Cap 4 - Espaços Vetoriais

O conjunto $\mathcal{V}$ munido das operações $\oplus$, adição, e $\odot$, multiplicação escalar, é um espaço vetorial real se

Adição

1. $\mathcal{V}$ é fechado para a adição $\forall x, y \in \mathcal{V} \quad x \oplus y \in \mathcal{V}$

2. $\oplus$ é comutativa $\forall x, y \in \mathcal{V} \quad x \oplus y = y \oplus x$

3. $\oplus$ é associativa $\forall x, y, \in \mathcal{V} \quad x \oplus y \oplus z = (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$

4. existe um (único) elemento neutro $0 \in \mathcal{V}$ $\exists \in \mathcal{V}$ $\forall x \in \mathcal{V} \quad x \oplus 0 = 0 \oplus x = x$

5. existe simétrico - único para cada elemento de $\mathcal{V}$ $\forall x \in \mathcal{V} \ \exists_{\ominus x \in \mathcal{V}} : x \oplus (-x) = (-x) \oplus x = 0$

Multiplicação Escalar

6. $\mathcal{V}$ é fechado relativamente à multiplicação escalar $\forall x \in \mathcal{V} \ \forall_\alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \odot x \in \mathcal{V}$

7. $\odot$ é distributiva relativamente a $\oplus$ $\forall x, y \in \mathcal{V} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \odot (x \oplus y) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y)$

8. $\odot$ é "distributiva" relativamente a $+$ $\forall x \in \mathcal{V} \ \forall_{\alpha, \beta} \in \mathbb{R} \quad (\alpha + \beta) \odot x = \alpha \odot x \oplus \beta \odot x$

9. associatividade $\forall x \in \mathcal{V} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (\alpha\beta) \odot x = \alpha \odot (\beta \odot x)$
$= \beta \odot (\alpha \odot x)$

10. existência de elemento neutro para a operação $\odot$, multiplicação escalar

$\exists_{1 \in \mathbb{R}}, \forall_x \in \mathcal{V} : \quad 1 \odot x = x$

$(\mathcal{V}, \oplus, \odot)$ é um espaço vetorial real

Exemplos

① $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$

$0 = (0,0,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

simétrico aditivo $-(x, y, z) = -x, -y, -z)$

$1 = 1$

② $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$

$0 = (0, 0, \dots, 0)$

$1 = 1$

③ $(M_{m \times n}, +, \cdot) = (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, +, \cdot)$

$0 = 0$ matriz nula

simétrico de A é $-A$

$1 = 1$

④ $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$

sendo

$x \oplus y = xy$

$\alpha \odot x = x^\alpha$

$0 = 1$

$1 = 1$

⑤ $(\mathcal{V}, +, \cdot)$

$\mathcal{V} = \{(0, x_2, x_3 \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n\}$ → este conjunto munido destas operações satisfaz as propriedades espaço vetorial real

⑥ $(\mathcal{V}_2, +, \cdot)$

$\mathcal{V}_2 = \{(1, x_2, x_3 \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$

não é espaço vetorial ~~vetorial~~

$(1, x_2, x_3, \ldots x_n) + (1, y_2, y_3 \ldots, y_n) =$

$= (2, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \ldots) \notin \mathcal{V}_2$

