Cálculo I

Pré-requisitos

2009/2010

Departamento de Matemática
Universidade de Aveiro

Conteúdo

1 Nota introdutória

Neste texto incluem-se as definições e os resultados que supomos conhecidos e fixamos as notações que serão utilizadas.

A leitura deste texto deve ser complementada com a leitura do texto teórico base de apoio à disciplina e com a resolução dos exercícios propostos.

2 Generalidades sobre funções

Sendo A e B dois conjuntos não vazios, uma função de A em B é uma correspondência que associa a cada elemento de A um e um só elemento de B. Dizemos que o conjunto A é o **domínio** da função e que o conjunto B é o seu **conjunto de chegada**. No que se segue estamos apenas interessados em funções reais de variável real, ou seja, funções cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}$ e cujo conjunto de chegada coincide com $\mathbb{R}$.

Formalizando, temos que uma **função real de variável real** é uma correspondência que a cada elemento de um conjunto $D \subset \mathbb{R}$ faz corresponder um único número real.

Sendo f uma função real de variável real definida pela expressão analítica $f(x)$, o domínio de f, que denotaremos por D_f, é o conjunto de números reais para os quais a expressão analítica que define f tem significado.

Exemplo 2.1. 1. Consideremos a função f definida por $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{x^3-x}}$. Como a expressão que define a função é uma raiz quadrada, o seu radicando tem de ser não negativo e, como o radicando é uma fracção, o seu denominador tem de ser não nulo. Temos então

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x+2}{x^3-x} \geq 0 \wedge x^3 - x \neq 0 \right\}$$

Cálculos auxiliares:

- **Determinação dos zeros do denominador da fracção**

  Temos
  $$x^3 - x = 0 \Longleftrightarrow x(x^2-1) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1$$

- **Estudo do sinal do radicando**

  Vamos fazer o estudo do quadro de sinais da fracção

	$-\infty$	-2		-1		0		1	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-1	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\dfrac{x+2}{x(x^2-1)}$	$+$	0	$-$	ND	$+$	ND	$-$	ND	$+$

Consequentemente

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} : (x \in]-\infty,-2] \cup]-1,0[\cup]1,+\infty[) \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq -1\} \\ &=]-\infty,-2] \cup]-1,0[\cup]1,+\infty[\,. \end{aligned}$$

2. Consideremos a função f definida por $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{e^{x^2-1}-1}$. Como a expressão que define a função é uma fracção o denominador não pode ser nulo e, como a expressão que define o numerador é uma raiz quadrada, o seu radicando tem de ser não negativo. Temos então

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2-1 \geq 0 \wedge x^3-2x \neq 0\}\,.$$

Uma vez que:

- $x^2-1 \geq 0 \iff x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$;
- $x^3-2x = 0 \iff x(x^2-2) = 0 \iff (x = 0 \vee x^2-2 = 0) \iff (x = 0 \vee x = \pm\sqrt{2})$ e, portanto,
  $x^3-2x \neq 0 \iff (x \neq 0 \wedge x \neq -\sqrt{2} \wedge x \neq \sqrt{2}) \iff x \in \mathbb{R} \setminus \{0,\sqrt{2},-\sqrt{2}\}$;
- $(]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[) \cap (\mathbb{R} \setminus \{0,\sqrt{2},-\sqrt{2}\}) =]-\infty,-\sqrt{2}[\cup]-\sqrt{2},-1[\cup]1,\sqrt{2}[,\cup]\sqrt{2},+\infty[$;

temos

$$D_f =]-\infty,-\sqrt{2}[,\cup]-\sqrt{2},-1[\cup]1,\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2},+\infty[\,.$$

Definição 2.2. O **contradomínio** de f, denotado CD_f é o conjunto de valores que f assume, isto é, $CD_f = \{f(x) : x \in D_f\} = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \wedge x \in D_f\}$.

Exemplo 2.3. A função f de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ tem contradomínio $\mathbb{R}_0^+$ já que a equação

$$y = f(x) \iff y = x^2$$

é impossível se $y \in \mathbb{R}^-$ e é possível se $y \in \mathbb{R}_0^+$.

2.1 Injectividade, sobrejectividade e zeros de uma função

Definição 2.4. Seja $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que a função f é

- **injectiva** se, para todos os $x_1, x_2 \in D_f$, se $x_1 \neq x_2$ então $f(x_1) \neq f(x_2)$;

- **sobrejectiva** se o seu contradomínio coincide com o seu conjunto de chegada, isto é, se, para todo o $y \in \mathbb{R}$, existe $x \in D_f$ tal que $y = f(x)$;

- **bijectiva** se f é simultaneamente injectiva e sobrejectiva.

Exemplo 2.5. 1. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada $x \in \mathbb{R}$ faz corresponder $f(x) = 2x+1$. Vamos provar que f é injectiva.

Para o efeito temos de mostrar que, para todos os $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$ o que é equivalente a provar que, para todos os $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, se $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$.

Sejam então $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Temos

$$f(x_1) = f(x_2) \Longleftrightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Longleftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Longleftrightarrow x_1 = x_2 \ ,$$

como pretendíamos.

Vamos provar que f é também sobrejectiva. Seja $y \in \mathbb{R}$, arbitrário. Vamos determinar $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$. Atendendo a que

$$f(x) = y \Longleftrightarrow 2x+1 = y$$

a determinação de $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$ resume-se à resolução em ordem a x da equação $2x+1 = y$. Como esta equação admite a solução $x = \dfrac{y-1}{2}$, podemos concluir que f é sobrejectiva.

Então f é bijectiva.

2. Consideremos a função f de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$.

A função f não é injectiva já que, por exemplo, $1 \neq -1$ e $f(1) = 2 = f(-1)$.

Esta função também não é sobrejectiva. De facto, sendo $y \in \mathbb{R}$, a equação

$$y = x^2 + 1 \Longleftrightarrow x^2 = y - 1$$

é impossível se $y - 1 < 0$, ou seja, é impossível se $y < 1$.

Definição 2.6. Seja $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Chamamos **zero** ou **raiz** de f a todo o $x \in D_f$ tal que $f(x) = 0$.

Exemplo 2.7. 1. A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^2 + 4$ não tem zeros uma vez que a equação

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow 2x^2 + 4 = 0$$

é uma equação impossível em $\mathbb{R}$.

2. Consideremos a função f de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x+1| - |x-1|$. A determinação dos zeros de f resume-se à resolução da equação

$$|x+1| - |x-1| = 0 \Longleftrightarrow |x+1| = |x-1| \, .$$

Atendendo às propriedades da função módulo temos

$$\begin{aligned}|x+1| = |x-1| \iff & (x+1 = x-1 \wedge x+1 \geq 0 \wedge x-1 \geq 0) \vee \\ & \vee (x+1 = -x+1 \wedge x+1 \geq 0 \wedge x-1 \leq 0) \vee \\ & \vee (-x-1 = x-1 \wedge x+1 \leq 0 \wedge x-1 \geq 0) \vee \\ & \vee (-x-1 = -x+1 \wedge x+1 \leq 0 \wedge x-1 \leq 0)\end{aligned}$$

Uma vez que as equações $x+1 = x-1$ e $-x-1 = -x+1$ são ambas impossíveis temos

$$\begin{aligned}|x+1| = |x-1| &\iff (2x = 0 \wedge x \geq -1 \wedge x \leq 1) \vee (2x = 0 \wedge x \leq -1 \wedge x \leq 1) \\ &\iff (x = 0 \wedge x \in [-1,1]) \vee (x = 0 \wedge x \in]-\infty,-1])\end{aligned}$$

Atendendo a que a condição

$$x = 0 \wedge x \in]-\infty,-1]$$

é uma condição impossível temos

$$|x+1| = |x-1| \iff (x = 0 \wedge x \in [-1,1]) \iff x = 0$$

pelo que a função considerada tem uma única raiz $x = 0$.

2.2 Operações com funções

Definição 2.8. Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções.

Chamamos **soma** de f com g e denotamo-la por $f+g$ à função cujo domínio é $D_f \cap D_g$ e tal que a cada $x \in D_f \cap D_g$ faz corresponder $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$.

$$\begin{array}{rccl} f+g: & D_f \cap D_g & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (f+g)(x) = f(x)+g(x) \end{array}$$

Chamamos **diferença** de f e g e denotamo-la por $f-g$ à função cujo domínio é $D_f \cap D_g$ e tal que a cada $x \in D_f \cap D_g$ faz corresponder $(f-g)(x) := f(x) - g(x)$.

$$\begin{array}{rccl} f-g: & D_f \cap D_g & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (f-g)(x) = f(x)-g(x) \end{array}$$

Chamamos **produto** de f por g e denotamo-lo por fg à função cujo domínio é $D_f \cap D_g$ e tal que a cada $x \in D_f \cap D_g$ associa $(fg)(x) := f(x)g(x)$.

$$\begin{array}{rccl} fg: & D_f \cap D_g & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (fg)(x) = f(x)g(x) \end{array}$$

Chamamos **quociente** de f por g e denotamo-lo por f/g à função cujo domínio é o conjunto dos pontos de $D_f \cap D_g$ onde g não se anula e tal que a cada $x \in D_{f/g}$ faz corresponder $(f/g)(x) := \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

$$\begin{array}{rccl} f/g: & \{x \in D_f \cap D_g : g(x) \neq 0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (f/g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array}$$

Seja CD_f o contradomínio da função f. Se $CD_f \cap D_g \neq \emptyset$ podemos construir a **composta** de g com f que denotamos por $g \circ f$ [1] . Esta função tem por domínio o conjunto

$$D = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$$

e, a cada $x \in D$, faz corresponder

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

Exemplo 2.9. Sejam f e g as funções definidas por $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ e $g(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$, respectivamente. Temos

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geq 0\} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

e

$$D_g = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{x+1} \geq 0 \wedge x + 1 \neq 0\right\} =]-\infty, -1[\cup[0, +\infty[$$

já que

$$\left(\frac{x}{x+1} \geq 0 \wedge x + 1 \neq 0\right) \Longleftrightarrow ((x \geq 0 \wedge x + 1 > 0) \vee (x \leq 0 \wedge x + 1 < 0)) \Longleftrightarrow (x \geq 0 \vee x < -1).$$

Consequentemente temos

$$D_f \cap D_g =]-\infty, -1[\cup[1, +\infty[$$

e, portanto, a soma de f com g é definida por

$$\begin{array}{rccl} f+g: &]-\infty, -1[\cup[1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (f+g)(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{\dfrac{x}{x+1}} \end{array}$$

o produto de f com g é a função definida por

$$\begin{array}{rccl} fg: &]-\infty, -1[\cup[1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (fg)(x) = \sqrt{x(x-1)} \end{array}$$

já que, para todo o $x \in]-\infty, -1[\cup[1, +\infty[$,

$$\sqrt{x^2 - 1}\sqrt{\frac{x}{x+1}} = \sqrt{(x-1)(x+1)\frac{x}{x+1}} = \sqrt{(x-1)x}.$$

[1] O símbolo $g \circ f$ lê-se “g após f”.

O quociente de f por g é a função definida por

$$\begin{array}{rccl} f/g: &]-\infty,-1[\cup[1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (f/g)(x)=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x+1)^2}{x}} \end{array}$$

já que, para todo o $x\in]-\infty,-1[\cup[1,+\infty[$,

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}}=\sqrt{\frac{(x^2-1)(x+1)}{x}}=\sqrt{\frac{(x-1)(x+1)^2}{x}}.$$

Vamos agora definir a função composta $g\circ f$. Temos

$$D_{g\circ f}=\left\{x\in\mathbb{R}: x\in D_f \wedge f(x)\in D_g\right\}.$$

Uma vez que $D_f=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$, $D_g=]-\infty,-1[\cup[0,+\infty[$ e $f(x)\geq 0$, para todo o $x\in D_f$, o que implica que, $f(x)\in D_g$, para todo o $x\in D_f$, temos

$$D_{f\circ g}=D_f.$$

Então

$$\begin{array}{rccl} g\circ f: &]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (g\circ f)(x)=\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}+1}} \end{array}$$

já que

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\sqrt{x^2-1}\right)=\sqrt{\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}+1}}.$$

2.3 Funções monótonas

Definição 2.10. Sejam $f: D_f\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função e $S\subset D_f$ um conjunto não vazio.

Dizemos que:

- f **é crescente em** S se, para todos os $x_1,x_2\in S$, se $x_1>x_2$ então $f(x_1)\geq f(x_2)$, ou seja, para todos os $x_1,x_2\in S$, se $x_1>x_2$ então $f(x_1)-f(x_2)\geq 0$;
- f **é crescente** se f é crescente em D_f, isto é, para todos os $x_1,x_2\in D_f$, se $x_1>x_2$ então $f(x_1)\geq f(x_2)$;
- f **é estritamente crescente em** S se, para todos os $x_1,x_2\in S$, se $x_1>x_2$ então $f(x_1)>f(x_2)$, ou seja, para todos os $x_1,x_2\in S$, se $x_1>x_2$ então $f(x_1)-f(x_2)>0$;
- f **é estritamente crescente** se f é estritamente crescente em D_f, ou seja, para todos os $x_1,x_2\in D_f$, se $x_1>x_2$ então $f(x_1)>f(x_2)$.

Exemplo 2.11. 1. Consideremos a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 1$ e vamos provar que f é estritamente crescente.

Sejam então $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que $x_1 > x_2$ e vamos provar que $f(x_1) > f(x_2)$, ou seja, vamos provar que $f(x_1) - f(x_2) > 0$.

Temos

$$f(x_1) - f(x_2) = 2x_1 - 1 - (2x_2 - 1) = 2x_1 - 2x_2 = 2(x_1 - x_2)$$

e, uma vez que, por hipótese, $x_1 - x_2 > 0$, podemos concluir que

$$f(x_1) - f(x_2) = 2(x_1 - x_2) > 0\,,$$

como pretendíamos.

2. Consideremos a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ e vamos provar que f é estritamente crescente em $S = \mathbb{R}^+$. Para o efeito temos de provar que, para todos os $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$, se $x_1 > x_2$, então $f(x_1) > f(x_2)$, ou seja, temos de provar que, para todos os $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$, se $x_1 > x_2$, então $f(x_1) - f(x_2) > 0$.

Sejam então $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ tais que $x_1 > x_2$. Temos

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1)^2 - (x_2)^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)\,.$$

Uma vez que x_1 e x_2 são ambos positivos, temos que $x_1 + x_2 > 0$. Por outro lado, como por hipótese $x_1 > x_2$, temos $x_1 - x_2 > 0$. Consequentemente, para todos os $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ tais que $x_1 > x_2$, o produto $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$ é positivo.

Está então provado que, para todos os $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$, se $x_1 > x_2$, então

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) > 0\,,$$

como pretendíamos.

Definição 2.12. Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e S um subconjunto de D_f, não vazio. Dizemos que:

- f **é decrescente em** S se, para todos os $x_1, x_2 \in S$, se $x_1 > x_2$ então $f(x_1) \leq f(x_2)$, ou seja, para todos os $x_1, x_2 \in S$, se $x_1 > x_2$ então $f(x_1) - f(x_2) \leq 0$;

- f **é decrescente** se é decrescente em D_f, isto é, para todos os $x_1, x_2 \in D_f$, se $x_1 > x_2$ então $f(x_1) \leq f(x_2)$.

- f **é estritamente decrescente em** S se, para todos os $x_1, x_2 \in S$, se $x_1 > x_2$ então $f(x_1) < f(x_2)$, ou seja, para todos os $x_1, x_2 \in S$, se $x_1 > x_2$ então $f(x_1) - f(x_2) < 0$;

- f **é estritamente decrescente** se f é estritamente decrescente em D_f, isto é, para todos os $x_1, x_2 \in D_f$, se $x_1 > x_2$ então $f(x_1) < f(x_2)$.

Exemplo 2.13. 1. Consideremos a função $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2$ e vamos provar que f é estritamente decrescente em $S=\mathbb{R}^-$. Para o efeito temos de provar que, para todos os $x_1,x_2\in\mathbb{R}^+$, se $x_1>x_2$, então $f(x_1)<f(x_2)$.

Sejam então $x_1,x_2\in\mathbb{R}^-$ tais que $x_1>x_2$. Temos

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1)^2-(x_2)^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2)<0$$

já que, uma vez que $x_1>x_2$, temos $x_1-x_2>0$ e, uma vez que $x_1,x_2\in\mathbb{R}^-$, temos $x_1+x_2<0$.

2. Consideremos a função $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2-x$ e vamos provar que f é estritamente decrescente.

Sejam então $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ tais que $x_1>x_2$ e vamos provar que $f(x_1)-f(x_2)<0$.

Temos

$$f(x_1)-f(x_2)=2-x_1-(2-x_2)=-x_1+x_2=-(x_1-x_2)$$

e, uma vez que, por hipótese, $x_1-x_2>0$ podemos concluir que

$$f(x_1)-f(x_2)=-(x_1-x_2)<0\,,$$

como pretendíamos.

Definição 2.14. Sejam $f:D_f\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função e S um subconjunto de D_f, não vazio.

- Dizemos que f **é monótona em** S se f é crescente ou decrescente em S e dizemos que f **é monótona** se é crescente ou decrescente.
- Dizemos que f **é estritamente monótona em** S se f é estritamente crescente ou estritamente decrescente em S.
- Se f é estritamente crescente ou estritamente decrescente dizemos que f **é estritamente monótona.**

Como veremos mais à frente o estudo da monotonia de uma função pode reduzir-se ao estudo do comportamento da derivada dessa função.

3 Exemplos de funções elementares

3.1 Funções trigonométricas

- **Função seno**

  Consideremos a função seno habitualmente denotada por sen e definida por

$$\begin{aligned}\mathrm{sen}:\mathbb{R}&\longrightarrow\mathbb{R}\\ x&\longmapsto\mathrm{sen}\,x\end{aligned}$$

1. O contradomínio desta função é o intervalo $[-1,1]$.

2. A função é periódica de período 2π, isto é,

$$\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen} x,$$

   para todo o $x \in \mathbb{R}$, donde resulta que

$$\operatorname{sen}(x+2k\pi) = \operatorname{sen} x\,,$$

   para todo o $x \in \mathbb{R}$ e, para todo o $k \in \mathbb{Z}$.

