# Cálculo II, 20116-2017

M. Manuela Rodrigues

Departmento de Matemática, Universidade de Aveiro

## Motivação

Vamos agora tratar de um dos tópicos da Matemática mais usados na resolução de certos problemas de engenharia e de ciências (incluindo as ciências sociais).

Então como usamos equações diferenciais em ciências e engenharia?

- Temos um problema da vida real que pretendemos resolver.
- Introduzimos algumas hipóteses e construímos um modelo matemático. A construção de modelos, isto é, a representação de um sistema ou fenómeno com o auxílio da matemática é uma ferramenta importante para o estudo de um dado problema.
- Um modelo matemático pode ser entendido por um conjunto de símbolos e relações que representam uma situação ou um problema real.
- Depois aplicamos a matemática para obter algum tipo de solução.
- Teremos de interpretar os resultados e descobrir o que a solução matemática diz sobre o problema da real considerado.

Aprender como formular um modelo matemático e como interpretar os resultados é o que as classes da física e da engenharia fazem. Neste capítulo vamos concentrar-nos na análise matemática.

Vamos começar por considerar um exemplo simples da vida real para obtermos alguma intuição e motivação do que estamos a fazer.

## Motivação: exemplo

Por exemplo, a segunda lei do movimento de Newton afirma que aceleração $a$ de um corpo de massa $m$ é proporcional à força total que atua sobre o corpo. Pode ser modelada pela equação algébrica:

$$F = ma$$

Consideremos agora um modelo físico em que pretendemos estudar o movimento de um corpo de massa $m$ colocado na extremidade de uma mola vertical. A Lei de Hooke diz que se a mola é esticada ou comprimida em $x$ unidades a partir do seu tamanho natural então ela exerce uma força, força elástica, que é proporcional a $x$:

$$F_{el} = -kx,$$

onde k é uma constante positiva que se designa por constante da mola.
Se ignorarmos qualquer força externa de resistência então pela a segunda lei de Newton temos que

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

Esta equação é um modelo para o movimento de uma mola.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{1}$$

- Dizemos que se trata de uma equação diferencial ordinária. Como envolve derivadas de segunda ordem diremos que se trata de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem.
- Resolver uma equação diferencial é procurar uma função, neste caso, $x = x(t)$, tal que a segunda derivada seja proporcional mas de sinal oposto à função.
- Conhecemos alguma função real de variável real com essa propriedade? É claro que sim! Sabemos que $(\sin t)'' = -\sin t$ e que $(\cos t)'' = -\cos t$.
- Será que não existem outras funções diferentes destas com essa propriedade?

  Iremos mostrar que todas as soluções da equação (1) se escrevem como combinação linear de certas funções seno e cosseno, o que não é surpreendente pois sabemos que o esperado é que a mola oscile em torno da sua posição de equilíbrio e portanto é natural que a solução envolva aquelas funções.

## Motivação: exemplo

Uma das equações básicas usadas em circuitos elétricos é

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

(lei de Kirchhoff) onde $L$ e $R$ são constantes (representando a indutância e a resistência, respetivamente), $I(t)$ a intensidade da corrente (no tempo t) e $E(t)$ a voltagem.

## Definições e terminologia

**Definição (equação diferencial ordinária)**

Chama-se equação diferencial ordinária (EDO) de ordem $n$ ($n \in \mathbb{N}$), a uma equação do tipo

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{2}$$

onde $y$ é função (real) de $x$.

Diz-se que uma EDO está na forma normal quando aparece explicitada em relação à derivada de maior ordem, i.e.,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{3}$$

**Exemplos:**

## Solução de uma EDO

**Definição (solução de uma EDO)**

Chama-se solução da equação diferencial (2), num intervalo $I$, a toda a função $\varphi : I \to \mathbb{R}$ com derivadas finitas até à ordem $n$ e tal que

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$$

**Exemplo:** As funções $\varphi_1(x) = \sin(x)$ e $\varphi_2(x) = \cos(x) - \sin(x)$ são duas soluções (em $\mathbb{R}$) da equação diferencial $y'' + y = 0$.

