1.ª Prova de Álgebra Linear e Geometria Analítica

09/11/2011

Duração: 2h00 min

Nome:____ Classificação:____

Nº Mec._________

(45) 1. No espaço vectorial $\mathbb{R}_2[X]$, dos polinómios de coeficientes reais de grau inferior ou igual a 2, considere o conjunto $S = \{P(X) = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X] \ : \ P(1) = P(2)\}$.

a) Mostre que S é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}_2[X]$ e indique uma base B para S.

b) Construa uma base $\hat{B}$ para $\mathbb{R}_2[X]$ que contenha os vectores da base B de S.

c) Determine as coordenadas do vector $2X - 4X^2$ na base $\hat{B}$.

(45) 2. Considere o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + \alpha y + z = \alpha \\ 2x + (1+\alpha)y + (1+\alpha)z = \alpha + \alpha^2 \\ (1-\alpha)(2-\alpha)z = (1-\alpha^2)(1+\alpha) \end{cases}$$

onde α é um parâmetro real.

a) Indique, justificando, os valores de α para os quais o sistema é:

a1) possível e determinado,

a2) possível e indeterminado,

a3) impossível.

b) Determine o conjunto solução para $\alpha = 1$.

(50) 3. No espaço vectorial $\mathbb{R}^4$ considere os subespaços.

$F =< (1,1,3,1),(0,1,2,1),(1,-1,0,0) >$ e

$G = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : z+w=0 \quad \text{e} \quad x+y=0\}$.

a) O vector $(1,0,3,0)$ pertence ao subespaço F? Justifique devidamente a sua resposta.

b) Indique um vector de $\mathbb{R}^4$, não nulo, que pertença a G.

c) Determine uma base para $F \cap G$.

d) Qual a dimensão de $F+G$? Justifique, devidamente.

(25) 4. Seja E um espaço vectorial real e (e_1, e_2, e_3) uma base de E. Averigúe se os vectores $e_1 - e_2 + e_3,\ e_1 + e_2,\ 2e_1 + e_3$ são linearmente dependentes e, em caso afirmativo, indique um vector que seja combinação linear dos restantes.

(35) 5. Considere a aplicação $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida por

$$\varphi(a, b, c) = \begin{bmatrix} 2a & 0 \\ b + c & c \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que a aplicação φ é linear.

b) Determine $\varphi(1, -3, 1)$.

c) Averigúe se existe $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(v) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.