

# Mecânica e Campo Eletromagnético

2017/2018 – parte 6

Luiz Pereira

luiz@ua.pt



## Tópicos

- **Movimento de rotação**
  - Cinemática e Energia de Rotação
  - Momento de Inércia: Teorema dos eixos paralelos
  - Rotação e Momento de uma força
  - Momento angular: conservação do momento angular

## Corpo Rígido

Um corpo rígido é um sistema de partículas cujas distâncias relativas, ao longo do tempo, permanecem constantes, mantendo a forma. O movimento de um corpo rígido pode ser descrito, em geral, como a combinação de um **movimento de Translação** (normalmente analisado em termos do Centro de Massa) e um **movimento de Rotação**

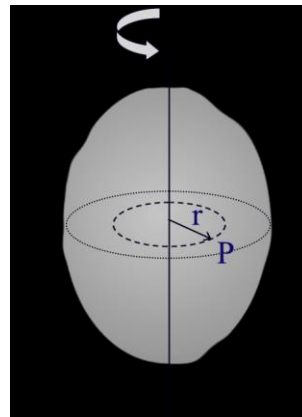


## Corpo Rígido: Rotação

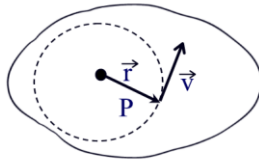
Vejamos a situação mais simples, em que o movimento é apenas de rotação, em torno de um eixo.

A trajetória de cada partícula vai ser circular.

A trajetória de P é uma circunferência de raio  $r$ , a uma distância de P ao EIXO de ROTAÇÃO



## Cinemática de rotação



Vendo de topo, ao longo do eixo de rotação, temos o plano perpendicular ao eixo e que contém o ponto P

**Como vimos anteriormente, num movimento circular de raio  $r$  existem relações entre as grandezas linear e circular:**

**Distância e ângulo descrito**

$$s = r\theta$$

**Velocidade linear e Velocidade angular**

$$v = r\omega$$

**Aceleração centrípeta e velocidade angular**

$$a_c = r\omega^2$$

**Aceleração tangencial e aceleração angular**

$$a_t = r\alpha$$

## Energia Cinética de Rotação

Num corpo rígido em rotação, a velocidade linear de cada ponto é tanto maior quanto mais afastado estiver do eixo.

Para calcular a energia cinética de rotação do corpo teremos que somar a energia cinética de cada partícula

$$E_c(i) = \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad \text{Somando:}$$

$$E_c = \sum_i E_c(i) = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

A velocidade angular é a mesma para todas as partículas

À grandeza entre parêntesis chamamos **MOMENTO DE INÉRCIA DO SÓLIDO**

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad (kgm^2)$$

## Energia Cinética de Rotação

Vem então:

$$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2$$

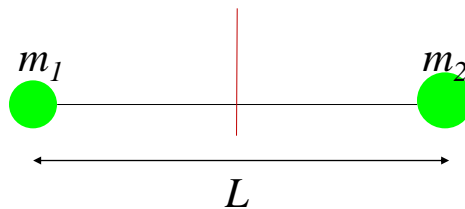
A Energia Cinética total é dada por uma expressão análoga à de uma partícula com movimento de translação

$$\frac{1}{2} m v^2 \leftrightarrow \frac{1}{2} I \omega^2$$

No caso de um corpo rígido extenso com uma distribuição contínua de massa temos que calcular um integral:

$$I = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum r_i^2 \Delta m_i = \int_{\text{Todo volume}} r^2 dm$$

## Momento de inércia



Calcular o momento de inércia dos dois corpos relativamente a um eixo vertical, que passa pelo centro:

$$I = \sum m_i r_i^2 = m_1 \left( \frac{L}{2} \right)^2 + m_2 \left( \frac{L}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (m_1 + m_2) L^2$$

Que se escreve em função da massa total do sistema:

$$I = \frac{1}{4} M L^2$$

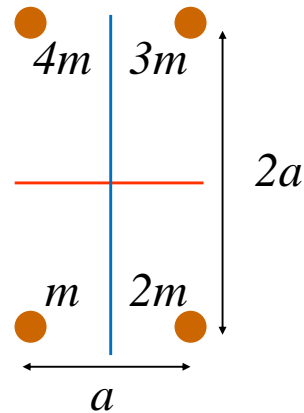
## Momento de inércia

Calcular o momento de inércia relativamente um eixo horizontal:

$$I = \sum m_i r_i^2 = ma^2 + 2ma^2 + 3ma^2 + 4ma^2 \\ = 10ma^2 = M_T a^2$$

um eixo Vertical:

