satisfaz $G'(x) = g(x)$ para $x \neq 0$, quaisquer que sejam as constantes C_1 e C_2. Um cálculo imediato mostra que

$$\lim_{h\to 0^+} G(x) = C_2 \text{ e } \lim_{h\to 0^-} G(x) = C_1 - 1$$

Tomando $C_2 = 0$ e $C_1 = 1$, e definindo $G(0) = 0$, a função G é contínua em $\mathbb{R}$, e temos, por exemplo,

$$\int_{-1}^{2} g(x)dx = G(2) - G(-1) = \frac{8}{3} - (-1) + \cos(-1) = \frac{11}{3} + \cos 1$$

4.5 Técnicas de Primitivação e Integração

Como vimos na secção anterior, o cálculo de *integrais* está directamente relacionado com o cálculo de *primitivas*. Passamos aqui a designar por

$$\int f(x)\ dx$$

uma qualquer primitiva de f num dado domínio I, que quase sempre deixamos subentendido. Por outras palavras, convencionamos que

$$F(x) = \int f(x)\ dx \text{ em } I \iff F'(x) = f(x), \text{ para qualquer } x \in I.$$

Recordamos que se I é um *intervalo* e F é uma primitiva de f em I então

$$G(x) = \int f(x)\ dx \text{ em } I \iff G(x) = F(x) + C, \text{ para qualquer } x \in I.$$

Deve ser claro que *todas as regras de diferenciação que estudámos até aqui são também regras de primitivação.* Os exemplos seguintes, de primitivas *imediatas*, ilustram isto mesmo.

Exemplos 4.5.1.

(1) $F(x) = \displaystyle\int e^x\ dx$ em $\mathbb{R} \iff F(x) = e^x + C$

(2) $F(x) = \displaystyle\int \operatorname{sen} x\ dx$ em $\mathbb{R} \iff F(x) = -\cos x + C$

(3) $F(x) = \displaystyle\int \cos x\ dx$ em $\mathbb{R} \iff F(x) = \operatorname{sen} x + C$

(4) $F(x) = \displaystyle\int x^n\ dx$ em $\mathbb{R} \iff F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

(5) $F(x) = \displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}$ em $\mathbb{R} \iff F(x) = \arctan x + C$

Quando o domínio em causa não é a recta real, pode ser restrito a um intervalo, como no exemplo seguinte, mas pode ser mais complexo. Repare-se que no exemplo (7) existem *duas* constantes arbitrárias, uma para cada um dos intervalos disjuntos em que se decompõe o domínio.

(6) Quando $I =]-\pi/2, \pi/2[$,

$$F(x) = \int \sec^2 x \; dx \text{ em } I \Longleftrightarrow F(x) = \tan x + C \text{ em } I \; .$$

(7) $F(x) = \displaystyle\int 1/x \; dx$ em $\mathbb{R} \setminus \{0\} \iff$

$$F(x) = \begin{cases} \log|x| + C_1, \text{ para } x > 0 \text{ e} \\ \log|x| + C_2, \text{ para } x < 0. \end{cases}$$

Deve reconhecer-se que, em geral, o problema da primitivação pode ser tecnicamente muito difícil. Por exemplo, e apesar de não demonstrarmos aqui esse facto, existem funções "elementares", como $f(x) = e^{x^2}$ ou $g(x) = (\operatorname{sen} x)/x$, cujas primitivas não podem ser expressas como combinações algébricas simples de outras funções conhecidas, e são por isso simplesmente novas funções, a juntar às que já referimos. Existem no entanto múltiplas técnicas auxiliares de cálculo de primitivas, que passamos a estudar, e que nos permitem alargar substancialmente a classe de funções que podemos primitivar, e portanto integrar, por processos relativamente simples.

Primitivação e Integração por Partes

Vamos agora estudar alguns métodos de primitivação que serão úteis no cálculo explícito de integrais. Começamos por um método que permite, por exemplo, calcular uma primitiva da função $f(x) = x \log x$.