31 de Outubro

Continuação dos exemplos

⑦ $\mathcal{P}^n$ ← conjunto dos polinómios de grau exatamente n

$(\mathcal{P}^n, +, \cdot)$ Não é espaço vetorial

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, \; a_n \neq 0$

$n = 3$ $\quad P_1(x) = 2 + 3x^3 \in \mathcal{P}^n$

$P_2(x) = 2 + 3x^2 \notin \mathcal{P}^n$

$\hookrightarrow 2 + 3x^2 + x^3 \in \mathcal{P}^n$

$P_3(x) = -3x^3$

$P_1(x) + P_3(x) = 2 \notin \mathcal{P}^n$

⑧

$\mathcal{P}_n$ ← conjuntos dos polinómios de grau ~~maior~~ menor ou igual a n

$(\mathcal{P}_n, +, \cdot)$ é espaço vetorial

⑨ $\mathcal{P}$ ← conjunto de polinómios de qualquer grau

$(\mathcal{P}, +, \cdot)$ É espaço vetorial

⑩

$\mathcal{F} = \{f(x) : f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$

conjunto f. r. v. r função real variável real

$(\mathcal{F}, +, \cdot)$ É espaço vetorial

Propriedades

Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial real então

- $0 \odot X = 0_{\mathcal{V}}$

- $\alpha \odot 0_{\mathcal{V}} = 0_{\mathcal{V}}$

- $\alpha \odot X = 0_{\mathcal{V}}$
  ↳ $\alpha = 0$ ou $X = 0_{\mathcal{V}}$

- $(-1) \odot X = \underbrace{-X}_{\text{simetrico aditivo}}$

Subespaço Vetorial

O subconjunto $S \subseteq \mathcal{V}$ do espaço vetorial real $\mathcal{V}$ munido das mesmas operações é um subespaço vetorial real se ele próprio é um espaço vetorial real

Teorema

$S \subseteq \mathcal{V}$, $\mathcal{V}$ espaço vetorial real, é um subespaço vetorial real de $\mathcal{V}$ se e só se

- $S \neq \{\}$

- S é fechado para a adição de $\mathcal{V}$

- S é fechado para a multiplicação escalar de $\mathcal{V}$

Exemplo

$\mathcal{V}_0 = \{(0, x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$

(i) → como $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ e $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ espaço vetorial real

(ii) → $\mathcal{V}_0 \neq \{\}$ porque $(0, 1, 2, \dots, n-1) \in \mathcal{V}_0$
$(0, 0, 0, 0, \dots, 0) \in \mathcal{V}_0$

→ dados dois elementos quaisquer de $\mathcal{V}_0$ e verificar a sua soma
sejam $(0, x_2, \dots, x_n)$ e $(0, y_2, \dots, y_n) \in \mathcal{V}_0$

$$(0, x_2, \dots, x_n) + (0, y_2, \dots, y_n) = (0, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in \mathcal{V}_0$$

(iii) logo $\mathcal{V}_0$ é fechado para a adição em $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$

→ Dado um escalar e um qualquer elemento de $\mathcal{V}_0$, verificar a sua multiplicação escalar

seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e seja $(0, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{V}_0$

$$\alpha(0, x_2, \dots, x_n) = (0, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \in \mathcal{V}_0$$

(iv) logo $\mathcal{V}_n$ é fechado para a multiplicação escalar em $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$

conclusão: as condições (i), (ii), (iii), (iv) são satisfeitas, logo $(V_0, +, \cdot)$ é subespaço vetorial real de $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$

—— // ——

$V_1 = \{(1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$ é subespaço de $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$?

→ $V_1 \subset \mathbb{R}^n$

→ $(1, \dots, 1) \in V_1$ logo, V_1 é não vazio

→ sejam $(1, x_2, \dots, x_n)$ e $(1, y_2, \dots, y_n)$ elementos de V_1 então

$(1, x_2, \dots, x_n) + (1, y_2, \dots, y_n) = (2, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n) \notin V_1$

logo V_1 não é fechado para a adição em $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$

logo $(V_1, +, \cdot)$ não é subespaço vetorial de $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$

→ seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(1, x_2, \dots, x_n)$ elementos de V_1

então

$\alpha(1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$

ora

α pode ser $\neq 1$ pelo que nem sempre a multiplicação escalar resulta num elemento de V_1 podemos então dizer que V_1 não é fechado ~~porque~~ para a multiplicação escalar e portanto V_1 não é subespaço vetorial real de $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$

Exercício 3 - ficha 4

(a) $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$

i) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$

S é subespaço de $\mathbb{R}^2$?

(i) → $S \subseteq \mathbb{R}^2$ por definição de S

(ii) → $S \neq \{\}$ porque $(1, -1) \in S$

(iii) → S é fechado para a adição

seja (x_1, y_1) e (x_2, y_2) elementos de S, ou seja, $x_1 + y_1 = 0$ e $x_2 + y_2 = 0$

então

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

verifica se é elemento de S

$x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 0 + 0 = 0$

logo $(x_1 + x_2 + y_1 + y_2) \in S$, e portanto S é fechado para a adição

(iv) → S é fechado para a multiplicação escalar
seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(x, y) \in S$ isto é $x+y=0$

então
$\alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y)$

será que é elemento de S?

