Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I - Segundo semestre — 1º Mini-Teste

Resolução

Justifique todas as respostas e indique os cálculos efectuados.

1. Considere a função f definida por $f(x) = \pi + \operatorname{arcsen}(x-1)$.

   (a) Determine o domínio de f, D_f.

   Indicações para a resolução: $D_f = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x - 1 \leq 1\} = [0, 2]$.

   (b) Resolva a seguinte equação em ordem a x

   $$f(0) + 2f(1) + xf(2) = 2\pi.$$

   Indicações para a resolução: Uma vez que $f(0) = \pi + \operatorname{arcsen}(-1) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, $f(1) = \pi + \operatorname{arcsen}(0) = \pi$ e $f(2) = \pi + \operatorname{arcsen}(1) = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$, tem-se que

   $$f(0) + 2f(1) + xf(2) = 2\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + 2\pi + x\frac{3\pi}{2} = 2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

   (c) Caracterize a função inversa de f.

   Indicações para a resolução: Uma vez que, para todo o $x \in [0, 2]$,

   $$-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arcsen}(x-1) \leq \frac{\pi}{2}$$

   temos que

   $$\frac{\pi}{2} \leq \pi + \operatorname{arcsen}(x-1) \leq \frac{3\pi}{2}$$

   o que permite concluir que $CD_f = [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] = D_{f^{-1}}$.
   Sejam $x \in [0, 2]$ e $y \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ tais que $y = \pi + \operatorname{arcsen}(x-1)$. Como

   $$\begin{aligned} y = \pi + \operatorname{arcsen}(x-1) \quad &\Leftrightarrow \operatorname{arcsen}(x-1) = y - \pi \Leftrightarrow x - 1 = \operatorname{sen}(y-\pi) \\ &\Leftrightarrow x = 1 + \operatorname{sen}(y-\pi) \Leftrightarrow x = 1 - \operatorname{sen}(y) \end{aligned}$$

   tem-se que

   $$\begin{array}{rcl} f^{-1} : [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \hookrightarrow & f^{-1}(x) = 1 - \operatorname{sen}(x). \end{array}$$

2. Considere

   $$g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ x \arctan(x) & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}.$$

   (a) Estude a função g quanto à continuidade.

   Indicações para a resolução: A função g é contínua em $\mathbb{R}^-$ e em $\mathbb{R}^+$ porque é o produto de duas funções contínuas.

Como
$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) = 0$$
(porque o produto de um infinitésimo por uma função limitada é um infinitésimo)
e
$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} x \arctan(x) = 0$$
podemos concluir que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$.
Uma vez que $\lim_{x\to 0} g(x) = g(0)$, podemos concluir que g é contínua em $x = 0$.
Conclusão: g é contínua em $\mathbb{R}$.

(b) A função g é diferenciável em $x = 0$? Justifique.

Indicações para a resolução: Uma vez que
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x \arctan x}{x} = 0$$
e
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{x} = 0$$
então
$$g'_-(0) = g'_+(0) = 0$$
o que permite concluir que $g'(0) = 0$ e, portanto, g é diferenciável em $x = 0$.

(c) Considere a função f definida em $\mathbb{R}^-$ por $f(x) = \frac{1}{x}$. Calcule $(g \circ f)'(-1)$.

Indicações para a resolução: Observe-se que para $x \in \mathbb{R}^-$, $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}^-$, logo $g(x) = x \arctan x$. Por outro lado, como $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ e $g'(x) = \arctan x + \frac{x}{1+x^2}$, tem-se que
$$(g\circ f)'(-1) = g'(f(-1))f'(-1) = g'(-1)) \times (-1) = -\arctan(-1) - \frac{-1}{1+(-1)^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

3. Seja $h(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Mostre que h possui exactamente um zero no intervalo $]1, 3[$.

   Indicações para a resolução: Uma vez que h é contínua em $[1, 3]$ e $h(1) = 3$ e $h(3) = -1$, podemos concluir pelo Teorema de Bolzano que
$$\exists c \in]1, 3[: h(c) = 0,$$
   isto é, existe pelo menos um zero de h em $]1, 3[$. Vamos provar agora a unicidade deste zero. Uma vez que h é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $h'(x) = 3(x-3)(x-1)$, podemos concluir que 1 e 3 são dois zeros consecutivos de h'. Como entre dois zeros consecutivos da derivada existe, no máximo, um zero da função, podemos concluir que h tem um único zero no intervalo $]1, 3[$.