Cálculo I — Ano lectivo 06/07

Resolução do Trabalho Teórico-Prático 2

1. Considere a função f definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2\ln\frac{1}{x} & \text{se} \quad x>0 \\ 0 & \text{se} \quad x=0 \\ x\,\mathrm{e}^{1/x} & \text{se} \quad x<0 \end{cases}$$

(a) Estude f quanto à diferenciabilidade em $x=0$.

Indicações para a resolução:
Temos

$$\begin{aligned} f'_+-(0) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\ln\frac{1}{x}}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} x\ln\frac{1}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \\ &\underbrace{=}_{\text{R.C.}} \lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} x = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^-}\frac{x\,\mathrm{e}^{1/x}}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^-}\mathrm{e}^{1/x} \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Como $f'_+(0)=0=f'_-(0)$ temos $f'(0)=0$ e, portanto, f é diferenciável em $x=0$.

(b) Determine, caso existam, as assimptotas ao gráfico de f.

Indicações para a resolução:

- **Estudo da existência de assimptotas verticais.**
  Pelas propriedades das funções contínuas, f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Como f é diferenciável em $x=0$, temos que f é contínua em $x=0$ e, portanto, podemos concluir que f é contínua em $\mathbb{R}$. Consequentemente, o gráfico de f não admite assimptotas verticais.

- **Estudo da existência de assimptota não vertical à direita.**
  Temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\ln\frac{1}{x}}{x}\\ &= \lim_{x\to+\infty} x\ln\frac{1}{x}\\ &= -\infty\end{aligned}$$

  o que permite concluir que o gráfico de f não admite assimptota não vertical à direita.
- **Estudo da existência de assimptota não vertical à esquerda.**
  Temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\mathrm{e}^{1/x}}{x}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{1/x}\\ &= 1\end{aligned}$$

  o que permite concluir que, se o gráfico de f admitir uma assimptota não vertical à esquerda, então ela terá declive $m=1$.
  Como

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx) &= \lim_{x\to-\infty}\left(x\mathrm{e}^{1/x}-x\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty}x\left(\mathrm{e}^{1/x}-1\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^{1/x}-1}{1/x}\\ &= 1\end{aligned}$$

  podemos concluir que a recta de equação $y=x+1$ é assimptota não vertical à esquerda do gráfico de f.

(c) Estude f quanto à existência de extremos locais.

Indicações para a resolução:
Temos, para todo o $x\in\mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2x\ln\frac{1}{x}+x^2\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}\\ &= 2x\ln\frac{1}{x}-x\\ &= x\left(2\ln\frac{1}{x}-1\right),\end{aligned}$$

para todo o $x\in\mathbb{R}^-$,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \mathrm{e}^{1/x}+x\mathrm{e}^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\ &= \mathrm{e}^{1/x}-\frac{1}{x}\mathrm{e}^{1/x}\\ &= \mathrm{e}^{1/x}\left(1-\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

e $f'(0)=0$.
Consequentemente, f é diferenciável em $\mathbb{R}$.
Como f é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$, os extremantes de f são os pontos onde a primeira derivada muda de sinal.

- **Determinação dos zeros da primeira derivada.**
  Como vimos na alínea a) $x=0$ é um zero da primeira derivada.
  Para todo o $x \in \mathbb{R}^+$, temos

$$\begin{aligned} f'(x)=0 &\iff x\left(2\ln\frac{1}{x}-1\right)=0 \\ &\iff \underbrace{x=0}_{\text{Condição impossível em } \mathbb{R}^+} \vee\ 2\ln\frac{1}{x}-1=0 \\ &\iff -\ln x=\frac{1}{2} \\ &\iff x=\mathrm{e}^{-1/2} \end{aligned}$$

  e, para todo o $x \in \mathbb{R}^-$, temos

$$\begin{aligned} f'(x)=0 &\iff \mathrm{e}^{1/x}\left(1-\frac{1}{x}\right)=0 \\ &\iff \underbrace{\mathrm{e}^{1/x}=0}_{\text{Condição impossível em } \mathbb{R}} \vee\ 1-\frac{1}{x}=0 \\ &\iff \frac{x-1}{x}=0 \\ &\iff \underbrace{x=1}_{\text{Condição impossível em } \mathbb{R}^-}. \end{aligned}$$

  Temos então $f'(x)=0 \iff x=0 \vee x=\mathrm{e}^{-1/2}$.
- **Quadro de estudo do comportamento da primeira derivada.**

	$-\infty$	0		$\mathrm{e}^{-1/2}$	$+\infty$
$x\left(2\ln\frac{1}{x}-1\right)\wedge x>0$			$+$	0	$-$
$\mathrm{e}^{1/x}\left(1-\frac{1}{x}\right)\wedge x<0$	$+$				
f'	$+$	0	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$		$\nearrow$	máx.local	$\searrow$

Da análise do quadro anterior resulta que a função f tem um máximo local $f\left(\mathrm{e}^{-1/2}\right)=\frac{1}{2\mathrm{e}}$ em $x=\mathrm{e}^{-1/2}$.

(d) Enuncie o Teorema de Lagrange e mostre que existe $c\in]1,2[$ tal que $f'(c)=-\ln 16$.

Indicações para a resolução:

Teorema de Lagrange: Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$. Então existe $c\in]a,b[$ tal que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Uma vez que a função f é contínua em $[1,2]$ e diferenciável em $]1,2[$, o Teorema de Lagrange garante que existe $c\in]1,2[$ tal que $f'(c)=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=f(2)-f(1)$.

Como $f(2)=4\ln\frac{1}{2}=-4\ln 2=-\ln(2^4)=-\ln 16$ e $f(1)=0$ vem $f'(c)=-\ln 16$, como se pretendia.

2. Sejam $b \in \mathbb{R}^+$ e f uma função contínua em $[0,b]$ e diferenciável em $]0,b[$ tal que $f(0) = f(b) = 0$.

   (a) Seja g a função definida por $g(x) = \mathrm{e}^x f(x)$. Mostre que existe $c \in]0,b[$ tal que $f'(c) = -f(c)$.

   Indicações para a resolução:
   Uma vez que:

   - a função g é contínua em $[0,b]$, já que é o produto de duas funções contínuas em $[0,b]$;
   - a função g é diferenciável em $]0,b[$, já que é o produto de duas funções diferenciáveis em $]0,b[$;
   - $g(0) = \mathrm{e}^0 f(0) = 1 \cdot 0 = 0$;
   - $g(b) = \mathrm{e}^b f(b) = \mathrm{e}^b \cdot 0 = 0$;

   o Teorema de Rolle garante que existe $c \in]0,b[$ tal que $g'(c) = 0$.
   Uma vez que
   $$g'(x) = \mathrm{e}^x f(x) + \mathrm{e}^x f'(x) = \mathrm{e}^x (f(x) + f'(x)) ,$$
   para todo o $x \in]0,b[$, temos
   $$\begin{aligned} g'(c) = 0 &\iff \mathrm{e}^c (f(c) + f'(c)) = 0 \\ &\iff \underbrace{\mathrm{e}^c = 0}_{\text{Condição impossível em } \mathbb{R}} \quad \vee\ f(c) + f'(c) = 0 \\ &\iff f'(c) = -f(c) . \end{aligned}$$

   (b) Enuncie o teorema que usou para responder à alínea anterior.

   Indicações para a resolução:
   Teorema de Rolle: Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$ tal que $f(a) = f(b)$. Então existe pelo menos um ponto $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$.