3. É uma função crescente em todo o intervalo do tipo

$$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi\,,\frac{\pi}{2}+\,2k\pi\right]\ \ ,\ \text{com}\ \ k\in\mathbb{Z}$$

   e decrescente em qualquer intervalo do tipo

$$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi\,,\frac{3\pi}{2}+\,2k\pi\right]\ \ ,\ \text{com}\ \ k\in\mathbb{Z}\,.$$

4. Atinge o seu valor máximo igual a 1 nos pontos da forma

$$\frac{\pi}{2}+2k\pi\,,\text{com}\ k\in\mathbb{Z}$$

   e o seu valor mínimo igual a -1 nos pontos da forma

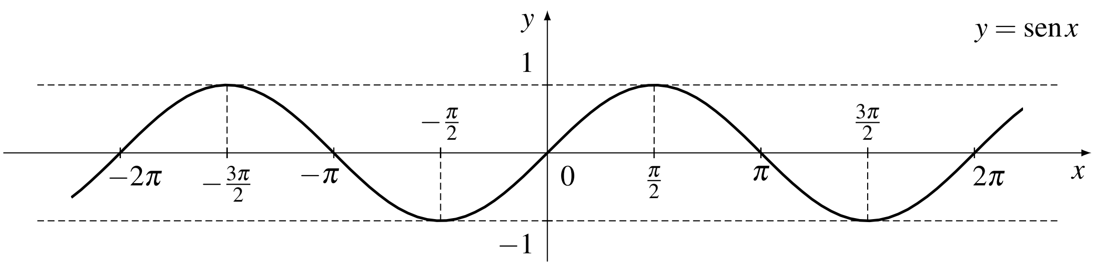
$$\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ \ \text{com}\ \ k\in\mathbb{Z}\,.$$

   com $k \in \mathbb{Z}$.

5. A função seno anula-se em todos os pontos da forma $k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

6. A função seno é uma função ímpar, isto é, $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

7. Um esboço do gráfico da função seno está representado na figura seguinte:



- **Função coseno** A função coseno denotada pelo símbolo cos e definida por

$$\begin{aligned}\cos:\mathbb{R}\ &\longrightarrow\ \mathbb{R}\\ x\ &\longmapsto\ \cos x\end{aligned}$$

satisfaz as propriedades seguintes

1. O coseno é uma função de contradomínio $[-1,1]$.

2. É periódica de período 2π, isto é,
$$\cos(x+2\pi) = \cos x\ ,$$
para todo o $x \in \mathbb{R}$, donde resulta que também
$$\cos(x+2k\pi) = \cos x\ ,$$
para todo o $x \in \mathbb{R}$ e para todo o $k \in \mathbb{Z}$.

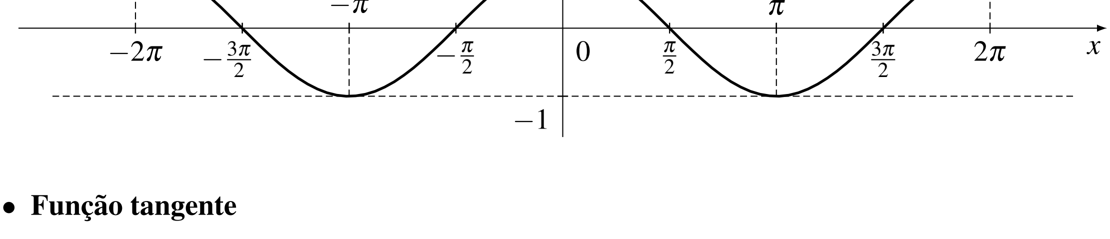
3. É uma função crescente em todo o intervalo do tipo,
$$[-\pi+2k\pi\ ,\ 2k\pi]\ ,\ \ \text{com}\ \ k \in \mathbb{Z}$$
e é decrescente em todo o intervalo do tipo
$$[2k\pi\ ,\ \pi+2k\pi]\ ,\ \ \text{com}\ \ k \in \mathbb{Z}\ .$$

4. Atinge o seu valor máximo igual a 1 em todos os pontos da forma
$$2k\pi\ ,\ \ \text{com}\ \ k \in \mathbb{Z}$$
e o seu valor mínimo igual a -1 em todos os pontos da forma
$$\pi+2k\pi\ ,\ \ \text{com}\ \ k \in \mathbb{Z}\ .$$

5. A função coseno anula-se nos pontos da forma
$$\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \text{com}\ \ k \in \mathbb{Z}\ .$$

6. É uma função par, isto é, $\cos(-x) = \cos x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

7. Na figura que apresentamos a seguir está representado um esboço do gráfico da função coseno.



- **Função tangente**

A tangente, habitualmente denotada pelo símbolo tg, é uma função cujo domínio é o conjunto

$$D_{\text{tg}} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \right\} .$$

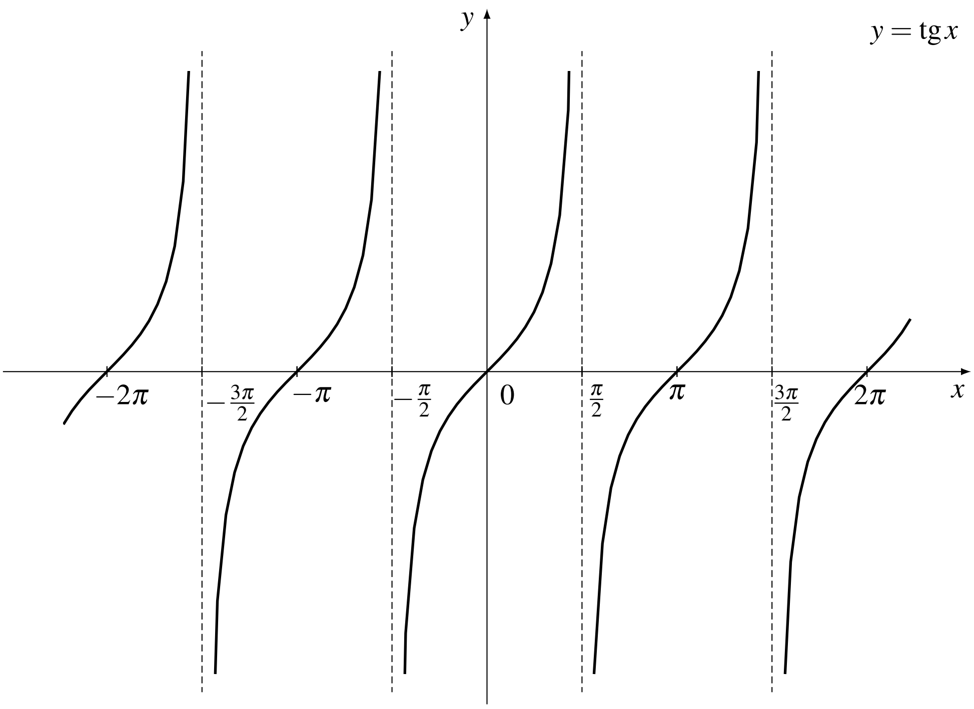
Temos

$$\begin{array}{rcl} \text{tg} : D_{\text{tg}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \text{tg}\, x := \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \end{array}$$

1. Esta função tem contradomínio $\mathbb{R}$.
2. É crescente em qualquer intervalo do tipo

$$\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi \ , \ \frac{\pi}{2} + k\pi \right[\ , \ \text{com} \ k \in \mathbb{Z} \ .$$

3. É uma função periódica de período π, isto é, $\text{tg}(x + k\pi) = \text{tg}\, x$, para todo o $x \in D_{\text{tg}}$, donde se deduz que também $\text{tg}(x + k\pi) = \text{tg}\, x$, para todo o $x \in D_{\text{tg}}$ e para todo o $k \in \mathbb{Z}$.
4. A função tangente anula-se em todos os pontos da forma $k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.
5. Atendendo a que o seno é uma função ímpar e o coseno é uma função par, concluímos que a tangente é uma função ímpar, isto é, $\text{tg}(-x) = -\,\text{tg}\, x$, para todo o $x \in D_{\text{tg}}$.
6. Na figura seguinte está representado um esboço do gráfico da função tangente.



- **Função cotangente**

A cotangente denotada por cotg é uma função de domínio

$$D_{\text{cotg}} = \{x \in \mathbb{R} : \ x \neq k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$$

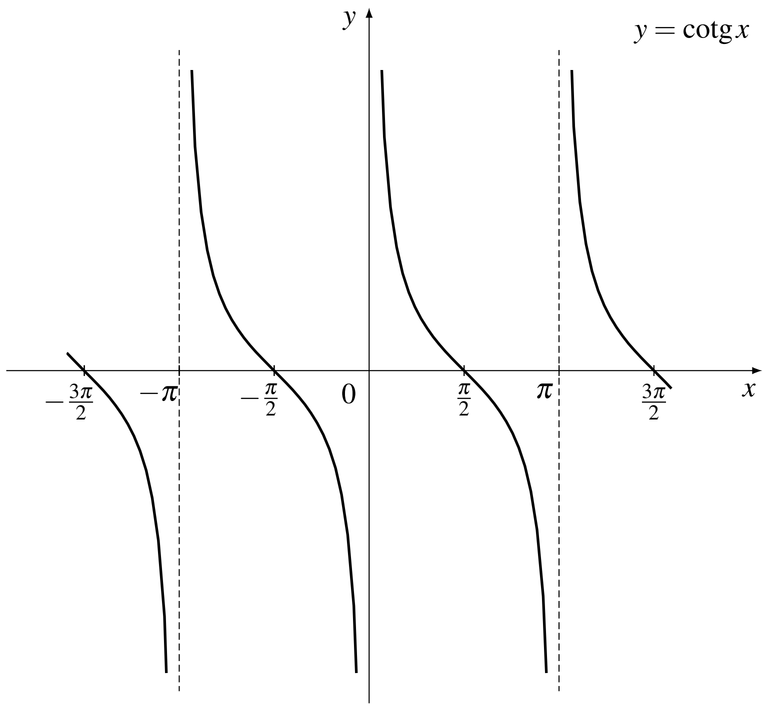
e é definida do modo seguinte:

$$\begin{array}{rcl} \text{cotg} : D_{\text{cotg}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \text{cotg}\, x = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x} \end{array}$$

1. O contradomínio da cotangente é o conjunto $\mathbb{R}$.
2. A função cotangente é decrescente em qualquer intervalo do tipo

$$]k\pi \ , \ (k+1)\pi[\ \ , \ \ \text{com} \ \ k \in \mathbb{Z}.$$

3. É uma função periódica de período π.
4. Como é o quociente de uma função par por uma função ímpar, a cotangente é uma função ímpar.
5. Um esboço do gráfico da função cotangente está representado na figura seguinte.



- **Função secante**

É uma função usualmente denotada por sec, cujo domínio é o conjunto

$$D_{\text{sec}} = \{x \in \mathbb{R} : \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ \ , \ \ \text{com} \ \ k \in \mathbb{Z}\}$$

e definida por

$$\begin{array}{rcl} \sec : D_{\sec} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sec x = \dfrac{1}{\cos x} \end{array}$$

1. O contradomínio da secante é o conjunto $]-\infty\,,\ -1]\cup[1\,,\ +\infty[$.

2. A função secante tem o mesmo sinal da função coseno, é crescente nos intervalos da forma

$$\left[2k\pi\,,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right[\ ,\ \text{com}\ k\in\mathbb{Z}$$

e nos intervalos da forma

$$\left]\frac{\pi}{2}+2k\pi\,,\ \pi+2k\pi\right]\ ,\ \text{com}\ k\in\mathbb{Z}\,.$$

É decrescente nos intervalos do tipo

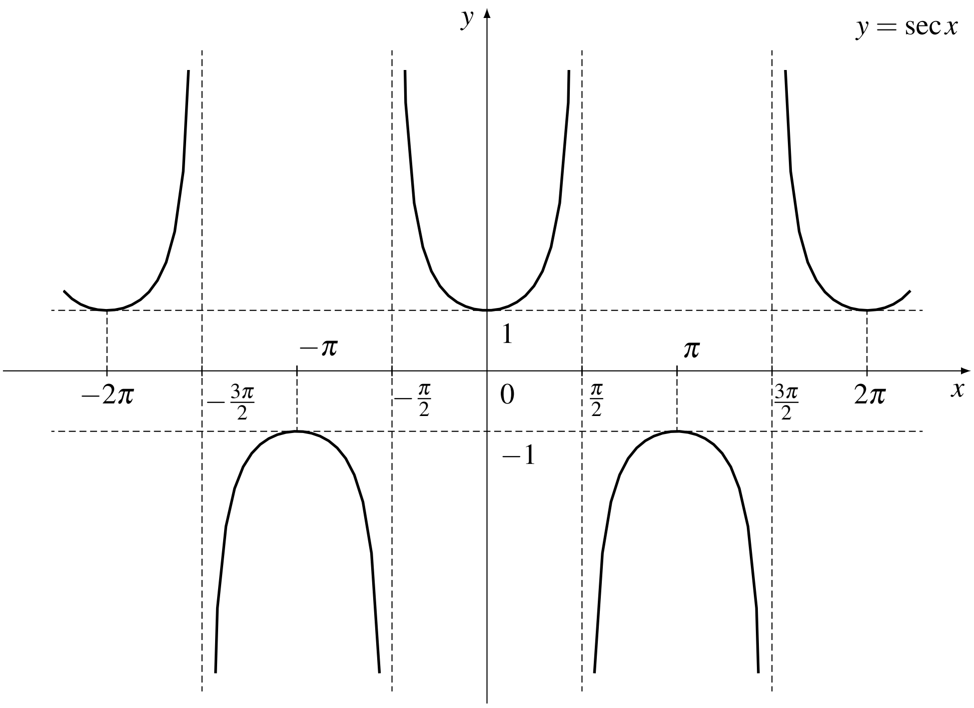
$$\left[-\pi+2k\pi\,,\ -\frac{\pi}{2}+2k\pi\right[\ ,\ \text{com}\ k\in\mathbb{Z}$$

e nos intervalos do tipo

$$\left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi\,,\ 2k\pi\right]\ ,\ \text{com}\ k\in\mathbb{Z}\,.$$

3. Da definição da função secante, e atendendo a que a função coseno é uma função par, resulta que a função secante é uma função par.

4. Um esboço do gráfico da secante encontra-se representado na figura seguinte.



- **Função cosecante**

A função cosecante denotada por cosec é definida de modo análogo ao da função secante. Temos

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{cosec} : D_{\operatorname{cosec}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{cosec} x := \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} \end{array}$$

onde $D_{\operatorname{cosec}} = \{x \in \mathbb{R} : \ x \neq k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$.

1. O contradomínio da função cosecante é também o conjunto $]-\infty \ , \ -1] \cup [1 \ , \ +\infty[$.
2. A função cosecante tem o mesmo sinal da função seno, é crescente nos intervalos da forma

$$\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ , \ \pi + 2k\pi\right[\ \ ,\text{com } \ k \in \mathbb{Z}$$

   e nos intervalos da forma

$$\left]\pi + 2k\pi \ , \ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right] \ \ , \ \text{com } \ k \in \mathbb{Z} \ .$$

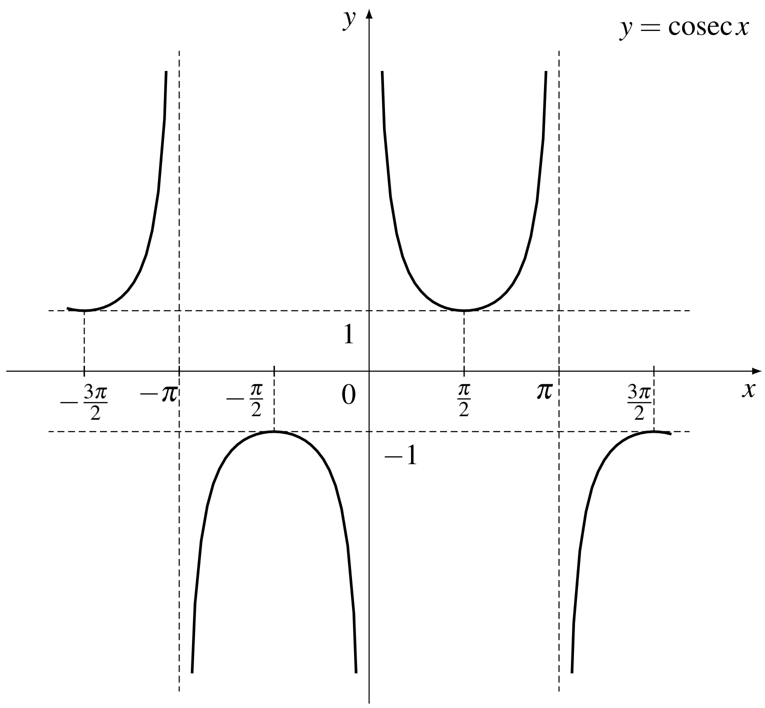
   É decrescente nos intervalos do tipo

$$\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ , \ 2k\pi\right[\ \ , \ \text{com } \ k \in \mathbb{Z}$$

   e nos intervalos do tipo

$$\left]2k\pi \ , \ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] \ \ , \ \text{com } \ k \in \mathbb{Z} \ .$$

3. A cosecante é uma função ímpar.
4. Na figura que apresentamos a seguir está representado um esboço do gráfico da função cosecante.



3.2 Função exponencial e função logaritmo

- **Função exponencial de base e**

Seja e o número de Neper. Recorde que este número é um número irracional situado entre dois e três tendo-se

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Consideremos a função, habitualmente designada função exponencial, que a cada $x \in \mathbb{R}$ faz corresponder e^x. Esta função foi estudada no Ensino Secundário. Vamos aqui recordar algumas das suas propriedades bem como o esboço do seu gráfico.

1. Como $\mathrm{e} > 0$ temos que $\mathrm{e}^x > 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

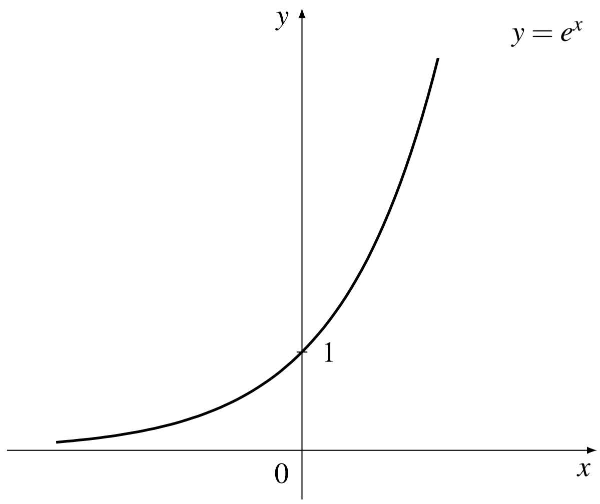
2. A função exponencial é uma função crescente em todo o seu domínio.

3. Valem as regras usuais das potências:

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{x+y} &= \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^y\\ \mathrm{e}^{x-y} &= \mathrm{e}^x/\mathrm{e}^y\\ (\mathrm{e}^x)^y &= \mathrm{e}^{xy}\end{aligned}$$

   para todos os $x, y \in \mathbb{R}$.

