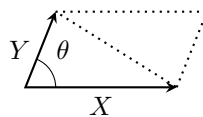


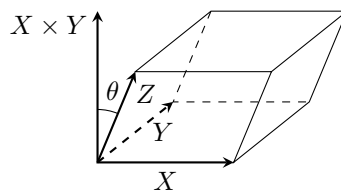
Vetores

1. Considere os vetores de \mathbb{R}^3 , $X = (1, -2, 1)$ e $Y = (-1, 1, 0)$.
 - (a) Calcule $X + Y$ e $3X - 2Y$.
 - (b) Indique, justificando, se X e Y são vetores perpendiculares. E colineares?
 - (c) Determine o ângulo entre os vetores: i. X e Y ; ii. X e $-Y$; iii. $X + Y$ e $X - Y$.
 - (d) Apresente um vetor unitário com a direção do vetor X .
 - (e) Encontre todos os vetores com a direção de X e comprimento 2. De entre estes, indique os que têm:
i. o sentido de X ; ii. o sentido oposto a X .
 - (f) Escreva o vetor X como soma de um vetor com a direção de Y e um vetor ortogonal a Y .
 - (g) Determine todos os vetores perpendiculares a X e a Y .
 - (h) Encontre todos os vetores perpendiculares a X .
2. Mostre que o triângulo de vértices $P_1(2, 3, -4)$, $P_2(3, 1, 2)$ e $P_3(-3, 0, 4)$ é isósceles.
3. Encontre todos os vetores que fazem um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ com $(1, 0, 0)$.
4. Sendo X e Y vetores de \mathbb{R}^n , mostre que
 - (a) $\|X + Y\|^2 + \|X - Y\|^2 = 2(\|X\|^2 + \|Y\|^2)$;
 - (b) se X e Y são ortogonais, então $\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2$ (Teorema de Pitágoras).
5. Sejam $X = (2, -1, 1)$ e $Y = (0, 2, -1)$ dois vetores em \mathbb{R}^3 .
 - (a) Calcule o produto externo (ou produto vetorial) $X \times Y$.
 - (b) Verifique que o vetor $X \times Y$ é ortogonal quer a X quer a Y .
6. Mostre que, sendo X e Y vetores não nulos de \mathbb{R}^3 ,
 - (a) X e Y são colineares se e só se $X \times Y = 0$;
 - (b) $\|X \times Y\|^2 + (X \cdot Y)^2 = \|X\|^2 \|Y\|^2$.
7. Considere o paralelogramo (e o triângulo) com lados correspondentes aos vetores X e Y como na figura.



- (a) Verifique que:
 - i. a altura do paralelogramo é igual a $\|Y\| \sin(\theta)$, sendo a base do paralelogramo o lado correspondente ao vetor X e $\theta = \angle(X, Y)$;
 - ii. a área do paralelogramo é $A_{\square} = \|X \times Y\|$;
 - iii. a área do triângulo é $A_{\triangle} = \frac{1}{2} \|X \times Y\|$.
- (b) Determine a área:
 - i. do paralelogramo de lados dados pelos vetores $(3, -1, -1)$ e $(1, 2, 1)$;
 - ii. do triângulo de vértices $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$;
 - iii. dos vários paralelogramos com vértices em $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ e $(1, 2, 1)$.
8. Sejam $X = (1, 2, 0)$ e $Y = (1, -1, 1)$ dois vetores em \mathbb{R}^3 .
 - (a) Determine todos os vetores ortogonais a X e Y .
 - (b) Calcule a área do paralelogramo de vértice na origem e lados correspondentes aos vetores X e Y .

