Tema 4

Análise Sintáctica

Gramáticas independentes de contexto, análise sintáctica descendente e ascendente

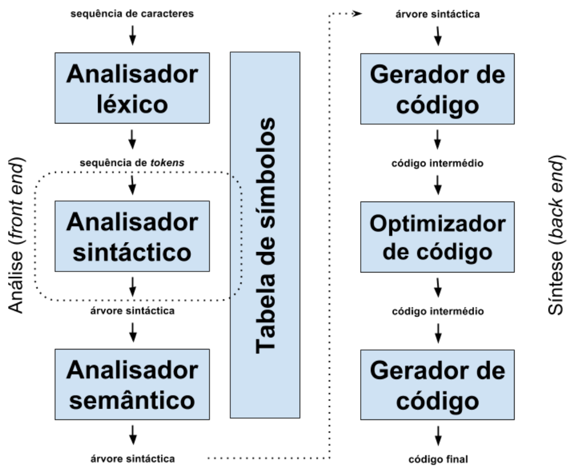
Linguagens Formais e Autómatos, 2º semestre 2017-2018

Miguel Oliveira e Silva, DETI, Universidade de Aveiro

Conteúdo

1 Análise sintáctica: Estrutura de um Compilador

- Vamos agora analisar com mais detalhe a fase de análise sintáctica:



2 Gramáticas Independentes de Contexto

Definição de gramática

- Uma gramática é um quádruplo $G = (T,N,S,P)$, onde:
  1. T é um conjunto finito não vazio de símbolos terminais;
  2. N é um conjunto finito não vazio, disjunto de T ($N \cap T = \emptyset$), de símbolos não terminais;
  3. $S \in N$ é o símbolo inicial;
  4. P é um conjunto finito de produções (ou regras de rescrita), cada uma da forma $\alpha \to \beta$.
- α e β são designados por *cabeça da produção* e *corpo da produção*, respetivamente.
- No caso geral:

  $\alpha \in (T \cup N)^* N (T \cup N)^*$

  $\beta \in (T \cup N)^*$

  isto é, α é uma cadeia de símbolos terminais e não terminais contendo, pelo menos, um símbolo não terminal; e β é uma cadeia de símbolos terminais e não terminais.

Gramáticas independentes de contexto

- Uma gramática $G = (T,N,S,P)$ diz-se independente ou livre de contexto se, para qualquer produção $(\alpha \to \beta) \in P$, a condição seguinte é satisfeita:

$$\alpha \quad \in \quad N$$

- A linguagem gerada por uma gramática independente do contexto diz-se independente do contexto.
  - Note que as gramáticas regulares são também gramáticas independentes do contexto.
- As gramáticas independentes do contexto são fechadas sob as operações de reunião, concatenação e fecho.
  - No entanto, as GIC não são fechadas sob as operações de intersecção e complementação.

Exemplo de gramática

- Por exemplo a gramática $G = (\{0,1\},\{S,A\},S,P)$, onde P é constituído pelas regras:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow 0S \\ S &\rightarrow 0A \\ A &\rightarrow 0A1 \\ A &\rightarrow \varepsilon \end{aligned}$$

- A linguagem definida por esta gramática é:

$$L = \{0^n 1^m : n \in \mathbb{N} \wedge m \in \mathbb{N}_0 \wedge n > m\}$$

- Esta gramática é um exemplo de uma *gramática independente (ou livre) de contexto*.
- Dada a gramática $G_a = (\{0,1\},\{A\},A,P)$ (para as mesmas produções P), que linguagem será definida por G_a?

Outro exemplo de gramática

- Vamos supor que queremos definir uma gramática, num alfabeto binário ($B = \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$), que garanta que o número de uns é igual ao números de zeros. Isto é para a linguagem: $L = \{u \in B^* \mid \#(\mathbf{0},u) = \#(\mathbf{1},u)\}$
- Para chegar a esta gramática podemos desde logo constatar o seguinte:
  - caso apareça um **0** terá de aparecer um **1**;
  - a ordem dos símbolos é irrelevante (não pode depender de permutações).
- Para garantir isso basta ter um conta as duas variantes:

$$S \rightarrow \varepsilon \mid \mathbf{1}S\mathbf{0}S \mid \mathbf{0}S\mathbf{1}S$$

- Esta gramática não é regular já que não é possível encostar os terminais totalmente à esquerda (ou à direita).
- É sim um outro exemplo de uma *gramática independente (ou livre) de contexto*.

2.1 Derivações

- Podemos tratar as produções como regras de rescrita, substituindo um símbolo não terminal pelo corpo de uma das suas produções.
- Por exemplo, se tivermos a seguinte gramática:

$$E \rightarrow E * E \mid E + E \mid -E \mid (E) \mid \mathbf{id}$$

  podemos rescrever o símbolo não terminal E por qualquer uma das alternativas aplicáveis. Por exemplo:

$$E \Rightarrow -E$$

  que se deve ler: "E deriva $-E$".
- Uma rescrita mais extensa poderá ser:

$$E \Rightarrow -E \Rightarrow -(E) \Rightarrow -(\mathbf{id})$$

- Chamamos a uma sequência deste género, uma *derivação* de $-(\mathbf{id})$ a partir de E.
- Esta derivação prova que a palavra $-(\mathbf{id})$ é um caso particular de uma expressão E.

Derivações: definição geral

- Dada uma palavra $\alpha A \beta$ e uma produção $A \to v$, chama-se *derivação direta* à rescrita de $\alpha A \beta$ em $\alpha v \beta$, denotando-se
$$\alpha A \beta \Rightarrow \alpha v \beta$$
- Dada uma palavra $\alpha A \beta$, com $\beta \in T^*$, e uma produção $A \to v$, chama-se *derivação direta à direita* à rescrita de $\alpha A \beta$ em $\alpha v \beta$, denotando-se
$$\alpha A \beta \overset{D}{\Rightarrow} \alpha v \beta$$
- Dada uma palavra $\alpha A \beta$, com $\alpha \in T^*$, e uma produção $A \to v$, chama-se *derivação direta à esquerda* à rescrita de $\alpha A \beta$ em $\alpha v \beta$, denotando-se
$$\alpha A \beta \overset{E}{\Rightarrow} \alpha v \beta$$
- Isto é, é possível fazer uma derivação directa à direita/esquerda quando o lado direito da produção tem terminais à direita/esquerda da regra a rescrever.
- Chama-se *derivação* a uma sucessão de zero ou mais derivações diretas, denotando-se
$$\alpha \overset{*}{\Rightarrow} \beta$$
- Chama-se *derivação à direita* a uma sucessão de zero ou mais derivações diretas à direita, denotando-se
$$\alpha \overset{D*}{\Rightarrow} \beta$$
ou, equivalentemente,
$$\alpha = \alpha_0 \overset{D}{\Rightarrow} \alpha_1 \overset{D}{\Rightarrow} \cdots \overset{D}{\Rightarrow} \alpha_n = \beta$$
onde n é o comprimento da derivação.
- Chama-se *derivação à esquerda* a uma sucessão de zero ou mais derivações diretas à esquerda, denotando-se
$$\alpha \overset{E*}{\Rightarrow} \beta$$
ou, equivalentemente,
$$\alpha = \alpha_0 \overset{E}{\Rightarrow} \alpha_1 \overset{E}{\Rightarrow} \cdots \overset{E}{\Rightarrow} \alpha_n = \beta$$
onde n é o comprimento da derivação.
- Recuperando a gramática:
$$E \to E * E \mid E + E \mid -E \mid (E) \mid \mathbf{id}$$
- Podemos verificar que a palavra $-(\mathbf{id} + \mathbf{id})$ é um caso particular desta gramática, porque existe (pelo menos) uma derivação:
$$E \overset{E}{\Rightarrow} -E \overset{E}{\Rightarrow} -(E) \overset{E}{\Rightarrow} -(E+E) \overset{E}{\Rightarrow} -(\mathbf{id}+E) \overset{E}{\Rightarrow} -(\mathbf{id}+\mathbf{id})$$
- Isto é: $E \overset{*}{\Rightarrow} -(\mathbf{id}+\mathbf{id})$
- Em cada passo da derivação há duas opções a tomar: escolher qual o não terminal a substituir e, tendo feito esta escolha, escolher a produção desse não terminal.
- A palavra $-(\mathbf{id}+\mathbf{id})$ tem uma derivação alternativa (que difere da anterior na penúltima rescrita) dada por:
$$E \overset{D}{\Rightarrow} -E \overset{D}{\Rightarrow} -(E) \overset{D}{\Rightarrow} -(E+E) \overset{D}{\Rightarrow} -(E+\mathbf{id}) \overset{D}{\Rightarrow} -(\mathbf{id}+\mathbf{id})$$

