Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo II — Agrupamento IV 2017/2018

Ficha de Exercícios 1
Séries de Potências e Fórmula de Taylor

1. Determine o domínio de convergência das seguintes séries de potências, indicando os pontos onde a convergência é simples ou absoluta.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{(n-1)!}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$;

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{2n+4}$; (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}x^n$; (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!(x-2)^n}{n-1}$;

   (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}(x+2)^n$; (h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2+n^3}x^n$; (i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{3n}}{\ln n}$;

   (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n6^n}(3x-2)^n$; (k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}(x-2)^n$; (l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{2n+1}}x^n$.

2. Mostre que:

   (a) se $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ é absolutamente convergente num dos extremos do seu domínio de convergência, então também é absolutamente convergente no outro extremo;

   (b) se o domínio de convergência de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ é $]-r,r]$, então a série é simplesmente convergente em $x=r$.

3. Determine os polinómios de Taylor seguintes:

   (a) $T_0^3(x^3+2x+1)$;
   (b) $T_\pi^3(\cos x)$;
   (c) $T_1^3(xe^x)$;
   (d) $T_0^5(\operatorname{sen} x)$;
   (e) $T_0^6(\operatorname{sen} x)$;
   (f) $T_1^n(\ln x)$ $\quad (n \in \mathbb{N})$.

4. Considere $f(x)=e^x$.

   (a) Escreva a fórmula de MacLaurin de ordem n da função f.
   (b) Mostre que o polinómio de MacLaurin de ordem n permite aproximar e^x no intervalo $]-1,0[$, com erro inferior a $\frac{1}{(n+1)!}$.
   (c) Escolha um dos polinómios de MacLaurin de f e use-o para obter uma aproximação de $\frac{1}{\sqrt{e}}$, indicando uma estimativa para o erro cometido nessa aproximação.

5. Usando o resto de Lagrange, determine um majorante para o erro cometido na aproximação de sen(3) quando se usa o polinómio de Taylor de ordem 5 em torno do ponto $a = \pi$.

6. Mostre que o polinómio de MacLaurin de ordem 7 da função seno permite aproximar os valores desta função, no intervalo $[-1, 1]$, com erro inferior a $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$.

7. (a) Obtenha o polinómio de Taylor de ordem $n \in \mathbb{N}$ da função $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $c = 1$.
   (b) Determine um valor de n para o qual se garanta que o polinómio $T_1^n\left(\frac{1}{x}\right)$, obtido na alínea anterior, aproxime $\frac{1}{x}$ no intervalo $[0.9, 1.1]$, com erro inferior a 10^{-3}.

8. Determine o menor valor de n tal que o polinómio de MacLaurin de ordem n da função $f(x) = e^x$ aproxime $f(1)$ com erro inferior a 10^{-3}.

9. Mostre, usando a fórmula de Taylor, que $\ln(1 + x) \leq x$, para todo $x > -1$.

10. Considere a representação em série de potências da função $\frac{1}{1-x}$ dada por

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad -1 < x < 1.$$

Determine uma representação em série de potências para cada uma das seguintes funções (indicando o intervalo onde tal é válida):

$$\text{(a)}\ \frac{1}{1-3x}\,; \qquad \text{(b)}\ \frac{2}{2+x}\,; \qquad \text{(c)}\ \frac{1}{x}\,.$$

11. Desenvolva a função $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ em série de potências de $x - 3$, indicando o maior intervalo onde o desenvolvimento é válido.

Soluções

1. (a) $]-1, 1[$, sendo absolutamente convergente em todos os pontos desse intervalo.
   (b) $\mathbb{R}$, sendo absolutamente convergente em todos os pontos desse intervalo.
   (c) $]-1, 1]$, sendo simplesmente convergente em $x = 1$ e absolutamente convergente nos restantes pontos.
   (d) $[1, 2[$, sendo simplesmente convergente em $x = 1$ e absolutamente convergente nos restantes pontos.
   (e) $\mathbb{R}$, sendo absolutamente convergente em todos os pontos desse intervalo.
   (f) $\{2\}$, sendo absolutamente convergente nesse ponto.
   (g) $[-3, -1[$, sendo simplesmente convergente em $x = -3$ e absolutamente convergente nos restantes pontos.
   (h) $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$, sendo absolutamente convergente em todos os pontos desse intervalo.
   (i) $[-1, 1[$, sendo simplesmente convergente em $x = -1$ e absolutamente convergente nos restantes pontos.
   (j) $\left]-\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right]$, sendo simplesmente convergente em $x = \frac{8}{3}$ e absolutamente convergente nos restantes pontos.
   (k) $]0, 4[$, sendo absolutamente convergente em todos os pontos desse intervalo.

(l) $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, sendo simplesmente convergente em $x = \frac{1}{2}$ e absolutamente convergente nos restantes pontos.

2. —

3. (a) $T_0^3(x^3 + 2x + 1) = x^3 + 2x + 1$

   (b) $T_\pi^3(\cos x) = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2}$

   (c) $T_1^3(xe^x) = e + 2e(x-1) + \frac{3}{2}e(x-1)^2 + \frac{2}{3}e(x-1)^3$

   (d) $T_0^5(\operatorname{sen} x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

   (e) $T_0^6(\operatorname{sen} x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

   (f) $T_1^n(\ln x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$.

4. (a) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \dfrac{e^\theta}{(n+1)!}x^{n+1}$, para algum θ entre 0 e x.

   (b) —

   (c) Por exemplo, $\frac{1}{\sqrt{e}} \simeq T_0^2 f(-\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} = 0.625$, com erro inferior a $\frac{1}{6}$.

5. $|R_5(3)| \leq \frac{(3-\pi)^6}{6!}$

6. —

7. (a) $T_1^n\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 + \cdots + (-1)^n(x-1)^n\,, \quad n \in \mathbb{N}$.

   (b) $n = 3$ (ou outro superior a este).

8. $n = 6$.

9. —

10. (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$, para $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$;

    (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x^n$, para $-2 < x < 2$;

    (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$, para $0 < x < 2$.

11. $\displaystyle\frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(x-3)^n\,, \quad x \in]-1, 7[$.