

Matemática Discreta

Funções Geradoras 1

Universidade de Aveiro 2016/2017

<http://elearning.ua.pt>

Funções Geradoras

Séries formais de potências

Funções geradoras ordinária e exponencial

Exemplos

Contagem com recurso a produtos formais

Exemplo

A determinação do número de escolhas de 4 letras de um conjunto que contém três letras **A**, duas letras **B**, uma letra **C** e quatro letras **D**, pode ser feita recorrendo ao produto

$$(1 + A + A^2 + A^3)(1 + B + B^2)(1 + C)(1 + D + D^2 + D^3 + D^4).$$

• Com efeito, o número de escolhas a considerar é dado pelo número de termos (da expansão do produto anterior) da forma $(A^i B^j C^k D^l)$, onde $i, j, k, l \in \mathbb{N}_0$ são tais que $i + j + k + l = 4$ e

- $i (\leq 3) \rightarrow$ n.º de letras **A** escolhidas,
- $j (\leq 2) \rightarrow$ n.º de letras **B** escolhidas,
- $k (\leq 1) \rightarrow$ n.º de letras **C** escolhidas,
- $l (\leq 4) \rightarrow$ n.º de letras **D** escolhidas.

Contagem com recurso a produtos formais (cont.)

- Por exemplo, AB^2D corresponde a escolher uma letra A , duas letras B e uma letra D .
- Substituindo A, B, C e D por x obtém-se o desenvolvimento

$$\begin{aligned}
 & (1 + x + x^2 + x^3)(1 + x + x^2)(1 + x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) \\
 &= 1 + 4x + 9x^2 + 15x^3 + 20x^4 + 22x^5 + 20x^6 + 15x^7 \\
 & \quad + 9x^8 + 4x^9 + x^{10} = \sum_{k=0}^{10} c_k x^k,
 \end{aligned}$$

onde o coeficiente c_k ($0 \leq k \leq 10$) corresponde ao número de escolhas possíveis de k letras.

- Note-se que o coeficiente de x^2 é 9 o que significa que existem 9 possibilidades de escolha de duas letras (de um conjunto com 3 letras A , 2 letras B , 1 letra C e 4 letras D), ou seja, $\{A, A\}$, $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{A, D\}$, $\{B, B\}$, $\{B, C\}$, $\{B, D\}$, $\{C, D\}$ e $\{D, D\}$. O número de possibilidade de escolha de 4 letras é dado pelo coeficiente de x^4 .

Séries formais de potências

Definição (de série formal de potências)

Seja a_0, a_1, a_2, \dots uma sucessão de números e x uma variável formal. Então

$$\mathcal{A}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

designa-se por **série formal de potências** de x com coeficientes a_0, a_1, a_2, \dots

Exemplos

Seguem-se algumas das séries (formais) de potências de entre as as mais conhecidas:

1. $1 + x + x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x};$

2. $1 + nx + \frac{n(n+1)}{2}x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^n};$

3. $1 + \alpha x + \frac{(\alpha)_2}{2}x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!} x^k = (1+x)^\alpha$, onde o coeficiente factorial $(\alpha)_k$ corresponde à sua forma mais geral com $\alpha \in \mathbb{R}$;

4. $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$

Raio de convergência

- Dada uma série formal de potências $\mathcal{A}(x)$, se o seu raio de convergência $r_{\mathcal{A}}$ é positivo então $\mathcal{A}(x)$ converge para todo o x tal que $|x| < r_{\mathcal{A}}$.
- Consequentemente, para tais valores de x (que garantem convergência), $\mathcal{A}(x)$ pode ser considerada como uma função de variável real (ou complexa) e todas as operações sobre séries de potências e sobre funções são válidas para $\mathcal{A}(x)$.

Exemplo

- Sejam \mathcal{A} , \mathcal{B} e \mathcal{C} as séries formais de potências associadas às sucessões

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ e $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$
 dadas, respectivamente, por $a_n = n!$, $b_n = 2^n$ e $c_n = \frac{1}{n!}$.

- $r_{\mathcal{A}} = 0 \Rightarrow \mathcal{A}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} k! x^k$ tem significado apenas para $x = 0$.

- $r_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathcal{B}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k = \frac{1}{1-2x}$ é uma função para $|x| < \frac{1}{2}$.

