→ fecho multiplicação escalar

$(x,y,z) \in S$ (isto é, $x-y+3z=0$) e $\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha(x,y,z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$

$$\begin{aligned}\alpha x - \alpha y + 3(\alpha z) &= \alpha(x-y+3z) \\ &= \alpha \cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

logo S é fechado para a multiplicação escalar (iv)

concluímos de (i), (ii), (iii), (iv) que S é um subespaço vetorial

(b) Obter um conjunto gerador de S

$(x,y,z) \in S$ se $x-y+3z=0$
$\Leftrightarrow x = y-3z$

$$\begin{aligned}(x,y,z) &= (y-3z, y, z) \\ &= y(1,1,0) + z(-3,0,1)\end{aligned}$$

logo $\forall (x,y,z)$ é combinação linear de $(1,1,0)$ e $(-3,0,1)$
portanto

$S = \langle (1,1,0), (-3,0,1) \rangle$

(c)

verificar se são linearmente ~~independentes~~ independentes
sejam $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(-3,0,1) = (0,0,0)$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ sistema possível e determinado *

C.A

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 := L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 := L_3 - \frac{1}{3}L_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$* \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$

os vetores são linearmente independentes como também geram S então forma uma base para S $\{(1,1,0), (-3,0,1)\}$ $\dim S = 2$

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & -4 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$, $A_{3\times 4}$ e consideremos os espaços vetoriais $\mathcal{C}(A)$, $\mathcal{L}(A)$ e $\mathcal{N}(A)$

Temos

$\mathcal{C}(A) = \langle (1,2,1), (-2,-4,-2), (-4,-7,-3), (3,5,2) \rangle$ $\qquad \mathcal{C}(A) \subseteq \mathbb{R}^3$ $\qquad \mathcal{C}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$ (linhas)

$\mathcal{L}(A) = \langle (1,-2,-4,3), (2,-4,-7,5), (1,-2,-3,2) \rangle$ $\qquad \mathcal{L}(A) \subseteq \mathbb{R}^4$ $\qquad \mathcal{L}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ (colunas)

$\mathcal{N}(A) = \{ X \in \mathbb{R}^4 : AX = 0 \}$

$\mathcal{N}(A) \subseteq \mathbb{R}^4$

obter bases para estes espaços vetoriais

→ $\mathcal{C}(A)$

Verificar se os vetores que geram $\mathcal{C}(A)$ são ou não linearmente independentes

$AX = 0$ $\qquad$ • Temos de escalonar a matriz

matriz escalonada

$A_e = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\text{nul}(A) = \text{nº de colunas sem pivot}$
$\text{nul}(A) + \text{car}(A) = n$

matriz escalonada reduzida

$A_R = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Uma base para $\mathcal{C}(A)$ obtem-se considerando as colunas de A que na matriz escalonada ou escalonada reduzida têm pivot.

(Neste exemplo, os 4 vetores que geram $\mathcal{C}(A)$ não são linearmente independentes apenas 2 deles, o 1º e o 3º são)

base $\mathcal{C}(A)$ é $\{ (1,2,1), (-4,-7,-3) \}$

$\dim \mathcal{C}(A) = \text{nº pivots na matriz escalonada} = \text{car}(A)$

→ Base para $\mathcal{L}(A)$

$A \sim A_e \sim A_R$

equivalente por linhas

Verificar se os vetores que geram $\mathcal{L}(A)$ são ou não linearmente independentes corresponde a resolver o sistema $A^T X = 0$

uma base para $\mathcal{L}(A)$ é constituída pelas linhas de A que têm pivot em A_e ou A_R.

Pois, como $A \sim A_e \sim A_R$

também posso considerar as linhas de A_e ou de A_R com pivot ou seja uma base para $\mathcal{L}(A)$ é $\{ (1,-2,-4,3), (2,-4,-7,5) \}$

ou $\{ (1,-2,-4,3), (0,0,1,-1) \}$

ou $\{ (1,-2,0,-1), (0,0,1,-1) \}$

$\dim \mathcal{L}(A) = \text{car}(A)$

A car(A) indica (também) o número máximo de linhas de A linearmente independentes e o número máximo de colunas de A linearmente independente

