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x} \, .$$

Vamos ver que o polinómio de Mac-Laurin de ordem quatro da função f é um polinómio de grau três. Para determinar este polinómio temos de calcular $f(0)$ e o valor das derivadas da função f até à ordem quatro no ponto $a=0$.

Temos $f(0)=0$ e, atendendo a que $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$, temos

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \left(\frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x}\right)_{x=0} \\
&= 2 \\
f''(0) &= \left(\frac{-1}{(1+x)^2} - \frac{-1}{(1-x)^2}\right)_{x=0} \\
&= 0 \\
f'''(0) &= \left(\frac{2}{(1+x)^3} - \frac{-2}{(1-x)^3}\right)_{x=0} \\
&= 4 \\
f^{(4)}(0) &= \left(\frac{-6}{(1+x)^4} - \frac{-6}{(1-x)^4}\right)_{x=0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

e, portanto, podemos escrever

$$p_4(x) = 2x + \frac{4}{6}x^3 = 2x + \frac{2}{3}x^3 \, .$$

Sabemos que um valor aproximado de $\ln(1.1)$ com oito casas decimais é 0.09531018. Vamos usar o polinómio de Taylor da função f definida por $f(x) = \ln(x-1)$ determinado em Exemplo 3.2-3. para obter valores aproximados de $\ln(1.1)$ e vamos compará-los com a aproximação que considerámos.

Como $1.1 = 2.1 - 1$ temos que $\ln(1.1) = f(2.1)$ e

$$p_n(2.1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(0.1)^k .$$

Considerando os sucessivos polinómios de Taylor de grau $3, 4, \cdots, 7$, temos

$$\begin{aligned}
p_3(2.1) &= 0.1 - \tfrac{1}{2}(0.1)^2 + \tfrac{1}{3}(0.1)^3 \\
&= 0.09533333 \\
p_4(2.1) &= p_3(2.1) - \tfrac{1}{4}(0.1)^4 \\
&= 0.09530833 \\
p_5(2.1) &= p_4(2.1) + \tfrac{1}{5}(0.1)^5 \\
&= 0.09531033 \\
p_6(2.1) &= 0.09531017 \\
p_7(2.1) &= 0.09531018 .
\end{aligned}$$

O polinómio de Taylor de ordem sete de f no ponto $a = 2$ dá-nos um valor aproximado de $\ln(1.1)$ que coincide com o valor de referência. Note-se que, à medida que n aumenta, o valor de $p_n(x)$ coincide com o valor de referência num maior número de casas decimais, o que significa que, à medida que n aumenta, vamos obtendo melhores aproximações de $\ln(1.1)$.

À diferença

$$R_n(x) := f(x) - p_n(x)$$

chamamos **resto de ordem n de f no ponto** a.

O valor de $|R_n(x)|$ dá-nos o erro que se comete quando se substitui $f(x)$ por $p_n(x)$.

No quadro que apresentamos a seguir estão indicados valores aproximados dos erros cometidos quando se utiliza $p_n(2.1)$ como valor aproximado de $\ln(1.1)$ para $n \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$.

n	$p_n(2.1)$	$\lvert R_n(x)\rvert$
3	0.09533333	0.00002315
4	0.09530833	0.00000185
5	0.09531033	0.00000015
6	0.09531017	0.00000001
7	0.09531018	0.00000000

Note-se que, à medida que n aumenta, o erro que se comete ao substituir $\ln(1.1)$ por $p_n(2.1)$ vai diminuindo.

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, a um ponto de I e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável até à ordem $n+1$ em I. Temos então , para todo o $x \in I$,

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x)$$

e escrevemos

$$f(x) \cong p_n(x)$$

com o significado de que $p_n(x)$ é um valor aproximado de $f(x)$.

O teorema que apresentamos a seguir, habitualmente designado por **Teorema de Taylor**, dá-nos uma expressão para o erro que se comete quando se aproxima f pelo seu polinómio de Taylor de ordem n no ponto a.

Proposição 3.4. *Sejam f uma função real de variável real definida num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e $a \in I$. Suponhamos que f é $n+1$ vezes diferenciável em todo o ponto de I. Então, para todo o $b \in I \setminus \{a\}$, existe ξ entre a e b tal que*

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)\,!}(b-a)^{n+1} .$$

Demonstração: Seja $b \in I \setminus \{a\}$.

Consideremos a função real de variável real F definida, para todo o $x \in I$, por

$$F(x) = f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k\,!}(b-x)^k - \alpha(b-x)^{n+1} ,$$

onde α é um número real escolhido por forma que $F(a) = 0$.

Vamos determinar α (admitindo que $F(a) = 0$).

Admitamos, sem perda de generalidade, que se tem $a < b$.

Das propriedades das funções contínuas resulta que a função F é contínua em I, logo contínua em $[a, b]$.

Atendendo a que F é a soma de funções diferenciáveis em I temos que F é diferenciável em I e, para todo o $x \in I$,

$$\begin{aligned}
F'(x) &= -f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k+1)}(x)}{k\,!}(b-x)^k - \frac{f^{(k)}(x)}{k\,!}k(b-x)^{k-1} \right) + \alpha(n+1)(b-x)^n \\
&= -f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k\,!}(b-x)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)\,!}(b-x)^{k-1} + \\
&\quad +\alpha(n+1)(b-x)^n \\
&= -f'(x) - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)\,!}(b-x)^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)\,!}(b-x)^{k-1} + \\
&\quad +\alpha(n+1)(b-x)^n \\
&= -f'(x) - \frac{f^{(n+1)}(x)}{n\,!}(b-x)^n + f'(x) + \\
&\quad +\alpha(n+1)(b-x)^n \\
&= -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n\,!}(b-x)^n + \alpha(n+1)(b-x)^n .
\end{aligned}$$

Uma vez que $F(a) = 0 = F(b)$, F é contínua em $[a,b]$ e F é diferenciável em $]a,b[$, o Teorema de Rolle garante a existência de ξ entre a e b tal que $F'(\xi) = 0$.

Atendendo a que

$$F'(\xi) = \alpha(n+1)(b-\xi)^n - \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(b-\xi)^n ,$$

concluímos que existe ξ entre a e b tal que

$$\alpha(n+1)(b-\xi)^n - \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(b-\xi)^n = 0 .$$

Como $b \neq \xi$ temos $(b-\xi)^n \neq 0$ e, portanto,

$$\alpha = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} .$$

De $F(a) = 0$ resulta então

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} ,$$

para algum ξ entre a e b, como pretendíamos.

■

Observação 3.5. 1. Tomando $n = 1$, o Teorema de Taylor garante que se f é diferenciável num intervalo aberto I e a é um ponto de I, então, para todo o $b \in I$, $b \neq a$, existe ξ entre a e b tal que

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a) ,$$

ou seja

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

e, portanto, o Teorema de Taylor generaliza o Teorema de Lagrange.

2. O Teorema de Taylor garante que se f é diferenciável até à ordem $n+1$ num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e a é um ponto de I, então, para todo o $x \in I \setminus \{a\}$, tem-se

$$f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

para algum ξ entre a e x.

Temos então

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x) ,$$

onde

$$R_n(x) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

é o **Resto de Lagrange de ordem** n.

3. O valor de

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \right|$$

dá-nos o erro que se comete quando se substitui $f(x)$ por $p_n(x)$.

4. No caso em que I contém a origem e f está nas condições do Teorema de Taylor tem-se que, para todo $x \in I$, $x \neq 0$, existe ξ entre 0 e x tal que

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} .$$

Como ξ pertence ao intervalo de extremos 0 e x temos $\xi = \theta x$, para algum $\theta \in]0,1[$ e, portanto, podemos escrever

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} ,$$

para algum $\theta \in]0,1[$.

5. À igualdade

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} ,$$

para algum ξ entre a e x, chamamos **Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange** e à igualdade

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} ,$$

para algum $\theta \in]0,1[$, chamamos **Fórmula de Mac-Laurin com Resto de Lagrange**.

Exemplo 3.6. 1. Consideremos a função f definida por $f(x) = \sqrt{x+1}$, para todo o $x \geq -1$.

Vamos determinar o polinómio de Mac-Laurin de ordem dois da função f e utilizar este polinómio para obter um valor aproximado de $\sqrt{2}$.

Temos

$$p_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 .$$

Como $f(0) = 1$,

$$f'(0) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}\Big|_{x=0} = \frac{1}{2} ,$$

e

$$f''(0) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}\Big|_{x=0} = -\frac{1}{4}$$

temos

$$p_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 .$$

Uma vez que $\sqrt{2} = f(1)$ obtém-se

$$\sqrt{2} \cong p_2(1) = \frac{11}{8} .$$

Vamos agora determinar uma estimativa para o erro que se comete quando se utiliza $11/8$ como valor aproximado de $\sqrt{2}$.

De acordo com o Teorema de Taylor o erro cometido é dado por

$$|R_2(1)| = \left|\frac{f'''(\xi)}{3\,!} 1^3\right| \,,$$

para algum ξ entre 0 e 1.

Como

$$\begin{aligned} f'''(\xi) &= \left.\frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}\right|_{x=\xi} \\ &= \frac{3}{8\sqrt{(1+\xi)^5}} \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} |R_2(1)| &= \left|\frac{\frac{3}{8\sqrt{(1+\xi)^5}}}{6}\right| \\ &= \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1+\xi)^5}} \,. \end{aligned}$$

Atendendo a que $0<\xi<1$ temos

$$1 < 1+\xi < 2$$

pelo que

$$1 < (1+\xi)^5 < 2^5 \,.$$

Como a raiz quadrada é crescente no intervalo $[0,+\infty[$, vem

$$1 < \sqrt{(1+\xi)^5} < \sqrt{2^5}$$

donde resulta que

$$\frac{1}{\sqrt{2^5}} < \frac{1}{\sqrt{(1+\xi)^5}} < 1 \,,$$

que, por sua vez, é equivalente a

$$\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{\sqrt{2^5}} < \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1+\xi)^5}} < \frac{1}{16}\cdot 1 \,.$$

Portanto,

$$|R_2(1)| < \frac{1}{16} \,.$$

2. Vamos determinar o polinómio de Taylor de ordem dois, p_2, da função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = e^{1-x}$, em torno de $a=1$, e vamos mostrar que, para todo o $x\in]1,2[$ o erro que se comete quando se substitui $f(x)$ por $p_2(x)$ é inferior a $1/6$.

Como

$$p_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2$$

e

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 \\ f'(1) &= \left.-e^{1-x}\right|_{x=1} \\ &= -1 \\ f''(1) &= \left.e^{1-x}\right|_{x=1} \\ &= 1 \,, \end{aligned}$$

temos

$$p_2(x) = 1 - (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 \,.$$

O erro que se comete quando se aproxima $f(x)$ por $p_2(x)$ é dado por

$$|R_2(x)| = \left|\frac{f'''(\xi)}{3\,!}(x-1)^3\right| \,,$$

para algum ξ entre x e 1.

Como $f'''(\xi) = -e^{1-\xi}$ temos

$$\begin{aligned} |R_2(x)| &= \left|\frac{-e^{1-\xi}}{6}(x-1)^3\right| \\ &= \frac{e^{1-\xi}}{6}|x-1|^3 \,. \end{aligned}$$

Uma vez que $x\in]1,2[$ e ξ está entre 1 e x, temos que $\xi>1$ e, portanto, $1-\xi<0$. Concluímos então que

$$e^{1-\xi} < 1 \,,$$

donde resulta que

$$\begin{aligned} |R_2(x)| &= \frac{e^{1-\xi}}{6}|x-1|^3 \\ &< \frac{1}{6}|x-1|^3 \\ &< \frac{|x-1|^3}{6} \,. \end{aligned}$$

Como $1<x<2$, temos que $0<x-1<1$ e, portanto, $(x-1)^3<1$, donde resulta que

$$|R_2(x)| < \frac{1}{6} \,,$$

como pretendíamos.

3. Consideremos a função f definida, para todo o $x > 1$, por

$$f(x) = 2\ln(x-1) + (x-1)^2 .$$

Vamos determinar o polinómio de Taylor de ordem três, p_3, da função f em torno de $a = 2$ e indicar os valores de $\varepsilon \in]0,1[$ por forma que, para todo o $x \in V_\varepsilon(2)$, o erro que se comete ao substituir $f(x)$ por $p_3(x)$ seja inferior a $\frac{1}{2^5}$.

Como

$$p_3(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{6}(x-2)^3$$

e

$$\begin{aligned} f(2) &= 2\ln 1 + 1 = 1 \\ f'(2) &= \left.\frac{2}{x-1} + 2(x-1)\right|_{x=2} \\ &= 4 \\ f''(2) &= \left.\frac{-2}{(x-1)^2} + 2\right|_{x=2} \\ &= 0 \\ f'''(2) &= \left.\frac{4}{(x-1)^3}\right|_{x=2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

temos que

$$p_3(x) = 1 + 4(x-2) + \frac{2}{3}(x-2)^3 .$$

O erro que cometemos ao aproximar $f(x)$ por $p_3(x)$ é dado por

$$|R_3(x)| = \left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-2)^4\right|$$

para algum ξ entre 2 e x.

Como

$$f^{(4)}(\xi) = \frac{-12}{(\xi-1)^4}$$

temos

$$\begin{aligned} |R_3(x)| &= \frac{12}{24|\xi-1|^4}|x-2|^4 \\ &= \frac{1}{2(\xi-1)^4}(x-2)^4 . \end{aligned}$$

Pretendemos determinar $\varepsilon \in]0,1[$ por forma que se $x \in V_\varepsilon(2)$, isto é, se

$$|x-2| < \varepsilon ,$$

então

$$|R_3(x)| < \frac{1}{2^5} .$$

Uma vez que $|x-2| < \varepsilon$ temos $|x-2|^4 < \varepsilon^4$ e, portanto,

$$|R_3(x)| < \frac{\varepsilon^4}{2(\xi-1)^4} .$$

Por outro lado, uma vez que ξ está entre 2 e x e $x \in V_\varepsilon(2)$, temos $2-\varepsilon < \xi < 2+\varepsilon$. Consequentemente

$$1-\varepsilon < \xi - 1 < 1+\varepsilon ,$$

donde resulta, atendendo a que $\varepsilon \in]0,1[$ e, portanto, $1-\varepsilon > 0$,

$$(1-\varepsilon)^4 < (\xi-1)^4 < (1+\varepsilon)^4 .$$

Consequentemente

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^4} < \frac{1}{(\xi-1)^4} < \frac{1}{(1-\varepsilon)^4}$$

o que permite concluir que, para todo o $x \in V_\varepsilon(2)$,

$$|R_3(x)| < \frac{\varepsilon^4}{2(1-\varepsilon)^4} .$$

Como pretendemos que o erro seja inferior a $\frac{1}{2^5}$, ou seja, como pretendemos que se verifique a desigualdade $|R_3(x)| < \frac{1}{2^5}$ fazemos

$$\frac{\varepsilon^4}{2(1-\varepsilon)^4} \leq \frac{1}{2^5} .$$

Temos então de calcular os valores de $\varepsilon \in]0,1[$ que satisfazem a desigualdade

$$\frac{\varepsilon^4}{2(1-\varepsilon)^4} \leq \frac{1}{2^5} .$$

Esta desigualdade é equivalente a

$$\frac{\varepsilon^4}{(1-\varepsilon)^4} \leq \frac{1}{2^4} ,$$

ou seja,

$$(2\varepsilon)^4 \leq (1-\varepsilon)^4 ,$$

que é equivalente a

$$2\varepsilon \leq 1-\varepsilon ,$$

que, por sua vez é equivalente a,

$$\varepsilon \le \frac{1}{3} .$$

4. Consideremos a função f definida por $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

   Vamos determinar o polinómio de Mac-Laurin, p_n, de ordem n da função f.

   Utilizando o princípio de indução matemática prova-se que, para todo o $k \ge 1$,

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \mathrm{e}^{-x} .$$

   Consequentemente, para todo o $k \ge 1$,

$$f^{(k)}(0) = (-1)^k .$$

   Como $f(0) = 1$ e

$$p_n(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k\,!} x^k$$

   temos

$$p_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k\,!} x^k .$$

   O Resto de Lagrange de ordem n de f é dado por

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)\,!} x^{n+1} ,$$

   para algum ξ entre 0 e x. Temos então

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}\mathrm{e}^{-\xi}}{(n+1)\,!} x^{n+1} ,$$

   para algum ξ entre 0 e x.

   Vamos agora determinar o Polinómio de Mac-Laurin de menor grau que permite aproximar $1/\sqrt{e}$ com um erro inferior a 0.0001.

   Temos $1/\sqrt{e} = f(1/2)$ e pretendemos determinar o menor valor de n por forma que

$$|R_n(1/2)| < \frac{1}{10^4} .$$

   Sabemos que

$$\begin{aligned} |R_n(1/2)| &= \left| \frac{(-1)^{n+1}\mathrm{e}^{-\xi}}{(n+1)\,!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right| \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\xi}}{(n+1)\,!2^{n+1}} , \end{aligned}$$

   para algum ξ entre 0 e $1/2$.

   Como $\xi \in]0,1/2[$ temos que $\mathrm{e}^{\xi} > 1$ e, portanto, $\mathrm{e}^{-\xi} < 1$ donde resulta que

$$|R_n(1/2)| < \frac{1}{(n+1)\,!2^{n+1}} .$$

   Como pretendemos que $|R_n(1/2)| < 0.0001$ basta tomar

$$\frac{1}{(n+1)\,!2^{n+1}} \le \frac{1}{10^4} ,$$

   ou seja,

$$(n+1)\,!2^{n+1} \ge 10^4 .$$

   Calculando $(n+1)\,!2^{n+1}$ para $n = 1, 2, 3, \cdots$ obtemos

$$\begin{array}{lll} n=1 & 2\,!2^2 & = \; 8 \\ n=2 & 3\,!2^3 & = \; 48 \\ n=3 & 4\,!2^4 & = \; 384 \\ n=4 & 5\,!2^5 & = \; 3840 \\ n=5 & 6\,!2^6 & = \; 46080 > 10^4 \end{array}$$

   pelo que o polinómio

$$\begin{aligned} p_5(x) &= 1 + \sum_{k=1}^{5} \frac{(-1)^k}{k\,!} x^k \\ &= 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^5 \end{aligned}$$

   é um polinómio que permite aproximar $\frac{1}{\sqrt{e}}$ com um erro inferior a 0.0001 e

$$p_5(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{48} + \frac{1}{384} - \frac{1}{3840}$$

   é um valor aproximado de $\frac{1}{\sqrt{e}}$ com um erro inferior a 0.0001.

Exercícios

1. Desenvolva $p(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ segundo potências de $x - 4$.

2. Considere um polinómio do terceiro grau, $p(x)$, que satisfaz as condições:

$$p(3) = 0,\; p'(3) = -1,\; p''(3) = 2,\; p'''(3) = 1.$$

   Calcule $p(2)$ e $p'(0)$.

3. Considere a função f definida em $\mathbb{R}_0^+$ por $f(x) = \sqrt{x}$.

(a) Mostre que, numa vizinhança de $a = 1$ tem-se, $f(x) \simeq 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2$.

(b) Determine um valor aproximado de $\sqrt{1,01}$ e mostre que o erro cometido nessa aproximação é inferior a 10^{-7}.

4. Encontre o polinómio de MacLaurin de menor grau que lhe permita aproximar, no intervalo $[-1,1]$, $\operatorname{sen} x$ com erro inferior a $0,5 \times 10^{-4}$.

5. Em cada uma das alíneas que se seguem estabeleça, para o valor de n indicado, e para afunção considerada, a fórmula de Taylor de ordem n, com resto de Lagrange, no ponto a indicado.

(a) $f(x) = \cos(x^2)$; $a = 0$; $n = 4$.

(b) $g(x) = (1+x)^m$, com $m \in \mathbb{N}$; $a = 0$; $n = 3$.

(c) $h(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$; $a = 1$; $n = 3$.

6. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e g a função definida por $g(x) = \ln(1-ax)$.

(a) Determine, em função de a, o domínio de g sob a forma de intervalo de números reais.

(b) Prove, usando o método de indução [1], que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, a derivada de ordem n da função g é dada por $g^{(n)}(x) = -(n-1)!a^n(1-ax)^{-n}$.

(c) Tome, na expressão de $g(x)$, $a = 1$.

i. Escreva a fórmula de MacLaurin de ordem n para g.

ii. Mostre que $|R_n(x)| < \dfrac{1}{n+1}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e, para todo o $x \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$.

iii. Utilize a alínea anterior para obter uma aproximação de $\ln(3/4)$ com erro inferior a $0,01$.

7. Considere a função f definida por $f(x) = x(\ln x)^2$.

(a) Faça um esboço do gráfico de f, indicando o seu domínio, os extremos locais, os pontos de inflexão e as assimptotas, caso existam.

(b) Prove que existe $a \in]1, \mathrm{e}[$ tal que $f'(a) = \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$.

(c) Prove que, numa vizinhança de $x = 1$ contida em $]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$, podemos aproximar f pelo polinómio $p(x) = (x-1)^2$ e mostre que o erro cometido nessa aproximação é inferior a $\dfrac{4}{3}|x-1|^3$.

8. Considere a função f definida por $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

(a) Faça um esboço do gráfico de f, indicando o seu domínio, os extremos locais, os pontos de inflexão e as assimptotas, caso existam.

(b) Determine o polinómio de Taylor de f de segunda ordem relativamente a $x_0 = 4$ e mostre que, quando se aproxima $f(x)$ por este polinómio na vizinhança definida por $|x-1| < 1$, o erro cometido é inferior a $\dfrac{1}{2^4}$.

9. Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \mathrm{e}^{x^2-1}$.

Determine o polinómio de Taylor de $2^{\underline{a}}$ ordem da função f em torno do ponto $x_0 = 1$ e mostre que, para $0 < x < 1$, o erro cometido na aproximação de f por aquele polinómio é inferior a $\dfrac{10}{3}$.

10. Seja f a função definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = 2\ln x + x^2$.

(a) Determine o polinómio de Taylor de $3^{\underline{a}}$ ordem de f, $p_3(x)$, relativamente ao ponto $x = 1$.

(b) Determine os valores de $\varepsilon \in]0,1[$ por forma que, na vizinhança definida por $|x-1| < \varepsilon$, o erro cometido quando se aproxima $f(x)$ por $p_3(x)$ seja inferior a $\dfrac{1}{2^5}$.

[1] O método de indução consiste na aplicação do **PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA** que é um resultado que permite demonstrar com relativa facilidade várias propriedades referentes ao conjunto dos números naturais. Pode enunciar-se do seguinte modo:

Princípio de indução matemática: Seja $\phi(n)$ uma condição em n, com $n \in \mathbb{N}$.

Se

i) $\phi(1)$ é uma proposição verdadeira;

ii) $\phi(n+1)$ é uma proposição verdadeira sempre que $\phi(n)$ é uma proposição verdadeira, isto é, se $\phi(n)$ é verdadeira, então $\phi(n+1)$ é verdadeira;

então, para todo o $n \in mathbbN$, $\phi(n)$ é uma proposição verdadeira.

Nota: a i) é frequente chamar-se **base de indução** e a ii) **propriedade hereditária**; na implicação considerada em ii) o antecedente é a **hipótese de indução** e o consequente é a **tese de indução**.

Soluções dos exercícios propostos

1. $p(x) = -56 + 21(x-4) + 37(x-4)^2 + 11(x-4)^3 + (x-4)^4$
2. $p(2) = 11/6; p'(0) = -5/2$
3. (a) —

   (b) $\sqrt{1.01} \simeq p_2(1.01) = 1.0049875$.
4. $p_7(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!}$
5. (a) $\cos(x^2) = 1 - \dfrac{x^4}{2} + R_4(x)$, onde $R_4(x) = \dfrac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5$, para algum ξ entre x e 0;

   (b) $(1+x)^m = 1 + mx + \dfrac{m(m-1)}{2}x^2 + \dfrac{m(m-1)(m-2)}{6}x^3 + R_3(x)$, onde $R_3(x) = \dfrac{m(m-1)(m-2)(m-3)(1\text{-}}{24}$ para algum θ entre x e 0;

   (c) $e^{-x^2} = \dfrac{1}{e} - \dfrac{2}{e}(x-1) + \dfrac{1}{e}(x-1)^2 + \dfrac{2}{3e}(x-1)^3 + \dfrac{e^{-\xi^2}(12 - 48\xi^2 + 16\xi^4)}{4!}(x-1)^4$, para algum ξ entre x e 1.
6. (a) $D_g = \begin{cases}]-\infty, 1/a[& \text{se } a > 0 \\ ]1/a, +\infty[& \text{se } a < 0 \\ \mathbb{R} & \text{se } a = 0 \end{cases}$

   (b) —;

   (c) i. $\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k} - \dfrac{1}{n+1}\dfrac{x^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+1}}$ com $\theta \in]0,1[$.

   ii. —;

   iii. $p_{99}(\frac{1}{4}) = -\sum_{k=0}^{99} \dfrac{\left(\frac{1}{4}\right)^k}{k}$.
7. (a) Domínio: $\mathbb{R}^+$. Assimptotas: não existem. Extremos: o ponto $(e^{-2}, 4e^{-2})$ é um ponto de máximo local e $(1,0)$ é um ponto de mínimo local. Pontos de inflexão: o ponto de coordenadas (e^{-1}, e^{-1}) é o único ponto de inflexão do gráfico;

   (b) —;

   (c) —.
8. (a) Domínio: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Assimptotas: a recta de equação $x = 1$ é uma assimptota vertical e a recta de equação $y = x + 1$ é uma assimptota não vertical. Extremos: o ponto $(0,0)$ é um ponto de máximo local e $(2,4)$ é um ponto de mínimo local. Pontos de inflexão: o gráfico não tem pontos de inflexão.

   (b) $p_2(x) = \dfrac{16}{3} + \dfrac{8}{9}(x-4) + \dfrac{1}{27}(x-4)^2$.
9. $p_2(x) = 1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2$
10. (a) $p_3(x) = 1 + 4(x-1) + \dfrac{2}{3}(x-1)^3$;

    (b) $\varepsilon \in \left]0, \dfrac{1}{3}\right]$.

Capítulo 4

Integração

Na primeira secção deste capítulo estudaremos a noção de primitiva de uma função e, como veremos, determinar uma primitiva de uma função f consiste em determinar uma função F cuja derivada coincide com f. Serão estudadas algumas técnicas de primitivação, ou seja, técnicas que permitem determinar primitivas de uma função. Estudar-se-á, nomeadamente, a primitivação por partes, a primitivação de funções racionais e a primitivação por substituição.

A segunda secção deste capítulo destina-se ao estudo do integral de Riemann de uma função. Como veremos, podemos calcular o integral de Riemann de uma função à custa de uma primitiva dessa função.

4.1 Primitivação

4.1.1 Primitiva de uma função: definição e propriedades.

No que se segue I designa um intervalo não degenerado de $\mathbb{R}$. Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função.

Definição 4.1. Chama-se **primitiva** ou **antiderivada** de f em I a toda a função F diferenciável em I [1] tal que

$$F'(x) = f(x)\ ,$$

para todo o $x \in I$.

Se f admite uma primitiva em I dizemos que f é **primitivável em** I.

Observação 4.2. Seja f uma função definida em I.

1. Resulta imediatamente da definição que toda a primitiva de f em I é uma função contínua em I.
2. Seja F uma primitiva de f em I.

   Por uma questão de simplificação de linguagem e, caso não haja ambiguidade, diremos apenas que F é uma primitiva de f e que f é uma função primitivável.

[1] No caso em que $I = [a,b]$ dizer que F é diferenciável em I significa que, para todo o $x \in]a,b[$, F é diferenciável em x e que existem e são finitas $F'_+(a)$ e $F'_-(b)$.

Estabelecem-se convenções análogas no caso em que $I = [a,b[$ ou $I =]a,b]$.

Exemplo 4.3. 1. Consideremos a função F definida por $F(x) = \mathrm{e}^x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Atendendo a que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \mathrm{e}^x$, temos que F é uma primitiva, em qualquer intervalo $I \subset \mathbb{R}$, da função f definida por $f(x) = \mathrm{e}^x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Consideremos a função G definida por $G(x) = \mathrm{e}^x + \sqrt{2}$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Atendendo a que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = \mathrm{e}^x$, temos que G é também uma primitiva, em qualquer intervalo $I \subset \mathbb{R}$, da função f.

2. Consideremos a função F definida por $F(x) = \cos x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Atendendo a que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = -\operatorname{sen} x$, temos que F é uma primitiva, em qualquer intervalo $I \subset \mathbb{R}$, da função f definida por $f(x) = -\operatorname{sen} x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Consideremos a função G definida, para todo o $x \in \mathbb{R}$, por $G(x) = \cos x + C$, onde C é uma constante real arbitrária.

Atendendo a que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = -\operatorname{sen} x$, temos que G é também uma primitiva, em qualquer intervalo $I \subset \mathbb{R}$, da função f.

Sejam $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma primitiva de f.
Consideremos a função G definida, para todo o $x \in I$, por

$$G(x) = F(x) + C\,, \tag{4.1}$$

onde C é uma constante real arbitrária.

Da igualdade 4.1 resulta $G'(x) = (F(x) + C)'$ e, pelas propriedades das funções diferenciáveis, obtemos

$$G'(x) = F'(x) = f(x)\,,$$

para todo o $x \in I$, pelo que G é também uma primitiva de f.

Podemos então concluir que se f admite uma primitiva, então f admite uma infinidade de primitivas.

A proposição que apresentamos a seguir estabelece que duas quaisquer primitivas de uma função f diferem de uma constante. Daí podemos concluir que, conhecida uma primitiva de f, conhecemos todas as suas primitivas.

Proposição 4.4. *Sejam $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e F e G duas primitivas de f.*
Então existe $C \in \mathbb{R}$ tal que, para todo o $x \in I$,

$$F(x) - G(x) = C\,.$$

Demonstração: Uma vez que F e G são primitivas de f temos, para todo o $x \in I$, $F'(x) = f(x) = G'(x)$, donde resulta que, para todo o $x \in I$,

$$F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0\,,$$

ou seja, pelas propriedades das funções diferenciáveis,

$$(F - G)'(x) = 0\,,$$

para todo o $x \in I$, o que significa que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$(F - G)(x) = C\,,$$

para todo o $x \in I$.

Está então provado que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que, para todo o $x \in I$,

$$F(x) - G(x) = C\,,$$

como pretendíamos.

■

Resulta imediatamente da Proposição 4.4 que se F é uma primitiva de uma função f, então toda a primitiva de f se pode escrever na forma

$$F + C$$

com $C \in \mathbb{R}$.

À família de todas as primitivas de f chamamos **integral indefinido** de f e denotamo-lo pelo símbolo

$$\int f(x)\,dx\,.$$

Dizemos então que f é a **função integranda** e que x é a **variável de integração**.

Note-se que a variável de integração é uma variável muda, pelo que qualquer um dos símbolos

$$\int f(x)\,dx\,,\quad \int f(t)\,dt\,,\quad \int f(b)\,db\,,\quad \int f(w)\,dw\,,\quad \cdots$$

representa a família das primitivas de f.

Atendendo à Proposição 4.4 temos que, se F é uma primitiva de f, então

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\,,\quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Exemplo 4.5. 1. Tendo em conta as verificações feitas no Exemplo 4.86 podemos escrever

$$\int \mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^x + C\,,\quad C \in \mathbb{R}$$

e

$$\int (-\operatorname{sen} x)\,dx = \cos x + C\,,\quad C \in \mathbb{R}$$

2. Sendo f uma função diferenciável temos

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Na proposição que se apresenta a seguir estabelece-se uma propriedade das funções primitiváveis que se revela muito útil no cálculo de primitivas.

Proposição 4.6. *Sejam f e g duas funções definidas em I e α e β duas constantes reais não simultaneamente nulas.*

Se f e g são primitiváveis em I, então $\alpha f + \beta g$ é também primitivável em I, tendo-se

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx\,. \tag{4.2}$$

Demonstração: Por hipótese existem duas funções F e G diferenciáveis em I tais que, para todo o $x \in I$, $F'(x) = f(x)$ e $G'(x) = g(x)$.

Pelas propriedades das funções diferenciáveis temos

$$\begin{aligned}(\alpha F(x) + \beta G(x))' &= \alpha F'(x) + \beta G'(x)\\ &= \alpha f(x) + \beta g(x)\end{aligned}$$

o que permite concluir que $\alpha F + \beta G$ é uma primitiva de $\alpha f + \beta g$.

Consequentemente toda a primitiva de $\alpha f + \beta g$ é da forma

$$\alpha F + \beta G + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,. \tag{4.3}$$

Para provar a igualdade (4.2) temos de provar que toda a primitiva de $\alpha f + \beta g$ se pode escrever na forma

$$\alpha(F + C_1) + \beta(G + C_2)\,, \tag{4.4}$$

onde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, F é uma primitiva de f e G é uma primitiva de g e, reciprocamente, que toda a função da forma (4.4) é uma primitiva de $\alpha f + \beta g$.

Atendendo a (4.3) temos que toda a primitiva de $\alpha f + \beta g$ é da forma $\alpha F + \beta G + C$, onde $C \in \mathbb{R}$, F é uma primitiva de f e G é uma primitiva de g.

Para cada $C \in \mathbb{R}$, sejam $C_1', C_2' \in \mathbb{R}$ tais que $C = C_1' + C_2'$.

Temos então que toda a primitiva de $\alpha f + \beta g$ é da forma

$$(\alpha F + C_1') + (\beta G + C_2')\,,$$

onde $C_1', C_2' \in \mathbb{R}$, F é uma primitiva de f e G é uma primitiva de g.

Temos dois casos a considerar:

1. α e β são ambos não nulos

Neste caso temos

$$\begin{aligned}(\alpha F + C_1') + (\beta G + C_2') &= \alpha\left(F + \frac{C_1'}{\alpha}\right) + \beta\left(G + \frac{C_2'}{\beta}\right)\\ &= \alpha(F + C_1) + \beta(G + C_2)\end{aligned}$$

com $C_1 = \dfrac{C_1'}{\alpha} \in \mathbb{R}$ e $C_2 = \dfrac{C_2'}{\beta} \in \mathbb{R}$ e, portanto, neste caso, a primitiva de $\alpha f + \beta g$ é da forma (4.4).

2. ou $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que é $\alpha = 0$. Então $\beta \neq 0$ e temos

$$\begin{aligned}(\alpha F + C_1') + (\beta G + C_2') &= \beta G + C_2'\\ &= \beta\left(G + \frac{C_2'}{\beta}\right)\\ &= \beta(G + C_2)\end{aligned}$$

com $C_2 = \dfrac{C_2'}{\beta} \in \mathbb{R}$ e, portanto, neste caso, a primitiva de $\alpha f + \beta g = \beta g$ é da forma (4.4).

Reciprocamente dada uma função da forma

$$\alpha(F + C_1) + \beta(G + C_2)\,,$$

onde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, F é uma primitiva de f e G é uma primitiva de g temos, pela propriedades da derivação que, para todo o $x \in I$,

$$(\alpha(F(x) + C_1) + \beta(G(x) + C_2))' = \alpha F'(x) + \beta G'(x)$$

e, como F e G são primitivas de f e g, respectivamente, temos

$$(\alpha(F(x) + C_1) + \beta(G(x) + C_2))' = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

o que garante que $\alpha(F + C_1) + \beta(G + C_2)$ é uma primitiva de $\alpha f + \beta g$, como pretendíamos.

■

Exemplo 4.7. 1. Atendendo a que

$$\int (-\operatorname{sen} x)\,dx = \cos x + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

temos que

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

2. Tendo em atenção que

$$\int \mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^x + C_1\,, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

e que

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C_2\,, \quad C_2 \in \mathbb{R}$$

temos que

$$\begin{aligned}\int (3\,e^x - 2\cos x)\,dx &= 3\int e^x\,dx - 2\int \cos x\,dx \\ &= 3(e^x + C_1) - 2(\operatorname{sen} x + C_2) \\ &= 3\,e^x - 2\operatorname{sen} x + C\end{aligned}$$

com $C = 3C_1 - 2C_2$ constante real arbitrária.

4.1.2 Técnicas de primitivação

Primitivas imediatas

Da definição de primitiva de uma função resulta que toda a fórmula de derivação conduz a uma fórmula de primitivação.

As primitivas obtidas deste modo designam-se **primitivas imediatas**.

Vamos então apresentar uma lista de primitivas imediatas.

1. Seja $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. De
$$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = x^\alpha$$
resulta
$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

2. De
$$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$$
resulta
$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

3. Atendendo a que
$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$$
temos
$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

4. Uma vez que
$$(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x$$
temos
$$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

5. Atendendo a que
$$(\operatorname{cotg} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x$$
temos
$$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

6. De
$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
resulta
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

7. De
$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$
resulta
$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

8. Uma vez que
$$(\sec x)' = \sec x\,\operatorname{tg} x$$
temos
$$\int \sec x\,\operatorname{tg} x\,dx = \sec x + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

9. De
$$(\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{cosec} x\,\operatorname{cotg} x$$
resulta
$$\int \operatorname{cosec} x\,\operatorname{cotg} x\,dx = -\operatorname{cosec} x + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

10. Uma vez que
$$(e^x)' = e^x$$
temos
$$\int e^x\,dx = e^x + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

11. Seja $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Atendendo a que
$$(a^x)' = \ln a \cdot a^x \Leftrightarrow \left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = a^x$$
temos
$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

12. Consideremos a função f definida por $f(x) = \ln|x|$, para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Temos então
$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{se} \quad x > 0 \\ \ln(-x) & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$
e, portanto,
$$f'(x) = (\ln|x|)' = \frac{1}{x}\,,$$
para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Consequentemente
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

No exemplo que se segue vamos calcular algumas primitivas utilizando as primitivas imediatas apresentadas e a Proposição 4.6.

Exemplo 4.8. 1. Pela Proposição 4.6 temos
$$\int \left(\frac{1}{x} + 3\,\mathrm{e}^x\right) dx = \int \frac{1}{x}\,dx + 3\int \mathrm{e}^x\,dx\,.$$

Atendendo a que
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C_1\,, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$
e
$$\int \mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^x + C_2\,, \quad C_2 \in \mathbb{R}$$
temos
$$\int \left(\frac{1}{x} + 3\,\mathrm{e}^x\right) dx = \ln|x| + 3\,\mathrm{e}^x + C\,,$$
onde $C = C_1 + 3C_2$ é uma constante real arbitrária, uma vez que C_1 e C_2 são constantes reais arbitrárias.

2. Consideremos o integral indefinido
$$\int (x^3 - 5x^2 + 1)\,dx\,.$$

Utilizando a Proposição 4.6 temos
$$\int (x^3 - 5x^2 + 1)\,dx = \int x^3\,dx - 5\int x^2\,dx + \int 1\,dx\,.$$

Uma vez que
$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C_1\,, \quad C_1 \in \mathbb{R}\,,$$
$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C_2\,, \quad C_2 \in \mathbb{R}$$
e
$$\int 1\,dx = x + C_3\,, \quad C_3 \in \mathbb{R}\,,$$
temos
$$\int (x^3 + 5x^2 + 1)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{5}{3}x^3 + x + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Note-se que uma vez que C_1, C_2 e C_3 são constantes reais arbitrárias temos que $C = C_1 - 5C_2 + C_3$ é também uma constante real arbitrária.

Consideremos a função f definida por $f(x) = \operatorname{arcsen}(x^5)$.

Pela regra da derivada da função composta temos
$$f'(x) = \frac{5x^4}{\sqrt{1-x^{10}}}\,.$$

Podemos então concluir que
$$\int \frac{5x^4}{\sqrt{1-x^{10}}}\,dx = \operatorname{arcsen}(x^5) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Esta igualdade que acabámos de escrever é uma primitiva imediata que resulta da regra da derivada da função composta.

Na proposição seguinte apresentamos uma fórmula para primitivas imediatas que resulta da regra da derivada da função composta.

Proposição 4.9. *Sejam I e J dois intervalos de números reais, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função primitivável e $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que a composta $f \circ g$ está definida.*

Se g é diferenciável em J, então $(f \circ g)g'$ é primitivável e tem-se
$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,,$$
onde F é uma primitiva de f.

Demonstração: Seja F uma primitiva de f em I. Então F é diferenciável em I tendo-se $F'(x) = f(x)$, para todo o $x \in I$.

Consequentemente, para todo o $x \in J$, $(F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$ o que prova que $(f \circ g)g'$ é primitivável e que $F \circ g$ é uma primitiva de $(f \circ g)g'$.

Consequentemente
$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,,$$
como pretendíamos.

■

Observação 4.10. Atendendo à Proposição 4.9 podemos associar a cada fórmula da derivada da função composta uma primitiva imediata.

Em cada uma das fórmulas que apresentamos a seguir, supomos que a composição considerada está definida.

1. Seja $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. De
$$\left(\frac{(g(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = (g(x))^\alpha g'(x)$$
resulta
$$\int (g(x))^\alpha g'(x)\,dx = \frac{(g(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

2. De
$$(\cos(g(x)))' = -\operatorname{sen}(g(x))g'(x)$$

resulta
$$\int \operatorname{sen}(g(x))g'(x)\,dx = -\cos(g(x)) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

3. Atendendo a que
$$(\operatorname{sen}(g(x)))' = \cos(g(x))g'(x)$$
temos
$$\int \cos(g(x))g'(x)\,dx = \operatorname{sen}(g(x)) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

4. Uma vez que
$$(\operatorname{tg}(g(x)))' = \sec^2(g(x))g'(x)$$
temos
$$\int \sec^2(g(x))g'(x)\,dx = \operatorname{tg}(g(x)) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

5. Atendendo a que
$$(\operatorname{cotg}(g(x)))' = -\operatorname{cosec}^2(g(x))g'(x)$$
temos
$$\int \operatorname{cosec}^2(g(x))g'(x)\,dx = -\operatorname{cotg}(g(x)) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

6. De
$$(\operatorname{arcsen}(g(x)))' = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-(g(x))^2}}$$
resulta
$$\int \frac{g'(x)}{\sqrt{1-(g(x))^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}(g(x)) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

7. De
$$(\operatorname{arctg}(g(x)))' = \frac{g'(x)}{1+(g(x))^2}$$
resulta
$$\int \frac{g'(x)}{1+(g(x))^2}\,dx = \operatorname{arctg}(g(x)) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

8. Uma vez que
$$(\sec(g(x)))' = \sec(g(x))\,\operatorname{tg}(g(x))g'(x)$$
temos
$$\int \sec(g(x))\,\operatorname{tg}(g(x))g'(x)\,dx = \sec(g(x)) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

9. De
$$(\operatorname{cosec}(g(x)))' = -\operatorname{cosec}(g(x))\,\operatorname{cotg}(g(x))g'(x)$$
resulta
$$\int \operatorname{cosec}(g(x))\,\operatorname{cotg}(g(x))g'(x)\,dx = -\operatorname{cosec}(g(x)) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

10. Uma vez que
$$\left(\mathrm{e}^{g(x)}\right)' = \mathrm{e}^{g(x)}g'(x)$$
temos
$$\int \mathrm{e}^{g(x)}g'(x)\,dx = \mathrm{e}^{g(x)} + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

11. Seja $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Atendendo a que
$$\left(a^{g(x)}\right)' = \ln a \cdot a^{g(x)}g'(x) \Leftrightarrow \left(\frac{a^{g(x)}}{\ln a}\right)' = a^{g(x)}g'(x)$$
temos
$$\int a^{g(x)}g'(x)\,dx = \frac{a^{g(x)}}{\ln a} + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

12. Consideremos a função f definida por $f(x) = \ln|g(x)|$, para todo o x do domínio da função g tal que $g(x) \neq 0$.

Temos então
$$f(x) = \begin{cases} \ln(g(x)) & \text{se} \quad g(x) > 0 \\ \ln(-g(x)) & \text{se} \quad g(x) < 0 \end{cases}$$
e, portanto,
$$f'(x) = (\ln|g(x)|)' = \frac{g'(x)}{g(x)}\,,$$
para todo o x do domínio da função g tal que $g(x) \neq 0$.

Consequentemente
$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)| + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Exemplo 4.11. 1. Atendendo à Proposição 4.9 temos
$$\begin{aligned} \int 3x^2 \mathrm{e}^{x^3}\,dx &= \int (x^3)' \mathrm{e}^{x^3}\,dx \\ &= \mathrm{e}^{x^3} + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

2. Utilizando as Proposições 4.6 e 4.9 temos
$$\begin{aligned} \int \frac{x^4}{1+x^5}\,dx &= \int \frac{1}{5}\frac{5x^4}{1+x^5}\,dx \\ &= \frac{1}{5}\int \frac{5x^4}{1+x^5}\,dx \\ &= \frac{1}{5}\int \frac{(1+x^5)'}{1+x^5}\,dx \\ &= \frac{1}{5}\ln|1+x^5| + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

3. Utilizando as Proposições 4.6 e 4.9 temos

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{1+x^8}\,dx &= \int \frac{x^3}{1+(x^4)^2}\,dx\\ &= \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{1+(x^4)^2}\,dx\\ &= \frac{1}{4}\int \frac{(x^4)'}{1+(x^4)^2}\,dx\\ &= \frac{1}{4}\operatorname{arctg}(x^4)+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

4. Temos

$$\begin{aligned}\int \frac{5x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,dx &= 5\int \frac{x^2}{\sqrt{1-(x^3)^2}}\,dx\\ &= \frac{5}{3}\int \frac{3x^2}{\sqrt{1-(x^3)^2}}\,dx\\ &= \frac{5}{3}\int \frac{(x^3)'}{\sqrt{1-(x^3)^2}}\,dx\\ &= \frac{5}{3}\operatorname{arcsen}(x^3)+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{2+\operatorname{sen} x}\,dx &= \int \frac{(2+\operatorname{sen} x)'}{2+\operatorname{sen} x}\,dx\\ &= \ln|2+\operatorname{sen} x|+C\\ &= \ln(2+\operatorname{sen} x)+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1+x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int 2x(1+x^2)^{1/2}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{1/2}(1+x^2)'\,dx\\ &= \frac{1}{2}\,\frac{(1+x^2)^{1/2+1}}{1/2+1}+C\\ &= \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

7. Seja $a>0$. Temos

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx &= \int \frac{1}{a^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)}\,dx\\ &= \int \frac{1}{a}\,\frac{\frac{1}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx\\ &= \frac{1}{a}\int \frac{\left(\frac{x}{a}\right)'}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx\\ &= \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

8. Seja $a>0$. Temos

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{a^2\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}}\,dx\\ &= \int \frac{1}{a}\,\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,dx\\ &= \int \frac{\left(\frac{x}{a}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,dx\\ &= \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

9. Para todo o $n\in\mathbb{N}$ temos

9.1
$$\int \operatorname{sen}^n x\cos x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^{n+1} x}{n+1}+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,,$$

9.2
$$\int \cos^n x\operatorname{sen} x\,dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,,$$

9.3
$$\int \operatorname{tg}^n x\sec^2 x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{n+1} x}{n+1}+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,,$$

9.4
$$\int \operatorname{cotg}^n x\operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\frac{\operatorname{cotg}^{n+1} x}{n+1}+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,.$$

Suponhamos que pretendemos calcular

$$\int \operatorname{sen}(5x)\cos(3x)\,dx\,.$$

Atendendo a que

$$\operatorname{sen}(5x)\cos(3x) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(8x)+\operatorname{sen}(2x)) \tag{4.5}$$

temos

$$\int \operatorname{sen}(5x)\cos(3x)\,dx = \int \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(8x)+\operatorname{sen}(2x))\,dx\,,$$

que é uma primitiva imediata.

Temos então

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}(5x)\cos(3x)\,dx &= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(8x)\,dx+\frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(2x)\,dx\\ &= \frac{1}{16}\int 8\operatorname{sen}(8x)\,dx+\frac{1}{4}\int 2\operatorname{sen}(2x)\,dx\\ &= -\frac{1}{16}\cos(8x)-\frac{1}{4}\cos(2x)+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

Note-se que para a determinação da primitiva considerada foi fundamental a igualdade (4.5) que se obtém com facilidade das igualdades

$$\operatorname{sen}(5x+3x) = \operatorname{sen}(5x)\cos(3x)+\operatorname{sen}(3x)\cos(5x)$$

e

$$\operatorname{sen}(5x-3x) = \operatorname{sen}(5x)\cos(3x)-\operatorname{sen}(3x)\cos(5x)\,.$$

Utilizando processos análogos ao utilizado neste exemplo podemos transformar as primitivas de algumas funções trigonométricas em primitivas imediatas. No que se segue vamos utilizar esta estratégia para obter expressões para as primitivas de algumas funções trigonométricas.

1. Suponhamos que pretendemos calcular

$$\int \operatorname{sen}(\alpha x)\cos(\beta x)\,dx\,,$$

onde α e β são constantes reais não simultaneamente nulas.

Temos

$$\operatorname{sen}(\alpha x+\beta x) = \operatorname{sen}(\alpha x)\cos(\beta x)+\operatorname{sen}(\beta x)\cos(\alpha x) \tag{4.6}$$

e

$$\operatorname{sen}(\alpha x-\beta x) = \operatorname{sen}(\alpha x)\cos(\beta x)-\operatorname{sen}(\beta x)\cos(\alpha x)\,. \tag{4.7}$$

Somando membro a membro as igualdades (4.6) e (4.7) obtemos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha x)\cos(\beta x) &= \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(\alpha x+\beta x)+\operatorname{sen}(\alpha x-\beta x))\\ &= \frac{1}{2}(\operatorname{sen}((\alpha+\beta)x)+\operatorname{sen}((\alpha-\beta)x))\,.\end{aligned}$$

Consequentemente

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}(\alpha x)\cos(\beta x)\,dx &= \int \frac{1}{2}(\operatorname{sen}((\alpha+\beta)x)+\operatorname{sen}((\alpha-\beta)x))\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}((\alpha+\beta)x)\,dx+\frac{1}{2}\int \operatorname{sen}((\alpha-\beta)x))\,dx\,.\end{aligned}$$

Se $\alpha\neq-\beta$ e $\alpha\neq\beta$ temos então

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}(\alpha x)\cos(\beta x)\,dx &= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}((\alpha+\beta)x)\,dx+\frac{1}{2}\int \operatorname{sen}((\alpha-\beta)x))\,dx\\ &= \frac{1}{2(\alpha+\beta)}\int(\alpha+\beta)\operatorname{sen}((\alpha+\beta)x)\,dx+\\ &\quad+\frac{1}{2(\alpha-\beta)}\int(\alpha-\beta)\operatorname{sen}((\alpha-\beta)x))\,dx\\ &= -\frac{1}{2(\alpha+\beta)}\cos((\alpha+\beta)x)-\frac{1}{2(\alpha-\beta)}\cos((\alpha-\beta)x))+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

No caso em que $\alpha=-\beta$ e $\alpha\neq\beta$ obtemos

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}(\alpha x)\cos(-\alpha x)\,dx &= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(2\alpha x))\,dx\\ &= \frac{1}{4\alpha}\int(2\alpha)\operatorname{sen}(2\alpha x)\,dx\\ &= -\frac{1}{4\alpha}\cos(2\alpha x)+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

No caso em que $\alpha\neq-\beta$ e $\alpha=\beta$ obtemos

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}(\alpha x)\cos(\alpha x)\,dx &= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(2\alpha x)\,dx\\ &= \frac{1}{4\alpha}\int 2\alpha\operatorname{sen}(2\alpha x)\,dx\\ &= -\frac{1}{4\alpha}\cos(2\alpha x)+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

O caso em que $\alpha=-\beta$ e $\alpha=\beta$ apenas se verifica quando α e β são simultaneamente nulas e esta hipótese foi excluída à partida.

2. Suponhamos que pretendemos calcular

$$\int \cos(\alpha x)\cos(\beta x)\,dx\,,$$

onde α e β são constantes reais não simultaneamente nulas.

