→ fecho multiplicação escalar

$(x,y,z) \in S$ (isto é, $x-y+3z=0$) e $\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha(x,y,z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$

$$\alpha x - \alpha y + 3(\alpha z) = \alpha(x-y+3z) = \alpha \cdot 0 = 0$$

logo S é fechado para a multiplicação escalar (iv)

concluimos de (i), (ii), (iii), (iv) que S é um subespaço vetorial

(b) Obter um conjunto gerador de S

$(x,y,z) \in S$ se $x-y+3z=0 \Leftrightarrow x=y-3z$

$$(x,y,z) = (y-3z, y, z) = y(1,1,0) + z(-3,0,1)$$

logo $\forall (x,y,z)$ é combinação linear de $(1,1,0)$ e $(-3,0,1)$
portanto

$$S = \langle (1,1,0), (-3,0,1) \rangle$$

(c)

verificar se são linearmente ~~indepentes~~ independentes
sejam $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(-3,0,1) = (0,0,0)$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ sistema possível e determinado *

C.A

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 := L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 := L_3 - 1/3 L_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$* \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$

os vetores são linearmente independentes como também geram S então forma uma base para S $\{(1,1,0), (-3,0,1)\}$ dim S = 2

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & -4 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$, $A_{3\times 4}$ e consideremos os espaços vetoriais $\mathcal{C}(A)$, $\mathcal{L}(A)$ e $\mathcal{N}(A)$

Temos

$\mathcal{C}(A) = \langle (1,2,1), (-2,-4,-2), (-4,-7,-3), (3,5,2) \rangle$ $\mathcal{C}(A) \subseteq \mathbb{R}^3$ $\mathcal{C}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$ ← linhas

$\mathcal{L}(A) = \langle (1,-2,-4,3), (2,-4,-7,5), (1,-2,-3,2) \rangle$ $\mathcal{L}(A) \subseteq \mathbb{R}^4$ $\mathcal{L}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ ← colunas

$\mathcal{N}(A) = \{ x \in \mathbb{R}^4 : AX = 0 \}$

$\mathcal{N}(A) \subseteq \mathbb{R}^4$

Obter bases para estes espaços vetoriais

→ $\mathcal{C}(A)$

Verificar se os vetores que geram $\mathcal{C}(A)$ são ou não linearmente independentes

$AX = 0$ • Temos de escalonar a matriz

matriz escalonada

$A_e = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\text{nul}(A) = $ nº de colunas sem pivot
$\text{nul}(A) + \text{car}(A) = n$

matriz escalonada reduzida

$A_R = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Uma base para $\mathcal{C}(A)$ obtem-se considerando as colunas de A que na matriz escalonada ou escalonada reduzida têm pivot.

(Neste exemplo, os 4 vetores que geram $\mathcal{C}(A)$ não são linearmente independentes apenas 2 deles, o 1º e o 3º são)

base $\mathcal{C}(A)$ é $\{(1,2,1), (-4,-7,-3)\}$

$\dim \mathcal{C}(A) =$ nº pivots na matriz escalonada
$= \text{car}(A)$

→ Base para $\mathcal{L}(A)$

equivalente por linhas

$A \sim A_e \sim A_R$

Verificar se os vetores que geram $\mathcal{L}(A)$ são ou não linearmente independentes corresponde a resolver o sistema $A^T X = 0$

uma base para $\mathcal{L}(A)$ é constituída pelas linhas de A que têm pivot em A_e ou A_R.

Pois, como $A \sim A_e \sim A_R$

também posso considerar as linhas de A_e ou de A_R com pivot ou seja uma base para $\mathcal{L}(A)$ é $\{(1,-2,-4,3), (2,-4,-7,5)\}$

ou $\{(1,-2,-4,3), (0,0,1,-1)\}$

ou $\{(1,-2,0,-1), (0,0,1,-1)\}$

$\dim \mathcal{L}(A) = \text{car}(A)$

A car(A) indica (também) o número máximo de linhas de A linearmente independentes e o número máximo de colunas de A linearmente ~~dep~~ independente

$car(A) = \dim \mathcal{L}(A) = \dim \mathcal{C}(A)$

$\rightarrow \mathcal{N}(A) = \{ X \in \mathbb{R}^4 : AX = 0 \}$

$AX = 0 \Leftrightarrow \underset{*}{A_e} X = 0 \Leftrightarrow A_R X = 0$

*

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_3 = x_4 \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 + x_4 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_3 = x_4 \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_2 + x_4, x_2, x_4, x_4)$$
$$= x_2(2,1,0,0) + x_4(1,0,1,1)$$

