6.10 Primitivação

1. Determine as primitivas das funções definidas pelas expressões analíticas seguintes:

   (a) $2x\sqrt[3]{x^2+3}$;

   (b) $5x^4+2x^2+3$;

   (c) ax^5, a constante não nula;

   (d) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$;

   (e) $\cos(6x)$;

   (f) $\dfrac{2}{3x}$;

   (g) $\operatorname{sen}(2x-3)$;

   (h) $\dfrac{3x}{5+x^2}$;

   (i) $x\sqrt{x^2+9}$;

   (j) $\cos x - 5e^{2x}$;

   (k) $\dfrac{x}{2x^2+5}+\cos(2x)$;

   (l) $\dfrac{1}{\sqrt{1-5x^2}}$;

   (m) $-\dfrac{3}{2x^2}+\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$;

   (n) $\operatorname{sen}(x)\cos^2(x)$;

   (o) $\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{1+2\cos(x)}+\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}$;

   (p) $(\cos^2(x)+2\cos(x))\ \operatorname{sen}(x)$;

   (q) $\dfrac{kx}{a+bx^2}$, $k\neq 0$, $ab\neq 0$;

   (r) $a\operatorname{sen}^3(x)+x$, $a\neq 0$;

   (s) $\dfrac{\log|x|}{x}$;

   (t) $\dfrac{1}{x\log x}$.

2. Primitive, por partes, as funções definidas pelas expressões analíticas seguintes :

   (a) $\operatorname{arc\,tg}(x)$;

   (b) $x\cos(x)$;

(c) $(x^2+x+1)\ e^x$;

(d) $(x^2+1)\cos(x)$;

(e) $\dfrac{x}{\cos^2(x)}$;

(f) $\dfrac{\log|x|}{x^2}$.

3. Primitive, por substituição, usando em cada caso a substituição indicada, as funções definidas por :

   (a) $\dfrac{x^3}{\sqrt{x-1}}$ $\qquad (\sqrt{x-1}=t)$;

   (b) $\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$ $\qquad (x=2\,\mathrm{sen}(t))$;

   (c) $\dfrac{1}{x+4}\sqrt{\dfrac{x+2}{x+4}}$ $\qquad \left(\sqrt{\dfrac{x+2}{x+4}}=t\right)$;

   (d) $\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$ $\qquad (e^x=t)$;

   (e) $\dfrac{1}{\mathrm{sen}(x)+\cos(x)}$ $\qquad (\mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)=t)$.

4. Determine as primitivas das funções racionais definidas pelas expressões analíticas seguintes :

   (a) $\dfrac{x^5}{2x+1}$;

   (b) $\dfrac{x^2+1}{12+3x^2}$;

   (c) $\dfrac{x+2}{3x^2-12x+12}$;

   (d) $\dfrac{1}{x^2-9}$;

   (e) $\dfrac{2x}{(x+2)(x-3)}$;

   (f) $\dfrac{x^3+x^2+x+3}{x^4+2x^2-3}$;

   (g) $\dfrac{x^4}{2x^3-4x^2+8x-16}$;

   (h) $\dfrac{3x}{-x^2+x+6}$;

   (i) $\dfrac{t+1}{t^4+t^2}$;

(j) $\dfrac{2x^3}{(x^2+1)^2}$.

5. Determine a primitiva da função $x \to x^2e^x$ que toma o valor 1 para $x = 0$.

6. Determine a primitiva da função $x \to \dfrac{3}{9x^2+6x+2}$ que toma o valor $\dfrac{5\pi}{4}$ para $x = 0$.

7. Determine a primitiva da função $x \to (\cos(x))^{\frac{3}{5}} \operatorname{sen}^3(x) + x^2e^x$ que toma o valor 7 para $x = 0$.

8. Determine a função f tal que $f"(x) = \dfrac{8}{(x+1)^3}$, $f'(1) = -1$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

9. (a) Mostre que, com a substituição $\log x = t$, o cálculo de $P\left(\dfrac{1}{x}\,\mathrm{R}(\log x)\right)$, onde R designa uma função racional do seu argumento, pode fazer-se depender do cálculo da primitiva de uma função racional em t.

   (b) Primitive $f(x) = \dfrac{4}{x[(\log x)^3 - 3\log x - 2]}$.

10. Sendo $g(x) = \cos^n(x)\mathrm{R}(\operatorname{sen}(x))$, com n ímpar, onde R designa uma função racional do seu argumento , mostre que a substituição $\operatorname{sen}(x) = t$ permite primitivar g através da primitiva de uma função racional.

11. Primitive as funções definidas pelas expressões analíticas seguintes :

    (a) $x\ \operatorname{sen}(2x-1)$;

    (b) $x\ \operatorname{arc\,tg}(x)$;

    (c) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$;

    (d) $\dfrac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+3}}$;

    (e) $(x+1)e^x$;

    (f) $\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+5}} + \operatorname{tg}(9x)$;

    (g) $\dfrac{x^3+1}{5x^2-10x+50}$;

    (h) $\dfrac{2}{\sqrt{9-x^2}}$;

    (i) $\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^{2x}-2e^x+1}$;

    (j) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$;

(k) $\text{arc tg}(5x)$;

(l) $\dfrac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}$;

(m) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x+1}}$;

(n) $\cos^4(ax)$, $a \neq 0$;

(o) $x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}$;

(p) $\dfrac{1}{5+4\cos(x)}$;

(q) $\dfrac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}$;

(r) $(\log x+1)^2$;

(s) $\dfrac{\text{sen}(x)}{\cos(x)(1+\cos^2(x))}$;

(t) $\dfrac{3x+5}{2x^3-2x^2-2x+2}$;

(u) $\dfrac{x^3(x+3)}{3x^3+9x^2-12}$;

(v) $(x+1)^3e^{2x}$;

(w) $\dfrac{x^3-3x-4}{-4x+2x^2-16}$;

(x) $\dfrac{2x+1}{\sqrt{3x+2}}$;

(y) $\dfrac{2t-1}{t^4-2t^3+2t^2-2t+1}$;

(z) $\dfrac{\text{tg}(x)}{1+\cos(x)}$.

12. Mostre por primitivação que:

(a) $P[(\text{sen}(x))^{n-1}\text{sen}((n+1)x)] = \dfrac{1}{n}(\text{sen}(x))^n\text{sen}(nx)$;

(b) $P[(\cos x)^m \cos(nx)] = \dfrac{1}{m+n}[\cos^m(x)\text{sen}(nx) + mP[\cos^{m-1}(x)\cos((n-1)x)]]$.

13. Estabeleça a seguinte fórmula de recorrência :

$$P(\text{tg}(x))^n = \frac{(\text{tg}(x))^{n-1}}{n-1} - P(\text{tg}(x))^{n-2}, \quad n \geq 2.$$

14. Seja $f_n(x) = \dfrac{x^n}{\sqrt{a+bx}}$. Mostre que :

$$Pf_n(x) = \frac{2x^n\sqrt{a+bx}}{(2n+1)b} - \frac{2na}{(2n+1)b}Pf_{n-1}(x).$$