

Matemática Discreta

Relações de Recorrência 1

Universidade de Aveiro 2016/2017

<http://moodle.ua.pt>

Relações de recorrência

Dependências recursivas simples

Equações de recorrência lineares homogêneas

Equação característica e raiz característica

Método geral de resolução de uma equação linear homogênea

Exercícios resolvidos

Relações de recorrência

- Alguns problemas combinatórios admitem uma solução que pode ser obtida recursivamente através de uma **relação de recorrência**:

$$a_n = f(n, a_{n-1}, \dots, a_{n-k}). \quad (1)$$

- A relação de recorrência (1) diz- de **ordem** k ou que tem **profundidade** k .
- A solução de um problema de ordem n é expressa em função das soluções de problemas idênticos de ordem inferior.

Exemplo (de factorial)

$$F_n = n \cdot F_{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

onde F_n denota o factorial de n ($n!$) e $F_1 = 1$.

Solução de uma equação de recorrência

- Uma sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ diz-se uma **solução de uma relação de recorrência** se os seus termos satisfazem a relação de recorrência.
- Resolver uma relação de recorrência consiste na determinação de uma fórmula não recursiva (ou **fórmula fechada**) para a_n . Em geral, é preferível calcular o valor de a_n com uma fórmula não recursiva (com uma fórmula recursiva são executadas n iterações).

Exemplo

$a_n = 3n$ é uma solução de $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, fazendo $a_1 = 3$, $a_2 = 6$ e uma vez que

$$3n = 2(3(n-1)) - 3(n-2)$$

Dependências recursivas simples

- Determinação de uma solução (método ingênuo):
 1. Depois da observação de alguns termos, propor uma fórmula não recursiva.
 2. Provar que a fórmula proposta é válida recorrendo, por exemplo, ao princípio de indução.

Exemplo

Vamos determinar o número de permutações do conjunto

$$[n] = \{1, 2, \dots, n-1, n\}.$$

Solução. Seja a_n = número de permutações do conjunto $[n]$, $n \in \mathbb{N}$. Para determinar a_n calcula-se o número de possibilidades para a posição do número $n \rightarrow n$ e o número de permutações dos restantes $n-1$ números $\rightarrow a_{n-1}$.

Assim, pelo princípio da multiplicação, $a_n = na_{n-1}$, $n \geq 2$.

Solução da equação de recorrência

- Proposta de uma solução:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 2 \times 1 \\ a_3 &= 3 \times a_2 = 3 \times 2 \times 1 \end{aligned} \right\}$$

Será $a_n = n!$, $n \in \mathbb{N}$?

- Prova por indução:

$n = 1 \rightarrow a_1 = 1$ (coincide com o n^o de permutações do conjunto $\{1\}$)

Hipótese de indução: suponha que para $n \in \mathbb{N}$ (fixo) $a_n = n!$.

- Então $a_{n+1} = (n+1)a_n \stackrel{\text{(H.I.)}}{=} (n+1)n! = (n+1)!$.
- Conclusão: $a_n = n!$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Equações de recorrência lineares homogêneas

- Uma equação de recorrência linear homogênea de ordem r é uma equação de recorrência do tipo:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_r a_{n-r},$$

onde c_i é uma constante, para $i = 1, 2, \dots, r$.

- Para determinar uma solução são necessárias r condições iniciais.
- Equação característica: $x^r - c_1 x^{r-1} - c_2 x^{r-2} - \cdots - c_r = 0$.
- Raízes características: raízes reais ou complexas da equação característica.

Equação característica e raiz característica

Lema 1

Sejam α e β as raízes (não nulas) da equação característica

$$x^2 - c_1x - c_2 = 0$$

que corresponde à equação de recorrência

$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$. Se $\alpha \neq \beta$, então a solução geral vem dada por

$$a_n = C_1 \alpha^n + C_2 \beta^n,$$

caso contrário ($\alpha = \beta$),

$$a_n = (C_1 + C_2 n) \alpha^n.$$

Em ambos os casos, os coeficientes C_1 e C_2 são determinados pelas condições iniciais.

