# Cálculo 2, 2016-2017

M. Manuela Rodrigues

Departmento de Matemática, Universidade de Aveiro

## Regra da Cadeia

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e suponhamos que parte do domínio $D$ é descrito pelo sistema de equações paramétricas

$$\begin{cases} x_1 = g_1(t) \\ \quad \cdots \\ x_n = g_n(t) \end{cases},$$

$t \in I \subset \mathbb{R}$ ou, o que é equivalente, pela equação vetorial a:

$$P := (x_1, \ldots, x_n) = (g_1(t), \ldots, g_n(t)) =: \overrightarrow{g}(t),\ t \in I,$$

de modo que faz sentido considerar a composição:

$$(f \circ \overrightarrow{g})(t) := f(g_1(t), \ldots, g_n(t)).$$

Sejam $t_0 \in int\ I$ e $P_0 := \overrightarrow{g}(t_0) \in intD$.

### Regra da cadeia

Se $g_1, \ldots, g_n$ forem diferenciáveis em $t_0$ e se $f$ for diferenciável em $P_0$ então $f \circ g$ é diferenciável em $t_0$ e

$$\frac{d(f \circ \overrightarrow{g})}{dt}(t_0) = \nabla f(P_0) \cdot \left( \frac{dg_1}{dt}(t_0), \ldots, \frac{dg_n}{dt}(t_0) \right).$$

# Gradientes e direção e sentido de crescimento mais rápido

Vamos agora tirar partido da caracterização das derivadas direcionais através do gradiente (no caso das **funções diferenciáveis**) para obtermos alguma informação sobre o comportamento local de uma função real de várias variáveis, pelo menos nos casos de $n = 2$ e de $n = 3$:

Dado um ponto $P_0 \in intD$ onde uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ seja diferenciável e dado um vetor unitário $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n$,

$$f'_{\overrightarrow{a}}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \overrightarrow{a} = \|\nabla f(P_0)\| \cos \theta,$$

- $\theta$ é o chamado ângulo entre $\nabla f(P_0)$ e $\overrightarrow{a}$ (mesmo no caso de $n$ superior a 3);
- $f'_{\overrightarrow{a}}(P_0)$ é, a menos de sinal, a norma da chamada projeção ortogonal do gradiente sobre $\overrightarrow{a}$;
- $f'_{\overrightarrow{a}}(P_0)$ tem o maior valor possível quando $\cos \theta = 1$, isto é, quando $\overrightarrow{a}$ tem a mesma direcção e sentido do vetor gradiente.

Por outras palavras, em cada ponto de diferenciabilidade da função, a taxa de variação é máxima na direção e sentido do vetor gradiente, sendo $\|\nabla f(P_0)\|$ o seu valor.

Para uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, o conjunto de nível associado a $c$ é dado por

$$N(c) := \{(x_1, \ldots, x_n) \in D : f(x_1, \ldots, x_n) = c\},$$

para $c$ constante real.

- $n = 2$ os conjuntos de nível são designados por curvas de nível;
- $n = 3$ os conjuntos de nível são designados por superfícies de nível.

Se considerarmos uma curva em $\mathbb{R}^n$ de equação vetorial

$$P := (x_1, \ldots, x_n) = (g_1(t), \ldots, g_n(t)) =: \overrightarrow{g}(t),\ t \in I,$$

$I$ é um intervalo aberto de números reais e $g_1(t), \ldots, g_n(t)$ são funções diferenciáveis, então, no caso de esta curva estar contida no conjunto de nível $N(c)$ de $f$, vem

$$f(\overrightarrow{g}(t)) = c,\ \forall t \in I,$$

de onde sai, com a ajuda da regra da cadeia, e supondo ainda que a curva é constituída apenas por pontos de diferenciabilidade de $f$, que

$$\nabla f(\overrightarrow{g}(t)) \cdot \frac{d\overrightarrow{g}}{dt}(t) = (f \circ \overrightarrow{g}(t))'(t) = 0,\ \forall t \in I,$$

isto é, o gradiente de $f$ em cada ponto $P = \overrightarrow{g}(t)$ da curva é perpendicular ao vetor $\frac{d\overrightarrow{g}}{dt}(t)$, supostos os vetores não nulos.

# Plano tangente à superfície de nível

**Observação: No caso de $n = 3$ teremos, para cada ponto da superfície de nível que seja ponto de diferenciabilidade de $f$, que o gradiente da função é perpendicular aos vetores tangentes**.