4. Um esboço do gráfico da função exponencial encontra-se representado na figura seguinte:



- **Função exponencial de base** a**,** $(a > 0)$

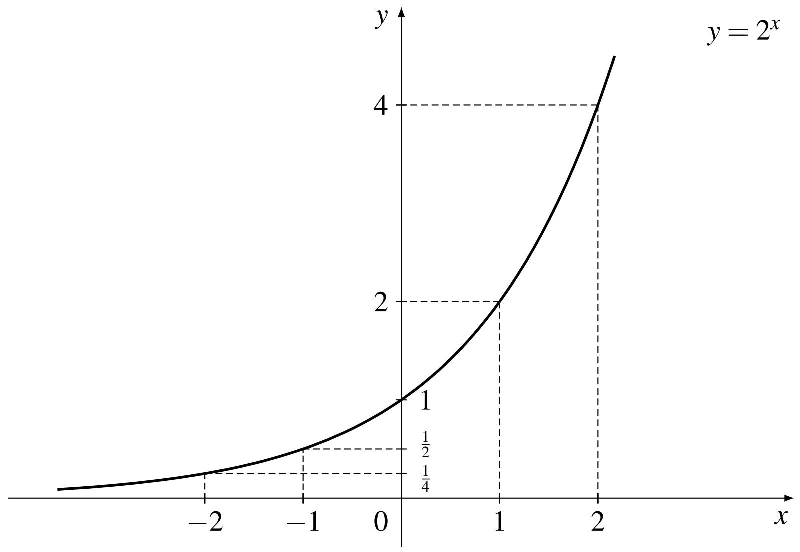
A função exponencial de base a é uma função de domínio $\mathbb{R}$ que a cada $x \in \mathbb{R}$ faz corresponder a^x. Já recordámos algumas propriedades da função exponencial de base e.

Se $a = 1$, então $a^x = 1$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Neste caso estamos perante a função constante igual a 1. Vamos portanto considerar apenas o caso em que $a > 0$ e $a \neq 1$.

Caso em que $a > 1$

Esta função tem as mesmas propriedades que a função exponencial de base e. De facto temos:

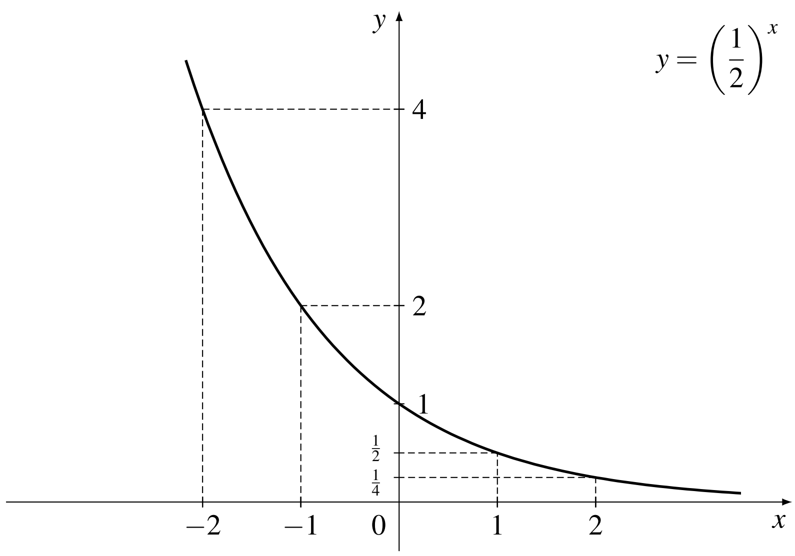
1. $a^x > 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$;
2. a^x é crescente em todo o seu domínio.
3. O contradomínio da função exponencial de base a é o conjunto $\mathbb{R}^+$.
4. Na figura seguinte apresentamos, a título de exemplo, um esboço do gráfico da função exponencial de base 2.



Caso em que $0 < a < 1$

Neste caso temos:

1. O contradomínio da função exponencial de base a é $\mathbb{R}^+$.
2. A função é decrescente em $\mathbb{R}$.
3. Na figura seguinte está representado, a título de exemplo, um esboço do gráfico da função exponencial de base $\dfrac{1}{2}$.



Finalmente convém observar que valem para a função exponencial de base a, $(a > 0)$, as propriedades usuais das potências:

$$a^{x+y} = a^x a^y \;\; ; \;\; a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \;\; ; \;\; (a^x)^y = a^{xy}$$

para todos os $x, y \in \mathbb{R}$.

- **Função logaritmo neperiano**

Esta função é usualmente denotada pelo símbolo log ou pelo símbolo ln. Temos então

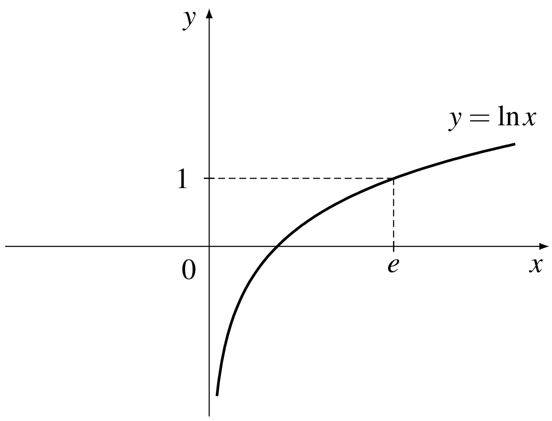
$$\begin{array}{rcl} \ln : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array}$$

O símbolo $\ln x$ lê-se "logaritmo de x" ou "logaritmo neperiano de x". O símbolo ln lê-se "logaritmo" ou "logaritmo neperiano".

1. A função logaritmo tem contradomínio $\mathbb{R}$;

2. É crescente em todo o seu domínio.

3. Na figura seguinte apresentamos um esboço do gráfico da função logaritmo neperiano.



A função logaritmo goza das propriedades seguintes. Para todos os $x, y \in \mathbb{R}^+$,

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

2. $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

3. $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$, para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$.

- **Função logaritmo de base** a**,** $a > 0$**,** $a \neq 1$

Esta função de domínio $\mathbb{R}^+$ e contradomínio $\mathbb{R}$ representa-se habitualmente pelo símbolo $\log_a$ que se lê "logaritmo de base a". A cada $y \in \mathbb{R}^+$ esta função faz corresponder o único $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = a^x$.

Temos

$$\begin{aligned} \log_a : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \log_a x \end{aligned}$$

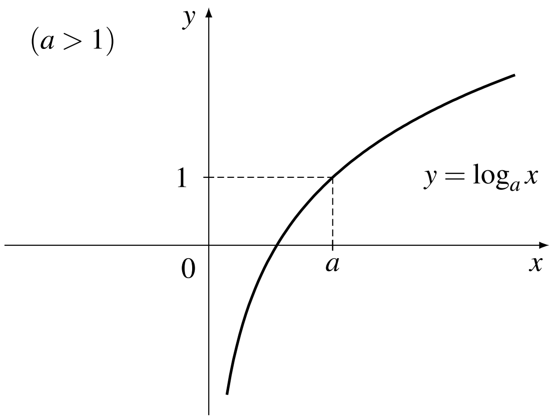
O símbolo $\log_a x$ lê-se "logaritmo de x na base a".

Caso em que $a > 1$

Neste caso temos que a função logaritmo de base a

1. tem contradomínio $\mathbb{R}$;
2. é estritamente crescente.

Na figura seguinte apresenta-se um esboço do gráfico da função logaritmo de base a com $a > 1$.

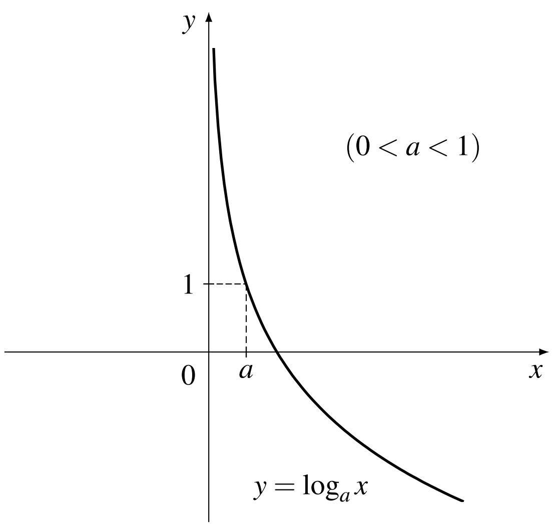


Caso em que $0 < a < 1$

Neste caso a função logaritmo de base a

1. tem contradomínio $\mathbb{R}$;
2. é estritamente decrescente.

Na figura seguinte apresenta-se um esboço do gráfico da função logaritmo de base a com $0 < a < 1$.



4 Sucessões de números reais

4.1 Definições

Definição 4.1. Uma **sucessão de números reais** é uma função real de domínio $\mathbb{N}$

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & f(n) \end{array}$$

que pode também ser representada por

$$\begin{array}{rccc} (u_n): & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & u_n \end{array}$$

Exemplo 4.2. 1. Sendo $c \in \mathbb{R}$ a aplicação

$$\begin{array}{rccc} (u_n): & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & u_n = c \end{array}$$

é uma sucessão de números reais que se designa **sucessão constante igual a** c. No caso particular em que $c = 0$ a sucessão constante igual a c designa-se **sucessão nula**.

2. A aplicação

$$\begin{array}{rccc} (u_n): & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & u_n = \operatorname{sen} \dfrac{1}{n} \end{array}$$

é uma sucessão de números reais.

Definição 4.3. Sendo

$$\begin{array}{rccc} (u_n): & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & u_n \end{array} \qquad \left(\text{ou} \quad \begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & f(n) \end{array} \right)$$

uma sucessão de números reais dizemos que $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ (ou $f(1), f(2), \cdots, f(n), \cdots$) são os **termos da sucessão**.

Dado $r \in \mathbb{N}$, diz-se que u_r (ou $f(r)$) é o **termo de ordem** r.

À expressão u_n (ou $f(n)$) que permite determinar qualquer termo, conhecida a sua ordem, chama-se **termo geral da sucessão**.

Exemplo 4.4. 1. Sendo $c \in \mathbb{R}$, os termos da sucessão constante igual a c são todos iguais a c e o seu termo geral é também igual a c.

2. Considere-se a sucessão $((-1)^n)$. Os termos desta sucessão são, alternadamente, -1 e 1 e o seu termo geral é $(-1)^n$. Os seus termos de ordem ímpar são todos iguais a -1 e os seus termos de ordem par são todos iguais a 1.

Definição 4.5. Ao contradomínio da sucessão de termo geral u_n,

$$\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$$

(ou $\{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$) chama-se **conjunto dos termos da sucessão**.

Chama-se **subsucessão** da sucessão (u_n) à restrição desta sucessão a um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$.

Exemplo 4.6.

1. O conjunto singular $\{c\}$ é o conjunto dos termos da sucessão constante igual a c.

   Qualquer subsucessão da sucessão constante igual a c é uma aplicação constante igual c.

2. O conjunto $\{-1, 1\}$ é o conjunto dos termos da sucessão de termo geral $(-1)^n$.

   A subsucessão dos termos pares, $\left((-1)^{2n}\right)$, é a sucessão constante igual a 1 e a subsucessão dos termos ímpares, $\left((-1)^{2n+1}\right)$, é a sucessão constante igual a -1.

No que se segue utiliza-se a notação (u_n) para denotar a sucessão de termo geral u_n. Além disso, utilizaremos o termo **sucessão** com o significado de sucessão de números reais.

Para determinar uma sucessão pode utilizar-se uma fórmula que defina o seu termo geral, ou uma propriedade que caracterize todos os seus termos, ou um processo de recorrência.

Exemplo 4.7.

1. Sendo (u_n) a sucessão cujos termos são os números naturais pares, o seu termo geral pode ser definido pela fórmula $u_n = 2n$. Obviamente, os termos desta sucessão são caracterizados pela propriedade "*ser um número natural par*".

   Os termos desta sucessão podem também ser definidos recursivamente por

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = u_{n-1} + 2, \quad \text{se} \quad n \geq 2 \end{cases}$$

2. A sucessão cujos termos são definidos pela propriedade "*ser um número natural ímpar*"pode ser definida recursivamente por

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + 2, \quad \text{se} \quad n \geq 2 \end{cases}$$

   ou pelo termo geral $u_n = 2n - 1$.

4.2 Sucessões monótonas

As definições que apresentamos nesta secção resultam como casos particulares das definições correspondentes apresentadas para funções reais de variável real.

Definição 4.8. Uma sucessão (u_n) diz-se

- **crescente** se $u_{n+1} \geq u_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$;
- **estritamente crescente** se $u_{n+1} > u_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$;
- **decrescente** se $u_{n+1} \leq u_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$;

- **estritamente decrescente** se $u_{n+1} < u_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 4.9. 1. Consideremos a sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{1}{n}$. Uma vez que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $0 < n < n+1$, temos

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n},$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$ e, portanto, a sucessão $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ é estritamente decrescente.

2. Consideremos a sucessão de termo geral $u_n = \cos\dfrac{1}{n}$. Como vimos temos, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$. Uma vez que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n} \in]0,1] \subset \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ e a função coseno é estritamente decrescente em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, temos

$$\cos\frac{1}{n+1} > \cos\frac{1}{n},$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Consequentemente, a sucessão $\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)$ é estritamente crescente.

3. Sendo $c \in \mathbb{R}$, a sucessão constante igual a c é simultaneamente crescente e decrescente.

Definição 4.10. Chama-se **sucessão monótona** a toda a sucessão que é crescente ou decrescente e chama-se **sucessão estritamente monótona** a toda a sucessão que é estritamente crescente ou estritamente decrescente.

Exemplo 4.11. As sucessões $\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)$ e $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ são estritamente monótonas e a sucessão constante igual a $c \in \mathbb{R}$ é monótona.

4.3 Sucessões limitadas

Definição 4.12. Uma sucessão (u_n) diz-se **limitada superiormente** se existir um número real α tal que $u_n \leq \alpha$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Ao número α ou a qualquer outro número real superior a α chama-se **majorante** do conjunto dos termos da sucessão.

Exemplo 4.13. Consideremos a sucessão de termo geral $u_n = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4n}$. Uma vez que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\pi}{4n} \in \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ e a função tangente é crescente em $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ temos que

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n} \leq \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1,$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Então a sucessão considerada é limitada superiormente e qualquer número real do intervalo $[1, +\infty[$ é um majorante do conjunto dos termos da sucessão.

Definição 4.14. Uma sucessão (u_n) diz-se **limitada inferiormente** se existir um número real β tal que $u_n \geq \beta$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Ao número β ou a qualquer outro número real inferior a β chama-se **minorante** do conjunto dos termos da sucessão.

Exemplo 4.15. A sucessão (e^n) é limitada inferiormente, uma vez que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{e}^n \geq \mathrm{e}\,.$$

Qualquer número real do intervalo $]-\infty, \mathrm{e}]$ é um minorante do conjunto dos termos da sucessão.

Definição 4.16. Uma sucessão (u_n) diz-se **limitada** se for limitada superiormente e inferiormente, isto é, se existirem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha \leq u_n \leq \beta\,,$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 4.17.

1. A sucessão de termo geral $u_n = \operatorname{sen}(\mathrm{e}^n)$ é limitada, uma vez que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, temos

$$-1 \leq \operatorname{sen}(\mathrm{e}^n) \leq 1\,.$$

2. Uma vez que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, se tem $0 < \dfrac{1}{n^2} \leq 1$, obtemos

$$0 < 1 - \frac{1}{n^2} \leq 1$$

e, portanto, a sucessão de termo geral $u_n = 1 - \dfrac{1}{n^2}$ é limitada.

4.4 Progressões

Nesta secção apresentam-se dois casos particulares de sucessões, designadas por progressões aritméticas e progressões geométricas.

4.4.1 Progressões aritméticas

Definição 4.18. Uma sucessão (u_n) é uma **progressão aritmética** se existir um número real r tal que

$$u_{n+1} - u_n = r\,,$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Ao número r chama-se **razão** da progressão aritmética.

Exemplo 4.19.

1. A sucessão $(2n+3)$ é uma progressão aritmética de razão 2, já que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + 3 - (2n+3) = 2n + 5 - 2n - 3 = 2\,.$$

2. De um modo geral, sendo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a sucessão de termo geral $u_n = \alpha n + \beta$ é uma progressão aritmética de razão α já que

$$u_{n+1} - u_n = \alpha(n+1) + \beta - (\alpha n + \beta) = \alpha n + \alpha + \beta - \alpha n - \beta = \alpha\,,$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

É um exercício simples verificar que:

- se $r > 0$, então a progressão aritmética é estritamente crescente;
- se $r < 0$, então a progressão aritmética é estritamente decrescente;
- se $r = 0$, então a progressão aritmética é constante.

Prova-se também que:

- o termo geral de uma progressão aritmética é dado pela expressão

$$u_n = u_1 + (n-1) \times r\,,$$

onde n é a ordem do termo, u_1 é o primeiro termo e r é a razão;

- a soma de n termos consecutivos de uma progressão aritmética a começar no termo de ordem k é dada por

$$S = \frac{u_k + u_{n+k-1}}{2} \times n\,;$$

- a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é dada por

$$S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n\,.$$

Exemplo 4.20. 1. A progressão aritmética de razão $r = 4$ e primeiro termo $u_1 = 1$ é uma sucessão estritamente crescente de termo geral

$$u_n = 1 + (n-1) \times 4 = 4n - 3\,.$$

A soma dos primeiros 100 termos desta sucessão é dada por

$$S_{100} = \sum_{k=1}^{100} (4k-3) = \frac{1 + u_{100}}{2} \times 100\,.$$

Uma vez que

$$u_{100} = 400 - 3 = 397$$

temos

$$S_{100} = \frac{1+397}{2} \times 100 = 398 \times 50 = 19900\,.$$

A soma dos 51 termos consecutivos desta uma progressão aritmética a começar no termo de ordem 50 é dada por

$$S = \sum_{k=50}^{100}(4k-3) = \frac{u_{50}+u_{100}}{2} \times 51$$

e, atendendo a que $u_{50} = 200-3 = 197$, obtemos

$$S = \frac{197+397}{2} \times 51 = 15147\,.$$

2. Sendo $\alpha \in \mathbb{R}$ a soma dos n primeiros termos da sucessão constante igual a α é dada por

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha = n\alpha\,.$$

3. A progressão aritmética de razão $r = -\sqrt{2}$ e primeiro termo $u_1 = 3$ é uma sucessão estritamente decrescente de termo geral

$$u_n = 3-(n-1)\times\sqrt{2} = -\sqrt{2}n+3+\sqrt{2}\,.$$

A soma dos primeiros vinte termos desta sucessão é dada por

$$S_{20} = \sum_{k=1}^{20}(-\sqrt{2}k+3+\sqrt{2}) = \frac{3+u_{20}}{2} \times 20\,.$$

Uma vez que

$$u_{20} = 3-19\sqrt{2}$$

temos

$$S_{20} = \frac{3+3-19\sqrt{2}}{10} = \frac{6-19\sqrt{2}}{10}\,.$$

Temos também

$$\sum_{k=10}^{20}(-\sqrt{2}k+3+\sqrt{2}) = \frac{u_{10}+u_{20}}{2} \times 11$$

e, uma vez que $u_{10} = 3-9\sqrt{2}$ obtemos

$$\sum_{k=10}^{20}(-\sqrt{2}k+3+\sqrt{2}) = \frac{3-9\sqrt{2}+3-19\sqrt{2}}{2} \times 11 = \frac{6-28\sqrt{2}}{2} \times 11 = \frac{66-308\sqrt{2}}{2}\,.$$

4.4.2 Progressões geométricas

Definição 4.21. Uma sucessão de números reais não nulos (u_n) é uma **progressão geométrica** se existir um número real r, não nulo, tal que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = r\,.$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Ao número r chama-se **razão** da progressão geométrica.

