

1. Séries de Potências e Fórmula de Taylor

baseado no texto de Alexandre Almeida, Cálculo II, fev. 2018

Isabel Brás

UA, 12/2/2018

Cálculo II – Agrup. IV 17/18

Resumo dos Conteúdos

- 1 Séries de Potências
- 2 Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange
- 3 Séries de Taylor

Série de potências — definição

Definição:

Chama-se **série de potências centrada em $c \in \mathbb{R}$** (ou série de potências de $x - c$) a uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^n, \text{ onde } a_n \in \mathbb{R}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}_0. \quad (1)$$

Os números a_n são os **coeficientes da série**.

Convenção:

Em (1), mesmo que $x = c$, $a_0(x - c)^0 = a_0$.

Exemplo

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

Série de potências centrada na origem com coeficientes unitários.

Notar que [**porquê?**]

- a série é convergente sse $|x| < 1$;

- $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, para $|x| < 1$.

O intervalo $] -1, 1[$ é o chamado **domínio de convergência** da série.

Domínio de convergência de uma série de potências

Definição:

Dada uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^n$ ao conjunto de pontos $x \in \mathbb{R}$ para os quais a série converge chamamos **domínio de convergência** da série.

Exemplos:

(Os Critérios de D'Alembert e/ou de Cauchy e (se necessário) o Critério de Leibniz são aqui úteis.)

① $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; domínio de convergência: \mathbb{R}

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x + 1)^n$; domínio de convergência: $] -2, 0]$

③ $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x - 2)^n$; domínio de convergência: $\{2\}$

Intervalo de convergência/Raio de convergência

Teorema:

Qualquer que seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^n$, verifica-se uma, e uma só, das condições:

- (i) a série converge (absolutamente) em $x = c$ e diverge se $x \neq c$;
- (ii) a série converge (absolutamente) em todo $x \in \mathbb{R}$;
- (iii) existe um único $R > 0$ para o qual a série converge (absolutamente) se $x \in]c - R, c + R[$ e diverge se $x \in]-\infty, c - R[\cup]c + R, +\infty[$.

Definições:

Ao número R chamamos **raio de convergência** da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^n$.

No caso (i), consideramos $R = 0$; no caso (ii), consideramos $R = +\infty$; Caso $R \neq 0$, o intervalo $]c - R, c + R[$ (ou \mathbb{R} , quando $R = +\infty$) designa-se por **intervalo de convergência** da série.

Exemplos:

① $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; intervalo de convergência: \mathbb{R} ; $R = +\infty$

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x+1)^n$; intervalo de convergência: $] -2, 0[$; $R = 1$

Observações:

- Uma série de potências pode convergir ou não nos extremos do seu intervalo de convergência. O teorema do slide anterior nada afirma sobre a natureza da série nesses pontos.
- O domínio de convergência de uma série de potências contém o seu intervalo de convergência, mas poderá ainda conter algum dos extremos desse intervalo. O estudo da natureza da série nesses pontos é feito caso a caso.

Cálculo do Raio de Convergência

Proposição:

Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^n$ uma série de potências com $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- ❶ Se existir $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, então $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.
- ❷ Se existir $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, então $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.

Polinómios de Taylor

Definição:

Seja f uma f.r.v.r. admitindo derivadas finitas até à ordem $n \in \mathbb{N}$ num dado ponto $c \in \mathbb{R}$, ao polinómio

$$T_c^n f(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k$$

chamamos **polinómio de Taylor de ordem n da função f no ponto c .**

Caso $c = 0$, o polinómio $T_0^n f(x)$ passa a ser designado por **polinómio de MacLaurin de ordem n da função f .**

Observação:

$T_c^n f(x)$ é o único polinómio de grau menor ou igual a n que assume o mesmo valor que f em c e que as suas sucessivas derivadas em c são iguais às sucessivas derivadas de f em c , respetivamente, até à ordem n .