Temos

$$\cos(\alpha x+\beta x) = \cos(\alpha x)\cos(\beta x)-\operatorname{sen}(\beta x)\operatorname{sen}(\alpha x) \tag{4.8}$$

e

$$\cos(\alpha x-\beta x) = \cos(\alpha x)\cos(\beta x)+\operatorname{sen}(\beta x)\operatorname{sen}(\alpha x)\,. \tag{4.9}$$

Somando membro a membro as igualdades (4.8) e (4.9) obtemos

$$\begin{aligned} \cos(\alpha x)\,\cos(\beta x) &= \frac{1}{2}(cos(\alpha x+\beta x)+\cos(\alpha x-\beta x)) \\ &= \frac{1}{2}(\cos((\alpha+\beta)x)+\cos((\alpha-\beta)x))\ . \end{aligned}$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} \int \cos(\alpha x)\,\cos(\beta x)\,dx &= \int \frac{1}{2}(\cos((\alpha+\beta)x)+\cos((\alpha-\beta)x))\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int \cos((\alpha+\beta)x)\,dx+\frac{1}{2}\int \cos((\alpha-\beta)x))\,dx \end{aligned}$$

Se $\alpha \neq -\beta$ e $\alpha \neq \beta$ temos então

$$\begin{aligned} \int \cos(\alpha x)\,\cos(\beta x)\,dx &= \frac{1}{2}\int \cos((\alpha+\beta)x)\,dx+\frac{1}{2}\int \cos((\alpha-\beta)x))\,dx \\ &= \frac{1}{2(\alpha+\beta)}\int (\alpha+\beta)\,\cos((\alpha+\beta)x)\,dx+ \\ &\quad +\frac{1}{2(\alpha-\beta)}\int (\alpha-\beta)\,\cos((\alpha-\beta)x))\,dx \\ &= \frac{1}{2(\alpha+\beta)}\,\mathrm{sen}((\alpha+\beta)x)+\frac{1}{2(\alpha-\beta)}\,\mathrm{sen}((\alpha-\beta)x))+C\ ,\quad C\in\mathbb{R}\ . \end{aligned}$$

No caso em que $\alpha = -\beta$ e $\alpha \neq \beta$ obtemos

$$\begin{aligned} \int \cos(\alpha x)\,\cos(-\alpha x)\,dx &= \frac{1}{2}\int (\cos(2\alpha x)+1)\,dx \\ &= \frac{1}{4\alpha}\int (2\alpha)\,\cos(2\alpha x)\,dx+\int \frac{1}{2}\,dx \\ &= \frac{1}{4\alpha}\,\mathrm{sen}(2\alpha x)+\frac{1}{2}x+C\ ,\quad C\in\mathbb{R}\ . \end{aligned}$$

Observe-se que neste caso obtivemos o caso particular

$$\int \cos^2(\alpha x)\,dx$$

em que a fórmula trigonométrica utilizada é

$$\cos^2(\alpha x)=\frac{1}{2}(\cos(2\alpha x)+1)\ .$$

O caso em que $\alpha \neq -\beta$ e $\alpha = \beta$ reduz-se ao caso anterior já que a função coseno é uma função par.

O caso em que $\alpha = -\beta$ e $\alpha = \beta$ apenas se verifica quando α e β são simultaneamente nulos e esta hipótese foi excluída à partida.

3. Suponhamos que pretendemos calcular

$$\int \mathrm{sen}(\alpha x)\,\mathrm{sen}(\beta x)\,dx\ ,$$

onde α e β são constantes reais não simultaneamente nulas.

Subtraindo membro a membro a igualdade (4.8) à igualdade (4.9) obtemos

$$\begin{aligned} \mathrm{sen}(\alpha x)\,\mathrm{sen}(\beta x) &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha x-\beta x)-\cos(\alpha x+\beta x)) \\ &= \frac{1}{2}(\cos((\alpha-\beta)x)-\cos((\alpha+\beta)x))\ . \end{aligned}$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} \int \mathrm{sen}(\alpha x)\,\mathrm{sen}(\beta x)\,dx &= \int \frac{1}{2}(\cos((\alpha-\beta)x)-\cos((\alpha+\beta)x))\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int \cos((\alpha-\beta)x)\,dx-\frac{1}{2}\int \cos((\alpha+\beta)x))\,dx\ . \end{aligned}$$

Se $\alpha \neq -\beta$ e $\alpha \neq \beta$ temos então

$$\begin{aligned} \int \mathrm{sen}(\alpha x)\,\mathrm{sen}(\beta x)\,dx &= \frac{1}{2}\int \cos((\alpha-\beta)x)\,dx-\frac{1}{2}\int \cos((\alpha+\beta)x))\,dx \\ &= \frac{1}{2(\alpha-\beta)}\int (\alpha-\beta)\,\cos((\alpha-\beta)x)\,dx- \\ &\quad -\frac{1}{2(\alpha+\beta)}\int (\alpha+\beta)\,\cos((\alpha+\beta)x))\,dx \\ &= \frac{1}{2(\alpha-\beta)}\,\mathrm{sen}((\alpha-\beta)x)-\frac{1}{2(\alpha+\beta)}\,\mathrm{sen}((\alpha+\beta)x))+C\ ,\quad C\in\mathbb{R}\ . \end{aligned}$$

No caso em que $\alpha = \beta$ e $\alpha \neq -\beta$ obtemos

$$\begin{aligned} \int \mathrm{sen}(\alpha x)\,\mathrm{sen}(\alpha x)\,dx &= -\frac{1}{2}\int (\cos(2\alpha x)+1)\,dx \\ &= -\frac{1}{4\alpha}\int (2\alpha)\,\cos(2\alpha x)\,dx+\int \frac{1}{2}\,dx \\ &= -\frac{1}{4\alpha}\,\mathrm{sen}(2\alpha x)+\frac{1}{2}x+C\ ,\quad C\in\mathbb{R}\ . \end{aligned}$$

Observe-se que neste caso obtivemos o caso particular

$$\int \mathrm{sen}(\alpha x)\,dx$$

em que a fórmula trigonométrica utilizada é

$$\mathrm{sen}(\alpha x)=\frac{1}{2}(1-\cos(2\alpha x))\ .$$

O caso em que $\alpha \neq \beta$ e $\alpha = -\beta$ pode deduzir-se do caso anterior já que a função seno é uma função ímpar.

O caso em que $\alpha = -\beta$ e $\alpha = \beta$ apenas se verifica quando α e β são simultaneamente nulos e esta hipótese foi excluída à partida.

Exemplo 4.12. 1. Pretendemos calcular

$$\int \operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(7x)\,dx\,.$$

Uma vez que

$$\operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(7x) = \frac{1}{2}(\cos(5x)-\cos(9x))$$

temos

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(7x)\,dx &= \int \frac{1}{2}(\cos(5x)-\cos(9x))\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int \cos(5x)\,dx - \frac{1}{2}\int \cos(9x)\,dx\\ &= \frac{1}{10}\operatorname{sen}(5x) - \frac{1}{18}\operatorname{sen}(9x)+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

2. Pretendemos calcular

$$\int \cos(3x)\cos\left(\frac{5}{4}x\right)\,dx\,.$$

Atendendo a que

$$\cos(3x)\cos\left(\frac{5}{4}x\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{17}{4}x\right)+\cos\left(\frac{7}{4}x\right)\right)$$

temos

$$\begin{aligned}\int \cos(3x)\cos\left(\frac{5}{4}x\right)\,dx &= \int \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{17}{4}x\right)+\cos\left(\frac{7}{4}x\right)\right)\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int \cos\left(\frac{17}{4}x\right)\,dx + \frac{1}{2}\int \cos\left(\frac{7}{4}x\right)\,dx\\ &= \frac{2}{17}\operatorname{sen}\left(\frac{17}{4}x\right) + \frac{2}{7}\operatorname{sen}\left(\frac{7}{4}x\right)+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

Exercícios 4.1

Em cada um dos exercícios que se seguem determine o integral indefinido considerado.

1. $\int \left(4x^3-5x+9\right)\,dx$
2. $\int \frac{1}{x^2+7}\,dx$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$
4. $\int \cos x\,\operatorname{sen}^3 x\,dx$

5. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,dx$
6. $\int x^{-1}(\ln x)^3\,dx$
7. $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\,dx$
8. $\int \frac{1}{\sqrt{8-x^2}}\,dx$
9. $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$
10. $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$
11. $\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx$
12. $\int \frac{e^{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
13. $\int \left(4x^3-5x+9\right)\,dx$
14. $\int \frac{1}{x^2+7}\,dx$
15. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$
16. $\int \cos x\,\operatorname{sen}^3 x\,dx$
17. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,dx$
18. $\int x^{-1}(\ln x)^3\,dx$
19. $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\,dx$
20. $\int \frac{1}{\sqrt{8-x^2}}\,dx$
21. $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$
22. $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$
23. $\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx$
24. $\int \frac{e^{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Primitivação por partes

Nesta secção apresentamos um método de primitivação que é consequência imediata da regra da derivada do produto de duas funções.

Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$, F e G duas funções diferenciáveis em I e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = F'(x)G(x) ,$$

para todo o $x \in I$.

Vamos ver que a função f é primitivável e deduzir uma fórmula para o cálculo do seu integral indefinido.

Como F e G são funções diferenciáveis em I temos que FG é uma função diferenciável em I e, pela regra da derivada do produto de duas funções, temos

$$(FG)'(x) = (F(x)G(x))' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x) ,$$

para todo o $x \in I$, ou seja,

$$F'(x)G(x) = (F(x)G(x))' - F(x)G'(x) ,$$

para todo o $x \in I$.

Temos então

$$\begin{aligned} \int F'(x)G(x)\,dx &= \int ((F(x)G(x))' - F(x)G'(x))\,dx \\ &= \int (F(x)G(x))'\,dx - \int F(x)G'(x))\,dx. \end{aligned}$$

Uma vez que a função FG é uma primitiva de $(FG)'$ obtemos então

$$\int F'(x)G(x)\,dx = F(x)G(x) - \int F(x)G'(x))\,dx . \tag{4.10}$$

À igualdade (4.10) chamamos **fórmula de primitivação por partes**.

Do exposto resulta que a fórmula de primitivação por partes se aplica a todas as funções que se podem decompor num produto de dois factores tais que é conhecida uma primitiva de, pelo menos, um dos factores.

Como veremos nos exemplos que se seguem, em alguns casos o cálculo da primitiva envolve a utilização da fórmula da primitivação por partes mais do que uma vez.

Exemplo 4.13. 1. Vamos calcular

$$\int x \ln x\,dx .$$

A função integranda é o produto da função u definida por $u(x) = x$ pela função v definida por $v(x) = \ln x$. Note-se que conhecemos uma primitiva de u mas não conhecemos uma primitiva de v pelo que podemos calcular a primitiva considerada usando a técnica de primitivação por partes.

Atendendo a que conhecemos uma primitiva de u mas não conhecemos uma primitiva de v, para

aplicação da fórmula de primitivação por partes temos de tomar $u = F'$ e $v = G$.

Consequentemente temos

$$F(x) = \frac{x^2}{2}$$

e

$$G'(x) = \frac{1}{x} .$$

Atendendo a (4.10) temos então

$$\begin{aligned} \int x \ln x\,dx &= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C , \quad C \in \mathbb{R} . \end{aligned}$$

2. Pretendemos calcular

$$\int (x+1)\cos x\,dx .$$

Uma vez que a função integranda é o produto da função u definida por $u(x) = x+1$ pela função v definida por $v(x) = \cos x$ e conhecemos uma primitiva de pelo menos um dos factores, vamos calcular a primitiva considerada usando a técnica de primitivação por partes.

Uma vez que conhecemos uma primitiva de cada um dos factores, para aplicação da fórmula de primitivação por partes tanto podemos tomar $u = F'$ e $v = G$ como podemos tomar $v = F'$ e $u = G$.

Vamos ver que apenas uma das escolhas nos conduz a bons resultados.

Vamos tomar $u = F'$ e $v = G$. Consequentemente temos

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + x$$

e

$$G'(x) = -\operatorname{sen} x .$$

Atendendo a (4.10) temos então

$$\int (x+1)\cos x\,dx = -\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\operatorname{sen} x - \int \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\cos x\,dx$$

e a primitiva a calcular no segundo membro da igualdade é mais complicada do que a que tínhamos inicialmente.

Vamos então escolher $v = F'$ e $u = G$ e temos

$$F(x) = \operatorname{sen} x$$

e

$$G'(x) = 1\,.$$

Utilizando a fórmula de primitivação por partes temos então

$$\begin{aligned}\int (x+1)\cos x\,dx &= (x+1)\,\mathrm{sen}\,x - \int \mathrm{sen}\,x\,dx\\ &= (x+1)\,\mathrm{sen}\,x + \cos x + C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

3. Pretendemos calcular

$$\int x^2\,\mathrm{e}^{2x}\,dx\,.$$

Uma vez que a função integranda é o produto da função u definida por $u(x) = x^2$ pela função v definida por $v(x) = \mathrm{e}^{2x}$ e conhecemos uma primitiva de u e uma primitiva de v vamos calcular a primitiva considerada usando a técnica de primitivação por partes.

Uma vez mais, aparentemente, para aplicação da fórmula de primitivação por partes tanto podemos tomar $u = F'$ e $v = G$ como podemos tomar $v = F'$ e $u = G$ e, tal como no caso anterior, vamos ver que apenas uma das escolhas nos conduz a bons resultados.

Vamos tomar $u = F'$ e $v = G$. Consequentemente temos

$$F(x) = \frac{x^3}{3}$$

e

$$G'(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x}\,.$$

Atendendo a (4.10) temos então

$$\int x^2\,\mathrm{e}^{2x}\,dx = \frac{x^3}{3}\,\mathrm{e}^{2x} - \int \frac{x^3}{3}\,\mathrm{e}^{2x}\,dx$$

e a primitiva a calcular no segundo membro da igualdade é mais complicada do que a que tínhamos inicialmente.

Vamos então escolher $v = F'$ e $u = G$ e temos

$$F(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}$$

e

$$G'(x) = 2x\,.$$

Utilizando a fórmula de primitivação por partes temos então

$$\begin{aligned}\int x^2\,\mathrm{e}^{2x}\,dx &= x^2\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} - \int 2x\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^{2x} - \int x\,\mathrm{e}^{2x}\,dx\end{aligned}$$

Para o cálculo de

$$\int x\,\mathrm{e}^{2x}\,dx$$

vamos usar uma vez mais a técnica de primitivação por partes.

Tendo em atenção o que foi dito anteriormente devemos tomar $F'(x) = \mathrm{e}^{2x}$ e $G(x) = x$.

Temos então

$$F(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}$$

e

$$G'(x) = 1$$

pelo que aplicando (4.10) vem

$$\begin{aligned}\int x\,\mathrm{e}^{2x}\,dx &= \frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{2x} - \int \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}\,dx\\ &= \frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{2x} + C'\,,\quad C'\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Substituindo na igualdade obtida anteriormente temos

$$\int x^2\,\mathrm{e}^{2x}\,dx = \frac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{2x} + C\,,$$

com $C = -C' \in \mathbb{R}$.

4. Pretendemos calcular

$$\int \ln x\,dx\,.$$

Neste caso a função integranda é o produto da função u definida por $u(x) = 1$ pela função v definida por $v(x) = \ln x$.

Uma vez que conhecemos uma primitiva de pelo menos um dos factores podemos usar a técnica de primitivação por partes.

Atendendo a que conhecemos uma primitiva de u e não conhecemos uma primitiva de v, para aplicar a fórmula de primitivação por partes temos de tomar $u = F'$ e $v = G$.

Consequentemente temos

$$F(x) = x$$

e

$$G'(x) = \frac{1}{x}\,.$$

Utilizando a fórmula (4.10) temos então

$$\begin{aligned}\int \ln x\,dx &= x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx\\ &= x\ln x - \int dx\\ &= x\ln x - x + C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

5. Para calcular o integral indefinido
$$\int e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx \, .$$
vamos utilizar duas vezes a técnica de primitivação por partes por forma a obter no segundo membro da igualdade o integral indefinido que pretendemos calcular.

Neste caso a função integranda é o produto da função u definida por $u(x) = e^{-x}$ pela função v definida por $v(x) = \operatorname{sen} x$ e é indiferente tomar $u = F'$ e $v = G$ ou tomar $u = G$ e $v = F'$.

Fazendo $u = F'$ e $v = G$ temos
$$F(x) = -e^{-x}$$
e
$$G'(x) = \cos x \, .$$

Utilizando a fórmula de primitivação por partes temos então
$$\int e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx = -e^{-x} \operatorname{sen} x + \int e^{-x} \cos x \, dx \, . \tag{4.11}$$

Vamos aplicar aplicar a fórmula de primitivação por partes ao integral indefinido
$$\int e^{-x} \cos x \, dx$$
fazendo $F'(x) = e^{-x}$ e $G(x) = \cos x$.

Atendendo a que então $F(x) = -e^{-x}$ e $G'(x) = -\operatorname{sen} x$ temos
$$\int e^{-x} \cos x \, dx = -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \operatorname{sen} x \, .$$

Substituindo em (4.11) obtemos
$$\int e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx = -e^{-x} \operatorname{sen} x - e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx \, ,$$
ou seja,
$$2 \int e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx = -e^{-x} \operatorname{sen} x - e^{-x} \cos x + C' \, , \quad C' \in \mathbb{R} \, ,$$
donde obtemos
$$\int e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx = -\frac{1}{2}(e^{-x} \operatorname{sen} x - e^{-x} \cos x) + C$$
com $C = \frac{1}{2} C'$ constante real arbitrária.

Nota: Quando usamos a técnica descrita neste exemplo para o cálculo de primitivas devemos ter cuidado com a escolha de F' e G em cada passo para não entrarmos em círculo.

Observemos que se tivéssemos tomado $F'(x) = \cos x$ e $G(x) = e^{-x}$ para o cálculo da primitiva

$\int e^{-x} \cos x \, dx$ na igualdade
$$\int e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx = -e^{-x} \operatorname{sen} x + \int e^{-x} \cos x \, dx$$
obteríamos
$$\int e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx = -e^{-x} \operatorname{sen} x + e^{-x} \operatorname{sen} x + \int e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx \, ,$$
ou seja
$$\int e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx = \int e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx \, ,$$
igualdade esta que não serve os nossos objectivos.

Como veremos no que se segue, a técnica de primitivação por partes pode ser usada para calcular primitivas de algumas potências de funções trigonométricas.

- Primitiva de uma potência da função coseno

Suponhamos que pretendemos calcular
$$\int \cos^n x \, dx \, ,$$
com n um número natural maior do que ou igual a dois.

Primeiro caso: n é um número ímpar maior do que ou igual a 3.

No caso em que $n = 3$ basta atender a que $\cos^3 x = \cos^2 x \cos x$ e a que $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ e temos
$$\begin{aligned} \int \cos^3 x \, dx &= \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x \, dx \\ &= \int \cos x \, dx - \int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx \\ &= \operatorname{sen} x - \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 x + C \, , \quad C \in \mathbb{R} \, . \end{aligned}$$

No caso em que $n > 3$ atendemos a que
$$\int \cos^n x \, dx = \int \cos^{n-1} x \cos x \, dx$$
e usamos a técnica de primitivação por partes tomando
$$F'(x) = \cos x$$
e
$$G(x) = \cos^{n-1} x \, .$$

Temos então
$$F(x) = \operatorname{sen} x$$

e

$$G'(x) = -(n-1)\cos^{n-2}x\,\mathrm{sen}\,x$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\int \cos^n x\,dx &= \int \cos^{n-1}x\cos x\,dx\\
&= \cos^{n-1}x\,\mathrm{sen}\,x + \int \mathrm{sen}\,x(n-1)\cos^{n-2}x\,\mathrm{sen}\,x\,dx\\
&= \cos^{n-1}x\,\mathrm{sen}\,x + \int (n-1)\cos^{n-2}x\,\mathrm{sen}^2x\,dx\,.
\end{aligned}$$

Uma vez que $\mathrm{sen}^2 x = 1-\cos^2 x$ temos

$$\int \cos^n x\,dx = \cos^{n-1}x\,\mathrm{sen}\,x + (n-1)\int \cos^{n-2}x\,dx - (n-1)\int cos^{n-1}x\,dx\,,$$

ou seja,

$$n\int \cos^n x\,dx = \cos^{n-1}x\,\mathrm{sen}\,x + (n-1)\int \cos^{n-2}x\,dx\,.$$

Uma vez que $n-2$ é um número par, para calcular a primitiva

$$\int \cos^{n-2}x\,dx$$

utilizamos sucessivamente o processo indicado até se obter

$$\int \cos^3 x\,dx$$

que se calcula pelo processo já indicado.

Segundo caso: n é um número par.

No caso em que $n=2$ basta atender a que $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ e temos

$$\begin{aligned}
\int \cos^2 x\,dx &= \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx\\
&= \int \frac{1}{2}\,dx + \int \frac{\cos(2x)}{2}\,dx\\
&= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(2x) + C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

No caso em que $n>2$ temos $n=2k$ com $k\in\mathbb{N}$, $k>1$. Então

$$\begin{aligned}
\int \cos^n x\,dx &= \int \cos^{2k}x\,dx\\
&= \int (\cos^2 x)^k\,dx\\
&= \int \left(\frac{1}{2}+\frac{\cos(2x)}{2}\right)^k dx\\
&= \int \frac{1}{2^k}(1+\cos(2x))^k\,dx.
\end{aligned}$$

Desenvolvemos a potência $(1+\cos(2x))^k$ utilizando a fórmula do Binómio de Newton e obtemos uma soma de primitivas de potências de $\cos(2x)$.

As primitivas das potências de ordem ímpar são calculadas pelo processo anteriormente indicado e as de ordem par calculam-se utilizando o processo indicado, até se obter a potência de ordem 2.

Exemplo 4.14. 1. Vamos calcular

$$\int \cos^5 x\,dx\,.$$

Uma vez que se trata de uma potência de ordem ímpar da função coseno, atendemos a que $\cos^5 x = \cos^4 x\cdot\cos x$ e utilizamos a técnica de primitivação por partes tomando $F'(x)=\cos x$ e $G(x)=\cos^4 x$.

Temos então $F(x)=\mathrm{sen}\,x$ e $G'(x) = -4\cos^3 x\,\mathrm{sen}\,x$ e, portanto,

$$\begin{aligned}
\int \cos^5 x\,dx &= \int \cos^4 x\cdot\cos x\,dx\\
&= \mathrm{sen}\,x\cos^4 x + \int 4\cos^3 x\,\mathrm{sen}^2 x\,dx\\
&= \mathrm{sen}\,x\cos^4 x + \int 4\cos^3 x(1-\cos^2 x)\,dx\\
&= \mathrm{sen}\,x\cos^4 x + \int 4\cos^3 x\,dx - 4\int \cos^5 x\,dx\,.
\end{aligned}$$

Temos então

$$\int \cos^5 x\,dx = \mathrm{sen}\,x\cos^4 x + \int 4\cos^3 x\,dx - 4\int \cos^5 x\,dx$$

donde resulta que

$$5\int \cos^5 x\,dx = \mathrm{sen}\,x\cos^4 x + 4\int \cos^3 x\,dx\,,$$

ou seja,

$$\int \cos^5 x\,dx = \frac{1}{5}\mathrm{sen}\,x\cos^4 x + \frac{4}{5}\int \cos^3 x\,dx\,.$$

Como já vimos, para calcular $\int \cos^3 x\,dx$ atendemos a que $\cos^3 x = \cos x\cos^2 x = \cos x - \cos x\,\mathrm{sen}^2 x$ e temos

$$\begin{aligned}
\int \cos^5 x\,dx &= \frac{1}{5}\mathrm{sen}\,x\cos^4 x + \frac{4}{5}\int \cos x\,dx - \frac{4}{5}\int \cos x\,\mathrm{sen}^2 x\,dx\\
&= \frac{1}{5}\mathrm{sen}\,x\cos^4 x + \frac{4}{5}\,\mathrm{sen}\,x - \frac{4}{15}\,\mathrm{sen}^3 x + C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

2. Calcular

$$\int \cos^6 x\,dx\,.$$

Uma vez que se trata de uma potência de ordem par da função coseno atendemos a que

$\cos^6 x = (\cos^2 x)^3$ e a que $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$ e obtemos

$$\begin{aligned}
\int \cos^6 x\,dx &= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)\right)^3 dx \\
&= \int \frac{1}{8}(1+\cos(2x))^3\,dx \\
&= \frac{1}{8}\int (1+3\cos(2x)+3\cos^2(2x)+\cos^3(2x))\,dx \\
&= \frac{1}{8}x + \frac{3}{16}\,\mathrm{sen}(2x) + \frac{3}{8}\int \cos^2(2x)\,dx + \frac{1}{8}\int \cos^3(2x)\,dx \\
&= \frac{1}{8}x + \frac{3}{16}\,\mathrm{sen}(2x) + \frac{3}{8}\int \cos^2(2x)\,dx + \frac{1}{8}\int \cos^2(2x)\cos(2x)\,dx \\
&= \frac{1}{8}x + \frac{3}{16}\,\mathrm{sen}(2x) + \frac{3}{8}\int \cos^2(2x)\,dx + \frac{1}{8}\int (1-\mathrm{sen}^2(2x))\cos(2x)\,dx \\
&= \frac{1}{8}x + \frac{3}{16}\,\mathrm{sen}(2x) + \frac{3}{8}\int \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(4x)\right) dx + \\
&\quad + \frac{1}{8}\int (\cos(2x) - \cos(2x)\,\mathrm{sen}^2(2x))\,dx \\
&= \frac{1}{8}x + \frac{3}{16}\,\mathrm{sen}(2x) + \frac{3}{16}x + \frac{3}{64}\,\mathrm{sen}(4x) + \frac{1}{16}\,\mathrm{sen}(2x) - \frac{1}{48}\,\mathrm{sen}^3(2x) + C\,, \quad C \in \mathbb{R} \\
&= \frac{5}{16}x + \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(2x) + \frac{3}{64}\,\mathrm{sen}(4x) - \frac{1}{48}\,\mathrm{sen}^3(2x) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Observação 4.15. Podemos calcular $\int \cos^n x\,dx$ com n ímpar sem recorrer à técnica de primitivação por partes. De facto, temos

$$\int \cos^n x\,dx = \int \cos^{n-1} x \cos x\,dx$$

e, como n é um número ímpar, temos que $n-1$ é um número par e, portanto,

$$\int \cos^{n-1} x\cos x\,dx = \int (\cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \cos x\,dx = \int (1-\mathrm{sen}^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \cos x\,dx$$

que se converte numa soma de primitivas imediatas.

Exemplo 4.16. Vamos calcular $\int \cos^5 x\,dx$ utilizando a técnica descrita na Observação 4.15. Temos então

$$\begin{aligned}
\int \cos^5 x\,dx &= \int \cos^4 x\cos x\,dx \\
&= \int (\cos^2 x)^2 \cos x\,dx \\
&= \int (1-\mathrm{sen}^2 x)^2 \cos x\,dx \\
&= \int (1-2\,\mathrm{sen}^2 x + \mathrm{sen}^4 x)\cos x\,dx \\
&= \int (\cos x - 2\,\mathrm{sen}^2 x\cos x + \mathrm{sen}^4 x\cos x)\,dx \\
&= \mathrm{sen}\,x - \frac{2}{3}\,\mathrm{sen}^3 x + \frac{1}{5}\,\mathrm{sen}^5 x + C\,, \quad C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

- Primitiva de uma potência da função seno.

Suponhamos que pretendemos calcular

$$\int \mathrm{sen}^n x\,dx\,,$$

com n número natural maior do que ou igual a dois.

Primeiro caso: n é um número ímpar maior do que ou igual a 3

No caso em que $n = 3$ basta atender a que $\mathrm{sen}^3 x = \mathrm{sen}^2 x\,\mathrm{sen}\,x$ e a que $\mathrm{sen}^2 x = 1-\cos^2 x$ e temos

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{sen}^3 x\,dx &= \int (1-\cos^2 x)\,\mathrm{sen}\,x\,dx \\
&= \int \mathrm{sen}\,x\,dx - \int \cos^2 x\,\mathrm{sen}\,x\,dx \\
&= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

No caso em que $n > 3$ atendemos a que

$$\int \mathrm{sen}^n x\,dx = \int \mathrm{sen}^{n-1} x\,\mathrm{sen}\,x\,dx$$

e usamos a técnica de primitivação por partes tomando

$$F'(x) = \mathrm{sen}\,x$$

e

$$G(x) = \mathrm{sen}^{n-1} x\,.$$

Temos então

$$F(x) = -\cos x$$

e

$$G'(x) = (n-1)\,\mathrm{sen}^{n-2} x\cos x$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{sen}^n x\,dx &= \int \mathrm{sen}^{n-1} x\,\mathrm{sen}\,x\,dx \\
&= -\cos x\,\mathrm{sen}^{n-1} x + \int \cos x (n-1)\,\mathrm{sen}^{n-2} x\cos x\,dx \\
&= -\cos x\,\mathrm{sen}^{n-1} x + \int (n-1)\cos^2 x\,\mathrm{sen}^{n-2} x\,dx\,.
\end{aligned}$$

Uma vez que $\cos^2 x = 1 - \mathrm{sen}^2 x$ temos

$$\int \mathrm{sen}^n x\,dx = -\cos x\,\mathrm{sen}^{n-1} x + (n-1)\int \mathrm{sen}^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \mathrm{sen}^{n-1} x\,dx\,,$$

ou seja,
$$n\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\cos x\,\operatorname{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx\,.$$

Uma vez que $n-2$ é um número ímpar, para calcular a primitiva
$$\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx$$
utilizamos sucessivamente o processo indicado até se obter
$$\int \operatorname{sen}^3 x\,dx\,.$$

Segundo caso: n é um número par.

No caso em que $n=2$ basta atender a que $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$ e temos
$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x\,dx &= \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx\\ &= \int \frac{1}{2}\,dx - \int \frac{\cos(2x)}{2}\,dx\\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

No caso em que $n>2$ temos $n=2k$ com $k\in\mathbb{N}$, $k>1$. Então
$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^n x\,dx &= \int \operatorname{sen}^{2k}x\,dx\\ &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^k\,dx\\ &= \int \left(\frac{1}{2}-\frac{\cos(2x)}{2}\right)^k dx\\ &= \int \frac{1}{2^k}(1-\cos(2x))^k\,dx\end{aligned}$$

Desenvolvemos a potência $(1-\cos(2x))^k$ utilizando a fórmula do Binómio de Newton e obtemos uma soma de primitivas de potências de $\cos(2x)$ que se calculam pelos métodos já indicados.

Exemplo 4.17. 1. Vamos calcular
$$\int \operatorname{sen}^5 x\,dx\,.$$

Uma vez que se trata de uma potência de ordem ímpar da função seno, atendemos a que $\operatorname{sen}^5 x = \operatorname{sen}^4 x\cdot \operatorname{sen} x$ e utilizamos a técnica de primitivação por partes tomando $F'(x) = \operatorname{sen} x$ e $G(x) = \operatorname{sen}^4 x$.

Temos então $F(x) = -\cos x$ e $G'(x) = 4\operatorname{sen}^3 x\cos x$ e, portanto,
$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^5 x\,dx &= \int \operatorname{sen}^4 x\cdot\operatorname{sen} x\,dx\\ &= -\operatorname{sen}^4 x\cos x + \int 4\cos^2 x\operatorname{sen}^3 x\,dx\\ &= -\operatorname{sen}^4 x\cos x + \int 4\operatorname{sen}^3 x(1-\operatorname{sen}^2 x)\,dx\\ &= -\operatorname{sen}^4 x\cos x + 4\int \operatorname{sen}^3 x\,dx - 4\int \operatorname{sen}^5 x\,dx\,.\end{aligned}$$

Temos então
$$\int \operatorname{sen}^5 x\,dx = -\operatorname{sen}^4 x\cos x + 4\int \operatorname{sen}^3 x\,dx - 4\int \operatorname{sen}^5 x\,dx$$
donde resulta que
$$5\int \operatorname{sen}^5 x\,dx = -\operatorname{sen}^4 x\cos x + 4\int \operatorname{sen}^3 x\,dx\,,$$
ou seja,
$$\int \operatorname{sen}^5 x\,dx = -\frac{1}{5}\operatorname{sen}^4 x\cos x + \frac{4}{5}\int \operatorname{sen}^3 x\,dx\,.$$

Como já vimos, para calcular $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$ atendemos a que $\operatorname{sen}^3 x = \operatorname{sen} x\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x - \cos^2 x\operatorname{sen} x$ e temos
$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^5 x\,dx &= -\frac{1}{5}\operatorname{sen}^4 x\cos x + \frac{4}{5}\int \operatorname{sen} x\,dx - \frac{4}{5}\int \cos^2 x\operatorname{sen} x\,dx\\ &= -\frac{1}{5}\operatorname{sen}^4 x\cos x - \frac{4}{5}\cos x + \frac{4}{15}\cos^3 x + C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

2. Calcular
$$\int \operatorname{sen}^4 x\,dx\,.$$

Uma vez que se trata de uma potência de ordem par da função seno atendemos a que $\operatorname{sen}^4 x = (\operatorname{sen}^2 x)^2$ e a que $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$ e obtemos
$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^4 x\,dx &= \int \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)^2 dx\\ &= \int \frac{1}{4}(1-\cos(2x))^2\,dx\\ &= \frac{1}{4}\int (1-2\cos(2x)+\cos^2(2x))\,dx\\ &= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{4}\int \cos^2(2x)\,dx\\ &= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(4x)\right) dx\\ &= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x) + C\,,\quad C\in\mathbb{R}\\ &= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{8}\operatorname{sen}(4x) + C\,,\quad C\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Observação 4.18. Tal como no caso das potências de expoente ímpar do coseno, podemos calcular $\int \operatorname{sen}^n x\,dx$ com n ímpar sem recorrer à técnica de primitivação por partes. De facto, temos

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = \int \operatorname{sen}^{n-1} x \operatorname{sen} x\,dx$$

e, como n é um número ímpar, temos que $n-1$ é um número par e, portanto,

$$\int \operatorname{sen}^{n-1} x \operatorname{sen} x\,dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{sen} x\,dx = \int (1-\cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{sen} x\,dx$$

que se converte numa soma de primitivas imediatas.

Exemplo 4.19. Vamos calcular $\int \operatorname{sen}^5 x\,dx$ utilizando a técnica descrita na Observação 4.18. Temos então

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^5 x\,dx &= \int \operatorname{sen}^4 x \operatorname{sen} x\,dx \\
&= \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \operatorname{sen} x\,dx \\
&= \int (1-\cos^2 x)^2 \operatorname{sen} x\,dx \\
&= \int (1-2\cos^2 x+\cos^4 x) \operatorname{sen} x\,dx \\
&= \int (\operatorname{sen} x - 2\cos^2 x \operatorname{sen} x + \cos^4 x \operatorname{sen} x)\,dx \\
&= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C\,, \quad C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

- Primitiva de uma potência da função secante.

Suponhamos que pretendemos calcular

$$\int \sec^n x\,dx\,,$$

onde n é um número natural.

Primeiro caso: n é um número ímpar

No caso em que $n=1$ atendemos a que $(\sec x)' = \sec x \operatorname{tg} x$ e a que $(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x$ e procedemos do modo seguinte

$$\begin{aligned}
\int \sec x\,dx &= \int \frac{\sec x(\sec x + \operatorname{tg} x)}{\sec x + \operatorname{tg} x}\,dx \\
&= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x}\,dx \\
&= \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C\,, C \quad \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

No caso em que $n=3$ basta atender a que $\sec^3 x = \sec^2 x \sec x$ e utilizamos a técnica de primitivação por partes tomando $F'(x) = \sec^2 x$ e $G(x) = \sec x$.

Temos então $F(x) = \operatorname{tg} x$ e $G'(x) = \sec x \operatorname{tg} x$ e, portanto,

$$\begin{aligned}
\int \sec^3 x\,dx &= \operatorname{tg} x \sec x - \int \sec x \operatorname{tg}^2 x\,dx \\
&= \operatorname{tg} x \sec x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)\,dx \\
&= \operatorname{tg} x \sec x - \int (\sec^3 x - \sec x)\,dx \\
&= \operatorname{tg} x \sec x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx
\end{aligned}$$

donde resulta que

$$2\int \sec^3 x\,dx = \operatorname{tg} x \sec x + \int \sec x\,dx\,,$$

ou seja,

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x \sec x + \frac{1}{2}\int \sec x\,dx$$

donde se conclui que

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x \sec x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

No caso em que $n > 3$ atendemos a que

$$\int \sec^n x\,dx = \int \sec^{n-2} x \sec^2 x\,dx$$

e usamos a técnica de primitivação por partes tomando

$$F'(x) = \sec^2 x$$

e

$$G(x) = \sec^{n-2} x\,.$$

Temos então

$$F(x) = \operatorname{tg} x$$

e

$$G'(x) = (n-2)\sec^{n-3} x \sec x \operatorname{tg} x = (n-2)\sec^{n-2} x \operatorname{tg} x$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\int \sec^n x\,dx &= \int \sec^{n-1} x \sec x\,dx \\
&= \sec^{n-2} x \operatorname{tg} x - \int (n-2)\sec^{n-2} x \operatorname{tg}^2 x\,dx \\
&= \sec^{n-2} x \operatorname{tg} x - (n-2)\int \sec^{n-2} x(\sec^2 x - 1)\,dx \\
&= \sec^{n-2} x \operatorname{tg} x - (n-2)\int \sec^n x\,dx + (n-2)\int \sec^{n-2} x\,dx\,,
\end{aligned}$$

donde resulta

$$(n-1)\int \sec^n x\,dx = \sec^{n-2} x\,\mathrm{tg}\,x + (n-2)\int \sec^{n-2} x\,dx\,,$$

ou seja,

$$\int \sec^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} x\,\mathrm{tg}\,x + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\,dx\,.$$

Uma vez que $n-2$ é um número ímpar, para calcular a primitiva

$$\int \sec^{n-2} x\,dx$$

utilizamos sucessivamente o processo indicado até se obter

$$\int \sec^3 x\,dx\,.$$

Segundo caso: n é um número par.

No caso em que $n=2$ basta atender a que $(\mathrm{tg}\,x)' = \sec^2 x$ e temos uma primitiva imediata.

No caso em que $n>2$ atendemos a que $\sec^n x = \sec^{n-2} x \cdot \sec^2 x$ e utilizamos a técnica de primitivação por partes fazendo $F'(x) = \sec^2 x$ e $G(x) = \sec^{n-2} x$.

Temos então $F(x) = \mathrm{tg}\,x$ e $G'(x) = (n-2)\sec^{n-2} x\,\mathrm{tg}\,x$ e, portanto,

$$\begin{aligned}
\int \sec^n x\,dx &= \int \sec^{n-2} x \sec^2 x\,dx \\
&= \sec^{n-2} x\,\mathrm{tg}\,x - \int (n-2)\sec^{n-2} x\,\mathrm{tg}^2 x\,dx \\
&= \sec^{n-2} x\,\mathrm{tg}\,x - (n-2)\int \sec^{n-2} x(\sec^2 x - 1)\,dx \\
&= \sec^{n-2} x\,\mathrm{tg}\,x - (n-2)\int \sec^n x\,dx + (n-2)\int \sec^{n-2} x\,dx\,,
\end{aligned}$$

donde resulta

$$(n-1)\int \sec^n x\,dx = \sec^{n-2} x\,\mathrm{tg}\,x + (n-2)\int \sec^{n-2} x\,dx\,,$$

ou seja,

$$\int \sec^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} x\,\mathrm{tg}\,x + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\,dx\,.$$

Uma vez que $n-2$ é um número par, para calcular a primitiva

$$\int \sec^{n-2} x\,dx$$

utilizamos sucessivamente o processo indicado até se obter

$$\int \sec^2 x\,dx\,.$$

Exemplo 4.20. 1. Calcular

$$\int \sec^5 x\,dx\,.$$

Uma vez que se trata de uma potência de ordem ímpar da função secante, atendemos a que $\sec^5 x = \sec^3 x \sec^2 x$ e utilizamos a técnica de primitivação por partes fazendo $F'(x) = \sec^2 x$ e $G(x) = \sec^3 x$.

Temos então $F(x) = \mathrm{tg}\,x$ e $G'(x) = 3\sec^2 x \sec x\,\mathrm{tg}\,x = 3\sec^3 x\,\mathrm{tg}\,x$ e, portanto,

$$\begin{aligned}
\int \sec^5 x\,dx &= \sec^3 x\,\mathrm{tg}\,x - \int 3\sec^3 x\,\mathrm{tg}^2 x\,dx \\
&= \sec^3 x\,\mathrm{tg}\,x - 3\int \sec^3 x(\sec^2 x - 1)\,dx \\
&= \sec^3 x\,\mathrm{tg}\,x - 3\int \sec^5 x\,dx + 3\int \sec^3 x\,dx\,.
\end{aligned}$$

Consequentemente

$$\int \sec^5 x\,dx = \sec^3 x\,\mathrm{tg}\,x - 3\int \sec^5 x\,dx + 3\int \sec^3 x\,dx\,,$$

ou seja,

$$4\int \sec^5 x\,dx = \sec^3 x\,\mathrm{tg}\,x + 3\int \sec^3 x\,dx\,,$$

donde resulta que

$$\int \sec^5 x\,dx = \frac{1}{4}\sec^3 x\,\mathrm{tg}\,x + \frac{3}{4}\int \sec^3 x\,dx\,.$$

Como já vimos, para calcular $\int \sec^3 x\,dx$ basta atender a que $\sec^3 x = \sec^2 x \sec x$ e utilizar a técnica de primitivação por partes fazendo $F'(x) = \sec^2 x$ e $G(x) = \sec x$.

Obtém-se então

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{tg}\,x \sec x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \mathrm{tg}\,x| + C'\,, \quad C' \in \mathbb{R}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\int \sec^5 x\,dx &= \frac{1}{4}\sec^3 x\,\mathrm{tg}\,x + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\mathrm{tg}\,x \sec x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \mathrm{tg}\,x| + C'\right)\,, \quad C' \in \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{4}\sec^3 x\,\mathrm{tg}\,x + \frac{3}{8}\mathrm{tg}\,x \sec x + \frac{3}{8}\ln|\sec x + \mathrm{tg}\,x| + C\,,
\end{aligned}$$

com $C = \frac{3}{4}C'$ constante real arbitrária.

2. Calcular

$$\int \sec^6 x\,dx\,.$$

Uma vez que se trata de uma potência de ordem par da função secante atendemos a que $\sec^6 x = \sec^4 x \sec^2 x$ e utilizamos a técnica de primitivação por partes fazendo $F'(x) = \sec^2 x$ e $G(x) = \sec^4 x$.

Temos então $F(x) = \operatorname{tg} x$ e $G'(x) = 4\sec^3 x \sec x \operatorname{tg} x = 4\sec^4 x \operatorname{tg} x$ e, portanto,

$$\begin{aligned}\int \sec^6 x\,dx &= \sec^4 x \operatorname{tg} x - \int 4\sec^4 x \operatorname{tg}^2 x\,dx \\ &= \sec^4 x \operatorname{tg} x - 4\int \sec^4 x(\sec^2 x - 1)\,dx \\ &= \sec^4 x \operatorname{tg} x - 4\int \sec^6 x\,dx + 4\int \sec^4 x\,dx\,.\end{aligned}$$

Consequentemente

$$\int \sec^6 x\,dx = \sec^4 x \operatorname{tg} x - 4\int \sec^6 x\,dx + 4\int \sec^4 x\,dx\,,$$

ou seja,

$$5\int \sec^6 x\,dx = \sec^4 x \operatorname{tg} x + 4\int \sec^4 x\,dx\,,$$

donde resulta que

$$\int \sec^6 x\,dx = \frac{1}{5}\sec^4 x \operatorname{tg} x + \frac{4}{5}\int \sec^4 x\,dx\,. \qquad (4.12)$$

Para calcular $\int \sec^4 x\,dx$ basta atender a que $\sec^4 x = \sec^2 x \sec^2 x$ e utilizar a técnica de primitivação por partes fazendo $F'(x) = \sec^2 x$ e $G(x) = \sec^2 x$.
Temos então $F(x) = \operatorname{tg} x$ e $G'(x) = 2\sec^2 x \operatorname{tg} x$ e, portanto,

$$\begin{aligned}\int \sec^4 x\,dx &= \sec^2 x \operatorname{tg} x - \int 2\sec^2 x \operatorname{tg}^2 x\,dx \\ &= \sec^2 x \operatorname{tg} x - 2\int \sec^2 x(\sec^2 x - 1)\,dx \\ &= \sec^2 x \operatorname{tg} x - 2\int \sec^4 x\,dx + 2\int \sec^2 x\,dx\,.\end{aligned}$$

Portanto

$$\int \sec^4 x\,dx = \sec^2 x \operatorname{tg} x - 2\int \sec^4 x\,dx + 2\int \sec^2 x\,dx\,,$$

ou seja,

$$3\int \sec^4 x\,dx = \sec^2 x \operatorname{tg} x + 2\int \sec^2 x\,dx\,,$$

donde resulta que

$$\int \sec^4 x\,dx = \frac{1}{3}\sec^2 x \operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\int \sec^2 x\,dx\,. \qquad (4.13)$$

Substituindo (4.13) em (4.12) obtemos

$$\begin{aligned}\int \sec^6 x\,dx &= \frac{1}{5}\sec^4 x \operatorname{tg} x + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}\sec^2 x \operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\int \sec^2 x\,dx\right) \\ &= \frac{1}{5}\sec^4 x \operatorname{tg} x + \frac{4}{15}\sec^2 x \operatorname{tg} x + \frac{8}{15}\int \sec^2 x\,dx \\ &= \frac{1}{5}\sec^4 x \operatorname{tg} x + \frac{4}{15}\sec^2 x \operatorname{tg} x + \frac{8}{15}\operatorname{tg} x + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

Vamos ver em seguida que algumas primitivas de produtos de potências de funções trigonométricas

podem ser convertidas em primitivas imediatas ou reduzidas aos casos anteriores.

- Primitiva do produto de uma potência da função seno por uma potência da função coseno.

Pretendemos calcular

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\,dx$$

com n e m números naturais maiores do que ou iguais a 2.

Primeiro caso: um dos expoentes é um número ímpar maior do que ou igual a 3.

Suponhamos que n é um número ímpar maior do que ou igual a 3. Então $n = 2k+1$ com $k \in \mathbb{N}$ e temos

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\,dx &= \int \operatorname{sen}^{2k} x \cos^m x \operatorname{sen} x\,dx \\ &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^k \cos^m x \operatorname{sen} x\,dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^m x \operatorname{sen} x\,dx\,.\end{aligned}$$

Desenvolvendo $(1 - \cos^2 x)^k$ pela fórmula do Binómio de Newton e efectuando os produtos indicados, a primitiva considerada é transformada numa soma de primitivas imediatas.

Suponhamos que m é um número ímpar maior do que ou igual a 3.

Procedendo de modo análogo temos $m = 2k+1$ com $k \in \mathbb{N}$ e, portanto,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\,dx &= \int \operatorname{sen}^n x \cos^{2k} x \cos x\,dx \\ &= \int \operatorname{sen}^n x(1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x\,dx\,.\end{aligned}$$

Desenvolvendo $(1 - \operatorname{sen}^2 x)^k$ pela fórmula do Binómio de Newton e efectuando os produtos indicados a primitiva considerada é também neste caso transformada numa soma de primitivas imediatas.

Exemplo 4.21. 1. Pretendemos calcular

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\,dx\,.$$

Uma vez que o expoente da função seno é um número ímpar vamos transformar a primitiva dada numa soma de primitivas imediatas. Temos

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\,dx &= \int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx \\
&= \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx \\
&= \int (1-\cos^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx \\
&= \int (1-2\cos^2 x+\cos^4 x) \cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx \\
&= \int (\cos^2 x \operatorname{sen} x - 2\cos^4 x \operatorname{sen} x + \cos^6 x \operatorname{sen} x)\,dx \\
&= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C\,, \quad C\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

2. Pretendemos calcular

$$\int \operatorname{sen}^8 x \cos^3 x\,dx\,.$$

Uma vez que o expoente da função coseno é um número ímpar, vamos transformar a primitiva dada numa soma de primitivas imediatas. Temos

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^8 x \cos^3 x\,dx &= \int \operatorname{sen}^8 x \cos^2 x \cos x\,dx \\
&= \int \operatorname{sen}^8 x (1-\operatorname{sen}^2 x) \cos x\,dx \\
&= \int (\operatorname{sen}^8 x \cos x - \operatorname{sen}^{10} x \cos x)\,dx \\
&= \frac{1}{9}\operatorname{sen}^9 x - \frac{1}{11}\operatorname{sen}^{11} x + C\,, \quad C\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

3. Pretendemos calcular

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos^7 x\,dx\,.$$

Uma vez que os expoentes são ambos ímpares vamos aplicar a um dos expoentes o processo descrito e transformar a primitiva dada numa soma de primitivas imediatas. Temos

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^5 x \cos^5 x\,dx &= \int \operatorname{sen}^5 x \cos^6 x \cos x\,dx \\
&= \int \operatorname{sen}^5 x (\cos^2 x)^3 \cos x\,dx \\
&= \int \operatorname{sen}^5 x (1-\operatorname{sen}^2 x)^3 \cos x\,dx \\
&= \int \operatorname{sen}^5 x (1-3\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen}^4 x - \operatorname{sen}^6 x) \cos x\,dx \\
&= \int (\operatorname{sen}^5 x \cos x - 3\operatorname{sen}^7 x \cos x + 3\operatorname{sen}^9 x \cos x - \operatorname{sen}^{11} x \cos x)\,dx \\
&= \frac{1}{6}\operatorname{sen}^6 x - \frac{3}{8}\operatorname{sen}^8 x + \frac{3}{10}\operatorname{sen}^{10} x - \frac{1}{12}\operatorname{sen}^{12} x + C\,, \quad C\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Segundo caso: n e m são ambos números pares.

Neste caso utilizamos o facto de um número par ser um múltiplo de 2 e utilizamos também a

fórmula fundamental da trigonometria por forma a transformar a primitiva dada numa soma de potências da função seno ou numa soma de potências da função coseno que se calculam pelos processos já descritos anteriormente.

Se atendermos a que $n = 2k$ com $k \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\,dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^k \cos^m x\,dx \\
&= \int (1-\cos^2 x)^k \cos^m x\,dx\,.
\end{aligned}$$

Desenvolvendo $(1-\cos^2 x)^k$ pela fórmula do Binómio de Newton e efectuando os produtos indicados, transformamos a primitiva dada numa soma de primitivas de potências da função coseno.

Se atendermos a que $m = 2k$ com $k \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\,dx &= \int \operatorname{sen}^n x (\cos^2 x)^k\,dx \\
&= \int \operatorname{sen}^n x (1-\operatorname{sen}^2 x)^k\,dx\,.
\end{aligned}$$

Desenvolvendo $(1-\operatorname{sen}^2 x)^k$ pela fórmula do Binómio de Newton e efectuando os produtos indicados, transformamos a primitiva dada numa soma de primitivas de potências da função seno.

Exemplo 4.22. Vamos calcular

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos^6 x\,dx\,.$$

Utilizando o processo indicado vamos transformar a primitiva dada numa soma de primitivas da função coseno. Temos

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^4 x \cos^6 x\,dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \cos^6 x\,dx \\
&= \int (1-\cos^2 x)^2 x \cos^6 x\,dx \\
&= \int (1-2\cos^2 x+\cos^4 x) \cos^6 x\,dx \\
&= \int (\cos^6 x - 2\cos^8 x + \cos^{10} x)\,dx\,.
\end{aligned}$$

A determinação das primitivas obtidas é deixada como exercício.

- Primitiva do produto de uma potência da função secante por uma potência da função tangente.

Pretendemos calcular

$$\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x\,dx$$

onde n e m são números naturais quaisquer.

Primeiro caso: $m = 1$ e $n = 1$

Uma vez que $(\sec x)' = \operatorname{tg} x \sec x$ a primitiva dada é uma primitiva imediata.

Segundo caso: $m=1$ e n é maior do que ou igual a 2.

Temos

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}x\sec^n x\,dx &= \int \operatorname{tg}x\sec x\sec^{n-1}x\,dx\\ &= \frac{\sec^n x}{n}+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

Terceiro caso: m é maior do que ou igual a 2 e n é qualquer.

Se m é um número par temos $m=2k$ com $k\in\mathbb{N}$ e, portanto,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^m x\sec^n x\,dx &= \int (\operatorname{tg}^2 x)^k\sec^n x\,dx\\ &= \int (\sec^2 x-1)^k\sec^n x\,dx\,.\end{aligned}$$

Desenvolvendo $(\sec^2 x-1)^k$ pela fórmula do Binómio de Newton e efectuando os produtos indicados, a primitiva dada é transformada numa soma de primitivas de potências da função secante que se determinam pelos processos já indicados anteriormente.

Se m é um número ímpar maior do que ou igual a 3 temos $m=2k+1$ com $k\in\mathbb{N}$ e, portanto,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^m x\sec^n x\,dx &= \int (\operatorname{tg}^2 x)^k\operatorname{tg}x\sec^n x\,dx\\ &= \int (\sec^2 x-1)^k\sec^n x\operatorname{tg}x\,dx\,.\end{aligned}$$

Desenvolvendo $(\sec^2 x-1)^k$ pela fórmula do Binómio de Newton e efectuando os produtos indicados, a primitiva dada é transformada numa soma de primitivas imediatas já que $(\sec x)'=\sec x\operatorname{tg}x$.

Exemplo 4.23. 1. Vamos calcular

$$\int \operatorname{tg}^4 x\sec x\,dx\,.$$

Neste caso o expoente da função tangente é um número par pelo que temos

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^4 x\sec x\,dx &= \int (\operatorname{tg}^2 x)^2\sec x\,dx\\ &= \int (\sec^2 x-1)^2\sec x\,dx\\ &= \int (\sec^4 x-2\sec^2 x+1)\sec x\,dx\\ &= \int (\sec^5 x-2\sec^3 x+\sec x)\,dx\end{aligned}$$

e a primitiva dada é transformada numa soma de primitivas de potências da função secante cuja determinação é deixada como exercício.

