2 Primitivação (Integrais indefinidos)

Cálculo I – agrupamento I 16/17

baseado no texto de Virgínia Santos, Cálculo com funções de uma variável, 2009/10, pp. 165 — 241

Isabel Brás

UA

12/10/2016

Resumo dos Conteúdos

1. Noções Básicas; Integração Imediata ou Quase Imediata
2. Primitivação por Partes
3. Primitivação de Funções Racionais
4. Primitivação por Substituição (ou por mudança de variável)

Primitiva de uma função

Definição:

Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, onde I é um intervalo não degenerado de $\mathbb{R}$. Chama-se primitiva ou antiderivada de f a toda a função F diferenciável em I tal que, para todo o $x \in I$,

$$F'(x) = f(x).$$

Se f admite uma primitiva em I dizemos que f é primitivável em I.

Observações:

- Caso $I = [a, b]$, dizer que F é diferenciável em I significa que, para todo o $x \in]a, b[$, F é diferenciável em x e que existem e são finitas $F'_+(a)$ e $F'_-(b)$. Convenções análogas para: $I = [a, b[$ ou $I =]a, b]$.
- Toda a primitiva de uma função é uma função contínua.

Exemplos de primitivas

- $F(x) = x^2$ é uma primitiva de $f(x) = 2x$, em $\mathbb{R}$
- $F(x) = e^x + 3$ é uma primitiva de $f(x) = e^x$, em $\mathbb{R}$
- $F(x) = \cos x$ é uma primitiva de $f(x) = -\sin x$, em $\mathbb{R}$
- $F(x) = \sin x$ é uma primitiva de $f(x) = \cos x$, em $\mathbb{R}$

Exercício:

Indique uma primitiva da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$, em $\mathbb{R}^+$.

Proposição:

Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função e $F\colon I \to \mathbb{R}$ uma primitiva de f em I. Então, para cada $C \in \mathbb{R}$, $G(x) = F(x) + C$ é também uma primitiva de f em I.

Proposição:

Se $F\colon I \to \mathbb{R}$ e $G\colon I \to \mathbb{R}$ são duas primitivas de $f\colon I \to \mathbb{R}$, então existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) - G(x) = C$, para todo o $x \in I$.

Integral Indefinido

Definição:

À família de todas as primitivas de uma função f chamamos integral indefinido de f. Denota-se esse conjunto de funções por

$$\int f(x)\,dx$$

A f chamamos função integranda e a x variável de integração

Assim, atendendo à segunda proposição do slide anterior,
se F for uma primitiva de f, então

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Alguns Integrais Indefinidos Imediatos

1. $$\int x^p \, dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C \,, \quad C \in \mathbb{R} \quad (\text{ onde } \; p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$$

2. $$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |\, x \,| + C \,, \quad C \in \mathbb{R} \quad (\text{ onde } \; x \in \mathbb{R}^+ \text{ou } x \in \mathbb{R}^- \;)$$

3. $$\int e^x \, dx = e^x + C \,, \quad C \in \mathbb{R}$$

4. $$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \,, \quad C \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

5. $$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C \,, \quad C \in \mathbb{R}$$

6. $$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C \,, \quad C \in \mathbb{R}$$

Alguns Integrais Indefinidos Imediatos (cont.)

7. $$\int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + C \, , \quad C \in \mathbb{R}$$

8. $$\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\operatorname{cotg} x + C \, , \quad C \in \mathbb{R}$$

9. $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \operatorname{arcsen} x + C \, , \quad C \in \mathbb{R}$$

10. $$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + C \, , \quad C \in \mathbb{R}$$

11. $$\int \sec x \, \operatorname{tg} x \, dx = \sec x + C \, , \quad C \in \mathbb{R}$$

12. $$\int \operatorname{cosec} x \, \operatorname{cotg} x \, dx = -\operatorname{cosec} x + C \, , \quad C \in \mathbb{R}$$

Proposição:

Sejam f e g funções definidas em I e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ não simultaneamente nulos.
Se f e g são primitiváveis em I, então $\alpha f + \beta g$ é primitivável em I e

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx\ .$$

Exemplo de aplicação:

$$\begin{aligned} \int (5 \cos x - 3 \operatorname{sen} x)\ dx &= 5 \int \cos x\, dx - 3 \int \sin x\, dx \\ &= 5 \operatorname{sen} x + 3 \cos x + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Fórmula para a Primitivação Imediata

Proposição:

Sejam I e J dois intervalos de números reais, $f : I \to \mathbb{R}$ uma função primitivável e $g : J \to \mathbb{R}$ uma função tal que a composta $f \circ g$ está definida.
Se g é diferenciável em J, então $(f \circ g)g'$ é primitivável e tem-se

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,,$$

onde F é uma primitiva de f.

