

Elementos de Análise de Circuitos pt1:

- Algumas Grandezas Físicas. SI. Notação.
- Grandezas Eléctricas. Carga, Tensão e Corrente.
- Potência e Energia. Exercício.
- Elementos de Circuito:
 - Fontes de Tensão e Corrente.
 - Lei de Ohm.
- Ligações de elementos: série e paralelo.
- Topologia de circuitos.

Elementos de Análise de Circuitos pt2:

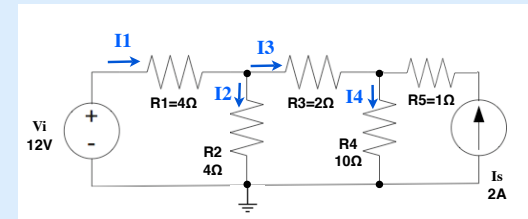
- Leis de Kirchhoff de correntes e tensões.
- Exercício.
- Simplificação de circuitos: divisores de tensão e de corrente.
- Simplificação de circuitos: Princípio da Sobreposição.
- Simplificação de circuitos: teoremas de Thévenin e de Norton.

Lei de Kirchhoff de correntes [nós] (1)

A soma das correntes que convergem num nó é nula.

- traduz o princípio da conservação da carga.
- só é útil aplicada aos nós essenciais, que não o de massa.

$$\sum I = 0$$



ou, de outra forma:

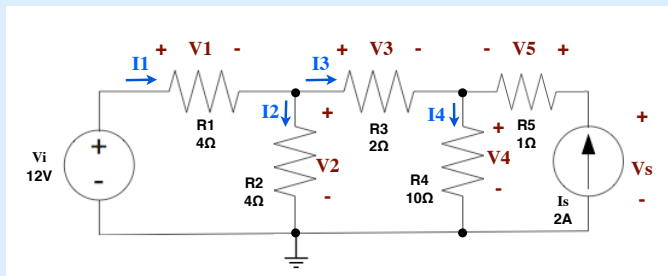
Num nó, a soma das correntes que entram é igual à soma das que saem.

$$\sum I_{in} = \sum I_{out}$$

Análise de circuitos

Dado um circuito eléctrico, conhecidos os valores dos componentes básicos, pretende-se determinar:

- os valores das correntes e tensões desconhecidos.

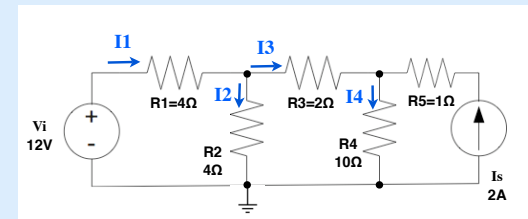


Para já, conhecemos a lei de Ohm: $V = R \times I$

Lei de Kirchhoff de correntes [nós] (2)

$$\sum I = 0 \quad \begin{aligned} I1 - I2 - I3 &= 0 \iff I1 = I2 + I3 \\ I3 + Is - I4 &= 0 \iff I3 + Is = I4 \end{aligned}$$

$$\sum I_{in} = \sum I_{out}$$



n nós essenciais \Rightarrow n-1 equações lineares independentes

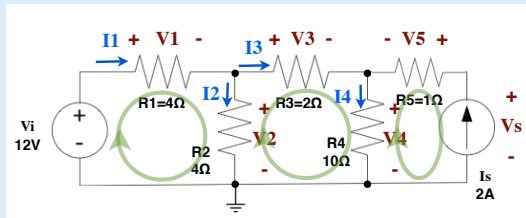
3 nós essenciais
 \Downarrow
 2 equações lineares independentes.
 O nó de massa é irrelevante.

Lei de Kirchhoff de tensões [loops] (1)

A soma algébrica das tensões ao longo de qualquer Caminho Fechado é nula.