9. Considere o paralelepípedo com arestas correspondentes aos vetores X , Y e Z .



- (a) Verifique que:
- o paralelepípedo tem altura igual a $\|Z\| |\cos(\theta)|$, considerando como base do paralelepípedo o paralelogramo de lados correspondentes aos vetores X e Y e sendo $\theta = \angle(X \times Y, Z)$;
 - o volume do paralelepípedo é $V = |(X \times Y) \cdot Z|$.
- (b) Calcule o volume do paralelepípedo com um vértice na origem e arestas dadas pelos vetores:
- $(3, -2, 1)$, $(1, 2, 3)$ e $(2, -1, 2)$;
 - $(2, 1, 1)$, $(2, 3, 4)$ e $(1, 0, -1)$.
10. Usando as alíneas 6(b) e 7(a)iii, mostre que a área do triângulo, cujos lados são os vetores X , Y e $X + Y$ de comprimento $a = \|X\|$, $b = \|Y\|$ e, respetivamente, $c = \|X + Y\|$, é dada pela fórmula de Herão:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ onde } s = \frac{1}{2}(a+b+c) \text{ é o semiperímetro.}$$

Retas e planos

11. Seja \mathcal{R} uma reta passante por $P(x_0, y_0, z_0)$ com vetor diretor $v = (v_x, v_y, v_z) \neq 0$.
- (a) Prove que, se $v_x v_y v_z \neq 0$, \mathcal{R} é definida pelas equações (cartesianas) $\frac{x-x_0}{v_x} = \frac{y-y_0}{v_y} = \frac{z-z_0}{v_z}$.
- (b) Sejam $u_1 = (0, -v_z, v_y)$, $u_2 = (v_z, 0, -v_x)$ e $u_3 = (-v_y, v_x, 0)$. Verifique que, para qualquer combinação linear $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 \neq 0$, com $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, a reta \mathcal{R} está contida no plano que passa por P e é ortogonal a u .
- Defina agora a matriz quadrada $M_v = [u_1 \ u_2 \ u_3]^\top$. Mostre que
- $M_v w = v \times w$ para qualquer $w \in \mathbb{R}^3$;
 - $M_v^T w = w \times v$ para qualquer $w \in \mathbb{R}^3$;
 - $X \in \mathcal{R}$ se e só se $v \times \overrightarrow{PX} = 0$;
 - $w \in \mathcal{N}(M_v)$ se e só se $w = tv$ com $t \in \mathbb{R}$;
 - $\mathcal{C}(M_v) = \mathcal{L}(M_v)$;
 - $w \in \mathcal{C}(M_v)$ se e só se $v \cdot w = 0$.

12. Determine uma equação vetorial da reta \mathcal{R} definida pelo sistema de equações cartesianas

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + z = 0 \end{cases},$$

assim como uma equação vetorial e uma equação geral do plano \mathcal{P} que passa pelo ponto $P(2, 2, 1)$ e que contém a reta \mathcal{R} .

13. Considere o plano \mathcal{P} que passa pelos pontos $A(1, 1, 1)$, $B(0, 1, 0)$ e $C(0, 0, 1)$ e a família de planos $\mathcal{P}_{a,b}$ definidos pela equação geral $ax + y + z = b$, com $a, b \in \mathbb{R}$.
- Determine uma equação geral do plano \mathcal{P} .
 - Discuta a posição relativa dos planos \mathcal{P} e $\mathcal{P}_{a,b}$ em função dos parâmetros a e b .
14. Considere a família de retas \mathcal{R}_a definidas pelo sistema de equações cartesianas

$$\begin{cases} x + ay + z = 2 \\ x + ay + 2z = 3 \end{cases},$$

com $a \in \mathbb{R}$, e a família de planos \mathcal{P}_b definidos pela equação geral $bx + by + z = 2$, com $b \in \mathbb{R}$. Discuta a posição relativa do plano \mathcal{P}_b e da reta \mathcal{R}_a em função dos parâmetros a e b .

