universidade de aveiro departamento de matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica

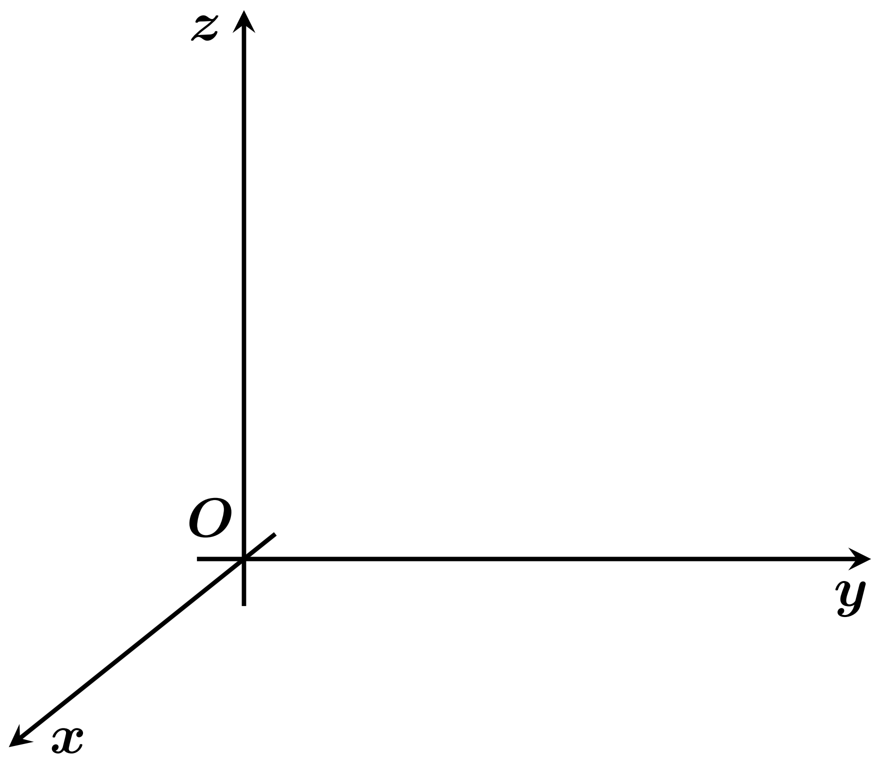
Agrupamento IV (ECT, EET, TSI)

Capítulo 1

Matrizes e Sistemas de Equações Lineares

2014/15

Fixamos um sistema de coordenadas:



$\boldsymbol{O} \quad \longrightarrow$ **origem**

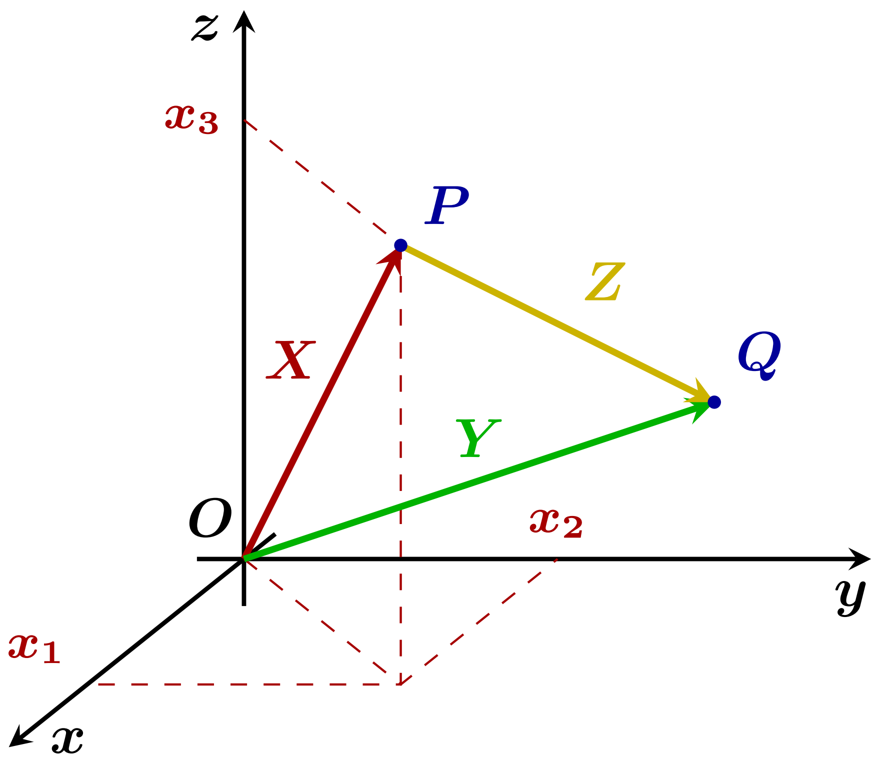
$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{Ox} \\ \boldsymbol{Oy} \\ \boldsymbol{Oz} \end{array}\right\} \longrightarrow \textbf{eixos coordenados}$$