Exemplo de derivação

- Considere, sobre o alfabeto $T = \{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$, a gramática seguinte

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow \varepsilon \mid \mathbf{a}B \mid \mathbf{b}A \mid \mathbf{c}S \\
A &\rightarrow \mathbf{a}S \mid \mathbf{b}AA \mid \mathbf{c}A \\
B &\rightarrow \mathbf{a}BB \mid \mathbf{b}S \mid \mathbf{c}B
\end{aligned}
$$

- Determine as derivações à direita e à esquerda da palavra **aabcbc**

- à direita:

$$S \Rightarrow \mathbf{a}B \Rightarrow \mathbf{aa}BB \Rightarrow \mathbf{aa}B\mathbf{b}S \Rightarrow \mathbf{aa}B\mathbf{bc}S$$

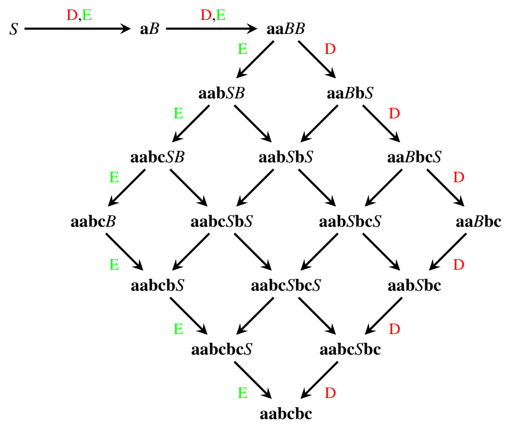
$$\Rightarrow \mathbf{aa}B\mathbf{bc} \Rightarrow \mathbf{aab}S\mathbf{bc} \Rightarrow \mathbf{aabc}S\mathbf{bc} \Rightarrow \mathbf{aabcbc}$$

- à esquerda:

$$S \Rightarrow \mathbf{a}B \Rightarrow \mathbf{aa}BB \Rightarrow \mathbf{aab}SB \Rightarrow \mathbf{aabc}SB$$

$$\Rightarrow \mathbf{aabc}B \Rightarrow \mathbf{aabcb}S \Rightarrow \mathbf{aabcbc}S \Rightarrow \mathbf{aabcbc}$$

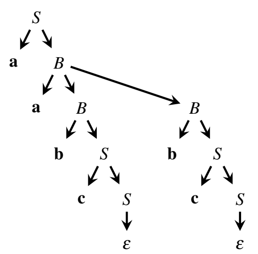
- A árvore seguinte capta as alternativas de derivação. Considera-se novamente a palavra **aabcbc** e a gramática anterior.



- Note que esta árvore contém todas as combinações possíveis de derivações à esquerda e à direita.

2.2 Árvore sintáctica

- Uma *árvore sintáctica*, ou árvore de derivação (*parse tree*), é uma representação de uma derivação onde os nós-ramos são elementos de N (não terminais) e os nós-folhas são elementos de T (terminais).
- A árvore sintáctica da palavra **aabcbc** na gramática anterior é:



- A relação entre gramáticas independentes de contexto e a estrutura de dados tipo árvore é mais profunda do que pode parecer à primeira vista.
- O facto de nas GICs todas as produções terem um, e um só, símbolo não terminal na cabeça da produção, faz com que este possa ser reescrito (derivado) em função da sequência de símbolos do corpo (aplicável) da produção.

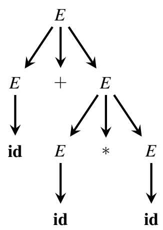
- Ou seja, numa estrutura de dados tipo árvore em que a cabeça da produção é o nó "pai", e a sequência de símbolos do corpo da produção são os filhos.
- O facto da decisão sobre possíveis derivações depender apenas de um (e um só) símbolo não terminal, mais torna eficiente algoritmos automáticos para esse reconhecimento.
- Nas gramáticas que não são independentes de contexto (dependentes de contexto ou sem restrição) esta representação não é possível.

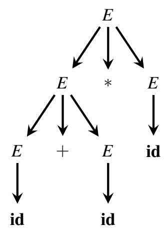
2.3 Gramáticas ambíguas

- Recuperando novamente a gramática:

$$E \rightarrow E*E \mid E+E \mid -E \mid (E) \mid \mathbf{id}$$

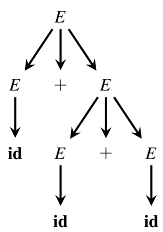
  considere a entrada $\mathbf{id}+\mathbf{id}*\mathbf{id}$
- Podemos extrair duas árvores sintácticas distintas:

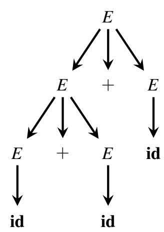




- A árvore da esquerda segue as regras de precedência da aritmética, e a da direita dá maior prioridade à soma.

- Este problema não resulta apenas da precedência entre duas operações distintas, a associatividade aplicável à mesma operação pode também gerar ambiguidade.
- Da entrada $\mathbf{id}+\mathbf{id}+\mathbf{id}$ também resultam duas árvores sintácticas distintas:





- A árvore da esquerda tem associatividade à direita, e a da direita tem associatividade à esquerda.

Gramáticas ambíguas: definição

- Diz-se que uma palavra é derivada *ambiguamente* se possuir duas ou mais árvores de derivação distintas.
- Diz-se que uma gramática é *ambígua* se possuir pelo menos uma palavra gerada ambiguamente.

- Muitas vezes é possível definir-se uma gramática não ambígua que gere a mesma linguagem do que outra gramática ambígua.
- No entanto, há gramáticas *inerentemente ambíguas*.
- Já vimos um exemplo comum resultante das expressões aritméticas.
- Vejamos outro exemplo:

$$L = \{a^i b^j c^k : i = j \vee j = k\}$$

Gramáticas ambíguas: exemplo 1

- Uma gramática (GIC) para esta linguagem será $G = (\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}, \{S, AB, C, A, BC\}, S, P)$, em que as produções ($P$) são:

$$
\begin{array}{rcl}
S & \rightarrow & AB\,C \mid A\,BC \\
AB & \rightarrow & \mathbf{a}\,AB\,\mathbf{b} \mid \varepsilon \\
BC & \rightarrow & \mathbf{b}\,BC\,\mathbf{c} \mid \varepsilon \\
A & \rightarrow & \mathbf{a}\,A \mid \varepsilon \\
C & \rightarrow & \mathbf{c}\,C \mid \varepsilon
\end{array}
$$

- Assim, caso $i = j = k$, teremos duas possíveis árvores sintácticas (uma derivando por AB outra por BC).

