



N.º Mec. \_\_\_\_\_

Escreva o número mecanográfico também na(s) folha(s) de rascunho

70  
pontos

1. Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  e responda às seguintes questões.

- (a) Justifique que os valores próprios de  $A$  são 1 e  $-1$ . Especifique a multiplicidade de cada um.  
(b) Indique o conjunto de vetores próprios associados a cada valor próprio.

Conjunto de vetores próprios de 1:

Conjunto de vetores próprios de  $-1$ :

- (c) Determine a matriz  $D$  diagonal e a matriz  $P$  ortogonalmente diagonalizante de  $A$  tais que  $P^{-1}AP = D$ :

$$D = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

- (d) Determine a equação reduzida da seguinte superfície  $-2xy + z^2 - 1 = 0$  e identifique-a.

70  
pontos

2. Considere a transformação linear  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\phi(x, y, z) = (x + y, 2x + z)$  para todos os  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

- (a) Determine a imagem de  $\phi$ ,  $\text{im}(\phi)$ , e uma sua base.  
(b)  $\phi$  é sobrejectiva? É injectiva? Justifique.  
(c) Encontre a matriz  $A$  representativa da transformação  $\phi$  relativamente às bases  $\mathcal{S} = ((1, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 1))$  e  $\mathcal{T} = ((1, 1), (0, 1))$ .  
(d) Usando a matriz  $A$  (obtida na alínea anterior), calcule  $\phi(2, 0, 0)$ .  
(NOTA: Se não determinou a matriz  $A$  na alínea (c), e apenas nesse caso, suponha que  $A$  é uma matriz com todos os seus elementos iguais a 2.)

60  
pontos

3. Identifique, escrevendo A, B, C e D na caixa correspondente, os conjuntos definidos pelas seguintes equações.

$$A : x^2 + z^2 + 2 = y^2 + 2z \text{ em } \mathbb{R}^3;$$

$$B : x^2 - 2y^2 + 4y = 2 \text{ em } \mathbb{R}^2;$$

$$C : x^2 + 1 = y + z^2 \text{ em } \mathbb{R}^3;$$

$$D : 3x^2 + y^2 = 6x - 2 \text{ em } \mathbb{R}^2.$$

☐ elipse    ☐ hipérbole    ☐ parábola    ☐ cónica degenerada    ☐ quádrca degenerada  
☐ elipsóide    hipérbolóide de ☐ 1 ou ☐ 2 folhas    parabolóide ☐ elíptico ou ☐ hiperbólico