**Exemplo:** A relação $ye^y = x$ define implicitamente uma solução da equação diferencial

$$y'\left(1 - \ln\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \frac{y}{x}, \quad x > 0.$$

## Soluções de equações diferenciais da forma $y^{(n)} = f(x)$

Seja

$$y' = f(x), \quad (f \text{ é uma função contínua})\ .$$

O conjunto de soluções desta equação, num intervalo $I$, é a família de todas as primitivas da função $f$ nesse intervalo:

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C,\ x \in I,$$

onde $F$ denota uma primitiva de $f$ e $C$ representa uma constante real arbitrária. Em geral, as equações diferenciais da forma

$$y^{(n)} = f(x)$$

resolvem-se através de $n$ integrações sucessivas e obtemos uma família de soluções envolvendo $n$ constantes reais arbitrárias.
Em geral, resolver (ou integrar) uma equação diferencial de ordem $n$ consiste em determinar uma família de soluções que dependa de $n$ parâmetros reais arbitrários.

- A uma tal família, obtida através de técnicas de integração adequadas, chamamos integral geral da equação diferencial.
- Uma solução particular (ou integral particular ) é uma solução que se obtém do integral geral por concretização dos parâmetros.

  No entanto, poderão existir soluções que não se conseguem obter desta forma.
- Uma tal solução designa-se por solução singular.
- Ao conjunto de todas as soluções de uma equação diferencial chamamos solução geral.

**Exemplo:**A solução geral da EDO de segunda ordem

$$y'' + x = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

é dada por

$$y = -\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

**Exemplo:** Considere-se agora equação diferencial (em $\mathbb{R}$)

$$y' - 2y = 0. \tag{4}$$

Se $\phi(x)$ é solução da equação, então a função $\psi(x) = \phi(x)e^{-2x}$ é solução da equação

$$z' = 0$$

(verifique!). Portanto, $\psi$ é constante (em $\mathbb{R}$) e, por conseguinte, $\phi$ é da forma

$$\phi(x) = Ce^{2x}$$

(com $C$ constante). Reciprocamente, verificamos que as funções do tipo $Ce^{2x}$ (novamente com C constante) constituem soluções da EDO dada. Assim, a solução geral da equação diferencial (4) é

$$y = Ce^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

**Exemplo:** Considere-se a EDO de primeira ordem (em $\mathbb{R}$)

$$(y')^2 - 4y = 0.$$

Um integral geral desta equação é dado por $y = (x + C)^2$, onde $C$ é uma constante real arbitrária. A função definida por $y = x^2$ é uma solução particular daquela equação, enquanto que $y = 0$ é uma solução singular. [Porquê ?]

**Observação:**

- Note que $y = x + C$ e $y = -x + C$ são dois integrais gerais da EDO

$$(y')^2 = 1$$

e nenhuma solução particular de um é solução particular do outro.

**Definição (Problema de valores iniciais)**

Chama-se problema de valores iniciais (PVI) (ou problema de Cauchy) a todo o problema que consiste em encontrar a solução (ou soluções) de uma dada equação diferencial satisfazendo certas condições (ditas condições iniciais) num mesmo ponto:

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Assim, resolver o PVI significa determinar a(s) solução(ões) da equação diferencial de ordem n envolvida que satisfaz(em) as $n$ condições iniciais no ponto $x_0$ (notar que $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ são números reais dados).

**Exemplo:** A solução do PVI

$$\begin{cases} y'' + x = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

é $y = -\frac{x^3}{6} + 1$. [Verifique!]

## Problema de fronteira

**Definição (Problema de valores na fronteira)**

Chama-se problema de valores na fronteira (ou simplesmente problema de fronteira)a todo o problema que consista em encontrar a solução (ou soluções) de uma dada equação diferencial satisfazendo condições em dois ou mais pontos.

**Exemplo:**O problema de fronteira

$$\begin{cases} y'' + x = 0 \\ y(0) + y'(1) = -\frac{1}{3} \\ y(1) + y'(0) = 0 \end{cases}$$

tem também solução única. Qual é?