Teorema 4.5.2 (Primitivação por partes)**.** *Sejam f, g funções diferenciáveis em $I = [a, b]$. Então:*

$$\int f(x)g'(x) \; dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \; dx.$$

e portanto, se qualquer um dos integrais referidos existe, o outro existe igualmente e temos

$$\int_a^b f(x)g'(x) \; dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) \; dx.$$

Demonstração. Para a demonstração basta observar que a regra de derivação do produto se escreve:

$$(fg)' = f'g + fg' \iff fg' = (fg)' - f'g.$$

Portanto, temos que:

$$\int fg' = \int (fg)' - \int f'g = fg - \int f'g.$$

□

Exemplos 4.5.3.

(1) Para calcular uma primitiva de $x \log x$, tomamos

$$f(x) = \log x \text{ e } g'(x) = x \text{ donde } f'(x) = 1/x \text{ e } g(x) = x^2/2$$

A regra de primitivação por partes conduz a:

$$\int x \log x \; dx = \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x}{2} \; dx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4}.$$

(2) É por vezes útil tomar $g'(x) = 1$. Por exemplo, para calcular uma primitiva de $\log x$, tomamos

$$f(x) = \log x \text{ e } g'(x) = 1 \text{ donde } f'(x) = 1/x \text{ e } g(x) = x$$

A regra de primitivação por partes conduz a:

$$\int \log x \; dx = x \log x - \int \frac{x}{x} \; dx = x \log x - x.$$

(3) Pode ser necessário aplicar repetidamente o método de primitivação por partes até atingir a primitiva pretendida. Para calcular uma primitiva de $x^2 e^x$, tomamos

$$f(x) = x^2 \text{ e } g'(x) = e^x \text{ donde } f'(x) = 2x \text{ e } g(x) = e^x$$

A regra de primitivação por partes conduz a:

$$\text{(i)} \quad \int x^2 e^x \; dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \; dx.$$

Para calcular uma primitiva de xe^x, tomamos

$$f(x) = x \text{ e } g'(x) = e^x \text{ donde } f'(x) = 1 \text{ e } g(x) = e^x$$

A regra de primitivação por partes conduz a:

$$\text{(ii)} \quad \int xe^x\ dx = xe^x - \int e^x\ dx = xe^x - e^x.$$

Por simples substituição do resultado em (ii) na identidade (i), obtemos então

$$\int x^2e^x\ dx = x^2e^x - 2\int xe^x\ dx = x^2e^x - 2(xe^x - e^x).$$

(4) A aplicação do método de primitivação por partes pode conduzir à primitiva inicial, mas mesmo nesse caso é possível terminar o cálculo. Para calcular uma primitiva de $e^x \cos x$, tomamos

$$f(x) = e^x \text{ e } g'(x) = \cos x \text{ donde } f'(x) = e^x \text{ e } g(x) = \operatorname{sen} x$$

A regra de primitivação por partes conduz a:

$$\text{(i)} \quad \int e^x \cos x\ dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\ dx.$$

Para calcular uma primitiva de $e^x \operatorname{sen} x$, tomamos

$$f(x) = e^x \text{ e } g'(x) = \operatorname{sen} x \text{ donde } f'(x) = e^x \text{ e } g(x) = -\cos x$$

A regra de primitivação por partes conduz a:

$$\text{(ii)} \quad \int e^x \operatorname{sen} x\ dx = e^x \cos x - \int e^x \cos x\ dx.$$

A substituição do resultado em (ii) na identidade (i) conduz agora a

$$\int e^x \cos x\ dx = e^x \operatorname{sen} x - (e^x \cos x - \int e^x \cos x\ dx), \text{ ou}$$

$$\int e^x \cos x\ dx = \frac{1}{2}e^x \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}e^x \cos x$$

Primitivação e Integração por Substituição

Um outro método muito útil no cálculo de primitivas é a seguinte aplicação directa da regra de diferenciação da função composta:

Teorema 4.5.4 (Primitivação por substituição)**.** *Se f e g são funções diferenciáveis, então:*

$$F(u) = \int f(u)du \Longrightarrow F(u(x)) = \int f(g(x))g'(x)\ dx.$$

Este resultado escreve-se usualmente de forma mais sucinta, mas imprecisa, porque deixa subentendida a substituição de u por $u(x)$, como

$$\int f(u)du = \int f(g(x))g'(x)\ dx$$

Demonstração. Para a demonstração basta observar que se F é uma primitiva de f, então, pela regra de derivação da função composta:

$$(F \circ g)' = (F' \circ g)\, g' = (f \circ g)\, g'$$

□

Na prática, o método de primitivação por substituição para o cálculo do integral

$$\int f(g(x))g'(x)\ dx,$$

tem três passos:

(1) Substituir no integral original $g(x)$ por u e $g'(x)\,dx$ por du. Depois desta manipulação, só a variável u deve aparecer;

(2) Encontrar uma primitiva da função resultante (em que a variável é u);

(3) Substituir de volta u por $g(x)$.