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $N(c) := \{x \in D : f(x) = c\}$ uma superfície de nível de $f$, para um dado $c \in \mathbb{R}$. Seja $P_0 \in N(c)$ um ponto de diferenciabilidade de $f$. Se $\nabla f(P_0) \neq 0$ , define-se o plano tangente a $N(c)$ em $P_0$ pela equação

$$\nabla f(P_0) \cdot (P - P_0) = 0.$$

- $\nabla f(P_0)$ é perpendicular ou ortogonal à superfície de nível em $P_0$
- No caso $n = 2$ a definição correspondente à dada acima é a de reta tangente a curva de nível, a qual se pode provar que engloba como caso particular a definição de reta tangente a gráfico de função (de uma variável).

Atenção:

- Dada uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e um ponto $(x_0, y_0) \in intD$ onde $f$ seja diferenciável e onde o gradiente de $f$ não seja nulo,

$$\nabla f(x_0, y_0) := (f'_x(x_0, y_0), f'y(x_0, y_0))$$

**não é** ortogonal ao gráfico de $f$ em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Qual é o tal vetor?

- A que é que $\nabla f(x_0, y_0) := (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0))$ é ortogonal? . . . É à curva de nível $f(x_0, y_0)$ de $f$.

- Analogamente, dada uma função $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e um ponto $(x_0, y_0, z_0) \in intD$ onde $f$ seja diferenciável e onde o gradiente de $f$ não seja nulo,

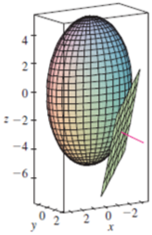
$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) := (f'_x(x_0, y_0, z_0), f'y(x_0, y_0, z_0), f'z(x_0, y_0, z_0))$$

**não é** ortogonal ao gráfico de $f$ em $(x_0, y_0, z_0, f(x_0, y_0, z_0))$, mas sim ortogonal à superfície de nível $f(x_0, y_0, z_0)$ de $f$.

1. Seja $z = x^2 + 2y^2, \quad x = \sin(t), \quad y = \cos(t)$. Usando a regra da cadeia para $z = f(x, y)$, calcule $\dfrac{dz}{dt}$.
2. (a) Se $f(x, y) = xe^y$, determine a taxa de variação de $f$ no ponto $P = (2, 0)$ na direção de $P$ a $Q = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$.
   (b) Em que direção $f$ tem a máxima taxa de variação? Qual é a máxima taxa de variação?
3. Determine as equações do plano tangente e da reta normal no ponto $(-2, 1, -3)$ ao elipsóide

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3.$$

Note que: O elipsóide é a superfície de nível (com $c = 3$) da função $F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9}$.



Pretende-se determinar os extremos absolutos de $f(x,y) := x^2 + y^2 - x - y + 1$ em $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ (Ver secção 1.2 - parte 3)

- Começamos por parametrizar a curva de nível $g(x,y) = c$, i.e., descrevê-la vetorialmente por $\overrightarrow{r}(t) := (r_1(t), r_2(t))$ para $t$ num intervalo conveniente, e considerar a questão do cálculo dos extremos de $f \circ \overrightarrow{r}$.
- Esta maneira de proceder tem, no entanto, o inconveniente de se ter de encontrar uma parametrização explícita para a curva de nível, algo que poderá não ser simples de fazer em exercícios mais complicados.

Uma maneira alternativa de proceder seria a seguinte:

- Supondo $g$ diferenciável, o gradiente $\nabla g(x_0, y_0)$, suposto não nulo, é perpendicular aos vetores tangentes à curva em $(x_0, y_0) = \overrightarrow{r}(t0)$;
- no caso de $f$ e $\overrightarrow{r}$ também serem diferenciáveis e de $t_0$ ser um extremante de $f \circ \overrightarrow{r}$ interior ao domínio desta função,
$$0 = (f \circ \overrightarrow{r})'(t_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \overrightarrow{r}'(t_0);$$
- $\nabla f(x_0, y_0)$, suposto não nulo, também é perpendicular aos vetores tangentes à curva em $(x_0, y_0)$, logo $\nabla f(x_0, y_0)$ e $\nabla g(x_0, y_0)$ são linearmente dependentes e portanto $(x_0, y_0)$ terá de ser solução de
$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y),$$
$\lambda \in \mathbb{R}$.
- Observe-se ainda que a relação anterior apanha também os casos em que $\nabla f(x,y)$ é nulo desde que se garanta que $\nabla g(x,y) \neq \overrightarrow{0}$.

