Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I — Época Normal

Resolução

Duração: **2h30m**

Justifique todas as respostas e indique os cálculos efectuados.

65 Pontos

1. Considere a função real de variável real f definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\operatorname{arctg} x} & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$.

   (a) Estude f quanto à continuidade em $x = 0$.

   Indicações para uma resolução:
   Uma vez que

   - $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2}{\operatorname{arctg} x} \overset{RC}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x}{\dfrac{1}{1+x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} (2x(1+x^2)) = 0;$
   - $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0;$

   temos que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
   Como $f(0) = 0$ concluímos então que f é contínua em $x = 0$.

   (b) Determine, caso existam, as assimptotas do gráfico de f.

   Indicações para uma resolução:

   - Assimptotas verticais
     Uma vez que f é contínua em $\mathbb{R}$, o seu gráfico não admite assimptotas verticais.
   - Assimptota não vertical à esquerda
     Uma vez que

     $$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 1\,,$$

     podemos concluir que se o gráfico de f admitir assimptota não vertical à esquerda ela tem declive $m = 1$.
     Atendendo a que

     $$\begin{aligned} \lim_{x\to -\infty} (f(x) - mx) &= \lim_{x\to -\infty} (x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - x) \\ &= \lim_{x\to -\infty} \big(x(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1)\big) \\ &= \lim_{x\to -\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \\ &\overset{RC}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x\to -\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 1 \end{aligned}$$

     temos que a recta de equação $y = x + 1$ é a assimptota não vertical à esquerda do gráfico de f.

- Assimptota não vertical à direita
  Uma vez que
  $$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\operatorname{arctg} x} = +\infty$$
  temos que o gráfico de f não admite assimptota não vertical à direita.

(c) Considere a função g definida em $]-\infty,0[$ por $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. Justifique que g é invertível e determine a função inversa de g indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica que a define.

Indicações para uma resolução:

Temos $g(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, para todo o $x \in]-\infty,0[$.
A função g é a composta de duas funções injectivas, logo é injectiva e, portanto, é invertível.
Por definição de inversa de uma função temos que $D_{g^{-1}} = CD_g$ e $CD_{g^{-1}} = D_g$.

- *Determinação do contradomínio de g^{-1}*
  Como, por hipótese, $D_g =]-\infty,0[= \mathbb{R}^-$, temos $CD_{g^{-1}} = \mathbb{R}^-$.
- *Determinação do domínio de g^{-1}*
  Temos que $\left\{\dfrac{1}{x} : x \in D_g\right\} = \mathbb{R}^-$ e, portanto,
  $$CD_g = \left\{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} : x \in D_g\right\} =]0,1[= D_{g^{-1}}\ .$$
- *Determinação da expressão analítica que define g^{-1}*
  Para todo o $x \in \mathbb{R}^-$ e para todo o $y \in]0,1[$ temos
  $$y = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \iff \frac{1}{x} = \ln y \iff x = \frac{1}{\ln y}$$
  Consequentemente
  $$g^{-1}(x) = \frac{1}{\ln x}\,,$$
  para todo o $x \in]0,1[$.

Então g^{-1} é a função de contradomínio $\mathbb{R}^-$ definida por
$$\begin{array}{rccc} g^{-1}: &]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{\ln x} \end{array}$$

25 Pontos

2. Considere a função f definida em $\mathbb{R}_0^+$ por $f(x) = \sqrt{x}$.

(a) Determine o polinómio de Taylor, $p_3(x)$, de ordem 3 de f em torno de $a = 1$.

Indicações para uma resolução:

Temos
$$p_3(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3\,.$$
Uma vez que

- $f(1) = 1$;
- $f'(x) = \dfrac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} \Longrightarrow f'(1) = \dfrac{1}{2}$;
- $f''(x) = -\dfrac{1}{4}\,x^{-\frac{3}{2}} \Longrightarrow f''(1) = -\dfrac{1}{4}$;
- $f'''(x) = \dfrac{3}{8}\,x^{-\frac{5}{2}} \Longrightarrow f'''(1) = \dfrac{3}{8}$;

temos

$$p_3(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 \,.$$

(b) Mostre que o erro que se comete quando se aproxima $\sqrt{1,01}$ por $p_3(1,01)$ é inferior a 10^{-7}.

Indicações para uma resolução:

O erro que se comete quando se aproxima $\sqrt{1,01}$ por $p_3(1,01)$ é dado por $|R_3(1,01)|$, onde

$$R_3(1,01) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(1,01-1)^4$$

para algum ξ entre $1,01$ e 1.

Atendendo a que $f^{(4)}(x) = -\dfrac{15}{16}\,x^{-\frac{7}{2}} = -\dfrac{15}{16\sqrt{x^7}}$ temos, atendendo a que $\xi > 0$,

$$|R_3(1,01)| = \left| -\frac{15}{24 \times 16\sqrt{\xi^7}}(0,01)^4 \right| = \frac{5}{2^7\sqrt{\xi^7}}10^{-8} \,.$$

Como $1 < \xi < 1,01$, temos $1 < \xi^7 < (1,01)^7$, donde $1 < \sqrt{\xi^7} < \sqrt{(1,01)^7}$ o que implica que $\dfrac{1}{\sqrt{\xi^7}} < 1$.

Consequentemente

$$|R_3(1,01)| = \frac{5}{2^7\sqrt{\xi^7}}10^{-8} < \frac{5}{2^7}10^{-8} < 10^{-7} \,.$$

25 Pontos

3. Determine a função f definida em $\mathbb{R}$ tal que $f(0) = \dfrac{1}{16}$ e $f'(x) = x\,\mathrm{e}^{4x}$.

Indicações para uma resolução:

Seja φ a função definida por $\varphi(x) = x\,\mathrm{e}^{4x}$.

