# Funções reais de várias variáveis reais

**Corpo Docente:**

Ana Breda, Eugénio Rocha, Paolo Vettori
Sandrina Santos, Diana Costa, Rita Guerra

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro, 2017

Consideremos definida em $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : \ x_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, 2, ..., n\}$ a distância euclidiana $\mathrm{d}\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, definida por

$$\boxed{\mathrm{d}\big((x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n)\big) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}.}$$

**Def. 1.1**

Ao conjunto $\mathrm{B}_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : d(x, p) < r\}, \ r > 0$ chamamos **bola aberta** de centro em $p$ e raio $r$.

Ao conjunto $\overline{\mathrm{B}}_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : d(x, p) \leq r\}, \ r > 0$ chamamos **bola fechada** de centro em $p$ e raio $r$.

- $p$ é **ponto interior** de D se existe uma bola aberta centrada em $p$ contida em D, $(\exists r > 0 : \ \mathrm{B}_r(p) \subset \mathrm{D})$. Ao conjunto de todos os pontos interiores de D chamamos **interior de** D e representamos por int(D).
- $p$ é **ponto fronteiro** de D se qualquer bola aberta centrada em $p$ contém pontos de D e do seu complementar $(\forall r > 0 \ \ \mathrm{B}_r(p) \cap \mathrm{D} \neq \emptyset \ \wedge \ \mathrm{B}_r(p) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{D}) \neq \emptyset)$. Ao conjunto de todos os pontos fronteiros de D chamamos **fronteira de** D e representamos por fr(D).

## Def. 1.2

- $p$ é **ponto de acumulação** de D se qualquer bola aberta centrada em $p$ contém pontos de $\mathrm{D} \setminus \{p\}$ $(\forall r > 0\ \mathrm{B}_r(p) \cap \mathrm{D} \setminus \{p\} \neq \emptyset)$. Ao conjunto de todos os pontos de acumulação de D chamamos **derivado de** D e representamos por $\mathrm{D}'$.
- $p$ é **ponto isolado** de D se p pertence a D mas não é ponto de acumulação de D $(p \in D \setminus D')$.

## Exer. 1.3

Mostre que todo o ponto interior de um conjunto é ponto de acumulação desse conjunto.

## Def. 1.4

Seja $A$ um conjunto de $\mathbb{R}^n$.

- $A$ é **aberto** se $A = \mathrm{int}(A)$;
- $A$ é **fechado** se $\mathrm{fr}(A) \subset A$;
- $A$ é **limitado** se existem $r > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $A \subset \overline{\mathrm{B}}_r(x_0)$;

**Exemplo 1.5**

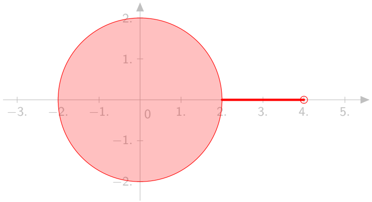
Seja D=$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \leq 4\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x < 4 \ \wedge \ y=0\}$.

Então,

int(D)=$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 < 4\}$;

fr(D)=$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 = 4\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 4 \ \wedge \ y=0\}$; e

D'=D $\cup\{(4,0)\}$.




O conjunto D não tem pontos isolados, não é aberto nem fechado mas é limitado (justifique).

**Exer. 1.6**

Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x > 0 \ \wedge \ x + y < 1) \ \vee \ (1 < x < 3 \ \wedge \ 0 < y < 2)\};$$

$$S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy = 0\};$$

$$S_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{2x}{4 - x^2 - y^2} \in \mathbb{R} \ \vee \ x = 0\}.$$

Para cada um deles,

(a) determine o interior, a fronteira e o derivado;

(b) verifique se são abertos, fechados ou limitados.

**Def. 1.7**

A uma correspondência $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que a cada elemento $(x_1, x_2, ..., x_n) \in D$ associa um único número real $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ chamamos função real de $n$ variáveis reais ou campo escalar a $n$ variáveis de **domínio** $D$.

O **contradomínio** de $f$, $CD_f$, é o conjunto,

$$CD_f = \{f(x_1, x_2, ..., x_n) : \ (x_1, x_2, ..., x_n) \in D\}.$$

O **gráfico** de $f$ é o conjunto,

$$\mathcal{G}_f = \{(x_1, x_2, ..., x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ z = f(x_1, x_2, ..., x_n)\}$$

Como visualizar gráficos de funções reais de duas variáveis reais?

## Exer. 1.8

Descreva geometricamente o domínio das seguintes funções reais de duas variáveis reais:

(a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{y-2x}$;

(b) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$;

(c) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{3} + \arcsin(y+3)$;

(d) $f(x,y) = \ln(x\ln(y-x^2))$;

(e) $f(x,y) = \ln\big((16-x^2-y^2)(x^2+y^2-4)\big)$.