Os próximos exemplos ilustram este método.

Exemplos 4.5.5.

(1) Tomamos $u = \operatorname{sen} x$ e $du = \cos x dx$, para obter

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos x\ dx = \int u^5\ du = \frac{u^6}{6} = \frac{\operatorname{sen}^6 x}{6}.$$

(2) Tomamos $u = \log x$ e $du = \frac{1}{x}dx$, para obter

$$\int \frac{1}{x\log x}\ dx = \int \frac{1}{u}\ du = \log u = \log(\log x).$$

(3) Nos exemplos acima é relativamente simples identificar a substituição necessária. Em geral, no entanto, essa é a principal dificuldade na aplicação da técnica. Para calcular

$$\int \sqrt{1-x^2}\ dx,$$

recordamos a identidade $\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u} = \cos u$, que sugere a substituição $x = \operatorname{sen} u$, com $dx = \cos u du$. Temos então

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int \cos^2 u\, du = \int \frac{1+\cos(2u)}{2} du =$$

$$= \frac{u}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2u)}{4} = \frac{u}{2} + \frac{2\operatorname{sen}(u)\cos(u)}{4} = \frac{\operatorname{arcsen} x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4}$$

Note-se a título de curiosidade que a clássica fórmula sobre a área do círculo é

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \left.\frac{\operatorname{arcsen} x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4}\right|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}$$

Primitivação de Funções Racionais

É possível primitivar qualquer função racional, i.e. qualquer função da forma:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0},$$

em termos de funções elementares. Notem que podemos assumir $a_n = b_m = 1$. Por outro lado, também basta considerar o caso $n < m$, pois se $n \geq m$ podemos recorrer à divisão de polinómios para escrever:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = g(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

onde $g(x)$ é um polinómio e $r(x)$ é o resto da divisão, que tem grau inferior a $q(x)$. Por exemplo:

$$f(x) = \frac{x^4 - 4x^2 + 3x - 4}{x^2+1} = x^2 - 5 + \frac{3x+1}{x^2+1}.$$

Assim, vamos assumir que $a_n = b_m = 1$ e $n < m$.

Antes de enunciarmos o caso geral, ilustramos o método quando p é um polinómio de grau ≤ 2 e q é um polinómio do terceiro grau:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^2 + a_1 x + a_0}{x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0},$$

A primitiva de $f = p/q$ depende essencialmente da natureza do polinómio denominador.

Caso 1. O polinómio denominador q tem 3 raízes reais distintas, i.e.

$$q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,, \text{ com } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\,,\ \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha.$$

Neste caso, a função racional $f = p/q$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{x-\gamma}\,, \text{ com } A, B, C \in \mathbb{R},$$

pelo que

$$\int f(x)\,dx = A\log|x-\alpha| + B\log|x-\beta| + C\log|x-\gamma|\,.$$

Caso 2. O polinómio denominador q tem uma raiz real simples e outra raiz real dupla, i.e.

$$q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)^2\,, \text{ com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,,\ \alpha \neq \beta.$$

Neste caso, a função racional $f = p/q$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{(x-\beta)^2}\,, \text{ com } A, B, C \in \mathbb{R},$$

pelo que

$$\int f(x)\,dx = A\log|x-\alpha| + B\log|x-\beta| - \frac{C}{x-\beta}\,.$$

Caso 3. O polinómio denominador q tem uma raiz real tripla, i.e.

$$q(x) = (x-\alpha)^3\,, \text{ com } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Neste caso, a função racional $f = p/q$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} + \frac{C}{(x-\alpha)^3}\,, \text{ com } A, B, C \in \mathbb{R},$$

pelo que

$$\int f(x)\,dx = A\log|x-\alpha| - \frac{B}{x-\alpha} - \frac{C}{2(x-\alpha)^2}\,.$$

Caso 4. O polinómio denominador q tem apenas uma raiz real simples, i.e.