$\alpha x + \alpha y = \alpha(x+y) = \alpha \cdot 0 = 0$

logo S é fechado para a multiplicação escalar

concluimos que S é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$ pois (i), (ii), (iii), (iv) são satisfeitas.

c)

P_2 polinómios de x de grau menor ou igual a 2

i) $S_1 = \{ p(x) = ax^2 + bx + c \in P_2 : c = 0 \}$

(i) → $S_1 \subset P_2$, por definição

(ii) → $S_1 \neq \{\}$ porque $x^2 + 2x \in S_1$, $0 \in S_1$

→ sejam $p_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$, $c_1 = 0$ e $p_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$, $c_2 = 0$
polinómios de S_1

$p_1(x) + p_2(x) = (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)$

(iii) como $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$ teremos $c_1 + c_2 = 0$, logo $p_1(x) + p_2(x)$ é um elemento de S_1 deste modo S_1 é fechado para a adição

→ seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $p(x) = ax^2 + bx + c \in S_1$, com $c = 0$ então

$\alpha p(x) = \alpha a x^2 + \alpha b x + \alpha c$, como $c = 0$ temos $\alpha c = 0$ logo $\alpha p(x) \in S_1$

(iv) ou seja, S_1 é fechado para a multiplicação escalar

<u>Conclusão</u>
como (i), (ii), (iii) e (iv) são satisfeitas podemos dizer que S_1 é subespaço vetorial real de P_2

ii) $S_2 = \{ p(x) = ax^2 + bx + c \in P_2 : b = 1 \}$

→ $S_2 \subset P_2$, por definição

→ $S_2 \neq \{\}$ pois $x^2 + x + 1 \in S_2$

→ sejam $p_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ e $p_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2 \in S_2$
e por isso $b_1 = 1$ e $b_2 = 1$

temos $p_1(x) + p_2(x) = (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)$ pelo que $b_1 + b_2 = 1 + 1 = 2$

logo $p_1(x) + p_2(x) \notin S_2$

S_2 não é fechado para a adição e portanto S_2 não é subespaço vetorial de P_2

Proposição

se S é subespaço vetorial de V, então $0_V \in S$

Corolário
Se $0_V \notin S$ então S não é subespaço vetorial de V

Exemplo

→ no exercício anterior

o zero de P_2 é polinómio $p(x) = 0 \equiv 0x^2 + 0x + 0$ e $0 \notin S_2$, logo

S_2 não é subespaço vetorial

→ $V_1 = \{ (1, y, z) \in \mathbb{R}^3 \}$

o zero de $\mathbb{R}^3$ é $(0,0,0) \notin V_1$
logo V_1 não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$

Nota
sendo $(V, +, \cdot)$ é espaço vetorial real
$\{0_V\}$ e V dizem-se subespaços vetoriais triviais de V

Nota
→ $(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, +, \cdot)$

$N(A)$ o espaço nulo de uma matriz $A_{m \times n}$ é um espaço vetorial real
do conjunto

Exercício

Dada uma matriz A $m \times n$. Verifique que $\mathcal{N}(A)$ é um subespaço vetorial real de $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$

$\mathcal{N}(A) = \{X \in \mathbb{R}^n : AX = 0\}$

→ $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$, por definição

→ a solução $X=0$ é sempre solução do sistema homogéneo $AX=0$ logo $X=0 \in \mathcal{N}(A)$ portanto $\mathcal{N}(A) \neq \{\}$

→ sejam X e $y \in \mathcal{N}(A)$

$$\begin{cases} \text{se } X \in N(A) \Rightarrow AX = 0 \\ \text{se } y \in N(A) \Rightarrow Ay = 0 \end{cases}$$

