**Departamento de Matemática** **Universidade de Aveiro**

# Álgebra Linear e Geometria Analítica

**Exame Época Especial - 02/09/2011** **Duração: 2h30**

---

**Nome:** ______________________ **N.º mecanográfico:** __________

Declaro que desisto ______________________ **N.º de folhas suplementares:** ___

| Questão | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Cotação | 40 | 40 | 20 | 50 | 50 | 200 |
| Classificação | | | | | | |

| Classificação final |
|---|
| valores |

---

**Justifique convenientemente todas as suas respostas e indique os cálculos que efetuar.**

1. Considere o sistema representado matricialmente por $AX = B$ com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} a \\ a \\ b \end{bmatrix}.$$

   (a) Discuta o sistema em função dos parâmetros reais $a$ e $b$.

   (b) Sabendo que $[1\ \ 0\ \ 0]^T$ é uma solução do sistema, determine o conjunto de todas as soluções.

2. Seja $A$ a matriz dos coeficientes do sistema de equações lineares

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+\ \ y+\ \ z+\ \ t & = & 0 \\ x+2y+\ \ z+\ \ t & = & 1 \\ x+\ \ y+3z+\ \ t & = & 0 \\ x+\ \ y+\ \ z+4t & = & 0 \end{array}\right. .$$

(a) Calcule $\det(A)$, utilizando apenas propriedades dos determinantes.

(b) Utilize a regra de Cramer para determinar o valor da incógnita $x$ que satisfaz o sistema.

3. Dados $X, Y$ vetores de $\mathbb{R}^n$, mostre que $\|X+Y\|^2 \leq \|X\|^2 + 2\|X\|\|Y\| + \|Y\|^2$.

*Sugestão:* Utilize a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

4. Considere a base $\mathcal{B} = ((1,2,1),(0,1,0),(3,1,4))$ de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Determine a matriz de mudança da base canónica $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^3$ para a base $\mathcal{B}$.

   (b) Indique o vetor das coordenadas de $X = (1,2,0)$ na base $\mathcal{B}$.

   (c) Seja $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear representada em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}_c$ pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

      i. Determine $L(1,2,0)$.

      ii. Indique, justificando, se $L$ é um isomorfismo.

5. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine os valores próprios e subespaços próprios de $A$.

(b) Indique, justificando, se $A$ é uma matriz diagonalizável.

(c) Apresente uma equação reduzida e classifique a quádrica definida por $x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 2yz = 3$.