

Matemática Discreta

Elementos de Teoria dos Grafos

Universidade de Aveiro 2016/2017

<http://moodle.ua.pt>

Conceitos fundamentais de teoria dos grafos

Representação de grafos em computador

Grafos orientados e não orientados

Definição (de grafo não orientado)

Designa-se por **grafo** (não orientado) um terno

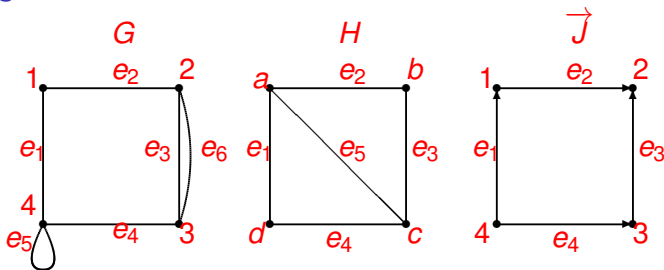
$G = (V(G), E(G), \psi_G)$, onde $V = V(G)$ é um conjunto não vazio, $E = E(G)$ é um conjunto disjunto de V e ψ_G é uma função tal que para cada $e \in E$, $\psi_G(e)$ denota um par não ordenado de elementos (não necessariamente distintos) de V .

- ▶ V - conjunto de vértices;
 - ▶ E - conjunto de arestas;
 - ▶ ψ_G - função de incidência.
- Se ψ_G determina, para cada $e \in E$, um par ordenado de elementos de V , o terno $\vec{G} = (V(\vec{G}), E(\vec{G}), \psi_{\vec{G}})$ designa-se por **grafo orientado** (ou **digrafo**) e o conjunto E designa-se por conjunto de **arcos**.

Relação de adjacência

- Dado um grafo G (digrafo \vec{G}), por simplicidade de escrita, denotam-se as arestas (arcos) $e \in E(G)$ pelas respectivas imagens $\psi_G(e) = uv$, onde uv denota um par não ordenado (ordenado) de vértices. Neste caso u e v designam-se por **vértices extremos** da aresta (do arco).
- Se o grafo é orientado o vértice u designa-se por **cauda** e o vértice v por **cabeça** do arco e .
- Uma aresta diz-se **incidente** nos seus vértices extremos. Se uma aresta e é incidente nos vértices u e v , então u e v dizem-se **adjacentes**.
- Duas arestas incidentes num mesmo vértice dizem-se **adjacentes**.

Exemplos



- $V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$, $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$,
 $\psi_G(e_1) = 14$, $\psi_G(e_2) = 12$, $\psi_G(e_3) = 23$, $\psi_G(e_4) = 43$,
 $\psi_G(e_5) = 44$, $\psi_G(e_6) = 23$.
- $V(H) = \{a, b, c, d\}$, $E(H) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, $\psi_H(e_1) = ad$,
 $\psi_H(e_2) = ab$, $\psi_H(e_3) = bc$, $\psi_H(e_4) = cd$, $\psi_H(e_5) = ac$.
- $V(\vec{J}) = \{1, 2, 3, 4\}$, $E(\vec{J}) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $\psi_{\vec{J}}(e_1) = 41$,
 $\psi_{\vec{J}}(e_2) = 12$, $\psi_{\vec{J}}(e_3) = 32$, $\psi_{\vec{J}}(e_4) = 43$.

O conceito de vizinhança

- Designa-se por **vizinhança** de $v \in V(G)$, o conjunto de todos os vértices adjacentes a v .
- A vizinhança do vértice $v \in V(G)$ denota-se por $\mathcal{N}_G(v)$ ou, simplesmente, por $\mathcal{N}(v)$ quando não há dúvida relativamente ao grafo considerado.
- Uma aresta e com ambos os extremos no mesmo vértice u , ou seja, tal que $\psi_G(e) = uu$ diz-se um **lacete**.
- Duas arestas com os mesmos vértices extremos designam-se por **arestas paralelas**.

Observação: um grafo admite várias representações gráficas mas cada representação gráfica determina um único grafo.

Grafos e digrafos simples

Definição

Um grafo (digrafo) diz-se **simples** se não contém arestas (arcos) paralelas(os) nem lacetes.

Observação: Num grafo simples uma aresta é completamente determinada pelos seus vértices extremos e, nesse caso, um grafo G pode definir-se, unicamente, pelo par de conjuntos $G = (V(G), E(G))$.