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{xOy} \\ \boldsymbol{xOz} \\ \boldsymbol{yOz} \end{array}\right\} \longrightarrow \textbf{planos coordenados}$$

$x_1, x_2, x_3 \rightarrow$ **coordenadas** do ponto P

Associamos ao segmento de reta orientado $\overrightarrow{OP}$ o vetor

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

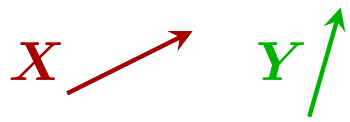


$y_1, y_2, y_3 \rightarrow$ **coordenadas** do ponto Q e seja Y o vetor associado a $\overrightarrow{OQ}$

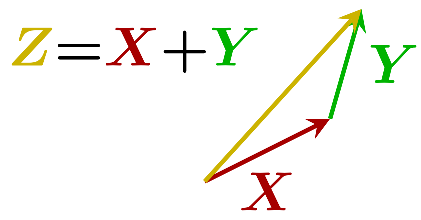
Ao segmento de reta orientado $\overrightarrow{PQ}$ fica associado o vetor $Z = \begin{bmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ y_3 - x_3 \end{bmatrix}$

Adição, multiplicação por escalar e combinação linear

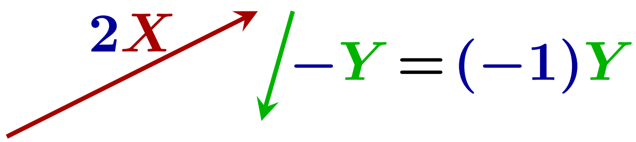
Sejam X **e** Y **vetores em** $\mathbb{R}^3$ **e** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ **escalares**



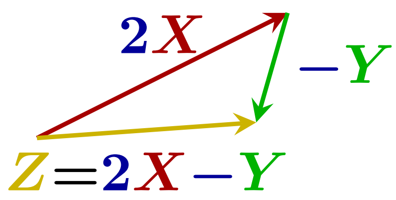
Adição: $Z = X + Y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix}$



Multiplicação por escalar: $\alpha X = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{bmatrix}$



Combinação linear: $Z = \alpha X + \beta Y = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \alpha x_3 + \beta y_3 \end{bmatrix}$



Os vetores em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ generalizam-se a vetores em $\mathbb{R}^n$:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Chamam-se **componentes** do vetor X aos números reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Operações em $\mathbb{R}^n$

- adição de vetores: $X + Y + Z$
- multiplicação de um vetor por um escalar: $2X$, $-Y$, αZ
- combinação linear de vetores: $2X - Y + \alpha Z$

Os vetores em $\mathbb{R}^n$ generalizam-se a vetores em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ a que chamamos

MATRIZES

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A é uma matriz com m linhas e n colunas, tem $m \times n$ elementos

diz-se matriz $m \times n$, de ordem $m \times n$, de dimensão $m \times n$

Matriz $m \times n$

$$A = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \leftarrow \textbf{linha } i \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ \textbf{coluna } j \end{array} & \end{array}$$

a_{ij} é o elemento ou entrada (i, j) da matriz A

Notação abreviada: $A = A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij}]$

Matriz nula $(m \times n)$, cujas entradas são todas iguais a 0, denota-se por

$$O \text{ (ou } O_{m\times n}\text{).}$$

Matriz linha $(1 \times n)$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

Matriz coluna $(m \times 1)$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

matriz com o mesmo número de linhas e de colunas

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

diagonal principal

Uma matriz **quadrada** $A = [a_{ij}]$ diz-se **diagonal** se $a_{ij} = 0$, $i \neq j$, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ii} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Chama-se a **matriz identidade de ordem n** e denota-se por I (ou I_n) a uma matriz **diagonal** $n \times n$ com

$$a_{11} = \cdots = a_{nn} = 1$$

Uma matriz **quadrada** $A = [a_{ij}]$ é

triangular superior se $a_{ij} = 0$, para $i > j$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

triangular inferior se $a_{ij} = 0$, para $i < j$.