A função f é a primitiva da função φ que toma o valor $\dfrac{1}{16}$ na origem.

Comecemos por determinar a família das primitivas de φ, $\displaystyle\int x\,\mathrm{e}^{4x}\,dx$.

Tendo em vista a aplicação do método de primitivação por partes considerando

$$\begin{array}{lll} u(x) = x & \text{temos} & u'(x) = 1 \\ v'(x) = \mathrm{e}^{4x} & \text{temos} & v(x) = \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{4x} \end{array}$$

e obtemos

$$\begin{aligned} \int x\,\mathrm{e}^{4x}\,dx &= \frac{1}{4}\,x\,\mathrm{e}^{4x} - \int \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{4x}\,dx \\ &= \frac{1}{4}\,x\,\mathrm{e}^{4x} - \frac{1}{16}\,\mathrm{e}^{4x} + C \\ &= \left(\frac{1}{4}\,x - \frac{1}{16}\right)\mathrm{e}^{4x} + C, \quad C \in \mathbb{R} \,. \end{aligned}$$

Consequentemente temos $f(x) = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{16}\right)\mathrm{e}^{4x} + C$, para algum $C \in \mathbb{R}$. Atendendo a que

$$f(0) = \frac{1}{16} \iff -\frac{1}{16} + C = \frac{1}{16} \iff C = \frac{1}{8},$$

obtemos $f(x) = \left(\dfrac{1}{4}\,x - \dfrac{1}{16}\right)\mathrm{e}^{4x} + \dfrac{1}{8}$.

45 Pontos

4. Calcule os integrais indefinidos seguintes:

(a) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x(x-1)^2}\,dx$

Indicações para uma resolução:

Trata-se do integral indefinido de uma função racional cujo denominador está decomposto no produto de polinómios irredutíveis. Para o calcular vamos começar por decompor a fracção $\dfrac{2x-1}{x(x-1)^2}$ em fracções simples.

Temos

$$\begin{aligned}\frac{2x-1}{x(x-1)^2} &= \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}\\ &= \frac{A(x^2-2x+1)+B(x^2-x)+Cx}{x(x-1)^2}\\ &= \frac{(A+B)x^2+(-2A-B+C)x+A}{x(x-1)^2}\end{aligned}$$

donde resulta o sistema

$$\begin{cases} A+B=0\\ -2A-B+C=2\\ A=-1\end{cases} \iff \begin{cases} B=1\\ C=1\\ A=-1\end{cases}$$

e, portanto,

$$\frac{2x-1}{x(x-1)^2} = \frac{-1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\,.$$

Temos então

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-1}{x(x-1)^2}\,dx &= \int\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx\\ &= -\ln|x|+\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C\\ &= \ln\frac{|x-1|}{|x|}-\frac{1}{x-1}+C,\quad C\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Indicações para uma resolução:

Efectuando a substituição definida por $x=\operatorname{sen} t$, com $t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, temos

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}}\cos t\,dt\\ &= \int \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos t}\cos t\,dt\\ &= \int \operatorname{sen}^2 t\,dt\\ &= \int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2t)\right)dt\\ &= \frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2t)+C\\ &= \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C,\quad C\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Cálculos auxiliares:

De $x = \operatorname{sen} t$ resulta $t =$ arcsen x.

Uma vez que $\operatorname{sen}(2t) = 2\operatorname{sen} t \cos t$ e, para $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ temos $\cos t = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}$, obtemos $\operatorname{sen}(2t) = 2\operatorname{sen} t\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}$. Como $x = \operatorname{sen} t$ obtemos então $\operatorname{sen}(2t) = x\sqrt{1-x^2}$.

20 Pontos

5. Mostre que a função F definida em $[1, +\infty[$ por $F(x) = \displaystyle\int_0^{\ln x} \frac{e^t}{t+1}\, dt$ é estritamente crescente.

Indicações para uma resolução:

Uma vez que a função g definida em $[1, +\infty[$ por $g(x) = \ln x$ é diferenciável e a função f definida em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ por $f(t) = \dfrac{e^t}{t+1}$ é contínua, o Teorema Fundamental do Cálculo Integral garante que F é diferenciável e, para todo o $x \in [1, +\infty[$, temos

$$F'(x) = g'(x)f(g(x)) = \frac{1}{x} \cdot \frac{e^{\ln x}}{\ln x + 1} = \frac{x}{x(\ln x + 1)} = \frac{1}{\ln x + 1}\,.$$

Como $x \in [1, +\infty[$, tem-se $\ln x \geq 0$ e, portanto, $\ln x + 1 \geq 1$ o que implica que $F'(x) > 0$, para todo o $x \in [1, +\infty[$. Então F é estritamente crescente, como se pretendia.

20 Pontos

6. Calcule a área da região do plano situada entre $x = 0$ e $x = \dfrac{\pi}{3}$ e limitada pelo eixo das abcissas e pelo gráfico da função f definida por $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$.

Indicações para uma resolução:

Uma vez que, no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, f é integrável (pois é contínua) e não negativa, o valor pedido é dado por

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}\, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen} x(\cos x)^{-3}\, dx \\
&= -\frac{(\cos x)^{-2}}{-2}\Bigg]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{1}{2\cos^2 x}\Bigg]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)} - \frac{1}{2\cos^2 0} \\
&= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$