Exemplo 4.22. Para todo o $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a sucessão de termo geral $u_n = \alpha^n$ é uma progressão geométrica de razão α, já que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\alpha^{n+1}}{\alpha^n} = \alpha\,,$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Não é difícil verificar que dada uma progressão geométrica de razão r:

- se $r > 1$ e $u_1 > 0$, então a progressão geométrica é estritamente crescente;
- se $r > 1$ e $u_1 < 0$, então a progressão geométrica é estritamente decrescente;
- se $0 < r < 1$ e $u_1 > 0$, então a progressão geométrica é estritamente decrescente;
- se $0 < r < 1$ e $u_1 < 0$, então a progressão geométrica é estritamente crescente;
- se $r < 0$, então a progressão geométrica não é monótona, uma vez que os seus termos são, alternadamente, positivos e negativos;
- se $r = 1$, então a progressão geométrica é constante.

Prova-se também que:

- o termo geral de uma progressão geométrica é dado por

$$u_n = u_1 \times r^{n-1}\,,$$

  onde n é a ordem do termo, u_1 é o primeiro termo e r é a razão da progressão;

- a soma de n termos consecutivos de uma progressão geométrica de razão $r \neq 1$ a começar no termo de ordem k é dada por

$$S = u_k \times \frac{1-r^n}{1-r}\,;$$

- a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de primeiro termo u_1 e de razão $r \neq 1$ é dada por

$$S_n = u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}\,.$$

Exemplo 4.23. 1. Sendo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, a sucessão (α^{n-1}) é uma progressão geométrica de primeiro termo 1 e razão α.

Supondo $\alpha \neq 1$, a soma dos n primeiros termos desta sucessão é dada por

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha^{k-1} = \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$$

e a soma de n termos consecutivos a começar no termo de ordem p é dada por

$$S = \sum_{k=p}^{n+p-1} \alpha^{k-1} = \alpha^{p-1} \times \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}\,.$$

2. Sendo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, consideremos a progressão geométrica de primeiro termo α e razão α. O seu termo geral é dado por
$$u_n = \alpha \times \alpha^{n-1} = \alpha^n .$$
Supondo $\alpha \neq 1$, a soma dos n primeiros termos desta sucessão é dada por
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha^k = \alpha \times \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$$
e a soma de n termos consecutivos a começar no termo de ordem p é dada por
$$S = \sum_{k=p}^{n+p-1} \alpha^k = \alpha^p \times \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} .$$

4.5 Limite de uma sucessão

Nesta secção apresentam-se as definições de limite de uma sucessão, sucessão convergente, sucessão divergente, bem como algumas propriedades dos limites de sucessões convergentes.

4.5.1 Definição de limite de uma sucessão

Definição 4.24. Diz-se que o número real a é o **limite** da sucessão (u_n) e escreve-se $u_n \to a$, ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, ou apenas $\lim u_n = a$ se, para todo o $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se
$$n > p ,$$
então
$$|u_n - a| < \varepsilon .$$

Exemplo 4.25. Consideremos a sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{1}{n}$. Vamos provar, usando a definição, que esta sucessão tem limite nulo.

Seja $\varepsilon > 0$, arbitrário. Vamos então provar que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se
$$n > p ,$$
então
$$|u_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon .$$

Observe-se que
$$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \Longleftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Longleftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} .$$

Sendo p um número natural superior a $\dfrac{1}{\varepsilon}$, temos $\dfrac{1}{p} < \varepsilon$ e, sendo $n > p$, temos que
$$\frac{1}{n} < \frac{1}{p} < \varepsilon .$$

Está então provado que, para todo o $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$, $\left(p > \dfrac{1}{\varepsilon}\right)$ tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, se $n > p$, então $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$, o que permite afirmar que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0\,.$$

A definição apresentada pode ser traduzida do modo seguinte: para toda a vizinhança de a, por pequena que seja, existe uma ordem p a partir da qual todos os termos da sucessão pertencem a essa vizinhança.

Definição 4.26. Sejam (u_n) uma sucessão de números reais e $a \in \mathbb{R}$.

Se $\lim u_n = a$, a sucessão (u_n) diz-se **convergente**.

No caso particular de $a = 0$, a sucessão (u_n) diz-se um **infinitésimo**.

Exemplo 4.27. A sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{1}{n}$ é um infinitésimo.

Definição 4.28. Diz-se que uma sucessão (u_n) é um **infinitamente grande positivo** e escreve-se $u_n \to +\infty$, ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, ou apenas $\lim u_n = +\infty$ se, para todo o $M > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, se

$$n > p\,,$$

então

$$u_n > M\,.$$

Exemplo 4.29. Vamos usar a definição para provar que a sucessão de termo geral $u_n = n+2$ tem limite $+\infty$.

Seja $M > 0$, arbitrário. Vamos provar que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, se

$$n > p\,,$$

então

$$n+2 > M\,.$$

Observe-se que,

$$n+2 > M \Longleftrightarrow n > M-2\,.$$

Sendo p um número natural superior a $M-2$ temos que, se $n > p$, então $n > M-2$ e, portanto, $n+2 > M$.

Fica então provado que, para todo o $M > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$, $(p > M-2)$, tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, se

$$n > p\,,$$

então

$$n+2 > p+2 > M\,.$$

Podemos então concluir que

$$\lim_{n\to+\infty}(n+2) = +\infty .$$

Definição 4.30. Diz-se que uma sucessão (u_n) é um **infinitamente grande negativo** e escreve-se $u_n \to -\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, ou apenas $\lim u_n = -\infty$ se a sucessão $(-u_n)$ é um infinitamente grande positivo, isto é, se para todo o $M > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, se

$$n > p\,,$$

então

$$-u_n > M\,.$$

Exemplo 4.31. Consideremos a sucessão e termo geral $u_n = 1-n$. Vamos usar a definição para provar que esta sucessão tem limite $-\infty$.

Seja $M > 0$, arbitrário. Temos de provar que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, se

$$n > p\,,$$

então

$$-u_n = -1+n > M\,.$$

Observe-se que,

$$-1+n > M \Longleftrightarrow n > M+1\,.$$

Sendo p um número natural superior a $M+1$ temos que, se $n > p$, então $n > M+1$ e, portanto, $-1+n > M$.

Fica então provado que, para todo o $M > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$, $(p > M+1)$, tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, se

$$n > p\,,$$

então

$$-1+n > p-1 > M\,.$$

Podemos então concluir que

$$\lim_{n\to+\infty}(1-n) = -\infty .$$

Definição 4.32. Uma sucessão diz-se **divergente** se não for convergente.

Resulta desta definição que todo o infinitamente grande positivo e todo o infinitamente grande negativo são sucessões divergentes.

4.5.2 Propriedades dos limites

A seguir apresentam-se algumas propriedades dos limites de sucessões convergentes.

As demonstrações destes resultados podem ser encontradas em, por exemplo, *Introdução à Análise Matemática* de J. Campos Ferreira, Edição da Fundação Calouste Gulbenkian.

1 - O limite de uma sucessão convergente é único.

2 - Toda a sucessão constante é convergente e tem por limite essa constante.

3 - Toda a subsucessão de uma sucessão convergente para a também converge para a.

4 - Toda a sucessão monótona e limitada é convergente.

5 - Se (u_n) e (v_n) são sucessões convergentes, então as sucessões $(u_n + v_n)$, $(u_n - v_n)$ e $(u_n.v_n)$ são também convergentes e verificam-se as igualdades seguintes:

5.1 - $\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n$

5.2 - $\lim(u_n - v_n) = \lim u_n - \lim v_n$

5.3 - $\lim(u_n.v_n) = \lim u_n . \lim v_n$

6 - Se (u_n) e (v_n) são sucessões convergentes, $v_n \neq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e $\lim v_n \neq 0$, então a sucessão $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ é convergente e

$$\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{\lim u_n}{\lim v_n} .$$

7 - Se (u_n) é uma sucessão convergente e $q \in \mathbb{N}$, então a sucessão $({u_n}^q)$ também é convergente e

$$\lim({u_n}^q) = (\lim u_n)^q .$$

8 - Se (u_n) é uma sucessão convergente e q é um número natural ímpar superior a 1, então a sucessão $(\sqrt[q]{u_n})$ é convergente e

$$\lim \sqrt[q]{u_n} = \sqrt[q]{\lim u_n} .$$

9 - Sendo q um número natural par, o resultado anterior verifica-se desde que $u_n \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

10 - Teorema das sucessões enquadradas

Se (u_n) e (v_n) são sucessões convergentes para $a \in \mathbb{R}$, e se, a partir de certa ordem, a sucessão (w_n) é tal que

$$u_n \leq w_n \leq v_n ,$$

então $\lim w_n = a$.

11 - Se a sucessão (u_n) é um infinitésimo e a sucessão (v_n) é limitada, então a sucessão $(u_n.v_n)$ é um infinitésimo.

Observação 4.33. Podemos enunciar para as sucessões com limite $+\infty$ ou com limite $-\infty$ propriedades análogas a algumas das que foram enunciadas para as sucessões convergentes, desde que se estabeleçam as seguintes convenções sobre operações que envolvem os símbolos $+\infty$ e $-\infty$:

- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ e, para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$, $+\infty + \alpha = +\infty = \alpha + (+\infty)$;

- $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$ e, para todo o $\alpha\in\mathbb{R}$, $-\infty+\alpha=-\infty=\alpha+(-\infty)$;
- $(+\infty)\times(+\infty)=+\infty$, $(-\infty)\times(-\infty)=+\infty$ e $(+\infty)\times(-\infty)=-\infty=(-\infty)\times(+\infty)$;
- para todo o $\alpha>0$, $\alpha\times(+\infty)=+\infty=(+\infty)\times\alpha$ e $\alpha\times(-\infty)=-\infty=(-\infty)\times\alpha$;
- para todo o $\alpha<0$, $\alpha\times(+\infty)=-\infty=(+\infty)\times\alpha$ e $\alpha\times(-\infty)=+\infty=(-\infty)\times\alpha$;
- $0^{+\infty}=0$ e $0^{-\infty}=+\infty$

As convenções apresentadas não atribuem significado ao símbolos $0\times\infty$, $\infty\times 0$, ∞/∞ e $+\infty-\infty$ que são considerados símbolos de indeterminação.

São também símbolos de indeterminação 0^0, $0/0$, 1^∞ e ∞^0.

Tendo então em consideração as convenções apresentadas, e sempre que não nos encontremos perante um símbolo de indeterminação, valem para as sucessões com limite $+\infty$ ou com limite $-\infty$ algumas das propriedades estabelecidas para as sucessões convergentes.

Apresentamos de seguida exemplos de aplicação de algumas das propriedades enunciadas.

Exemplo 4.34. 1. Consideremos a sucessão de termo geral $u_n=\operatorname{sen} n$.

A subsucessão $(\operatorname{sen}(n\pi))$ é a sucessão constante nula. Pela **Propriedade 2** tem-se que

$$\lim_{n\to+\infty}(\operatorname{sen}(n\pi))=0\,.$$

Podemos concluir então, pela **Propriedade 3**, que se o limite $\lim\limits_{n\to+\infty}(\operatorname{sen} n)$ existir ele será nulo.

Por outro lado, a subsucessão $\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right)$ é a sucessão constante igual a um. Pela **Propriedade 2** tem-se que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right)=1\,,$$

e, podemos concluir então, pela **Propriedade 3**, que se o limite $\lim\limits_{n\to+\infty}(\operatorname{sen} n)$ existir ele será igual a um.

Mas, a **Propriedade 1** afirma que o limite de uma sucessão, quando existe, é único.

Do que foi dito, podemos então concluir que não existe o limite $\lim\limits_{n\to+\infty}(\operatorname{sen} n)$.

2. Vimos no Exemplo 4.9 que a sucessão $\left(\cos\frac{1}{n}\right)$ é uma sucessão monótona. Uma vez que a função coseno é limitada, tem-se que a sucessão considerada é também limitada. Pela **Propriedade 4** podemos concluir que esta sucessão é convergente. Para além disso temos

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)=1\,.$$

3. Uma vez que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, temos , pela **Propriedade 7**,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^p}=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^p\right)=\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\right)^p=0\,,$$

para todo o $p \in \mathbb{N}$.

Temos também, para todo o $p \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to+\infty} n^p = +\infty\,.$$

4. Utilizando as **Propriedades 2, 5, 6** temos, para todo o $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}(a_0n^p + a_1n^{p-1} + \cdots + a_{p-1}n + a_p) &= \lim_{n\to+\infty}\left(n^p\left(a_0 + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_{p-1}}{n^{p-1}} + \frac{a_p}{n^p}\right)\right) \\ &= \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad a_0 > 0 \\ -\infty & \text{se} \quad a_0 < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

temos

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-1}{n^3+2n-3} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^3\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(1+\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{3}{n^3}\right)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^3}}{1+\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{3}{n^3}} = 0\,,$$

temos

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{-2n^2+3}{5n^2+n-1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\left(-2+\dfrac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(5+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{-2+\dfrac{3}{n^2}}{5+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}} = -\frac{2}{5}$$

e temos

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^4+2n}{2n-3} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^4\left(1+\dfrac{2}{n^3}\right)}{n^4\left(\dfrac{2}{n^3}-\dfrac{3}{n^4}\right)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1+\dfrac{2}{n^3}}{\dfrac{2}{n^3}-\dfrac{3}{n^4}} = +\infty\,.$$

5. Pela **Propriedade 11** podemos concluir que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\operatorname{sen} n}{n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\operatorname{sen} n\right) = 0$$

uma vez que a sucessão $(\operatorname{sen} n)$ é limitada e a sucessão $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ é um infinitésimo.

6. Consideremos a sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{\operatorname{sen}^2 n}{n+1}$. Uma vez que se tem, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $0 \le \operatorname{sen}^2 n \le 1$, obtemos

$$0 \le \frac{\operatorname{sen}^2 n}{n+1} \le \frac{1}{n+1}$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Uma vez que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$ e $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1} = 0$, o **Teorema das sucessões enquadradas** permite concluir que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}^2 n}{n+1} = 0\,.$$

4.6 Exercícios

4.6.1 Enunciados

1. Considere a sucessão de termo geral

$$u_n = \frac{-2n^2+1}{n^2-2}$$

   (a) Calcule u_3.

   (b) Indique o valor lógico da seguinte proposição:

$$\textit{existe } n \in \mathbb{N} \textit{ tal que } u_n = -49/23$$

   (c) Calcule $|u_n+2|$.

   (d) Determine o termo de menor ordem que verifica a condição $|u_n+2| < 0,01$.

   (e) Mostre que $\lim u_n = -2$.

2. Considere a sucessão de termo geral

$$u_n = \frac{n-2}{n+1}$$

   (a) Prove que é monótona crescente.

   (b) Justifique que é verdadeira a proposição:

$$\textit{para todo o } n \in \mathbb{N},\ -\frac{1}{2} \leq u_n < 1$$

   O que pode dizer da sucessão dada quanto à convergência ?

   (c) Calcule o limite da sucessão (u_n).

3. Calcule, caso exista, o limite de cada uma das sucessões cujo termo geral é indicado a seguir.

   (a) $u_n = \begin{cases} \dfrac{n^2}{2n^2+1} & \text{se } n \text{ é par} \\[2ex] \dfrac{3n+1}{n+2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

   (b) $u_n = \dfrac{(-1)^n.2+n}{n+3}$

   (c) $u_n = \dfrac{2-n}{n^2+2}$

   (d) $u_n = \sqrt[3]{\dfrac{8n}{n+3}}$

   (e) $u_n = \left(\dfrac{n+1}{2n-1}\right)^3$

   (f) $u_n = \sqrt{n^2+5n} - \sqrt{n^2+2}$

   (g) $u_n = \dfrac{n!}{4n+1}$

   (h) $u_n = \dfrac{(n+1)!+n!}{3(n+1)!}$

(i) $u_n = \dfrac{7^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$

(j) $u_n = n^3 - n^5$

(k) $u_n = \dfrac{\cos(n\pi)}{n+1} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} + 3$

(l) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n+1}}$

(m) $u_n = 2 + \dfrac{n^2 + \operatorname{sen} n}{n^2+1}$

4. Calcule

   (a) $\lim \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{2^i}{4+n} \right)$

   (b) $\lim \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{2i+n}{n} \right)$

5. Sabe-se que, sendo (u_n) uma sucessão de termos positivos e $a \in \mathbb{R}^+$ se

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = a \, ,$$

   então

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = a$$

   Aplicando esta propriedade:

   (a) calcule $\lim \sqrt[n]{7^n + 2.3^n}$.

   (b) determine o número real α tal que $\lim \sqrt[n]{\dfrac{n!\alpha^n}{n^n}} = 2$.

6. Considere a sucessão (u_n) definida por

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{3}{5} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 3}{6} & \text{se } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   e a sucessão (v_n) tal que $v_n = 5u_n + 3$.

   (a) Mostre que (v_n) é uma progressão geométrica.

   (b) Deduza, em função de n, v_n e u_n.

   (c) Estude a sucessão (u_n) quanto à convergência.

7. A progressão aritmética (a_n) está definida por

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = 3 + a_n & \text{se } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(a) Estabeleça uma expressão do termo geral da sucessão.

(b) Calcule $\lim \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n$.

8. Dada a sucessão de termo geral

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+4k+3},$$

estude-a quanto à monotonia.

9. Utilize o teorema das sucessões enquadradas para determinar o limite da sucessão de termo geral

$$u_n = \frac{2+(\cos n)^2}{3^n}$$

10. (a) Calcule $\lim(u_n.v_n)$, sendo $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{3}}$ e $v_n = n\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right) - 3$.

(b) Prove, utilizando o Princípio de Indução Matemática [2], que $n^n \geq n!$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(c) Utilize o teorema das sucessões enquadradas para calcular $\lim \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{n^{n+1}}\right)$. Sugestão: Pode recorrer à alínea anterior.

11. Considere a sucessão (t_n) de termo geral

$$t_n = \frac{2^{n-1}}{(n+1)!}$$

(a) Prove que é uma sucessão estritamente decrescente.

(b) Calcule $\lim \frac{t_{n+1}}{t_n}$.

12. Considere a sucessão (u_n) dada por

$$u_n = \int_0^n \frac{1}{(x+1)(x+2)}dx$$

(a) Calcule u_1 e u_2.

(b) Estude-a quanto à monotonia.

(c) Calcule $\lim u_n$.

(d) Indique um minorante e um majorante do conjunto dos termos da sucessão.

13. Seja (v_n) a sucessão de termo geral

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2k}{n^2}\right)$$

(a) Verifique que $v_n = 1 + \frac{1}{n}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

[2]**Princípio de Indução Matemática:** Seja $P(n)$ uma condição que depende de $n \in \mathbb{N}$. Se:

i) $P(1)$ é verdadeira;

ii) para todo o $k \in \mathbb{N}$, se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1)$ é verdadeira;

então $P(n)$ é verdadeira, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(b) Indique uma sucessão (w_n) que verifique a condição

$$(v_n)^n \geq w_n, \text{ para todo o} n \in \mathbb{N}$$

(c) Calcule $\lim(v_n)^{n^2}$.

