Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I — Semestre Extraordinário - Época de Exames

15 de Junho de 2009

Duração: **2h30m**

Justifique todas as respostas e indique os cálculos efectuados.

115 Pontos

1. Considere a função f definida por $f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{se} \quad x > 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$

   (a) Mostre que f é contínua na origem.

   (b) Defina a função derivada de f, f'.

   (c) Resolva, em $\mathbb{R}^+$, a equação $f(x) = x$.

   (d) Justifique que é possível aplicar o Teorema de Rolle a f em $[0, 1]$ e determine o ponto $c \in]0, 1[$ tal que $f'(c) = 0$.

   (e) Mostre que o polinómio de Taylor de ordem 3 da função f em torno do ponto $a = 1$ é o seguinte: $p_3(x) = (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3$.

   (f) Utilize p_3 para determinar um valor aproximado para $\ln 4$.

   (g) Considere a região do plano limitada pelas rectas $x = \mathrm{e}^{-1}$, $x = \mathrm{e}$ e $y = 0$ e pelo gráfico de f. Seja $\mathcal{A}$ a área desta região do plano. Exprima $\mathcal{A}$ recorrendo a integrais definidos e calcule o seu valor.

40 Pontos

2. (a) Calcule $\displaystyle\int \frac{x^2}{1-x^4}\, dx$.

   (b) Calcule o integral indefinido $\displaystyle\int \sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}\, dx$.

20 Pontos

3. Seja g a função dada por $g(x) = \displaystyle\int_{-1}^{\cos x} (1-t^2)\, dt$.

   Utilizando o Teorema fundamental do cálculo integral mostre que $g'(x) = -\operatorname{sen}^3 x$.

25 Pontos

4. (a) Calcule $\displaystyle\int x\, \mathrm{e}^{-x^2+3}\, dx$.

   (b) Estude a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, \mathrm{e}^{-x^2+3}\, dx$.