UNIVERSIDADE DE AVEIRO
Departamento de Matemática

Matemática Discreta

Teste $N^0 2$ de Matemática Discreta — 20 de junho de 2016

Justifique adequadamente cada uma das suas respostas.

Tempo para a realização desta prova: 2 horas.

1- Sabendo que grupo de 6 amigos reservou 3 quartos num hotel em Aveiro e assumindo que nenhum quarto fica vazio, responda às seguintes questões.

(2) **1.1** Determine o polinómio gerador para o número de possibilidades de distribuir os 6 amigos pelos 3 quartos.

(1) **1.2** A partir do polinómio gerador da alínea anterior, determine o número de possibilidades de alojar os 6 amigos.

2- Determine uma fórmula não recursiva para os termos da sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, em cada um dos seguintes casos.

(2) **2.1** A função geradora desta sucessão pode exprimir-se por $f(x) = \frac{1}{(1-2x)(1-3x)}$.

(2) **2.2** Esta sucessão verifica a relação de recorrência

$$a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = (-2)^n,$$

com condições iniciais $a_0 = 1$, $a_1 = -1$.

*(3)***3-** Mostre que os números de Fibonacci satisfazem a igualdade de Cassini, ou seja,

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n,$$

para $n \geq 1$, considerando $F_0 = 0$.
Sugestão: faça a prova por indução.

4- Considere o grafo simples G tal que $V(G) = [8]$ (onde $[8] = \{1, 2, \ldots, 8\}$) e $E(G) = \{xy : x, y \in V(G) \wedge x + y \in X\}$, onde $X = \{3, 5, 7, 9\}$.

(1) **4.1** Faça uma representação pictórica do grafo G.

(1) **4.2** Verifique (justificando) se tanto G como o seu complementar são conexos.

(2) **4.3** Determine a cintura, $g(G)$, o diâmetro, $\mathrm{diam}(G)$, o raio $r(G)$ e o centro deste grafo.

5- Seja G o grafo simples, não orientado, com conjunto de vértices $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$, definido pela matriz de custos

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \infty & 4 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 26 & \infty & \infty & 12 \\ 4 & 26 & 0 & 3 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 3 & 0 & 4 & 11 \\ \infty & \infty & \infty & 4 & 0 & 6 \\ \infty & 12 & \infty & 11 & 6 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

(3) **5.1** Determine o caminho de custo mínimo entre os vértices a e b, com recurso ao algoritmo de Dijkstra.

(3) **5.2** Determine uma árvore abrangente de custo mínimo, utilizando o algoritmo de Kruskal.