Universidade de Aveiro   Departamento de Matemática

ALGA — Agrupamento IV (ECT, EET, TSI)

Exame da Época de Recurso

29 de janeiro de 2014 — Duração: **2h30**

50 pontos

1. Indique o que é pedido em cada alínea.

   (a) Sejam A e B matrizes reais 3×3 tais que $\det\left(2A^{-1}\right)=\det\left(A^2(B^T)^{-1}\right)=4$.

   i. $\det(A)=$ ____________

   ii. $\det(B)=$ ____________

   (b) Considere o plano $\mathcal{P}$ de equação geral (cartesiana) $4x-5y+2z+3=0$ e o ponto $C(1,1,1)$.

   i. O ponto C pertence ao plano $\mathcal{P}$?   Sim   Não

   ii. Um vetor ortogonal ao plano $\mathcal{P}$ é: ____________

   iii. Uma equação vetorial da reta $\mathcal{R}$ ortogonal ao plano $\mathcal{P}$ e que passa no ponto C é: ____________

   (c) Considere os vetores **linearmente independentes** de $\mathbb{R}^3$ $u=(1,2,2)$ e $v=(2,-5,4)$.

   i. O vetor $(5,1,10)$ pertence ao subespaço $\langle u,v\rangle$?   Sim   Não

   ii. Determine a dimensão de $\langle u,v,w\rangle$, sendo $w=(4,3,6)$: ____________

   iii. Indique a projeção ortogonal de v sobre o subespaço $\langle u\rangle$, $\operatorname{proj}_{\langle u\rangle} v=$ ____________

   (d) Identifique o conjunto definido pela seguinte equação.

   $\frac{1}{3}x^2-2x+5y=1$ em $\mathbb{R}^2$: ____________

50 pontos

2. Considere o sistema $AX=B$ que, por eliminação de Gauss, conduziu à seguinte matriz ampliada, onde α,β e γ são parâmetros reais.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \alpha-2 & \beta-1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{array}\right]$$

   Responda às seguintes questões, **justificando devidamente as suas respostas**.

   (a) Determine para que valores dos parâmetros α e β

   i. a matriz A é invertível;   ii. $\operatorname{car}(A)=3$;   iii. $\operatorname{nul}(A)=2$.

   (b) Determine para que valores dos parâmetros α,β e γ o sistema $AX=B$ é

   i. possível e determinado;   ii. possível e indeterminado;   iii. impossível.

   (c) Considere $\alpha=1$, $\beta=2$ e $\gamma=0$. Determine

   i. o conjunto de soluções de $AX=B$;   ii. o espaço nulo de A, $\mathcal{N}(A)$.

50 pontos

3. Considere a matriz simétrica e diagonalizável $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$.

   Responda às seguintes questões, **justificando devidamente as suas respostas**.

   (a) Verifique que A tem valores próprios 1 e -1.

   (b) Determine os subespaços próprios de A.

   (c) Obtenha uma matriz P diagonalizante **ortogonal** de A tal que $P^{-1}AP=D$, com D diagonal.

   (d) Identifique a superfície de $\mathbb{R}^3$ definida por $y^2+2xz=x+z$ e determine a sua equação reduzida.

50 pontos

4. Considere os vetores $u=(1,1)$ e $v=(0,-1)$ de $\mathbb{R}^2$ e a transformação linear $\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ definida por $\phi(u)=(2,0,3)$ e $\phi(v)=(-1,1,-2)$.

   Responda às seguintes questões, **justificando devidamente as suas respostas**.

   (a) Determine a matriz representativa de ϕ relativamente às bases ordenadas

   $$\mathcal{S}=(u,v)\quad \text{e}\quad \mathcal{T}=\big((1,-1,0),(0,-1,1),(-1,2,0)\big).$$

   (b) Determine $\phi(2,3)$.

   (c) Determine $\operatorname{im}(\phi)$ e indique a sua dimensão.

   (d) Sem determinar $\ker(\phi)$, diga se ϕ é, ou não, injetiva.