• traduz o princípio da conservação da energia.

$$\sum V = 0$$



3 malhas
↓
3 equações
lineares
independentes

**n malhas ⇒ n equações
lineares independentes**

Kirchhoff de correntes e de tensões

$$\sum V = 0$$

$$V1 + V2 - Vi = 0$$

$$V3 + V4 - V2 = 0$$

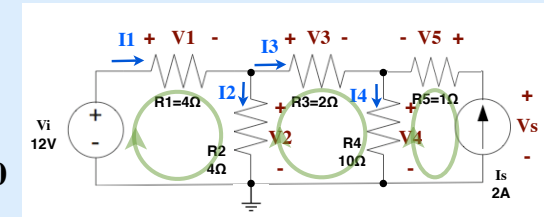
$$-V5 + Vs - V4 = 0$$

$$\sum I_{in} = \sum I_{out}$$

$$I1 = I2 + I3$$

$$I3 + Is = I4$$

$$V = R \times I$$



Incógnitas ???

são 5:

I1 I2 I3 I4 Vs

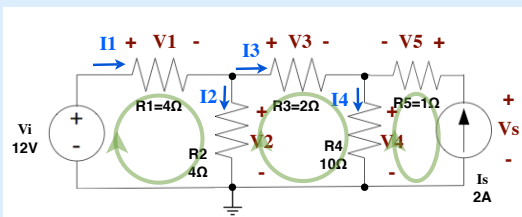
Lei de Kirchhoff de tensões [loops] (2)

$$\sum V = 0$$

$$V1 + V2 - Vi = 0$$

$$V3 + V4 - V2 = 0$$

$$-V5 + Vs - V4 = 0$$



$$V1 + V3 + V4 - Vi = 0$$

$$V3 - V5 + Vs - V2 = 0$$

$$V1 + V3 - V5 + Vs - Vi = 0$$

} **3 equ. alternativas**

Exercício (resolução “força bruta”)

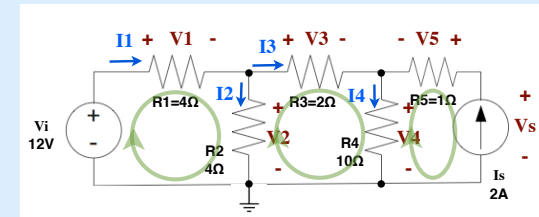
$$(1) V1 + V2 - Vi = 0$$

$$(2) V3 + V4 - V2 = 0$$

$$(3) -V5 + Vs - V4 = 0$$

$$(4) I1 = I2 + I3$$

$$(5) I3 + Is = I4$$



$$(1) R1 I1 + R2 I2 - Vi = 0$$

$$(2) R3 I3 + R4 I4 - R2 I2 = 0$$

$$(3) -R5 Is + Vs - R4 I4 = 0$$

$$(4) I1 = I2 + I3$$

$$(5) I3 + Is = I4$$

$$(1) 4 I1 + 4 I2 = 12$$

$$(2) 2 I3 + 10 I4 - 4 I2 = 0$$

$$(3) -Is + Vs - 10 I4 = 0$$

$$(4) I1 = I2 + I3$$

$$(5) I3 + 2 = I4$$

$$(1) I1 = 3 - I2$$

$$(4) 3 - I2 = I2 + I3$$

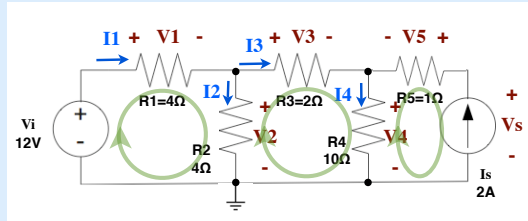
$$(5) I3 = I4 - 2$$

$$(2) 4 - 2 + 5 I4 - 2 I2 = 0$$

$$(3) -2 + Vs - 10 I4 = 0$$

Exercício (2)

- (1) $I_1 = 3 - I_2$
 (4) $3 - I_2 = I_2 + I_3$
 (5) $I_3 = I_4 - 2$
 (2) $I_4 - 2 + 5 I_4 - 2 I_2 = 0$
 (3) $-2 + V_s - 10 I_4 = 0$



- (1) $I_1 = 3 - I_2$ (1) $I_1 = 3 - I_2$ (1) $I_1 = 3 - I_2$
 (4) $3 - I_3 = 2 I_2$ (4) $3 - I_3 = 2 I_2$ (4) $3 - I_3 = 2 I_2$
 (5) $I_3 = I_4 - 2$ (5) $I_3 = I_4 - 2$ (5) $I_3 = I_4 - 2$
 (2) $6 I_4 - 2 = 2 I_2$ (2) $6 I_4 - 2 = 3 - I_3$ (2) $6 I_4 - 2 = 3 - I_4 + 2$
 (3) $V_s = 10 I_4 + 2$ (3) $V_s = 10 I_4 + 2$ (3) $V_s = 10 I_4 + 2$