### Exemplo 1.9

A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$ é um campo escalar a 2 variáveis que tem por gráfico o conjunto

$$\mathcal{G}_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = x^2 + y^2\}.$$

Representação gráfica de $\mathcal{G}_f$

### Exemplo 1.10

Observemos os gráficos das seguintes funções:

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 4 - y^2$ (cilindro parabólico)
   Representação gráfica de $\mathcal{G}_f$
2. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = y^2 - x^2$ (parabolóide hiperbólico)
   Representação gráfica de $\mathcal{G}_g$
3. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$
   Representação gráfica de $\mathcal{G}_h$

# Conjuntos de Nível

**Def. 1.11**

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.
Chamamos **conjunto de nível** associado a $f$ de valor $k \in CD_f$, ou simplesmente conjunto de nível $k$ ao conjunto $\mathcal{N}_k$ definido por

$$\boxed{\mathcal{N}_k = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in D : \; f(x_1, x_2, ..., x_n) = k\}}.$$

**Obs. 1.12**

A partir de agora vamos apenas considerar funções $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ para $n = 2, 3$.

Para $n = 2, 3$, os conjuntos de nível $k$ designam-se, respetivamente, por **curva de nível** $k$ e **superfície de nível** $k$ e representam-se, respetivamente, por $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{S}_k$, respetivamente.

## Exemplo 1.13

Determine as curvas de nível associadas às funções do Exemplo 1.10.

Descreva-as geometricamente e esboce o seu gráfico.

- As curvas de nível associadas à função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 4 - y^2$ de valor $k \in ]-\infty, 4]$ são as curvas definidas por

$$\mathcal{C}_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : 4 - y^2 = k\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : y = \pm\sqrt{4 - k}\}.$$

Consequentemente, as curvas de nível de valor $k \in ]-\infty, 4]$ são as retas de equações $y = \pm\sqrt{4 - k}$. Curvas de nível associadas a $f$.

- As curvas de nível $k \in CD_g$ da função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = y^2 - x^2$ são as curvas definidas por

$$\mathcal{C}_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : y^2 - x^2 = k\}.$$

Consequentemente, as curvas de nível $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ são hipérboles e a curva de nível 0 é constituída pela união de duas retas de equações $y = \pm x$.

Curvas de nível associadas a $g$.

## Exemplo 1.14

Determine o domínio e o contradomínio da função real de duas variáveis reais $h$ definida por $h(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$. Descreva geometricamente as curvas de nível associadas a $h$ de valor $k \in CD_h$.

$D_h = \mathbb{R}^2$ e $CD_h = [-1, 1]$.
As curvas de nível associadas à função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ de valor $k \in \mathbb{R}$ são as curvas definidas por,

$$\mathcal{C}_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : x^2 + y^2 = \arcsin(k) + 2n\pi \;\vee\; x^2 + y^2 = (\pi - \arcsin(k)) + 2n\pi\}$$

Consequentemente, as curvas de nível $k \in [-1, 1]$ constituem uma família de circunferências concêntricas.

## Exemplo 1.15

Determine as superfícies de nível da função $F$ definida por $F(x, y, z) = x + y + 3z$. Descreva-as geometricamente.

Para cada $k \in \mathbb{R}$, a superfície de nível $k$, $\mathcal{S}_k$, é definida por:

$$\mathcal{S}_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : x + y + 3z = k\}$$

Consequentemente, as superfícies de nível constituem uma família de planos paralelos entre si e perpendiculares ao vetor $(1, 1, 3)$.

**Exer. 1.16**

Determine o domínio das seguintes funções e indique se esse conjunto é aberto, fechado.

(a) $f(x,y,z) = \ln(2z^2 - 6x^2 - 3y^2 - 6)$; (b) $g(x,y,z) = \sqrt{x+y+z}$;

(c) $h(x,y,z) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}$, $a \in \mathbb{R}$; (d) $j(x,y,z) = \arcsin\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$;

(e) $m(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2-a}$, $a \in \mathbb{R}$.

**Exer. 1.17**

Determine o domínio e o contradomínio da função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$. Use o GeoGebra para representar o gráfico desta função.

**Exer. 1.18**

Determine algumas curvas de nível de $f$, quando $f$ se encontra definida por:

(a) $f(x,y) = y - \sin(x)$; (b)$f(x,y) = xy$; (c)$f(x,y) = 4x^2 + y^2$.

**Exer. 1.19**

Descreva as superfícies de nível de $f$, quando $f$ se encontra definida por:

(a) $f(x,y,z) = z - x^2 - y^2$; (b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$;

(c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

**Def. 1.20**

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ e $a = (a_1, a_2, ..., a_k)$ um ponto de acumulação de $D$.

Dizemos que o limite de $f$ quando $x = (x_1, x_2, ..., x_k)$ tende para $a$ é $L \in \mathbb{R}$, e escrevemos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, se, para qualquer sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $D \setminus \{a\}$ convergente para $a$, a correspondente sucessão de imagens $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $L$, isto é,

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} x_n = a \implies \lim_{n \to \infty} f(x_n) = L.}$$

De modo equivalente, dizemos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, se

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ :\ (\mathrm{d}(x, a) < \delta\ \wedge x \in D) \implies | f(x) - L | < \varepsilon.}$$

**Exemplo 1.21**

Seja $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \frac{3x^2 y}{x^2+y^2}$. Determinar, caso exista,

$\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$.