A **transposta** da matriz $m \times n$ $A = [a_{ij}]$ é a matriz $n \times m$

$$A^T = [a_{ji}]$$

obtida por troca da posição relativa das linhas pelas colunas da matriz A, por exemplo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Propriedade:

$$(A^T)^T = A.$$

Uma matriz A diz-se **simétrica** se $A = A^T$. (**Nota:** toda a matriz simétrica é quadrada.)

Sejam $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ matrizes $m \times n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

As matrizes A e B são **iguais**, $A = B$, se

$$a_{ij} = b_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.$$

A **soma de A e B** é a matriz $m \times n$ $A + B = C = [c_{ij}]$ tal que

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.$$

O **produto de A pelo escalar α** é a matriz $m \times n$ $\alpha A = D = [d_{ij}]$ tal que

$$d_{ij} = \alpha\, a_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.$$

A matriz $m \times n$ A é uma **combinação linear** das matrizes $A_1, \ldots, A_k$ $m \times n$ se

$$A = \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_k A_k, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$$

Propriedades da adição de matrizes

- **comutativa:** $A + B = B + A$,
- **associativa:** $(A + B) + C = A + (B + C)$,
- **admite elemento neutro:** $A + O = O + A = A$,
- A **possui simétrico aditivo:** $A + (-A) = (-A) + A = O$,
- $(A + B)^T = A^T + B^T$, **para quaisquer matrizes** $m \times n$ A, B, C.

Propriedades da multiplicação por escalar de matrizes

- **associativa:** $\alpha\,(\beta\,A) = (\alpha\,\beta)\,A$,
- **distributiva:** $(\alpha + \beta)\,A = \alpha\,A + \beta\,A$,
- **distributiva:** $\alpha(A + B) = \alpha\,A + \alpha\,B$,
- $(\alpha A)^T = \alpha\,A^T$, **para quaisquer matrizes** $m \times n$ A, B, **e** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Multiplicação de uma matriz linha por uma matriz coluna

Dadas $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ **e** $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

o produto da matriz linha A **pela matriz coluna** B **é**

$$A\,B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Operação bem definida só se A **e** B **possuem igual número de elementos!**

Caso geral: multiplicação de A matriz $m \times n$ e B matriz $n \times p$ sendo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{np} \end{bmatrix}$$

o **produto de A por B** é a matriz $m \times p$ $AB = [c_{ij}]$ cuja entrada (i, j) resulta da multiplicação da **linha i** de A pela **coluna j** de B:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj}, \qquad i = 1, \dots, m, \; j = 1, \dots, p.$$

- **associativa:** $(AB)C = A(BC)$,
- **distributiva à esquerda e à direita, em relação à adição:**

$$(A+\widetilde{A})B = AB + \widetilde{A}B \quad \text{e} \quad A(B+\widetilde{B}) = AB + A\widetilde{B},$$

- **admite elemento neutro à esquerda e à direita:** $I_m A = A = A I_n$,
- $(\alpha A)B = \alpha\,(AB) = A(\alpha B)$,
- $(AB)^T = B^T A^T$,

para quaisquer matrizes $A, \widetilde{A}$ $m \times n$, $B, \widetilde{B}$ $n \times p$, C $p \times q$ **e** $\alpha \in \mathbb{R}$.

Nota importante: A multiplicação de matrizes não é comutativa!

Sejam A uma matriz $n \times n$ e $p \in \mathbb{N}$.

A **potência p** de A é a matriz $n \times n$ dada por

$$A^p = A\, A^{p-1},$$

em que $A^0 = I_n$, por convenção.

Propriedades da potência de matrizes

- $(A^p)^q = A^{pq}$
- $A^p A^q = A^{p+q}$

Nota: Em geral $(AB)^p \neq A^p B^p$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}\,x_1 + \cdots + a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ & \vdots & \\ a_{m1}\,x_1 + \cdots + a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

matriz dos coeficientes — **coluna das incógnitas** — **coluna dos termos independentes**

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}\,x_1 + \cdots + a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \\ a_{m1}\,x_1 + \cdots + a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad AX = B,$$

em que A é a matriz $(m \times n)$ dos coeficientes do sistema,

X é a coluna $(n \times 1)$ das incógnitas,

B é a coluna $(m \times 1)$ dos termos independentes e

$$M = [\,A\,|\,B\,] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

é dita a matriz ampliada, aumentada ou completa $m \times (n+1)$ do sistema.

