CAP.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS (EDOs)

2.1. Introdução

Exemplo 1:
Na Física diz-se que um ponto material cuja posição é dada por $r(t)$ no instante t se desloca segundo um movimento retilíneo uniforme se se deslocar em linha reta e a sua velocidade instantânea $r'(t)$ se mantiver constante. Qual é a expressão geral de $r(t)$?

Exemplo 2:
Na Física diz-se que um ponto material cuja posição é dada por $r(t)$ no instante t se desloca segundo um movimento retilíneo uniformemente variado se se deslocar em linha reta e a sua aceleração $r''(t)$ se mantiver constante (diferente de zero). Qual é a expressão geral de $r(t)$?

2.1. Introdução

Exemplo 3:
Deixo cair uma pedra de um penhasco e observo que ela demora 5 segundos a bater na água do mar lá em baixo. Se a aceleração da pedra fosse apenas devida à ação da gravidade e se se mantivesse constantemente igual a $9,8$ m/s^2 durante toda a queda, de que altura relativamente ao nível do mar teria eu deixado cair a pedra?

Exemplo 4:
Uma das equações básicas usadas em circuitos elétricos é

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

(lei de Kirchhoff) onde L e R são constantes (representando a indutância e a resistáncia, respetivamente), $I(t)$ a intensidade da corrente (no tempo t) e $E(t)$ a voltagem.

2.2. Definições e terminologia

Chama-se **equação diferencial ordinária (EDO) de ordem** n ($n \in \mathbb{N}$), a uma equação do tipo

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

onde y é uma função (real) de x.
Diz-se que uma EDO está na **forma normal** quando aparece explicitada em relação á derivada de maior ordem, i.e.,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

x é a variável independente, enquanto que y é a variável dependente ($y = y(x)$).
A **ordem** de uma EDO é a maior ordem da derivada da função desconhecida. Como é habitual, $y^{(n)}$ denota a derivada de ordem n da função y.

2.2. Definições e terminologia

Exemplos:

$$(y')^2 + y = \sin x \qquad\qquad y'' - y' + x^3 - 1 = 0$$

Chama-se **solução** da equação diferencial, num intervalo I, a toda a função $\Phi : I \to \mathbb{R}$ com derivadas finitas até à ordem n e tal que

$$F(x, \Phi(x), \Phi'(x), \Phi''(x), \dots, \Phi^{(n)}(x)) = 0, \forall x \in I$$

Exemplo:
As funções $\phi_1(x) = \sin x$ e $\phi_2(x) = \cos x - \sin x$ são duas soluções (em $\mathbb{R}$) da equação diferencial $y'' + y = 0$.
Estas são **soluções explícitas** da equação indicada. No entanto, em geral, uma EDO poderá ter **soluções na forma implícita**. É o caso da relação $ye^y = x$, a qual define implicitamente uma solução da equação diferencial

$$y'(1 - \ln \frac{y}{x}) = \frac{y}{x}, x > 0.$$

2.2. Definições e terminologia

Resolver (ou integrar) uma equação diferencial significa determinar o conjunto das suas soluções.

Usando conhecimentos de integração de Cálculo I podemos determinar as soluções de algumas equações diferenciais simples, como é caso da equação (escrita na forma normal) $y' = f(x)$.

Em geral, resolver (ou integrar) uma equação diferencial de ordem n consiste em determinar uma família de soluções que dependa de n parâmetros reais arbitrários.

A uma tal família, obtida através de técnicas de integração adequadas, chamamos **integral geral da equação diferencial**.

2.2. Definições e terminologia

Dado um integral geral, uma sua **solução particular** (ou integral particular) é uma solução que se obtém do primeiro por concretização dos parâmetros.

Poderão, no entanto, existir soluções que não se conseguem obter desta forma. Uma tal solução designa-se por **solução singular** (em relação ao integral geral considerado).

Ao conjunto de todas as soluções de uma equação diferencial chamamos **solução geral**.

Exemplos:

- A solução geral da EDO de segunda ordem
$$y'' + x = 0, x \in \mathbb{R}$$
é dada por
$$y = -\frac{x^3}{6} + C1x + C2, \text{ com } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$
- Considere-se agora a equação diferencial (em $\mathbb{R}$)
$$y' - 2y = 0.$$
Se φ é solução da equação, então $f(x) = \varphi(x)e^{-2x}$ tem derivada nula (verifique!). Portanto é da forma $\varphi(x) = Ce^{2x}$ (com C constante). Reciprocamente verificamos que as funções do tipo Ce^{2x} (novamente com C constante) constituem soluções da EDO dada. Assim, a solução geral da equação é $y = Ce^{2x}, C \in \mathbb{R}$.
Do ponto de vista geométrico...

