Cap. 5 – Valores Próprios e Vetores Próprios

Seja A uma matriz $A_{n\times n}$ e seja $\lambda \in \mathbb{R}$

Diz-se que λ é um valor próprio de A se existe um vetor não nulo $X \in \mathbb{R}^n$ tal que
$AX = \lambda X$
a X chamo vetor próprio de A

- Todo o vetor não nulo $X \in \mathbb{R}^n$ tal que $AX = \lambda X$
é o vetor próprio de A associado ao valor próprio λ

Temos $AX = \lambda X \Leftrightarrow AX - \lambda X = 0$
$\Leftrightarrow (A - \lambda I)X = 0$

λ é valor próprio de A sse o sistema homogéneo $(A-\lambda I)X = 0$ tiver soluções não triviais sse o sistema homogéneo for possível e indeterminado sse a matriz $(A - \lambda I)$ for singular (não tiver inverso) sse $\det(A - \lambda I) = 0$

Nota

Os valores próprios de A são escalares reais $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que a matriz $A - \lambda I$ não é invertível, ou seja, tais que $\det(A - \lambda I) = 0$ e os vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda \in \mathbb{R}$ são os vetores **Não Nulos** $X \in \mathbb{R}^n$ que são soluções do sistema homogéneo $(A - \lambda I)X = 0$

A $\det(A - \lambda I)$ chamo de polinómio característico de A e vou designá-lo por $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ e os valores próprios de A são as soluções da equação característica $P_A(\lambda) = 0$ ou seja

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Teorema

Os valores próprios de A são as raízes reais do polinómio característico de A $\det(A - \lambda I)$

exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Obter os valores próprios de A e os correspondentes vetores próprios

$\det(A - \lambda I) = 0$

$$\Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow (1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = 0$
$\Leftrightarrow 4 - \lambda + \lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0$
$\Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{5 \pm 1}{2} \Leftrightarrow \lambda = 3 \lor \lambda = 2$$

Os ~~vetores~~ valores próprios de A são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 2$

Obter os vetores próprios associados a cada valor próprio

→ $\lambda_1 = 3$ os vetores próprios são tais que

$(A - \lambda_1 I) X = 0$

$$\begin{bmatrix} 1-3 & 1 \\ -2 & 4-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

C.A

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1/2\, x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1/2\, x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} x_2$

Os vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda_1 = 3$ são

$X_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} x_2$, com $x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

→ $\lambda_2 = 2$

$(A - \lambda_2 I) = 0$

$$\begin{bmatrix} 1-2 & 1 \\ -2 & 4-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

C.A

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}, x_2 \in \mathbb{R}$

Os vetores próprios são os vetores

$X_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_2$, $x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Nota

espaço próprio associado ao valor próprio λ

↳ espaço nulo da matriz $(A - \lambda I)$

26 de Novembro

Exercício 2 - ficha 5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

obter os valores próprios de A

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$ ← equação característica

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)\left((-1-\lambda)(3-\lambda) - 1\right) = 0$$

$\Leftrightarrow \lambda = 1 \vee -3 + \lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda^2 - 2\lambda - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2}$

Os valores próprios de A são

$\lambda = 1$ e $\lambda = 1 + \sqrt{5}$ e $\lambda = 1 - \sqrt{5}$

vetores próprios associados a $\lambda = 1$

$(A - \lambda I)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(-4x_3 - x_3) \\ x_2 = -2x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -5/2\, x_3 \\ x_2 = -2x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} -5/2\, x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}, x_3 \in \mathbb{R}$$

$$= \begin{bmatrix} -5/2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} x_3, x_3 \in \mathbb{R}$$

vetores próprios de A associados a $\lambda = 1$

são $\begin{bmatrix} -5/2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} x_3, x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Teorema

Seja λ um valor próprio da matriz A $n \times n$

$U_\lambda = \{ X \in \mathbb{R}^n : X$ é vetor próprio de A associado ao valor próprio $\lambda \} \cup \{0\}$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$

A U_λ chamamos subespaço próprio de A associado ao valor próprio λ e recordamos que

$U_\lambda = N(A - \lambda I)$

$= \{ x \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda I) x = 0 \}$

Teorema

Seja A matriz $n \times n$ e seja $P_\lambda(A)$ o correspondente polinómio característico. A equação característica vai ter n raízes (reais ou imaginárias) e sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K$ valores próprios de A distintos (raízes de $P_A(\lambda)$ distintas) então

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} (\lambda - \lambda_3)^{n_3} \cdots (\lambda - \lambda_K)^{n_K}$$

sem n_i a multiplicidade do valor próprio (raiz) λ_i, $n_1 + n_2 + \dots + n_K = n$

$$1 \leq \dim U_{\lambda_i} \leq n_i$$

Exemplo

- $\lambda = 1$ $\quad P_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 1 + \sqrt{5})(\lambda - 1 - \sqrt{5})$
- $\lambda = 1 \pm \sqrt{5}$

- $\lambda = 1$ multiplicidade 2
- $\lambda = 2$ $\quad P_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2)$

→ Exemplo 1

$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

valores próprios $\lambda = 2$ e $\lambda = 3$ ambas multiplicidade 1

vetor próprio associado a $\lambda = 2$ $\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_2, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

vetor próprio associado a $\lambda = 3$ $\begin{bmatrix} 1/2\, x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} x_2, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

subespaços próprios

$U_2 = \langle (1,1) \rangle$

$U_3 = \langle (1/2, 1) \rangle$

base U_2 é $\{(1,1)\}$

base U_3 é $\{(1/2, 1)\}$

$\dim U_2 = 1$ $\dim U_3 = 1$

→ Exemplo 2

$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

valor próp. de A_2

$\det(A_2 - \lambda I) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda(\lambda^2 + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 0 \lor \lambda = \pm i$

$\dim U_0 = 1$

vet. próp. associado a $\lambda = 0$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \in \mathbb{R} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x_1 \in \mathbb{R}$

vet próp. assoc. a $\lambda = 0$ são $\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$U_0 = \langle (1,0,0) \rangle$ $\{(1,0,0)\}$ é base de U_0

→ exemplo 3

$$A3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) = 0$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{\lambda = 1}_{\text{multiplicidade } 2} \text{ e } \lambda = 2$$

$\dim U_2 = 1$

$1 \leq \dim U_1 \leq 2$

vet. prop associado a $\lambda = 2$

$(A - \lambda I)x = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R}$$

vet. prop. ~~associado~~ são $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_3,\ x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$U_2 < (0,0,1) >$

$\dim U_2 = 1$

vet prop associado a $\lambda = 1$

$(A - \lambda I)X = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \in \mathbb{R} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x_1 \in \mathbb{R}$$

vet. prop são $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_1,\ x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$U_1 = < (1,0,0) >$

base $\{ (1,0,0) \}$

~~dim~~ $\dim U_1 = 1$

→ Exemplo 4

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

val. prop de A_4

$\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

$$\iff \underset{\text{multiplicidade } 2}{\lambda = 1} \wedge \lambda = 2$$

$\dim U_2 = 1$

$1 \leq \dim U_1 \leq 2$

vet. prop. $\lambda = 2$

$(A - \lambda I)x = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_2, \ x_2 \in \mathbb{R}$$

vet. próprios são $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_2, \ x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$U_2 = \langle (1,1,0) \rangle$

$\dim U_2 = 1$

base $\{(1,1,0)\}$

vet. prop. assoc. $\lambda = 1$

$(A - \lambda I)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1 \in \mathbb{R} \\ x_2 = 0 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix}, \ x_1, x_3 \in \mathbb{R}$$

vet prop. são

$\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $x_1, x_3 \in \mathbb{R}$ não simultaneamente nulos

