Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I - Segundo semestre — 2ºMini-Teste

Resolução

Justifique todas as respostas e indique os cálculos efectuados.

100 Pontos

1. Considere a função f definida por $f(x) = \ln(1 + x^2)$.

(a) Estude f quanto à existência de extremos locais.

Indicações para a resolução: Observe-se que f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Logo o único candidato a extremante local da função f é o zero de f', isto é, $x = 0$. Como o sinal de f' é o sinal de x (porque $1 + x^2 > 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$), temos que f é estritamente decrescente em $\mathbb{R}^-$ e estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$. Logo $x = 0$ é minimizante local de f e $f(0) = 0$ é mínimo local.

(b) Averigúe se o gráfico de f admite assimptota não vertical à direita.

Indicações para a resolução: Uma vez que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1 + x^2)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1} = 0 = m$$

(a segunda igualdade resulta da aplicação da Regra de Cauchy)
e

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} \ln(1 + x^2) = +\infty$$

podemos concluir que o gráfico de f não admite assimptota não vertical à direita.

(c) Calcule $\int f(x)dx$.

Indicações para a resolução: Usando o método de primitivação por partes podemos concluir que:

$$\int f(x)dx = \int 1{\cdot}\ln(1+x^2) = x\ln(1+x^2) - 2\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = x\ln(1+x^2) - 2\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= x\ln(1 + x^2) - 2x + 2\arctan x + C\ , \quad C \in \mathbb{R}.$$

50 Pontos

2. Considere a função $f(x) = e^x$. Use o Polinómio de Mac-Laurin de ordem 4 para calcular um valor aproximado de $e^{0.1}$ e mostre que o erro cometido nessa aproximação é inferior a $\frac{e^{0.1}}{5!(10)^5}$.

Indicações para a resolução: O polinómio de Mac-Laurin de ordem 4 é

$$p_4(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4.$$

Uma vez que, para todo o $x \in \mathbb{R}$ e todo o $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = e^x$, temos que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 1$.

Logo

$$p_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

e, portanto,

$$e^{0.1} = f(0.1) \sim p_4(0.1) = 1 + 0.1 + \frac{(0.1)^2}{2} + \frac{(0.1)^3}{6} + \frac{(0.1)^4}{24}.$$

O erro cometido nessa aproximação é dado por

$$|R_4(0.1)| = \left| \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(0.1)^5 \right| = \frac{e^{\xi}}{5!}\left(\frac{1}{10}\right)^5$$

para algum ξ entre 0 e 0.1.

Como $\xi < 0.1$ e a função exponencial é estritamente crescente, podemos concluir que $e^{\xi} < e^{0.1}$ e, portanto,

$$|R_4(0.1)| < \frac{e^{0.1}}{5!}\left(\frac{1}{10}\right)^5$$

o que prova que o erro cometido nessa aproximação é inferior a $\frac{e^{0.1}}{5!(10)^5}$.

50 Pontos

3. Calcule o seguinte integral indefinido $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$

Indicações para a resolução: Fazendo a mudança de variável definida por

$$x = 2\operatorname{sen} t = \varphi(t),\ t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

temos que φ é invertível e diferenciável e $\varphi'(t) = 2\cos t$.

Logo

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx = \int \frac{\sqrt{4-4\operatorname{sen}^2 t}}{4\operatorname{sen}^2 t} 2\cos t\, dt = \int \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t}\, dt = \int \operatorname{cotg}^2 t\, dt$$
$$= \int \left(\operatorname{cosec}^2 t - 1\right)\, dt = -\operatorname{cotg} t - t + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Uma vez que $\operatorname{sen} t = \dfrac{x}{2}$, $1 + \operatorname{cotg}^2 t = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 t}$ e $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, temos que

$$\operatorname{cotg} t = \sqrt{\frac{4}{x^2} - 1} = \sqrt{\frac{4-x^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

e, portanto,

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$