4.6.2 Soluções

1. (a) $-\frac{17}{7}$
   (b) verdadeira
   (c) $|u_n+2| = \frac{3}{n^2-2}$ se $n \geq 2$ e $|u_n+2| = 3$ se $n = 1$
   (d) $u_18 = -\frac{647}{322}$
   (e)
2. (a)
   (b) convergente
   (c) 1
3. (a) não existe
   (b) 1
   (c) 0
   (d) 2
   (e) $\frac{1}{8}$
   (f) $\frac{5}{2}$
   (g) $+\infty$
   (h) $\frac{1}{3}$
   (i) $+\infty$
   (j) $-\infty$
   (k) 3
   (l) $+\infty$
   (m) 3
4. (a) $+\infty$
   (b) $+\infty$
5. (a) 7
   (b) $2e$
6. (a)

(b) $v_n = 6^{2-n}$ e $u_n = \frac{6^{2-n}-3}{5}$

(c) convergente

7. (a) $a_n = 3n-4$

(b) e

8. estritamente crescente

9. 0

10. (a) $-\frac{2}{\sqrt[3]{e}}$

(b)

(c) 0

11. (a)

(b) 0

12. (a) $u_1 = ln\frac{4}{3}$ e $u_2 = ln\frac{3}{2}$

(b) estritamente crescente

(c) $ln2$

(d) $ln\frac{4}{3}$ é um minorante do conjunto dos termos da sucessão e $ln2$ é um majorante

13. (a)

(b) A sucessão de termo geral $w_n = 2$, por exemplo

(c) $+\infty$

5 Limites de funções

5.1 Limite num ponto de acumulação

Definição 5.1. Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D_f e $l \in \mathbb{R}$.

Dizemos que l **é o limite de** f **no ponto** a ou que $f(x)$ **tende para** l **quando** x **tende para** a e escrevemos

$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$

se, para toda a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de D_f, distintos de a, e convergente para a, a correspondente sucessão das imagens $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para l.

Se a é um ponto isolado de D_f escrevemos, por definição,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) .$$

Exemplo 5.2. Consideremos a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x+1$. Vamos usar a definição para provar que $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 0$.

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma qualquer sucessão de números reais distintos de -1 e convergente para -1.

Uma vez que, pelas propriedades das sucessões convergentes,

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} (x_n+1) = \lim_{n\to+\infty} x_n + 1$$

e, por hipótese, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -1$, temos

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = -1+1 = 0\,,$$

Atendendo a que a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nas condições indicadas, é arbitrária podemos concluir o que pretendemos.

Teorema 5.3. *O limite de uma função num ponto, quando existe, é único.*

Este resultado é muito útil para provar que não existe o limite de uma função f num ponto a. Para o efeito basta determinar duas sucessões $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos de D_f, distintos de a, e convergentes para a tais que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n)$.

Exemplo 5.4. Consideremos a função f definida em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ por $f(x) = \cos\frac{1}{x}$. Vamos mostrar que não existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Consideremos as sucessões $\left(\dfrac{1}{2n\pi}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\left(\dfrac{1}{(2n+1)\pi}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos não nulos de $\mathbb{R}$. Temos

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n\pi} = 0$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)\pi} = 0$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{2n\pi}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \cos(2n\pi) = 1$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{(2n+1)\pi}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \cos((2n+1)\pi) = -1$.

o que permite concluir que não existe o limite de f na origem.

Definição 5.5. Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e a um ponto de acumulação de D_f. Dizemos que f é um **infinitésimo** quando x tende para a se o limite de f em a é igual a zero.

Para o cálculo de limites são úteis algumas propriedades que enunciamos a seguir.

Teorema 5.6. *Sejam f e g duas funções, $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de $D = D_f \cap D_g$ e $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2$, então verificam-se as condições seguintes:*

(i) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = l_1 + l_2$ *;*

(ii) $\lim\limits_{x\to a}(\alpha f(x)) = \alpha l_1$, *para todo o* $\alpha \in \mathbb{R}$*;*

(iii) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) = l_1 l_2$ *;*

(iv) $\lim_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{l_1}{l_2}$ *se* $l_2\neq 0$.

Exemplo 5.7. Consideremos a função f definida por $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-2x+1}$, para todo o $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Uma vez que

- $\lim_{x\to -1} x^3=(\lim_{x\to -1} x)^3=-1$;
- $\lim_{x\to -1}(x^2-2x+1)=\lim_{x\to -1}(x^2)-\lim_{x\to -1}(2x)+\lim_{x\to -1}1=(\lim_{x\to -1}x)^2-2\lim_{x\to -1}x+1=4\neq 0$

temos

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3}{x^2-2x+1}=\frac{\lim_{x\to -1}x^3}{\lim_{x\to -1}(x^2-2x+1)}=-\frac{1}{4}\,.$$

A propriedade que apresentamos a seguir é muitas vezes designada **propriedade do enquadramento**.

Teorema 5.8. *Sejam f, g e h funções de domínio $D\subset\mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de D.*

Se, nalguma vizinhança $V_{\delta_1}(a)$ [3] *de a, temos*

$$f(x)\leq h(x)\leq g(x)$$

para todo o $x\in(V_{\delta_1}(a)\backslash\{a\})\cap D$, e $\lim_{x\to a}f(x)=l=\lim_{x\to a}g(x)$, então

$$\lim_{x\to a}h(x)=l.$$

Exemplo 5.9. Consideremos a função f definida em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ por $f(x)=x^2\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$.

Temos, para todo o $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $-1\leq\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\leq 1$, donde obtemos a dupla desigualdade

$$-x^2\leq x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}\leq x^2\,.$$

Uma vez que $\lim_{x\to 0}x^2=0$ e $\lim_{x\to 0}(-x^2)=0$ a propriedade do enquadramento permite concluir que

$$\lim_{x\to 0}x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}=0\,.$$

O teorema que apresentamos a seguir é consequência do anterior e estabelece que o produto de uma função limitada por um infinitésimo é um infinitésimo.

Teorema 5.10. *Sejam f e g duas funções e a um ponto de acumulação de $D=D_f\cap D_g$. Se $\lim_{x\to a}f(x)=0$ e existe $\delta_1>0$ tal que g é limitada em $\big(V_{\delta_1}(a)\setminus\{a\}\big)\cap D_g$, então*

$$\lim_{x\to a}f(x)g(x)=0.$$

[3] Sendo $a\in\mathbb{R}$ e $\delta\in\mathbb{R}^+$ chamamos **vizinhança -** δ **de** a ou **vizinhança de centro** a **e raio** δ e denotamo-la por $V_\delta(a)$ ao conjunto $V_\delta(a):=\{x\in\mathbb{R}:|x-a|<\delta\}$.

Exemplo 5.11. Pretendemos calcular $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\dfrac{1}{x}$.

Uma vez que a função f definida por $f(x) = x$ é um infinitésimo quando $x \to 0$ e a função g definida por $g(x) = \cos\dfrac{1}{x}$ é uma função limitada numa vizinhança da origem temos que

$$\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0\,.$$

No caso em que a função está definida por ramos a existência do limite de uma função num ponto em que a função muda de ramo depende da existência dos limites laterais que passamos a definir.

Definição 5.12. Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação à esquerda de D_f e $l \in \mathbb{R}$. Dizemos que l **é o limite de f no ponto a à esquerda** ou que **o limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores inferiores a a é igual a** l e escrevemos

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = l \;\text{ ou }\; \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = l$$

se o limite da restrição de f ao conjunto $D_f \cap]-\infty, a[$ é igual a l.

Exemplo 5.13. Consideremos a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x - 1}{x} & \text{se} \quad x < 0 \\ x - 1 & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Temos

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x - 1}{x} = 0\,.$$

Definição 5.14. Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação à direita de D_f e $l \in \mathbb{R}$. Dizemos que l **é o limite de f no ponto a à direita** ou que **o limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores superiores a a é** l e escrevemos

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = l \;\text{ ou }\; \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = l$$

se o limite da restrição de f ao conjunto $D_f \cap]a, +\infty[$ é igual a l.

Exemplo 5.15. Consideremos a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x+1)}{x} & \text{se} \quad x > 0 \\ -2 & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Temos

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1\,.$$

Proposição 5.16. *Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação à direita de D_f e à esquerda de D_f e $l \in \mathbb{R}$. Então*

$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$

se e só se existem e são iguais a l os limites laterais de f em a, isto é,

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = l = \lim_{x\to a^-} f(x).$$

Exemplo 5.17. Consideremos a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se} \quad x > 0 \\ -1 & \text{se} \quad x = 0 \\ \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Uma vez que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \cos x = 1$$

e

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$$

temos que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \ .$$

5.2 Limites infinitos e limites no infinito

Definição 5.18. Sejam $D_f \subset \mathbb{R}$ um conjunto tal que $]a, +\infty[\subset D_f$, para algum $a \in \mathbb{R}$, $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $l \in \mathbb{R}$. Dizemos que **o limite de** $f(x)$ **quando** x **tende para** $+\infty$ **é igual a** l e escrevemos

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$$

se, para toda a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de D_f tal que $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, a correspondente sucessão das imagens $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para l.

Definição 5.19. Sejam $D_f \subset \mathbb{R}$ um conjunto tal que $]-\infty, a[\subset D_f$ para algum $a \in \mathbb{R}$, $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $l \in \mathbb{R}$. Dizemos que **o limite de** $f(x)$ **quando** x **tende para** $-\infty$ **é igual a** l e escrevemos

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$$

se, para toda a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de D_f tal que $\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$, a correspondente sucessão das imagens $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para l.

Observe-se que podemos estabelecer para os limites finitos no infinito propriedades operatórias análogas às que foram enunciadas no Teorema 5.6 para o limite de uma função num ponto e que pode também provar-se que o limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ $\left[\text{resp. } \lim_{x\to-\infty} f(x)\right]$, se existir, é único.

Exemplo 5.20. 1. Para todo o $a > 1$, $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{a}^x = 0$ e, para para todo o $0 < a < 1$, $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{a}^x = 0$.

2. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1-x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x} - 1\right) = -1$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{-x}+\operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2}=0+0=0$

4. O limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{sen}x$ não existe porque se considerarmos as sucessões $(n\pi)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)_{n\in\mathbb{N}}$ temos:

   - $\lim\limits_{n\to+\infty} n\pi=+\infty$ e $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)=+\infty$;
   - $\lim\limits_{n\to+\infty}\operatorname{sen}(n\pi)=0$;
   - $\lim\limits_{n\to+\infty}\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)=1$.

Definição 5.21. Sejam $f:D_f\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função e $a\in\mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D_f.

Dizemos que **o limite de** $f(x)$ **quando** x **tende para** a **é igual a** $+\infty$ e escrevemos

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$$

se, para toda a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de D_f, distintos de a, e convergente para a, a correspondente sucessão das imagens $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tem limite $+\infty$.

Dizemos que **o limite de** $f(x)$ **quando** x **tende para** a **é igual a** $-\infty$ e escrevemos

$$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$$

se, para toda a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de D_f, distintos de a, e convergente para a, a correspondente sucessão das imagens $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tem limite $-\infty$.

Exemplo 5.22. 1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{(x-1)^4}=+\infty$

2. $\lim\limits_{x\to0}\left(-\dfrac{1}{|x|}\right)=-\infty$

Tal como no caso dos limites finitos num ponto de acumulação, podemos também definir limites laterais infinitos num ponto de acumulação.

Podemos estabelecer para os limites infinitos propriedades análogas às que foram enunciadas no Teorema 5.6. Para o estabelecimento dessas propriedades temos de estabelecer algumas convenções sobre operações que envolvem os símbolos $+\infty$ e $-\infty$. Convencionamos então que:

- $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$ e, para todo o $\alpha\in\mathbb{R}$, $+\infty+\alpha=+\infty=\alpha+(+\infty)$;
- $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$ e, para todo o $\alpha\in\mathbb{R}$, $-\infty+\alpha=-\infty=\alpha+(-\infty)$;
- $(+\infty)\times(+\infty)=+\infty$, $(-\infty)\times(-\infty)=+\infty$ e $(+\infty)\times(-\infty)=-\infty=(-\infty)\times(+\infty)$;
- para todo o $\alpha>0$, $\alpha\times(+\infty)=+\infty=(+\infty)\times\alpha$ e $\alpha\times(-\infty)=-\infty=(-\infty)\times\alpha$;
- para todo o $\alpha<0$, $\alpha\times(+\infty)=-\infty=(+\infty)\times\alpha$ e $\alpha\times(-\infty)=+\infty=(-\infty)\times\alpha$;
- $0^{+\infty}=0$ e $0^{-\infty}=+\infty$

As convenções apresentadas não atribuem significado ao símbolos $0 \times \infty$, $\infty \times 0$, ∞/∞ e $+\infty - \infty$ que são considerados símbolos de indeterminação.

São também símbolos de indeterminação 0^0, $0/0$, 1^∞ e ∞^0.

Tendo então em consideração as convenções apresentadas, e sempre que não nos encontremos perante um símbolo de indeterminação, valem para os limites infinitos propriedades análogas às estabelecidas para os limites finitos. Estas propriedades são úteis para o cálculo de limites.

Exemplo 5.23.

1. Para todo o $a > 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ e, para todo o $0 < a < 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$.
2. Para todo o $a > 1$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$ e, para todo o $0 < a < 1$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$.
3. Para todo $k \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^+} \operatorname{tg} x = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^-} \operatorname{tg} x = +\infty$.
4. Uma vez que $\lim\limits_{x \to 1} 1 = 1$ e $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$, temos
$$\lim_{x \to 1} \left(1 + \frac{1}{(x-1)^2}\right) = 1 + \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty.$$
5. Uma vez que $\lim\limits_{x \to 0^+} \mathrm{e}^{1/x} = +\infty$ temos
$$\lim_{x \to 0^+} \left(-2\mathrm{e}^{1/x}\right) = -2 \lim_{x \to 0^+} \mathrm{e}^{1/x} = -\infty.$$

Definição 5.24. Sejam $D_f \subset \mathbb{R}$ um conjunto tal que $[a, +\infty[\subset D_f$, para algum $a \in \mathbb{R}$ e $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que **o limite de $f(x)$ quando x tende para $+\infty$ é igual a $+\infty$** e escrevemos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

se, para toda a sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de D_f com limite $+\infty$, a correspondente sucessão das imagens $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tem limite $+\infty$.

Podemos apresentar definições análogas a esta para os símbolos

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$;

(ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$;

(iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

que completam a lista de limites infinitos no infinito.

Estabeleça essas definições como exercício.

Tendo em consideração as convenções apresentadas sobre as operações que envolvem os símbolos de infinito, podemos estabelecer para os limites infinitos no infinito propriedades análogas às enunciadas no Teorema 5.6 e que são úteis no cálculo de limites.

Exemplo 5.25.

1. Para todo o $a > 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$.

2. Para todo o $a > 1$, $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$ e, para todo o $0 < a < 1$, $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$.

3. Uma vez que $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$ temos

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\mathrm{e}^x + \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x + \lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{x} = +\infty$$

e temos

$$\lim_{x\to+\infty} (-\mathrm{e}^x) = -\infty\,.$$

4. Uma vez que $\lim_{x\to-\infty} \ln\frac{1}{x^2} = -\infty$ temos

$$\lim_{x\to-\infty} \left(-5\ln\frac{1}{x^2}\right) = +\infty\,.$$

6 Continuidade

Definição 6.1. Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in D_f$. Dizemos que f **é contínua em** a se o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ existe e é finito e $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Exemplo 6.2. 1. As funções seno, coseno e exponencial de base a são funções contínuas em $\mathbb{R}$. A função logaritmo é uma função contínua em $\mathbb{R}^+$.

2. Consideremos a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1} & \text{se} \quad x > 1 \\ 1 & \text{se} \quad x = 1 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1} & \text{se} \quad x < 1 \end{cases}$$

Uma vez que

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

e

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1} = 1$$

temos que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1\ .$$

Temos então $\lim_{x\to 1} f(x) = 1 = f(1)$ e, portanto, f é contínua em $x = 1$.

3. Consideremos a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se} \quad x > 0 \\ -1 & \text{se} \quad x = 0 \\ \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Como vimos num exemplo anterior, temos

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

e, uma vez que $f(0) = -1 \neq \lim_{x\to 0} f(x)$, concluímos que f não é contínua na origem.

4. Seja f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{x} & \text{se} \quad x < 0 \\ x - 1 & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Uma vez que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{3\operatorname{sen}(3x)}{3x} = 3 \times 1 = 3\,,$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x-1) = -1\,,$$

temos que não existe o limite de f em $a = 0$ e, portanto, f não é contínua neste ponto.

As propriedades que apresentamos a seguir são úteis para o estudo da continuidade.

Teorema 6.3. *Sejam f e g duas funções contínuas num ponto a. Então as funções $f+g$, $\alpha f \quad (\alpha \in \mathbb{R})$ e fg são contínuas em a. Se $g(a) \neq 0$, então f/g é também uma função contínua em a.*

Exemplo 6.4.

1. Consideremos a função f definida em $\mathbb{R}_0^+$ por $f(x) = \dfrac{3\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}+1}$.

   A função g definida em $\mathbb{R}$ por $g(x) = 3\operatorname{sen} x$ é uma função contínua já que é o produto de uma constante pela função seno que é uma função contínua em $\mathbb{R}$. Então g é contínua em $\mathbb{R}_0^+$.

   A função h definida em $\mathbb{R}_0^+$ por $h(x) = \sqrt{x}+1$ é uma função contínua em $\mathbb{R}_0^+$ porque é a soma de duas funções contínuas em $\mathbb{R}_0^+$.

   Uma vez que a função h não se anula em $\mathbb{R}_0^+$ podemos concluir, pelas propriedades das funções contínuas, que a função f é contínua em $\mathbb{R}_0^+$.

2. Atendendo a que $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, as propriedades das funções contínuas permitem-nos concluir que a função tangente é contínua em todo o seu domínio.

   De modo análogo podemos concluir que as funções cotangente, secante e cosecante são contínuas em todos os pontos do domínio correspondente.

Proposição 6.5. *Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $g \circ f$ está definida. Se f é contínua em a e g é contínua em $f(a)$, então $g \circ f$ é contínua em a.*

Exemplo 6.6. Consideremos a função f definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por $f(x) = \cos \dfrac{1}{x}$. Então $f = h \circ g$, onde h é definida por $h(x) = \cos x$ e g é definida por $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Uma vez que a função g é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e a função h é contínua em $\mathbb{R}$ concluímos que a função $f = h \circ g$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

6.1 Teorema de Bolzano-Cauchy

Teorema 6.7. *Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Se f é contínua em $[a,b]$ e $f(a) \neq f(b)$, então, para todo o y entre $f(a)$ e $f(b)$* [4]*, existe $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = y$.*

Exemplo 6.8. Seja f a função definida por $f(x) = x\mathrm{e}^x$. Uma vez que:

- a função f é contínua no intervalo $[0,1]$ porque é o produto de duas funções contínuas neste intervalo;
- $f(0) = 0$;
- $f(1) = \mathrm{e}$;

e $f(0) < 2 < f(1)$ temos que existe $x_0 \in]0,1[$ tal que $f(x_0) = 2$.