Consideremos uma sucessão arbitrária $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ convergente para $(0, 0)$.

O termo geral da sucessão das imagens é $f(x_n, y_n) = \dfrac{3x_n^2 y_n}{x_n^2 + y_n^2}$, pelo que,

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{3x_n^2 y_n}{x_n^2 + y_n^2} = 3 \lim_{n \to \infty} y_n \frac{x_n^2}{x_n^2 + y_n^2} = 0. \text{ (Justifique)}$$

### Teo. 1.22

Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções escalares e $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ um ponto de acumulação de $D$.

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$ então

- $\lim_{x \to a} (f + g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L_1 + L_2$;
- $\lim_{x \to a} \lambda f(x) = \lambda \lim_{x \to a} f(x) = \lambda L_1, \; \lambda \in \mathbb{R}$;
- $\lim_{x \to a} (fg)(x) = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x) = L_1 L_2$ e
- $\lim_{x \to a} (\frac{f}{g})(x) = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ (com $L_2 \neq 0$).

### Teo. 1.23

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Suponhamos que $D = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k, k \in \mathbb{N}$ e seja $a$ um ponto de acumulação de $A_i$ para todo o $i \in I \subset \{1, 2, ..., k\}$.

Se existirem os limites $\lim_{x \to a} f_{|A_i}(x)$, para todo o $i \in I$ e forem iguais a $L$, então existe o $\lim_{x \to a} f(x)$ e o seu valor é precisamente $L$.

**Exer. 1.24**

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 3x^2 y & \text{se } y > 0 \\ x^2 + y^2 & \text{se } y \leq 0 \end{cases}$$

Averigue a existência do $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

**Teo. 1.25**

Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se $\displaystyle\lim_{x\to p} f(x) = 0$ e $g$ é uma função limitada numa bola centrada em $p$, então $\displaystyle\lim_{x\to p} f(x)g(x) = 0$.

**Exer. 1.26**

Seja $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = \dfrac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2}$. Utilize o teorema anterior para mostrar que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

**Exer. 1.27**

Calcule, caso exista,

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$; (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-4y^4}{2x^2+4y^2}$.

**Exer. 1.28**

Usando trajetórias/sucessões convenientes tire conclusões sobre a existência dos seguintes limites;

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$; (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{2xy-2y}{(x-1)^2+y^2}$.

**Exer. 1.29**

Mostre que:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+2y^2)\sin\left(\frac{1}{xy}\right) = 0$; (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+2y^2} = 0$.

**Def. 1.30**

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$, um ponto de acumulação de $D$, diz-se que $f$ é contínua em $p$ se $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$. Ou, de modo equivalente, $f$ é contínua em $p$ se para qualquer sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $D$ convergente para $p$, a correspondente sucessão das imagens $f(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $f(p)$.

Se $p$ é ponto isolado de $D$, então $f$ é contínua em $p$.

Ao conjunto de pontos onde $f$ é contínua chamamos domínio de continuidade de $f$.

**Teo. 1.31**

Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções escalares, $\alpha : I \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real com $f(D) \subset I$.

- Se $f$ e $g$ são contínuas em $p \in D$ então $f + g$; $fg$; $\frac{f}{g}$ com $(g(p) \neq 0)$ e $\lambda f$, $\lambda \in \mathbb{R}$, são também contínuas em $p$;
- Se $f$ é contínua em $p \in D$ e $\alpha$ é contínua em $f(p)$ então $\alpha \circ f$ é contínua em $p$.

**Exer. 1.32**

Mostre que as projeções $\Pi_i$, $i = 1, 2, 3$ de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}$ definidas, respetivamente, por $\Pi_1(x, y, z) = x$, $\Pi_2 = (x, y, z) = y$ e $\Pi_3(x, y, z) = z$ são contínuas.

**Exer. 1.33**

Determine o domínio de continuidade da função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, y, z) = \frac{3xy - 5x^3 z}{y^3 z - xyz}.$$

## Exer. 1.34

Determine o domínio de continuidade das funções definidas por:

(a) $$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{se } x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{se } x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$

(b) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x+y} & \text{se } x \neq -y \\ 0 & \text{se } x = -y \end{cases}$$

(c) $$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{se } xy = 0 \\ 0 & \text{se } xy \neq 0 \end{cases}$$

**Def. 1.35**

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função e $P = (a, b)$ um ponto do interior de $D$.

Ao $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$, caso exista e seja finito, chamamos **derivada parcial de $f$ em ordem a $x$ no ponto $(a, b)$** e notamos por $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$.

Por outras palavras, $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}}$.