**Exemplo:** Podemos verificar que $y = x^2$ e $y = 0$ são duas soluções do problema de Cauchy

$$\begin{cases} (y')^2 - 4y = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

**Exemplo:** O PVI

$$\begin{cases} |y'| + |y| = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

não tem solução, uma vez que a equação diferencial $|y'| + |y| = 0$ tem apenas a solução (singular) $y = 0$.

- Os exemplos anteriores sugerem, por um lado, que nem todo o PVI admite solução e, por outro, a existir solução esta poderá não ser única.
- Do ponto de vista de aplicações, é importante conhecer condições que garantam a existência e unicidade de solução.

- É possível provar que um problema de Cauchy de primeira ordem na forma normal, i.e., do tipo

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

(com $x_0, y_0$ dados) admite uma e uma só solução (definida num intervalo centrado em $x_0$), desde que a função $f$ seja suficientemente "regular".

**Este resultado é conhecido pelo Teorema de Cauchy-Picard e pressupõe que a função $f$ seja contínua num conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ e satisfaça a condição**

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M|y_1 - y_2|,$$

**onde $M > 0$ é uma constante independente de $(x, y_1), (x, y_2) \in D$.**

## Equações diferenciais de primeira ordem $y' = f(x, y)$

**Equações diferenciais de primeira ordem**

$$y' = f(x, y),$$

onde $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

- No caso em que $f(x, y) = g(x)$, a equação diferencial resolve-se facilmente por primitivação da função $g$.
- Vejamos como lidar com algumas situações em que a função $f$ não depende exclusivamente da variável independente $x$.

## Equações diferenciais de primeira ordem de variáveis separáveis

Uma equação diferencial de primeira ordem diz-se de variáveis separáveis se puder escrever-se na forma $y' = f(x, y)$ com

$$f(x, y) = \frac{p(x)}{q(y)}$$

para algumas funções $p$ e $q$ que dependem apenas de $x$ e de $y$, respetivamente (com $q(y) \neq 0$).
Assim, uma tal equação escreve-se sempre na forma

$$q(y)y' = p(x)$$

(podendo dizer-se, neste caso, de variáveis separadas), ou ainda, na forma diferencial

$$q(y)dy = p(x)dx. \tag{5}$$

Em geral, as funções $p$ e $q$ assumem-se contínuas nos respetivos intervalos.

**Técnica de resolução:** Se $P$ e $Q$ forem primitivas de $p$ e $q$, respetivamente, e a relação

$$Q(y) = P(x) + C$$

(C é uma constante real) definir implicitamente $y = \varphi(x)$ num certo intervalo, então $\varphi$ é solução da equação (5).
Reciprocamente, se $\varphi$ for solução da equação (5), então

$$q(\varphi(x))\varphi'(x) = p(x).$$

Primitivando ambos os membros (em relação a $x$) obtemos $Q(\varphi(x)) = P(x) + C$, com $C \in \mathbb{R}$,
**Observação:** A resolução da equação diferencial (5) passa pela primitivação de ambos os seus membros.

## Equações diferenciais de primeira ordem de variáveis separáveis

**Determine a solução de:**

- $y' = y^2$
- $y' = \frac{6x^2}{2y+\cos(y)}$
- $\begin{cases} (2y + \cos(y))y' = 6x^2 \\ y(1) = \pi \end{cases}$

Consideremos o seguinte problema de aplicação da chamada Lei do Arrefecimento de Newton:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m),$$

onde $T$ é temperatura do objecto (em função do tempo $t$), $T_m$ é a temperatura do meio ambiente e $k$ é uma constante positiva.

Uma esfera de cobre é aquecida a uma temperatura de $100^o C$. A esfera é então colocada num recipiente com água em que esta é mantida a uma temperatura constante de $30^o C$. Determine a forma como varia a temperatura ($T$) da esfera ao longo do tempo ($t$).