$car(A) = \dim \mathcal{L}(A) = \dim \mathcal{C}(A)$

$\rightarrow \mathcal{N}(A) = \{ X \in \mathbb{R}^4 : AX = 0 \}$

$AX = 0 \iff A_e X = 0 \iff A_R X = 0$ *

*

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_3 = x_4 \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 2x_2 + x_4 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_3 = x_4 \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X = (x_1, x_2, x_3, x_4) &= (2x_2 + x_4, x_2, x_4, x_4) \\ &= x_2(2,1,0,0) + x_4(1,0,1,1) \end{aligned}$$

$\mathcal{N}(A) = \langle (2,1,0,0), (1,0,1,1) \rangle$

e estes vetores formam também uma base para $\mathcal{N}(A)$ $\{(2,1,0,0), (1,0,1,1)\}$

temos também $\dim \mathcal{N}(A) = nul(A) = n^{o}$ colunas $^{(A)}$ sem pivot

Exercício 23

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3 := L_3 + 3L_1 \\ L_4 := L_4 - L_1}]{L_2 := L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 := L_4 - 2L_2]{L_3 := L_3 - 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4 := L_4 - \frac{8}{12} L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$car(A) = 3$

$nul(A) = 0 \longrightarrow \mathcal{N}(A) = \{(0,0,0)\}$

base $\mathcal{L}(A) \subseteq \mathbb{R}^3$

$\{(1,0,1), (2,1,-1), (-3,2,3)\}$ $\qquad \dim \mathcal{L}(A) = 3$

$\{(1,0,1), (0,1,-3), (0,0,12)\}$ $\qquad \mathcal{L}(A) = \mathbb{R}^3$

base $\mathcal{C}(A) \subseteq \mathbb{R}^4$

↳ todas as colunas da matriz A ~~que~~ em que a matriz escalonada tem pivot

$\{(1,2,-3,1), (0,1,2,2), (1,-1,3,3)\}$

$\dim \mathcal{C}(A) = 3$

$\underbrace{car(A)}_{3} + \underbrace{nul(A)}_{0} = 3$

As 4 linhas são linearmente dependentes, apenas 3 linhas são linearmente independentes

$$C=\begin{bmatrix}1&2&3&2&1\\3&1&0&-1&2\\0&2&1&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{L_2:=L_2-3L_1}\begin{bmatrix}1&2&3&2&1\\0&-5&-9&-7&-1\\0&2&1&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{L_3:=L_3+\frac{2}{5}L_2}\begin{bmatrix}1&2&3&2&1\\0&-5&-9&-7&-1\\0&0&-\frac{13}{5}&-9/5&3/5\end{bmatrix}$$

$C_{3\times5}$

$\mathcal{L}(C)\subseteq\mathbb{R}^5$
$\mathcal{C}(C)\subseteq\mathbb{R}^3$
$\mathcal{N}(C)\subseteq\mathbb{R}^5$

$car(C)=3$
$\dim\mathcal{L}(C)=3$
$\dim\mathcal{C}(C)=3$
$nul(C)=2$
$\dim\mathcal{N}(C)=2$

base para $\mathcal{L}(C)$ é $\{(1,2,3,2,1),(3,1,0,-1,2),(0,2,1,1,1)\}$

$\mathcal{C}(C)$ é $\{(1,3,0),(2,1,2),(3,0,1)\}$

$$\mathcal{C}(C)=\mathbb{R}^3$$

$$\begin{cases}x_1=-2x_2-3x_3-2x_4-x_5\\x_2=\frac{1}{5}(-9x_3-7x_4-x_5)\\x_3=\frac{1}{13}(9x_4+3x_5)\\x_4\in\mathbb{R}\\x_5\in\mathbb{R}\end{cases}$$

14 Novembro

23 (f)

$$F=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&0&-1\\-1&-1&0\end{bmatrix}\quad F_{3\times3}$$

$\mathcal{L}(F)\subseteq\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^3$

$\mathcal{C}(F)\subseteq\mathbb{R}^m=\mathbb{R}^3$

$\mathcal{N}(F)$

$\mathcal{L}(F)=\langle(1,2,3),(1,0,-1),(-1,-1,0)\rangle$

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\1&0&-1\\-1&-1&0\end{bmatrix}\xrightarrow[L_3:=L_3+L_1]{L_2:=L_2-L_1}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-2&-4\\0&1&3\end{bmatrix}\xrightarrow{L_3:=L_3+1/2L_2}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-2&-4\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$car(F)=3$
$\dim\mathcal{L}(F)=3\longrightarrow\mathcal{L}(F)=\mathbb{R}^3$
$\dim\mathcal{C}(F)=3\longrightarrow\mathcal{C}(F)=\mathbb{R}^3$

