universidade de aveiro departamento de matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Agrupamento IV (ECT, EET, EI)

Capítulo 4

Espaços Vetoriais Reais

2014/15

Definição de espaço vetorial real

O conjunto $\mathcal{V}$, munido das operações $\oplus$ (adição) e $\odot$ (multiplicação por escalar real), é um espaço vetorial (e.v.) real se, $\forall X, Y, Z \in \mathcal{V}$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

1. $\mathcal{V}$ é fechado relativamente a $\oplus$ $\qquad X \oplus Y \in \mathcal{V}$
2. $\oplus$ é comutativa $\qquad X \oplus Y = Y \oplus X$
3. $\oplus$ é associativa $\qquad (X \oplus Y) \oplus Z = X \oplus (Y \oplus Z)$
4. existe (único) o el. neutro $0_{\mathcal{V}} \in \mathcal{V}$ (zero de $\mathcal{V}$) para $\oplus$ $\qquad 0_{\mathcal{V}} \oplus X = X$
5. existe (único) o simétrico $\ominus X \in \mathcal{V}$ de X em relação a $\oplus$ $\qquad \ominus X \oplus X = 0_{\mathcal{V}}$

6. $\mathcal{V}$ é fechado relativamente a $\odot$ $\qquad \alpha \odot X \in \mathcal{V}$
7. $\odot$ é distributiva em relação a $\oplus$ $\qquad \alpha \odot (X \oplus Y) = \alpha \odot X \oplus \alpha \odot Y$
8. $\odot$ é "distributiva" em relação a $+$ $\qquad (\alpha + \beta) \odot X = \alpha \odot X \oplus \beta \odot X$
9. os produtos (o de $\mathbb{R}$ e $\odot$) são "associativos" $\qquad (\alpha\beta) \odot X = \alpha \odot (\beta \odot X)$
10. o escalar 1 é o "elemento neutro" para $\odot$ $\qquad 1 \odot X = X$

1. $\mathbb{R}^n$ munido das operações adição e multiplicação por escalar usuais.

2. $\mathbb{R}^+$ munido das operações:

$$x \oplus y = xy \qquad \text{e} \qquad \alpha \odot x = x^\alpha, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^+, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

3. O conjunto $\mathbb{R}^{m\times n}$ das matrizes $m \times n$ munido das operações adição de matrizes e multiplicação de uma matriz por um escalar real.

4. O conjunto de todas as funções reais de variável real munido da adição de funções e multiplicação de uma função por um escalar real.

5. Os conjuntos $\mathcal{P}$ de todos os polinómios (de qualquer grau) e $\mathcal{P}_n$ dos polinómios de grau menor ou igual a n com as operações usuais.

Não é e.v. o conjunto dos polinómios de grau n com as operações usuais.

Proposição: Seja $\mathcal{V}$ um e.v. real. Então

(a) $0 \odot X = 0_{\mathcal{V}}, \; \forall\, X \in \mathcal{V}$;

(b) $\alpha \odot 0_{\mathcal{V}} = 0_{\mathcal{V}}, \; \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$;

(c) $\alpha \odot X = 0_{\mathcal{V}} \;\Rightarrow\; \alpha = 0$ ou $X = 0_{\mathcal{V}}$;

(d) $(-1) \odot X = \ominus X$ é o simétrico de X em relação a $\oplus$, $\forall\, X \in \mathcal{V}$.

Daqui em diante, escreve-se:

i. $X + Y$ em vez de $X \oplus Y$, para $X, Y \in \mathcal{V}$;

ii. αX em vez de $\alpha \odot X$, para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $X \in \mathcal{V}$;

iii. $-X$ em vez de $\ominus X$, para $X \in \mathcal{V}$.

O subconjunto $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$ é um subespaço (vetorial) do e.v. real $\mathcal{V}$ se, munido das mesmas operações de $\mathcal{V}$, for ele próprio um e.v. real.