## EDOs exatas

Sejam $M(x, y)$ e $N(x, y)$ contínuas nalgum aberto $D \subseteq \mathbb{R}^2$. A equação

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0$$

ou, equivalentemente

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

diz-se diferencial exata (em $D$) se existir uma função $F(x, y)$ de classe $C^1$ (em $D$) cujo diferencial total é

$$dF(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy.$$

Tal equivale a afirmar que

$$M = \frac{\partial F}{\partial x} \text{ e } N = \frac{\partial F}{\partial y} \text{ (em } D\text{)}.$$

- Qualquer solução $y = \varphi(x)$ da EDO $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, verifica a relação $F(x, \varphi(x)) = C$ (com $C$ constante) e que, reciprocamente se $y = \varphi(x)$ for definida (implicitamente) por $F(x, y) = C$, então $\varphi$ é solução de $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.
- Resolver uma EDO exata significa encontrar uma função $F(x, y)$ (nas condições indicadas) e indicar o conjunto de soluções da EDO na forma

$$F(x, y) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

**Observação:** EDOs exatas incluem como caso particular as EDOs separadas (desde que as funções $p(x)$ e $q(y)$ envolvidas sejam contínuas em abertos de $\mathbb{R}$).

# EDOs exatas

**Exercícios:**

1. Mostre que a equação
$$y^2 dx + 2xydy = 0$$
é uma equação diferencial exata (em $\mathbb{R}^2$) e que as suas soluções são definidas por
$$xy^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$
2. A equação
$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$$
não é uma equação diferencial exata [Porquê?].
3. Mostre que a equação
$$(y + 2xe^y)dx + (x^2e^y + x - 2y)dy = 0$$
é uma equação diferencial exata (em $\mathbb{R}^2$) e as soluções da equação são dadas por:
$$yx + x^2e^y - y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

**Observação:** A equação $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ é diferencial exata se e só se
$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y), \quad \forall (x, y) \in D.$$
(Sempre que estivermos nas condições do critério para a igualdade das derivadas mistas).

# EDOs exatas

- Existem certas funções auxiliares que permitem transformar uma dada EDO não exata numa equação desse tipo.
- Chama-se fator integrante da equação $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ a toda a função $\mu(x,y)$ não nula tal que a equação $\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$ é diferencial exata.

**Exercício:** Mostre que a equação

$$(3y + 4xy^2) + (2x + 3yx^2)y' = 0$$

não é diferencial exata. Note que: um fator integrante para esta EDO é $\mu(x,y) = yx^2$.

**Observação:** O fator $\mu$ deverá verificar

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\right) = N\frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y) - M\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y)$$

(supondo que as funções envolvidas são de classe $C^1$).
A determinação de um tal fator integrante $\mu(x,y)$ é facilitada quando ele depende apenas de uma das variáveis:

- Se $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)}{N} =: g(x)$ podemos tomar $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ (i.e., com $\mu$ a depender apenas de $x$) e escrever $\mu(x)g(x) = \mu'(x)$. Daqui resulta que $\mu(x) = e^{\int g(x)dx}$.
- Se $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)}{M} =: h(y)$ podemos tomar $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$ (i.e., com $\mu$ a depender apenas de $y$) e escrever $\mu(y)h(y) = -\mu'(y)$. Daqui resulta que $\mu(y) = e^{\int -h(y)dy}$.

# EDOs lineares (de primeira ordem)

Um dos tipos de equações diferenciais mais importantes são as chamadas equações lineares, as quais se podem escrever na forma

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = b(x) \tag{6}$$

onde $a_0, a_1, b$ são funções definidas num certo intervalo $I$, com $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

**Observação:**
Quando $b$ é a função nula (em $I$), a equação (6) diz-se incompleta ou homogénea.

- Dividindo ambos os membros por $a_0(x)$, podemos também escrever a equação linear na forma
$$y' + p(x)y = q(x).$$

## EDOs lineares (de primeira ordem)

Resumindo (para EDOs lineares (de primeira ordem)

$$y' + p(x)y = q(x).$$

1. Determinar uma primitiva $P$ da função $p$;
2. multiplicar ambos os membros pelo fator integrante $\mu(x) = e^{P(x)}$;
3. integrar de seguida em ordem a x.

**Determine a solução da seguinte EDO linear (de primeira ordem)**

- Mostre que a solução geral da equação linear $y' - y = -e^x$ é dada

$$y = (C - x)e^x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

## Resolução de problemas de Cauchy de primeira ordem

**Teorema (existência e unicidade de solução global)**

Se $p$ e $q$ são funções contínuas num intervalo $I$, então o problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tem nesse intervalo uma e uma só solução.

