Universidade de Aveiro Departamento de Matemática

Classificação

ALGA — Agrupamento IV (ECT, EET, EI)

Teste 1

27 de novembro de 2015 — Duração: **1h45**

Valores

Nome ______________________ N.° Mec. __________

Curso ______________________ N.° Folhas suplementares __________

Questão	1	2	3	4	5	6	7	8	total
Cotação	45	45	20	20	35	06	12	17	200
Classif.									

45 pontos

1. Esta primeira questão é constituída por 5 alíneas de escolha múltipla.

Atribuem-se 9 pontos por cada resposta correta,
0 pontos por cada resposta em branco e
-3 pontos por cada resposta errada.

E \ C	0	1	2	3	4	5
0	00	09	18	27	36	45
1	-03	06	15	24	33	
2	-06	03	12	21		
3	-09	00	09			
4	-12	-03				
5	-15					

(Reservado à cotação)

Cada alínea tem uma só opção correta que deve assinalar com uma $\times$ no ☐ correspondente.

(a) Dados os vetores $X = (1, 2, 3)$ e $Y = (1, 0, 2)$ tem-se

- ☐ $X \times Y = (1, 0, 6)$
- ☐ $X \cdot Y = 9$
- ☐ $X \times Y \cdot X = 0$
- ☐ $X \times Y \cdot Y = (4, 1, -2)$

(b) Dada a matriz A 3×4 com $\text{car}(A) = 3$, a matriz B 3×1 e o sistema $AX = B$ de matriz ampliada $[A|B]$ tem-se

- ☐ $\text{car}([A|B]) = \text{car}(A)$
- ☐ $\text{car}([A|B]) > \text{car}(A)$
- ☐ o sistema é possível e determinado
- ☐ $\text{car}([A|B]) < \text{car}(A)$

(c) Dadas as matrizes A e B ambas $n \times n$ tem-se

- ☐ $(A^T\, B)^T = A\, B^T$
- ☐ $(2AB^{-1})^{-1} = \frac{1}{2}BA^{-1}$
- ☐ $(A^{-1}B)^T = B^T A^{-1}$
- ☐ $2AB^T = 2A^T B$

(d) Dadas as matrizes A e B ambas 3×3 tais que $\det(A) = -2$ e $\det(B) = 3$ tem-se

- ☐ $\det(B^{-1}) = 3$
- ☐ $\det(AB^T) = 6$
- ☐ $\det(2A^{-1}) = -4$
- ☐ $\det(AB^{-1}) = -6$

(e) Dados os vetores $X = (0, 1, 0)$, $Y = (1, 0, 2)$, $Z = (1, 1, 2)$ e o subespaço $S =< X, Y, Z >$ de $\mathbb{R}^3$ tem-se

- ☐ $\{X, Y, Z\}$ é linearmente independente
- ☐ $\{X, Y\}$ não gera S
- ☐ $\{X, Y, Z\}$ é base de S
- ☐ $\{X, Y\}$ é linearmente independente

45
pontos

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e o vetor $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$.

(a) Indicando todas as passagens, calcule $\det(A)$.

(b) Justificando, diga se A é invertível.

(c) Justificando, indique $\mathcal{N}(A)$;

(d) Verifique se $B = (5, 5, 5, 5) \in \mathcal{C}(A)$ e justifique a sua resposta.

Nos exercícios 3, 4 e 5 seguintes considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & k^2-5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ k \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & k^2-4 & k-2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que a matriz C é uma forma escalonada por linhas da matriz $[A|B]$, a matriz E é a forma escalonada por linhas reduzida da matriz D e nas matrizes A, B e C, $k \in \mathbb{R}$ é um parâmetro.

20 pontos

3. Note que a matriz C é uma forma escalonada por linhas da matriz $[A|B]$. Indique os valores de k para os quais

(a) o sistema $AX = B$, com $X \in \mathbb{R}^3$, é possível e determinado:

(b) o plano de equação geral $x + y + (k^2 - 5)z = k$ e a reta de equações cartesianas $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$ são estritamente paralelos:

20 pontos

4. A matriz E é a forma escalonada por linhas reduzida da matriz D.

(a) Para o **espaço das colunas** da matriz D, $\mathcal{C}(D)$,

uma base é e $\dim \mathcal{C}(D) =$

(b) Para o **espaço nulo** da matriz D, $\mathcal{N}(D)$,

uma base é e $\dim \mathcal{N}(D) =$

35 pontos

5. Recorde as matrizes D e E anteriores e responda às seguintes questões.

(a) Indique uma equação da reta que passa no ponto $Q = (1, 0, 1)$ e é ortogonal ao plano $\mathcal{P}$ definido pela equação geral $-3x + 2y + z = 4$:

(b) Considere a reta $\mathcal{R}$ definida pelo sistema de equações cartesianas $\begin{cases} -x + y + z = 2 \\ -2x + y = 2 \end{cases}$. Indique, justificando, qual a posição relativa da reta $\mathcal{R}$ e do plano $\mathcal{P}$?

(c) Calcule $\mathrm{dist}(Q, \mathcal{P})$, a distância do ponto Q ao plano $\mathcal{P}$.

06 pontos

6. Para cada um dos seguintes conjuntos assinale se é, ou não, um subespaço vetorial real de $\mathbb{R}^3$.

   (a) $\{(4y - z, 2y + x, 7y - x) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ $\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$

   (b) $\langle\, (1, -1, 3)\,,\, (-1, 1, -3)\,\rangle$ $\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$

   (c) O plano de equação cartesiana $-6x + 4y + 9z = 0$ $\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$

12 pontos

7. Para cada um dos seguintes conjuntos assinale se

	é lin. ind.,	gera $\mathbb{R}^3$.
(a) $\{(-4, -4, -1), (-3, 4, 1), (4, 0, 0)\}$	$\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$	$\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$
(b) $\{(8, 0, -2), (0, 0, 0), (2, 5, 8)\}$	$\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$	$\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$
(c) $\{(-1, 0, 0), (-1, -7, 0), (-3, 0, -8), (-1, -8, -2)\}$	$\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$	$\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$

17 pontos

8. Usando o método de eliminação de Gauss e indicando todas as passagens, resolva o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y - 2z = 3 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$