Departamento de Matemática **Universidade de Aveiro**

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Exame de Recurso - 02/02/2011 **Duração: 2h30**

Nome: ______________________________ **N.º mecanográfico:** ______________

Declaro que desisto ______________________________ **N.º de folhas suplementares:** ____

Questão	1	2	3	Total
Cotação	80	70	50	200
Classificação				

Classificação final
valores

Justifique convenientemente todas as suas respostas e indique os cálculos que efectuar.

1. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & c & 1 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

   (a) Calcule o determinante de A, sabendo que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & 1 \end{vmatrix} = 1$.

   (b) Sejam $a = 1$ e $b = c = 0$.

      i. Mostre que A é invertível e calcule a sua inversa.

      ii. Determine uma base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}_3$ de modo que A seja a matriz de mudança da base $(1, x, x^2, x^3)$ para $\mathcal{B}$.

(c) Seja $c = 1$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

i. Discuta o sistema representado matricialmente por $AX = B^T$ em função dos parâmetros a e b.

ii. Calcule a matriz B^TB e determine uma base de $\mathcal{N}(B^TB)$, isto é, do espaço nulo de B^TB.

iii. Para $a = b = 1$, verifique que $\mathcal{N}(A) \subset \mathcal{N}(B^TB)$.

2. Considere os vectores $X = (1, 0, -1)$, $Y = (1, 2, 1)$, $Z = (0, 2, 2)$ e uma transformação linear $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $L(1, 0, 0) = X$, $L(0, 1, 0) = Y$ e $L(0, 0, 1) = Z$.

   (a) Mostre que Z é combinação linear de X e Y.

   (b) Calcule o produto externo $X \times Y$ e verifique se $X \times Y$ é colinear a $(1, -1, 1)$.

   (c) Averigue se $(1, -1, 1)$ pertence a $\ker(L)$. Averigue se $(1, -1, 1)$ pertence a $\text{im}(L)$.

   (d) Estude L quanto à injectividade e sobrejectividade.

   (e) Determine uma base ortonormada de $\text{im}(L)$ e calcule a projecção ortogonal de $(1, 0, 5)$ sobre $\text{im}(L)$.

3. Considere a matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que X_1 é um vector próprio de A e indique o valor próprio a este associado.

(b) Mostre que os valores próprios de A são três números inteiros consecutivos.

(c) Indique a matriz da transformação linear $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $L(X) = AX$ em relação a uma base de vectores próprios de A.

(d) Apresente uma equação reduzida e classifique a quádrica definida por $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xz - 12 = 0$.