Teorema: $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$ é um subespaço (vetorial) do e.v. real $\mathcal{V}$ se e só se

1. $\mathcal{S} \neq \emptyset$;
2. $\mathcal{S}$ é fechado em relação à adição de $\mathcal{V}$;
3. $\mathcal{S}$ é fechado em relação à multiplicação por escalar de $\mathcal{V}$.

Proposição: Se $\mathcal{S}$ é um subespaço de $\mathcal{V}$, então $0_{\mathcal{V}} \in \mathcal{S}$.

Corolário: Se $0_{\mathcal{V}} \notin \mathcal{S}$, então $\mathcal{S}$ não é um subespaço de $\mathcal{V}$.

Exemplos:

- $\mathcal{V}$ e $\{0_{\mathcal{V}}\}$ são os subespaços triviais de $\mathcal{V}$;
- $\{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$;
- $\{(1, y) : y \in \mathbb{R}\}$ não é subespaço de $\mathbb{R}^2$;
- $\mathcal{N}(A)$, o espaço nulo da matriz A $m \times n$, é subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Seja $K=\{X_1,\ldots,X_k\}\subset\mathcal{V}$. Chama-se espaço gerado por K ao conjunto

$$\langle K\rangle = \langle X_1,\ldots,X_k\rangle = \{X = \alpha_1X_1+\cdots+\alpha_kX_k : \alpha_1,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{R}\}$$

formado por todas as combinações lineares de $X_1,\ldots,X_k$. Diz-se também que K gera $\mathcal{S}$ ou é um conjunto gerador de $\mathcal{S}$.

Exercício: Confirme que $\mathcal{S}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{V}$.

Exemplo: Dados os vetores não colineares $X_1, X_2\in\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$,

1. $\langle X_1\rangle$ é a recta que passa pela origem e tem vetor director X_1;
2. $\langle X_1, X_2\rangle$ é o plano que passa pela origem e que contém X_1 e X_2.

A matriz $m \times n$ $A = \begin{bmatrix} {L_1}^T \\ \vdots \\ {L_n}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & \cdots & C_m \end{bmatrix}$ tem **linhas** $L_1, \ldots, L_n \in \mathbb{R}^m$ e **colunas** $C_1, \ldots, C_m \in \mathbb{R}^n$. Logo, o **espaço das linhas** e o **espaço das colunas** de A são os subespaços de $\mathbb{R}^m$ e, respetivamente, $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{C}(A) = \langle C_1, \ldots, C_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^m \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}(A) = \langle L_1, \ldots, L_m \rangle \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Lema: Dados $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{V}$ e $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, com $i \neq j$,

- **i.** $\langle X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_j, \ldots, X_k \rangle = \langle X_1, \ldots, X_j, \ldots, X_i, \ldots, X_k \rangle$;
- **ii.** $\langle X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_k \rangle = \langle X_1, \ldots, \alpha X_i, \ldots, X_k \rangle$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- **iii.** $\langle X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_k \rangle = \langle X_1, \ldots, X_i + \beta X_j, \ldots, X_k \rangle$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Teorema: Se as matrizes A e B são **equivalentes por linhas**, $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B)$.

$\mathcal{K}=\{X_1,\ldots,X_k\}\subseteq\mathcal{V}$ é **linearmente independente (l.i.)** no e.v. real $\mathcal{V}$ se

$$\alpha_1 X_1+\cdots+\alpha_k X_k = 0_{\mathcal{V}} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_1=\cdots=\alpha_k=0.$$

Caso contrário, $\mathcal{K}$ é **linearmente dependente (l.d.)** em $\mathcal{V}$, ou seja,

existem $\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{R}$ não todos nulos tais que $\alpha_1 X_1+\cdots+\alpha_k X_k=0_{\mathcal{V}}$.

Nota: $0_{\mathcal{V}}\in\mathcal{K} \;\Rightarrow\; \mathcal{K}$ é linearmente dependente.

Exemplos:

- Dois vetores não nulos de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ são colineares se e só se são l.d.
- Três vetores não colineares de $\mathbb{R}^3$ definem um plano se e só se são l.d.

