



**Justifique todas as respostas e indique os cálculos efectuados.**

**100**  
Pontos

1. Considere a função  $f$  definida por  $f(x) = e^{\frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-1}}$ .

(a) Determine o domínio de  $f$ ,  $D_f$ .

(b) Determine, caso exista,  $x \in D_f$  tal que  $f(x) = 1$ .

(c) Calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

(d) Indique, para cada  $k \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (k f(x))$ .

**30**  
Pontos

2. Considere a função  $f$  definida por  $f(x) = x \ln(x+1)$ . Utilizando o Teorema de Bolzano, mostre que existe pelo menos um ponto  $a \in ]1, 2[$  tal que  $f(a) = \ln 3$ .

**50**  
Pontos

3. Caracterize a função inversa da função  $g$  definida por  $g(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \operatorname{arctg}(1-x)$ .

**20**  
Pontos

4. Sejam  $f$  e  $g$  duas funções reais de variável real tais que  $g \circ f$  está definida e o seu domínio coincide com o domínio de  $f$ . Mostre que se  $f$  não é injectiva, então  $g \circ f$  não é injectiva.