Equações Diferenciais

Corpo Docente:

Ana Breda, Eugénio Rocha, Paolo Vettori
Sandrina Santos, Diana Costa, Rita Guerra

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro, 2017

Suponha que $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $x_0 \in \text{int}(D)$.

Uma equação da reta tangente a $P = (x_0, f(x_0))$ é

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Esta reta representa o gráfico de uma função L definida por

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

dita **linearização de f em x_0**, que é uma boa **aproximação** de f para valores de x muito próximos de x_0 ($L(x) \approx f(x)$).

Por outras palavras, para valores de $\Delta x = x - x_0$ muito pequenos (próximos de zero),

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx L(x_0 + \Delta x) - L(x_0) = f'(x_0)\Delta x.$$

Representando para valores próximos de zero Δx por dx definimos o **diferencial (total) de f**, df, em x_0 por

$$df = f'(x_0)dx.$$ Diferencial

Diferencial de uma função real de duas variáveis reais

Suponha que $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $(x_0, y_0) \in \mathrm{int}(D)$.

Uma equação do plano tangente a $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é

$$z = f(x_0, y_0)) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Este plano representa o gráfico de uma função L definida por

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

dita **linearização de f em (x_0, y_0)**, que é uma boa **aproximação** de f para valores de (x, y) muito próximos de (x_0, y_0) ($L(x, y) \approx f(x, y)$).

Por outras palavras, para valores de $\Delta x = x - x_0$ e $\Delta y = y - y_0$ muito pequenos (próximos de zero),

$$\begin{aligned}\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) &\approx L(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - L(x_0, y_0)\\ &\approx \tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y.\end{aligned}$$

Representando para valores próximos de zero Δx por dx e Δy por dy definimos o **diferencial (total) de f**, df, em (x_0, y_0), por

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, dy.$$

Diferencial de uma função real de n variáveis reais 4

Suponha que $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $P = (x_1^0, ..., x_n^0) \in \text{int}(D)$.

Uma equação do hiperplano de $\mathbb{R}^{n+1}$ tangente a $P = (x_1^0, ..., x_n^0, f(x_1^0, ..., x_n^0))$ é

$x_{n+1} = f(x_1^0, ..., x_n^0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, ..., x_n^0)(x_1 - x_1^0) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1^0, ..., x_n^0)(x_n - x_n^0)$.

Este hiperplano representa o gráfico de uma função L definida por

$L(x_1, ..., x_n) = f(x_1^0, ..., x_n^0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, ..., x_n^0)(x_1 - x_1^0) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1^0, ..., x_n^0)(x_n - x_n^0)$

dita **linearização de f em P**, que é uma boa **aproximação** de f para valores de $(x_1, ..., x_n)$ muito próximos de $(x_1^0, ..., x_n^0)$ ($L(x_1, ..., x_n) \approx f(x_1, ..., x_n)$).

Por outras palavras, para valores de $\Delta x_1 = x_1 - x_1^0, ..., \Delta x_n = x_n - x_n^0$ muito pequenos (próximos de zero),

$$\begin{aligned}\Delta f = f(x_1^0 + \Delta x_1, ..., x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, ..., x_n^0) &\approx L(x_1^0 + \Delta x_1, ..., x_n^0 + \Delta x_n) - L(x_1^0, ..., x_n^0) \\ &\approx \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, ..., x_n^0)\Delta x_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1^0, ..., x_n^0)\Delta x_n.\end{aligned}$$

Representando para valores próximos de zero $\Delta x_1, ..., \Delta x_n$ por $dx_1, ..., dx_n$ definimos o **diferencial (total) de f**, df, em $(x_1^0, ..., x_n^0)$, por

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, ..., x_n^0)\, dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, ..., x_n^0)\, dx_n.$$

Exer. 2.1

Para cada uma das funções seguintes determine o diferencial no ponto indicado e a linearização numa vizinhança do mesmo ponto, após garantida a diferenciabilidade ponto em questão:

(a) $f(x,y) = \sin(xy)$ no ponto $P = (0,1)$;

(b) $f(x,y,z) = x^2 - y^2 - z^2 - xyz$ no ponto $P = (1,1,0)$;

(c) $f(x,y,z) = xy^3 + \cos(\pi z)$ no ponto $P = (1,3,1)$.

Exer. 2.2

Obtenha uma aproximação da variação de $f(x,y) = x^2 - 3x^3y^2 + 4x - 2y^3 + 6$ quando (x,y) varia de $(-2,3)$ a $(-2.02, 3.01)$.

Exer. 2.3

Suponha que as dimensões de um paralelipípedo retângulo variam de 9, 6, e 4 centímetros para 9.02, 5.97 e 4.01 centímetros.

(a) Obtenha uma aproximação da variação do volume;

(b) Qual a variação exata do volume.

Def. 2.4

Uma **equação diferencial (ordinária)** (EDO) **de ordem** n, $n \in N$ é uma equação do tipo $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ com $y = y(x)$.

Dizemos que a **equação diferencial** está **escrita na forma normal** quando a derivada de maior ordem está explicitamente expressa em função das restantes variáveis, i.e.,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}).$$

Obs. 2.5

A ordem de uma EDO é a maior ordem da derivada da variável dependente.

Exemplo 2.6

São exemplos de equações diferenciais:

(a) $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + \sin(2x)\dfrac{dy}{dx} = 4x^2$ (b) $\dfrac{d^3x}{dt^3} + \sqrt{1+t^2}\,\dfrac{dx}{dt} = 4.$

Qual é a ordem de cada uma destas equações diferenciais? Identifique a variável independente e a variável dependente em cada uma delas.

Exemplo 2.7

Lei do arrefecimento de Newton: A taxa de variação da temperatura T de um objecto é proporcional à diferença entre a sua temperatura e a temperatura do meio ambiente T_m.

Esta lei pode ser modelada pela equação diferencial

$$\frac{dT}{dx} = -k(T - T_m)$$

com k uma constante real positiva.

Exemplo 2.8

Lei de Hooke: Ao colocarmos um objeto de massa m na extremidade de uma mola vertical, esta exerce sobre o objeto uma força (elástica) $(m\,a)$ que é proporcional ao seu deslocamento.

O movimento harmónico da mola pode ser modelado pela equação diferencial

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

com $k > 0$ uma constante (*constante de mola*).

Def. 2.9

Dizemos que $\phi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma **solução da equação diferencial** $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$, no intervalo I, se ϕ possui derivadas finitas até à ordem n e $F(x, \phi(x), \phi'(x), \phi''(x), ..., \phi^{(n)}(x)) = 0, \ \ \forall_x \in I$.

Obs. 2.10

Não iremos fazer referência ao intervalo I a menos que a sua não especificação conduza a qualquer tipo de ambiguidade.

Def. 2.11

Resolver ou **integrar** uma equação diferencial de ordem n consiste em determinar o conjunto das suas soluções, ou seja, determinar o conjunto das funções que satisfaçam a equação.

