

Matemática Discreta

Agrupamentos e Identidades Combinatórias

Universidade de Aveiro 2016/2017

<http://moodle.ua.pt>

Número de arranjos com repetição de n elementos k a k

Número de configurações de k objectos (escolhidos de entre n tipos de objectos) que dependem da ordem e podem conter mais do que um objecto do mesmo tipo.

Notação $\rightarrow A_n^{(k)}$.

Pelo princípio da multiplicação tem-se que $A_n^{(k)} = n^k$ (verificar!).

Exemplo: Supondo que se encontra disponível um número não limitado de bolas vermelhas, azuis e pretas e sabendo que as bolas da mesma cor são indistinguíveis, determine o número de sequências de $k = 5$ bolas que é possível formar.

Resposta: $A_3^{(5)} = 3^5 = 243$.

Arranjos simples (ou sem repetição) de n elementos k a k

Número de configurações de k objectos (escolhidos de entre n tipos de objectos) que dependem da ordem.

Notação $\rightarrow A_{n,k}$.

Usando o princípio da multiplicação generalizada mostra-se que (prove!)

$$A_{n,k} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1).$$

Permutações (simples) de n elementos:

$$P_n = A_{n,n} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$$

Por convenção, $P_0 = 0! = 1$.

Arranjos simples:

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Observação: Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$, o coeficiente factorial $(\alpha)_k$ é definido por

$$(\alpha)_k = \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - k + 1).$$

Consequentemente, $A_{n,k} = (n)_k$.

Exemplos:

Quantas sequências podemos formar com uma bola azul, uma bola vermelha e uma bola preta?

Resposta: $P_3 = 3! = 6$.

De quantas maneiras se podem sentar 5 pessoas em 3 cadeiras distintas (sentando-se uma pessoa em cada cadeira)?

Resposta: $A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

Qual o número de alinhamentos possíveis de 12 escuteiros de tal modo que dois deles (fixos) sejam sempre vizinhos um do outro?

Resposta: $2! \times 11! = 79833600$ (o produto \times vem do princípio da multiplicação).

Combinações simples (ou sem repetição) de n elementos k a k

Número de subconjuntos de k elementos (sem repetição) de um conjunto com n elementos distintos (sem que a ordem pela qual os elementos são enumerados seja considerada)

$$\text{Notação} \rightarrow \binom{n}{k}.$$

Algumas propriedades básicas

$$1. \binom{n}{k} = \frac{A_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

$$2. \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

$$3. \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \cdots + \binom{k-1}{k-1}.$$

Exemplo

Com 20 jogadores de futebol quantas equipas de 11 jogadores é possível formar?

Resposta: $\binom{20}{11} = \frac{20!}{9!11!} = 167960.$

Exercício: Sabendo que num departamento trabalham 4 mulheres e 9 homens, determine:

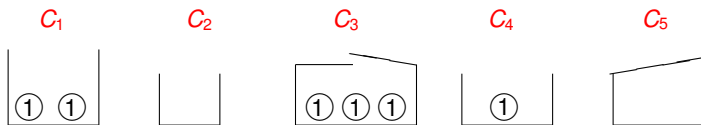
(a) o número de comissões que se podem formar com 2 mulheres e 3 homens;

(b) o número de comissões de 5 elementos com, pelo menos, 2 mulheres e 2 homens.

Combinações com repetição

Num exemplo anterior verificou-se que existe uma bijecção entre os diferentes modos de colocar k bolas iguais em n caixas distintas e as sequências binárias com $n - 1$ zeros e k uns.

Cada maneira de colocar k bolas iguais nas n caixas corresponde a uma das combinações com repetição de n elementos (caixas) k a k . Por exemplo



corresponde ao pseudoconjunto $\{C_1, C_1, C_3, C_3, C_3, C_4\}$.

Consequências

O número de combinações com repetição de n elementos k a k coincide com o número de combinações sem repetição de $n - 1 + k$ (comprimento de uma sequência binária) k a k (número de uns na sequência binária), isto é,

$$\binom{n + k - 1}{k}.$$

Exemplo: Vamos determinar o número de possibilidades de colocação de 20 bolas iguais em 5 caixas distintas, com pelo menos duas bolas em cada caixa.