**Obs. 1.36**

Fixando $y = b$ e considerando a função real de variável real,

$g : \{x \in \mathbb{R} : \ (x, b) \in D\} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x, b)$,

verifica-se que, $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = g'(a)}$. Deste modo, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ representa o declive da recta $r_1$ contida no plano $y = b$ e que é tangente à curva $\mathcal{C}_1$, interseção do gráfico de $f$ com o plano $y = b$ no ponto $P = (a, b, f(a, b))$. Interpretação geométrica

As equações cartesianas da reta $r_1$ são $\boxed{y = b \ \text{ e } \ z = f(a, b) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a)}$.

A reta $r_1$ tem como vetor diretor $(1, 0, \dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b))$.

**Def. 1.37**

Chamamos **derivada parcial de $f$ em ordem a $y$ no ponto $(a, b)$** e representamos por $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ ao $\lim_{h\to 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}$, caso exista e seja finito. Assim,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}.}$$

**Obs. 1.38**

Fixando $x = a$ e considerando a função real de variável real,

$$h : \{y \in \mathbb{R} : (a, y) \in D\} \to \mathbb{R}, \text{ definida por } h(y) = f(a, y),$$

verifica-se que, $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = h'(b)}$. Deste modo, $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ representa o declive da recta $r_2$ contida no plano $x = a$ e que é tangente à curva $\mathcal{C}_2$, interseção do gráfico de $f$ com o plano $x = a$ no ponto $P = (a, b, f(a, b))$. Interpretação geométrica

As equações cartesianas da reta $r_2$ são $\boxed{x = a \text{ e } z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)}$.

A reta $r_2$ tem como vetor diretor $(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a, b))$.

O plano $\Pi$, tangente ao gráfico de $z = f(x, y)$ no ponto $P = (a, b, f(a, b))$, é o plano que passa por $P$ e que tem por vetores diretores $(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a, b))$ e $(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a, b))$.

Por outras palavras, uma equação vetorial de $\Pi$ é:

$$\boxed{(x, y, z) = (a, b, f(a, b)) + \lambda(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)) + \mu(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R},}$$

a que corresponde a equação cartesiana,

$$\boxed{\boxed{z - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b).}}$$

### Questão a ponderar

Que condições deve verificar a função $f$ para que possamos garantir a existência de plano tangente a um ponto da superfície de equação $z = f(x, y)$?

### Exemplo 1.39

O plano tangente ao gráfico da função real $f$ definida por $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ no ponto $P = (1, 1, 2)$ tem por equação:

$$z - 2 = -2(x - 1) - 2(y - 1), \text{ ou ainda, } 2\,x + 2y + z = 6.$$

**Def. 1.40**

**Uma função** $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ **é diferenciável em** $P = (a, b) \in \mathrm{int}(D)$ se existem as derivadas parciais de 1.ª ordem de $f$ em $P$ e existe uma bola aberta, $\mathcal{B}$, centrada em $P$ e contida em $D$ tal que, para quaisquer $\triangle x, \triangle y \in \mathbb{R}$ tais que $(a + \triangle x, b + \triangle y) \in D$, **se** tem

$$\boxed{f(a + \triangle x, b + \triangle y) - f(a, b) = \triangle x \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + \triangle y \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + \triangle x \varepsilon_1 + \triangle y \varepsilon_2,}$$

onde $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ são funções de $\triangle x$ e $\triangle y$ tais que $\displaystyle\lim_{(\triangle x, \triangle y) \to (0,0)} \varepsilon_i(\triangle x, \triangle y) = 0$.

**Teo. 1.41**

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P = (a, b) \in \mathrm{int}(D)$. Se $f$ admite derivadas parciais de 1.ª ordem em todos os pontos de uma bola aberta centrada em $P$, contida em $D$, e, pelo menos, uma das derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em $P$ então $f$ é diferenciável em $P = (a, b)$.

**Teo. 1.42**

Se $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $P = (a, b)$ então $f$ é contínua em $P$.

Como vimos, sendo $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, as derivadas parciais de $f$ em $P = (a, b) \in D$ são dadas, respectivamente, por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} \qquad \textbf{(1)} \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h} \qquad \textbf{(2)}.$$

As derivadas parciais de $f$ em ordem a $x$ e a $y$ são também funções reais de duas variáveis reais, definidas num subconjunto de $D$ constituído pelos pontos de $D$ em que o correspondente limite exista.

As **derivadas parciais de 2.ª ordem** de $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são as funções:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Teo. 1.43

**Teorema de Schwarz**

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P = (a, b)$ um ponto do interior de $D$. Se existem as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ numa bola aberta centrada em $P$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ é contínua em $P$ então existe $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ em $P$ e $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P)}$.

## Exer. 1.44

Calcule as derivadas parciais de 2.ª ordem das seguintes funções:

(a) $f(x, y) = \ln(x + y) - \ln(x - y)$;

(b) $f(x, y) = \sin(xy)$;

(c) $f(x, y) = \operatorname{arctg}(\frac{y}{x})$.

## Exer. 1.45

Uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diz-se harmónica se verifica a equação de Laplace, isto é, verifica a equação $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$

Mostre que a função $f$ definida por $f(x, y) = \operatorname{arctg}(y/x)$ é uma função harmónica.