Exer. 2.12

Resolva as seguintes equações diferenciais:

(a) $y'(x) = \ln(x)$; (b) $y''(x) = 3x^2$.

Em geral, integrar uma equação diferencial de ordem n consiste em determinar uma família de soluções que dependem de n constantes reais arbitrárias.

> A uma tal família obtida por técnicas de integração chamamos **integral geral** da EDO.
>
> Uma **solução particular** de uma EDO é uma solução obtida do integral geral por concretização das constantes.
>
> Uma solução particular de uma EDO que não se possa obter desta forma diz-se **solução singular.**
>
> O conjunto de todas as soluções de uma EDO diz-se **solução geral.**

Exemplo 2.13

Consideremos a equação diferencial $(y')^2 - 4y = 0$.

Um integral geral desta equação é $y = (x + C)^2$, com C uma constante real arbitrária.

Uma solução particular é, por exemplo, $y = x^2$ sendo $y = 0$ uma solução singular (justifique).

Exer. 2.14

Determine uma equação diferencial para a qual a família de curvas

(a) $y = e^{cx}, \; c \in \mathbb{R}$, é um integral geral;

(b) $y = Ae^{Bx}, \; A, B \in \mathbb{R}$, é um integral geral;

(c) $y = a \operatorname{sen}(x + B) + C, \; a, B, C \in \mathbb{R}$, é um integral geral.

Soluções:

2.23 (a) $xy' - y\ln(y) = 0$, (b) $yy'' - (y')^2 = 0$, (c) $y''' + y' = 0$.

Exer. 2.15

A equação diferencial $(y')^2 = 1$ tem dois integrais gerais: $y = x + c, \; c \in \mathbb{R}$ e $y = -x + c, \; c \in \mathbb{R}$. Mostre que qualquer solução particular duma é solução singular da outra.

Obs. 2.16

Não será feito um estudo aprofundado das soluções singulares de uma EDO.

Def. 2.17

Chamamos **problema de valores iniciais (PVI)** (ou problema de Cauchy) a todo o problema que consiste em encontrar a solução (ou soluções) de uma equação diferencial satisfazendo certas condições num dado ponto x_0, ditas **condições iniciais**:

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

Chamamos **problema de valores na fronteira** (ou simplesmente, problema de fronteira) a todo o problema que consiste em encontrar a solução (ou soluções) de uma equação diferencial satisfazendo **condições especiais em dois ou mais pontos**.

Exemplo 2.18

PVI	Prob. de val. na fronteira
$F(x, y, y', y'') = 0$ $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$	$F(x, y, y', y'') = 0$ $\begin{cases} y(x_0) + y'(x_1) = y_0 \\ y(x_1) + y'(x_0) = y_1 \end{cases}$

Exer. 2.19

Determine a solução do PVI

$$\begin{cases} y'' + x = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Exer. 2.20

Determine a solução do problema de fronteira

$$\begin{cases} y'' + x = 0 \\ y(0) + y'(1) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Obs. 2.21

Nem todo o PVI admite solução. Por exemplo, a equação diferencial de valores iniciais $\begin{cases} |y'| + |y| = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ não tem solução, pois a única solução de $|y'| + |y| = 0$ é $y = 0$.

Que condições devem ser satisfeitas para que se possa garantir a existência e unicidade de um PVI?

EDOs de Variáveis Separáveis

As equaçoes diferenciais de 1.ª ordem que vamos estudar são equações do tipo

$$\boxed{\boxed{y' = f(x,y) \;\; \text{com} \;\; f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ contínua em } D.}}$$

EDOs de Variáveis Separáveis

A equação diferencial $y' = f(x,y)$ diz-se de **variáveis separáveis** se puder ser escrita na forma $\quad y' = f(x,y) = \dfrac{p(x)}{q(y)} \quad$ com $\quad q(y) \neq 0.$

Sendo $y' = \dfrac{p(x)}{q(y)}$ então $q(y)\,y' = p(x)$ ou, usando a noção de diferenciais,

$$\boxed{q(y)dy = p(x)dx.}$$

O **integral geral** desta equação obtém-se primitivando "*membro a membro*",

$$\boxed{\int q(y)dy = \int p(x)dx \,+\, C.}$$

Exemplo 2.22

Determinar o integral geral da equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = y^2$

A equação $\dfrac{dy}{dx} = y^2$ é uma equação diferencial de variáveis separáveis (porquê?).

Usando a forma diferencial, obtemos $\dfrac{1}{y^2} = dx \ \ (y \neq 0)$.

Primitivando ambos os membros, $\displaystyle\int \frac{1}{y^2} = \int dx$, ou seja,

$$-\frac{1}{y} = x + C,\ \ C \in \mathbb{R}. \Longleftarrow \textbf{Integral geral}.$$

A função $y = 0$ é uma **solução singular** desta equação.

Exer. 2.23

Determine um integral geral para cada uma das seguintes EDOs:

(a) $xy' - y = 0$; (b) $x + yy' = 0$;

(c) $(t^2 - xt^2)\frac{dx}{dt} + x^2 = -tx^2$.

Exer. 2.24

Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

(a) $xy' + y = y^2$; $y(1) = 1/2$;

(b) $x(y+1) + y'\sqrt{4+x^2} = 0$; $y(0) = 1$;

(c) $(1+x^3)y' = x^2y$; $y(1) = 2$.

Soluções:

2.23 (a) $y = c\,x,\ c \in \mathbb{R}$ (b) $y^2 + x^2 = c,\ c \in \mathbb{R}_0^+$ (c) $x\,e^{\frac{1}{x}} = c\,te^{-\frac{1}{t}},\ c \neq 0$;

2.24 (a) I.G. $y = \frac{1}{1-c\,x}$; S.PVI $y = \frac{1}{x+1}$, $x \neq -1$;

(b) I.G. $y=\frac{c}{e^{\sqrt{x^2+4}}}$-1; S.PVI $y = 2e^{2-\sqrt{x^2+4}} - 1$;

(c) I.G. $y = c\sqrt[3]{x^3+1}$; S.PVI $y = \sqrt[3]{4(x^3+1)}$

EDOs de Homogéneas

A equação diferencial $y' = f(x, y)$ diz-se de **homogénea** se f for uma função homogénea de grau 0, isto é, se

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)\ \forall (x, y) \in D,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \text{ tais que } (\lambda x, \lambda y) \in D.$$

Neste caso, $f(x, y) = f(1, \frac{y}{x})$ (justifique) e por conseguinte a EDO $y' = f(x, y)$ pode ser escrita na forma $y' = g(\frac{y}{x})$.

$\boxed{y' = g(\frac{y}{x})}$ **mudança de variável** dependente $y = zx$ $\boxed{z + xz' = g(z).}$

EDO homogénea EDO v. separáveis

Exer. 2.25

Determine o integral geral da EDO $x^2\, dy = (x^2 + xy + y^2)\, dx$

Esta EDO pode ser escrita na forma $y' = (1 + \frac{y}{x} + (\frac{y}{x})^2)$ e é, portanto, uma EDO homogénea. Efetuando a M.V. $y = zx$ transforma-se em $\frac{1}{1+z^2} dz = \frac{1}{x} dx$ cujo IG é $\operatorname{arctg} z = \ln x + C, C \in \mathbb{R}$.
Voltando à variável inicial obtemos para IG da EDO dada $y = x \operatorname{tg}(\ln |x| + C), C \in \mathbb{R}$.