2. Vamos calcular

$$\int \operatorname{tg}^7 x\sec x\,dx\,.$$

Neste caso o expoente da função tangente é um número ímpar e, portanto, podemos transformar a primitiva dada numa soma de primitivas imediatas. Temos

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^7 x\sec x\,dx &= \int (\operatorname{tg}^2 x)^3\operatorname{tg}x\sec x\,dx\\ &= \int (\sec^2 x-1)^3\operatorname{tg}x\sec x\,dx\\ &= \int (\sec^6 x-3\sec^4 x+3\sec^2 x-1)\operatorname{tg}x\sec x\,dx\\ &= \int (\sec^6 x\operatorname{tg}x\sec x-3\sec^4 x\operatorname{tg}x\sec x+3\sec^2 x\operatorname{tg}x\sec x-\operatorname{tg}x\sec x)\,dx\\ &= \frac{1}{7}\sec^7 x-\frac{3}{5}\sec^5 x+\sec^3 x-\sec x+C\,,\quad c\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

Observação 4.24. Algumas primitivas de produtos de potências de funções trigonométricas não se enquadram nos casos estudados. Algumas dessas primitivas podem ser transformadas em primitivas imediatas ou em primitivas do tipo das estudadas se se recorrer à simplificação da função integranda.

Exemplo 4.25. 1. Para calcular

$$\int \operatorname{sen}^4 x\operatorname{cotg}^4 x\,dx$$

basta atender a que $\operatorname{cotg}x=\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}x}$ e temos

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^4 x\operatorname{cotg}^4 x\,dx &= \int \cos^4 x\,dx\\ &= \int \frac{1}{4}(1+\cos(2x))^2\,dx\\ &= \frac{1}{4}\int (1+2\cos(2x)+\cos^2(2x))\,dx\\ &= \frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)+\frac{1}{8}\int (1+\cos(4x))\,dx\\ &= \frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)+\frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x)+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

2. Para calcular

$$\int \frac{\sec^4 x}{\operatorname{cotg}x}\,dx$$

basta atender a que $\operatorname{cotg}x=\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}x}$ e a que $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ e temos

$$\begin{aligned}\int \frac{\sec^4 x}{\operatorname{cotg}x}\,dx &= \int \frac{\operatorname{sen}x}{\cos^5 x}\,dx\\ &= \int \operatorname{sen}x\cos^{-5}x\,dx\\ &= -\frac{1}{4}\cos^{-4}x+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,.\\ &= -\frac{1}{4}\sec^4 x+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

Exercícios 4.2

Calcule, usando a técnica de primitivação por partes, os seguintes integrais indefinidos:

1. $\displaystyle\int x^2 e^x \, dx$
2. $\displaystyle\int x^3 \operatorname{sen} x \, dx$
3. $\displaystyle\int x 3^x \, dx$
4. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1+x^2)^{\,2}} \, dx$
5. $\displaystyle\int \cos(\ln x) \, dx$
6. $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x \, dx$
7. $\displaystyle\int \ln x \, dx$
8. $\displaystyle\int x \operatorname{arcsen} x^2 \, dx$

Primitivação por substituição

A primitivação por substituição é uma técnica de primitivação que resulta do teorema da derivada da função composta.

Sejam I e J intervalos de $\mathbb{R}$.

Admitamos que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função primitivável e que F é uma primitiva de f.

Admitamos que $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável tal que $\varphi(J) \subset I$.

Então a função $F \circ \varphi$ é uma função diferenciável em J e, para todo o $t \in J$,

$$\begin{aligned}(F \circ \varphi)'(t) &= F'(\varphi(t))\varphi'(t)\\ &= f(\varphi(t))\varphi'(t)\\ &= ((f \circ \varphi)\varphi')(t),\end{aligned}$$

o que permite concluir que $F \circ \varphi$ é uma primitiva de $(f \circ \varphi)\varphi'$ e, portanto,

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Como vimos $H = F \circ \varphi$ é uma primitiva de $(f \circ \varphi)\varphi'$ e, se supusermos que φ é invertível, podemos concluir que $F = H \circ \varphi^{-1}$ e, portanto, $H \circ \varphi^{-1}$ é uma primitiva de f.

Acabámos de demonstrar a seguinte proposição:

Proposição 4.26. *Sejam I e J intervalos de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função primitivável e $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e invertível tal que $\varphi(J) \subset I$.*

Então a função $(f \circ \varphi)\varphi'$ é primitivável e, sendo H uma primitiva de $(f \circ \varphi)\varphi'$, tem-se que $H \circ \varphi^{-1}$ é uma primitiva de f.

Demonstração: ■

A Proposição 4.26 é bastante útil do ponto de vista prático. Suponhamos que pretendemos calcular

$$\int f(x)\,dx$$

e que existe uma função φ diferenciável e invertível tal que se conhece uma primitiva H de $(f \circ \varphi)\varphi'$, isto é, tal que

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = H(t) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Então, pela Proposição 4.26,

$$\int f(x)\,dx = H(\varphi^{-1}(x)) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Dizemos então que esta **primitiva de f foi obtida através da substituição de variável definida por** $x = \varphi(t)$.

Observação 4.27. Na prática, quando calculamos uma primitiva utilizando a Proposição 4.26 escrevemos, por abuso de linguagem,

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = (H \circ \varphi^{-1})(x) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Exemplo 4.28. 1. Para calcular

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$$

vamos utilizar a substituição de variável definida por $\sqrt{x} = t$ donde resulta $x = t^2$ com $t \geq 0$.

Esta substituição está definida pela função

$$\begin{array}{rccc}\varphi : & J & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & t & \longmapsto & t^2\end{array}$$

em que J é um intervalo adequado de $\mathbb{R}_0^+$.

A função φ é diferenciável e invertível em J.

Utilizando a Proposição 4.26 temos então

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx &= \int \frac{1}{1+t}\,2t\,dt\\ &= \int \frac{2t}{1+t}\,dt\\ &= \int \left(2 - \frac{2}{1+t}\right)dt\\ &= 2t - 2\ln|1+t| + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\\ &= 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

2. Vamos calcular
$$\int \frac{1}{x+\sqrt[3]{x}}\,dx$$
utilizando a substituição de variável definida por $\sqrt[3]{x}=t$ com $x\neq 0$, donde resulta $x=t^3$ com $t\neq 0$.

Esta substituição está definida pela função
$$\begin{array}{rccc} \varphi: & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & t^3 \end{array}$$
em que J é um intervalo adequado de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

A função φ é diferenciável e invertível em J.

Atendendo à Proposição 4.26 temos
$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x+\sqrt[3]{x}}\,dx &= \int \frac{1}{t^3+t}\,3t^2\,dt \\ &= \int \frac{2t}{1+t^2}\,dt \\ &= \frac{3}{2}\int \frac{2t}{1+t^2}\,dt \\ &= \frac{3}{2}\ln(1+t^2)+C\,,\quad C\in\mathbb{R} \\ &= \frac{3}{2}\ln(1+\sqrt[3]{x^2})+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

3. Vamos calcular
$$\int x^2\sqrt{1-x}\,dx$$
utilizando a substituição de variável definida por $\sqrt{1-x}=t$ com $x\leq 1$ donde resulta $x=1-t^2$ com $t\geq 0$.

Esta substituição está definida pela função
$$\begin{array}{rccc} \varphi: & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & 1-t^2 \end{array}$$
em que J é um intervalo adequado de $\mathbb{R}_0^+$.

A função φ é diferenciável e invertível em J.

Atendendo à Proposição 4.26 temos
$$\begin{aligned} \int x^2\sqrt{1-x}\,dx &= \int (1-t^2)^2 t(-2t)\,dt \\ &= \int (t^4-2t^2+1)(-2t^2)\,dt \\ &= -2\int (t^6-2t^4+t^2)\,dt \\ &= -\frac{2}{7}t^7+\frac{4}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+C\,,\quad C\in\mathbb{R} \\ &= -\frac{2}{7}(\sqrt{1-x})^7+\frac{4}{5}(\sqrt{1-x})^5-\frac{2}{3}(\sqrt{1-x})^3+C\,,\quad C\in\mathbb{R} \\ &= -\frac{2}{7}(1-x)^3\sqrt{1-x}+\frac{4}{5}(1-x)^2\sqrt{1-x}-\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}+C\,,\quad C\in\mathbb{R} \\ &= -2(1-x)\sqrt{1-x}\left(\frac{1}{7}(1-x)^2-\frac{2}{5}(1-x)+\frac{1}{3}\right)+C\,,\quad C\in\mathbb{R} \\ &= -2(1-x)\sqrt{1-x}\left(\frac{1}{7}x^2+\frac{4}{35}x+\frac{8}{105}\right)+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

4. Vamos calcular
$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$$
utilizando a substituição de variável definida por $x=t^6$ com $t\geq 0$.

Esta substituição é definida pela função
$$\begin{array}{rccc} \varphi: & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & t^6 \end{array}$$
onde J é um intervalo adequado de $\mathbb{R}_0^+$.

A função φ é diferenciável e invertível em J e, pela Proposição 4.26, temos
$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx &= \int \frac{t^3}{1+t^2}6t^5\,dt \\ &= \int \frac{6t^8}{1+t^2}\,dt \\ &= 6\int \frac{t^8}{1+t^2}\,dt\,. \end{aligned}$$

Dividindo t^8 por $1+t^2$ obtemos
$$t^8=(t^6-t^4+t^2-1)(1+t^2)+1$$
donde resulta
$$\frac{t^8}{1+t^2}=t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{1+t^2}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx &= 6\int\left(t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)dt\\
&= \frac{6}{7}t^7-\frac{6}{5}t^5+2t^3-6t+6\operatorname{arctg}t+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\\
&= \frac{6}{7}(\sqrt[6]{x})^7-\frac{6}{5}(\sqrt[6]{x})^5+2(\sqrt[6]{x})^3-6\sqrt[6]{x}+6\operatorname{arctg}(\sqrt[6]{x})+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\\
&= \frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt{x}-6\sqrt[6]{x}+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Substituições trigonométricas

Nesta secção vamos apresentar algumas substituições utilizando funções trigonométricas que permitem transformar uma primitiva de uma função envolvendo um radical numa primitiva de uma função trigonométrica.

- Primitivação de funções que contêm o radical $\sqrt{a^2+x^2}$ com $a>0$.

  Para primitivar este tipo de funções consideramos a substituição de variável definida por $x=a\operatorname{tg}t$ que, em geral, é definida pela função

$$\begin{array}{rccc}\varphi: & \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & t & \longmapsto & a\operatorname{tg}t\end{array}$$

  diferenciável e invertível.

  Utilizando esta substituição temos

$$\begin{aligned}
x^2+a^2 &= (a\operatorname{tg}t)^2+a^2\\
&= a^2(\operatorname{tg}^2t+1)\\
&= a^2\sec^2t
\end{aligned}$$

  donde resulta que

$$\sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{a^2\sec^2t}\,.$$

  Uma vez que $t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ temos $\sec t>0$ e atendendo a que, por hipótese, $a>0$ podemos concluir que

$$\sqrt{a^2\sec^2t}=a\sec t\,.$$

  Consequentemente, a substituição indicada permite converter uma função que depende do radical $\sqrt{x^2+a^2}$ numa função que depende da função trigonométrica $\sec t$.

Exemplo 4.29. 1. Pretendemos calcular

$$\int x^2\sqrt{x^2+1}\,dx\,.$$

Atendendo ao exposto, para calcular esta primitiva podemos efectuar a mudança de variável definida por $x=\operatorname{tg}t$ com $t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

Temos então

$$\begin{aligned}
\int x^2\sqrt{x^2+1}\,dx &= \int \operatorname{tg}^2t\sqrt{\operatorname{tg}^2+1}\sec^2t\,dt\\
&= \int \operatorname{tg}^2t\sqrt{\sec^2t}\sec^2t\,dt\\
&= \int \operatorname{tg}^2t\sec^3t\,dt\\
&= \int (\sec^2t-1)\sec^3t\,dt\\
&= \int (\sec^5t-\sec^3t)\,dt\\
&= \int \sec^5t\,dt-\int\sec^3t\,dt\,.
\end{aligned}$$

Utilizando o Exemplo 4.20 temos então

$$\begin{aligned}
\int x^2\sqrt{x^2+1}\,dx &= \frac{1}{4}\operatorname{tg}t\sec^3t+\frac{3}{8}\operatorname{tg}t\sec t+\frac{3}{8}\ln|\sec t+\operatorname{tg}t|-\frac{1}{2}\operatorname{tg}t\sec t-\\
&\quad -\frac{1}{2}\ln|\sec t+\operatorname{tg}t|+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\\
&= \frac{1}{4}\operatorname{tg}t\sec^3t-\frac{1}{8}\operatorname{tg}t\sec t-\frac{1}{8}\ln|\sec t+\operatorname{tg}t|+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Uma vez que considerámos $x=\operatorname{tg}t$ com $t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ temos

$$\sec t=\sqrt{\operatorname{tg}^2t+1}$$

e, portanto,

$$\sec t=\sqrt{x^2+1}\,.$$

Consequentemente

$$\int x^2\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{1}{4}x\sqrt{(x^2+1)^3}-\frac{1}{8}x\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{8}\ln|\sqrt{x^2+1}+x|+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,.$$

2. Pretendemos calcular

$$\int\frac{1}{x\sqrt{2+x^2}}\,dx\,.$$

De acordo com o que foi dito, para calcular a primitiva considerada podemos efectuar a mudança de variável definida por $x=\sqrt{2}\operatorname{tg}t$.

Uma vez que se tem $x\neq0$, esta substituição de variável é definida pela função

$$\begin{array}{rccc}\varphi: & \left]0,\frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & t & \longmapsto & \sqrt{2}\operatorname{tg}t\end{array}$$

que é diferenciável e invertível.

Utilizando a substituição indicada temos

$$\begin{aligned} x^2+2 &= (\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,t)^2+2 \\ &= 2(\mathrm{tg}^2\,t+1) \\ &= 2\sec^2 t \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,t\sqrt{2\sec^2 t}}\sqrt{2}\sec^2 t\,dt \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,t\sqrt{2}\sec t}\sqrt{2}\sec^2 t\,dt \\ &= \int \frac{\sec t}{\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,t}\,dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\cos t}\cdot\frac{\cos t}{\mathrm{sen}\,t}\,dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{1}{\mathrm{sen}\,t}\,dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int \mathrm{cosec}\,t\,dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{\mathrm{cosec}^2\,t+\mathrm{cosec}\,t\,\mathrm{cotg}\,t}{\mathrm{cosec}\,t+\mathrm{cotg}\,t}\,dt \\ &= \frac{-\sqrt{2}}{2}\ln|\mathrm{cosec}\,t+\mathrm{cotg}\,t|+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Uma vez que $x=\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,t$ temos $\mathrm{tg}\,t=\dfrac{x}{\sqrt{2}}$.

Atendendo a que $\mathrm{cotg}\,t=\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,t}$, temos

$$\mathrm{cotg}\,t=\frac{\sqrt{2}}{x}\,.$$

Como $\mathrm{cosec}^2\,t=\mathrm{cotg}^2\,t+1$ e $t\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ vem

$$\mathrm{cosec}\,t=\sqrt{\frac{2}{x^2}+1}=\frac{\sqrt{2+x^2}}{x}$$

já que, uma vez que $x=\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,t$ e $t\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, estamos a admitir $x>0$.

Consequentemente

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx &= \frac{-\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2+x^2}}{x}+\frac{\sqrt{2}}{x}\right|+C\,,\quad C\in\mathbb{R} \\ &= \frac{-\sqrt{2}}{2}\ln\frac{\sqrt{2+x^2}+\sqrt{2}}{x}+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

- Primitivação de funções que contêm o radical $\sqrt{a^2-x^2}$ com $a>0$.

Para primitivar este tipo de funções podemos considerar a substituição de variável definida por $x=a\,\mathrm{sen}\,t$ que, em geral, é definida pela função

$$\begin{aligned} \varphi:\ \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto a\,\mathrm{sen}\,t \end{aligned}$$

diferenciável e invertível.

Utilizando esta substituição convertemos uma função que depende do radical $\sqrt{a^2-x^2}$ numa função que depende da função coseno.

De facto se tomarmos $x=a\,\mathrm{sen}\,t$ vem

$$\begin{aligned} a^2-x^2 &= a^2-a^2\,\mathrm{sen}^2\,t \\ &= a^2(1-\mathrm{sen}^2\,t) \\ &= a^2\cos^2 t\,. \end{aligned}$$

Uma vez que $t\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ temos $\cos t>0$ e, como por hipótese $a>0$, vem

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2\cos^2 t}=a\cos t\,.$$

Exemplo 4.30. Pretendemos calcular

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{5-x^2}}\,dx\,.$$

Efectuamos a substituição de variável definida por $x=\sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,t$.

Como $x\neq 0$ temos $t\neq 0$ e tomamos, por exemplo, $t\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Temos então

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2\sqrt{5-x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{5\,\mathrm{sen}^2\,t\sqrt{5-5\,\mathrm{sen}^2\,t}}\sqrt{5}\cos t\,dt \\ &= \int \frac{1}{5\,\mathrm{sen}^2\,t\sqrt{5}\cos t}\sqrt{5}\cos t\,dt \\ &= \frac{1}{5}\int \frac{1}{\mathrm{sen}^2\,t}\,dt \\ &= \frac{1}{5}\int \mathrm{cosec}^2\,t\,dt \\ &= -\frac{1}{5}\,\mathrm{cotg}\,t+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Como $x=\sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,t$, temos $\mathrm{sen}\,t=\dfrac{x}{\sqrt{5}}$.

Por outro lado, uma vez que $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, temos $\cos t > 0$ pelo que

$$\begin{aligned} \cos t &= \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} \\ &= \sqrt{1-\frac{x^2}{5}} \\ &= \sqrt{\frac{5-x^2}{5}} \\ &= \frac{\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{5}}\,. \end{aligned}$$

Uma vez que $\operatorname{cotg} t = \dfrac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$ temos

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg} t &= \frac{\frac{\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{5}}}{\frac{x}{\sqrt{5}}} \\ &= \frac{\sqrt{5-x^2}}{x}\,. \end{aligned}$$

Consequentemente

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{5-x^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{5-x^2}}{5x} + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Observação 4.31. Para primitivar funções que dependem do radical $\sqrt{a^2-x^2}$ podemos também considerar a substituição de variável definida pela função

$$\begin{aligned} \varphi: \quad]0,\pi[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto a\cos t \end{aligned}$$

diferenciável e invertível.

Utilizando esta substituição convertemos uma função que depende do radical $\sqrt{a^2-x^2}$ numa função que depende da função seno.

- Primitivação de funções que contêm o radical $\sqrt{x^2-a^2}$ com $a > 0$.

Para primitivar este tipo de funções podemos considerar a substituição de variável definida por $x = a\sec t$ que, em geral, é definida pela função

$$\begin{aligned} \varphi: \quad \left]0,\frac{\pi}{2}\right[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto a\sec t \end{aligned}$$

diferenciável e invertível.

Utilizando esta substituição convertemos uma função que depende do radical $\sqrt{x^2-a^2}$ numa função que depende da função tangente.

De facto, se tomarmos $x = a\sec t$ vem

$$\begin{aligned} x^2 - a^2 &= a^2\sec^2 t - a^2 \\ &= a^2(\sec^2 t - 1) \\ &= a^2\operatorname{tg}^2 t\,. \end{aligned}$$

Uma vez que $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ temos $\operatorname{tg} t > 0$ e, como por hipótese $a > 0$, resulta que

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\operatorname{tg}^2 t} = a\operatorname{tg} t\,.$$

Exemplo 4.32. Pretendemos calcular

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx\,.$$

Efectuamos a substituição de variável definida por $x = 3\sec t$, com $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Temos então

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx &= \int \frac{\sqrt{9\sec^2 t - 9}}{3\sec t} 3\sec t\,\operatorname{tg} t\,dt \\ &= \int 3\operatorname{tg}^2 t\,dt \\ &= 3\int \operatorname{tg}^2 t\,dt \\ &= 3\int (\sec^2 t - 1)\,dt \\ &= 3\operatorname{tg} t - 3t + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Como $x = 3\sec t$, temos $\sec t = \dfrac{x}{3}$.

Por outro lado, uma vez que $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, temos $\operatorname{tg} t > 0$ pelo que

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} t &= \sqrt{\sec^2 t - 1} \\ &= \sqrt{\frac{x^2}{9} - 1} \\ &= \sqrt{\frac{x^2-9}{9}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2-9}}{3}\,. \end{aligned}$$

Uma vez que $\sec t = \dfrac{1}{\cos t}$ temos $\cos t = \dfrac{3}{x}$ e, portanto,

$$t = \arccos\frac{3}{x}\,.$$

Consequentemente

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-9} - 3\operatorname{arccos}\frac{x}{3} + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Observação 4.33. Para primitivar funções que dependem do radical $\sqrt{x^2-a^2}$ podemos também considerar a substituição de variável definida pela função

$$\begin{array}{rccc} \varphi: &]0,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & a\operatorname{cosec} t \end{array}$$

diferenciável e invertível.

Utilizando esta substituição convertemos uma função que depende do radical $\sqrt{x^2-a^2}$ numa função que depende da função cotangente já que, efectuando a substituição indicada, temos

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-a^2} &= \sqrt{a^2\operatorname{cosec}^2 t - a^2} \\ &= a\sqrt{\operatorname{cosec}^2 t - 1} \\ &= a\sqrt{\operatorname{cotg}^2 t} \\ &= a\operatorname{cotg} t\,. \end{aligned}$$

Observação 4.34. Utilizando manipulações algébricas simples, algumas funções que dependem de radicais podem ser reduzidas aos casos anteriores. É, por exemplo, o caso das funções que dependem de um dos radicais $\sqrt{a^2+b^2x^2}$, ou $\sqrt{a^2-b^2x^2}$, ou $\sqrt{-a^2+b^2x^2}$, onde a e b números reais positivos.

- Primitivação de funções que dependem de um dos radicais $\sqrt{a^2+b^2x^2}$, ou $\sqrt{a^2-b^2x^2}$, ou $\sqrt{-a^2+b^2x^2}$, onde a e b números reais positivos.

No caso das funções que dependem do radical $\sqrt{a^2+b^2x^2}$, onde a e b números reais positivos, basta atender a que

$$\begin{aligned} a^2+b^2x^2 &= b^2\left(\frac{a^2}{b^2}+x^2\right) \\ &= b^2\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2+x^2\right) \end{aligned}$$

e, uma vez que $b>0$, temos

$$\sqrt{a^2+b^2x^2} = b\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2+x^2}\,.$$

Também as funções que dependem do radical $\sqrt{a^2-b^2x^2}$ e as funções que dependem do radical $\sqrt{b^2x^2-a^2}$ com $a,b>0$ podem, por manipulações algébricas do mesmo tipo, ser reduzidas a um dos casos anteriores.

De facto, procedendo de modo análogo, temos

$$\sqrt{a^2-b^2x^2} = b\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2-x^2}$$

e

$$\sqrt{b^2x^2-a^2} = b\sqrt{x^2-\left(\frac{a}{b}\right)^2}\,.$$

Exemplo 4.35. Pretendemos calcular

$$\int \sqrt{4+5x^2}\,dx\,.$$

Atendendo a que

$$\begin{aligned} \sqrt{4+5x^2} &= \sqrt{5\left(\frac{4}{5}+x^2\right)} \\ &= \sqrt{5}\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+x^2} \end{aligned}$$

a primitiva dada calcula-se efectuando a substituição de variável definida por

$$x = \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{tg} t$$

com $t \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

Temos então

$$\begin{aligned} \int \sqrt{4+5x^2}\,dx &= \int \sqrt{5}\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+x^2}\,dx \\ &= \sqrt{5}\int \sqrt{\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\operatorname{tg}^2 t}\,\frac{2}{\sqrt{5}}\sec^2 t\,dt \\ &= \frac{4}{\sqrt{5}}\int \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}\,\sec^2 t\,dt \\ &= \frac{4}{\sqrt{5}}\int \sec^3 t\,dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{tg} t\sec t + \frac{2}{\sqrt{5}}\ln|\operatorname{tg} t + \sec t| + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Uma vez que $x=\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{tg} t$ temos $\operatorname{tg} t=\frac{\sqrt{5}}{2}x$ e, portanto,

$$\begin{aligned}\sec t &= \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}\\ &= \sqrt{1+\frac{5}{4}x^2}\\ &= \frac{\sqrt{4+5x^2}}{2}\,.\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\int\sqrt{4+5x^2}\,dx &= \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{2}x\frac{\sqrt{4+5x^2}}{2}+\frac{2}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}}{2}x+\frac{\sqrt{4+5x^2}}{2}\right|+C\\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{4+5x^2}+\frac{2}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}x+\sqrt{4+5x^2}}{2}\right|+C\\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{4+5x^2}+\frac{2}{\sqrt{5}}\ln|\sqrt{5}x+\sqrt{4+5x^2}|-\frac{2}{\sqrt{5}}\ln 2+C\\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{4+5x^2}+\frac{2}{\sqrt{5}}\ln|\sqrt{5}x+\sqrt{4+5x^2}|+k\,,\end{aligned}$$

com $k=C-\frac{2}{\sqrt{5}}\ln 2$ constante real arbitrária, uma vez que, se C é uma constante real arbitrária, então k é também uma constante real arbitrária.

- <u>Primitivação de funções que contêm o radical $\sqrt{ax^2+bx+c}$ com $a\neq 0$ e $b,c\in\mathbb{R}$.</u>

Atendendo a que

$$\begin{aligned}ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\ &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\\ &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+a\cdot\frac{4ac-b^2}{4a^2}\\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+a\cdot\frac{4ac-b^2}{4a^2}\,,\end{aligned}$$

uma substituição do tipo

$$x+\frac{b}{2a}=z$$

conduz-nos a um dos casos anteriores.

Exemplo 4.36. 1. Pretendemos calcular

$$\int\frac{x}{\sqrt{8+2x-x^2}}\,dx\,.$$

Temos

$$\begin{aligned}8+2x-x^2 &= -(x^2-2x-8)\\ &= -(x^2-2x+1-9)\\ &= -(x-1)^2+9\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\int\frac{x}{\sqrt{8+2x-x^2}}\,dx=\int\frac{x}{\sqrt{9-(x-1)^2}}\,dx\,.$$

Consideremos a substituição de variável definida por $x-1=3\operatorname{sen} t$, ou seja, $x=1+3\operatorname{sen} t$ com $t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

Esta substituição é definida pela função

$$\begin{aligned}\varphi:\ \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[&\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto 1+3\operatorname{sen} t\end{aligned}$$

diferenciável e invertível.

Temos então

$$\begin{aligned}\int\frac{x}{\sqrt{8+2x-x^2}}\,dx &= \int\frac{x}{\sqrt{9-(x-1)^2}}\,dx\\ &= \int\frac{1+3\operatorname{sen} t}{\sqrt{9-(3\operatorname{sen} t)^2}}3\cos t\,dt\\ &= \int\frac{1+3\operatorname{sen} t}{3\cos t}3\cos t\,dt\\ &= \int(1+3\operatorname{sen} t)\,dt\\ &= t-3\cos t+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Atendendo a que $x-1=3\operatorname{sen} t$ temos $\operatorname{sen} t=\frac{x-1}{3}$ e, portanto,

$$t=\operatorname{arcsen}\frac{x-1}{3}\,.$$

Por outro lado, uma vez que $t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ temos

$$\begin{aligned}\cos t &= \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\\ &= \sqrt{1-\frac{(x-1)^2}{9}}\\ &= \frac{\sqrt{8+2x-x^2}}{3}\,.\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\int\frac{1}{\sqrt{8+2x-x^2}}\,dx=\operatorname{arcsen}\frac{x-1}{3}-\sqrt{8+2x-x^2}+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,.$$

2. Pretendemos calcular
$$\int \frac{1}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx\,.$$
Atendendo a que $x^2-4x+5=(x-2)^2+1$ temos
$$\int \frac{1}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx=\int \frac{1}{(x-2)\sqrt{(x-2)^2+1}}\,dx\,.$$
Consideremos a substituição de variável definida por $x-2=\operatorname{tg} t$, com $t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.
Esta substituição é definida pela função
$$\begin{array}{rccl}\varphi: & \left]0,\frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & x & \longmapsto & 2+\operatorname{tg} t\end{array}$$
diferenciável e invertível.
Temos então
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx &= \int \frac{1}{(x-2)\sqrt{(x-2)^2+1}}\,dx\\ &= \int \frac{1}{\operatorname{tg} t\sqrt{\operatorname{tg}^2 t+1}}\sec^2 t\,dt\\ &= \int \frac{1}{\operatorname{tg} t}\sec t\,dt\\ &= \int \operatorname{cosec} t\,dt\\ &= -\ln|\operatorname{cosec} t+\operatorname{cotg} t|+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$
Atendendo a que $\operatorname{cotg} t=\dfrac{1}{\operatorname{tg} t}$ e $\operatorname{tg} t=x-2$ temos
$$\operatorname{cotg} t=\frac{1}{x-2}\,.$$
Uma vez que $t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ temos
$$\begin{aligned}\operatorname{cosec} t &= \sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 t}\\ &= \sqrt{1+\frac{1}{(x-2)^2}}\\ &= \frac{\sqrt{x^2-4x+5}}{\sqrt{(x-2)^2}}\,.\end{aligned}$$
Como estamos a tomar $t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ temos $0<\operatorname{tg} t=x-2$ e, portanto, $x-2>0$.
Consequentemente $\sqrt{(x-2)^2}=x-2$, donde se conclui que
$$\operatorname{cosec} t=\frac{\sqrt{x^2-4x+5}}{x-2}\,.$$

Temos então
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx &= -\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-4x+5}}{x-2}+\frac{1}{x-2}\right|+C\\ &= -\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-4x+5}+1}{x-2}\right|+C\\ &= \ln\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}+1}+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

3. Pretendemos calcular
$$\int \frac{1}{(x+2)^2\sqrt{x^2+4x+1}}\,dx\,.$$
Atendendo a que $x^2+4x+1=(x+2)^2-3$ temos
$$\int \frac{1}{(x+2)^2\sqrt{x^2+4x+1}}\,dx=\int \frac{1}{(x+2)^2\sqrt{(x+2)^2-3}}\,dx\,.$$
Consideremos a substituição de variável definida por $x+2=\sqrt{3}\sec t$, com $t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.
Esta substituição é definida pela função
$$\begin{array}{rccl}\varphi: & \left]0,\frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & x & \longmapsto & -2+\sqrt{3}\sec t\end{array}$$
diferenciável e invertível.
Temos então
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x+2)^2\sqrt{x^2+4x+1}}\,dx &= \int \frac{1}{(x+2)^2\sqrt{(x+2)^2-3}}\,dx\\ &= \int \frac{1}{3\sec^2 t\sqrt{3}\operatorname{tg} t}\sqrt{3}\operatorname{tg} t\sec t\,dt\\ &= \int \frac{1}{3\sec t}\,dt\\ &= \frac{1}{3}\int \cos t\,dt\\ &= \frac{1}{3}\operatorname{sen} t+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$
Atendendo a que $\sec t=\dfrac{x+2}{\sqrt{3}}$ e $\cos t=\dfrac{1}{\sec t}$ temos
$$\cos t=\frac{\sqrt{3}}{x+2}\,.$$

Uma vez que $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ temos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} t &= \sqrt{1-\cos^2 t} \\ &= \sqrt{1-\frac{3}{(x+2)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+4x+1}}{\sqrt{(x+2)^2}} \,. \end{aligned}$$

Como considerámos $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ temos $0 < \sec t = \frac{x+2}{\sqrt{3}}$ e, portanto, $x+2>0$.

Consequentemente $\sqrt{(x+2)^2} = x+2$, donde se conclui que

$$\operatorname{sen} t = \frac{\sqrt{x^2+4x+1}}{x+2} \,.$$

Temos então

$$\int \frac{1}{(x+2)^2\sqrt{x^2+4x+1}}\,dx = \frac{\sqrt{x^2+4x+1}}{x+2} + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

4. Pretendemos calcular

$$\int (x+1)\sqrt{3x^2+6x-1}\,dx\,.$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} 3x^2+6x-1 &= 3(x^2+2x)-1 \\ &= 3(x+1)^2-4 \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \int (x+1)\sqrt{3x^2+6x-1}\,dx &= \int (x+1)\sqrt{3(x+1)^2-4}\,dx \\ &= \sqrt{3}\int (x+1)\sqrt{(x+1)^2-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dx\,. \end{aligned}$$

Vamos efectuar a substituição de variável definida por $x+1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sec t$ com $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Esta substituição é definida pela função

$$\begin{aligned} \varphi : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto -1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\sec t \end{aligned}$$

diferenciável e invertível.

Temos então

$$\begin{aligned} \int (x+1)\sqrt{3x^2+6x-1}\,dx &= \sqrt{3}\int (x+1)\sqrt{(x+1)^2-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dx \\ &= \sqrt{3}\int \frac{2}{\sqrt{3}}\sec t\sqrt{\frac{4}{3}\sec^2 t - \frac{4}{3}}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\sec t\,\operatorname{tg} t\,dt \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}}\int \frac{2}{\sqrt{3}}\sec^2 t\,\operatorname{tg}^2 t\,dt \\ &= \frac{8}{3}\int \sec^2 t\,\operatorname{tg}^2 t\,dt \\ &= \frac{8}{9}\operatorname{tg}^3 t + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Uma vez que $x+1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sec t$ e $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} t &= \sqrt{\sec^2 t - 1} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(x+1)\right)^2 - 1} \\ &= \frac{\sqrt{3(x+1)^2-4}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3x^2+6x-1}}{2}\,. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \int (x+1)\sqrt{3x^2+6x-1}\,dx &= \frac{8}{9}\,\frac{\sqrt{(3x^2+6x-1)^3}}{8} + C \\ &= \frac{\sqrt{(3x^2+6x-1)^3}}{9} + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Exercícios 4.3

Calcule, usando a técnica de primitivação por substituição, os integrais indefinidos:

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-25}}\,dx$
2. $\displaystyle\int x\sqrt{2x+3}\,dx$
3. $\displaystyle\int x(2x+5)^{10}\,dx$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{2x+1}}\,dx$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$
6. $\displaystyle\int \frac{\ln(2x)}{x\ln(4x)}\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$
8. $\displaystyle\int \sqrt{9-(x-1)^2}\,dx$
9. $\displaystyle\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}\,dx$
10. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx$
11. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^3 x}\,dx$
Sugestão: Considere a substituição $\cos x = t$.
12. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x-\cos x}\,dx$
13. $\displaystyle\int \frac{1}{2+\cos x}\,dx$

Primitivação de funções racionais

Nesta secção vamos ver como primitivar funções do tipo

$$\frac{N(x)}{D(x)}$$

onde N e D são polinómios em x com coeficientes reais e D é não nulo.

No caso em que o polinómio N tem grau maior do que ou igual ao grau do polinómio D podemos dividir N por D.

Então existem polinómios Q e R tais que R tem grau inferior ao grau de D e

$$N(x) = D(x)Q(x) + R(x)\ .$$

Aos polinómios Q e R chamamos, respectivamente, **quociente** e **resto** da divisão de N por D.

Uma vez que D é um polinómio não nulo, resulta da igualdade anterior

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}\ .$$

Consequentemente

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx = \int Q(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{D(x)}\,dx\ .$$

Para o estudo que pretendemos fazer basta então considerar funções do tipo

$$\frac{R(x)}{D(x)}\ ,$$

em que R e D são polinómios em x de coeficientes reais tais que D é não nulo e R tem grau inferior ao grau de D.

A uma função deste tipo chamamos **fracção própria**.

A técnica de primitivação que vamos apresentar baseia-se no facto de que toda a fracção própria pode ser decomposta numa soma de **fracções simples**, ou seja, fracções do tipo

$$\frac{A}{(x-\alpha)^r}\ ,$$

onde $A \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{N}$, ou fracções do tipo

$$\frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^s}\ ,$$

onde $B, C \in \mathbb{R}$ não são simultaneamente nulos, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ são tais que $\beta^2 - 4\gamma < 0$ e $s \in \mathbb{N}$.

A esta decomposição chamamos, por abuso de linguagem, **decomposição da fracção própria em fracções simples**.

Vamos apresentar, sem demonstração, o processo de decomposição de uma fracção própria $\frac{R(x)}{D(x)}$ numa soma de fracções simples.

1. Decompõe-se o polinómio $D(x)$ em factores irredutíveis [2] .

2. Seja

$$D(x) = d(x-\alpha_1)^{r_1}(x-\alpha_2)^{r_2}\cdots(x-\alpha_n)^{r_n}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{s_1}(x^2+\beta_2 x+\gamma_2)^{s_2}\cdots(x^2+\beta_1 mx+\gamma_1 m)^{s_m}\ ,$$

com $d \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, a decomposição do polinómio $D(x)$ em factores irredutíveis.

2.1 A cada factor da decomposição de $D(x)$ em factores irredutíveis do tipo

$$(x-\alpha)^r$$

corresponde, na decomposição da fracção $\frac{R(x)}{D(x)}$ em fracções simples, uma soma do tipo

$$\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_{r-1}}{(x-\alpha)^{r-1}} + \frac{A_r}{(x-\alpha)^r}\ ,$$

onde $A_1, A_2, \cdots, A_{r-1}, A_r$ são constantes reais a determinar.

2.2 A cada factor da decomposição de $D(x)$ em factores irredutíveis do tipo

$$(x^2+\beta x+\gamma)^s$$

[2] Prova-se que todo o polinómio de coeficientes reais pode ser decomposto no produto de uma constante não nula por factores do tipo

$$(x-\alpha)^r\ ,$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{N}$ ou do tipo

$$(x^2+\beta x+\gamma)^s\ ,$$

onde $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ são tais que $\beta^2 - 4\gamma < 0$ e $s \in \mathbb{N}$ a que chamamos *polinómios irredutíveis*.

Note-se que os factores do tipo $(x-\alpha)^r$ correspondem às raízes reais do polinómio considerado.

corresponde, na decomposição da fracção $\frac{R(x)}{D(x)}$ em fracções simples, uma soma do tipo

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+\beta x+\gamma}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+\beta x+\gamma)^2}+\cdots+\frac{B_{s-1}x+C_{s-1}}{(x^2+\beta x+\gamma)^{s-1}}+\frac{B_sx+C_s}{(x^2+\beta x+\gamma)^s}\ ,$$

onde $B_1,B_2,\cdots,B_{s-1},B_s$ e $C_1,C_2,\cdots,C_{s-1},C_s$ são constantes reais a determinar.

Exemplo 4.37. 1. Consideremos a fracção própria

$$\frac{x+1}{x^2(x^2+x+1)}$$

e vamos decompô-la numa soma de fracções simples.

Note-se que, neste caso, o polinómio do denominador está decomposto nos factores irredutíveis x^2 e x^2+x+1. Vamos então determinar as fracções simples que correspondem a estes factores irredutíveis.

Ao factor irredutível x^2 corresponde, na decomposição da fracção dada em fracções simples, uma soma do tipo

$$\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}\ ,$$

onde A_1,A_2 são constantes reais a determinar.

Ao factor irredutível x^2+x+1 corresponde, na decomposição da fracção dada em fracções simples, a fracção simples

$$\frac{Bx+C}{x^2+x+1}\ ,$$

onde B e C são constantes reais a determinar.

Vamos então determinar as constantes reais A_1,A_2,B,C por forma que

$$\frac{x+1}{x^2(x^2+x+1)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}\ .$$

Temos

$$\frac{x+1}{x^2(x^2+x+1)}=\frac{A_1x(x^2+x+1)+A_2(x^2+x+1)+(Bx+C)x^2}{x^2(x^2+x+1)}\ .$$

A igualdade anterior implica a igualdade de polinómios

$$x+1=A_1(x^3+x^2+x)+A_2(x^2+x+1)+Bx^3+Cx^2\ ,$$

ou seja,

$$x+1=(A_1+B)x^3+(A_1+A_2+C)x^2+(A_1+A_2)x+A_2\ .$$

Atendendo à condição de igualdade de dois polinómios temos de ter

$$\begin{cases} A_1+B=0 \\ A_1+A_2+C=0 \\ A_1+A_2=1 \\ A_2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A_1 &= & 0 \\ A_2 &= & 1 \\ B &= & 0 \\ C &= & -1 \end{cases}$$

Então

$$\frac{x+1}{x^2(x^2+x+1)}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+x+1}$$

é a decomposição da fracção própria dada em fracções simples.

2. Vamos determinar a decomposição da fracção própria

$$\frac{x^2+x-1}{x^4-x}$$

em fracções simples.

Uma vez que o polinómio do denominador não está decomposto num produto de factores irredutíveis, vamos começar por determinar essa decomposição.

Temos

$$x^4-x=x(x^3-1)\ .$$

Uma vez que 1 é raiz do polinómio x^3-1 vamos determinar as suas restantes raízes pela Regra de Ruffini.

Uma vez que

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

temos $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ e, portanto,

$$x^4-x=x(x-1)(x^2+x+1)$$

Como o polinómio x^2+x+1 é irredutível a decomposição obtida é a decomposição de x^4-x num produto de factores irredutíveis.

Vamos agora determinar a decomposição da fracção dada em fracções simples.

Ao factor irredutível x corresponde, na decomposição da fracção dada em fracções simples, uma fracção do tipo

$$\frac{A_1}{x}\ ,$$

onde A_1 é uma constante real a determinar.

Ao factor irredutível $x-1$ corresponde, na decomposição da fracção dada em fracções simples, uma fracção do tipo

$$\frac{A_2}{x-1}\,,$$

onde A_2 é uma constante real a determinar.

Ao factor irredutível x^2+x+1 corresponde, na decomposição da fracção dada em fracções simples, a fracção simples

$$\frac{Bx+C}{x^2+x+1}\,,$$

onde B e C são constantes reais a determinar.

Vamos então determinar as constantes reais A_1, A_2, B, C por forma que

$$\frac{x^2+x-1}{x(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}\,.$$

Temos a igualdade de fracções

$$\frac{x^2+x-1}{x(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A_1(x-1)(x^2+x+1)+A_2x(x^2+x+1)+(Bx+C)x(x-1)}{x(x-1)(x^2+x+1)}$$

que implica a igualdade de polinómios

$$x^2+x-1 = A_1(x^3-1)+A_2(x^3+x^2+x)+B(x^3-x^2)+C(x^2-x)\,, \tag{4.14}$$

ou seja,

$$x^2+x-1 = (A_1+A_2+B)x^3+(A_2-B+C)x^2+(A_2-C)x-A_1\,.$$

Atendendo à condição de igualdade de dois polinómios temos de ter

$$\begin{cases} A_1+A_2+B=0 \\ A_2-B+C=1 \\ A_2-C=1 \\ A_1=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A_2+B=-1 \\ A_2-B+C=1 \\ A_2-C=1 \\ A_1=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A_1 &=& 1 \\ A_2 &=& 1/3 \\ B &=& -4/3 \\ C &=& -2/3 \end{cases}$$

Então

$$\frac{x^2+x-1}{x(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{4x+2}{3(x^2+x+1)}$$

é a decomposição da fracção própria dada em fracções simples.

Observação 4.38. Para a determinação das constantes A_1, A_2, B, C do exemplo anterior podemos utilizar o facto de x e $x-1$ serem factores da decomposição do polinómio x^4-x em polinómios irredutíveis e, portanto, 0 e 1 serem raízes daquele polinómio.

A partir da igualdade (4.14) obtemos para $x=0$

$$-1=-A_1$$

e obtemos para $x=1$

$$1 = 3A_2 \iff A_2 = 1/3\,.$$

Substituindo os valores obtidos para A_1 e A_2 na equação (4.14) obtemos

$$x^2+x-1 = (x^3-1)+1/3(x^3+x^2+x)+B(x^3-x^2)+C(x^2-x)\,,$$

ou seja,

$$-\frac{4}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}x = Bx^3+(-B+C)x^2-Cx$$

o que implica

$$\begin{cases} B=-4/3 \\ -B+C=2/3 \\ C=-2/3 \end{cases} \iff \begin{cases} B=-4/3 \\ 4/3-2/3=2/3 \quad \text{P. V.} \\ C=-2/3 \end{cases}$$

Do que foi dito anteriormente concluímos que a primitivação de uma fracção própria do tipo $\frac{R(x)}{D(x)}$ se reduz à primitivação de fracções simples do tipo

$$\frac{A}{(x-\alpha)^r}\,,$$

, onde $A \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{N}$ ou do tipo

$$\frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^s}\,,$$

onde $B, C \in \mathbb{R}$ não simultaneamente nulos, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ são tais que $\beta^2-4\gamma<0$ e $s \in \mathbb{N}$.

Exemplo 4.39. 1. Pretendemos calcular

$$\int \frac{4x^2+x+1}{x^3-x}\,dx\,.$$

Uma vez que o grau do polinómio do numerador é inferior ao grau do polinómio do denominador, a função dada é uma fracção própria.

Vamos decompor a fracção dada em fracções simples.

Para o efeito, vamos decompor o polinómio x^3-x em polinómios irredutíveis. Temos

$$x^3-x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$$

e, portanto,

$$\frac{4x^2+x+1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+1}\,, \tag{4.15}$$

onde A_1, A_2, e A_3 são constantes reais a determinar por forma que a igualdade (4.15) se verifique.

Da igualdade (4.15) resulta

$$4x^2+x+1 = A_1(x-1)(x+1)+A_2x(x+1)+A_3x(x-1)\ .$$

Vamos determinar as constantes A_1, A_2, e A_3 utilizando o processo descrito na Observação 4.38, já que o polinómio x^3-x admite as raízes $x=0$, $x=1$ e $x=-1$.

A partir da igualdade (4.15) obtemos para $x=1$

$$6 = 2A_2 \Longleftrightarrow A_2 = 3\ ,$$

para $x=-1$

$$4 = 2A_3 \Longleftrightarrow A_3 = 2$$

e para $x=0$

$$1 = -A_1 \Longleftrightarrow A_1 = -1\ .$$

Consequentemente

$$\frac{4x^2+x+1}{x(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{x}+\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x+1}$$

é a decomposição da fracção dada em fracções simples.

Temos então

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^2+x+1}{x^3-x}\,dx &= \int\left(-\frac{1}{x}+\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x+1}\right)dx\\ &= -\ln|x|+3\ln|x-1|+2\ln|x+1|+C\\ &= \ln\frac{|x-1|^3(x+1)^2}{|x|}+C\ , \quad C\in\mathbb{R}\ .\end{aligned}$$

2. Vamos calcular

$$\int \frac{x^4-x^3+6x^2-4x+7}{(x-1)(x^2+1)^2}\,dx\ .$$

Uma vez que o grau do polinómio do numerador é inferior ao grau do polinómio do denominador a função a primitivar é uma fracção própria.

Uma vez que o polinómio do denominador está decomposto num produto de polinómios irredutíveis, para calcular a primitiva dada temos de começar por decompor a fracção própria considerada em fracções simples.

Temos então de determinar as constantes reais A, B_1, B_2, C_1 e C_2 por forma que a igualdade

$$\frac{x^4-x^3+6x^2-4x+7}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+1}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2}$$

se verifique.

Desta igualdade resulta

$$x^4-x^3+6x^2-4x+7 = A(x^2+1)^2+(B_1x+C_1)(x-1)(x^2+1)+(B_2x+C_2)(x-1)\ ,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}x^4-x^3+6x^2-4x+7 &= (A+B_1)x^4+(-B_1+C_1)x^3+(2A+B_1-C_1+B_2)x^2+\\ &\quad (B_1+C_1-B_2+C_2)x+(A-C_1-C_2)\ .\end{aligned}$$

Pela condição de igualdade de dois polinómios, temos que

$$\begin{cases} A+B_1=1\\ -B_1+C_1=-1\\ 2A+B_1-C_1+B_2=6\\ B_1+C_1-B_2+C_2=-4\\ A-C_1-C_2=7\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A=1-B_1\\ C_1=-1+B_1\\ 2-2B_1+B_1+1-B_1+B_2=6\\ B_1-1+B_1-B_2+C_2=-4\\ 1-B_1+1-B_1-C_2=7\end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A=1-B_1\\ C_1=-1+B_1\\ -2B_1+B_2=3\\ 2B_1-B_2+C_2=-4\\ -2B_1-C_2=5\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A=7/2\\ B_1=-5/2\\ C_1=-7/2\\ B_2=-2\\ C_2=0\end{cases}$$

Consequentemente

$$\frac{x^4-x^3+6x^2-4x+7}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{7}{2(x-1)}-\frac{5x+7}{2(x^2+1)}-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4-x^3+6x^2-4x+7}{(x-1)(x^2+1)^2}\,dx &= \int\left(\frac{7}{2(x-1)}-\frac{5x+7}{2(x^2+1)}-\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right)dx\\ &= \frac{7}{2}\ln|x-1|-\frac{5}{2}\int\frac{x}{x^2+1}\,dx-\frac{7}{2}\int\frac{1}{x^2+1}\,dx-\\ &\quad -\int 2x(x^2+1)^{-2}\,dx\\ &= \frac{7}{2}\ln|x-1|-\frac{5}{4}\ln(x^2+1)-\frac{7}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{(x^2+1)^{-1}}{-1}+C\\ &= \ln\frac{\sqrt{|x-1|^7}}{\sqrt[4]{(x^2+1)^5}}-\frac{7}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{x^2+1}+C\ , \quad C\in\mathbb{R}\ .\end{aligned}$$

3. Vamos calcular

$$\int \frac{x^4-3}{x^3+2x^2+x}\,dx\ .$$

Uma vez que o grau do polinómio do numerador é superior ao grau do polinómio do denominador vamos começar por efectuar a divisão de x^4-3 por x^3+2x^2+x.

Temos

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & & & -3 & x^3+2x^2+x \\ \cline{6-6}
-x^4 & -2x^3 & -x^2 & & & x-2 \\ \cline{1-5}
 & -2x^3 & -x^2 & & -3 & \\
 & 2x^3 & +4x^2 & +2x & & \\ \cline{2-5}
 & & 3x^2 & +2x & -3 &
\end{array}$$

Consequentemente

$$\frac{x^4-3}{x^3+2x^2+x}=x-2+\frac{3x^2+2x-3}{x^3+2x^2+x}$$

e, portanto,

$$\int\frac{x^4-3}{x^3+2x^2+x}\,dx=\frac{1}{2}x^2-2x+\int\frac{3x^2+2x-3}{x^3+2x^2+x}\,dx\,.$$

Para primitivar a fracção própria

$$\frac{3x^2+2x-3}{x^3+2x^2+x}$$

temos de decompor o polinómio x^3+2x^2+x em factores irredutíveis.

Temos

$$x^3+2x^2+x=x(x^2+2x+1)=x(x+1)^2$$

e, portanto,

$$\frac{3x^2+2x-3}{x^3+2x^2+2}=\frac{3x^2+2x-3}{x(x+1)^2}\,.$$

Vamos agora decompor esta fracção em fracções simples.

Temos então de determinar as constantes reais A_1, A_2 e A_3 por forma que a igualdade

$$\frac{3x^2+2x-3}{x(x+1)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{A_3}{(x+1)^2}$$

se verifique.

Desta igualdade resulta

$$3x^2+2x-3=A_1(x+1)^2+A_2x(x+1)+A_3x\,,$$

ou seja,

$$3x^2+2x-3=(A_1+A_2)x^2+(2A_1+A_2+A_3)x+A_1$$

o que, por sua vez, implica

$$\begin{cases} A_1+A_2=3 \\ 2A_1+A_2+A_3=2 \\ A_1=-3 \end{cases} \iff \begin{cases} A_1 &=& -3 \\ A_2 &=& 6 \\ A_3 &=& 2 \end{cases}$$

Consequentemente

$$\frac{3x^2+2x-3}{x(x+1)^2}=-\frac{3}{x}+\frac{6}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\int\frac{x^4-3}{x^3+2x^2+x}\,dx &= \frac{1}{2}x^2-2x+\int\left(-\frac{3}{x}+\frac{6}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}x^2-2x-3\ln|x|+6\ln|x+1|+2\int(x+1)^{-2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}x^2-2x+\ln\frac{|x+1|^6}{|x|^3}+2\frac{(x+1)^{-1}}{-1}+C \\
&= \frac{1}{2}x^2-2x+\ln\frac{(x+1)^6}{|x|^3}-\frac{2}{x+1}+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Observação 4.40. Utilizando uma substituição adequada podemos converter algumas funções definidas por um quociente em funções racionais e primitivá-las usando as técnicas expostas anteriormente.

Um desses casos é o das funções racionais que dependem do seno e do coseno e que serão estudadas na próxima secção.

Apresentamos a seguir um exemplo em que uma substituição adequada converte a função dada numa função racional.

Pretendemos calcular

$$\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,dx\,.$$

Consideremos a substituição definida por $\mathrm{e}^x=t$.

Esta substituição está associada à função invertível e diferenciável

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \ln t \end{array}$$

onde I é um intervalo de $\mathbb{R}^+$ conveniente.