Todas as linhas e todas as colunas

base de $\mathcal{L}(F)$ é $\{(1,2,3), (1,0,-1), (-1,-1,0)\}$

base de $\mathcal{C}(F)$ é $\{(1,1,-1), (2,0,-1), (3,-1,0)\}$

→ Todas as bases do espaço vetorial têm a mesma dimensão

Coordenadas de um vetor numa base

Seja $\mathcal{B} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ uma base ordenada de um espaço vetorial V

Teorema

Cada vetor $X \in V$ escreve-se de forma única como combinação linear dos elementos da Base $\mathcal{B}$, ou seja, existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ únicos tais que

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, \dots, \alpha_n X_n$$

a esses escalares, que são os coeficientes da combinação linear chamamos coordenadas do vetor X na base $\mathcal{B}$ e escrevemos

$$[X]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Exemplo

$\mathcal{B} = \{(1,1), (1,2)\}$
base $\mathbb{R}^2$

$(2,3) = (1,1) + (1,2)$

$$[(2,3)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

se $\mathcal{C}$ for ~~com~~ a base canónica

$$[(2,3)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$(3,5) = (1,1) + \cancel{(1,2)}\ 2(1,2)$

$$[(3,5)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[(3,5)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Exercício

$\mathbb{R}^2$

$B = \{(1,1), (2,3)\}$

$[(2,1)]_B = ?$

$(2,1) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(2,3)$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

C.A $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 := L_2 - L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 := L_1 - 2L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$

$[(2,1)]_B = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

Base $\mathcal{J} = \{(1,2), (0,1)\}$

$[(2,1)]_{\mathcal{J}} = ?$

$(2,1) = \alpha_1(1,2) + \alpha_2(0,1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \alpha_1 = 2$
$\alpha_2 = -3$

($\Leftrightarrow$)
C.A. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 := L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$

Matriz de Mudança de Base

Sejam S e $\mathcal{J}$ duas bases ordenadas de V sendo $\mathcal{J} = (y_1, \dots, y_n)$ e seja $X \in V$

Qual a relação entre $[X]_{\mathcal{J}}$ e $[X]_S$?

$[X]_{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \Rightarrow X = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n$

Quero determinar $[X]_S = [a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n]_S$

$= a_1 [y_1]_S + a_2 [y_2]_S + \dots + a_n [y_n]_S$

$\Leftrightarrow [X]_S = \big[[y_1]_S \ [y_2]_S \ \dots \ [y_n]_S \big] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow [X]_S = \underbrace{\big[[y_1]_S \ [y_2]_S \dots [y_n]_S \big]}_{} [X]_{\mathcal{J}}$

matriz de mudança de base de $\mathcal{J}$ para S
$M_{S \leftarrow \mathcal{J}}$

Nota

$Ax = b$

$\Leftrightarrow [C_1, C_2, \dots, C_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b$

$\Leftrightarrow x_1 C_1 + x_2 C_2 + \dots + x_n C_n = b$

Teorema

Sendo S e $\mathcal{J} = (y_1, \dots, y_n)$ bases ordenadas de $\mathcal{V}$

Para $X \in \mathcal{V}$

$$[X]_S = M_{S \leftarrow \mathcal{J}} [X]_{\mathcal{J}}$$

em que

$$M_{S \leftarrow \mathcal{J}} = \left[[y_1]_S \; [y_2]_S \; \dots \; [y_n]_S \right]$$

- Sejam $S = ((1,1),(1,2))$ e $\mathcal{J} = ((0,1),(1,-1))$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$

Dado $X \in \mathbb{R}^2$ tal que $[X]_{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ então $X = a(0,1) + b(1,-1)$

Portanto para ter $[X]_S$ fazemos

$$[X]_S = [a(0,1) + b(1,-1)]_S$$

$$= a[(0,1)]_S + b[(1,-1)]_S$$

$$= \left[[(0,1)]_S \;\; [(1,-1)]_S \right] \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\left[[(0,1)]_S \;\; [(1,-1)]_S \right]}_{M_{S \leftarrow \mathcal{J}}} [X]_{\mathcal{J}}$$

$$[(0,1)]_S = ? = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$(0,1) = \alpha_1 (1,1) + \alpha_2 (1,2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases} \quad \text{logo } [(0,1)]_S = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

