Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I — Primeiro Mini-Teste (9/11/2006)

Resolução

1. Considere a função f definida por $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-1}}$.

   (a) Determine o domínio de f, D_f.
   Indicações para a resolução:
   Temos
   $$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : x+1 \geq 0 \wedge x^2 - 1 \neq 0\right\} \ .$$
   Uma vez que:
   - $x+1 \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq -1$;
   - $x^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = 1 \vee x = -1$;

   temos
   $$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq -1\} =]-1, +\infty[\setminus \{1\} \ .$$

   (b) Determine, caso exista, $x \in D_f$ tal que $f(x) = 1$.
   Indicações para a resolução:
   Uma vez que se tem $\mathrm{e}^x = 1 \Longleftrightarrow x = 0$ temos
   $$\begin{aligned} f(x) = 1 &\Longleftrightarrow \frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-1} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \sqrt{x+1} - 1 = 0 \wedge x \in]-1, +\infty[\setminus \{1\} \\ &\Longleftrightarrow \sqrt{x+1} = 1 \wedge x \in]-1, +\infty[\setminus \{1\} \\ &\Longleftrightarrow x+1 = 1 \wedge x \in]-1, +\infty[\setminus \{1\} \\ &\Longleftrightarrow x = 0 \wedge x \in]-1, +\infty[\setminus \{1\} \\ &\Longleftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$
   Então a função f tem um único zero $x = 0$.

   (c) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   Indicações para a resolução:
   Uma vez que
   $$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-1} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$
   temos
   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{\frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-1}} = 1 \ .$$

   (d) Indique, para cada $k \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (k\, f(x))$.
   Indicações para a resolução:
   Para cada $k \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (k\, f(x)) = k \cdot 1 = k$.

2. Considere a função f definida por $f(x) = x\ln(x+1)$. Utilizando o Teorema de Bolzano, mostre que existe pelo menos um ponto $a \in]1, 2[$ tal que $f(a) = \ln 3$.

   Indicações para a resolução:

   Uma vez que:

   - a função f é contínua no intervalo $[1, 2]$;
   - $f(1) = \ln 2$;
   - $f(2) = 2\ln 3$;
   - $\ln 2 < \ln 3 < 2\ln 3$;

   o Teorema de Bolzano permite concluir que existe $a \in]1, 2[$ tal que $f(a) = \ln 3$.

3. Caracterize a função inversa da função g definida por $g(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2}{3}\operatorname{arctg}(1-x)$.

   Indicações para a resolução:

   Por definição de inversa de uma função temos que $D_{g^{-1}} = CD_g$ e $CD_{g^{-1}} = D_g$.

   - *Determinação do contradomínio de* g^{-1}
     Como a função arcotangente tem domínio $\mathbb{R}$, temos $D_g = \mathbb{R}$ e, portanto,
     $$CD_{g^{-1}} = \mathbb{R}\ .$$
   - *Determinação do domínio de* g^{-1}
     Para todo o $x \in D_g$ temos
     $$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}(1-x) < \frac{\pi}{2} &\iff -\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) > -\frac{2}{3}\operatorname{arctg}(1-x) > -\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{2} \\ &\iff -\frac{\pi}{3} < -\frac{2}{3}\operatorname{arctg}(1-x) < \frac{\pi}{3} \\ &\iff \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\operatorname{arctg}(1-x) < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \\ &\iff \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\operatorname{arctg}(1-x) < \frac{5\pi}{6} \end{aligned}$$
     pelo que
     $$D_{g^{-1}} = \left]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[\ .$$
   - *Determinação da expressão analítica que define* g^{-1}
     $$\begin{aligned} y = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\operatorname{arctg}(1-x) &\iff \frac{2}{3}\operatorname{arctg}(1-x) = \frac{\pi}{2} - y \\ &\iff \operatorname{arctg}(1-x) = \frac{3\pi}{4} - \frac{3}{2}y \\ &\iff 1 - x = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{3}{2}y\right) \\ &\iff x = 1 - \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{3}{2}y\right) \end{aligned}$$
     Então, para todo o $x \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[$, $\ g^{-1}(x) = 1 - \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{3}{2}x\right)$.

Logo g^{-1} é a função de contradomínio $\mathbb{R}$ definida por

$$\begin{array}{rccl} g^{-1}: & \left]\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 1 - \operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{3}{2}x\right) \end{array}$$

4. Sejam f e g duas funções reais de variável real tais que $g \circ f$ está definida e o seu domínio coincide com o domínio de f. Mostre que se f não é injectiva, então $g \circ f$ não é injectiva.

   Indicações para a resolução:

   Por hipótese existem $x_1, x_2 \in D_f$ tais que $x_1 \neq x_2$ e

   $$f(x_1) = f(x_2)\ . \tag{1}$$

   Como o domínio da composta $g \circ f$ coincide com o domínio de f temos que $f(x_1), f(x_2) \in D_g$ e, da igualdade (1), resulta que $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, ou seja, por definição de composta,

   $$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)\ .$$

   Provámos então que existem $x_1, x_2 \in D_{g \circ f} = D_f$ tais que $x_1 \neq x_2$ e $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$, o que garante que $g \circ f$ não é injectiva.