Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo I — Agrupamento I 2016/2017

## Soluções da Ficha de Exercícios 1

1. (a) $f^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x}-1 \end{array}$

   de contradomínio $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$;

   (b) $f^{-1}: \begin{array}{ccc} ]2,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -1+\ln(x-2) \end{array}$

   de contradomínio $\mathbb{R}$;

   (c) $f^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2-3^x \end{array}$

   de contradomínio $]-\infty,2[$;

   (d) $f^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3-1 \end{array}$

   de contradomínio $\mathbb{R}$.

2. (a) $k=\frac{1}{2}$; (b) —; (c) $g: \begin{array}{ccc} \left]\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{-\ln(x-\frac{1}{2})}} \end{array}$

   de contradomínio $\mathbb{R}^+$.

3. (a) $x=0$; (b) $x\in]-\infty,-1]$; (c) $x\in]-\infty,0]\cup[1,+\infty[$; (d) $x\in]0,\mathrm{e}^{-2}[$; (e) $x\in\left]-2,\frac{1}{3}\right]\cup]2,+\infty[$.

4. —

5. (a) $f^{-1}: \begin{array}{ccc} [-1/2,1/2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{arcsen}(2x)-\pi/2 \end{array}$

   de contradomínio $[-\pi,0]$;

   (b) $f^{-1}: \begin{array}{ccc} [\pi/6,5\pi/6] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1-\operatorname{sen}(3\pi/4-3x/2) \end{array}$

   de contradomínio $[0,2]$;

   (c) $f^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2-\frac{\pi}{\operatorname{arctg} x} \end{array}$

   de contradomínio $]-\infty,0[\cup]4,+\infty[$;

   (d) $f^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3+\mathrm{e}^{\frac{4x+1}{5}} \end{array}$

   de contradomínio $]3,+\infty[$;

   (e) $f^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2}-\ln\sqrt{x} \end{array}$

   de contradomínio $\mathbb{R}$.

6. —

7. (a) $f'(x) = \frac{4}{3\sqrt[3]{2x-1}}$, $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$;
   (b) $f'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x^2}(1+x^2)$, $D_{f'} = \mathbb{R}$;
   (c) $f'(x) = \frac{-2\mathrm{sen}\,(\log_2(x^2))}{x\ln 2}$, $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
   (d) $f'(x) = \frac{1-x^2(2\ln x+1)}{x}$, $D_{f'} = \mathbb{R}^+$.

8. $(f^{-1})'(-3) = \frac{1}{54}$.

9. $(f^{-1})'(2) = 1$.

10. (a) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; (b) 1.

11. (a) $\frac{-12x^2\cos(4x^3)}{1+\mathrm{sen}^2(4x^3)}$; (b) $f'(x) = \frac{-2}{x\sqrt{x^4-1}} = \frac{-2\sqrt{x^4-1}}{x^5-x}$; (c) $f'(x) = 2x\,\mathrm{arctg}\,x + 1$; (d) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

12. A função $f$ é crescente em $]-\infty, 0]$, decrescente em $[0, +\infty[$ e tem máximo $f(0) = 1$ em $x = 0$.

13. Verdadeira.

14. Sugestão: Utilize o Teorema de Bolzano para garantir que $f$ tem pelo menos uma raiz e o estudo dos zeros da derivada para garantir a unicidade.

15. Sugestão: Faça o estudo da primeira derivada de $f$.

16. $f$ tem um zero em $]0,1[$, um em $]1,2[$ e outro em $]-1,0[$.

17. —

18. (a) Sugestão: Considere a função $f(x) = \mathrm{arcsen}x - x$ e prove que é positiva no intervalo considerado analisando o comportamento da primeira derivada; (b) —; (c) —.

19. $x = 0$ é um minimizante local; $h(0) = 2$.

20. (a) É contínua em $\mathbb{R}$;
    (b) $f$ não é diferenciável em $x = 0$;
    (c) $b = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

21. —

22. —

23. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x - \mathrm{sen}\,x}{x + \mathrm{sen}\,x} = 1$.

24. (a) 1/9; (b) não existe; (c) 2/3; (d) $-1/2$; (e) $-1$; (f) 0; (g) 1; (h) 0; (i) 1; (j) $\mathrm{e}^4$; (k) 0; (l) 1; (m) $\ln 3$; (n) e; (o) $\mathrm{e}^{-2}$; (p) 0.

25. (a) $f$ é contínua em $[0, e]$; (b) $+\infty$;
    (c) 0 é mínimo absoluto e 1 é máximo absoluto;
    (d) $CD_f = [0,1]$.

26. —

27. (a) $f$ é contínua em $x = 0$.
    (b) $f$ não é diferenciável em $x = 0$.
    (c) $f$ tem mínimo global em $x = 0$.
    (d) —
    (e) —
    (f) $g^{-1} : [0, \pi/2[ \to \mathbb{R} \quad g^{-1}(x) = -\sqrt{\mathrm{tg}\,x}$, $CD_{f^{-1}} = \mathbb{R}_0^-$.

28. —

29. (a) $D_f = [0, 2]$.
(b) —
(c) Para justificar a existência de máximo e mínimo globais usar o Teorema de Weierstrass. Observar que $f'(x) < 0$, para todo $x \in ]0, 2[$, $f(0) = \frac{\pi}{2}$ e $f(2) = \frac{-\pi}{2}$. Então o mínimo global é $\frac{-\pi}{2}$ e o máximo global é $\frac{\pi}{2}$.
(d) $CD_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

30. (a) 100; (b) Não; (c) $p$ é estritamente crescente em $\mathbb{R}_0^+$; (d) 1000;
(e) $D_{p^{-1}} = [100, 1000[$, $p^{-1}(x) = \ln \frac{9x}{1000-x}$; (f) Verdadeira.

31. (a) — ; (b) $10^3$; (c) $10^{0.75} - 1$, que é aproximadamente 4.62; (d) 9.

32. (a) $N$ é estritamente decrescente em $\mathbb{R}_0^+$;
(b) $t = 0$ é maximizante absoluto e o máximo absoluto correspondente é $N(0) = a$;
(c) $CD_N = ]0, a]$;
(d) $5 \times 10^9$ anos.