Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I — Exame da Época Normal - Segunda Chamada

15 de Janeiro de 2007

Duração: **2h30m**

Justifique todas as respostas e indique os cálculos efectuados.

1. Considere a função f definida por $f(x) = \begin{cases} 1 + x\,\mathrm{sen}\dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \\ x^2 \ln x & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$.

   (a) Estude f quanto à continuidade na origem.

   Indicações para a resolução:
   Uma vez que

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} (x^2 \ln x) \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\dfrac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{2}{x^3}}, \quad \text{pela Regra de Cauchy} \\ &= \lim_{x \to 0^+} \left(-\frac{x^2}{2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

   e $f(0) = 1$ tem-se que f não é contínua na origem.

   (b) Determine, caso existam, as assimptotas do gráfico de f.

   Indicações para a resolução:

   - Assimptotas verticais
     Como a função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ a recta de equação $x = 0$ é a única candidata a assimptota vertical. Como vimos na alínea anterior o limite lateral à direita de $x = 0$ é finito. Por outro lado

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0^-} \left(1 + x\,\mathrm{sen}\frac{1}{x}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

     já que $x\,\mathrm{sen}\dfrac{1}{x}$ é o produto de um infinitésimo quando $x \to 0^-$ por uma função limitada.
     Como os limites laterais em $x = 0$ são ambos finitos concluímos que a recta de equação $x = 0$ não é uma assimptota do gráfico de f.

   - Assimptota não vertical à direita
     Temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 \ln x}{x} \\ &= \lim_{x \to +\infty} (x \ln x) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

     o que permite concluir que o gráfico de f não admite assimptota não vertical à direita.

- Assimptota não vertical à esquerda
  Temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{1+x\,\mathrm{sen}\frac{1}{x}}{x}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}+\mathrm{sen}\frac{1}{x}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

  o que permite concluir que, se o gráfico de f admitir assimptota não vertical à esquerda, então ela tem declive $m=0$.
  Como

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx) &= \lim_{x\to-\infty}\left(1+x\,\mathrm{sen}\frac{1}{x}\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{\mathrm{sen}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)\\ &= 2\end{aligned}$$

  podemos concluir que a recta de equação $y=2$ é a assimptota não vertical à esquerda do gráfico de f.

(c) Enuncie o Teorema de Lagrange e mostre que existe $c\in\left]-\frac{2}{\pi},0\right[$ tal que $f'(c)=-1$.

Indicações para a resolução:
Teorema de Lagrange: Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$. Então existe pelo menos um ponto $c\in]a,b[$ tal que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

- Pelas propriedades das funções contínuas, a função f é contínua em $\left[-\frac{2}{\pi},0\right[$. Como vimos na alínea anterior o limite lateral de f à esquerda de $x=0$ é igual a 1 e, uma vez que $f(0)=1$ tem-se que f é contínua à esquerda em $x=0$. Podemos então concluir que f é contínua em $\left[-\frac{2}{\pi},0\right]$.
- Pelas propriedades das funções diferenciáveis, a função f é diferenciável em $\left]-\frac{2}{\pi},0\right[$.

Podemos então aplicar o Teorema de Lagrange que garante a existência de $c\in\left]-\frac{2}{\pi},0\right[$ tal que

$$\begin{aligned}f'(c) &= \frac{f(0)-f\left(-\frac{2}{\pi}\right)}{0+\frac{2}{\pi}}\\ &= \frac{1-\left(1+\frac{2}{\pi}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{2}{\pi}}\\ &= \frac{-\frac{2}{\pi}}{\frac{2}{\pi}}\\ &= -1.\end{aligned}$$

(d) Justifique que f é integrável em $[1, 2]$.

Indicações para a resolução:

No intervalo $[1, 2]$ a função f é definida por $f(x) = x^2 \ln x$ e, pelas propriedades das funções contínuas, f é contínua neste intervalo, logo integrável.

(e) Calcule o valor da área da região limitada do plano situada entre $x = 1$ e $x = 2$ e delimitada pelo gráfico de f e pelo eixo das abcissas.

Indicações para a resolução:

Uma vez que f é contínua em $[1, 2]$ e, para todo o $x \in [1, 2]$, $f(x) \geq 0$, temos que o valor da área pedido é dado por

$$A = \int_1^2 x^2 \ln x \, dx.$$

Para efeito de aplicação do método de integração por partes tome-se

$$\begin{aligned} u'(x) = x^2 \quad &\Longleftrightarrow \quad u(x) = \frac{1}{3}x^3 \\ v(x) = \ln x \quad &\Longleftrightarrow \quad v'(x) = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Temos então

$$\begin{aligned} \int x^2 \ln x \, dx &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \int \frac{1}{3}x^2 \, dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

donde resulta que

$$\begin{aligned} A = \int_1^2 x^2 \ln x \, dx &= \left. \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 \right]_1^2 \\ &= \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{8}{9} - \left(\frac{1}{3} \ln 1 - \frac{1}{9} \right) \\ &= \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9}. \end{aligned}$$

2. Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$. Mostre que f admite exactamente um zero no intervalo $[1, 3]$.

Indicações para uma resolução:

Uma vez que:

- a função f é uma função polinomial, logo contínua em $[1, 3]$;
- $f(1) = 1 - 6 + 9 - 1 = 3 > 0$;
- $f(3) = 27 - 54 + 27 - 1 = -1 < 0$;

o Teorema de Bolzano garante que existe pelo menos um zero de f no intervalo $]1, 3[$.