EDOs transformáveis em homogéneas/var. separáveis

As equações diferenciais $y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ com $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ constantes reais, podem transformar-se em EDO de variáveis separáveis por uma mudança de variável (m.v) adequada.

- Se $c_1 = c_2 = 0$ a EDO é homogénea.
- Se $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$ a EDO ou já é de v. separáveis ou pode transformar-se numa de v. separáveis utilizando uma das m.v. $z = a_1x + b_1y$ ou $z = a_2x + b_2y$.
- Se $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$ a EDO transforma-se numa EDO homogénea/v. separáveis através da m.v. independente $x = u + \alpha$ e da m.v. dependente $y = z + \beta$ com α e β soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{cases}$$

Exer. 2.26

Determine o integral geral da equação diferencial $y' = \dfrac{x + y + 4}{x - y - 6}$.

Exer. 2.27

Verifique que as seguintes equações diferenciais são homogéneas e determine um seu integral geral.

(a) $(x^2 + y^2)y' = xy$;

(b) $y'\left(1 - \ln\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}\,, \quad x > 0.$

Exer. 2.28

Considere a equação diferencial $y' = \frac{y}{x}\,(1 + \ln y - \ln x)\,, \quad x > 0.$

(a) Verifique que se trata de uma equação diferencial homogénea.

(b) Determine um integral geral desta EDO.

Exer. 2.29

Resolva as seguintes equações diferenciais:

(a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 3}{x - y - 1}$;

(b) $y' = \frac{y - x}{y - x + 2}$.

(**Sugestão**: Efetue a mudança de variável dada por $z = y - x$.)

Sejam M e N funções continuas num aberto de $\mathbb{R}^2$. A equação diferencial,

$\boxed{M(x,y) + N(x,y)y' = 0}$ ou, equivalentemente, $\boxed{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0}$

é uma equação diferencial **exata** se existir uma função F com derivadas parciais de primeira ordem contínuas cujo diferencial satisfaz a

$$\boxed{\boxed{dF = \text{M(x,y)dx+N(x,y)dy.}}}$$

O que significa que $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$.

Teo. 2.30

A família $F(x,y) = C,\ C \in \mathbb{R}$ constitui o conjunto de soluções da equação diferencial exata $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$.

Critério

Supondo D aberto e simplesmente conexo ("*sem buracos*"), a equação diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ é **exata se e somente se**

$$\boxed{\boxed{\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)}}.$$

Exer. 2.32

Mostre que a equação diferencial $(y + 2xe^y)dx + (x^2 e^y + x - 2y)dy = 0$ é uma equação diferencial exata e determine as suas soluções.

Exer. 2.33

Para cada uma das equações diferenciais seguintes determinar o valor da constante A de forma a serem exatas e determinar uma família de soluções das equações diferenciais resultantes.

(a) $(x^2 + 3xy)dx + (Ax^2 + 4y)dy = 0$;

(b) $(\frac{Ay}{x^3} + \frac{y}{x^2})dx + (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x})dy = 0$.

Exer. 2.34

Sabendo que o PVI, $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x\cos(y) + 3x^2 y}{x^3 - x^2 \sin(y) - y}, \quad y(0) = \frac{3}{4}$, admite solução única da forma $G(x, y) = 0$ na vizinhança de $(0, \frac{3}{4})$, determine uma expressão para $G(x, y)$.

Def. 2.35

Chamamos **fator integrante** da equação diferencial não exata

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

a toda a função não nula μ tal que

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$$

é uma equação diferencial exata.

Exer. 2.36

Mostre que a equação diferencial $3y + 4xy^2 + (2x + 3yx^2)y' = 0$ não é exata e que a função μ definida por $\mu(x,y) = yx^2$ é um fator integrante para esta EDO.

Como determinar um fator integrante para uma ODE?

CASOS PARTICULARES

- Se $\boxed{\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = g(x)}$ (depende apenas de x)

  podemos considerar um **fator integrante dependente apenas de** x e escrever $\mu(x)g(x) = \mu'(x)$. Assim um fator integrante para a ODE é

  $$\boxed{\mu(x) = e^{\int g(x)dx}}$$

- Se $\boxed{\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = h(y)}$ (depende apenas de y)

  podemos considerar um **fator integrante dependente apenas de** y e escrever $\mu(y)h(y) = \mu'(y)$. Assim um fator integrante para a ODE é

  $$\boxed{\mu(y) = e^{\int -h(y)dy}}$$

Exer. 2.37

Mostre que $2\cos(y)dx - \sin(y)dy = 0$ não é uma equação diferencial exata, mas que é possível integrá-la recorrendo a fatores integrantes que só dependem de uma das variáveis. Verifique, em particular, que $\mu_1(x) = e^{2x}$ e $\mu_2(y) = \dfrac{1}{\cos(y)}$ são dois de tais fatores.

Exer. 2.38

Considere a EDO $x^2y' + 2xy = 1$ em $]0, +\infty[$. Mostre que qualquer solução desta EDO tende para zero quando $x \to +\infty$.

Uma EDO **linear** de 1.ª ordem é uma equação do tipo

$$\boxed{a_0(x)y' + a_1(x)y = b(x),}$$

ondem a_0, a_1, b são funções definidas num certo intervalo I, com $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Dividindo ambos os membros por $a_0(x)$, a equação linear pode ainda escrever-se na forma

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x).}$$

Exer. 2.39

Determine, caso exista, uma função μ tal que $\mu(x)\left[\,y' + p(x)y\right] = \left[\mu(x)y\right]'$.

$$\begin{aligned}
\mu(y' + p(x)y) = (\mu\, y)' \quad &\Longleftrightarrow \quad \mu y' + \mu p(x)y = \mu y' + \mu' y \\
&\Longleftrightarrow \quad \mu' = \mu\, p(x) \ \ (\text{eq. dif. de var. sep.}) \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\mu}\, d\mu = p(x)dx \\
&\Longleftrightarrow \quad \mu(x) = ke^{\int p(x)\, dx},\ k \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Uma função que satisfaça a condição pedida é, por exemplo, $\boxed{\mu(x) = e^{\int p(x)\, dx}.}$

Exer. 2.40

Mostre que a **solução geral da equação** $y' + p(x)y = q(x)$ é

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int (\mu(x)q(x))dx + c\right), \text{ com } \mu(x) = e^{\int p(x)\, dx}.$$

Exemplo 2.41

Determinar as soluções da equação diferencial linear $y' - \dfrac{2}{x}y = x$.

Consideremos a função μ dada por $\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int -\frac{2}{x}\,dx} = \dfrac{1}{x^2}$.

