Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I — Primeiro Mini-Teste

Resolução

Duração: **1h15m**

Justifique todas as respostas e indique os cálculos efectuados.

1. Considere a função f definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x} & \text{se} \quad x > 0 \\ x\,\mathrm{e}^{1/x} & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$.

   (a) Determine, caso exista(m), a(s) assimptota(s) do gráfico de f.

   Indicações para uma resolução:

   - Assimptotas verticais

     Como a função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ a recta de equação $x = 0$ é a única candidata a assimptota vertical do gráfico de f.
     Uma vez que
     $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$
     tem-se que a recta de equação $x = 0$ é a assimptota vertical do gráfico de f.

   - Assimptota não vertical à esquerda

     Temos
     $$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\,\mathrm{e}^{1/x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{1/x} = 1$$
     o que permite concluir que, se o gráfico de f admitir assimptota não vertical à esquerda, então ela tem declive $m = 1$.
     Como
     $$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx) &= \lim_{x \to -\infty} \left(x\,\mathrm{e}^{1/x} - x\right) \\ &= \lim_{x \to -\infty} \left(x\left(\mathrm{e}^{1/x} - 1\right)\right) \\ &= \lim_{x \to -\infty} \frac{\mathrm{e}^{1/x} - 1}{1/x} \\ &= 1 \end{aligned}$$
     podemos concluir que a recta de equação $y = x + 1$ é a assimptota não vertical à esquerda do gráfico de f.

   - Assimptota não vertical à direita

     Temos
     $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$$
     o que permite concluir que se o gráfico de f admitir assimptota não vertical à direita ela tem declive $m = 0$.
     Uma vez que
     $$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$
     podemos concluir que a recta de equação $y = 0$ é a assimptota não vertical à direita do gráfico de f.

(b) Estude f quanto à existência de extremos locais em $]0, +\infty[$.

Indicações para uma resolução:

Uma vez que a função f é diferenciável em $]0, +\infty[$, para determinar os extremos locais de f neste intervalo, basta estudar o sinal da primeira derivada de f no intervalo considerado.

Uma vez que, para todo o $x \in]0, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

e o denominador desta fracção é sempre positivo, o sinal de f' depende do sinal de $1 - \ln x$. Atendendo a que

$$\begin{array}{lcl} 1 - \ln x < 0 & \iff & (\ln x > 1 \wedge x > 0) \iff x \in]\mathrm{e}, +\infty[\\ 1 - \ln x = 0 & \iff & x = \mathrm{e} \\ 1 - \ln x > 0 & \iff & (\ln x < 1 \wedge x > 0) \iff x \in]0, \mathrm{e}[\end{array}$$

temos que f admite um máximo local $f(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}}$ em $x = \mathrm{e}$.

2. Seja f a função definida por $f(x) = x - \mathrm{e}^{-x}$. Mostre que f admite exactamente um zero no intervalo $[0, 1]$.

Indicações para uma resolução:

Uma vez que:

- a função f é contínua no intervalo $[0, 1]$, já que é a diferença de duas funções contínuas neste intervalo;
- $f(0) = 0 - \mathrm{e}^0 = -1 < 0$;
- $f(1) = 1 - \mathrm{e}^{-1} = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}} = \dfrac{\mathrm{e} - 1}{\mathrm{e}} > 0$, porque $\mathrm{e} > 1$;

o Teorema de Bolzano permite concluir que existe $x_0 \in]0, 1[$ tal que $f(x_0) = 0$.

Para garantir a unicidade desta raiz no intervalo $[0, 1]$ vamos analisar o comportamento da função neste intervalo. Uma vez que f é diferenciável e, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x} > 0$, temos que f é estritamente crescente em $\mathbb{R}$, logo injectiva e, portanto, admite um único zero neste intervalo.

3. Sejam f e g duas funções reais de variável real tais que $g \circ f$ está definida.

(a) Mostre que se f é estritamente decrescente e g é estritamente crescente, então $g \circ f$ é estritamente decrescente.

Indicações para uma resolução:

Seja $h = g \circ f$. Para provar que h é estritamente decrescente temos de provar que, para todos os $x_1, x_2 \in D_h$, se $x_1 > x_2$, então $h(x_1) < h(x_2)$. Uma vez que, por definição de composição de funções se tem, para todo o $x \in D_h$, $h(x) = g(f(x))$ temos de provar que, para todos os $x_1, x_2 \in D_h$, se $x_1 > x_2$, então $g(f(x_1)) < g(f(x_2))$.

Sejam $x_1, x_2 \in D_h$ tais que $x_1 > x_2$.

Por definição de composição de funções temos que $D_h = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$.