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_3, \quad x_1, x_3 \in \mathbb{R}$$

não simul. nulos

$U_1 = \langle (1,0,0), (0,0,1) \rangle$

base U_1 é $\{(1,0,0), (0,0,1)\rangle$

$\dim U_1 = 2$

Teorema

Vetores próprios associados a valores próprios distintos são linearmente ~~dependentes~~ independente

Matrizes semelhantes

Duas matrizes A e B dizem-se semelhantes se existe uma matriz P invertível tal que

$$P^{-1}AP = B$$

$\boxed{\text{Nota}}$

com $A = PBP^{-1}$

Teorema

Matrizes semelhantes possuem o mesmo polinómio característico e, portanto têm os mesmos valores próprios

Def

Uma matriz semelhante a uma matriz diagonal diz-se DIAGONALIZÁVEL

Nota

Se A é diagonalizável, isto é, A é semelhante a uma matriz diagonal D, isto é, existe uma matriz P invertível tal que $P^{-1}AP = D$, isto é, A tem os mesmos valores próprios de D, que são os elementos diagonais de D

Nota Se A e D são semelhantes

$AP = PD$

seja $P = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_n \end{bmatrix}$

e

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

sendo $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ os valores próprios de A e de D

$\rightarrow AP = \begin{bmatrix} AX_1 & AX_2 & \dots & AX_n \end{bmatrix}$

$\rightarrow PD = \begin{bmatrix} \lambda_1 X_1 & \lambda_2 X_2 & \dots & \lambda_n X_n \end{bmatrix}$

$\rightarrow$ como $AP = PD$

$AX_1 = \lambda_1 X_1 \iff (A - \lambda I)X_1 = 0$

ou seja, X_1 é vetor próprio associado ao valor próprio λ_1

Nota

Para diagonalizar uma matriz $A_{n \times n}$ é necessário obter n vetores próprios linearmente independente que constituirão as colunas da matriz $\underline{P}$ que é a matriz diagonalizante de A sendo os valores próprios, os elementos diagonais de D a ordem desse elementos determina também a ordem de colocação dos ~~...~~ v.p. na matriz P

Exemplo 4 - continuação

→ vet prop. assoc. a $\lambda = 2$ são $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x,\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Tomemos o v.p. $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

→ vet prop. assoc. $\lambda = 1$ são $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_3,\ x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ não simultaneamente nulos

Tomemos os vet prop.

$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $X_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

A matriz P que diagonalize A (diagonalizante de A) é

$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e é tal que $= [X_1\ X_2\ X_3]$

$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exemplo

$A^{26112014}$

$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$

vet. prop. de A

$\det(A - \lambda I) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 6 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (5-\lambda)(-4-\lambda) + 18 = 0$

$\Leftrightarrow -20 - 5\lambda + 4\lambda + \lambda^2 + 18 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{1 \pm 3}{2}$

$\Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = -1$

Como tenho dois ~~vet~~ valores próprios distintos vamos ter 2 vetores próprios linearmente independentes. Como A é 2×2 então A é diagonalizável

vet. prop assoc. a $\lambda = 2$

$(A - \lambda I)X = 0$

$\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 6 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$ vet. prop $\begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}, x_2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ seja $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

vet prop assoc. a $\lambda = -1$

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1/2\, x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

vet. $\begin{bmatrix} 1/2\, x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $x_2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ seja $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

A matriz P que diagonaliza A é

$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e é tal que

$$P^{-1}AP = D\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = D \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$$

$$A^{26112014} = PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1}\dots$$
$$= PD^{26112014}P^{-1}$$
$$= P\begin{bmatrix} 2^{26112014} & 0 \\ 0 & 1^{26112014} \end{bmatrix}P^{-1}$$

28 de Novembro

Exercício

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

obter valor próprio

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(2-\lambda)}_{=0}\underbrace{((3-\lambda)(2-\lambda) - 2)}_{=0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 2 \lor 6 - 3\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 2 \lor \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 2 \lor \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 2 \lor \lambda = \frac{5 \pm 3}{2} \Leftrightarrow \lambda = 2 \lor \lambda = 4 \lor \lambda = 1$$

Teorema

↳ Vetores próprios associados a valores próprios distintos são linearmente independentes

A é diagonalizável se existe uma matriz P invertível tal que $P^{-1} AP = D$* ← correspondentes valores próprios

↑ vetores próprios

Matriz invertível

↳ tem de ser quadrada
↳ determinante diferente de zero
↳ a característica tem de ser igual ao nº de colunas, neste caso é n.
↳ se as colunas forem linearmente independentes

Calcular o espaço de linhas daquela matriz
↳ é o espaço gerado pelas linhas da matriz

base para o espaço das colunas é determinado pelas colunas que possuem pivot

* $P^{-1}AP = D$, diagonal em que P é constituída por n vetores próprios linearmente independentes.
Portanto, A é diagonalizável sse A tiver n vetores próprios linearmente independentes
Teorema

Exemplo 3

$A_{3\times3}$ tem valores próprios
$\lambda_1 = 1$ (mult. 2) e $\lambda_2 = 2$ (mult. 1)
$U_1 = \langle (1,0,0) \rangle$
$U_2 = \langle (0,0,1) \rangle$
> ambos os subespaços próprios a dimensão é 1, apenas 2 vetores próprios de A são linearmente independentes → A é não diagonalizável

Exemplo 4

$A_{3\times3}$ tem valores próprios
$\lambda_1 = 1$ (mult. 2) e $\lambda_2 = 2$ (mult. 1)

$U_1 = \langle (1,0,0), (0,0,1) \rangle$ — $\dim U_1 = 2$
$U_2 = \langle (1,1,0) \rangle$ — $\dim U_2 = 1$
> 3 vetores próprios linearmente independentes, então A é diagonalizável

~~Se os valores próprios forem to~~

Teorema

Consideremos a matriz $A_{n\times n}$.
Seja $p_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{n_1} (\lambda-\lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda-\lambda_k)^{n_k}$ o polinómio característico de A em que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ são os valores próprios distintos de A e $n_1, \dots, n_k$ as respetivas multiplicidades como raízes do polinómio e tais que $n_1 + \dots + n_k = n$
Então
$1 \leq \dim U_{\lambda_i} \leq n_i$ (a dimensão do subespaço próprio associado ao valor próprio λ_i é pelo menos 1 e é, no máximo, n_i)

A matriz A é diagonizável sse $\dim U_{\lambda 1} + \dots + \dim U_{\lambda k} = n$, ou seja, se $\dim U_{\lambda i} = n_i$

Temos também que a matriz A terá $\dim U_{\lambda 1} + \dots + \dim U_{\lambda k}$ vetores próprios linearmente independentes

→ Continuação do exercício

• vetores próprios associados a $\lambda_1 = 1$

$(A - \lambda I)X = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} -x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}, x_3 \in \mathbb{R}$$

vetores próprios são $\begin{bmatrix} -x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_3,\ x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$U_1 = \langle (-1, 1, 1) \rangle$

$\dim U_1 = 1$, base é $\{(-1, 1, 1)\}$

seja

$X_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ um vetor próprio associado a $\lambda_1 = 1$

• vetor. prop. associado $\lambda_2 = 2$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \in \mathbb{R} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x_1 \in \mathbb{R}$$

vetores próprios são $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_1,\ x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$U_2 = \langle (1, 0, 0) \rangle$, $\dim U_2 = 1$ seja $X_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

• vetores associados a $\lambda_3 = 4$

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 = -2x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + 4x_3 + 3x_3 = 0 \\ x_2 = -2x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7}{2} x_3 \\ x_2 = -2x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

vetores próprios são

$$\begin{bmatrix} 7/2\, x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

seja $X_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$

X_1, X_2, X_3 são 3 vetores próprios l.i. e portanto

$$P = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & \quad 2 & \quad 4 \end{matrix} \end{array}$$

é a matriz ~~diagonalizável~~ diagonalizante de A e é tal que

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Diagonalização de matrizes simétricas

Def

A é simétrica se $A = A^T$

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Não é simétrica}$$

↳ simétrica

Teorema

Uma matriz simétrica $n \times n$ possui n valores próprios reais, logo a matriz é diagonizável

Teorema

~~Os~~ Vetores próprios de uma matriz simétrica associados a valores próprios distintos são ortogonais

↳ logo são linearmente independentes

Def.

