2.4. Equações lineares de ordem arbitrária

Uma equação diferencial linear de ordem n ($n \in \mathbb{N}$) é uma equação da forma

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x)$$

onde a_0, $a_1, \ldots,$ a_n, b são funções (contínuas) num certo intervalo I com $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. As funções a_j ($j = 0,$ $1, \ldots$ n) dizem-se os coeficientes da equação. Se todos os coeficientes da equação forem funções constantes (em I), então a equação diz-se de *coeficientes constantes*. A equação diz-se *incompleta* (ou *homogénea*) quando b é a função nula (em I); caso contrário a equação linear diz-se *completa* (ou *não homogénea*).

2.4. Equações lineares de ordem arbitrária

Exemplos:

- $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$
- $e^x y' - \cos xy = x$
- $y^{(5)} + 2y' = x^2$
- Note-se, por exemplo, que a EDO $yy'' + 3xy' = e^x$ não é linear.

Teorema (existência e unicidade de solução global)
Se a_0, $a_1, \ldots,$ a_n, b são funções contínuas num intervalo I, $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$ e $x_0 \in I$, então, nesse intervalo, existe uma e uma só solução para o seguinte problema de Cauchy, onde $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$.

$$\begin{cases} a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x) \\ y(x_0) = \beta_0, y'(x_0) = \beta_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = \beta_n \end{cases}$$

Exemplo: O problema de Cauchy $\begin{cases} x'' + x = 0 \\ x(0) = 2, x'(0) = 2 \end{cases}$ tem uma única solução em qualquer intervalo contendo a origem. Resolva-o usando TL.

2.4. Equações lineares de ordem arbitrária

Não é difícil mostrar que:

- Dadas duas soluções da EDO linear, a sua diferença é solução da equação homogénea associada.
- A soma de uma solução da EDO linear, com uma solução da equação homogénea associada é também solução da EDO. A partir destas informações é possível estabelecer o seguinte resultado:

Teorema (Solução geral de uma EDO linear completa)
A solução geral de uma equaçãoo linear completa obtém-se adicionando uma solução particular à solução geral da equação homogénea associada.

Exemplos: $y' - 2y = e^{5x}$.

2.4.1 Equações lineares homogéneas

Já sabemos como resolver equações diferenciais lineares homogéneas de primeira ordem. Tal equação é sempre de variáveis separáveis.

A resolução de uma equação linear homogénea de ordem arbitrária baseia-se no seguinte resultado:

Teorema Toda a equação linear homogénea de ordem n

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots a_{n-1}(x)y' a_n(x)y = 0$$

num dado intervalo I ($a_0, a_1, \ldots, a_n$ contínuas em I; $a_0(x) \neq 0$ para todo o $x \in I$) admite n soluções, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, linearmente independentes e qualquer outra sua solução, φ , se pode escrever na forma

$$\varphi = C_1\varphi_1 + \ldots + C_n\varphi_n$$

onde as constantes C_j são determinadas (de modo único) por φ.

2.4.1 Equações lineares homogéneas

Exemplo: As funções seno e cosseno são soluções da equação linear homogénea $y'' + y = 0$ em $\mathbb{R}$. Por outro lado, estas funções são linearmente independentes (em $\mathbb{R}$).
Assim, o conjunto $\{\cos x, \sin x\}$ é um *sistema fundamental de soluções* da equação considerada. Isto verifica-se pelo facto do *Wronskiano* $W(\sin x, \cos x)$ ser não nulo.

$$W(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix}$$

Consequentemente, a solução geral é dada por

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$$

Exemplo: O problema de fronteira

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

tem uma infinidade de soluções no intervalo $[0, \pi]$.

2.4.2. Método da variação das constantes

Vamos agora apresentar um método para determinar uma solução particular da equação linear completa. Comecemos pelas equações de primeira ordem.

Já tivemos oportunidade de ver que a solução geral da equação homogénea $a_0(x)y' + a_1(x)y = 0$ é dada por $y = Ce^{-A(x)},\ C \in \mathbb{R}$, onde $A(x)$ denota uma primitiva de $\frac{a_1(x)}{a_0(x)}$.

Admita-se agora que C e uma função (diferenciável) de x. Então

$$y_p = C(x)e^{-A(x)}$$

A função C pode determinar-se substituindo na EDO y por y_p.

Exemplos:

1. $y' - 2y = e^{5x}$
2. $x^2y' + xy = 1$

2.4.2 Método da variação das constantes

O procedimento anteriormente descrito para determinar uma solução particular da equação linear completa de primeira ordem pode ser generalizado a equações de ordem superior. Suponha-se conhecida a solução geral da sua equação homogénea associada:

$$y_h = C_1\varphi_1(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x), C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R},$$

onde $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ é um sistema fundamental de soluções desta equação. Vamos admitir que aquelas constantes C_j são funções (diferenciáveis) de x. Procura-se uma solução particular da equação completa da forma

$$y_p = C_1(x)\varphi_1(x) + \ldots + C_n(x)\varphi_n(x).$$

2.4.2 Método da variação das constantes

No caso em que a EDO é de 2ª ordem as constantes determinam-se pela equação:

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{b}{a_0} \end{bmatrix}$$

Exemplo: Vamos resolver a equação $y'' + y = cosecx$, no intervalo $]0, \pi[$, pelo método da variação das constantes.

Exercício 1 folha 2 (parte 2)

2.5 Equações lineares de coeficientes constantes

Considere-se a equação linear

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = b(x)$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$.

2.5.1 Solução geral de equações homogéneas

Para determinarmos soluções da EDO homogénea de coeficientes constantes consideramos o **polinómio característico**.

$$P(r) = a_0 r^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n$$

Determina-se um sistema fundamental de soluções a partir das raízes de $P(r)$.

2.5.1 Solução geral de equações homogéneas

<u>1º caso</u>: $P(r)$ possui n raízes reais distintas $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

$$\left\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_n x}\right\}$$

Exemplo: $y''' + 4y'' - 5y' = 0$

<u>2º caso</u>: Se $P(r)$ possui uma raíz de multiplicidade $k > 1$, então as seguintes soluções são linearmente independentes.

$$e^{rx}, xe^{rx}, \ldots, x^{k-1}e^{rx}$$

Exemplo: $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$

<u>3º caso</u>: Se $P(r)$ tem raízes simples complexa $\alpha \pm \beta i$, então as seguintes soluções são linearmente independentes.

$$e^{\alpha x}\cos(\beta x) \text{ e } e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

Exemplo: $y'' + 2y' + 5y = 0$

2.5.1 Solução geral de equações homogéneas

4º caso $P(r)$ tem uma raiz complexa $r = \alpha \pm \beta i$ de multiplicidade $k > 1$, então as seguintes soluções são linearmente independentes.

$$\begin{gathered} e^{\alpha x}\cos(\beta x);\ e^{\alpha x}\sin(\beta x) \\ xe^{\alpha x}\cos(\beta x);\ xe^{\alpha x}\sin(\beta x) \\ \vdots \\ x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x);\ x^{k-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x) \end{gathered}$$

Exemplo: $y^{(4)} + 4y'' + 4y = 0$