15. Considere a reta \mathcal{R} definida por $x = 2y + z = 1$ e a família de retas $\mathcal{F}_{a,b}$ de equação vetorial

$$(x, y, z) = (a, 0, 1) + s(0, 2, b), \quad s \in \mathbb{R},$$

com $a, b \in \mathbb{R}$. Discuta a posição relativa das retas \mathcal{R} e $\mathcal{R}_{a,b}$ em função dos parâmetros a e b .

16. Determine os pontos de \mathbb{R}^3 equidistantes dos pontos $A(-1, 0, 2)$ e $B(1, -1, 1)$.

17. Considere o ponto $A(3, \frac{1}{2}, -\frac{7}{2})$ e o plano \mathcal{P} de equação geral $y + z = -1$.

(a) Escreva uma equação vetorial da reta ortogonal ao plano \mathcal{P} que passa pelo ponto A .

(b) Calcule a distância do ponto A ao plano \mathcal{P} por dois processos distintos.

18. Considere o ponto $P(-1, 1, 2)$ e a reta \mathcal{R} que passa pelos pontos $A(1, 0, 0)$ e $B(0, 0, 1)$.

(a) Escreva uma equação geral do plano que contém o ponto P e é perpendicular à reta \mathcal{R} .

(b) Calcule a distância do ponto P à reta \mathcal{R} .

19. Considere os planos \mathcal{P} e $\mathcal{P}_{a,b}$ de equações $x + y + 2z = 3$ e $ax + 2y + 4z = b$, respectivamente, com $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Discuta a posição relativa dos planos \mathcal{P} e $\mathcal{P}_{a,b}$ em função dos parâmetros reais a e b .

(b) Determine a distância entre os planos \mathcal{P} e $\mathcal{P}_{2,2}$.

20. Verifique que o plano de equação geral $x - y + z = 1$ e a reta definida pelo sistema de equações cartesianas

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

são estritamente paralelos e calcule a distância entre eles.

21. Considere a família de planos \mathcal{P}_k de equação geral $y + kz = 1$, com $k \in \mathbb{R}$, e a reta \mathcal{R} definida por $x = 2y = z - 1$.

(a) Discuta a posição relativa da reta \mathcal{R} e do plano \mathcal{P}_k em função do parâmetro k .

(b) Determine equações gerais dos planos perpendiculares à reta \mathcal{R} , cuja distância à origem é 1.

22. Considere a reta \mathcal{R}_1 que passa pelo ponto $(1, 1, -1)$ e tem vetor diretor $(-1, 2, -1)$ e a reta \mathcal{R}_2 que passa pelos pontos $(1, -1, 0)$ e $(0, 1, -1)$.

(a) Determine a posição relativa das retas \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 .

(b) Calcule a distância entre as retas \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 .

23. Considere as retas \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 de equações vetoriais

$$(x, y, x) = (1, 2, 0) + \alpha(-1, 0, 1), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (x, y, x) = (0, 1, 0) + \alpha(0, -1, 1), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) Verifique que as retas \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 são enviezadas.

(b) Determine o plano que contém \mathcal{R}_2 e é paralelo a \mathcal{R}_1 .

(c) Calcule a distância e o ângulo entre as retas \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 .

24. Considere os planos de equações

$$(x, y, z) = (1, 1, -1) + s(0, 1, -1) + t(4, -1, -1), \quad s, t \in \mathbb{R}$$

e $x + \alpha y + 2z = \beta$. Determine os valores dos parâmetros reais α e β para os quais a distância entre os dois planos é igual a 3.

25. Determine equações cartesianas das retas contidas no plano de equação $x + y = 0$ cuja distância ao plano de equação $x + y + z = 1$ é igual a $\sqrt{3}/3$.

26. Sabendo que $M_1(2, 1, 3)$, $M_2(5, 3, -1)$ e $M_3(3, -4, 0)$ são os pontos médios dos lados do triângulo ABC , determine

(a) uma equação da recta que contém o lado AB , cujo ponto médio é M_1 ;

(b) a área do triângulo (verifique o resultado, numericamente, usando a fórmula de Herão do exercício 10).

