*Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro*

# Cálculo I — Primeiro Mini-Teste (23/10/2006)

## *Resolução*

1. Considere a função $f$ definida por $f(x) = x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} + \ln(x^2)$.

   (a) Determine o domínio de $f$.

   **Indicações para a resolução:**

   Temos
   $$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge x^2 > 0\right\} \ .$$
   Uma vez que
   $$x^2 > 0 \Longleftrightarrow x \neq 0 \ ,$$
   temos
   $$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \ .$$

   (b) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

   **Indicações para a resolução:**

   Temos
   - $\lim\limits_{x\to 0} \left(x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}\right) = 0$, porque se trata do produto de um infinitésimo por uma função limitada;
   - $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x^2) = -\infty$.

   Utilizando as propriedades dos limites vem
   $$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x} + \ln(x^2)\right) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

   (c) Indique, para cada $n \in \mathbb{N}$, $n$ par, $\lim\limits_{x\to 0} \big(f(x)\big)^n$.

   **Indicações para a resolução:**

   Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n$ par, temos
   $$\lim_{x\to 0} \big(f(x)\big)^n = +\infty \ .$$

   (d) Mostre que a função $f$ admite pelo menos um zero no intervalo $\left[\dfrac{1}{\pi}, 1\right]$.

   **Indicações para a resolução:**

   Uma vez que:
   - a função $f$ é contínua no intervalo $\left[\dfrac{1}{\pi}, 1\right]$;
   - $f\left(\dfrac{1}{\pi}\right) = \dfrac{1}{\pi} \operatorname{sen} \pi + \ln\left(\dfrac{1}{\pi^2}\right) = -\ln(\pi^2) < 0$, porque $\pi^2 > 1$ e a função logaritmo natural é positiva no intervalo $]1, +\infty[$;
   - $f(1) = \operatorname{sen} 1 > 0$, porque $1 \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ e a função seno é positiva no primeiro quadrante;

   o Teorema de Bolzano permite concluir que existe $x_0 \in \left]\dfrac{1}{\pi}, 1\right[$ tal que $f(x_0) = 0$.

2. Sejam $g$ uma função de domínio $\mathbb{R}$ e $f$ a função definida por $f(x) = 1 - \mathrm{e}^{x+1}$. Sabendo que $g(x) = 0$ se e só se $x = 0$ ou $x = 2$, determine os zeros de $g \circ f$.

   **Indicações para a resolução:**

   Os zeros de $g \circ f$ são os elementos de $D_{g \circ f}$ que satisfazem a equação $(g \circ f)(x) = 0$. Como $f$ e $g$ têm domínio $\mathbb{R}$ temos que $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$ e, portanto, os zeros de $g \circ f$ são os elementos de $\mathbb{R}$ que satisfazem equação $(g \circ f)(x) = 0$. Temos

$$\begin{array}{rcll} (g \circ f)(x) = 0 & \Longleftrightarrow & g(f(x)) = 0 & \text{por definição de composta} \\ & \Longleftrightarrow & g(1 - \mathrm{e}^{x+1}) = 0 & \text{por definição de } f \\ & \Longleftrightarrow & 1 - \mathrm{e}^{x+1} = 0 \vee 1 - \mathrm{e}^{x+1} = 2 & \text{por hipótese} \\ & \Longleftrightarrow & \mathrm{e}^{x+1} = 1 \vee \qquad \underbrace{\mathrm{e}^{x+1} = -1}_{\text{Condição impossível em } \mathbb{R}} & \\ & \Longleftrightarrow & x + 1 = 0 \Longleftrightarrow x = -1 & \end{array}$$

   Logo $g \circ f$ tem um único zero $x = -1$.

3. Considerando o domínio da restrição principal do coseno, seja $g$ a função definida por $g(x) = 1 + \cos\dfrac{\pi}{x}$. Caracterize a função inversa de $g$.

   **Indicações para a resolução:**

   Por definição de inversa de uma função temos que $D_{g^{-1}} = CD_g$ e $CD_{g^{-1}} = D_g$.

   - *Determinação do contradomínio de* $g^{-1}$

     Temos

$$\begin{aligned} D_g &= \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge \frac{\pi}{x} \in [0, \pi]\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge \frac{\pi}{x} \geq 0 \wedge \frac{\pi}{x} \leq \pi\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge x > 0 \wedge x \geq 1\} \\ &= [1, +\infty[ \end{aligned}$$

     pelo que

$$CD_{g^{-1}} = [1, +\infty[\,.$$

   - *Determinação do domínio de* $g^{-1}$

     Como, para todo o $x \in D_g$, $\dfrac{\pi}{x} \neq 0$, temos que $\cos\dfrac{\pi}{x} \neq 1$. Consequentemente, para todo o $x \in D_g$, temos

$$-1 \leq \cos\frac{\pi}{x} < 1 \Longleftrightarrow 0 \leq 1 + \cos\frac{\pi}{x} < 2\,.$$

     Então

$$D_{g^{-1}} = [0, 2[\,.$$

   - *Determinação da expressão analítica que define* $g^{-1}$

$$\begin{aligned} y = 1 + \cos\frac{\pi}{x} &\Longleftrightarrow y - 1 = \cos\frac{\pi}{x} \\ &\Longleftrightarrow \frac{\pi}{x} = \arccos(y - 1) \\ &\Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{\arccos(y - 1)} \end{aligned}$$

     Então, para todo o $x \in [0, 2[$, $\quad g^{-1}(x) = \dfrac{\pi}{\arccos(x - 1)}$.

Logo $g^{-1}$ é a função de contradomínio $[1, +\infty[$ definida por

$$\begin{array}{rccc} g^{-1}: & [0,2[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\pi}{\arccos(x-1)} \end{array}$$

4. Sejam $f$ e $g$ duas funções reais de variável real tais que $g \circ f$ está definida. Mostre que se $f$ e $g$ são estritamente crescentes, então $g \circ f$ é estritamente crescente.

**Indicações para a resolução:**

Vamos provar que, para todo o $x_1, x_2 \in D_{g\circ f}$, se $x_1 > x_2$, então $(g \circ f)(x_1) > (g \circ f)(x_2)$.

Sejam $x_1, x_2 \in D_{g\circ f}$ tais que $x_1 > x_2$.

Como $D_{g\circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$ temos que $x_1, x_2 \in D_f$ e, como $f$ é estritamente crescente, temos que

$$f(x_1) > f(x_2) \; . \tag{1}$$

Uma vez que $f(x_1), f(x_2) \in D_g$ e $g$ é estritamente crescente a desigualdade (1) implica

$$g(f(x_1)) > g(f(x_2)) \Longleftrightarrow (g \circ f)(x_1) > (g \circ f)(x_2) \; ,$$

Ficou então provado que $g \circ f$ é estritamente crescente.