Gramáticas ambíguas: exemplo 2

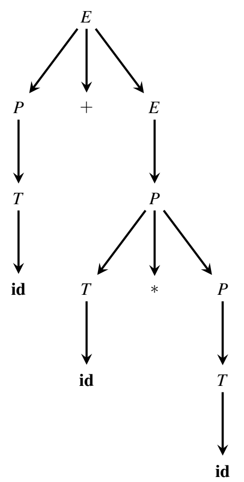
- Recuperando novamente a gramática:

$$E \rightarrow E*E \mid E+E \mid -E \mid (E) \mid \mathbf{id}$$

- Se desejarmos garantir que a operação da multiplicação tem precedência relativamente à soma, sem utilizar convenções que não estejam expressas directamente na gramática (como acontece com a regra ANTLR de dar prioridade às regras definidas primeiro), será que conseguimos gerar uma gramática não ambígua?
- Vejamos se as seguintes regras funcionam:

$$
\begin{array}{rcl}
E & \rightarrow & P + E \mid P \\
P & \rightarrow & T * P \mid T \\
T & \rightarrow & -E \mid (E) \mid \mathbf{id}
\end{array}
$$

- Para a entrada $\mathbf{id} + \mathbf{id} * \mathbf{id}$, teremos apenas a seguinte árvore sintáctica:



2.4 Projecto de gramáticas simples

Exemplo de projecto de GIC: solução 1

- Sobre o conjunto de terminais $T = \{\mathbf{a},\mathbf{b}\}$, determine uma gramática independente do contexto que represente a linguagem:

$$L1 = \{w \in T^* \ : \ \#(a,w) = \#(b,w)\}$$

- Já resolvemos um problema similar o início da aula.

- Logo:

$$S \to \varepsilon \mid \mathbf{a}S\mathbf{b}S \mid \mathbf{b}S\mathbf{a}S$$

- A gramática é ambígua?
- Sim! (Analise a palavra **aabbab**)

Exemplo de projecto de GIC: outras soluções

- Outra possível solução é:

$$\begin{aligned} S &\to \varepsilon \mid \mathbf{a}B \mid \mathbf{b}A \\ A &\to \mathbf{a}S \mid \mathbf{b}AA \\ B &\to \mathbf{a}BB \mid \mathbf{b}S \end{aligned}$$

- Ainda outra possibilidade é:

$$\begin{aligned} S &\to \varepsilon \mid \mathbf{a}BS \mid \mathbf{b}AS \\ A &\to \mathbf{a} \mid \mathbf{b}AA \\ B &\to \mathbf{a}BB \mid \mathbf{b} \end{aligned}$$

Outro Exemplo de projecto de GIC

- Sobre o conjunto de terminais $T = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, determine uma gramática independente do contexto que represente a linguagem:

$$L = \{w \in T^* \; : \; \#(a, w) = \#(b, w)\}$$

- Este problema difere do anterior pelo facto de haver mais um símbolo terminal.
- Logo:

$$S \to \varepsilon \mid \mathbf{a}S\mathbf{b}S \mid \mathbf{b}S\mathbf{a}S \mid \mathbf{c}S$$

2.5 Operações sobre GIC

2.5.1 Reunião

- Sejam $G_1 = (T_1, N_1, S_1, P_1)$ e $G_2 = (T_2, N_2, S_2, P_2)$ duas gramáticas independentes de contexto quaisquer com $N_1 \cap N_2 = \emptyset$
- A gramática $G = (T, N, S, P)$ onde:

  $$\begin{aligned} &T = T_1 \cup T_2 \\ &N = N_1 \cup N_2 \cup \{S\} \\ &S \notin (T \cup N_1 \cup N_2) \\ &P = \{S \to S_1, S \to S_2\} \cup P_1 \cup P_2 \end{aligned}$$

  é independente de contexto e gera a linguagem $L = L(G_1) \cup L(G_2)$
- As produções de G_1 e G_2 são transferidas para a nova gramática sem nenhuma alteração substancial (eventualmente pode ser necessário mudar nomes de símbolos não terminais).
- A nova produção $S \to S_i$, com $i = 1, 2$, permite que G gere a linguagem $L(G_i)$.

Operações sobre GIC: reunião (exemplo)

- Sobre o conjunto de terminais $T = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, determine uma gramática independente de contexto que represente a linguagem

$$L = \{w \in T^* \ : \ L_1 \cup L_2\}$$

sabendo que:

$$L_1 = \{w \in T^* \ : \ \#(a,w) = \#(b,w)\}$$
$$L_2 = \{w \in T^* \ : \ \#(a,w) = \#(c,w)\}$$

- Primeiro vamos gerar as gramáticas para cada linguagem:
$L_1: \quad S_1 \ \to \ \varepsilon \ | \ \mathbf{a}S_1\mathbf{b}S_1 \ | \ \mathbf{b}S_1\mathbf{a}S_1 \ | \ \mathbf{c}S_1$
$L_2: \quad S_2 \ \to \ \varepsilon \ | \ \mathbf{a}S_2\mathbf{c}S_2 \ | \ \mathbf{c}S_2\mathbf{a}S_2 \ | \ \mathbf{b}S_2$
- Donde resulta a seguinte solução:

$$\begin{aligned} S &\to S_1 \ | \ S_2 \\ S_1 &\to \varepsilon \ | \ \mathbf{a}S_1\mathbf{b}S_1 \ | \ \mathbf{b}S_1\mathbf{a}S_1 \ | \ \mathbf{c}S_1 \\ S_2 &\to \varepsilon \ | \ \mathbf{a}S_2\mathbf{c}S_2 \ | \ \mathbf{c}S_2\mathbf{a}S_2 \ | \ \mathbf{b}S_2 \end{aligned}$$

2.5.2 Concatenação

- Sejam $G_1 = (T_1, N_1, S_1, P_1)$ e $G_2 = (T_2, N_2, S_2, P_2)$ duas gramáticas independentes de contexto quaisquer com $N_1 \cap N_2 = \emptyset$
- A gramática $G = (T, N, S, P)$ onde:

$$T = T_1 \cup T_2$$
$$N = N_1 \cup N_2 \cup \{S\}$$
$$S \notin (T \cup N_1 \cup N_2)$$
$$P = \{S \to S_1 S_2\} \cup P_1 \cup P_2$$

é independentes de contexto e gera a linguagem $L = L(G_1) \cdot L(G_2)$
- A nova produção $S \to S_1 S_2$ justapõe palavras de $L(G_2)$ às de $L(G_1)$.

Operações sobre GIC: concatenação (exemplo)

- Sobre o conjunto de terminais $T = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, determine uma gramática independente de contexto que represente a linguagem

$$L = L_1 \ \cdot \ L_2$$

sabendo que:

$$L_1 = \{w_1 \in T^* \ : \ \#(a,w_1) = \#(b,w_1)\}$$
$$L_2 = \{w_2 \in T^* \ : \ \#(a,w_2) = \#(c,w_2)\}$$

- Solução possível:

$$\begin{aligned} S &\to S_1 S_2 \\ S_1 &\to \varepsilon \ | \ \mathbf{a}S_1\mathbf{b}S_1 \ | \ \mathbf{b}S_1\mathbf{a}S_1 \ | \ \mathbf{c}S_1 \\ S_2 &\to \varepsilon \ | \ \mathbf{a}S_2\mathbf{c}S_2 \ | \ \mathbf{c}S_2\mathbf{a}S_2 \ | \ \mathbf{b}S_2 \end{aligned}$$

2.5.3 Fecho de Kleene

- Seja $G_1 = (T_1, N_1, S_1, P_1)$ uma gramática independentes de contexto qualquer.
- A gramática $G = (T, N, S, P)$ onde:

  $T = T_1$

  $N = N_1 \cup \{S\}$

  $S \notin (T \cup N_1)$

  $P = \{S \to \varepsilon, S \to S_1 S\} \cup P_1$

  é independentes de contexto e gera a linguagem $L = (L(G_1))^*$

Operações sobre GIC: fecho de Kleene (exemplo)

- Sobre o conjunto de terminais $T = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, determine uma gramática independente de contexto que represente a linguagem

$$L = L_1^*$$

  sabendo que:

$$L_1 = \{w \in T^* \ : \ \#(a,w) = \#(b,w)\}$$

- Solução possível:

$$\begin{array}{rcl} S & \to & \varepsilon \ | \ S_1 S \\ S_1 & \to & \varepsilon \ | \ \mathbf{a} S_1 \mathbf{b} S_1 \ | \ \mathbf{b} S_1 \mathbf{a} S_1 \ | \ \mathbf{c} S_1 \end{array}$$

3 Definição de gramáticas

3.1 Símbolos inacessíveis

- Tal como na construção de um programa é trivial definir funções que nunca são utilizadas no programa, também nas gramáticas podemos ter regras inacessíveis.
- Seja $G = (T, N, S, P)$ uma gramática qualquer. Um símbolo (x) diz-se *acessível* se for possível transformar o símbolo inicial (S) numa expressão que contenha esse símbolo. Ou seja,

$$S \stackrel{*}{\Rightarrow} \alpha x \beta \quad \text{com} \quad \alpha, \beta \in N \cup T$$

- Caso contrário, o símbolo não terminal diz-se *inacessível*.