Resolução de uma equação linear homogênea

Exercício

Determinar a solução da equação de recorrência

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

com $a_0 = 0$ e $a_1 = -2$.

Equação característica: $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Raízes características: 1 e 2 (ambas com multiplicidade 1)

Solução geral: $a_n = C_1 + C_2 2^n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Determinação das constantes C_1 e C_2 : $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + 2C_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -C_2 \\ C_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = -2 \end{cases}.$$

Solução: $a_n = 2 - 2^{n+1}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Resolução de uma equação linear homogênea

Lema 2. Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ as raízes da equação característica $x^r - c_1 x^{r-1} - c_2 x^{r-2} - \dots - c_r = 0$ da equação de recorrência

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_r a_{n-r}. \quad (1)$$

Supondo que para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ α_i tem multiplicidade m_i , pelo que $m_1 + \dots + m_k = r$, então

$$x^r - c_1 x^{r-1} - \dots - c_r = (x - \alpha_1)^{m_1} (x - \alpha_2)^{m_2} \dots (x - \alpha_k)^{m_k} \text{ e}$$

$$\begin{aligned} a_n = & (D_0 + D_1 n + \dots + D_{m_1-1} n^{m_1-1}) \alpha_1^n + \\ & + (E_0 + E_1 n + \dots + E_{m_2-1} n^{m_2-1}) \alpha_2^n + \quad (2) \\ & + \dots + (Z_0 + Z_1 n + \dots + Z_{m_k-1} n^{m_k-1}) \alpha_k^n \end{aligned}$$

é a solução da equação de recorrência, onde as constantes

$$D_0, \dots, D_{m_1-1}, E_0, \dots, E_{m_2-1}, \dots, Z_0, \dots, Z_{m_k-1}$$

são determinadas pelas condições iniciais.

Prova do Lema 2

Sendo α_1 uma raiz de multiplicidade m_1 da equação característica, então α_1 é raiz dos seguintes polinómios:

- $p(x) = x^n - c_1 x^{n-1} - \dots - c_r x^{n-r}$, pelo que α_1^n verifica (1) e

$$D_0 \alpha_1^n = \sum_{i=1}^r c_i D_0 \alpha_1^{n-i};$$

- $x p'(x) = n x^n - c_1 (n-1) x^{n-1} - \dots - c_r (n-r) x^{n-r}$, pelo que $n \alpha_1^n$ verifica (1) e

$$D_1 n \alpha_1^n = \sum_{i=1}^r c_i D_1 (n-i) \alpha_1^{n-i};$$

- $x(x p'(x))' = n^2 x^n - c_1 (n-1)^2 x^{n-1} - \dots - c_r (n-r)^2 x^{n-r}$, pelo que $n^2 \alpha_1^n$ verifica (1) e

$$D_2 n^2 \alpha_1^n = \sum_{i=1}^r c_i D_2 (n-i)^2 \alpha_1^{n-i};$$

⋮

- $x(\dots(x p'(x))' \dots)' = n^{m_1-1} x^n - \dots - c_r (n-r)^{m_1-1} x^{n-r}$, pelo que $n^{m_1-1} \alpha_1^n$ verifica (1) e

$$D_{m_1-1} n^{m_1-1} \alpha_1^n = \sum_{i=1}^r c_i D_{m_1-1} (n-i)^{m_1-1} \alpha_1^{n-i}.$$