## EDOs homogéneas

A equação diferencial $y' = f(x, y)$ diz-se homogénea se $f$ for uma função homogénea de grau zero, i.e.

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y), \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \text{ tais que } (\lambda x, \lambda y) \in D.$$

Neste caso temos $f(x, y) = f(1, y/x), \ x \neq 0$. [Porquê?]

Assim uma equação homogénea pode sempre escrever-se na forma

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

em que $g$ é uma função de uma variável apenas.

- Esta equação pode ser reduzida a uma equação de variáveis separáveis através de uma mudança de variável adequada.
- Efetuando a substituição de variável (dependente) $y = zx$, a equação $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$ fica na forma
  $$z + xz' = g(z),$$
  a qual é uma equação de variáveis separáveis em $x$ e $z$ [Porquê?].

**Exercício:**

- $x^2 dy = (x^2 + xy + y^2)dx$

As equações diferenciais da forma

$$y' = h\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \quad h \text{ é uma função de uma variável real e } a_1, a_2, b_1, b_2 \text{ são constantes reais} \tag{7}$$

transformam-se em equações já conhecidas através de uma mudança de variável(eis) adequada(s):

- se $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, então a equação já é de variáveis separáveis, ou então uma das substituições $z = a_1x + b_1y$ ou $z = a_2x + b_2y$ converte-a numa equação desse tipo;
- se $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, então existem constantes $\alpha, \beta$ tais que a substituição de variáveis dada pela translação

$$x = u + \alpha \quad \text{e} \quad y = z + \beta$$

transforma a equação (7) numa equação homogénea nas variáveis $u$ (independente) e $z$ (dependente), daí dizer-se, neste caso, que (7) é uma EDO redutível a uma equação homogénea.
O par $(\alpha, \beta)$ é a solução do sistema

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{cases}$$

**Exercício:** Determine a solução da seguinte equação diferencial $y' = \frac{x+y+4}{x-y-6}$.

# Equações de Bernoulli

Uma equação de Bernoulli é uma equação diferencial da forma

$$y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha} \tag{8}$$

em que $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Se $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$, a equação diferencial é linear.
- Se $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$ a equação diferencial é não linear.

  Nestes casos, uma mudança de variável adequada transforma a equação de Bernoulli numa equação linear.
  - A equação (8) pode escrever-se na forma:

    $$y^{-\alpha}y' + a(x)y^{1-\alpha} = b(x)$$

    (com $y \neq 0$, apesar de a função nula ser solução da equação diferencial quando $\alpha > 0$).
  - Considerando a seguinte mudança de variável $z = y^{1-\alpha}$ temos $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$.
  - Usando esta informação na equação anterior obtemos a equação

    $$z' + (1-\alpha)a(x)z = (1-\alpha)b(x),$$

    a qual é uma EDO linear de primeira ordem nas variáveis $z$ e $x$.

Determine a solução da equação diferencial

$$y' + y = e^{x}y^{2}.$$

# Equações lineares de ordem arbitrária

Uma equação diferencial linear de ordem $n$ ($n \in \mathbb{N}$) é uma equação da forma

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x), \tag{9}$$

onde $a_0, a1, \ldots, a_n, b$ são funções (contínuas) num certo intervalo $I$, com $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

- Se as funções $a_j$ ($j = 0, 1, \ldots, n$) forem constantes, então a equação diz-se de coeficientes constantes.
- A equação diferencial dir-se-á incompleta (ou homogénea) quando $b$ é uma função nula (em $I$); caso contrário a equação linear diz-se completa.

**Exemplos:**

1. $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$
2. $e^x y' - \cos(x)\, y = x$
3. $y^{(5)} + 2y = 0$

# Teorema (existência e unicidade de solução global)

**Teorema (existência e unicidade de solução global)**

Se $a_0, a_1, \ldots, a_n, b$ são funções contínuas num intervalo $I$, $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$ e $x_0 \in I$, então, nesse intervalo, existe uma e uma só solução para o problema de Cauchy

$$\begin{cases} a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x) \\ y(x_0) = \beta_0, y'(x_0) = \beta_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = \beta_{n-1} \end{cases}$$

(onde $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ são números reais dados).