- É comum designar um grafo (digrafo) com lacetes e/ou arestas paralelas por **multigrafo** (**multidigrafo**).
- De agora em diante, introduzimos os conceitos comuns a grafos e digrafos utilizando apenas o contexto dos grafos (chamando a atenção para os conceitos específicos).

Ordem e dimensão de um grafo

- Designa-se por grafo trivial um grafo simples com um único vértice, ou seja, tal que $|V(G)| = 1$ e $|E(G)| = 0$.
- Um grafo diz-se finito se $V(G)$ e $E(G)$ são ambos finitos. Caso contrário, diz-se infinito.

Definição (de ordem de um grafo)

Designa-se por ordem do grafo G e denota-se por $\nu(G)$ (ou ν se não houver dúvidas quanto ao grafo considerado), o número de vértices de G .

Definição (de dimensão de um grafo)

Designa-se por dimensão do grafo G e denota-se por $\varepsilon(G)$ (ou ε se não houver dúvidas quanto ao grafo considerado), o número de arestas de G .

Igualdade de grafos e grafos complementares

Definição

Dois grafos G e H dizem-se iguais, escrevendo-se $G = H$ se

$$V(G) = V(H), E(G) = E(H), \psi_G = \psi_H.$$

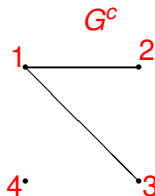
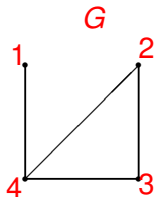
Definição

Dado um grafo G simples, designa-se por grafo complementar de G e denota-se por G^c , um grafo simples cujo conjunto de vértices é $V(G)$ e no qual dois vértices são adjacentes se e só se não são adjacentes em G .

Observação: $(G^c)^c = G$.

Grau de um vértice

Exemplo de grafos complementares:



Definição (de grau)

Dado um grafo G e um vértice $v \in V(G)$ designa-se por grau de v e denota-se por $d_G(v)$ (ou, simplesmente, $d(v)$) o número de arestas incidentes em v (onde os lacetes, caso existam, contam duas vezes).

Maior e menor grau

- O maior grau dos vértices do grafo G denota-se por $\Delta(G)$, ou seja, $\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} \{d_G(v)\}$.
- O menor grau dos vértices de G denota-se por $\delta(G)$, ou seja, $\delta(G) = \min_{v \in V(G)} \{d_G(v)\}$.
- No caso de um digrafo, \vec{G} , podemos dividir o grau de um vértice $v \in V(\vec{G})$ em
 - ▶ semigrau de entrada $d_{\vec{G}}^{-}(v) = |\{xv \in E(\vec{G})\}|$;
 - ▶ semigrau de saída $d_{\vec{G}}^{+}(v) = |\{vx \in E(\vec{G})\}|$.
- Verifica-se a igualdade: $d_{\vec{G}}(v) = d_{\vec{G}}^{-}(v) + d_{\vec{G}}^{+}(v)$.

Exercício

Utilizando um grafo resolva o seguinte problema:

O Sr. e a Sra. Silva convidaram quatro casais para jantar em casa. Alguns são amigos do Sr. Silva e outros amigos da Sra. Silva. Em casa do casal Silva os convidados que já se conheciam cumprimentaram-se com um aperto de mão e os restantes apenas se saudaram.

Depois de todos terem chegado o Sr. Silva observou

- ▶ se me excluir a mim todos deram um número diferente de apertos de mão.

Quantos apertos de mão deu o Sr. Silva?

Resolução do exercício

É claro que os membros de um mesmo casal não se cumprimentaram um ao outro, pelo que o número de cumprimentos variou entre 0 e 8.

Por outro lado, uma vez que, excluindo o Sr. Silva, todas as restantes 9 pessoas deram um número diferente de apertos de mão, podemos atribuir a cada uma delas exactamente um índice j entre 0 e 8 que corresponde ao número de apertos de mão que deu.

Ou seja, a pessoa n_j deu j apertos de mão.

Resolução do exercício (cont.)