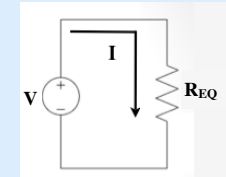
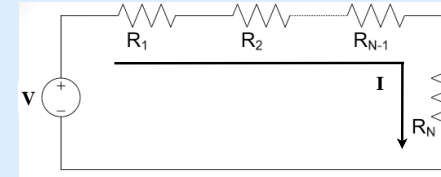
- (1) $I_1 = 1 \text{ A}$
 (4) $I_2 = 2 \text{ A}$
 (5) $I_3 = -1 \text{ A}$
 (2) $I_4 = 1 \text{ A}$
 (3) $V_s = 12 \text{ V}$

DETI-UA (JEO) SE 2016-17

Elementos de Análise de Circuitos pt2 - 9

Simplificação de circuitos (1)

Resistências em Série: 2 ou mais resistências estão ligadas em série quando são percorridas pela mesma corrente.



$$V = R_1 I + R_2 I + \dots + R_N I$$

$$V = (R_1 + R_2 + \dots + R_N) I$$

$$V = R_{EQ} I$$

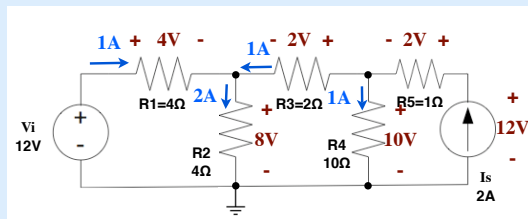
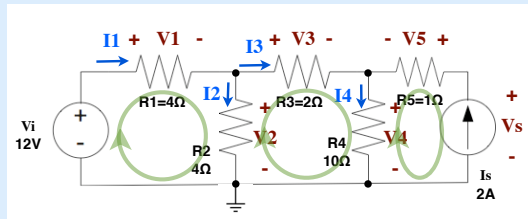
$$R_{EQ} = \sum_{n=1}^N R_n$$

DETI-UA (JEO) SE 2016-17

Elementos de Análise de Circuitos pt2 - 11

Exercício (3)

- (1) $I_1 = 1 \text{ A}$
 (4) $I_2 = 2 \text{ A}$
 (5) $I_3 = -1 \text{ A}$
 (2) $I_4 = 1 \text{ A}$
 (3) $V_s = 12 \text{ V}$



DETI-UA (JEO) SE 2016-17

Elementos de Análise de Circuitos pt2 - 10

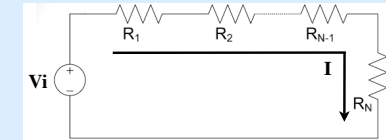
Simplificação de circuitos (2)

Divisor de Tensão

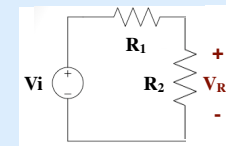
$$V_i = (R_1 + R_2 + \dots + R_N) I$$

$$V_{R2} = R_2 I$$

$$V_{R2} = V_i \frac{R_2}{R_1 + R_2 + \dots + R_N}$$



$$V_{R_x} = V_i \frac{R_x}{R_1 + R_2 + \dots + R_N}$$



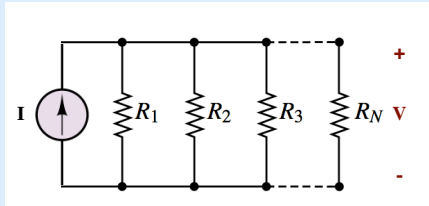
$$V_{R2} = V_i \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

DETI-UA (JEO) SE 2016-17

Elementos de Análise de Circuitos pt2 - 12

Simplificação de circuitos (3)

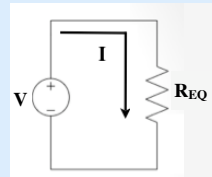
Resistências em Paralelo: quando sujeitas à mesma tensão