Ora quero saber se $X+y \in \mathcal{N}(A)$ ou não

$$A(X+y) = AX + Ay = 0 + 0$$

logo $X+y \in \mathcal{N}(A)$ pelo que $N(A)$ é fechado para a adição

→ $\alpha \in \mathbb{R}$, $X \in N(A)$ $\quad (AX=0)$

$\alpha X \in \mathcal{N}(A)$?

$$A(\alpha X) = \alpha(AX) = \alpha 0 = 0$$

logo $\alpha X \in \mathcal{N}(A)$ pelo que $\mathcal{N}(A)$ é fechado para a multiplicação escalar

De (i), (ii), (iii) e (iv) resulta que $N(A)$ é subespaço vetorial real de $\mathbb{R}^n$.

5 de Novembro

Espaço gerado

Seja $K = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \mathcal{V}$

Chama-se espaço gerado por K ao conjunto formado por todas as combinações lineares dos elementos $x_1, \ldots, x_k$ do conjunto K.

$$\langle K \rangle = \langle x_1, x_2, \ldots x_k \rangle = \{X = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k,\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k \in \mathbb{R}\}$$

Se $S = \langle K \rangle$ diz-se que
→ S é gerado por K
→ S é gerado por $x_1, x_2, \ldots, x_k$
→ $x_1, x_2, \ldots, x_k$ gera S
→ K gera S

O conjunto $\langle K \rangle$ gerado por um conjunto de vetores é um subespaço vetorial do espaço $\mathcal{V}$.

Exemplos

- em $\mathbb{R}^2$

$<(1,2)> \leftarrow$ conjunto gerado pelo vetor $(1,2)$

a equação de uma reta é

$$X = P + \alpha v, \; \alpha \in \mathbb{R}$$

se $P = (0,0)$ obtemos

$$~~X~~ \; X = \alpha v$$

$$X = < v >$$

em $\mathbb{R}^3$

$$X = P + \alpha v, \; \alpha \in \mathbb{R}$$

se $P = (0,0,0)$

$$X = \alpha v = < v >$$

plano $\quad X = \alpha v + \beta u, \; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$= < v, u >$$

planos que passam na origem

- Dada a matriz $A_{m \times n}$ sendo $A = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix} = [C_1, \ldots, C_n]$

$\mathcal{L}(A) = < L_1, \ldots, L_m >$ Subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{C}(A) = < C_1, \ldots, C_n >$ subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$

Nota:

Dados $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathcal{V}$, $\mathcal{V}$ espaço vetorial,

$$< x_1, x_2, \ldots, x_k >$$
$$= < x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_k >$$
$$= < x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_k >$$
$$= < x_1, x_2, \ldots, \alpha x_j, \ldots, x_k >$$
$$= < x_1, \ldots, x_2, \ldots, \alpha x_1 + \beta x_j, \ldots, x_j, \ldots, x_k >$$

Nota

Se A e B são equivalentes por linhas, então $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B)$

Dizemos que o vetor X é combinação linear dos vetores $X_1, \dots, X_K$ se for possível escrever X como combinação linear dos vetores $X_1, \dots, X_K$. Ou seja, se $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K$ tais que $X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_K X_K$

Exercício 6 - 4ª ficha

b) $X = (1,1,0)$ comb. linear de $(2,1,-2), (1,0,0), (1,1,1)$

$\exists\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$(1,1,0) = \alpha_1(2,1,-2) + \alpha_2(1,0,0) + \alpha_3(1,1,1)$

$\Leftrightarrow (1,1,0) = (2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,\ \alpha_1 + \alpha_3,\ -2\alpha_1 + \alpha_3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 1 \\ -2\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 := L_3 + L_1]{L_2 := L_2 - \frac{1}{2}L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 := L_3 + 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right]$$ sistema possível e determinado

logo o vetor $(1,1,0)$ é combinação linear dos vetores X_1, X_2, X_3 indicados

Determinar os escalares da combinação linear

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ -\alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_3 = 2/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 = 1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 1 + 1/3 - 2/3 = 2/3 \\ \alpha_2 = -1 + \alpha_3 = 2/3 - 1 = -1/3 \\ \alpha_3 = 2/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1/3 \\ \alpha_2 = -1/3 \\ \alpha_3 = 2/3 \end{cases}$$