O Teorema de Bolzano-Cauchy pode ser utilizado para localizar zeros de funções. Temos o seguinte corolário deste teorema.

Corolário 6.9. *Se f é contínua em $[a,b]$ e $f(a)f(b) < 0$, então existe $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = 0$.*

Exemplo 6.10. Seja f a função definida por $f(x) = \ln x + x$. Uma vez que:

- a função f é contínua no intervalo $[\mathrm{e}^{-1},1]$, porque é a soma de duas funções contínuas neste intervalo;
- $f\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{-1}\right) + \mathrm{e}^{-1} = -1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}} = \dfrac{-\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}} < 0$, porque $\mathrm{e} > 1$;
- $f(1) = 1 > 0$;

temos que $f(\mathrm{e}^{-1})f(1) < 0$ e o Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que a função f admite uma raiz no intervalo $]\mathrm{e}^{-1},1[$.

7 Derivação e diferenciabilidade

Definição 7.1. Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in D_f$ um ponto interior de D_f.

Chama-se **derivada da função f no ponto** a e denota-se por $f'(a)$, ao limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se este limite existir, podendo ser finito, $+\infty$ ou $-\infty$.

Se uma função admite derivada num ponto dizemos que é **derivável** nesse ponto.

Se $f'(a)$ é finito dizemos que f **é diferenciável em** a.

[4] Dizemos que y está entre $f(a)$ e $f(b)$ se se verifica uma das condições seguintes: ou $f(a) < y < f(b)$ ou $f(b) < y < f(a)$.

Exemplo 7.2. 1. Consideremos a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Atendendo à definição temos

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \cos \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h \cos \frac{1}{h} = 0$$

já que é o limite do produto de uma função limitada por um infinitésimo quando h tende para zero. Então $f'(0) = 0$ e, portanto, f é diferenciável na origem.

2. Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \ln |x| & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Atendendo à definição temos

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln |h|}{h}$$

Uma vez que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\ln |h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\ln h}{h} = -\infty$$

e

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{\ln |h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\ln(-h)}{h} = +\infty$$

temos que não existe $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln |h|}{h}$ e, portanto, f não é derivável na origem.

3. Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x-1} & \text{se} \quad x \neq 1 \\ 0 & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$$

Atendendo à definição temos

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{(1+h)^2}{h}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2}{h^2} = +\infty.$$

Então f é derivável em $x = 1$ e a sua derivada é $+\infty$. No entanto f não é diferenciável em $x = 1$ porque a derivada neste ponto não é finita.

4. Consideremos a função f definida por

$$f(x)=\begin{cases}(x+1)\operatorname{sen}\dfrac{1}{x+1} & \text{se} \quad x\neq -1\\ 0 & \text{se} \quad x=-1\end{cases}$$

Atendendo à definição temos

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\operatorname{sen}\dfrac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\operatorname{sen}\frac{1}{h}$$

Como este limite não existe concluímos que não existe $f'(-1)$.

Definição 7.3. Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in D_f$ um ponto de acumulação à esquerda de D_f.

Chamamos **derivada lateral de** f **à esquerda de** a e denotamo-la por $f'_-(a)$ ou $f'_e(a)$ ao limite

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

se este limite existir, podendo ser finito, $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemplo 7.4. 1. Seja f a função definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & \text{se} \quad x\neq 1\\ 0 & \text{se} \quad x=1\end{cases}$$

Atendendo à definição temos

$$f'_-(1)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\dfrac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}=+\infty$$

2. Seja f a função definida por

$$f(x)=\begin{cases}x\cos\dfrac{1}{x^2} & \text{se} \quad x\geq 0\\ 0 & \text{se} \quad x<0\end{cases}$$

Atendendo à definição temos

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h\cos\dfrac{1}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}\cos\frac{1}{h^2}$$

Como este limite não existe, não existe $f'_-(0)$.

Definição 7.5. Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in D_f$ um ponto de acumulação à direita de D_f.

Chamamos **derivada lateral de f à direita de** a e denotamo-la por $f'_+(a)$ ou $f'_d(a)$ ao limite

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

se este limite existir, podendo ser finito, $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemplo 7.6. Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{1/x} & \text{se} \quad x>0 \\ 0 & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Atendendo à definição temos

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h\mathrm{e}^{1/h}-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \mathrm{e}^{1/h} = +\infty$$

Proposição 7.7. *Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in D_f$ um ponto interior de D_f. Então f é diferenciável em a se e só se existem $f'_+(a)$ e $f'_-(a)$, são finitas e $f'_-(a) = f'_+(a)$.*

Exemplo 7.8.

1. Consideremos a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x>0 \\ 0 & \text{se} \quad x=0 \\ x\mathrm{e}^{1/x} & \text{se} \quad x<0 \end{cases}$$

   Temos, por um lado,

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2 \operatorname{sen} \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} h \operatorname{sen} \frac{1}{h} = 0$$

   porque se trata do limite do produto de uma função limitada por um infinitésimo quando $h \to 0^+$.

   Por outro lado

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h\mathrm{e}^{1/h}-0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \mathrm{e}^{1/h} = 0\,.$$

   Então $f'(0) = 0$ e, portanto, f é diferenciável na origem.

2. Seja f a função módulo, ou seja, a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = |x|$. Temos

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1$$

   e

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0^+} -1 = -1$$

   e, portanto, f não é diferenciável em $x = 0$.

O resultado seguinte estabelece que a diferenciabilidade num ponto $x = a$ é uma condição suficiente para que uma função seja contínua nesse ponto.

Proposição 7.9. *Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in D_f$ um ponto interior de D_f. Se f é diferenciável em a, então f é contínua em a.*

Resulta da proposição anterior que se uma função não é contínua num ponto, então não é diferenciável nesse ponto.

Exemplo 7.10. Consideremos a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ x\cos x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Uma vez que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

temos que o limite de f na origem, se existir, é $+\infty$ e, portanto, f não é contínua na origem. Então f não é diferenciável na origem.

Definição 7.11. Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $D' \subset D_f$ o conjunto de pontos interiores de D_f onde f é diferenciável. Chamamos **função derivada de** f ou **função derivada de primeira ordem** e denotamo-la por f' à função definida do modo seguinte:

$$\begin{aligned} f' : D' &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f'(x). \end{aligned}$$

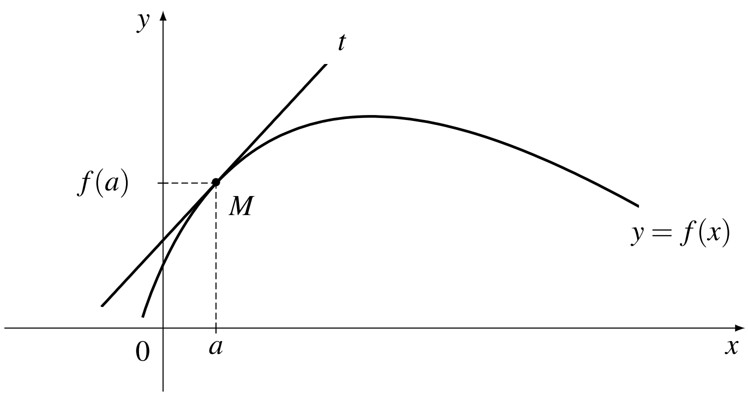
Supomos conhecidas as derivadas que constam da tabela seguinte.

Função	Derivada
$c(constante)$	0
x^n	nx^{n-1}
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$
$\operatorname{cotg} x$	$-\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$
e^x	e^x
a^x	$\mathrm{a}^x \ln a$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$

7.1 Interpretação geométrica

Admitamos que $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em $a \in int(D_f)$. Geometricamente temos que o declive da recta tangente à curva no ponto de abcissa $x = a$ coincide com $f'(a)$.

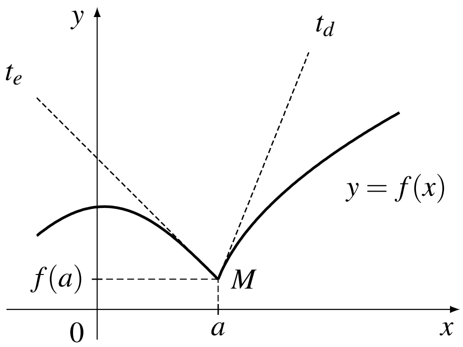
Na figura seguinte está representada a tangente ao gráfico no ponto $M = (a, f(a))$ no caso em que f é diferenciável em $x = a$.



No caso em que $f'(a)$ é $+\infty$ ou $-\infty$ a tangente à curva no ponto $M = (a, f(a))$ é a recta vertical de equação $x = a$.

Podemos interpretar geometricamente a derivada lateral à esquerda e a derivada lateral à direita. No primeiro caso, e supondo que a derivada lateral é finita, temos que $f'_-(a)$ é o declive da semi-recta tangente à curva no ponto $M = (a, f(a))$ à esquerda do ponto M e designamo-la por semi-tangente à esquerda de M; no segundo caso, e supondo que a derivada lateral é finita, temos que $f'_+(a)$ é o declive da semi-recta tangente à curva no ponto M à direita do ponto M que designamos por semi-tangente à direita de M.

Na figura seguinte estão representadas as semi-tangentes à esquerda e à direita de uma curva num ponto $M = (a, f(a))$



t_d é a semi-tangente à curva $y = f(x)$ à direita de M

t_e é a semi-tangente à curva $y = f(x)$ à esquerda de M.

No caso em que as derivadas laterais são infinitas as semi-tangentes à esquerda ou à direita coincidem e têm a equação $x = a$.

Definição 7.12. Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in int(D_f)$ um ponto onde f é diferenciável. Chamamos **normal à curva** $y = f(x)$ **no ponto** $M = (a, f(a))$ à recta que passa pelo ponto M e é perpendicular à tangente à curva nesse ponto.

Atendendo à relação que existe entre os declives de duas rectas perpendiculares temos que, se f é diferenciável em $x = a$ e $f'(a) \neq 0$ a normal à curva $y = f(x)$ no ponto $M = (a, f(a))$ é a recta que passa por este ponto e tem declive $-\dfrac{1}{f'(a)}$.

7.2 Propriedades das funções diferenciáveis

A proposição que apresentamos a seguir estabelece um conjunto de propriedades que podem ser úteis no cálculo de derivadas.

Proposição 7.13. *Sejam f e g duas funções diferenciáveis num ponto a. Então:*

(a) *$f + g$ é diferenciável em a e $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;*

(b) *αf é diferenciável em a e $(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)$, para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$;*

(c) *$f - g$ é diferenciável em a e $(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)$;*

(d) *fg é diferenciável em a e $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;*

(e) *se $g(a) \neq 0$, então $\dfrac{f}{g}$ é diferenciável em a e*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Exemplo 7.14. Utilizando as propriedades das funções diferenciáveis temos

1. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1)x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$

2. $\left(\mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x}\right)' = (\mathrm{e}^x)' + \left(\dfrac{1}{x}\right)' = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x^2}$

3. $(x^2 \cos x)' = (x^2)' \cos x + x^2 (\cos x)' = 2x \cos x - x^2 \operatorname{sen} x$

4. $(\sqrt[m]{x^n}) = \left(x^{\frac{n}{m}}\right)' = \dfrac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}$

5. $$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\right)' &= \frac{(\sqrt{x})'(x^2+1) - \sqrt{x}(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+1) - 2x\sqrt{x}}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x^2+1-4x(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x^2+1-4x^2}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-3x^2+1}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

6. $(\sec x)' = \left(\dfrac{1}{\cos x}\right)' = \dfrac{-(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos x}\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \sec x \operatorname{tg} x$

A proposição que apresentamos a seguir estabelece uma regra de derivação habitualmente designada por **regra da derivada da função composta** ou **regra da cadeia**.

Proposição 7.15. *Sejam $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções tais que $g \circ f$ está definida. Se f é diferenciável em a e g é diferenciável em $f(a)$, então $g \circ f$ é diferenciável em a e*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Exemplo 7.16. 1. Consideremos a função f definida por $f(x) = \mathrm{e}^{1/x}$, para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Então $f = h \circ g$, onde g é definida por $g(x) = \dfrac{1}{x}$, para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e h é definida por $h(x) = \mathrm{e}^x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Pela regra da derivada da função composta temos que se g é diferenciável em x e h é diferenciável em $g(x)$, então $f = h \circ g$ é diferenciável em x e temos

$$f'(x) = g'(x)h'(g(x)).$$

Como g é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ tendo-se $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$, para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e h é diferenciável em $\mathbb{R}$ tendo-se $h'(x) = \mathrm{e}^x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$ temos

$$f'(x) = \left(\mathrm{e}^{1/x}\right)' = -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{1/x},$$

para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. $(\sqrt{x^3+x})' = (x^3+x)'\left(\frac{1}{2}(x^3+x)^{-1/2}\right) = \frac{3x^2+1}{2\sqrt{x^3+x}}$

3. $(\cos(\ln x))' = (\ln x)'(-\operatorname{sen}(\ln x)) = -\frac{1}{x}\operatorname{sen}(\ln x)$

7.3 Derivadas de ordem superior

Dada a função derivada podemos determinar os pontos onde esta função é diferenciável e construir uma nova função que denotamos por f'' que a cada x faz corresponder $f''(x) := (f')'(x)$. Esta nova função designa-se por **função derivada de segunda ordem** ou **função derivada de ordem dois** de f.

Procedendo de modo análogo dada a função derivada de ordem $n-1$ de f que denotamos por $f^{(n-1)}$ podemos construir a **função derivada de ordem** n que denotamos por $f^{(n)}$ que a cada x faz corresponder $f^{(n)}(x) := (f^{(n-1)})'(x)$.

Exemplo 7.17. 1. Sendo f a função exponencial temos

$$f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x,$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

2. Seja f a função seno. Atendendo a que

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen} x \\ f'(x) &= \cos x \\ f''(x) &= -\operatorname{sen} x \\ f'''(x) &= -\cos x \\ f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

temos

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se} \quad n = 4k, k \in \mathbb{N} \\ \cos x & \text{se} \quad n = 4k+1, k \in \mathbb{N}_0 \\ -\operatorname{sen} x & \text{se} \quad n = 4k+2, k \in \mathbb{N}_0 \\ -\cos x & \text{se} \quad n = 4k+3, k \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

3. Seja f a função coseno. Atendendo a que

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x \\ f'(x) &= -\operatorname{sen} x \\ f''(x) &= -\cos x \\ f'''(x) &= \operatorname{sen} x \\ f^{(4)}(x) &= \cos x \end{aligned}$$

temos

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se} \quad n = 4k, k \in \mathbb{N} \\ -\operatorname{sen} x & \text{se} \quad n = 4k+1, k \in \mathbb{N}_0 \\ -\cos x & \text{se} \quad n = 4k+2, k \in \mathbb{N}_0 \\ \operatorname{sen} x & \text{se} \quad n = 4k+3, k \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

8 Estudo analítico de uma função

8.1 Extremos e monotonia

Definição 8.1. Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D_f$.

Dizemos que a é um **maximizante local** ou **ponto de máximo local** ou **ponto de máximo relativo** para f em D_f se existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in V_\delta(a) \cap D_f$, $f(x) \leq f(a)$.

Dizemos que a é um **minimizante local** ou **ponto de mínimo local** ou **ponto de mínimo relativo** para f em D_f se existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in V_\delta(a) \cap D_f$, $f(x) \geq f(a)$.

Se a é um ponto de mínimo local para f em D_f dizemos que $f(a)$ é um **mínimo local** ou **mínimo relativo** de f em D_f.

Se a é um ponto de máximo local para f em D_f dizemos que $f(a)$ é um **máximo local** ou **máximo relativo** de f em D_f.

Dizemos que a é um **maximizante global** ou **maximizante absoluto** ou **ponto de máximo absoluto** ou **ponto de máximo global** para f em D_f se, para todo o $x \in D_f$, $f(x) \leq f(a)$.

Dizemos que a é um **minimizante global** ou **minimizante absoluto** ou **ponto de mínimo absoluto** ou **ponto de mínimo global** para f em D_f se, para todo o $x \in D_f$, $f(x) \geq f(a)$.

No caso em que a é um ponto de mínimo absoluto para f em D_f, dizemos que $f(a)$ é o **mínimo absoluto** ou **mínimo global** de f em D_f.

No caso em que a é um ponto de máximo absoluto para f em D_f, dizemos que $f(a)$ é o **mínimo absoluto** ou **máximo global** de f em D_f.

Exemplo 8.2.

1. Consideremos a função f definida por $f(x) = -x^2$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Uma vez que $f(x) \leq 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$, e $f(0) = 0$ temos que f tem um máximo global (logo local) $f(0) = 0$ em $x = 0$.

2. Consideremos a função f definida por $f(x) = |x| + 1$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Uma vez que $|x| \geq 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$, temos $f(x) \geq 1$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Por outro lado, temos $f(0) = 1$ e, portanto, f admite um mínimo global (logo local) $f(0) = 1$ em $x = 0$.

Definição 8.3. Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D_f$.

Dizemos que $f(a)$ é um **extremo local** ou **extremo relativo** para f em D_f se a é um ponto de máximo local ou ponto de mínimo local para f em D_f.

Dizemos que $f(a)$ é um **extremo absoluto** para f em D_f se a é um ponto de máximo absoluto ou ponto de mínimo absoluto para f em D_f.

No caso em que $f(a)$ é um extremo local para f em D_f dizemos que f **admite em a um extremo local** ou ainda que a **é um extremante local** de f em D_f.

Analogamente, se $f(a)$ é um extremo absoluto para f em D_f dizemos que f **admite em a um extremo absoluto** ou ainda que a **é um extremante absoluto** de f em D_f.

O estudo do sinal da primeira derivada num intervalo aberto I dá-nos informação sobre a monotonia de f em I. Temos a seguinte proposição:

Proposição 8.4. *Seja f uma função contínua num intervalo I e diferenciável no interior de I. Então verificam-se as condições seguintes:*

1. *Se $f'(x) = 0$, para todo o $x \in I$, então f é constante em I;*

2. *Se $f'(x) \geq 0$, para todo o $x \in I$, então f é crescente em I;*

3. *Se $f'(x) \leq 0$, para todo o $x \in I$, então f é decrescente em I;*

4. *Se $f'(x) > 0$, para todo o $x \in I$, então f é estritamente crescente em I;*

5. *Se $f'(x) < 0$, para todo o $x \in I$, então f é estritamente decrescente em I.*

Podemos também utilizar o estudo do comportamento da primeira derivada para determinar os extremantes locais.

Proposição 8.5. *Seja $f :]a\,,b[\longrightarrow \mathbb{R}$. Se $c \in]a\,,b[$ é um extremante local de f e f é diferenciável em c, então $f'(c) = 0$.*

É consequência da proposição que acabámos de enunciar que são candidatos a extremantes locais de uma função f os zeros da primeira derivada de f, os pontos onde a derivada é infinita ou os pontos onde não existe derivada.

