Sucessões e Séries de Funções

Corpo Docente:

Ana Breda, Eugénio Rocha, Paolo Vettori
Sandrina Santos, Diana Costa, Rita Guerra

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro, 2017

Consideremos uma **sucessão de funções** $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ todas definidas em $D \subset \mathbb{R}$. Notamos uma tal sucessão por $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente por (f_n) e f_n será designado por **termo geral** da sucessão.

Observe-se que, para cada $x \in D$ a sucessão $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de números reais.

Def. 4.1

A sucessão de funções (f_n) definidas em D **converge pontualmente** para a função f em D e escrevemos $f_n \underset{p}{\rightarrow} f$, se $\boxed{\forall_{x\in D} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)}$.

Exemplo 4.2

Consideremos a sucessão de funções (f_n) que tem por termo geral a função f_n definida por $f_n(x) = x^n,\ x \in [0,1]$. Podemos facilmente constatar que,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1[\\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Por outras palavras, a sucessão de funções f_n converge pontualmente, em [0,1], para a função f.

Def. 4.3

A sucessão de funções (f_n) definidas em D **converge uniformemente** para a função f em D, se a sucessão numérica $(M_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sup_{x\in D}\{|f_n(x) - f(x)|\}$ é um infinitésimo, isto é, se

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D}\{|f_n(x) - f(x)|\} = 0}$$

Obs. 4.4

Retomando o exemplo anterior, constatamos que a sucessão de funções

$$f_n(x) = x^n,\ x \in [0,1],$$

não converge uniformemente para f.

De facto,

$$\lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D}\{|f_n(x) - f(x)|\} = 1.$$

Exemplo 4.5

Consideremos a sucessão de funções

$$g_n(x) = \frac{x^n}{n}, \; x \in [0,1].$$

Para cada $x \in [0,1]$ a sucessão numérica $g_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$ converge para 0. Assim, g_n converge pontualmente, em [0,1], para a função $g(x) = 0$.

Será esta convergência uniforme?

Dado que

$$\lim_{n\to\infty} M_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} \{|g_n(x) - g(x)|\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} \{|g_n(x)|\} = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} \{\frac{x^n}{n}\} = 0,$$

a convergência é também uniforme.

Teo. 4.6

Se (f_n) converge uniformemente para f num conjunto D, então (f_n) converge pontualmente para f nesse conjunto.

Demonstração: Exercício.

$$\boxed{\text{Convergência uniforme} \Longrightarrow \text{Convergência Pontual}}$$

Teo. 4.7

Seja (f_n) uma sucessão de funções contínuas em $I = [a, b]$. Suponha-se que f_n converge uniformemente para f em I. Então:

1. f é contínua em I;
2. f é integrável em I e
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx}$$
3. Adicionalmente se as funções f_n têm derivadas contínuas em $[a, b]$ e a sucessão das suas derivadas f_n' converge uniformemente em $[a, b]$. então f é diferenciável em I e
$$\boxed{f'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).}$$

Obs. 4.8

O resultado 3 do teorema anterior mantém-se válido se a convergência de (f_n) para f for apenas pontual. Na verdade para que o resultado seja válido basta que exista $x_0 \in I$ tal que a sucessão numérica $(f_n(x_0))$ seja convergente.

Def. 4.9

Sejam $f_n : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $S_n = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x), \quad n \in \mathbb{N}$.

Dizemos que a **série de funções** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **converge pontualmente** (resp. **uniformemente**) em D se a sucessão das somas parciais, S_n, convergir pontualmente (resp. uniformemente) em D.

Em caso de convergência, a função $S = \lim_{n \to \infty} S_n$, designa-se por **soma da série** e escrevemos

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} f_n = S.}$$

Def. 4.10

O **domínio de convergência** da série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é o conjunto constituído pelos pontos x para os quais a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ é convergente.

Dos critérios já conhecidos para séries numéricas podemos concluir que, se $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ convergem pontualmente em, respetivamente, D_f e D_g então:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}(f_n \pm g_n)$ converge pontualmente em $D_f \cap D_g$ e

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} f_n \pm g_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} g_n;}$$

(ii) $\forall_\lambda \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda f_n$ converge pontualmente em D_f e

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda f_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} f_n.}$$

Exer. 4.11

Determine, indicando o domínio de convergência de uma representação em série de potências de $\cosh(x)$ e de $\sinh(x)$ a partir do desenvolvimento de série de MacLaurin de e^x.

