Universidade de Aveiro Departamento de Matemática

ALGA — Agrupamento IV (ECT, EET, EI)

Época de Recurso – Exame de Recurso

26 de janeiro de 2015 — Duração: **2h30**

N.° Mec. ________________ **Escreva o número mecanográfico também na(s) folha(s) de rascunho**

30 pontos

1. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \alpha^2-5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ \alpha \end{bmatrix}$.

   (a) Indique para que valores do parâmetro real α o sistema $AX = B$ é:

   possível e determinado: ☐

   possível e indeterminado: ☐

   impossível: ☐

   (b) Considere $\alpha = 1$. Diga se $B \in \mathcal{C}(A)$: $\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$.

   Indique o espaço $\mathcal{C}(A)$: ☐

   (c) Considere $\alpha = 2$. Indique $\dim \mathcal{N}(A) =$ ☐

   e uma base do espaço $\mathcal{N}(A)$: ☐

30 pontos

2. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e C uma matriz quadrada de ordem 3 tal que $\det(C) = 3$.

   (a) Calcule $\det(A) =$ ☐ e assinale as igualdades que podem obter-se pelo **desenvolvimento de Laplace**:

   $\boxed{\text{i}}$ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$; $\boxed{\text{ii}}$ $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$; $\boxed{\text{iii}}$ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$; $\boxed{\text{iv}}$ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$.

   (b) Indique $\operatorname{car}(A) =$ ☐, $\operatorname{nul}(A) =$ ☐ e diga se a matriz A é invertível: $\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$.

   (c) Determine a dimensão da matriz X que satisfaz a equação matricial $(A^{-1}X)^T = B^TC$: ☐.

   (d) Calcule $\det(-2A^TC^{-1}) =$ ☐.

15 pontos

3. (a) Para cada um dos seguintes conjuntos assinale se é, ou não, um subespaço vetorial real de $\mathbb{R}^3$:

   A reta de equação $X = (6,1,4) + t(3,1,2)$, com $t \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$

   $\{(2\alpha+\beta, \alpha-1, \beta-\alpha) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ $\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$

   (b) Assinale se o conjunto $\{(1,0,2), (0,0,0), (0,-3,0), (2,0,-1)\}$

   é linearmente independente: $\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$; gera $\mathbb{R}^3$: $\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$; é ortogonal: $\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$.

25 pontos

4. Considere a reta $\mathcal{R}$ em $\mathbb{R}^3$ definida pelo sistema de equações $\begin{cases} x + 2z + 1 = 0, \\ 2x + y + 3z = 1. \end{cases}$

   (a) Calcule o produto externo $v = (1, 0, 2) \times (2, 1, 3) =$ ☐

   (b) Uma equação do plano $\mathcal{P}$ que passa no ponto $Q(1, 2, 3)$ e é ortogonal à reta $\mathcal{R}$ é:

   ☐

   (c) O conjunto de interseção do plano de equação cartesiana $x + 2y = 5$ com a reta $\mathcal{R}$ é:

   ☐

30 pontos

5. Considere a matriz simétrica $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, cujos valores próprios são 1 e -1.

   (a) Especifique a multiplicidade de 1: ☐ e a multiplicidade de -1: ☐

   (b) Indique o subespaço próprio de 1: ☐

   e o conjunto de vetores próprios de -1: ☐

   (c) Indique uma matriz D diagonal e uma matriz P ortogonalmente diagonalizante de A tais que $P^{-1}AP = D$:

   $$D = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

   (d) Indique a equação reduzida da seguinte superfície $y^2 - 2xz + 4 = 0$ e **identifique-a**.

   ☐

20 pontos

6. Identifique, escrevendo A e B na caixa correspondente, os conjuntos definidos pelas seguintes equações.

   A : $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4(x - y - 2)$ em $\mathbb{R}^3$; B : $3x^2 + y = 6x - 2$ em $\mathbb{R}^2$.

   ☐ elipse ☐ hipérbole ☐ parábola ☐ cónica degenerada ☐ quádrica degenerada

   ☐ elipsóide hipérbolóide de ☐ 1 ou ☐ 2 folhas parabolóide ☐ elíptico ou ☐ hiperbólico

---

50 pontos

7. Sejam $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathbb{R}^3$ dados por $\omega_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\omega_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ e $\omega_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ e considere a aplicação linear $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\phi(\omega_1) = \omega_2$, $\phi(\omega_2) = \omega_1 + \omega_3$ e $\phi(\omega_3) = \omega_1$. Responda às seguintes questões e **justifique convenientemente as suas resposta e todos os cálculos efetuados**.

   (a) Prove que $\mathcal{B} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ é uma base (ordenada) de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Determine a projeção ortogonal de ω_3 sobre o subespaço $\mathcal{S} = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle$.

   (c) Construa a matriz representativa da aplicação linear ϕ relativamente à base $\mathcal{B}$ do espaço de partida e à base canónica $\mathcal{C}$ do espaço de chegada.

   (d) A aplicação ϕ é sobrejetiva? É injetiva?

   (e) Dado o vector $x = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, represente-o como combinação linear dos vectores da base $\mathcal{B}$.

   (f) Caracterize (indicando uma base) o subespaço $\mathcal{T} = \langle x, \phi(x) \rangle$ e diga qual a sua dimensão.