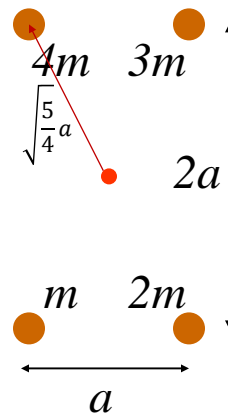
$$I = m \frac{a^2}{4} + 2m \frac{a^2}{4} + 3m \frac{a^2}{4} + 4m \frac{a^2}{4} \\ = 10m \frac{a^2}{4} = M_T \frac{a^2}{4}$$



## Momento de inércia

Relativamente a um eixo perpendicular:

$$I = \sum m_i r_i^2 \\ = (m + 2m + 3m + 4m) \left( \sqrt{\frac{5}{4}} a \right)^2 \\ = 10m \left( \frac{5}{4} a^2 \right) = M_T \left( \frac{5}{4} a^2 \right)$$



## Cálculo de momentos de inércia

No caso de corpos extensos:

$$I = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum r_i^2 \Delta m_i = \int r^2 dm$$

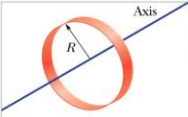
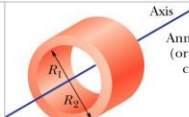
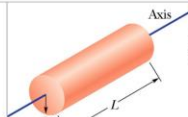
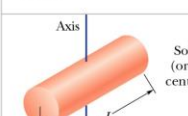
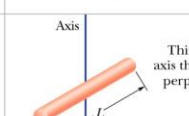
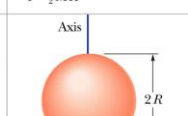
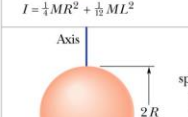
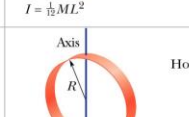
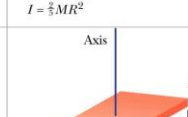
Para calcular concretamente os momentos de inércia temos que relacionar a variável massa com as coordenadas espaciais (a 3D o volume e a massa volúmica)

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{dm}{dV} \Rightarrow dm = \rho dV$$

$$I = \int \rho r^2 dV$$

Vamos ver casos simples:

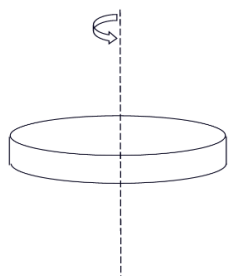
## Alguns Momentos de Inércia

 <p>Hoop about central axis</p> <p><math>I = MR^2</math></p> <p>(a)</p>	 <p>Annular cylinder (or ring) about central axis</p> <p><math>I = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)</math></p> <p>(b)</p>	 <p>Solid cylinder (or disk) about central axis</p> <p><math>I = \frac{1}{2} MR^2</math></p> <p>(c)</p>
 <p>Solid cylinder (or disk) about central diameter</p> <p><math>I = \frac{1}{4} MR^2 + \frac{1}{12} ML^2</math></p> <p>(d)</p>	 <p>Thin rod about axis through center perpendicular to length</p> <p><math>I = \frac{1}{12} ML^2</math></p> <p>(e)</p>	 <p>Solid sphere about any diameter</p> <p><math>I = \frac{2}{5} MR^2</math></p> <p>(f)</p>
 <p>Thin spherical shell about any diameter</p> <p><math>I = \frac{2}{3} MR^2</math></p> <p>(g)</p>	 <p>Hoop about any diameter</p> <p><math>I = \frac{1}{2} MR^2</math></p> <p>(h)</p>	 <p>Slab about perpendicular axis through center</p> <p><math>I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)</math></p> <p>(i)</p>

## Teorema dos eixos paralelos (Teorema de Steiner)

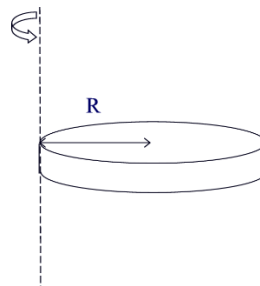
Vamos relacionar o momento de inércia  $I$  de um corpo em relação a um dado eixo com o momento de inércia  $I_{CM}$  relativamente a um eixo paralelo que passa pelo centro de massa.