Então,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{x^2}y\Big) = \frac{1}{x^2}\,x \quad &\Longleftrightarrow \quad \Big(\frac{1}{x^2}y\Big) = \int \frac{1}{x} \\ &\Longleftrightarrow \quad y = x^2(\ln|x| + c),\, c \in \mathbb{R} \quad \text{solução geral}. \end{aligned}$$

Obs. 2.42

Consideremos a equação diferencial (linear) $y' + p(x)y = q(x)$.

- Se $q = 0$ ou se $p = p(x)$ e $q = q(x)$ são (funções) constantes a ODE é de variáveis separáveis.

Exer. 2.43

Determine a solução geral das seguintes EDOs:

(a) $xy' - y = x - 1,\ x > 0$; (b) $xy' + y - e^x = 0,\ x > 0$;

(c) $y' - y = -e^{-x}$; (d) $y' + 2y = \cos x$.

Teo. 2.44

Se p e q são funções contínuas em I, então o problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tem nesse intervalo uma e uma só solução.

Exer. 2.45

Justifique a existência e unicidade de solução dos seguintes problemas de Cauchy e resolva-os.

(a) $\begin{cases} y' - y = -e^x \\ y(0) = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3y' - 4y = x \\ y(0) = \dfrac{13}{16}. \end{cases}$

Def. 2.46

Uma **equação diferencial de Bernoulli** é uma equação diferencial nda forma

$$\boxed{y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha}} \quad \text{com } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ora, $\quad y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha} \iff y^{-\alpha}y' + a(x)y^{1-\alpha} = b(x).$

Fazendo a mudança de variável $z = y^{1-\alpha}$ temos, $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ e a equação diferencial anterior transforma-se na equação diferencial

$$\boxed{z' + (1-\alpha)a(x)z = (1-\alpha)b(x)}$$

que é uma equação diferencial linear nas variáveis z e x.

Obs. 2.47

Se $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$ a equação de Bernoulli é uma EDO linear.

Exer. 2.48

Determine a solução geral da equação de Bernoulli $y' + y = y^2e^x$.

$$y' + y = y^2e^x \iff y^{-2}y' + y^{-1} = e^x.$$

A mudança de variável $z = y^{-1}$ converte esta EDO na EDO linear $z' - z = -e^x$ que tem $z = (C - x)e^x,\ C \in \mathbb{R}$ por solução geral.

Assim, a solução geral de $y' + y = y^2e^x$ é $y = \frac{e^{-x}}{C-x},\ C \in \mathbb{R}$.

Exer. 2.49

Resolva as seguintes equações diferenciais:

(a) $y' + \frac{1}{x}y = xy^2$

(b) $y' + y\sin(x) = y^2\sin(x)$

(c) $\begin{cases} x^2y' - 2xy = 3y^4 \\ y(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$

(d) $\begin{cases} xy' + x = -\dfrac{(xy)^4}{3(1+x^2)} \\ y(1) = 1. \end{cases}$

Soluções:

(a) $y = \dfrac{1}{x(c-x)}$; (b) $y = \dfrac{e^{\cos(x)}}{e^{\cos(x)} + c}$ (c) $y = \sqrt[3]{\dfrac{5x^6}{49 - 9x^5}}$.

(d) $y = \dfrac{1}{x\sqrt[3]{\arctan(x) + 1 - \pi/4}}$

Exer. 2.50

Determine o integral geral das seguintes EDO's de primeira ordem.

(a) $x^2 + y^2 + xyy' = 0$

(b) $(2y - 3x) + (3x - 2y + 1)y' = 0$

(c) $x^2y\,dx + (\frac{1}{3}x^3 + y^3)dy = 0$

(d) $(t^2 + 4)dt + t\,dx = x\,dt$

(e) $x^2y' - y^3 = xy.$

(f) $y\,ds - 3s\,dy = y^4\,dy$

(g) $y' = \dfrac{3 - 2y}{2x + y + 1}.$

Equação diferencial linear de ordem n

Uma **equação diferencial de ordem** n, $n \in \mathbb{N}$ é uma equação da forma:

$$\boxed{a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x).}$$

- As funções $a_0(x), a_1(x), \dots, a_{n-1}(x), a_n(x)$, contínuas em $I \subset \mathbb{R}$, dizem-se os **coeficientes** da equação.
- Se todos os coeficientes da equação são funções constantes, a equação diferencial diz-se **linear de coeficientes constantes**.
- Se $b = b(x) = 0$ (função identicamente nula) a equação linear diz-se **homogénea**;
- Se existir pelo menos um $x \in I$ tal que $b(x) \neq 0$ equação linear diz-se **completa**.

Exemplo 2.51

A equação diferencial $y'' + x^2y' + y = 4x$ é exemplo de uma equação diferencial linear de ordem 2 completa.

Teo. 2.52

Existência e unicidade de solução

Se $a_0, a_1, ...a_n, b$ são funções contínuas em I, $a_0(x) \neq 0$, pata todo $x \in I$ e $x_0 \in I$, então, nesse intervalo, existe uma e uma sós solução para o problema de Cauchy

$$\begin{cases} a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x) \\ y(x_0) = \beta_0,\ y'(x_0) = \beta_1,\ ...,\ y^{n-1}(x_0) = \beta_{n-1} \end{cases}$$

Exer. 2.53

Mostre que o problema de Cauchy

$$\begin{cases} x'' + x = 0 \\ x(0) = 2,\ x'(0) = 2 \end{cases}$$

tem uma única solução em qualquer intervalo que contenha a origem.

À equação diferencial linear de ordem n completa

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x) \qquad \textbf{(A)}$$

associamos a equação diferencial linear de ordem n homogénea,

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0,$$

dita **equação diferencial linear homogénea associada à EDO linear completa (A)**

Exer. 2.54

Mostre que:

(i) Dadas duas soluções y_1 e y_2 duma equação diferencial linear de ordem n completa, a sua diferença, $y_1 - y_2$ é solução da equação homogénea associada;

(ii) A soma de uma solução duma equação diferencial linear de ordem n completa com uma solução da homogénea associada é solução da EDO linear completa.

(iii) Uma qualquer combinação linear de soluções particulares da linear homogénea (associada) é também solução dessa EDO linear e homogénea.

Teo. 2.55

Solução Geral de um EDO Linear Completa

A solução geral de uma equação diferencial linear completa obtém-se adicionando uma qualquer sua solução à solução geral da equação homogénea associada.

$$\boxed{y_G^C = y_G^H + y_p^C}$$

Teo. 2.56

Sistema Fundamental de Soluções

Toda a **equação linear homogénea** de ordem n,

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0,$$

nas condições anteriormente descritas, admite n **soluções** $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ **linearmente independentes** e qualquer outra solução y_H se escreve como

combinação linear desta, isto é, $\boxed{y_H = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + \ldots + c_n\phi_n,}$

com $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

Def. 2.57

Um qualquer conjunto de n **soluções linearmente independente** de uma equação linear homogénea de ordem n designa-se por **sistema fundamental de soluções - SFS**.