Efectuando esta substituição obtemos

$$\begin{aligned}
\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,dx &= \int\frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\,dt \\
&= \int\frac{1}{(1+t)t}\,dt\,.
\end{aligned}$$

Trata-se da primitiva de uma fracção própria cujo denominador se encontra decomposto num produto de polinómios irredutíveis.

Vamos começar por decompor a fracção $\dfrac{1}{(1+t)t}$ em fracções simples.

Para o efeito temos de determinar as constantes reais A_1 e A_2 por forma que

$$\frac{1}{(1+t)t}=\frac{A_1}{1+t}+\frac{A_2}{t}\,.$$

Desta igualdade resulta

$$1 = A_1 t + A_2(1+t)$$

donde se obtém $A_1 = -1$ e $A_2 = 1$.

Temos então

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+e^x}\,dx &= \int \frac{1}{(1+t)t}\,dt \\
&= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right) dt \\
&= \ln \frac{t}{t+1} + C \\
&= \ln \frac{e^x}{e^x+1} + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Exercícios 4.4

Calcular os seguintes integrais indefinidos de funções racionais:

1. $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{(x-1)\ (x-2)\ (x-3)}\,dx$

2. $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{(2x+1)\ (x^2+1)}\,dx$

3. $\displaystyle\int \frac{x^3-3x^2+2x-3}{x^4+2x^2+1}\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-2x+1}\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{x^2+3x+1}{x^2-2x-3}\,dx$

Primitivação de funções racionais dependentes do seno e do coseno.

Neste parágrafo vamos apresentar uma técnica de primitivação para funções racionais dependentes do seno e do coseno, isto é, funções do tipo

$$\mathscr{R}(\operatorname{sen} x, \cos x) = \frac{N(\operatorname{sen} x, \cos x)}{D(\operatorname{sen} x, \cos x)}\,,$$

em que $N(\operatorname{sen} x, \cos x)$ e $D(\operatorname{sen} x, \cos x)$ são funções polinomiais que dependem de $\operatorname{sen} x$ e de $\cos x$.

Vamos ver que utilizando uma substituição adequada podemos converter este tipo de funções em funções racionais.

Atendendo a que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x &= 2 \operatorname{sen}\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2} \\
&= 2\cos\frac{x}{2}\, \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} \\
&= 2 \operatorname{tg}\frac{x}{2} \cos^2\frac{x}{2} \\
&= \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} \\
&= \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

e a que

$$\begin{aligned}
\cos x &= \cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} \\
&= \cos^2\frac{x}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) \\
&= \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} \\
&= \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

temos que toda a função racional dependente do seno e do coseno pode ser convertida numa função racional numa nova variável t através da substituição definida por

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t\,.$$

Esta substituição está associada à função diferenciável e invertível

$$\begin{aligned}
\varphi :\ I &\longrightarrow \mathbb{R} \\
t &\longmapsto 2\operatorname{arctg} t
\end{aligned}$$

onde I é um intervalo de $\mathbb{R}$ conveniente.

Efectuando a substituição indicada temos então

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}\,,$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

e, portanto,

$$\int \mathscr{R}(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx = \int \mathscr{R}\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2}\, dt\,.$$

Exemplo 4.41. 1. Pretendemos calcular

$$\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x+\cos x}\, dx\,.$$

Efectuando a substituição definida por

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$$

temos

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x+\cos x}\, dx &= \int \frac{1}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt \\
&= \int \frac{2}{1+t^2+2t+1-t^2}\, dt \\
&= \int \frac{2}{2+2t}\, dt \\
&= \int \frac{1}{1+t}\, dt \\
&= \ln|1+t| + C \\
&= \ln\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

2. Vamos calcular

$$\int \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}\, dx$$

efectuando a substituição de variável definida por

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$$

Temos

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}\, dx &= \int \frac{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}{1-\dfrac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt \\
&= \int \frac{1-t^2}{1+t^2-2t} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt \\
&= -2\int \frac{1+t}{(1+t^2)(t-1)}\, dt
\end{aligned}$$

Estamos perante a primitiva de uma fracção própria cujo denominador está decomposto em polinómios irredutíveis. Vamos decompor esta fracção em fracções simples. Temos então de determinar as constantes reais A, B e C por forma que a igualdade

$$\frac{1+t}{(1+t^2)(t-1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{1+t^2}$$

se verifique.

Desta igualdade resulta

$$1+t = A(1+t^2) + Bt(t-1) + C(t-1)\,,$$

ou seja,

$$1+t = (A+B)t^2 + (-B+C)t + (A-C)$$

o que, por sua vez, implica

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -B+C=1 \\ A-C=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=-B \\ A+C=1 \\ A-C=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A &= 1 \\ B &= -1 \\ C &= 0 \end{cases}$$

Consequentemente

$$\frac{t+1}{(1+t^2)(t-1)^2} = \frac{1}{t-1} - \frac{t}{1+t^2}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}\, dx &= -2\int \frac{1+t}{(1+t^2)(t-1)}\, dt \\
&= -2\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{t}{1+t^2}\right) dt \\
&= -2\ln|t-1| + \ln(1+t^2) + C \\
&= -\ln((t-1)^2) + \ln(1+t^2) + C \\
&= \ln\frac{1+t^2}{(t-1)^2} + C \\
&= \ln\frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)^2} + C \\
&= \ln\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)^2} + C \\
&= \ln\frac{1}{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2}} + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

3. Vamos calcular

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\, dx$$

efectuando a substituição de variável definida por

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$$

Temos

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\,dx &= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt\\
&= \int \frac{2t}{1+t^2-2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt\\
&= \int \frac{4t}{(1+t^2)(t-1)^2}\,dt
\end{aligned}$$

Estamos perante a primitiva de uma fracção própria cujo denominador está decomposto em polinómios irredutíveis. Vamos decompor esta fracção em fracções simples: temos então de determinar as constantes reais A_1, A_2, B e C por forma que a igualdade

$$\frac{4t}{(1+t^2)(t-1)^2} = \frac{A_1}{t-1} + \frac{A_2}{(t-1)^2} + \frac{Bt+C}{1+t^2}$$

se verifique.

Desta igualdade resulta

$$4t = A_1(t-1)(1+t^2) + A_2(t^2+1) + (Bt+C)(t-1)^2\,,$$

ou seja,

$$4t = (A_1+B)t^3 + (-A_1+A_2-2B+C)t^2 + (A_1+B-2C)t + (-A_1+A_2+C)$$

o que, por sua vez, implica

$$\begin{cases} A_1+B=0\\ -A_1+A_2-2B+C=0\\ A_1+B-2C=4\\ -A_1+A_2+C=0 \end{cases} \iff \begin{cases} A_1+B=0\\ -A_1+A_2-2B+C=0\\ C=-2\\ -A_1+A_2=2 \end{cases} \iff \begin{cases} A_1 &=& 0\\ A_2 &=& 2\\ B &=& 0\\ C &=& -2 \end{cases}$$

Consequentemente,

$$\frac{4t}{(1+t^2)(t-1)^2} = \frac{2}{(t-1)^2} - \frac{2}{1+t^2}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\,dx &= \int \frac{4t}{(1+t^2)(t-1)^2}\,dt\\
&= \int \left(\frac{2}{(t-1)^2} - \frac{2}{1+t^2}\right)dt\\
&= 2\frac{(t-1)^{-1}}{-1} - 2\operatorname{arctg} t + C\\
&= \frac{-2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1} - x + C\\
&= \frac{2\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}} - x + C\,, \quad C\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Observação 4.42. Muito embora a substituição apresentada permita resolver o problema da primitivação de todas as funções racionais dependentes do seno e do coseno, há casos em que uma outra substituição do mesmo tipo é mais eficiente.

Assim no caso em que o numerador e o denominador da fracção são polinómios que se podem exprimir apenas em função de $\operatorname{tg} x$ a substituição definida por

$$\operatorname{tg} x = t$$

é mais eficiente.

Esta substituição está associada à função diferenciável e invertível

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & I & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & t & \longmapsto & \operatorname{arctg} t \end{array}$$

onde I é um intervalo de $\mathbb{R}$ conveniente.

Sendo então $\mathscr{R}(\operatorname{tg} x)$ uma função racional cujos numerador e denominador são polinómios que dependem apenas da tangente temos

$$\int \mathscr{R}(\operatorname{tg} x)\,dx = \int \mathscr{R}(t)\,\frac{1}{1+t^2}\,dt\,.$$

Exemplo 4.43. Pretendemos calcular

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x+\cos x}\,dx\,.$$

Uma vez que

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x+\cos x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x+1}$$

podemos calcular a primitiva dada efectuando a substituição de variável definida por

$$\operatorname{tg} x = t\ .$$

Temos então

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\, dx &= \int \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 1}\, dx \\
&= \int \frac{t}{t+1} \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt \\
&= \int \frac{t}{(t+1)(t^2+1)}\, dt \\
&= \frac{1}{2}\int \left(-\frac{1}{t+1} + \frac{t+1}{t^2+1} \right) dt \\
&= -\frac{1}{2}\ln|t+1| + \frac{1}{2}\int \frac{t}{t^2+1}\, dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\, dt \\
&= -\frac{1}{2}\ln|t+1| + \frac{1}{4}\ln(t^2+1) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C \\
&= \ln \frac{\sqrt[4]{t^2+1}}{\sqrt{|t+1|}} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C \\
&= \ln \frac{\sqrt[4]{\operatorname{tg}^2 x+1}}{\sqrt{|\operatorname{tg} x+1|}} + \frac{1}{2}x + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Observe-se que, neste caso, a substituição $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$ conduz à primitiva

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\, dx &= \int \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 1}\, dx \\
&= \int \frac{2t}{2t+1-t^2} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt \\
&= \int \frac{-4t}{(t^2-2t-1)(t^2+1)}\, dt \\
&= \int \frac{-4t}{(t-2-\sqrt{2})(t-2+\sqrt{2})(t^2+1)}\, dt
\end{aligned}$$

cuja resolução é mais trabalhosa.

Exercícios 4.5

1. Calcule:
   (a) $\int e^{3\cos^2 x} \operatorname{sen} x \cos x\, dx$
   (b) $\int e^{3x} \operatorname{sen} x\, dx$
   (c) $\int x\, arctgx\, dx$
   (d) $\int e^{ax} \cos(bx)\, dx \quad a, b \in \mathbb{R}^+$
   (e) $\int \frac{1}{4x^2+4x+5}\, dx$

   (f) $\int \frac{1}{x^3+1}\, dx$
   (g) $\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx$
   (h) $\int x \cos x^2\, dx$
   (i) $\int \cos^2\theta\ d\theta$
   (j) $\int \operatorname{sen}(5x)\operatorname{sen}(3x)\, dx$
   (k) $\int \frac{1}{5-3\cos x}\, dx$
   (l) $\int \cos^4\theta\ \operatorname{sen}(2\theta)\, d\theta$
   (m) $\int \operatorname{sen}^3\alpha \cos^4\alpha\ d\alpha$
   (n) $\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\operatorname{sen} x}\, dx$
   (o) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}\, dx$
   (p) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\, dx$
   (q) $\int \operatorname{cosec}^4 x\, dx$
   (r) $\int \operatorname{sen}(3x)\cos(4x)\, dx$
   (s) $\int \cos(x)\cos(5x)\, dx$

2. Encontre uma função f tal que $f'(x) + \operatorname{sen} x = 0$ e $f(0) = 2$.

3. Calcule as seguintes primitivas:
   (a) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}\, dx$
   (b) $\int \frac{1}{e^{2x}+e^{-2x}}\, dx$
   (c) $\int \frac{3}{e^{2x}+2e^x+3}\, dx$
   (d) $\int (x^2-4)^{-\frac{3}{2}}\, dx$
   (e) $\int x\cos(\ln x)\, dx$
   (f) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\, dx$
   (g) $\int \frac{x^4-3x^3+4x}{(x-1)(x^2-2x+2)}\, dx$
   (h) $\int \frac{\cos^2 x}{[1-\cos x]\ \operatorname{sen} x}\, dx$
   (i) $\int \frac{2x \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2}\, dx$

(j) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^4}\,dx$

(k) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$

(l) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$

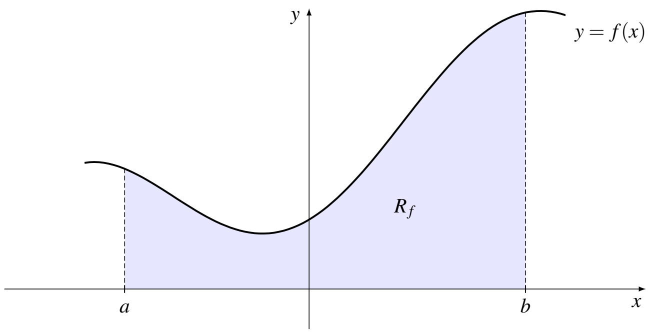
(m) $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx$

4.2 Integral de Riemann de uma função

A definição de integral de uma função que vamos apresentar é motivada pelo problema do cálculo da área de uma região do plano limitada pelo eixo OX, pelo gráfico de uma função contínua e positiva definida num intervalo $[a,b]$ e pelas rectas de equações, respectivamente, $x=a$ e $x=b$.

Ao longo deste capítulo suporemos que $[a,b]$ é um intervalo de $\mathbb{R}$ não degenerado, isto é, suporemos que $a<b$.

Consideremos a região do plano R_f representada na figura seguinte:



Denote-se por A_f o valor da área da região representada e suponhamos que pretendemos calcular o valor de A_f. Vamos apresentar três processos que nos permitem obter valores aproximados do valor de A_f.

1. Primeiro Processo

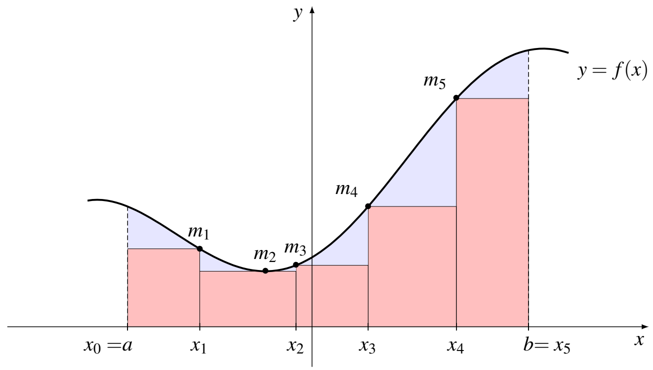
   No intervalo $[a,b]$ tomamos $n+1$ pontos $x_0, x_1, \cdots, x_n$ tais que $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$.

   Deste modo decompomos o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos $[x_{i-1},x_i]$ com $i\in\{1,2,\cdots,n\}$.

   A cada intervalo $[x_{i-1},x_i]$ associamos um rectângulo cuja base é a amplitude [3] do intervalo e cuja altura é o menor valor que a função toma no intervalo $[x_{i-1},x_i]$. (Note-se que a continuidade de f neste intervalo garante, pelo Teorema de Weierstrass, que f atinge mínimo global no intervalo $[x_{i-1},x_i]$.)

   Na figura seguinte ilustramos o processo descrito tomando $n=5$.

[3] Seja $[\alpha,\beta]$ um intervalo de números reais. Chama-se *amplitude* do intervalo $[\alpha,\beta]$ ao número real não negativo $\beta-\alpha$.



Seja A_m a soma das áreas dos rectângulos considerados. Se designarmos por m_i o mínimo global de f no intervalo $[x_{i-1},x_i]$ temos

$$A_m = \sum_{i=1}^{5} m_i(x_i - x_{i-1})\ .$$

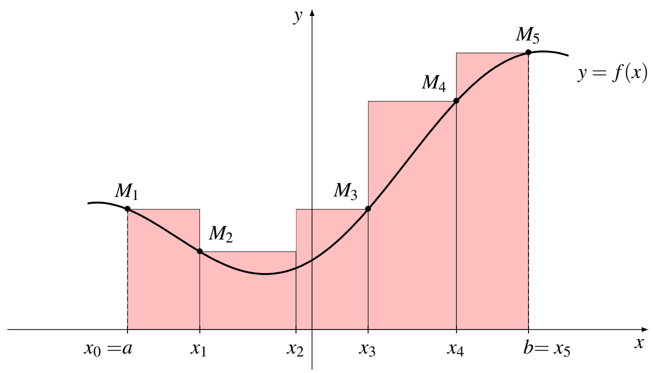
É óbvio que $A_m \le A_f$ e que A_m é um valor aproximado por defeito de A_f.

2. Segundo Processo

   No intervalo $[a,b]$ tomamos também $n+1$ pontos $x_0, x_1, \cdots, x_n$ nas condições indicadas anteriormente.

   Consideramos, para cada $i\in\{1,\cdots,n\}$, o rectângulo cuja base é a amplitude do intervalo $[x_{i-1},x_i]$ e cuja altura é o valor máximo que a função toma no intervalo $[x_{i-1},x_i]$. (A existência deste máximo está garantida pelo Teorema de Weierstrass).

   Na figura seguinte ilustramos o processo tomando os pontos considerados para o caso anterior.



Denotemos por A_M a soma das áreas dos rectângulos considerados. Para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, seja M_i o máximo global de f em $[x_{i-1}, x_i]$. Temos

$$A_M = \sum_{i=1}^{5} M_i (x_i - x_{i-1}) \ .$$

Não é difícil verificar que A_M é um valor aproximado por excesso de A_f e, portanto, $A_M \geq A_f$.

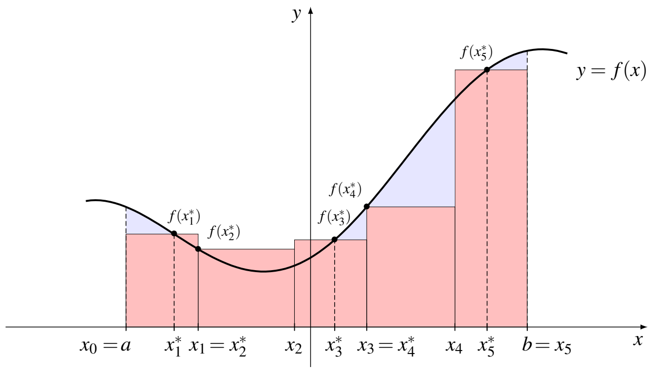
3. Terceiro Processo

   Consideramos $n+1$ pontos $x_0, x_1, \cdots, x_n$ no intervalo $[a,b]$ tais que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

   Para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ tomamos um ponto x_i^* no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

   Para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ consideramos o rectângulo cuja base é a amplitude do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ e cuja altura é $f(x_i^*)$.

   Na figura seguinte estão representados rectângulos construídos pelo processo descrito tomando a subdivisão do intervalo $[a,b]$ nos 5 intervalos considerados nas figuras anteriores.



   Denotando por A a soma das áreas dos rectângulos considerados temos

$$A = \sum_{i=1}^{5} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) \ .$$

   É óbvio que A nos dá um valor aproximado de A_f.

   Atendendo a que, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $m_i \leq f(x_i^*) \leq M_i$ temos que

$$A_m \leq A \leq A_M \ .$$

4.2.1 Definição de integral de Riemann

Seja $[a,b]$ um intervalo de $\mathbb{R}$, não degenerado.

Definição 4.44. Chama-se **partição** do intervalo $[a,b]$ a todo o subconjunto finito

$$\mathscr{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$$

de $[a,b]$ tal que

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \, .$$

Observação 4.45. Toda a partição $\mathscr{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ do intervalo $[a,b]$ determina n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, de amplitudes $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, respectivamente.

Definição 4.46. Chama-se amplitude ou diâmetro da partição $\mathscr{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ e denota-se por

$$|\mathscr{P}| \quad \text{ou} \quad \Delta\mathscr{P}$$

à maior das amplitudes dos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, para $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Observação 4.47. Resulta da Definição 4.46 que sendo $\mathscr{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ uma partição de $[a,b]$, tem-se

$$\begin{aligned} |\mathscr{P}| &= \max\{\Delta x_i, i \in \{1, 2, \cdots, n\}\} \\ &= \max\{x_i - x_{i-1}, i \in \{1, 2, \cdots, n\}\} \, . \end{aligned}$$

Definição 4.48. Chama-se **conjunto compatível com a partição** $\mathscr{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ **do intervalo** $[a,b]$ **ou selecção da partição** $\mathscr{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ a todo o conjunto

$$\mathscr{C} = \{x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*\}$$

tal que, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$,

$$x_i^* \in [x_{i-1}, x_i] \, .$$

Exemplo 4.49. 1. Considere-se o intervalo $\left[-2, \frac{3}{2}\right]$ e o conjunto

$$\mathscr{P} = \left\{-2, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right\} \, .$$

Uma vez que $\mathscr{P} \subset \left[-2, \frac{3}{2}\right]$, $\mathscr{P}$ contém os extremos do intervalo considerado e

$$-2 < -\frac{3}{2} < -\frac{1}{3} < 0 < \frac{3}{4} < \frac{3}{2}$$

tem-se que $\mathscr{P}$ é uma partição do intervalo considerado.

De acordo com a Definição 4.46, o diâmetro da partição $\mathscr{P}$ é

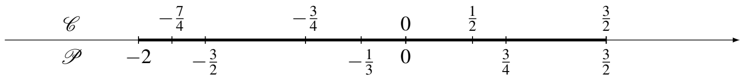
$$\begin{aligned}\Delta\mathscr{P} &= \max\left\{-\frac{3}{2}+2,-\frac{1}{3}+\frac{3}{2},0+\frac{1}{3},\frac{3}{4}-0,\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right\}\\ &= \max\left\{\frac{1}{2},\frac{7}{6},\frac{1}{3},\frac{3}{4}\right\}\\ &= \frac{7}{6}\,.\end{aligned}$$

O conjunto

$$\mathscr{C}=\left\{-\frac{7}{4},-\frac{3}{4},0,\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right\}$$

é um conjunto compatível com a partição $\mathscr{P}$ porque $-\frac{7}{4}\in\left[-2,-\frac{3}{2}\right]$, $-\frac{3}{4}\in\left[-\frac{3}{2},-\frac{1}{3}\right]$, $0\in\left[-\frac{1}{3},0\right]$, $\frac{1}{2}\in\left[0,\frac{3}{4}\right]$ e $\frac{3}{2}\in\left[\frac{3}{4},\frac{3}{2}\right]$.

Na figura seguinte estão representados o intervalo $\left[-2,\frac{3}{2}\right]$, a partição $\mathscr{P}$ e o conjunto compatível $\mathscr{C}$.



2. Consideremos o intervalo $[0,3]$.

   Então o conjunto
$$\mathscr{P}=\left\{0,\frac{1}{2},\frac{\pi}{2},2,3\right\}$$
   é uma partição deste intervalo, uma vez que contém os extremos do intervalo e $0<\frac{1}{2}<\frac{\pi}{2}<2<3$, e o conjunto
$$\mathscr{C}=\left\{\frac{1}{4},\frac{\pi}{2},\frac{9}{5},\frac{5}{2}\right\}$$
   é um conjunto compatível com a partição $\mathscr{P}$, já que $\frac{1}{4}\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, $\frac{\pi}{2}\in\left[\frac{1}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{9}{5}\in\left[\frac{\pi}{2},2\right]$ e $\frac{5}{2}\in[2,3]$.

   O diâmetro da partição $\mathscr{P}$ é
$$\begin{aligned}\Delta\mathscr{P} &= \max\left\{\frac{1}{2},\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2},2-\frac{\pi}{2},1\right\}\\ &= \frac{\pi-1}{2}\end{aligned}$$

Definição 4.50. Sejam f uma função definida num intervalo $[a,b]$, $\mathscr{P}=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ uma partição de $[a,b]$ e $\mathscr{C}=\{x_1^*,x_2^*\cdots,x_n^*\}$ um conjunto compatível com a partição $\mathscr{P}$. Chama-se **soma de Riemann de** **f associada à partição $\mathscr{P}$ e ao conjunto compatível** $\mathscr{C}$, e representa-se pelo símbolo

$$S_f(\mathscr{P},\mathscr{C})\,,$$

ao número real obtido do modo seguinte:

$$S_f(\mathscr{P},\mathscr{C})=\sum_{i=1}^{n}f(x_i^*)(x_i-x_{i-1})\,.$$

Observemos que cada parcela da soma de Riemann $S_f(\mathscr{P},\mathscr{C})$ é a área de um rectângulo cuja base é a amplitude do intervalo $[x_{i-1},x_i]$ e cuja altura é $f(x_i^*)$.

Exemplo 4.51. 1. Seja f a função definida por $f(x)=x^2-1$, para todo o $x\in\mathbb{R}$.

Consideremos o intervalo $\left[-2,\frac{3}{2}\right]$. Então

$$\mathscr{P}=\left\{-2,-\frac{3}{2},-\frac{1}{3},0,\frac{3}{4},\frac{3}{2}\right\}$$

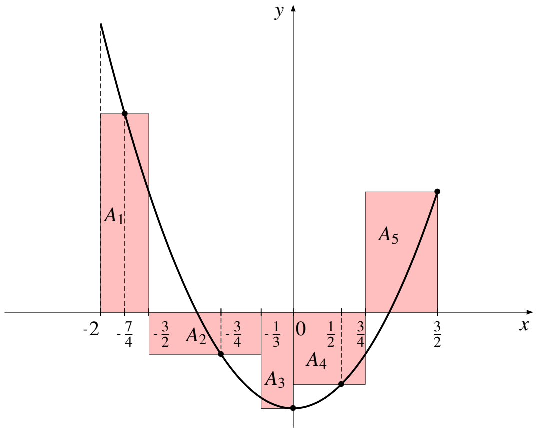
é uma partição do intervalo considerado e

$$\mathscr{C}=\left\{-\frac{7}{4},-\frac{3}{4},0,\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right\}$$

é um conjunto compatível com a partição $\mathscr{P}$.

A soma de Riemann de f associada à partição $\mathscr{P}$ e ao conjunto compatível $\mathscr{C}$ é dada por

$$\begin{aligned}S_f(\mathscr{P},\mathscr{C}) &= f\left(-\frac{7}{4}\right)\left(-\frac{3}{2}+2\right)+f\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right)+f(0)\left(0+\frac{1}{3}\right)+\\ &\quad+f\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}-0\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right)\\ &= -\frac{301}{192}\end{aligned}$$



Observemos que $S_f(\mathscr{P},\mathscr{C}) = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$, onde

- A_1 representa a área do rectângulo cuja base é a amplitude do intervalo $\left[-2,-\dfrac{3}{2}\right]$ e cuja altura é $f\left(-\dfrac{7}{4}\right)$;
- A_2 representa a área do rectângulo cuja base é a amplitude do intervalo $\left[-\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{3}\right]$ e cuja altura é $-f\left(-\dfrac{3}{4}\right)$;
- A_3 representa a área do rectângulo cuja base é a amplitude do intervalo $\left[-\dfrac{1}{3},0\right]$ e cuja altura é $-f(0)$;
- A_4 representa a área do rectângulo cuja base é a amplitude do intervalo $\left[0,\dfrac{3}{4}\right]$ e cuja altura é $-f\left(\dfrac{1}{2}\right)$;
- A_5 representa a área do rectângulo cuja base é a amplitude do intervalo $\left[\dfrac{3}{4},\dfrac{3}{2}\right]$ e cuja altura é $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

2. Consideremos a função f definida por $f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$, e o intervalo $[-1,2]$.

   Sejam

$$\mathscr{P} = \left\{-1,-\frac{1}{2},0,\frac{3}{2},2\right\}$$

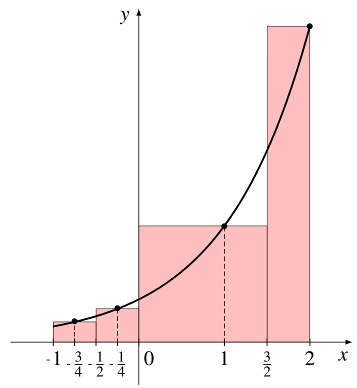
   uma partição do intervalo $[-1,2]$ e

$$\mathscr{C} = \left\{-\frac{3}{4},-\frac{1}{4},1,2\right\}$$

   um conjunto compatível com $\mathscr{P}$.

A soma de Riemann de f associada à partição $\mathscr{P}$ e ao conjunto compatível $\mathscr{C}$ é dada por

$$\begin{aligned} S_f(\mathscr{P},\mathscr{C}) &= f\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}+1\right)+f\left(-\frac{1}{4}\right)\left(0+\frac{1}{2}\right)+f(1)\left(\frac{3}{2}-0\right)+ \\ &\quad +f(2)\left(2-\frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{-3/4}+\mathrm{e}^{-1/4}+3e+\mathrm{e}^2\right) \end{aligned}$$

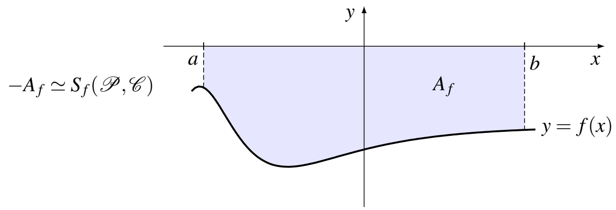


Como f é contínua e positiva em $[-1,2]$ temos que, neste caso, $S_f(\mathscr{P},\mathscr{C})$ dá-nos um valor aproximado da área da região limitada do plano delimitada pelo eixo OX, pelo gráfico de f e pelas rectas de equações $x=-1$ e $x=2$, respectivamente.

Observação 4.52. 1. Se f é uma função contínua e positiva no intervalo $[a,b]$, então, para toda a partição $\mathscr{P}$ do intervalo $[a,b]$ e, para todo o conjunto $\mathscr{C}$ compatível com a partição $\mathscr{P}$, a soma de Riemann $S_f(\mathscr{P},\mathscr{C})$ dá-nos um valor aproximado do valor da área da região limitada do plano delimitada inferiormente pelo eixo OX, superiormente pelo gráfico de f, à esquerda pela recta de equação $x=a$ e à direita pela recta de equação $x=b$.

   Se o diâmetro da partição $\mathscr{P}$ for muito pequeno, a soma de Riemann $S_f(\mathscr{P},\mathscr{C})$ está muito próxima do valor da área referida.

2. Se f é uma função contínua e negativa no intervalo $[a,b]$, então, para toda a partição $\mathscr{P}$ do intervalo $[a,b]$ e, para todo o conjunto $\mathscr{C}$ compatível com a partição $\mathscr{P}$, a soma de Riemann $S_f(\mathscr{P},\mathscr{C})$ dá-nos um valor aproximado do simétrico do valor da área da região limitada do plano delimitada superiormente pelo eixo OX, inferiormente pelo gráfico de f, à esquerda pela recta de equação $x=a$ e à direita pela recta de equação $x=b$.



Vamos agora apresentar a definição de integral de Riemann de uma função. Esta definição traduz a ideia de que, se a amplitude da partição $\mathscr{P}$ é suficientemente pequena, então todas as somas de Riemann da função f associadas a essa partição estão tão próximas do valor do integral de Riemann quanto se queira.

Definição 4.53. Sejam $[a,b]$ (com $a < b$) um intervalo de $\mathbb{R}$, f uma função definida em $[a,b]$ e I um número real.

Dizemos que I é o **integral de Riemann** de f de a para b e escrevemos

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

se, para todo o $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para toda a partição $\mathscr{P}$ do intervalo $[a,b]$, se

$$|\mathscr{P}| < \delta$$

então, para todo o conjunto $\mathscr{C}$ compatível com $\mathscr{P}$,

$$|S_f(\mathscr{P},\mathscr{C}) - I| < \varepsilon\,.$$

Se existe o integral de Riemann de f em $[a,b]$ dizemos que f é **integrável segundo Riemann em** $[a,b]$ ou, simplesmente, **integrável em** $[a,b]$.

O símbolo

$$\int_a^b f(x)\,dx\,,$$

que se lê integral de a até b (ou de a para b, ou entre a e b) de $f(x)\,dx$, é também designado por **integral definido de** f **de** a **para** b.

A a chamamos **limite inferior de integração**, a b chamamos **limite superior de integração**, a f chamamos **função integranda** e à variável x chamamos **variável de integração**.

Note-se que a variável de integração é uma variável muda pelo que pode ser substituída por qualquer outra variável. Temos, por exemplo,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du\,.$$

Note-se que na definição de integral de Riemann de f de a para b se pressupõe $a < b$.

Vamos agora dar significado ao símbolo

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

nos casos em que $a = b$ ou $a > b$.

Se $a > b$ escrevemos, por definição,

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

e, se $a = b$ escrevemos, por definição,

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0\,.$$

As duas proposições que apresentamos a seguir estabelecem condições equivalentes à Definição 4.53.

A primeira proposição apresentada é muito útil do ponto de vista prático, pois permite, em muitos casos, estabelecer a integrabilidade de uma função e calcular o seu integral de Riemann.

Da proposição que apresentamos em segundo lugar resultam como consequência algumas propriedades importantes do integral de Riemann.

Proposição 4.54. *Sejam $[a,b]$ (com $a < b$) um intervalo de $\mathbb{R}$, f uma função definida em $[a,b]$ e I um número real.*

Então I é o integral de Riemann de f de a para b se e só se, para toda a sucessão $(\mathscr{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de partições do intervalo $[a,b]$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} |\mathscr{P}_n| = 0$$

se tem

$$\lim_{n\to+\infty} S_f(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n) = I\,,$$

para toda a sucessão $(\mathscr{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{C}_n$ é compatível com $\mathscr{P}_n$.

Demonstração: "$\Rightarrow$"

Admitamos que I é o integral de Riemann da função f de a para b.

Seja $(\mathscr{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de partições do intervalo $[a,b]$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} |\mathscr{P}_n| = 0\,. \tag{4.16}$$

Seja $(\mathscr{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de conjuntos tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{C}_n$ é compatível com $\mathscr{P}_n$. Queremos provar que

$$\lim_{n\to+\infty} S_f(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n) = I\,,$$

ou seja, que para todo o $\varepsilon > 0$, existe $u \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se $n > u$, então

$$|S_f(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n) - I| < \varepsilon\,.$$

Seja $\varepsilon > 0$.

Como, por hipótese, $I = \int_a^b f(x)\,dx$, a Definição 4.53 garante que existe $\delta > 0$ tal que, para toda a partição $\mathscr{P}$ do intervalo $[a,b]$, se

$$|\mathscr{P}| < \delta \,,$$

então, para todo o conjunto $\mathscr{C}$ compatível com $\mathscr{P}$,

$$|S_f(\mathscr{P},\mathscr{C}) - I| < \varepsilon \,.$$

Atendendo a (4.16) tem-se que, dado $\delta > 0$, existe $u \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, se $n > u$, então

$$|\mathscr{P}_n| < \delta \,.$$

Conclui-se então que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, se $n > u$, então

$$|S_f(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n) - I| < \varepsilon \,,$$

para todo o conjunto $\mathscr{C}_n$ tal que, para cada n, $\mathscr{C}_n$ é compatível com $\mathscr{P}_n$.

"$\Leftarrow$" Admitamos que, para toda a sucessão $(\mathscr{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de partições do intervalo $[a,b]$, tal que

$$\lim_{n\to+\infty} |\mathscr{P}_n| = 0$$

se tem

$$\lim_{n\to+\infty} S_f(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n) = I \,,$$

para toda a sucessão $(\mathscr{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{C}_n$ é compatível com $\mathscr{P}_n$.

Vamos então provar que

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

usando a Definição 4.53.

Seja $\varepsilon > 0$.

Queremos provar que existe existe $\delta > 0$ tal que, para toda a partição $\mathscr{P}$ do intervalo $[a,b]$, se

$$|\mathscr{P}| < \delta$$

então, para todo o conjunto $\mathscr{C}$ compatível com $\mathscr{P}$,

$$|S_f(\mathscr{P},\mathscr{C}) - I| < \varepsilon \,.$$

Admitamos, para redução ao absurdo, que, para todo o $\delta > 0$, existe uma partição $\mathscr{P}$ de $[a,b]$ tal que

$$|\mathscr{P}| < \delta$$

e

$$|S_f(\mathscr{P},\mathscr{C}) - I| \geq \varepsilon \,,$$

para algum conjunto $\mathscr{C}$ compatível com $\mathscr{P}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\delta = \dfrac{1}{n} > 0$.

Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma partição $\mathscr{P}_n$ de $[a,b]$ tal que

$$|\mathscr{P}_n| < \frac{1}{n}$$

e

$$|S_f(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n) - I| \geq \varepsilon \,,$$

para algum conjunto $\mathscr{C}_n$ compatível com $\mathscr{P}_n$.

Deste modo construímos uma sucessão $(\mathscr{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de partições de $[a,b]$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} |\mathscr{P}_n| = 0$$

e existe uma sucessão de conjuntos $(\mathscr{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{C}_n$ é compatível com $\mathscr{P}_n$ e tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$|S_f(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n) - I| \geq \varepsilon \,,$$

o que é absurdo, já que, por hipótese,

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \,.$$

O absurdo resulta de supor que, para todo o $\delta > 0$, existe uma partição $\mathscr{P}$ de $[a,b]$ tal que

$$|\mathscr{P}| < \delta$$

e

$$|S_f(\mathscr{P},\mathscr{C}) - I| \geq \varepsilon \,,$$

para algum conjunto $\mathscr{C}$ compatível com $\mathscr{P}$.

Concluímos então que existe $\delta > 0$ tal que, para toda a partição $\mathscr{P}$ do intervalo $[a,b]$, se

$$|\mathscr{P}| < \delta$$

então, para todo o conjunto $\mathscr{C}$ compatível com $\mathscr{P}$,

$$|S_f(\mathscr{P},\mathscr{C}) - I| < \varepsilon \,,$$

como pretendíamos.

∎

A proposição que acabámos de demonstrar tem, do ponto de vista prático, a vantagem seguinte:

suponhamos que uma dada função f é integrável num intervalo $[a,b]$ e que pretendemos calcular o integral de Riemann de f de a para b; basta considerar uma sucessão de partições do intervalo $[a,b]$ tal que a sucessão dos correspondentes diâmetros seja um infinitésimo e calcular o limite de uma sucessão de somas de Riemann associadas àquelas partições.

Exemplo 4.55. Sabendo que a função f definida por $f(x) = x$ é integrável no intervalo $[0,1]$ vamos calcular o
$$\int_0^1 x\,dx\,.$$

Consideremos a sucessão de partições do intervalo $[0,1]$ construída do modo seguinte:

$\mathscr{P}_1 = \{x_0, x_1\}$, onde $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$;

$\mathscr{P}_2 = \{x_0, x_1, x_2\}$, onde $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$ e $x_2 = 1$;

$\mathscr{P}_3 = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$, onde $x_0 = 0$, $x_1 = 1/3$, $x_2 = 2/3$ e $x_3 = 1$;

$\mathscr{P}_4 = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$, onde $x_0 = 0$, $x_1 = 1/4$, $x_2 = 2/4$, $x_3 = 3/4$ e $x_4 = 1$;

$\vdots$

$\mathscr{P}_n = \{x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$, onde $x_0 = 0$, $x_1 = 1/n$, $\cdots$, $x_{n-1} = (n-1)/n$, $x_n = 1$;

$\vdots$

Note-se que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a partição $\mathscr{P}_n$ divide o intervalo $[0,1]$ em n subintervalos de amplitude $\dfrac{1}{n}$.

Consequentemente, para cada $n \in \mathbb{N}$, $|\mathscr{P}_n| = \dfrac{1}{n}$ e, portanto,
$$\lim_{n\to+\infty} |\mathscr{P}_n| = 0\,.$$

Temos então uma sucessão de partições do intervalo $[0,1]$ tal que a sucessão dos diâmetros correspondentes é um infinitésimo.

De acordo com a Proposição 4.54, para calcular o integral de Riemann pretendido basta considerar uma qualquer sucessão $(\mathscr{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{C}_n$ é compatível com $\mathscr{P}_n$, e calcular o limite da sucessão de somas de Riemann associadas às partições consideradas e aos conjuntos compatíveis escolhidos.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ vamos escolher $\mathscr{C}_n = \{x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*\}$ onde, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $x_i^* = x_i = i/n$.

Temos então, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{C}_n = \{1/n, 2/n, \cdots, 1\}$ e
$$\begin{aligned} S_f(\mathscr{P}_n, \mathscr{C}_n) &= \sum_{i=1}^n f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{i}{n}\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2} \\ &= \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

Pela Proposição 4.54,
$$\int_0^1 x\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}\,.$$

Observação 4.56. Sejam a e b dois números reais tais que $a < b$ e f uma função definida no intervalo $[a,b]$. Com vista à aplicação da Proposição 4.54 é habitual tomarmos a sucessão $(\mathscr{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de partições do intervalo $[a,b]$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathscr{P}_n = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}\,,$$
onde, para cada $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$,
$$x_i = a + i\,\frac{b-a}{n}\,.$$

A estas partições chamamos partições regulares do intervalo $[a,b]$.

Note-se que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a partição $\mathscr{P}_n$ divide o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, com $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, de amplitude
$$\begin{aligned} x_i - x_{i-1} &= a + i\,\frac{b-a}{n} - \left(a + (i-1)\,\frac{b-a}{n}\right) \\ &= \frac{b-a}{n} \end{aligned}$$
pelo que
$$|\mathscr{P}_n| = \frac{b-a}{n}$$
e, consequentemente,
$$\lim_{n\to+\infty} |\mathscr{P}_n| = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} = 0\,.$$

No Exemplo 4.55 considerámos as partições regulares do intervalo $[0,1]$.

Apresentamos a seguir mais alguns exemplos de aplicação da Proposição 4.54 onde se utilizam as partições regulares do intervalo considerado.

Exemplo 4.57. 1. Seja c um número real.

Sabendo que a função f definida por $f(x) = c$, para todo o $x \in \mathbb{R}$, é uma função integrável em qualquer intervalo fechado e limitado de $\mathbb{R}$, vamos provar que, para todos os $a, b \in \mathbb{R}$,
$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)\,.$$

i) Se $a = b$ temos, por definição,
$$\int_a^b c\,dx = 0$$
e a igualdade verifica-se trivialmente.

ii) Suponhamos que se tem $a < b$.

Seja $(\mathscr{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão de partições regulares do intervalo $[a,b]$.

Temos então, para cada $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathscr{P}_n = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}\,,$$

onde, para cada $i \in \{0,1,\cdots,n\}$,
$$x_i = a + i\,\frac{b-a}{n}\ .$$

Como vimos na Observação 4.56 a sucessão de partições regulares satisfaz a condição

$$\lim_{n\to+\infty} |\mathscr{P}_n| = 0\ ,$$

pelo que, de acordo com a Proposição 4.54,

$$\int_a^b c\,dx = \lim_{n\to+\infty} S_f\left(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n\right)\ ,$$

para toda a sucessão $(\mathscr{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que, para cada $n\in\mathbb{N}$, $\mathscr{C}_n$ é compatível com $\mathscr{P}_n$.

Seja então $(\mathscr{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de conjuntos tal que, para cada $n\in\mathbb{N}$, $\mathscr{C}_n = \{x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*\}$ é compatível com $\mathscr{P}_n$.

Para cada $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} S_f\left(\mathscr{C}_n,\mathscr{P}_n\right) &= \sum_{i=1}^n f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n c\,\frac{b-a}{n} \\ &= c(b-a)\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \\ &= c(b-a) \end{aligned}$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} \int_a^b c\,dx &= \lim_{n\to+\infty} S_f\left(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} c(b-a) \\ &= c(b-a) \end{aligned}$$

iii) Suponhamos que se tem $a > b$.

De acordo com a definição temos

$$\begin{aligned} \int_a^b c\,dx &= -\int_b^a c\,dx \\ &= -(c(a-b)) \\ &= c(b-a) \end{aligned}$$

De *i), ii)* e *iii)* concluímos a igualdade pretendida.

2. Sejam $[a,b]$, com $a<b$ um intervalo de números reais e f a função definida por $f(x) = x+1$, para todo o $x\in\mathbb{R}$.

Sabendo que f é integrável em $[a,b]$ vamos calcular o integral de Riemann da função f entre a e b.

Sejam $(\mathscr{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão das partições regulares do intervalo $[a,b]$ onde, para cada $n\in\mathbb{N}$,

$$\mathscr{P}_n = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}\ ,$$

e, para cada $i \in \{0,1,\cdots,n\}$, $x_i = a + i\,\dfrac{b-a}{n}$, e $(\mathscr{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão de subconjuntos de $[a,b]$ tal que, para cada $n\in\mathbb{N}$,
$$\mathscr{C}_n = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}\ .$$

Então $(\mathscr{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão tal que, para cada $n\in\mathbb{N}$, $\mathscr{C}_n$ é compatível com $\mathscr{P}_n$.

Temos, para cada $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} S_f\left(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n\right) &= \sum_{i=1}^n f(x_i)\,\frac{b-a}{n} \\ &= \sum_{i=1}^n f\left(a + i\,\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(a + i\,\frac{b-a}{n} + 1\right)\frac{b-a}{n} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(a + i\,\frac{b-a}{n} + 1\right)\frac{b-a}{n} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(a\frac{b-a}{n} + i\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 + \frac{b-a}{n}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n (a+1)\frac{b-a}{n} + \sum_{i=1}^n \left(i\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\right) \\ &= (a+1)\frac{b-a}{n}\cdot n + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2\sum_{i=1}^n i \\ &= (a+1)(b-a) + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2\frac{n+1}{2}\cdot n \\ &= (a+1)(b-a) + (b-a)^2\frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

De acordo com a Proposição 4.54,

$$\begin{aligned} \int_a^b (x+1)\,dx &= \lim_{n\to+\infty} S_f\left(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty}\left((a+1)(b-a) + (b-a)^2\frac{n+1}{2n}\right) \\ &= (a+1)(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \\ &= b + \frac{b^2}{2} - a - \frac{a^2}{2} \\ &= \frac{b^2}{2} + b - \left(\frac{a^2}{2} + a\right)\ . \end{aligned}$$

A proposição que apresentamos a seguir é uma caracterização das funções integráveis. A sua demonstração sai fora do âmbito deste curso, pelo que é omitida.

Proposição 4.58. *Sejam $[a,b]$ um intervalo de $\mathbb{R}$ e f uma função definida em $[a,b]$. Então f é integrável em $[a,b]$ se e só se, para todo o $\varepsilon > 0$, existe uma partição $\mathscr{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ do intervalo $[a,b]$ tal que, para todos os conjuntos $\mathscr{C} = \{x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*\}$ e $\mathscr{C}' = \{x_1', x_2', \cdots, x_n'\}$ compatíveis com $\mathscr{P}$, se tem*

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i^*) - f(x_i')|(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon\ .$$

Resulta desta proposição a propriedade seguinte:

Corolário 4.59. *Sejam $[a,b]$ um intervalo de $\mathbb{R}$ e f uma função definida em $[a,b]$.*

Se f é integrável em $[a,b]$, então $|f|$ também é integrável em $[a,b]$.

Demonstração: Suponha-se que a função f é integrável no intervalo $[a,b]$.

Pretende-se provar que a função $|f|$ também é integrável no intervalo $[a,b]$.

De acordo com a Proposição 4.58, basta provar que, para todo o $\varepsilon > 0$, existe uma partição $\mathscr{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ do intervalo $[a,b]$ tal que, para todos os conjuntos $\mathscr{C} = \{x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*\}$ e $\mathscr{C}' = \{x_1', x_2', \cdots, x_n'\}$ compatíveis com $\mathscr{P}$, se tem

$$\sum_{i=1}^{n} ||f(x_i^*)| - |f(x_i')||(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon\ .$$

Seja então $\varepsilon > 0$, arbitrário.

Como, por hipótese, a função f é integrável em $[a,b]$, a Proposição 4.58 garante a existência de uma partição $\mathscr{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ do intervalo $[a,b]$ tal que, para todos os conjuntos $\mathscr{C} = \{x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*\}$ e $\mathscr{C}' = \{x_1', x_2', \cdots, x_n'\}$ compatíveis com $\mathscr{P}$, se tem

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i^*) - f(x_i')|(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon\ . \tag{4.17}$$

Uma vez que, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$,

$$||f(x_i^*)| - |f(x_i')|| \leq |f(x_i^*) - f(x_i')|$$

tem-se que, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$,

$$||f(x_i^*)| - |f(x_i')||(x_i - x_{i-1}) \leq |f(x_i^*) - f(x_i')|(x_i - x_{i-1})$$

donde resulta que

$$\sum_{i=1}^{n} ||f(x_i^*)| - |f(x_i')||(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} |f(x_i^*) - f(x_i')|(x_i - x_{i-1})\ . \tag{4.18}$$

Conjugando (4.17) e (4.18) concluímos que

$$\sum_{i=1}^{n} ||f(x_i^*)| - |f(x_i')||(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon\ .$$

Está então provada a existência de uma partição $\mathscr{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ do intervalo $[a,b]$ tal que, para todos os conjuntos $\mathscr{C} = \{x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*\}$ e $\mathscr{C}' = \{x_1', x_2', \cdots, x_n'\}$ compatíveis com $\mathscr{P}$, se tem

$$\sum_{i=1}^{n} ||f(x_i^*)| - |f(x_i')||(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon\ ,$$

como pretendíamos.

■

Resulta também da Proposição 4.58 que o produto de duas funções integráveis num intervalo $[a,b]$ é uma função integrável no intervalo $[a,b]$.

A demonstração desta propriedade sai fora do âmbito deste curso, pelo que é omitida.

Corolário 4.60. *Sejam $[a,b]$ um intervalo e f e g funções integráveis em $[a,b]$.*

Então fg é integrável em $[a,b]$.

Exercícios 4.6

1. Calcule as somas de Riemann, $S_f(P,C)$, para as funções indicadas, tomando para P partições regulares (n intervalos de igual amplitude) e considerando $x_i^* = x_i$, ou seja, cada ponto de C é o limite superior dos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ definidos pela partição P.

   (a) $f(x) = x^2$ em $[0,1]$ com $n = 5$.

   (b) $f(x) = \mathrm{sen}(\pi x)$ em $[0,1]$ com $n = 6$.

2. Calcule a soma de Riemann, $S_f(P,C)$, onde $x_i^* = x_{i-1}$ para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, considerando a função $f(x) = 1/x$ definida em $[1,6]$ e a partição
   $P = \{1, 2.3, 3.1, 4.3, 5, 6\}$.

3. Calcule a soma de Riemann, $S_f(P,C)$, para a função $f(x) = x^2 + 2x$ definida em $[1,4]$ sendo P a partição regular de $[1,4]$ em 5 intervalos e tomando $x_i^* = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$.

4. Calcule a soma de Riemann para a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ em $[1,6]$ com
   $P = \{1, 2, 2.9, 3.1, 4, 5.3, 6\}$ e $x_i^* = \dfrac{3x_{i-1} + 2x_i}{5}$.

5. Sabendo que, em cada uma das alíneas que se seguem, a função dada é integrável no intervalo considerado, calcule os integrais dados atrav'es do cálculo de $\lim\limits_{n\to\infty} S_f(P_n, C_n)$ para partições regulares do intervalo de integração.

   (a) $\int_0^2 x^2\, dx$.

   Sugestão: Utilize a igualdade $1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n^3}{3} + \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{6}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\displaystyle\int_0^3 (2x+1)\,dx$.

6. Sabendo que a função f definida por $f(x) = x^3$ é integrável em $[0,b]$, para todo o $b > 0$, mostre que

$$\int_0^b x^3\,dx = \frac{1}{4}b^4$$

Sugestão: Utilize a igualdade $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

4.2.2 Propriedades das funções integráveis

Na secção anterior foram já incluídas duas propriedades das funções integráveis que resultam da caracterização de função integrável apresentada na Proposição 4.58.

Nesta secção incluem-se as restantes propriedades do integral de Riemann.

Proposição 4.61. *Sejam $[a,b]$ um intervalo e f e g duas funções integráveis em $[a,b]$.*

Então $f+g$ é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Demonstração: Seja $(\mathscr{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de partições do intervalo $[a,b]$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} |\mathscr{P}_n| = 0\,.$$

Seja $(\mathscr{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de subconjuntos de $[a,b]$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{C}_n$ é compatível com $\mathscr{P}_n$.

Como, por hipótese, f e g são integráveis em $[a,b]$, a Proposição 4.54 garante que

$$\lim_{n\to+\infty} S_f(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n) = \int_a^b f(x)\,dx$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} S_g(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n) = \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Suponhamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ e $\mathscr{C}_n = \{x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*\}$.

Por definição de soma de Riemann temos que

$$\begin{aligned}
S_{f+g}(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n) &= \sum_{i=1}^{n} (f+g)(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i^*) + g(x_i^*))(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} g(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) \\
&= S_f(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n) + S_g(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n)\,.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\lim_{n\to+\infty} S_{f+g}(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(S_f(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n) + S_g(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n)\right)\,.$$

Uma vez que, por hipótese, existem e são finitos os limites

$$\lim_{n\to+\infty} S_f(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n)$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} S_g(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n)$$

podemos concluir que

$$\lim_{n\to+\infty} S_{f+g}(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n) = \lim_{n\to+\infty} S_f(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n) + \lim_{n\to+\infty} S_g(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n)\,,$$

donde resulta que $f+g$ é integrável em $[a,b]$ e que

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\,,$$

como pretendíamos.