Símbolos inacessíveis: exemplo

- Considere a gramática $G = (\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}, \{S, C, D, X\}, S, P)$, com as produções P:

$$\begin{array}{rcl} S & \to & \varepsilon \,|\, \mathbf{a} S \mathbf{b} \,|\, \mathbf{c} C \mathbf{c} \\ C & \to & \mathbf{c} S \mathbf{c} \\ D & \to & \mathbf{d} X \mathbf{d} \\ X & \to & C C \end{array}$$

- É impossível transformar S numa expressão que contenha D, $\mathbf{d}$ ou X, pelo que esses símbolos são inacessíveis.
- Os restantes símbolos são acessíveis.

Eliminação de símbolos inacessíveis

- Podemos definir um algoritmo para descobrir os símbolos acessíveis (logo, que permita a eliminação dos restantes).
- O conjunto de símbolos acessíveis V_A pode ser determinado com o seguinte algoritmo:

$V_A = \{S\}$
$N_X = V_A$
while $N_X \neq \phi$ **do**
  $A = \text{element-of}(N_X)$
  $N_X = N_X \setminus \{A\}$
  foreach $(A \to \alpha) \in P$ **do**
    foreach $x \in \alpha$ **do**
      if $x \notin V_A$ **then**
        $V_A = V_A \cup \{x\}$
        if $x \in N$ **then**
          $N_X = N_X \cup \{x\}$
        end// *if*
      end// *if*
    end// *foreach*
  end// *foreach*
end// *while*

3.2 Critérios de sanidade em gramáticas

Recursividade: Condições de Sanidade

- Por agora deve começar a ser bem evidente duas características essenciais das gramáticas:
  1. são expressas de forma *declarativa*;
  2. são muitas vezes, directa ou indirectamente, *recursivas*.
- Como exemplo, a gramática seguinte tem regras recursivas (directa e indirectamente):

$$
\begin{array}{rcl}
\text{instruction} & \to & \varepsilon \mid \text{conditional} \mid \cdots \\
\text{conditional} & \to & \textbf{if} \text{ expression } \textbf{then} \text{ instruction } \mid \\
 & & \textbf{if} \text{ expression } \textbf{then} \text{ instruction } \textbf{else} \text{ instruction} \\
\text{expression} & \to & \text{expression '+' expression } \mid \\
 & & \ldots \\
 & \ldots &
\end{array}
$$

- A regra *expression* é directamente recursiva, e a regra *instruction* é indirectamente recursiva.
- Não é assim de estranhar que deva ser recuperada para o campo das gramáticas as *condições de sanidade* aplicáveis às funções recursivas (independentemente das gramáticas serem implementadas por funções).

- Uma definição recursiva útil requer que:
  1. Exista pelo menos uma alternativa não recursiva (**CASO(S) LIMITE**);
  2. Todas as alternativas recursivas ocorram num contexto diferente do original (**VARIABILIDADE**);
  3. Para todas as alternativas recursivas, a mudança do contexto (2) levam-nas mais próximo de, pelo menos, uma alternativa não recursiva (1) (**CONVERGÊNCIA**).
- As condições (1) e (2) são *necessárias*. As três juntas são *suficientes* para garantir a terminação da recursão.
- A aplicação destes conceitos às gramáticas, permite que se definam condições de sanidade a elas aplicadas.

- Como resultado destas condições, para garantir que uma qualquer *gramática* $G = (T, N, S, P)$ *faça sentido*, todos os seus símbolos não terminais (Z) têm de poder ser derivados numa sequência de símbolos terminais.
- Isto é: $Z \stackrel{*}{\Rightarrow} u \wedge u \in T^* \quad com \quad Z \in N$

1. **CASO(S) LIMITE**:
   - Para cumprir esta condição basta garantir que cada símbolo não terminal tenha sempre directa ou indirectamente uma alternativa não recursiva.
2. **VARIABILIDADE**:
   - Para esta condição é necessário que a regra não tenha nenhum alternativa em que esteja definida (directa ou indirectamente) apenas à custa de si própria.
   - Isto é, só podemos voltar à mesma regra depois de existir pelo menos uma derivação diferente da regra.
3. **CONVERGÊNCIA**:
   - Às condições anteriores acresce a condição de só podermos voltar à mesma regra depois de existir pelo menos uma derivação que garanta o consumo (antes ou depois) de pelo menos um símbolo terminal.
   - Para garantir que a regra como um todo faça sentido, esta condição tem de ser aplicável a todas as definições alternativas da regra.

- Uma gramática fará sentido, caso estas condições se apliquem ao símbolo inicial.
- Como exemplo, considere a seguinte gramática sobre o alfabeto $A = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$:

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & \mathbf{a}S\mathbf{b} \mid U \mid V \mid W \\ U & \rightarrow & \mathbf{c} \\ V & \rightarrow & \mathbf{a}V \\ W & \rightarrow & X \\ X & \rightarrow & X \end{array}$$

- Requisito 1
  - as regras $\{S, U\}$ cumprem;
  - as regras $\{V, W, X\}$ não cumprem.
- Requisito 2
  - as regras $\{S, U, V, W\}$ cumprem;
  - a regra $\{X\}$ não cumpre.
- Requisito 3
  - a regra $\{U\}$ cumpre;
  - nenhuma das restantes cumpre.
- Como o símbolo inicial (S) não cumpre as três condições, não há a garantia de que esta gramática faça sentido.

4 Transformações de gramáticas

- Em geral, existem inúmeras gramáticas capazes de reconhecer a mesma linguagem.
- Duas gramáticas dizem-se *equivalentes* se reconhecerem a mesma linguagem.
- Assim sendo, é possível modificar gramáticas sem alterar a linguagem reconhecida.
- Estas transformações podem ser justificadas pelas seguintes razões:
  - Simplificação da gramática;

  - Eliminar ambiguidades da gramática;
  - Reduzir a redundância da gramática;
  - Facilitar a interpretação ou a geração de código;
  - Permitir ou facilitar a sua implementação automática.
- Já vimos anteriormente algoritmos para transformar gramáticas por forma a eliminar símbolos inatingíveis.
- Vamos agora analisar outras transformações.

