5.4 Áreas de figuras planas

1º CASO

Se f é integrável em $[a,b]$ e $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a,b]$, a área da figura plana limitada pelas rectas $x = a$, $x = b$, pelo eixo dos xx e pelo gráfico de f (figura 5.3) é dada por $\int_a^b f(x)\,dx$, como vimos atrás.

<u>EXEMPLO</u>: A área da figura plana limitada pelas rectas $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{4}$, pelo eixo dos xx e pelo gráfico de $\cos(x)$ é dada por: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)\,dx = \text{sen}(\dfrac{\pi}{4}) - \text{sen}(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2º CASO

Se f é integrável em $[a,b]$ e $f(x) \leq 0,\ \forall x \in [a,b]$, a área da figura plana limitada pelas rectas $x = a$, $x = b$, pelo eixo dos xx e pelo gráfico de f (figura 5.4) é dada por $-\int_a^b f(x)\,dx$. De facto, se considerarmos a simetria em relação ao eixo dos xx, obtemos uma figura com a mesma área (a simetria em relação a uma recta mantém as áreas invariantes), que é limitada pelas rectas $x = a$, $x = b$, pelo eixo dos xx e pelo gráfico de $-f$ (figura 5.5). Visto que a função $-f$ é não negativa em $[a,b]$, estamos reduzidos ao 1º caso e a área é dada por $\int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

<u>EXEMPLO</u>: A área da figura plana limitada pelas rectas $x = \dfrac{\pi}{2}$, $x = \pi$, pelo eixo dos xx e pelo gráfico de $\cos(x)$ é dada por: $-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x)\,dx = -(\text{sen}(\pi) - \text{sen}(\dfrac{\pi}{2})) = \text{sen}(\dfrac{\pi}{2}) = 1$.

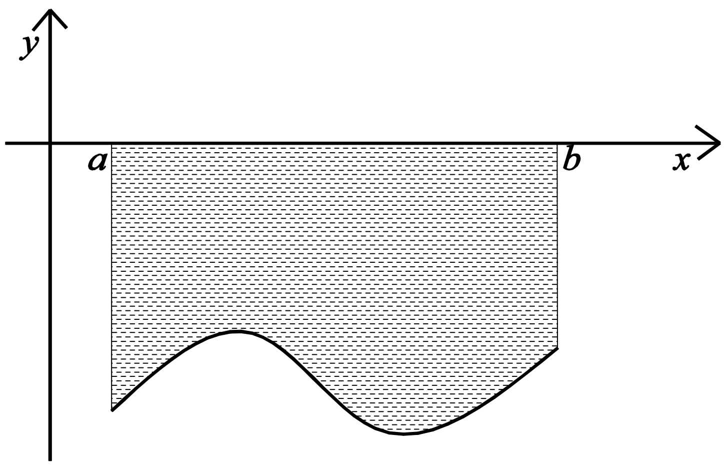

Figura 5.4

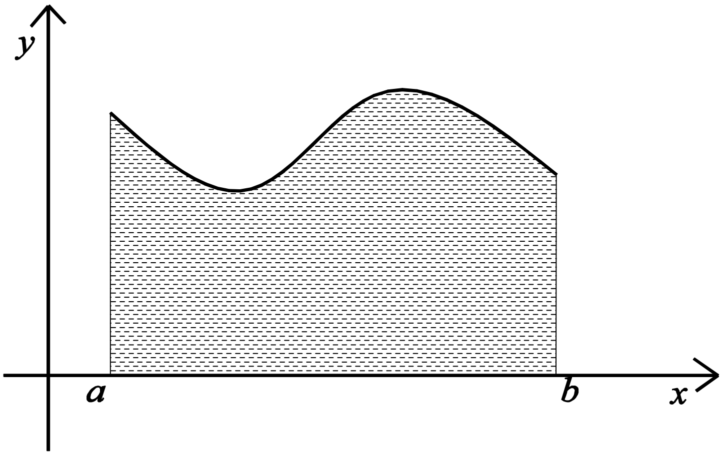

Figura 5.5

NOTAS:

1. Não esquecer que a área de uma figura não degenerada (isto é, não reduzida a um ponto ou segmento de recta ou curva, etc.) é um número positivo.
2. Em ambos os casos, 1 e 2, a área é dada por $\int_a^b |f(x)|\,dx$.

