Cálculo II - 2016/2017 (Agrupamento II) 1

Séries de Potências e Fórmula de Taylor

Corpo Docente:

Ana Breda, Eugénio Rocha, Paolo Vettori
Sandrina Santos, Diana Costa, Rita Guerra

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro, 2017

Def. 3.1

Chamamos **série de potências** centrada em $c \in \mathbb{R}$, ou série de potências de $x - c$, a uma série da forma

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots + a_n(x-c)^n + \ldots}$$

onde $a_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Convenção: Quando escrita na forma reduzida, convencionarmos que o termo $a_o(x-c)^0 = a_0$ mesmo quando $x = c$.

Os números reais a_n são designados por **coeficientes da série**.

Def. 3.2

O conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ para os quais a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ converge designa-se por **domínio de convergência** da série.

Obs. 3.3

O domínio de convergência de uma série de potências pode ser determinado pelos critérios de D'Alembert ou da raiz.

Exer. 3.4

A série de potências $\sum_{n=0}^{\infty}(x-c)^n$ converge para $x \in A =]c-1, c+1[$ e a sua soma é, para cada $x \in A$, $\dfrac{1}{1-x+c}$.

Exer. 3.5

Consideremos a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$. Esta série converge se $x=0$ (porquê). Suponhamos agora que $x \neq 0$.

Dado que o $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\left|\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\dfrac{x^n}{n!}\right|}=0$ podemos garantir, pelo Critério de D'Alembert, que a série de potências converge absolutamente para qualquer valor de $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Juntando toda a informação, temos para domínio de convergência $\mathbb{R}$.

Obs. 3.6

O domínio de convergência de uma série de potências pode ser determinado pelos critérios de D'Alembert ou da raiz.

Critérios de D'Alembert e da raiz

Teo. 3.7

Critério de d'Alembert ou do Quociente

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de números reais não nulos e

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Se o limite existir, verificam-se as condições seguintes:

(a) se $0 \leq L < 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

(b) se $L > 1$ ou $L = +\infty$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

(c) se $L = 1$, nada se pode concluir.

Teo. 3.8

Critério da raiz ou de Cauchy

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de números reais e

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Se o limite existir, verificam-se as condições seguintes:

(a) se $0 \leq L < 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

(b) se $L > 1$ ou $L = +\infty$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

(c) se $L = 1$, nada se pode concluir.

Exemplo 3.9

Determine o domínio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-2)^n$

Se $x=2$ a série converge e a sua soma é 0. Utilizando, por exemplo, o critério de D'Alembert pode concluir-se que esta série diverge para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Assim, temos para domínio de convergência desta série o conjunto $D = \{2\}$.

Teo. 3.10

Para qualquer série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ verifica-se **uma, e uma só**, das seguintes proposições:

(a) a série converge (absolutamente) em $x = c$ e diverge se $x \neq c$;

(b) a série converge absolutamente em todo $x \in \mathbb{R}$;

(c) existe um único número real $R > 0$, dito **raio de convergência da série**, para o qual a série converge absolutamente se $|x-c| < R$ e diverge se $|x-c| > R$. Ao intervalo $]c-R, c+R[$ chamamos **intervalo de convergência** da série.

Obs. 3.11

Quando a situação da série em estudo é a indicada na alínea (a) do Teorema 3.10, o raio de convergência é $R = 0$ e quando é a indicada na alínea (b) do mesmo Teorema, o raio de convergência é $R = \infty$.

Obs. 3.12

O Teorema 3.10 nada afirma sobre a natureza da série nas extremidades $x = c - R$ e $x = c + R$. Nestes pontos o estudo da série deverá ser efetuado caso a caso.

Obs. 3.13

O domínio de convergência, D, da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^n$ contém o intervalo de convergência. Assim:

- $D = \{c\}$, $(R = 0)$;
- $D = \mathbb{R}$, $(R = +\infty)$;
- $D =]c - R, c + R[$ ou $D = [c - R, c + R[$ ou $D = [c - R, c + R]$, $(R > 0)$.