C.A

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 := L_2 - L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 := L_1 - L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$[(1,-1)]_S = ? = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

$$(1,-1) = \beta_1 (1,1) + \beta_2 (1,2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 = 3 \\ \beta_2 = -2 \end{cases} \quad \text{ou seja } [(1,-1)]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

C.A

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 := L_2 - L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 := L_1 - L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$S = [(1,1),(1,2))$

$\mathcal{T} = ((0,1),(1,-1))$

$$[(2,-1)]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[(2,-1)]_S = ?$$

Como $P_{S\leftarrow \mathcal{T}} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$$[(2,1)]_S = P_{S\leftarrow \mathcal{T}}\,[(2,1)]_{\mathcal{T}}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Teorema

Sejam S e $\mathcal{T}$ duas bases ordenadas do espaço vetorial V. Então $P_{S\leftarrow \mathcal{T}}$ é invertível e

$$P^{-1}_{S\leftarrow \mathcal{T}} = P_{\mathcal{T}\rightarrow S}$$

$(2,-1) = 2(1,0) + (-1)(0,1)$

$$[(2,-1)]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{E} = ((1,0),(0,1))$ ← base canónica de $\mathbb{R}^2$

$S, \mathcal{T}$ bases de $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{E}$ base canónica de $\mathbb{R}^n$

$$\begin{tikzcd} \overset{\text{Conheço}}{[x]_{\mathcal{T}}} \arrow[r, "P_{S\leftarrow \mathcal{T}}"] \arrow[dr, "P_{\mathcal{E}\leftarrow \mathcal{T}}"'] & \overset{\text{Quero}}{[x]_S} \arrow[d, bend right, "P_{\mathcal{E}\leftarrow S}"'] \\ & {[x]_{\mathcal{E}}} \arrow[u, bend right, "P^{-1}_{\mathcal{E}\leftarrow S} = P_{S\leftarrow \mathcal{E}}"'] \end{tikzcd}$$

$$[x]_S = P_{S\leftarrow \mathcal{T}}\,[x]_{\mathcal{T}}$$

$$= P_{S\leftarrow \mathcal{E}}\,\underbrace{P_{\mathcal{E}\leftarrow \mathcal{T}}\,[x]_{\mathcal{T}}}_{[x]_{\mathcal{E}}}$$

$$[x]_S = P_{S\leftarrow \mathcal{E}}\,[x]_{\mathcal{E}}$$

Exercício 26

$B_1 = ((1,2,1),(0,2,0),(0,0,-1))$

$B_2 = ((1,0,-1),(1,1,1),(2,3,-1))$

$X = (2,3,5)$

a)

$[X]_{B_1} = ?$

$[X]_{B_2} = ?$

$X = \alpha_1(1,2,1) + \alpha_2(0,2,0) + \alpha_3(0,0,-1)$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_3 = 3 \end{cases} \qquad [X]_{B_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1/2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

C.A

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 := L_3 - L_1]{L_2 := L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$X = \alpha_1(1,0,-1) + \alpha_2(1,1,1) + \alpha_3(2,3,-1)$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 - \alpha_2 - 2\alpha_3 \\ \alpha_2 = 3 - \alpha_2 - 3\alpha_3 = 3 + \frac{3}{5} \\ \alpha_3 = -1/5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 - \frac{18}{5} + 2/5 = -6/5 \\ \alpha_2 = 18/5 \\ \alpha_3 = -1/5 \end{cases}$$

$$[X]_{B_2} = \begin{bmatrix} -6/5 \\ 18/5 \\ -1/5 \end{bmatrix}$$

C.A

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 := L_3 + L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 := L_3 - 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{array}\right]$$

b)

$$M_{B_2 \leftarrow B_1} = \left[[(1,2,1)]_{B_2} \; [(0,2,0)]_{B_2} \; [(0,0,-1)]_{B_2} \right]$$