$$q(x) = (x-\alpha)((x-a)^2 + b^2)\,, \text{ com } \alpha, a, b \in \mathbb{R}\,,\ b \neq 0.$$

Neste caso, a função racional $f = p/q$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{Bx+C}{(x-a)^2+b^2}\,, \text{ com } A, B, C \in \mathbb{R},$$

pelo que

$$\int f(x)\,dx = A\log|x-\alpha| + \int \frac{Bx+C}{(x-a)^2+b^2}\,dx\,,$$

onde a última primitiva é quase-imediata, podendo ser expressa usando as funções logaritmo e arco tangente, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\int \frac{Bx+C}{(x-a)^2+b^2}\,dx &= \int \frac{B(x-a)}{(x-a)^2+b^2}\,dx + \int \frac{Ba+b^2}{(x-a)^2+b^2}\,dx \\ &= \frac{B}{2}\int \frac{2(x-a)}{(x-a)^2+b^2}\,dx + \frac{Ba+b^2}{b}\int \frac{1/b}{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2+1}\,dx \\ &= \frac{B}{2}\log((x-a)^2+b^2) + \frac{Ba+b^2}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right).\end{aligned}$$

Caso Geral. O que acabamos de ver é um exemplo particular do seguinte resultado geral:

Teorema 4.5.6 (Decomposição em Fracções Parciais)**.** *Seja $n < m$, e considere-se a função racional*

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0}.$$

Então o denominador pode ser factorizado na forma:

$$p(x) = (x-\alpha_1)^{r_1}\cdots(x-\alpha_k)^{r_k}([x-a_1]^2+b_1^2)^{s_1}\cdots([x-a_l]^2+b_l^2)^{s_l},$$

e a função racional pode ser decomposta na forma:

$$\begin{aligned}&\frac{p(x)}{q(x)} = \\ &\left[\frac{a_{1,1}}{(x-\alpha_1)} + \cdots + \frac{a_{1,r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}}\right] + \cdots + \left[\frac{a_{k,1}}{(x-\alpha_k)} + \cdots + \frac{a_{k,r_k}}{(x-\alpha_k)^{r_k}}\right] + \\ &\quad + \left[\frac{A_{1,1}+B_{1,1}x}{(x-a_1)^2+b_1^2} + \cdots + \frac{A_{1,s_1}+B_{1,s_1}x}{((x-a_1)^2+b_1^2)^{s_1}}\right] + \cdots + \\ &\quad\quad + \left[\frac{A_{l,1}+B_{l,1}x}{(x-a_l)^2+b_l^2} + \cdots + \frac{A_{l,s_l}+B_{l,s_l}x}{((x-a_l)^2+b_l^2)^{s_l}}\right].\end{aligned}$$

Notem que a factorização de $q(x)$ dada pelo teorema tem o seguinte significado:

- $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ são as raízes reais de $q(x)$ com multiplicidade, respectivamente, $r_1, \ldots, r_k$;
- $a_1 \pm i\, b_1, \ldots, a_l \pm i\, b_l$ são as raízes complexas de $q(x)$ com multiplicidade, respectivamente, $s_1, \ldots, s_l$;

Não demonstraremos este teorema. Este resultado reduz o cálculo da primitiva de uma função racional a primitivas que já conhecemos, pois temos

(a) Para as raízes reais:

$$\int \frac{a}{(x-\alpha)^r}\,dx = \begin{cases} a\log(x-\alpha)\,, & \text{se } r=1, \\ \frac{a}{(r-1)(x-\alpha)^{r-1}}\,, & \text{se } r>1. \end{cases}$$

(b) Para as raízes complexas:

$$\int \frac{A+Bx}{((x-a)^2+b^2)^s}\,dx = \frac{B}{2}\int \frac{2(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^s}\,dx + (A+aB)\int \frac{1}{((x-a)^2+b^2)^s}\,dx.$$

A primeira primitiva pode ser calculada recorrendo à substituição $u = (x-a)^2+b^2$. A segunda primitiva pode ser calculada por aplicação sucessiva de primitivação por partes, como no exercício seguinte:

Exercício 4.5.7. Usando primitivação por partes, mostre que para $s>1$:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^s}\,dx = \frac{1}{2s-2}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^{s-1}} + \frac{2s-3}{2s-2}\int \frac{1}{(x^2+1)^{s-1}}\,dx.$$

