Álgebra Linear e Geometria Analítica

3.ª Prova de Avaliação Discreta - 07/01/2013 **Duração: 1h30**

Nome: ______________________________ **N.º mecanográfico:** __________

Declaro que desisto ☐ ______________________________ **N.º de folhas suplementares:** __

	Grupo I
Cotação	60

	Grupo II			
Questões	1 (a)	1 (b) (c)	2	Total
Cotação	45	45	50	140
Classificação				

Grupo I

Este grupo é constituído por 5 questões de escolha múltipla. Cada questão tem uma só opção correta que deve assinalar na folha de resposta em anexo e que será recolhida após 45 minutos.

Uma resposta correta é cotada com 12 pontos, uma resposta em branco com 0 pontos e uma resposta errada com -3 pontos.

1. Considere
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$
Então
   - A. X não é vetor próprio de A;
   - B. a matriz A não é simétrica;
   - C. 2 não é valor próprio de A;
   - D. 0 é um valor próprio de A.

2. Seja A uma matriz 3×3 de valores próprios -1, 0 e 1. Então
   - A. não existe uma base de $\mathbb{R}^3$ de vetores próprios de A;
   - B. o polinómio caraterístico de A é $p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda$;
   - C. A é diagonalizável;
   - D. A é invertível.

3. A interseção da quádrica definida pela equação $x^2 + 9y^2 - z^2 = 9$ com o plano de equação
   - A. $x = 3$ é um ponto;
   - B. $x = 0$ é uma elipse;
   - C. $y = 0$ é uma hipérbole;
   - D. $z = 3$ é um parábola.

4. Existe uma aplicação linear $\mathcal{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\mathcal{L}(1,0) = (1,2)$ e
   - A. $\mathcal{L}(0,0) = (0,1)$;
   - B. $\mathcal{L}(2,0) = (0,0)$;
   - C. $\mathcal{L}(1,1) = (0,0)$;
   - D. $\mathcal{L}(0,1) = (0,0)$ e $\mathcal{L}(1,1) = (0,1)$.

5. Seja A uma matriz 4×3 de caraterística 3 e $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por $\mathcal{L}(X) = AX$ para cada $X \in \mathbb{R}^3$. Então o núcleo de $\mathcal{L}$ tem dimensão

   A. 0;

   B. 1;

   C. 2;

   D. 3.

Grupo II

Justifique convenientemente todas as suas respostas e indique os cálculos que efetuar.

1. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

   (a) Determine os valores próprios e os subespaços próprios de A.

   (b) Apresente uma matriz P ortogonal tal que $P^T A\, P$ é uma matriz diagonal.

   (c) Determine uma equação reduzida e identifique a quádrica definida por $2x^2+2y^2+3z^2-2xy+6z=0$.

2. Seja $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação linear definida por $L(x, y, z) = (y + 2z, x + 2y)$.

   (a) Determine o núcleo de L e indique uma sua base.

   (b) Indique, justificando, se L é sobrejetiva.

   (c) Determine a matriz representativa de L relativamente às bases $S = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1))$ e $T = ((1, 1), (0, 1))$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respetivamente.