**Exemplo** O problema de Cauchy

$$\begin{cases} x'' + x = 0 \\ x(0) = 2,\ x'(0) = 2 \end{cases}$$

tem uma única solução em qualquer intervalo contendo a origem, justifique. Mostre que a sua solução é dada por $x(t) = 2\sin(t) + 2\cos(t)$.

## Solução geral de uma EDO linear completa

- Já discutimos um método de resolução (baseado em fatores integrantes) para equações lineares de primeira ordem.
- Pretende-se mostrar como se constrói a solução geral (i.e., a família de todas as soluções) de uma equação linear de ordem arbitrária (9).
  - Dadas duas soluções da equação (9), a sua diferença é solução da equação homogénea associada: $a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$.
  - A soma de uma solução da equação (9) com uma solução da equação homogénea associada é também solução da equação (9).

**Teorema (Solução geral de uma EDO linear completa)**

A solução geral de uma equação linear completa obtém-se adicionando uma qualquer sua solução à solução geral da equação homogénea associada.

**Observação:** O Teorema diz-nos que a solução geral de uma equação linear (completa) é então dada por:

$$y = y_H + y_P.$$

**Exercício** Mostre que $y = Ce^{2x} + \frac{1}{3}e^{5x}$ é a solução geral da equação completa $y' - 2y = e^{5x}$, sabendo que $y = \frac{1}{3}e^{5x}$ é uma solução da EDO completa.

## Equações lineares homogéneas

- Já sabemos como resolver equações diferenciais lineares homogéneas de primeira ordem (é sempre de variáveis separáveis)

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = 0$$

( $a_0(x) \neq 0$ no intervalo considerado). A sua solução geral é dada por

$$y = Ce^{-A(x)},$$

onde $C$ é uma constante real arbitrária e $A(x)$ denota uma primitiva da função $\frac{a_1(x)}{a_0(x)}$.

**Exercício:** Considere a equação linear $x^2y' + xy = 1$ no intervalo $]0, +\infty[$. Determine a solução da equação homogénea que lhe está associada.

A resolução de uma equação linear homogénea de ordem arbitrária baseia-se no seguinte resultado

**Teorema**

Toda a equação linear homogénea de ordem $n$

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0,$$

num dado intervalo $I$ ($a_0, a_1, \ldots, a_n$ contínuas em $I$; $a_0(x) \neq 0$ para todo o $x \in I$) admite $n$ soluções, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, linearmente independentes e qualquer outra sua solução, $\varphi$, se pode escrever na forma

$$\varphi = C_1\varphi_1 + \ldots + C_n\varphi_n,$$

onde as constantes $C_j$ são determinadas (de modo único) por $\varphi$.

Um conjunto de $n$ soluções linearmente independentes de uma equação linear homogénea também se designa por sistema fundamental de soluções.

## Independência linear

As funções $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ ($(n-1)$ vezes diferenciáveis num intervalo $I$) são linearmente independentes se, e só se, o determinante (dito *wronskiano*)

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \cdots & \varphi_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

for diferente de zero num ponto desse esse intervalo.
**Observação:** As funções do tipo

$$x^k e^{\alpha x} \cos(\beta x) \text{ e } x^k e^{\alpha x} \sin(\beta x) \ \ (k \in \mathbb{N}_0, \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0)$$

são linearmente independentes em $\mathbb{R}$ (em particular, estão aqui incluídas as funções seno e cosseno e as funções do tipo de potência e exponencial).

**Exemplo:** As funções seno e cosseno são soluções da equação linear homogénea $y'' + y = 0$ em $\mathbb{R}$.

- As funções $\cos x, \sin x$ são linearmente independentes (em $\mathbb{R}$).
- O conjunto $\{\cos x, \sin x\}$ é um sistema fundamental de soluções da equação considerada.
- $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ é a solução geral.

**Observação:**

- A resolução de uma equação linear homogénea reduz-se à determinação de um sistema fundamental de soluções.
- Não existe um método geral que permita obter um tal sistema para equações de ordem $n > 1$ com coeficientes arbitrários.
- No entanto, no caso particular das equações com coeficientes constantes é possível identificar um sistema fundamental de soluções através do estudo das raízes de certos polinómios.