4.1 Eliminação de produções-ε

- Uma produção-ε é uma produção do tipo $Z \to \varepsilon$, para um qualquer símbolo não terminal Z.
- Se tivermos uma linguagem independente de contexto que não contém a palavra vazia (i.e. que não a aceita), então é sempre possível transformar a sua gramática numa gramática equivalente sem este tipo de produções.
- Considere a gramática:

$$\begin{array}{rcl} S & \to & \mathbf{0}S \mid \mathbf{1}U \\ U & \to & \varepsilon \mid \mathbf{0}U \mid \mathbf{1}S \end{array}$$

  que descreve a linguagem formada pelas palavras definidas sobre o alfabeto $\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$, com um número ímpar de **1**s.
- Á existência da produção-ε faz com que as produções $S \to \mathbf{1}U$ e $U \to \mathbf{0}U$ possam produzir as derivações $S \Rightarrow 1$ e $U \Rightarrow 0$.
- Assim, podemos eliminar esta produção acrescentando as produções $S \to \mathbf{1}$ e $U \to \mathbf{0}$:

$$\begin{array}{rcl} S & \to & \mathbf{0}S \mid \mathbf{1}U \mid \mathbf{1} \\ U & \to & \mathbf{0}U \mid \mathbf{1}S \mid \mathbf{0} \end{array}$$

- Em geral, o papel da produção $Z \to \varepsilon$ sobre uma produção $U \to \alpha Z \beta$ pode ser substituído pela inclusão, como alternativa, da produção $U \to \alpha\beta$

4.2 Eliminação de recursividade à esquerda

- Diz-se que uma gramática é *recursiva à esquerda* se possuir um símbolo não terminal Z que admita uma derivação do tipo $Z \stackrel{+}{\Rightarrow} Z\beta$
- Isto é, se for possível, em um ou mais passos de derivação, transformar uma expressão Z numa expressão que tem Z no início.
- A gramática seguinte é recursiva à esquerda:

$$\begin{array}{rcl} S & \to & UV \\ U & \to & \varepsilon \mid S+ \\ V & \to & \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \mid (S) \end{array}$$

- A derivação $S \Rightarrow UV \Rightarrow S{+}V$ mostra que é possível transformar S numa expressão com S à esquerda.
- Logo esta gramática tem recursividade à esquerda associada ao símbolo não terminal S.
- Se a recursividade à esquerda se faz com apenas um passo na derivação, então diz-se que a recursividade é *imediata* (ou directa).
- Esta situação só ocorre se a gramática possuir uma ou mais produções do tipo $Z \to Z\beta$.
- Na gramática seguinte a recursividade é imediata:

$$\begin{array}{rcl} E & \to & T \mid E+T \\ T & \to & \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \mid (E) \end{array}$$

- A eliminação da recursividade à esquerda imediata é simples.

- Para tal basta introduzir um novo símbolo não terminal, e converter a recursividade imediata à esquerda para recursividade à direita.

- Considere a seguinte gramática:

$$A \rightarrow \beta \mid A\,\alpha$$

- Se observarmos as derivações possíveis a partir de A:

$$A \Rightarrow \beta \quad A \Rightarrow A\,\alpha \Rightarrow \beta\,\alpha \quad A \Rightarrow A\,\alpha \Rightarrow A\,\alpha\,\alpha \cdots$$

- Constatamos que para n passos ($n > 0$), temos: $A \Rightarrow \beta\,\alpha^{n-1}$
- Estas palavras podem ser obtidas com a seguinte gramática equivalente:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \beta\,X \\ X &\rightarrow \varepsilon \mid \alpha\,X \end{aligned}$$

- Constata-se assim que se converteu a recursividade à esquerda para uma recursividade à direita.

- Este algoritmo é facilmente generalizável a situações em que há mais do que uma produção com recursividade imediata à esquerda.

$$A \rightarrow \beta_1 \mid \beta_2 \mid \cdots \mid \beta_m \mid A\,\alpha_1 \mid A\,\alpha_2 \mid \cdots \mid A\,\alpha_n$$

- Então teremos:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \beta_1\,X \mid \beta_2\,X \mid \cdots \mid \beta_m\,X \\ X &\rightarrow \varepsilon \mid \alpha_1\,X \mid \alpha_2\,X \mid \cdots \mid \alpha_n\,X \end{aligned}$$

- Por outro lado, se a recursividade à esquerda não é imediata, o algoritmo para a eliminar é um pouco mais complexo.

Eliminação de recursividade à esquerda: exemplo

- Considere a seguinte gramática:

$$\begin{aligned} E &\rightarrow E + T \mid T \\ T &\rightarrow T * F \mid F \\ F &\rightarrow (\,E\,) \mid \mathbf{id} \end{aligned}$$

- Esta gramática tem recursividade à esquerda, aplicando o algoritmo para a transformar numa gramática com recursividade à direita:

$$\begin{aligned} E &\rightarrow T\,E' \\ E' &\rightarrow +T\,E' \mid \varepsilon \\ T &\rightarrow F\,T' \\ T' &\rightarrow *F\,T' \mid \varepsilon \\ F &\rightarrow (\,E\,) \mid \mathbf{id} \end{aligned}$$

4.3 Factorização à esquerda

- A factorização à esquerda é uma transformação da gramática que é útil para produzir gramáticas adaptadas a análise sintáctica descendente preditiva.

- Consiste numa operação similar à transformação aritmética de “pôr em evidência” um factor comum.
- No caso, sempre que duas ou mais produções têm o mesmo prefixo (sequência de símbolos terminais e/ou não terminais), então podemos transformar essa gramática por forma a eliminar essa redundância.
- Como exemplo, vamos considerar a seguinte gramática:

$$\begin{array}{lcl} \text{stat} & \rightarrow & \textbf{if}\,\text{expr}\,\textbf{then}\,\text{stat}\,\textbf{else}\,\text{stat} \;| \\ & & \textbf{if}\,\text{expr}\,\textbf{then}\,\text{stat} \end{array}$$

- Se observarmos o *token* **if** não podemos desde logo decidir por qual das duas produções alternativas devemos seguir.
- O problema resolve-se com a seguinte transformação:

$$\begin{array}{rcl} \text{stat} & \rightarrow & \textbf{if}\,\text{expr}\,\textbf{then}\,\text{stat}\,U \;| \\ U & \rightarrow & \varepsilon \mid \textbf{else}\,\text{stat} \end{array}$$

Factorização à esquerda: algoritmo

- O algoritmo geral para realizar esta transformação é o seguinte:
- Para cada não terminal A, descobrir o maior prefixo α comum a duas ou mais alternativas.
- Se $\alpha \neq \varepsilon$, então a produção:

$$A \rightarrow \alpha\beta_1 \mid \alpha\beta_2 \mid \cdots \mid \alpha\beta_n \mid \gamma$$

- pode ser transformada nas seguintes produções:

$$\begin{array}{rcl} A & \rightarrow & \alpha X \mid \gamma \\ X & \rightarrow & \beta_1 \mid \beta_2 \mid \cdots \mid \beta_n \end{array}$$

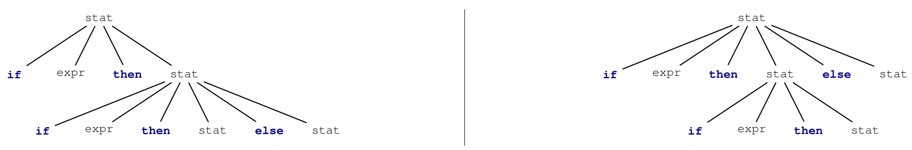
- Esta transformação deve ser repetida até que não se encontrem prefixos comuns.

4.4 Eliminação de ambiguidades

- A gramática seguinte é ambígua.

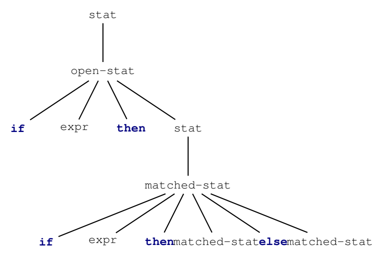
$$\begin{array}{rcl} \text{stat} & \rightarrow & \textbf{if}\,\text{expr}\,\textbf{then}\,\text{stat} \\ & | & \textbf{if}\,\text{expr}\,\textbf{then}\,\text{stat}\,\textbf{else}\,\text{stat} \\ & | & \cdots \quad (\textit{outras instruções}) \end{array}$$

- Na presença de uma entrada tipo **if if else** vão existir duas árvores sintácticas distintas consoante se considera o **else** como sendo do primeiro ou do segundo **if**.



