Exame de Recurso

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Duração: 1/02/2012

Duração: 2h 30m

Nome:____________________________________ N.º Folhas Supl.:____

Nº Mec.__________ Declaro que desisto _______________ Classificação:______

Classificações Parciais:

1*a*)	1*b*)	2*a*)	2*b*)	3*a*)	3*b*)	4	5*a*)	5*b*)	6*a*)	6*b*)	6*c*)

---

1. Considere o sistema de equações lineares, nas variáveis x, y, z,

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ y - z = 1 \\ 2x + \alpha y - z = 2. \end{cases}$$

com α um parâmetro real.

[15] a) Discuta, em função do parâmetro real α, as soluções deste sistema de equações.

[20] b) Faça $\alpha = 4$ e utilize a Regra de Cramer para o resolver.

2. Considere o espaço vectorial $\mathbb{R}_2[X]$ dos polinómios de grau inferior ou igual a dois.

[15] a) Averigúe se os vectores

$$v_1 = 1 - 2X, \quad v_2 = 2X, \quad v_3 = 1 - X + X^2,$$

são linearmente independentes e geram $\mathbb{R}_2[X]$.

[15]b) Mostre que o conjunto $V = \{p(X) \in \mathbb{R}_2[X] \ : p''(X) = 0\}$, onde p'' designa a segunda derivada de p, é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}_2[X]$ e indique a sua dimensão.

3. Considere a transformação linear $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ representada, em relação às bases canónicas, pela matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

[20] a) Determine o núcleo de f e apresente uma base para este espaço.

[10] b) A aplicação linear f é sobrejectiva? Porquê?

[30] 4. No espaço vectorial $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços vectoriais,

$$V =< (1,0,-2),(0,0,1) > \quad \text{e} \quad W =< (1,0,1),(0,1,0) >.$$

Determine a dimensão de $V \cap W$ e a dimensão de $V + W$.

[10] 5 a). Indique, justificando, os valores do parâmetro real λ que tornam a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ -\lambda & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ invertível.}$$

[20] b) Na matriz A considere $\lambda = 2$ e calcule a sua inversa.

6. Considere no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, munido do produto interno definido por

$$< (x_1, y_1, z_1)/(x_2, y_2, z_2) >= x_1x_2 + 2y_1y_2 + 3z_1z_2,$$

o operador linear $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja representação matricial relativamente à base canónica é

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

[15] a) Indique os valores próprios de f. O operador linear f é diagonalizável? Porquê?

[15] b) Determine os espaços próprios de f.

[15] c) Seja E_2 o espaço próprio associado ao valor próprio 2. Determine uma base ortonormada de $E_2^{\perp}$, complemento ortogonal de E_2, para o produto interno considerado.

... Um homem tem sempre duas razões
para as coisas que faz: a boa e a real...

J. P. Morgan