$(1,2,1) = \alpha_1(1,0,-1) + \alpha_2(1,1,1) + \alpha_3(2,3,-1)$

$(0,2,0) = \beta_1(1,0,-1) + \beta_2(1,1,1) + \beta_3(2,3,-1)$

$(0,0,-1) = \gamma_1(1,0,-1) + \gamma_2(1,1,1) + \gamma_3(2,3,-1)$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 := L_3 + L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 := L_3 - 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & -10 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 := L_2 + \frac{3}{5}L_3]{L_1 := L_1 + \frac{2}{5}L_3}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{20}{5} & -\frac{21}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{5} & -4 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & -5 & -2 & -10 & -1 \end{array}\right] \underset{L_3 = \frac{L_3}{-5}}{\overset{L_1 = L_1 - L_2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{5} & -4 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & 2 & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$[(1,2,1)]_{B_2}$ $\quad [(0,1,0)]_{B_2}$ $\quad [(0,0,-1)]_{B_2}$

$$P_{B_2 \leftarrow B_1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & -4 & -\frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & 2 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$[B_2 \mid B_1] \sim [I \mid P_{B_2 \leftarrow B_1}]$$

19 de Novembro

$$J = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$J \to S$$

$$P_{S \leftarrow J} = \Big[[x_1]_S \; [x_2]_S \dots [x_n]_S \Big]$$

$$[x]_J = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$$[x]_S = P_{S \leftarrow J} [x]_J$$

Conjunto ortogonal e ortonormado de $\mathbb{R}^n$
(espaço vetorial com produto interno)

Um conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de vetores de $\mathbb{R}^n$ é ortogonal se

$$x_i \cdot x_j = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n$$

e diz-se ~~orto~~normado se

$$\| x_i \| = 1 \iff x_i \cdot x_i = 1, \quad i = 1, \dots, n$$

Diz-se ortonormado se $\begin{cases} x_i \cdot x_j = 0, & i \neq j, \; i, j = 1, \dots, n \\ x_i \cdot x_i = 1, & i = 1, \dots, n \end{cases}$

Exemplo

$\{(1,1,0), (2,-2,1)\}$ é conjunto ortogonal

não é normado, mas normalizando os vetores

$\to \|(1,1,0)\| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) = \underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)}_{\text{vetor normado}}$$

$\rightarrow \|(2,-2,1)\| = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$

$\frac{1}{3}(2,-2,1) = \underbrace{\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)}_{\text{vetor normado}}$

Assim o conjunto $\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}$ já é ortogonal e normalizado,

ou seja, é ortonormado

Nota

$X \rightarrow \frac{X}{\|X\|}$ ← vetor tem norma 1

Teorema

Dado um conjunto de vetores não nulos, se o conjunto for ortogonal então é linearmente independente

Corolário

Todo o conjunto de vetores ortonormado é linearmente independente

- Uma base ortogonal/ortonormada é uma base que é um conjunto ortogonal/ortonormado

Nota

Seja $K = \{x_1, \dots, x_n\}$ um conjunto de $\underline{n}$ vetores de $\mathbb{R}^n$ ortogonais, então K é uma base de $\mathbb{R}^n$
↳ ou seja, são linearmente independentes
↳ dimensão $\underline{n}$

Teorema

Seja $X \in \mathbb{R}^n$ e $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma base ortogonal/ortonormada de $\mathbb{R}^n$.
Então ~~que~~

$$[X]_B = \begin{bmatrix} \frac{X \cdot x_1}{\|x_1\|} \\ \vdots \\ \frac{X \cdot x_n}{\|x_n\|} \end{bmatrix} \quad \text{se } B \text{ é ortogonal}$$

$$[X]_B = \begin{bmatrix} X \cdot x_1 \\ \vdots \\ X \cdot x_n \end{bmatrix} \quad \text{se } B \text{ é ortonormado}$$

$$X = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$$

$$= \left(\frac{X \cdot x_1}{\|x_1\|}\right) x_1 + \dots + \left(\frac{X \cdot x_n}{\|x_n\|}\right) x_n$$

Exemplo

seja $B = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right)$ uma base de $\mathbb{R}^2$

seja $X = (1, 5)$

escreva X como combinação linear dos elementos da base B

$$(1,5) = \alpha_1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \alpha_2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \dots \quad \begin{cases} \alpha_1 = \dots \\ \alpha_2 = \dots \end{cases}$$