3º CASO

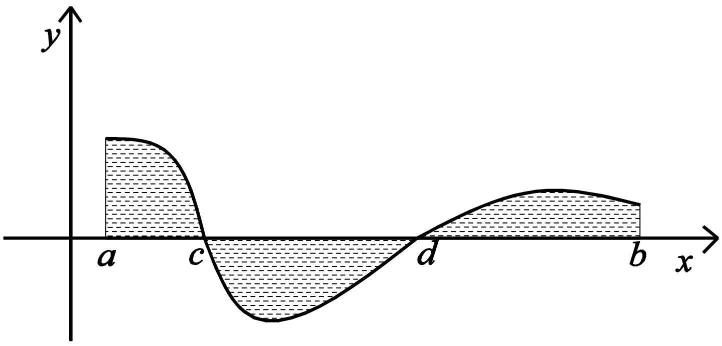

Figura 5.6

Se f é integrável em $[a,b]$, a área da figura plana limitada pelas rectas $x=a$, $x=b$, pelo eixo dos xx e pelo gráfico de f (figura 5.4) é dada por $\int_a^b |f(x)|\,dx$ (note-se que os casos anteriores são casos particulares deste). De facto, se f muda de sinal em $[a,b]$ (figura 5.6), consideramos os subintervalos em que f é positiva (nestes subintervalos a área é dada pelo integral de f, isto é de $|f|$) e os subintervalos em que f é negativa (nestes subintervalos a área é dada pelo integral de $-f$, isto é de $|f|$); a área total, que é a soma de todas estas áreas é, pois, dada por $\int_a^b |f(x)|\,dx$ (Proposição 11).

EXEMPLO: A área da figura plana limitada pelas rectas $x = 0$, $x = 2\pi$, pelo eixo dos xx e pelo gráfico de $\cos(x)$ é dada por: $\int_0^{2\pi} |\cos(x)|\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos(x)\, dx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} -\cos(x)\, dx + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos(x)\, dx = \text{sen}(\pi/2) - \text{sen}(0) + (-\text{sen}(3\pi/2) + \text{sen}(\pi/2)) + \text{sen}(2\pi) - \text{sen}(3\pi/2) = 1 - 0 - (-1) + 1 + 0 - (-1) = 4$.

4º CASO

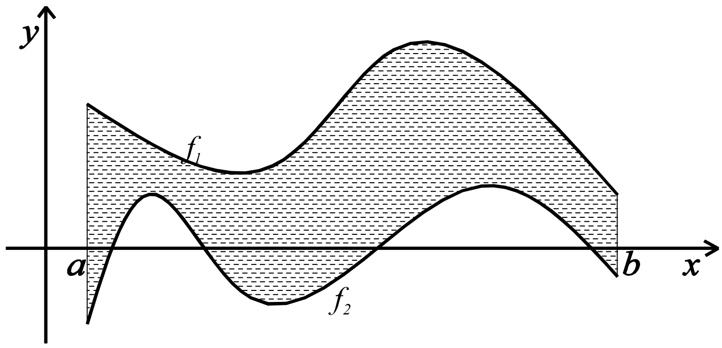

Figura 5.7

Se f_1 e f_2 são integráveis em $[a, b]$ e $f_1(x) \geq f_2(x)$, $\forall x \in [a, b]$, a área da figura plana limitada pelas rectas $x = a$, $x = b$, pelo gráfico de f_1 e pelo gráfico de f_2 (figura 5.7) é dada por $\int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\, dx$ ($= \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|\, dx$ visto que $f_1(x) - f_2(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$). Vamos justificar este resultado. Seja $k \in \mathbb{R}$ tal que $f_2(x) + k \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$; então $f_1(x) + k \geq f_2(x) + k \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$ e a área pretendida é igual à área da figura plana limitada pelas rectas $x = a$, $x = b$, pelo gráfico de $f_1 + k$ e pelo gráfico de $f_2 + k$ (trata-se de uma translação da figura anterior). Mas a figura plana limitada pelas rectas $x = a$, $x = b$, pelo eixo dos xx e pelo gráfico de $f_1 + k$ contém a figura plana limitada pelas rectas $x = a$, $x = b$, pelo eixo dos xx e pelo gráfico de $f_2 + k$. A área pretendida é, pois, a diferença entre as áreas destas duas figuras, isto é, $\int_a^b f_1(x) - \int_a^b f_2(x)\, dx = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\, dx$.

EXEMPLO: A área da figura plana limitada pelas rectas $x = 0$, $x = 1$, pelo gráfico de $f(x) = e^x$ e pelo gráfico de $\cos(x)$ é dada por $\int_0^1 (e^x - \cos(x))\, dx = e^1 - \text{sen}(1) - e^0 + \text{sen}(0) = e - \text{sen}(1) - 1$.