1. (a) $X+Y=(0, -1, 1)$ e $3X-2Y=(5, -8, 3)$. (b) Não. Não. (c) i. $\frac{5\pi}{6}$; ii. $\frac{\pi}{6}$; iii. $\arccos(\frac{2}{\sqrt{7}})$. (d) $\pm \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$.
 (e) i. $\frac{2}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$; ii. $-\frac{2}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$. (f) $X = -\frac{3}{2}(-1, 1, 0) + (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$. (g) $\alpha(1, 1, 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
 (h) $\alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, 2)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
2. Dois lados do triângulo têm comprimento $\sqrt{41}$.
3. $(\frac{1}{3}\sqrt{3y^2 + 3z^2}, y, z)$, $y, z \in \mathbb{R}$.
5. (a) $(-1, 2, 4)$.
7. (b) i. $\sqrt{66}$; ii. $\frac{\sqrt{3}}{2}$; iii. 2.
8. (a) $\alpha(2, -1, -3)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. (b) $\sqrt{14}$.
9. (b) i. 8; ii. 3.
12. Uma equação vetorial da reta \mathcal{R} é $(x, y, z) = (1, 1, 0) + \alpha(0, 1, 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$; uma equação vetorial do plano \mathcal{P} é $(x, y, z) = (2, 2, 1) + \alpha(0, 1, 1) + \beta(1, 1, 1)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e uma equação geral de \mathcal{P} é $y - z = 1$.
13. (a) $x - y - z + 1 = 0$; (b) \mathcal{P} e $\mathcal{P}_{a,b}$ são coincidentes se $a = -1$ e $b = 1$; estritamente paralelos se $a = -1$ e $b \neq 1$; concorrentes se $a \neq -1$ e $b \in \mathbb{R}$.
14. \mathcal{R}_a está contida em \mathcal{P}_b se $a = b = 1$; \mathcal{R}_a e \mathcal{P}_b são concorrentes se $a \neq 1$ e $b \neq 0$; estritamente paralelos se $(a = 1 \text{ e } b \neq 1)$ ou $(a \in \mathbb{R} \text{ e } b = 0)$.
15. \mathcal{R} e $\mathcal{R}_{a,b}$ são coincidentes se $a = 1$ e $b = -4$; estritamente paralelas se $a \neq 1$ e $b = -4$; concorrentes se $a = 1$ e $b \neq -4$; enviezadas se $a \neq 1$ e $b \neq -4$.
16. Todos os pontos do plano de equação geral $2x - y - z + 1 = 0$.
17. (a) $(x, y, z) = (3, \frac{1}{2}, -\frac{7}{2}) + \alpha(0, 1, 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$; (b) $\sqrt{2}$.
18. (a) $x - z + 3 = 0$; (b) 1.
19. (a) \mathcal{P} e $\mathcal{P}_{a,b}$ são coincidentes se $a = 2$ e $b = 6$; estritamente paralelos se $a = 2$ e $b \neq 6$; concorrentes se $a \neq 2$ e $b \in \mathbb{R}$. (b) $\frac{2}{\sqrt{6}}$.
20. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$.
21. (a) \mathcal{R} e \mathcal{P}_k são concorrentes se $k \neq -\frac{1}{2}$ e estritamente paralelos se $k = -\frac{1}{2}$. (b) $2x + y + 2z = \pm 3$.
22. (a) estritamente paralelas; (b) $\frac{1}{6}\sqrt{30}$.
23. (b) $x + y + z = 1$; (c) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ e $\frac{1}{3}\pi$.
24. $\alpha = 2$ e $(\beta = -8 \text{ ou } \beta = 10)$.
25. $\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$.
26. (a) $(x, y, z) = (2, 1, 3) + t(2, 7, -1)$, $t \in \mathbb{R}$; (b) $6\sqrt{110}$.