Mas a base B é ortonormada (o.n)

$$\rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{4} = 0$$ logo os vetores são ortogonais

$$\rightarrow \left\| \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

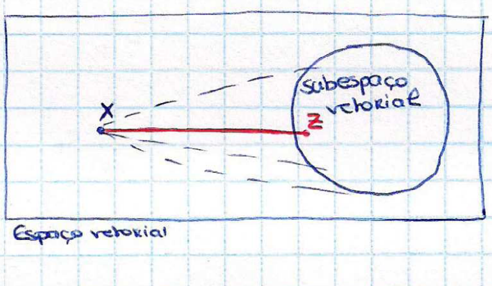
$$\rightarrow \left\| \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\| = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = (X \cdot X_1) / \|X_1\| \\ \alpha_2 = (X \cdot X_2) / \|X_2\| \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = (1,5) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ \alpha_2 = (1,5) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2} \\ \alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \end{cases}$$

$$(1,5) = -2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 3\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Projeções ortogonais sobre subespaços vetoriais



Projeção ortogonal sobre um subespaço → determinar o vetor do subespaço "mais próximo" de X

A projeção ortogonal de $X \in \mathbb{R}^n$ sobre o subespaço W de $\mathbb{R}^n$ é o vetor

$$Z = proj_W X$$

$$= \frac{(X \cdot X_1)}{\|X_1\|} X_1 + \frac{(X \cdot X_2)}{\|X_2\|} X_2 + \dots + \frac{(X \cdot X_n)}{\|X_n\|} X_n$$

em que $Z \in W$ e

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ é uma base ortogonal / ortonormada de $\mathbb{R}^n$

Exemplo

seja β o subespaço vetorial $\beta = \langle X_1, X_2 \rangle$ com $X_1 = (1,1,0)$ e $X_2 = (2,-2,1)$ e seja $X = (1,1,1)$

obter $proj_\beta X$

$X_1 \cdot X_2 = 2 - 2 + 0 = 0$

os vetores são ortogonais mas não são normados

$$proj_\beta X = (X \cdot X_1) \frac{X_1}{\|X_1\|} + (X \cdot X_2) \frac{X_2}{\|X_2\|}$$

$\|X_1\| = \sqrt{2}$
$\|X_2\| = 3$

$X \cdot X_1 = (1,1,1) \cdot (1,1,0) = 1 + 1 = 2$
$X \cdot X_2 = (1,1,1) \cdot (2,-2,1) = 2 - 2 + 1 = 1$

$$proj_\beta X = \frac{\overset{X \cdot X_1}{2}}{\underset{\|X_1\|}{\sqrt{2}}} (1,1,0) + \frac{\overset{X \cdot X_2}{1}}{\underset{\|X_2\|}{3}} (2,-2,1)$$

$$= (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) + (2/3, -2/3, 1/3)$$

$$= \left(\sqrt{2} + \frac{2}{3}, \sqrt{2} - 2/3, 1/3\right)$$

Proposição

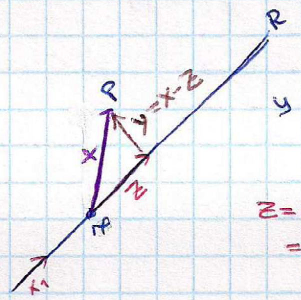
seja W um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ e $X \in W$. Então o vetor

$X - proj_W X$ é ortogonal a todos os vetores de W

Projeção ortogonal sobre uma reta em $\mathbb{R}^3$

$W = \langle X_1 \rangle$ uma reta
$\|X_1\| = 1$
(X_1) base ortonormada de $\mathbb{R} = W$
seja $X = \overrightarrow{AP}$

$$Z = \underbrace{proj_W X}_{\in R = W} = \alpha_1 X_1$$



$y \perp R$

$$Z = proj_R X = (X \cdot X_1) X_1$$

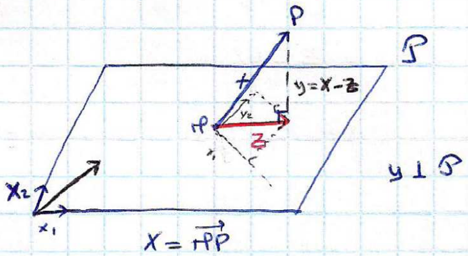
$y = X - Z$
$dist(P, R) = \|y\|$

Projeção ortogonal sobre um plano $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$

