6.11 Integrais

1. Tendo em conta que toda a função contínua em [a,b] é integrável nesse intervalo, use a definição de integral para mostrar que se tem :

   (a) $\displaystyle\int_a^b x\ dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$;

   (b) $\displaystyle\int_a^b \operatorname{sen}(x)\ dx = \cos(a) - \cos(b)$.

2. Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

   Mostre que a função $x \longrightarrow |f(x) - \frac{1}{2}|$ é integrável no intervalo $[0,1]$, mas o mesmo não acontece com a função $x \longrightarrow f(x) - \frac{1}{2}$.

3. Calcule os seguintes integrais:

   (a) $\displaystyle\int_{-2}^{-3} \frac{1}{x^2-1}\ dx$;

   (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+3x+2}\ dx$;

   (c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2(x)\ dx$;

   (d) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\log x}\ dx$;

   (e) $\displaystyle\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}(x)\ dx$;

   (f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\ dx$;

   (g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos^2(x))\ dx$;

   (h) $\displaystyle\int_0^{1/2} \operatorname{arc\,sen}(x)\ dx$;

   (i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{sen}(2x))^3\ dx$;

   (j) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^3(x)\sec(x)\ dx$;

(k) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{4-x^2}\ dx;$

(l) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |\mathrm{sen}(x)|\ dx;$

(m) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (\mathrm{sen}(x) + |\cos(x)|)\ dx;$

(n) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}(2x)\cos(x)\ dx;$

(o) $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{1}{1+\sqrt{x}}\ dx;$

(p) $\displaystyle\int_{0}^{\log 2} \sqrt{e^x - 1}\ dx;$

(q) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+2\cos t}\ dt;$

(r) $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t}}\ dt;$

(s) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{x}{\sqrt{2+4x}}\ dx;$

(t) $\displaystyle\int_{3/4}^{4/3} \frac{1}{z\sqrt{z^2+1}}\ dz;$

(u) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{e^{3x}+e^{2x}+1}{e^x - e^{-x}}\ dx;$

(v) $\displaystyle\int_{-1/2}^{0} \frac{u+\sqrt{2u+1}}{1+2\sqrt{2u+1}}\ du.$

4. Calcule os seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (x^2\cos(x)+1)\cos(x)\ dx;$

(b) $\displaystyle\int_{1}^{e} \cos(\log x)\ dx;$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{1} (x^3+x^2+x+1)e^x\ dx;$

(d) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} e^x\mathrm{sen}(x)\ dx;$

(e) $\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{2x-1}{3x^3+3x+30}\ dx;$

(f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} (|\cos(3x)| - x\mathrm{sen}(x))\ dx$;

(g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} [(\mathrm{sen}(x))^{n-1}\mathrm{sen}((n+1)x)]\ dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\mathrm{sen}(3x)\cos(5x)]\ dx$.

5. Seja f uma função de classe C^0 em $[-a, a]$. Mostre que:

   (a) Se $f(x) = f(-x)$ então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 2\int_0^a f(x)\ dx$;

   (b) Se $f(x) = -f(-x)$ então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 0$.

6. Sejam m e n dois inteiros . Mostre que:

   (a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{sen}(mx)\mathrm{sen}(nx)\ dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } m = n \end{cases}$

   (b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}(nx)\cos(mx)\ dx = 0$.

7. (a) Seja f uma função contínua e crescente em $[1, +\infty[$. Mostre que:

   $$(x-1)f(1) < \int_1^x f(t)\ dt < (x-1)f(x).$$

   (b) Utilizando o resultado da alínea anterior e sendo $f(t) = \log(t)$ mostre que $e^{x-1} < x^x < (ex)^{x-1}$.

8. Sendo f uma função real definida e diferenciável em $[0, 1]$, mostre que

   $$\int_0^1 xf'(1-x)\ dx = \int_0^1 f(x)\ dx - f(0).$$

9. Determine as derivadas das funções F definidas por :

   (a) $F(x) = \displaystyle\int_0^{3x+2} te^t\ dt$, no ponto em que $x = 1$;

   (b) $F(x) = \displaystyle\int_{a(x)}^{kb(x)} f(u)\ du$, k constante;

   (c) $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^2+x+1} \frac{\mathrm{sen}(t)}{t}\ dt$, no ponto em que $x = 1$.

10. Considere a função $f(x) = \displaystyle\int_1^{x^2+\frac{3}{4}} \frac{e^t(t-\frac{7}{4})}{t}\ dt$. Determine:

(a) O seu domínio e a equação da recta tangente à linha que é a sua representação gráfica no ponto em que $x = 1/2$.

(b) Os pontos em que a função tem extremo relativo e, em cada ponto, a natureza do extremo.

11. Calcule
$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen}(t^3)\ dt}{x^4}.$$

12. Calcule
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x \sqrt{3t^2 + 5}\ dt.$$

13. Seja n um inteiro não negativo e seja $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}(x))^n\ dx$.

(a) Mostre que $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.

(b) A partir do resultado da alínea anterior conclua que com k inteiro positivo se tem
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}(x))^{2k}\ dx = \frac{(2k-1)(2k-3)....3 \times 1}{2k(2k-2)....4 \times 2} \times \frac{\pi}{2}$$
e
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}(x))^{2k+1}\ dx = \frac{2k(2k-2)....4 \times 2}{(2k+1)(2k-1)...3 \times 1}.$$

(c) Usando a substituição $x = \frac{\pi}{2} - t$, mostre que
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^n dx.$$