Então $x_1, x_2 \in D_f$ e, como f é estritamente decrescente, temos que

$$x_1 > x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)\,. \tag{1}$$

Mas, uma vez que $f(x_1), f(x_2) \in D_g$ e g é estritamente crescente temos que

$$f(x_1) < f(x_2) \Longrightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2))\,. \tag{2}$$

Conjugando as implicações (1) e (2) temos

$$x_1 > x_2 \Longrightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \,,$$

ou seja,

$$x_1 > x_2 \Longrightarrow h(x_1) < h(x_2) \,,$$

como pretendíamos.

Observação: Muitas das resoluções apresentadas utilizaram os argumentos seguintes:

- *se f é estritamente decrescente, então f' é negativa*;
- *se g é estritamente crescente, então g' é positiva.*

Observe-se que o enunciado nada afirma sobre a diferenciabilidade de f ou de g e, portanto, não podemos garantir que f' ou g' estejam definidas, pelo que não faz sentido falar do sinal de f' ou do sinal de g'.

Para além disso, observe-se que se f é diferenciável e estritamente decrescente, não podemos garantir que se tenha $f' < 0$. Apenas podemos concluir que $f' \leq 0$. Analogamente, sendo g diferenciável e estritamente crescente, apenas podemos concluir que $g' \geq 0$.

(b) Sejam f a função dada por $f(x) = 1 - 2x$, g a função dada por $g(x) = \operatorname{arcsen} x$ e $h = g \circ f$.

i. Mostre que h é estritamente monótona.

Indicações para uma resolução:
Temos, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2 < 0$ pelo que f é estritamente decrescente.
Atendendo a que g é estritamente crescente, a alínea anterior permite concluir que $h = g \circ f$ é estritamente decrescente e, portanto, estritamente monótona.

ii. Justifique que h é invertível e defina a função inversa de h.

Indicações para uma resolução:
Pela alínea anterior temos que h é estritamente monótona, logo injectiva e, portanto, invertível.
Por definição de inversa de uma função temos que $D_{h^{-1}} = CD_h$ e $CD_{h^{-1}} = D_h$.

- Determinação do contradomínio de h^{-1}

  Por definição de domínio da função composta temos

  $$D_h = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} \,.$$

  Uma vez que $D_f = \mathbb{R}$ e $D_g = [-1, 1]$ temos

  $$D_h = \{x \in \mathbb{R} : 1 - 2x \in [-1, 1]\} = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq 1 - 2x \leq 1\} \,.$$

  Atendendo a que

  $$\begin{aligned} -1 \leq 1 - 2x \leq 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad -2 \leq -2x \leq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad 1 \geq x \geq 0 \end{aligned}$$

  temos $D_h = [0, 1]$ e, portanto, $CD_{h^{-1}} = [0, 1]$.

- Determinação do domínio de h^{-1}

  Por definição de composição de funções temos, para todo o $x \in [0, 1]$,

  $$h(x) = g(f(x)) = \operatorname{arcsen}(1 - 2x)$$

  e, portanto, $CD_h = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] = D_{h^{-1}}$.

- Determinação da expressão analítica de h^{-1}

  Temos, para todo o $x \in [0, 1]$ e, para todo o $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

  $$y = \operatorname{arcsen}(1 - 2x) \Longleftrightarrow \operatorname{sen} y = 1 - 2x \Longleftrightarrow x = \frac{1 - \operatorname{sen} y}{2} \,.$$

Logo h^{-1} é a função de contradomínio $[1,0]$ definida por

$$\begin{array}{rccc} h^{-1}: & \left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1-\operatorname{sen} x}{2} \end{array}$$

iii. Mostre que existe pelo menos um ponto $c \in \left]0,\dfrac{1}{2}\right[$ tal que $h'(c) = -\pi$.

Indicações para uma resolução:
Uma vez que:

- a função f é contínua em $\mathbb{R}$ e a função g é contínua em $[-1,1]$, temos que $h = g \circ f$ é contínua em $D_h = [0,1]$, logo contínua no intervalo $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$;
- a função f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e a função g é diferenciável em $]-1,1[$, temos que $h = g \circ f$ é diferenciável em $D_h =]0,1[$, logo diferenciável no intervalo $\left]0,\dfrac{1}{2}\right[$.

Estamos em condições de poder aplicar o Teorema de Lagrange que garante a existência de pelo menos um ponto $c \in \left]0,\dfrac{1}{2}\right[$ tal que

$$h'(c) = \frac{h(0) - h\left(\dfrac{1}{2}\right)}{0 - \dfrac{1}{2}} = -2\left(h(0) - h\left(\frac{1}{2}\right)\right) .$$

Uma vez que:

- $h(0) = \operatorname{arcsen} 1 = \dfrac{\pi}{2}$;
- $h\left(\dfrac{1}{2}\right) = \operatorname{arcsen} 0 = 0$;

temos

$$h'(c) = -2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi\,,$$

como pretendíamos.