$W = \mathcal{P} = \langle X_1, X_2 \rangle$

$\|X_1\| = 1$
$\|X_2\| = 1$

(X_1, X_2) base ortonormada de $\mathcal{P}$
$X_1 \cdot X_2 = 0$



$d(P, \mathcal{P}) = \|y\|$

$z = \text{proj}_{\mathcal{P}} X = (X \cdot X_1) X_1 + (X \cdot X_2) X_2$

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ base mas não é ortonormada
para obtermos uma base o. n. devemos usar o método de ortogonalização de Gram - Schmidt

Exercício 31

$X_1 = \left(\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right)$

$X_2 = (0, 1, 0)$

$X_3 = \left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$

a) Verificar que $B = (X_1, X_2, X_3)$ é uma base o.n de $\mathbb{R}^3$

$\dim \mathbb{R}^3 = 3$

Qualquer conjunto de 3 vetores linearmente independentes é base de $\mathbb{R}^3$
Qualquer conjunto de 3 vetores ortogonais não nulos é linearmente independente

Verificar se são ortogonais

$X_1 \cdot X_2 = \left(\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) \cdot (0, 1, 0) = 0$

$X_1 \cdot X_3 = \left(\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right) = -\frac{12}{25} + 0 + \frac{12}{25} = 0$

$X_2 \cdot X_3 = (0, 1, 0) \cdot \left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right) = 0$

como $X_i \cdot X_j = 0$, $i \neq j$ $i = 1, 2, 3$ concluímos que os 3 vetores são ortogonais e portanto são também linearmente independente
como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, os 3 vetores formam base ortogonal de $\mathbb{R}^3$

$\|X_1\| = 1$
$\|X_2\| = 1$
$\|X_3\| = 1$

Conclusão: os vetores são normados e portanto B é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$

21 de Novembro

Base ortonormada

↳ base que é um conjunto ortogonal e ortonormada

Nota

→ espaço vetorial dim $\underline{n}$, $\mathbb{R}^n$

→ n vetores $\overset{\text{não nulos}}{\text{ortogonais}}$

→ são linearmente independentes

→ e, portanto, constituem uma base (porque são $\underline{n}$ vetores e dim $\mathbb{R}^n = n$)

Conclusões

Todo o conjunto de $\underline{n}$ vetores ortogonais de $\mathbb{R}^n$ é base de $\mathbb{R}^n$

$\{u_1, u_2, (0,0,0)\}$
ortogonal
$u_1 . u_2 = 0$ mas não é linearmente independente

B base o.n. $(X_1, X_2, \dots, X_n)$

$$[X]_B = \begin{bmatrix} X . X_1 \\ X . X_2 \\ \vdots \\ X . X_n \end{bmatrix}$$

Um vetor $y \in \mathbb{R}^n$ diz-se ortogonal a um espaço vetorial W se for ortogonal a todo o vetor de W

Teorema

Seja $y \in \mathbb{R}^n$ e B uma base de um espaço vetorial W

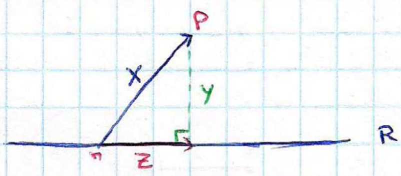
Então y é ortogonal a W sse y é ortogonal a cada vetor de B

Nota

Projeção ortogonal de $X \in \mathbb{R}^n$ sobre um subespaço ~~ortog~~ vetorial W

$$Z = \text{proj}_W X = (X . X_1) X_1 + \dots + (X . X_n) X_n$$

sendo $B = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma base ortonormada

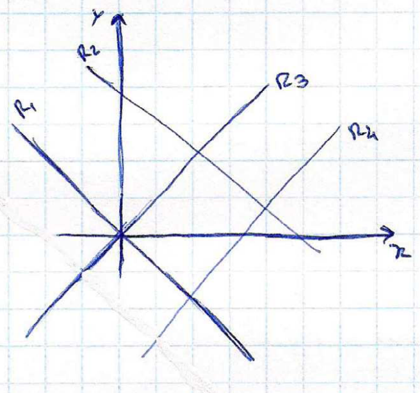


$X = \alpha X_1, \alpha \in \mathbb{R}$ R: $X = P + \alpha X_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$y \perp R$ $R = \langle X_1 \rangle \rightarrow$ R é um espaço gerado por X_1