Um outro critério de convergência que nos irá ser muito útil é o critério de Leibniz.

Teo. 3.14

Critério de Leibniz

Seja $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ com $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ uma série alternada.

Se as duas condições seguintes são verificadas,

(a) a sucessão (a_n) é monótona decrescente e

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$;

então a série é convergente.

Obs. 3.15

Recomenda-se que efetue uma revisão ao capítulo de séries numéricas lecionado em Cálculo I.

Exer. 3.16

Determine o domínio de convergência das seguintes séries de potências, indicando os pontos onde a convergência é simples ou absoluta.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{(n-1)!}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{2n+4}$; (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}x^n$; (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-2)^n}{n-1}$;

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}(x+2)^n$; (h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2+n^3}x^n$; (i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{3n}}{\ln n}$;

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n6^n}(3x-2)^n$; (k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}(x-2)^n$; (l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{2n+1}}x^n$.

1. $R > 0$ é raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \iff$ a série converge (absolutamente) para $|x-c| < R$ e diverge para $|x-c| > R$;

2. O intervalo de de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ com raio de convergência R é $]c-R, c+R[$;

3. Se uma série de potências tem por intervalo de convergência $]a, b[$, então o raio de convergência é $R = \dfrac{b-a}{2}$ e a série de potências é centrada em $c = \dfrac{a+b}{2}$.

Exer. 3.17

Determine o raio de convergência de cada uma das seguintes séries de potências, indicando os pontos onde a convergência é simples ou absoluta.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{4^n}(x-1)^{4n}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{ln(n+1)}{\ln(n^4)}\right)^n (x+1)^{2n}$.

Exer. 3.18

Considere a representação em série de potências da função $\frac{1}{1-x}$ dada por

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad -1 < x < 1.$$

Determine a representação em série de potências de (indicando o intervalo onde é válida):

(a) $\dfrac{1}{1-3x}$; (b) $\dfrac{2}{2+x}$; (c) $\dfrac{1}{x}$.

Sendo f uma função real de variável real admitindo derivadas finitas até à ordem $n \in \mathbb{N}$ num dado ponto $c \in D_f$, existe um único polinómio $P_n(x)$ que satisfaz as condições,

$$\boxed{P(c) = c, \;\; P'(c) = f'(c), \; \ldots, \; P^{(n)}(c) = f^{(n)}(c).}$$

A este polinómio chamamos **polinómio de Taylor** de ordem n de f em c.

Teo. 3.19

Seja f uma função real de variável real com derivadas finitas até à ordem $n \in \mathbb{N}$ em $c \in D_f$. Designando o polinómio de Taylor de ordem n de f em c por $T_c^n f(x)$ tem-se,

$$\boxed{T_c^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k.}$$

No caso particular de $\boxed{c = 0}$, $T_0^n f(x)$ é também conhecido por **polinómio de MacLaurin** de ordem n de f.

Exer. 3.20

Determine o polinómio de MacLaurin de orden n de f para:

(a) $n = 3, \quad f(x) = \ln(x+1)$; (b) $n = 5, \quad f(x) = \sin(x)$;

(c) $n = 8, \quad f(x) = e^x$; (d) $n = 3, \quad f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$;

.

Exer. 3.21

Determine $T_0^n f(x)$ para:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^4}$; (b) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$; (c) $f(x) = \cos(x)$.

Exer. 3.22

Determine os seguintes polinómios de Taylor:

(a) $T_\pi^n \sin(x)$; (b) $T_0^n e^x$; (c) $T_1^n \ln(x)$; (d) $T_0^n xe^x$.

Obs. 3.23

Para qualquer polinómio de grau n, $P_n(x)$, tem-se $\quad T_c^n\, P_n(x) = P_n(x)$.

Obs. 3.24

Recordando que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ para $x \in]-1,1[$, como o polinómio de Taylor $T_0^n\, \frac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$, então $T_0^n\, \frac{1}{1-x}$ representa o termo geral da sucessão das somas parciais associada à série de potências $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k$.