A primeira entrada não nula de cada linha é designada por pivot.

$$\begin{bmatrix} 0 & \ldots & a_1 & * & \ldots & * & * & * & \ldots & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & a_2 & * & * & \ldots & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_3 & \ldots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \quad a_1, a_2, a_3, \cdots \neq 0$$

- **Abaixo de cada pivot só ocorrem zeros,**
- **Dadas duas linhas não nulas consecutivas, o pivot da linha $i+1$ está à direita do pivot da linha i,**
- **As linhas nulas, caso existam, ocorrem só na parte inferior da matriz.**

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & * & \dots & 0 & * & 0 & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & * & 0 & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

- **A matriz está na forma escalonada por linhas,**
- **Os pivots são todos iguais a 1,**
- **Acima de cada pivot só ocorrem zeros.**

Operações elementares nas linhas de uma matriz

1. Troca da posição relativa de duas linhas, p.e. i e j: $L_i \leftrightarrow L_j$
2. Multiplicação de uma linha, p.e. i, por um escalar $\alpha \neq 0$: $L_i := \alpha\, L_i$
3. Substituição de uma linha, p.e. i, pela que dela se obtém adicionando-lhe outra linha, p.e. j, multiplicada por um escalar $\beta \in \mathbb{R}$: $L_i := L_i + \beta\, L_j$

Matrizes equivalentes por linhas

Duas matrizes A e C são **equivalentes por linhas** e escreve-se

$$A \sim C$$

se C resulta de A por aplicação de uma sequência finita de operações elementares nas linhas de A.

Teorema

Toda a matriz $m \times n$ é equivalente por linhas a uma matriz escalonada por linhas (reduzida).

Exemplo ilustrativo do teorema anterior

Passo 1: **Encontrar, na 1.ª coluna não nula, o 1.º elemento não nulo pivot.**

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-6} & \mathbf{9} & \mathbf{7} \end{bmatrix}$$

Passo 2: **Trocar linhas** para colocar o **pivot como 1.º elemento da coluna**.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \leftrightarrow L_3$$

Passo 3: Operar com as linhas para obter **zeros abaixo** do **pivot**.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$L_4 := L_4 - L_1$$

Passo 4: Considerar a **submatriz** que se obtém eliminando a 1.ª linha e aplicar os passos 1 a 4 até esgotar as linhas.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

Fim Passo 4: Obtém-se uma **matriz escalonada por linhas** equivalente a A.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Passo 5: **Multiplicar as linhas não nulas pelos inversos dos pivots de modo a obter pivots iguais a 1.**

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_1 := \tfrac{1}{2}L_1$$
$$L_2 := \tfrac{1}{2}L_2$$
$$L_3 := \tfrac{1}{2}L_3$$

Passo 6: Operar com as linhas de modo a obter **zeros acima dos pivots**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{19}{4} & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$L_2 := L_2 - \tfrac{3}{2}L_3 \qquad L_1 := L_1 - L_2$$

$$L_1 := L_1 + \tfrac{5}{2}L_3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 & \frac{19}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtém-se uma matriz escalonada por linhas reduzida equivalente a A.

Teorema

Se as matrizes ampliadas de dois sistemas lineares são $[\,A\,|\,B\,]$ e $[\,C\,|\,D\,]$, tais que

$$[\,A\,|\,B\,] \sim [\,C\,|\,D\,],$$

então os dois sistemas têm o mesmo conjunto de soluções.

Nota: Se $B = D = 0$, basta que $A \sim C$ para que os sistemas possuam o mesmo conjunto de soluções.

Método de eliminação de Gauss

1. Dado o sistema $AX = B$, formar a sua matriz ampliada $[\,A \mid B\,]$.
2. Transformar $[\,A \mid B\,]$ numa forma escalonada por linhas $[\,C \mid D\,]$.
3. Escrever o sistema $CX = D$, ignorando as linhas nulas, e resolver por substituição ascendente.

Método de eliminação de Gauss-Jordan

1. Dado o sistema $AX = B$, formar a sua matriz ampliada $[\,A \mid B\,]$.
2. Transformar $[\,A \mid B\,]$ numa forma escalonada por linhas <u>reduzida</u> $[\,E \mid F\,]$.
3. Escrever o sistema $EX = F$, ignorando as linhas nulas, e resolver.

Um sistema linear representado matricialmente por $AX = B$, tal que

$$[\,A\,|\,B\,] \sim [\,C\,|\,D\,],$$

com a matriz $[\,C\,|\,D\,]$ escalonada por linhas, classifica-se em

- impossível se não possui solução;
- possível e determinado se possui uma única solução (todas as colunas de C têm pivot);
- possível e indeterminado se possui uma infinidade de soluções (sendo o grau de indeterminação do sistema $=$ n.º de incógnitas livres $=$ n.º de colunas de C sem pivot).