Uma matriz P quadrada diz-se ortogonal se for invertível e $P^{-1} = P^T$

Teorema

Dada uma matriz $P = [P_1\ P_2\ \dots\ P_n]$

base ortogonal e normada

P é ortogonal sse $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^n$

Teorema

Toda a matriz $A_{n\times n}$ simétrica é ortogonalmente diagonalizável

Nota

Se A é simétrica então é diagonalizável através de uma matriz P invertível que é também ortogonal. Os vetores próprios associados a valores próprios distintos são ortogonais e para obter P basta normalizá-los

Exercício

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

valores próprios

$\det(A - \lambda I) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (1-\lambda)^2 - 2^2 = 0$

$\Leftrightarrow ((1-\lambda) - 2)((1-\lambda)+2) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = -1 \vee \lambda = 3$

vetores próprios associados a $\lambda_1 = -1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}; x_2 \in \mathbb{R}$

vetores próprios são $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} x_2, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$U_1 = \langle (-1,1) \rangle$

vetores próprios associados a $\lambda_2 = 3$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}, x_2 \in \mathbb{R}$

vetores próprios são $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_2, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$U_3 = \langle (1,1) \rangle$, $\dim U_3 = 1$

$\{(1,1),(-1,1)\}$ base ortogonal de $\mathbb{R}^2$

$\|(1,1)\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ $\quad X_1 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$

$\|(-1,1)\| = \sqrt{2}$ $\quad X_2 = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$

$\{X_1, X_2\}$ base ~~ortogonal~~ ortonormada de $\mathbb{R}^2$

$P = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$ é uma matriz ortogonal que diagonaliza A ortogonalmente, isto é, é tal que

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow P^T AP = D$$

Cap. 6: Cónicas e Quádricas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ → Equação reduzida da elipse centrada na origem

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x, y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & 1/b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \rightarrow$$

cónicas em $\mathbb{R}^2$ têm a forma

$$\boxed{\alpha x^2 + \beta y^2 + 2\gamma xy + \delta x + \eta y + \mu = 0}$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \mu = 0$$

$$X^T A X + B X + \mu = 0$$

3 de Dezembro

Cónicas $\quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$(\alpha x^2 + \beta y^2 + 2\gamma xy) + \delta x + \eta y + \mu = 0$$

$$\begin{bmatrix} x y \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \delta & \eta \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \mu = 0$$

$$\boxed{X^T A X + B X + \mu = 0}$$

• Matriz A é simétrica

↳ ortogonalmente diagonizável

Existe P ortogonal tal que

$P^{-1} A P = D$

com $P^{-1} = P^T$

Sejam λ_1, λ_2 e $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ tais que:

→ $\lambda_1 \geq \lambda_2$ se λ_1 e λ_2 forem ambos não nulos

→ se um deles for nulo então $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_1 \neq 0$

Consideremos $X = P\bar{X}$, então a cónica fica

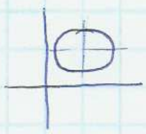
$$(P\bar{X})^T A (P\bar{X}) + B(P\bar{X}) + \mu = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{X}^T (P^T A P) \bar{X} + (BP)\bar{X} + \mu = 0$$

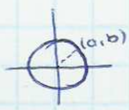
$$\Leftrightarrow \bar{X}^T D \bar{X} + \bar{B}\bar{X} + \mu = 0$$

sem $D = P^T A P$

e $\bar{B} = BP$



Fazendo uma segunda mudança de variável colocamos a cónica no centro dos eixos coordenados



$$\Leftrightarrow \lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + \bar{\delta}\bar{x} + \bar{\eta}\bar{y} + \mu = 0$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{\bar{x}} = \bar{x} + a \\ \bar{\bar{y}} = \bar{y} + b \end{cases}$

a cónica fica $\lambda_1 \bar{\bar{x}}^2 + \lambda_2 \bar{\bar{y}}^2 + \bar{\mu} = 0$

se $\lambda_2 = 0$

$$\lambda_1 \bar{\bar{x}}^2 + \bar{\bar{m}}\,\bar{\bar{y}} + \bar{\mu} = 0$$

Exemplo

$$x^2 + y^2 + 4xy + 2x - 2y - 6 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 6 = 0$$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ simétrica

A é simétrica logo, ortogonalmente diagonizável

→ valores próprios de A

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow ((1-\lambda) - 2)((1-\lambda) + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -1 \lor \lambda = 3$$

seja $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$

→ vet. próp. associado a $\lambda_1 = 3$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix}, y \in \mathbb{R}$

vet. prop. são

$$\begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} y, \; y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

seja $X_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$ um vetor próprio de norma 1 associado a $\lambda_1 = 3$

→ vet prop. associado a $\lambda_2=-1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x=-y \\ y\in\mathbb{R} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} -y \\ y \end{bmatrix}, y\in\mathbb{R}$$

vet. prop. são

$$\begin{bmatrix} -y \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} y, \ y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Seja $X_2=\begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$ um vetor próprio de norma 1 associado a $\lambda_2=-1$

Seja $P=\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$

P é ortogonal e $P^T A P = D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Considerando a mudança de ~~base~~ variável $\bar{X}=PX$
e fazendo $\bar{B}=BP$

$$=\begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix}}_{B}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}-6=0$$

$\iff X^T A X + BX - 6 = 0$

com a mudança de variável $\bar{X}=PX$

$$\bar{X}^T D \bar{X} + \bar{B}\bar{X} - 6 = 0$$
$$3\bar{x}^2-\bar{y}^2+\begin{bmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}-6=0$$

$$3\bar{x}^2-\bar{y}^2-2\sqrt{2}\bar{y}'-6=0$$
$$3\bar{x}^2-\underbrace{(\bar{y}^2+2\sqrt{2}\bar{y})}_{\substack{+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ +2-2}}-6=0$$

$$\iff 3\bar{x}^2-(\bar{y}^2+2\sqrt{2}\bar{y}+2)+2-6=0$$
$$\iff 3\bar{x}^2-(\bar{y}+\sqrt{2})^2-4=0$$

mudança variável $\begin{cases} x=\bar{x} \\ y=\bar{y}+\sqrt{2} \end{cases}$

a eq. fica

$$\boxed{3x^2-y^2-4=0}$$ Equação reduzida da cónica

Se os ~~valores~~ valores próprios tiverem o mesmo sinal temos uma ~~hipérbole~~ elipse

Se os ~~valores~~ valores próprios tiverem sinais opostos temos uma parábola

Quando um dos λ é nulo temos uma hipérbole

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \bar{\mu} = 0$$
$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = -\bar{\mu}$$

se $\bar{\mu} = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 - y^2 = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 = y^2$