Queremos relacionar, por exemplo, num disco (ou cilindro maciço).



Momento de Inércia em relação ao C.M.

$$I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$$



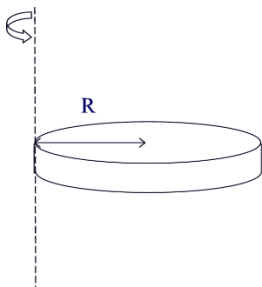
$$I = ?$$

## Teorema dos eixos paralelos

O Resultado do Teorema é

$$I = I_{CM} + Md^2$$

Momento de Inércia em relação ao eixo



Momento de Inércia em relação ao eixo paralelo que passa pelo C. M.

$d$ : é a distância do C.M. ao eixo

$M$ : Massa do corpo (C.M. como partícula)

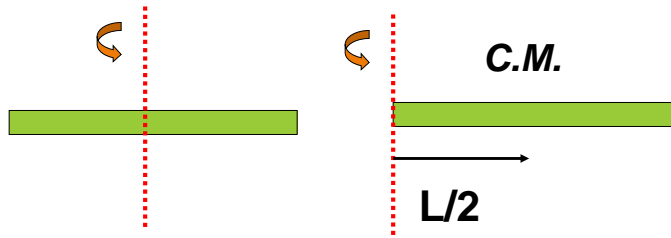
No exemplo, vem

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

## Teorema dos eixos paralelos

Os cálculos que fizemos para a barra verificam o Teorema

$$I = I_{CM} + Md^2$$



$$I_c = \frac{ML^2}{12}$$

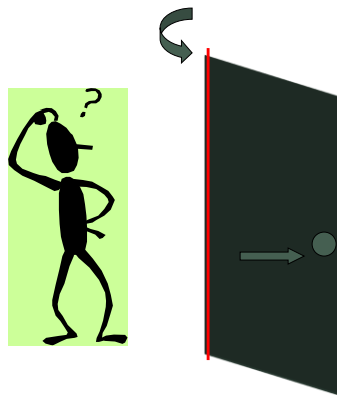
Eixo no centro

$$I_E = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{3}$$

Eixo na extremidade

## Rotação e Momento de uma força

Todos sabemos que quando queremos abrir uma porta devemos empurrá-la junto ao puxador e não junto às dobradiças, no eixo de rotação.



Esta diferença de efeitos é traduzida pelo momento da força aplicada em relação ao eixo



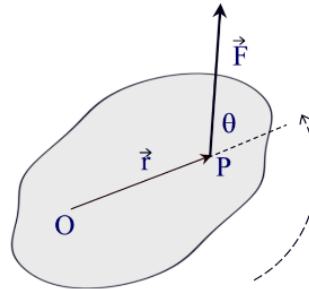
## Rotação e Momento de uma força

O momento  $\tau$  de uma força  $F$  aplicada num ponto  $P$  relativamente a um ponto  $O$  é dado por:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

O momento da força é um vetor perpendicular a  $F$  e a  $r$ .

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin(\theta)$$



$$\vec{r} = P - O$$

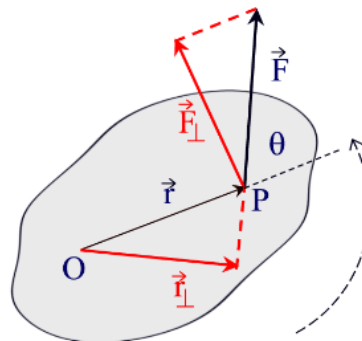
$\theta$  é o ângulo entre  $F$  e  $r$ .

## Rotação e Momento de uma força

O momento  $\tau$  de uma força  $F$  aplicada num ponto  $P$  relativamente a um ponto  $O$  é assim:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

O momento da força pode ser calculado usando as componentes de  $r$  (ou  $F$ ) perpendiculares a  $F$  (ou  $r$ ).



$$|\vec{\tau}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin(\theta) = |\vec{r}_{\perp}| \cdot |\vec{F}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}_{\perp}|$$

## Rotação e Momento de uma força

O que acontece se tivermos mais do que uma força aplicada?

