



*Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro*  
**Cálculo I — Época de Exame**  
**12 de Janeiro de 2009**  
Duração: **2h30m**

**Justifique todas as respostas e indique os cálculos efectuados.**

40  
Pontos

1. Considere a função real de variável real  $f$  dada por  $f(x) = \frac{x}{x+1} + \ln(x+1)$ .

- (a) Determine o domínio de  $f$  e, caso existam, as assíntotas do gráfico de  $f$ .
- (b) Estude  $f$  quanto à existência de extremos locais e determine os seus intervalos de monotonia.

15  
Pontos

2. Verifique que  $x = 1$  é solução da equação  $e^{x-1} = x$  e que esta equação não pode ter outra raiz real.

20  
Pontos

3. Considere a função  $f$  definida em  $[0, \pi]$  por  $f(x) = \frac{1}{2 + \cos x}$ . Sabendo que  $f$  é invertível defina a função inversa de  $f$  indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica que a define.

20  
Pontos

4. Considere a função  $f$  definida pela expressão analítica  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .

- (a) Determine o polinómio de Mac-Laurin,  $p_3(x)$ , de grau 3 para  $f(x)$ .
- (b) Use a expressão de  $p_3(x)$  para obter uma aproximação de  $f(1/2)$  e calcule um majorante para o erro cometido ao substituir  $f(1/2)$  pela aproximação obtida.

25  
Pontos

5. Determine a função  $f$  tal que  $f'(x) = \frac{5x-4}{x(x^2-2x+2)}$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

40  
Pontos

6. Calcule os integrais indefinidos seguintes:

(a)  $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$

(b)  $\int x^2 \arctg x dx$

15  
Pontos

7. Calcule  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x)}{x-1}$  sendo  $F$  a função dada por  $F(x) = \int_0^{\ln x} \frac{e^t}{t^2+1} dt$ .

10  
Pontos

8. Mostre que se  $f$  é uma função contínua em  $[a, b]$  e  $G$  é uma primitiva de  $f$ , então  $\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$ .

15  
Pontos

9. Calcule a área da região do plano situada entre  $x = -1$  e  $x = 1$  e limitada pelo eixo das abcissas e pelo gráfico da função  $f$  definida por  $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}$ .