Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Exame de Setembro

4 de Setembro de 2007 Duração: 2 h 30 min

Nome: ____

Nº mecanográfico: ________________ **Curso:** ____________________________

Caso pretenda desistir assine a seguinte declaração.
Declaro que desisto. ____________________________________

Questão	1a	1b	1c	2	3a	3b	4a	4b	4c	total
Cotação	10	15	10	10	10	10	10	10	15	100
Classificação										

Questão	5a	5b	5c	6a	6b	7a	7b	8a	8b	total
Cotação	10	10	10	10	15	10	15	10	10	100
Classificação										

IMPORTANTE: *Justifique resumidamente todas as suas afirmações e indique os cálculos que efectuou.*

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

   (a) Sendo $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \theta \end{bmatrix}$, com $\theta \in \mathbb{R}$, discuta para que valores de θ o sistema $AX = B$ é possível e determinado, possível e indeterminado, impossível.

(b) Considere o vector $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}^T$. Justifique que o vector B pertence ao espaço das colunas de A, $\mathcal{C}(A)$.

(c) Determine o espaço nulo de A, $\mathcal{N}(A)$.

2. Seja $C = \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ a & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a \end{bmatrix}$, com $a \in \mathbb{R}$. Determine os valores de a para os quais o sistema $CX = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ é de Cramer e, para os valores obtidos, calcule a segunda componente de X, utilizando a regra de Cramer.

3. Considere os vectores $X = (1, 0, 1)$ e $Y = (0, 1, 2)$ de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Determine um vector Z de $\mathbb{R}^3$, não nulo, que seja ortogonal a X e a Y.

   (b) Calcule a área do paralelogramo com arestas correspondentes a X e a Y.

4. Considere em $\mathbb{R}^2$ o subconjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$.

   (a) Prove que S é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

   (b) Indique uma base e a dimensão de S.

   (c) Considere em $\mathbb{R}^2$ a base $B = \{(0, 2), (1, 1)\}$ e seja $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a tranformação linear que verifica $L(0, 2) = (0, -2)$ e $L(1, 1) = (1, -1)$. Indique $L(S)$.

5. Considere a aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x_1, x_2, x_3) = (x_2, 4x_3 + x_1)$.

   (a) Escreva a matriz de T em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ e à base canónica de $\mathbb{R}^2$.

   (b) Determine o núcleo de T, indique uma sua base e a sua dimensão. Diga justificando se a aplicação T é injectiva ?

   (c) A aplicação T é sobrejectiva ? Justifique.

6. Considere a matriz $R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$. Os valores próprios desta matriz são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -1$.

   (a) Determine o conjunto dos vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda_2 = -1$.

   (b) Diga, justificando, se é possível encontrar uma matriz $S \neq R$ que seja semelhante à matriz R.

7. (a) Diga, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa: "Em $\mathbb{R}^3$, $x = 0$ é uma equação de uma recta."

(b) Verifique que, em $\mathbb{R}^3$, o lugar geométrico de equação $4x^2 + 2xy + z^2 + 4y^2 = 1$ é um elipsóide.

8. Considere o ponto $P = (0, -1, 0)$ e o plano π de $\mathbb{R}^3$ de equação cartesiana

$$\pi : x + y + z = 0.$$

(a) Determine uma equação vectorial da recta que passa pelo ponto P e que é ortogonal ao plano π.

(b) Calcule a distância do ponto P ao plano π.