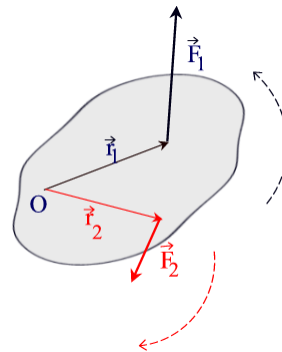
Como analisar o efeito do conjunto?

O Movimento do sistema vai ser determinado pelo momento resultante, que é a soma dos momentos das várias forças

$$\vec{\tau} = \sum \vec{\tau}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Neste exemplo, os dois vetores têm sentidos opostos.

Em que sentido vai rodar o corpo em torno de O?



## Rotação e Momento de uma força

Vejamos como o momento das forças aplicadas determina o movimento de rotação dum corpo rígido (em torno dum eixo)

Começemos por ver o caso simples, duma partícula de massa  $m$ , com movimento circular de raio  $r$  e sujeita a uma força  $F$ .

A aceleração tangencial da partícula vem:

$$F_t = ma_t$$

O momento de  $F$  resulta apenas da componente tangencial de  $F$  (porquê?)

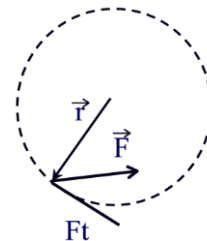
$$|\vec{\tau}| = rF_t = ma_t r$$

Relacionando com a aceleração angular, vem

$$\tau = mr^2 \alpha$$

Usando o momento de inércia da partícula:

$$\tau = I\alpha$$



## Rotação e Momento de uma força

A expressão anterior é generalizável para um sólido constituído por muitas partículas, rodando em torno dum eixo Z

Para cada partícula de massa  $m_i$  temos

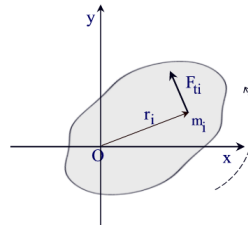
$$F_{ti} = m_i a_{ti}$$

O momento (componente Z) aplicado a cada uma é

$$\tau_i = m_i r_i^2 \alpha$$

Somando sobre todas as partículas, e como todas têm a mesma aceleração e velocidade angulares

$$\tau = \sum_i \tau_i = \left( \sum_i m_i r_i^2 \right) \alpha \quad \longrightarrow \quad \tau = I \alpha$$



## Rotação e Momento de uma força

Nesta soma, só contribuem as forças exteriores aplicadas ao corpo, pois as forças entre partículas (interiores) dão contribuições que cancelam aos pares, devido à lei de ação-reação.

A lei de movimento para a rotação em torno dum eixo tem uma forma que é análoga à da 2ª lei de Newton para a translação, trocando as grandezas correspondentes

$$F = ma \leftrightarrow \tau = I \alpha$$

Em cada caso,  $F$  e  $\tau$  são as resultantes das forças e momentos exteriores.

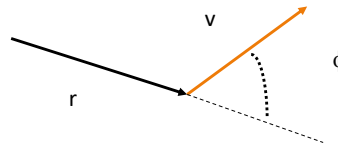
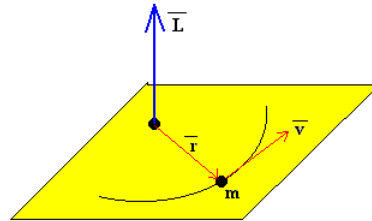
## Momento angular

O momento angular de uma partícula em relação a um ponto O é definido como o momento do vetor momento linear ( $\vec{p}$ )

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

As unidades SI são  $\text{kgm}^2\text{s}^{-1}$

$$|\vec{L}| = mvr \sin\phi$$

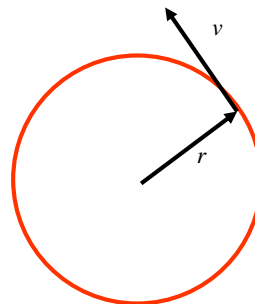


## Momento Angular: exemplos

### Movimento circular

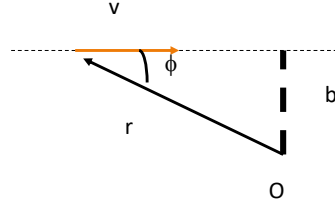
Neste caso  $\phi=90^\circ$  e fica

$$L = mvr = m\omega r^2$$



L é "para cima"

