1

a) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- obter os valores próprios de A

$\det(A - \lambda I) = 0$

$\Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 0 & -\lambda & 4 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow (-\lambda)^3 + 0 + 0 - 0 - 0 = 0$

$\begin{matrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 0 & -\lambda & 4 \end{matrix}$

$\Leftrightarrow \lambda = 0$

O valor próprio de A é $\lambda = 0$

- obter os vetores próprios associados aos valores próprios

$\lambda = 0$, os vetores próprios são, tais que

$(A - \lambda I)X = 0$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_3 = 0 \\ x_1 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_1 \in \mathbb{R} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x_1 \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_1, x_1 \in \mathbb{R}$

vetores próprios associados a $\lambda = 0$ são $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_1, x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $(\alpha(1,0,0))$

- Diagonalizável

↓

Não é diagonizável; é uma matriz 3x3 que possui apenas um vetor próprio lineamente independente.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{matrix} \quad -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

- obter os valores próprios de A

$\det(A - \lambda I) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow (1-\lambda)(3-\lambda)(-2-\lambda) = 0$

$\begin{matrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 3-\lambda \end{matrix}$

$\Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = 3 \vee \lambda = -2$

Os valores próprios de B são $\lambda = -2$, $\lambda = 1$ e $\lambda = 3$

- obter os vetores próprios associados a cada valor próprio

→ vetor próprio associado a $\lambda = -2$

$(A - \lambda I)X = 0$

$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_3, x_3 \in \mathbb{R}$

os vetores próprios são $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_3, x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

→ vetor próprio associado a $\lambda = 1$

$(A - \lambda I)X = 0$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 = L_3 - \frac{3}{-1} L_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & -3 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ 8x_2 = 3x_3 \\ x_1 \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{x_1}{2} \\ x_3 = \frac{8x_2}{3} \\ x_1 \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}x_1 \\ x_3 = \frac{4}{3}x_1 \\ x_1 \in \mathbb{R} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ \frac{1}{2}x_1 \\ \frac{4}{3}x_1 \end{bmatrix}, x_1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 6x_1 \\ 3x_1 \\ 8x_1 \end{bmatrix}, x_1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} x_1, x_1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\rightarrow$ vetor associado a $\lambda = 3$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 = 0 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix} \sim_{L_2 = L_2 - \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix} \sim_{L_3 = L_3 - \frac{3}{2}L_1} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ 2x_2 = 5x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_3 = \frac{2}{5}x_2 \end{cases}$$

vetor $\begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ 2/5\, x_2 \end{bmatrix}, x_2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ seja $\begin{bmatrix} 0 \\ 5x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix}, x_2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} x_2, x_2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Diagonizável

↳ É uma matriz diagonizável: é uma matriz 3x3 com 3 valores próprios distintos

Matriz diagonalizante:

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriz Diagonal

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

obter os valores próprios de C

$\det(C - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (3-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\lambda = 3}_{\text{multiplicidade } 2} \wedge \underbrace{\lambda = 1}_{\text{multiplicidade } 2}$$

obter os vetores próprios associados a cada valor próprio

$\rightarrow$ vetor associado a $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_3 \in \mathbb{R} \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2x_1 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_3 = -2x_4 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_3 = -2x_4 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x_2 \\ x_2 \\ x_3 \\ -\frac{1}{2}x_3 \end{bmatrix}, x_1, x_3 \in \mathbb{R}$$

vet. próprios são

$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x_2 \\ x_2 \\ x_3 \\ -\frac{1}{2}x_3 \end{bmatrix}, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ não simultaneamente nulos

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} x_3, \ x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

não simultaneamente nulos

$\rightarrow$ vetor associado a $\lambda = 3$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 \in \mathbb{R} \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_1, x_1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Não é diagonizável; é uma matriz 4x4 que possui no máximo 3 vetores linearmente independentes

d) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

obter os valores próprios de D

$\det(D-\lambda I)=0$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} 4-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \end{matrix}$$

$\Leftrightarrow (4-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda) + (2(-2)3) + (-1\times2\times2) - (3(1-\lambda)(-1)) - (2\times(-2)(4-\lambda)) - ((-\lambda)\times2\times2) = 0$

$\Leftrightarrow (4-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda) - \cancel{12} - \cancel{4} + (3-3\lambda) + \cancel{16} - \cancel{4\lambda} + \cancel{4\lambda} = 0$

