Departamento de Matemática **Universidade de Aveiro**

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Exame Final - 17/01/2011 **Duração: 2h30**

Nome: ______________________________ **N.º mecanográfico:** ____________

Declaro que desisto ______________________________ **N.º de folhas suplementares:** ___

Questão	1	2	3	4	5	6	Total
Cotação	25	35	35	35	25	45	200
Classificação							

Classificação final
valores

Justifique convenientemente todas as suas respostas e indique os cálculos que efectuar.

1. Utilize a regra de Cramer para resolver o sistema representado matricialmente por $AX = B$, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & a & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & b \end{bmatrix}$$

com a, b parâmetros reais. Indique, justificando, os valores de a e b para os quais:

(a) $\operatorname{car} A = 2$;

(b) A é invertível;

(c) $\dim \mathcal{N}(A) = 1$;

(d) 0 é um valor próprio de A.

Nome: ______________________________ **N.º mecanográfico:** __________

3. Considere os vectores $X = (1, 0, -3)$ e $Y = (3, 2, 1)$ de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Mostre que X e Y são ortogonais.

   (b) Averigue se o vector $(1, 1, 2)$ pertence ao espaço gerado por X e Y.

   (c) Encontre $Z \in \mathbb{R}^3$ tal que (X, Y, Z) é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

4. Considere o conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$.

   (a) Indique um conjunto gerador de S.

   (b) Indique uma base de $\mathbb{R}^3$ contendo uma base de S.

   (c) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear de núcleo S. Estude T quanto à injectividade e sobrejectividade.

5. Seja $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear representada pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

em relação à base canónica B_c de $\mathbb{R}^3$.

(a) Determine $L(x, y, z)$ para $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(b) Seja M a matriz de L em relação à base canónica B_c e à base $B = \big((1, 0, -1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\big)$ de $\mathbb{R}^3$. Apresente uma relação entre A e M, utilizando matrizes de mudança de base e indique-as.

6. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Determine os valores próprios de A.

(b) Determine uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios de A.

(c) Apresente uma equação reduzida e classifique a quádrica definida por $2x^2 + y^2 + z^2 + 2yz = 2$.