Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I — Época Normal

7 de Janeiro de 2008

Duração: **2h30m**

Justifique todas as respostas e indique os cálculos efectuados.

65 Pontos

1. Considere a função real de variável real f definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\operatorname{arctg} x} & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$.

   (a) Estude f quanto à continuidade em $x = 0$.

   (b) Determine, caso existam, as assimptotas do gráfico de f.

   (c) Considere a função g definida em $]-\infty, 0[$ por $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. Justifique que g é invertível e determine a função inversa de g indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica que a define.

25 Pontos

2. Considere a função f definida em $\mathbb{R}_0^+$ por $f(x) = \sqrt{x}$.

   (a) Determine o polinómio de Taylor, $p_3(x)$, de ordem 3 de f em torno de $a = 1$.

   (b) Mostre que o erro que se comete quando se aproxima $\sqrt{1,01}$ por $p_3(1,01)$ é inferior a 10^{-7}.

25 Pontos

3. Determine a função f definida em $\mathbb{R}$ tal que $f(0) = \dfrac{1}{16}$ e $f'(x) = x\,\mathrm{e}^{4x}$.

45 Pontos

4. Calcule os integrais indefinidos seguintes:

   (a) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x(x-1)^2}\,dx$

   (b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

20 Pontos

5. Mostre que a função F definida em $[1, +\infty[$ por $F(x) = \displaystyle\int_0^{\ln x} \frac{\mathrm{e}^t}{t+1}\,dt$ é estritamente crescente.

20 Pontos

6. Calcule a área da região do plano situada entre $x = 0$ e $x = \dfrac{\pi}{3}$ e limitada pelo eixo das abcissas e pelo gráfico da função f definida por $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$.