Universidade de Aveiro Departamento de Matemática

ALGA — Agrupamento IV (ECT, EET, TSI)

Teste de Avaliação 2

13 de janeiro de 2014 — Duração: **1h30**

40 pontos

1. Indique o que é pedido em cada alínea. Se precisar, pode colocar observações e cálculos auxiliares no espaço livre ao fundo desta página.

   (a) Considere os vetores $u = (1, -3, -2)$ e $v = (-3, 9, 6)$ de $\mathbb{R}^3$.

      i. Os vetores u e v são linearmente independentes? Sim Não

      ii. $\langle u, v\rangle$ é um espaço vetorial real? Sim e tem dimensão ---------- Não

      iii. O vetor $k = (0, 1, 0)$ é combinação linear dos vetores u e v? Sim Não

   (b) Identifique os conjuntos definidos pelas seguintes equações.

      i. $\frac{1}{3}x^2 - y^2 - 2y = -1$ em $\mathbb{R}^2$: --

      ii. $\frac{1}{3}x^2 - y^2 - 2z^2 = -1$ em $\mathbb{R}^3$: --

70 pontos

2. Considere a matriz simétrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e seja $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ uma matriz diagonalizante de A.

   Responda às seguintes questões, **justificando devidamente as suas respostas**.

   (a) Calcule os valores próprios de A.

   (b) Obtenha a matriz D diagonal tal que $P^{-1}AP = D$.

   (c) Determine a equação reduzida da seguinte superfície $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz - x + 2y + z = 0$.

90 pontos

3. Considere os vetores $u = (1, 1)$ e $v = (1, -1)$ de $\mathbb{R}^2$ e $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear definida por $\phi(u) = (0, 1, 2)$ e $\phi(v) = (2, -1, 0)$. Responda às seguintes questões, **justificando devidamente as suas respostas**.

   (a) Determine $\phi(2, 3)$.

   (b) Determine a matriz representativa de ϕ relativamente às bases ordenadas
   $$\mathcal{S} = (u, v) \quad \text{e} \quad \mathcal{T} = \big((-1, 1, 0), (0, 1, 1), (-1, 2, 0)\big).$$

   (c) Determine $\operatorname{im}(\phi)$ e indique a sua dimensão.

   (d) Sem determinar $\ker(\phi)$, diga se ϕ é, ou não, injetiva.