$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{3}\,x \Rightarrow$ cónica degenerada

$$x^2 + y^2 = 0$$

- Quando λ_1 e λ_2 tem o mesmo sinal
  - ↳ μ e λ_1 sinais contrários — elipse
  - μ e λ_1 mesmo sinais — conj. vazio
  - $\mu = 0$ — um ponto $(0,0)$

- Quando λ_1 e λ_2 sinais contrários
  - $\mu \neq 0 \rightarrow$ hipérbole
  - $\mu = 0 \rightarrow$ duas retas concorrentes $y = \pm\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}\,x$

$$\boxed{\lambda_1 x^2 + \eta y + \mu = 0}$$

- Quando $\eta \neq 0 \rightarrow$ ~~para~~ parábola

- Quando $\eta = 0$
  - μ e λ_1 sinais contrários — 2 retas paralelas $x = \pm\sqrt{-\frac{\mu}{\lambda_1}}$
  - μ e λ_1 sinais iguais — conj. vazio
  - $\mu = 0$ — reta : $x = 0$ (eixo Oy)

Exemplo 2

$$2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 18 = 0$$
$$[x\ y]\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [12\ 4]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 18 = 0$$

A tem valores próprios $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 1$ têm o mesmo sinal elipse ou suas ~~degenerescências~~ degenerescências

$$2(x^2 + \underset{+9-9}{6x}) + 1(y^2 + \underset{+4-4}{4y}) + 18 = 0$$

$\Leftrightarrow 2(x^2 + 6x + 9) - 18 + (y^2 + 4y + 4) - 4 + 18 = 0$

$\Leftrightarrow 2(x+3)^2 + (y+2)^2 = 4$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x} = x + 3 \\ \bar{y} = y + 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 2\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 4$

5 Dezembro 2014

Cónica

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + 2\gamma xy + \delta x + \eta y + \mu = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}}_{X^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{bmatrix} \delta & \eta \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} + \mu = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{X^T A X + B X + \mu = 0}$$

A é simétrica, logo ortogonalmente diagonizável

Existe P ortogonal tal que

$$P^T A P = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$ com λ_1, λ_2 valores próprios de A

Consideremos a mudança de variável

$$X = P\bar{X}$$

$$\lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + \bar{\delta} x + \bar{\eta} y + \mu = 0$$

com $\bar{B} = BP = \begin{bmatrix} \bar{\delta} & \bar{\eta} \end{bmatrix}$

completando os quadrados obtemos uma expressão do género

$$\lambda_1 (\bar{x} - a)^2 + \lambda_2 (\bar{y} - b)^2 + \bar{\mu} = 0$$

e definindo uma nova mudança de variável

$$\begin{cases} \bar{\bar{x}} = \bar{x} - a \\ \bar{\bar{y}} = \bar{y} - b \end{cases}$$

a cónica fica:

λ_1 e λ_2 têm o mesmo sinal

$$\lambda_1 \bar{\bar{x}}^2 + \lambda_2 \bar{\bar{y}}^2 + \bar{\mu} = 0$$ → elipse e suas degenerescências

→ hipérbole

λ_1 e λ_2 têm sinais contrários

se algum valor próprio for nulo:

$$\lambda_1 \bar{\bar{x}}^2 + \bar{\bar{\eta}} y + \bar{\mu} = 0$$ → parábola e suas degenerescências

λ_2 é nulo

Quádricas

$$X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2+2\delta_1 xy+2\delta_2 xz+2\delta_3 yz+\eta_1 x+\eta_2 y+\eta_3 z+\mu=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{[x\ y\ z]}_{X^T}\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & \delta_1 & \delta_2 \\ \delta_1 & \beta & \delta_3 \\ \delta_2 & \delta_3 & \gamma \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X}+\underbrace{[\eta_1\ \ \eta_2\ \ \eta_3]}_{B}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X}+\mu=0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{X^T AX+BX+\mu=0}$$

A é simétrica, logo ortogonalmente diagonizável

Existe P ortogonal tal que:

$$P^TAP=0=D=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$ com $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ valores próprios de A

Consideremos a mudança de variável

$$X=P\bar{X}$$

$$\boxed{\lambda_1 \bar{x}^2+\lambda_2 \bar{y}^2+\lambda_3 \bar{z}^2+\bar{\eta}_1 x+\bar{\eta}_2 y+\bar{\eta}_3 z+\mu=0}$$

com $\bar{B}=BP=[\bar{\eta}_1\ \ \bar{\eta}_2\ \ \bar{\eta}_3]$

completando os quadrados, obtemos uma expressão do género

$$\lambda_1(\bar{x}-a)^2+\lambda_2(\bar{y}-b)^2+\lambda_3(\bar{z}-c)^2+\bar{\mu}=0$$

e definindo uma nova mudança de variável

$$\begin{cases} \bar{\bar{x}}=\bar{x}-a \\ \bar{\bar{y}}=\bar{y}-b \\ \bar{\bar{z}}=\bar{z}-c \end{cases}$$

a quádrica fica:

λ_1, λ_2 e λ_3 têm o mesmo sinal ✓

$$\lambda_1 \bar{\bar{x}}^2+\lambda_2 \bar{\bar{y}}^2+\lambda_3 \bar{\bar{z}}^2+\bar{\mu}=0$$ → Elipsóides e suas degenerescências

→ Hiperbolóides

↳ λ_1 e λ_2, λ_3 sinais diferentes

Se algum valor próprio for nulo

$$\lambda_1 \bar{\bar{x}}^2+\lambda_2 \bar{\bar{y}}^2+\bar{\eta}_3 z+\bar{\mu}=0$$ → parabolóides e suas degenerescências

↳ valores próprios nulos

Exemplo

$$-8x^2 - 8y^2 + 10z^2 + 32xy - 4xz - 4yz - 24 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & 16 & -2 \\ 16 & -8 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 24 = 0$$

→ valores próprios de A

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

...

valor $\lambda_1 = 12$

$\lambda_2 = 6$

$\lambda_3 = -24$

Hiperbolóide

Fazendo a mudança de variável

$$X = P\bar{X}$$

obtemos a equação

$$X^T D\bar{X} + \mu = 0$$

$$12\bar{x}^2 + 6\bar{y}^2 - 24\bar{z}^2 - 24 = 0$$

$$12\bar{x}^2 + 6\bar{y}^2 - 24\bar{z}^2 = 24$$

Hiperbolóide de uma ou duas folhas?

↳ 1 folha

10 Dezembro 2014

Cap. 7 - Transformações Lineares

Sejam $\mathcal{V}$ e W espaços vetoriais reais.
Uma aplicação linear (ou transformação linear) é uma função

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{V} &\to W \\ x &\mapsto \varphi(x) \end{aligned}$$

tal que

1. $\varphi(x+y) = \underbrace{\varphi(x) + \varphi(y)}$, $\forall x, y \in \mathcal{V}$ ← operações de elementos do espaço de partida

2. $\varphi(\alpha x) = \alpha\, \varphi(x)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathcal{V}$

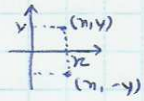
Nota

Se $\underbrace{\mathcal{V} = W}$ (espaço de partida = espaço chegada) então φ diz-se um operador linear ou endomorfismo

Exemplos

1. Em $\mathbb{R}^2$ a reflexão relativamente a um eixo
   reflexão relativamente a Ox

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto (x,-y) \end{aligned}$$



2. A rotação em $\mathbb{R}^3$ em torno do eixo Ox de ângulo θ

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\mapsto (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta,\ x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta,\ z) \end{aligned}$$

Proposição

Se $\varphi : \mathcal{V} \to W$ uma transformação linear.
Então $\varphi(0_{\mathcal{V}}) = 0_W$

Demonstração:

Seja $x \in \mathcal{V}$ e $0 \in \mathbb{R}$ então $0 \cdot x = 0_{\mathcal{V}}$
(escalar) (vetor) (vetor zero)

Logo $\varphi(0_{\mathcal{V}}) = \varphi(0 \cdot x)$
mas φ é uma aplicação linear

$= 0 \cdot \varphi(x)$
(escalar) ↳ vetor de W e W é espaço vetorial

$= 0_W$
↑ zero de W

Nota

Se uma função não transforma o zero do espaço de partida no zero do espaço de chegada, então essa função não é uma transformação linear

Proposição

~~Seja~~ $\varphi: V \to W$ é uma transformação linear sse

$$\varphi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k) = \alpha_1 \varphi(x_1) + \alpha_2 \varphi(x_2) + \dots + \alpha_k \varphi(x_k)$$

para $x_1, x_2, \dots, x_k \in V$ e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$

Proposição

Seja $\varphi: V \to W$ uma transformação linear e $B_V = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma base de V. Então φ é completamente determinada por $\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)$.