Sejam $\mathcal{V}$ um e.v. real, $\mathcal{K} = \{X_1, \ldots, X_k\} \subset \mathcal{V}$ e $\mathcal{S} = \langle K \rangle$.

Lema: Seja $X \in \mathcal{K}$. Então, as duas afirmações são equivalentes:

1. X é combinação linear dos vetores de $\mathcal{K} \setminus \{X\}$;
2. $\mathcal{S}$ é gerado por $\mathcal{K} \setminus \{X\}$.

Teorema: $\mathcal{K}$ é um conjunto linearmente

- dependente $\Leftrightarrow$ existe $X \in \mathcal{K}$ que satisfaz 1. ou 2. do lema anterior;
- independente $\Leftrightarrow$ para cada $X \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{S}$, o conjunto $\mathcal{K} \cup \{X\}$ é l.i.

Corolário:

- Se $\mathcal{K}$ gera $\mathcal{V}$ e não é l.i., o conjunto obtido retirando um oportuno elemento de $\mathcal{K}$ ainda é gerador de $\mathcal{V}$.
- Se $\mathcal{K}$ é l.i. e não gera $\mathcal{V}$, é possível acrescentar um oportuno elemento a $\mathcal{K}$ mantendo a independência linear.

Uma **base de um e.v.** $\mathcal{V} \neq \{0_{\mathcal{V}}\}$ é um **conjunto (a) l.i.** e **(b) gerador** de $\mathcal{V}$.

Nota:
- Por convenção, o e.v. trivial $\{0_{\mathcal{V}}\}$ tem como base o conjunto vazio.
- Um conjunto l.i. é base do espaço por ele gerado.

Exemplos:

1. Sejam $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$. Então $\mathcal{C}_n = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é a **base canónica de** $\mathbb{R}^n$.
2. Seja E_{ij} a matriz $m \times n$ que tem a entrada (i, j) igual a 1 e todas as outras iguais a 0. Então $\mathcal{C}_{m\times n} = \{E_{ij} : i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n\}$ é a **base canónica de** $\mathbb{R}^{m\times n}$.
3. A **base canónica** do e.v. $\mathcal{P}_n$ dos polinómios na variável x de grau menor ou igual a n é $\mathcal{P}_n = \{1, x, \ldots, x^n\}$. O e.v. $\mathcal{P}$ de todos os polinómios não admite uma base com um número **finito** de elementos.

Teorema: $\mathcal{V}$ tem uma base de n elementos e $\mathcal{K} \subset \mathcal{V}$ contém r vetores.

i. $\mathcal{K}$ l.i. $\Rightarrow$ $r \leq n$ (ou seja, $r > n \Rightarrow \mathcal{K}$ linearmente dependente)

Neste caso, existe uma base de $\mathcal{V}$ que contém $\mathcal{K}$.

ii. $\mathcal{K}$ gera $\mathcal{V}$ $\Rightarrow$ $r \geq n$ (ou seja, $r < n \Rightarrow \mathcal{K}$ não gera $\mathcal{V}$)

Neste caso, existe um subconjunto de $\mathcal{K}$ que é uma base de $\mathcal{V}$.

Corolário: Duas bases de $\mathcal{V}$ possuem o mesmo número de elementos.

A **dimensão** de $\mathcal{V}$, $\dim \mathcal{V}$, é o número de elementos de qualquer base dele.

Exemplos: $\dim\{0_{\mathcal{V}}\} = 0$, $\dim \mathbb{R}^n = n$, $\dim \mathbb{R}^{m\times n} = mn$ e $\dim \mathcal{P}_n = n+1$.

Teorema: Se $\mathcal{K} = \{X_1, \ldots, X_n\} \subset \mathcal{V}$ e $\dim \mathcal{V} = n$, então

i. $\mathcal{K}$ l.i. $\Rightarrow$ $\mathcal{K}$ é base de $\mathcal{V}$; **ii.** $\mathcal{K}$ gera $\mathcal{V}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{K}$ é base de $\mathcal{V}$.

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & -4 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim A_e = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim A_r = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,
sendo A_e e A_r as formas escalonada e, respetivamente, reduzida de A.