Portanto

$$(1,1,0) = \frac{1}{3}(2,1,-2) - 1/3\,(1,0,0) + \frac{2}{3}(1,1,1)$$

c) em P_2 verificar se $p(t) = -t^2 + t + 4$ é combinação linear dos vetores

$P_1(t) = t^2 + 2t + 1$

$P_2(t) = t^2 + 3$

$P_3(t) = t - 1$

$-t^2 + t + 4 = \alpha_1(t^2 + 2t + 1) + \alpha_2(t^2 + 3) + \alpha_3(t - 1)$

$\Leftrightarrow -t^2 + t + 4 = (\alpha_1 + \alpha_2)t^2 + (2\alpha_1 + \alpha_3)t + (\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = -1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 := L_3 - L_1]{L_2 := L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 := L_3 + L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right]$$

Sistema impossível pelo que o vetor $p(n)$ não se escreve como combinação linear dos vetores $P_1^{(n)}$, $P_2^{(n)}$ e $P_3^{(n)}$ indicados

Exercício 7

b) $\{(0,1), (0,2)\}$ em $\mathbb{R}^2$

$S = \langle (0,1), (0,2) \rangle$

$= \{ X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$
$(x,y) = \alpha(0,1) + \beta(0,2),\ \alpha \text{ e } \beta \in \mathbb{R} \}$

$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = (0, \alpha + 2\beta),\ \alpha \text{ e } \beta \in \mathbb{R} \}$

$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \}$

Independência Linear

Dados os vetores $X_1, \dots, X_K \in \mathcal{V}$, $\mathcal{V}$ espaço vetorial, dizemos que os vetores $X_1, \dots, X_K$ são linearmente independentes se

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_K X_K = 0$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_K = 0$$

Caso contrário os ~~valores~~ vetores $X_1, \dots, X_K$ dizem-se linearmente dependentes e acontece quando existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K$ não todos nulos tais que
$0_{\mathcal{V}} = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_K X_K$

Exercício 11

a) $\{(1,1,0), (0,2,3), (1,2,3), (1,-1,1)\}$ é linearmente independentes?

sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(0,2,3) + \alpha_3(1,2,3) + \alpha_4(1,-1,1) = (0,0,0)$

O sistema é possível pp é um sistema homogéneo tem no máximo 3 pivots

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sistema homogéneo
$A_{3\times 4}$
sistema possível e indeterminado pelo que os vetores vão ser linearmente dependentes

a') $\{(1,1,0), (0,2,3), (1,2,3)\}$ são linearmente independentes?
~~se~~ $\alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(0,2,3) + \alpha_3(1,2,3) = (0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 := L_2 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 := L_3 - \frac{3}{2} L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix}$$

O sistema homogéneo é possível e determinado pelo que os vetores $(1,1,0)$, $(0,2,3)$, $(1,2,3)$ são linearmente independentes

d)

$\{2t^2+1,\ t-2,\ t+3\}$

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1(2t^2+1) + \alpha_2(t-2) + \alpha_3(t+3) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2\alpha_1 t^2 + (\alpha_2+\alpha_3)t + (\alpha_1 - 2\alpha_2 - 3\alpha_3) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 := L_3 - \frac{1}{2} L_1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 := L_3 + 2L_2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

sistema homogéneo possível e determinado

logo $\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

pelo que os vetores

$2t^2+1$

$t-2$

$t+3$ são linearmente independentes

Exercício 8

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Espaço nulo

$N(A) = \{ X \in \mathbb{R}^4 : AX = 0 \}$

$X = (x, y, z, t)$

Conjunto de soluções do sistema homogéneo $AX=0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3 := L_3 - 2L_1 \\ L_4 := L_4 - L_1}]{L_2 := L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 := L_4 - \frac{1}{2}L_2]{L_3 := L_3 - \frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sistema homogéneo é possível e indeterminado

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z + t = 0 \\ z, t \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -z - t \\ z, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$(x,y,z,t) \in N(A)$ são tais que $(x,y,z,t) = (-z, -z-t, z, t)$