Movimento retilíneo : Também tem momento angular!



$$L = mvr \sin\phi = mvb$$

Distância entre O e a reta

## Variação do Momento Angular

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\underbrace{\vec{v} \times \vec{p}} = \vec{0}$$

$$\vec{v} \times \vec{p} = \vec{0}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

O momento da força resultante aplicada a uma partícula é igual à variação do momento angular com o tempo

Note-se que o momento da força e o momento angular são calculados em relação ao mesmo ponto

## Momento Angular: sistema de partículas

Se tivermos um sistema de partículas, o resultado é generalizado. Cada partícula está sujeita a forças exteriores e interiores ao sistema. A contribuição destas, somada sobre todas as partículas é nula (devido à lei de ação-reação).

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{i\,ext} = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

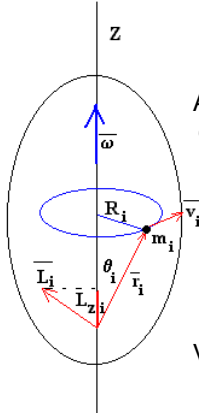
$$\sum \vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Num sistema isolado (forças exteriores = 0), o momento angular é CONSTATANTE.  
Se  $\vec{r}$  e  $\vec{F}$  são colineares,  $\vec{L}$  também é constante (FORÇAS CENTRAIS)

## Momento Angular: corpo rígido

Para o caso dum corpo rígido em rotação em torno dum eixo fixo, vamos obter uma expressão que relaciona diretamente  $L$  com a velocidade angular  $\omega$ .

Em relação ao eixo, o movimento de cada partícula é circular, portanto



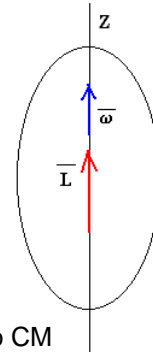
$$L_i = m_i v_i r_i = m_i \omega r_i^2$$

A soma sobre todas as partículas só terá componente segundo o eixo de rotação (Z)

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \sum_i (m_i r_i^2) \omega = I \omega_z$$

$$L_z = I \omega_z$$

Vale para um eixo de simetria que passe pelo CM



Numa situação geral, a relação é muito mais complexa

## Conservação do momento angular

Num sistema isolado, o momento angular mantém-se constante.

Uma situação interessante ocorre quando o momento de inércia varia.

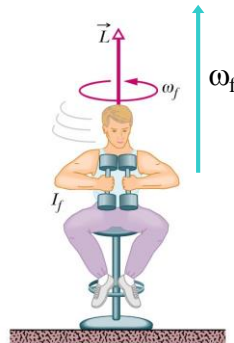
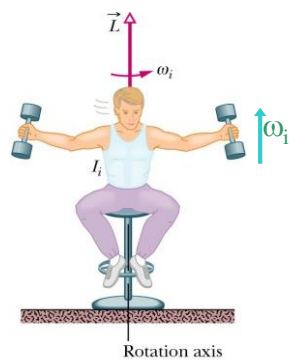


## Conservação do momento angular

Momento Angular (L) constante, pois o momento das  $F_{\text{ext}}=0$

$$L=I\omega \implies \omega=L/I$$

$$\omega_i = L / I_i$$



$$\omega_f = L / I_f$$

$$I_f < I_i$$

então

$$\omega_f > \omega_i$$

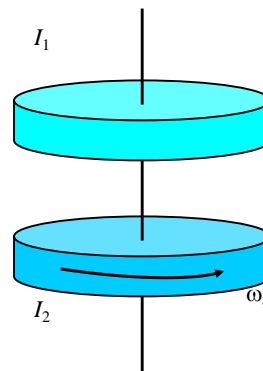
## Conservação do momento angular

Deixar cair um disco parado sobre outro que roda. Ficam ambos a rodar em conjunto (atrito)

$$L_i = I_2 \omega_o$$

$$L_f = (I_1 + I_2) \omega_f$$

$$\omega_f = \frac{I_2}{I_1 + I_2} \omega_o$$



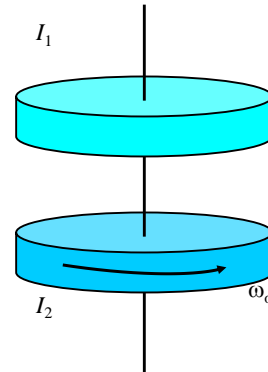
## Conservação do momento angular

Qual a diminuição de energia cinética?