- ▶ Uma vez que o número n_8 deu 8 apertos de mão, ele apertou a mão a toda a gente, com excepção dele próprio e da mulher. Logo, n_8 e n_0 são casados.
- ▶ Por sua vez, n_7 só não apertou a mão a ele próprio, a n_0 e n_1 (uma vez que este último só deu um aperto de mão e foi a n_8). Logo, n_7 e n_1 são casados.
- ▶ Por sua vez, n_6 só não deu apertos de mão a si próprio, a n_0 , n_1 e n_2 (note-se que este último deu um aperto de mão a n_8 e n_7). Logo, n_2 e n_6 são casados.
- ▶ O n_5 apertou a mão de n_8 , n_7 , n_6 , n_4 e ao Sr. Silva e, consequentemente, é casado com n_3 . Assim, n_4 é a Sra Silva (que, naturalmente, não deu um aperto de mão ao Sr. Silva) e ficam determinados todos os apertos de mão.

Como consequência, o Sr. Silva apertou a mão a 4 convidados (n_8 , n_7 , n_6 e n_5).

Resultados básicos

Teorema

Para todo o grafo G , a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas, ou seja,

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2 |E(G)|$$

Corolário

O número de vértices de grau ímpar é par.

- No caso de grafos orientados vem:

$$\sum_{v \in V(G)} d_G^+(v) = \sum_{v \in V(G)} d_G^-(v) = |E(G)|$$

Matriz de adjacência

Definição (de matriz de adjacência)

Designa-se por matriz de adjacência e denota-se por $A_G = (a_{ij})$, a matriz quadrada de dimensão $\nu \times \nu$, tal que a_{ij} é igual ao número de arestas entre os vértices v_i e v_j (onde se incluem os lacetes cujo número de incidentes num dado vértice v_i é dado por a_{ii}). Sendo \vec{G} um grafo orientado, então a_{ij} é o número de arcos com cauda em v_i e cabeça em v_j .

- Esta representação utiliza ν^2 células de memória.

Exemplo:

$$A_H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_{\vec{J}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matriz de incidência aresta-vértice

Definição (de matriz de incidência aresta-vértice)

Designa-se por matriz de incidência aresta-vértice ou simplesmente matriz de incidência e denota-se por $M_G = (m_{ij})$ a matriz de dimensão $\nu \times \varepsilon$ tal que

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } e_j = v_p v_q \text{ com } i \notin \{p, q\} \\ 1 & \text{se } e_j = v_i v_k, \text{ com } k \neq i \\ 2 & \text{se } e_j = v_i v_i \end{cases}$$

- No caso dos grafos orientados, \vec{G} sem lacetes as entradas da matriz de incidência $M_{\vec{G}} = (m_{ij})$ são dadas por

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } e_j = v_p v_q \text{ com } i \notin \{p, q\} \\ -1 & \text{se } e_j = v_k v_i, \text{ para algum vértice } v_k \\ 1 & \text{se } e_j = v_i v_k, \text{ para algum vértice } v_k \end{cases}$$

Exemplo

- Esta representação utiliza $\nu \times \varepsilon$ células de memória.

$$M_H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{\vec{J}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lista de arestas e dois vectores

- A representação por **lista de arestas** consiste precisamente em armazenar numa lista todas as arestas do grafo. No caso do grafo H vem $[ad, ab, bc, cd, ac]$. Esta representação utiliza ε células de memória.

Observação. Perde-se informação sobre vértices isolados.

- Na representação com dois vectores, a lista de arestas é construída recorrendo a dois vectores:

$$F = (f_1, \dots, f_\varepsilon) \text{ e } T = (t_1, \dots, t_\varepsilon)$$

tais que a aresta $e_i, i = 1, \dots, \varepsilon$ tem como vértices extremos f_i e t_i . No caso de digrafos o arco e_i tem cauda f_i e cabeça t_i .

Exemplo da representação com dois vectores: Considerando o digrafo \vec{J} , obtém-se $F = (4, 1, 3, 4)$ e $T = (1, 2, 2, 3)$.

Listas de sucessores ou listas de adjacência

- As listas de sucessores (ou listas de adjacência) utilizam ν listas (uma por cada vértice). A cada vértice v faz-se corresponder a lista de todos os vértices que lhe são adjacentes (ou todos os vértices que são cabeça de um arco com cauda em v se o grafo é orientado), com eventual repetição no caso de multigrafos.

Exemplo: no caso do grafo \vec{J} vem

1 : 2
 2 :
 3 : 2
 4 : 1, 3

- Esta representação utiliza $\varepsilon + \nu$ células de memória.