

Matemática Discreta

Conjuntos

Universidade de Aveiro 2016/2017

<http://moodle.ua.pt>

A noção de conjunto

Definição (de conjunto)

Um **conjunto** é uma coleção de objectos (que se designam por elementos do conjunto).

- $x \in A$ (x pertence a A): x é um elemento de A .
- $x \notin A$ (x não pertence a A): x não é um elemento de A .
- Consideramos os elementos dos conjuntos que estamos a estudar como pertencentes a um **universo** (ou conjunto universal) fixado, \mathcal{U} .
- **Conjunto vazio** (\emptyset): conjunto sem elementos.

Conjuntos finitos e infinitos

Conjuntos finitos e infinitos

Um conjunto é finito quando é possível contar os elementos, ou seja, quando é o conjunto vazio ou um conjunto onde é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os seus elementos e os elementos do conjunto $\{1, \dots, n\}$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Um conjunto é infinito quando não é finito.

Definição em extensão e em compreensão

- Em extensão: indicação exaustiva de todos os seus elementos (se o conjunto é finito).
- Em compreensão: indicação do predicado a satisfazer por todos os seus elementos.

Exemplo:

- $A = \{1, 3, 5, 7\}$ (descrição em extensão);
- $A = \{x : x \text{ é um inteiro positivo ímpar menor que } 8\}$ (descrição em compreensão).

Definição (igualdade de conjuntos)

Dados dois conjuntos A e B de elementos do conjunto universal U , diz-se que A é igual a B ($A = B$) se A e B têm exactamente os mesmos elementos.

Exercício

Sejam $U = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ e $A = \{x : x \text{ é ímpar}\}$ e $B = \{x : x \text{ é primo}\}$. Mostre que $A = B$.

Descrição de conjuntos e igualdade de conjuntos

Definição (inclusão de conjuntos)

Sejam A e B dois conjuntos.

- Diz-se que A é um subconjunto de B (ou que A está contido em B) e escreve-se $A \subseteq B$, se todos os elementos de A pertencem a B .
- Diz-se que A é um subconjunto próprio de B (ou que A está contido estritamente em B) e escreve-se $A \subset B$, se A é um subconjunto de B e $A \neq B$.

Sejam $A = \{x : P(x)\}$ e $B = \{x : Q(x)\}$ subconjuntos de \mathcal{U} .

Se, para todo $x \in \mathcal{U}$, $P(x) \Rightarrow Q(x)$, então $A \subseteq B$.

Se, para todo $x \in \mathcal{U}$, $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$, então $A = B$.

Exercício: Sejam $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, $A = \{x : x \text{ é múltiplo de } 4\}$ e $B = \{x : x \text{ é par}\}$. Mostre que $A \subseteq B$.

União e interseção de conjuntos

Sejam A e B dois conjuntos de um dado universo \mathcal{U} .

União de A e B :

$$A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

Interseção de A e B :

$$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Diferença e diferença simétrica de conjuntos e complementar de um conjunto

Sejam A e B dois conjuntos de um dado universo \mathcal{U} .

Diferença entre A e B :

$$A \setminus B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

Diferença simétrica entre A e B :

$$A \Delta B = \{x : (x \in A) \dot{\vee} (x \in B)\}.$$

Complementar de A :

$$A^c = \{x : x \notin A\}.$$

Propriedades

Sejam A e B dois conjuntos de um dado universo \mathcal{U} .

1) Princípio de inclusão mútua:

$$A = B \text{ se e só se } A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A;$$

2) $\emptyset \subseteq A$;

3) $A \cap A^c = \emptyset$;

4) $A \setminus B = A \cap B^c$;

5) $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$;

6) Distributividade:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Propriedades (cont.)

- 7) $A \setminus A = \emptyset = \emptyset \setminus A$;
- 8) $A \setminus \emptyset = A$;
- 9) $A \setminus B = B \setminus A \Leftrightarrow A = B$;
- 10) $\emptyset^c = \mathcal{U}$ e $\mathcal{U}^c = \emptyset$;
- 11) Dupla complementaridade: $(A^c)^c = A$;
- 12) Comutatividade: $A \cap B = B \cap A$ e $A \cup B = B \cup A$;
- 13) Associatividade: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ e $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
- 14) Leis de De Morgan: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ e $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Famílias de conjuntos

Seja

$$\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I},$$

onde, para cada índice i do conjunto I (o qual pode ser finito ou infinito), A_i é um conjunto.

União e interseção generalizadas

- ▶ $\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i, \text{ para todo } i \in I\}$;
- ▶ $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i, \text{ para algum } i \in I\}$.

Exercício: Considere $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, onde $A_i = [\frac{1}{i}, i]$.
Determine $\bigcap \mathcal{A}$ e $\bigcup \mathcal{A}$.

Famílias disjuntas e dois a dois disjuntas

Uma família de conjuntos $\{A_i\}_{i \in I}$ diz-se:

disjunta se $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$;

dois a dois disjunta se $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.

A união e interseção generalizadas gozam de propriedades análogas às propriedades da união e interseção de dois conjuntos.

Exemplos de propriedades da união e interseção generalizadas

Leis de De Morgan generalizadas:

$$\left(\bigcap_{i \in I} B_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} B_i^c \text{ e } \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} B_i^c.$$

$$A \setminus \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \setminus B_i) \text{ e } A \setminus \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} (A \setminus B_i).$$

Conjunto das partes

Definição (de conjunto das partes ou conjunto potência)

Dado um conjunto A , designa-se por conjunto das partes ou conjunto potência (ou, simplesmente, potência) de A e denota-se por $\mathcal{P}(A)$, o conjunto

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}.$$

Nota: $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$.

Exemplo: considerando o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, obtém-se

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$