Introdução aos Sistemas Digitais
Álgebra de Boole

Augusto Silva

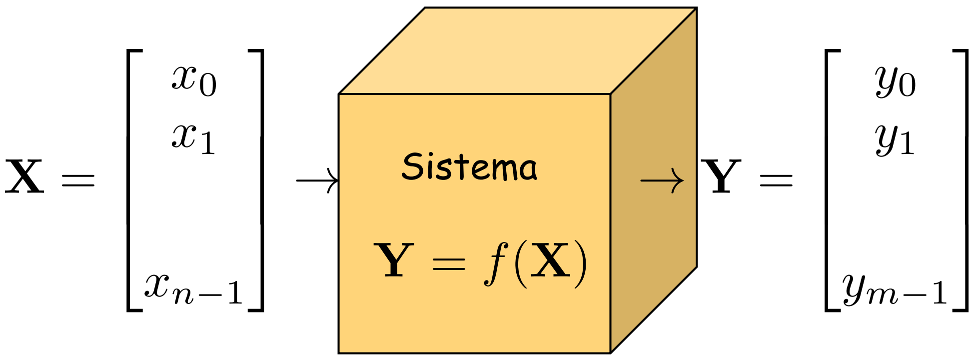
Department de Electrónica, Telecomunicações e Informática
Universidade de Aveiro

augusto.silva@ua.pt

Resumo

Sistema Digital

- Entidade que processa um conjunto finito de entradas x_i, $i = 0, \ldots, n-1$ para produzir um conjunto finito de saídas y_k, $k = 0, \ldots, m-1$
- Num contexto binário, $x_i, y_k \in \{0, 1\}$



Motivação

- Um sistema digital binário processa informação na forma de
  - Constantes: $0, 1$; **vector booleano constante**
  - Variáveis independentes (entradas), $x_0, \ldots, x_{n-1}$; **vector booleano de entrada**
- Os resultados do processamento surgem na forma de variáveis dependentes (saídas) ou funções binárias: $y_0, \ldots, y_{m-1}$; **vector booleano de saída**
- É necessário um instrumento matemático que permita descrever formalmente as relações funcionais entre as variáveis dependentes e as variáveis independentes
- Esse instrumento é uma entidade matemática designada por Álgebra de Boole a 2 valores (binária).

Definição

Definição

Uma álgebra de Boole é uma estrutura matemática baseada num conjunto $\{\mathbf{B}, +, .\}$, satisfazendo o seguinte conjunto de postulados (Huntington, 1904):

1. Fecho
2. Comutatividade
3. Elementos Neutros
4. Distributividade
5. Complementaridade
6. Cardinalidade

Postulados

1. Fecho: Ambas as operações são fechadas em $\mathbf{B}$

$$\forall b_1, b_2 \in \mathbf{B}, \begin{cases} b_1 + b_2 & \in \mathbf{B} \\ b_1 . b_2 & \in \mathbf{B} \end{cases}$$

2. Comutatividade

$$\forall b_1, b_2 \in \mathbf{B}, \begin{cases} b_1 + b_2 & = & b_2 + b_1 \\ b_1 . b_2 & = & b_2 . b_1 \end{cases}$$

3. Elementos Neutros

$$\exists b_0 \forall b \in \mathbf{B} : b + b_0 = b$$
$$\exists b_1 \forall b \in \mathbf{B} : b . b_1 = b$$

Postulados

1. Distributividade

$$\forall b_1, b_2, b_3 \in \mathbf{B} \begin{cases} b_1 + b_2.b_3 & = & (b_1 + b_2).(b_1 + b_3) \\ b_1.(b_2 + b_3) & = & b_1.b_2 + b_1.b_3 \end{cases}$$

2. Complementaridade

$$\forall b \exists b', \in \mathbf{B} \begin{cases} b + b' & = b_1 \\ b.b' & = b_0 \end{cases}$$