—— // —— // —— // ——

$$\varphi: V \to W$$
$$x \mapsto \varphi(x)$$

1. $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y), \ \forall x, y \in V$
2. $\varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x), \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in V$

Averiguar se são ou não transformação linear

a) $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ Exercício 1 - ficha 7

$(x, y) \mapsto (x+1, y, x+y)$

Sejam (x_1, y_1) e $(x_2, y_2) \in V$

$$\varphi((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = \varphi(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$ uso a definição ~~da~~ da transformação linear

$$= (x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2)$$

uso def. transf. linear

$$\varphi(x_1, y_1) + \varphi(x_2, y_2) = (x_1 + 1, y_1, x_1 + y_1) + (x_2 + 1, y_2, x_2 + y_2)$$

$$= (x_1 + x_2 + 2, y_1 + y_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2)$$

$$\neq \varphi((x_1, y_1) + (x_2, y_2))$$

Logo, a transformação definida não é linear.

b) $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(x, y, z) \mapsto (x+y, y, x-z)$

Sejam (x_1, y_1, z_1) e $(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$

$$\varphi((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = \varphi(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$= x_1 + x_2 + y_1 + y_2, y_1 + y_2, x_1 + x_2 - z_1 - z_2)$$
$$= (x_1 + y_1, y_1, x_1 - z_1) + (x_2 + y_2, y_2, x_2 - z_2)$$
$$= \varphi(x_1, y_1, z_1) + \varphi(x_2, y_2, z_2)$$

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha(x,y,z)) = \varphi(\alpha x, \alpha y, \alpha z) &= (\alpha x + \alpha y, \alpha y, \alpha x - \alpha z) \\ &= \alpha(x+y, y, x-z) \\ &= \alpha\, \varphi(x,y,z) \end{aligned}$$

As 2 condições são verificadas e, por isso, φ é uma transformação linear.

c)

$$\varphi : \underset{\leftarrow \text{polin. grau } \leq 2}{\mathcal{P}_2} \longrightarrow \underset{\leftarrow \text{grau pol. } \leq 1}{\mathcal{P}_2}$$

$$p(t) = at^2 + bt + c \longmapsto \varphi(p(t)) = at + b \cancel{+1}$$

$\rightarrow$ $\varphi(p_1(t) + p_2(t)) = \varphi(p_1(t)) + \varphi(p_2(t))$

$\rightarrow$ $\varphi(\alpha\, p(t)) = \alpha\, \varphi(p(t))$

Sejam $p_1(t) = a_1 t^2 + b_1 t + c_1$
$p_2(t) = a_2 t^2 + b_2 t + c_2 \quad \in \mathcal{P}_2$

$$\begin{aligned} \varphi(p_1(t) + p_2(t)) &= \varphi((a_1+a_2)t^2 + (b_1+b_2)t + (c_1+c_2)) \\ &= (a_1+a_2)t + (b_1+b_2) \cancel{+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(p_1(t)) + \varphi(p_2(t)) &= (a_1 t + b_1 \cancel{+1}) + (a_2 t + b_2 \cancel{+1}) \\ &= (a_1 + a_2)t + (b_1+b_2) \cancel{+2} \end{aligned}$$

$\neq \varphi(p_1(t) + p_2(t))$ e portanto não é transformação linear

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $p(t) = at^2 + bt + c$

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha\, p(t)) &= \varphi(\alpha a t^2 + \alpha b t + \alpha c) \\ &= \alpha a t + \alpha b \cancel{+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha\, \varphi(p(t)) &= \alpha(at + bt \cancel{+1}) \\ &= \alpha a t + \alpha b t \cancel{+\alpha} \end{aligned}$$

$\neq \varphi(\alpha\, p(t))$

Logo φ não é uma aplicação linear

$\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$A \longmapsto \varphi(A) = \begin{cases} A^{-1} \text{ se } A \text{ é não singular} \\ 0 \text{ se } A \text{ é singular} \end{cases}$

Averiguar se é transformação linear

seja $A, B \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$\varphi(A+B) = \begin{cases} (A+B)^{-1} & \text{se } A+B \text{ é não singular} \\ 0 & \text{se é singular} \end{cases}$

$\underset{A^{-1} \text{ ou } 0}{\varphi(A)} + \underset{B^{-1} \text{ ou } 0}{\varphi(B)} = \begin{cases} A^{-1}+B^{-1} & \text{se } A \text{ e } B \text{ são não singular} \\ A^{-1} & \text{se } A \text{ é não singular e } B \text{ singular} \\ B^{-1} & \text{se } A \text{ é singular e } B \text{ não singular} \\ 0 & \text{se } A \text{ e } B \text{ são singulares} \end{cases}$

——— x ———

$\rightarrow \varphi(0_V) = 0_W$

——— x ———

$\rightarrow \varphi(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k) = \alpha_1 \varphi(x_1) + \dots + \alpha_k \varphi(x_k)$

——— x ———

Posso definir uma transformação linear definindo os transf ~~__~~ dos elementos de uma base de V

Exercício ficha / exemplo   Exercício 4 - ficha 7

$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

tal que

$\varphi(1,1) = (2,-3)$

$\varphi(0,1) = (1,2)$

a) $\varphi(3,-2)$

$\rightarrow$ 1º verificar se $((1,1),(0,1))$ é base de $\mathbb{R}^2$

Como $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ basta verificar se aqueles 2 vetores são linearmente independentes

$\alpha(1,1) + \beta(0,1) = (0,0) \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha+\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$

portanto os 2 vetores são linearmente independentes e portanto, formam base de $\mathbb{R}^2$

$\rightarrow$ 2º Obter $(3,-2)$ como combinação linear dos vetores da base

$(3,-2) = \alpha(1,1) + \beta(0,1)$

$\iff \begin{cases} \alpha = 3 \\ \alpha+\beta = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -5 \end{cases}$

$[(3,-2)]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} \Rightarrow (3,-2) = 3(1,1) - 5(0,1)$

$(3,-2) = 3(1,1) - 5(0,1)$

logo $\varphi(3,-2) = \varphi(3(1,1) - 5(0,1))$

$= 3\,\varphi(1,1) - 5\,\varphi(0,1)$

$= 3 \cdot (2,-3) - 5(1,2)$

$= (6,-9) + (-5,-10) = (1,-19)$

Exemplo

$Q: P_2 \to P_3$

$\left(\begin{array}{l} at^2 + bt + c \\ \{t^2, t, 1\} \leftarrow \text{base canónica de } P_2 \end{array} \right)$

