Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I — Época de Recurso

Resolução

Duração: **2h30m**

Justifique todas as respostas e indique os cálculos efectuados.

65 Pontos

1. Considere a função real de variável real f definida por $f(x) = \begin{cases} x\ln x & \text{se} \quad x > 0 \\ k & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$, onde k é um parâmetro real.

(a) Determine $k \in \mathbb{R}$ por forma que f seja contínua em $x = 0$.

Indicações para uma resolução:

Para que f seja contínua em $x = 0$ tem de se ter $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

Uma vez que o limite de uma função num ponto existe se e só se os limites laterais nesse ponto existem e têm o mesmo valor e

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} k = k$;
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x\ln x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{RC}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x) = 0$;

temos que o limite de f na origem existe se e só se $k = 0$.

Como $f(0) = k$ conclui-se que f é contínua na origem se e só se $k = 0$.

(b) Determine, caso existam, os extremos locais de f em $\mathbb{R}^+$.

Indicações para uma resolução:

Para todo o $x \in \mathbb{R}^+$ temos $f(x) = x\ln x$, pelo que f é diferenciável em $\mathbb{R}^+$.

Temos então, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$,

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1\,.$$

Consequentemente vem

$$(f'(x) > 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+) \iff (\ln x > -1 \wedge x \in \mathbb{R}^+) \iff x \in \left]\frac{1}{\mathrm{e}}, +\infty\right[$$

e

$$(f'(x) < 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+) \iff (\ln x < -1 \wedge x \in \mathbb{R}^+) \iff x \in \left]0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right[$$

o que permite concluir que, em $\mathbb{R}^+$, f tem um mínimo local $f(\mathrm{e}^{-1}) = -\mathrm{e}^{-1}$ em $x = \mathrm{e}^{-1}$.

(c) Determine o valor da área da região limitada do plano situada entre $x = 1$ e $x = \mathrm{e}$ e delimitada pelo gráfico de f e pelo eixo das abcissas.

Indicações para uma resolução:

Uma vez que, para todo o $x \in [1, \mathrm{e}]$, $f(x) = x\ln x \geq 0$, o valor pedido é dado por

$$A = \int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,dx\,.$$

Tendo em vista a aplicação do método de integração por partes, considerando

$$u(x) = \ln x \quad \text{temos} \quad u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$v'(x) = x \qquad \text{temos} \quad v(x) = \frac{x^2}{2}\,.$$

Obtemos então

$$\begin{aligned} A = \int_1^{\mathrm{e}} x \ln x \, dx &= \left.\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\,dx \\ &= \frac{\mathrm{e}^2}{2}\ln \mathrm{e} - \frac{1}{2}\ln 1 - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{2}\,dx \\ &= \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \left.\frac{x^2}{4}\right]_1^{\mathrm{e}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{\mathrm{e}^2}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{\mathrm{e}^2}{4} + \frac{1}{4}\,. \end{aligned}$$

20 Pontos

2. Mostre que a equação $x^5 + x^3 + 2x - 3 = 0$ tem uma única raiz real no intervalo $]0,1[$.

Indicações para uma resolução:

Consideremos a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^5 + x^3 + 2x - 3$.

Uma vez que:

- a função f é contínua no intervalo $[0,1]$;
- $f(0) = -3 < 0$;
- $f(1) = 4 - 3 = 1 > 0$;

o Teorema de Bolzano permite concluir que existe pelo menos um ponto $x_0 \in]0,1[$ tal que $f(x_0) = 0$.

Para garantir a unicidade desta raiz no intervalo $]0,1[$ vamos analisar o comportamento da função neste intervalo. Uma vez que f é diferenciável e, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 2 > 0$, temos que f é estritamente crescente em $]0,1[$, logo injectiva em $]0,1[$ e, portanto, admite um único zero neste intervalo.

30 Pontos

3. Considere a função f definida em $\mathbb{R}^-$ por $f(x) = \arccos(\mathrm{e}^x)$.

(a) Mostre que f é estritamente decrescente.

Indicações para uma resolução:

A função f é a composta de uma função estritamente crescente (a função exponencial) com uma função estritamente decrescente (a função arco-coseno), pelo que é estritamente decrescente.

Resolução alternativa:

Uma vez que f é diferenciável em $\mathbb{R}^-$, para estudar a sua monotonia neste intervalo, podemos recorrer ao estudo do sinal da primeira derivada.

Temos, para todo o $x \in \mathbb{R}^-$,

$$f'(x) = -\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-(\mathrm{e}^x)^2}} < 0\,,$$

pelo que podemos concluir que f é estritamente decrescente.

(b) Justifique que f é invertível e caracterize a função inversa de f indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica que a define.

Indicações para uma resolução:

Pela alínea anterior, f é estritamente monótona, logo injectiva, pelo que é invertível.

Por definição de inversa de uma função temos que $D_{f^{-1}} = CD_f$ e $CD_{f^{-1}} = D_f$.