3. Cardinalidade

$$\#\mathbf{B} \geq 2 \rightarrow \forall b \in \mathbf{B}\ \exists a \in \mathbf{B} : a \neq b$$

Valores, Operadores, Expressões

- Num contexto binário temos naturalmente o conjunto de valores definido por $\mathbf{B} = \{0, 1\}$.
- Circuitos electrónicos elementares funcionando em modo comutado ("switched") implementam os operadores lógicos elementares de acordo com as regras usuais da lógica matemática

AND	OR	NOT
0.0 = 0	0+0 = 0	0'= 1
0.1 = 0	0+1 = 1	1'= 0
1.0 = 0	1+0 = 1	
1.1 = 1	1+1 = 1	

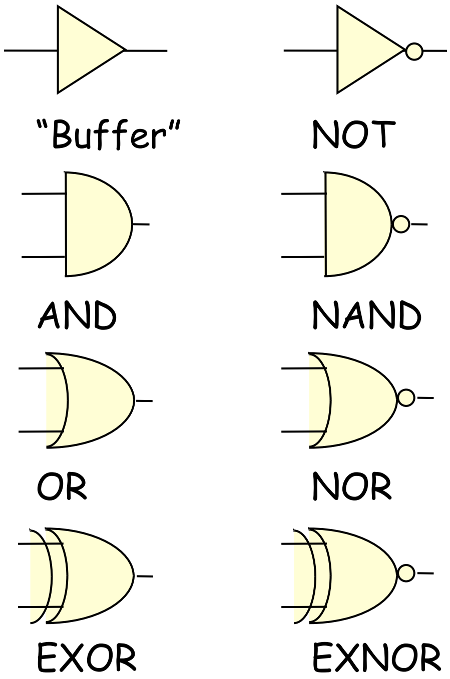
- Expressões: conjunto de variáveis e/ou constantes associadas por operadores, eg.

$$x + y.(u.v' + z)$$

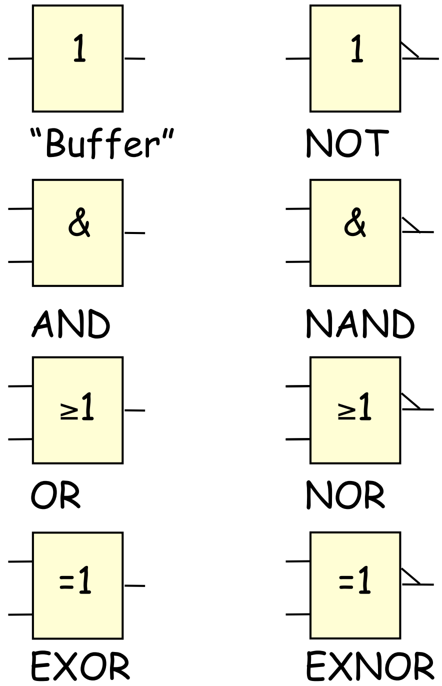
Nota: São assumidas as habituais regras de precedência

Representações gráficas

- Notação tradicional



- Notação IEEE/IEC Std. 671



Exercícios

Considere a expressão booleana $x + y.(u.v' + z)$

a) Desenhe o circuito lógico correspondente à expressão usando a notação standard

b) Repita a) usando a notação IEEE

Dualidade

Princípio da Dualidade

- Toda a expressão formada pelas variáveis $a, b, c, \dots$ mais os elementos 0 e 1 e que envolva as operações de soma lógica, de produto lógico e de complementação possui uma expressão **dual** que se obtém trocando cada soma por um produto lógico e cada produto por uma soma lógica, e ainda os "0"s por "1"s e os "1"s por "0"s.
- Exemplos

$$(a + a.b)^D = a.(a + b)$$

$$(a.1' + a'.1)^D = (a + 0').(a + 0')$$

- O próprio postulado da distributividade surge em forma dual

$$(a + b.c) = (a + b).(b + c)$$

$$(a + b.c)^D = a.(b + c) = ab + ac$$

Teoremas

- Asserções acerca da validade da equivalência expressões booleanas
- Demonstráveis a partir de postulados e/ou outros teoremas
- Demonstráveis por indução completa
  - Verificação da asserção para todos os casos possíveis
  - Elaboração duma tabela de verdade compatível com a asserção para todas as combinações possíveis das variáveis independentes
  - Dimensão da tabela com n variáveis independentes e m variáveis dependentes $= m \times 2^n$
- O princípio da dualidade garante que uma vez demonstrada a validade dum teorema fica demonstrada a validade do respectivo dual.