$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_N$$

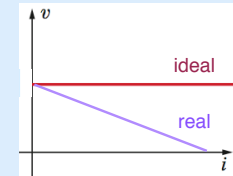
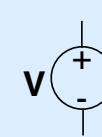
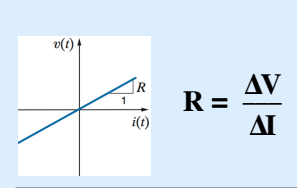
$$I = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \dots + \frac{V}{R_N}$$

$$\frac{1}{R_{EQ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}$$



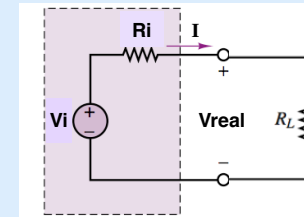
$$I = \frac{V}{R_{EQ}}$$

Fontes independentes revisitadas



$$R_i = \frac{\Delta V}{\Delta I}$$

$$V_{\text{real}} = \frac{R_L}{R_i + R_L} V_i$$

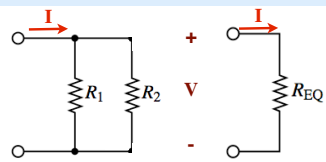


Fonte de tensão ideal:

$$\Delta V = 0 \Rightarrow R_i = 0 \, \Omega$$

Simplificação de circuitos (4)

2 Resistências em Paralelo (caso particular)



$$\frac{1}{R_{EQ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}$$

$$R_{EQ} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Divisor de Corrente

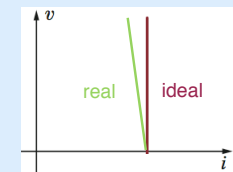
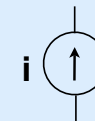
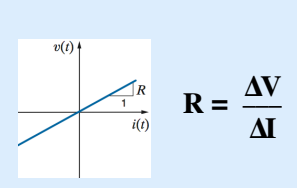
$$V = R_{EQ} I = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I$$

$$I_{R1} = \frac{V}{R_1}$$

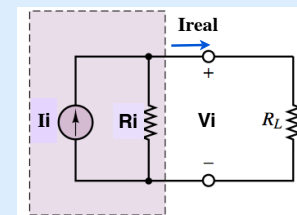
$$I_{R1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I$$

$$I_{R2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$$

Fontes independentes revisitadas



$$I_{\text{Real}} = \frac{R_i}{R_i + R_L} I_i \quad R_i = \frac{\Delta V}{\Delta I}$$



Fonte de Corrente ideal:

$$\Delta I = 0 \Rightarrow R_i = \infty \, \Omega$$

Simplificação de circuitos (5)

Princípio da Sobreposição - “o todo é igual à soma das partes”

o Princípio da Sobreposição é aplicável em circuitos lineares (contendo apenas fontes independentes - ou dependentes lineares - e componentes passivos - R, C ou L)

Na prática, para calcular uma qualquer variável x do circuito (V ou I, por ex.):

- considera-se apenas activa uma fonte de energia;
- anula-se o efeito das outras, e calcula-se o valor de x ;
- repete-se o processo para cada uma das outras fontes;
- adicionam-se todos os resultados de cada uma das iterações anteriores;

a) fonte **a** $\Rightarrow X_a$

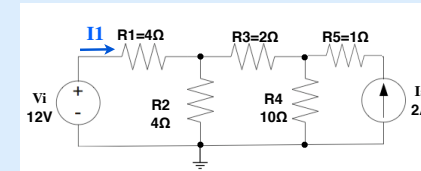
b) fonte **b** $\Rightarrow X_b$

c) fonte **c** $\Rightarrow X_c$

...

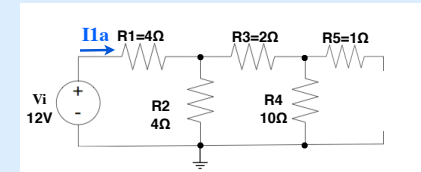
$$X = X_a + X_b + X_c + \dots$$

Princípio da Sobreposição (3)



$$(1) I1 = 1 A$$

a) Iteração **a**: considerar V_i e “anular” I_s . Qual é a resistência interna de I_s ??

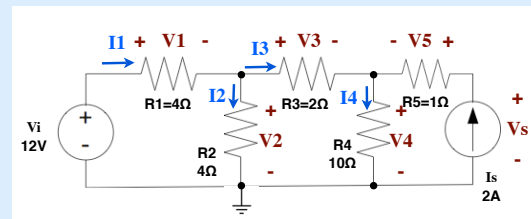


R_5 não faz nada.
 R_3 e R_4 estão em série, donde:
 $R_{34} = R_3 + R_4 = 12 \Omega$

Princípio da Sobreposição (2)

Anular o efeito de uma fonte de energia = substituí-la pela sua R interna.