5º CASO

Se f_1 e f_2 são integráveis em $[a, b]$, a área da figura plana limitada pelas rectas $x = a$, $x = b$, pelo gráfico de f_1 e pelo gráfico de f_2 (figura 5.7) é dada por $\int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|\, dx$. Raciocinamos de modo idêntico ao do 3º caso. Se $f_1 - f_2$ muda de sinal em $[a, b]$ (figura 5.8), consideramos os subintervalos em que $f_1 \geq f_2$ (nestes subintervalos a área é dada pelo integral de $f_1 - f_2$, isto é de $|f_1 - f_2|$) e os subintervalos em que $f_1 < f_2$ (nestes

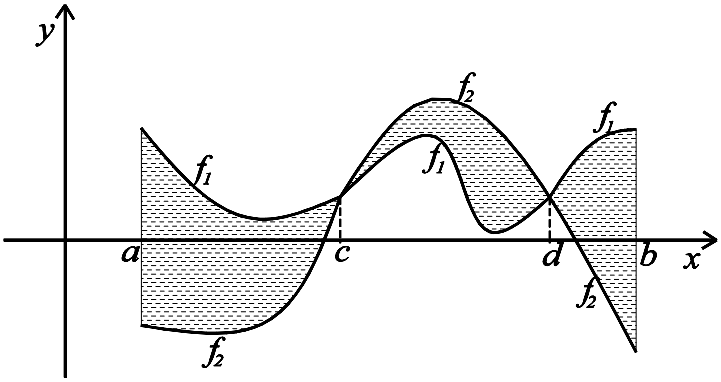

Figura 5.8

subintervalos a área é dada pelo integral de $f_2 - f_1$, isto é de $|f_2 - f_1|$); a área total, que é a soma de todas estas áreas é, pois, dada por $\int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|\, dx$ (Proposição 11).

<u>EXEMPLO</u>: A área da figura plana limitada pelas rectas $x = 0$, $x = \pi$, pelo gráfico de $\cos(x)$ e pelo gráfico de $\operatorname{sen}(x)$ é dada por: $\int_0^\pi |\operatorname{sen}(x) - \cos(x)|\, dx = \int_0^{\pi/4}(\cos(x) - \operatorname{sen}(x))\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi}(\operatorname{sen}(x) - \cos(x))\, dx = \operatorname{sen}(\pi/4) + \cos(\pi/4) - \operatorname{sen}(0) - \cos(0) - \cos(\pi) - \operatorname{sen}(\pi) + \cos(\pi/4) + \operatorname{sen}(\pi/4) = \sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 - 0 - 1 - (-1) - 0 + \sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 = 2\sqrt{2}$.

6º CASO

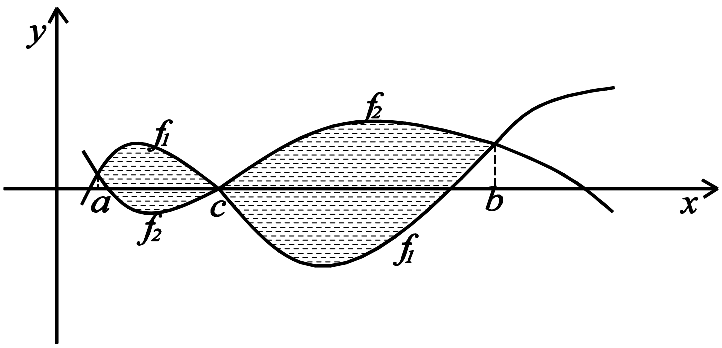

Figura 5.9

Se f_1 e f_2 são integráveis, a área da figura plana limitada pelos gráficos de f_1 e f_2 (figura 5.9) é calculada do seguinte modo: em primeiro lugar calculamos os pontos de intersecção dos gráficos; consideramos as abcissas destes pontos, isto é, os $y \in \mathbb{R}$ tais que $f_1(y) = f_2(y)$; sejam a o menor dos y e b o maior; a área pretendida é dada por $\int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|\, dx$ (trata-se do 5º caso, porque as rectas $x = a$ e $x = b$ têm, cada uma, um ponto comum com a figura). Note-se que a existência de a e b é garantida pelo facto de a figura ser limitada.

<u>EXEMPLO</u>: A área da figura plana limitada pelos gráficos das funções x^2 e $2-x^2$ é dada por $\int_{-1}^{1}((2-x^2)-x^2)\,dx = \int_{-1}^{1}(2-2x^2)\,dx = 2\cdot 1 - 2\cdot 1/3 - (2\cdot(-1) - 2\cdot(-1)/3) = 4 - 4/3 = 8/3$.