Teoremas

Unicidade do elemento neutro

No conjunto $\mathbf{B}$ há apenas um e um só elemento b_0 tal que $b + b_0 = b$ e apenas um e um só elemento b_1 tal que $b.b_1 = b$.

Dem.

Admita-se por hipótese que há 2 elementos neutros diferentes b_{0a} e b_{0b} para adição ie. $b + b_{0a} = b + b_{0b} = b$. Neste caso

$$\begin{aligned} b_{0a} + b_{0b} &= b_{0a} \\ b_{0b} + b_{0a} &= b_{0b} \\ b_{0a} + b_{0b} &= b_{0b} \end{aligned}$$

por redução ao absurdo tem-se necessariamente que $b_{0a} = b_{0b}$.

- Identifique os postulados envolvidos na demonstração anterior.
- Recorra ao princípio da dualidade e demonstre igualmente a unicidade do elemento neutro do produto.

Teoremas

Idempotência

$\forall b \in \mathbf{B},\ b + b = b,\ b.b = b$

Dem.

- Comece por considerar que $b + b = (b + b).b_1 = (b + b)(b + b')$.
- Complete a demonstração recorrendo aos postulados adequados.
- Aplique o princípio da dualidade e verifique a idempotência do produto

Elemento absorvente

$\forall b \in \mathbf{B},\ b + b_1 = b_1,\ b.b_0 = b_0$

Dem.

- Comece por considerar que $b + b_1 = b + (b + b') = \ldots$.
- Complete agora a demonstração.
- Aplique o princípio da dualidade e verifique também que $b.b_0 = b_0$

Teoremas

Absorção

$\forall x, y \in \mathbf{B},\ x + xy = x$

Dem.

- $x + xy = x.b_1 + xy = \ldots$
- Complete a demonstração recorrendo aos postulados adequados.
- Aplique o princípio da dualidade e verifique também que $x.(x + y) = x$

Simplificação

$\forall x, y \in \mathbf{B},\ x + x'y = x + y$

Dem.

- $x + x'y = (x + x').(x + y) = \ldots$
- Complete a demonstração recorrendo aos postulados adequados.
- Demonstre a versão dual do teorema

Teoremas

Adjacência

$\forall x, y \in \mathbf{B},\ xy + xy' = x$

Dem.

- $xy + xy' = x.(y + y') = \ldots$
- Complete a demonstração recorrendo aos postulados adequados.
- Aplique o princípio da dualidade e verifique também que $(x + y)(x + y') = x$

Involução

$\forall x \in \mathbf{B},\ (x')' = x$

Dem.

- Por indução completa (Tabela de Verdade)
- Algebricamente: prove que se $(x')' = x$ então tem que se verificar $x.x'' = x$ e $x + x'' = x$

Teoremas

Propriedade associativa

$\forall x, y, z \in \mathbf{B},\ \ x(yz) = (xy)z$

Dem.