■

A propriedade que acabámos de demonstrar é usualmente conhecida por **propriedade aditiva do integral em relação à função integranda**.

Proposição 4.62. *Sejam $[a,b]$ um intervalo, f uma função integrável em $[a,b]$ e α um número real.*

Então αf é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b (\alpha f)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Demonstração: Seja $(\mathscr{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de partições do intervalo $[a,b]$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} |\mathscr{P}_n| = 0\,.$$

Seja $(\mathscr{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de subconjuntos de $[a,b]$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{C}_n$ é compatível com $\mathscr{P}_n$.

Como, por hipótese, f é integrável em $[a,b]$, a Proposição 4.54 garante que

$$\lim_{n\to+\infty} S_f(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n) = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Suponhamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ e $\mathscr{C}_n = \{x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*\}$.

Por definição de soma de Riemann temos

$$\begin{aligned}
S_{\alpha f}(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n) &= \sum_{i=1}^{n}(\alpha f)(x_i^*)(x_i-x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\alpha f(x_i^*))(x_i-x_{i-1}) \\
&= \alpha\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i-x_{i-1}) \\
&= \alpha S_f(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n)\ .
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\lim_{n\to+\infty} S_{\alpha f}(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n) = \lim_{n\to+\infty}(\alpha S_f(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n))\ .$$

Uma vez que, por hipótese, o limite

$$\lim_{n\to+\infty} S_f(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n)$$

existe e é finito podemos concluir que

$$\lim_{n\to+\infty} S_{\alpha f}(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n) = \alpha \lim_{n\to+\infty} S_f(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n)\ ,$$

donde resulta que αf é integrável em $[a,b]$ e que

$$\int_a^b (\alpha f)(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx\ ,$$

como pretendíamos.

■

Proposição 4.63. *Sejam $[a,b]$ um intervalo e f uma função definida em $[a,b]$.*

Se f é integrável em $[a,b]$ e $[a',b']$ é um subintervalo de $[a,b]$, então f é integrável em $[a',b']$.

Demonstração: Admitamos que f não é integrável em $[a',b']$.

Pela Proposição 4.54 existem uma sucessão $(\mathscr{P}'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de partições do intervalo $[a',b']$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty}|\mathscr{P}'_n| = 0$$

e uma sucessão $(\mathscr{C}'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de $[a',b']$ tal que, para cada $n\in\mathbb{N}$, $\mathscr{C}'_n$ é compatível com $\mathscr{P}'_n$ e tais que o limite

$$\lim_{n\to+\infty} S_f\left(\mathscr{P}'_n,\mathscr{C}'_n\right)$$

não existe ou é infinito.

Para cada $n\in\mathbb{N}$ é possível construir uma partição $\mathscr{P}_n$ de $[a,b]$ tal que:

$\mathscr{P}'_n\subset\mathscr{P}_n$;
$\mathscr{P}_n$ divide o intervalo $[a,a']$ em n_1 subintervalos de amplitude $\Delta_{n_1}<|\mathscr{P}'_n|$;
$\mathscr{P}_n$ divide o intervalo $[b',b]$ em n_2 subintervalos de amplitude $\Delta_{n_2}<|\mathscr{P}'_n|$.

Consequentemente $|\mathscr{P}_n| = |\mathscr{P}'_n|$ e

$$\lim_{n\to+\infty}|\mathscr{P}_n| = 0\ .$$

Para cada $n\in\mathbb{N}$ consideremos um conjunto $\mathscr{C}_n$ compatível com $\mathscr{P}_n$ tal que $\mathscr{C}'_n\subset\mathscr{C}_n$.

Então o limite

$$\lim_{n\to+\infty} S_f(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n)$$

não existe ou é infinito, o que é falso, já que, por hipótese, a função f é integrável em $[a,b]$.

■

A proposição que apresentamos a seguir estabelece uma propriedade dos integrais que é habitualmente conhecida por **propriedade aditiva do integral relativamente ao intervalo de integração**.

Proposição 4.64. *Sejam $[a,b]$ com $a<b$ um intervalo, $c\in]a,b[$ e f uma função integrável em $[a,b]$.*

Então f é integrável em $[a,c]$ e $[c,b]$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\ .$$

Demonstração: A Proposição 4.63 garante que f é integrável em $[a,c]$ e $[c,b]$.

Seja $(\mathscr{P}'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de partições do intervalo $[a,c]$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty}|\mathscr{P}'_n| = 0$$

e, para cada $n\in\mathbb{N}$, seja $\mathscr{C}'_n$ um conjunto compatível com $\mathscr{P}'_n$.

Seja $(\mathscr{P}''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de partições do intervalo $[c,b]$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty}|\mathscr{P}''_n| = 0$$

e, para cada $n\in\mathbb{N}$, seja $\mathscr{C}''_n$ um conjunto compatível com $\mathscr{P}''_n$ tal que $c\in\mathscr{C}''_n$ se e só se $c\notin\mathscr{C}'_n$.

Como f é integrável em $[a,c]$ e $[c,b]$, a Proposição 4.54 garante que

$$\lim_{n\to+\infty} S_f\left(\mathscr{P}'_n,\mathscr{C}'_n\right) = \int_a^c f(x)\,dx \tag{4.19}$$

e garante que

$$\lim_{n\to+\infty} S_f\left(\mathscr{P}''_n,\mathscr{C}''_n\right) = \int_c^b f(x)\,dx\ . \tag{4.20}$$

Para cada $n\in\mathbb{N}$ sejam $\mathscr{P}_n = \mathscr{P}'_n\cup(\mathscr{P}''_n\setminus\{c\})$ e $\mathscr{C}_n = \mathscr{C}'_n\cup\mathscr{C}''_n$.

Então $(\mathscr{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de partições do intervalo $[a,b]$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty}|\mathscr{P}_n| = 0\ .$$

Por outro lado, $(\mathscr{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de subconjuntos de $[a,b]$ tal que, para cada $n\in\mathbb{N}$, $\mathscr{C}_n$ é compatível com $\mathscr{P}_n$.

Como, por hipótese, a função f é integrável em $[a,b]$ a Proposição 4.54 garante que

$$\lim_{n\to+\infty} S_f(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n) = \int_a^b f(x)\,dx \,.$$

Mas, uma vez que, para cada $n\in\mathbb{N}$,

$$S_f(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n) = S_f\left(\mathscr{P}'_n,\mathscr{C}'_n\right) + S_f\left(\mathscr{P}''_n,\mathscr{C}''_n\right) \,,$$

concluímos que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\left(S_f\left(\mathscr{P}'_n,\mathscr{C}'_n\right) + S_f\left(\mathscr{P}''_n,\mathscr{C}''_n\right)\right) \,.$$

Atendendo a (4.19) e a (4.20) podemos então concluir que

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{n\to+\infty} S_f\left(\mathscr{P}'_n,\mathscr{C}'_n\right) + \lim_{n\to+\infty} S_f\left(\mathscr{P}''_n,\mathscr{C}''_n\right)\\ &= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \,,\end{aligned}$$

como pretendíamos.

■

A propriedade que vamos demonstrar a seguir garante que o integral de uma função não negativa é um número não negativo.

Proposição 4.65. *Sejam $[a,b]$ um intervalo e f uma função integrável em $[a,b]$.*
Se $f(x)\geq 0$, para todo o $x\in[a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0 \,.$$

Demonstração: Sejam $(\mathscr{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de partições do intervalo $[a,b]$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} |\mathscr{P}_n| = 0$$

e $(\mathscr{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de subconjuntos de $[a,b]$ tal que, para cada $n\in\mathbb{N}$, $\mathscr{C}_n$ é compatível com $\mathscr{P}_n$.
Como, por hipótese, a função f é integrável em $[a,b]$ a Proposição 4.54 garante que

$$\lim_{n\to+\infty} S_f(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n) = \int_a^b f(x)\,dx \,.$$

Uma vez que $f(x)\geq 0$, para todo o $x\in[a,b]$, temos que, para cada $n\in\mathbb{N}$,

$$S_f(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n) \geq 0 \,,$$

o que permite concluir que

$$\lim_{n\to+\infty} S_f(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n) \geq 0 \,.$$

Consequentemente

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0 \,,$$

como pretendíamos.

■

Resultam desta proposição as três propriedades seguintes:

Corolário 4.66. *Sejam $[a,b]$ um intervalo e f e g duas funções integráveis em $[a,b]$ tais que, para todo o $x\in[a,b]$,*

$$g(x)\geq f(x) \,.$$

Então

$$\int_a^b g(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx \,.$$

Demonstração: Atendendo às Proposições 4.61 e 4.62 temos que $g-f$ é integrável em $[a,b]$ e que

$$\int_a^b (g-f)(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \,. \tag{4.21}$$

Da hipótese resulta que, para todo o $x\in[a,b]$,

$$(g-f)(x)\geq 0 \,.$$

Pela Proposição 4.65, concluímos então que

$$\int_a^b (g-f)(x)\,dx \geq 0 \,.$$

Atendendo à igualdade (4.21) temos então

$$\int_a^b g(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx \,,$$

como pretendíamos.

■

Corolário 4.67. *Sejam $[a,b]$ um intervalo e f uma função integrável em $[a,b]$.*
Se existem constantes $m,M\in\mathbb{R}$ tais que, para todo o $x\in[a,b]$,

$$m\leq f(x)\leq M \,,$$

então

$$m(b-a)\leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \,.$$

Demonstração: Atendendo ao Corolário 4.66 temos

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx\,.$$

Como vimos no Exemplo 4.57 - *1* tem-se

$$\int_a^b m\,dx = m(b-a)$$

e

$$\int_a^b M\,dx = M(b-a)$$

e, portanto, temos

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)\,,$$

como pretendíamos.

■

Corolário 4.68. *Sejam $[a,b]$ um intervalo e f uma função integrável em $[a,b]$.*

Então

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

Demonstração: Temos, para todo o $x \in [a,b]$,

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|\,.$$

Atendendo ao Corolário 4.66 temos então

$$\int_a^b (-|f(x)|)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx\,,$$

donde resulta, pela Proposição 4.62,

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx\,,$$

o que é equivalente a

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx\,,$$

como pretendíamos.

■

Exercícios 4.7 Suponha que f é contínua em $[a,b]$ e que $f(x) \geq 0$ para todo o $x \in [a,b]$.

1. Mostre que se existe $\bar{x}$ em $[a,b]$ tal que $f(\bar{x}) > 0$, então $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

2. Diga, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa:

$$\text{Se } \int_a^b f(x)\,dx = 0, \text{ então } f(x) = 0 \text{ para todo o } x \in [a,b]$$

4.2.3 Critérios de integrabilidade

As Proposições 4.54 e 4.58 são condições necessárias e suficientes para que uma função f definida num intervalo $[a,b]$ seja integrável nesse intervalo.

Nesta secção apresentamos uma condição necessária para que uma função f seja integrável num intervalo $[a,b]$ e algumas condições suficientes para a integrabilidade de uma função f num intervalo $[a,b]$.

A proposição que apresentamos a seguir e cuja demonstração é omitida estabelece que se uma função é ilimitada num intervalo, então ela não é integrável esse intervalo.

Proposição 4.69. *Sejam $[a,b]$ um intervalo e f uma função definida em $[a,b]$.*

Se f é integrável em $[a,b]$, então f é limitada em $[a,b]$.

Exemplo 4.70. 1. Consideremos a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}} & \text{se} \quad x > 1 \\ x^2 - x & \text{se} \quad x \leq 1 \end{cases}$$

Como

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty\,,$$

a Proposição 4.69 garante que f não é integrável em qualquer intervalo do tipo $[1,b]$ com $b > 1$.

2. Consideremos a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Como

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty\,,$$

a Proposição 4.69 garante que f não é integrável em qualquer intervalo que contenha a origem.

Observação 4.71. Resulta da Proposição 4.69 que se uma função f é ilimitada num intervalo $[a,b]$, então f não é integrável nesse intervalo.

No entanto, se uma função f for limitada num intervalo $[a,b]$, a Proposição 4.69 nada permite afirmar sobre a sua integrabilidade nesse intervalo.

Apresentamos a seguir um exemplo de uma função limitada num intervalo que não é integrável nesse intervalo.

Exemplo 4.72. Consideremos a função real de variável real f definida por

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{se} \quad x\in\mathbb{Q}\\ 1 & \text{se} \quad x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

É óbvio que a função f é limitada em qualquer intervalo $[a,b]$ com $a<b$.

Seja $(\mathscr{P}_n)$ a sucessão das partições regulares do intervalo $[a,b]$. Então, para cada $n\in\mathbb{N}$,

$$\mathscr{P}_n=\left\{a,a+\frac{b-a}{n},a+2\frac{b-a}{n},\cdots,a+(n-1)\frac{b-a}{n},b\right\},$$

$$|\mathscr{P}_n|=\frac{b-a}{n}$$

e

$$\lim_{n\to+\infty}|\mathscr{P}_n|=0\,.$$

Para cada $n\in\mathbb{N}$, seja $\mathscr{C}_n=\{x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*\}$ o subconjunto de $[a,b]$ tal que, para cada $i\in\{1,2,\cdots,n\}$, x_i^* é um número racional arbitrariamente escolhido no intervalo $\left[a+(i-1)\dfrac{b-a}{n},a+i\dfrac{b-a}{n}\right]$.

Então, para cada $n\in\mathbb{N}$, $\mathscr{C}_n$ é um conjunto compatível com $\mathscr{P}_n$ e

$$\begin{aligned}S_f(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n) &= \sum_{i=1}^{n}f(x_i^*)\frac{b-a}{n}\\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\lim_{n\to+\infty}S_f(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n)=0\,.$$

Para cada $n\in\mathbb{N}$, seja $\mathscr{C}'_n=\{x'_1,x'_2,\cdots,x'_n\}$ o subconjunto de $[a,b]$ tal que, para cada $i\in\{1,2,\cdots,n\}$, x'_i é um número irracional arbitrariamente escolhido no intervalo $\left[a+(i-1)\dfrac{b-a}{n},a+i\dfrac{b-a}{n}\right]$.

Então, para cada $n\in\mathbb{N}$, $\mathscr{C}'_n$ é um conjunto compatível com $\mathscr{P}_n$ e

$$\begin{aligned}S_f\left(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}'_n\right) &= \sum_{i=1}^{n}f(x'_i)\frac{b-a}{n}\\ &= b-a\,.\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\lim_{n\to+\infty}S_f\left(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}'_n\right)=b-a\,.$$

Temos então duas sucessões $(\mathscr{C}_n)$ e $(\mathscr{C}'_n)$ de subconjuntos de $[a,b]$ tais que, para cada $n\in\mathbb{N}$, $\mathscr{C}_n$ e $\mathscr{C}'_n$ são conjuntos compatíveis com $\mathscr{P}_n$ e

$$\lim_{n\to+\infty}S_f(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}_n)\neq\lim_{n\to+\infty}S_f\left(\mathscr{P}_n,\mathscr{C}'_n\right)\,.$$

Pela Proposição 4.54 concluímos então que a função considerada não é integrável no intervalo $[a,b]$.

O Exemplo 4.72 e a Proposição 4.69 permitem concluir que a condição *f é limitada em $[a,b]$* é uma condição necessária mas não suficiente para a integrabilidade de f em $[a,b]$.

Na proposição que apresentamos a seguir estão incluídas algumas condições suficientes para a integrabilidade de uma função num intervalo.

A demonstração desta proposição sai fora do âmbito deste curso, pelo que é omitida.

Proposição 4.73. *Sejam $[a,b]$ um intervalo e f uma função definida em $[a,b]$.*

Então verificam-se as condições seguintes:

a) se f é contínua em $[a,b]$, então f é integrável em $[a,b]$;

b) se f é limitada em $[a,b]$ e é descontínua apenas num número finito de pontos de $[a,b]$, então f é integrável em $[a,b]$;

c) se f é monótona em $[a,b]$, então f é integrável em $[a,b]$.

Exemplo 4.74.

1. A função f definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x} & \text{se} \quad x\neq0\\ 1 & \text{se} \quad x=0\end{cases}$$

é contínua em $\mathbb{R}$.

Pela Proposição 4.73, a função f é integrável em qualquer intervalo $[a,b]\subset\mathbb{R}$.

2. A Proposição 4.73 permite concluir que a função f definida por $f(x)=\ln x$, para todo o $x\in\mathbb{R}^+$, é integrável em $[1,e]$, já que é crescente neste intervalo.

3. Consideremos a função f definida por

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{se} \quad x\in[-2,-1]\\ 1 & \text{se} \quad x\in]-1,0]\\ \operatorname{sen}x & \text{se} \quad x\in]0,\pi]\end{cases}$$

Temos

$$0\leq f(x)\leq5\,,$$

para todo o $x\in[-2,\pi]$ pelo que f é limitada em $[-2,\pi]$.

Uma vez que f é contínua em $[-2,\pi]$ excepto nos pontos $x=-1$ e $x=0$, concluímos pela Proposição 4.73 que f é integrável no intervalo $[-2,\pi]$.

4. Consideremos a função f definida por

$$f(x)=\begin{cases}e^x & \text{se} \quad x\in[0,100]\setminus\mathbb{N}\\ 1 & \text{se} \quad x\in[0,100]\cap\mathbb{N}\end{cases}$$

Temos

$$1 \leq f(x) \leq \mathrm{e}^{100} ,$$

para todo o $x \in [0,100]$ pelo que f é limitada em $[0,100]$.

Uma vez que f é contínua em todo o ponto de $[0,100]$ excepto nos pontos do conjunto finito $\mathscr{D} = [0,100] \cap \mathbb{N}$, concluímos pela Proposição 4.73 que f é integrável no intervalo $[0,100]$.

A proposição que apresentamos a seguir estabelece a integrabilidade de uma função à custa da integrabilidade de outra função que coincida com ela excepto num número finito de pontos.

A demonstração desta proposição sai fora do âmbito deste curso, pelo que é omitida.

Proposição 4.75. *Sejam $[a,b]$ um intervalo e f e g duas funções definidas em $[a,b]$.*

Se f é integrável em $[a,b]$ e g difere de f excepto num número finito de pontos, isto é, $f(x) = g(x)$, para todo o $x \in [a,b]$, excepto para um número finito de pontos de $[a,b]$, então g é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx .$$

Exemplo 4.76. Consideremos a função g definida em $[3,20]$ do modo seguinte:

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se} \quad x \in [3,20] \quad \text{e} \quad x \notin \mathbb{N} \\ 1 & \text{se} \quad x \in [3,20] \cap \mathbb{N} \end{cases}$$

Seja f a função definida por $f(x) = x+1$, para todo o $x \in [3,20]$. Como f é contínua em $[3,20]$, a Proposição 4.73 garante que f é integrável no intervalo considerado.

Uma vez que $f(x) = g(x)$, para todo o $x \in [3,20]$, excepto para os pontos do conjunto finito $\{x \in \mathbb{N} : 3 \leq x \leq 20\}$, isto é, g coincide com f no intervalo $[3,20]$, excepto para um número finito de pontos deste intervalo, a Proposição 4.75 garante que g é integrável em $[3,20]$ e

$$\int_3^{20} g(x)\,dx = \int_3^{20} f(x)\,dx .$$

Utilizando o Exemplo 4.57 - 2 temos que

$$\int_3^{20} f(x)\,dx = (20-3) + \left(\frac{400}{2} - \frac{9}{2}\right) = \frac{425}{2}$$

e, portanto

$$\int_3^{20} f(x)\,dx = \frac{425}{2} .$$

Exercícios 4.8

Diga, justificando, se as seguintes funções são integráveis.

1. $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos(x^2 - 2x)$.

2. $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{se } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ 2 & \text{se } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

3. $f : [-2,1] \to \mathbb{R}$ definida por

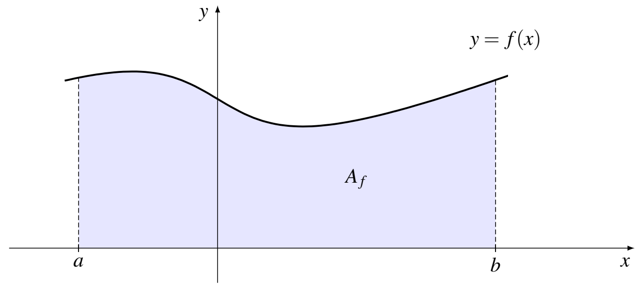
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \in [-2,0[\\ 2 & \text{se } x = 0 \\ x & \text{se } x \in]0,1] \end{cases}$$

4.2.4 Aplicação do integral de Riemann ao cálculo de áreas

Sejam $[a,b]$ um intervalo e f uma função definida em $[a,b]$.

Admitamos que f é contínua e não negativa em $[a,b]$.

Seja A_f a área da região limitada do plano delimitada pelo gráfico de f, pelo eixo OX e pelas rectas de equações $x = a$ e $x = b$, respectivamente.



Seja $(\mathscr{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de partições do intervalo $[a,b]$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} |\mathscr{P}_n| = 0 .$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja

$$\mathscr{P}_n = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} .$$

Como é sabido o conjunto $\mathscr{P}_n$ decompõe o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ com $i \in \{1,2,\cdots,n\}$.

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1,2,\cdots,n\}$.

Como f é contínua em $[a,b]$ e $[x_{i-1},x_i] \subset [a,b]$ temos que f é contínua em $[x_{i-1},x_i]$ e, pelo Teorema de Weierstrass, existem números reais m_i e M_i tais que

$$m_i \leq f(x) \leq M_i , \tag{4.22}$$

para todo o $x \in [x_{i-1},x_i]$, e existem $x_i', x_i'' \in [x_{i-1},x_i]$ tais que $f(x_i') = m_i$ e $f(x_i'') = M_i$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sejam

$$\mathscr{C}_n' = \{x_1', x_2', \cdots, x_n'\}$$

e

$$\mathscr{C}''_n = \{x''_1, x''_2, \cdots, x''_n\} .$$

Então $\mathscr{C}'_n$ e $\mathscr{C}''_n$ são subconjuntos de $[a,b]$ compatíveis com $\mathscr{P}_n$.

Note-se que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $S_f(\mathscr{P}_n, \mathscr{C}''_n)$ é uma aproximação da área A_f por uma soma de áreas de rectângulos circunscritos na região considerada e $S_f(\mathscr{P}_n, \mathscr{C}'_n)$ é uma aproximação da área A_f por uma soma de áreas de rectângulos inscritos na região considerada e, portanto,

$$S_f\left(\mathscr{P}_n, \mathscr{C}'_n\right) \leq A_f \leq S_f\left(\mathscr{P}_n, \mathscr{C}''_n\right) \tag{4.23}$$

Como f é contínua em $[a,b]$, a Proposição 4.73 garante que f é integrável em $[a,b]$. Atendendo à Proposição 4.54 temos que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} S_f\left(\mathscr{P}_n, \mathscr{C}'_n\right) \tag{4.24}$$

e que

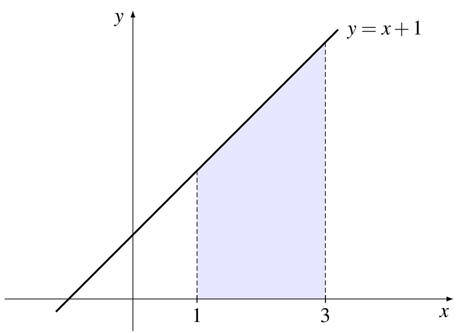
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} S_f\left(\mathscr{P}_n, \mathscr{C}''_n\right) . \tag{4.25}$$

Utilizando as igualdades (4.24) e (4.25) e o enquadramento (4.23) concluímos que

$$A_f = \int_a^b f(x)\,dx .$$

Exemplo 4.77. Seja f a função definida por $f(x) = x+1$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Utilizando o integral de Riemann vamos calcular a área A da região sombreada representada na figura seguinte.



Atendendo a que, para todo o $x \in [1,3]$, $f(x) > 0$, temos que a área pedida é dada por

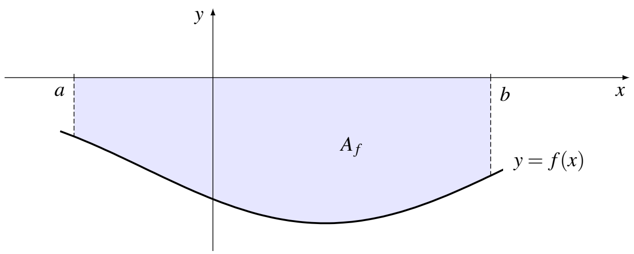
$$A = \int_1^3 (x+1)\,dx .$$

Utilizando o resultado obtido no Exemplo 4.57 - 2 obtemos

$$A = (3-1) + \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) = 6 .$$

Suponhamos que f é uma função definida num intervalo $[a,b]$, contínua em $[a,b]$ e $f(x) \leq 0$, para todo o $x \in [a,b]$.

Denotemos por A_f a área da região limitada do plano delimitada pelo gráfico de f, pelo eixo OX e pelas rectas verticais de equações $x = a$ e $x = b$, respectivamente.



Consideremos a função simétrica de f, $-f$, e denotemos por A_{-f} a área da região limitada do plano delimitada pelo gráfico de $-f$, pelo eixo OX e pelas rectas verticais de equações $x = a$ e $x = b$, respectivamente.

Temos

$$A_{-f} = A_f$$

e, atendendo a que $-f$ é uma função contínua e não negativa em $[a,b]$ temos, como vimos anteriormente,

$$A_{-f} = \int_a^b (-f(x))\,dx .$$

Pelas propriedades do integral de Riemann temos

$$\int_a^b (-f(x))\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Podemos então estabelecer a igualdade

$$A_f = -\int_a^b f(x)\,dx .$$

Sejam f e g duas funções contínuas num intervalo $[a,b]$. Vamos ver que a área, A, da região limitada do plano delimitada superiormente pelo gráfico de f, inferiormente pelo gráfico de g, à direita pela recta de equação $x = b$ e à esquerda pela recta de equação $x = a$ é dada por

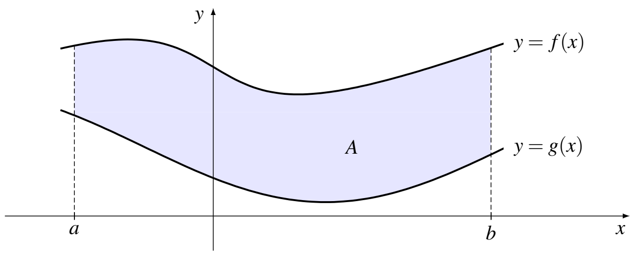
$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx .$$

Representemos por A_f a área da região limitada do plano delimitada pelo gráfico de f, pelo eixo OX e pelas rectas de equações $x = a$ e $x = b$, respectivamente, e por A_g a área da região limitada do plano delimitada pelo gráfico de g, pelo eixo OX e pelas rectas de equações $x = a$ e $x = b$, respectivamente.

Consideremos os casos seguintes:

primeiro caso:

f e g são ambas não negativas em $[a,b]$



Temos

$$A = A_f - A_g$$

e, consequentemente,

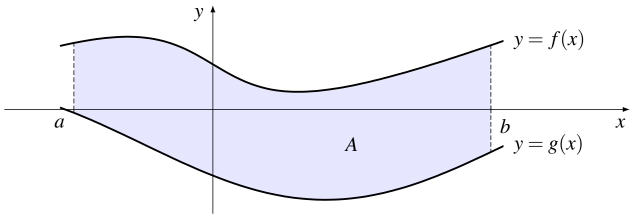
$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

Desta última igualdade resulta, pelas Proposições 4.61 e 4.62,

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx\,.$$

segundo caso:

f é não negativa em $[a,b]$ e g é não positiva em $[a,b]$



Temos

$$A = A_f + A_g$$

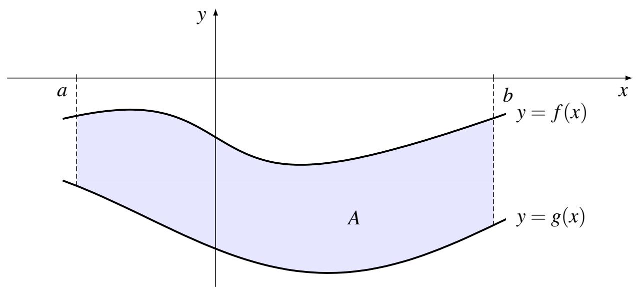
donde resulta

$$A = \int_a^b f(x)\,dx + \left(-\int_a^b g(x)\,dx\right)\,.$$

Utilizando as propriedades dos integrais definidos obtemos então

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx\,.$$

terceiro caso: f e g são ambas não positivas em $[a,b]$



Temos

$$A = A_g - A_f$$

donde se conclui que

$$A = -\int_a^b g(x)\,dx - \left(-\int_a^b f(x)\,dx\right)$$

Desta última igualdade resulta, pelas propriedades dos integrais definidos,

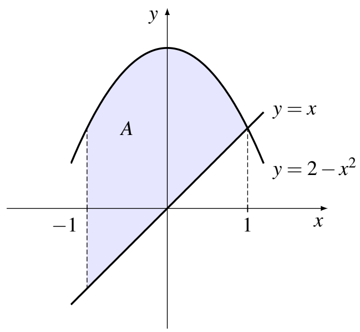
$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx\,.$$

Estamos agora em condições de utilizar o integral de Riemann para determinar a área de qualquer região limitada do plano delimitada superiormente e inferiormente pelos gráficos de funções de que se conhecem as expressões analíticas e à direita e à esquerda por rectas verticais.

Como veremos nos exemplos que se seguem basta decompor a região considerada em sub-regiões que se enquadrem num dos três casos considerados.

Exemplo 4.78. 1. Exprimir, em termos de integrais definidos, a área A da região limitada do plano situada entre $x = -1$ e $x = 1$ e limitada pelos gráficos das funções f e g definidas por $f(x) = 2 - x^2$ e $g(x) = x$, respectivamente.

A região considerada está representada a sombreado na figura seguinte:

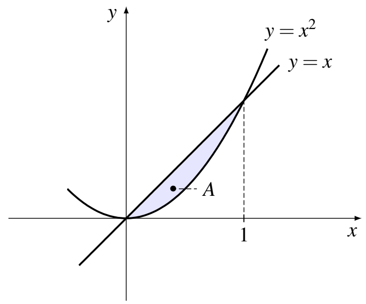


Temos então a área da região limitada do plano delimitada inferiormente pelo gráfico de g, superiormente pelo gráfico de f, à direita pela recta de equação $x = 1$ e à esquerda pela recta de equação $x = -1$ e, portanto, a área pedida é dada por

$$A = \int_{-1}^{1} (2 - x^2 - x)\, dx\,.$$

2. Exprimir, em termos de integrais definidos, a área A da região limitada do plano delimitada pelos gráficos das funções f e g definidas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = x$, respectivamente.

   A região considerada está representada a sombreado na figura seguinte:

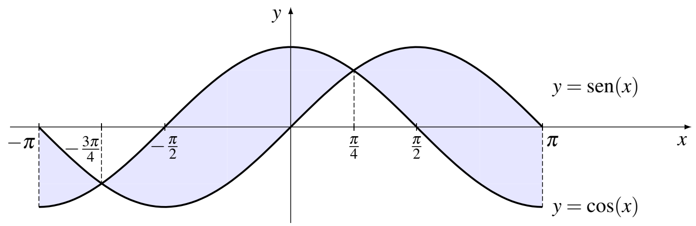


   Temos então a área da região limitada do plano delimitada inferiormente pelo gráfico de f, superiormente pelo gráfico de g, à direita pela recta de equação $x = 1$ e à esquerda pela recta de equação $x = 0$ e, portanto, a área pedida é dada por

$$A = \int_{0}^{1} (x - x^2)\, dx\,.$$

3. Exprimir, em termos de integrais definidos, a área A da região limitada do plano situada entre $x = -\pi$ e $x = \pi$ e limitada pelos gráficos das funções f e g definidas por $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$, respectivamente.

   A região considerada está representada a sombreado na figura seguinte:



   Para exprimir a área da região considerada em termos de integrais definidos vamos decompô-la nas três regiões seguintes:

$\mathscr{R}_1$ - região limitada do plano delimitada inferiormente pelo gráfico de g e superiormente pelo gráfico de f, à direita pela recta de equação $x = -\dfrac{3\pi}{4}$ e à esquerda pela recta de equação $x = -\pi$. A área desta região é dada por

$$A_1 = \int_{-\pi}^{-3\pi/4} (\operatorname{sen} x - \cos x)\, dx\,.$$

$\mathscr{R}_2$ - região limitada do plano delimitada inferiormente pelo gráfico de f e superiormente pelo gráfico de g, à direita pela recta de equação $x = \dfrac{\pi}{4}$ e à esquerda pela recta de equação $x = -\dfrac{3\pi}{4}$. A área desta região é dada por

$$A_2 = \int_{-3\pi/4}^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\, dx\,.$$

$\mathscr{R}_3$ - região limitada do plano delimitada inferiormente pelo gráfico de g e superiormente pelo gráfico de f, à direita pela recta de equação $x = \pi$ e à esquerda pela recta de equação $x = \dfrac{\pi}{4}$. A área desta região é dada por

$$A_3 = \int_{\pi/4}^{\pi} (\operatorname{sen} x - \cos x)\, dx\,.$$

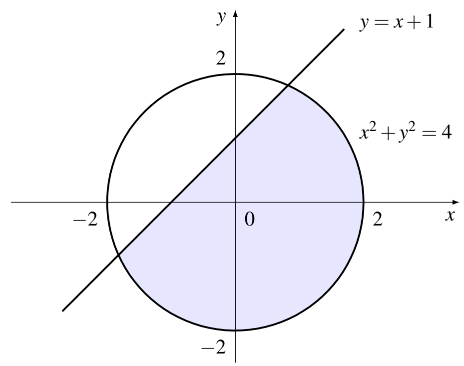
Uma vez que

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

temos

$$A = \int_{-\pi}^{-3\pi/4} (\operatorname{sen} x - \cos x)\, dx + \int_{-3\pi/4}^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (\operatorname{sen} x - \cos x)\, dx\,.$$

4. Exprimir em termos de integrais definidos a área da região limitada do plano representada na figura seguinte:



Vamos em primeiro lugar determinar os pontos de intersecção da recta de equação $y = x+1$ com a circunferência de equação $x^2+y^2 = 4$ resolvendo o sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2 &= 4 \\ -x+y &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x &= \dfrac{-1+\sqrt{7}}{2} \\ y &= \dfrac{1+\sqrt{7}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x &= \dfrac{-1-\sqrt{7}}{2} \\ y &= \dfrac{1-\sqrt{7}}{2} \end{cases} \right)$$

Para exprimir a área da região considerada em termos de integrais definidos vamos decompô-la nas duas regiões seguintes:

$\mathscr{R}_1$ - região limitada do plano delimitada inferiormente pelo gráfico da função g definida por $g(x) = -\sqrt{4-x^2}$, superiormente pelo gráfico da função f definida por $f(x) = x+1$, à direita pela recta de equação $x = \dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}$ e à esquerda pela recta de equação $x = \dfrac{-1-\sqrt{7}}{2}$. A área desta região é dada por

$$A_1 = \int_{\frac{-1-\sqrt{7}}{2}}^{\frac{-1+\sqrt{7}}{2}} (x+1-(-\sqrt{4-x^2}))\,dx = \int_{\frac{-1-\sqrt{7}}{2}}^{\frac{-1+\sqrt{7}}{2}} (x+1+\sqrt{4-x^2})\,dx\,.$$

$\mathscr{R}_2$ - região limitada do plano delimitada inferiormente pelo gráfico da função g definida por $g(x) = -\sqrt{4-x^2}$, superiormente pelo gráfico da função h definida por $h(x) = \sqrt{4-x^2}$, à direita pela recta de equação $x = 2$ e à esquerda pela recta de equação $x = \dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}$. A área desta região é dada por

$$A_2 = \int_{\frac{-1+\sqrt{7}}{2}}^{2} (\sqrt{4-x^2}-(-\sqrt{4-x^2}))\,dx = \int_{\frac{-1+\sqrt{7}}{2}}^{2} 2\sqrt{4-x^2}\,dx\,.$$

Uma vez que

$$A = A_1 + A_2$$

temos

$$A = \int_{\frac{-1-\sqrt{7}}{2}}^{\frac{-1+\sqrt{7}}{2}} (x+1+\sqrt{4-x^2})\,dx + 2\int_{\frac{-1+\sqrt{7}}{2}}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx\,.$$

Exercícios 4.9

1. Exprima, em termos de integrais definidos, o valor da área da região do primeiro quadrante limitada pela parábola de equação $y = x^2-2x+2$ e pela recta que lhe é tangente no ponto $(2,2)$.

2. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \dfrac{x^3}{2x-2}$.

   (a) Represente graficamente a função f.

   (b) Exprima, em termos de integrais definidos, ao valor da área da região do plano limitada pelo eixo OX, pelas rectas de equações $x = -1$ e $x = \dfrac{1}{2}$ e pelo gráfico de f.

4.2.5 Teorema Fundamental do Cálculo Integral

Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a,b]$.

Seja F a função definida em $[a,b]$ do modo seguinte:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,,$$

para todo o $x \in [a,b]$.

O teorema que apresentamos a seguir, habitualmente designado **Teorema Fundamental do Cálculo Integral**, estabelece que a função F é contínua em $[a,b]$ e que, sob determinadas condições, é também diferenciável em $]a,b[$.

Teorema 4.79. *Sejam $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a,b]$ e F a função definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,,$$

para todo o $x \in [a,b]$.

Então verificam-se as duas condições seguintes:

i) F é contínua em $[a,b]$;

ii) se f é contínua em $c \in]a,b[$, então F é diferenciável em c e tem-se $F'(c) = f(c)$.

Demonstração: i) Seja $c \in [a,b]$, arbitrário. Para provar que F é contínua em c temos de provar que

$$\lim_{x\to c}(F(x)-F(c)) = 0\,.$$

Atendendo à definição de F temos

$$\begin{aligned} F(x)-F(c) &= \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^c f(t)\,dt \\ &= \int_a^x f(t)\,dt + \int_c^a f(t)\,dt \\ &= \int_c^x f(t)\,dt\,. \end{aligned}$$

Como, por hipótese, f é integrável em $[a,b]$, temos que f é limitada em $[a,b]$ e, portanto, existem constantes $M, m \in \mathbb{R}$ tais que, para todo o $t \in [a,b]$,

$$m \leq f(t) \leq M\,. \tag{4.26}$$

Suponhamos que $x \geq c$. Da desigualdade (4.26) resulta, pelo Corolário 4.67,

$$m(x-c) \leq \int_c^x f(t)\,dt \leq M(x-c)\,. \tag{4.27}$$

Uma vez que

$$\lim_{x\to c^+}(m(x-c)) = 0 = \lim_{x\to c^+}(m(x-c))$$

o Teorema do enquadramento permite-nos concluir a partir da desigualdade (4.27) que

$$\lim_{x\to c^+}\int_c^x f(t)\,dt = 0\,.$$

Atendendo a que

$$\int_c^x f(t)\,dt = F(x)-F(c)$$

temos

$$\lim_{x\to c^+}(F(x)-F(c)) = 0\,. \tag{4.28}$$

Suponhamos que $x \le c$.

Temos, por definição,

$$\int_c^x f(t)\,dt = -\int_x^c f(t)\,dt$$

donde resulta, pelas propriedades dos integrais definidos,

$$\int_c^x f(t)\,dt = \int_x^c (-f(t))\,dt\,.$$

Uma vez que, para todo o $t \in [x,c]$,

$$-M \le -f(t) \le -m$$

temos, pelas propriedades dos integrais definidos,

$$-M(c-x) \le \int_x^c (-f(t))\,dt \le -m(c-x)\,,$$

ou seja,

$$M(x-c) \le \int_c^x (f(t))\,dt \le m(x-c)$$

Utilizando esta última desigualdade e a propriedade do enquadramento concluímos que

$$\lim_{x\to c^-}\int_c^x f(t)\,dt = 0\,,$$

ou seja,

$$\lim_{x\to c^-}(F(x)-F(c)) = 0\,. \tag{4.29}$$

De (4.28) e (4.29) concluímos que

$$\lim_{x\to c}(F(x)-F(c)) = 0\,,$$

como pretendíamos.

ii) Admitamos que f é contínua em $c \in]a,b[$.

Pretendemos provar que F é diferenciável em c e que $F'(c) = f(c)$.

Vamos então provar que

$$\lim_{x\to c}\frac{F(x)-F(c)}{x-c} = f(c)\,,$$

o que é equivalente a provar que

$$\lim_{x\to c}\left(\frac{F(x)-F(c)}{x-c} - f(c)\right) = 0\,.$$

Temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c}\left(\frac{F(x)-F(c)}{x-c} - f(c)\right) &= \lim_{x\to c}\frac{F(x)-F(c)-f(c)(x-c)}{x-c}\\
&= \lim_{x\to c}\frac{\int_c^x f(t)\,dt - \int_c^x f(c)\,dt}{x-c}\\
&= \lim_{x\to c}\frac{\int_c^x (f(t)-f(c))\,dt}{x-c}
\end{aligned}$$

e, portanto, temos de provar que

$$\lim_{x\to c}\frac{\int_c^x (f(t)-f(c))\,dt}{x-c} = 0\,. \tag{4.30}$$

Vamos provar (4.30), usando a definição de limite.

Temos então de provar que, para todo o $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in [a,b]$, se

$$0 < |x-c| < \delta\,,$$

então

$$\left|\frac{\int_c^x (f(t)-f(c))\,dt}{x-c}\right| < \varepsilon\,.$$

Utilizando as propriedades dos integrais definidos temos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\int_c^x (f(t)-f(c))\,dt}{x-c}\right| &= \frac{\left|\int_c^x (f(t)-f(c))\,dt\right|}{|x-c|}\\
&\le \frac{\int_c^x |f(t)-f(c)|\,dt}{|x-c|}\,.
\end{aligned}$$

Seja $\varepsilon > 0$, arbitrário.

Como f é contínua em c temos que existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $t \in [a,b]$, se $0 < |t-c| < \delta$, então $|f(t)-f(c)| < \varepsilon$.

Consequentemente

$$\left|\frac{\int_c^x (f(t)-f(c))\,dt}{x-c}\right| \leq \frac{\int_c^x |f(t)-f(c)|\,dt}{|x-c|} < \frac{\int_c^x \varepsilon\,dt}{|x-c|} \, .$$

Suponhamos que $c < x$.

Então

$$\int_c^x \varepsilon\,dx = \varepsilon(x-c)$$

pelo que

$$\frac{\int_c^x \varepsilon\,dx}{|x-c|} = \varepsilon \, .$$

Suponhamos $c > x$.

Uma vez que

$$\int_c^x \varepsilon\,dx = -\varepsilon(c-x)$$

e $|x-c| = c-x$ temos

$$\frac{\int_c^x \varepsilon\,dx}{|x-c|} = -\varepsilon < \varepsilon \, .$$

Provámos que, para todo o $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in [a,b]$, se $0 < |x-c| < \delta$, então

$$\left|\frac{F(x)-F(c)}{x-c} - f(c)\right| < \varepsilon \, ,$$

o que prova (4.30).

■

Observação 4.80. Utilizando um raciocínio análogo ao utilizado na demonstração do Teorema 4.79 podemos também provar que:

1. se f é contínua à direita de a, então existe $F'_+(a)$ e tem-se $F'_+(a) = f(a)$;
2. se f é contínua à esquerda de b, então existe $F'_-(b)$ e tem-se $F'_-(b) = f(b)$.

Resulta imediatamente do Teorema 4.79 o seguinte resultado, habitualmente conhecido por **Teorema do Valor Médio para Integrais**.

Corolário 4.81. *Seja f uma função contínua num intervalo $[a,b]$.*

Então existe $c \in]a,b[$ tal que

$$\int_a^b f(t)\,dt = f(c)(b-a) \, .$$

Demonstração: Seja F a função definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \, .$$

Pelo Teorema 4.79, F é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$.

Pelo Teorema de Lagrange, existe $c \in]a,b[$ tal que

$$F'(c) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a} \, .$$

Uma vez que

$$F'(c) = f(c)$$

e

$$\begin{aligned} F(b)-F(a) &= \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt \\ &= \int_a^b f(t)\,dt \end{aligned}$$

tem-se

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(t)\,dt}{b-a} \, ,$$

donde resulta a igualdade pretendida.

■

Exemplo 4.82.

1. Sendo F a função definida no intervalo $[2,4]$ por

   $$F(x) = \int_2^x \frac{1}{t}\,dt$$

   vamos determinar $F'(x)$, para todo o $x \in]2,4[$.

   Consideremos a função f definida por $f(t) = \dfrac{1}{t}$, para todo o $t \in [2,4]$.

   Como f é contínua em $]2,4[$, concluímos, pelo Teorema 4.79, que F é diferenciável em todo o ponto do intervalo $]2,4[$ e $F'(x) = f(x)$, para todo o $x \in]2,4[$.

   Temos então

   $$F'(x) = \frac{1}{x} \, ,$$

   para todo o $x \in]2,4[$.

2. Sejam $[a,b]$ um intervalo e f uma função integrável em $[a,b]$.

   Seja G a função definida, para todo o $x \in [a,b]$, por

   $$G(x) = \int_x^a f(t)\,dt \, .$$

Vamos ver que G é contínua em $[a,b]$ e que se f é contínua em $x \in]a,b[$, então G é diferenciável em x e $G'(x) = -f(x)$.

Temos $G = -F$, onde F é a função definida em $[a,b]$ por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \; .$$

Pelo Teorema 4.79 temos que F é contínua em $[a,b]$; pelas propriedades das funções contínuas temos que $G = -F$ é também contínua em $[a,b]$.

Suponhamos que f é contínua em $x \in]a,b[$. Pelo Teorema 4.79 F é contínua em x e $F'(x) = f(x)$. Atendendo às propriedades das funções diferenciáveis temos que G é também diferenciável em x e que $G'(x) = -F'(x)$, donde resulta que $G'(x) = -f(x)$, como pretendíamos.

3. Consideremos a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ x^2 - 1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Como f é contínua em $[-1,1]$ excepto no ponto $x = 0$ temos que f é integrável em $[-1,1]$.

Consideremos a função F definida por

$$F(x) = \int_{-1}^x f(t)\,dt \; ,$$

para todo o $x \in [-1,1]$.

Pelo Teorema 4.79, F é contínua em $[-1,1]$.

Como f é contínua em $]-1,0[$ e em $]0,1[$ temos, pelo Teorema 4.79, que F é diferencível em $]-1,0[\cup]0,1[$ e

$$F'(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se} \quad x \in]0,1[\\ x^2 - 1 & \text{se} \quad x \in]-1,0[\end{cases}$$

4. Consideremos a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ x^2 - x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Seja F a função definida por

$$F(x) = \int_{-1}^x f(t)\,dt \; ,$$

para todo o $x \in [-1,1]$.

Dado que f é contínua em $[-1,1]$ temos, pelo Teorema 4.79, que:

$$F'(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se} \quad x \in [0,1[\\ x^2 - x & \text{se} \quad x \in]-1,0[\end{cases}$$

$$F'_+(-1) = f(-1) = 2$$

$$F'_-(1) = f(1) = \operatorname{sen} 1.$$

5. Consideremos a função f definida por $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$.

Vamos mostrar que existe $c \in]0,2[$ tal que

$$\int_0^2 \mathrm{e}^{t^2}\,dt = 2\,\mathrm{e}^{c^2} \; .$$

Uma vez que a função f é contínua em $[0,2]$, o Teorema do valor médio para integrais garante que existe $c \in]0,2[$ tal que

$$\int_0^2 f(t)\,dt = (2-0)f(c) \; ,$$

ou seja,

$$\int_0^2 \mathrm{e}^{t^2}\,dt = 2\mathrm{e}^{c^2} \; ,$$

como pretendíamos.

Sejam g uma função definida num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ tal que $g(I) \subset]a,b[$ e f uma função definida em $[a,b]$ e integrável em $[a,b]$.

Consideremos a função F definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \; ,$$

para todo o $x \in [a,b]$ e a função G definida por

$$G(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\,dt \; ,$$

para todo o $x \in I$.

Então $G = F \circ g$ e, pelo Teorema da derivada da função composta, se g é diferenciável em $x \in I$ e F é diferenciável em $g(x)$, então G é diferenciável em x e

$$G'(x) = F'(g(x))g'(x) \; .$$

Se admitirmos que f é contínua em $]a,b[$ o Teorema 4.79 garante que, para todo o $x \in I$, F é diferenciável em $g(x)$ e

$$F'(g(x)) = f(g(x)) \; .$$

Se, para além disso, admitirmos que g é diferenciável em I, temos então que, para todo o $x \in I$, G é diferenciável em x e

$$G'(x) = f(g(x))g'(x) \; .$$

Acabámos de demonstrar a seguinte proposição

Proposição 4.83. *Sejam I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e $[a,b]$ um intervalo de $\mathbb{R}$.*

Sejam $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $]a,b[$ e $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $g(I) \subset]a,b[$ e diferenciável em I.

Então a função G definida por

$$G(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\, dt \ ,$$

para todo o $x \in I$, é diferenciável em I tendo-se, para todo o $x \in I$,

$$G'(x) = f(g(x))g'(x) \ .$$

Demonstração: ∎

Exemplo 4.84. Seja G a função definida por

$$G(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{t}\, dt \ ,$$

para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Pretende-se determinar $G'(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Sejam g a função definida por $g(x) = x^2$ e f a função definida por $f(t) = \dfrac{1}{t}$.

Seja $I =]0,d[$ um intervalo aberto de $\mathbb{R}^+$, arbitrário. Então g é diferenciável em I.

Considere-se o intervalo $]a,b[=]0,d^2[$. Então f é contínua em $]a,b[$ e $g(I) \subset]a,b[$.

Pela Proposição 4.83 podemos concluir que G é diferenciável em I e que, para todo o $x \in I$,

$$G'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x} \ .$$

Uma vez que I é arbitrário podemos concluir que, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$,

$$G'(x) = \frac{2}{x} \ .$$

Seja $I =]-d,0[$, com $d > 0$, um intervalo aberto de $\mathbb{R}^-$, arbitrário. Então g é diferenciável em I.

Considere-se o intervalo $]a,b[=]0,d^2[$. Então f é contínua em $]a,b[$ e $g(I) \subset]a,b[$.

Pela Proposição 4.83 podemos concluir que G é diferenciável em I e que, para todo o $x \in I$,

$$G'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x} \ .$$

Uma vez que I é arbitrário podemos concluir que, para todo o $x \in \mathbb{R}^-$,

$$G'(x) = \frac{2}{x} \ .$$

Temos então, para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$G'(x) = \frac{2}{x} \ .$$

Resulta imediatamente da Proposição 4.83 a proposição seguinte cuja demonstração é deixada como exercício.

Proposição 4.85. *Sejam I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e $[a,b]$ um intervalo de $\mathbb{R}$.*

Sejam $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $]a,b[$ e $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $g(I) \subset]a,b[$ e diferenciável em I.

Então a função H definida por

$$H(x) = \int_{g(x)}^{a} f(t)\, dt \ ,$$

para todo o $x \in I$, é diferenciável em I tendo-se, para todo o $x \in I$,

$$H'(x) = -f(g(x))g'(x) \ .$$

Demonstração: Exercício. ∎

Exemplo 4.86. Consideremos a função F definida por

$$F(x) = \int_{\cos x}^{0} \mathrm{e}^{t^2}\, dt \ ,$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Uma vez que a função f definida por $f(t) = \mathrm{e}^{t^2}$ é contínua em $\mathbb{R}$ e a função g definida por $g(x) = \cos x$ é diferenciável em $\mathbb{R}$, a Proposição 4.85 permite concluir que a função F é diferenciável em $\mathbb{R}$ tendo-se, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= -f(g(x))g'(x) \\ &= -\mathrm{e}^{\cos^2 x} \cdot (-\operatorname{sen} x) \\ &= \operatorname{sen} x \, \mathrm{e}^{\cos^2 x} \ . \end{aligned}$$

Conjugando a Proposição 4.83 e a Proposição 4.85 podemos demonstrar sem dificuldade o seguinte resultado.

Proposição 4.87. *Sejam I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e $[a,b]$ um intervalo de $\mathbb{R}$.*

Sejam $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $]a,b[$ e $g_1 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções tais que $g_1(I) \subset]a,b[$ e $g_2(I) \subset]a,b[$ e ambas diferenciáveis em I.

Então a função H definida por

$$H(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)\, dt \ ,$$

para todo o $x \in I$, é diferenciável em I tendo-se, para todo o $x \in I$,

$$H'(x) = f(g_2(x))g_2'(x) - f(g_1(x))g_1'(x) \ .$$

Demonstração: Exercício. ■

Exemplo 4.88. 1. Consideremos a função F definida por

$$F(x)=\int_{x^2+1}^{e^x}\frac{t}{t^2+1}\,dt\ ,$$

para todo o $x\in\mathbb{R}$.