- Podemos reescrever esta gramática seguindo a ideia de que uma instrução (stat) que apareça entre um **then** e um **else** tem de ser terminado:

$$\begin{array}{rcl} \text{stat} & \rightarrow & \text{matched-stat} \mid \text{open-stat} \\ \text{matched-stat} & \rightarrow & \textbf{if}\,\text{expr}\,\textbf{then}\,\text{matched-stat}\,\textbf{else}\,\text{matched-stat} \\ & | & \cdots \quad (\textit{outras instruções}) \\ \text{open-stat} & \rightarrow & \textbf{if}\,\text{expr}\,\textbf{then}\,\text{stat} \\ & | & \textbf{if}\,\text{expr}\,\textbf{then}\,\text{matched-stat}\,\textbf{else}\,\text{open-stat} \end{array}$$


stat
open-stat
if
expr
then
stat
matched-stat
if
expr
then
matched-stat
else
matched-stat

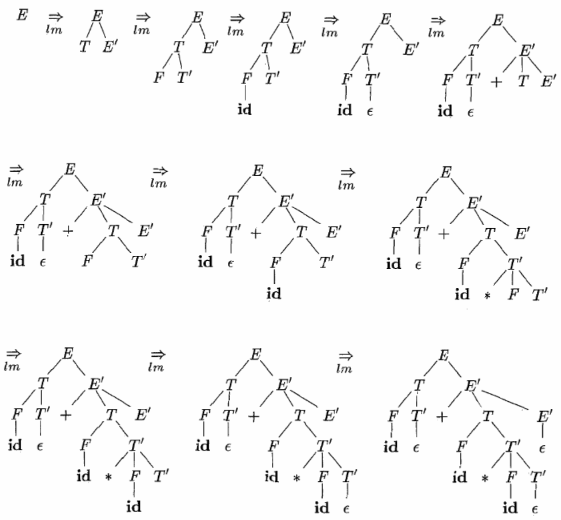
5 Análise sintáctica descendente

- A análise sintáctica descendente pode ser vista como sendo o problema de construir a árvore sintáctica para a sequência de *tokens* de entrada, partindo da raiz (símbolo inicial), e criando os nós da árvore em pré-ordem.
- De forma análoga, podemos ver este tipo de análise como sendo a descoberta da derivação mais à esquerda para a sequência de entrada.
- Recuperando a seguinte gramática:

$$
\begin{array}{lcl}
E & \rightarrow & T\,E' \\
E' & \rightarrow & +T\,E' \mid \varepsilon \\
T & \rightarrow & F\,T' \\
T' & \rightarrow & *F\,T' \mid \varepsilon \\
F & \rightarrow & (\,E\,) \mid \mathbf{id}
\end{array}
$$

- Podemos construir a árvore sintáctica para a entrada: $\mathbf{id}+\mathbf{id}*\mathbf{id}$

$$E \Rightarrow TE' \Rightarrow FT'E' \Rightarrow \mathbf{id}T'E' \Rightarrow \mathbf{id}E' \Rightarrow \mathbf{id}+TE' \Rightarrow \mathbf{id}+FT'E' \Rightarrow \mathbf{id}+\mathbf{id}T'E'$$
$$\Rightarrow \mathbf{id}+\mathbf{id}*FT'E' \Rightarrow \mathbf{id}+\mathbf{id}*\mathbf{id}T'E' \Rightarrow \mathbf{id}+\mathbf{id}*\mathbf{id}E' \Rightarrow \mathbf{id}+\mathbf{id}*\mathbf{id}$$



[1]

- Existem várias aproximações à análise sintáctica descendente.
- Uma delas – denominada por *análise sintáctica descendente recursiva* – é uma aproximação genérica, mas pode requerer um algoritmo de *backtracking* (tentativa/erro) para descobrir a produção correcta a ser aplicada a cada novo *token* na entrada.
- Outra aproximação mais prática – denominada por *análise sintáctica descendente preditiva* – é um caso especial deste tipo de análise que não requer *backtracking*.
- Vamos estudar três conjuntos de análise – *first*, *follow* e *lookahead*– que simplificam o desenvolvimento destes analisadores.
- A análise sintáctica descendente preditiva escolhe a produção a ser aplicada vendo um número fixo de *tokens* na entrada que ainda não foram consumidos.
- Se o número de *tokens* requirido for apenas um, este tipo de analisadores chamam-se $LL(1)$.
- O primeiro L indica que a entrada é analisada da esquerda para a direita; O segundo L significa que se escolhe sempre a derivação à esquerda.
- Para k *tokens* os analisadores chamam-se $LL(k)$.
- A construção deste tipo de analisadores pode ser feita recursivamente por funções – onde a cada regra não terminal se associa uma função –, ou de uma forma iterativa através de uma tabela e explicitando e com uma estrutura de dados tipo pilha.

[1] Imagens retiradas do livro: *"Compilers: Principles, Techniques, & Tools", 2ed, Aho, et.al*

5.1 Os conjuntos de análise *first*, *follow* e *lookahead*

- Para ajudar na construção de analisadores sintácticos descendentes, é conveniente a definição das funções – *first* e *follow* – associadas a símbolos da gramática.
- Estas funções calculam e devolvem conjuntos de símbolos terminais.
- Durante o reconhecimento descendente estas funções facilitam (ou mesmo, determinam) a escolha das produções a aplicar tendo em conta os próximos *token* de entrada.
- Para lidar com erros sintácticos, a função *follow* pode ser utilizada como mecanismo de re-sincronização do analisador sintáctico.
- Seja $\alpha \in (T \cup N)^*$ (isto é: uma qualquer sequência de símbolos da gramática), a função $\mathit{first}(\alpha)$ devolve o conjunto de símbolos terminais ($\in T$), que podem começar sequências de *tokens* derivadas de α.
- Se $\alpha \stackrel{*}{\Rightarrow} \varepsilon$ m então ε também fará parte desse conjunto.
- Assim um símbolo terminal **x** pertence a este conjunto se e só se $\alpha \stackrel{*}{\Rightarrow} \mathbf{x}\beta$

- A *função* $\mathit{follow}(A)$, para um símbolo não terminal A, devolve o conjunto de símbolos terminais ($\in T$), que podem aparecer imediatamente a seguir a A (i.e. à sua direita).
- Assim um símbolo terminal **x** pertence a este conjunto se e só se $S \stackrel{*}{\Rightarrow} \alpha A \mathbf{x} \beta$, para quaisquer sequências α e β.
- Chama-se a atenção de que o *token* especial "fim de ficheiro" (`EOF` ou \$) pode aparecer no conjunto $\mathit{follow}(A)$ se este não terminal for o último da gramática.
- Para calcular a função $\mathit{first}(X)$, para qualquer símbolo X da gramática podemos utilizar o seguinte algoritmo:
  1. Se X é um símbolo terminal, então: $\mathit{first}(X) = \{X\}$.
  2. Se X é um símbolo não terminal e $X \rightarrow Y_1 Y_2 \cdots Y_k$ é uma produção, para algum $k \geq 1$, então adicionar **x** a $\mathit{first}(X)$ se, para algum valor de i, **x** está em $\mathit{first}(Y_i)$ e se ε está em todos os $\mathit{first}(Y_1), \ldots, \mathit{first}(Y_{i-1})$. Isto é, $Y_1 \cdots Y_{i-1} \stackrel{*}{\Rightarrow} \varepsilon$. Se ε está em $\mathit{first}(Y_j)$, para $j = 1, 2, \ldots, k$, então adicionar ε a $\mathit{first}(X)$.
  3. Se $X \rightarrow \varepsilon$ é uma produção, então adicionar ε a $\mathit{first}(X)$.

