

Matemática Discreta

Elementos de Teoria dos Grafos

Universidade de Aveiro 2016/2017

<http://moodle.ua.pt>

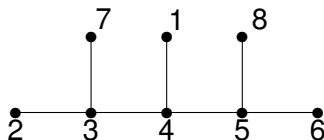
Código de Prüfer

Teorema de Cayley

Exemplos e exercícios

Código de Prüfer

- Vamos denotar por $\mathcal{T}(G)$ o conjunto das árvores abrangentes de um grafo G .
- **Código de Prüfer:** Seja $T \in \mathcal{T}(G)$. Uma vez que $V = V(K_n)$ é um conjunto totalmente ordenado pela relação \leq , podemos eliminar sucessivamente, para $i = 1, \dots, n-2$, o menor vértice de grau 1, s_i , da árvore $T - \{s_1, \dots, s_{i-1}\}$, cujo único vizinho é t_i e, desta forma, construímos o $(n-2)$ -uplo $(t_1, t_2, \dots, t_{n-2})$. Por exemplo, para a árvore representado na figura a seguir, obtém-se o código de Prüfer é $(4, 3, 5, 3, 4, 5)$.



i	1	2	3	4	5	6
s_i	1	2	6	7	3	4
t_i	4	3	5	3	4	5

Figure: Código de Prüfer para a árvore representada.

Algoritmo formal para determinação do código de Prüfer

- Mais formalmente, o algoritmo para a determinação do código de Prüfer pode descrever-se da seguinte maneira:
 - ▶ Algoritmo: codificação de Prüfer(T);
 - ▶ $R \leftarrow T$; $n \leftarrow \nu(T)$;
 - ▶ Para $i = 1$ até $n - 2$ **fazer**
 1. $s \leftarrow \min\{x \in V(R) : d_R(x) = 1\}$;
 2. $t[i] \leftarrow N_R(s)$;
 3. $R \leftarrow R - s$;
 - ▶ Devolver t ;
 - ▶ Fim do algoritmo.

Algoritmo de decodificação do código Prüfer

- O algoritmo de decodificação tem em conta que cada vértice v da árvore T de ordem n aparece $d_T(v) - 1$ vezes no código $t = (t_1, \dots, t_{n-2})$. Logo, as folhas da árvore (ou seja, os vértices de grau 1) não aparecem no código.
 - ▶ Algoritmo: decodificação de Prüfer(t, n);
 - ▶ $R \leftarrow \{1, 2, \dots, n\}$, $V(T) \leftarrow R$ e $E(T) \leftarrow \emptyset$;
 - ▶ Para $i = 1, \dots, n - 2$, **fazer**
 1. $t^* \leftarrow (t_i, \dots, t_{n-2})$;
 2. **Se** $s_i = \min\{s \in R : s \notin t^*\}$, **então** $E(T) \leftarrow E(T) \cup \{s_i t_i\}$;
 3. $R \leftarrow R \setminus \{s_i\}$;
 - ▶ Ligar os vértices v do grafo corrente T cujos graus, $d_T(v)$, diferem em uma unidade do valor calculado a partir de t ;
 - ▶ Devolver T .
 - ▶ Fim do algoritmo.

Teorema de Cayley

Teorema (de Cayley)

O número de árvores abrangentes do grafo completo de ordem $n \in \mathbb{N}$ é dado por

$$\tau(K_n) = n^{n-2}.$$

Prova: A prova baseia-se no estabelecimento de uma bijecção entre o conjunto de todas as árvores abrangentes do grafo completo de ordem $n \geq 2$, $\mathcal{T}(G)$, e o conjunto $(n-2)$ -uplos $(t_1, t_2, \dots, t_{n-2})$, tais que $1 \leq t_i \leq n$, ou seja, o produto cartesiano $[n]^{n-2}$, sabendo que cada um deles corresponde ao código de Prüfer de uma única árvore abrangente de K_n e o recíproco também é verdadeiro.

Exemplos

- (a) Determinar a árvore cujo código de Prüfer é $(5, 3, 1, 7, 1, 7)$.
- (b) Determinar o código de Prüfer para a seguinte árvore T :