- Fonte de tensão ideal $\Rightarrow R_i = 0 \Omega$ = curto-circuito.
- Fonte de corrente ideal $\Rightarrow R_i = \infty \Omega$ = circuito-aberto.



- (1) $I1 = 1 A$
 (4) $I2 = 2 A$
 (5) $I3 = -1 A$
 (2) $I4 = 1 A$
 (3) $V_s = 12 V$

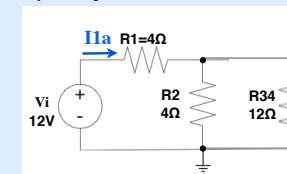
Exercício: calcular a potência fornecida por V_i usando o princípio da sobreposição.

$$P_i = V_i I1 \quad \text{ou seja, basta calcular } I1.$$

Princípio da Sobreposição (4)

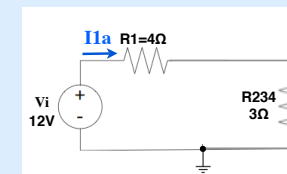
$$I1 = 1 A$$

a) Iteração **a**:



R_2 e R_{34} estão em paralelo, donde:
 $R_{234} = R_2 // R_{34}$

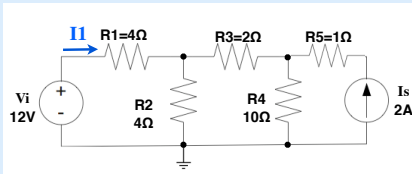
$$R_{234} = \frac{R_{34} R_2}{R_{34} + R_2} = \frac{12 \times 4}{12 + 4} = 3 \Omega$$



$$I1a = \frac{V_i}{R_1 + R_{234}} = \frac{12}{7} A$$

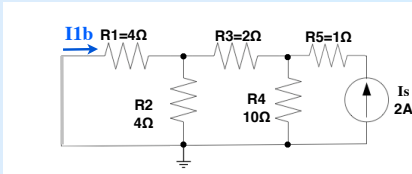
Princípio da Sobreposição (5)

$$I = 1 \text{ A}$$

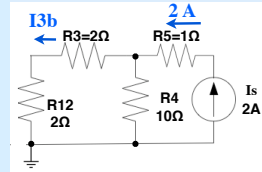


b) Iteração **b**: considerar I_s e “anular” V_i .

Qual é a resistência interna de V_i ??



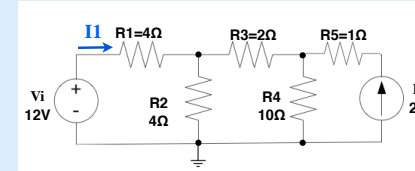
R_1 e R_2 estão em paralelo, donde:
 $R_{12} = R_1 \parallel R_2 = 4 \parallel 4 = 2 \Omega$



R_3 e R_{12} estão em série, donde:
 $R_{123} = R_{12} + R_3 = 4 \Omega$
 I_{1b} desapareceu, para já ...

Princípio da Sobreposição (7)

Exercício: calcular a potência fornecida por V_i : $P_i = V_i I_i$



$$(1) I = 1 \text{ A}$$

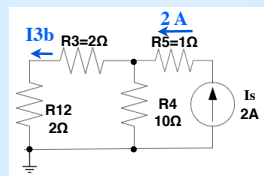
$$\begin{aligned} \text{a) Iteração a: considerar } V_i \text{ e "anular" } I_s. \quad I_{1a} &= \frac{12}{7} \text{ A} \\ \text{b) Iteração b: considerar } I_s \text{ e "anular" } V_i. \quad I_{1b} &= -\frac{5}{7} \text{ A} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} I = I_{1a} + I_{1b} = 1 \text{ A}$$

$$P_i = V_i I_i = 12 \times 1 = 12 \text{ W}$$

Princípio da Sobreposição (6)

$$I = 1 \text{ A}$$

b) Iteração **b**

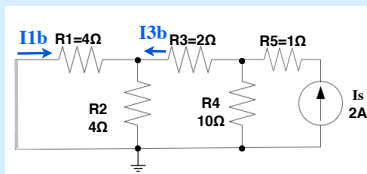


$$I_{3b} = I_s \frac{R_4}{R_4 + R_{123}} = 2 \frac{10}{10 + 4} = \frac{10}{7} \text{ A}$$