Teo. 2.58

Critério

Um sistema de n soluções $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ da EDO linear de ordem n

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \; x \in I$$

é **linearmente independente** se e só se o **Wronskiano** (determinante), como funções de x em I,

$$\begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_n \\ \phi_1' & \phi_2' & \dots & \phi_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_1^{n-1} & \phi_2^{n-1} & \dots & \phi_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

Obs. 2.59

Para que o Wronskiano seja não nulo, basta que exista $x \in I$ que torne a determinante não nulo.

Exer. 2.60

Mostre que:

1. $y = e^{-x}$ constitui um SFS para a equação diferencial $y' + y = 0$;
2. $\{y_1 = \sin(x), y_2 = \cos(x)\}$ constitui um SFS para a equação diferencial $y'' + y = 0$.

Solução Geral das EDOs lineares de ordem n homogéneas

Nesta secção vamos apenas considerar **EDOs lineares de ordem n homogéneas e de coeficientes constantes**.

$$\boxed{a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,} \qquad \textbf{(1)}$$

A esta equação vamos associar um polinómio algébrico

$$\boxed{P(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n}$$

que designamos por **polinómio característico** associada a EDO **(1)**.

O sistema fundamental de soluções (SFS) da EDO (1) está intimamente relacionado com as raízes de $P(D)$.

Solução Geral das EDOs lineares de ordem n homogéneas

De facto, podemos construir **um SFS** do modo seguinte:

1. Se $P(D)$ tem n **raízes reais simples** $r_1, r_2, ..., r_n$ então

   $$\boxed{\textbf{SFS}=\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, ..., e^{r_n x}\}}$$

2. Se $P(D)$ tem uma **raiz real** r de **multiplicidade** m, $1 < m \leq n$ então

   $$\boxed{\textbf{SFS} \supset \{e^{rx}, xe^{rx}, ..., x^{m-1}e^{rx}\}}$$

3. Se $P(D)$ tem um par de **raízes complexa** $\alpha \pm \beta i$ **simples** então

   $$\boxed{\textbf{SFS} \supset \{e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\sin(\beta x)\}}$$

4. Se $P(D)$ tem um par de **raízes complexas** $\alpha \pm \beta i$ de **multiplicidade** m, $1 < m \leq \frac{n}{2}$ então

$$\boxed{\textbf{SFS} \supset \{e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\sin(\beta x); xe^{\alpha x}\cos(\beta x), xe^{\alpha x}\sin(\beta x), \ldots, x^{m-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x), x^{m-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)\}}$$

Exer. 2.61

Determine a solução geral das equações diferenciais lineares de coeficientes constantes e homogéneas:

(a) $y'' + 4y' + 3y = 0$;

(b) $y^{(4)} + y'' = 0$;

(c) $y^{(4)} - 3y''' - y'' + 3y' = 0$

(d) $y'' + 2y' + 5y = 0$;

(e) $y''' + y' = 0$;

(f) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

Consideremos a EDL de ordem n completa (não necessariamente de coeficientes constantes)

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x), \ x \in I \quad \textbf{(A)}$$

e suponhamos que

$$y_H = C_1\phi_1(x) + C_2\phi_2(x) + \dots + C_n\phi_n(x), \ C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R} \quad \textbf{(B)}$$

é a solução geral da EDL homogénea associada .

Como determinar uma solução particular para a EDL completa (A)?

Método da variação das constantes: Consideremos que as constantes $C_1, C_2, \dots, C_n$ são funções diferenciáveis de x. A função y_P dada por

$$\boxed{y_P = C_1(x)\phi_1(x) + C_2(x)\phi_2(x) + \dots + C_n(x)\phi_n(x)}$$

com $C_1'(x), C_2'(x), \dots, C_n'(x)$ soluções do sistema:

$$\begin{cases} C_1'(x)\phi_1(x) + C_2'(x)\phi_2(x) + \dots + C_n'(x)\phi_n(x) = 0 \\ C_1'(x)\phi_1'(x) + C_2'(x)\phi_2'(x) + \dots + C_n'(x)\phi_n'(x) = 0 \\ \vdots \\ C_1'(x)\phi_1^{(n-2)}(x) + C_2'(x)\phi_2^{(n-2)}(x) + \dots + C_n'(x)\phi_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ C_1'(x)\phi_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)\phi_2^{(n-1)}(x) + \dots + C_n'(x)\phi_n^{(n-1)}(x) = \frac{b(x)}{a_0(x)} \end{cases}$$

é uma **solução particular para a EDL completa (A)**.

Exer. 2.62

Determine a solução geral das EDO's utilizando o MVCs:

(a) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$;

(b) $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = \dfrac{e^x}{\cos(x)}$;

(c) $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1}$;

(d) $y' + y\cos(x) = \sin(x)\cos(x)$.

Teo. 2.63

Princípio da Sobreposição

Se y_1 é uma solução da EDL

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b_1(x) \quad \text{e}$$

e y_2 é uma solução da EDL

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b_2(x) \quad \text{então}$$

$y_1 + y_2$ é uma solução da EDL

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b_1(x) + b_2(x).$$

Método dos Coeficientes Indeterminados: A EDL de **coeficientes constantes completa** e de ordem n

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = b(x)$$

com $\boxed{b(x) = P_m(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x)}$ ou $\boxed{b(x) = P_m(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x)}$

onde $P_m(x)$ é um polinómio de grau $m \in \mathbb{N}_0$; e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, possui uma **solução particular** y_P da forma

$$\boxed{\boxed{y_P(x) = x^k (P_m^1(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x) + P_m^2(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x))}}$$

onde:

- $k \in \mathbb{N}_0$ é a multiplicidade de $\alpha + \beta i$ como raiz do polinómio característico $P(D)$ (k=0 se $\alpha + \beta i$ não for raiz de $P(D)$.
- $P_m^1(x)$ e $P_m^2(x)$ são polinómios de grau m cujos coeficientes terão que ser determinados.

Obs. 2.64

Este método **só** é **aplicável a EDL's de coeficientes constantes** e que tenham o termo independente da forma acima descrita.

Exer. 2.65

Determine a solução geral das EDO's:

(a) $y'' - 3y' - 4y = 4x^2$;

(b) $y'' - 3y' - 4y = 2\cos(x)$;

(c) $y' + 2y = x^3 + 3x + 1$;

(d) $y' - y = (x^2 + 1)e^{3x}$;

(e) $y'' - y = x\sin(x)$;

(f) $y'' + y' = x^2 + 4$;

(g) $y''' + y' = \sin(x)$;

(h) $y^{(4)} - y'' = x^2 + e^x$.

Def. 3.1

Chamamos **transformada de Laplace** da função $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ à função $\mathcal{L}\{f\}$ ou $\mathcal{L}\{f(t)\}$ definida por

$$\boxed{\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt}$$

para os valores de s em que o integral converge.

