Departamento de Matemática **Universidade de Aveiro**

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Exame de recurso - 23/01/2013 **Duração: 2h30**

Nome: ______________________________ **N.º mecanográfico:** __________

Declaro que desisto ☐ ______________________________ **N.º de folhas suplementares:** __

	Grupo I
Cotação	50

	Grupo II					
Questões	1	2	3	4	5	Total
Cotação	30	30	40	24	26	150
Classificação						

Grupo I

As questões do grupo I encontram-se na folha em <u>anexo</u> que será recolhida após 45 minutos.

Grupo II

Justifique convenientemente todas as suas respostas e indique os cálculos que efetuar.

1. Considere

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Calcule a inversa de A.

   (b) Determine a matriz X que satisfaz $XA = B^T$.

2. Considere $\mathcal{C}(A)$ o espaço das colunas da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine $\mathcal{C}(A)$, verifique que se trata de um plano de $\mathbb{R}^3$ e escreva uma sua equação.

(b) Determine o conjunto de todos os vetores ortogonais ao plano obtido em (a).

(c) Indique, justificando, uma base de $\mathbb{R}^3$ que contenha uma base de $\mathcal{C}(A)$.

3. Considere $k \in \mathbb{R}$ e

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine os valores próprios de A.

(b) Discuta a caraterística da matriz $A - I_3$ em função do parâmetro k.

(c) Para $k = 2$, mostre que A é diagonalizável e determine uma matriz P que diagonaliza A.

4. Considere os vetores $X = (0,0,1)$, $Y = (1,0,0)$ e $Z = X \times Y$ de $\mathbb{R}^3$. Seja $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear tal que

$$L(X) = X - Y, \qquad L(Y) = X + 2Y, \qquad L(Z) = L(X) \times L(Y).$$

   (a) Mostre que $L(Z)$ pertence ao subespaço gerado por Z.

   (b) Determine a matriz representativa de L relativamente à base $S = (X, Y, Z)$ de $\mathbb{R}^3$.

5. Considere em $\mathbb{R}^3$ os pontos $A = (0,0,1)$, $Q = (x,y,z)$ e o plano $\mathcal{P}$ de equação $z + 1 = 0$.

   (a) Indique as expressões das distâncias

      i. $d_{A,Q}$ entre os pontos A e Q;

      ii. $d_{Q,\mathcal{P}}$ do ponto Q ao plano $\mathcal{P}$.

   (b) Determine uma equação reduzida e classifique a quádrica definida pelo conjunto dos pontos Q de $\mathbb{R}^3$ tais que $(d_{A,Q})^2 = (d_{Q,\mathcal{P}})^2$.

   Nota: Se não responder à alínea (a) ii., *substitua* $(d_{Q,\mathcal{P}})^2$ *por* $z^2 + 7z$ *na alínea* (b).