O estudo do sinal da derivada numa vizinhança de um candidato a extremante local permite-nos concluir, desde que a função seja contínua no ponto, se se trata de facto de um extremante local e, em caso afirmativo, classificá-lo, ou seja determinar se se trata de um maximizante local ou de um minimizante local.

Proposição 8.6. *Seja $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a\,,b] \subset D_f$ e diferenciável em $]a\,,b[$ excepto possivelmente num ponto $c \in]a\,,b[$.*

(i) Se $f'(x) > 0$, para todo o $x < c$, e $f'(x) < 0$, para todo o $x > c$, então f admite em c um máximo local;

(ii) Se $f'(x) < 0$, para todo o $x < c$, e $f'(x) > 0$, para todo o $x > c$, então f admite em c um mínimo local.

Exemplo 8.7. Consideremos a função f definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.

Vamos utilizar o estudo do sinal da primeira derivada para determinar os intervalos de monotonia de f e, como f é contínua no seu domínio, podemos utilizar a Proposição 8.6 para fazer o estudo da existência de extremos locais.

Uma vez que, para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x x - \mathrm{e}^x}{x^2} = \frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$$

temos $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1$ e, portanto, $x = 1$ é o único candidato a extremante local.

Uma vez que e^x e x^2 são ambos positivos em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, o sinal da primeira derivada de f é o sinal de $x-1$. Temos então

$$\begin{array}{lll} f'(x) \geq 0 & \text{se} & x \in [1, +\infty[\\ f'(x) < 0 & \text{se} & x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\end{array}$$

o que permite concluir que f:

- é estritamente crescente em $]1,+\infty[$;
- é estritamente decrescente em $]-\infty,0[$ e em $]0,1[$;
- admite um mínimo local $f(1) = $ e em $x = 1$.

Observe-se que, no caso em que a função não é contínua num ponto c (e, portanto, não é diferenciável em c) a Proposição 8.6 não pode ser aplicada e, portanto, tem de ser feito um estudo local. Em alguns casos o estudo do sinal da derivada pode conduzir a resultados errados.

Exemplo 8.8. Consideremos a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ -\dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Uma vez que f não é contínua em $x = 0$ tem-se que f não é diferenciável neste ponto.

Então $x = 0$ é um candidato a extremante local de f. No entanto, uma vez que f não é contínua neste ponto, não podemos utilizar a Proposição 8.6 e utilizar o estudo do sinal da derivada numa vizinhança de $x = 0$ para determinar a natureza deste candidato a extremante local.

Uma vez que $f(x) \geq 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$ podemos concluir, utilizando a definição que f admite em $x = 0$ um mínimo global, logo local.

Notemos que, neste caso temos

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} & \text{se} \quad x > 0 \\ \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

pelo que $f'(x) > 0$ se $x < 0$ e $f'(x) < 0$, se $x > 0$.

O estudo do sinal da derivada conduzir-nos-ia à conclusão que $x = 0$ é um ponto de máximo local!

8.2 Concavidades e pontos de inflexão

Definição 8.9. Seja f uma função diferenciável num intervalo $]a, b[$. Dizemos que **o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em** $]a, b[$ se, para todo o $c \in]a, b[$, o gráfico de f está situado acima da tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$, isto é, sendo $x \in]a, b[$, $x \neq c$, $f(x)$ é superior à ordenada do ponto da tangente cuja abcissa é igual a x.

Dizemos que **o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em** $]a, b[$ se, para todo o $c \in]a, b[$, o gráfico de f está situado abaixo da tangente no ponto $(c, f(c))$, isto é, para todo o $x \in]a, b[$, $x \neq c$, $f(x)$ é inferior à ordenada do ponto da tangente cuja abcissa é igual a x.

Podemos relacionar o sinal da segunda derivada de f com o sentido da concavidade do gráfico de f. Temos a seguinte proposição.

Proposição 8.10. *Seja f uma função diferenciável em $]a\,,b[$ tal que f'' existe e é finita em cada ponto de $]a\,,b[$.*

(i) Se $f''(x)>0$, para todo o $x\in]a\,,b[$, então o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]a\,,b[$;

(ii) Se $f''(x)<0$, para todo o $x\in]a\,,b[$, então o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]a\,,b[$.

Definição 8.11. Seja f uma função definida num intervalo $]a\,,b[$ duas vezes diferenciável em $]a\,,b[$ excepto possivelmente num ponto $c\in]a\,,b[$. Dizemos que o ponto $(c\,,f(c))$ com $c\in]a\,,b[$ é um **ponto de inflexão** do gráfico de f se a segunda derivada de f muda de sinal em $x=c$, isto é, se $f''(x)>0$ se $x\in]a\,,c[$ e $f''(x)<0$ se $x\in]c\,,b[$, ou $f''(x)<0$ se $x\in]a\,,c[$ e $f''(x)>0$ se $x\in]c\,,b[$.

Exemplo 8.12. Seja f a função definida por $f(x)=x\mathrm{e}^x$, para todo o $x\in\mathbb{R}$.

Vamos estudar o sinal da segunda derivada de f para fazer o estudo do sentido das concavidades e determinar o(s) ponto(s) e inflexão do gráfico de f.

Temos, para todo o $x\in\mathbb{R}$,

$$f'(x)=\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x(x+1)$$

e

$$f''(x)=\mathrm{e}^x(x+2)\,.$$

Uma vez que a exponencial é uma função positiva, o sinal de f'' é o sinal de $x+2$. Temos então $f''(x)>0$ se $x>-2$ e $f''(x)<0$ se $x<-2$.

Então o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty,-2[$, tem a concavidade voltada para cima em $]-2,+\infty[$ e o ponto $A=(-2,f(-2))=(-2,-2\,\mathrm{e}^{-2})$ é o ponto de inflexão do gráfico de f.

8.3 Assimptotas

8.3.1 Assimptotas verticais

Definição 8.13. Sejam $f:D_f\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função e a um ponto de acumulação de D_f. Dizemos que a recta de equação $x=a$ é uma **assimptota vertical** do gráfico de f se um dos limites laterais de f em a é infinito.

Exemplo 8.14. 1. Seja f a função definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x)=\ln x$. Uma vez que

$$\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$$

a recta de equação $x=0$ é uma assimptota vertical do gráfico de f.

Observemos que, uma vez que f é contínua em $\mathbb{R}^+$, a recta de equação $x=0$ é a única assimptota vertical do gráfico de f.

2. Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

   Uma vez que f é contínua em $\mathbb{R}$ o gráfico de f não admite assimptotas verticais.

3. Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

   Uma vez que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$$

   e $f(0) = 0$ temos que f é descontínua em $x = 0$. Utilizando as propriedades das funções contínuas temos que f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Consequentemente a recta de equação $x = 0$ é a única candidata a assimptota vertical do gráfico de f.

   No entanto, como o limite de f na origem é finito podemos concluir que o gráfico de f não admite assimptotas verticais.

8.3.2 Assimptotas não verticais

Definição 8.15. Seja f uma função cujo domínio contém um intervalo da forma $]a, +\infty[$, para algum $a \in \mathbb{R}$. Dizemos que a recta de equação $y = mx + b$ é uma **assimptota ao gráfico de f à direita** (ou quando $x \to +\infty$) se o limite $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - mx - b) = 0$.

Se o domínio de f contém um intervalo da forma $]-\infty, a[$ para algum $a \in \mathbb{R}$, dizemos que a recta de equação $y = mx + b$ é uma **assimptota ao gráfico de f à esquerda** (ou quando $x \to -\infty$) se o limite $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - mx - b) = 0$.

Em ambos os casos, se $m = 0$, então a assimptota não vertical é uma recta horizontal que é habitualmente designada **assimptota horizontal**.

A proposição que apresentamos a seguir permite concluir se o gráfico de uma função admite assimptota não vertical à direita e, em caso afirmativo, permite calcular o seu declive e a sua ordenada na origem.

Proposição 8.16. *Seja f uma função cujo domínio contém um intervalo da forma $]a, +\infty[$ para algum $a \in \mathbb{R}$. A recta de equação $y = mx + b$ é uma assimptota ao gráfico de f à direita se e só se existem e são finitos os limites $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - mx)$ e temos*

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

e

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx).$$

Para as assimptotas não verticais à esquerda temos um resultado análogo.

Proposição 8.17. *Seja f uma função cujo domínio contém um intervalo da forma $]-\infty, a[$, para algum $a \in \mathbb{R}$. A recta de equação $y = mx + b$ é uma assimptota ao gráfico de f à esquerda se e só se existem e são finitos os limites $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx)$ e temos*

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$$

e

$$b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx).$$

Exemplo 8.18. Consideremos a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{1/x} & \text{se} \quad x \geq 0 \\ x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

- Assimptota não vertical à esquerda

  Temos

  $$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$

  o que permite concluir que, se o gráfico de f admitir assimptota não vertical à esquerda, então ela tem declive $m = 0$.

  Como

  $$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to-\infty} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$$

  podemos concluir que a recta de equação $y = 1$ é a assimptota não vertical à esquerda do gráfico de f.

- Assimptota não vertical à direita

  Temos

  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{1/x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{1/x} = 1$$

  o que permite concluir que se o gráfico de f admitir assimptota não vertical à direita ela tem declive $m = 1$.

  Uma vez que

  $$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} (x\mathrm{e}^{1/x} - x) = \lim_{x\to+\infty} x(\mathrm{e}^{1/x} - 1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{1/x} - 1}{1/x} = 1$$

  podemos concluir que a recta de equação $y = x + 1$ é a assimptota não vertical à direita do gráfico de f.

9 Exercícios

9.1 Enunciados

1. Em cada uma das alíneas que se seguem determine $f(x)$ sabendo que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e:

   (a) $f(x+1)=x^2+3x+5$, para todo o $x\in\mathbb{R}$

   (b) $f(3x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, para todo o $x\in\mathbb{R}$

2. Determine o domínio das seguintes funções:

   (a) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{4+\sqrt{3x}}}$

   (b) $f(x)=\dfrac{3+2x^2}{\operatorname{tg} x-1}$

   (c) $f(x)=\dfrac{1-\ln x}{2+\ln(3x-1)}$

   (d) $f(x)=\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-x}}$

   (e) $f(x)=\sqrt{(\operatorname{sen} x-1)\log_{1/2}(4-x)}$

   (f) $f(x)=\sqrt{\sqrt{2}-2|\operatorname{sen} x|}$

   (g) $f(x)=\ln(|2x-1|-|x|)$

   (h) $f(x)=\ln(\ln x)$

   (i) $f(x)=\ln\dfrac{2+x}{2-x}$

3. Determine os valores de $m\in\mathbb{R}$ para os quais o domínio da seguinte função é $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\sqrt{mx^2+(2m+1)x+m+2}\,.$$

4. Determine o domínio e os zeros das seguintes funções:

   (a) $f(x)=\dfrac{|2x|-|-x+1|}{x^2+1}$

   (b) $g(x)=\dfrac{|x^3-2x+1|}{|x-1|+|x^2-4x+3|}$

5. Resolva as seguintes equações e inequações:

   (a) $4\ln(x/2)+3\ln(x/3)=5\ln(x)-\ln(27)$

   (b) $x\ln x=ax, a\in\mathbb{R}$

   (c) $16\times 2^{|x+1|}=4^{x+2}$

   (d) $\dfrac{1}{3^{x-1}}(x^2-3)<0$

   (e) $x\log_{1/2}(1+x)<x$

   (f) $x10^x+2\,.10^x=0$

6. Sejam f e g duas funções reais de variável real de domínio $\mathbb{R}$ tais que $f(x) = 0$ se e só se $x = 1$ ou $x = 2$ e $g(x) = \cos(2x - 1)$. Determine $x \in \mathbb{R}$ tal que $(f \circ g)(x) = 0$.

7. Sejam f e g duas funções reais de variável real definidas por $f(x) = \sqrt{x+1}$ e $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Prove que $(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{x+2}$ e que o domínio de $g \circ f$ é $[-1, +\infty[$.

8. Sejam f e g duas funções reais de variável real tais que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x(x^2 - 3x + 3)$ e $f(g(x)) = 1 - x^6$. Caracterize a função g.

   Sugestão: Observe que $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

9. Considere o seguinte

   Teorema: Seja $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real de variável real. Se D é simétrico em relação à origem, então existem duas funções f_P e f_I tais que

   i) $f_P: D \longrightarrow \mathbb{R}$ é par;

   ii) $f_I: D \longrightarrow \mathbb{R}$ é ímpar;

   iii) $f = f_P + f_I$.

   Mostre que:

   (a) as funções dadas por $f_P(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ e por $f_I(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ satisfazem a tese do teorema;

   (b) as funções f_P e f_I definidas pelo teorema são únicas (e por isso são designadas, respectivamente, *parte par* e *parte ímpar* de f.)

10. Considere o polinómio $p(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

    (a) Prove que $p(x)$ tem um zero no intervalo $]0, 1[$.

    (b) Localize, em intervalos cujos extremos são inteiros consecutivos, os outros zeros de $p(x)$.

11. Seja h uma função real de variável real definida da seguinte forma:

$$h(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{se } x < 1 \\ 1-x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

    (a) Calcule $h(-1)$ e $h(2)$.

    (b) Prove que para todo o $x \in [-1, 2]$ se tem $h(x) \neq 1$. Será que esta conclusão contradiz o Teorema de Bolzano? Justifique.

12. Sejam $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real de variável real estritamente crescente e $x_1, x_2 \in D$. Demonstre a seguinte implicação

$$f(x_1) < f(x_2) \Longrightarrow x_1 < x_2\ .$$

13. Seja f uma função real definida e contínua no intervalo $[0,1]$. Supondo que, para todo o $x \in [0,1]$, $0 \leq f(x) \leq 1$, mostre que f tem um ponto fixo no intervalo $[0,1]$, isto é, mostre que existe pelo menos um ponto $c \in [0,1]$ para o qual $f(c) = c$.

    Sugestão: Aplicar o Teorema de Bolzano à função g definida por $g(x) = f(x) - x$.

14. Prove que se g for uma função definida numa vizinhança da origem (excluindo eventualmente a origem) tal que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ então
$$\lim_{x\to 0} g(x)\,\mathrm{sen}(1/x) = 0\,.$$

15. Sejam
$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \text{ e}$$
$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$
dois polinómios de coeficientes reais de graus n e m, respectivamente. Mostre que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}\,.$$

16. Justifique que não existem os seguintes limites:

    (a) $\lim_{x\to\pi/2} \mathrm{tg}\, x$

    (b) $\lim_{x\to 0} f(x)$, onde $f(x) = \begin{cases} x^2\,\mathrm{sen}(1/x) & \text{se } x < 0 \\ (1+x)^x & \text{se } x > 0 \end{cases}$

    (c) $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{sen}\, x$

17. Sendo
$$f(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{se } x \leq 2 \\ 1-x^2 & \text{se } x > 2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \begin{cases} 10 & \text{se } x \leq 2 \\ x^2+3x & \text{se } x > 2 \end{cases}$$
calcule

    (a) $\lim_{x\to 2} (f+g)(x)$

    (b) $\lim_{x\to 2} (f-g)(x)$

    (c) $\lim_{x\to 2} (f\times g)(x)$

    (d) $\lim_{x\to 2} (f/g)(x)$

    (e) $\lim_{x\to -1^+} \dfrac{f(x)}{-x-1}$

    (f) $\lim_{x\to -1^-} \dfrac{f(x)}{-x-1}$

18. Identifique o erro cometido na igualdade que apresentamos a seguir
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(1-1/x)}{x\sqrt{1-4/x^2}}$$

19. Calcule,caso exista, o limite considerado em cada uma das alíneas seguintes:

    (a) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^5 - a^5}{x - a}$

    (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\sqrt{x} - x + \sqrt{x} - 1}{x - 1}$

    (c) $\lim\limits_{t\to -2} \dfrac{t^3 + 2t^2 + 4t + 8}{t^3 - 4t}$

    (d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2 + 2x - 1}{\sqrt{x} + 1}$

    (e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + 3}$

    (f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 8} - \sqrt{x^2 - x - 1}\right)$

    (g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^3 + 3}\right)$

    (h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+5} - \sqrt{x}}{x - \sqrt{x+5}}$

    (i) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^4 + 2x - 1}{x + 3}$

    (j) $\lim\limits_{x\to +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

    (k) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1 - x} - \dfrac{1}{1 - x^3}\right)$

    (l) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x + 51} - 3}{\sqrt{x - 2} - \sqrt{2}}$

20. Estude quanto à continuidade as funções seguintes:

    (a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x-1)}{x^2 - x - 2} & \text{se } x > 2 \\ 1/3 & \text{se } x = 2 \\ \dfrac{e^{x-2} - 1}{3x - 6} & \text{se } x < 2 \end{cases}$

    (b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}(x^2 - \sqrt[3]{x})}{x^2 + 5}$

    (c) $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(t - \dfrac{\pi}{6}\right) & \text{se } t \geq 0 \\ \dfrac{2t}{1 - e^{4t}} & \text{se } t < 0 \end{cases}$

    (d) $f(x) = \dfrac{|2x^2 - 2x - 4|}{x^2(1 + x)(x - 3)}$

    (e) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}^2 x - x^2 \cos(1/x)}{x^2} & \text{se } x \in]-\pi, 0[\end{cases}$

21. Sendo f definida e contínua em $[0,1[$, diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes proposições:

    (a) Se $f(1/4)=5$ e $f(3/4)=-2$, então existe $x\in[0,1[$ tal que $f(x)=0$.

    (b) Se $f(1/4)=5$ e $f(3/4)=3$, então existe $x\in[0,1[$ tal que $f(x)=4$.

22. (a) Sejam f e g duas funções reais de variável real tais que, para todo o $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=xg(x)$. Prove que se g é contínua em $x=0$, então f é diferenciável em $x=0$ e $f'(0)=g(0)$.

    (b) Recorrendo à alínea anterior determine $h'(0)$, sendo:

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x|x| \end{array}$$

23. Seja $I\subset\mathbb{R}$ um intervalo tal que $0\in\text{int}(I)$.
    Sejam $f,\ g: I\longrightarrow\mathbb{R}$ duas funções tais que, para todo o $x\in I$,
    $$-x^2\le f(x)\le x^2 \qquad \text{e} \qquad x\le g(x)\le x+x^2\ .$$
    Prove que $f'(0)=0$ e $g'(0)=1$.

24. Sejam $f,\ g,\ h: D\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ três funções tais que, para todo o $x\in D$,

$$f(x)\le g(x)\le h(x)\ .$$

    Seja $a\in D$ um ponto do interior de D tal que $f(a)=h(a)$.

    Prove que se existem $f'(a)$ e $h'(a)$ e $f'(a)=h'(a)$, então existe $g'(a)$ e $g'(a)=f'(a)=h'(a)$.