Exer. 3.2

Mostre que:

1. $\boxed{\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}, \ s > 0.}$
2. Sendo $g(t) = \begin{cases} 1 & t \neq 2, 3 \\ 0 & t = 2 \\ 6 & t = 3 \end{cases}$ $\qquad \mathcal{L}\{g\}(s) = \mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}, \ s > 0.$
3. $\boxed{\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}, \ s > a \ \ (a \in \mathbb{R}).}$

Exer. 3.3

Mostre que:

4. $\boxed{\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n}{s}\mathcal{L}\{t^{n-1}\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \; s > 0 \;\; (n \in \mathbb{N}_0).}$

5. $\boxed{\mathcal{L}\{\sin(at)\}(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}, \; s > 0.}$ 6. $\boxed{\mathcal{L}\{\cos(at)\}(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}, \; s > 0.}$

Teo. 3.4

Sejam $f, g : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Se existem $\mathcal{L}\{f\}(s)$ para $s > s_f$ e $\mathcal{L}\{g\}(s)$ para $s > s_g$ então

- $\mathcal{L}\{f + g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) + \mathcal{L}\{g\}(s)$ para $s > max\{s_f, s_g\}$ e
- $\mathcal{L}\{\alpha f\}(s) = \alpha\mathcal{L}\{f\}(s)$ para $s > s_f$.
  O operador $\mathcal{L}$ é um operador linear.

Demonstração: Exercício.

Exemplo 3.5

1. $\mathcal{L}\{c\}(s) = c\mathcal{L}\{1\}(s) = \dfrac{c}{s}$ para $s > 0$;
2. $\mathcal{L}\{\sinh(at)\}(s) = \mathcal{L}\{\dfrac{e^{at} - e^{-at}}{2}\}(s) = \dfrac{a}{s^2 - a^2}$ para $s > |a|$, $a \in \mathbb{R}$;
3. $\mathcal{L}\{\cosh(at)\}(s) = \mathcal{L}\{\dfrac{e^{at} + e^{-at}}{2}\}(s) = \dfrac{s}{s^2 - a^2}$ para $s > |a|$, $a \in \mathbb{R}$;

Exer. 3.6

Determine:

1. $\mathcal{L}\{\sin^2(at)\}(s) \quad (\sin^2(x) = \dfrac{1}{2}(1 - \cos(2x));$
2. $\mathcal{L}\{\cos^2(at)\}(s) \quad (\cos^2(x) = \dfrac{1}{2}(1 + \cos(2x));$
3. $\mathcal{L}\{\sin^3(at)\}(s) \quad (\sin^3(x) = \dfrac{1}{4}(3\sin(x) - \sin(3x));$
4. $\mathcal{L}\{\cos^3(at)\}(s) \quad (\cos^3(x) = \dfrac{1}{4}(3\cos(x) - \cos(3x));$
5. $\mathcal{L}\{at^3 + bt^2 + ct + d\}(s),\ a, b, c, d \in \mathbb{R}.$

Obs. 3.7

Nem toda a função admite transformada de Laplace.

Exer. 3.8

Mostre que a função f definida por $f(t) = e^{t^2},\ t \geq 0$ não admite transformada de Laplace.

Questão: Em que condições podemos garantir que uma determinada função admite transformada de Laplace?

Def. 3.9

Uma função real de variável real diz-se **seccionalmente contínua** em $I = [a, b]$ se existir uma partição $\{a = a_0, a_1, ..., a_n = b\}$ de I tal que f é contínua em cada um dos subintervalos $]a_i, a_{i+1}[,\ i = 0, ..., n-1$ e existem e são finitos os limites laterais $\lim_{x \to a_i^+} f(x),\ \lim_{x \to a_i^-} f(x)$.

A função f é **seccionalmente contínua** em $[0, +\infty[$ se o for em qualquer intervalo $[0, b]$ de $\mathbb{R}$.

Teo. 3.10

Se $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função que verifica as condições

(i) f é **seccionalmente contínua** em $[0, +\infty[$;

(ii) f é de **ordem exponencial** (à direita), isto é, existem constantes $M > 0,\ T > 0,\ a \in \mathbb{R}$ tais que

$$\boxed{|f(t)| \leq Me^{at},} \text{ para todo } t \geq T,$$

então $\mathcal{L}\{f\}(s)$ **existe** para $s > a$.

Demonstração:
Sendo f seccionalmente contínua em $[0, +\infty[$, f é seccionalmente contínua e portanto integrável em $[0, b], b \in \mathbb{R}^+$ sendo também integrável a função g definida por $g(t) = f(t)e^{-st}$.

Vejamos que o integral impróprio (de 1.ª espécie) $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ é convergente para $s > a$.

Para isso basta observar (justifique) que $\forall_{t>T}\ |f(t)e^{-st}| < Me^{(-s+a)t}$.

Como identificar se f é de ordem exponencial (‘a direita)?

Teo. 3.11

f é de **ordem exponencial** (à direita), isto é, existem constantes $M > 0$, $T > 0$, $a \in \mathbb{R}$ tais que

$$|f(t)| \leq Me^{at}, \text{ para todo } t \geq T, \qquad (1)$$

se e somente se

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{|f(t)|}{e^{bt}} = 0 \text{ para algum } b \in \mathbb{R}^+ \qquad (2)$$

Demonstração: (2) $\Longrightarrow$ (1) imediato. Vejamos que (1) $\Longrightarrow$ (2).
Tendo em conta que

$$0 \leq \frac{|f(t)|}{e^{bt}} = \frac{|f(t)|}{e^{(b-a+a)t}} = \frac{1}{e^{(b-a)t}} \frac{|f(t)|}{e^{at}} \leq \frac{M}{e^{(b-a)t}}$$

e que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{M}{e^{(b-a)t}} = 0, \text{ para } b > a,$$

obtemos o que pretendemos mostrar.

Exer. 3.12

Seja $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de ordem exponencial (à direita), isto é, $|f(t)| \leq Me^{at}$ para $t \geq T$. Mostre que $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-st} f(t) = 0$ para todo o $s > a$.

Exer. 3.13

Mostre que as funções seguintes são de ordem exponencial à direita,

1. Qualquer função limitada;
2. As funções exponenciais definidas por e^{at}, a constante real;
3. As potencias t^n, $n \in \mathbb{N}$.
4. As funções polinomiais;
5. As funções do tipo $t^n e^{at} \cos(bt)$ e $t^n e^{at} \sin(bt)$.

Exer. 3.14

Em cada uma das alíneas que se seguem mostre que a função considerada admite transformada de Laplace para os valores de s indicados.

(a) f definida por $f(t) = \frac{1}{1+t}$, para $s > 0$;

(b) f definida por $f(t) = \frac{e^{at}}{1+t}$, a constante real, para $s > a$.

Teo. 3.15

Deslocamento na Transformada

Sejam f uma função cujo domínio contém $\mathbb{R}_0^+$ e integrável em $[0, b]$, $b > 0$, e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Se $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$ existe para $s > s_f$, então $\mathcal{L}\{e^{\lambda t} f(t)\}(s)$ existe para

$$\boxed{s > s_f + \lambda} \quad \text{e} \quad \boxed{\mathcal{L}\{e^{\lambda t} f(t)\}(s) = F(s - \lambda) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s - \lambda).}$$

Demonstração:

Considere-se a função h definida por $h(t) = e^{\lambda t} f(t)$, que é integrável em $[0, b]$, $b > 0$ (justifique).