$\mathcal{N}(A) = \langle (2,1,0,0), (1,0,1,1) \rangle$

e estes vetores formam também uma base para $\mathcal{N}(A)$ $\{(2,1,0,0), (1,0,1,1)\}$

temos também $\dim \mathcal{N}(A) = nul(A) =$ nº colunas $^{(A)}$ sem pivot

Exercício 23

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 := L_2 - 2L_1 \\ L_3 := L_3 + 3L_1 \\ L_4 := L_4 - L_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3 := L_3 - 2L_2 \\ L_4 := L_4 - 2L_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 := L_4 - \frac{8}{12} L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$car(A) = 3$

$nul(A) = 0 \longrightarrow \mathcal{N}(A) = \{(0,0,0)\}$

base $\mathcal{L}(A) \subseteq \mathbb{R}^3$

$\{(1,0,1), (2,1,-1), (-3,2,3)\}$ $\dim \mathcal{L}(A) = 3$

$\{(1,0,1), (0,1,-3), (0,0,12)\}$ $\mathcal{L}(A) = \mathbb{R}^3$

base $\mathcal{C}(A) \subseteq \mathbb{R}^4$

↳ todas as colunas da matriz A ~~que~~ em que a matriz escalonada tem pivot

$\{(1,2,-3,1), (0,1,2,2), (1,-1,3,3)\}$

$\dim \mathcal{C}(A) = 3$

$$\underbrace{car(A)}_{3} + \underbrace{nul(A)}_{0} = 3$$

As 4 linhas são linearmente dependentes, apenas 3 linhas são linearmente independentes

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 := L_2 - 3L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -9 & -7 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 := L_3 + \frac{2}{5}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -9 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{5} & -9/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

$C_{3\times5}$

$\mathcal{L}(C) \subseteq \mathbb{R}^5$
$\mathcal{C}(C) \subseteq \mathbb{R}^3$
$\mathcal{N}(C) \subseteq \mathbb{R}^5$

$car(C) = 3$
$\dim \mathcal{L}(C) = 3$
$\dim \mathcal{C}(C) = 3$
$nul(C) = 2$
$\dim \mathcal{N}(C) = 2$

base para $\mathcal{L}(C)$ é $\{(1,2,3,2,1), (3,1,0,-1,2), (0,2,1,1,1)\}$

$\mathcal{C}(C)$ é $\{(1,3,0), (2,1,2), (3,0,1)\}$

$\mathcal{C}(C) = \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 \\ x_2 = \frac{1}{5}(-9x_3 - 7x_4 - x_5) \\ x_3 = \frac{1}{13}(9x_4 + 3x_5) \\ x_4 \in \mathbb{R} \\ x_5 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

14 Novembro

(23) (f)

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad F_{3\times3}$$

$\mathcal{L}(F) \subseteq \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^3$

$\mathcal{C}(F) \subseteq \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^3$

$\mathcal{N}(F)$

$\mathcal{L}(F) = \langle (1,2,3), (1,0,-1), (-1,-1,0) \rangle$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 := L_3 + L_1]{L_2 := L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 := L_3 + 1/2 L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$car(F) = 3$
$\dim \mathcal{L}(F) = 3 \longrightarrow \mathcal{L}(F) = \mathbb{R}^3$
$\dim \mathcal{C}(F) = 3 \longrightarrow \mathcal{C}(F) = \mathbb{R}^3$

Todas as linhas e todas as colunas

base de $\mathcal{L}(F)$ é $\{(1,2,3),(1,0,-1),(-1,-1,0)\}$

base de $\mathcal{C}(F)$ é $\{(1,1,-1),(2,0,-1),(3,-1,0)\}$

→ Todas as bases do espaço vetorial têm a mesma dimensão

Coordenadas de um vetor numa base

Seja $\mathcal{B}=\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ uma base ordenada de um espaço vetorial $\mathcal{V}$

Teorema

Cada vetor $X \in \mathcal{V}$ escreve-se de forma única como combinação linear dos elementos da Base $\mathcal{B}$, ou seja, existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ únicos tais que

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, \dots, \alpha_n X_n$$

a esses escalares, que são os coeficientes da combinação linear chamamos coordenadas do vetor X na base $\mathcal{B}$ e escrevemos

$$[X]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Exemplo

$\mathcal{B}=\{(1,1),(1,2)\}$
base $\mathbb{R}^2$

$(2,3)=(1,1)+(1,2)$

$$[(2,3)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

se $\mathcal{C}$ for ~~com~~ a base canónica

$$[(2,3)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$(3,5) = (1,1) + \cancel{(1,2)}\ 2(1,2)$

$$[(3,5)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[(3,5)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$