I_{3b} divide-se igualmente por R_1 (4Ω) e R_2 (4Ω):

$$I_{1b} = -I_{3b} / 2$$

$$I_{1b} = -\frac{5}{7} \text{ A}$$

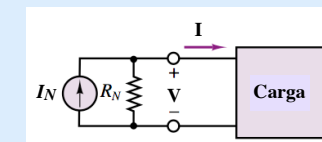
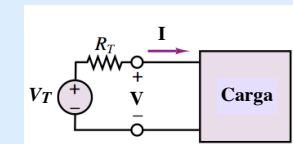
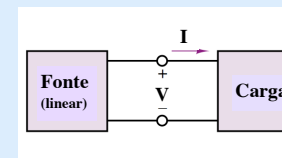


Simplificação de circuitos (6)

Circuitos equivalentes de Thévenin e de Norton

Podemos dividir um circuito em 2 partes: fonte e carga.

Thévenin

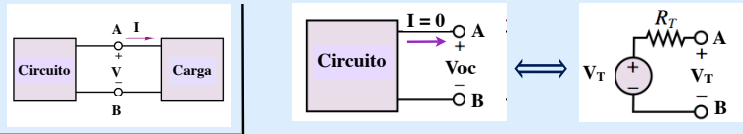


Norton

Carga: conjunto de componentes quaisquer.
Fonte: conjunto de componentes lineares - fontes (independentes ou controladas) e resistências.

Equivalente de Thévenin

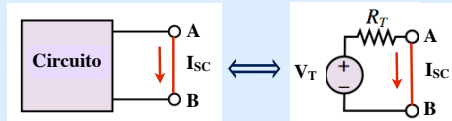
Como obter o equivalente de Thévenin ??



- 1) Para obter V_T : análise em circuito aberto (*open circuit - OC*)
 Calcula-se a tensão V_{AB} em circuito aberto = $V_{OC} = V_T$

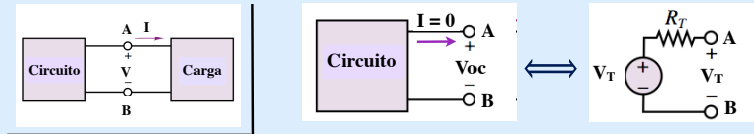
- 2a) Para obter R_T :
 análise em curto-circuito
 (*short circuit - SC*)
 Calcula-se a corrente I_{SC} em curto-circuito.

$$R_T = V_T / I_{SC}$$



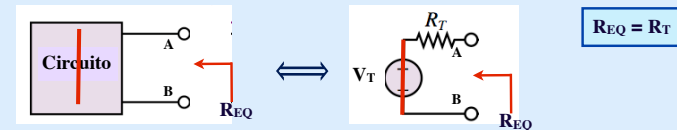
Equivalente de Thévenin (3)

Alternativas para obter R_T



- 2c) Só se pode usar quando o "circuito" só contém fontes independentes.

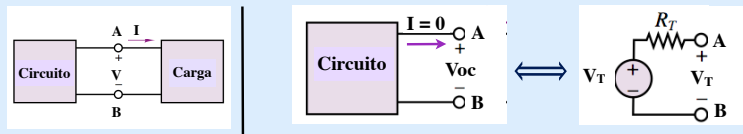
- anulam-se as fontes independentes do "circuito" (V: curto-circuito; I: circuito aberto)
- determina-se a resistência que se "vê" entre os terminais A e B do "circuito"



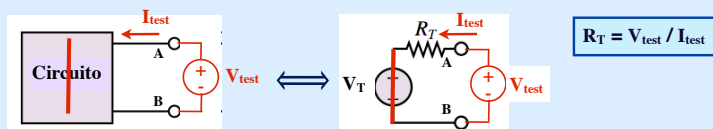
$$R_{EQ} = R_T$$

Equivalente de Thévenin (2)

Alternativas para obter R_T



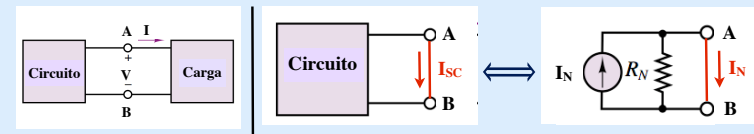
- 2b) Útil quando o "circuito" contém fontes dependentes.
 - anulam-se as fontes independentes do "circuito" (V: curto-circuito; I: circuito aberto)
 - aplica-se uma tensão de teste (V_{test}) à saída do "circuito"
 - calcula-se a corrente I_{test} que entra no "circuito".



$$R_T = V_{test} / I_{test}$$

Equivalente de Norton (dual de Thévenin)

Como obter o equivalente de Norton ??