$= z(-1,-1,1,0) + t(0,-1,0,1)$

$N(A) = \langle (-1,-1,1,0), (0,-1,0,1) \rangle$

$(0,1)$ e $(1,2)$
$(1,3)$

Q.: Há um linearmente dependente significa que o posso escrever com

$<(0,1),(1,2),(1,3)> = <(0,1),(1,2)>$

Seja V um espaço vetorial real

$K = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset V$ e $S = <V>$

se o vetor X é combinação linear de $x_1, \dots, x_k$ então $X \in S$ e $<X, x_1, \dots, x_k> = <x_1, \dots x_k>$

se $X \in K$ e X é combinação linear dos vetores de K então $S = <K \setminus \{X\}>$

7 de Novembro

Exercício 12

Seja $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ l.i. num e.v. V
Verificar se $B = \{x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_3\}$ é l.i?

Como A é l.i $\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$
$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

Será que B é l.i?
sejam $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$

sistema homogéneo
↳ sempre possível

$\beta_1(x_1 + x_2) + \beta_2(x_1 + x_3) + \beta_3(x_2 + x_3) = 0$

$\Leftrightarrow \beta_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \beta_2 x_1 + \beta_2 x_3 + \beta_3 x_2 + \beta_3 x_3 = 0$

$\Leftrightarrow (\beta_1 + \beta_2)x_1 + (\beta_1 + \beta_3)x_2 + (\beta_2 + \beta_3)x_3 = 0$

Como $\{x_1, x_2, x_3\}$ é l.i. então

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = 0 \\ \beta_1 + \beta_3 = 0 \\ \beta_2 + \beta_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 := L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 := L_3 + L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

o sistema é possível e determinado, portanto

$$\begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = 0 \\ \beta_3 = 0 \end{cases}$$

podemos concluir que o conjunto B é linearmente independente

Teorema

Num espaço vetorial $\mathcal{V}$, um conjunto de vetores K é lineamente dependente sse existe um vetor $x \in K$ tal que x se escreve como combinação linear dos restantes vetores $K \setminus \{x\}$

- Um conjunto de vetores K é lineamente independente sse para cada $x \in \mathcal{V}$ e $x \notin \langle K \rangle$ então $K \cup \{x\}$ é lineamente independente

- se $S = \langle K \rangle$ e existe $x \in K$ que é combinação linear de $K \setminus \{x\}$ então $S = \langle K \setminus \{x\} \rangle$

Nestas condições, K não é lineamente independente

- se K é lineamente independente (não existe em K um vetor que se escreva como combinação linear dos restantes) e se K não gera $\mathcal{V}$ então $\forall x \in \mathcal{V}$ e $x \notin \langle K \rangle$, $K \cup \{x\}$ é lineamente independente

ou seja, posso ir adicionando a K elementos nestas condições de forma a obter um conjunto de vetores capazes de gerar o conjunto $\mathcal{V}$

Definição

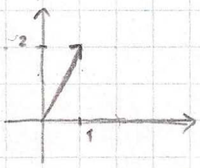
Uma $\boxed{\text{base}}$ de um espaço vetorial $\mathcal{V} \neq \{0_{\mathcal{V}}\}$ é um conjunto de vetores de $\mathcal{V}$ que é
→ lineamente independente
e → gerador de $\mathcal{V}$

Nota

se $K \subset \mathcal{V}$ é, tal que K é lineamente independente e $\mathcal{V} = \langle K \rangle$ então K é base de $\mathcal{V}$

Exemplos

$(1,2)$



$\{(1,0), (0,1)\}$ → base que é l.i e gerador de um espaço
↳ base de $\mathbb{R}^2$
↳ base canónica

$\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ → base de $\mathbb{R}^3$
↳ base canónica

$\{(2,0), (0,1)\}$ → base de $\mathbb{R}^2$

$\{(1,1), (0,2)\}$ → base de $\mathbb{R}^2$

$\{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ → base de $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^n$ $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ base canónica
~~Como espaço~~ sendo $e_1 = (1,0,\ldots,0)$
$e_2 = (0,1,\ldots,0)$
$\vdots$

→ P_n conjuntos dos polinómios de grau $\leq n$ $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ é a base canónica de P_n

→ $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ das matrizes de dimensão $m \times n$, as matrizes E_{ij} com entradas todas nulas exceto na posição (i,j) em que a entrada é 1

$A_{2\times 2}$

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\{E_{ij},\ i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n\}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = M_{m\times n}$, no caso $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$

$\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ é base

Exercício 15 - ficha 4

a) $\{(1,2), (2,4)\}$ é base em $\mathbb{R}^2$?