A **caraterística** da matriz A, $\mathrm{car}(A)$, é o número de pivots de uma matriz C escalonada por linhas equivalente a A.

O sistema linear $AX = B$ com A $m \times n$ e B $m \times 1$ é

1. **impossível** $\Leftrightarrow$ $\mathrm{car}(A) < \mathrm{car}([A|B])$;
2. **possível e determinado** $\Leftrightarrow$ $\mathrm{car}(A) = \mathrm{car}([A|B]) = n$;
3. **possível e indeterminado de grau $n - \mathrm{car}(A)$** $\Leftrightarrow$ $\mathrm{car}(A) = \mathrm{car}([A|B]) < n$.

O **espaço das colunas** de uma matriz A $m \times n$, $\mathcal{C}(A)$, é o conjunto de todas as combinações lineares das colunas $C_1, \ldots, C_n$ de A,

$$\mathcal{C}(A) = \{\alpha_1 C_1 + \cdots + \alpha_n C_n, \;\; \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}.$$

Se $X = [\alpha_1 \cdots \alpha_n]^T$, então $AX = \alpha_1 C_1 + \cdots + \alpha_n C_n$, logo

$$\mathcal{C}(A) = \{AX \in \mathbb{R}^m : \; X \in \mathbb{R}^n\}.$$

Teorema

Dada A $m \times n$ e B $m \times 1$, temos

$$B \in \mathcal{C}(A) \;\Leftrightarrow\; AX = B \text{ é um sistema possível.}$$

O **espaço das linhas** de uma matriz A $m \times n$, $\mathcal{L}(A)$, é o conjunto de todas as combinações lineares das colunas $L_1^T, \ldots, L_m^T$ que resultam da transposta das linhas $L_1, \ldots, L_m$ de A,

$$\mathcal{L}(A) = \{\alpha_1 L_1^T + \cdots + \alpha_m L_m^T, \ \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}\}.$$

Proposição Se $A \sim C$, então $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(C)$.

Como $\mathcal{L}(A) = \mathcal{C}(A^T)$, temos

$$B \in \mathcal{L}(A) \Leftrightarrow A^T X = B \text{ é um sistema possível.}$$

Um sistema diz-se homogéneo se os termos independentes são todos nulos:

$$A\,X = \mathbf{0}.$$

Todo o sistema homogéneo é possível pois possui pelo menos a solução nula, dita solução trivial.

Se A é $m \times n$ e $m < n$, então $AX = \mathbf{0}$ admite uma solução não trivial.

A nulidade de A, $\mathrm{nul}(A)$, é o número de incógnitas livres do sistema $AX = 0$,

$$\mathrm{nul}(A) = n - \mathrm{car}(A).$$

O espaço nulo de A, $\mathcal{N}(A)$, é o conjunto de todas as soluções do sistema homogéneo associado a A $m \times n$,

$$\mathcal{N}(A) = \{X \in \mathbb{R}^n : \; AX = \mathbf{0}\}.$$

Uma matriz A $n \times n$ diz-se invertível se existe B $n \times n$ tal que

$$A\,B = B\,A = I_n$$

À única matriz B satisfazendo a relação anterior chama-se inversa de A e denota-se por A^{-1}.

Caso contrário (não existe B), A diz-se singular ou não invertível.

Teorema

Se A $n \times n$ é invertível, então a inversa de A é única.

Teorema

Se A, B $n \times n$ e $B\,A = I_n$, então $A\,B = I_n$.

Propriedades

1. $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$; para quaisquer A, B $n \times n$ invertíveis.

Método prático para determinar a inversa

$$[A \,|\, I_n] \;\sim\; [I_n \,|\, A^{-1}]$$
$$\uparrow$$

método de eliminação de Gauss-Jordan

Teorema Uma matriz A $n \times n$ é invertível se e só se A é equivalente por linhas a I_n.

Teorema Dada A $n \times n$, são equivalentes as afirmações

1. A é **invertível**
2. $A \sim I_n$
3. $\mathrm{car}(A) = n$
4. $\mathrm{nul}(A) = 0$
5. $AX = B$ tem uma **única** solução $X = A^{-1}B$ para cada B $n \times 1$
6. $AX = 0$ possui **apenas** a **solução trivial**
7. $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^n$
8. $\mathcal{L}(A) = \mathbb{R}^n$
9. $\mathcal{N}(A) = \{0\}$