Teo. 3.25

Fórmula de Taylor com resto integral

Sejam $n \in \mathbb{N}_0$, f uma função real com derivadas contínuas até à ordem $(n+1)$ num intervalo I e $c \in I$. Então, para todo $x \in I$, temos

$$\boxed{f(x) = T_c^n f(x) + R_c^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{1}{n!}\int_c^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt.}$$

Esta igualdade é conhecida por **fórmula de Taylor** de ordem n de f em c e é usualmente designada por fórmula de MacLaurin de ordem n de f, no caso de $c = 0$.

A $R_c^n f(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_c^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt$ chamamos **resto** na forma **integral**.

Obs. 3.26

O caso particular $n = 0$ corresponde à fórmula de Barrow. Verifique.

Obs. 3.27

Existem outras formas de escrever o resto da fórmula de Taylor.

Teo. 3.28

Fórmula de Taylor com resto de Lagrange

Sejam $n \in \mathbb{N}_0$, f uma função real com derivadas contínuas até à ordem $(n+1)$ num intervalo I e $c \in I$. Então, para todo $x \in I \setminus \{c\}$, existe θ entre c e x tal que

$$\boxed{f(x) = T_c^n f(x) + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}.}$$

$$\text{A} \quad \boxed{R_c^n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}}$$

chamamos **resto de Lagrange**.

Obs. 3.29

O caso particular $n = 0$ corresponde ao Teorema de Lagrange. Verifique.

Obs. 3.30

A fórmula de Taylor permite obter uma estimativa para o erro que se comete quando usamos polinómios de Taylor para aproximar uma dada função.

Sejam f é uma função com derivadas, até à ordem $(n+1)$, contínuas em $I=[a,b]$ e $c \in I$. Nestas condições, usando a fórmula de Taylor com resto de Lagrange, tem-se que, para todo $x \in I \setminus \{c\}$, existe θ entre c e x tal que

$$\boxed{|R_c^n f(x)| = |f(x) - T_c^n f(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\theta)|}{(n+1)!}|x-c|^{n+1} \leq M\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}}$$

com $\boxed{M = \max_{y\in[a,b]} |f^{(n+1)}(y)|}$

Utilizando o resto integral, obtemos

$$\boxed{|R_c^n f(x)| = |f(x) - T_c^n f(x)| \leq \frac{(b-a)^n}{n!}\int_a^b |f^{(n+1)}(t)|\, dt \leq M\frac{(b-a)^{n+1}}{n!}.}$$

Exer. 3.31

Utilizando o método de indução matemática, mostre que:

(a) $T_0^n \ln(x+1) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}, \; n \in \mathbb{N};$

(b) $T_0^{2n+1} \sin(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \; n \in \mathbb{N}_0$

$T_0^{2n} \sin(x) = T_0^{2n-1} \sin(x), \; n \in \mathbb{N};$

(c) $T_0^{2n} \cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \; n \in \mathbb{N}$ e

$T_0^{2n+1} \cos(x) = T_0^{2n} \cos(x), \; n \in \mathbb{N};$

(d) $T_0^n e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \; n \in \mathbb{N};$ (e) $T_0^n \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k, \; n \in \mathbb{N};$

Exer. 3.32

Considere a função f definida por $f(x) = e^x$.

(a) Escreva a fórmula de MacLaurin de ordem n da função f.

(b) Mostre que o polinómio de MacLaurin de ordem n permite aproximar e^x no intervalo $]-1, 0[$, com erro inferior a $\frac{1}{(n+1)!}$.

(c) Escolha um dos polinómios de MacLaurin de f e use-o para obter uma aproximação de $\frac{1}{\sqrt{e}}$, indicando uma estimativa para o erro cometido nessa aproximação.

Exer. 3.33

Usando o resto de Lagrange, determine um majorante para o erro cometido na aproximação de sen(3) quando se usa o polinómio de Taylor de ordem 5 em torno do ponto $a = \pi$.