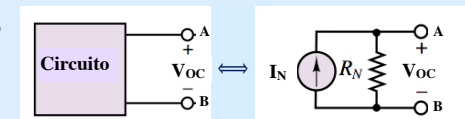


- 1) Para obter I_N : análise em curto-circuito (*short circuit - SC*)

$$\text{Calcula-se a corrente } I_{AB} \text{ em curto-circuito} = I_{AB} = I_N$$

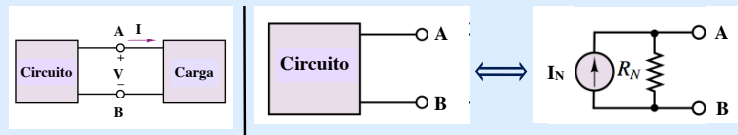
- 2a) Para obter R_N :
 análise em circuito aberto
 (*open circuit - OC*)
 Calcula-se a tensão V_{OC} em circuito aberto.

$$R_N = V_{OC} / I_N$$



Equivalente de Norton (2)

Alternativas para obter R_N (vide dualidade com Thévenin)



2b) Útil quando o “circuito” contém fontes dependentes.

- anulam-se as fontes independentes do “circuito” (V: curto-circuito; I: circuito aberto)
- aplica-se uma tensão de teste (V_{test}) à saída do “circuito” (entre A e B)
- calcula-se a corrente I_{test} que entra no “circuito”.

$$R_N = V_{test} / I_{test}$$

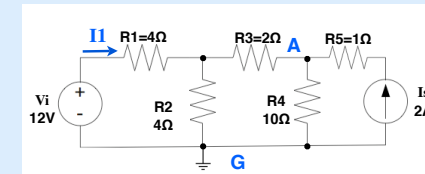
2c) Só se pode usar quando o “circuito” só contém fontes independentes.

- anulam-se as fontes independentes do “circuito” (V: curto-circuito; I: circuito aberto)
- determina-se a resistência que se “vê” entre os terminais A e B do “circuito”

$$R_{AB} = R_N$$

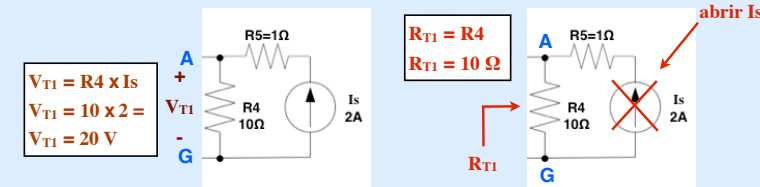
Exercício com Thévenin

Calcular I_1

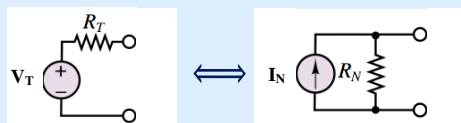


(1) $I_1 = 1 \text{ A}$

Passo 1: aplicar Thévenin para a direita dos pontos A e G.



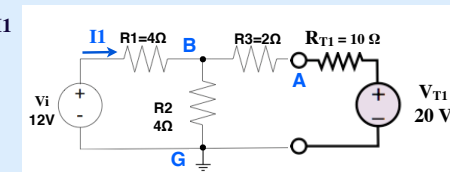
Thévenin vs Norton



$$\begin{aligned} R_T &= R_N \\ V_T &= R_N I_N \\ I_N &= V_T / R_T \end{aligned}$$