- $r_{\mathcal{C}} = \infty \Rightarrow \mathcal{C}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$ é uma função para todo o $x \in \mathbb{R}$ (ou $x \in \mathbb{C}$).

Operações sobre séries formais de potências

- Sejam $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ e $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ duas séries formais de potências.

Soma: $A(x) + B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k.$

Produto: $A(x) \cdot B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, com $c_k = \sum_{n=0}^k a_n b_{k-n}.$

Exemplo

- Produto de um escalar por uma série formal de potências:
- Sendo $c \in \mathbb{R}$ (ou $c \in \mathbb{C}$) e $\mathcal{A}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, vamos determinar a série $c\mathcal{A}(x)$.

Considerando a série $\mathcal{D}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k$, com $d_0 = c$ e $d_k = 0$,

para $k \in \mathbb{N}$, vem $c\mathcal{A}(x) = \mathcal{D}(x)\mathcal{A}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, com

$$c_k = \sum_{n=0}^k a_n d_{k-n} = a_0 0 + a_1 0 + \cdots + a_{k-1} 0 + a_k c = c a_k.$$

Consequentemente, $c\mathcal{A}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (c a_k) x^k$.

Derivada e integral de uma série formal de potências

Dada a série formal de potências $\mathcal{A}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, denotamos a sua derivada por $\mathcal{A}'(x)$ e o integral por $\int \mathcal{A}(x)$.

Definição (de derivada de uma série formal de potências)

$$\mathcal{A}'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1}x^k.$$

Definição (de integral de uma série formal de potências)

$$\int \mathcal{A}(x) = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k-1}}{k} x^k.$$

Observação:

1. Se $\mathcal{A}(x)$ é convergente então $\int \mathcal{A}(x) = \int_0^x \mathcal{A}(t) dt$.
2. As operações de derivação e integração são operações inversas uma da outra. Logo, $(\int \mathcal{A}(x))' = \mathcal{A}(x)$.

Exemplo

Vamos determinar as séries formais de potências para as sucessões $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tais que $a_k = k$ e $b_k = \frac{1}{k}$, para $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} k x^k = x \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = x \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k \right)' \\ &= x \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)' = x \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = \int \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} \right) = \left(\int \sum_{k=0}^{\infty} x^k \right) \\ &= \int \frac{1}{1-x} = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x). \end{aligned}$$

Função geradora ordinária e função geradora exponencial

Definição (de função geradora ordinária)

Designa-se por função geradora ordinária (ou função geradora) da sucessão $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ a função $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Definição (de função geradora exponencial)

Designa-se por função geradora exponencial da sucessão $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ a função $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$.

- Quando, a partir de certa ordem, os termos da sucessão são todos iguais a zero, a função geradora ordinária (função geradora exponencial) associada designa-se por **polinómio gerador ordinário** (**polinómio gerador exponencial**).

Exemplo

1) Vamos determinar a função geradora ordinária da sucessão de Fibonacci $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n \geq 3$, com $f_1 = f_2 = 1$.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n = x + x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} f_n x^n \\
 &= x + x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} f_{n-1} x^n + \sum_{n=3}^{\infty} f_{n-2} x^n = \\
 &= x + x^2 + x \sum_{n=2}^{\infty} f_n x^n + x^2 \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n \\
 &= x + x^2 + x(\mathcal{F}(x) - x) + x^2 \mathcal{F}(x) \\
 &= \frac{x}{1 - x - x^2}.
 \end{aligned}$$

Outros exemplos

2) Dado $n \in \mathbb{N}$, vamos considerar a sucessão $(n^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, onde cada termo n^k determina o número de arranjos com repetição de n objectos k a k . Então a função geradora exponencial vem dada por $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} n^k \frac{x^k}{k!} = e^{nx}$.

3) Dado $n \in \mathbb{N}$, vamos considerar a sucessão $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, onde $a_k = \binom{n}{k}$, para $k = 0, 1, \dots, n$ e $a_k = 0$, para $k > n$. Então o polinómio gerador ordinário vem dado por

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n.$$

4) Uma vez que $f(x) = \sum_{k=0}^n A_{n,k} \frac{x^k}{k!}$ concluímos que $f(x)$ é um polinómio gerador exponencial da sucessão $(A_{n,k})_{k \in \mathbb{N}_0}$ cujos termos são iguais a zero para $k > n$.