**Def. 1.46**

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in D$ e $\hat{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ um vector unitário de $\mathbb{R}^n$, isto é, $\|\widehat{u}\| = \sqrt{(u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2)} = 1$.

Ao $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a_1 + hu_1, a_2 + hu_2, ..., a_n + hu_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n)}{h}$, caso exista e seja finito, chamamos **derivada direcional de $f$ segundo $\hat{u}$ no ponto $a$** e representamo-la por $D_{\hat{u}} f(a)$. Assim, $\boxed{D_{\hat{u}} f(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a + h\hat{u}) - f(a)}{h}}$.

**Interpretação geométrica**

Supondo $n = 2$, $D_{\hat{u}} f(a_1, a_2)$ dá-nos a informação acerca da **variação da cota** de um observador que caminhando sobre a superfície de equação $z = f(x, y)$ passe por $P = (a_1, a_2, f(a_1, a_2))$ deslocando-se na **direção e sentido de $\hat{u}$**.

Derivada Direcional

**Obs. 1.47**

A derivada parcial de $f$ em ordem a $x_i$, $i = 1, 2, ..., n$, não é mais do que a derivada direcional de $f$ segundo o vetor $\widehat{e_i} = (0, ..0, 1, 0, ...0)$.

**Def. 1.48**

Suponhamos que $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admite todas as derivadas de 1.ª ordem em $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$. Ao vetor

$$\boxed{\boxed{\nabla f(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))}}$$

chamamos **gradiente de $f$ em $a$**.

**Teo. 1.49**

Se $f$ é uma função diferenciável de duas variáveis de domínio $D$, $P = (x, y)$ é um ponto do interior de $D$ e $u = (\cos(\theta), \sin(\theta))$, $\theta \in [0, 2\pi]$, então

$$D_u f(x,y) = < \nabla f(x,y), u > = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\sin\theta,$$

onde $<, >$ designa o produto escalar canónico de $\mathbb{R}^2$.

**Demonstração**: Exercício.

Sendo $f$ uma função escalar diferenciável em $D \subset \mathbb{R}^2$, $P = (x_0, y_0) \in \mathrm{int} D$ e $u$ um vetor unitário de $\mathbb{R}^2$,

$$D_u f(x_0, y_0) = < \nabla f(x_0, y_0), u > = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cos \alpha,$$

onde $\alpha$ designa o ângulo formado pelos vetores $\nabla f(x,y)$ e $u$.

Podemos então concluir que

- $\nabla f$ aponta na direção e sentido do maior crescimento de $f$.

**Teo. 1.50**

Se $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma **função diferenciável** em $D$, e $P = (x_0, y_0)$ é um ponto do interior de $D$, **existe um plano tangente** à superfície $S$ de equação $z = f(x,y)$ no ponto $P$ e uma equação cartesiana desse plano é (como visto anteriormente)

$$\boxed{z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).}$$

sendo $\overrightarrow{n} = (-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), 1)$ um vetor normal à superfície.

**Teo. 1.51**

Sejam $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função escalar com derivadas parciais contínuas e $S$ a superfície de nível 0 de $F$, isto é $S = \{(x, y, z) \in D : \ F(x, y, z) = 0\}$.
Se $P = (x_0, y_0, z_0) \in S$ e as derivadas parciais de 1.ª ordem de $F$ não se anulam simultaneamente em $P$, uma equação cartesiana do plano, $\Pi$, tangente a $S$ em $P$ é dada por

$$< \nabla F(P), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) >= 0,$$

ou seja, $\Pi$ tem por equação,

$$(x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

**Exemplo 1.52**

Determine uma equação para o plano tangente e um sistema de equações para a reta normal ao elipsoide $\mathcal{E}$ de equação $4x^2 + 9y^2 + z^2 - 49 = 0$ no ponto $P = (1, -2, 3)$.

Definindo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ por $F(x, y, z) = 4x^2 + 9y^2 + z^2 - 49$ constatamos que $\mathcal{E}$ é precisamente a superfície de nível 0 de $F$. Assim, uma equação para o plano, $\Pi$, tangente a $\mathcal{E}$ em $P$ é $< \nabla F(P), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) >= 0$, ou ainda,

$$8(x - 1) - 36y(y + 2) + 6(z - 3) = 0.$$

As equação da reta normal a $\mathcal{E}$ em $P$ são

$$\frac{x - 1}{8} = \frac{y + 2}{-36} = \frac{z - 3}{6}.$$ Justifique.