$\Leftrightarrow (4-4\lambda-\lambda+\lambda^2)(-\lambda) + 3 - 3\lambda = 0$

$\Leftrightarrow -4\lambda+4\lambda^2+\lambda^2-\lambda^3+3-3\lambda=0$

$\Leftrightarrow -7\lambda+5\lambda^2-\lambda^3+3=0$

$\Leftrightarrow (-\lambda^2+4\lambda+3)(\lambda-1)=0 \Leftrightarrow (-\lambda+3)(\lambda-1)(\lambda-1)=0$

$\Leftrightarrow \lambda=3 \vee \underbrace{\lambda=1}_{\text{multiplicidade 2}}$

	-1	5	-7	3
1		-1	4	-3
	-1	4	-3	0
1		-1	-3	
	-1	3	0	

$-\lambda+3=0$

obter os vetores próprios associados

→ vetor associado a $\lambda=1$

$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 2x_1+2x_3=0 \\ -x_1-2x_2-x_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=0 \\ x_1=-x_3 \\ -2x_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=0 \\ x_1=-x_3 \\ x_2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_3, x_3 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

→ vetor associado a $\lambda=3$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 2x_1-2x_2+2x_3=0 \\ -x_1-2x_2-3x_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_1+2x_3+3x_3=0 \\ x_2=x_1+x_3 \\ \text{——} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1+5x_3=0 \\ \text{——} \\ 3x_1+5x_3=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-\frac{5}{3}x_3 \\ x_2=-\frac{5}{3}x_3+x_3 \\ x_3\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-\frac{5}{3}x_3 \\ x_2=-\frac{2}{3}x_3 \\ x_3\in\mathbb{R} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{5}{3}x_3 \\ -\frac{2}{3}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}, x_3\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} x_3, x_3\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

como no máximo temos 2 vetores próprios lineamente independentes, a matriz não é diagonalizável

e) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

obter os valores próprios de E

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \end{matrix}$$

$\Leftrightarrow (2-\lambda)(3-\lambda)(3-\lambda) - (1\times1\times(2-\lambda)) = 0$

$\Leftrightarrow (2-\lambda)(3-\lambda)(3-\lambda) - (2-\lambda) = 0$

$\Leftrightarrow (2-\lambda)((3-\lambda)(3-\lambda)-1)=0$

$\Leftrightarrow 2-\lambda=0 \vee 9-3\lambda-3\lambda+\lambda^2-1=0$

$\Leftrightarrow \lambda=2 \vee \lambda^2-6\lambda+8=0$

$\Leftrightarrow \underbrace{\lambda=2 \vee \lambda=2}_{\text{multiplicidade de 2}} \vee \lambda=4$

C. Aux

$\lambda^2-6\lambda+8=0$

$\Leftrightarrow \lambda=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}$

$\Leftrightarrow \lambda=\frac{6\pm2}{2} \Leftrightarrow \lambda=4 \vee \lambda=2$

obter os vetores próprios associados

→ vetor associado a $\lambda=2$

$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x_2-x_3=0 \\ x_1\in\mathbb{R} \\ x_3\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=-x_3 \\ x_1\in\mathbb{R} \\ x_3\in\mathbb{R} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}, x_1,x_3\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}x_3, x_1,x_3\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

→ vetor associado a $\lambda=4$

$\begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{L_3=L_3+L_2}{\sim} \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_1=L_1+L_2}{\sim} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1-2x_2=0 \\ -x_2+x_3=0 \\ x_2\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-x_2 \\ x_2=x_3 \\ x_2\in\mathbb{R} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}x_2, x_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

A matriz é diagonalizável, visto que n=3 e tem 3 vetores próprios lineamente independentes

- Matriz diagonalizável

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

- Matriz diagonal

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

obter os valores próprios de F

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ 2 & -\lambda & -2 \\ 3 & 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\begin{matrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ 2 & -\lambda & -2 \end{matrix}$

$\Leftrightarrow (1-\lambda)(-\lambda)(-4-\lambda) - 4 - 6 - 6\lambda - (-2(1-\lambda)) - 2(-4-\lambda) = 0$

$\Leftrightarrow (1-\lambda)(-\lambda)(4-\lambda) - 10 - 6\lambda \cancel{+2} \cancel{-2\lambda} \cancel{+8} + \cancel{2\lambda} = 0$