Par todo o $s \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st} e^{\lambda t} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-\lambda)t} f(t) dt$, pelo que $\mathcal{L}\{e^{\lambda t} f(t)\}(s)$ existe para $s > s_f + \lambda$.

Exemplo 3.16

Consideremos a função f definida por $f(t) = e^{3t}\cosh(-\sqrt{2}\ t)$.

Como visto anteriormente,

$F(s) = \mathcal{L}\{\cosh(-\sqrt{2}\ t)\}(s) = \frac{s}{s^2-2}$, para $s > |-\sqrt{2}|$.

Estando f nas condições da propriedade do deslocamento na transformada podemos concluir que

$\mathcal{L}\{e^{3t}\cosh(-\sqrt{2}\ t)\}(s) = F(s-3) = \frac{s-3}{(s-3)^2-2}$, para $s > 5$.

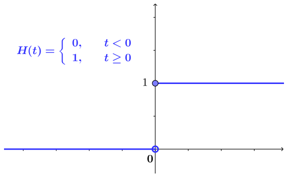
Função de Heaviside

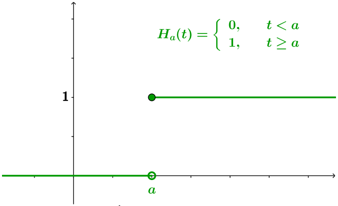
Chamamos **função de Heaviside** à função $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0. \\ 1 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

À custa da função H, definem-se as funções $H_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ por

$$H_a(t) = H(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < a. \\ 1 & \text{se } t \geq a \end{cases}$$


$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$
1
0


$H_a(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}$
1
a

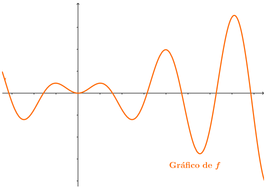


Gráfico de f

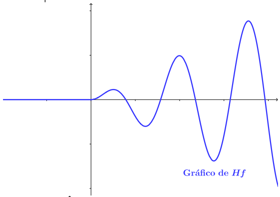
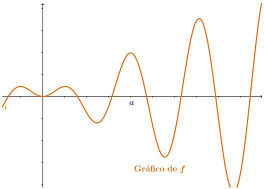
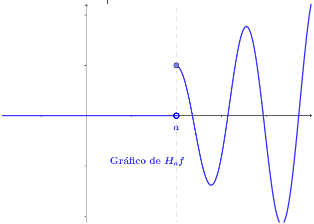


Gráfico de Hf


a
Gráfico de f


a
Gráfico de H_af

Teo. 3.17

Transformada do deslocamento

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em $[0, b]$ para qualquer $b \in \mathbb{R}^+$.

Se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ existe para $s > s_f$, então

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}^+ \;\; \mathcal{L}\{H_a(t)f(t-a)\}(s) \text{ existe para } s > s_f}$$

e

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}^+ \;\; \mathcal{L}\{H_a(t)f(t-a)\}(s) = e^{-as}F(s) = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\}(s).}$$

Demonstração: Exercício.

Obs. 3.18

1. $\mathcal{L}\{H(t)f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s), \; s > s_f$ (Justifique).

Exer. 3.19

Mostre que:

1. $\mathcal{L}\{H_a(t)f(t)\}(s) = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t+a)\}(s),\ s > s_f;$
2. $\mathcal{L}\{H_a(t)e^t\}(s) = \dfrac{e^{a(1-s)}}{s-1},\ s > 1;$
3. $\mathcal{L}\{H_{\frac{\pi}{2}}(t)\cos(t)\}(s) = -\dfrac{e^{\frac{-\pi}{2}s}}{s^2+1},\ s > 0;$
4. $\mathcal{L}\{H_\pi(t)\cos(t)\}(s) = \dfrac{se^{-\pi s}}{s^2+1},\ s > 0;$
5. $\mathcal{L}\{t^2H_a(t)\}(s) = e^{-as}(\dfrac{a^2}{s} + \dfrac{2a}{s^2} + \dfrac{2}{s^3}),\ s > 0.$

Teo. 3.20

Sejam $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em $[0, b]$ para todo $b > 0$, e $a \in \mathbb{R}^+$.

Se $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ existe para $s > s_f$ então

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}^+ \;\; \mathcal{L}\{f(at)\}(s) \text{ existe para } s > as_f}$$

e

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}^+ \;\; \mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}\{f(t)\}(\frac{s}{a}).}$$

Demonstração: Exercício.

Exemplo 3.21

Para $a \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{L}\{(at)^n\}(s) = \mathcal{L}\{f(at)\}(s)$ com f a função definida por $f(t) = t^n$.

Assim, $\mathcal{L}\{(at)^n\}(s) = \dfrac{1}{a}\mathcal{L}\{t^n\}(\dfrac{s}{a}) = \dfrac{n!a^{n+1}}{as^{n+1}} = a^n\dfrac{n!}{s^{n+1}}$, para $s > 0$.

Teo. 3.22

Derivada da Transformada

Se $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função seccionalmente contínua e de ordem exponencial ($|f(t)| < Me^{at}$), para todo o $n \in \mathbb{N}_0$ existe $\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s)$

$\boxed{\text{para } s > s_f}$ e $\boxed{\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n (\mathcal{L}\{f(t)\})^{(n)}(s)}$

Exer. 3.23

Mostre que:

1. $\mathcal{L}\{t^2 e^{2t}\}(s) = \dfrac{2}{(s-2)^3}, \; s > 2;$
2. $\mathcal{L}\{t \sin(2t)\}(s) = \dfrac{4s}{(s^2+4)^2}, \; s > 0;$
3. $\mathcal{L}\{t^2 \cos(3t)\}(s) = \dfrac{2s(s^2-27)}{(s^2+9)^3}, \; s > 0.$

Exer. 3.24

Utilize transformadas de Laplace para calcular o integral impróprio $\int_0^{+\infty} \; t^{10} e^{-2t}$

Teo. 3.25

Transformada da Derivada

Se $f, f', f'', ..., f^{(n-1)}, n \in \mathbb{N}$ são todas de ordem exponencial $s_f \in \mathbb{R}$ e $f^{(n)}$ existe e é seccionalmente contínua em $[0, +\infty[$ então existe $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s)$ para $s > s_f$ e

$$\boxed{\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - .... - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).}$$

Exer. 3.26

Determine:

1. $\mathcal{L}\{f'(t)\}(s)$ em que $f(t) = \sinh(-\frac{3}{2}t)$;
2. $\mathcal{L}\{f''(t)\}(s)$ em que $f(t) = t^2 e^{2t}$;
3. $\mathcal{L}\{f'''(t)\}(s)$ em que $f(t) = e^{-t} - \sin(2t)$.