Exemplos

- 1 O polinómio de Taylor de ordem n em c , para c qualquer em \mathbb{R} , de uma função polinomial de grau n é a própria função. Por exemplo, $T_1^3(x^3) = x^3$.
- 2
$$T_0^n(e^x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$
- 3
$$T_0^n\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$
- 4
$$T_0^{2n+1}(\sin x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$
- 5
$$T_0^{2n}(\cos x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Fórmula de Taylor

Teorema:

Sejam $n \in \mathbb{N}_0$, f uma função real com derivadas contínuas até à ordem $(n+1)$ num intervalo I e $c \in I$. Então, para todo $x \in I \setminus \{c\}$, existe θ entre c e x tal que

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k}_{T_c^n f(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1}}_{R_c^n f(x)}.$$



Fórmula de Taylor de ordem n da função f no ponto c , com resto de Lagrange

$R_c^n f(x) \longrightarrow$ resto de Lagrange de ordem n de f no ponto c

$T_c^n f(x) \longrightarrow$ polinómio de Taylor de ordem n de f no ponto c

Majorantes do resto de Lagrange

O módulo do resto de Lagrange $R_c^n f(x)$ dá-nos o erro absoluto cometido quando tomamos $T_c^n f(x)$ por $f(x)$, uma vez que

$$|R_c^n f(x)| = |f(x) - T_c^n f(x)|.$$

Mesmo que desconheçamos esse resto é possível, em geral, majorá-lo.

Forma de efetuar a majoração do resto:

Se a $(n+1)$ -ésima derivada de f é contínua num intervalo $[a, b]$ contendo o ponto c , então é limitada. Tomando $M \geq \sup_{y \in [a, b]} |f^{(n+1)}(y)|$

$$|R_c^n f(x)| \leq M \frac{|x - c|^{n+1}}{(n+1)!} \leq M \frac{(b - a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

onde $x \in [a, b]$.

Série de Taylor — definição

Definição:

Se f admitir derivadas (contínuas) de todas as ordens, à série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!} (x - c)^2 + \dots$$

chamamos **série de Taylor da função f no ponto c** .

Se $c = 0$, passamos a chamar-lhe **série de MacLaurin de f** .

Exemplo:

A série de MacLaurin da função $f(x) = \frac{1}{1-x}$ é a série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

No exemplo do slide anterior, a série de Taylor da função no ponto $c = 0$ converge para a função no intervalo $] - 1, 1[$, i.e., para cada $x \in] - 1, 1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Questão:

Seja I um intervalo aberto centrado no ponto c onde a série de Taylor de f é convergente, será que a sua soma para cada x é igual a $f(x)$?

Nem sempre, ver exemplo do slide seguinte!

Funções Analíticas

Definição:

Sejam I um intervalo aberto, $c \in I$, e f uma função definida em I que admite derivadas finitas de todas as ordens em c . Dizemos que f é analítica em c se existir $r > 0$ tal que, para todo o $x \in]c - r, c + r[\subset I$, a série de Taylor de f converge para $f(x)$.

Exemplos

❶ Função analítica em $c = 0$: $g(x) = \frac{1}{1-x}$

❷ Função não analítica em $c = 0$: $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$

f possui derivadas finitas de todas as ordens em \mathbb{R} , mas como $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, a sua série de MacLaurin converge para a função nula.

Teorema

Sejam I um intervalo, $c \in I$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivadas finitas de qualquer ordem em I . Então,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n, \quad \forall x \in I,$$

se, e só se, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_c^n f(x) = 0$.

Exemplo:

$$f(x) = e^x$$

$$R_0^n f(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad x \neq 0, \quad \xi \text{ entre } 0 \text{ e } x.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} R_0^n f(x) = 0$, [Porquê?], concluímos que a série de MacLaurin da função exponencial converge para a própria função em \mathbb{R} , i.e.,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Teorema:

Sejam I um intervalo, $c \in I$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivadas finitas de qualquer ordem em I . Se existir $M > 0$ tal que

$$|f^{(n)}(x)| \leq M, \quad \forall x \in I, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

então

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n, \quad \forall x \in I.$$

Exemplo:

Como

$$|\sin^{(n)}(x)| \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

concluimos que a série de MacLaurin da função seno converge para a própria função em \mathbb{R} , i.e.,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$$