Matemática Discreta

Funções

Universidade de Aveiro 2016/2017

http://moodle.ua.pt

Função, conjunto de partida e conjunto de chegada

Definição (de função)

Sejam A e B dois conjuntos e $f \subseteq A \times B$ uma relação entre A e B. Se, para todo $x \in A$ existe um e um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$, diz-se que f é uma função definida em A e imagem em B. Nestas condições A designa-se conjunto de partida e B conjunto de chegada.

- Usualmente escreve-se: $f(x) = y$, em vez de $(x, y) \in f$.
- Também se escreve $f : A \to B$ ou

$$\begin{array}{rcl} f : A & \to & B \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

para significar que f é uma função definida em A e com imagem em B.

Exemplo

Exemplo: De entre as relações binárias entre $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$ a seguir indicadas, vamos determinar as que são funções.

1) $f = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}$.
2) $g = \{(1, a), (2, c), (3, d), (2, b)\}$.
3) $h = \{(1, a), (2, b)\}$.

Funções injectivas, sobrejectivas e bijectivas

Uma função $f : A \to B$ diz-se

injectiva se

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y, \quad \text{quaisquer que sejam } x, y \in A;$$

sobrejectiva se

$$\text{para todo } y \in B \text{ existe } x \in A \text{ tal que } f(x) = y;$$

bijectiva se é injectiva e sobrejectiva.

Exemplos

Vamos classificar as funções a seguir indicadas quanto à injectividade e sobrejectividade.

1) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array}$

2) $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \cup \{0\} \\ n & \mapsto & n^2 \end{array}$

3) $h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$

4) $i: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definido por $i(n) = \begin{cases} 2n+1 & se \quad n \geq 0 \\ -2n & se \quad n < 0 \end{cases}$

Funções iguais

Definição (de igualdade de funções)

Duas funções f e g dizem-se iguais (e escreve-se $f = g$) se

1) dom(f) =dom$(g) = D$;
2) $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D$.

Exercício

De entre as funções a seguir indicadas, quais as que são iguais?

1) $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1, \quad x \in \mathbb{Z}$;
2) $g(x) = x^3 + x^2 - x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$;
3) $h(x) = (x^2 - 1)(x + 1), \quad x \in \mathbb{R}$.

Imagem e imagem recíproca

Definição (de imagem e imagem recíproca)

Considere a função $f : A \to B$ e os subconjuntos $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$.

- Designa-se imagem de X por f, o conjunto

$$f(X) = \{b \in B : f(x) = b, \text{ para algum } x \in X\}.$$

  Por sua vez, $\text{img}(f) = f(A)$.

- Designa-se imagem recíproca de Y por f, o conjunto

$$f^{-1}(Y) = \{a \in A : f(a) \in Y\}.$$

Nota: quando $Y = \{y\}$, escreve-se $f^{-1}(y)$ em vez de $f^{-1}(\{y\})$.

Imagem e imagem recíproca

Exercício

Considerando a função

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \cup \{0\} \\ & n & \mapsto & n^2 \end{array}$$

e os conjuntos $X_1 = \{-4, -3, -2, -1\}$ e $X_2 = \{1, 2, 3, 4\}$, determine:

1) $g(X_1)$;
2) $g(X_2)$;
3) $g^{-1}(X_2)$.

Sequências

Definição (de sequência finita)

Uma sequência finita de um conjunto A é uma função

$$\begin{array}{rccc} a: & [k] & \to & A \\ & n & \mapsto & a(n) \end{array}$$

onde $[k] = \{1, 2, \ldots, k\}$. Neste caso, a diz-se uma sequência de comprimento k.

Notação:

- Escrevemos a_n em vez de $a(n)$;
- Uma sequência a de k elementos de um conjunto A denota-se por

$$a = (a_1, \ldots, a_k), \quad a_i \in A, \quad i = 1, \ldots, k$$

Exemplo

- Considerando a função

$$\begin{array}{rccc} a: & [3] & \to & \mathbb{N} \\ & n & \mapsto & 2n \end{array}$$

podemos denota-la por $a = (2, 4, 6)$.