### Exer. 1.53

Mostre que $f$ é diferenciável no seu domínio de definição $D_f$ e determine a expressão geral das derivadas direcionais, segundo as direções e sentidos indicados, com $f$ definida por:

(a) $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$ na direção e sentido do vetor $(1,1)$;

(b) $f(x,y) = x^2y^3$ na direção e sentido do vetor $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$;

(c) $f(x,y,z) = e^x + yz$ na direção e sentido do vetor $(-1,5,-2)$;

(d) $f(x,y,z) = \cos(xy) + \sin(yz)$ na direção e sentido do vetor $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

### Exer. 1.54

Mostre que $f$ é diferenciável no ponto $(x_0, y_0)$ e determine uma equação do plano tangente ao gráfico de $f$ no ponto $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, sendo $f$ e $P_0$ dados por:

(a) $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ e $P_0 = (1,1,3)$;

(b) $f(x,y) = \sin(xy)$ e $P_0 = (1,\pi,0)$;

(c) $f(x,y) = xe^{x^2-y^2}$ e $P_0 = (2,2,f(2,2))$.

### Exer. 1.55

Sejam $f$ e $g$ funções escalares definidas em $D \subset \mathbb{R}^3$. Supondo que $f$ e $g$ possuem derivadas parciais em $P \in D$, mostre que $\nabla(fg)(P) = (f\nabla g)(P) + (g\nabla f)(P)$.

**Def. 2.1**

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ um ponto de $D$.

Dizemos que:

- $f(A)$ é um **máximo relativo** (ou máximo local) de $f$ se existe uma bola aberta, $\mathcal{B}$, centrada em $A$ tal que $\forall P \in \mathcal{B} \cap D,\ f(P) \leq f(A)$.
- $f(A)$ é um **máximo absoluto** de $f$ se $\forall P \in D,\ f(P) \leq f(A)$.
- $f(A)$ é um **mínimo relativo** (ou mínimo local) de $f$ se existe uma bola aberta, $\mathcal{B}$, centrada em $A$ tal que $\forall P \in \mathcal{B} \cap D,\ f(P) \geq f(A)$.
- $f(A)$ é um **mínimo absoluto** de $f$ se e $\forall P \in D,\ f(P) \geq f(A)$.

**Máximos e mínimos** (relativos) designam-se, no seu conjunto, por **extremos** (relativos) e os pontos onde estes são atingidos dizem-se **extremantes** (relativos) - maximizantes ou minimizantes consoante a natureza do extremo que originam.

Teo. 2.2

**Teorema de Weierstrass**

Se $D$ é um subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}^n$ e $f$ é um função escalar contínua em $D$ **então** $f$ tem em $D$ um mínimo e um máximo absolutos.

Teo. 2.3

**Teorema de Fermat**

Se $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tem derivadas de 1.ª ordem em $P = (p_1, p_2, ..., p_n) \in \text{int}D$ e $f(P)$ é um extremo (relativo) de $f$ então $\nabla f(P) = (0, 0, ..., 0)$.

Def. 2.4

Um ponto $P \in D_f$ diz-se **ponto crítico** de $f$ se existem e são nulas todas as derivadas parciais de 1.ª ordem de $f$ em $P$, isto é, se $\nabla f(P) = (0, 0, ..., 0)$.

Assim, se $P \in \text{int}D$ é ponto extremante de $f$ então $P$ é ponto crítico de $f$.

O recíproco é falso, isto é, nem sempre um ponto crítico é ponto extremante. É o caso de $P = (0, 0)$ que é ponto crítico de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 - y^2$ mas não é ponto extremante. (Justifique).

Os pontos críticos que não são extremantes dizem-se **pontos de sela**.

$(0, 0)$-Ponto de sela de $f$.

## Def. 2.5

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas parciais de primeira e segunda ordem contínuas e $p \in \text{int}D$. A matriz

$$H_f(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(P) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(P) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(P) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(P) \end{pmatrix}$$

diz-se **matriz Hessiana de $f$ em $p$**. Ao **determinante** de $H_f(p)$ chamamos **Hessiano** de $f$ em $p$ que designamos por $\Delta_f(p)$.

## Def. 2.6

Chamamos **menor principal** de ordem $k$ de uma matriz de ordem $n$ ao determinante da submatriz de ordem $k$ que se obtém eliminando as últimas $n - k$ linhas e as últimas $n - k$ colunas.

Teo. 2.7

**Teste da Segunda Derivada**

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas parciais de primeira e segunda ordem contínuas e $P \in$int$(D)$ um ponto crítico de $f$ e $\boxed{\Delta_f(P) \neq 0}$.

1. Se todos os menores principais de $\Delta f(P)$ são positivos,
   $\Delta_1(P) > 0; \; \Delta_2(P) > 0; \; \ldots$
   então $P$ é um minimizante local.

2. Se os menores principais são alternadamente negativos e positivos, sendo o primeiro negativo,
   $\Delta_1(P) < 0; \; \Delta_2(P) > 0; \; \ldots$ então $P$ é um maximizante local.

3. Se nenhuma das situações anteriores ocorrer $P$ é um ponto de sela.

Obs. 2.8

Observe que se $\Delta_f(P) = 0$ nada se pode concluir.

Teo. 2.9

**Teste da Segunda Derivada no caso $n = 2$**

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas parciais de primeira e segunda ordem contínuas e $P \in$int$(D)$ um ponto crítico de $f$ e $\boxed{\Delta_f(P) \neq 0}$.

1. Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) > 0$ e $\Delta_f(p) > 0$ então $p$ é um minimizante local.
2. Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) < 0$ e $\Delta_f(p) > 0$ então $p$ é um maximizante local.
3. Se nenhuma das situações anteriores ocorrer $P$ é um ponto de sela.

Exemplo 2.10

Determinar, caso existam, os extremos locais de $f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$

Os pontos críticos de $f$ são os pontos $P = (x, y)$ tais que $\nabla f(P) = (0, 0)$, ou seja, as soluções do sistema $-3x^2 + 4y = 0$, e $4x - 4y = 0$.
Temos então como pontos críticos $P_0 = (0, 0)$ e $P_1 = (\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$.
Ora, $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -6x & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ Utilizando as condições de 2.ª ordem (Teste das segundas derivadas) podemos concluir que $P_0$ é um ponto de sela e que $P_1$ é um maximizante de $f$ a que corresponde o valor máximo $f(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}) = \frac{59}{27}$.

## Exemplo 2.11

Determinar, caso existam, os extremos locais de $f(x,y) = x^2 - 7xy^2 + 10y^4$

O único ponto crítico de $f$ é o ponto $P_0 = (0,0)$. Ora,

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -14y \\ -14y & -14x + 120y^2 \end{pmatrix} \text{ e portanto } H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\Delta_f(0,0) = 0$ temos que fazer uma análise não baseada na condições de 2.ª ordem. Comecemos por observar que $f(0,0) = 0$.

Considerando a restrição de $f$ a pontos da parábola $x = 3y^2$ obtemos para pontos imagens $f(3y^2, y) = -8y^4$.

Se considerarmos a restrição de $f$ a pontos da parábola $x = -2y^2$ obtemos para pontos imagens $f(-2y^2, y) = 28y^4$. Pelo que, qualquer vizinhança (bola) centrada em $(0,0)$, contém pontos onde $f(x,y) > 0$ e pontos onde $f(x,y) < 0$. Por conseguinte, $(0,0)$ não é ponto extremante para $f$.

### Exer. 2.12

Determinar, caso existam, os extremos locais de $f$ para $f$ definida por

(a) $f(x,y) = 3x^2y^2 + y^2 - 3x^2 - 6y + 7$;

(b) $f(x,y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} + xy,\ x,y > 0$;

(c) $f(x,y,z) = 4 - y^2$;

(d) $f(x,y,z) = x^3 - y^3 + z^3$;

(e) $f(x,y) = xye^{x-y}$;

(f) $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$;

(g) $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & \text{se } y \geq 0 \\ 0 & \text{nos restantes casos;} \end{cases}$

(h) $f(x,y) = \sin x \cos y$;

(i) $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & \text{se } y \geq 0 \\ |x| & \text{se } y < 0; \end{cases}$

(j) $f(x,y,z) = xy + yz + \frac{1}{4}(x^2 + y^2 + z^2)$.

### Exer. 2.13

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = -x^2$. Mostre, usando a definição de maximizante global, que $f$ possui um número infinito de tais maximizantes.

# Extremos em conjuntos limitados e fechados 

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ contínua com $D$ **limitado e fechado**.
Como determinar os extremos absolutos de $f$?

## Regra prática

1. Determinar os pontos críticos de $f$ que pertençam ao interior de $D_f$;
2. Determinar os pontos do interior de $D_f$ onde pelo menos uma das derivadas parciais da função não esteja definida;
3. Estudar os extremos da restrição de $f$ à fronteira de $D_f$;
4. Calcular os valores da função em todos os pontos determinados anteriormente; os menor e maior valores serão, respetivamente, o mínimo e o máximo absolutos da função.

## Exemplo 2.14

Determinar os extremos absolutos de $f$ definida em $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$ por $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$.

O $\text{int}(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 1\}$ e a $\text{fr}(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\}$.
O único ponto crítico de $f$ no $\text{int}(D)$ é o ponto $P_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Vamos agora considerar a restrição de $f$ a $\text{fr}(D) = \{(\cos\theta, \sin\theta), \theta \in [0, 2\pi]\}$.
O comportamento de $f$ na $\text{fr}(D)$ pode ser descrito pela composição $f \circ g$ onde $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ é a função definida por $g(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$.

Ora, $f \circ g(\theta) = 2 - \cos\theta - \sin\theta$. Os pontos críticos de $f \circ g$ no $\text{int}[0, 2\pi] = ]0, 2\pi[$ são $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ e $\theta_2 = \frac{5\pi}{4}$ a que correspondem os pontos $P_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $P_2 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Finalmente a $\text{fr}([0, 2\pi]) = \{0, 2\pi\}$ corresponde o ponto $P_3 = (1, 0)$.

