1

Mecânica e Campo Eletromagnético

2017/2018 – parte 2

Luiz Pereira
luiz@ua.pt

2

Tópicos

- **Movimento de queda livre**
  - **Movimento retilíneo com aceleração constante**

Posição, velocidade, aceleração 3D

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} + z(t)\,\hat{k}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{j} + \frac{dz(t)}{dt}\hat{k} = v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j} + v_z(t)\hat{k}$$

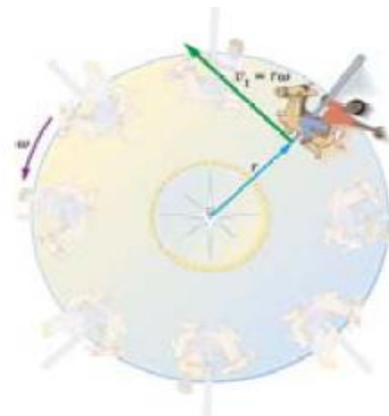
$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\hat{k} =$$
$$= \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv_x(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y(t)}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z(t)}{dt}\hat{k} =$$
$$= a_x(t)\hat{i} + a_y(t)\hat{j} + a_z(t)\hat{k}$$

Movimento Circular versus movimento linear

Linear	Circular (Rotação)
x	θ
v	ω
a	α
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = x_0 + v_0 t + ½at^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + ½\alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x-x_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta-\theta_0)$

Movimento Circular:
Grandezas angulares versus grandezas lineares

$$\boxed{\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(R\theta) = \omega R \\ a_n &= \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \\ a_t &= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = \alpha R \end{aligned}}$$



Queda livre

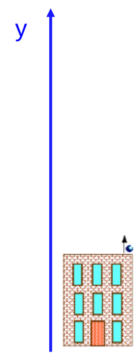
- Corpos em queda livre movimentam-se com aceleração constante
- Objetos com diferentes massas caem com a mesma aceleração constante desde que a resistência do ar seja suficientemente pequena de tal modo que possa ser desprezada
- Nesta aproximação desprezam-se ainda
  - os efeitos da rotação da Terra
  - e da variação da aceleração da gravidade com a latitude e altitude de um lugar

Queda livre

- **Aceleração da gravidade, na Terra** $\vec{g}$

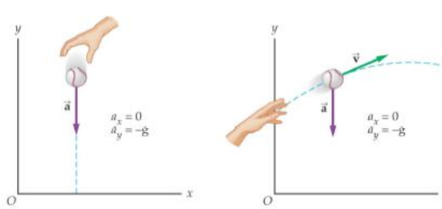
$$\boxed{g \sim 9.8\ \mathrm{m/s^2}}$$

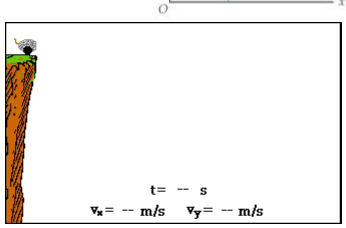
$$\vec{g} = -9.8\,\hat{j}$$
$$v = v_0 - g\left(t - t_0\right)$$
$$y = y_0 + v_0\left(t - t_0\right) - \frac{1}{2} g\left(t - t_0\right)^2$$

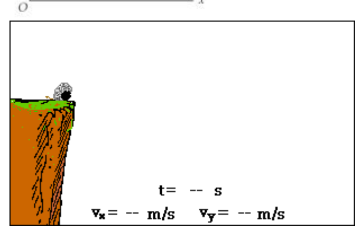


Projétil lançado obliquamente

caso particular de movimento curvilíneo no plano







Relembrar

movimento curvilíneo no plano
(ex. xy) descrito em componentes retangulares

- Usando componentes retangulares a posição, velocidade e aceleração podem ser representadas na sua forma cartesiana como:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{j} = v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\hat{j} = \frac{dv_x(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y(t)}{dt}\hat{j} = a_x(t)\hat{i} + a_y(t)\hat{j}$$

Relembrar

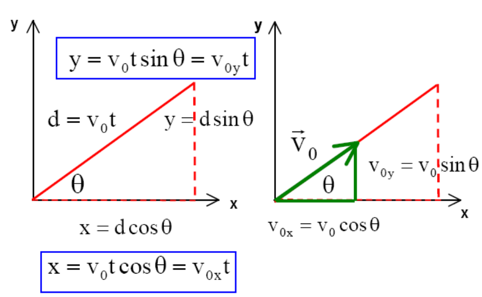
v=c^te^

movimento curvilíneo no plano
(ex. xy) descrito em componentes retangulares

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t \\ y = y_0 + v_{0y}t \end{cases}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 = v_{0x}\,\hat{i} + v_{0y}\,\hat{j} = \\ = (v_0\cos\theta)\hat{i} + (v_0 sen\,\theta)\hat{j}$$