- Deve observar-se que se trata de uma sequência de comprimento 3.

Sucessão

Definição (de sucessão)

Uma sucessão de elementos de um conjunto A é uma sequência com uma infinidade de elementos do conjunto A (que se designam por termos), ou seja, é uma função

$$a : \mathbb{N} \to A.$$

Notação: a sucessão $(a_1, a_2, \dots)$ denota-se por $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemplo: $(2n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a sucessão $(2, 4, 6, 8, \dots)$.

A composição de funções é um caso particular da composição de relações

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$, então

$$\begin{array}{rccl} g\circ f : & A & \to & C \\ & x & \mapsto & g\circ f(x) = g(f(x)) \end{array}$$

Exemplo: considerando as funções

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x+1 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccl} g : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 3x \end{array}$$

vamos determinar as funções $g\circ f$ e $f\circ g$.

Mais geralmente

Dada a família de funções $f_i : A_i \to A_{i+1}$, $i = 1, \ldots, p$, define-se a função composta

$$\begin{array}{rccc} f_p \circ f_{p-1} \circ \cdots \circ f_1 : & A_1 & \to & A_{p+1} \\ & x & \mapsto & f_p(f_{p-1}(\ldots(f_1(x)))) \end{array}$$

Exemplo: considerando a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} 3n+1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \frac{n}{2} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

escolhendo $n_1 \in \mathbb{N}$, podemos definir sequência

$$n_{k+1} = f(n_k), k = 1, 2, \ldots$$

ou seja, $n_{k+1} = f^k(n_1), k = 1, 2, \ldots$. Assim, n_{k+1} é a imagem de n_1 pela composição k vezes da função f com ela própria.

O problema de Collatz

Relativamente à função f anteriormente definida, compondo f com ela própria, obtêm-se sucessivamente os valores:

$$\begin{array}{llllll} f(1)=4, & f(4)=2, & f(2)=1. & & & \\ f(2)=1. & & & & & \\ f(3)=10, & f(10)=5, & f(5)=16, & f(16)=8, & f(8)=4, & f(4)=2. \\ f(4)=2. & & & & & \\ f(5)=16, & f(16)=8, & f(8)=4. & & & \\ f(6)=3. & & & & & \\ \vdots & & & & & \end{array}$$

Note-se que a partir do momento que se obtém 1, a sequência passa a ser $1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \ldots$. Aparentemente, qualquer que seja o número inicial, a sequência obtida passa por 1.

Conjectura de Collatz. $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists k \in \mathbb{N} : \ f^k(n) = 1$.

Restrições e extensões de funções

Definição

Dada uma função $f : A \to B$ e $X \subseteq A$, designa-se por restrição de f a X (e escreve-se $f|_X$), a função $f|_X : X \to B$ definida por $f|_X(x) = f(x)$, para todo $x \in X$.
Por sua vez, diz-se que f é uma extensão de $f|_X$ a A.

Exemplo: considerando a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(n) = n^2$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $X = \{1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{N}$. A restrição de f a X é a função $f|_X = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$.

Função identidade e função inversa

Definição (de função identidade)

A função

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{id}: & A & \to & A \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

designa-se por função identidade sobre A.

Nota: a função identidade é uma bijecção (a notação id_A é utilizada para indicar que se trata da função identidade definida em A).

Função invertível

Definição (de função invertível)

Uma função $f : A \to B$ diz-se invertível se existe uma função $g : B \to A$ tal que

$$g \circ f = id_A \quad \text{e} \quad f \circ g = id_B.$$

A função g designa-se por função inversa de f e denota-se f^{-1}.

Nota: observe-se que se f é invertível, então f^{-1} também é e $(f^{-1})^{-1} = f$.

Teorema

Uma função é invertível se e só se é uma bijecção.

Exemplo

Vamos determinar, caso existam, as inversas das seguintes funções:

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$;

2) $g : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, tal que $g(x) = e^x$;

3) $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, tal que $h(n) = \begin{cases} 2n+1 & \text{para} \quad n \geq 0 \\ -2n & \text{para} \quad n < 0 \end{cases}$.