Teorema: As linhas não nulas de A_e e A_r formam bases de $\mathcal{L}(A)$.

Seja $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Então, $X \in \mathcal{N}(A) \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow A_r X = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 2x_2 + x_4 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = x_2 N_2 + x_4 N_4, \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Teorema: Os vetores na combinação linear de X (N_2 e N_4) são uma base de $\mathcal{N}(A)$. Assim, $\dim \mathcal{N}(A) = \mathrm{nul}(A) =$ n.º de inc. livres do sistema $AX = 0$.

$B=(a,b,c)\in\mathcal{C}(A)\Leftrightarrow$ o sistema $AX=B$ é possível. Logo, sendo $[A|B]=$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -4 & 3 & a \\ 2 & -4 & -7 & 5 & b \\ 1 & -2 & -3 & 2 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -4 & 3 & a \\ 0 & 0 & 1 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-b+c \end{array}\right],\ B\in\mathcal{C}(A)\Leftrightarrow a-b+c=0.$$

A equação que define $\mathcal{C}(A)$ é um sistema homogéneo e pode aplicar-se o teorema anterior: $\mathcal{C}(A)=\mathcal{N}([1\ \ -1\ 1])=\langle(1,1,0),(-1,0,1)\rangle$. Contudo,

Teorema: $\dim\mathcal{C}(A)=\dim\mathcal{L}(A)$ e as colunas de A que correspondem às colunas dos pivots da sua forma escalonada, formam uma base de $\mathcal{C}(A)$.

Assim, as colunas 1 e 3 de A são l.i. e $\mathcal{C}(A)=\langle(1,2,1),(-4,-7,-3)\rangle$.

Corolários:

- A caraterística de uma matriz é o máximo número de linhas (colunas) l.i.
- Uma matriz é invertível se e só se o conjunto das suas linhas (colunas) é l.i.

Seja $\mathcal{B} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma **base ordenada** de um e.v. $\mathcal{V}$.

Teorema: Cada vetor $X \in \mathcal{V}$ escreve-se de forma única como combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$, ou seja, existem $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, tais que

$$X = a_1 X_1 + \cdots + a_n X_1.$$

Estes coeficientes $a_1, \ldots, a_n$ dizem-se as **coordenadas** de X na **base** $\mathcal{B}$.

O **vetor das coordenadas** de X na **base** $\mathcal{B}$ é $[X]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$.

Exemplo: Verifique que, relativamente à base $\mathcal{B} = \big((1,1),(1,2)\big)$,

$$[(0,1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad [(1,-1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Nota: Para $Y_1, \ldots, Y_r \in \mathcal{V}$, $\mathcal{S}$ base ordenada de $\mathcal{V}$ e $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$,

$$[a_1 Y_1 + \cdots + a_r Y_r]_{\mathcal{S}} = a_1 [Y_1]_{\mathcal{S}} + \cdots + a_r [Y_r]_{\mathcal{S}}.$$

Sejam $\mathcal{S}$, $\mathcal{T} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ duas bases ordenadas de $\mathcal{V}$ e $X \in \mathcal{V}$.

Qual a relação entre $[X]_{\mathcal{S}}$ e $[X]_{\mathcal{T}}$?

$$[X]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad X = a_1 Y_1 + \cdots + a_n Y_n$$

$$\Rightarrow \quad [X]_{\mathcal{S}} = a_1 [Y_1]_{\mathcal{S}} + \cdots + a_n [Y_n]_{\mathcal{S}}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} [Y_1]_{\mathcal{S}} & \cdots & [Y_n]_{\mathcal{S}} \end{bmatrix}}_{M_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{T}}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{[X]_{\mathcal{T}}}$$

Teorema: Sejam $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ duas bases ordenadas de $\mathcal{V}$.