Exemplo de aplicação:

$$\int 2x\cos(x^2)\,dx = \operatorname{sen}(x^2) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

Lista de Integrais Indefinidos Imediatos

(Esta lista generaliza o conteúdo dos slides 7 e 8, e é uma consequência da Proposição do slide anterior)

1. $$\int g'(x)g^p(x)\,dx = \frac{g^{p+1}(x)}{p+1} + C\,, \quad C \in \mathbb{R} \text{ (onde } p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$$
2. $$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|\,g(x)\,| + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$$
3. $$\int g'(x)e^{g(x)}\,dx = e^{g(x)} + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$$
4. $$\int g'(x)a^{g(x)}\,dx = \frac{a^{g(x)}}{\ln a} + C\,, \quad C \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$
5. $$\int g'(x)\,\mathrm{sen}\,(g(x))\,dx = -\cos(g(x)) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$$
6. $$\int g'(x)\cos(g(x))\,dx = \mathrm{sen}\,(g(x)) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

7. $$\int g'(x)\sec^2(g(x))\,dx = \operatorname{tg}(g(x)) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

8. $$\int g'(x)\operatorname{cosec}^2(g(x))\,dx = -\operatorname{cotg}(g(x)) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

9. $$\int \frac{g'(x)}{\sqrt{1-(g(x))^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}(g(x)) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

10. $$\int \frac{g'(x)}{1+(g(x))^2}\,dx = \operatorname{arctg}(g(x)) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

11. $$\int g'(x)\sec(g(x))\,\operatorname{tg}(g(x))\,dx = \sec(g(x)) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

12. $$\int g'(x)\operatorname{cosec}(g(x))\,\operatorname{cotg}(g(x))\,dx = -\operatorname{cosec}(g(x)) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

Exemplos de Integrais Indefinidos “quase imediatos”

Exercícios:

Mostre que

1. $$\int \frac{x^4}{1+x^5}\,dx = \frac{1}{5}\ln|1+x^5| + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

2. $$\int \operatorname{sen}^n x \cos x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^{n+1} x}{n+1} + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,, \text{ para todo o } n \in \mathbb{N}$$

3. $$\int \operatorname{tg}^n x \sec^2 x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{n+1} x}{n+1} + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,, \text{ para todo o } n \in \mathbb{N}$$

4. $$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

Primitivação por Partes

Proposição:

Sejam f e g funções diferenciáveis em I. Então

$$\boxed{\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.}$$

Exemplo de aplicação:

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{x}_{f'}\underbrace{\ln x}_{g}\, dx &= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\, dx \\
&= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\, dx \\
&= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Observações sobre a Primitivação por Partes

- Esta fórmula é útil sempre que a função integranda se pode escrever como o produto de duas funções e além disso é conhecida uma primitiva de pelo menos uma delas.
- Sabendo primitivar apenas uma das funções, escolhe-se essa para primitivar e deriva-se a outra função.
- Quando conhecemos uma primitiva de cada uma das funções, devemos escolher para derivar a função que mais se simplifica por derivação (se alguma delas se simplificar!).
  Por vezes essa escolha é indiferente.
- Por vezes é necessário efetuar várias aplicações sucessivas da fórmula de integração por partes.
- Por vezes obtém-se novamente o integral que se pretende determinar. Nesses casos, interpreta-se a igualdade obtida como uma equação em que a incógnita é integral que se pretende determinar.

Primitivação de Funções Racionais

Definições

Uma função cuja expressão analítica admite a forma

$$\frac{N(x)}{D(x)}$$

onde N e D são polinómios em x com coeficientes reais e D é não nulo, diz-se uma função racional.
Caso $\text{grau}(N) < \text{grau}(D)$ dizemos que $\frac{N(x)}{D(x)}$ é uma fração própria.

Exemplos:

$f(x) = \dfrac{x^4 + 3x^3 + x - 1}{x^3 + x + 2}$ e $g(x) = \dfrac{x - 4}{x^3 + 2x}$ são funções racionais. g é própria, f não é própria.