Resolução

Distribuindo 2 bolas por cada uma das 5 caixas, conclui-se que o número de possibilidades de colocação das restantes 10 bolas nas 5 caixas corresponde ao número de combinações com repetição de 5 caixas 10 a 10.

$$\binom{5 + 10 - 1}{10} = \binom{14}{10} = \frac{14!}{4!10!} = 1001.$$

Permutações com repetição

Exemplo: Quantos números de telefones da rede fixa (portuguesa) podem ser atribuídos com dois **2** (incluindo já o **2** inicial), quatro **3**, dois **6** e um **9**?

nº de telefone: **2** — — — — — — — —

O problema a resolver consiste em determinar o número de sequências com **8** algarismos onde o **2** surge uma vez, o **3** surge quatro vezes, o **6** surge duas vezes e o **9** uma vez. Se se tiver em conta as repetições dos algarismos então cada sequência de **8** algarismos referida atrás corresponde a $P_1 P_4 P_2 P_1 = 1!4!2!1!$ das $P_8 = 8!$ sequências que existiriam se os dígitos fossem todos distintos. Conclui-se, assim, que é possível atribuir $\frac{8!}{1!1!2!4!} = 840$ números de telefone nas condições referidas.

Permutações com repetição

Considere-se um conjunto de n objectos distribuídos por k ($k \leq n$) classes que têm n_1, n_2, \dots, n_k objectos ($\sum_{i=1}^k n_i = n$). Supondo que os objectos pertencentes à mesma classe são indistinguíveis, o número de sequências que se podem formar com esses n objectos é dado pelo **número de permutações com repetição**

$$\text{Notação} \longrightarrow \binom{n}{n_1, \dots, n_k}.$$

Estes números designam-se por **números multinomiais**.

Permutações com repetição

Exemplo

Vamos mostrar que o número de possibilidades de partir um conjunto A de cardinalidade n em k subconjuntos, A_1, \dots, A_k , de cardinalidade n_1, \dots, n_k ($n_1 + \dots + n_k = n$),

respectivamente, é igual a
$$\binom{n}{n_1, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

Resolução: Começamos pela escolha dos elementos de A_1 , para os quais existem $\binom{n}{n_1}$ possibilidades. Depois escolhemos os elementos de A_2 , de entre os $n - n_1$ elementos de A que restam, para os quais existem $\binom{n - n_1}{n_2}$ possibilidades, etc. Como consequência, o número pretendido é

$$\binom{n}{n_1, \dots, n_k} = \binom{n}{n_1} \binom{n - n_1}{n_2} \dots \binom{n - n_1 - \dots - n_{k-1}}{n_k}.$$

Binómio de Newton

$$\begin{aligned}
 (1+x)^n &= \overbrace{(1+x)(1+x) \dots (1+x)}^{n \text{ factores}} \\
 &= \overbrace{1 \dots 1}^{n \text{ factores}} + x \overbrace{1 \dots 1}^{n-1 \text{ factores}} + 1x \overbrace{1 \dots 1}^{n-2 \text{ factores}} + \dots + \overbrace{x \dots x}^{n-1 \text{ factores}} 1 + \overbrace{x \dots x}^n \\
 &= 1 + nx + \dots + \binom{n}{k} x^k + \dots + nx^{n-1} + x^n
 \end{aligned}$$

que é um polinómio em x de grau n . Note-se que o número de parcelas da forma $x^k 1^{n-k}$ ($k \in \{0, 1, \dots, n\}$) é igual ao número de possibilidades de escolher x em k dos n factores e este número é $\binom{n}{k}$.

- Consequentemente, $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$.

Fórmula do binômio de Newton ou fórmula binomial de Newton

- Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, então

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

- Como consequência, $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$.

Exercício

Mostre que o número de subconjuntos de um conjunto com n elementos é dado por 2^n .

Exercício

Mostre que $n, k \in \mathbb{N}$, com $1 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Método recursivo para a determinação de números binomiais

Tendo em conta que para $n, k \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{n+k} = 0, \quad \text{e} \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,$$

convencionando que $\binom{0}{0} = 1$, então a igualdade

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

estabelece um método recursivo para a determinação dos números binomiais.

para $n > 2$ e $0 < k < n$ fazer: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Triângulo de Pascal

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

- Note-se que a n -ésima linha do triângulo de Pascal, contém os coeficientes do desenvolvimento de $(a + b)^n$.
- Para $n = 3$, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Fórmula multinomial

Teorema (fórmula multinomial)

Se $a_1, a_2, \dots, a_r \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, então

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_r)^n = \sum_{t_1 + \dots + t_r = n} \binom{n}{t_1, \dots, t_r} a_1^{t_1} \cdots a_r^{t_r}$$

onde $t_1, t_2, \dots, t_r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

- Com efeito, desenvolvendo o produto de n factores

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_r)(a_1 + a_2 + \dots + a_r) \dots (a_1 + a_2 + \dots + a_r)$$

obtêm-se termos da forma $a_1^{t_1} \cdots a_r^{t_r}$, com $t_1 + \dots + t_r = n$, que correspondem à escolha de a_1 em t_1 dos factores, a_2 em t_2 dos restantes factores, etc. Logo, existem $\binom{n}{t_1, \dots, t_r}$ termos da forma $a_1^{t_1} \cdots a_r^{t_r}$.