$Q(1) = 1$
$Q(t) = t^2$
$Q(t^2) = t^3 + 1$

$\{1, t, t^2\}$ constitui a base canónica de P_2 e portanto a transformação Q está bem definida

$$\begin{aligned} Q(2t^2 - 5t + 3) &= 2\,Q(t^2) - 5\,Q(t) + 3\,Q(1) \\ &= 2(t^3+1) - 5(t^2) + 3(1) \\ &= 2t^3 - 5t^2 + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(at^2 + bt + c) &= a\,Q(t^2) + b\,Q(t) + c\,Q(1) \\ &= a(t^3+1) + b(t^2) + c(1) \\ &= at^3 + bt^2 + a + c \end{aligned}$$

$Q: P_2 \to P_3$
$at^2 + bt + c \longmapsto at^3 + bt^2 + a + c$

12 de Dezembro

Resumo

$Q: V \to W, \ \forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{R}$

1. $Q(x+y) = Q(x) + Q(y)$
2. $Q(\alpha x) = \alpha\, Q(x)$

Basta-nos saber os elementos da base para chegarmos à transformação linear

$B_V = (x_1, \dots, x_n)$
$Q(x_1), \dots (x_n)$
define a transformação linear

— // — // — // — // —

Consideremos a transformação linear
$Q: V \to W$
seja $x \in V$ e $Q(x) \in W$
consideremos também uma base ordenada de V: $B_V = (x_1, x_2, \dots x_n)$
Sabemos

$$[x]_{B_V} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Qual a relação entre $[x]_{B_V}$ e $[Q(x)]_{B_W}$?, sendo B_W uma base (ordenada) de W.

como $[x]_{B_{V}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ isso significa que

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

então

$$Q(x) = Q(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n)$$
$$= a_1 Q(x_1) + a_2 Q(x_2) + \dots + a_n Q(x_n)$$

mas eu quero saber acerca de

$$[Q(x)]_{B_W} = [a_1 Q(x_1) + a_2 Q(x_2) + \dots + a_n Q(x_n)]_{B_W}$$
$$= a_1 [Q(x_1)]_{B_W} + a_2 [Q(x_2)]_{B_W} + \dots + a_n [Q(x_n)]_{B_W}$$
$$= \underbrace{\Big[[Q(x_1)]_{B_W} \; [Q(x_2)]_{B_W} \dots [Q(x_n)]_{B_W} \Big]}_{\text{matriz da transformação linear } Q_{B_W \leftarrow B_V}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{[x]_{B_V}}$$

Nota

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = [x_1 \; x_2 \; \; x_n] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$$[Q(x)]_{B_W} = Q_{B_W \leftarrow B_V} [x]_{B_V}$$

em que a matriz $Q_{B_W \leftarrow B_V}$ da transformação linear tem como colunas, o vetor das coordenadas (na base do espaço de chegada) das transformadas dos elementos da base do espaço de partida

Teorema

Seja $Q: V \to W$ uma transformação linear, $B_V = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ base de V e, B_W, base de W, então para $x \in V$

$$[Q(x)]_{B_W} = Q_{B_W \leftarrow B_V} [x]_{B_V}$$

em que $Q_{B_W \leftarrow B_V}$ é a matriz representativa da transformação linear e tem como colunas os vetores das coordenadas na base B_W dos transformados dos elementos da base B_V.

Exemplo:

$$Q: V \to W$$
$$B_V = ((1,1), (1,0))$$

$Q(1,1) = (2,3,1)$
$Q(1,0) = (1,2,1)$ — São uma base

$Q(a,b) = ?$ Qual o transfo

$$(a,b) = \alpha(1,1) + \beta(1,0)$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & b-a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b \\ 0 & -1 & b-a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a-b \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = b \\ \beta = a - b \end{cases}$$

$$\left[(a,b)\right]_{B_{\mathcal{V}}} = \begin{bmatrix} b \\ a-b \end{bmatrix}$$

ou seja

$$(a,b) = b(1,1) + (a-b)(1,0)$$

$$Q(a,b) = Q\Big(b(1,1) + (a-b)(1,0)\Big)$$

$$\begin{aligned} &= b\ Q(1,1) + (a-b)\ Q(1,0) \\ &= b\ (2,3,1) + (a-b)(1,2,1) \\ &= (2b + a - b,\ 3b + 2a - 2b,\ b + a - b) \\ &= (a+b,\ 2a+b,\ a) \end{aligned}$$

$$Q: \mathcal{V} \longrightarrow W$$
$$(a,b) \longmapsto (a+b,\ 2a+b,\ a)$$

- Considera a base em W, $B_W = \big((1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\big)$

Determinar $Q_{B_W \leftarrow B_{\mathcal{V}}} =$

$$= \Big[\ [Q(1,1)]_{B_W}\ [Q(1,0)]_{B_W}\ \Big]$$

↳ elementos da base de partida

$$Q(1,1) = (2,3,1) = \alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(1,1,0) + \alpha_3(0,1,1)$$

$$Q(1,0) = (1,2,1) = \beta_1(1,0,1) + \beta_2(1,1,0) + \beta_3(0,1,1)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 + L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \underset{L_3 = \frac{1}{2}L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2 = L_2 - L_3}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{L_1 = L_1 - L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 2 \\ \alpha_3 = 1 \end{cases} \longrightarrow [Q(1,1)]_{B_W} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = 1 \\ \beta_3 = 1 \end{cases} \longrightarrow [Q(1,0)]_{B_W} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_{B_W \leftarrow B_{\mathcal{V}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

~~Transforma os elementos da base de partida~~

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \xrightarrow{\varphi} & W \\ [x]_{B_{\mathcal{V}}} & \xmapsto{\varphi_{B_W \leftarrow B_{\mathcal{V}}}} & [\varphi(x)]_{B_W} \end{array}$$

$$[\varphi(x)]_{B_W} = \varphi_{B_W \leftarrow B_{\mathcal{V}}} \, [x]_{B_{\mathcal{V}}}$$

Mudanças de bases e matrizes de transformação linear

$\varphi : \mathcal{V} \to W$

em $\mathcal{V}$ considero as bases $S_{\mathcal{V}}$ e $\mathcal{T}_{\mathcal{V}}$

em W considero as bases S_W e $\mathcal{T}_W$

e considero as matrizes de φ

$$\varphi_{\mathcal{T}_W \leftarrow \mathcal{T}_{\mathcal{V}}} \quad \text{e} \quad \varphi_{S_W \leftarrow S_{\mathcal{V}}}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & W \\ x & \longmapsto & \varphi(x) \end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
{[x]_{\mathcal{T}_{\mathcal{V}}}} \arrow[r, mapsto, "\varphi_{\mathcal{T}_W \leftarrow \mathcal{T}_{\mathcal{V}}}"] \arrow[d, shift right, "M_{S_{\mathcal{V}} \leftarrow \mathcal{T}_{\mathcal{V}}}"'] & {[\varphi(x)]_{\mathcal{T}_W}} \arrow[d, shift right, "\text{inversa}"'] \\
{[x]_{S_{\mathcal{V}}}} \arrow[u, shift right, "\text{inversa}"'] \arrow[r, mapsto, "\varphi_{S_W \leftarrow S_{\mathcal{V}}}"] & {[\varphi(x)]_{S_W}} \arrow[u, shift right, "M_{\mathcal{T}_W \leftarrow S_W}"']
\end{tikzcd}$$

$\to [\varphi(x)]_{\mathcal{T}_W} = \varphi_{\mathcal{T}_W \leftarrow \mathcal{T}_{\mathcal{V}}} \, [x]_{\mathcal{T}_{\mathcal{V}}}$