A primitiva de uma função racional

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

pode sempre escrever-se como somas, produtos, quocientes e composições de funções racionais, logaritmos e arco-tangentes.

O seu processo de primitivação deve organizar-se do seguinte modo:

1. Caso $f(x)$ seja não própria, executar a divisão de polinómios $N(x)$ por $D(x)$, por forma a obter

   $$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}\ ;$$

   Caso $f(x)$ seja própria avançar para o passo seguinte;
2. Decompor em frações simples $\frac{R(x)}{D(x)}$;
3. Primitivar as frações simples e o polinómio $Q(x)$ (caso exista).

A divisão polinomial

Proposição:

Se $\text{grau}(N) \geq \text{grau}(D)$, então existem polinómios Q e R tal que $\text{grau}(R) < \text{grau}(D)$ tais que

$$N(x) = D(x)Q(x) + R(x).$$

A Q e R chamamos quociente e resto da divisão de N por D, respetivamente.

Assim, caso $\text{grau}(N) \geq \text{grau}(D)$,

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \underbrace{Q(x)}_{\text{polinómio}} + \underbrace{\frac{R(x)}{D(x)}}_{\text{fração própria}}$$

A redução à primitivação de frações simples

Como

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx = \int Q(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{D(x)}\,dx\ ,$$

e a primitivação de funções polinomiais é imediata, a primitivação de funções racionais reduz-se à primitivação de frações próprias, que por sua vez se pode reduzir à primitivação de frações simples.

Definição

Chamamos fração simples a toda a fração do tipo

$$\frac{A}{(x-\alpha)^p} \quad \text{ou} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^q},$$

onde $p, q \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $B, C \in \mathbb{R}$ não simultaneamente nulos e $\alpha,\ \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ são tais que $\beta^2 - 4\gamma < 0$.

Exemplos de frações simples:

$$\frac{2}{x-1}, \quad \frac{1}{x^2}, \quad \frac{x-2}{x^2+x+1}, \quad \frac{1}{(x^2+x+2)^3}$$

Proposição:

Toda a fração própria pode ser decomposta numa soma de frações simples.

Decomposição duma fração própria em frações simples

Fração a decompor: $\dfrac{R(x)}{D(x)}$, com $\text{grau}(R) < \text{grau}(D)$

Procedimento:

1. Decompor $D(x)$ em factores irredutíveis:

$$D(x) = a(x-\alpha_1)^{p_1} \dots (x-\alpha_n)^{p_n}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{q_1} \dots (x^2+\beta_m x+\gamma_m)^{q_m}$$

   onde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $p_i, q_j \in \mathbb{N}$, $\alpha_i, \beta_j, \gamma_j \in \mathbb{R}$, com $\beta_j - 4\gamma_j < 0$, para $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$.

2. Fazer corresponder a cada factor de $D(x)$ uma determinada fração simples de acordo com o seguinte:
   (i) Ao fator de $D(x)$ do tipo $(x-\alpha)^r$ $(r \in \mathbb{N})$ corresponde

$$\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(x-\alpha)^r}$$

   onde $A_1, \cdots, A_r$ são constantes reais a determinar.

(ii) Ao fator de $D(x)$ do tipo

$$(x^2 + \beta x + \gamma)^s, \quad \text{com} \quad \beta^2 - 4\gamma < 0 \quad \text{e} \quad s \in \mathbb{N}$$

corresponde

$$\frac{B_1 x + C_1}{x^2 + \beta x + \gamma} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + \beta x + \gamma)^2} + \cdots + \frac{B_s x + C_s}{(x^2 + \beta x + \gamma)^s}$$

onde B_i, C_i são constantes reais a determinar, $\quad i = 1, \cdots, s$.

3. Escrever $\frac{R(x)}{D(x)}$ como soma dos elementos simples identificados no ponto anterior e determinar as constantes que neles ocorrem, usando o método dos coeficientes indeterminados.

Exemplo:

Decomposição da fração própria $\frac{x}{x^2-5x+6}$ em frações simples:

- Fatorizar o denominador: $(x-3)(x-2)$; [Verifique!]
- Determinar A e B, reais, tais que

$$\frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

i.e., tais que

$$\begin{aligned} x &= A(x-3) + B(x-2) \\ x &= (A+B)x + (-3A-2B) \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{cases} A+B = 1 \\ -3A-2B = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtém-se $A=-2$ e $B=3$. [Verifique!]

