Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I — Exame da Época Normal - Segunda Chamada

15 de Janeiro de 2007

Duração: **2h30m**

Justifique todas as respostas e indique os cálculos efectuados.

90 Pontos

1. Considere a função f definida por $f(x) = \begin{cases} 1 + x\,\mathrm{sen}\dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \\ x^2 \ln x & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$.

   (a) Estude f quanto à continuidade na origem.

   (b) Determine, caso existam, as assimptotas do gráfico de f.

   (c) Enuncie o Teorema de Lagrange e mostre que existe $c \in \left]-\dfrac{2}{\pi}, 0\right[$ tal que $f'(c) = -1$.

   (d) Justifique que f é integrável em $[1, 2]$.

   (e) Calcule o valor da área da região limitada do plano situada entre $x = 1$ e $x = 2$ e delimitada pelo gráfico de f e pelo eixo das abcissas.

25 Pontos

2. Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$. Mostre que f admite exactamente um zero no intervalo $[1, 3]$.

35 Pontos

3. Considere a função F definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^{-t^2} \operatorname{arctg} t \, dt$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Determine $F'(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Estude F quanto à existência de extremos locais.

30 Pontos

4. Calcule os integrais indefinidos seguintes:

   (a) $\displaystyle\int \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \, dx$

   (b) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3 - x^2} \, dx$

20 Pontos

5. Determine a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{x+2}{x^2+2x+2} \, dx$ e, em caso de convergência, indique o seu valor.