- Por indução completa

x	**y**	**z**	x.y	(xy)z	yz	x(yz)
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

- Por dualidade

$$x(yz)^D = (xy)z^D$$

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

Teoremas

Leis de De Morgan

$\forall x, y \in \mathbf{B},\ (x + y)' = x'.y',\ (xy)' = (x' + y')$

Dem.

$$\begin{aligned}(x+y)(x'.y') &= x.x'.y' + y.x'.y' \\ &= (x.x').y' + x'.(y.y') \\ &= b_0 + b_0 = b_0\end{aligned}$$

- Por dualidade $(xy)' = (x' + y')$
- Generalização

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} x_i\right)' = \prod_{i=0}^{n-1} (x_i)'$$

$$\left(\prod_{i=0}^{n-1} x_i\right)' = \sum_{i=0}^{n-1} (x_i)'$$

Exercícios

Determinar pelas leis de De Morgan

a) $(x.y' + x'.y)'$

b) $(x.y + z(x + y') + z.y)'$

c) $([(b' + c)'.a] + (c'.d'))'$

Teoremas

Consenso

$\forall x, y, z \in \mathbf{B},\ x.y + x'.z + y.z = x.y + x'.z$

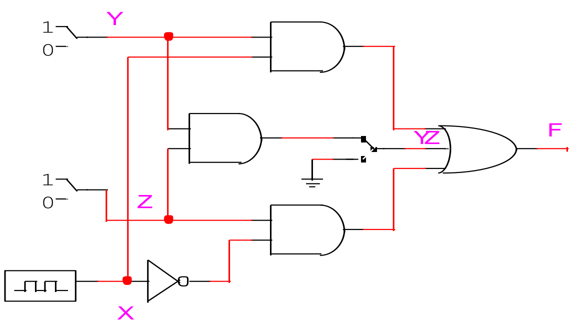
Dem.

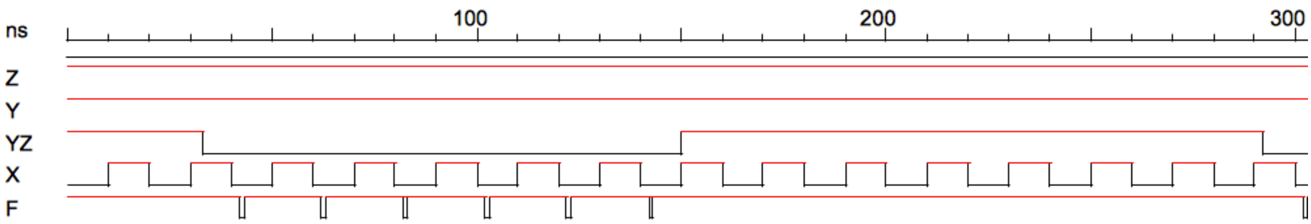
$$\begin{aligned} x.y + x'.z + y.z &= x.y + x'z + y.z(x + x') \\ &= x.y + x'z + y.z.x + y.z.x' \\ &= x.y(b_1 + z) + x'z(b_1 + y) \\ &= x.y + x'.z \end{aligned}$$

- Enuncie a versão dual do teorema do consenso.
- Simplifique
  a) $x.y.z + x'.w + y'.w + z.w$
  b) $(x + y)z + x'.y'.w + z.w$
  c) $(x + y + v + w').(v + x).(v' + y + x + w')$

Consenso na prática

- Correcção do "hazard" com a introdução do termo do consenso





O operador XOR

- $\oplus \equiv$ XOR $\equiv$ "ou" exclusivo.
- $x \oplus y = x.y' + x'.y$
- Deduza e comente a tabela de verdade

Exercícios

Demonstre algebricamente que

a) $x \oplus y = y \oplus x$

b) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$

c) $x \oplus 0 = x$, $x \oplus 1 = x'$

d) $(x \oplus y)' = x \odot y = x.y + x'.y'$

e) $x \oplus y') = (x' \oplus y) = (x \oplus y)'$

f) $(x \oplus y)^D = (x \oplus y)'$

g) $x \oplus x'y = x + y$

O operador Implicação

- Definição: $x \to y = x' + y$
- Se $x = 1$ então y determina o valor da expressão.
- Deduza e comente a tabela de verdade