$\Leftrightarrow -\lambda((1-\lambda)(4-\lambda)+6) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 0 \vee (1-\lambda)(4-\lambda)+6 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 0 \vee 4-\lambda-4\lambda+\lambda^2+6 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda^2 - 5\lambda + 10 = 0$

$\lambda^2 - 5\lambda + 10 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 25 \pm \sqrt{25}$

$(1-\lambda)((-\lambda)(-4-\lambda)+2)$

② $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

a) obter os valores próprios de A

$\det(A-\lambda I) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\begin{matrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 0 \end{matrix}$

$\Leftrightarrow (1-\lambda)(-1-\lambda)(3-\lambda) - (1-\lambda) = 0$

$\Leftrightarrow (1-\lambda)((-1-\lambda)(3-\lambda) - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 1-\lambda = 0 \vee (-1-\lambda)(3-\lambda)-1 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 1 \vee -3+\lambda-3\lambda+\lambda^2-1 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda^2 - 2\lambda - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-4\times1\times(-4)}}{2}$

$\Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = \frac{2\pm\sqrt{20}}{2} = \frac{2\pm2\sqrt{5}}{2}$

$\Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = 1+\sqrt{5} \vee \lambda = 1-\sqrt{5}$

obter os vetores próprios associados a $\lambda = 1$

$\det(A-\lambda I) = 0$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = -5x_3 \\ x_2 = -2x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -5/2\, x_3 \\ x_2 = -2x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} -5/2\, x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} x_3, x_3 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Subespaço próprio associado a $\lambda = 1 \Rightarrow U_1 = \langle (5, 4, -2) \rangle$

b) A matriz é diagonizável: é uma matriz 3x3 que possui 3 vetores lineamente independentes

Matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} 1+\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Ver no grup ALGA

3

4

Se $A = A^T$, a matriz é simétrica, ou seja, possui os mesmos valores próprios, logo é diagonizável

5 $P^{-1}AP = D \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$

a)

6

7

a) Se A é diagonalizável, significa que é uma matriz simétrica, ou seja, que é igual à sua transposta

b)

⑧ $A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

a) → obter os valores próprios

$\det(A-\lambda I)=0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow (2-\lambda)\big((3-\lambda)(2-\lambda)+2\big)=0$

$\Leftrightarrow \lambda=2 \lor 6-3\lambda-2\lambda+\lambda^2-2=0$

$\Leftrightarrow \lambda=2 \lor \lambda^2-5\lambda+4=0$

$\Leftrightarrow \lambda=2 \lor \lambda=\frac{5\pm\sqrt{25-4\times 4}}{2}$

$\Leftrightarrow \lambda=2 \lor \lambda=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}$

$\Leftrightarrow \lambda=2 \lor \lambda=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2}$

$\Leftrightarrow \lambda=2 \lor \lambda=4 \lor \lambda=1$

→ obter os vetores associados a cada valor próprio

vetor associado a $\lambda_1=1$

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=0 \\ 2x_2-2x_3=0 \\ x_3\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-x_3 \\ x_2=x_3 \\ x_3\in\mathbb{R} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} -x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}, x_3\in\mathbb{R}$

vetores próprios são $\begin{bmatrix} -x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}x_3, x_3\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$U_1=\langle(-1,1,1)\rangle$ dim $U_1=1$, base é $\{(-1,1,1)\}$ seja $x_1=\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ um vetor associado a $\lambda_1=1$

vetor associado a $\lambda_2=2$

$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1\in\mathbb{R} \\ x_2=0 \\ x_3=0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x_1\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}x_1, x_1\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$U_2=\langle(1,0,0)\rangle$, dim $U_2=1$ seja $x_2=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ um vetor próprio associado a $\lambda_2=2$

vetor associado a $\lambda_3=4$

$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1-2x_2+3x_3=0 \\ -x_2-2x_3=0 \\ x_3\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1+4x_3+3x_3=0 \\ x_2=-2x_3 \\ x_3\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=7/2\,x_3 \\ x_2=-2x_3 \\ x_3\in\mathbb{R} \end{cases}$

vetores próprios são $\begin{bmatrix} 7/2\,x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7/2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}x_3, x_3\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$U_3=\langle(7/2,-2,1)\rangle$, dim $U_3=1$ seja $x_3=\begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$ um vetor próprio associado a $\lambda_3=4$

b)

x_1, x_2 e x_3 são 3 vetores próprios linearmente independentes e portanto,

$P=\begin{bmatrix} -2 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ é a matriz diagonalizante de A e é tal que