Teo. 4.12

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uma série de funções contínuas em $I = [a, b]$.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente em I, então:

1. a soma S é contínua em I;
2. a soma S é integrável em I e

$$\boxed{\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx}.$$

(integração termo a termo)

3. Adicionalmente, se cada f_n possui derivada de primeira ordem contínua em I e $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ converge uniformemente em I, então S é diferenciável em I e

$$\boxed{S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).}$$

(derivação termo a termo)

Obs. 4.13

O resultado 3 do teorema anterior mantém-se válido se a hipótese da convergência uniforme de $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ for substituída pela convergência pontual de $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ou, simplesmente, pela convergência da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ para algum $x_0 \in I$.

Exemplo 4.14

A série de funções contínuas, em $\mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ converge para a função descontínua

$$f(x) = \begin{cases} 1+x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(Observe-se que se trata de uma série geométrica de razão $\frac{1}{1+x^2}$ para cada $x \neq 0$).

Utilizando o teorema anterior podemos concluir que a convergência não é uniforme, é apenas pontual.

Teo. 4.15

Critério de Weierstrass

Sejam (f_n) uma sucessão de funções definidas em D e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série numérica convergente de termos não negativos, tais que

$$\boxed{|f_n(x)| \leq a_n, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad x \in D.}$$

Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente em D.

Exer. 4.16

Mostre que a série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

Como, para todo $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\left|\frac{\sin(nx)}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ é convergente, pelo Critério de Weierstrass, a série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

Exer. 4.17

Considere a série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n+1}}$.

(a) Mostre que esta série converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

(b) Justifique que a função $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n+1}}$ é contínua em $\mathbb{R}$.

Exer. 4.18

Obtenha uma representação em série de potências a partir dos desenvolvimentos em série de MacLaurin das funções exponencial $f(x) = e^x$ e de $g(x) = \cos(x)$, para as seguintes funções:

(a) $\cosh(4x)$;

(b) $2\cos^2(x)$.

Exer. 4.19

Mostre que as seguintes séries convergem uniformemente nos intervalos indicados:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2x}{n^3x+1}}$ em $\mathbb{R}^+$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(2nx)-\ln(nx+1)}{n^2+1}$ em $[1,+\infty[$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2x^2}{n^4x^2+5n}$ em $\mathbb{R}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(x-\frac{1}{n}\right)^n}{n^2+1}$ em $]0,1[$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{x^2+1}}$ em $\mathbb{R}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-\frac{5}{4}}}{\cosh(nx)}$ em $\mathbb{R}$

Teo. 4.20

Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ **uma série de potências** con raio de convergência $R \neq 0$. Então a série **converge uniformemente em qualquer subintervalo fechado e limitado do seu intervalo de convergência** $]c-R, c+R[$.

Teo. 4.21

Teorema de Abel

Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ uma série de potências con raio de convergência $R \in \mathbb{R}^+$. Se a série converge em $x = c + R$ (resp. em $x = c - R$) então ela converge uniformemente em $[\theta, c+R][$ (resp. em $x = [c-R, \theta]$), para qualquer $\theta \in]c-R, c+R[$.

Teo. 4.22

Sejam $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ uma série de potências con raio de convergência $R \neq 0$,

$I =]c-R, c+R[$ o seu intervalo de convergência e $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$.

Então:

- f é contínua no seu domínio (de convergência da série) D.
- f é diferenciável em I e $\boxed{f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}.}$
- A função F definida por $\boxed{F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}.}$

  é a primitiva de f em I tal que $F(c) = 0$.
- f é integrável em qualquer subintervalo $[a, b] \subset D$ e

$$\boxed{F(x) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n(x-c)^n dx.}$$

Teo. 4.23

Unicidade de representação em série de potências

Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n,\ x \in I =]c-R, c+R[\ (R \neq 0)$ então f possui derivadas finitas de qualquer ordem em I e $a_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}, n \in \mathbb{N}_0$.

Consequentemente, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = T_c f(x)$.

Por outras palavras, a representação em série de potencias de $x-c$ de uma função com derivadas finitas de todas as ordens numa vizinhança de c, é única e é a sua série de Taylor.

Exemplo 4.24

Já vimos que, $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,\ x \in]-1,1[$. Como, $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \left(\dfrac{1}{1-x}\right)'$, obtemos

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n \text{ para } x \in]-1,1[.$$

Vamos agora considerar séries trigonométricas da forma

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos(n\omega x)+b_n\sin(n\omega x)\right)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\omega x)+b_n\sin(n\omega x)\right)}$$

com $\omega\in\mathbb{R}^+$ e $a_n, b_n\in\mathbb{R}$ para todo o $n\in\mathbb{N}_0$.

Obs. 4.25

Uma série deste tipo converge absoluta e uniformemente em $\mathbb{R}$ sempre que as séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergirem absolutamente. (Justifique).

Exer. 4.26

Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n^3}\cos(n\omega x)+\frac{(-1)^n}{n^2}\sin(n\omega x)\right)$ converge absoluta e uniformemente em $\mathbb{R}$.