Primitivação de Funções Trigonométricas

Para calcular primitivas de funções trigonométricas do tipo:

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\,dx,$$

usaremos as fórmulas trigonométricas conhecidas:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Há vários casos a considerar:

Caso 1. Primitivas do tipo:

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx \text{ ou } \int \cos^n x\,dx,$$

onde $n = 2k$ é par. As fórmulas trigonométricas acima permitem obter, sucessivamente, uma expressão em potências mais baixas de seno ou coseno, que eventualmente sabemos como primitivar. Por exemplo:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^4 x\,dx &= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx \\ &= \int \frac{1}{4}\,dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx + \frac{1}{4}\int \cos^2(2x)\,dx \\ &= \int \frac{1}{4}\,dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx + \frac{1}{8}\int (1+2\cos(4x))\,dx \end{aligned}$$

e nesta última expressão sabemos calcular todas as primitivas.

Caso 2. Primitivas do tipo:

$$\int \operatorname{sen}^n x \; dx \text{ ou } \int \cos^n x \; dx,$$

onde $n = 2k + 1$ é ímpar. Neste caso, utilizamos a fórmula trigonométrica fundamental seguida de uma substituição. Por exemplo:

$$\begin{aligned}\int \cos^{2k+1} x \; dx &= \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x \; dx \\ &= \int (1 - u^2)^k \; du \quad (u = \operatorname{sen} x).\end{aligned}$$

Caso 3. Primitivas do tipo:

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \; dx,$$

onde n ou m são ímpares, são tratados de forma análoga ao anterior. Por exemplo,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^4 x \cos^5 x \; dx &= \int \operatorname{sen}^4 x (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 \cos x \; dx \\ &= \int u^4 (1 - u^2) du \quad (u = \operatorname{sen} x).\end{aligned}$$

Caso 4. Primitivas do tipo:

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \; dx,$$

onde n e m são ambos pares. Neste caso, utilizamos as fórmulas trigonométricas para $\operatorname{sen}^2 x$ e $\cos^2 x$, de forma análoga ao Caso 1.

Primitivação de Funções Racionais de Senos e Cosenos

Suponhamos que queremos calcular uma primitiva de uma função racional de senos e cosenos:

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x) \; dx.$$

Existe uma substituição (talvez um pouco inesperada!) que permite reduzir esta primitiva a uma primitiva de uma função racional usual. Como veremos depois, é possível primitivar qualquer função racional usual.

Consideremos então a substituição:

$$u = \tan \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2 \arctan u, \qquad dx = \frac{2}{1 + u^2} \; du.$$

Observamos que:

$$y = \frac{x}{2} = \arctan u \;\Rightarrow\; u^2 = \tan^2 y = \frac{\operatorname{sen}^2 y}{\cos^2 y} = \frac{\operatorname{sen}^2 y}{1 - \operatorname{sen}^2 y}$$

Resolvendo em ordem a u^2, obtemos:

$$\operatorname{sen}^2 y = \frac{u^2}{1+u^2}, \qquad \cos^2 y = 1 - \operatorname{sen}^2 y = \frac{1}{1+u^2}.$$

Usando as formulas trigonométricas para $\operatorname{sen}(2y)$ e $\cos(2y)$ obtemos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x) &= \operatorname{sen}(2y) = 2\operatorname{sen} y \cos y = 2\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{2u}{1+u^2}, \\
\cos(x) &= \cos(2y) = \cos^2 y - \operatorname{sen}^2 y = 2\frac{1}{1+u^2} - \frac{u^2}{1+u^2} = \frac{1-u^2}{1+u^2}.
\end{aligned}$$

Assim, a substituição $x = 2\arctan u$ fornece:

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx = \int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right) \cdot \frac{2}{1+u^2}\, du.$$

Concluímos, tal como tínhamos afirmado, que esta substituição transforma uma primitiva de uma função racional de senos e cosenos numa primitiva de uma função racional usual.

Exemplo 4.5.8.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{3 + 5\operatorname{sen} x} &= \int \frac{1}{3 + 5\frac{2u}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2}\, du \qquad (u = \tan\frac{x}{2}) \\
&= \int \frac{1+u^2}{3u^2 + 10u + 3} \cdot \frac{2}{1+u^2}\, du = \int \frac{2}{3u^2 + 10u + 3}\, du.
\end{aligned}$$