Exercícios

Determine

a) $(xy) \to x$

b) $(x \to (x' \to y'))'$

Mostre que

a) $xy + x'z = (x+z)(x \to y)$

Conjuntos completos de operadores

- Conjunto de operadores a partir dos quais se pode representar toda e qualquer relação booleana
- Exemplos
  - {+,.,'}
  - {+,'}
  - {.,'}
  - NAND: $a.b + c.d = (a.b + c.d)'' = ((a.b)'.(c.d)')'$
  - NOR: $(a+b).(c+d) = [(a+b).(c+d)]'' = ((a+b)' + (c+d)')'$

Exercício

Exprimir $y = x_1.x_2' + x_3 + x_1'.x_3'.x_4 + x_2.x_3'.x_4$ na forma mais simples. Apresente o resultado recorrendo apenas ao operador NAND.

Exercícios

a) Mostre que é completo o conjunto $C = \{M(x, y, z), ', 0\}$ em que $M(x, y, z)$ é a função maioria definida por

$$M(x, y, z) = x.y + x.z + y.z$$

Sugestão: Mostre como a partir do conjunto C se implementam as operações fundamentais.

b) Mostre que é completo o conjunto $\{\oplus, ., 1\}$.

c) Com os elementos do conjunto $\{\oplus, ., 1\}$ representar $f(x, y, z) = (x + y.z')'$

d) Com os elementos do conjunto $\{\oplus, ., 1\}$ representar $f(x, y, z, w) = (x + y'.z).(z' + w')$

Funções Booleanas

- Uma função booleana é uma regra (correspondência) que associa um elemento do conjunto $B = \{0, 1\}$ a cada uma das 2^n combinações possíveis que as n variáveis independentes podem assumir.
- Tanto o domínio como o contradomínio são conjuntos enumeráveis e finitos de vectores binários

Exercícios

Mostre que para um sistema de n entradas e m saídas o número de funções booleanas distintas é $NFB = 2^{m.2^n}$. Por exemplo para $n = 4,\ m = 4$ temos

$$\begin{aligned} NFB &= 2^{4.2^4} \\ &= 2^{64} \\ &= 1.844674407370955 \times 10^{19}!!! \end{aligned}$$

tabelas de verdade distintas

Funções Complementares

- Generalização das Leis de De Morgan

$$f(x_0,\ldots.x_{n-1},0,1,+,.)' = f(x'_0,\ldots.x'_{n-1},1,0,.,+)$$

- Exemplo

$$f(x,y,z) = x.y(z'+y+x') + z.x(y+z')$$
$$f(x,y,z)' == \left[(x'+y'+z.y'x)\right].(z'+x+y'.z)$$

Exercícios

Complemente directamente e verifique o resultado com as tabelas de verdade

a) $f(x,y,z) = x'.(y'+z').(x+y+z')$

b) $f(x,y,z) = (x+y'.z').(y+x'.z').(z+x'.y')$

c) $f(x,y,z,w) = w' + (x'+y+y'z')(x+y'z)$

Funções Duais

- Aplicação do princípio da dualidade a funções

$$f(x_0,\ldots.x_{n-1},0,1,+,.)^D = f(x_0,\ldots.x_{n-1},1,0,.,+)$$

- Exemplo

$$f(x,y,z) = x.y(z'+y+x') + z.x(y+z')$$
$$f(x,y,z)^D = \left[(x+y+z'.y.x')\right].(z+x'+y.z')$$

Exercícios

Determine as funções duais de

a) $f(x,y,z) = x'.(y'+z').(x+y+z')$

b) $f(x,y,z) = (x+y'.z').(y+x'.z').(z+x'.y')$

c) $f(x,y,z,w) = w' + (x'+y+y'z')(x+y'z)$

Dualidade e Complementaridade

- Há uma relação próxima entre dualidade e complementaridade

$$f(x_0, \ldots . x_{n-1}, 0, 1, +, .)' = f(x_0', \ldots . x_{n-1}', 0, 1, +, .)^D$$

- Exemplo

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x.y' + x'.y + y'.z \\ f(x', y', z') &= x'.y + x.y' + y.z' \\ f(x', y', z')^D &= (x' + y).(x + y').(y + z') \\ &= f(x, y, z)' \end{aligned}$$

Exercícios

a) Para $f(x, y, z) = x'.(y' + z').(x + y + z')$, determine f' recorrendo à dualidade.

b) Por vezes acontece que $f = f^D$ e diz-se que f é auto-dual. Comprove que é o caso de $f(x, y, z) = xy + z(x + y)$. Verifique a simetria da tabela de verdade.