é base se for linearmente independente e se for gerador de $\mathbb{R}$?

→ é linearmente independente

$\alpha_1(1,2) + \alpha_2(2,4) = (0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \overset{L_2 := L_2 - 2L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Sistema indeterminado

logo, os vetores não formam base de $\mathbb{R}^2$

b) $\{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$ em $\mathbb{R}^3$

é base linearmente independente e gerador de $\mathbb{R}^3$?

→ são linearmente independentes?

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$\alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(1,1,0) + \alpha_3(0,1,1) = (0,0,0)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$ Sistema possível e determinado

o que significa que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ e, portanto, os vetores são linearmente independentes.

Seja $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) = \alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(1,1,0) + \alpha_3(0,1,1)$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 1 & 0 & 1 & z \end{array}\right] \underset{L_3 := L_3 - L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & -1 & 1 & z-x \end{array}\right] \underset{L_3 := L_3 + L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 2 & z-x+y \end{array}\right] \underset{L_3 = \frac{1}{2}L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & \frac{z-x+y}{2} \end{array}\right]$$

$$\underset{L_2 := L_2 - L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y - \frac{z-x+y}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{z-x+y}{2} \end{array}\right] \underset{L_1 := L_1 - L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x - \frac{y-z+x}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{y-z+x}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{z-x+y}{2} \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{x-y+z}{2} \\ \alpha_2 = \frac{y-z+x}{2} \\ \alpha_3 = \frac{z-x+y}{2} \end{cases}$$

$(x,y,z) = \frac{x-y+z}{2}(1,0,1) + \frac{y-z+x}{2}(1,1,0) + \frac{z-x+y}{2}(0,1,1)$

ou seja,
todo o vetor $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ escreve-se como combinação linear de 3 vetores dados.
Os 3 vetores geram $\mathbb{R}^3$

Logo, como também são linearmente independentes formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

Teorema

Seja V um espaço vetorial real e seja B uma base de V com n elementos, seja ainda $K \subset V$ um conjunto com k elementos

→ se K é l.i. então $k \leq n$ (ou seja, se K tem mais elementos que os elementos de uma base de V, então K é de certeza um conjunto l.d)

→ se K gera V então $k \geq n$ (ou seja, se K tem menos elementos que os elementos de uma base de V, então de certeza que K não gera V)

Corolário

Todas as bases de um mesmo espaço vetorial têm o mesmo número de elementos.
Chama dimensão do espaço vetorial V, ao número de elementos de qualquer base desse espaço vetorial, e escreve-se $\dim V$.

Exemplos

- $\dim \mathbb{R}^n = n$
- $\dim \mathbb{R}^m \mathbb{R}^n = m \times n$
- $\dim P_n = n+1$
- $\boxed{\dim \{0_V\} = 0}$

$P_2 \quad p(x) = ax^2 + bx + c$

$\{x^2, x, 1\}$

Teorema

Se $K = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset V$ e $\dim V = n$ então se K é linearmente independente, então K é base.