Vamos agora provar que f admite apenas um zero em $]1, 3[$.

Uma vez que f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3)$ temos

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1 \vee x = 3 \,.$$

Dado que, por um Corolário do Teorema de Rolle, entre dois zeros de f' existe, no máximo, um zero de f tem-se que no intervalo $]1, 3[$ existe, no máximo, um zero de f.

Podemos então concluir que no intervalo $]1, 3[$ existe exactamente um zero de f.

Como $]1, 3[\subset [1, 3]$, $f(1) \neq 0$ e $f(3) \neq 0$ concluímos então que a função f admite exactamente um zero no intervalo $[1, 3]$.

3. Considere a função F definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^{-t^2} \operatorname{arctg} t \, dt$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Determine $F'(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

   Indicações para a resolução:

   Uma vez que:

   - a função g definida por $g(x) = x^2$ é diferenciável em $\mathbb{R}$;
   - a função f definida por $f(t) = \mathrm{e}^{-t^2} \operatorname{arctg} t$ é contínua em $\mathbb{R}$;

   o Teorema Fundamental do Cálculo Integral garante que a função F é diferenciável em $\mathbb{R}$ tendo-se, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} F'(x) & = & g'(x) f(g(x)) \\ & = & 2x \, \mathrm{e}^{-x^4} \operatorname{arctg}(x^2). \end{array}$$

   (b) Estude F quanto à existência de extremos locais.

   Indicações para a resolução:

   Atendendo a que:

   - $\mathrm{e}^{-x^4} > 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$;
   - para todo o $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ e $x^2 = 0 \iff x = 0$ o que implica que $\operatorname{arctg}(x^2) \geq 0$ e $\operatorname{arctg}(x^2) = 0 \iff x^2 = 0 \iff x = 0$;

   temos

	$-\infty$	0	$+\infty$
e^{-x^4}	$+$	$+$	$+$
$\operatorname{arctg}(x^2)$	$+$	0	$+$
$2x$	$-$	0	$+$
F'	$-$	0	$+$
F	$\searrow$	mín. local	$\nearrow$

   Atendendo a que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo Integral, a função F é contínua em $\mathbb{R}$, da análise do quadro apresentado resulta que F tem um mínimo local $F(0) = \displaystyle\int_0^0 e^{-t^2} \operatorname{arctg} t \, dt = 0$ em $x = 0$.

4. Calcule os integrais indefinidos seguintes:

   (a) $\displaystyle\int \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \, dx$

   Indicações para a resolução:

Efectuando a substituição definida por $x = \operatorname{sen} t$ com $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ temos

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{(1-\operatorname{sen}^2 t)\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}} \cos t\,dt \\
&= \int \frac{1}{\cos^2 t \cos t} \cos t\,dt \\
&= \int \frac{1}{\cos^2 t}\,dt \\
&= \int \sec^2 t\,dt \\
&= \operatorname{tg} t + C \\
&= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C\,, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

<u>Cálculos auxiliares:</u>
Como $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ temos $\cos t > 0$ pelo que $\cos t = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{1-x^2}$ e, portanto, $\operatorname{tg} t = \dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(b) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3-x^2}\,dx$

Indicações para a resolução:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{x^3-x^2}\,dx &= \int \frac{x+1}{x^2(x-1)}\,dx \\
&= \int \left(-\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-1}\right) dx \\
&= -2\ln x + \frac{1}{x} + 2\ln|x-1| + C \\
&= \ln \frac{(x-1)^2}{x^2} + \frac{1}{x} + C\,, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

<u>Cálculos auxiliares:</u>
Decomposição da fracção $\dfrac{x+1}{x^2(x-1)}$ em fracções simples.
Temos $\dfrac{x+1}{x^2(x-1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x-1}$ com A, B, C constantes reais a determinar. Da igualdade

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x^2(x-1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} \\
&= \frac{A(x^2-x) + B(x-1) + Cx^2}{x^2(x-1)} \\
&= \frac{(A+C)x^2 + (-A+B)x - B}{x^2(x-1)}
\end{aligned}$$

resulta

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ -A + B = 1 \\ -B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} C = 2 \\ A = -2 \\ B = -1 \end{cases}$$

e, portanto,

$$\frac{x+1}{x^2(x-1)} = -\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-1}$$

5. Determine a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{x+2}{x^2+2x+2}\,dx$ e, em caso de convergência, indique o seu valor.

Indicações para uma resolução:

Para estudar a natureza do integral impróprio considerado vamos estudar o limite

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{-1}^{t} \frac{x+2}{x^2+2x+2}\,dx\,.$$

Uma vez que

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+2x+2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{2}{x^2+2x+2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + \text{arctg}\,(x+1) + C\,, \quad C\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} \int_{-1}^{t} \frac{x+2}{x^2+2x+2}\,dx &= \lim_{t\to+\infty} \left.\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + \text{arctg}\,(x+1)\right]_{-1}^{t} \\
&= \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\ln(t^2+2t+2) + \text{arctg}\,(t+1) - \frac{1}{2}\ln 1 - \text{arctg}\,0\right) \\
&= \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\ln(t^2+2t+2) + \text{arctg}\,(t+1)\right) \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

e, portanto, o integral impróprio considerado é divergente.