



Justifique todas as respostas e indique os cálculos efectuados.

80
Pontos

1. Considere a função f definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2 + 1} & \text{se } x \geq 0 \\ x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

- (a) Estude f quanto à continuidade na origem.
- (b) Determine, caso existam, as assíntotas do gráfico de f .
- (c) Estude f quanto à diferenciabilidade na origem.
- (d) Calcule o valor da área da região do plano situada entre $x = 0$ e $x = 1$ e limitada pelo gráfico de f e pelo eixo das abcissas.
- (e) Estude a natureza do integral impróprio $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ e, em caso de convergência, calcule o seu valor.

20
Pontos

2. Considerando a restrição principal do seno, caracterize a função inversa da função g definida por $g(x) = \frac{\pi}{2} + \arcsen(x + 1)$.

20
Pontos

3. Seja h a função definida por $h(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Mostre que h possui exactamente um zero no intervalo $]1, 3[$.

30
Pontos

4. Sejam I um intervalo de \mathbb{R} e f uma função definida em I .

- (a) Defina primitiva de f e mostre que se F é uma primitiva de f , então, para todo o $k \in \mathbb{R}$, $G = F + k$ é também uma primitiva de f .
- (b) Suponha que f é a função definida em \mathbb{R} por $f(x) = 2x \operatorname{arctg} x$. Determine a primitiva de f que se anula em $x = 1$.

30
Pontos

5. Em cada uma das alíneas que se seguem calcule o integral indefinido considerado.

(a) $\int \frac{x}{(x+1)(x^2+2x+2)} dx$

(b) $\int \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} dx$

20
Pontos

6. Considere a função F definida por $F(x) = \int_0^{x^2} e^{t^2} dt$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Estude F quanto à existência de extremos locais.