Representação de funções booleanas

- Representação tabular de funções booleanas é única. Uma dada função f tem uma única tabela de verdade
- Uma dada função booleana admite múltiplas representações algébricas
- Uma representação algébrica inclui frequentemente termos redundantes
- Eficiência na implementação obriga a procedimentos de simplificação

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x.y.z + x.y.z' + x.y'.z + x.y'.z' + x'.y.z \\ &= x + y.z \end{aligned}$$

Tabelas de verdade

- Representação exaustiva duma função boolenana

x_{n-1}	x_{n-2}	$\dots$	x_0	$f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0)$	$f_i \in \{0,1\}$
0	0	$\dots$	0	$f(0,0,\dots,0)$	f_0
0	0	$\dots$	1	$f(0,0,\dots,1)$	f_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	1	1	1	$f(1,1,\dots,1)$	f_{2^n-1}

- A tabela de verdade está próxima da especificação dum problema de síntese
- Da análise duma expressão algébrica (eg. $x + y.z$) obtém-se a tabela de verdade. E o contrário?
- Como se pode passar duma representação tabular para uma representação algébrica?

Expansão de funções booleanas

Teorema de Shannon

Para qualquer função booleana $f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0)$ tem-se a seguinte expansão em soma de produtos:

$$
\begin{aligned}
f(\dots) &= x_0'.f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, 0) + x_0.f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, 1) \\
f(\dots) &= x_1'.x_0'.f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, 0, 0) + x_1'.x_0.f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, 0, 1) \\
&\quad + x_1.x_0'.f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, 1, 0) + x_1.x_0.f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, 1, 1) \\
&\ \vdots \\
f(\dots) &= x_{n-1}'.x_{n-2}' \dots x_0'.f(0,0,\dots,0) + \dots + x_{n-1}'.x_{n-2}' \dots x_0.f(0,0,\dots,1) \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + x_{n-1}'.x_{n-2} \dots x_0.f(0,1,\dots,1) + \dots + x_{n-1}.x_{n-2} \dots x_0.f(1,1,\dots,1)
\end{aligned}
$$

Nota 1: Demonstração por indução matemática

Nota 2: Uma demonstração dual conduz a uma expansão em produtos de somas

Formas Canónicas

Termo mínimo

Define-se termo mínimo ou produto canónico de ordem k, m_k o produto lógico das n variáveis booleanas independentes, em que cada uma delas aparece uma e uma só vez, com o seu próprio valor ou complementada consoante toma valores 1 ou 0, respectivamente, na k-ésima combinação das variáveis independentes.

Termo máximo

Define-se termo máximo ou soma canónica de ordem k, M_k a soma lógica das n variáveis booleanas independentes, em que cada uma delas aparece uma e uma só vez, com o seu próprio valor ou complementada consoante toma valores 0 ou 1, respectivamente, na k-ésima combinação das variáveis independentes.

