Exame Final de Álgebra Linear e Geometria Analítica 16/01/2012

Duração: 2h 30m

Nome:____ N.º Folhas Supl.:____
Nº Mec.__________ Declaro que desisto _______________ Classificação:______

Classificações Parciais:

1*a*)	1*b*)	2*a*)	2*b*)	2*c*)	2*d*)	3*a*)	3*b*)	4	5*a*)	5*b*)	5*c*)	5*d*)

1. Considere o sistema de equações lineares, nas variáveis x, y, z,

$$\begin{cases} 2\alpha x + y = 8 \\ -x + 2\alpha y + 4z = 7 \\ -\alpha x + z = \alpha, \end{cases}$$

com α um parâmetro real.

[15] a) Discuta em função do parâmetro real α, as soluções deste sistema de equações.

[20] b) Faça $\alpha = 1$ e utilize a Regra de Cramer para o resolver.

2. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ definida por:

$$f(a, b, c) = (a - c) + (b + c)X + aX^2.$$

[10] a) Mostre que a aplicação f é linear.

[15] b) Considere o conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z \text{ e } y = 0\}$. Mostre que S é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$ e determine $f(S)$.

[15] c) Determine o núcleo de f. O que pode dizer quanto à injectividade e sobrejectividade de f? Porquê?

[15] d) Indique, justificando, a matriz da aplicação linear f relativamente à base canónicas de $\mathbb{R}^3$ e à base $\mathcal{D} = (1 + X, X, 1 + X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

[18] a) Mostre que a matriz BA é invertível e calcule a sua inversa.

[12] b) Recorra às propriedades da função determinante, $|*|$, para determinar para que valores do parâmetro real λ, se tem $|(\lambda BA)^T| = 24$.

[30] 4. Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que tem como representação matricial em ralação à base canónica de $\mathbb{R}^2$ a matriz $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Averigúe se o operador T é diagonalizável e em caso afirmativo apresente uma base de $\mathbb{R}^2$ em relação à qual a matriz de T é diagonal.

5. Considere no espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, a função $< */* >$ definida por:

$< (x_1, y_1, z_1)/(x_2, y_2, z_2) >= 2x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

[10] a) Mostre que a função $< */* >$ define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

Nota: *Nas alíneas que se seguem considere o espaço vectorial E munido do produto interno acima definido*.

[15] b) Encontre uma base ortonormada para o subespaço vectorial $E =< (1, 0, 0), (0, 1, 0) >$.

[10] c) Determine uma base para $E^{\perp}$, o complemento ortogonal de E.

[15] d) Indique qual o vector de E mais próximo de $(0,0,1)$.

Bom trabalho

... Não esqueça que...

... *Tudo o que vale a pena ser feito*
merece e exige ser bem feito
Philip Chesterfield