- Podemos agora calcular a função *first* para qualquer sequência de símbolos $X_1 X_2 \cdots X_n$ de seguinte forma:
  - Adicionar todos os símbolos, excepto ε, de $\mathit{first}(X_1)$ a $\mathit{first}(X_1 X_2 \cdots X_n)$.
  - Se ε pertencer a $\mathit{first}(X_1)$, adicionar todos os símbolos, excepto ε, de $\mathit{first}(X_2)$ a $\mathit{first}(X_1 X_2 \cdots X_n)$.
  - E assim sucessivamente.
  - Finalmente, adicionar ε a $\mathit{first}(X_1 X_2 \cdots X_n)$ se ε pertencer a todos os $\mathit{first}(X_i)$, $i = 1, \ldots, n$
- Para calcular a função $\mathit{follow}(X)$, para qualquer símbolo não terminal X da gramática aplicam-se o seguinte algoritmo:
  1. Colocar "fim de ficheiro" em $\mathit{follow}(S)$ (sendo S o símbolo inicial).
  2. Se existir uma produção $A \rightarrow \alpha X \beta$, então adicionar $\mathit{first}(\beta) \setminus \{\varepsilon\}$ a $\mathit{follow}(X)$.
  3. Se existir uma produção $A \rightarrow \alpha X$ ou uma produção $A \rightarrow \alpha X \beta$ onde $\varepsilon \in \mathit{first}(\beta)$, então adicionar $\mathit{follow}(A)$ a $\mathit{follow}(X)$.

- Recuperando novamente a gramática:

$$\begin{array}{lcl} E & \rightarrow & T\,E' \\ E' & \rightarrow & +T\,E' \mid \varepsilon \\ T & \rightarrow & F\,T' \\ T' & \rightarrow & *F\,T' \mid \varepsilon \\ F & \rightarrow & (E) \mid \mathbf{id} \end{array}$$

  temos:

$$
\begin{aligned}
&\mathit{first}(F) = \mathit{first}(T) = \mathit{first}(E) = \{(,\mathbf{id}\}\\
&\mathit{first}(E') = \{+,\varepsilon\}\\
&\mathit{first}(T') = \{*,\varepsilon\}\\
&\mathit{follow}(E) = \mathit{follow}(E') = \{),\mathrm{EOF}\}\\
&\mathit{follow}(T) = \mathit{follow}(T') = \{+,),\mathrm{EOF}\}\\
&\mathit{follow}(F) = \{+,*,),\mathrm{EOF}\}
\end{aligned}
$$

O conjunto de análise *lookahead*

- O conjunto *lookahead* (ou de antevisão) aplica-se às produções de uma gramática, e envolve as funções *first* e *follow*.
- É definido por:

$$
\mathit{lookahead}(A \to \alpha) = \begin{cases} \mathit{first}(\alpha) & \text{se } \alpha \text{ não deriva } \varepsilon \\ (\mathit{first}(\alpha) \setminus \{\varepsilon\}) \cup \mathit{follow}(A) & \text{se } \alpha \overset{*}{\Rightarrow} \varepsilon \end{cases}
$$

5.2 Análise sintáctica descendente recursiva

- Um analisador deste tipo consiste num conjunto de funções, uma para cada não terminal.
- Para uma produção do tipo $A \to X_1 X_2 \cdots X_n$ temos a seguinte implementação para a função que lhe está associada:

```
void A() {
   // A → A1 X2 ··· Xn
   for(i = 1 to n) {
      if (Xi é um símbolo não terminal)
         call function Xi();
      else if (símbolo de entrada reconhecido por Xi)
         avançar a entrada para o próximo símbolo
      else
         erro de reconhecimento
   }
}
```

- Note que com este algoritmo uma produção do tipo $A \to A \cdots$ gera recursão infinita, razão pela qual não pode haver recursividade à esquerda nas regras neste tipo de analisadores.

- Um analisador descendente recursivo genérico pode requerer *backtracking*, isto é, pode ser necessário andar para trás no consumo de *tokens* de entrada até se descobrir uma derivação correcta.
- No entanto, para a larga maioria das construções de linguagens de programação os analisadores descendentes não requerem *backtracking*.

5.3 Análise sintáctica descendente preditiva

- Podemos construir analisadores descendentes que não requerem *backtracking*.
- São designados por *analisadores descendentes preditivos*.
- Este tipo de analisadores designam-se por $LL(k)$, em que k é o número de *tokens* à frente que o algoritmo requer ($k \geq 1$).
- Em particular, a classe dos analisadores $LL(1)$ é suficientemente expressiva para cobrir a maioria das construções de linguagens de programação.
- No entanto, é necessário algum cuidado na definição das regras, já que os analisadores $LL(1)$ não aceitam gramáticas ambíguas ou com recursividade à esquerda.

- Uma gramática é $LL(1)$ se e só se, para produções do tipo $A \to \alpha \mid \beta$, as condições seguintes são verdadeiras
  1. Para qualquer símbolo terminal **a**, no máximo, apenas uma das sequências α ou β podem derivar $\mathbf{a}\gamma$ ($\gamma \in (T \cup N)^*$).
  2. No máximo, apenas uma das sequências α ou β podem derivar ε.

3. Se $\beta \stackrel{*}{\Rightarrow} \varepsilon$, então α não deriva nenhuma sequência começando com um terminal existente em $follow(A)$. Da mesma forma, se $\alpha \stackrel{*}{\Rightarrow} \varepsilon$, então β não deriva nenhuma sequência começando com um terminal existente em $follow(A)$.

- Considerando a gramática $G = (T,N,S,P)$, e todos os não-terminais $A \in N$ com produções $P : A \to \alpha \mid \beta$, as primeiras duas condições são equivalentes à condição:

$$first(\alpha) \cap first(\beta) = \emptyset$$

- A terceira condição, é equivalente a:

$$\varepsilon \in first(\beta) \implies first(\alpha) \cap follow(A) = \emptyset$$

(e *vice-versa* trocando β por α)

Análise sintáctica descendente preditiva: algoritmo

- Podemos construir uma tabela de *parsing* M para analisadores descendentes preditivos $LL(1)$ que indique as produções a escolher como função do símbolo não-terminal onde estamos e do próximo *token* na entrada.
- Algoritmo: Para cada produção $A \to \alpha$ da gramática fazer o seguinte:
  1. Para cada símbolo terminal **a** existente em $first(A)$, adicionar $A \to \alpha$ a $M[A, \mathbf{a}]$
  2. Se $\varepsilon \in first(A)$, então para cada terminal **b** existente em $follow(A)$, adicionar $A \to \alpha$ a $M[A, \mathbf{b}]$. Se $\varepsilon \in first(A) \wedge$ EOF $\in follow(A)$, então adicionar $A \to \alpha$ a $M[A, \text{EOF}]$.

Análise sintáctica descendente preditiva: exemplo

- A gramática apresentada a seguir é $LL(1)$:

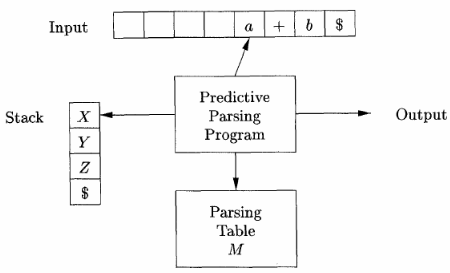
$$\begin{array}{lcl} E & \to & T\,E' \\ E' & \to & +T\,E' \mid \varepsilon \\ T & \to & F\,T' \\ T' & \to & *F\,T' \mid \varepsilon \\ F & \to & (E) \mid \mathbf{id} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} first(F) & = & first(T) = first(E) = \{(, \mathbf{id}\} \\ first(E') & = & \{+, \varepsilon\} \\ first(T') & = & \{*, \varepsilon\} \\ follow(E) & = & follow(E') = \{), \text{EOF}\} \\ follow(T) & = & follow(T') = \{+,), \text{EOF}\} \\ follow(F) & = & \{+, *,), \text{EOF}\} \end{array}$$