$P^{-1}AD=D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

c) $P^{-1}AP = D \Leftrightarrow A = DPP^{-1}$

$A^5 = PDP^{-1}\, PDP^{-1} \ldots$

Acabar

(9)

(1,1) → vetor próprio (v)

0 → valor próprio

Da definição de vetor e valor próprio sabemos que: t é valor próprio da matriz A se existe um vetor v tal que $Av = tv$ (onde v chama-se vetor próprio)

Então $Av = tv$

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ a & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = t\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = t \\ a+b = t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ a+b = 2\end{cases}$$

(Aqui vemos que o vetor próprio (1,1) é um vetor próprio associado ao valor próprio 2 (t=2))

Por outro lado, sabemos que zero é valor próprio da matriz A

t é valor próprio se $|A - tI| = 0$

$|A - tI| = 0$

$$\begin{vmatrix}1-t & 1\\ a & b-t\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-t)(b-t) - a = 0 \quad \text{(polinómio característico)}$$

como zero é valor próprio sabemos que:

$(1-0)(b-0) - a = 0 \Leftrightarrow b - a = 0$

Juntando as condições temos que:

$$\begin{cases} a+b = 2 \\ b - a = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1\end{cases}$$

(10)

$$A = \begin{bmatrix}0 & -1\\ K & K+1\end{bmatrix}$$

a) $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}-\lambda & -1\\ K & K+1-\lambda\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-\lambda)(K+1-\lambda) - (-K) = 0$$

$\Leftrightarrow -K\lambda - \lambda + \lambda^2 + K = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda(K+1) + K = 0$ ← equação do polinómio característico

$\Leftrightarrow \lambda = \dfrac{K+1 \pm \sqrt{(K+1)^2 - 4K}}{2}$

C.A

$(K^2 - 2K + 1) = (K-1)^2$

$\lambda = \dfrac{K+1 \pm \sqrt{K^2 + 2K + 1 - 4K}}{2}$

$\lambda = \dfrac{K+1 \pm \sqrt{K^2 - 2K + 1}}{2}$

$\lambda = \dfrac{K+1 \pm \sqrt{(K-1)^2}}{2} \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{K+1 \pm K-1}{2}$

$\Leftrightarrow \lambda = \dfrac{K + \cancel{1} + K - \cancel{1}}{2} \vee \lambda = \dfrac{\cancel{K}+1-(\cancel{K}-1)}{2}$

$\Leftrightarrow \lambda = \dfrac{2K}{2} \vee \lambda = 1$

$\Leftrightarrow \lambda = K \vee \lambda = 1$

Os valores próprios são $\{1, K\}$.

b) obter os vetores próprios associados a cada valor próprio

→ vetor associado a $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ K & K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix}, x_2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$U_1 = \langle (x_1, -x) \rangle$

→ vetor associado a $\lambda = K$

$$\begin{bmatrix} -K & -1 \\ K & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -Kx_1 = x_2 \\ x_1 \in \mathbb{R} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ -Kx_1 \end{bmatrix}, x_1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$U_2 = \langle (x_1, -Kx) \rangle$

c)

$x \quad x$

$-x \quad -Kx$

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -K \end{bmatrix}$

e)

11) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \theta & \mu \end{bmatrix}$ $\quad u = (1,1,1)$, $v = (1,0,-1)$, $w = (1,-1,0)$

λ é um vetor próprio de A se existe $v \neq 0_A$, tal que $Av = \lambda v$

u, v, w são vetores próprios de A, então:

- $Au = \lambda u$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \theta & \mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = \lambda \\ \alpha + \beta + \gamma = \lambda \\ \delta + \theta + \mu = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ \alpha + \beta + \gamma = 3 \\ \delta + \theta + \mu = 3 \end{cases}$$

- $Av = \lambda v$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \theta & \mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha - \gamma \\ \delta - \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ -\lambda \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \\ \delta - \mu = -\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \\ \delta - \mu = 0 \end{cases}$$

- $Aw = \lambda w$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \theta & \mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha - \beta \\ \delta - \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ -\lambda \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \alpha - \beta = -\lambda \\ \delta - \theta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ \delta - \theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 3 \\ \delta + \theta + \mu = 3 \\ \alpha - \gamma = 0 \\ \delta - \mu = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ \delta - \theta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha = 3 \\ 3\delta = 3 \\ \alpha = \gamma \\ \delta = \mu \\ \alpha = \beta \\ \delta = \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \delta = 1 \\ \gamma = 1 \\ \mu = 1 \\ \beta = 1 \\ \theta = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{bmatrix}$