$\to [\varphi(x)]_{S_W} = \varphi_{S_W \leftarrow S_{\mathcal{V}}} \, [x]_{S_{\mathcal{V}}}$

$$[\varphi(x)]_{\mathcal{T}_W} = M_{\mathcal{T}_W \leftarrow S_W} \, \varphi_{S_W \leftarrow S_{\mathcal{V}}} \, M_{S_{\mathcal{V}} \leftarrow \mathcal{T}_{\mathcal{V}}} \, [x]_{\mathcal{T}_{\mathcal{V}}}$$

lê-se da direita p/ esquerda

$\boxed{\text{Exercício 18}}$

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$B = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$

$\varphi(1,1,1) = (-1,1)$

$\varphi(1,1,0) = (1,1)$

$\varphi(1,0,0) = (0,2)$

a)

$$[\varphi]_{\mathcal{E}_2 \leftarrow B_3} = ?$$

$\mathcal{E}_2 = ((1,0),(0,1))$

$$[\varphi]_{\mathcal{E}_2 \leftarrow B_3} = \left[[\varphi(1,1,1)]_{\mathcal{E}_2} \; [\varphi(1,1,0)]_{\mathcal{E}_2} \; [\varphi(1,0,0)]_{\mathcal{E}_2} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

b)

$Q(x) = ?$

$$[x]_{B_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1º processo

$$[Q(x)]_{e_2} = [Q]_{e_2 \leftarrow B_3} [x]_{B_3}$$

$$\Leftrightarrow Q(x) = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{Q_{e_2 \leftarrow B_3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$Q(x) = (1, 9)$

2º processo

$$[x]_{B_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow x = (1,1,1) + 2(1,1,0) + 3(1,0,0)$$

e portanto

$$Q(x) = Q\left((1,1,1) + 2(1,1,0) + 3(1,0,0)\right)$$

$$= Q(1,1,1) + 2\,Q(1,1,0) + 3\,Q(1,0,0)$$
$$= (-1,1) + 2(1,1) + 3(0,2)$$
$$= (-1+2,\ 1+2+6)$$
$$= (1, 9)$$

c)

$Q_{e_2 \leftarrow e_3} = ?$

$$Q_{e_2 \leftarrow e_3} = \left[[Q(1,0,0)]_{e_2} \ \ [Q(0,1,0)]_{e_2} \ \ [Q(0,0,1)]_{e_2} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

1º processo

$Q(1,0,0) = (0,2)$

$Q(0,1,0) = Q(0(1,1,1) + (1,1,0) - (1,0,0)) = Q(1,1,0) - Q(1,0,0) = (1,1) - (0,2) = (1,-1)$

$(0,1,0) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,0,0)$
$\quad = 0(1,1,1) + (1,1,0) - (1,0,0)$

$Q(0,0,1) = Q((1,1,1) - (1,1,0)) = Q(1,1,1) - Q(1,1,0)$
$\quad = (-1,1) - (1,1) = (-2,0)$

2º processo

$$\begin{tikzcd}
[x]_{e_3} \arrow[r, mapsto, "Q"] \arrow[d, "P_{B_3 \leftarrow e_3}"'] & {[Q(x)]_{e_2}} \\
{[x]_{B_3}} \arrow[r, mapsto, "{[Q]_{e_2 \leftarrow B_3}}"] & {[Q(x)]_{e_2}} \arrow[u, "I"']
\end{tikzcd}$$

$$[Q(x)]_{e_2} = Q_{e_2 \leftarrow B_3} P_{B_3 \leftarrow e_3} [x]_{e_3}$$

17 Dezembro

$\varphi : \mathcal{V} \to W$

$B_{\mathcal{V}} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

B_W

$$[\varphi]_{B_W \leftarrow B_{\mathcal{V}}} = \Big[[\varphi(x_1)]_{B_W} \quad [\varphi(x_2)]_{B_W} \quad \cdots \quad [\varphi(x_n)]_{B_W} \Big]$$

Operador Linear

$\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$

$B_{\mathcal{V}} = (x_1, x_2, \dots x_n)$

$$[\varphi]_{B_{\mathcal{V}} \leftarrow B_{\mathcal{V}}} = \Big[[\varphi(x_1)]_{B_{\mathcal{V}}} \quad [\varphi(x_2)]_{B_{\mathcal{V}}} \cdots [\varphi(x_n)]_{B_{\mathcal{V}}} \Big]$$

Seja J outra base de $\mathcal{V}$

$\mathcal{V} \to \mathcal{V}$

$$\begin{tikzcd}
{[x]_{B_{\mathcal{V}}}} \arrow[r, "{[\varphi]_{B_{\mathcal{V}} \leftarrow B_{\mathcal{V}}}}"] & {[\varphi(x)]_{B_{\mathcal{V}}}} \arrow[d, "{(P_{B_{\mathcal{V}} \leftarrow J})^{-1}}"] \\
{[x]_J} \arrow[u, "{P_{B_{\mathcal{V}} \leftarrow J}}"] \arrow[r, "{[\varphi]_{J \leftarrow J} = ?}"] & {[\varphi(x)]_J}
\end{tikzcd}$$

$$[\varphi]_{J \leftarrow J} = \underbrace{\boxed{(P_{B_{\mathcal{V}} \leftarrow J})^{-1} \; [\varphi]_{B_{\mathcal{V}} \leftarrow B_{\mathcal{V}}} \; P_{B_{\mathcal{V}} \leftarrow J}}}_{= [\varphi]_{J \leftarrow J}} [x]_J$$

$$[\varphi]_{J \leftarrow J} = P^{-1} \, [\varphi]_{B_{\mathcal{V}} \leftarrow B_{\mathcal{V}}} \, P \qquad \text{com } P = P_{B_{\mathcal{V}} \leftarrow J}$$

Teorema

Duas matrizes são semelhantes sse são matrizes representativas do mesmo operador linear relativamente a bases diferentes.

Nota

Operador linear

$\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$

tal que φ = identidade, isto é,

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{V} &\to \mathcal{V} \\ x &\longmapsto \varphi(x) = x \end{aligned}$$

→ se S é uma base de $\mathcal{V}$ então $[\varphi]_{S \leftarrow S} = I$

→ se J é outra base

$$[\varphi]_{J \leftarrow S} = P_{J \leftarrow S}$$

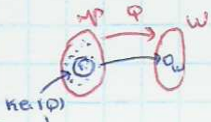
Matriz transformação linear

Matriz de mudança de base

Núcleo e imagem de uma aplicação linear

Seja $Q: \mathcal{V} \longrightarrow W$ transformação linear

O $\boxed{\text{núcleo de } Q}$ é o conjunto



$$Ker(Q) = \{ X \in \mathcal{V} : Q(X) = 0_W \}$$

↳ conjunto de vetores cujo transformado é o zero de W

Nota

$Ker(Q) \subseteq \mathcal{V}$

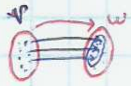
$Ker(Q) \neq \{\}$ pois $0_{\mathcal{V}} \in Ker(Q)$

Proposição

$Ker(Q)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{V}$

A $\boxed{\text{imagem de } Q}$ é o conjunto dos vetores em W que são imagem de algum vetor de $\mathcal{V}$

$$im(Q) = \{ y \in W : y = Q(x),\ x \in \mathcal{V} \}$$



Nota

$im(Q) \subseteq W$

também temos que $0_W \in im(Q)$ uma vez que é imagem do $0_{\mathcal{V}}$

Proposição

$im(Q)$ é um subespaço vetorial de W

Recorda que:

→ uma aplicação Q diz-se Injetiva se $X_1 \neq X_2 \Rightarrow Q(X_1) \neq Q(X_2)$, para $X_1, X_2 \in \mathcal{V}$

ou se $Q(X_1) = Q(X_2) \Rightarrow X_1 = X_2$ para $X_1, X_2 \in \mathcal{V}$

→ uma aplicação Q diz-se Sobrejetiva se $im(Q) = W$

Teorema

A aplicação linear $Q: \mathcal{V} \rightarrow W$ é injetiva sse $Ker(Q) = \{0_{\mathcal{V}}\}$ sse $\dim Ker(Q) = 0$

Nota

Isomorfismo

↳ é uma aplicação linear simultaneamente injetiva e sobrejetiva

Exercício 19

$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$B = ((1,1), (1,-1))$ base de $\mathbb{R}^2$

$\varphi(1,1) = (3,0,2)$
$\varphi(1,-1) = (1,0,2)$

- Determinar $\text{im}(\varphi)$ e $\text{Ker}(\varphi)$.

