# 4.1. Séries de Potências

Chama-se série de potências centrada em $c \in \mathbb{R}$ a uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots + an(x-c)^n + \ldots$$

onde $a_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Os números an são os coeficientes da série.

Exemplo: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Dada uma série de potências importa saber identificar o conjunto de pontos $x \in \mathbb{R}$ para os quais esta é convergente. O conjunto de tais pontos designa-se por **domínio de convergência** da série.

Exemplos:

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$; $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{n}(x+1)^n$; $\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-3)^n$.

Teorema Para qualquer série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ verifica-se uma, e uma só, das seguintes proposições:

1. a série converge (absolutamente) em $x = c$ e diverge se $x \neq c$;
2. a série converge absolutamente em todo $x \in \mathbb{R}$;
3. existe um único $R > 0$ para o qual a série converge absolutamente se $|x-c| < R$ e diverge se $|x-c| > R$.

$R$ designa-se por **raio de convergência** da série.

Diz-se também que a série tem raio de convergência nulo $(R = 0)$ na situação (i) e que tem raio de convergência $R = +\infty$ quando ocorre (ii).

Exemplos: Qual o raio de convergência em cada uma das sérias anteriores?

O Teorema nada afirma sobre a natureza da série nas extremidades $x = c - R$ e $x = c + R$.

Proposição (formulas para o raio de convergência $R$) Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ uma série de potências com coeficientes não nulos. Se existir o limite $\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ou se existir o limite $\ell = lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ então o raio de convergência $R$ é dado por

$$R = \frac{1}{\ell}$$

Exemplo: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{5^n\sqrt{n+1}}$

Atenção! Em certos casos, não podemos mesmo usar as fórmulas do raio de convergência diretamente.

Exemplo: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}$

## 4.2. Fórmula de Taylor

Como aproximar a função exponencial $f(x) = e^x$?

Aproximação linear:

O polinómio do primeiro grau

$$L(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + x$$

permite aproximar a função $f$ (pelo menos numa vizinhança de 0).
Repare-se que $L(0) = 1 = f(0)$ e $L'(0) = 1 = f'(0)$.

Aproximação quadrática:

Pensemos agora na possibilidade de aproximar a função exponencial através de um polinómio quadrático, $Q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, tal que $Q(0) = f(0)$, $Q'(0) = f'(0)$ e $Q''(0) = f''(0)$. $Q(x) =?$

Mais geralmente, podemos verificar que o polinómio de grau $n$

$$P(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots \frac{1}{n!}x^n$$

$P^{(k)}(0) = 1 = f^{(k)}(0), \forall k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

# 4.2.1. Polinómios de Taylor

Considere-se, em geral, uma função $f$ admitindo derivadas finitas até à ordem $n \in \mathbb{N}$, num dado ponto $c \in \mathbb{R}$. O polinómio

$$T_c^n f(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

é o único polinómio cujas derivadas de ordem até à ordem $n$ no ponto $x = c$ coincidem com as respectivas derivadas de $f$.

O polinómio $T_c^n$ designa-se por **polinómio de Taylor** de ordem $n$ da função $f$ no ponto $c$. No caso particular em que $c = 0$, $T_0^n$ é também conhecido por **polinómio de MacLaurin** (de ordem n da função $f$).

Exemplos: $T_1^n(x^3)$; $T_0^n(\frac{1}{1-x})$, $T_0^n(\sin x)$, $T_0^n(\cos x)$

## 4.2.2 Teorema de Taylor

Teorema (Fórmula de Taylor com resto integral)
Sejam $n \in \mathbb{N}_0$, $f$ uma função real com derivadas contínuas até à ordem $(n+1)$ num intervalo $I$ e $c \in I$. Então, para todo $x \in I$, temos

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{1}{n!}\int_c^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt.$$

Corolário (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange) Nas condições do teorema anterior, temos: para todo $x \in I \setminus \{c\}$, existe $\theta$ entre $c$ e $x$ tal que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}(\theta)(x-c)^{n+1}$$

Exemplos: $f(x) = \sqrt{x+1}$, $f(x) = e^x$

## 4.3. Séries de Taylor

Em que condições é que $f$ pode ser representada através de uma série de potências?

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, -1 < x < 1.$$

Por substituição é possível obter representações de outras funções, como por exemplo $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{1-x^2}$, $\frac{x}{1-x^2}$, etc.

Uma função diz-se **analítica** num ponto se for possível representá-la por uma série de potências centrada nesse ponto (num intervalo aberto centrado no ponto).

Existem funções que não admitem uma representação em série de potências em nenhuma vizinhança de determinado ponto (e, portanto, não são analíticas nesse ponto).

## 4.3. Séries de Taylor

Em geral, dá-se o nome de **série de Taylor** da função $f$ no ponto $c$ (também conhecida por série de MacLaurin quando $c = 0$) série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots$$

Observação: A série de Taylor de uma dada função pode ou não convergir para a função que lhe deu origem. Existem, porém, casos em que a série converge para uma função diferente daquela que lhe deu origem. Como podemos ver no caso da função $f$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, \ x \neq 0 \\ 0, \ x = 0. \end{cases}$$

## 4.3. Séries de Taylor

Teorema Sejam $I$ um intervalo, $c \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas finitas de qualquer ordem em $I$. Então,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n, \ \forall x \in I,$$

se, e só se,

$$\lim_{n\to\infty} R_c^n f(x) = 0.$$

Exemplo: $f(x) = e^x$

Teorema Sejam $I$, $c$ e $f$ nas mesmas condições do teorema anterior, se existir $M > 0$ tal que $f^{(n)}(x) \leq M, \forall x \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$, então

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n, \ \forall x \in I.$$

Exemplos: Séries de MacLaulin de $\frac{1}{1-x}$, $e^x$, $\sin x$, $\cos x$.