Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I — Época Especial

11 de Setembro de 2007

Duração: **2h30m**

Justifique todas as respostas e indique os cálculos efectuados.

90 Pontos

1. Considere a função real de variável real f definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x} & \text{se} \quad x > 0 \\ \dfrac{x^2}{1-x} & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$.

   (a) Mostre que f não é contínua em $x = 0$, mas é contínua à esquerda neste ponto.

   (b) Determine, caso existam, as assimptotas do gráfico de f.

   (c) Estude f quanto à existência de extremos locais em $\mathbb{R}^+$.

   (d) Mostre que existe $c \in]1, 2[$ tal que $f'(c) = \dfrac{\ln 2}{2}$.

   (e) Estude a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ e, em caso de convergência, calcule o seu valor.

20 Pontos

2. Considere a função real de variável real F definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\, dt$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Determine, se possível, a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de F.

20 Pontos

3. Caracterize a função inversa da função g definida por $g(x) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(1 - x)$.

15 Pontos

4. Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função.

   (a) Defina primitiva de f em I.

   (b) Sabendo que a função F definida por $F(x) = x \operatorname{arcsen}(x^2) + \sqrt{2}$ é uma primitiva de f, defina a função f e determine $\displaystyle\int f(x)\, dx$.

30 Pontos

5. Calcule os integrais indefinidos seguintes:

   (a) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx$

   (b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\, dx$

25 Pontos

6. Calcule a área da região do plano situada entre $x = 0$ e $x = 1$ e limitada pelo eixo das abcissas e pelo gráfico da função f definida por $f(x) = \dfrac{3x}{(x+1)(x^2+2)}$.