Prova do Lema 2 (cont)

$$\begin{array}{rcll}
 \text{Logo, } D_0 \alpha_1^n + D_1 n \alpha_1^n + D_2 n^2 \alpha_1^n + \cdots + D_{m_1-1} n^{m_1-1} \alpha_1^n = & & & \\
 c_1 D_0 \alpha_1^{n-1} & + & \cdots & + c_r D_0 \alpha_1^{n-r} + \\
 c_1 D_1 (n-1) \alpha_1^{n-1} & + & \cdots & + c_r D_1 (n-r) \alpha_1^{n-r} + \\
 c_1 D_2 (n-1)^2 \alpha_1^{n-1} & + & \cdots & + c_r D_2 (n-r)^2 \alpha_1^{n-r} + \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 c_1 D_{m_1-1} (n-1)^{m_1-1} \alpha_1^{n-1} & + & \cdots & + c_r D_{m_1-1} (n-r)^{m_1-1} \alpha_1^{n-r}
 \end{array}$$

$$c_1 \left(\sum_{j=0}^{m_1-1} D_j (n-1)^j \right) \alpha_1^{n-1} + \cdots + c_r \left(\sum_{j=0}^{m_1-1} D_j (n-r)^j \right) \alpha_1^{n-r}$$

Consequentemente,

$$a_n = D_0 \alpha_1^n + D_1 n \alpha_1^n + \cdots + D_{m_1-1} n^{m_1-1} \alpha_1^n = \left(\sum_{j=0}^{m_1-1} D_j n^j \right) \alpha_1^n$$

é solução de (1) e o mesmo se aplica para $\alpha_2, \dots, \alpha_k$, pelo que

$$a_n = \left(\sum_{j=0}^{m_1-1} D_j n^j \right) \alpha_1^n + \left(\sum_{j=0}^{m_2-1} E_j n^j \right) \alpha_2^n + \cdots + \left(\sum_{j=0}^{m_k-1} Z_j n^j \right) \alpha_k^n.$$

Observação

De acordo com o [Lema 2](#), quando as raízes da equação característica são todas distintas, ou seja, $k = r$ e

$$m_1 = m_2 = \cdots = m_r = 1,$$

podemos concluir que

$$a_n = C_1 \alpha_1^n + \cdots + C_r \alpha_r^n,$$

com $C_1 = D_0, C_2 = E_0, \dots, C_r = Z_0$, de acordo com a expressão [\(2\)](#).

Exercício 1

Vamos resolver a equação de recorrência

$$a_n = 2a_{n-1} + 15a_{n-2} + 4a_{n-3} - 20a_{n-4}, \quad n \geq 4,$$

com condições iniciais $a_0 = 6$, $a_1 = 3$, $a_2 = 71$ e $a_3 = 203$.

Resolução. Equação característica:

$$x^4 - 2x^3 - 15x^2 - 4x + 20 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2(x - 1)(x - 5) = 0.$$

Raízes características:

- ▶ -2 (com multiplicidade 2),
- ▶ 1 e 5 (ambas com multiplicidade 1).

Solução geral: $a_n = (C_1 + C_2n)(-2)^n + C_3 + C_45^n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Determinação das constantes

- Determinação das constantes c_1, c_2, c_3 e c_4 :

$$\begin{cases} a_0 = 6 \\ a_1 = 3 \\ a_2 = 71 \\ a_3 = 203 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_3 + C_4 = 6 \\ -2(C_1 + C_2) + C_3 + 5C_4 = 3 \\ 4(C_1 + 2C_2) + C_3 + 25C_4 = 71 \\ -8(C_1 + 3C_2) + C_3 + 125C_4 = 203 \end{cases}$$

- $\begin{cases} C_1 = 3 \\ C_2 = 1 \\ C_3 = 1 \\ C_4 = 2 \end{cases}$

Solução final: $a_n = (3 + n)(-2)^n + 1 + 2 \cdot 5^n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Exercício 2

- Vamos determinar a solução da equação de recorrência

$$a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2},$$

com condições iniciais: $a_0 = 1$, $a_1 = -9$.

Resolução.

- ▶ Equação característica: $x^2 + 6x + 9 = 0$.
- ▶ Raízes características: -3 com multiplicidade 2 .
- ▶ Solução geral: $a_n = (C_1 + C_2n)(-3)^n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- ▶ Determinação das constantes C_1 e C_2 :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ -3(C_1 + C_2) = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 2 \end{cases}$$

- Solução: $a_n = (1 + 2n)(-3)^n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.