Uma vez que:

- a função g_1 definida por $g_1(x)=x^2+1$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ tendo-se $g_1'(x)=2x$, para todo o $x\in\mathbb{R}$;
- a função g_2 definida por $g_2(x)=e^x$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ tendo-se $g_2'(x)=e^x$, para todo o $x\in\mathbb{R}$;
- a função f definida por $f(t)=\dfrac{t}{t^2+1}$ é contínua em $\mathbb{R}$;

a Proposição 4.87 permite concluir que F é diferenciável em $\mathbb{R}$ tendo-se

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(g_2(x))g_2'(x)-f(g_1(x))g_1'(x)\\ &= \frac{e^x}{e^{2x}+1}\cdot e^x-\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2+1}\cdot 2x\\ &= \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}-\frac{2x^3+2x}{x^4+2x^2+2}\ , \end{aligned}$$

para todo o $x\in\mathbb{R}$.

2. Consideremos a função F definida por

$$F(x)=\int_{\operatorname{arctg}x}^{\operatorname{arcsen}x} e^t\,dt\ ,$$

para todo o $x\in]-1,1[$.

Uma vez que:

- a função g_1 definida por $g_1(x)=\operatorname{arctg}x$ é diferenciável em $]-1,1[$ tendo-se $g_1'(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, para todo o $x\in]-1,1[$;
- a função g_2 definida por $g_2(x)=\operatorname{arcsen}x$ é diferenciável em $]-1,1[$ tendo-se $g_2'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, para todo o $x\in]-1,1[$;
- a função f definida por $f(t)=e^t$ é contínua em $]-1,1[$;

a Proposição 4.87 permite concluir que F é diferenciável em $]-1,1[$ tendo-se

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(g_2(x))g_2'(x)-f(g_1(x))g_1'(x)\\ &= e^{\operatorname{arcsen}x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-e^{\operatorname{arctg}x}\cdot\frac{1}{x^2+1}\\ &= \frac{e^{\operatorname{arcsen}x}}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{e^{\operatorname{arctg}x}}{x^2+1}\ , \end{aligned}$$

para todo o $x\in]-1,1[$.

Exercícios 4.10

1. Seja F a função definida por $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$, sendo a função f definida por

$$f(t)=\begin{cases} 2t^2+1 & \text{se } t\le 0\\ \dfrac{\operatorname{sen}t}{t} & \text{se } t>0\end{cases}$$

Verifique que $F'(x)=f(x)$, para todo o $x\in\mathbb{R}$.

2. Seja F uma função definida por $F(x)=\int_0^{\operatorname{sen}x}(x+1)^2\operatorname{arcsen}t\,dt$, para todo o $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Determine $F'(x)$.

3. Determine $k\in\mathbb{R}$ de modo que $f'(1)=0$, sendo f a função definida por:

$$f(x)=\int_{x^2}^{k\log x} e^{-t^2}\,dt.$$

4. Mostre que $f''(1)=1$ sendo f a função definida por $f(x)=\int_0^{\ln x} xe^{t^2}\,dt$.

5. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contínua em $\mathbb{R}$. Seja $\Psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função definida por

$$\Psi(x)=\int_{-2x}^{x^5} f(t)\,dt.$$

   (a) Mostre que Ψ é diferenciável e calcule $\Psi'(x)$.

   (b) Supondo que $f(x)<0$, para todo $x\in\mathbb{R}$, mostre que Ψ é decrescente em $\mathbb{R}$.

6. Seja F a função definida por:

$$F(x)=\int_0^x\left(\int_0^t e^{-u^2}\,du\right)dt$$

Calcule $F''(x)$.

7. Considere a função Ψ definida por $\Psi(x)=\int_0^x(2+\cos^2 u)\,du$. Mostre que Ψ é uma função estritamente crescente em $\mathbb{R}$.

8. Seja f a função contínua em $\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\int_0^{x^2}\left(\int_0^t g(v)\,dv\right)dt$, onde g é uma função contínua em $\mathbb{R}$.
Calcule o valor de $f''(1)$ sabendo que $g(1)=2$ e $\int_0^1 g(v)\,dv=1$.

9. Seja f uma função real de variável real contínua e positiva em $\mathbb{R}$. Mostre que a função F definida por:
$$F(x) = \int_0^{6x-x^2} f(t)\,dt$$
admite um só extremo no ponto de abcissa $x = 3$. Classifique esse extremo.

10. Sabendo que f é uma função real de variável real diferenciável e que tem recta tangente $y = x$ na origem, prove que a função F definida por
$$F(x) = \int_{x-1}^{x^2-1} (t+x) f(t)\,dt$$
admite um mínimo local no ponto de abcissa $x = 1$.

4.2.6 Relação entre integrais definidos e primitivas

Vimos no Teorema 4.79 e na Observação 4.80 que sendo $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a,b]$, então a função F definida em $[a,b]$ por
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$
é diferenciável em $[a,b]$ tendo-se $F'(x) = f(x)$, para todo o $x \in [a,b]$.

Atendendo à Definição 4.1 concluímos que F é uma primitiva de f.

No teorema que apresentamos a seguir estabelece-se uma fórmula que permite calcular o integral de Riemann de uma função contínua num intervalo $[a,b]$ à custa de uma primitiva dessa função.

Teorema 4.89. *Sejam $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a,b]$ e G uma primitiva de f. Então*
$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)\,.$$

Demonstração: Seja F a função definida em $[a,b]$ por
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,.$$

Como vimos F é uma primitiva de f e como, por hipótese, G é uma primitiva de f temos, pela Proposição 4.4, que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que
$$F(x) = G(x) + C\,, \tag{4.31}$$
para todo o $x \in [a,b]$.

Se $x = a$, resulta de (4.31)
$$F(a) = G(a) + C$$

e, como $F(a) = 0$, temos
$$C = -G(a)\,. \tag{4.32}$$

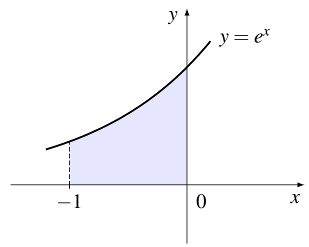
Se $x = b$, resulta de (4.31)
$$F(b) = G(b) + C\,. \tag{4.33}$$

Atendendo a que
$$F(b) = \int_a^b f(t)\,dt$$
e a (4.32) obtemos de (4.33)
$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)\,,$$
como pretendíamos.

■

Observação 4.90. Sendo $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a,b]$ e G uma primitiva de f, a diferença $G(b) - G(a)$ é usualmente representada pelo símbolo
$$G(x)]_a^b$$
ou pelo símbolo
$$[G(x)]_a^b$$

Exemplo 4.91. 1. Consideremos a região limitada do plano delimitada inferiormente pelo eixo OX, superiormente pelo gráfico da função f definida por $f(x) = \mathrm{e}^x$, à direita pelo eixo OY e à esquerda pela recta de equação $x = -1$.



Como f é contínua e positiva em $[-1,0]$, a área da região do considerada é dada por
$$\int_{-1}^0 \mathrm{e}^x\,dx\,.$$

Uma vez que a função G definida por $G(x) = \mathrm{e}^x$ é uma primitiva de f temos, pelo Teorema 4.89 e pela Observação 4.90,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} \mathrm{e}^x\,dx &= \mathrm{e}^x]_{-1}^{0}\\ &= \mathrm{e}^0-\mathrm{e}^{-1}\\ &= 1-\frac{1}{e}\\ &= \frac{e-1}{e}\end{aligned}$$

2. Atendendo a que
$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C\,,\quad C\in\mathbb{R}$$
temos
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen} x\,dx &= -\cos x]_0^{\pi/2}\\ &= -\cos(\pi/2)+\cos 0\\ &= 1\,.\end{aligned}$$

No Teorema 4.89 torna-se evidente que dada uma função contínua num certo intervalo, o conhecimento de uma primitiva dessa função permite calcular o seu integral de Riemann no intervalo considerado.

Exercícios 4.11

Calcule os seguintes integrais definidos:

1. $\displaystyle\int_1^4 (x^2-4x-3)\,dx$

2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x\,dx$

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{a^2+x^2}\,dx$

4. $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,dx$

5. $\displaystyle\int_e^{e^2}\left(\frac{1}{x\ln x}+\frac{1}{1-x}+\ln^2 x\right)dx.$

6. $\displaystyle\int_0^1 e^{ax}\cos^2(bx+c)\,dx$, onde a, b, e c são constantes reais não simultaneamente nulas.

4.2.7 Substituição no integral definido

O Teorema 4.89 estabelece que sendo $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função contínua e G uma primitiva de f, então
$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b)-G(a)\,.$$

Por exemplo para calcular
$$\int_0^{\pi/4}\frac{\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\,dx$$
podemos utilizar a primitiva determinada no Exemplo 4.41 e temos

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4}\frac{\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\,dx &= \left.\frac{2}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}-x\right]_0^{\pi/4}\\ &= \frac{2}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}-\frac{\pi}{4}-\frac{2}{1-\operatorname{tg}0}\\ &= \frac{2}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}-\frac{\pi}{4}-2\,.\end{aligned}$$

Note-se que para o cálculo desta primitiva utilizámos uma substituição de variável definida por $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ associada a uma função diferenciável e invertível.

Vamos ver na proposição que apresentamos a seguir que podemos efectuar a substituição directamente no integral definido e, nesse caso, não necessitamos de exigir a invertibilidade da função que está associada à substituição de variável a utilizar.

Temos o seguinte teorema:

Proposição 4.92. *Sejam I e J intervalos não degenerados de $\mathbb{R}$, $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em I e $\varphi: J \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função cujo contradomínio é um subconjunto de I, diferenciável em J e tal que φ' é contínua em J.*

Sejam $a,b\in I$ $(a<b)$ e $c,d\in J$ tais que $\varphi(c)=a$ e $\varphi(d)=b$. Então
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\,.$$

Demonstração: Consideremos a função $\Phi: J \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$\Phi(t)=\int_a^{\varphi(t)} f(x)\,dx\,,$$
para todo o $t\in J$.

Como f é contínua em I e φ é diferenciável em J, a Proposição 4.83 garante que Φ é diferenciável em J e que, para todo o $t\in J$,
$$\Phi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t)\,. \tag{4.34}$$

Por um lado, como, por hipótese, f é contínua em I, φ é diferenciável em J, logo contínua em J, e φ' é contínua em J podemos concluir, pelas propriedades das funções contínuas, que $(f\circ\varphi)\varphi'$ é contínua em J.

Por outro lado a igualdade (4.34) garante que Φ é uma primitiva de $(f\circ\varphi)\varphi'$.

Consequentemente pelo Teorema 4.89 temos que

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \Phi(d) - \Phi(c)\,.$$

Atendendo a que

$$\Phi(d) = \int_a^{\varphi(d)} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

e a que

$$\Phi(c) = \int_a^{\varphi(c)} f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

concluímos que

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx\,,$$

como pretendíamos.

■

Observação 4.93. A proposição que acabámos de demonstrar estabelece que se pretendermos calcular o integral definido

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

efectuando a mudança de variável definida por $x = \varphi(t)$, com φ diferenciável tal que φ' é contínua e tal que a composta $f \circ \varphi$ está definida, basta calcular o integral definido

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\,,$$

onde $c, d \in \mathbb{R}$ são tais que $\varphi(c) = a$ e $\varphi(d) = b$ tendo-se que

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Note-se que, ao contrário da Proposição 4.9, esta proposição não exige a invertibilidade da função que define a substituição de variável.

Exemplo 4.94. 1. Vamos calcular o integral definido

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$$

efectuando a substituição de variável definida pela função

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & [-\pi/4, \pi/4] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \operatorname{tg} t \end{array}$$

Uma vez que:

- a função

$$\begin{array}{rccc} f: & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{(1+x^2)^2} \end{array}$$

é contínua em $[-1,1]$;

- a composta $f \circ \varphi$ está definida;
- a função φ é diferenciável em $[-\pi/4, \pi/4]$ e a sua derivada é contínua neste intervalo;
- $\varphi(-\pi/4) = -1$ e $\varphi(\pi/4) = 1$;

temos, pela Proposição 4.92,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2 t)^2}\sec^2 t\,dt \\
&= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{(\sec^2 t)^2}\sec^2 t\,dt \\
&= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{\sec^2 t}\,dt \\
&= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 t\,dt \\
&= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)\right)dt \\
&= \left.\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2t)\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} \\
&= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

2. Pretendemos calcular

$$\int_{-4}^{-1} \frac{1}{\sqrt{x^2+8x+25}}\,dx\,.$$

Temos

$$x^2 + 8x + 25 = (x+4)^2 + 9$$

pelo que

$$\int_{-4}^{-1} \frac{1}{\sqrt{x^2+8x+25}}\,dx = \int_{-4}^{-1} \frac{1}{\sqrt{(x+4)^2+9}}\,dx\,.$$

Vamos então efectuar a substituição definida por $x + 4 = 3\operatorname{tg} t$.

Esta substituição está associada à função

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & [0, \pi/4] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & -4 + \operatorname{tg} t \end{array}$$

Uma vez que:

- a função

$$\begin{array}{rcl} f: \ [-4,-1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x^2+8x+25}} \end{array}$$

  é contínua em $[-4,-1]$;

- a composta $f \circ \varphi$ está definida;

- a função φ é diferenciável em $[0,\pi/4]$ e a sua derivada é contínua neste intervalo;

- $\varphi(0) = -4$ e $\varphi(\pi/4) = -1$;

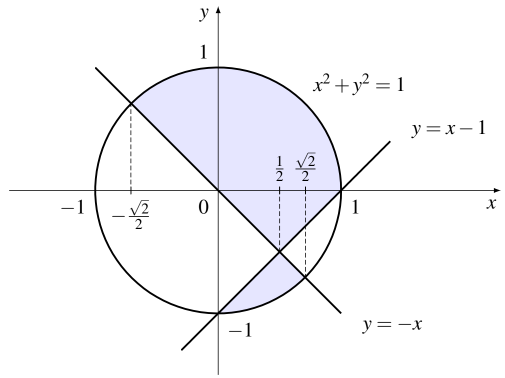
temos, pela Proposição 4.92,

$$\begin{aligned} \int_{-4}^{-1} \frac{1}{\sqrt{x^2+8x+25}}\,dx &= \int_{-4}^{-1} \frac{1}{\sqrt{(x+4)^2+9}}\,dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{9\,\mathrm{tg}^2 t+9}}\,3\sec^2 t\,dt \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{3\sqrt{\mathrm{tg}^2 t+1}}\,3\sec^2 t\,dt \\ &= \int_0^{\pi/4} \sec t\,dt \\ &= \ln|\sec t+\mathrm{tg}\,t|\big]_0^{\pi/4} \\ &= \ln\left|\sec\frac{\pi}{4}+\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}\right| - \ln|\sec 0+\mathrm{tg}\,0| \\ &= \ln(\sqrt{2}+1)-\ln 1 \\ &= \ln(\sqrt{2}+1)\,. \end{aligned}$$

3. Pretendemos calcular a área da região limitada do plano definida pelas condições

$$(x^2+y^2 \le 1 \wedge y \ge -x \wedge y \ge x-1) \vee (x^2+y^2 \le 1 \wedge y \le -x \wedge y \le x-1)\,.$$

A área pedida é a área da região representada a sombreado na figura seguinte:



Para exprimir em termos de integrais definidos a área pedida vamos, em primeiro lugar, determinar os pontos de intersecção da recta de equação $y=-x$ com a circunferência de equação $x^2+y^2=1$ e o ponto de intersecção das duas rectas consideradas.

- Os pontos de intersecção da recta de equação $y=-x$ com a circunferência de equação $x^2+y^2=1$ são as soluções do sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=-x \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2=1 \\ y=-x \end{cases} \iff \left(\begin{cases} x=\sqrt{2}/2 \\ y=-\sqrt{2}/2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\sqrt{2}/2 \\ y=\sqrt{2}/2 \end{cases} \right)$$

- O ponto de intersecção das duas rectas consideradas é a solução do sistema

$$\begin{cases} y=x-1 \\ y=-x \end{cases} \iff \begin{cases} 2x=1 \\ y=-x \end{cases} \iff \begin{cases} x=1/2 \\ y=-1/2 \end{cases}$$

Designando a área pedida por A temos

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\sqrt{2}/2}^{1/2} (\sqrt{1-x^2}+x)\,dx + \int_{1/2}^{1} (\sqrt{1-x^2}-x+1)\,dx + \\ &\quad + \int_0^{1/2} (x-1+\sqrt{1-x^2})\,dx + \int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} (-x+\sqrt{1-x^2})\,dx\,. \end{aligned}$$

Vamos calcular, separadamente, cada um destes integrais definidos.

- $I_1 = \displaystyle\int_{-\sqrt{2}/2}^{1/2} (\sqrt{1-x^2}+x)\,dx = \int_{-\sqrt{2}/2}^{1/2} \sqrt{1-x^2}\,dx + \int_{-\sqrt{2}/2}^{1/2} x\,dx\,.$
  Uma vez que
$$\int_{-\sqrt{2}/2}^{1/2} x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big]_{-\sqrt{2}/2}^{1/2} = \frac{1}{8}-\frac{1}{4}$$
  temos
$$I_1 = \int_{-\sqrt{2}/2}^{1/2} \sqrt{1-x^2}\,dx - \frac{1}{8}\,.$$

Para calcular $\int_{-\sqrt{2}/2}^{1/2} \sqrt{1-x^2}\,dx$ vamos utilizar a substituição de variável definida por $x = \operatorname{sen} t$.

Atendendo a que

$$t = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \operatorname{sen} t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

e a que

$$t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \operatorname{sen} t = \frac{1}{2}$$

temos que a esta substituição está associada a função

$$\begin{array}{rccc} \varphi_1: & [-\pi/4, \pi/6] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \operatorname{sen} t \end{array}$$

Uma vez que:

i. a função

$$\begin{array}{rccc} f_1: & [-\sqrt{2}/2, 1/2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{1-x^2} \end{array}$$

é contínua em $[-\sqrt{2}/2, 1/2]$;

ii. a composta $f_1 \circ \varphi_1$ está definida;

iii. a função φ_1 é diferenciável em $[-\pi/4, \pi/6]$ e a sua derivada é contínua neste intervalo;

iv. $\varphi_1(-\pi/4) = -\sqrt{2}/2$ e $\varphi_1(\pi/6) = 1/2$;

temos, pela Proposição 4.92,

$$\begin{aligned}
\int_{-\sqrt{2}/2}^{1/2} \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_{-\pi/4}^{\pi/6} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\,\cos t\,dt \\
&= \int_{-\pi/4}^{\pi/6} \cos^2 t\,dt \\
&= \int_{-\pi/4}^{\pi/6} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)\right) dt \\
&= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2t)\Big]_{-\pi/4}^{\pi/6} \\
&= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{5\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{5\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}+2}{8}\,.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-\sqrt{2}/2}^{1/2} \sqrt{1-x^2}\,dx - \frac{1}{8} \\
&= \frac{5\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}+2}{8} - \frac{1}{8} \\
&= \frac{5\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}+1}{8}\,.
\end{aligned}$$

- $I_2 = \int_{1/2}^{1} (\sqrt{1-x^2} - x + 1)\,dx = \int_{1/2}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx + \int_{1/2}^{1} (-x+1)\,dx\,.$

Uma vez que

$$\int_{1/2}^{1} (-x+1)\,dx = -\frac{1}{2}x^2 + x\Big]_{1/2}^{1} = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

temos

$$I_2 = \int_{1/2}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx + \frac{1}{8}\,.$$

Para calcular $\int_{1/2}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$ vamos utilizar a substituição de variável definida por $x = \operatorname{sen} t$.

Atendendo a que

$$t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \operatorname{sen} t = \frac{1}{2}$$

e a que

$$t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} t = 1$$

temos que a esta substituição está associada a função

$$\begin{array}{rccc} \varphi_2: & [\pi/6, \pi/2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \operatorname{sen} t \end{array}$$

Uma vez que:

i. a função

$$\begin{array}{rccc} f_2: & [1/2, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{1-x^2} \end{array}$$

é contínua em $[1/2, 1]$;

ii. a composta $f_2 \circ \varphi_2$ está definida;

iii. a função φ_2 é diferenciável em $[\pi/6, \pi/2]$ e a sua derivada é contínua neste intervalo;

iv. $\varphi_2(\pi/6) = 1/2$ e $\varphi_2(\pi/2) = 1$;

temos, pela Proposição 4.92,

$$\begin{aligned}
\int_{1/2}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_{\pi/6}^{\pi/2}\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\,\cos t\,dt\\
&= \int_{\pi/6}^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2t)\right)dt\\
&= \left.\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2t)\right]_{\pi/6}^{\pi/2}\\
&= \frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}-\frac{1}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\\
&= \frac{\pi}{6}+\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{8}\\
&= \frac{\pi}{6}+\frac{2-\sqrt{3}}{8}\,.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{1/2}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx+\frac{1}{8}\\
&= \frac{\pi}{6}+\frac{2-\sqrt{3}}{8}+\frac{1}{8}\\
&= \frac{\pi}{6}+\frac{3-\sqrt{3}}{8}\,.
\end{aligned}$$

- $I_3=\int_0^{1/2}(x-1+\sqrt{1-x^2})\,dx=\int_0^{1/2}\sqrt{1-x^2}\,dx+\int_0^{1/2}(x-1)\,dx\,.$

  Uma vez que
  $$\int_0^{1/2}(x-1)\,dx=\left.\frac{1}{2}x^2-x\right]_0^{1/2}=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{8}$$
  temos
  $$I_3=\int_0^{1/2}\sqrt{1-x^2}\,dx-\frac{3}{8}\,.$$

  Para calcular $\int_0^{1/2}\sqrt{1-x^2}\,dx$ vamos utilizar a substituição de variável definida por $x=\operatorname{sen} t$.

  Atendendo a que
  $$t=0\Rightarrow \operatorname{sen} t=0$$
  e a que
  $$t=\frac{\pi}{6}\Rightarrow \operatorname{sen} t=\frac{1}{2}$$
  temos que a esta substituição está associada a função
  $$\begin{array}{rccc}\varphi_3: & [0,\pi/6] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & t & \longmapsto & \operatorname{sen} t\end{array}$$

  Uma vez que:

  i. a função
  $$\begin{array}{rccc}f_3: & [0,1/2] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & x & \longmapsto & \sqrt{1-x^2}\end{array}$$
  é contínua em $[0,1/2]$;

  ii. a composta $f_3\circ\varphi_3$ está definida;

  iii. a função φ_3 é diferenciável em $[0,\pi/6]$ e a sua derivada é contínua neste intervalo;

  iv. $\varphi_3(0)=0$ e $\varphi_3(\pi/6)=1/2$;

  temos, pela Proposição 4.92,

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2}\sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_0^{\pi/6}\cos^2 t\,dt\\
&= \int_0^{\pi/6}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2t)\right)dt\\
&= \left.\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2t)\right]_0^{\pi/6}\\
&= \frac{\pi}{12}+\frac{1}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\\
&= \frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}\,.
\end{aligned}$$

  Consequentemente,

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^{1/2}\sqrt{1-x^2}\,dx-\frac{3}{8}\\
&= \frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{3}{8}\\
&= \frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}-3}{8}\,.
\end{aligned}$$

- $I_4=\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2}(-x+\sqrt{1-x^2})\,dx=\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2}\sqrt{1-x^2}\,dx-\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2}x\,dx\,.$

  Uma vez que
  $$\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2}x\,dx=\left.\frac{1}{2}x^2\right]_{1/2}^{\sqrt{2}/2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$$
  temos
  $$I_4=\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2}\sqrt{1-x^2}\,dx-\frac{1}{8}\,.$$

  Para calcular $\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2}\sqrt{1-x^2}\,dx$ vamos utilizar a substituição de variável definida por $x=\operatorname{sen} t$.

  Atendendo a que
  $$t=\frac{\pi}{6}\Rightarrow \operatorname{sen} t=\frac{1}{2}$$
  e a que
  $$t=\frac{\pi}{4}\Rightarrow \operatorname{sen} t=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

temos que a esta substituição está associada a função

$$\begin{array}{rccl} \varphi_4: & [\pi/6,\pi/4] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \operatorname{sen} t \end{array}$$

Uma vez que:

i. a função

$$\begin{array}{rccl} f_4: & [1/2,\sqrt{2}/2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{1-x^2} \end{array}$$

é contínua em $[1/2,\sqrt{2}/2]$;

ii. a composta $f_4\circ\varphi_4$ está definida;

iii. a função φ_4 é diferenciável em $[\pi/6,\pi/4]$ e a sua derivada é contínua neste intervalo;

iv. $\varphi_4(\pi/6)=1/2$ e $\varphi_4(\pi/4)=\sqrt{2}/2$;

temos, pela Proposição 4.92,

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^{\sqrt{2}/2}\sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_{\pi/6}^{\pi/4}\cos^2 t\,dt \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2t)\right)dt \\ &= \left.\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2t)\right]_{\pi/6}^{\pi/4} \\ &= \frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}-\frac{1}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\pi}{24}+\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{8} \\ &= \frac{\pi}{24}+\frac{2-\sqrt{3}}{8}\,. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{1/2}^{\sqrt{2}/2}\sqrt{1-x^2}\,dx-\frac{1}{8} \\ &= \frac{\pi}{24}+\frac{2-\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{8} \\ &= \frac{\pi}{24}+\frac{1-\sqrt{3}}{8}\,. \end{aligned}$$

Temos então

$$A=\frac{5\pi}{24}+\frac{\sqrt{3}+1}{8}+\frac{\pi}{6}+\frac{3-\sqrt{3}}{8}+\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}-3}{8}+\frac{\pi}{24}+\frac{1-\sqrt{3}}{8}=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\,.$$

Exercícios 4.12

1. Calcular, por substituição, os seguintes integrais definidos:

   (a) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

   (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}\,dx$

   (c) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{e^x+1}\,dx$

   (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

2. Mostre que o valor da área da região limitada de $\mathbb{R}^2$ delimitada pelos gráficos das funções f e g definidas, respectivamente, por $f(x)=1/x$ e $g(x)=x^2$ e pelas rectas de equações $x=2$ e $y=0$, respectivamente, é igual a $1/3+\ln 2$.

3. Seja $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq(x-3)^2,\, y\geq x-1,\, y\leq 4\}$.

   (a) Represente geometricamente a região A.

   (b) Calcule o valor da área da região A.

4. Determine o valor da área da região limitada de $\mathbb{R}^2$ delimitada pelos gráficos das funções f e g definidas, respectivamente, por $f(x)=\sqrt{4+x^2}$ e $g(x)=x$, e pelas rectas de equações $x=-2$ e $x=2$, respectivamente.

5. Determine o valor da área da região limitada do plano delimitada pelo gráfico da circunferência de equação $x^2+y^2=1$, situada à direita do eixo OY e acima do gráfico da recta de equação $y=-\sqrt{3}x$.

6. Determine o valor da área da região limitada do plano delimitada pelos gráficos das funções f e g definidas, respectivamente, por:

$$f(x)=\frac{1+\cos^2 x}{1+e^{2x}} \quad \text{e} \quad g(x)=\frac{\cos^2 x}{1+e^{2x}},$$

   com $x\in[\ln 2,\ln 5]$.

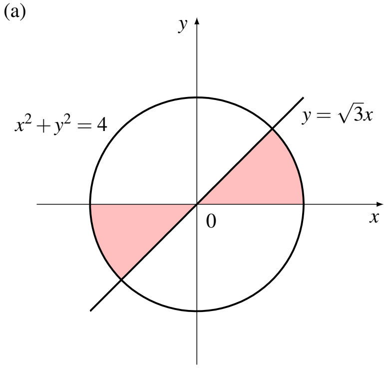
7. (a) Determine o domínio de cada uma das seguintes funções:

$$f(x)=e^{x^2}+\sqrt{1-x^2} \quad \text{e} \quad g(x)=e^{x^2}-\sqrt{1-x^2}.$$

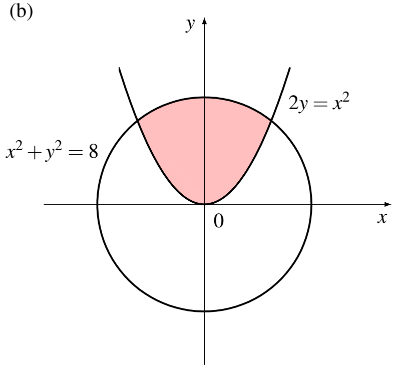
   (b) Qual o valor da área da região do plano situada entre os gráficos de f e g?

8. Recorrendo ao Cálculo Integral, determine o valor da área da região sombreada representada nas figuras seguintes:

(a)



(b)



4.3 Integrais impróprios

A definição de integral de Riemann de uma função f num intervalo I exige que o intervalo seja fechado e limitado e que a função seja limitada nesse intervalo.

Nesta secção vamos estender a definição de integral omitindo uma dessas condições. Passamos a estudar um novo tipo de integrais que designamos por **integrais impróprios**.

4.3.1 Integrais impróprios de 1ª espécie

Vamos considerar em primeiro lugar o caso em que a função está definida num intervalo ilimitado, obtendo-se então os integrais impróprios de 1ª espécie.

Definição 4.95. Seja f uma função definida num intervalo $[a,+\infty[$ tal que f é integrável em $[a,t]$, para todo o $t \geq a$. Seja φ a função definida por

$$\varphi(t)=\int_a^t f(x)\,dx\,,$$

para todo o $t \geq a$.

Se o limite

$$\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx \tag{4.35}$$

existe e é finito dizemos que f **é integrável em sentido impróprio no intervalo** $[a,+\infty[$ ou que **o integral impróprio**

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \tag{4.36}$$

existe ou **é convergente**.

Neste caso escreve-se, por definição,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

e ao valor do limite $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx$ chamamos **valor** do integral impróprio $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Se o limite (4.35) não existe ou é infinito dizemos que **o integral impróprio** (4.36) **não existe** ou **é divergente**.

Ao integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\,,$$

onde $f:\ [a,+\infty[\ \longrightarrow\ \mathbb{R}$ é uma função integrável em $[a,t]$, para todo o $t\geq a$, chamamos **integral impróprio de 1ª espécie, impróprio no limite superior de integração**.

Exemplo 4.96. 1. Consideremos o integral impróprio

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x\,dx\,.$$

A função f definida por $f(x)=\operatorname{sen} x$, para todo o $x\geq 0$ é integrável em $[0,t]$, para todo o $t\geq 0$ pelo que o integral impróprio considerado é um integral impróprio de 1ª espécie, impróprio no limite superior de integração.

Uma vez que o limite

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \operatorname{sen} x\,dx &= -\cos x]_0^t\\ &= \lim_{t\to+\infty}(-\cos t+1)\end{aligned}$$

não existe concluímos que o integral impróprio considerado é divergente.

2. Vamos estudar, em função de $s\in\mathbb{R}$, a natureza do integral impróprio

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^s}\,dx\,.$$

Note-se que, para cada $s\in\mathbb{R}$, a função f_s definida por $f_s(x)=\dfrac{1}{x^s}$, para todo o $x\in[1,+\infty[$ é integrável em $[1,t]$, para todo o $t\geq 1$.

Logo, tem sentido estudar, em função de $s \in \mathbb{R}$, o limite

$$\lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^s}\, dx\,.$$

Se $s = 1$ temos, para todo o $t > 1$,

$$\begin{aligned}\int_1^t \frac{1}{x}\, dx &= \ln|x|\big]_1^t \\ &= \ln t\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\, dx &= \lim_{t \to +\infty} \ln t \\ &= +\infty\,.\end{aligned}$$

Concluímos então que, neste caso, o integral impróprio considerado é divergente.

Admitamos que $s \neq 1$. Temos, para todo o $t > 1$,

$$\begin{aligned}\int_1^t \frac{1}{x^s}\, dx &= \left.\frac{x^{-s+1}}{-s+1}\right]_1^t \\ &= \frac{t^{-s+1}}{-s+1} - \frac{1}{-s+1}\,.\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^s}\, dx = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{t^{-s+1}}{-s+1} + \frac{1}{s-1} \right)\,.$$

Uma vez que

$$\lim_{t \to +\infty} \left(\frac{t^{-s+1}}{-s+1} + \frac{1}{s-1} \right) = \begin{cases} \dfrac{1}{s-1} & \text{se} \quad s > 1 \\[2ex] +\infty & \text{se} \quad s < 1 \end{cases}$$

concluímos que o integral impróprio considerado converge se $s > 1$ e diverge se $s < 1$.

Do que foi feito podemos concluir que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^s}\, dx \quad \text{é} \quad \begin{cases} \text{convergente} & \text{se} \quad s > 1 \\[2ex] \text{divergente} & \text{se} \quad s \leq 1 \end{cases}$$

No caso em que $s > 1$ podemos escrever

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^s}\, dx = \frac{1}{s-1}\,.$$

3. Vamos estudar, em função de $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a natureza do integral impróprio

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\alpha x}\, dx\,.$$

Note-se em primeiro lugar que, para cada $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a função f_α definida por $f_\alpha(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}$, para todo o $x \in [0, +\infty[$, é integrável em $[0,t]$, para todo o $t \geq 0$, o que justifica que o integral impróprio considerado é um integral impróprio de 1ª espécie, impróprio no limite superior de integração.

Para estudar a natureza do integral impróprio considerado temos então de estudar o limite

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^t \mathrm{e}^{\alpha x}\, dx\,.$$

Uma vez que, para todo o $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e, para todo o $t > 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^t \mathrm{e}^{\alpha x}\, dx &= \left.\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha x}\right]_0^t \\ &= \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha t} - \frac{1}{\alpha}\,,\end{aligned}$$

concluímos que

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^t \mathrm{e}^{\alpha x}\, dx = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad \alpha > 0 \\[2ex] -\dfrac{1}{\alpha} & \text{se} \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

Consequentemente

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\alpha x}\, dx \quad \text{é} \quad \begin{cases} \text{convergente} & \text{se} \quad \alpha < 0 \\[2ex] \text{divergente} & \text{se} \quad \alpha > 0 \end{cases}$$

No caso em que $\alpha < 0$ podemos escrever

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\alpha x}\, dx = -\frac{1}{\alpha}\,.$$

Definição 4.97. Seja f uma função definida num intervalo $]-\infty, a]$ tal que f é integrável em $[t,a]$, para todo o $t \leq a$. Seja φ a função definida por

$$\varphi(t) = \int_t^a f(x)\, dx\,,$$

para todo o $t \leq a$.

Se o limite

$$\lim_{t \to -\infty} \varphi(t) = \lim_{t \to -\infty} \int_t^a f(x)\, dx \tag{4.37}$$

existe e é finito dizemos que f **é integrável em sentido impróprio no intervalo** $]-\infty, a]$ ou que **o integral impróprio**

$$\int_{-\infty}^a f(x)\, dx \tag{4.38}$$

existe ou **é convergente**.

Neste caso escreve-se, por definição,

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{a} f(x)\,dx$$

e ao valor do limite $\lim\limits_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)\,dx$ chamamos **valor** do integral impróprio $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$.

Se o limite (4.37) não existe ou é infinito dizemos que **o integral impróprio** (4.38) **não existe** ou **é divergente**.

Ao integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx\,,$$

onde $f:\ ]-\infty,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável em $[t,a]$, para todo o $t\le a$, chamamos **integral impróprio de 1ª espécie impróprio no limite inferior de integração**.

Observação 4.98. Uma vez que

$$\lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{a} f(x)\,dx$$

para estudar a natureza do integral impróprio (4.38) podemos estudar o limite do segundo membro da igualdade anterior.

Exemplo 4.99. 1. Vamos estudar a natureza do integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{1+x^2}\,dx\,.$$

A função f definida por $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, para todo o $x\in]-\infty,1]$, é integrável em $[t,1]$, para todo o $t\le 1$ e, portanto, o integral impróprio considerado é um integral impróprio de 1ª espécie, impróprio no limite inferior de integração.

Uma vez que, para todo o $t\le 1$,

$$\begin{aligned}\int_t^1\frac{1}{1+x^2}\,dx &= \operatorname{arctg} x\Big]_t^1\\ &= \operatorname{arctg} 1-\operatorname{arctg} t\\ &= \frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg} t\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}\lim_{t\to-\infty}\int_t^1\frac{1}{1+x^2}\,dx &= \lim_{t\to-\infty}\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg} t\right)\\ &= \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\\ &= \frac{3\pi}{4}\,,\end{aligned}$$

o que permite concluir que o integral impróprio considerado é convergente.

Podemos então escrever

$$\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{1+x^2}\,dx=\frac{3\pi}{4}\,.$$

2. Vamos estudar, em função de $a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$, a natureza do integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{0} a^x\,dx\,.$$

Para cada $a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$, a função f_a definida por $f_a(x)=a^x$, para todo o $x\in]-\infty,0]$ é integrável em $[t,0]$, para todo o $t\le 0$. Consequentemente, para cada $a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$, o integral impróprio considerado é um integral impróprio de 1ª espécie, impróprio no limite inferior de integração.

Para estudar a natureza deste integral impróprio temos então de estudar, em função de $a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$, o limite

$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^0 a^x\,dx\,.$$

Para todo o $a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$ e, para todo o $t\le 0$, temos

$$\begin{aligned}\int_t^0 a^x\,dx &= \frac{a^x}{\ln a}\Big]_t^0\\ &= \frac{1}{\ln a}-\frac{a^t}{\ln a}\,.\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^0 a^x\,dx=\begin{cases}\dfrac{1}{\ln a} & \text{se} \quad a>1\\[2ex] -\infty & \text{se} \quad 0<a<1\end{cases}$$

donde concluímos que

$$\int_{-\infty}^0 a^x\,dx \quad \text{é} \quad \begin{cases}\text{convergente} & \text{se} \quad a>1\\[2ex] \text{divergente} & \text{se} \quad 0<a<1\end{cases}$$

No caso em que $a>1$ podemos escrever

$$\int_{-\infty}^0 a^x\,dx=\frac{1}{\ln a}\,.$$

Na proposição que se apresenta a seguir estabelece-se uma propriedade dos integrais impróprios de 1ª espécie, impróprios no limite superior de integração.

Proposição 4.100. *Sejam f e g duas funções definidas em $[a,+\infty[$ e integráveis em $[a,t]$, para todo o $t\ge a$. Então verificam-se as condições seguintes:*

(i) se os integrais impróprios

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad e \quad \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

são ambos convergentes, então, para todos os $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx$$

é convergente;

(ii) se o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

é divergente, então, para todo o $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} (\alpha f(x))\, dx$$

é divergente.

Demonstração: (i) Atendendo à hipótese existem e são finitos os limites $\lim\limits_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\, dx$ e $\lim\limits_{t\to+\infty} \int_a^t g(x)\, dx$.

Atendendo a que, para todo o $t \geq a$,

$$\int_a^t (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^t f(x)\, dx + \beta \int_a^t g(x)\, dx$$

temos que

$$\lim_{t\to+\infty} \int_a^t (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \lim_{t\to+\infty} \left(\alpha \int_a^t f(x)\, dx + \beta \int_a^t g(x)\, dx \right) .$$

A hipótese e as propriedades dos limites permitem então concluir que

$$\lim_{t\to+\infty} \int_a^t (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\, dx + \beta \lim_{t\to+\infty} \int_a^t g(x)\, dx .$$

Atendendo à Definição 4.95 podemos então concluir que o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx$$

é convergente, como pretendíamos.

(ii) Atendendo à hipótese o limite

$$\lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\, dx$$

não existe ou é infinito.

Atendendo a que, para todo o $t \geq a$,

$$\int_a^t (\alpha f(x))\, dx = \alpha \int_a^t f(x)\, dx$$

temos que o limite

$$\lim_{t\to+\infty} \int_a^t (\alpha f(x))\, dx = \lim_{t\to+\infty} \left(\alpha \int_a^t f(x)\, dx \right)$$

não existe ou é infinito.

A Definição 4.95 permite então concluir que o integral impróprio $\int_a^{+\infty} (\alpha f(x))\, dx$ é divergente, como pretendíamos.

■

Na proposição que apresentamos a seguir estabelece-se uma propriedade análoga para os integrais impróprios de 1ª espécie, impróprios no limite inferior de integração. A demonstração desta proposição é deixada como exercício.

Proposição 4.101. *Sejam f e g duas funções definidas em $]-\infty, a]$ e integráveis em $[t, a]$, para todo o $t \leq a$. Então verificam-se as condições seguintes:*

(i) se os integrais impróprios

$$\int_{-\infty}^a f(x)\, dx \quad e \quad \int_{-\infty}^a g(x)\, dx$$

são ambos convergentes, então, para todos os $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ não simultaneamente nulos, o integral impróprio

$$\int_{-\infty}^a (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx$$

é convergente;

(ii) se o integral impróprio

$$\int_{-\infty}^a f(x)\, dx$$

é divergente, então, para todo o $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, o integral impróprio

$$\int_{-\infty}^a (\alpha f(x))\, dx$$

é divergente.

Demonstração: Exercício. ■

Na proposição que se apresenta a seguir estabelece-se uma propriedade dos integrais impróprios de 1ª espécie, impróprios no limite superior de integração.

Proposição 4.102. *Sejam f e g duas funções definidas em $[a, +\infty[$ e integráveis em $[a, t]$, para todo o $t \geq a$. Então verificam-se as condições seguintes:*

(i) se os integrais impróprios

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx \quad e \quad \int_a^{+\infty} g(x)\, dx$$

são ambos convergentes, então, para todos os $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx$$

é convergente;

(ii) se o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

é divergente, então, para todo o $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} (\alpha f(x))\,dx$$

é divergente.

Demonstração: (i) Atendendo à hipótese existem e são finitos os limites $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx$ e $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t g(x)\,dx$.

Atendendo a que, para todo o $t \geq a$,

$$\int_a^t (\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx = \alpha\int_a^t f(x)\,dx + \beta\int_a^t g(x)\,dx$$

temos que

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t (\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left(\alpha\int_a^t f(x)\,dx + \beta\int_a^t g(x)\,dx\right).$$

A hipótese e as propriedades dos limites permitem então concluir que

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t (\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx = \alpha\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx + \beta\lim_{t\to+\infty}\int_a^t g(x)\,dx\,.$$

Atendendo à Definição 4.95 podemos então concluir que o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} (\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx$$

é convergente, como pretendíamos.

(ii) Atendendo à hipótese o limite

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

não existe ou é infinito.

Atendendo a que, para todo o $t \geq a$,

$$\int_a^t (\alpha f(x))\,dx = \alpha\int_a^t f(x)\,dx$$

temos que o limite

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t (\alpha f(x))\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left(\alpha\int_a^t f(x)\,dx\right)$$

não existe ou é infinito.

A Definição 4.95 permite então concluir que o integral impróprio $\int_a^{+\infty}(\alpha f(x))\,dx$ é divergente, como pretendíamos.

■

Na proposição que apresentamos a seguir estabelece-se uma propriedade análoga para os integrais impróprios de 1ª espécie, impróprios no limite inferior de integração. A demonstração desta proposição é deixada como exercício.

Proposição 4.103. *Sejam f e g duas funções definidas em $]-\infty,a]$ e integráveis em $[t,a]$, para todo o $t \leq a$. Então verificam-se as condições seguintes:*

(i) se os integrais impróprios

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \quad e \quad \int_{-\infty}^{a} g(x)\,dx$$

são ambos convergentes, então, para todos os $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ não simultaneamente nulos, o integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{a} (\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx$$

é convergente;

(ii) se o integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$$

é divergente, então, para todo o $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, o integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{a} (\alpha f(x))\,dx$$

é divergente.

Demonstração: Exercício. ■

Como vimos no Exemplo 4.96 o integral impróprio

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2x}\,dx$$

é convergente.

Consideremos o integral impróprio

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2x}\,dx\,.$$

Poderá este integral impróprio ser divergente? Note-se que os dois integrais impróprios apenas diferem no limite inferior de integração.

A proposição que demonstramos a seguir responde à pergunta formulada garantindo que a natureza de um integral impróprio $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ não se altera se iniciarmos o intervalo de integração num ponto $a' > a$.

Proposição 4.104. *Sejam f uma função definida num intervalo $[a,+\infty[$ e integrável em $[a,t]$, para todo o $t \geq a$ e $a' > a$. Então os integrais impróprios $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\int_{a'}^{+\infty} f(x)\,dx$ têm a mesma natureza.*

Demonstração: A proposição fica demonstrada se provarmos que o integral impróprio $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ é convergente se e só se o integral impróprio $\int_{a'}^{+\infty} f(x)\,dx$ é convergente.

Para todo o $t > a'$ temos

$$\int_a^t f(x)\,dx = \int_a^{a'} f(x)\,dx + \int_{a'}^t f(x)\,dx\,.$$

Consequentemente

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left(\int_a^{a'} f(x)\,dx + \int_{a'}^t f(x)\,dx\right)$$

o que implica que o limite

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

existe e é finito se e só se o limite

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{a'}^t f(x)\,dx$$

existe e é finito.

Está então provado que o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

é convergente se e só se o integral impróprio

$$\int_{a'}^{+\infty} f(x)\,dx$$

é convergente, como pretendíamos.

■

Analogamente temos que, sendo $a'' < a$ tal f é integrável em $[a'',t]$, para todo o $t \geq a''$, os integrais impróprios $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\int_{a''}^{+\infty} f(x)\,dx$ têm a mesma natureza.

Também para o caso de integrais impróprios de 1ª espécie, impróprios no limite inferior de integração, podemos provar que a natureza de um integral impróprio $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ não se altera se o limite superior de integração for um ponto $a' < a$.

Proposição 4.105. *Sejam f uma função definida num intervalo $]-\infty,a]$ e integrável em $[t,a]$, para todo o $t \leq a$ e $a' < a$.*

Então os integrais impróprios $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ e $\int_{-\infty}^{a'} f(x)\,dx$ têm a mesma natureza.

Demonstração: Exercício.

■

Tal como para os integrais impróprios de 1ª espécie, impróprios no limite superior de integração, temos que, sendo $a'' > a$ tal f é integrável em $[t,a'']$, para todo o $t \leq a''$, os integrais impróprios $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ e $\int_{-\infty}^{a''} f(x)\,dx$ têm a mesma natureza.

As Proposições 4.104 e 4.105 dão coerência à definição que se segue.

Definição 4.106. Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$, integrável em $[\alpha,\beta]$, quaisquer que sejam $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$.

Dizemos que **o integral impróprio**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \tag{4.39}$$

é convergente se, para algum $a \in \mathbb{R}$, os integrais impróprios

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

são ambos convergentes.

Neste caso escrevemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

e ao valor do segundo membro da igualdade anterior chamamos **valor** do integral impróprio $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Se para algum $a \in \mathbb{R}$, um dos integrais impróprios

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx \quad \text{ou} \quad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

diverge dizemos que o integral impróprio (4.39) é **divergente**.

Ao integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\,,$$

onde $f:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável em $[t,t']$, para todos os $t,t' \in \mathbb{R}$ com $t < t'$, chamamos **integral impróprio de 1ª espécie, impróprio em ambos os limites de integração**.

Exemplo 4.107. 1. Vamos estudar a natureza do integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx\,.$$

Como vimos no Exemplo 4.99 o integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

é convergente.

Vamos estudar a natureza do integral impróprio

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx\,.$$

A função f definida por $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, para todo o $x \in [1,+\infty[$, é integrável em $[1,t]$, para todo o $t \geq 1$.

Uma vez que, para todo o $t > 1$,

$$\begin{aligned}\int_1^t \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \operatorname{arctg} x]_1^t \\ &= \operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg} 1 \\ &= \operatorname{arctg} t - \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \lim_{t\to+\infty}\left(\operatorname{arctg} t - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

o que permite concluir que o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ é convergente.

Atendendo à Definição 4.106 concluímos então que o integral dado é convergente.

Podemos então escrever

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &= \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \\ &= \pi\,.\end{aligned}$$

2. Vamos estudar, em função de $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ a natureza do integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a^x\,dx\,.$$

Vimos no Exemplo 4.99 que

$$\int_{-\infty}^{0} a^x\,dx \quad \text{é} \quad \begin{cases} \text{convergente} & \text{se} \quad a > 1 \\ \\ \text{divergente} & \text{se} \quad 0 < a < 1 \end{cases}$$

Atendendo à Definição 4.106 podemos então concluir que se $0 < a < 1$, então o integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} a^x\,dx$ é divergente.

Vamos então estudar o integral impróprio

$$\int_0^{+\infty} a^x\,dx$$

se $a > 1$.

Para todo o $a > 1$, a função f definida por $f(x) = a^x$, para todo o $x \in [0,+\infty[$, é integrável em $[0,t]$, para todo o $t \geq 0$.

Temos então de estudar, em função de $a > 1$, o limite

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t a^x\,dx\,.$$

Para todo o $a > 1$ e, para todo o $t > 0$, temos

$$\begin{aligned}\int_0^t a^x\,dx &= \left.\frac{a^x}{\ln a}\right]_0^t \\ &= \frac{a^t}{\ln a} - \frac{1}{\ln a}\,.\end{aligned}$$

Consequentemente, para todo o $a > 1$,

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t a^x\,dx = +\infty$$

o que permite concluir que, para todo o $a > 1$, o integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} a^x\,dx$ é divergente.

Atendendo à Definição 4.106 concluímos que, para todo o $a > 1$, o integral impróprio dado é divergente.

Atendendo ao que foi dito podemos então concluir que, para todo o $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ o integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a^x\,dx\,.$$

é divergente.

3. Vamos estudar a natureza do integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx\,.$$

Consideremos os integrais impróprios

$$\int_{-\infty}^{0} x\,dx \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} x\,dx\,.$$

Uma vez que o integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\,dx$ é divergente concluímos, pela Definição 4.106 que o integral impróprio dado é divergente.

Observação 4.108.

1. As Proposições 4.104 e 4.105 garantem que a natureza do integral impróprio (4.39) não depende do valor de $a \in \mathbb{R}$ escolhido para estudar a natureza dos integrais impróprios $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$.
2. No caso de convergência do integral impróprio (4.39) podemos escrever

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t'\to-\infty}\int_{t'}^{a} f(x)\,dx + \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx\,.$$

É óbvio que se os limites

$$\lim_{t'\to-\infty}\int_{t'}^{a} f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \lim_{t\to+\infty}\int_{a}^{t} f(x)\,dx$$

existirem e forem finitos, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{t'\to-\infty}\int_{t'}^{a} f(x)\,dx+\lim_{t\to+\infty}\int_{a}^{t} f(x)\,dx &= \lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{a} f(x)\,dx+\lim_{t\to+\infty}\int_{a}^{t} f(x)\,dx \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left(\int_{-t}^{a} f(x)\,dx+\int_{a}^{t} f(x)\,dx\right) \\
&= \lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} f(x)\,dx\,.
\end{aligned}$$

Consequentemente, no caso de convergência podemos escrever

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} f(x)\,dx\,.$$

No caso em que o integral impróprio (4.39) é divergente, a igualdade anterior não faz sentido.

Ao valor do limite

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} f(x)\,dx\,,$$

quando existe e é finito, chamamos **Valor Principal de Cauchy** do integral e escrevemos

$$(VPC)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} f(x)\,dx\,.$$

É óbvio que se o integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ é convergente, o seu Valor Principal de Cauchy coincide com o valor do integral.

Exemplo 4.109. 1. Como vimos no Exemplo 4.107, o integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx$ é convergente e tem valor π.

Temos então

$$(VPC)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx=\pi\,.$$

2. Como vimos no Exemplo 4.107, o integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ é divergente.

Uma vez que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} x\,dx &= \lim_{t\to+\infty}\left.\frac{x^2}{2}\right]_{-t}^{t} \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t^2}{2}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

temos

$$(VPC)\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx=0\,.$$

Estudo da convergência dos integrais impróprios de 1ª espécie Consideremos o integral impróprio de 1ª espécie

$$\int_{1}^{+\infty}\operatorname{sen}\frac{1}{x^2}\,dx\,.$$

Uma vez que não conhecemos uma primitiva da função f definida por $f(x)=\operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2}$, não é possível estudar a natureza deste integral utilizando a Definição 4.95.

Nas proposições que apresentamos a seguir estabelecem-se critérios que permitem fazer o estudo da natureza de um integral impróprio de 1ª espécie sem recorrer à definição.

A proposição que apresentamos a seguir estabelece um critério para o estudo da natureza de integrais impróprios de 1ª espécie, impróprios no limite superior de integração, que é habitualmente designado **Critério de Comparação**.

Proposição 4.110. *Sejam f e g duas funções definidas no intervalo $[a,+\infty[$, integráveis em $[a,t]$, para todo o $t\geq a$ e que verificam a condição*

$$0\leq f(x)\leq g(x)\,,$$

para todo o $x\in[a,+\infty[$.

Então verificam-se as condições seguintes:

(i) se o integral impróprio $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} g(x)\,dx$ é convergente, então o integral impróprio $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ também é convergente;

(ii) se o integral impróprio $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ é divergente, então o integral impróprio $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} g(x)\,dx$ também é divergente.

Demonstração: Consideremos a função F definida por

$$F(t)=\int_{a}^{t} f(x)\,dx\,,$$

para todo o $t\in[a,+\infty[$.

Vamos ver que a função F é monótona crescente.

Sejam $t_1,t_2\in[a,+\infty[$ tais que $t_1<t_2$ e vamos provar que $F(t_2)\geq F(t_1)$.

