Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I - Segundo Semestre — Exame da Época Normal - 1ª Chamada

Resolução

1. Considere a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\ln x) & \text{se} \quad x > 1 \\ 0 & \text{se} \quad x = 1 \\ \frac{x^2}{1-x} & \text{se} \quad x < 1 \end{cases}$$

(a) Estude f quanto à continuidade em $x = 1$.

Indicações para a resolução:
Uma vez que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{1-x} = +\infty$$

podemos concluir que f não é contínua em $x = 1$.

(b) A função f é diferenciável em $x = 1$? Justifique.

Indicações para a resolução: A função f não é diferenciável em $x = 1$ porque não é contínua neste ponto.

(c) Determine a função inversa da restrição de f ao intervalo $]1, +\infty[$.

Indicações para a resolução: Denotemos por g a restrição de f ao intervalo $]1, +\infty[$. Então $D_g =]1, +\infty[= CD_{g^{-1}}$. Uma vez que, para todo o $x > 1$,

$$\ln x > \ln 1 = 0 \quad \text{(porque a função logarítmica é estritamente crescente)}$$

temos que

$$g(x) = \operatorname{arctg}(\ln x) > \operatorname{arctg} 0 = 0 \quad \text{(porque a função arcotangente é estritamente crescente).}$$

Atendendo a que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$$

podemos concluir que $CD_g =]0, \frac{\pi}{2}[= D_{g^{-1}}$.
Sejam $x \in]1, +\infty[$ e $y \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tais que $\operatorname{arctg}(\ln x) = y$. Uma vez que

$$\operatorname{arctg}(\ln x) = y \Leftrightarrow \ln x = \operatorname{tg} y \Leftrightarrow x = e^{\operatorname{tg} y}$$

podemos concluir que

$$\begin{array}{rcl} g^{-1} : \ ]0, \frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{\operatorname{tg} x}. \end{array}$$

2. Considere a função F definida em $\mathbb{R}$ por $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^3} \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t^2}dt$.
   Prove que F é monótona crescente em $\mathbb{R}$.

   Indicações para a resolução: Denotemos por f e g as funções definidas em $\mathbb{R}$, respectivamente, por $f(t) = \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t^2}$ e $g(x) = x^3$.

   Uma vez que f é contínua em $\mathbb{R}$ e g é diferenciável em $\mathbb{R}$, podemos concluir pelo Teorema Fundamental do Cálculo Integral que F é diferenciável em $\mathbb{R}$ e, para cada $x \in \mathbb{R}$,

   $$F'(x) = f(g(x))g'(x) = 3x^2\mathrm{e}^{-x^3}\sqrt{1+x^6}.$$

   Como $F'(x) \geq 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$, podemos concluir que F é monótona crescente em $\mathbb{R}$.

3. Mostre que a equação $x^2 - x\operatorname{sen} x - \cos x = 0$ tem duas e só duas soluções em $[-\pi, \pi]$.

   Indicações para a resolução: Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 - x\operatorname{sen} x - \cos x$. Uma vez que f é contínua em $[-\pi, \pi]$ e

   $$f(-\pi) = \pi^2 + 1 > 0$$
   $$f(0) = -1 < 0$$
   $$f(\pi) = \pi^2 + 1 > 0$$

   podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe pelo menos um zero de f em cada intervalo $]-\pi, 0[$ e $]0, \pi[$. Logo f tem pelo menos dois zeros no intervalo $[-\pi, \pi]$.

   Vamos agora provar que f tem exactamente dois zeros em $[-\pi, \pi]$.

   Uma vez que f é diferenciável e, para cada $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x - x\cos x$, temos que

   $$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(2 - \cos x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \cos x = 2.$$

   Como a condição $\cos x = 2$ é impossível, temos que f' tem um único zero, $x = 0$.