Exer. 3.27

Determine a transformada de Laplace de cada uma das seguintes funções e indique o respetivo domínio.

1. $f(t) = 24\cos(8t) + t^2 - 48e^{-2t}$;
2. $f(t) = e^{6t}\sin(3t)$;
3. $f(t) = t^2 e^{4t}\cosh(6t)$;
4. $f(t) = 4 + t + 5t^2 - \pi e^{-3t}t^{30}$;
5. $f(t) = (10 - H_\pi)(\sin(t)$;
6. $f(t) = (t-8)^3 e^{4(t-8)} H_8$.

Tabela das transformadas de Laplace

1. $\mathcal{L}\{1\}(t) = \dfrac{1}{s}, \ s > 0;$
2. $\mathcal{L}\{e^{at}\}(t) = \dfrac{1}{s-a}, \ s > a;$
3. $\mathcal{L}\{t^n\}(t) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}, \ s > 0;$
4. $\mathcal{L}\{\sin(at)\}(t) = \dfrac{a}{s^2+a^2}, \ s > 0;$
5. $\mathcal{L}\{\cos(at)\}(t) = \dfrac{s}{s^2+a^2}, \ s > 0;$
6. $\mathcal{L}\{\sinh(at)\}(t) = \dfrac{a}{s^2-a^2}, \ s > |a|;$
7. $\mathcal{L}\{\cosh(at)\}(t) = \dfrac{s}{s^2+a^2}, \ s > |a|.$

$(F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s),\ G = \mathcal{L}\{f(t)\}(s))$.

1. $\mathcal{L}\{(f+g)(t)\}(s) = F(s) + G(s)$, para $s > \max\{s_f, s_g\}$;
2. $\mathcal{L}\{(\lambda f)(t)\}(s) = \lambda F(s)$, para $s > s_f$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
3. $\mathcal{L}\{e^{\lambda t} f(t)\}(s) = F(s-\lambda)$, para $s > s_f + \lambda$;
4. $\mathcal{L}\{H_a(t) f(t-a)\}(s) = e^{-as} F(s)$, para $s > s_f$, $a \in \mathbb{R}^+$;
5. $\mathcal{L}\{H_a(t) f(t)\}(s) = e^{-as} \mathcal{L}\{f(t+a)\}(s)$, para $s > s_f$, $a \in \mathbb{R}^+$;
6. $\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \dfrac{1}{a} F(\dfrac{s}{a})$, para $s > a\, s_f$, $a \in \mathbb{R}^+$;
7. $\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n (\mathcal{L}\{f(t)\})^{(n)}(s)$, para $s > s_f$;
8. $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$, para $s > s_f$.

Def. 4.1

Dada uma função $F(s)$ definida para $s > \alpha$, chamamos **transformada de Laplace inversa** de F à função $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, caso exista, tal que

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s), \ s > \alpha}$$

e escrevemos

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\{F\} = f \quad \text{ou} \quad \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = f(t).}$$

Obs. 4.2

1. Dada uma função F definida para $s > \alpha$ nem sempre existe $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$.
2. Como vimos, podemos ter diferentes funções com a mesma transformada de Laplace F o que significa que, sem condições suplementares, a unicidade da transformada de Laplace inversa não pode ser garantida.

Teo. 4.3

Sejam f e g duas funções cujo domínio contém $\mathbb{R}_0^+$ e seccionalmente contínuas em $\mathbb{R}_0^+$ tais que $\boxed{\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s) = F(s), \text{ para } s > \alpha.}$

Se f e g são contínuas em $t \in \mathbb{R}_0^+$, então $f(t) = g(t)$.

Em particular se f e g são **contínuas** em $\mathbb{R}_0^+$, $\boxed{f(t) = g(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}_0^+.}$

Teo. 4.4

Se F e G (definidas num mesmo domínio) admitem transformada de Laplace inversa. Então as funções $F+G$ e αF ($\alpha \in \mathbb{R}$) também admitem transformada inversa e

(1) $\boxed{\mathcal{L}^{-1}\{F+G\} = \mathcal{L}^{-1}\{F\} + \mathcal{L}^{-1}\{G\},}$

(2) $\boxed{\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F\}.}$

Demonstração: Exercício.

Teo. 4.5

Se F admite transformada de Laplace inversa então, para todo o $\lambda \in \mathbb{R}$, $F(s-\lambda)$ também admite transformada de Laplace inversa e

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\{F(s-\lambda)\} = e^{\lambda t}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}.}$$

Demonstração: Exercício.

Def. 4.6

Define-se o produto de convolução de duas funções f e g por

$$\boxed{(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau,\ t \geq 0,}$$

desde que este integral exista.

Teo. 4.7

Transformada da convolução

Se f e g são funções seccionalmente contínuas em $[0, +\infty[$ e ambas de ordem exponencial $s_0 \in \mathbb{R}$, então, para $s > s_0$, tem-se

$$\boxed{\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(s) = F(s)G(s),}$$

onde F e G denotam, respetivamente, as transformadas de Laplace de f e g.

Obs. 4.8

Nas condições do Teorema anterior, tem-se:

(1) $\boxed{\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)d\tau\}(s) = \dfrac{F(s)}{s}.}$ **(2)** $\boxed{\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}(t) = (f * g)(t).}$

1. $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\}(t) = 1,\ t \geq 0,\ s > 0;$
2. $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-a}\}(t) = e^{at},\ t \geq 0,\ s > a;$
3. $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{n!}{s^{n+1}}\}(t) = t^n,\ t \geq 0,\ s > 0;$
4. $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{a}{s^2+a^2}\}(t) = \sin(at),\ t \geq 0,\ s > 0;$
5. $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+a^2}\}(t) = \cos(at),\ t \geq 0,\ s > 0;$
6. $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{a}{s^2-a^2}\}(t) = \sinh(at),\ t \geq 0,\ s > |a|;$
7. $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+a^2}\}(t) = \cosh(at),\ t \geq 0,\ s > |a|.$

Propriedades das transformadas de Laplace inversas

1. $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-\lambda)\} = e^{\lambda t}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\};$
2. $\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F\} = \alpha\mathcal{L}^{-1}\{F\};$
3. $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-\lambda)\} = e^{\lambda t}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\};$
4. $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}(t) = (f*g)(t),\ \left((f*g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du,\ t \geq 0\right).$

Exer. 4.9

Para cada uma das funções seguintes, determine $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$:

1. $F(s) = \dfrac{5}{s^2+25}$;
2. $F(s) = \dfrac{3}{s-4}$;
3. $F(s) = \dfrac{s+2}{s^2+4s+40}$;
4. $F(s) = \dfrac{1}{s^2+4s+6}$;
5. $F(s) = \dfrac{3s-1}{s^2-4s+13}$;
6. $F(s) = \dfrac{4s+e^{-s}}{s^2+s-2}$;
7. $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+4)^2}$.

Exer. 4.10

Utilize transformadas de Laplace para resolver o problema de Cauchy
$y' + 2y = e^t;\ y(0) = 2.$