Se K gera $V \Rightarrow K$ é base

- Se nos derem 7 vetores em $\mathbb{R}^3$, estes são linearmente dependentes
- Se em $\mathbb{R}^3$ nos derem 2 vetores, esses vetores não vão ser capazes de gerar em $\mathbb{R}^3$

12 de Novembro

Base

Uma base é um conjunto gerador e linearmente independente

↳ nenhuns dos vetores desses vetores pode se escrever como combinação linear desses vetores

Dimensão

↳ Número de elementos de qualquer base

Por exemplo, espaço vetorial de dimensão 4 e dão-nos 5 vetores

↳ Não são linearmente independentes

↳ são geradores? Não sei, é necessário verificar

dimensão 4, dão-nos 7 vetores, e quero uma base

↳ verificar os que são linearmente dependentes até obter um conjunto de vetores que são linearmente independentes

Exercício 16 _ Ficha 4

(b) $S = \langle (1,-1,1), (0,2,1), (1,1,2) \rangle$ → 3 vetores geram o espaço

Verificar se são linearmente dependentes:

sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1(1,-1,1) + \alpha_2(0,2,1) + \alpha_3(1,1,2) = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ Sistema possível e indeterminado

logo, os vetores são linearmente dependentes e por isso não forma base de S

C. Auxiliares

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 := L_3 - L_1]{L_2 := L_2 + L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 := L_3 - \frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Sistema possível e indeterminado

tem pivot ↳ tem pivot → não tem pivot, logo deitamos fora

deitamos aquele em que a coluna não tem pivot

consideremos o conjunto

$\{(1,-1,1), (0,2,1)\}$

verificar se são ou não linearmente independentes

sejam $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1(1,-1,1) + \alpha_2(0,2,1) = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ Sistema possível determinado $\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$

Ou seja, os 2 vetores são linearmente independentes. Assim sendo uma base para S é $\{(1,-1,1), (0,2,1)\}$ e dimensão = 2 exercício

Indique uma base para $\mathbb{R}^3$ que contenha os vetores $(1,-1,1)$ e $(0,2,1)$

Verifica se os vetores $(1,-1,1), (0,2,1), (1,0,0)$ são linearmente independentes

sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$\alpha_1(1,-1,1) + \alpha_2(0,2,1) + \alpha_3(1,0,0) = (0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 := L_3 - L_1]{L_2 := L_2 + L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 := L_3 - \frac{1}{2} L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

os vetores são linearmente independentes logo uma base para $\mathbb{R}^3$ é $\{(1,-1,1), (0,2,1), (1,0,0)\}$

Exercício 19

$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$

(a) S é subespaço vetorial?

→ $S \subseteq \mathbb{R}^3$ e $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ é espaço vetorial (i)

→ $(1,1,0) \in S$ logo $S \neq \{\}$ (ii)

→ fecho da adição

sejam $(x_1,y_1,z_1) \in S$ (isto é, $x_1 - y_1 + 3z_1 = 0$)
$(x_2,y_2,z_2) \in S$ (isto é, $x_2 + y_2 + 3z_2 = 0$)

$(x_1,y_1,z_1) + (x_2,y_2,z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$

$x_1 + x_2 - (y_1+y_2) + 3(z_1+z_2)$
$= (x_1 - y_1 + 3z_1) + (x_2 - y_2 + 3z_2)$
$= 0 + 0 = 0$

logo S é fechado para a adição (iii)

→ fecho multiplicação escalar

$(x,y,z) \in S$ (isto é, $x-y+3z=0$) e $\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha(x,y,z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$

$$\alpha x - \alpha y + 3(\alpha z) = \alpha(x-y+3z)$$
$$= \alpha \cdot 0$$
$$= 0$$

logo S é fechado para a multiplicação escalar (iv)

concluimos de (i), (ii), (iii), (iv) que S é um subespaço vetorial

(b) Obter um conjunto gerador de S

$(x,y,z) \in S$ se $x-y+3z=0$
$\Leftrightarrow x = y - 3z$

$$(x,y,z) = (y-3z, y, z)$$
$$= y(1,1,0) + z(-3,0,1)$$

logo $\forall (x,y,z)$ é combinação linear de $(1,1,0)$ e $(-3,0,1)$
portanto

$$S = \langle (1,1,0), (-3,0,1) \rangle$$

(c)

verificar se são linearmente ~~indepentes~~ independentes
sejam $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(-3,0,1) = (0,0,0)$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ sistema possível e determinado *

C.A

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 := L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 := L_3 - 1/3 L_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$* \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$

os vetores são linearmente independentes como também geram S então forma uma base para S $\{(1,1,0), (-3,0,1)\}$ $\dim S = 2$