Identidades combinatórias diversas

Exemplo

Vamos mostrar que para cada inteiro positivo n se verifica a igualdade

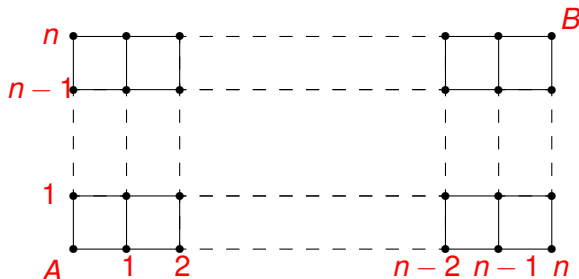
$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Considerando a grelha $n \times n$, sabemos que existem

$$\binom{n+n}{n}$$

caminhos mais curtos entre A e B .

Identidades combinatórias diversas (cont.)



Podemos partir o conjunto de todos os caminhos mais curtos entre A e B nos $n+1$ subconjuntos disjuntos

$\mathcal{A}_0, \dots, \mathcal{A}_k, \dots, \mathcal{A}_n$, onde \mathcal{A}_k (para $k \in \{0, 1, \dots, n\}$) é o conjunto de todos caminhos mais curtos entre A e B que passam no ponto $(k, n-k)$.

Identidades combinatórias diversas (cont.)

Por aplicação do princípio da adição,

$$|\mathcal{A}_0| + \cdots + |\mathcal{A}_k| + \cdots + |\mathcal{A}_n| = \binom{2n}{n}.$$

Basta provar a igualdade $|\mathcal{A}_k| = \binom{n}{k}^2$.

Esta igualdade é consequência do facto de cada caminho de \mathcal{A}_k ser a concatenação de um caminho mais curto entre A e $(k, n-k)$ na grelha $k \times (n-k)$, cujo número é

$$\binom{n-k+k}{k}$$

com um caminho mais curto entre $(k, n-k)$ e B na grelha $(n-k) \times k$, cujo número é

$$\binom{k+n-k}{n-k}.$$

Identidades combinatórias diversas (cont.)

Exemplo

Vamos mostrar a igualdade

$$\binom{n}{t_1, t_2, \dots, t_r} = \sum_{i=1}^r \binom{n-1}{t_1, \dots, t_i-1, \dots, t_r},$$

que é uma generalização da igualdade $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, uma vez que $\binom{n}{k} = \binom{n}{k, n-k}$.

A parte esquerda da igualdade é o número multinomial que corresponde ao número de possibilidades de partir o conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ (partições ordenadas) nos subconjuntos A_1, \dots, A_r , com cardinalidade t_1, \dots, t_r , respectivamente.

Identidades combinatórias diversas (cont.)

Podemos dividir estas partições nos seguinte r tipos de partições distintas:

- (1) aquelas em que $n \in A_1$, cuja cardinalidade corresponde ao número de partições de $n - 1$ elementos em r subconjuntos, com cardinalidades $t_1 - 1, t_2, \dots, t_r$, respectivamente;
- (2) aquelas em que $n \in A_2$, cuja cardinalidade corresponde ao número de partições de $n - 1$ elementos em r subconjuntos, com cardinalidades $t_1, t_2 - 1, \dots, t_r$, respectivamente;
- (\cdot) etc;
- (r) aquelas em que $n \in A_r$, cuja cardinalidade corresponde ao número de partições de $n - 1$ elementos em r subconjuntos, com cardinalidades $t_1, t_2, \dots, t_r - 1$, respectivamente.

Identidades combinatórias diversas (cont.)

Logo, para $i = 1, \dots, r$, o número de partições do tipo i é igual a

$$\binom{n-1}{t_1, \dots, t_i-1, \dots, t_r}$$

e, aplicando o princípio da adição, obtém-s a identidade pretendida.