$$KE_i = \frac{1}{2} I_2 \omega_o^2$$

$$KE_f = \frac{1}{2} (I_1 + I_2) \omega_f^2$$

$$KE_f = \frac{1}{2} I_2 \omega_o^2 \frac{I_2}{I_1 + I_2}$$



## Colisão perfeitamente inelástica

## Momento angular: centro de massa

Para um sistema de partículas temos:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

Escrevemos a posição e a velocidade de cada partículas relativamente ao centro de massa:

$$\vec{r}_i^* = \vec{r}_i - \vec{R}_{CM} \quad \vec{v}_i^* = \vec{v}_i - \vec{V}_{CM} \Leftrightarrow \vec{r}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{r}_i^* \quad \vec{v}_i = \vec{V}_{CM} + \vec{v}_i^*$$

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} + \vec{r}_i^*) \times (\vec{V}_{CM} + \vec{v}_i^*) \\ &= \sum_i m_i \vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} + \sum_i m_i \vec{R}_{CM} \times \vec{v}_i^* + \sum_i m_i \vec{r}_i^* \times \vec{V}_{CM} + \sum_i m_i \vec{r}_i^* \times \vec{v}_i^* \end{aligned}$$



## Momento angular: centro de massa

Que se transcreve assim:

$$\vec{L} = \vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} \sum_i m_i + \vec{R}_{CM} \times \left( \sum_i m_i \vec{v}_i^* \right) + \left( \sum_i m_i \vec{r}_i^* \right) \times \vec{V}_{CM} + \sum_i m_i \vec{r}_i^* \times \vec{v}_i^*$$

$$\vec{L}_{CM}$$



Momento angular do centro de massa em relação ao ponto/eixo considerado

$$= M_T V_{CM}^* = 0$$

$$= M_T R_{CM}^* = 0$$

$$\vec{L}^*$$



Momento angular do sistema relativamente ao CM.

$$\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}^*$$

## Momento angular: centro de massa

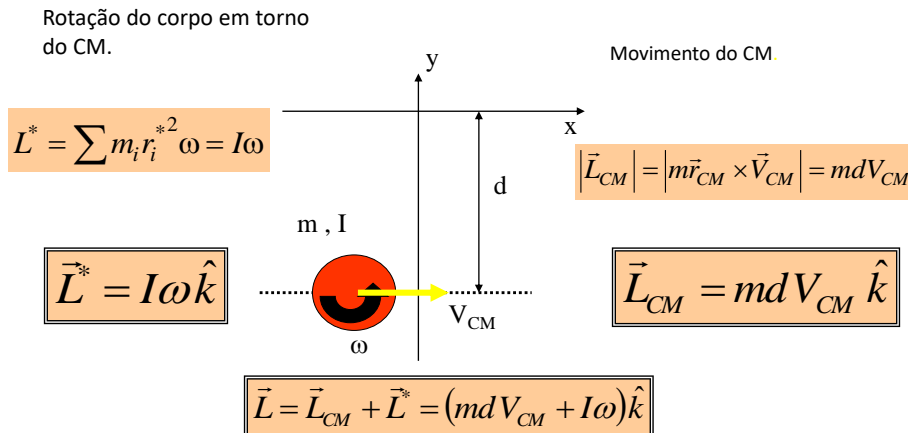
O momento angular de um sistema de partícula relativamente a um eixo é a soma:

- (a) do momento angular do centro de massa relativamente a este eixo e
- (b) do momento angular do sistema relativamente a um eixo paralelo que passa pelo centro de massa

$$\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}^*$$

## Momento angular

momento angular em relação ao eixo zz de um corpo que roda em torno do CM e tem também movimento de translação