   Atendendo a que entre dois zeros de f existe pelo menos um zero de f', se f tivesse três zeros, então f' teria, pelo menos, dois zeros, o que contradiz o facto de f' ter um único zero. Logo f tem exactamente dois zeros em $[-\pi, \pi]$.

4. Considere a função f definida por $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$.

   (a) Determine a primitiva de f que se anula no ponto $x = e^2$.

   Indicações para a resolução: Uma vez que

   $$\int f(x)dx = \int \frac{1}{x\ln x}dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}dx = \ln|\ln x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

   a primitiva de f que se anula no ponto $x = e^2$ tem de verificar a igualdade

   $$\ln|\ln(e^2)| + C = 0.$$

   Logo

   $$C = -\ln 2$$

   e a primitiva de f que se anula no ponto $x = e^2$ é a função F definida por $F(x) = \ln|\ln x| - \ln 2$.

(b) Calcule o valor da área da região do plano situada entre $x = e$ e $x = e^3$ e limitada pelo eixo das abcissas e pelo gráfico de f.

Indicações para a resolução: Uma vez que para todo o $x \geq e$,

$$\ln x \geq \ln e \Leftrightarrow \ln x \geq 1$$

podemos concluir que para todo o $x \in [e, e^3],\ x \ln x > 0$ e, portanto,

$$\frac{1}{x \ln x} > 0.$$

Como f é contínua e positiva em $[e, e^3]$ a área pedida é dada por

$$\int_e^{e^3} f(x)dx = \ln|\ln x|\Big]_e^{e^3} = \ln|\ln(e^3)| - \ln|\ln e| = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3.$$

(c) Determine a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x}\, dx$ e, em caso de convergência, indique o seu valor.

Indicações para a resolução: Uma vez que

$$\lim_{t \to +\infty} \int_e^t \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{t \to +\infty} \ln|\ln x|\Big]_e^t = \lim_{t \to +\infty} \Big(\ln|\ln t| - \ln|\ln e|\Big) = +\infty$$

podemos concluir que o integral dado é divergente.

5. Calcule os seguintes integrais indefinidos:

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

Indicações para a resolução:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{2} \int 2x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{1+x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Outro processo de resolução: Fazendo a mudança de variável definida por

$$x = \operatorname{tg} t = \varphi(t),\ t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

temos que φ é invertível e diferenciável e $\varphi'(t) = \sec^2 t$.
Logo

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} \sec^2 t dt = \int \frac{\operatorname{tg} t}{\sec t} \sec^2 t dt = \int \sec t\ \operatorname{tg} t\, dt = \sec t + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Uma vez que $x = \operatorname{tg} t,\ 1 + \operatorname{tg}^2 t = \sec^2 t$ e $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, temos que

$$\sec t = \sqrt{1+x^2}$$

e, portanto,

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{1+x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(b) $\displaystyle\int \frac{x-2}{x(1+x^2)}dx$

Indicações para a resolução: Vamos decompor a fracção própria numa soma de elementos simples:

$$\frac{x-2}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$$

onde A, B e C são constantes reais a determinar.

Atendendo a que

$$\frac{x-2}{x(1+x^2)} = \frac{A + Ax^2 + Bx^2 + Cx}{x(1+x^2)}$$

tem-se que

$$x - 2 = A + Ax^2 + Bx^2 + Cx$$

donde

$$\begin{cases} A + B & = & 0 \\ C & = & 1 \\ A & = & -2 \end{cases}$$

Logo,

$$\frac{x-2}{x(1+x^2)} = \frac{-2}{x} + \frac{2x+1}{1+x^2}$$

e, portanto,

$$\int \frac{x-2}{x(1+x^2)}\,dx = \int \frac{-2}{x}\,dx + \int \frac{2x}{1+x^2}\,dx + \int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

donde

$$\int \frac{x-2}{x(1+x^2)}\,dx = -2\ln|x| + \ln(1+x^2) + \operatorname{arctg} x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$