Para cada $X \in \mathcal{V}$,
$$\boxed{[X]_{\mathcal{S}} = M_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{T}}\,[X]_{\mathcal{T}}}$$

onde

$$\boxed{M_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} [Y_1]_{\mathcal{S}} & \cdots & [Y_n]_{\mathcal{S}} \end{bmatrix}}$$

é a **Matriz de mudança de base de $\mathcal{T}$ para $\mathcal{S}$**

cujas colunas são os vetores das

coordenadas na base $\mathcal{S}$ dos elementos da base $\mathcal{T}$

Sejam $\mathcal{S} = \big((1,1),(1,2)\big)$ e $\mathcal{T} = \big((0,1),(1,-1)\big)$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$.

Dado $X \in \mathbb{R}^2$ tal que $[X]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, tem-se que

$$X = a\,(0,1) + b\,(1,-1).$$

Logo, $[X]_{\mathcal{S}} = a[(0,1)]_{\mathcal{S}} + b[(1,-1)]_{\mathcal{S}}$. Pelo exemplo anterior,

$$[(0,1)]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad [(1,-1)]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

então

$$[X]_{\mathcal{S}} = a\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}_{M_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{T}}} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{[X]_{\mathcal{T}}}.$$

Teorema: Sejam $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ duas bases de $\mathcal{V}$. Então $M_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{T}}$ é invertível e

$$M_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{T}}^{-1} = M_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}}.$$

Demonstração: Sejam $M = M_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{T}}$, $\dim \mathcal{V} = n$ e $Y \in \mathbb{R}^n$ tal que $MY = 0$. Existe $X \in \mathcal{V}$ tal que $Y = [X]_{\mathcal{T}}$. Então

$$[X]_{\mathcal{S}} = M[X]_{\mathcal{T}} = M\,Y = 0 \quad \Rightarrow \quad X = 0_{\mathcal{V}} \quad \Rightarrow \quad Y = 0.$$

Mostrámos que o sistema homogéneo $M\,Y = 0$ possui apenas a solução trivial, ou seja, que M é invertível. Para cada $X \in \mathcal{V}$, tem-se

$$[X]_{\mathcal{S}} = M\,[X]_{\mathcal{T}} \quad \Rightarrow \quad [X]_{\mathcal{T}} = M^{-1}[X]_{\mathcal{S}},$$

pelo que $M^{-1} = M_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}}$.

$\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$: bases de $\mathbb{R}^n$ **$\mathcal{C}$: base canónica de $\mathbb{R}^n$**

$$\begin{tikzcd}
{[\boldsymbol{X}]_{\mathcal{T}}} \arrow[rr, "M_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{T}}"] \arrow[dr, "M_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{T}}"'] & & {[\boldsymbol{X}]_{\mathcal{S}}} \arrow[dl, shift right, "M_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{S}}"'] \\
& {[\boldsymbol{X}]_{\mathcal{C}}} \arrow[ur, shift right, "M_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{C}} = M^{-1}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{S}}"'] &
\end{tikzcd}$$

$M_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{S}}$ **: matriz cujas colunas são os vectores da base $\mathcal{S}$**

$M_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{T}}$ **: matriz cujas colunas são os vectores da base $\mathcal{T}$**

$$M_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{T}} = M_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{C}}\, M_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{T}} = M^{-1}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{S}}\, M_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{T}}$$

Dadas as bases de $\mathbb{R}^n$ $\mathcal{S} = (X_1, \ldots, X_n)$, $\mathcal{T} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ e $\mathcal{C}$ canónica,

$$\left[\, M_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{S}} \;\middle|\; M_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{T}} \,\right] = \left[\, X_1 \;\cdots\; X_n \;\middle|\; Y_1 \;\cdots\; Y_n \,\right] \underset{\uparrow}{\sim} \left[\, I_n \;\middle|\; M_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{T}} \,\right]$$

método de eliminação de Gauss-Jordan

Exemplo: Para obtermos a matriz $M_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{T}}$ de mudança da base $\mathcal{T} = \big((0,1),(1,-1)\big)$ para a base $\mathcal{S} = \big((1,1),(1,2)\big)$, temos de calcular

$$[(0,1)]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad (0,1) = \alpha_1\,(1,1) + \alpha_2\,(1,2),$$

$$[(1,-1)]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad (1,-1) = \beta_1\,(1,1) + \beta_2\,(1,2).$$

Tal conduz a dois sistemas

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

com a mesma matriz dos coeficientes (cujas colunas são os vectores de $\mathcal{S}$).