## Método dos multiplicadores de Lagrange (caso de uma restrição apenas)

Sejam $U$ um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f$ e $g$ funções continuamente diferenciáveis (i.e., com derivadas parciais contínuas) em $U$.
Seja $S := \{P \in U : g(P) = c\}$, para uma constante real $c$ dada. Se $f|_S$ tem um extremo local num ponto $P_0 \in S$ para o qual $\nabla g(P_0) \neq \overrightarrow{0}$ então existe $\lambda \in \mathbb{R}$, dito um multiplicador de Lagrange, tal que

$$\nabla f(P_0) = \lambda \nabla g(P_0).$$

**Exemplo** (voltamos ao passo 3 do exemplo da parte 3 da secção 1.2):

Para as funções continuamente diferenciáveis $f(x, y) := x^2 + y^2 - x - y + 1$ e $g(x, y) := x^2 + y^2$,

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2(1-\lambda)} \\ y = \frac{1}{2(1-\lambda)} \end{cases} .$$

Substituindo estes valores na condição $g(x, y) = 1$ imposta, e resolvendo em ordem a $\lambda$, obtém-se $\lambda = 1 \pm 1/\sqrt{2}$. Substituindo, por sua vez acima, obtêm-se as soluções:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ e } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

# Método dos multiplicadores de Lagrange (caso de uma restrição apenas)

**Observação:**

- A proposição anterior só permite descobrir os chamados pontos críticos para o problema de extremos condicionados.
- No entanto, num exemplo como o anterior, em que $f|_S$ é contínua e $S$ é um conjunto limitado e fechado de $\mathbb{R}^n$, o Teorema de Weierstrass garante que existem o máximo e o mínimo absolutos, logo podemos encontrá-los por comparação entre os valores da função $f|_S$ nos pontos críticos encontrados.

No exemplo anterior isso levar-nos-ia facilmente à conclusão de que o máximo e o mínimo absolutos de $f|_S$, onde $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, são, respetivamente, $2 + \sqrt{2}$ e $2 - 2\sqrt{2}$, atingidos, respetivamente, em $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (cf. também com a figura feita no final do exemplo da parte 3 da secção 1.2).

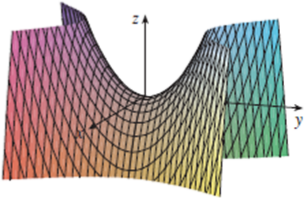
## O caso de mais do que uma restrição

- uma das possibilidades por vezes é escrever uma variável em função das outras, de modo a conseguir-se reduzir o problema a um com apenas uma restrição do tipo "igualdade".
- Em alternativa, ou no caso de mais do que duas restrições do tipo "igualdade" . . ..

## Pontos de sela e matriz hessiana

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável em $P_0 \in intD$. Se $P_0$ for um ponto crítico de $f$ mas não for um seu extremante, diz-se que é um ponto de sela de $f$.

Por exemplo, $(0, 0)$ é um ponto de sela da função $f(x, y) := y^2 - x^2$.
(O gráfico de $f$ é o parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$)




- Caso numa direção a restrição (função restrita) tenha um mínimo estrito no ponto em causa e numa outra direção tenha um máximo estrito no mesmo ponto, então o ponto em causa é de **sela** (assumindo que é um ponto de diferenciabilidade da função).
- E o estudo do comportamento da função restrita a uma certa direção pode fazer-se estudando o comportamento de correspondentes derivadas direcionais.

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável numa bola aberta centrada em $P_0 \in intD$ e suponhamos que $\nabla f(P_0) = \overrightarrow{0}$. Seja $\overrightarrow{a} := (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|\overrightarrow{a}\| = 1$.

## Pontos de sela e matriz hessiana

- A derivada direcional $f'_{\overrightarrow{a}}(P_0)$ de $f$ segundo $\overrightarrow{a}$ em $P_0$ se pode escrever como $g'(0)$, onde $g$ é a função real de variável real definida, numa vizinhança de 0, por $g(t) := f(P_0 + t\overrightarrow{a})$.
- Verificando-se que $\nabla f(P_0) = \overrightarrow{0}$, então sabemos que $g'(0) = 0$.
- Do cálculo com funções reais de uma variável real sabe-se que o sinal de $g''(0)$ permitirá (desde que $g''(0)$ exista e seja diferente de zero) dizer se 0 é um maximizante local ou um minimizante local de $g$, ou seja, se $P_0$ é um maximizante local ou um minimizante local de $f$ quando restrito ao segmento de equação $P := (x_1, \ldots, x_n) = P_0 + t\overrightarrow{a}$.

Aplicando a regra da cadeia, primeiro a $t \mapsto f(P_0 + t\overrightarrow{a})$ e depois (assumindo hipóteses adequadas) a cada uma das funções $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(P_0 + t\overrightarrow{a}),\ j = 1, \ldots, n$, tem-se, para $t$ numa vizinhança de 0,

$$g'(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(P_0 + t\overrightarrow{a})a_j, \quad g''(t) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}(P_0 + t\overrightarrow{a})a_i a_j,$$

logo

$$g''(0) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}(P_0)a_i a_j = \overrightarrow{a}\, Hf(P_0)\overrightarrow{a}^{\,T},$$

onde

$$Hf(P_0) := \left[\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}(P_0)\right]_{i,j=1}^{n}$$

se diz a (matriz) hessiana de $f$ em $P_0$.