Como $f(P_0) = \frac{1}{2}, \ f(P_1) = 2 - \sqrt{2}, \ f(P_2) = 2 + \sqrt{2}$ e $f(P_3) = 1$ os valores máximo e mínimo de $f$ são respetivamente $2 + \sqrt{2}$ e $\frac{1}{2}$ atingidos respetivamente em $P_2 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ e em $P_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

**Exer. 2.15**

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = x^2 + y^2$ onde $D$ designa a região planar dada por $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| + |y| \leq 1\}$ .

(a) Justifique, convenientemente, que $f$ possui um mínimo e um máximo absolutos.

(b) Represente geometricamente $D$. Determine os extremos absolutos de $f$ e os extremantes onde tais valores são atingidos.

**Exer. 2.16**

Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = y$, e $A$ e $B$ os subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ definidos por: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : x^2 + y^2 < 1\}$ e $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(a) Justifique, convenientemente, que $f$ possui extremos absolutos em $B$.

(b) Identifique os extremantes absolutos de $f$ em $B$.

(c) A função $f$ possui extremos em $A$? Justifique.

Suponhamos que $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são função diferenciáveis em $D$, aberto de $\mathbb{R}^2$, e que se pretende determinar os extremos de $f$ que pertencem ao subconjunto $C \subset D$, definido por $C = \{(x, y) \in D : g(x, y) = 0\}$.

**Teo. 2.17**

Sejam $f$ e $g$ nas condições acima descritas, com derivadas parciais contínuas em $P_0 = (x_0, y_0) \in C$. Se $P_0$ é um extremante local de $f$ e $\nabla g(P_0) \neq 0$ então existe $\lambda \in \mathbb{R}$, dito **multiplicador de Lagrange**, tal que $\nabla f(P_0) = \lambda \nabla g(P_0)$.

Este teorema, generalizável de modo natural para $n > 2$, $n \in \mathbb{N}$, fornece um modo de resolução para problemas deste tipo,(**extremos condicionados**).

**Método dos Multiplicadores de Lagrange**

Sejam $f$ e $g$ funções nas condições acima descritas.

1. Determinar as soluções $(x, y)$ do sistema $\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$
2. Estudar a natureza de cada um dos pontos assim determinados.

## Exemplo 2.18

Determinar os extremos de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x + y$ na elipse $\mathcal{E}$ de equação $(x-1)^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

As funções $f$ e $g$, com $g$ definida por $g(x, y) = (x-1)^2 + \frac{y^2}{4} - 1$, são funções diferenciáveis com derivadas parciais contínuas, de qualquer ordem, em $\mathbb{R}^2$.
Mais, $\nabla g(P) \neq 0$ para qualquer $P \in \mathcal{E}$.

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = 2\lambda(x-1) \\ 1 = \lambda \dfrac{y}{2} \\ (x-1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$$

As soluções são $P_0 = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$ e $P_1 = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{5}, -\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$.
Ora, $f(P_0) = 1 + \sqrt{5}$ e $f(P_1) = 1 - \sqrt{5}$, atendendo ao Teorema de Wierstrass ($\mathcal{E}$ é limitado e fechado) podemos concluir que os valores máximo e mínimo de $f$ em $\mathcal{E}$ são, respetivamente, $1 + \sqrt{5}$ e $1 - \sqrt{5}$.

Suponhamos que $f, g_1, g_2, \dots, g_m : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são função diferenciáveis no aberto $D$ de $\mathbb{R}^n$, que $m < n$, e que se pretende determinar os extremos de $f$ sujeito às condições de ligação $g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, $g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, $\dots$, $g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$.

**Teo. 2.19**

Nas condições acima descritas, se $P_0 = (x_0, y_0)$ é um extremante local de $f$ sujeito às condições de ligação $g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, $g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, $\dots$, $g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, e os $m$ vetores $\nabla g_1(P_0)$, $\nabla g_2(P_0)$, $\dots$, $\nabla g_m(P_0)$ são **linearmente independentes**, então existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, ditos **multiplicadores de Lagrange**, tal que $\nabla f(P_0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(P_0)$.

**Método dos Multiplicadores de Lagrange generalizado**

Sejam $f$ e $g_1, g_2, \dots, g_m$ funções nas condições acima descritas.

1. Determinar as soluções $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ do sistema
$$\begin{cases} \nabla f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, m \end{cases}$$
2. Estudar a natureza de cada um dos pontos assim determinados.

### Exer. 2.20

Utilize, se possível, o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar os extremos (locais) das seguintes funções sujeitas às condições de ligação indicadas.

(a) $f(x,y) = x^2 + 2x + y^2 + 2y - 1, \qquad x^2 - 4x + y^2 = -2;$

(b) $f(x,y,z) = x - 2y + 2z, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1;$

(c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2, \qquad x - y + z = 1;$

(d) $f(x,y) = 2x^2 + xy - y^2 + y, \qquad 2x + 3y = 1;$

### Exer. 2.21

De entre todos os paralelipípedos retângulos em que a soma das medidas das arestas é 12 cm, qual é o que tem maior volume?

### Exer. 2.22

Determine o ponto do plano de equação $x + y + 2z = 1$ que está mais próximo de $M = (1,2,3)$.