Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I - Segundo Semestre — Exame da Época Normal - 2ª Chamada

14 de Junho de 2007

Duração: **2h30m**

Justifique todas as respostas e indique os cálculos efectuados.

65 Pontos

1. Considere a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \ln(2-x) & \text{se} \quad x < 1 \\ \operatorname{arctg}(x-1) & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

   (a) Estude f quanto à continuidade em $x = 1$.

   (b) Prove que a função f não é diferenciável em $x = 1$.

   (c) A função f é integrável em $[3, 5]$? Justifique.

   (d) Determine a função inversa da restrição de f ao intervalo $[1, +\infty[$.

30 Pontos

2. Considere a função F definida em $\mathbb{R}$ por $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} t \ln\left(1 + e^t\right) dt$.

   (a) Calcule $F'(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Estude a função F quanto à monotonia e existência de extremos locais.

35 Pontos

3. Considere a função f definida por $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

   (a) Usando o Teorema de Lagrange mostre que existe $c \in]1, 2[$ para o qual $f'(c) = \dfrac{1-2e}{2e^2}$.

   (b) Considere $g(x) = x^2 f(x)$. Determine a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\, dx$ e, em caso de convergência, indique o seu valor.

20 Pontos

4. Calcule o valor da área da região do plano situada entre os gráficos das funções f e g definidas, respectivamente, por

$$f(x) = \frac{4 + \operatorname{sen}^2 x}{1 + 4x^2} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + 4x^2}$$

   e pelas rectas de equações $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$.

50 Pontos

5. Calcule os seguintes integrais indefinidos:

   (a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2}}\, dx$

   (b) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2(x-1)}\, dx$