Primitivação de Frações Simples

1. Fração do tipo: $\dfrac{A}{(x-\alpha)^r}$

   Se $r = 1$, $\displaystyle\int \frac{A}{x-\alpha}\,dx = A\ln|x-\alpha| + C,\ C \in \mathbb{R}$

   Se $r \neq 1$, $\displaystyle\int \frac{A}{(x-\alpha)^r}\,dx = \frac{A(x-\alpha)^{-r+1}}{-r+1} + C,\ C \in \mathbb{R}$

2. Fração do tipo: $\dfrac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^s}$

   Reduz-se à primitivação de frações do tipo (i) ou (ii) (podendo eventualmente usar-se mudança de variável (ver à frente slide 27)):

   (i) $\dfrac{x}{(1+x^2)^s}$;

   (ii) $\dfrac{1}{(1+x^2)^s}$;

Primitivação das frações de tipo (i) e (ii) do slide anterior:

(i) Fração do tipo: $\dfrac{x}{(1+x^2)^s}$

Se $s=1$, $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C,\ C\in\mathbb{R}$

Se $s\neq 1$, $\displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^s}\,dx = \frac{(1+x^2)^{-s+1}}{2(-s+1)} + C,\ C\in\mathbb{R}$

(ii) Fração do tipo: $\dfrac{1}{(1+x^2)^s}$

Se $s=1$, $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C,\ C\in\mathbb{R}$

Se $s\neq 1$, aplica-se, por exemplo, um método de primitivação por partes recursivo ou a mudança de variável (slide 27) $x = \operatorname{tg} t$.

Exemplo: $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-5x+6}\,dx$

Obter a decomposição de $\frac{x}{x^2-5x+6}$ em frações simples (ver slide 25):

$$\frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{-2}{x-2} + \frac{3}{x-3}$$

Integração:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{x^2-5x+6}\,dx &= \int \frac{-2}{x-2}\,dx + \int \frac{3}{x-3}\,dx \\
&= -2\ln|x-2| + 3\ln|x-3| + C\,,\, C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Primitivação por Substituição

Proposição

Sejam I e J intervalos de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função primitivável e $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e invertível tal que $\varphi(J) \subset I$. Então a função $(f \circ \varphi)\varphi'$ é primitivável e, sendo H uma primitiva de $(f \circ \varphi)\varphi'$, tem-se que $H \circ \varphi^{-1}$ é uma primitiva de f.

Observação

Na prática, quando calculamos uma primitiva recorrendo à Proposição anterior, usando a mudança de variável $x = \varphi(t)$, escrevemos, por abuso de linguagem,

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = H(\varphi^{-1}(x)) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Exemplo de aplicação da técnica de primitivação por substituição:

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{2x}}\,dx$$

Substituição de variável: $\sqrt{2x} = t$, donde resulta $x = \frac{t^2}{2}$, $t \geq 0$.

Esta substituição está definida pela função $\varphi(t) = \frac{t^2}{2}$, tal que $D_\varphi = J$, sendo J um intervalo adequado de $\mathbb{R}_0^+$. A função φ é diferenciável e invertível em J. Assim

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\sqrt{2x}}\,dx &= \int \frac{t}{1+t}\,dt \\
&= \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)\,dt \\
&= t - \ln|1+t| + C\,, \quad C \in \mathbb{R} \\
&= \sqrt{2x} - \ln(1+\sqrt{2x}) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Primitivação de funções envolvendo radicais

(usando substituições trigonométricas)

$\downarrow$

Permitem transformar a primitivação de uma função que envolve radicais na primitivação de uma função trigonométrica.

Tabela de substituições

	função com o radical:	substituição:
1.	$\sqrt{a^2+x^2}$, $a>0$	$x = a \operatorname{tg} t$, com $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
2.	$\sqrt{a^2-x^2}$, $a>0$	$x = a \operatorname{sen} t$, com $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
3.	$\sqrt{x^2-a^2}$, $a>0$	$x = a \sec t$, com $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$
4.	$\sqrt{a^2+b^2x^2}$, $a,b>0$	reduz-se ao caso 1.
5.	$\sqrt{a^2-b^2x^2}$, $a,b>0$	reduz-se ao caso 2.
6.	$\sqrt{-a^2+b^2x^2}$, $a,b>0$	reduz-se ao caso 3.
7.	$\sqrt{ax^2+bx+c}$, $a \neq 0$ e $b,c \in \mathbb{R}$	reduz-se a um dos anteriores.