- Discutiu-se a construção da solução geral de uma equação linear com coeficientes quaisquer.

- Um dos problemas a resolver é a determinação da solução geral da equação linear homogénea associada.
  - No caso de equações de primeira ordem, a equação homogénea é sempre uma equação de variáveis separáveis.
  - No caso de equações de ordem superior, a determinação da solução geral da equação homogénea é imediata desde que se identifique um sistema fundamental de soluções.

Iremos ver como identificar um sistema fundamental de soluções no caso de equações com coeficientes constantes, i.e., de equações da forma:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{10}$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R},\ a_0 \neq 0$.

- No que diz respeito a equações de primeira ordem: $a_0 y' + a_1 y = 0$. A solução geral desta equações é da forma: $y = Ce^{-\frac{a_1}{a_0}x}$, $C \in \mathbb{R}$. Note que $r = -\frac{a_1}{a_0}$ é a solução da equação (algébrica) $a_0 r + a_1 = 0$.
- No caso de equações de ordem de ordem superior, a ideia é procurar também soluções da forma $y = e^{rx}$ (para valores de $r \in \mathbb{R}$ convenientes), e neste caso temos: $y^{(n)} = r^n e^{rx}$, $n \in \mathbb{N}_0$.
  - Substituindo na equação $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$ obtemos

    $$a_0 r^n e^{rx} + a_1 r^{n-1} e^{rx} + \ldots + a_{n-1} r e^{rx} + a_n e^{rx} = 0,$$

    ou seja

    $$\left(a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n\right) e^{rx} = 0.$$

    Como $e^{rx} \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (e todo $r \in \mathbb{R}$), então

    $$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0.$$

    - $r$ é raiz raiz do polinómio $P(r) \equiv a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n$, o qual se designa por polinómio característico da equação diferencial (10).
    - $a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0$ é a equação característica da equação diferencial (10).

A correspondência entre as $n$ raízes do polinómio característico e as $n$ soluções linearmente independentes da equação diferencial (10) pode ser sistematizada do seguinte modo:

**Caso 1:** $P(r)$ possui $n$ raízes reais distintas $r_1, r_2, \ldots, r_n$. As funções

$$e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_n x}$$

são $n$ soluções linearmente independentes e consequentemente

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_n e^{r_n x},\ C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$$

é a solução geral da equação diferencial (10).

**Exercício:** Determine a solução geral da equação diferencial

$$y''' + 4y'' - 5y' = 0.$$

**Caso 2:** $P(r)$ possui $n$ raízes reais e (pelo menos) uma delas tem multiplicidade $k > 1$. Suponhamos que se tem $r_1 = r_2 = \ldots = r_k = r$. Então as funções

$$e^{rx}, xe^{rx}, \ldots, x^{k-1}e^{rx}$$

são as $k$ soluções linearmente independentes. Assim, forma-se um sistema fundamental de soluções juntando a estas as $(n-k)$ soluções geradas pelas restantes $(n-k)$ raízes reais.

**Exercício:** Determine a solução geral da equação diferencial

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0.$$

**Caso 3:** $P(r)$ tem (pelo menos) uma raiz complexa simples. Suponhamos $r = \alpha \pm i\beta$ são raízes simples do polinómio característico. Prova-se que

$$e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\sin(\beta x),$$

são duas soluções linearmente independentes.

**Exercício:** Determine a solução geral da equação diferencial

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

**Caso 4:** $P(r)$ tem (pelo menos) uma raiz complexa de multiplicidade $k > 1$. Se $r = \alpha \pm i\beta$ são raízes de multiplicidade $k$ prova-se que

$$e^{\alpha x}\cos(\beta x), xe^{\alpha x}\cos(\beta x), \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$
$$e^{\alpha x}\sin(\beta x), xe^{\alpha x}\sin(\beta x), \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

são $2k$ soluções linearmente independentes.

**Exercício:** Determine a solução geral da equação diferencial

$$y^{(4)} + 4y' + 4y = 0.$$

Estes slides tem por base:

A. Almeida, Cálculo II - Texto de apoio (disponível na plataforma Moodle da UA).