## Pontos de sela e matriz hessiana

Se escolhermos para $\vec{a}$ um vetor próprio unitário de $Hf(P_0)$, o sinal de $g''(0)$ será dado pelo sinal do valor próprio $\lambda$ que lhe estiver associado, pois

$$g''(0) = \vec{a}\, Hf(P_0)\, \vec{a}^{\,T} = \vec{a}(\lambda \vec{a}^{\,T}) = \lambda \|\vec{a}\|^2 = \lambda.$$

- $\lambda > 0$ conclui-se que $f(P_0)$ é um mínimo local de $f$ quando restrita ao segmento de equação $P = P_0 + t\vec{a}$, podendo-se mesmo dizer que caso $g''$ seja contínua em 0 se trata mesmo de um mínimo local estrito daquela restrição de $f$, ou seja, que $f(P_0) < f(P)$ para qualquer $P = P_0 + t\vec{a}$ com $t \neq 0$ numa certa vizinhança de 0.
- No caso de $\lambda < 0$ obtém-se, por sua vez, em condições análogas, que $f(P_0)$ é um máximo local estrito de $f$ quando restrita ao correspondente segmento de equação $P = P_0 + t\vec{a}$.
- Em conclusão, nas condições explicitadas, se $Hf(P_0)$ admitir um valor próprio positivo e um outro negativo, então $P_0$ é um ponto de sela de $f$.
- Vemos, assim, que o estudo dos vetores e valores próprios da matriz hessiana de $f$ é muito importante pelo menos para a deteção de pontos de sela da função.

As entradas da matriz hessiana são derivadas parciais ditas de segunda ordem da função $f$ e que, exemplificando para funções $f(x, y)$ de duas variáveis, se denotam da seguinte maneira:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x};\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y};\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} := \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x};\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} := \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$$

(ou, respetivamente, por $f'_{x^2}$, $f'_{y^2}$, $f'_{xy}$, $f'_{yx}$).

# Derivadas de segunda ordem

## Critério para a igualdade das derivadas mistas:

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $P_0 \in intD$. Sejam $x$ e $y$ duas das variáveis da função $f$. Se as derivadas parciais $f'_x$, $f'_y$ e $f'_{xy}$ existem e são finitas numa bola aberta centrada em $P_0$ e se $f'_{xy}$ é contínua em $P_0$, então $f'_{yx}(P_0)$ existe e $f'_{xy}(P_0) = f'_{yx}(P_0)$.

## Teste dos menores principais:

Os menores principais de uma matriz $[a_{ij}]_{i,j=1}^n$ são os determinantes das submatrizes $[a_{ij}]_{i,j=1}^k$, para $k = 1, \ldots, n$.

## Teste dos menores principais da hessiana

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $P_0 \in intD$. Se $\nabla f(P_0) = \overrightarrow{0}$ , se as derivadas parciais de 2ª ordem de $f$ existirem e forem contínuas numa bola aberta centrada em $P_0$ e se o determinante $detHf(P_0)$, dito hessiano de $f$ em $P_0$, não for nulo então

- se todos os menores principais de $Hf(P_0)$ forem positivos, $f(P_0)$ é um mínimo local estrito de $f$;
- se os menores principais de $Hf(P_0)$ forem alternadamente negativos e positivos, começando o primeiro por ser negativo, $f(P_0)$ é um máximo local estrito de $f$;
- se nenhuma das duas situações anteriores ocorrer, $P_0$ é ponto de sela de $f$.

## Derivadas de segunda ordem

**Exercício:**

Classifica os pontos críticos da função $f(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 + xy, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

**Teste das derivadas de 2ª ordem para funções de duas variáveis**

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in intD$. Se $\nabla f(x_0, y_0) = \overrightarrow{0}$ e se as derivadas parciais de 2ª ordem de $f$ existirem e forem contínuas numa bola aberta centrada em $P_0$, então

- se $detHf(P_0) > 0$ e $f''_{xx}(P_0) > 0$, $f(P_0)$ é um mínimo local estrito de $f$;
- se $detHf(P_0) > 0$ e $f''_{xx}(P_0) < 0$, $f(P_0)$ é um máximo local estrito de $f$;
- se $detHf(P_0) < 0$, $P_0$ é ponto de sela de $f$.

**Exercício:**

Classifica os pontos críticos da função $f(x, y) := x^3 - 3x^2 + y^2, \ (x, y) \in \mathbb{R}^2$.