Os sistemas anteriores podem-se resolver em simultâneo, formando a matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right],$$

$$M_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Um conjunto $\{X_1, \ldots, X_k\}$ de vetores de $\mathbb{R}^n$ diz-se **ortogonal** se

$$X_i \cdot X_j = 0, \qquad i \neq j, \qquad i, j = 1, \ldots, n,$$

e diz-se **ortonormado** (**o.n.**) se é ortogonal e também se verifica

$$X_i \cdot X_i = 1, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Exemplo: 1. $\{(1, 1, 0), (2, -2, 1)\}$ é ortogonal;
2. $\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}$ é o.n.

Teorema: Todo o conjunto ortogonal de vetores não nulos é l.i.

Corolário: Todo o conjunto o.n. é l.i.

Uma **base ortogonal/o.n.** é uma base que é um conjunto ortogonal/o.n.

Nota: Todo o conjunto o.n. de n vetores de $\mathbb{R}^n$ é uma **base** de $\mathbb{R}^n$.

Teorema: Seja $X \in \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma **base o.n.** de $\mathbb{R}^n$. Então

$$[X]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} X \cdot X_1 \\ \vdots \\ X \cdot X_n \end{bmatrix},$$

isto é, $X = a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n$, sendo $a_i = X \cdot X_i,\ i = 1, \ldots, n$.

Exemplo: Determinar as coordenadas do vetor $(1, 5)$ na base o.n. de $\mathbb{R}^2$

$$\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right).$$

$Y \in \mathbb{R}^n$ é ortogonal ao subespaço $\mathcal{W}$ de $\mathbb{R}^n$ se $Y \cdot Z = 0$ para cada $Z \in \mathcal{W}$.

Teorema: Seja $Y \in \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B}$ uma base de um subespaço $\mathcal{W}$ de $\mathbb{R}^n$. Então,

Y é ortogonal a $\mathcal{W}$ se e só se Y é ortogonal a cada vetor de $\mathcal{B}$.

A projeção ortogonal de $X \in \mathbb{R}^n$ sobre o subespaço $\mathcal{W}$ de $\mathbb{R}^n$ é o vetor $Z = \mathrm{proj}_{\mathcal{W}} X \in \mathcal{W}$ tal que $X = Y + Z$, sendo Y ortogonal a $\mathcal{W}$.

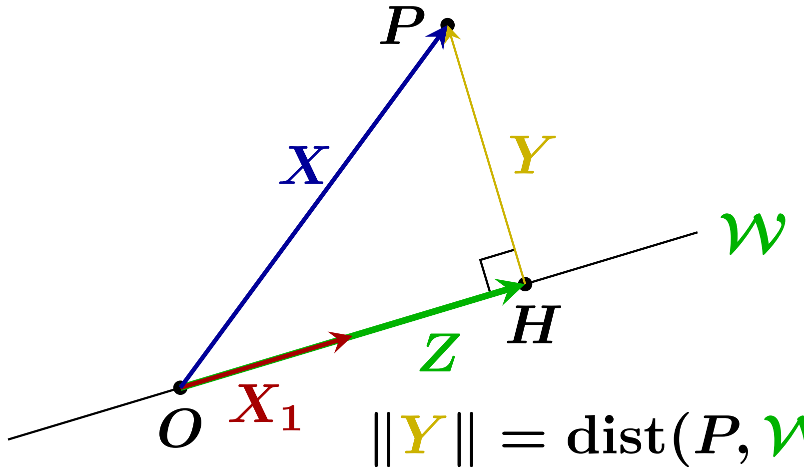
Exemplo: Sejam $\mathcal{W} = \langle X_1 \rangle$ uma reta, com $\|X_1\| = 1$ (base o.n.) e $X = \overrightarrow{OP}$.