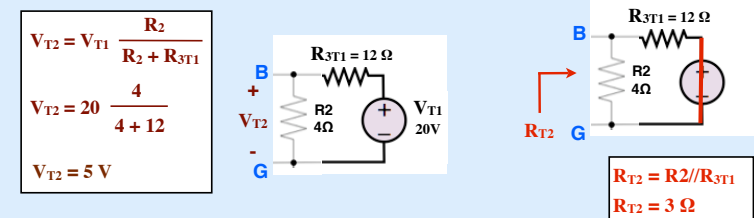
Exercício com Thévenin (2)

Calcular I_1
($I_1 = 1 \text{ A}$)



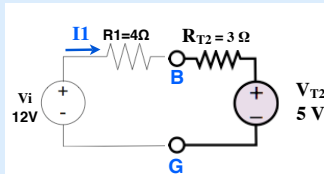
$$\begin{aligned} R_{3T1} &= R_3 + R_{T1} \\ R_{3T1} &= 12 \Omega \end{aligned}$$

Passo 2: aplicar Thévenin para a direita dos pontos B e G.



Exercício com Thévenin (3)

Calcular I_1
($I_1 = 1 \text{ A}$)



Passo 3: calcular, finalmente, I_1 .

$$I_1 = \frac{V_i - V_{T2}}{R_1 + R_{T2}}$$

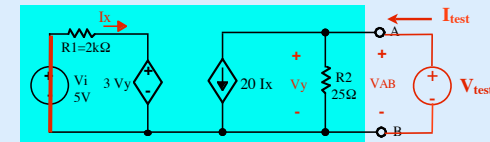
$$I_1 = \frac{12 - 5}{4 + 3}$$

$$I_1 = 1 \text{ A}$$

Exercício com Norton (2)

2b) o circuito contém fontes dependentes; não se pode calcular R_N por simples inspeção visual.

- anulam-se as fontes independentes do “circuito” (V : curto-circuito; I : circuito aberto)
- aplica-se uma tensão de teste (V_{test}) à saída do “circuito” (entre A e B)
- calcula-se a corrente I_{test} que entra no “circuito”.



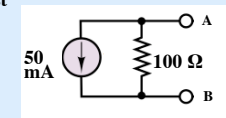
$$R_N = V_{\text{test}} / I_{\text{test}}$$

$$V_y = V_{\text{test}}$$

$$I_x = \frac{-3 V_y}{R_1} = \frac{-3 V_{\text{test}}}{2000}$$

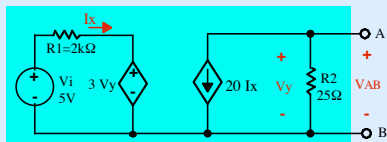
$$I_{\text{test}} = 20 I_x + (V_{\text{test}}/R_2) = \frac{-60 V_{\text{test}}}{2000} + \frac{V_{\text{test}}}{25} = 0.01 V_{\text{test}}$$

$$R_N = \frac{V_{\text{test}}}{I_{\text{test}}} = \frac{V_{\text{test}}}{0.01 V_{\text{test}}} = 100 \Omega$$

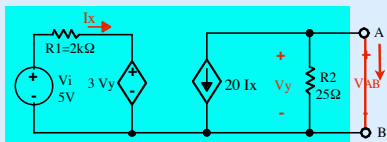


Exercício com Norton (1)

Obter o equivalente de Norton entre os pontos A e B.



1) Calcular I_N
Saída em curto-circuito $I_{AB} = I_N$



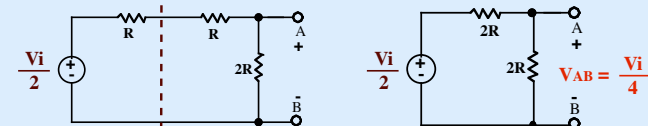
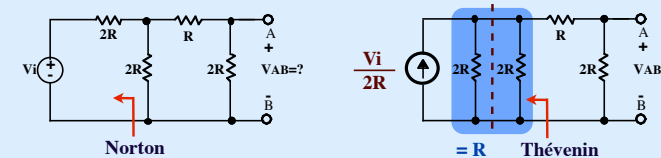
$$I_{sc} = I_{AB} = I_N = -20 I_x$$

$$I_x = \frac{V_i - 3 V_y}{R_1} = \frac{5 - 0}{2000}$$

$$I_N = \frac{-20 \times 5}{2000} = -50 \text{ mA}$$

Transformação de Fontes

Exemplo de aplicação sucessiva de Norton e Thévenin:



Com tantos métodos alternativos ... qual o melhor ??