Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I — Exame da Época Normal - Primeira Chamada

3 de Janeiro de 2007

Duração: **2h30m**

Justifique todas as respostas e indique os cálculos efectuados.

100 Pontos

1. Considere a função f definida por $f(x) = \begin{cases} \text{arctg}\,\dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x > 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{se} \quad x = 0 \\ x^2 \ln(-x) & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$.

   (a) Estude f quanto à continuidade na origem.

   (b) Estude f quanto à diferenciabilidade na origem.

   (c) Estude f quanto à existência de extremos locais no intervalo $]-\infty, 0[$.

   (d) Seja h a função definida por $h(x) = \mathrm{e}^x f(x)$, para todo o $x \in [0,1]$. Mostre que existe $c \in]0,1[$ tal que $h'(c) = \dfrac{(\mathrm{e}-2)\pi}{4}$.

   (e) Seja g definida por $g(x) = \text{arctg}\,\dfrac{1}{x}$ a restrição de f a $\mathbb{R}^+$. Justifique que g é invertível e caracterize a sua inversa.

20 Pontos

2. Considere a função F definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \mathrm{e}^{1-t^2}\,dt$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

   Calcule $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x^2}$.

   Sugestão: Utilize a Regra de Cauchy.

30 Pontos

3. Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ e f uma função definida em I.

   (a) Defina primitiva de f e mostre que se F_1 e F_2 são duas primitivas de f, então existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $F_1 - F_2 = k$.

   (b) Suponha que f é a função definida por $f(x) = f(x) = x^3 \mathrm{e}^{-x^2}$. Determine a primitiva de f que se anula na origem.

30 Pontos

4. Considere a função f definida por $f(x) = \dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$.

   (a) Calcule o integral indefinido $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

   (b) Calcule o valor da área da região do plano situada entre $x = 1$ e $x = 2$ e limitada pelo eixo das abcissas e pelo gráfico de f.

20 Pontos

5. Determine a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$ e, em caso de convergência, indique o seu valor.