Exer. 3.34

Mostre que o polinómio de MacLaurin de ordem 7 da função seno permite aproximar os valores desta função, no intervalo $[-1, 1]$, com erro inferior a $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$.

Exer. 3.35

Determine um valor de n para o qual garanta que o polinómio de Taylor de ordem n da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ no ponto $c = 1$ aproxima essa função, no intervalo $[0.9, 1.1]$, com erro inferior a 10^{-3}.

Exer. 3.36

Determine o menor valor de n tal que o polinómio de MacLaurin de ordem n da função $f(x) = e^x$ aproxime $f(1)$ com erro inferior a 10^{-3}.

Exer. 3.37

Mostre, usando a fórmula de Taylor, que $\ln(1 + x) \leq x$, para todo $x > -1$.

Def. 3.38

Uma **função** f diz-se **analítica** num ponto $c \in D_f$ se for possível representá-la, num intervalo aberto contendo c, por uma série de potências centrada em c. Quando assim acontece dizemos que a **função é desenvolvível em série de Taylor** em torno de c e escrevemos

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.}$$

Obs. 3.39

Existem funções que não admitem uma representação em série de potências na vizinhança de determinado ponto. É por exemplo o caso da função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

que não é desenvolvível em série de MacLaurin (Verifique.)

Questão: Que condições devem ser satisfeitas para que uma função seja **representável**, numa vizinhança de um dado ponto, por uma série de potências, ou seja, **admita desenvolvimento** em série de Taylor em torno de um certo ponto?

Teo. 3.40

Sejam I um intervalo, $c \in I$ e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivadas finitas de qualquer ordem em I.

Então,

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n, \ \ \forall x \in I \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} R_c^n f(x) = 0.}$$

Vejamos que a função exponencial e^x, admite desenvolvimento em série de MacLaurin.

Função exponencial $f(x) = e^x$ - Desenvolvimento em série de MacLaurin

Para $x \neq 0$, e porque $f^{(n)}(0) = 1$, para $n \in \mathbb{N}$, temos $R_0^n(x) = \dfrac{e^\theta}{(n+1)!}x^{n+1}$ com θ entre 0 e x. Donde,

$$|R_0^n(x)| = |\frac{e^\theta}{(n+1)!}x^{n+1}| = \frac{e^\theta}{(n+1)!}|x|^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \text{ (porquê?)*}$$

e, portanto $\lim_{n\to\infty} R_0^n(x) = 0$. Como, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $R_0^n(0) = 0$, podemos concluir pelo teorema anterior que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{e^x = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...}$$

* Tenha em conta a natureza da série $\sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}$.

Teo. 3.41

Sejam I um intervalo, $c \in I$ e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivadas finitas de qualquer ordem em I.

Se existir $M > 0$ tal que $\boxed{f^{(n)}(x) \leq M, \ \forall x \in I, \ \forall n \in \mathbb{N}_0}$ então

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n, \ \forall x \in I}.$$

Exemplo 3.42

Ora,

$$|\sin^{(n)}(x)| \leq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}_0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Utilizando o teorema anterior podemos afirmar que a série de MacLaurin da função seno converge, em $\mathbb{R}$, para essa mesma função, isto é,

$$\boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \ x \in \mathbb{R}.}$$

Exemplo 3.43

Analogamente, a série de MacLaurin da função cosseno converge, em $\mathbb{R}$, para essa mesma função, isto é,

$$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \ x \in \mathbb{R}.}$$

Exer. 3.44

Obtenha uma representação em série de potências (de Taylor) para cada uma das seguintes funções, a partir dos desenvolvimentos conhecidos das funções exponencial, seno, co-seno e $\frac{1}{1-x}$. Em cada caso, indique o maior conjunto onde é válida a representação.

(a) e^{-x^2}; (b) $\cos 2x$; (c) $\sin(3x)$; (d) $2\cos x^2$; (e) $\frac{1}{4+x^2}$.