Universidade de Aveiro Departamento de Matemática

ALGA — Agrupamento IV (ECT, EET, TSI)

Época normal – Exame final

13 de janeiro de 2014 — Duração: **2h30**

60 pontos

1. Indique o que é pedido em cada alínea. Se precisar, pode colocar observações e cálculos auxiliares no espaço livre ao fundo desta página.

   (a) Sejam A e B matrizes reais 4×4 tais que $\det(A) = -3$ e $\det(B) = 7$.

   i. $\det(2A) =$ ____________________

   ii. $\det(A^{-1}B) + \det(AA^T) =$ ____________________

   iii. Sabendo que $\det(AC^{-1}) = 24$, $\det(C) =$ ____________________

   (b) Considere os vetores $u = (1, -1, 1)$ e $v = (1, -1, 2)$ e o ponto $D(1, 1, 1)$.

   i. $w = u \times v =$ ____________________

   ii. Uma equação geral (cartesiana) do plano $\mathcal{P}$ ortogonal a w e que passa no ponto D é: ____________

   iii. Uma equação vetorial da reta $\mathcal{R}$ ortogonal ao plano $\mathcal{P}$ e que passa no ponto D é: ____________

   (c) Considere os vetores $u = (1, -1, 1)$ e $v = (1, -1, \theta)$ de $\mathbb{R}^3$.

   i. Seja $\theta = 0$. Os vetores u e v são linearmente independentes? Sim Não

   ii. Seja $\theta = 1$. $\langle u, v \rangle$ é um subespaço vetorial real? Sim e tem dimensão ______ Não

   iii. Seja $\theta = 2$. O vetor $k = (2, -2, 0)$ é combinação linear dos vetores u e v? Sim Não

   (d) Identifique os conjuntos definidos pelas seguintes equações.

   i. $2x - y^2 + \frac{1}{3}y = -1$ em $\mathbb{R}^2$: ____________________

   ii. $2x^2 - y^2 + \frac{1}{3}z^2 = -1$ em $\mathbb{R}^3$: ____________________

53 pontos

2. Considere o sistema $AX = B$ que, por eliminação de Gauss, conduziu à seguinte matriz ampliada, onde α, β e γ são parâmetros reais.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta-2 & \alpha-1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{array}\right]$$

   Responda às seguintes questões, **justificando devidamente as suas respostas**.

   (a) Determine para que valores dos parâmetros α, β e γ o sistema $AX = B$ é

   i. possível e determinado; ii. possível e indeterminado; iii. impossível.

   (b) Considere $\alpha = 2$, $\beta = 2$ e $\gamma = 0$. Determine

   i. o conjunto de soluções de $AX = B$;

   ii. o espaço nulo de A, $\mathcal{N}(A)$;

   iii. uma base e a dimensão do espaço das linhas de A, $\mathcal{L}(A)$.

42 pontos

3. Considere a matriz simétrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e seja $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ uma matriz diagonalizante de A.

   Responda às seguintes questões, **justificando devidamente as suas respostas**.

   (a) Calcule os valores próprios de A.

   (b) Obtenha a matriz D diagonal tal que $P^{-1}AP = D$.

   (c) Determine a equação reduzida da seguinte superfície $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz - x + 2y + z = 0$.

45 pontos

4. Considere os vetores $u = (1, 1)$ e $v = (1, -1)$ de $\mathbb{R}^2$ e $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear definida por $\phi(u) = (0, 1, 2)$ e $\phi(v) = (2, -1, 0)$. Responda às seguintes questões, **justificando devidamente as suas respostas**.

   (a) Determine a matriz representativa de ϕ relativamente às bases ordenadas

$$\mathcal{S} = (u, v) \quad \text{e} \quad \mathcal{T} = \big((-1, 1, 0), (0, 1, 1), (-1, 2, 0)\big).$$

   (b) Determine $\text{im}(\phi)$ e indique a sua dimensão.

   (c) Sem determinar $\ker(\phi)$, diga se ϕ é, ou não, injetiva.