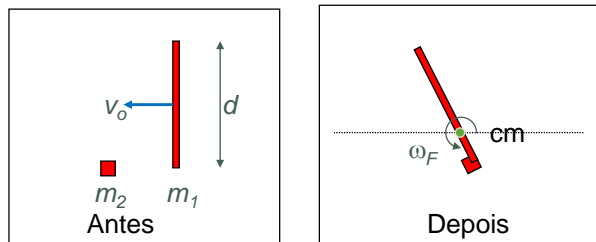


## Momento angular

colisão entre uma barra e uma massa

Uma barra de comprimento  $d$  e massa  $m_1=2m$ , que tem um movimento retilíneo uniforme,  $v_0$  e não roda sobre si própria, colide, de maneira perfeitamente inelástica, com uma massa  $m_2=m$  inicialmente em repouso, como na figura.

Qual é a velocidade de rotação final,  $\omega_F$  ?

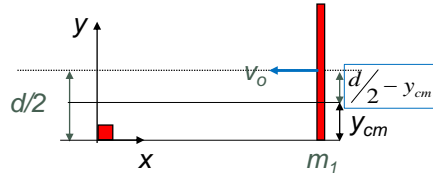


## Momento angular

colisão entre uma barra e uma massa

Escolhemos a posição da massa  $m_2$  como origem. Podemos então escrever a posição do CM do sistema, imediatamente antes da colisão:

$$y_{CM} = \frac{d}{2} \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) = \frac{d}{3}$$



O momento angular antes da colisão calculado relativamente ao ponto  $(0, y_{CM})$  é devido unicamente ao movimento do centro de massa da barra porque a barra não roda.

$$\vec{L}_i = \vec{L}_{CM,i} + \vec{L}_i^* = m_1 v_0 \left( \frac{d}{2} - y_{CM} \right) \hat{k}$$

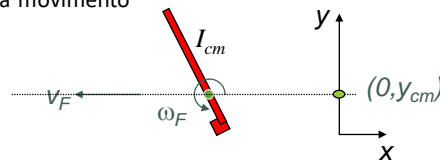
$$\vec{L}_i = \frac{m v_0 d}{3} \hat{k}$$

## Momento angular

colisão entre uma barra e uma massa

Depois da colisão, o momento angular é devido unicamente a movimento de rotação em torno do CM do sistema massa+barra.

$$\vec{L}_f = \vec{L}_{CM,f} + \vec{L}_f^* = I_{CM} \omega_f \hat{k}$$

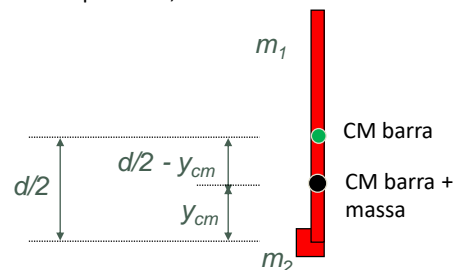


O momento de inércia do sistema relativamente ao CM, é a soma dos momentos da barra e da massa, e utilizando o teorema dos eixos paralelos, é:

$$I_{CM} = I_{barra} + I_{m2}$$

$$= \frac{m_1}{12} d^2 + m_1 \left( \frac{d}{2} - y_{CM} \right)^2 + m_2 y_{CM}^2$$

$$I_{CM} = \frac{m}{3} d^2$$



## Momento angular

colisão entre uma barra e uma massa

Utilizando a conservação do momento angular:

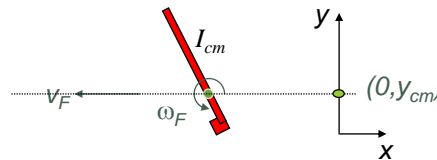
$$\vec{L}_f = \vec{L}_i$$

$$I_{CM} \omega_f \hat{k} = m_1 v_0 \left( \frac{d}{2} - y_{CM} \right) \hat{k}$$

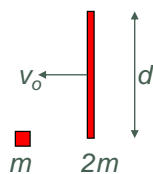
Ou seja

$$\omega_f = \frac{v_0}{d}$$

$$\omega_f = \frac{m_1 v_0}{I_{CM}} \frac{d}{2} \left( 1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)$$



Antes



Depois