Relembrar

a=c^te^

movimento curvilíneo no plano
(ex. xy) descrito em componentes retangulares

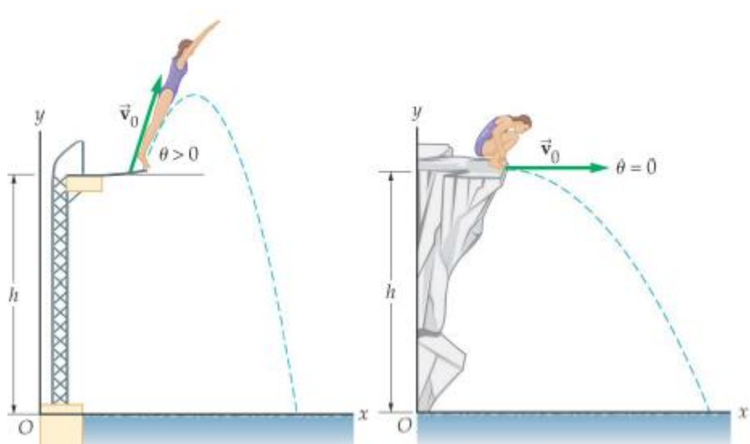
$$\vec{a}(t) = a_x\,\hat{i} + a_y\,\hat{j} \longrightarrow \begin{cases} a_x = c^{te} \\ a_y = c^{te} \end{cases}$$

$$\vec{v}(t) = v_x\,\hat{i} + v_y\,\hat{j} \longrightarrow \begin{cases} v_x = v_{0x} + a_x t \\ v_y = v_{0y} + a_y t \end{cases}$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} \longrightarrow \begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \end{cases}$$

Projétil lançado obliquamente

*caso particular de movimento curvilíneo no plano a=c^te^*

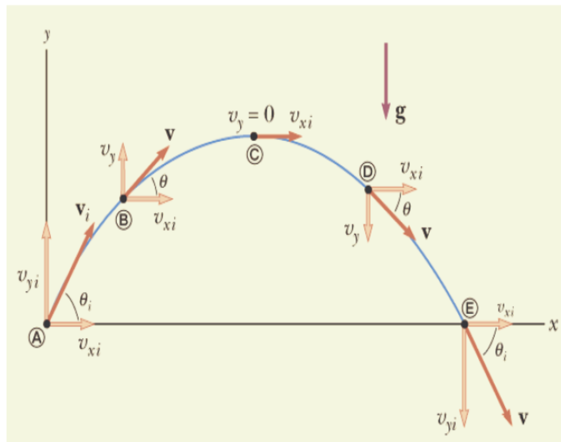


Projétil lançado obliquamente

resistência do ar ignorada
aceleração gravítica c^te e dirigida para o centro da Terra
rotação da Terra ignorada

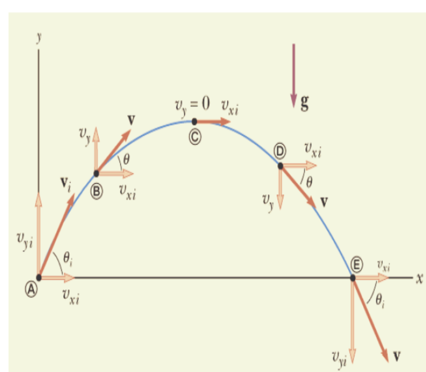
$$\vec{a} = \vec{g}$$
$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{g}\,(t - t_o)$$
$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}_o (t - t_o) + \frac{1}{2}\vec{g}(t - t_o)^2$$

$$\vec{a}(t): \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$



Projétil lançado obliquamente

$$\vec{a} = \vec{g}$$
$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{g}\,(t - t_o)$$
$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}_o (t - t_o) + \frac{1}{2}\vec{g}(t - t_o)^2$$

