Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I — Exame da Época Normal

11 de Janeiro de 2010

Duração: **2h30m**

Classificação: ________

Justifique todas as respostas e indique os cálculos efectuados.

65 Pontos

1. Considere a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x < 0, \\ x^2 - x - 1, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

   (a) Estude f quanto à continuidade.

   (b) A função f é diferenciável em $x = 0$? Justifique.

   (c) Determine, caso existam, as assimptotas do gráfico de f.

   (d) Estude f quanto à existência de extremos

   (e) Considere a função g definida em $]-\infty, 0[$ por $g(x) = \dfrac{\pi}{2}f(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Justifique que g é invertível e caracterize a sua função inversa.

20 Pontos

2. Seja f a função dada por $f(x) = \ln\sqrt{x}$.

   (a) Determine o Polinómio de Taylor de 3ª ordem de f, $p_3(x)$, relativamente ao ponto $x = 1$.

   (b) Mostre que o erro que se comete ao aproximar $f(x)$ por $p_3(x)$ no intervalo $]0,8;\ 1,2[$ é inferior a $\frac{1}{2} \times 10^{-3}$.

30 Pontos

3. Seja f uma função primitivável num intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

   (a) Mostre que se F_1 e F_2 são duas quaisquer primitivas de f (em I), então existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $F_2(x) = F_1(x) + C$, para todo $x \in I$.

   (b) Considere $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^4}}$ no intervalo $]-1,\ 1[$. Determine a função F tal que $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in]-1,\ 1[$, e cujo gráfico passa no ponto de coordenadas $(\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0)$.

40 Pontos

4. Calcule os seguintes integrais (simplificando o mais possível o resultado apresentado):

   (a) $\displaystyle\int_0^{1/2} (x+1)\, e^{2x}\, dx.$

   (b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\, dx.$

20 Pontos

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Considere a função φ dada por

$$\varphi(x) = \int_{e^x}^{1+x^2} f(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

   (a) Justifique que φ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e determine $\varphi'(x)$.

   (b) Mostre que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x} = -f(1)$.

25 Pontos

6.

   (a) Mostre que $\operatorname{sen} x \leq x$, para todo $x \geq 0$.

   (b) Calcule a área da região delimitada pelas rectas verticais $x = 0$ e $x = \pi$, e pelos gráficos das funções f e g, sendo $f(x) = x$ e $g(x) = \operatorname{sen} x$.