$\text{Ker}(\varphi) = \{ x \in V : \varphi(x) = (0,0,0) \}$

$x \in V \longrightarrow x = (x_1, x_2)$ e

$x = \alpha(1,1) + \beta(1,-1)$

$(x_1, x_2) = \alpha(1,1) + \beta(1,-1)$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & -1 & x_2 \end{array}\right] \underset{L_2 = L_2 - L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -2 & x_2 - x_1 \end{array}\right] \underset{L_2 = -\frac{1}{2}L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & \frac{x_1 - x_2}{2} \end{array}\right] \underset{L_1 = L_1 - L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{x_1 + x_2}{2} \\ 0 & 1 & \frac{x_1 - x_2}{2} \end{array}\right]$$

temos $\begin{cases} \alpha = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \beta = \frac{x_1 - x_2}{2} \end{cases}$

logo $x = \frac{x_1 + x_2}{2}(1,1) + \frac{x_1 - x_2}{2}(1,-1)$

e portanto

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{x_1 + x_2}{2}\varphi(1,1) + \frac{x_1 - x_2}{2}\varphi(1,-1) \\ &= \frac{x_1 + x_2}{2}(3,0,2) + \frac{x_1 - x_2}{2}(1,0,2) \\ &= \left(\frac{3x_1 + 3x_2 + x_1 - x_2}{2}, 0, \frac{2x_1 + 2x_2 + 2x_1 - 2x_2}{2} \right) \\ &= (2x_1 + x_2, 0, 2x_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2) &\longrightarrow (2x_1 + x_2, 0, 2x_1) \end{aligned}$$

$\text{Ker}(\varphi) = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x) = (0,0,0) \}$

$$\begin{aligned} \varphi(x) = (0,0,0) &\iff \varphi(x_1, x_2) = (0,0,0) \\ &\iff (2x_1 + x_2, 0, 2x_1) = (0,0,0) \\ &\iff \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = 0 \\ 2x_1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

logo $\text{Ker}(\varphi) = \{(0,0)\}$, $\dim \text{Ker}(\varphi) = 0$

podemos dizer que φ é injetiva

$im(Q) = \{ y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R} :$

$y = Q(x),\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \}$

$y = Q(x)$
$\Leftrightarrow (y_1, y_2, y_3) = Q(x_1, x_2)$
$\Leftrightarrow (y_1, y_2, y_3) = (2x_1 + x_2, 0, 2x_1)$

> Determinar $im(Q)$ corresponde a determinar condições sob as quais o sistema $y = Q(x)$ é possível

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_2 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 2x_1 \end{cases} \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & y_1 \\ 1 & 0 & y_2 \\ 2 & 0 & y_3 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 = L_3 - L_1]{L_2 = L_2 - \frac{1}{2}L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & y_1 \\ 0 & -1/2 & y_2 - y_1/2 \\ 0 & -1 & y_3 - y_1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 = L_3 - 2L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & y_1 \\ 0 & -1/2 & y_2 - y_1/2 \\ 0 & 0 & y_3 - y_1 - 2y_2 + y_1 \end{array}\right]$$

$= y_3 - 2y_2$

O sistema é possível se $y_3 - 2y_2 = 0$

logo

$im(Q) = \{ y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_3 - 2y_2 = 0 \}$
$\Leftrightarrow y_3 = 2y_2$

$y = (y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_2, 2y_2)$
$= y_1(1,0,0) + y_2(0,1,2)$

$im(Q) = \langle (1,0,0), (0,1,2) \rangle$

Os vetores $(1,0,0)$ e $(0,1,2)$ são linearmente independentes (verificar)

logo uma base para $im(Q)$ é $\{(1,0,0), (0,1,2)\}$

$Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$im(Q) \subset \mathbb{R}^3$

Q não é sobrejetiva
pois $im(Q) \neq \mathbb{R}^3$

Núcleo e espaço nulo / imagem e espaço das colunas

Seja $Q: V \to W$ aplicação linear, tal que $\dim V = n$ e $\dim W = m$.
Seja B_V base V, B_W uma base de W e ainda

$A = [Q]_{B_W \leftarrow B_V}$ — W tem m coordenadas ↳ nº linhas

$= \left[[Q(x_1)]_{B_W}\ [Q(x_2)]_{B_W} \cdots [Q(x_n)]_{B_W} \right]_{m \times n}$

então $\boxed{x \in Ker(Q)} \Leftrightarrow Q(x) = 0_W \Leftrightarrow$

logo $[Q(x)]_{B_W} = A[x]_{B_V}$

x ∈ núcleo da aplicação linear Q

$\Leftrightarrow [Q(x)]_{B_W} = A[x]_{B_V} = 0_W$ ← sistema homogéneo

$\Leftrightarrow$ sse $\boxed{[x]_{B_V} \in N(A)}$

$[x]_{B_V}$ ∈ espaço nulo da matriz A que define a transformação linear

$\boxed{y \in im(\varphi)} \Leftrightarrow \exists_{x \in V} : y = \varphi(x) \Leftrightarrow \exists_{x \in V} : [y]_{Bw} = [\varphi(x)]_{Bw}$

y ∈ imagem da aplicação φ

$\Leftrightarrow \exists x \in V : \underbrace{[y]_{Bw} = A\,[x]_{BV}}_{\text{sistema}}$

$\Leftrightarrow \boxed{[y]_{Bw} \in \mathcal{C}(A)}$ ← espaço das colunas

$[x]_{Bw}$ ∈ espaço das colunas da matriz A que define a aplicação φ

Nota

→ $\dim Ker(\varphi) = \dim \mathcal{N}(A) = nul(A)$

→ $\dim im(\varphi) = \dim \mathcal{C}(A) = car(A)$

Teorema [das dimensões]

$\dim Ker(\varphi) + \dim im(\varphi) = \dim V$

Nota: ver exemplo

$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ → teorema das dimensões

$\dim Ker(\varphi) = 0$ e como $\dim Ker(\varphi) + \dim im(\varphi) = 2$

~~[illegible]~~ $\dim im(\varphi) = 2$ logo não é sobrejetiva.

sabendo que $\dim im(\varphi) = 2$ como $\dim Ker(\varphi) + \dim im(\varphi) = 2$

teremos $\dim Ker(\varphi) = 0$ e portanto

concluimos que φ é injetiva

Teorema

Seja $\varphi : V \rightarrow W$ aplicação linear

$A = [\varphi]_{Bw \leftarrow BV}$ a matriz m×n da aplicação linear relativamente às bases B_V e B_W de V e W, respetivamente

Então

A é ~~injetiva~~ invertível sse φ é um isomorfismo (injetiva e sobrejetiva) sendo A^{-1} a matriz da aplicação inversa

$\psi : W \rightarrow V$

$\psi = \varphi^{-1}$