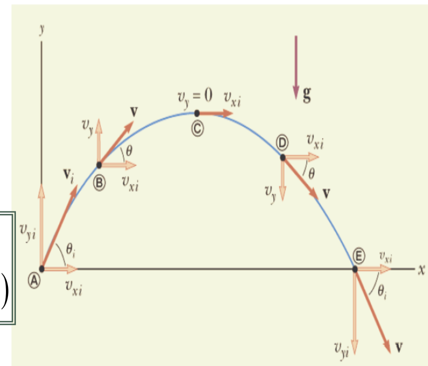


$$\vec{a}(t): \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

$$\vec{v}(t): \begin{cases} v_x = v_{x,0} = v_0 \cos\theta_i = c^{te} \\ v_y = v_{y,0} - g\,(t - t_0) = v_0 sen\,\theta_i - g\,(t - t_0) \end{cases}$$

Projétil lançado obliquamente

$$\vec{a}(t):\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

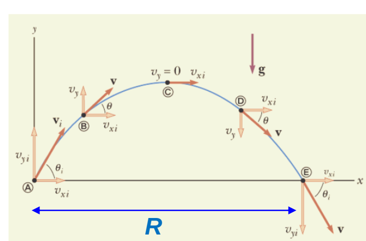


$$\vec{v}(t):\begin{cases} v_x = v_{x,0} = v_0\cos\theta_i = c^{te} \\ v_y = v_{y,0} - g(t-t_0) = v_0 sen\theta_i - g(t-t_0) \end{cases}$$

$$\vec{r}(t):\begin{cases} x = x_0 + v_{x,0}(t-t_0) = x_0 + (v_0\cos\theta_i)(t-t_0) \\ y = y_0 + v_{y,0}(t-t_0) - \frac{1}{2}g(t-t_0)^2 = y_0 + (v_0 sen\theta_i)(t-t_0) - \frac{1}{2}g(t-t_0)^2 \end{cases}$$

Projétil lançado obliquamente

Qual o alcance máximo, $x_{máx}$=R?



$$v_{x,0} = v_0\cos\theta; \quad v_{y,0} = v_0\sin\theta$$
$$R = 2v_{x,0}t; \quad 0 = v_{y,0} - gt; \quad t = v_{y,0}/g$$
$$R = 2v_{x,0}v_{y,0}/g = 2v_0^2\sin\theta\cos\theta/g$$
$$\boxed{R = (v_0^2/g)\sin 2\theta}$$

Projétil lançado obliquamente

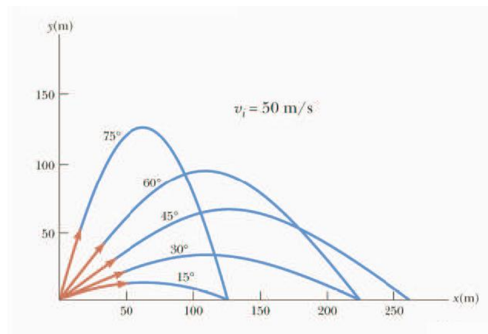
Qual o alcance máximo, $x_{máx}$=R?

$$\boxed{R = (v_0^2 / g)\sin 2\theta}$$

$$\boxed{(x_0, y_0) = (0,0)}$$

Alcance máx θ_0 =45º

sen ($2\theta_0$)=1 ; $2\theta_0$ =90º



Projétil lançado obliquamente

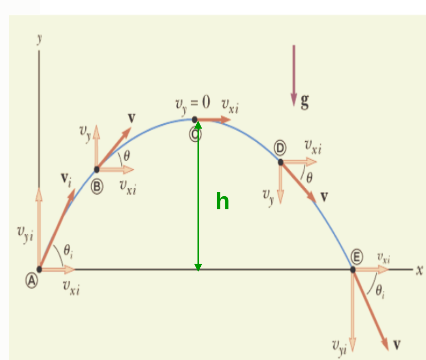
Qual a altura máxima, $y_{máx}$=h?

$$v_{x,0} = v_0 \cos\theta; \quad v_{y,0} = v_0 \sin\theta$$

$$t = v_{y,0} / g$$

$$h = h_0 + v_{y,0}(v_{y,0}/g) - \frac{1}{2} g (v_{y,0}/g)^2$$

$$h = h_0 + \frac{v_{y,0}^2}{2g} = h_0 + \boxed{\frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}}$$



Projétil lançado obliquamente

Equação da trajectória

$$(x_0 = 0;\ h_0 = 0)$$

$$x = x_0 + v_{x,0}(t - t_0); \quad h = h_0 + v_{y,0}(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$$

$$v_{x,0} = v_0 \cos\theta_0; \quad v_{x,0} = v_0 \sin\theta_0$$

$$\boxed{h = x(\tan\theta) - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta}}$$

Projétil lançado obliquamente: exemplos