2.2. Definições e terminologia

- Um objecto de massa m é colocado na extremidade de uma mola vertical. Esta esticada (ou comprimida) x unidades a partir da sua posição (inicial) de equilíbrio. A *Lei de Hooke* diz que a força (elástica) exercida pela mola é proporcional ao seu deslocamento $x = x(t)$. Por outro lado, como a força é igual à massa vezes a aceleraçãoo (*Lei de Newton*), se ignorarmos forçaas externas (como a resistência do ar, por exemplo), então o movimento harmónico da mola é modelado pela equação $m\frac{d^2x}{dt} = -kx$ onde $k > 0$ (constante de mola).

  Temos então a equação diferencial

  $$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0, \omega^2 = k/m.$$

  Mais tarde veremos que qualquer solução desta equação é do tipo

  $$x(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 cos(\omega t), \text{ com } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

2.2. Definições e terminologia

- Considere-se a EDO de primeira ordem (em $\mathbb{R}$)

$$(y')^2 - 4y = 0$$

  Um integral geral desta equação é dado por $y = (x + C)^2$, onde C' e uma constante real arbitrária.
  A função definida por $y = x^2$ é uma solução particular daquela equação, enquanto que $y = 0$ é uma solução singular.

- As famílias de funções $y = x + C$ e $y = -x + C (C \in \mathbb{R})$ constituem dois integrais gerais para a EDO de primeira ordem

$$(y')^2 = 1.$$

  Repare-se que cada solução particular de um é uma solução singular relativamente ao outro.

Chama-se **problema de valores iniciais** (PVI) (ou problema de Cauchy) a todo o problema que consiste em encontrar a solução (ou soluções) de uma dada equação diferencial satisfazendo certas condições (ditas condições iniciais) num mesmo ponto:

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Exemplo:

$$\begin{cases} y'' + x = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$\frac{x^3}{6} + 1$ é solução do PVI.

Chama-se **problema de valores na fronteira** (ou simplesmente problema de fronteira) a todo o problema que consista em encontrar a solução (ou soluções) de uma dada equação diferencial satisfazendo condições em dois ou mais pontos.

Exemplo:
O problema de fronteira

$$\begin{cases} y'' + x = 0 \\ y(0) + y'(1) = -\frac{1}{3} \\ y(1) + y'(0) = 0 \end{cases}$$

tem também uma única solução. Qual?

Um PVI/ PVF não tem necessáriamente solução única.

- Vemos que $y = x^2$ e $y = 0$ são duas soluções do problema de Cauchy

$$\begin{cases} (y')^2 - 4y = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

  Neste caso, tem solução, mas esta não é única.

- O PVI

$$\begin{cases} |y'| + |y| = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

  não tem solução, uma vez que a equação diferencial $|y'| + |y| = 0$ tem apenas a solução $y = 0$.

Resolução do exercício 5 da folha 2.

AVISO: Na próxima aula deverão trazer documento de identificação.

2.3 Equações diferenciais de primeira ordem

Nesta secção vamos discutir equações diferenciais do tipo

$$y' = f(x, y)$$

onde $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

2.3.1 EDOs de variáveis separáveis

Uma equação diferencial de primeira ordem diz-se de variáveis separáveis se puder escrever-se na forma com

$$y' = \frac{p(x)}{q(y)}$$

para algumas funções p e q que dependem apenas de x e de y, respetivamente (com $q(y) \neq 0$).

2.3 Equações diferenciais de primeira ordem

Uma EDO de variáveis separáveis pode escreve-se sempre na forma

$$q(y)y' = p(x)$$

(podendo dizer-se, neste caso, de variáveis separadas), ou ainda, na forma diferencial

$$q(y)dy = p(x)dx.$$

Em geral, as funções p e q assumem-se contínuas nos respetivos intervalos.

Como resolver uma EDO de variaveis separaveis?

Exemplos:

- $y' = y^2$
- Resolva o PVI $\begin{cases} (2y + \cos y)y' = 6x^2 \\ y(1) = \pi \end{cases}$