$y = X - Z$

dist $(P, R) = \|y\|$



Só as retas que passam na origem são espaço vetorial

$\mathcal{P}: X = P + \alpha X_1 + \beta X_2$

$P = 0$

$\mathcal{P} = \langle X_1, X_2 \rangle$

Os planos que passam na origem são espaços vetoriais

Exercício 31 - continuação

b) $X = (1,1,1)$

$[X]_B$

$$[X]_B = \begin{bmatrix} X \cdot X_1 \\ X \cdot X_2 \\ X \cdot X_3 \end{bmatrix}$$

$X \cdot X_1 = \frac{4}{5} + 0 + \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$

$X \cdot X_2 = 0 + 1 + 0 = 1$

$X \cdot X_3 = -\frac{3}{5} + 0 + \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

$$[X]_B = \begin{bmatrix} 7/5 \\ 1 \\ 1/5 \end{bmatrix}$$

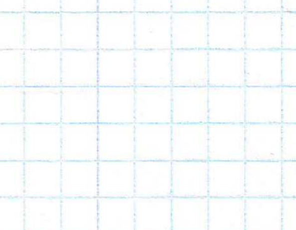
$X = 7/5\, X_1 + X_2 + 1/5\, X_3$

b') projeção de X sobre X_1, X_2, X_3

$\underset{\langle X_1, X_2, X_3 \rangle}{\text{proj}} X = \ldots \overset{TPC}{=} X$

$\hookrightarrow \mathbb{R}^3$

$y \perp w \quad y = x \mp z$



esp. vetorial V

$x \in V$

$x \notin W$

$z = \text{proj}_W X$

$\text{proj}_W U = U$

$\text{proj}\, X_{\langle X_1, X_2 \rangle} = (X \cdot X_1) X_1 + (X \cdot X_2) X_2$

$\bar{B} = (X_1, X_2)$ é base o.n. de $\langle X_1, X_2 \rangle$

$\underset{\langle X_1, X_2 \rangle}{\text{proj}} X = \frac{7}{5} X_1 + X_2$

$= \frac{7}{5}\left(\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) + (0,1,0)$

$= \left(\frac{28}{25}, 1, \frac{21}{25}\right)$

b'') obter um vetor ortogonal a $\langle x_1, x_2 \rangle$

$$y \perp \langle x_1, x_2 \rangle$$

$$\begin{aligned} y &= x - z \\ &= x - \text{proj}_{\langle x_1, x_2 \rangle} x \\ &= (1,1,1) - \left(\frac{28}{25}, 1, \frac{21}{25}\right) \\ &= \left(-\frac{3}{25}, 0, \frac{4}{25}\right) \end{aligned}$$

c)

$$M_{B \leftarrow \vec{B}}$$

$$\vec{B} = \big((0,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\big)$$

$$M_{B \leftarrow \vec{B}} = \begin{bmatrix} [(0,0,1)]_B & [(0,1,1)]_B & [(1,1,1)]_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix}$$

$$(0,0,1) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \iff [x_1\ x_2\ x_3] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(0,1,1) = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3$$

$$(1,1,1) = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4/5 & 0 & -3/5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3/5 & 0 & 4/5 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{L_1 := 5L_1 \\ L_3 = 5L_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & -3 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 5 & 5 & 5 \end{array}\right] \underset{L_3 := L_3 - \frac{3}{4}L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & -3 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 25/4 & 5 & 5 & 5/4 \end{array}\right] \underset{L_3 := \frac{4}{25}}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & -3 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4/5 & 4/5 & 1/5 \end{array}\right] \underset{L_1 := L_1 + 3L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 12/5 & 12/5 & 28/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4/5 & 4/5 & 1/5 \end{array}\right] \underset{L_1 := \frac{1}{4}L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/5 & 3/5 & 7/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4/5 & 4/5 & 1/5 \end{array}\right]$$

$$M_{B \leftarrow \vec{B}} = \begin{bmatrix} 3/5 & 3/5 & 7/5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4/5 & 4/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$[y]_{\vec{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad [y]_B = M_{B \leftarrow \vec{B}} [y]_{\vec{B}} = \begin{bmatrix} 3/5 + 6/5 + 21/5 \\ 0 + 2 + 3 \\ 4/5 + 8/5 + 3/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$