Universidade de Aveiro Departamento de Matemática

Classificação

ALGA — Agrupamento IV (ECT, EET, EI)

Exame de Recurso

1 de fevereiro de 2016 — Duração: **2h30**

Valores

Nome ______________________ N.° Mec. __________

Curso ______________________ N.° Folhas suplementares __________

[Declaro que desisto ______________________ (assinatura)]

Questão	1	2	3	4	5	6	7	8	total
Cotação	45	20	30	15	30	35	16	9	200
Classif.									

1. Esta primeira questão é constituída por 5 alíneas de escolha múltipla.

   Atribuem-se 9 pontos por cada resposta correta,
   0 pontos por cada resposta em branco e
   -3 pontos por cada resposta errada.

E \ C	0	1	2	3	4	5
0	00	09	18	27	36	45
1	-03	06	15	24	33	
2	-06	03	12	21		
3	-09	00	09			
4	-12	-03				
5	-15					

(Reservado à cotação)

   Cada alínea tem uma única opção correta que deve assinalar com uma $\times$ no ☐ correspondente.

   (a) Dadas as matrizes A e B ambas $n \times n$ tem-se

   ☐ $(A^T B^T)^T = AB$
   ☐ $(A^{-1}B)^{-1} = AB^{-1}$
   ☐ $A^T B^{-1} = B^{-1} A^T$
   ☐ $2A^T B^T = 2(BA)^T$

   (b) O subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $(1, -1, 2)$, $(1, 0, 1)$ e $(1, -2, 3)$ é:

   ☐ $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 2\}$
   ☐ $\mathbb{R}^3$
   ☐ $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z + y = x\}$
   ☐ o plano de equação $2x + 2y + 2z = 3$

   (c) Dada a matriz identidade I, uma matriz A, ambas 3×3, e um escalar qualquer $a \in \mathbb{R}$ tem-se

   ☐ $\det(A - aI) = 0$
   ☐ $\det(A - aI) = \det(A) - a$
   ☐ $\det(aI) = a^3$
   ☐ $\det(aA) = a \det(A)$

   (d) Considere em $\mathbb{R}^3$ os vetores $a = (0, 1, 1)$, $b = (1, 1, 0)$, $c = (1, -1, 0)$ e $d = (1, 2, 3)$.

   ☐ O subespaço gerado por a, b, c e d tem dimensão 4.
   ☐ $\{a, b, c, d\}$ é uma base de um subespaço $F \subseteq \mathbb{R}^3$.
   ☐ Os vetores a, b e c são linearmente independentes.
   ☐ Os vetores a e c formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

   (e) Considere o plano $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $X_1 = (1, 0, 1)$ e $X_2 = (0, 1, 0)$.

   ☐ A projeção ortogonal do vetor $X = (3, 1, 3)$ sobre o plano $\mathcal{P}$ é $(3, 1)$.
   ☐ A projeção ortogonal do vetor $X = (3, 1, 3)$ sobre o plano $\mathcal{P}$ é $(3, 1, 3)$.
   ☐ Uma base ortonormada de $\mathcal{P}$ é $\mathcal{B} = (X_1, X_2)$.
   ☐ A projeção ortogonal do vetor $X = (3, 1, 3)$ sobre o plano $\mathcal{P}$ é $(6, 1, 6)$.

Nos exercícios 2, 3, 4, 5 e 6 seguintes considere as matrizes:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&1\\3&2&3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&3\\0&0&0\end{bmatrix},\quad C=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&-1&1&1\\a&0&1&b\end{array}\right],\quad D=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&-2&0&0\\0&0&1-a&b-a\end{array}\right].$$

A matriz B é uma forma escalonada por linhas reduzida da matriz A.
A matriz D é uma forma escalonada por linhas da matriz $C=[M|Y]$, com $Y=(1,1,b)\in\mathbb{R}^3$.
Nas matrizes C, D e M e no vetor Y, $a,b\in\mathbb{R}$ são parâmetros.

---

2. Considere a matriz A.

   (a) Uma base para o espaço das colunas de A, $\mathcal{C}(A)$, é

   (b) O espaço nulo de A, $\mathcal{N}(A)$, é

   (c) Indique $\dim\mathcal{C}(A)=$ ☐ e $\dim\mathcal{N}(A)=$ ☐.

---

3. Considere o plano de equação geral $ax+z=b$, com $a,b\in\mathbb{R}$, e a reta de equações cartesianas $\begin{cases}x+y+z=1\\x-y+z=1\end{cases}$.

   Note que a matriz D é uma forma escalonada por linhas da matriz C.

   (a) Os valores de a e b para os quais a reta e o plano são estritamente concorrentes são:

   (b) Os valores de a e b para os quais a reta e o plano são estritamente paralelos são:

   (c) Indique uma equação da reta que passa no ponto $Q=(4,3,1)$ e é ortogonal ao plano $\mathcal{P}$ de equação $x+z=3$.

   (d) Calcule $dist(Q,\mathcal{P})$, a distância do ponto $Q=(4,3,1)$ ao plano $\mathcal{P}$ de equação $x+z=3$.

---

4. A matriz B^TB é invertível? Justifique detalhadamente e sem efetuar o produto das matrizes.

5. Considere a matriz B. Os valores próprios da matriz B são 0 e 1.

   (a) Justifique que o espaço nulo de B, $\mathcal{N}(B)$, é subespaço próprio de B.

   (b) Indique **o subespaço próprio** associado ao valor próprio 1:

   (c) Indique o conjunto de **vetores próprios** associados ao valor próprio 0:

   (d) A matriz B é diagonalizável? Justifique.

   (e) Determine, se possível, a matriz D diagonal e a matriz P diagonalizante de A tais que $P^{-1}AP = D$:

$$D = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

---

6. Considere a matriz A, dada anteriormente, e a transformação linear $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\phi(X) = AX$ para todos os $X \in \mathbb{R}^3$.

   (a) Determine a imagem de ϕ, $\mathrm{im}(\phi)$, e uma sua base.

   (b) ϕ é sobrejetiva? Justifique.

   (c) Indique o núcleo de ϕ, $\ker(\phi)$, e uma sua base.

   (d) ϕ é injetiva? Justifique.

(e) Encontre a matriz G representativa da transformação ϕ relativamente à base $\mathcal{S} = \big((1,1,0),(1,1,1),(1,0,0)\big)$.

(f) Usando a matriz G (obtida na alínea anterior), calcule $\phi(1,1,1)$.

---

7. Usando o método de eliminação de Gauss, ou de Gauss-Jordan, e indicando todas as passagens, resolva o sistema de equações lineares $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 5 \end{cases}$. Resolva o sistema numa folha suplementar, mas explicite, no espaço reservado, o seu conjunto de soluções.

O conjunto de soluções do sistema é ☐

---

8. Identifique, escrevendo A, B e C na caixa correspondente, os conjuntos definidos pelas seguintes equações.

A : $x^2+2x = 2y^2+4y+z^2$ em $\mathbb{R}^3$; B : $x^2-6x = -y^2-z^2$ em $\mathbb{R}^3$; C : $x^2-4x = y^2+4y+z$ em $\mathbb{R}^3$.

☐ elipse ☐ hipérbole ☐ parábola ☐ cónica degenerada ☐ quádrica degenerada

☐ elipsóide hipérbolóide de ☐ 1 ou ☐ 2 folhas parabolóide ☐ elíptico ou ☐ hiperbólico