- *Determinação do contradomínio de* f^{-1}
  Como, por hipótese, $D_f = \mathbb{R}^-$, temos $CD_{f^{-1}} = \mathbb{R}^-$.
- *Determinação do domínio de* f^{-1}
  Uma vez que $\{\mathrm{e}^x, x \in \mathbb{R}^-\} =]0,1[$ temos que $CD_f = \{\arccos(\mathrm{e}^x), x \in \mathbb{R}^-\} = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
  Consequentemente
  $$D_{f^{-1}} = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\; .$$
- *Determinação da expressão analítica que define* f^{-1}
  Para todo o $x \in \mathbb{R}^-$ e para todo o $y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ temos
  $$y = \arccos(\mathrm{e}^x) \iff \mathrm{e}^x = \cos y \iff x = \ln(\cos y)\,.$$
  Consequentemente
  $$f^{-1}(x) = \ln(\cos x)\,,$$
  para todo o $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Então f^{-1} é a função de contradomínio $\mathbb{R}^-$ definida por

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \left]0, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln(\cos x) \end{array}$$

30 Pontos

4. Considere a função f definida por $f(x) = \dfrac{1}{x(x^2+1)}$. Determine a primitiva F da função f que satisfaz a condição $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

Indicações para uma resolução:

Vamos começar por determinar a família das primitivas de f.

Trata-se do integral indefinido de uma função racional cujo denominador está decomposto no produto de polinómios irredutíveis. Para o calcular vamos começar por decompor a fracção $\dfrac{1}{x(x^2+1)}$ em fracções simples.

Temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x^2+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \\ &= \frac{A(x^2+1) + Bx^2 + Cx}{x(x^2+1)} \\ &= \frac{(A+B)x^2 + Cx + A}{x(x^2+1)} \end{aligned}$$

donde resulta o sistema

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases} \iff \begin{cases} B=-1 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases}$$

e, portanto,

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\,.$$

Temos então

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)\,dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C \\ &= \ln|x| - \ln\sqrt{x^2+1} + C \\ &= \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + C, \quad C\in\mathbb{R}\,,\end{aligned}$$

pelo que se tem

$$F(x) = \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + C$$

com $C\in\mathbb{R}$ a determinar por forma que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

Atendendo a que

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + C\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C\right) = C\,,$$

já que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1$ e, portanto, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = 0$.

Consequentemente, temos $C=1$ e, portanto, F é a função definida por

$$F(x) = \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + 1\,.$$

40 Pontos

5. Calcule os integrais indefinidos seguintes:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}\,dx$

Indicações para uma resolução:

Efectuando a substituição definida por $x = 2\sec t$, com $t\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, temos

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}\,dx &= \int \frac{1}{4\sec^2 t\sqrt{4\sec^2 t-4}}\,2\sec t\,\mathrm{tg}\,t\,dt \\ &= \int \frac{\mathrm{tg}\,t}{2\sec t\sqrt{4(\sec^2 t-1)}}\,dt \\ &= \int \frac{\mathrm{tg}\,t}{2\sec t\,2\,\mathrm{tg}\,t}\,dt \\ &= \int \frac{1}{4\sec t}\,dt \\ &= \frac{1}{4}\int \cos t\,dt \\ &= \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,t + C \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{1-\frac{4}{x^2}} + C, \quad C\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

<u>Cálculos auxiliares:</u>

De $x = 2\sec t$ resulta $\cos t = \dfrac{2}{x}$.

Uma vez que, para $t\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ temos $\mathrm{sen}\,t = \sqrt{1-\cos^2 t}$, obtemos $\mathrm{sen}\,t = \sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}$.

(b) $\displaystyle\int \frac{(1+\operatorname{arcsen} x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Indicações para uma resolução:

Uma vez que $(1+\operatorname{arcsen} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ temos

$$\int \frac{(1+\operatorname{arcsen} x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int (1+\operatorname{arcsen} x)^2 (1+\operatorname{arcsen} x)'\,dx$$

pelo que a primitiva considerada é uma primitiva imediata. Temos então

$$\int \frac{(1+\operatorname{arcsen} x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{(1+\operatorname{arcsen} x)^3}{3} + C, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

15 Pontos

6. Sejam f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e F a função definida em $\mathbb{R}$ por $F(x) = \displaystyle\int_{-5}^{x^3} f(t)\,dt$. Justifique que F é diferenciável em $\mathbb{R}$ e determine $F'(x)$.

Indicações para uma resolução:

Por hipótese a função f é contínua em $\mathbb{R}$ e, uma vez que a função g definida por $g(x) = x^3$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $CD_g \subset D_f$, o Teorema Fundamental do Cálculo Integral garante que F é diferenciável em $\mathbb{R}$ e, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = g'(x) f(g(x)) = 3x^2 f(x^3)\,.$$