Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I — Primeiro Mini-Teste (24/10/2006)

Resolução

1. Considere a função f definida por $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x}}$.

   (a) Determine o domínio de f.
   Indicações para a resolução:
   Temos
   $$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geq 0 \wedge x^2 + 1 \geq 0 \wedge 2x \geq 0 \wedge \sqrt{x^2+1} - \sqrt{2x} \neq 0 \right\} .$$
   Uma vez que:
   i)
   $x^2 - 1 \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq 1 \vee x \leq -1$;
   ii)
   $x^2 + 1 \geq 0$ é condição universal em $\mathbb{R}$;
   iii)
   $2x \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq 0$;
   iv)
   $$\begin{aligned} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{2x} = 0 &\Longleftrightarrow \sqrt{x^2+1} = \sqrt{2x} \\ &\Longleftrightarrow x^2 + 1 = 2x \wedge x \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow (x-1)^2 = 0 \wedge x \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$
   temos
   $$D_f = \{x \in \mathbb{R} : (x \geq 1 \vee x \leq -1) \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 1\} =]1, +\infty[.$$

   (b) Determine, caso exista(m), o(s) zero(s) de f.
   Indicações para a resolução:
   $$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Longleftrightarrow \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x}} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \sqrt{x^2-1} = 0 \wedge x \in]1, +\infty[\\ &\Longleftrightarrow x^2 - 1 = 0 \wedge x \in]1, +\infty[\\ &\Longleftrightarrow (x = 1 \vee x = -1) \wedge x \in]1, +\infty[\end{aligned}$$
   Logo f não tem zeros.

   (c) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   Indicações para a resolução:
   $$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\sqrt{\dfrac{2}{x}}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(d) Indique, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to+\infty} \big(f(x)\big)^n$.

Indicações para a resolução:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos $\lim_{x\to+\infty} \big(f(x)\big)^n = 1^n = 1$.

2. Seja f a função definida por $f(x) = x - \mathrm{e}^{-x}$. Mostre que f admite pelo menos um zero no intervalo $[0,1]$.

Indicações para a resolução:

Uma vez que:

- a função f é contínua no intervalo $[0,1]$;
- $f(0) = 0 - \mathrm{e}^0 = -1 < 0$;
- $f(1) = 1 - \mathrm{e}^{-1} = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}} = \dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}} > 0$, porque $\mathrm{e} > 1$;

o Teorema de Bolzano permite concluir que existe $x_0 \in]0,1[$ tal que $f(x_0) = 0$.

3. Considere a função g definida por $g(x) = \dfrac{\pi}{3} - \arccos(x+2)$. Caracterize a função inversa de g.

Indicações para a resolução:

Por definição de inversa de uma função temos que $D_{g^{-1}} = CD_g$ e $CD_{g^{-1}} = D_g$.

- *Determinação do contradomínio de g^{-1}*

  Temos

$$\begin{aligned} D_g &= \{x \in \mathbb{R} : x+2 \in [-1,1]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x+2 \leq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq -1\} \\ &= [-3,-1] \end{aligned}$$

  pelo que

$$CD_{g^{-1}} = [-3,-1]\,.$$

- *Determinação do domínio de g^{-1}*

  Para todo o $x \in D_g$ temos

$$\begin{aligned} 0 \leq \arccos(x+2) \leq \pi &\iff 0 \geq -\arccos(x+2) \geq -\pi \\ &\iff \frac{\pi}{3} \geq \frac{\pi}{3} - \arccos(x+2) \geq \frac{\pi}{3} - \pi \\ &\iff \frac{\pi}{3} \geq \frac{\pi}{3} - \arccos(x+2) \geq -\frac{2\pi}{3} \\ &\iff -\frac{2\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3} - \arccos(x+2) \leq \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

  pelo que

$$D_{g^{-1}} = \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]\,.$$

- *Determinação da expressão analítica que define g^{-1}*

$$\begin{aligned} y = \frac{\pi}{3} - \arccos(x+2) &\iff \arccos(x+2) = \frac{\pi}{3} - y \\ &\iff x+2 = \cos\left(\frac{\pi}{3} - y\right) \\ &\iff x = -2 + \cos\left(\frac{\pi}{3} - y\right) \end{aligned}$$

  Então, para todo o $x \in \left[-\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right]$, $\;g^{-1}(x) = -2 + \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)$.

Logo g^{-1} é a função de contradomínio $[-3,-1]$ definida por

$$\begin{array}{rccl} g^{-1}: & \left[-\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & -2+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right) \end{array}$$

4. Sejam f e g duas funções reais de variável real tais que $g \circ f$ está definida. Mostre que se f e g são injectivas, então $g \circ f$ é injectiva.

Indicações para a resolução:

Vamos provar que, para todo o $x_1, x_2 \in D_{g \circ f}$, se $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$, então $x_1 = x_2$.

Sejam $x_1, x_2 \in D_{g \circ f}$ tais que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$, ou seja, por definição de composta,

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \ . \tag{1}$$

Como $D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$ temos que $f(x_1), f(x_2) \in D_g$ e, como g é injectiva, a igualdade (1) implica

$$f(x_1) = f(x_2) \ . \tag{2}$$

Uma vez que $x_1, x_2 \in D_f$ e f é injectiva, a igualdade (2) implica

$$x_1 = x_2 \ .$$

Ficou então provado que $g \circ f$ é injectiva.