Matemática Discreta

Estratégias de Demonstração: Princípio de Indução

Universidade de Aveiro 2016/2017

http://http://moodle.ua.pt

Estratégias de demonstração por indução

Princípio de indução completa

Regra de inferência do princípio de indução

O Princípio de indução baseia-se na seguinte regra de inferência:

$$(P(n_0) \wedge (\forall n \geq n_0)(P(n) \Rightarrow P(n+1))) \Rightarrow (\forall n \geq n_0)P(n),$$

onde n é uma variável inteira e

$$(\forall n \geq n_0)\,(P(n) \Rightarrow P(n+1))$$

denota a conjunção das proposições $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ quando n percorre todos os valores inteiros não inferiores a n_0.

- Note-se que para cada valor particular de n,

$$P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

é uma proposição.

Demonstração por indução

Princípio de indução

Para cada inteiro positivo n, seja $P(n)$ uma proposição. Para mostrar que a proposição $P(n)$ é verdadeira para todo o inteiro $n \geq n_0$, basta mostrar que

a) a proposição $P(n_0)$ é verdadeira $\leftarrow$ Condição inicial.

b) para cada inteiro $k \geq n_0$, a implicação

$$P(k) \Rightarrow P(k+1)$$

é também verdadeira, ou seja, se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1)$ é também verdadeira.

- $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ constitui o passo de indução.

Exemplo

- Vamos demonstrar que para todo o número natural n,

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

- Condição inicial $P(1): 1=\frac{1\times(1+1)}{2}$.
- Passo de indução

  Hipótese de indução ($P(k)$): $1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$.

  Tese: $P(k+1): 1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)(\text{por H.I.})\\ &= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}.\end{aligned}$$

Princípio de indução completa

Variante do princípio de indução

Admita-se que a condição inicial $P(n_0)$ é verdadeira e que, para todo $k\geq n_0$, a implicação

$$((\forall n\in[n_0,k])P(n))\Rightarrow P(k+1)$$

é verdadeira, onde $[n_0,k]=\{n\in\mathbb{N}: n_0\leq n\leq k\}$. Então a proposição $P(n)$ é verdadeira para todo o $n\geq n_0$.

Exemplo

Vamos mostrar que se $\alpha_0 = 12, \alpha_1 = 29$ e, para $n \geq 2$, a igualdade

$$\alpha_n = 5\alpha_{n-1} - 6\alpha_{n-2} \qquad (1)$$

é verdadeira, então

$$\alpha_n = 5 \times 3^n + 7 \times 2^n, \qquad (2)$$

para todo o inteiro $n \geq 0$.

Solução

1. Para $n = 0$ e $n = 1$:

$$\alpha_0 = 12 = 5 \times 3^0 + 7 \times 2^0, \ \alpha_1 = 29 = 5 \times 3^1 + 7 \times 2^1$$

2. **hipótese de indução**: $\alpha_n = 5 \times 3^n + 7 \times 2^n$, para todo o inteiro $n \in [0, k]$, $k \geq 1$ inteiro.
3. **tese**: $\alpha_{k+1} = 5 \times 3^{k+1} + 7 \times 2^{k+1}$

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} &= 5\alpha_k - 6\alpha_{k-1} && \text{(por (1))} \\ &= 5(5 \times 3^k + 7 \times 2^k) - 6(5 \times 3^{k-1} + 7 \times 2^{k-1}) && \text{(por (2))} \\ &= 5 \times 3^{k+1} + 7 \times 2^{k+1}. \end{aligned}$$