Uma vez que $t_2>t_1$ temos, pelas propriedades dos integrais definidos e pela definição de F,

$$\begin{aligned}
F(t_2) &= \int_{a}^{t_2} f(x)\,dx \\
&= \int_{a}^{t_1} f(x)\,dx+\int_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx \\
&= F(t_1)+\int_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx
\end{aligned}$$

Como por hipótese f é não negativa em $[a,+\infty[$, a Proposição 4.65 garante que

$$\int_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx \geq 0$$

o que permite concluir que $F(t_2) \geq F(t_1)$, como pretendíamos.

Uma vez que a função F é monótona crescente existe o limite

$$L_1 := \lim_{t\to+\infty} F(t) = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

podendo ser finito ou $+\infty$.

Analogamente se prova que existe o limite

$$L_2 := \lim_{t\to+\infty} \int_a^t g(x)\,dx$$

podendo ser finito ou $+\infty$.

Como por hipótese temos $0 \leq f(x) \leq g(x)$, o Corolário 4.66 permite concluir que, para todo o $t \in [a,+\infty[$,

$$\int_a^t f(x)\,dx \leq \int_a^t g(x)\,dx\,. \tag{4.40}$$

Uma vez que os limites L_1 e L_2 existem, a desigualdade (4.40) implica

$$L_1 \leq L_2\,. \tag{4.41}$$

Tendo em vista a prova de (i) admitamos que o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

é convergente.

Pela Definição 4.95 temos que o limite L_2 existe e é finito.

A desigualdade (4.41) permite então concluir que o limite L_1 existe e é finito, o que significa que o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

é convergente, o que prova (i).

Tendo em vista a prova de (ii) admitamos que o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

é divergente.

Pela Definição 4.95 e, atendendo a que o limite L_1 existe, temos que o limite L_1 é $+\infty$.

Uma vez que o limite L_2 existe, a desigualdade (4.41) permite então concluir que o limite L_2 é $+\infty$ o que significa que o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

é divergente.

Está então concluída a prova de (ii).

■

Exemplo 4.111. 1. Vamos estudar a natureza do integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{x^2}\,dx$$

utilizando o Critério de Comparação.

Para todo o $x \in [1,+\infty[$ temos $\frac{1}{x^2} \in [0,1]$ e, portanto, $\operatorname{sen}\frac{1}{x^2} \geq 0$.

Consequentemente, para todo o $x \in [1,+\infty[$ temos

$$0 \leq \operatorname{sen}\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}\,. \tag{4.42}$$

Uma vez que o integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

é convergente e que a desigualdade (4.42) se verifica podemos concluir, pelo Critério de Comparação, que o integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{x^2}\,dx$$

é convergente.

2. Vamos estudar a natureza do integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{1/x}\,dx$$

utilizando o Critério de Comparação.

Para todo o $x \in [1,+\infty[$ temos $\frac{1}{x} \in [0,1]$ e, portanto, temos

$$0 \leq \frac{1}{x} \leq \mathrm{e}^{1/x}\,. \tag{4.43}$$

Atendendo a que o integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$$

é divergente e a que é válida a desigualdade (4.43) podemos concluir, pelo Critério de Comparação, que o integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{1/x}\,dx$$

é divergente.

Na proposição seguinte estabelece-se o Critério de Comparação para integrais impróprios de 1ª espécie, impróprios no limite inferior de integração. A sua demonstração é deixada como exercício.

Proposição 4.112. *Sejam f e g duas funções definidas no intervalo $]-\infty,a]$, integráveis em $[t,a]$, para todo o $t \leq a$ e que verificam a condição*

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \,,$$

para todo o $x \in]-\infty,a]$.

Então verificam-se as condições seguintes:

(i) *se o integral impróprio $\int_{-\infty}^{a} g(x)\,dx$ é convergente, então também o integral impróprio $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ é convergente;*

(ii) *se o integral impróprio $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ é divergente, então também o integral impróprio $\int_{-\infty}^{a} g(x)\,dx$ é divergente.*

Demonstração: Exercício. ■

Exemplo 4.113. Vamos estudar a natureza do integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{-1} \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}\,dx$$

utilizando o Critério de Comparação.

Para todo o $x \in]-\infty,-1]$ temos

$$0 \leq \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \,. \tag{4.44}$$

Vamos estudar a natureza do integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx \tag{4.45}$$

utilizando a Definição 4.97.

Para todo o $t \in]-\infty,-1[$ temos

$$\begin{aligned} \int_{t}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx &= -\frac{1}{x}\Big]_t^{-1} \\ &= 1+\frac{1}{t} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right) = 1 \,.$$

Concluímos então, pela Definição 4.97, que o integral impróprio (4.45) é convergente.

Uma vez que o integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx$$

é convergente e que a desigualdade (4.44) se verifica podemos concluir, pelo Critério de Comparação, que o integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{-1} \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}\,dx$$

é convergente.

A proposição que apresentamos a seguir estabelece um critério para o estudo da natureza de integrais impróprios de 1ª espécie habitualmente designado **Critério de Comparação por Passagem ao Limite** ou simplesmente **Critério do Limite**. O enunciado que apresentamos refere-se a integrais impróprios de 1ª espécie, impróprios no limite superior de integração.

Proposição 4.114. *Sejam f e g duas funções definidas em $[a,+\infty[$ e integráveis em $[a,t]$, para todo o $t \geq a$. Admitamos que, para todo o $x \in [a,+\infty[$,*

$$f(x) \geq 0 \quad e \quad g(x) > 0 \,.$$

Seja

$$L := \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \,.$$

Então verificam-se as condições seguintes:

(i) *Se L é finito e não nulo, então os integrais impróprios*

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx \quad e \quad \int_{a}^{+\infty} g(x)\,dx$$

têm a mesma natureza.

(ii) *Se $L = 0$ e o integral impróprio $\int_{a}^{+\infty} g(x)\,dx$ é convergente, então o integral impróprio $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ é convergente.*

(iii) *Se $L = +\infty$ e o integral impróprio $\int_{a}^{+\infty} g(x)\,dx$ é divergente, então o integral impróprio $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ é divergente.*

Demonstração: Observemos em primeiro lugar que se L existe temos $L \geq 0$ ou $L = +\infty$.

(i) Admitamos que L é finito e não nulo. Então temos $L > 0$.

Uma vez que

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

temos que, para todo o $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que, para todo o $x \in [a,+\infty[$, se $x > M$, então

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon + L < \frac{f(x)}{g(x)} < \varepsilon + L \,.$$

Podemos então afirmar que, para todo o $\varepsilon > 0$, existe $x_0 \in [a,+\infty[$ tal que, para todo o $x > x_0$,

$$-\varepsilon + L < \frac{f(x)}{g(x)} < \varepsilon + L \,.$$

Tome-se $\varepsilon = L/2 > 0$.

Então existe $x_0 \in [a,+\infty[$ tal que, para todo o $x > x_0$,

$$\frac{L}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}L\,.$$

Uma vez que, por hipótese $g(x) > 0$, para todo o $x \in [a,+\infty[$, temos, para todo o $x > x_0$,

$$0 < \frac{L}{2}g(x) < f(x) < \frac{3}{2}Lg(x)\,. \tag{4.46}$$

De (4.46) resultam as desigualdades

$$0 < f(x) < \frac{3}{2}Lg(x)\,. \tag{4.47}$$

e

$$0 < \frac{L}{2}g(x) < f(x)\,. \tag{4.48}$$

Admitamos que o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

é convergente.

Pela Proposição 4.104 o integral impróprio $\int_{x_0}^{+\infty} g(x)\,dx$ é também convergente e, pela Proposição 4.102, o integral impróprio $\int_{x_0}^{+\infty} \frac{3}{2}Lg(x)\,dx$ é também convergente.

Atendendo à desigualdade (4.47) e ao Critério de Comparação concluímos então que o integral impróprio $\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ é convergente. Utilizando uma vez mais a Proposição 4.104 podemos concluir que o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

é também convergente.

Admitamos que o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

é divergente.

Pela Proposição 4.104 o integral impróprio $\int_{x_0}^{+\infty} g(x)\,dx$ é também divergente e, pela Proposição 4.102 o integral impróprio $\int_{x_0}^{+\infty} \frac{L}{2}g(x)\,dx$ é também divergente.

Atendendo à desigualdade (4.48) e ao Critério de Comparação concluímos então que o integral impróprio $\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ é também divergente. Utilizando uma vez mais a Proposição 4.104 concluímos então que o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

é também divergente.

Está então provado que se L é finito e não nulo, então os integrais impróprios

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

têm a mesma natureza.

(ii) Admitamos que se tem $L = 0$ e que o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

é convergente.

Uma vez que

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

temos que, para todo o $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que, para todo o $x \in [a,+\infty[$, se $x > M$, então

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \varepsilon\,.$$

Podemos então afirmar que, para todo o $\varepsilon > 0$, existe $x_0 \in [a,+\infty[$ tal que, para todo o $x > x_0$,

$$-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \varepsilon\,.$$

Tome-se $\varepsilon = 1 > 0$.

Então existe $x_0 \in [a,+\infty[$ tal que, para todo o $x > x_0$,

$$-1 < \frac{f(x)}{g(x)} < 1\,.$$

Atendendo a que, por hipótese, $g(x) > 0$ e $f(x) \geq 0$ temos, para todo o $x > x_0$,

$$0 \leq f(x) < g(x)\,. \tag{4.49}$$

Por hipótese o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

é convergente.

Pela Proposição 4.104 o integral impróprio $\int_{x_0}^{+\infty} g(x)\,dx$ é também convergente e, atendendo à desigualdade (4.49) e ao Critério de Comparação concluímos então que o integral impróprio $\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ é convergente. Utilizando uma vez mais a Proposição 4.104 podemos concluir que o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

é também convergente, como pretendíamos.

(iii) Admitamos que $L = +\infty$ e que o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

é divergente.

Uma vez que

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

temos que, para todo o $K > 0$, existe $M > 0$ tal que, para todo o $x \in [a, +\infty[$, se $x > M$, então

$$\frac{f(x)}{g(x)} > K\,.$$

Podemos então afirmar que, para todo o $K > 0$, existe $x_0 \in [a, +\infty[$ tal que, para todo o $x > x_0$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} > K\,.$$

Tome-se $K = 1 > 0$.

Então existe $x_0 \in [a, +\infty[$ tal que, para todo o $x > x_0$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 1\,.$$

Atendendo a que, por hipótese, $g(x) > 0$ e $f(x) \geq 0$ temos, para todo o $x > x_0$,

$$0 < g(x) < f(x)\,. \tag{4.50}$$

Por hipótese o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

é divergente.

Pela Proposição 4.104 o integral impróprio $\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} g(x)\,dx$ é também divergente e, atendendo à desigualdade (4.50) e ao Critério de Comparação concluímos então que o integral impróprio $\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ é divergente. Utilizando uma vez mais a Proposição 4.104 podemos concluir que o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

é também divergente, como pretendíamos.

■

Exemplo 4.115. 1. Vamos estudar a natureza do integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{2x^2+1}{x^3+2x+1}\,dx$$

utilizando o Critério de Comparação por Passagem ao Limite.

Temos, para todo o $x \in [1, +\infty[$,

$$\frac{2x^2+1}{x^3+2x+1} \geq 0\,.$$

Para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$ e, para todo o $x \in [1, +\infty[$,

$$\frac{1}{x^\alpha} > 0\,.$$

Seja

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{2x^2+1}{x^3+2x+1}}{\dfrac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^{2+\alpha}+x^\alpha}{x^3+2x+1}$$

Se $2+\alpha = 3 \iff \alpha = 1$, então $L = 2$ e, portanto, pelo Critério de Comparação por Passagem ao Limite, o integral impróprio dado tem a mesma natureza do integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx\,.$$

Uma vez que este último é divergente concluímos que o integral impróprio dado é divergente.

2. Vamos estudar a natureza do integral impróprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^4}\,dx$$

utilizando o Critério de Comparação por Passagem ao Limite.

Para todo o $x \in [1, +\infty[$ temos

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^4} \geq 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{x^4} > 0\,.$$

Como vimos, o integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4}\,dx$$

é convergente.

Temos

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^4}}{\dfrac{1}{x^4}} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^4}{1+x^4}\operatorname{arctg} x\right) = \frac{\pi}{2}$$

Atendendo a que L é finito e não nulo, o Critério de Comparação por Passagem ao Limite permite concluir que os integrais impróprios

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^4}\,dx \quad \text{e} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4}\,dx$$

têm a mesma natureza.

Uma vez que o integral impróprio
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4}\,dx$$
é convergente temos que o integral impróprio
$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^4}\,dx$$
é também convergente.

A Proposição 4.104 garante que o integral impróprio
$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^4}\,dx$$
é também convergente.

3. Consideremos o integral impróprio
$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{e^{2x}-1}\,dx\,.$$
Temos, para todo o $x \in [1,+\infty[$,
$$\frac{x}{e^{2x}-1} \geq 0\,.$$
Para estudar a natureza deste integral impróprio vamos utilizar o Critério de Comparação por Passagem ao Limite tomando como referência o integral impróprio
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx\,. \tag{4.51}$$
Para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$ e, para todo o $x \in [1,+\infty[$,
$$\frac{1}{x^\alpha} > 0\,.$$
Seja
$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{e^{2x}-1}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha+1}}{e^{2x}-1} = 0\,,$$
para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$.

Se $\alpha > 1$, o integral impróprio (4.51) é convergente e, uma vez que $L = 0$ concluímos, pelo Critério de Comparação por Passagem ao Limite, que o integral impróprio dado é também convergente.

4. Consideremos o integral impróprio
$$\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{x}\,dx\,.$$
Temos, para todo o $x \in [1,+\infty[$,
$$\frac{e^x}{x} \geq 0\,.$$

Para estudar a natureza deste integral impróprio vamos utilizar o Critério de Comparação por Passagem ao Limite tomando como referência o integral impróprio (4.51).

Seja
$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x}{x}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^{1-\alpha}} = +\infty\,,$$
para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$.

Se $\alpha \leq 1$, o integral impróprio (4.51) é divergente e, uma vez que $L = +\infty$ concluímos, pelo Critério de Comparação por Passagem ao Limite, que o integral impróprio dado é também divergente.

Apresentamos a seguir o enunciado do Critério do Limite para integrais de 1ª espécie, impróprios no limite inferior de integração. A sua demonstração é deixada como exercício.

Proposição 4.116. *Sejam f e g duas funções definidas em $]-\infty,a]$ e integráveis em $[t,a]$, para todo o $t \leq a$. Admitamos que, para todo o $x \in]-\infty,a]$,*
$$f(x) \geq 0 \quad e \quad g(x) > 0\,.$$
Seja
$$L := \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)}\,.$$
Então verificam-se as condições seguintes:

(i) Se L é finito e não nulo, então os integrais impróprios
$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \quad e \quad \int_{-\infty}^{a} g(x)\,dx$$
têm a mesma natureza.

(ii) Se $L = 0$ e o integral impróprio $\int_{-\infty}^{a} g(x)\,dx$ é convergente, então o integral impróprio $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ é convergente.

(iii) Se $L = +\infty$ e o integral impróprio $\int_{-\infty}^{a} g(x)\,dx$ é divergente, então o integral impróprio $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ é divergente.

Demonstração: Exercício. ■

Exemplo 4.117. Consideremos a função $f: \;]-\infty,0] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{e^x}{(x-1)^2}$, para todo o $x \in]-\infty,0]$. Observe-se que f é integrável em $[t,0]$, para todo o $t \in]-\infty,0]$ pelo que podemos considerar o integral impróprio de 1ª espécie, impróprio no limite inferior de integração,
$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{(x-1)^2}\,dx\,.$$

Vamos estudar a natureza deste integral impróprio utilizando o Critério de Comparação por Passagem ao Limite.

Para todo o $x \in]-\infty, 0]$ temos

$$\frac{e^x}{(x-1)^2} > 0$$

e

$$\frac{1}{(x-1)^2} > 0 \,.$$

Uma vez que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{e^x}{(x-1)^2}}{\dfrac{1}{(x-1)^2}} = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

e o integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x-1)^2}\, dx$$

é convergente, concluímos, pelo Critério de Comparação por Passagem ao Limite, que o integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{(x-1)^2}\, dx$$

é convergente.

Convergência absoluta Neste parágrafo vamos apresentar a definição de **convergência absoluta** para integrais impróprios de 1ª espécie e demonstrar que a convergência absoluta é condição suficiente para a convergência.

Definição 4.118. Seja f uma função definida em $[a, +\infty[$ e integrável em $[a, t]$, para todo o $t \in [a, +\infty[$.

Dizemos que **o integral impróprio**

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\, dx$$

é absolutamente convergente se o integral impróprio

$$\int_{a}^{+\infty} |f(x)|\, dx$$

é também convergente.

Exemplo 4.119. 1. Consideremos o integral impróprio

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\, dx \,.$$

Utilizando o Critério de Comparação podemos concluir que o integral impróprio

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^2}\, dx$$

é convergente.

Pela Definição 4.118 temos que o integral impróprio considerado é absolutamente convergente.

2. O integral impróprio

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{-1}{1+2x^4}\, dx$$

é absolutamente convergente porque o integral impróprio

$$\int_{-1}^{+\infty} \left| \frac{-1}{1+2x^4} \right| dx = \int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{1+2x^4}\, dx$$

é convergente.

De facto, por um lado, temos, para todo o $x \in [-1, +\infty[$, $\dfrac{1}{1+2x^4} \geq 0$ e $\dfrac{1}{x^4} > 0$ e, por outro lado,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{1+2x^4}}{\dfrac{1}{x^4}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{1+2x^4} = \frac{1}{2} \,.$$

Uma vez que o integral impróprio $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{x^4}\, dx$ é convergente, o Critério de Comparação por Passagem ao Limite permite concluir que o integral impróprio $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{1+2x^4}\, dx$ é convergente.

A proposição seguinte estabelece que, para integrais impróprios de 1ª espécie, impróprios no limite superior de integração, a convergência absoluta é uma condição suficiente para que o integral impróprio seja convergente.

Proposição 4.120. *Seja f uma função definida em $[a, +\infty[$ e integrável em $[a, t]$, para todo o $t \in [a, +\infty[$.*

Se o integral impróprio

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\, dx$$

é absolutamente convergente, então é também convergente.

Demonstração: Para todo o $x \in [a, +\infty[$ temos

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \Longleftrightarrow 0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)| \,. \tag{4.52}$$

Por hipótese o integral impróprio

$$\int_{a}^{+\infty} |f(x)|\, dx$$

é convergente e, pela Proposição 4.102, temos que o integral impróprio

$$\int_{a}^{+\infty} 2|f(x)|\, dx$$

é convergente.

Atendendo à desigualdade (4.52) podemos concluir, pelo Critério de Comparação que o integral impróprio

$$\int_{a}^{+\infty} (f(x) + |f(x)|)\, dx$$

é convergente.

Utilizando a Proposição 4.102 temos que o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)| - |f(x)|)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

é convergente, como pretendíamos.

■

Exemplo 4.121. O integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx$$

é convergente pois, como vimos no Exemplo 4.109, ele é absolutamente convergente.

Para integrais impróprios de 1ª espécie, impróprios no limite inferior de integração, podemos também definir convergência absoluta e estabelecer que a convergência absoluta é uma condição suficiente para a convergência do integral. A demonstração desse resultado é deixada como exercício.

Definição 4.122. Seja f uma função definida em $]-\infty,a]$ e integrável em $[t,a]$, para todo o $t \in]-\infty,a]$.

Dizemos que **o integral impróprio**

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$$

é absolutamente convergente se o integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{a} |f(x)|\,dx$$

é também convergente.

Proposição 4.123. *Seja f uma função definida em $]-\infty,a]$ e integrável em $[t,a]$, para todo o $t \in]-\infty,a]$.*

Se o integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$$

é absolutamente convergente, então é também convergente.

Demonstração: Exercício. ■

Exercícios 4.13

1. Determine a natureza dos integrais impróprios seguintes e, em caso de convergência, calcule o seu valor:

   (a) $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}}\,dx$;

   (b) $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \cos(3x)\,dx$;

   (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2+x^2}\,dx$, com $a \in \mathbb{R}^+$;

   (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t e^{-st}\,dt$, com $s \in \mathbb{R}^+$;

   (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{(4-x)^2}\,dx$;

   (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$;

   (g) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{4}{x^2-4}\,dx$;

   (h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x e^{-x^2}\,dx$;

   (i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$.

2. Faça um esboço do gráfico da função real de variável real F dada por

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

   onde f é a função real de variável real definida por

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{se} \quad |t| \le 1 \\ 0 & \text{se} \quad |t| > 1 \end{cases}$$

3. Determine a natureza dos integrais impróprios seguintes:

   (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{x^5}}\,dx$

   (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+2x+2}\,dx$

   (d) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\cos x + 2}{x}\,dx$

   (e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^5}\,dx$

4.3.2 Integrais impróprios de 2ª espécie

Vamos agora considerar o caso em que temos uma função f definida num intervalo limitado tal que f não está definida em pelo menos um ponto do intervalo ou é ilimitada no intervalo considerado. Obtemos então os **integrais impróprios de 2ª espécie**.

Vamos considerar em primeiro lugar o caso em que a função não está definida num dos extremos do intervalo considerado ou é ilimitada numa vizinhança de um dos extremos do intervalo de integração. Os casos em que a função integranda não está definida em pelo menos um ponto do interior do intervalo de integração ou é ilimitada em pelo menos um ponto do interior do intervalo de integração reduzem-se aos anteriores por decomposição do intervalo de integração em subintervalos.

Definição 4.124. Seja $f: \ ]a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em $[t,b]$, para todo o $a < t \le b$.

Consideremos a função $\varphi : \;]a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(t) = \int_t^b f(x)\,dx\,.$$

Se o limite

$$\lim_{t\to a^+} \varphi(t) = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx \tag{4.53}$$

existe e é finito dizemos que f **é integrável em sentido impróprio no intervalo** $]a,b]$ ou que **o integral impróprio**

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{4.54}$$

existe ou **é convergente** e escrevemos, por definição,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx\,.$$

Neste caso, ao valor do limite $\lim\limits_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$ chamamos **valor** do integral impróprio (4.54).

Se o limite (4.53) não existe ou é infinito dizemos que **o integral impróprio** (4.54) **não existe** ou **é divergente**.

Ao integral impróprio (4.54) chamamos **integral impróprio de 2ª espécie, impróprio no limite inferior de integração**.

A proposição que apresentamos a seguir estabelece que, no caso em que a função integranda não está definida no limite inferior do intervalo de integração mas é limitada nesse intervalo, o integral impróprio considerado é convergente. A demonstração desta proposição é deixada como exercício.

Proposição 4.125. *Seja $f : \;]a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em $[t,b]$, para todo o $a < t \leq b$.*

Se f é uma função limitada em $]a,b]$, então o integral impróprio $\int_a^b f(x)\,dx$ é convergente.

Exemplo 4.126. Utilizando a Proposição 4.125 podemos afirmar que o integral impróprio de 2ª espécie, impróprio no limite inferior de integração,

$$\int_0^1 \operatorname{sen}\frac{1}{x}\,dx$$

é convergente, uma vez que a função

$$\begin{array}{rccc} f: &]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} \end{array}$$

é limitada em $]0,1]$.

Nos exemplos que se seguem vamos utilizar a definição para estudar a natureza dos integrais impróprios considerados.

Exemplo 4.127. 1. A função $f : \;]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2+2x}}$ é uma função integrável em $[t,1]$, para todo o $0 < t \leq 1$.

Vamos estudar a natureza do integral impróprio de 2ª espécie

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x}}\,dx$$

utilizando a Definição 4.124.

Para todo o $0 < t \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x}}\,dx &= \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{-(x^2-2x+1)+1}}\,dx \\ &= \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx \\ &= \left.\operatorname{arcsen}(x-1)\right]_t^1 \\ &= -\operatorname{arcsen}(t-1) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x}}\,dx &= \lim_{t\to 0^+} (-\operatorname{arcsen}(t-1)) \\ &= -\operatorname{arcsen}(-1) = \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

Pela Definição 4.124 concluímos que o integral impróprio

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x}}\,dx$$

é convergente e tem o valor $\pi/2$.

Podemos então escrever
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x}}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

2. Vamos estudar, em função de $\alpha \in \mathbb{R}^+$, a natureza do integral impróprio

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx\,.$$

Note-se, em primeiro lugar, que, para todo o $\alpha \in \mathbb{R}^+$, a função $f : \;]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ é uma função integrável em $[t,1]$, para todo o $0 < t \leq 1$.

Para todo o $0 < t \leq 1$ temos

$$\int_t^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \ln x\Big]_t^1 & \text{se} \quad \alpha = 1 \\ \left.\dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_t^1 & \text{se} \quad \alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\ln t & \text{se} \quad \alpha = 1 \\ \dfrac{1}{-\alpha+1} - \dfrac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} & \text{se} \quad \alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \end{cases}$$

e, portanto,

$$\lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{se} \quad \alpha \in]0,1[\\ +\infty & \text{se} \quad \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Pela Definição 4.124 concluímos que o integral impróprio

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \text{é} \quad \begin{cases} \text{convergente} & \text{se} \quad \alpha \in]0,1[\\ \text{divergente} & \text{se} \quad \alpha \geq 1 \end{cases}$$

No caso em que $\alpha \in]0,1[$ podemos escrever

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}\,.$$

Definição 4.128. Seja $f : \; [a,b[\; \longrightarrow \; \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a,t]$, para todo o $a \leq t < b$.

Consideremos a função $\varphi : \; [a,b[\; \longrightarrow \; \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(t) = \int_a^t f(x)\,dx\,.$$

Se o limite

$$\lim_{t\to b^-} \varphi(t) = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx \tag{4.55}$$

existe e é finito dizemos que f **é integrável em sentido impróprio no intervalo** $[a,b[$ ou que **o integral impróprio**

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{4.56}$$

existe ou **é convergente** e escrevemos, por definição,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx\,.$$

Neste caso, ao valor do limite $\lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$ chamamos **valor** do integral impróprio (4.56).

Se o limite (4.55) não existe ou é infinito dizemos que **o integral impróprio** (4.56) **não existe** ou é **divergente**.

Ao integral impróprio (4.56) chamamos **integral impróprio de 2ª espécie, impróprio no limite superior de integração**.

Tal como para os integrais impróprios de 2ª espécie, impróprios no limite inferior de integração, prova-se que no caso em que a função não está definida no limite superior de integração mas é limitada no intervalo de integração, então o integral impróprio considerado é convergente. Temos então a proposição seguinte cuja demonstração é deixada como exercício.

Proposição 4.129. *Seja $f : \; [a,b[\; \longrightarrow \; \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a,t]$, para todo o $a \leq t < b$.*

Se f é uma função limitada em $[a,b[$, então o integral impróprio $\int_a^b f(x)\,dx$ é convergente.

Demonstração: Exercício. ■

Nos exemplos que se seguem vamos usar a Definição 4.128 estudar a natureza dos integrais impróprios considerados.

Exemplo 4.130. 1. A função $f : \; [0,1[\; \longrightarrow \; \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$ é uma função integrável em $[0,t]$, para todo o $0 \leq t < 1$.

Vamos estudar a natureza do integral impróprio de 2ª espécie

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{1-x}\,dx$$

utilizando a Definição 4.128.

Para todo o $0 \leq t < 1$, temos

$$\int_0^t \frac{\ln(1-x)}{1-x}\,dx = \left.\frac{1}{2}\ln^2(1-x)\right]_0^t = \frac{1}{2}\ln^2(1-t)$$

e, portanto,

$$\lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{\ln(1-x)}{1-x}\,dx = \lim_{t\to 1^-} \frac{1}{2}\ln^2(1-t) = +\infty\,.$$

Pela Definição 4.128 concluímos que o integral impróprio

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{1-x}\,dx$$

é divergente.

2. Vamos estudar, em função de $\alpha \in \mathbb{R}^+$, a natureza do integral impróprio

$$\int_0^2 \frac{1}{(2-x)^\alpha}\,dx\,.$$

Note-se, em primeiro lugar, que, para todo o $\alpha \in \mathbb{R}^+$, a função $f : \ [0,2[\ \longrightarrow \ \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{(2-x)^\alpha}$ é uma função integrável em $[0,t]$, para todo o $0 \le t < 2$.

Para todo o $0 \le t < 2$ temos

$$\int_0^t \frac{1}{(2-x)^\alpha}\,dx = \begin{cases} -\ln|2-x|\big]_0^t & \text{se} \quad \alpha = 1 \\ -\dfrac{(2-x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg]_0^t & \text{se} \quad \alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \ln 2 - \ln(2-t) & \text{se} \quad \alpha = 1 \\ \dfrac{(2-t)^{-\alpha+1}}{\alpha-1} + \dfrac{2^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} & \text{se} \quad \alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \end{cases}$$

e, portanto,

$$\lim_{t \to 2^-} \int_0^t \frac{1}{(2-x)^\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{se} \quad \alpha \in]0,1[\\ +\infty & \text{se} \quad \alpha \ge 1 \end{cases}$$

Pela Definição 4.128 concluímos que o integral impróprio

$$\int_0^2 \frac{1}{(2-x)^\alpha}\,dx \quad \text{é} \quad \begin{cases} \text{convergente} & \text{se} \quad \alpha \in]0,1[\\ \text{divergente} & \text{se} \quad \alpha \ge 1 \end{cases}$$

No caso em que $\alpha \in]0,1[$ podemos escrever

$$\int_0^2 \frac{1}{(2-x)^\alpha}\,dx = \frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha}\,.$$

Na proposição que se apresenta a seguir estabelece-se uma propriedade dos integrais impróprios de 2ª espécie, impróprios no limite superior de integração.

Proposição 4.131. *Sejam f e g duas funções definidas em $[a,b[$ e integráveis em $[a,t]$, para todo o $t \in [a,b[$.*

Então verificam-se as condições seguintes:

(i) se os integrais impróprios

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad e \quad \int_a^b g(x)\,dx$$

são ambos convergentes, então, para todos os $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, o integral impróprio

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx$$

é convergente;

(ii) se o integral impróprio $\int_a^b f(x)\,dx$ é divergente, então, para todo o $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, o integral impróprio $\int_a^b (\alpha f(x))\,dx$ é divergente.

Demonstração: (i) Atendendo à hipótese, existem e são finitos os limites

$$\lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

e

$$\lim_{t \to b^-} \int_a^t g(x)\,dx\,.$$

Atendendo a que, para todo o $t \in]a,b[$,

$$\int_a^t (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^t f(x)\,dx + \beta \int_a^t g(x)\,dx$$

temos que

$$\lim_{t \to b^-} \int_a^t (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \lim_{t \to b^-} \left(\alpha \int_a^t f(x)\,dx + \beta \int_a^t g(x)\,dx \right)\,.$$

A hipótese e as propriedades dos limites permitem então concluir que

$$\lim_{t \to b^-} \int_a^t (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx + \beta \lim_{t \to b^-} \int_a^t g(x)\,dx\,.$$

Atendendo à Definição 4.128 podemos então concluir que o integral impróprio

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx$$

é convergente, como pretendíamos.

(ii) Atendendo à hipótese, o limite

$$\lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

não existe ou é infinito.

Atendendo a que, para todo o $t \in]a,b[$,

$$\int_a^t (\alpha f(x))\,dx = \alpha \int_a^t f(x)\,dx$$

e à hipótese temos que o limite

$$\lim_{t \to b^-} \int_a^t (\alpha f(x))\,dx = \lim_{t \to b^-} \left(\alpha \int_a^t f(x)\,dx \right)$$

não existe ou é infinito.

A Definição 4.128 permite então concluir que o integral impróprio $\int_a^b (\alpha f(x))\,dx$ é divergente, como pretendíamos.

■

Na proposição que apresentamos a seguir estabelece-se uma propriedade análoga para os integrais impróprios de 2ª espécie, impróprios no limite inferior de integração. A demonstração desta proposição é deixada como exercício.

Proposição 4.132. *Sejam f e g duas funções definidas em $]a,b]$ e integráveis em $[t,b]$, para todo o $t\in]a,b]$.*

Então verificam-se as condições seguintes:

(i) se os integrais impróprios

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad e \quad \int_a^b g(x)\,dx$$

são ambos convergentes, então, para todos os $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, o integral impróprio

$$\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx$$

é convergente;

(ii) se o integral impróprio $\int_a^b f(x)\,dx$ é divergente, então para todo o $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ o integral impróprio $\int_a^b (\alpha f(x))\,dx$ é divergente.

Demonstração: Exercício. ■

Podemos, para os integrais impróprios de 2ª espécie, demonstrar resultados análogos aos que foram estabelecidos nas Proposições 4.104 e 4.105 para os integrais impróprios de 1ª espécie. Temos as proposições seguintes:

Proposição 4.133. *Sejam f uma função definida num intervalo $]a,b]$ e integrável em $[t,b]$, para todo o $a<t\le b$ e $a<b'<b$.*

Então os integrais impróprios $\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_a^{b'} f(x)\,dx$ têm a mesma natureza.

Demonstração: A proposição fica demonstrada se provarmos que o integral impróprio $\int_a^b f(x)\,dx$ é convergente se e só se o integral impróprio $\int_a^{b'} f(x)\,dx$ é convergente.

Para todo o $t<b'<b$ temos

$$\int_t^b f(x)\,dx=\int_t^{b'} f(x)\,dx+\int_{b'}^b f(x)\,dx\,.$$

Consequentemente

$$\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx=\lim_{t\to a^+}\left(\int_t^{b'} f(x)\,dx+\int_{b'}^b f(x)\,dx\right)$$

o que implica que o limite

$$\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx$$

existe e é finito se e só se o limite

$$\lim_{t\to a^+}\int_t^{b'} f(x)\,dx$$

existe e é finito.

Está então provado que o integral impróprio

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

é convergente se e só se o integral impróprio

$$\int_a^{b'} f(x)\,dx$$

é convergente, como pretendíamos.

■

A demonstração da proposição que se segue é deixada como exercício.

Proposição 4.134. *Sejam f uma função definida num intervalo $[a,b[$ e integrável em $[a,t]$, para todo o $a<t\le b$ e $a<a'<b$.*

Então os integrais impróprios $\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_{a'}^b f(x)\,dx$ têm a mesma natureza.

Demonstração: Exercício.

■

As Proposições 4.133 e 4.134 dão coerência à definição que se segue.

Definição 4.135. Seja f uma função definida em $]a,b[$, integrável em $[t,t']$, quaisquer que sejam $t,t'\in\mathbb{R}$ tais que $a<t<t'<b$.

Dizemos que f **é integrável em sentido impróprio no intervalo** $]a,b[$ ou que **o integral impróprio**

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{4.57}$$

é convergente se, para algum $c\in]a,b[$, os integrais impróprios

$$\int_a^c f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_c^b f(x)\,dx$$

são ambos convergentes.

Neste caso escrevemos

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

e ao valor do segundo membro da igualdade anterior chamamos **valor** do integral impróprio $\int_a^b f(x)\,dx$.

Se para algum $c \in]a,b[$, um dos integrais impróprios

$$\int_a^c f(x)\,dx \quad \text{ou} \quad \int_c^b f(x)\,dx$$

diverge dizemos que **o integral impróprio** (4.57) **não existe** ou **é divergente**.

Ao integral impróprio (4.57) chamamos **integral impróprio de 2ª espécie, impróprio em ambos os limites de integração**.

Exemplo 4.136. 1. A função $f:\ ]-1,1[\ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ é uma função integrável em $[t,t']$, para todos os t,t' tais que $-1<t<t'<1$.

Vamos estudar a natureza do integral impróprio de 2ª espécie

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2-1}\,dx$$

utilizando a Definição 4.135.

Para o efeito podemos considerar os integrais impróprios de 2ª espécie

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2-1}\,dx \quad \text{e} \quad \int_0^1 \frac{1}{x^2-1}\,dx\,.$$

Para todo o $-1<t\le 0$, temos

$$\begin{aligned}
\int_t^0 \frac{1}{x^2-1}\,dx &= \frac{1}{2}\int_t^0 \left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{|x-1|}{|x+1|}\Bigg]_t^0 \\
&= \ln\sqrt{\frac{|x-1|}{|x+1|}}\Bigg]_t^0 \\
&= -\ln\sqrt{\frac{|t-1|}{|t+1|}}
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\lim_{t\to -1^+}\int_t^0 \frac{1}{x^2-1}\,dx = \lim_{t\to -1^+} -\ln\sqrt{\frac{|t-1|}{|t+1|}} = -\infty\,.$$

Pela Definição 4.124 concluímos que o integral impróprio

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2-1}\,dx$$

é divergente.

A Definição 4.135 permite então concluir que o integral impróprio considerado é divergente.

2. A função $f:\ ]0,2[\ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$ é uma função integrável em $[t,t']$, para todos os t,t' tais que $0<t<t'<2$.

Vamos estudar a natureza do integral impróprio de 2ª espécie

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx$$

utilizando a Definição 4.135.

Para o efeito podemos considerar os integrais impróprios de 2ª espécie

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx \quad \text{e} \quad \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx\,.$$

Para todo o $0<t\le 1$, temos

$$\begin{aligned}
\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx &= \operatorname{arcsen}(x-1)]_t^1 \\
&= -\operatorname{arcsen}(t-1)
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx &= \lim_{t\to 0^+} -\operatorname{arcsen}(t-1) \\
&= \frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$

Pela Definição 4.124 concluímos que o integral impróprio

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx$$

é convergente e tem o valor $\dfrac{\pi}{2}$.

Para todo o $1\le t'<2$, temos

$$\begin{aligned}
\int_1^{t'} \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx &= \operatorname{arcsen}(x-1)]_1^{t'} \\
&= \operatorname{arcsen}(t'-1)
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{t'\to 2^-}\int_1^{t'} \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx &= \lim_{t'\to 2^-} \operatorname{arcsen}(t'-1) \\
&= \frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$

Pela Definição 4.128 concluímos que o integral impróprio

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx$$

é convergente e tem o valor $\dfrac{\pi}{2}$.

A Definição 4.135 permite então concluir que o integral impróprio considerado é convergente e tem o valor π.

Observação 4.137. 1. As Proposições 4.133 e 4.134 garantem que a natureza do integral impróprio (4.57) não depende do valor de $c\in]a,b[$ escolhido para estudar a natureza dos integrais impróprios $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_c^b f(x)\,dx$.

2. No caso de convergência do integral impróprio (4.57) podemos escrever

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{t'\to a^+}\int_{t'}^c f(x)\,dx+\lim_{t\to b^-}\int_c^t f(x)\,dx\,.$$

Uma vez que temos

$$\lim_{t'\to a^+}\int_{t'}^c f(x)\,dx=\lim_{\delta\to 0^+}\int_{a+\delta}^c f(x)\,dx$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{t\to b^-}\int_c^t f(x)\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^-}\int_c^{b+\varepsilon} f(x)\,dx\\ &= \lim_{\delta\to 0^+}\int_c^{b-\delta} f(x)\,dx\end{aligned}$$

se os limites

$$\lim_{t'\to a^+}\int_{t'}^c f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \lim_{t\to b^-}\int_c^t f(x)\,dx$$

existirem e forem finitos, temos

$$\begin{aligned}\lim_{t'\to a^+}\int_{t'}^c f(x)\,dx+\lim_{t\to b^-}\int_c^t f(x)\,dx &= \lim_{\delta\to 0^+}\int_{a+\delta}^c f(x)\,dx+\lim_{\delta\to 0^+}\int_c^{b-\delta} f(x)\,dx\\ &= \lim_{\delta\to 0^+}\left(\int_{a+\delta}^c f(x)\,dx+\int_c^{b-\delta} f(x)\,dx\right)\\ &= \lim_{\delta\to 0^+}\int_{a+\delta}^{b-\delta} f(x)\,dx\end{aligned}$$

Consequentemente, no caso de convergência, podemos escrever

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\delta\to 0^+}\int_{a+\delta}^{b-\delta} f(x)\,dx\,.$$

No caso em que o integral impróprio (4.57) é divergente a igualdade anterior não faz sentido.

Ao valor do limite

$$\lim_{\delta\to 0^+}\int_{a+\delta}^{b-\delta} f(x)\,dx\,,$$

quando existe e é finito, chamamos *Valor Principal de Cauchy* do integral e escrevemos

$$(VPC)\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\delta\to 0^+}\int_{a+\delta}^{b-\delta} f(x)\,dx\,.$$

É óbvio que se o integral impróprio $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ é convergente, o seu Valor Principal de Cauchy coincide com o valor do integral.

Exemplo 4.138. Como vimos no Exemplo 4.136 o integral impróprio $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx$ é convergente e tem o valor π.

Atendendo à Observação 4.137 temos que

$$(VPC)\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx=\pi\,.$$

Definição 4.139. Seja f uma função definida num intervalo $[a,b]$ excepto possivelmente para um ponto $c\in]a,b[$, integrável em $[a,t]$, para todo o $a\le t<c$ e integrável em $[t,b]$, para todo o $c<t\le b$.

Dizemos que f **é integrável em sentido impróprio em** $[a,b]$ ou que **o integral impróprio**

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{4.58}$$

é convergente se os integrais impróprios

$$\int_a^c f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_c^b f(x)\,dx$$

são ambos convergentes.

Neste caso escrevemos

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

e ao valor do segundo membro da igualdade anterior chamamos **valor** do integral impróprio $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Se um dos integrais impróprios

$$\int_a^c f(x)\,dx \quad \text{ou} \quad \int_c^b f(x)\,dx$$

diverge dizemos que **o integral impróprio** (4.58) **não existe** ou **é divergente**.

Ao integral impróprio (4.58) chamamos **integral impróprio de 2ª espécie, impróprio em** $c\in]a,b[$.

Exemplo 4.140. 1. A função $f:\ [0,2]\setminus\{1\}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^3}$ é uma função integrável em $[0,t']$, para todo o $0\le t'<1$ e é uma função integrável em $[t,2]$ para todo o $1<t\le 2$.

Vamos estudar a natureza do integral impróprio de 2ª espécie

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^3}\,dx$$

utilizando a Definição 4.139.

Para o efeito podemos considerar os integrais impróprios de 2ª espécie

$$\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^3}\,dx \quad \text{e} \quad \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^3}\,dx\,.$$

Para todo o $1 < t < 2$, temos

$$\begin{aligned}\int_t^2 \frac{1}{(x-1)^3}\,dx &= -\frac{1}{2(x-1)^2}\Big]_t^2\\ &= -\frac{1}{2}+\frac{1}{2(t-1)^2}\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\lim_{t\to 1^+}\int_t^2 \frac{1}{(x-1)^3}\,dx = \lim_{t\to 1^+}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2(t-1)^2}\right) = +\infty\,.$$

Pela Definição 4.124 concluímos que o integral impróprio

$$\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^3}\,dx$$

é divergente.

A Definição 4.139 permite então concluir que o integral impróprio considerado é divergente.

2. A função $f: \ [-1,1]\setminus\{0\} \ \longrightarrow \ \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln|x|$ é uma função integrável em $[-1,t']$, para todo o $-1 \le t' < 0$ e é uma função integrável em $[t,1]$ para todo o $0 < t \le 1$.

Vamos estudar a natureza do integral impróprio de 2ª espécie

$$\int_{-1}^1 ln|x|\,dx$$

utilizando a Definição 4.139.

Para o efeito podemos considerar os integrais impróprios de 2ª espécie

$$\int_{-1}^0 \ln|x|\,dx \quad \text{e} \quad \int_0^1 \ln|x|\,dx\,.$$

Para todo o $-1 < t < 0$ temos

$$\begin{aligned}\int_{-1}^t \ln|x|\,dx &= \int_{-1}^t \ln(-x)\,dx\\ &= x\ln(-x)-x]_{-1}^t\\ &= t\ln(-t)-t-1\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^-}\int_{-1}^t \ln|x|\,dx &= \lim_{t\to 0^-}(t\ln(-t)-t-1)\\ &= -1\,.\end{aligned}$$

Pela Definição 4.128 concluímos que o integral impróprio

$$\int_{-1}^0 \ln|x|\,dx$$

é convergente e tem o valor -1.

Para todo o $0 < t < 1$ temos

$$\begin{aligned}\int_t^1 \ln|x|\,dx &= \int_t^1 \ln x\,dx\\ &= x\ln x - x]_t^1\\ &= -t\ln t + t - 1\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \ln|x|\,dx &= \lim_{t\to 0^+}(-1-t\ln t+t)\\ &= -1\,.\end{aligned}$$

Pela Definição 4.124 concluímos que o integral impróprio

$$\int_0^1 \ln|x|\,dx$$

é convergente e tem o valor -1.

Utilizando a Definição 4.139 temos que o integral impróprio dado é convergente e podemos escrever

$$\int_{-1}^1 \ln|x|\,dx = \int_{-1}^0 \ln|x|\,dx + \int_0^1 \ln|x|\,dx = -2\,.$$

Podemos então dizer que o integral impróprio dado tem o valor -2.

Observação 4.141. No caso de convergência do integral impróprio (4.58) podemos escrever

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t'\to c^-}\int_a^{t'} f(x)\,dx + \lim_{t\to c^+}\int_t^b f(x)\,dx\,.$$

Uma vez que

$$\lim_{t\to c^+}\int_t^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0^+}\int_{c+\delta}^b f(x)\,dx$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{t'\to c^-}\int_a^{t'} f(x)\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^-}\int_a^{c+\varepsilon} f(x)\,dx\\ &= \lim_{\delta\to 0^+}\int_a^{c-\delta} f(x)\,dx\end{aligned}$$

se os limites

$$\lim_{t'\to c^-}\int_a^{t'} f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \lim_{t\to c^+}\int_t^b f(x)\,dx$$

existirem e forem finitos, temos

$$\begin{aligned}\lim_{t'\to c^-}\int_a^{t'} f(x)\,dx+\lim_{t\to c^+}\int_t^b f(x)\,dx &= \lim_{\delta\to 0^+}\int_a^{c-\delta} f(x)\,dx+\lim_{\delta\to 0^+}\int_{c+\delta}^b f(x)\,dx\\ &= \lim_{\delta\to 0^+}\left(\int_a^{c-\delta} f(x)\,dx+\int_{c+\delta}^b f(x)\,dx\right).\end{aligned}$$

Consequentemente, no caso de convergência, podemos escrever

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\delta\to 0^+}\left(\int_a^{c-\delta} f(x)\,dx+\int_{c+\delta}^b f(x)\,dx\right).$$

No caso em que o integral impróprio (4.58) é divergente a igualdade anterior não faz sentido.

Ao valor do limite

$$\lim_{\delta\to 0^+}\left(\int_a^{c-\delta} f(x)\,dx+\int_{c+\delta}^b f(x)\,dx\right),$$

quando existe e é finito, chamamos **Valor Principal de Cauchy** do integral e escrevemos

$$(VPC)\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\delta\to 0^+}\left(\int_a^{c-\delta} f(x)\,dx+\int_{c+\delta}^b f(x)\,dx\right).$$

É óbvio que se o integral impróprio $\int_a^b f(x)\,dx$ é convergente o seu Valor Principal de Cauchy coincide com o valor do integral.

Exemplo 4.142. 1. Como vimos no Exemplo 4.140, o integral impróprio $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^3}\,dx$ é divergente.

Uma vez que

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0^+}\left(\int_0^{1-\delta}\frac{1}{(x-1)^3}\,dx+\int_{1+\delta}^2\frac{1}{(x-1)^3}\,dx\right) &= \lim_{\delta\to 0^+}\left(-\frac{1}{2(x-1)^2}\Big]_0^{1-\delta}+\frac{-1}{2(x-1)^2}\Big]_{1+\delta}^2\right)\\ &= \lim_{\delta\to 0^+}\left(-\frac{1}{2\delta^2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\delta^2}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

temos que

$$(VPC)\int_0^2\frac{1}{(x-1)^3}\,dx=0.$$

2. Como vimos no Exemplo 4.140 o integral impróprio $\int_{-1}^1 \ln|x|\,dx$ é convergente e tem o valor -2.

Atendendo à Observação 4.141, temos

$$(VPC)\int_{-1}^1 \ln|x|\,dx=-2.$$

Estudo da convergência dos integrais impróprios de 2ª espécie Nas proposições que apresentamos a seguir estabelecem-se critérios que permitem estudar a natureza de um integral impróprio de 2ª espécie

sem recorrer à definição.

A proposição que apresentamos a seguir estabelece um critério para o estudo da natureza de integrais impróprios de 2ª espécie, impróprios no limite inferior de integração, que é habitualmente designado **Critério de Comparação**.

Proposição 4.143. *Sejam f e g duas funções definidas no intervalo $]a,b]$, integráveis em $[t,b]$, para todo o $t\in]a,b]$ e que verificam a condição*

$$0\le f(x)\le g(x),$$

para todo o $x\in]a,b]$.

Então verificam-se as condições seguintes:

(i) se o integral impróprio $\int_a^b g(x)\,dx$ é convergente, então também o integral impróprio $\int_a^b f(x)\,dx$ é convergente;

(ii) se o integral impróprio $\int_a^b f(x)\,dx$ é divergente, então também o integral impróprio $\int_a^b g(x)\,dx$ é divergente.

Demonstração: Consideremos a função φ definida por

$$\varphi(t)=\int_t^b f(x)\,dx,$$

para todo o $t\in]a,b[$.

Vamos ver que a função φ é monótona decrescente.

Sejam $t_1,t_2\in]a,b[$ tais que $t_1<t_2$ e vamos provar que $\varphi(t_1)\ge\varphi(t_2)$.

Uma vez que $t_1<t_2$ temos, pelas propriedades dos integrais definidos e pela definição de φ,

$$\begin{aligned}\varphi(t_1) &= \int_{t_1}^b f(x)\,dx\\ &= \int_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx+\int_{t_2}^b f(x)\,dx\\ &= \int_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx+\varphi(t_2).\end{aligned}$$

Como, por hipótese, f é não negativa em $]a,b]$, a Proposição 4.65 garante que

$$\int_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx\ge 0$$

o que permite concluir que $\varphi(t_1)\ge\varphi(t_2)$, como pretendíamos.

Uma vez que a função φ é monótona decrescente existe o limite

$$L_1:=\lim_{t\to a^+}\varphi(t)=\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx$$

podendo ser finito ou $+\infty$.

Analogamente se prova que existe o limite

$$L_2 := \lim_{t\to a^+} \int_t^b g(x)\,dx$$

podendo ser finito ou $+\infty$.

Como temos, por hipótese, $0 \le f(x) \le g(x)$, para todo o $x \in]a,b]$, o Corolário 4.66 permite concluir que, para todo o $t \in]a,b[$,

$$\int_t^b f(x)\,dx \le \int_t^b g(x)\,dx\,. \tag{4.59}$$

Uma vez que os limites L_1 e L_2 existem, a desigualdade 4.59 implica

$$L_1 \le L_2\,. \tag{4.60}$$

Tendo em vista a prova de (i) admitamos que o integral impróprio

$$\int_a^b g(x)\,dx$$

é convergente.

Pela Definição 4.124 temos que o limite L_2 existe e é finito.

A desigualdade 4.60 permite então concluir que o limite L_1 existe e é finito o que significa que o integral impróprio

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

é convergente, o que prova (i).

Tendo em vista a prova de (ii) admitamos que o integral impróprio

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

é divergente.

Pela Definição 4.124 e, atendendo a que o limite L_1 existe, temos que o limite L_1 é $+\infty$.

Uma vez que o limite L_2 existe, a desigualdade 4.60 permite então concluir que o limite L_2 é $+\infty$ o que significa que o integral impróprio

$$\int_a^b g(x)\,dx$$

é divergente, o que prova (ii).

■

Exemplo 4.144. 1. Utilizando o Critério de Comparação vamos estudar a natureza do integral impróprio

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\,dx\,.$$

Para todo o $x \in]0,1]$ temos

$$0 \le \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}}\,. \tag{4.61}$$

A função $g: \ ]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada $x \in]0,1]$ faz corresponder $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ é integrável em $[t,1]$, para todo o $t \in]0,1]$.

Uma vez que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx &= \lim_{t\to 0^+}\left(2\sqrt{x}\right]_t^1\Big)\\ &= \lim_{t\to 0^+}(2-2\sqrt{t})\\ &= 2\,,\end{aligned}$$

a Definição 4.124 permite concluir que o integral impróprio de 2ª espécie $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ é convergente.

Atendendo à desigualdade (4.61) podemos concluir, pelo Critério de Comparação, que o integral impróprio dado é convergente.

2. Vamos estudar a natureza do integral impróprio

$$\int_0^1 e^{1/x}\,dx$$

utilizando o Critério de Comparação.

Para todo o $x \in]0,1]$ temos

$$0 \le \frac{1}{x} \le e^{1/x}\,. \tag{4.62}$$

A função $g: \ ]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada $x \in]0,1]$ faz corresponder $g(x) = \dfrac{1}{x}$ é integrável em $[t,1]$, para todo o $t \in]0,1]$.