Def. 4.27

Uma **função** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se **periódica** de período T, $T > 0$, ou T-periódica se T é o menor número real positivo tal que

$$\boxed{\forall_{x\in\mathbb{R}} \;\; f(x+T) = f(x).}$$

Obs. 4.28

Toda a função T-periódica $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pode ser *transformada* numa função 2π-periódica $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ da forma $F(x) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$. (Verifique.)

Iremos apenas considerar funções 2π-periódicas.

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função 2π-periódica tal que

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big), \; x \in R. \quad \text{(ST)}$$

Se esta série convergir uniformemente os coeficientes a_n e b_n são completamente determinados por f.

De facto, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\right) = 2\pi a_0$,

pelo que $a_0 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$. Dado que,

- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)dx = 0$; • $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \end{cases}$;
- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \end{cases}$. Podemos concluir (multiplicando

por $\cos(mx)$ (resp. $\sin(mx)$ e integrando em $[-\pi, \pi]$, ambos os membros de (ST)) que: $a_m = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx$ e $b_m = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)dx$.

Usar as fórmulas trigonométricas: $2\cos(mx)\cos(nx) = \cos(m+n)x + \cos(m-n)(x)$;
$2\sin(mx)\sin(nx) = \cos(m-n)x - \cos(m+n)(x)$; $2\sin(mx)\cos(nx) = \sin(m+n)x + \sin(m-n)(x)$.

Def. 4.29

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função 2π-periódica e integrável em $[-\pi, \pi]$. Chamamos **série de Fourier** associada à função f ou série de Fourier de f à série

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right),} \qquad \text{(SF)}$$

onde a_n, $n \in \mathbb{N}_0$ e b_n, $n \in \mathbb{N}$, ditos **coeficientes de Fourier** de f, são dados por:

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx} \quad \text{e} \quad \boxed{b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.} \quad (*)$$

Obs. 4.30

- Se a série (SF) convergir a sua soma $F := F(x)$ é uma função 2π-periódica que pode ser diferente de f.
- Para exprimirmos que os coeficientes da série (SF) foram calculados à custa de f através das fórmulas $(*)$ escrevemos

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

e dizemos que a série (SF) está associada à função f.

Obs. 4.31

- Se f é 2π-periódica então os coeficientes de fourier no intervalo $[-\pi, \pi]$ coincidem com os coeficientes obtidos em qualquer intervalo de amplitude 2π;
$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx;$$
$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$
- Se f é ímpar $(f(-x) = -f(x),\ x \in \mathbb{R})$ então $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$;

  Se f é par $(f(-x) = f(x),\ x \in \mathbb{R})$ então $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\int_0^{\pi} f(x)dx$
- As séries de Fourier permitem lidar com funções meramente integráveis, ao contrário das séries de Taylor onde é exigido que as funções sejam infinitamente diferenciáveis.

Exemplo 4.32

Seja f a função 2π-periódica definida em $[-\pi, \pi]$ por $f(x) = |x|$.
Determinar a série de Fourier de f.

Os coeficientes de Fourier de f são $b_n = 0$ e $a_n = \begin{cases} \pi, & n = 0 \\ 0, & n \text{ par} \\ -\dfrac{4}{\pi n^2}, & n \text{ ímpar} \end{cases}$.

A série de Fourier de f é

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos(x) - \frac{4}{\pi}\frac{\cos(3x)}{3^2} - \frac{4}{\pi}\frac{\cos(5x)}{5^2} - \ldots = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}.$$

Obs. 4.33

Toda a função f definida em $[-\pi, \pi[$ admite uma única extensão 2π-periódica.
A série de Fourier de f é tomada como a série de f dessa sua extensão.

Exer. 4.34

Considere a função 2π-periódica g definida em $[-\pi, \pi[$ por

$g(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ \pi, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$ Mostre que $g(x) \sim \dfrac{\pi}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)} \sin((2n-1)x)$.

Exer. 4.35

Determine as séries de Fourier das seguintes funções:

1. $f(x) = x + x^2, \ x \in [-\pi, \pi[$

2. $g(x) = e^x, \ x \in [-\pi, \pi[$

3. $$h(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Soluções:

1. $f(x) \sim \dfrac{\pi^2}{3} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx) + (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \operatorname{sen}(nx) \right];$

2. $g(x) \sim \dfrac{\operatorname{senh}(\pi)}{\pi} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{\operatorname{senh}(\pi)}{\pi} \left[\frac{(-1)^n}{n^2+1} \cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2+1} \operatorname{sen}(nx) \right];$

3. $h(x) \sim \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{1-(-1)^n}{n} \operatorname{sen}(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2n-1} \operatorname{sen}((2n-1)x).$