25. Utilizando a definição de derivada de uma função num ponto prove que:

    (a) $(x^n)'=nx^{n-1}$, para todos os $n\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{R}$

    (b) sendo $a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$, $(a^x)'=a^x\ln a$, para todo o $x\in\mathbb{R}$

    (c) $(\text{tg}x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ para todo o $x\in\mathbb{R}\setminus\{\pi/2+k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$.

26. Seja f uma função real de variável real definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } x>0 \\ 2 & \text{se } x=0 \\ x^2-x & \text{se } x<0 \end{cases}$$

    Indique, justificando, o valor lógico da proposição seguinte:

    a função derivada de f é

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{se } x>0 \\ 0 & \text{se } x=0 \\ 2x-1 & \text{se } x<0 \end{cases}$$

27. Mostre que a derivada de uma função par [resp. ímpar] é uma função ímpar [resp. par].

28. Determine a derivada de cada uma das funções seguintes:

    (a) $f(x) = (1+\sqrt[3]{x})^3$
    (b) $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$
    (c) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos x)$
    (d) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$
    (e) $f(x) = \dfrac{x - \operatorname{tg} x}{x + \operatorname{cotg} x}$
    (f) $f(x) = (5x)^x$, com $x > 0$
    Sugestão: Atenda a que $(5x)^x = \mathrm{e}^{\ln((5x)^x)} = \mathrm{e}^{x\ln(5x)}$.
    (g) $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$
    (h) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$

29. Sejam f e g duas funções reais de variável real definidas por $f(x) = x^3$ e $g(x) = \operatorname{sen} x$. Determine, utilizando o teorema da derivada da função composta as derivadas seguintes:

    (a) $(f \circ g)'(\pi/4)$
    (b) $(g \circ f)'(x)$, para $x \in \mathbb{R}$

30. Considere as funções f e g reais de variável real definidas da seguinte forma:
    $f(x) = \ln x$ e $g(x) = \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$.
    Calcule $(f \circ g)'(x)$ de duas formas diferentes.

31. Determine as equações cartesianas das rectas tangente e normal ao gráfico da função definida por $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ no ponto de abcissa $x = 2$.

32. Mostre que a normal à circunferência de equação $x^2 + y^2 = r^2$ em qualquer ponto passa pelo seu centro.

33. Mostre que cada uma das funções seguintes é contínua no domínio considerado, mas não é aí diferenciável.

    (a) $f(x) = 1 + |\operatorname{sen} x|$, com $x \in [0, 2\pi]$
    (b) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e} + \ln(1-x) & \text{se } x < 0 \\ \mathrm{e}^{1-x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

34. Considere a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{1/x}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

    Estude f quanto à diferenciabilidade em $x = 0$.

35. Para cada $p \in \mathbb{Z}$ seja f_p a função definida por

$$f_p(x) = \begin{cases} x^p \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Indique para que valores de p a função f_p é:

(a) uma função contínua;

(b) uma função derivável;

(c) uma função diferenciável;

(d) uma função continuamente diferenciável, isto é, uma função com derivada contínua.

36. Seja $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função que verifica as condições seguintes:

- f é contínua no seu domínio;
- f é diferenciável em $\mathbb{R}^+$;
- $f(0) = 0$;
- f' é monótona crescente.

Prove que a função g definida por $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$, é monótona crescente.

37. Determine, caso existam, os extremos locais das funções:

(a) $f(x) = (x-2)^{2/3}(2x+1)$

(b) $f(x) = 1 - (x-2)^{4/5}$

(c) $f(x) = x\mathrm{e}^x$

(d) $f(x) = |\operatorname{sen} x|$

(e) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2} + 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 4 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(g) $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x = 1/n \\ 0 \text{ se } x \neq 1/n \end{cases}$, com $n \in \mathbb{N}$

(h) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$

(i) $f(x) = 2\operatorname{sen} x + \cos(2x), \ \ x \in \left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right]$

(j) $f(x) = \begin{cases} 2x + \dfrac{1}{\pi}\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) & \text{se } x < 1 \\ x^2 - 6x + 7 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

38. Exprima a área, A, de um rectângulo, como função de um dos seus lados, supondo o perímetro igual a 20. Faça um esboço do gráfico da função que define a área no intervalo $[0,10]$. Determine, analiticamente e graficamente, o valor do comprimento dos lados que torna a área máxima.

39. Sabendo que $x+y=a$, com a constante, calcule x e y por forma a que o seu produto seja máximo.

40. Sabendo que o produto de dois números positivos x e y é igual a uma constante k, determine para que valores de x e y é mínima a sua soma.

41. Um rectângulo está inscrito num semi-círculo de raio fixo r. Exprima a área, A, do rectângulo em função da sua base, x, e determine o valor de x para o qual a área é máxima.

42. Uma caixa rectangular sem tampa, de capacidade v fixa, tem base quadrada de lado x. Exprima a área total da caixa em função de x e determine o valor de x para o qual a área é mínima.

43. Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$.

    (a) Calcule, aplicando a definição, a derivada da função no ponto de abcissa π.

    (b) Defina analiticamente a tangente à curva nesse ponto.

    (c) Represente, sob a forma de intervalos de números reais, o conjunto solução da condição $f'(x) > 0$.

44. Considere a função f definida por

$$f(x) = \frac{x^3 + kx^2 + 1}{x^2 - 2x} \ ,$$

onde k é um parâmetro real.

    (a) Determine k por forma que o gráfico da função tenha por assímptota da sua parte direita a recta de equação $y = x + 1$.

    (b) Indique a posição do gráfico relativamente aquela assímptota.

45. (a) Sejam n um número natural par e f a função definida por $f(x) = x^n$. Mostre que o gráfico de f não admite pontos de inflexão.

    (b) Seja $m > 2$ um número natural ímpar. Para cada m seja g a função definida por $g(x) = x^m$. Prove que g admite um único ponto crítico mas que, no entanto, g não admite extremos locais.

46. Determine as constantes reais a e b por forma que o gráfico da função

$$f(x) = ax^2 + \frac{b}{x}$$

tenha um ponto de inflexão para $x = 1$ e que a tangente ao gráfico neste ponto de inflexão seja paralela à recta de equação $y = 3x + 1$.

47. Faça o estudo e um esboço do gráfico das funções seguintes:

(a) $f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 2}$

(b) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ com $x \in [0, 2\pi]$

(c) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

(d) $f(x) = \mathrm{e}^{|\ln|x||}$

(e) $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-x}$

(f) $f(x) = x^2 \ln|x|$

48. Utilizando um contra-exemplo mostre que são falsas as seguintes proposições.

(a) Se uma função não é diferenciável num ponto, então não é contínua nesse ponto.

(b) Toda a função contínua num ponto é diferenciável nesse ponto.

(c) Se $f' = g'$ então $f = g$.

(d) Se f possui um máximo local em x_0, então $f'(x_0)$ existe e é nula.

9.2 Soluções

1. (a) $f(x) = x^2 + x + 3$, para todo o $x \in \mathbb{R}$

   (b) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+9}$, para todo o $x \in \mathbb{R}$

2. (a) $[2, +\infty[$;

   (b) $\left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi \wedge x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$;

   (c) $\left]\dfrac{1}{3}, \dfrac{1+e^2}{3e^2}\right[\cup \left]\dfrac{1+e^2}{3e^2}, +\infty\right[$;

   (d) $[0, +\infty[$;

   (e) $]-\infty, 3]$;

   (f) $\cup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \dfrac{\pi}{4} + k\pi\right]$

   (g) $\left]-\infty, \dfrac{1}{3}\right[\cup]1, +\infty[$;

   (h) $]1, +\infty[$;

   (i) $]-2, 2[$.

3. $m \geq 1/4$.

4. $D_f = \mathbb{R}$ e f tem zeros $x = 1$ ou $x = 1/3$; $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e g tem zeros $x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ou $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

5. (a) $x = 4$;

   (b) $x = \mathrm{e}^a$;

   (c) $x = 1$;

   (d) $x \in]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$;

   (e) $x \in]-1, -1/2[\cup]0, +\infty[$;

   (f) $x = -2$.

6. $x = \dfrac{1}{2} + k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

8. $$\begin{array}{cccl} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(x) = 1 - x^2 \end{array}$$

10. (b) Um zero pertence a $]-1, 0[$ e o outro a $]2, 3[$.

11. (a) $h(-1) = 4$, $h(2) = -1$;

    (b) Não, já que a função não é contínua para $x = 1$.

17. (a) 7;

    (b) -13;

    (c) -30;

    (d) $\dfrac{-3}{10}$;

(e) $-\infty$;

(f) $+\infty$.

18. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(1-\frac{1}{x})}{-x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}$

19. (a) $5a^4$;

    (b) 1;

    (c) 1;

    (d) $+\infty$;

    (e) $+\infty$;

    (f) 0;

    (g) $-\infty$;

    (h) 0;

    (i) $-\infty$

    (j) $1/2$

    (k) não existe

    (l) $\sqrt{2}$

20. (a) $D_f = \mathbb{R}$ e f é contínua em $\mathbb{R}$.

    (b) Tem domínio $\mathbb{R}$ e é aí contínua.

    (c) Tem domínio $\mathbb{R}$ e é aí contínua.

    (d) Tem domínio $\mathbb{R}\setminus\{0,-1,3\}$ e é aí contínua.

    (e) Tem domínio $]-\pi,+\infty[$ e é contínua em $]-\pi,0[\cup]0,+\infty[$.

21. (a) Verdadeira;

    (b) Verdadeira.

22. (a) Sugestão: Utilize a definição para determinar $f'(0)$.

    (b) $h'(0) = 0$.

23. Sugestão: utilize a definição e os enquadramentos indicados no enunciado para calcular as derivadas laterais de f e g na origem.

24. Sugestão: utilize o enquadramento indicado para concluir que $f(a) = g(a) = h(a)$. Do enquadramento apresentado resulta que, para $k > 0$,

    $$\frac{f(a+k)-f(a)}{k} \leq \frac{g(a+k)-g(a)}{k} \leq \frac{h(a+k)-h(a)}{k}$$

    donde se conclui que $h'_+(a) = f'_+(a) = g'_+(a)$.

    Utilizando um racíocinio análogo conclua que $h'_-(a) = f'_-(a) = g'_-(a)$ e deduza o resultado pretendido.

26. Falsa.

27. Sugestão: utilize as definições de derivada de uma função num ponto e de função par e ímpar.

28. (a) $\dfrac{(1+\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{(1+\sqrt[3]{x})^2\sqrt[3]{x}}{x}$;

    (b) $\dfrac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \dfrac{1}{4\sqrt{x+\sqrt{x^3}}}$;

    (c) $-\operatorname{sen} x \cos(\cos x)$;

    (d) $\dfrac{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}{2x}$;

    (e) $\dfrac{x(\operatorname{cotg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x) - \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x}{(x+\operatorname{cotg} x)^2}$;

    (f) $(5x)^x(\ln(5x)+1)$;

    (g) $\operatorname{cotg} x$;

    (h) $\dfrac{2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$.

29. (a) $3\dfrac{\sqrt{2}}{4}$;

    (b) $3x^2\cos(x^3)$.

30. $(f\circ g)'(x) = \sec x$.

31. Recta tangente: $y = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}x + \dfrac{\sqrt{5}}{5}$; Recta normal: $y = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}x + 2\sqrt{5}$.

33. (a) f não é diferenciável em π porque $f'_+(\pi) = 1$ e $f'_-(\pi) = -1$.

    (b) f não é diferenciável em 0 porque $f'_+(0) = -\mathrm{e}$ e $f'_-(0) = -1$.

34. Como f não é contínua em $x = 0$, tem-se que f não é diferenciável neste ponto.

35. (a) $p > 0$;

    (b) $p > 1$;

    (c) $p > 1$;

    (d) $p > 2$.

37. (a) 3 é máximo local atingido em $x = 1$ e 0 é mínimo local atingido em $x = 2$;

    (b) 1 é máximo local atingido em $x = 2$;

    (c) $-\mathrm{e}^{-1}$ é um mínimo local atingido em $x = -1$;

    (d) 1 é máximo local de f atingido nos pontos da forma $\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; 0 é mínimo local atingido nos pontos da forma $k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

    (e) Mínimo local 1 atingido em $x = 0$;

    (f) Mínimo local 4 atingido em $x = 0$;

(g) Os pontos do conjunto $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\cup(\cup_{n\in\mathbb{N}}]1/(n+1), 1/n[)$ são pontos de máximo e mínimo local, pelo que 0 é máximo e mínimo local, 1 é máximo local de f atingido nos pontos da forma $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$; 0 é mínimo local de f atingido no ponto $x = 0$;

(h) Máximo local $\frac{1}{2\mathrm{e}}$ atingido no ponto $x = \sqrt{\mathrm{e}}$;

(i) Máximo local $3/2$ atingido nos pontos $x = \pi/6$ e $x = 5\pi/6$, mínimo local 1 atingido nos pontos $x = 0$ e $x = \pi/2$, mínimo local -3 atingido no ponto $x = 3\pi/2$;

(j) Máximo local 2 quando $x = 1$, mínimo local -2 quando $x = 3$.

38. $A = 10x - x^2$ A área toma o valor máximo $A = 25$ para $x = 5$ e $y = 5$.

39. O produto é máximo quando $x = y = \frac{a}{2}$.

40. A soma toma o valor mínimo $2\sqrt{k}$ para $x = y = \sqrt{k}$.

41. $A = \frac{1}{2}x\sqrt{4r^2 - x^2}$. A área é máxima quando $x = \sqrt{2}r$.

42. $A = \dfrac{x^3 + 4v}{x}$. A área é mínima quando $x = \sqrt[3]{2v}$.

43. (a) -1;

    (b) $y = -x + (\pi - 1)$;

    (c) $x \in \cup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right[$.

44. (a) $k = -1$

    (b) O gráfico de f está acima da assímptota.

46. $a = 1$ e $b = -1$

47. (a) **Domínio:** $\mathbb{R}$; **Sinal:** positiva em $\mathbb{R}$; **Zeros:** não tem; **Assímptotas verticais:** não tem; **Assímptotas não verticais:** $y = 2x + 1/4$ é assímptota vertical à direita e $y = -2x - 1/4$ é assímptota não vertical à esquerda; **Monotonia:** decrescente no intervalo $]-\infty, -1/8]$ e crescente no intervalo$[1/8, +\infty[$; **Extremos locais:** mínimo local $\sqrt{31}/4$ em $x = -1/8$, não tem máximos locais; **Concavidades:** concavidade voltada para cima em todo o domínio; **Pontos de inflexão:** não tem.

    (b) **Domínio:** $[0, 2\pi]$; **Sinal:** positiva em $[0, 3\pi/4[\cup]7\pi/4, 2\pi]$, negativa em $]3\pi/4, 7\pi/4[$ **Zeros:** $3\pi/4$ e $7\pi/4$; **Assímptotas verticais:** não tem; **Assímptotas não verticais:** não tem; **Monotonia:** crescente nos intervalos $[0, \pi/4]$ e $[5\pi/4, 2\pi]$, decrescente no intervalo $[\pi/4, 5\pi/4]$; **Extremos locais:** mínimo local $-\sqrt{2}$ em $x = 5\pi/4$, máximo local $\sqrt{2}$ em $x = \pi/4$; **Concavidades:** concavidade voltada para baixo em $[0, 3\pi/4[$ e em $]7\pi/4, 2\pi]$, concavidade voltada para cima em $]3\pi/4, 7\pi/4[$; **Pontos de inflexão:** $(3\pi/4, 0)$ e $(7\pi/4, 0)$.

    (c) **Domínio:** $\mathbb{R}^+$; **Sinal:** negativa em $]0, 1[$ e positiva em $]1, +\infty[$; **Zeros:** $x = 1$; **Assímptotas verticais:** $x = 0$; **Assímptotas não verticais:** $y = 0$; **Monotonia:** decrescente em $[\mathrm{e}, +\infty[$ e crescente em $]0, \mathrm{e}]$; **Extremos locais:** máximo local $\frac{1}{\mathrm{e}}$ em $x = \mathrm{e}$; **Concavidades:** concavidade voltada para cima em $]\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}, +\infty[$ e voltada para baixo em $]0, e\sqrt{\mathrm{e}}[$; **Pontos de inflexão:** $(\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}, \frac{3}{2\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}})$.

(d) **Domínio:** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; **Sinal:** positiva em todo o domínio; **Zeros:** não tem; **Assímptotas verticais:** $x=0$; **Assímptotas não verticais:** $y=x$ é assímptota não vertical à direita e $y=-x$ é assímptota não vertical à esquerda; **Monotonia:** decrescente nos intervalos $]-\infty,-1]$ e $]0,1]$ e crescente nos intervalos $[-1,0[$ e $[1,+\infty[$; **Extremos locais:** mínimo local 1 em $x=1$ e $x=-1$; **Concavidades:** concavidade voltada para cima em todo o domínio; **Pontos de inflexão:** não tem.

(e) **Domínio:** $\mathbb{R}$; **Sinal:** positiva em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; **Zeros:** $x=0$; **Assímptotas verticais:** não tem; **Assímptotas não verticais:** $y=0$ é assímptota não vertical à direita; **Monotonia:** decrescente em $]-\infty,0]$ e em $[2,+\infty[$ e crescente em $[0,2]$; **Extremos locais:** mínimo local 0 em $x=0$, máximo local $\dfrac{4}{e^2}$ em $x=2$; **Concavidades:** concavidade voltada para cima em $]-\infty,2-\sqrt{2}[$ e em $]2+\sqrt{2},+\infty[$, concavidade voltada para baixo em $]2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}[$; **Pontos de inflexão:** $\left(2-\sqrt{2},(2-\sqrt{2})^2\mathrm{e}^{-2+\sqrt{2}}\right)$ e $\left(2+\sqrt{2},(2+\sqrt{2})^2\mathrm{e}^{-2-\sqrt{2}}\right)$.

(f) **Domínio:** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; **Sinal:** positiva em $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ e negativa em $]-1,1[\setminus\{0\}$ **Zeros:** $x=1$ ou $x=-1$; **Assímptotas verticais:** não tem; **Assímptotas não verticais:** não tem; **Monotonia:** decrescente em $]-\infty,-1/\sqrt{e}]$ e em $]0,1/\sqrt{e}]$ e crescente em $]-1/\sqrt{e},0[$ e em $[1/\sqrt{e},+\infty[$; **Extremos locais:** mínimo local $-\dfrac{1}{2e}$ em $x=-1/\sqrt{e}$, máximo local $-\dfrac{1}{2e}$ em $x=1/\sqrt{e}$; **Concavidades:** concavidade voltada para cima em $]-\infty,-1/\sqrt{\mathrm{e}^3}[$ e em $]1/\sqrt{\mathrm{e}^3},+\infty[$, concavidade voltada para baixo em $]0,1/\sqrt{\mathrm{e}^3}[$ e em $]1/\sqrt{\mathrm{e}^3},0[$; **Pontos de inflexão:** $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^3}},-\dfrac{3}{2\mathrm{e}^3}\right)$ e $\left(\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^3}},-\dfrac{3}{2\mathrm{e}^3}\right)$.