Uma vez que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{x}\,dx &= \lim_{t\to 0^+}\left(\ln x\right]_t^1\Big)\\ &= \lim_{t\to 0^+}(-\ln t)\\ &= +\infty\,,\end{aligned}$$

a Definição 4.124 permite concluir que o integral impróprio de 2ª espécie $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ é divergente.

Atendendo à desigualdade (4.62) podemos concluir, pelo Critério de Comparação, que o integral impróprio dado é divergente.

Na proposição seguinte estabelece-se o Critério de Comparação para integrais impróprios de 2ª espécie, impróprios no limite superior de integração. A sua demonstração é deixada como exercício.

Proposição 4.145. *Sejam f e g duas funções definidas no intervalo $[a,b[$, integráveis em $[a,t]$, para todo o $t \in [a,b[$ e que verificam a condição*

$$0 \le f(x) \le g(x)\,,$$

para todo o $x \in [a,b[$.

Então verificam-se as condições seguintes:

(i) se o integral impróprio $\int_a^b g(x)\,dx$ *é convergente, então também o integral impróprio* $\int_a^b f(x)\,dx$ *é convergente;*

(ii) se o integral impróprio $\int_a^b f(x)\,dx$ *é divergente, então também o integral impróprio* $\int_a^b g(x)\,dx$ *é divergente.*

Demonstração: Exercício. ∎

Exemplo 4.146.

Vamos estudar a natureza do integral impróprio

$$\int_{1/2}^{1} \operatorname{arcsen}\frac{x}{1-x}\,dx$$

utilizando o Critério de Comparação.

Para todo o $x \in \left[\frac{1}{2},1\right[$ temos

$$0 \le \frac{x}{1-x} \le \operatorname{arcsen}\frac{x}{1-x}\,. \tag{4.63}$$

A função $g: \left[\frac{1}{2},1\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x)=\frac{x}{1-x}$ é integrável em $\left[\frac{1}{2},t\right]$, para todo o $t \in \left[\frac{1}{2},1\right[$.

Uma vez que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 1^-}\int_{1/2}^{t}\frac{x}{1-x}\,dx &= \lim_{t\to 1^-}\int_{1/2}^{t}\left(-1+\frac{1}{1-x}\right)dx\\
&= \lim_{t\to 1^-}\left(-x-\ln(1-x)\right]_{1/2}^{t}\Big)\\
&= \lim_{t\to 1^-}\left(-t-\ln(1-t)+\frac{1}{2}+\ln\frac{1}{2}\right)\\
&= +\infty,
\end{aligned}$$

a Definição 4.128 permite concluir que o integral impróprio de 2ª espécie $\int_{1/2}^{1}\frac{x}{1-x}\,dx$ é divergente.

Atendendo à desigualdade (4.63) podemos concluir, pelo Critério de Comparação, que o integral impróprio dado é divergente.

A proposição que apresentamos a seguir estabelece um critério para o estudo da natureza de integrais impróprios de 2ª espécie habitualmente designado **Critério de Comparação por Passagem ao Limite** ou simplesmente **Critério do Limite**. O enunciado que apresentamos refere-se a integrais impróprios de 2ª espécie, impróprios no limite inferior de integração.

Proposição 4.147. *Sejam f e g duas funções definidas em $]a,b]$ e integráveis em $[t,b]$, para todo o $t \in]a,b]$. Admitamos que, para todo o $x \in]a,b]$,*

$$f(x) \ge 0 \quad e \quad g(x) > 0\,.$$

Seja

$$L := \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}\,.$$

Então verificam-se as condições seguintes:

(i) Se L é finito e não nulo, então os integrais impróprios

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad e \quad \int_a^b g(x)\,dx$$

têm a mesma natureza.

(ii) Se $L=0$ e o integral impróprio $\int_a^b g(x)\,dx$ *é convergente, então o integral impróprio* $\int_a^b f(x)\,dx$ *é convergente.*

(iii) Se $L=+\infty$ e o integral impróprio $\int_a^b f(x)\,dx$ *é divergente, então o integral impróprio* $\int_a^b g(x)\,dx$ *é divergente.*

Demonstração: Observemos em primeiro lugar que se L existir, temos $L \in \mathbb{R}_0^+$ ou $L=+\infty$.

(i) Admitamos que L é finito e não nulo. Então temos $L>0$.

Uma vez que

$$L = \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$$

temos que, para todo o $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que, para todo o $x \in]a,b]$, se $x \in]a,a+\delta[$, então

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-L\right| < \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon+L < \frac{f(x)}{g(x)} < \varepsilon+L\,.$$

Podemos então afirmar que, para todo o $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ e existe $x_0 \in]a,b]$ tal que, se $x \in]a,x_0]$, então

$$-\varepsilon+L < \frac{f(x)}{g(x)} < \varepsilon+L\,.$$

Tome-se $\varepsilon = L/2 > 0$.

Então existe $\delta>0$ e existe $x_0 \in]a,b]$ tal que, se $x \in]a,x_0]$, então

$$\frac{L}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}L\,.$$

Uma vez que, por hipótese $g(x)>0$, para todo o $x \in]a,b]$, temos, para todo o $x \in]a,x_0]$,

$$0 < \frac{L}{2}g(x) < f(x) < \frac{3}{2}Lg(x)\,. \tag{4.64}$$

De (4.64) resultam as desigualdades

$$0 < f(x) < \frac{3}{2}Lg(x)\,. \tag{4.65}$$

e

$$0 < \frac{L}{2} g(x) < f(x) \; . \tag{4.66}$$

Admitamos que o integral impróprio

$$\int_a^b g(x)\,dx$$

é convergente.

Pela Proposição 4.133 o integral impróprio $\displaystyle\int_a^{x_0} g(x)\,dx$ é também convergente e, pela Proposição 4.132, o integral impróprio $\displaystyle\int_a^{x_0} \frac{3}{2} L g(x)\,dx$ é também convergente.

Atendendo à desigualdade 4.65 e ao Critério de Comparação concluímos então que o integral impróprio $\displaystyle\int_a^{x_0} f(x)\,dx$ é convergente. Utilizando uma vez mais a Proposição 4.133 podemos concluir que o integral impróprio

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

é também convergente.

Admitamos que o integral impróprio

$$\int_a^b g(x)\,dx$$

é divergente.

Pela Proposição 4.133 o integral impróprio $\displaystyle\int_a^{x_0} g(x)\,dx$ é também divergente e, pela Proposição 4.132 o integral impróprio $\displaystyle\int_a^{x_0} \frac{L}{2} g(x)\,dx$ é também divergente.

Atendendo à desigualdade 4.66 e ao Critério de Comparação concluímos então que o integral impróprio $\displaystyle\int_a^{x_0} f(x)\,dx$ é também divergente. Utilizando uma vez mais a Proposição 4.133 concluímos então que o integral impróprio

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

é também divergente.

Está então provado que se L é finito e não nulo, então os integrais impróprios

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_a^b g(x)\,dx$$

têm a mesma natureza.

(ii) Admitamos que se tem $L = 0$ e que o integral impróprio

$$\int_a^b g(x)\,dx$$

é convergente.

Uma vez que

$$L = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

temos que, para todo o $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in]a,b]$, se $x \in]a, a+\delta[$, então

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \varepsilon \; .$$

Podemos então afirmar que, para todo o $\varepsilon > 0$, existe $x_0 \in]a,b]$ tal que, para todo o $x \in]a, x_0]$,

$$-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \varepsilon \; .$$

Tome-se $\varepsilon = 1 > 0$.

Então existe $x_0 \in]a,b]$ tal que, para todo o $x \in]a, x_0]$,

$$-1 < \frac{f(x)}{g(x)} < 1 \; .$$

Atendendo a que, por hipótese, $g(x) > 0$ e $f(x) \geq 0$ temos, para todo o $x \in]a, x_0]$,

$$0 \leq f(x) < g(x) \; . \tag{4.67}$$

Por hipótese o integral impróprio

$$\int_a^b g(x)\,dx$$

é convergente.

Pela Proposição 4.133 o integral impróprio $\displaystyle\int_a^{x_0} g(x)\,dx$ é também convergente e, atendendo à desigualdade (4.67) e ao Critério de Comparação concluímos então que o integral impróprio $\displaystyle\int_a^{x_0} f(x)\,dx$ é convergente. Utilizando uma vez mais a Proposição 4.133 podemos concluir que o integral impróprio

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

é também convergente, como pretendíamos.

(iii) Admitamos que $L = +\infty$ e que o integral impróprio

$$\int_a^b g(x)\,dx$$

é divergente.

Uma vez que

$$L = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

temos que, para todo o $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in]a,b]$, se $x \in]a, a+\delta[$, então

$$\frac{f(x)}{g(x)} > M \; .$$

Podemos então afirmar que, para todo o $M > 0$, existe $x_0 \in]a,b]$ tal que, para todo o $x \in]a,x_0]$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} > M \,.$$

Tome-se $M = 1 > 0$.

Então existe $x_0 \in]a,b]$ tal que, para todo o $x \in]a,x_0]$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 1 \,.$$

Atendendo a que, por hipótese, para todo o $x \in]a,b]$ se tem, $g(x) > 0$ e $f(x) \geq 0$ temos, para todo o $x \in]a,x_0]$,

$$0 < g(x) < f(x) \,. \tag{4.68}$$

Por hipótese o integral impróprio

$$\int_a^{x_0} g(x)\,dx$$

é divergente.

Pela Proposição 4.133 o integral impróprio $\displaystyle\int_a^{x_0} g(x)\,dx$ é também divergente e, atendendo à desigualdade (4.68) e ao Critério de Comparação concluímos então que o integral impróprio $\displaystyle\int_a^{x_0} f(x)\,dx$ é divergente. Utilizando uma vez mais a Proposição 4.133 podemos concluir que o integral impróprio

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

é também divergente, como pretendíamos.

■

Exemplo 4.148. 1. Consideremos o integral impróprio de 2ª espécie

$$\int_1^2 \frac{x}{x^3-1}\,dx \,.$$

Uma vez que, para todo o $x \in]1,2]$ temos

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} \geq 0$$

podemos estudar a natureza deste integral impróprio utilizando o Critério de Comparação por Passagem ao Limite tomando como referência o integral impróprio

$$\int_1^2 \frac{1}{x-1}\,dx \,.$$

Temos, para todo o $x \in]1,2]$,

$$\frac{1}{x-1} > 0 \,.$$

Uma vez que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 1^+} \int_t^2 \frac{1}{x-1}\,dx &= \lim_{t\to 1^+} \left(\ln(x-1)]_t^2 \right) \\
&= \lim_{t\to 1^+} \left(-\ln(t-1)\right) \\
&= +\infty,
\end{aligned}$$

concluímos, pela Definição 4.124, que o integral impróprio $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x-1}\,dx$ é divergente.

Atendendo a que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{x}{x^3-1}}{\frac{1}{x-1}} &= \lim_{x\to 1^+} \frac{x(x-1)}{x^3-1} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x^2+x+1} \\
&= \frac{1}{3},
\end{aligned}$$

o Critério de Comparação por Passagem ao Limite permite concluir que os integrais impróprios

$$\int_1^2 \frac{x}{x^3-1}\,dx \quad \text{e} \quad \int_1^2 \frac{1}{x-1}\,dx$$

têm a mesma natureza.

Consequentemente o integral impróprio dado é divergente.

2. Consideremos o integral impróprio de 2ª espécie

$$\int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx \,.$$

Uma vez que, para todo o $x \in]0,1]$ temos

$$\frac{e^{1/x}}{x^2} \geq 0$$

podemos estudar a natureza deste integral impróprio utilizando o Critério de Comparação por Passagem ao Limite tomando como referência o integral impróprio

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx \,.$$

Uma vez que, para todo o $x \in]0,1]$,

$$\frac{1}{x^2} > 0$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{x^2}\,dx &= \lim_{t\to 0^+}\left(\left[-\frac{1}{x}\right]_t^1\right)\\ &= \lim_{t\to 0^+}\left(-1+\frac{1}{t}\right)\\ &= +\infty\end{aligned}$$

podemos concluir, pela Definição 4.124, que o integral impróprio $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ é divergente.

Dado que

$$\begin{aligned}L = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{e^{1/x}}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x\to 0^+} e^{1/x}\\ &= +\infty\,.\end{aligned}$$

e o integral impróprio $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ é divergente, o Critério de Comparação por Passagem ao Limite permite concluir que o integral impróprio $\int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$ é divergente.

3. Consideremos o integral impróprio de 2ª espécie

$$\int_{-1}^0 \frac{1-\sqrt{-x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,.$$

Uma vez que, para todo o $x\in]-1,0]$, se tem

$$\frac{1-\sqrt{-x}}{\sqrt{1-x^2}}\geq 0$$

podemos estudar a natureza deste integral impróprio utilizando o Critério de Comparação por Passagem ao Limite tomando como referência o integral impróprio

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,.$$

Uma vez que, para todo o $x\in]-1,0]$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{t\to -1^+}\int_t^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \lim_{t\to -1^+}\left(\operatorname{arcsen} x]_t^0\right)\\ &= \lim_{t\to -1^+}(-\operatorname{arcsen} t)\\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

concluímos, pela Definição 4.124, que o integral impróprio $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ é convergente.

Dado que

$$\begin{aligned}L = \lim_{x\to -1^+}\frac{\frac{1-\sqrt{-x}}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} &= \lim_{x\to 0^+}(1-\sqrt{-x})\\ &= 0\,.\end{aligned}$$

e o integral impróprio $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ é convergente, o Critério de Comparação por Passagem ao Limite permite concluir que o integral impróprio $\int_{-1}^0 \frac{1-\sqrt{-x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ é convergente.

Apresentamos a seguir o enunciado do Critério de Comparação por Passagem ao Limite para integrais de 2ª espécie, impróprios no limite superior de integração. A sua demonstração é deixada como exercício.

Proposição 4.149. *Sejam f e g duas funções definidas em $[a,b[$ e integráveis em $[a,t]$, para todo o $t\in[a,b[$. Admitamos que, para todo o $x\in[a,b[$,*

$$f(x)\geq 0 \quad e \quad g(x)>0\,.$$

Seja

$$L := \lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}\,.$$

Então verificam-se as condições seguintes:

(i) Se L é finito e não nulo, então os integrais impróprios

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad e \quad \int_a^b g(x)\,dx$$

têm a mesma natureza.

(ii) Se $L=0$ e o integral impróprio $\int_a^b g(x)\,dx$ é convergente, então o integral impróprio $\int_a^b f(x)\,dx$ é convergente.

(iii) Se $L=+\infty$ e o integral impróprio $\int_a^b g(x)\,dx$ é divergente, então o integral impróprio $\int_a^b f(x)\,dx$ é divergente.

Demonstração: Exercício. ■

Exemplo 4.150. 1. Consideremos o integral impróprio de 2ª espécie

$$\int_{-1}^0 \frac{\cos x}{x^2}\,dx\,.$$

Uma vez que, para todo o $x \in [-1,0[$,
$$\frac{\cos x}{x^2} \geq 0$$
podemos estudar a natureza deste integral impróprio utilizando o Critério de Comparação por Passagem ao Limite tomando como referência o integral impróprio
$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\, dx\,.$$

Dado que, para todo o $x \in [-1,0[$,
$$\frac{1}{x^2} > 0$$
e
$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^-} \int_{-1}^{t} \frac{1}{x^2}\, dx &= \lim_{t\to 0^-} \left(\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{t} \right) \\
&= \lim_{t\to 0^-} \left(-1-\frac{1}{t}\right) \\
&= +\infty
\end{aligned}$$
concluímos, pela Definição 4.128, que o integral impróprio $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\, dx$ é divergente.

Como
$$\begin{aligned}
L = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{\cos x}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x\to 0^-} \cos x \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$
é finito e não nulo e o integral impróprio $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\, dx$ é divergente, o Critério de Comparação por Passagem ao Limite permite concluir que o integral impróprio $\int_{-1}^{0} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$ é divergente.

2. Consideremos o integral impróprio de 2ª espécie
$$\int_{0}^{1} \frac{1-x^3}{\sqrt{1-x^2}}\, dx\,.$$

Uma vez que, para todo o $x \in [0,1[$,
$$\frac{1-x^3}{\sqrt{1-x^2}} \geq 0$$
vamos estudar a natureza deste integral impróprio utilizando o Critério de Comparação por Passagem ao Limite tomando como referência o integral impróprio
$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx\,.$$

Uma vez que, para todo o $x \in [0,1[$,
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0$$
e
$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 1^-} \int_{0}^{t} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx &= \lim_{t\to 1^-} \left([\operatorname{arcsen} x]_0^t \right) \\
&= \lim_{t\to 1^-} (\operatorname{arcsen} t) \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$
concluímos, pela Definição 4.128, que o integral impróprio $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ é convergente.

Como
$$\begin{aligned}
L = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{1-x^3}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} &= \lim_{x\to 1^-} (1-x^3) \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$
e o integral impróprio $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ é convergente, o Critério de Comparação por Passagem ao Limite permite concluir que o integral impróprio $\int_{0}^{1} \frac{1-x^3}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ é convergente.

Convergência absoluta Tal como para os integrais impróprios de 1ª espécie vamos apresentar a definição de convergência absoluta para integrais impróprios de 2ª espécie impróprios no limite superior de integração e para integrais impróprios de 2ª espécie impróprios no limite inferior de integração. Também nestes casos podemos demonstrar que a convergência absoluta é condição suficiente para a convergência.

Definição 4.151. Seja f uma função definida em $[a,b[$ e integrável em $[a,t]$, para todo o $t \in [a,b[$.

Dizemos que o integral impróprio
$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx$$
é **absolutamente convergente** se o integral impróprio
$$\int_{a}^{b} |f(x)|\, dx$$
é também convergente.

Exemplo 4.152. Consideremos o integral impróprio
$$\int_{-1}^{0} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx\,.$$

Para todo o $x \in [-1,0[$ temos
$$0 \leq \left|\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{x^2}}\right| = \frac{|\operatorname{sen} x|}{\sqrt[3]{x^2}}\,.$$

Atendendo a que $0 \leq |\operatorname{sen} x| \leq 1$ temos, para todo o $x \in [-1,0[$,

$$0 \leq \left| \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{x^2}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \,. \tag{4.69}$$

Uma vez que o integral impróprio

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \, dx$$

é convergente e tendo em consideração a desigualdade (4.69), o Critério de Comparação permite concluir que o integral impróprio

$$\int_{-1}^{0} \left| \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{x^2}} \right| dx$$

é convergente.

Consequentemente o integral impróprio dado é absolutamente convergente.

A proposição seguinte estabelece que, para integrais impróprios de 2ª espécie, impróprios no limite superior de integração, a convergência absoluta é uma condição suficiente para que o integral impróprio seja convergente.

A sua demonstração é análoga à demonstração da Proposição 4.120 e é deixada como exercício.

Proposição 4.153. *Seja f uma função definida em $[a,b[$ e integrável em $[a,t]$, para todo o $t \in [a,b[$.*

Se o integral impróprio

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

é absolutamente convergente, então é também convergente.

Demonstração: Exercício. ∎

Exemplo 4.154. O integral impróprio

$$\int_{-1}^{0} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{x^2}} \, dx$$

é convergente pois, como vimos no Exemplo 4.152, é absolutamente convergente.

Para integrais impróprios de 2ª espécie, impróprios no limite inferior de integração, podemos também definir convergência absoluta e estabelecer que a convergência absoluta é uma condição suficiente para a convergência do integral. A demonstração desse resultado é deixada como exercício.

Definição 4.155. Seja f uma função definida em $]a,b]$ e integrável em $[t,b]$, para todo o $t \in]a,b]$.

Dizemos que o integral impróprio

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

é **absolutamente convergente** se o integral impróprio

$$\int_a^b |f(x)|\, dx$$

é também convergente.

Proposição 4.156. *Seja f uma função definida em $]a,b]$ e integrável em $[t,b]$, para todo o $t \in]a,b]$.*

Se o integral impróprio

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

é absolutamente convergente, então é também convergente.

Demonstração: Exercício. ∎

Exercícios 4.14

1. Calcule, caso sejam convergentes, os seguintes integrais impróprios:

   (a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$;

   (b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{cotg} x\, dx$;

   (c) $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{1}{9-x^2}\, dx$;

   (d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \ln x\, dx$;

   (e) $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{1}{|x|}\, dx$;

   (f) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}\, dx$;

   (g) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$;

   (h) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}}\, dx$.

2. Estude a natureza dos integrais impróprios seguintes:

   (a) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{0} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$.

   (b) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2-1}\, dx$.

   (c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\sqrt[5]{x}+1}{\sqrt[3]{x}+1}\, dx$.

   (d) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt[5]{x}}\, dx$.

   (e) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x}{1-x^4}\, dx$.

4.3.3 Integrais impróprios mistos ou de 3ª espécie

Vamos agora considerar o caso em que o intervalo de integração é ilimitado e a função integranda não está definida em pelo menos um ponto desse intervalo ou é ilimitada em pelo menos um ponto desse intervalo.

Obtemos então os integrais impróprios mistos ou de 3ª espécie.

Como veremos, o estudo da natureza dos integrais impróprios de 3ª espécie reduz-se ao estudo da natureza de integrais impróprios de 1ª espécie e de integrais impróprios de 2ª espécie. É evidente que para o estudo da natureza de cada um destes integrais podemos utilizar os critérios apresentados nos parágrafos anteriores.

Vamos em primeiro lugar considerar o caso em que o intervalo de integração é ilimitado e a função integranda não está definida ou é ilimitada no extremo finito do intervalo de integração. Os casos em que o intervalo de integração é ilimitado e a função integranda não está definida em pelo menos um ponto do interior do intervalo de integração ou é ilimitada em pelo menos um ponto do interior do intervalo de integração, reduzem-se aos casos anteriores dividindo o intervalo de integração em subintervalos.

Definição 4.157. Seja f uma função definida em $]-\infty,a[$, integrável em $[t,t']$, quaisquer que sejam $t,t'\in\mathbb{R}$ tais que $t<t'<a$.

Dizemos que f **é integrável em sentido impróprio no intervalo** $]-\infty,a[$ ou que **o integral impróprio**

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \tag{4.70}$$

é convergente se, para algum $c\in]-\infty,a[$, os integrais impróprios

$\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ (integral impróprio de 1ª espécie, impróprio no limite inferior de integração)

$\displaystyle\int_{c}^{a} f(x)\,dx$ (integral impróprio de 2ª espécie, impróprio no limite superior de integração)

são ambos convergentes.

Neste caso escrevemos

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx+\int_{c}^{a} f(x)\,dx$$

e ao valor do segundo membro da igualdade anterior chamamos **valor** do integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$.

Se para algum $c\in]-\infty,a[$, um dos integrais impróprios

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx \quad \text{ou} \quad \int_{c}^{a} f(x)\,dx$$

diverge dizemos que **o integral impróprio** (4.70) **não existe** ou **é divergente**.

Observação 4.158. Observemos que as Proposições 4.105 e 4.134 dão coerência à Definição 4.157 uma vez que garantem que a natureza do integral impróprio (4.70) não depende do ponto c escolhido para estudar a natureza dos integrais impróprios $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_{c}^{a} f(x)\,dx$.

Exemplo 4.159. Seja α um número real não nulo.

Consideremos a função $f:\ ]-\infty,1[\ \longrightarrow\ \mathbb{R}$ que a cada $x\in]-\infty,1[$ faz corresponder $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha}}$. Observe-se que f é integrável em $[t,t']$, para todos os $t,t'\in]-\infty,1[$ tais que $t<t'$.

Vamos estudar, em função de α, a natureza do integral impróprio de 3ª espécie

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{(x-1)^{\alpha}}\,dx$$

utilizando a Definição 4.157.

Para o efeito podemos considerar os integrais impróprios

$\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x-1)^{\alpha}}\,dx$ (integral impróprio de 1ª espécie, impróprio no limite inferior de integração)

e

$\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{(x-1)^{\alpha}}\,dx$ (integral impróprio de 2ª espécie, impróprio no limite superior de integração)

De acordo com a definição 4.157, se ambos forem convergentes, então o integral impróprio dado é convergente; se pelo menos um deles for divergente, então o integral impróprio dado é divergente.

Seja $\alpha=1$. Uma vez que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0}\frac{1}{x-1}\,dx &= \lim_{t\to-\infty}\left(\ln|x-1|]_t^0\right)\\ &= \lim_{t\to-\infty}(-\ln|t-1|)\\ &= -\infty\end{aligned}$$

temos, pela Definição 4.97, que o integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x-1}\,dx$ é divergente.

Utilizando a Definição 4.157 podemos então concluir que, se $\alpha=1$, o integral impróprio dado é divergente.

Suponhamos agora que $\alpha\neq1$.

Uma vez que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0}\frac{1}{(x-1)^{\alpha}}\,dx &= \lim_{t\to-\infty}\left(\left.\frac{(x-1)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_t^0\right)\\ &= \lim_{t\to-\infty}\left(\frac{(-1)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}-\frac{(t-1)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right)\\ &= \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha\in]-\infty,0[\cup]0,1[\\[2ex] \dfrac{(-1)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} & \text{se } \alpha>1\end{cases}\end{aligned}$$

concluímos, pela Definição 4.97, que o integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{(x-1)^{\alpha}}\,dx$ é divergente se $\alpha\in]-\infty,0[\cup]0,1[$ e é convergente se $\alpha>1$.

A Definição 4.157 permite concluir que se $\alpha\in]-\infty,0[\cup]0,1[$ o integral impróprio dado é divergente.

Para estabelecer a natureza do integral impróprio dado no caso em que $\alpha>1$ vamos estudar a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{(x-1)^{\alpha}}\,dx$.

Atendendo a que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 1^-}\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^\alpha}\,dx &= \lim_{t\to 1^-}\left(\left[\frac{(x-1)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_0^t\right)\\ &= \lim_{t\to 1^-}\left(\frac{(t-1)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}-\frac{(-1)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right)\\ &= +\infty\end{aligned}$$

temos, pela Definição 4.128 que, se $\alpha>1$, o integral impróprio $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(x-1)^\alpha}\,dx$ é divergente.

A Definição 4.157 permite então concluir que se $\alpha>1$ o integral impróprio dado é divergente.

Acabámos de provar que o integral impróprio $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(x-1)^\alpha}\,dx$ é divergente, para todo o $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

As Proposições 4.104 e 4.133 dão coerência à definição que apresentamos a seguir.

Definição 4.160. Seja f uma função definida em $]a,+\infty[$, integrável em $[t,t']$, quaisquer que sejam $t,t'\in\mathbb{R}$ tais que $a<t<t'$.

Dizemos que f **é integrável em sentido impróprio no intervalo** $]a,+\infty[$ ou que **o integral impróprio**

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \tag{4.71}$$

é convergente se, para algum $c\in]a,+\infty[$, os integrais impróprios

$\int_a^c f(x)\,dx$ (integral impróprio de 2ª espécie, impróprio no limite inferior de integração)

$\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ (integral impróprio de 1ª espécie, impróprio no limite superior de integração)

são ambos convergentes.

Neste caso escrevemos

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$$

e ao valor do segundo membro da igualdade anterior chamamos **valor** do integral impróprio $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Se para algum $c\in]a,+\infty[$, um dos integrais impróprios

$$\int_a^c f(x)\,dx \quad \text{ou} \quad \int_c^{+\infty} f(x)\,dx$$

diverge dizemos que **o integral impróprio** (4.71) **não existe** ou **é divergente**.

Exemplo 4.161. Consideremos a função $f:\ ]0,+\infty[\ \longrightarrow\ \mathbb{R}$ que a cada $x\in]0,+\infty[$ faz corresponder $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. Observe-se que f é integrável em $[t,t']$, para todos os $t,t'\in]0,+\infty[$ tais que $t<t'$.

Vamos estudar a natureza do integral impróprio de 3ª espécie

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\,dx$$

utilizando a Definição 4.160.

Podemos então estudar os integrais impróprios

$\int_0^1 \frac{\ln x}{x}\,dx$ (integral impróprio de 2ª espécie, impróprio no limite inferior de integração)

e

$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$ (integral impróprio de 1ª espécie, impróprio no limite superior de integração)

De acordo com a Definição 4.160, se ambos forem convergentes, então o integral impróprio dado é convergente; se pelo menos um deles for divergente, então o integral impróprio dado é divergente.

Uma vez que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{\ln x}{x}\,dx &= \lim_{t\to 0^+}\left(\left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_t^1\right)\\ &= \lim_{t\to 0^+}\left(-\frac{\ln^2 t}{2}\right)\\ &= +\infty\end{aligned}$$

concluímos, pela Definição 4.124, que o integral impróprio $\int_0^1 \frac{\ln x}{x}\,dx$ é divergente.

A Definição 4.160 permite concluir que o integral impróprio dado é divergente.

Definição 4.162. Seja f uma função definida em $]-\infty,a]$, excepto possivelmente num ponto $c\in]-\infty,a[$, integrável em $[t,t']$, para todos os $t,t'\in\mathbb{R}$ tais que $t<t'<c$ e integrável em $[t'',a]$, para todo o $t''\in]c,a[$.

Dizemos que f **é integrável em sentido impróprio no intervalo** $]-\infty,a[$ ou que **o integral impróprio**

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx \tag{4.72}$$

é convergente se para algum $c'\in]-\infty,c[$ os integrais impróprios

$\int_{-\infty}^{c'} f(x)\,dx$ (integral impróprio de 1ª espécie, impróprio no limite inferior de integração)

$\int_{c'}^{c} f(x)\,dx$ (integral impróprio de 2ª espécie, impróprio no limite superior de integração)

$\int_{c}^{a} f(x)\,dx$ (integral impróprio de 2ª espécie, impróprio no limite inferior de integração)

são todos convergentes.

Neste caso escrevemos

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{c'} f(x)\,dx+\int_{c'}^{c} f(x)\,dx+\int_{c}^{a} f(x)\,dx$$

e ao valor do segundo membro da igualdade anterior chamamos **valor** do integral impróprio $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$.

Se para algum $c' \in]-\infty, c[$, um dos integrais impróprios

$$\int_{-\infty}^{c'} f(x)\,dx \quad \text{ou} \quad \int_{c'}^{c} f(x)\,dx \quad \text{ou} \quad \int_{c}^{a} f(x)\,dx$$

diverge dizemos que **o integral impróprio** (4.72) **não existe** ou **é divergente**.

Observação 4.163. As Proposições 4.105 e 4.134 dão coerência à Definição 4.162 uma vez que garantem que a natureza do integral impróprio (4.72) não depende do ponto c' escolhido para estudar a natureza dos integrais impróprios $\int_{-\infty}^{c'} f(x)\,dx$ e $\int_{c'}^{c} f(x)\,dx$.

Exemplo 4.164. Seja α um número real positivo.

Consideremos a função $f: \;]-\infty,1[\cup]1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada $x \in]-\infty,1[\cup]1,2]$ faz corresponder $f(x) = \dfrac{1}{|x-1|^{\alpha}}$. Note-se que f é integrável em $[t,t']$, para todos os $t,t' \in \mathbb{R}$ tais que $t < t' < 1$ e integrável em $[t'',2]$, para todo o $t'' \in]1,2[$.

Vamos estudar, em função de $\alpha \in \mathbb{R}^+$, a natureza do integral impróprio de 3ª espécie

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{|1-x|^{\alpha}}\,dx$$

utilizando a Definição 4.162.

Para o efeito podemos considerar os integrais impróprios

$\int_{-\infty}^{0} \dfrac{1}{|1-x|^{\alpha}}\,dx$ (integral impróprio de 1ª espécie, impróprio no limite inferior de integração)

$\int_{0}^{1} \dfrac{1}{|1-x|^{\alpha}}\,dx$ (integral impróprio de 2ª espécie, impróprio no limite superior de integração)

e

$\int_{1}^{2} \dfrac{1}{|1-x|^{\alpha}}\,dx$ (integral impróprio de 2ª espécie, impróprio no limite inferior de integração)

De acordo com a definição 4.162, se estes três integrais impróprios forem convergentes, então o integral impróprio dado é convergente; se pelo menos um deles for divergente, então o integral impróprio dado é divergente.

Suponhamos que $\alpha = 1$.

Vamos estudar a natureza do integral impróprio $\int_{-\infty}^{0} \dfrac{1}{|1-x|}\,dx$.

Uma vez que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{1}{|1-x|}\,dx &= \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{1}{1-x}\,dx \\
&= \lim_{t\to-\infty} \left(-\ln(1-x) \right]_{t}^{0} \Big) \\
&= \lim_{t\to-\infty} \ln(1-t) \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

a Definição 4.97 permite concluir que o integral impróprio $\int_{-\infty}^{0} \dfrac{1}{|1-x|}\,dx$ é divergente.

Pela Definição 4.162 temos que, se $\alpha = 1$, então o integral impróprio dado é divergente.

Suponhamos que se tem $\alpha \neq 1$.

Estudemos em primeiro lugar o integral impróprio $\int_{-\infty}^{0} \dfrac{1}{|1-x|^{\alpha}}\,dx$. Uma vez que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{1}{|1-x|^{\alpha}}\,dx &= \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{1}{(1-x)^{\alpha}}\,dx \\
&= \lim_{t\to-\infty} \left(\left. \frac{-(1-x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_{t}^{0} \right) \\
&= \lim_{t\to-\infty} \left(-\frac{1}{-\alpha+1} + \frac{(1-t)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right) \\
&= \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad \alpha \in]0,1[\\[2ex] -\dfrac{1}{-\alpha+1} & \text{se} \quad \alpha > 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

concluímos, pela Definição 4.97, que o integral impróprio $\int_{-\infty}^{0} \dfrac{1}{|1-x|^{\alpha}}\,dx$ é divergente se $\alpha \in]0,1[$ e é convergente se $\alpha > 1$.

A Definição 4.162 permite concluir que se $\alpha \in]0,1[$ o integral impróprio dado é divergente.

Uma vez que para $\alpha > 1$ o integral impróprio $\int_{-\infty}^{0} \dfrac{1}{|1-x|^{\alpha}}\,dx$ é convergente, nada podemos concluir sobre a natureza do integral impróprio dado.

Vamos então estudar, para $\alpha > 1$, a natureza do integral impróprio $\int_{0}^{1} \dfrac{1}{|1-x|^{\alpha}}\,dx$.

Atendendo a que, para $\alpha > 1$,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to1^-} \int_{0}^{t} \frac{1}{|1-x|^{\alpha}}\,dx &= \lim_{t\to1^-} \int_{0}^{t} \frac{1}{(1-x)^{\alpha}}\,dx \\
&= \lim_{t\to1^-} \left(\left. -\frac{(1-x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_{0}^{t} \right) \\
&= \lim_{t\to1^-} \left(-\frac{(1-t)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} + \frac{1}{-\alpha+1} \right) \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

concluímos, pela Definição 4.128, que o integral impróprio $\int_{0}^{1} \dfrac{1}{|1-x|^{\alpha}}\,dx$ é divergente.

A Definição 4.162 permite concluir que, se $\alpha > 1$, o integral impróprio dado é divergente.

As Proposições 4.104 e 4.133 dão coerência à definição que apresentamos a seguir.

Definição 4.165. Seja f uma função definida em $[a,+\infty[$, excepto possivelmente num ponto $c \in]a,+\infty[$, integrável em $[t,t']$, para todos os $t,t' \in \mathbb{R}$ tais que $c < t < t'$ e integrável em $[a,t'']$, para todo o $t'' \in]a,c[$.

Dizemos que f **é integrável em sentido impróprio no intervalo** $[a,+\infty[$ ou que **o integral impróprio**

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx \qquad (4.73)$$

é convergente se para algum $c' \in]c,+\infty[$ os integrais impróprios

$\int_a^c f(x)\,dx$ (integral impróprio de 2ª espécie, impróprio no limite superior de integração)

$\int_c^{c'} f(x)\,dx$ (integral impróprio de 2ª espécie, impróprio no limite inferior de integração)

$\int_{c'}^{+\infty} f(x)\,dx$ (integral impróprio de 1ª espécie, impróprio no limite superior de integração)

são todos convergentes.

Neste caso escrevemos

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^{c'} f(x)\,dx + \int_{c'}^{+\infty} f(x)\,dx$$

e ao valor do segundo membro da igualdade anterior chamamos **valor** do integral impróprio $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Se para algum $c' \in]c,+\infty[$, um dos integrais impróprios

$$\int_a^c f(x)\,dx \quad \text{ou} \quad \int_c^{c'} f(x)\,dx \quad \text{ou} \quad \int_{c'}^{+\infty} f(x)\,dx$$

diverge dizemos que **o integral impróprio** (4.73) **não existe** ou **é divergente**.

Exemplo 4.166. Consideremos a função $f: [0,2[\cup]2,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada $x \in [0,2[\cup]2,+\infty[$ faz corresponder $f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{(x-2)^2}$ integrável em $[0,t'']$, para todo o $t'' \in]0,2[$ e integrável em $[t,t']$, para todos os $t,t' \in \mathbb{R}$ tais que $2 < t < t'$.

Vamos estudar a natureza do integral impróprio de 3ª espécie

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{(x-2)^2}\,dx$$

utilizando a Definição 4.165.

Para o efeito podemos considerar os integrais impróprios

$\int_0^2 \frac{\cos^2 x}{(x-2)^2}\,dx$ (integral impróprio de 2ª espécie, impróprio no limite superior de integração)

$\int_2^3 \frac{\cos^2 x}{(x-2)^2}\,dx$ (integral impróprio de 2ª espécie, impróprio no limite inferior de integração)

e

$\int_3^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{(x-2)^2}\,dx$ (integral impróprio de 1ª espécie, impróprio no limite superior de integração)

De acordo com a definição 4.165, se estes três integrais impróprios forem convergentes, então o integral impróprio dado é convergente; se pelo menos um deles for divergente, então o integral impróprio dado é divergente.

Vamos estudar, em primeiro lugar, a natureza do integral impróprio $\int_0^2 \frac{\cos^2 x}{(x-2)^2}\,dx$.

Uma vez que, para todo o $x \in [0,2[$, $\dfrac{\cos^2 x}{(x-2)^2} \geq 0$ e $\dfrac{1}{(x-2)^2} > 0$ e

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-} \frac{\dfrac{\cos^2 x}{(x-2)^2}}{\dfrac{1}{(x-2)^2}} &= \lim_{x\to 2^-} \cos^2 x \\ &= \cos^2 2 \end{aligned}$$

o Critério de Comparação por Passagem ao Limite permite concluir que os integrais impróprios

$$\int_0^2 \frac{\cos^2 x}{(x-2)^2}\,dx \quad \text{e} \quad \int_0^2 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$$

têm a mesma natureza. Uma vez que o integral impróprio $\int_0^2 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$ é divergente, concluímos que o integral impróprio $\int_0^2 \frac{\cos^2 x}{(x-2)^2}\,dx$ é também divergente.

A Definição 4.165 permite então concluir que o integral impróprio dado é divergente.

Exercícios 4.15

1. Mostre que o integral impróprio
$$\int_0^1 \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx$$
diverge.

2. Calcule, caso sejam convergentes, os seguintes integrais impróprios:
   (a) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$;
   (b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$;
   (c) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

3. Estude a natureza dos seguintes integrais impróprios:
   (a) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(3x)}{x^3}\,dx$;
   (b) $\int_0^1 \frac{1}{\ln(1+\sqrt{x})}\,dx$;
   (c) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$;
   (d) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos\sqrt{x}\,dx$;
   (e) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4+3x+2}}\,dx$;

(f) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x\ln(x+1)}\,dx$;

(g) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\,dx$;

(h) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^3+2x+1}\,dx$;

(i) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-x}}\,dx$;

(j) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,dx$;

(k) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{x^3}\,dx$;

(l) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$.

4. Estude, em função de $k\in\mathbb{R}$, a natureza do seguinte integral impróprio

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^k\ln x}\,dx$$

5. Seja f uma função real contínua em $[0,t]$, para todo o $t>0$, e suponha que existem constantes $M>0$ e $\gamma>0$ tais que, para todo $t\geq 0$ se tem $|f(t)|\leq M\mathrm{e}^{\gamma t}$. Prove que o integral impróprio

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)\,dt$$

é convergente para $s>\gamma$.

Soluções dos exercícios propostos

Exercícios 4.1

1. $x^4-\frac{5}{2}x^2+9x+C,\ C\in\mathbb{R}$;
2. $\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{7}}+C,\ C\in\mathbb{R}$;
3. $-2\sqrt{1-x}+C,\ C\in\mathbb{R}$;
4. $\frac{\sin^4 x}{4}+C,\ C\in\mathbb{R}$;
5. $2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+C,\ C\in\mathbb{R}$;
6. $\frac{(\ln x)^4}{4}+C,\ C\in\mathbb{R}$;
7. $\frac{2x^2\sqrt{x}}{5}+x+C,\ C\in\mathbb{R}$;
8. $\operatorname{arcsen}\frac{x}{2\sqrt{2}}+C,\ C\in\mathbb{R}$;
9. $\operatorname{tg} x-x+C,\ C\in\mathbb{R}$;
10. ln —ln x— $+C,\ C\in\mathbb{R}$;
11. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C,\ C\in\mathbb{R}$;
12. $\mathrm{e}^{\operatorname{arcsen} x}+C,\ C\in\mathbb{R}$.

Exercícios 4.2

1. $x^2\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x+C,\ C\in\mathbb{R}$
2. $-x^3\cos x+3x^2\operatorname{sen} x+6x\cos x-6\operatorname{sen} x+C,\ C\in\mathbb{R}$
3. $x\frac{3^x}{\ln 3}-\frac{3^x}{(\ln 3)^2}+C,\ C\in\mathbb{R}$
4. $-\frac{x}{2+2x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+C,\ C\in\mathbb{R}$
5. $\frac{1}{2}\left(x\cos(\ln x)+x\operatorname{sen}(\ln x)\right)+C,\ C\in\mathbb{R}$
6. $x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C,\ C\in\mathbb{R}$;
7. $x\ln x-x+C,\ C\in\mathbb{R}$;
8. $\frac{1}{2}x^2\operatorname{arcsen} x^2+\frac{1}{2}\sqrt{(1-x^4)}+C,\ C\in\mathbb{R}$.

Exercícios 4.3

1. $\frac{\sqrt{x^2-25}}{25x}+C,\ C\in\mathbb{R}$;

2. $\frac{(2x+3)^2\sqrt{2x+3}}{10} - \frac{(2x+3)\sqrt{2x+3}}{2} + C,\ C \in \mathbb{R};$

3. $\frac{1}{4}\left(\frac{(2x+5)^{12}}{12} - \frac{5(2x+5)^{11}}{11}\right) + C,\ C \in \mathbb{R};$

4. $\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right| + C,\ C \in \mathbb{R};$

5. $2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\mathrm{e}^x-1} + C,\ C \in \mathbb{R};$

6. $\ln x - \ln 2 \ln|\ln x + \ln 2| + C,\ C \in \mathbb{R}$ (a 1a. parcela poderia ser $\ln(2x)$ — Porquê?;

7. $\frac{2}{5}(\cos^2 x - 5)\sqrt{\cos x} + C,\ C \in \mathbb{R};$

8. $\frac{9}{2}\arcsen\frac{x-1}{3} + \frac{(x-1)\sqrt{9-(x-1)^2}}{2} + C,\ C \in \mathbb{R};$

9. $\frac{13}{2}\mathrm{arctg}(3x+1) + \frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2} + C,\ C \in \mathbb{R};$

10. $-\mathrm{tg}\frac{x}{2} + x + C,\ C \in \mathbb{R};$

11. $\frac{1}{6}\ln\frac{\cos^2 x - \cos x + 1}{(\cos x + 1)^2} - \frac{1\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\frac{2\cos x - 1}{\sqrt{3}} + C,\ C \in \mathbb{R};$

12. $\ln\left|\frac{\mathrm{tg}(x/2)}{\mathrm{tg}(x/2)+1}\right| + C,\ C \in \mathbb{R};$

13. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{tg}(x/2)\right) + C,\ C \in \mathbb{R};$

Exercícios 4.4

1. $\frac{3}{2}\ln|x-1| - 7\ln|x-2| + \frac{13}{2}\ln|x-3| + C,\ C \in \mathbb{R};$

2. $\frac{3}{10}\ln|x+\frac{1}{2}| + \frac{1}{10}\ln(x^2+1) + \frac{2}{5}\mathrm{arctg}\,x + C,\ C \in \mathbb{R};$

3. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 3\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2x^2+2} + C,\ C \in \mathbb{R}$

4. $\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C,\ C \in \mathbb{R}$

5. $x + \frac{19}{4}\ln|x-3| + \frac{1}{4}\ln|x+1| + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Exercícios 4.5

1. (a) $-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{3\cos^2 x} + C,\ C \in \mathbb{R};$

   (b) $\frac{1}{10}\left(-\mathrm{e}^{3x}\cos x + 3\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{sen}\,x\right) + C,\ C \in \mathbb{R};$

   (c) $\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x + C,\ C \in \mathbb{R};$

   (d) $\frac{a^2}{a^2+b^2}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a^2}\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{sen}(bx)\right) + C,\ C \in \mathbb{R};$

   (e) $\frac{1}{4}\mathrm{arctg}\left(x+\frac{1}{2}\right) + C,\ C \in \mathbb{R};$

   (f) $\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C,\ C \in \mathbb{R};$

   (g) $x\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}(\mathrm{arctg}\,x)^2 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C,\ C \in \mathbb{R};$

   (h) $\frac{1}{2}\mathrm{sen}\left(x^2\right) + C,\ C \in \mathbb{R};$

   (i) $\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\mathrm{sen}(2\theta) + C,\ C \in \mathbb{R};$

   (j) $\frac{1}{4}\mathrm{sen}(2x) - \frac{1}{16}\mathrm{sen}(8x) + C,\ C \in \mathbb{R};$

   (k) $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(2\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C,\ C \in \mathbb{R};$

   (l) $-\frac{1}{3}\cos^6\theta + C,\ C \in \mathbb{R};$

   (m) $-\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C,\ C \in \mathbb{R};$

   (n) $\sqrt{2}\ln\left|\mathrm{cosec}\frac{x}{2} - \mathrm{cotg}\frac{x}{2}\right| + C,\ C \in \mathbb{R};$

   (o) $2\arcsen\frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{x+1}{2}\sqrt{-x^2-2x+1} + 2\sqrt{-x^2-2x+1} + C,\ C \in \mathbb{R};$

   (p) $-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x^2+4}{x^2}} + C,\ C \in \mathbb{R};$

   (q) $-\mathrm{cotg}\,x - \frac{\mathrm{cotg}^3 x}{3} + C,\ C \in \mathbb{R};$

   (r) $-\frac{1}{14}\cos(7x) + \frac{1}{2}\cos x + C,\ C \in \mathbb{R};$

   (s) $\frac{1}{12}\mathrm{sen}(6x) + \frac{1}{8}\mathrm{sen}(4x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$

2. $f(x) = \cos x + 1.$

3. (a) $\frac{2}{1-\sqrt{x}} + C,\ C \in \mathbb{R};$

   (b) $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,\mathrm{e}^{2x} + C,\ C \in \mathbb{R};$

   (c) $x - \frac{1}{2}\ln(\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x + 3) - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{e}^x+1}{\sqrt{2}}\right) + C,\ C \in \mathbb{R};$

   (d) $\frac{-|x|}{4\sqrt{x^2-4}} + C,\ C \in \mathbb{R};$

   (e) $\frac{1}{5}x^2\left(2\cos(\ln x) + \mathrm{sen}(\ln x)\right) + C,\ C \in \mathbb{R};$

   (f) $-\frac{\mathrm{arctg}\,x}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C,\ C \in \mathbb{R};$

   (g) $\frac{x^2}{2} + 2\,\mathrm{arctg}(1-x) + 2\ln|1-x| - 3\ln(2-2x+x^2) + C,\ C \in \mathbb{R};$

   (h) $\frac{3}{4}\ln|1-\cos x| - \frac{1}{2(1-\cos x)} - \frac{1}{4}\ln|1+\cos x| + C,\ C \in \mathbb{R}$

(i) $\dfrac{1}{2(1+x^2)}\left(x+(x^3-1)\operatorname{arctg} x\right)+C,\ C\in\mathbb{R}$

(j) $\dfrac{\sqrt{2}}{8}\ln|1+\sqrt{2}x+x^2|-\dfrac{\sqrt{2}}{8}\ln|1-\sqrt{2}x+x^2|+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+x\right)\right)-$
$-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-x\right)\right)+C,\ C\in\mathbb{R}$

(k) $\operatorname{arctg}(x^2)+C, C\in\mathbb{R}$

(l) $-\dfrac{\sqrt{2}}{8}\ln|1+\sqrt{2}x+x^2|+\dfrac{\sqrt{2}}{8}\ln|1-\sqrt{2}x+x^2|+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+x\right)\right)-$
$-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-x\right)\right)+C, C\in\mathbb{R}$

(m) $\dfrac{1}{4}\ln(1+x^4)+C, C\in\mathbb{R}$

Exercícios 4.6

1. (a) $\dfrac{11}{25}$;
   (b) $\dfrac{\sqrt{3}+2}{6}$.
2. $1.3+\dfrac{8}{23}+\dfrac{12}{31}+\dfrac{7}{43}+\dfrac{1}{5}$.
3. 36.51.
4. $\dfrac{5}{7}+\dfrac{45}{118}+\dfrac{10}{149}+\dfrac{45}{173}+\dfrac{65}{226}+\dfrac{35}{279}$.
5. (a) $\dfrac{8}{3}$;
   (b) 12;
6. —

Exercícios 4.7

1. —
2. Falso.

Exercícios 4.8

1. f é integrável em $[0,4]$;
2. f não é integrável em $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$;
3. f é integrável em $[-2,1]$.

Exercícios 4.9

1. $A=\displaystyle\int_0^1(x^2-2x+2)\,dx+\int_1^2(x^2-4x+4)\,dx$.
2. (a) —
   (b) $A=\displaystyle\int_{-1}^0\frac{x^3}{2x-2}\,dx-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^3}{2x-2}\,dx$.

Exercícios 4.10

1. —
2. $F'(x)=2(x+1)\displaystyle\int_0^{\operatorname{sen}x}\operatorname{arcsen}t\,dt+x(x+1)^2\cos x$.
3. $k=\dfrac{2}{\mathrm{e}}$.
4. —
5. (a) $\psi'(x)=5x^4f(x^5)+2f(-2x)$;
   (b) —.
6. $F''(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$.
7. —
8. $f''(1)=10$.
9. $x=3$ é um ponto de máximo de F.
10. **Sugestão:** Calcule o sinal da 2ª derivada no ponto de abcissa $x=1$.

Exercícios 4.11

1. -18;
2. $\dfrac{8}{15}$;
3. Se $a=0$, $-\dfrac{1}{3}$; Se $a\neq 0$, $\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{a}$;
4. $\dfrac{\mathrm{e}^2+1}{4}$;
5. $\ln\dfrac{2}{1+\mathrm{e}}-\mathrm{e}+2\mathrm{e}^2$;
6. $\dfrac{b\mathrm{e}^a}{a^2+b^2}\left(\operatorname{sen}(b+c)+\dfrac{a}{b}\cos(b+c)\right)-\dfrac{b}{b^2+c^2}\left(\operatorname{sen}c+\dfrac{a}{b}\cos c\right)$.

Exercícios 4.12

1. (a) $\dfrac{8}{3}$;
   (b) $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$;

(c) $\ln \frac{1}{2(e+1)}$;

(d) $\frac{1}{2} \ln 2$.

2. —

3. (a) —;

(b) $\frac{37}{6}$.

4. $4\sqrt{2} + 2\ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$.

5. $\frac{5\pi}{12}$.

6. $\ln \frac{5\sqrt{130}}{52}$.

7. (a) $D_f = D_g = [-1, 1]$;

(b) π.

8. (a) $\frac{4\pi}{3}$;

(b) $\frac{4}{3} + 2\pi$.

Exercícios 4.13

1. (a) $2e^{-2}$;

(b) Divergente;

(c) $\frac{\pi}{2a}$;

(d) $\frac{1}{s^2}$;

(e) $\frac{1}{2}$;

(f) Divergente;

(g) $\ln 5$;

(h) $-\frac{1}{2}$;

(i) 2;

2. —

3. (a) Convergente.

(b) Divergente.

(c) Divergente.

(d) Divergente.

(e) Convergente.

Exercícios 4.14

1. (a) -1;

(b) Divergente;

(c) Divergente;

(d) -1;

(e) Divergente;

(f) Divergente;

(g) π;

(h) $\sqrt{2} \operatorname{arcsen} \sqrt{2}$.

2. (a) Divergente.

(b) Divergente.

(c) Convergente.

(d) Convergente.

(e) Divergente.

Exercícios 4.15

1. —

2. (a) 2;

(b) Diverge;

(c) $\frac{\pi}{2}$.

3. (a) Convergente;

(b) Convergente;

(c) Convergente;

(d) Convergente;

(e) Convergente;

(f) Divergente;

(g) Divergente;

(h) Divergente;

(i) Convergente;

(j) Divergente;

(k) Divergente;

(l) Convergente.

4. Se $k > 1$ converge, se $k \leq 1$ diverge.

5. —