Logo, $Z = \mathrm{proj}_{\mathcal{W}} X = \alpha X_1$ e $Y \cdot X_1 = 0$.

Então, se $X = Y + Z = Y + \alpha X_1$,

$$X \cdot X_1 = Y \cdot X_1 + \alpha X_1 \cdot X_1 = \alpha.$$

Portanto, $\mathrm{proj}_{\mathcal{W}} X = (X \cdot X_1) X_1$.

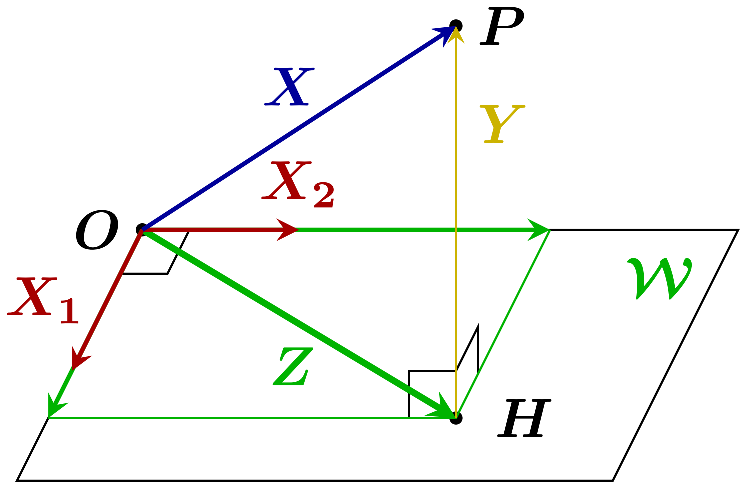


$\|Y\| = \mathrm{dist}(P, \mathcal{W})$

Exemplo: Sejam $\mathcal{W}$ um plano gerado pela base o.n. $\{X_1, X_2\}$ e $X = \overrightarrow{OP} = Z + Y$, com $Z = \mathrm{proj}_{\mathcal{W}} X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$ e $Y \cdot X_1 = Y \cdot X_2 = 0$. Então, sendo $X = Y + Z = Y + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$,

$$X \cdot X_1 = \alpha_1 \text{ e } X \cdot X_2 = \alpha_2.$$

Logo, $\mathrm{proj}_{\mathcal{W}} X = (X \cdot X_1) X_1 + (X \cdot X_2) X_2$.



$$\|Y\| = \mathrm{dist}(P, \mathcal{W})$$

Teorema: A projeção ortogonal de $X \in \mathbb{R}^n$ sobre o subespaço $\mathcal{W}$ de $\mathbb{R}^n$ é

$$\mathrm{proj}_{\mathcal{W}} X = (X \cdot X_1) X_1 + \cdots + (X \cdot X_k) X_k \in \mathcal{W},$$

em que $\{X_1, \ldots, X_k\}$ é uma base o.n. de $\mathcal{W}$.

Teorema: Todo o subespaço $\mathcal{W} \neq \{0\}$ de $\mathbb{R}^n$ possui uma base o.n.

Demonstração:

Dada $\{X_1, \ldots, X_m\}$ uma base de $\mathcal{W}$, sejam $Y_1 = \frac{X_1}{\|X_1\|}$, $\mathcal{Z}_1 = \langle Y_1 \rangle$ e

$$X'_k = X_k - \operatorname{proj}_{\mathcal{Z}_{k-1}} X_k, \qquad Y_k = \frac{X'_k}{\|X'_k\|}, \qquad \mathcal{Z}_k = \langle Y_1, \ldots, Y_k \rangle,$$

para $k = 2, \ldots, m$. Então $\mathcal{B} = \{Y_1, \ldots, Y_m\}$ é um conjunto o.n., logo l.i. em $\mathcal{W}$. Sendo $\dim \mathcal{W} = m$, conclui-se que $\mathcal{B}$ é uma base o.n. de $\mathcal{W}$.

Exemplo:

Determinar uma base o.n. de $\langle (1,1,1,1), (1,2,-1,3), (2,1,-2,2) \rangle$.