λ é valor próprio de $\underbrace{|B - \lambda I| = 0}_{\text{polinómio característico}}$

$$P_B(\lambda) = |B - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ a & b & c-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(-\lambda)(c-\lambda) + a - (-\lambda b)$$
$$= (-\lambda)(-\lambda)(c-\lambda) + a + \lambda b$$

como $-1, 0, 1$ são valores próprios de B

$\begin{cases} P_B(-1) = 0 \\ P_B(0) = 0 \\ P_B(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \times 1 \times (c+1) + a - b = 0 \\ a = 0 \\ (-1)(-1)(c-1) + a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c + 1 + a - b = 0 \\ a = 0 \\ c - 1 + a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c + 1 + b = b \\ a = 0 \\ c - 1 + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = c + 1 \\ a = 0 \\ c - 1 + c + 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 0 \\ c = 0 \end{cases}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

12 a)

como estamos perante uma matriz 4x4, vamos ter no máximo 4 valores próprios (distintos ou não)

Da definição de vetor e valor próprio sabemos que:

t é valor próprio da matriz A se existe um vetor v tal que $Av = tv$ (onde v chama-se vetor próprio)

- $Az = z \Leftrightarrow Az = 1z \rightarrow z$ é um vetor próprio de A associado ao valor próprio 1
- $Aw = -w \Leftrightarrow Aw = -1w \rightarrow w$ é um vetor próprio de A associado ao valor próprio -1
- $Ax = 0 \Leftrightarrow Ax = 0x \rightarrow x$ é um vetor próprio de A associado ao valor próprio 0.
- $Ay = 0 \Leftrightarrow Ay = 0y \rightarrow y$ é um vetor próprio de A associado ao valor próprio 0.

como x e y são linearmente independentes, estamos a dizer que zero é valor próprio de multiplicidade 2 (pelo menos) e a dimensão do subespaço próprio associado a zero é, pelo menos, 2.

com isto, sabemos que os valores próprios são: $-1, 0, 1$.

↳ Então o polinómio característico é:

$(t-(-1))(t-0)(t-0)(t-1) = (t+1)t^2(t-1) = t^2(t+1)(t-1)$

b)

A é diagonalizável, porque é uma matriz 4x4 e tem pelo menos 4 valores próprios.

Sim, existe uma base de $\mathbb{R}^4$ constituída por vetores próprios de A

13

(14)

$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

obter os valores próprios

$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (-\lambda)(-\lambda) - 1 = 0 \iff \lambda^2 = 1 \iff \lambda = 1 \lor \lambda = -1$

obter os vetores próprios associados

vetor associado a $\lambda = 1$

$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x_1 \in \mathbb{R} \\ x_2 = x_1 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix}, x_1 \in \mathbb{R} \iff \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_1, x_1 \in \mathbb{R}$

vetor associado a $\lambda = -1$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x_1 \in \mathbb{R} \\ x_2 = -x_1 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix}, x_1 \in \mathbb{R} \iff \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} x_1, x_1 \in \mathbb{R}$

$\{(1,1),(1,-1)\}$ base ortogonal de $\mathbb{R}^2$

$\|(1,1)\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ $\qquad x_1 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$

$\|(1,-1)\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ $\qquad x_2 = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$

$\{X_1, X_2\}$ base ortonormada de $\mathbb{R}^2$

$P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ é uma matriz ortogonal tal que $P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$H = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

obter valores próprios

$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (-\lambda)(-\lambda)(-\lambda) - 1 - 1 + (-\lambda - \lambda - \lambda) = 0$

$\iff -\lambda^3 - 2 + 3\lambda = 0$

$\iff \lambda = 1 \lor \lambda = 1 \lor \lambda = -2$

obter os vetores próprios associados

→ vetor associado a $\lambda = 1$

$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

os vetores próprios são

$X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_3, \; x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ não simultaneamente nulos $\qquad \|X_1\| = \sqrt{2}$

→ vetor associado a $\lambda = -2$

$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$

$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 = L_3 + \frac{1}{2}L_1]{L_2 = L_2 + \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & -3/2 & 3/2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\iff \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \iff \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_3, x_3 \in \mathbb{R}$

Seja $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\|X_2\| = \sqrt{3}$

$P = \begin{matrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{matrix}$