Soma de produtos

Partindo do teorema de Shannon e recorrendo às definições de termos canónicos temos que:

Soma de Produtos Canónicos (SOP)

1ª Forma Canónica ou Soma de produtos canónicos (SOP) ou Forma Disjuntiva Normal

$$f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0) = \sum_{k=0}^{2^n-1} m_k . f_k$$

- Na prática: Identificar os "1" na saída da tabela de verdade ou seja ver quais os $f_k = 1$ e somar os respectivos termos mínimos m_k.

$$f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0) = \sum_{k=0}^{2^n-1} m_k$$

Produto de Somas

Partindo da versão dual do teorema de Shannon e recorrendo às definições de termos canónicos temos que:

Produto Somas Canónicas (POS)

2ª Forma Canónica ou Produto de somas canónicas (POS) ou Forma Conjuntiva Normal

$$f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0) = \prod_{k=0}^{2^n-1} (M_k + f_k)$$

- Na prática: Identificar os "0" na saída da tabela de verdade ou seja ver quais os $f_k = 0$ e multiplicar os respectivos termos máximos M_k.

$$f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0) = \prod_{k=0}^{2^n-1} M_k$$

Formas Canónicas alternativas

- Partindo da 1ª forma canónica e após dupla negação:

3ª Forma Canónica: Implementação em NAND

$$\begin{aligned} f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0) &= f(\ldots)'' \\ &= \left(\sum_{k=0}^{2^n-1} m_k.f_k\right)'' \\ &= \left(\prod_{k=0}^{2^n-1} m'_k\right)' \end{aligned}$$

Formas Canónicas alternativas

- Partindo da 2ª forma canónica e após dupla negação:

4ª Forma Canónica: Implementação em NAND

$$
\begin{aligned}
f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0) &= f(\ldots)'' \\
&= \left(\prod_{k=0}^{2^n-1} (M_k + f_k) \right)'' \\
&= \left(\sum_{k=0}^{2^n-1} M_k' \right)'
\end{aligned}
$$

Relações de Complementaridade

- Admitindo uma especificação completa da tabela de verdade a lista dos produtos canónicos implica a lista das somas canónicas.
- Exemplo:

$$f(x_2, x_1, x_0) = \sum m(3, 4, 5, 7) = \prod M(0, 1, 2, 6)$$

- Por outro lado se, por exemplo, $f(x_2, x_1, x_0) = \sum m(3, 4, 5, 7)$:

$$f(x_2, x_1, x_0)' = \sum m(0, 1, 2, 6) = \prod M(3, 4, 5, 7)$$

Exercício

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

a) Determine todas as formas canónicas de $f(x, y, z)$.

b) Comente a simetria da tabela

c) Verifique que, neste caso, $f = f^D$

Entradas irrelevantes

- Pode acontecer que nem sempre todas as combinações de entradas são passíveis de ocorrer.
- Pode acontecer que não interesse especificar a saída para várias combinações de entrada
- As entradas para as quais não se especifica à partida a saída dizem-se irrelevantes
- As combinações irrelevantes podem contribuir para a minimização da(s) forma(s) booleana(s) (ver adiante)
- As funções booleanas assim definidas dizem-se incompletamente especificadas

Entradas irrelevantes

- Exemplo: Conversor BCD_{8421} para BCD Excesso-3
- Números codificados em BCD_{8421} são incrementados de 3 unidades

a	b	c	d	x	y	w	z
0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	0				
1	0	1	1				
1	1	0	0				
1	1	0	1				
1	1	1	0				
1	1	1	1				

D C

$$\mathbf{x}(a,b,c,d) = \sum m(\qquad)$$
$$= \sum m(5,6,7,8,9)$$

$$\mathbf{x}(a,b,c,d) = \sum m(\qquad) + m(\mathrm{DC}\quad)$$
$$= \sum m(5,6,7,8,9) + m_{\phi}(10,11,12,13,14,15)$$

$$\mathbf{y}(a,b,c,d) = \ldots$$
$$\mathbf{w}(a,b,c,d) = \ldots$$
$$\mathbf{z}(a,b,c,d) = \ldots$$

Bibliografia

- J. Wakerly, "Digital Design Principles & Practices", Cap 4.
- Z. Kohavi, Niraj K. Jha, "Switching and Finite Automata Theory", Cambridge Univ. Press, 2009, cap 3
- C. Sêrro, "Sistemas Digitais: fundamentos algébricos", IST Press, 2003, Cap 2