- A tabela de *parsing* associa produções à relação de símbolos não-terminais com os *tokens* de entrada:

NON - TERMINAL	INPUT SYMBOL					
	id	+	*	(	)	\$
E	$E \to TE'$			$E \to TE'$		
E'		$E' \to +TE'$			$E' \to \epsilon$	$E' \to \epsilon$
T	$T \to FT'$			$T \to FT'$		
T'		$T' \to \epsilon$	$T' \to *FT'$		$T' \to \epsilon$	$T' \to \epsilon$
F	$F \to \mathbf{id}$			$F \to (E)$		

5.4 Análise sintáctica descendente preditiva não recursiva



- Podemos assim construir um analisador preditivo sem funções recursivas, implementando-o com uma tabela e uma pilha.
- Para a gramática anterior e a entrada **id+id** * **id**:

MATCHED	STACK	INPUT	ACTION
	$E\$$	$\mathbf{id} + \mathbf{id} * \mathbf{id}\$$	output $E \to TE'$
	$TE'\$$	$\mathbf{id} + \mathbf{id} * \mathbf{id}\$$	output $T \to FT'$
	$FT'E'\$$	$\mathbf{id} + \mathbf{id} * \mathbf{id}\$$	output $F \to \mathbf{id}$
	$\mathbf{id}\ T'E'\$$	$\mathbf{id} + \mathbf{id} * \mathbf{id}\$$	match $\mathbf{id}$
$\mathbf{id}$	$T'E'\$$	$+ \mathbf{id} * \mathbf{id}\$$	output $T' \to \epsilon$
$\mathbf{id}$	$E'\$$	$+ \mathbf{id} * \mathbf{id}\$$	output $E' \to + TE'$
$\mathbf{id}$	$+ TE'\$$	$+ \mathbf{id} * \mathbf{id}\$$	match $+$
$\mathbf{id} +$	$TE'\$$	$\mathbf{id} * \mathbf{id}\$$	output $T \to FT'$
$\mathbf{id} +$	$FT'E'\$$	$\mathbf{id} * \mathbf{id}\$$	output $F \to \mathbf{id}$
$\mathbf{id} +$	$\mathbf{id}\ T'E'\$$	$\mathbf{id} * \mathbf{id}\$$	match $\mathbf{id}$
$\mathbf{id} + \mathbf{id}$	$T'E'\$$	$* \mathbf{id}\$$	output $T' \to * FT'$
$\mathbf{id} + \mathbf{id}$	$* FT'E'\$$	$* \mathbf{id}\$$	match $*$
$\mathbf{id} + \mathbf{id} *$	$FT'E'\$$	$\mathbf{id}\$$	output $F \to \mathbf{id}$
$\mathbf{id} + \mathbf{id} *$	$\mathbf{id}\ T'E'\$$	$\mathbf{id}\$$	match $\mathbf{id}$
$\mathbf{id} + \mathbf{id} * \mathbf{id}$	$T'E'\$$	$\$$	output $T' \to \epsilon$
$\mathbf{id} + \mathbf{id} * \mathbf{id}$	$E'\$$	$\$$	output $E' \to \epsilon$
$\mathbf{id} + \mathbf{id} * \mathbf{id}$	$\$$	$\$$	

5.5 Análise sintáctica descendente em ANTLR4

- Como foi já referido por várias vezes, o `ANTLR4` é um analisador descendente (em oposição ao `yacc`/`bison` que é um analisador ascendente).
- No entanto, a tecnologia de compilação implementada no `ANTLR4` tem algumas diferenças relativamente aos analisadores descendentes preditivos apresentados.
- Uma delas, é o facto de ser caracterizado como sendo um analisador preditivo da $LL(*)$ adaptativo.
- Não requer *backtracking*, mas pode observar os *tokens* à frente na entrada até ao fim desta, se necessário for.
- Por outro lado, faz uso de uma análise dinâmica da gramática (em tempo de execução), antes do reconhecimento começar.
- Na prática, isto significa que o `ANTLR4` aceita gramáticas bem mais genéricas do que as normalmente associadas aos analisadores $LL(k)$.
- Outra característica de grande interesse prático do `ANTLR4`, é o facto de aceitar gramáticas com recursividade directa à esquerda.
- Torna-se assim possível definir gramáticas do tipo:

```
grammar Expr;

main: stat* EOF;

stat: expr;

expr: expr '*' expr # Mult
    | expr '+' expr # Add
    | INT           # Int
    ;

INT: [0-9]+;
WS: [ \t\r\n]+ -> skip;
```

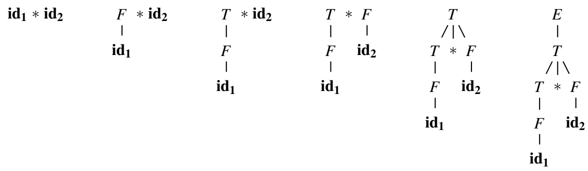
- O que o `ANTLR4` faz é automaticamente reescrever as regras com recursividade directa à esquerda em regras equivalentes sem essa característica (utilizando um algoritmo que pode ser similar ao apresentado em 4.2).
- Uma limitação desta característica é facto da recursividade à esquerda ter de ser directa.
- O `ANTLR4` tem outras características que o diferenciam, e tornam a sua classificação como analisador descendente um pouco mais complicada.
- É o caso dos predicados semânticos que permitem que a gramática a utilizar possa mudar dinamicamente consoante quaisquer condições expressas na linguagem destino (`Java` por omissão).
- Esta característica faz com que o `ANTLR4` possa directamente implementar construções tipicas de gramáticas dependentes de contexto.

6 Análise sintáctica ascendente

- A análise sintáctica ascendente pode ser vista como sendo o problema de construir a árvore sintáctica partindo das folhas (*tokens*), e criando os nós da árvore de baixo para cima até à raiz (símbolo inicial).
- Considere a seguinte gramática:

$$
\begin{aligned}
E &\rightarrow E+T \mid T \\
T &\rightarrow T*F \mid F \\
F &\rightarrow (E) \mid \mathbf{id}
\end{aligned}
$$

- Vamos proceder à análise sintáctica processando a entrada $\mathbf{id_1} * \mathbf{id_2}$ da esquerda para direita e aplicando de imediato a produção que a vai aproximando do topo.



6.1 Redução

- A análise ascendente pode também ser vista como o processo de *reduzir* a sequência de *tokens* de entrada ao símbolo inicial.
- Em cada passo de redução, a subsequência de símbolos (terminais e/ou não terminais) correspondente ao corpo de uma produção, é substituída pela cabeça da produção.
- A decisão chave neste tipo de análise sintáctica, reside em quando aplicar uma redução e a escolha da produção a aplicar.
- A sequência de reduções aplicadas ao exemplo anterior, gerou a seguinte sequencia de símbolos:

$$\mathbf{id_1} * \mathbf{id_2},\ F*\mathbf{id_2},\ T*\mathbf{id_2},\ T*F,\ T,\ E$$

- Cada elemento desta sequência corresponde à raiz das árvores atrás apresentadas.

Derivação à direita

- Por definição, uma redução é a operação inversa da (respectiva) derivação.
- Assim se reescrevermos a sequência seguindo as derivações (do símbolo inicial até à entrada):

$$E \Rightarrow T \Rightarrow T*F \Rightarrow T*\mathbf{id_2} \Rightarrow F*\mathbf{id_2} \Rightarrow \mathbf{id_1} * \mathbf{id_2}$$

- Constatamos assim que esta análise corresponde à derivação à direita da sequência de entrada.

6.2 Análise sintáctica por deslocamento e redução

- A análise sintáctica por deslocamento e redução é uma forma de análise ascendente na qual uma pilha vai armazenando símbolos da gramática (por reduzir), e um *buffer* de entrada contém os *tokens* ainda por processar.
- O topo dessa pilha conterá sempre a próxima sequência de símbolos a reduzir.
- Para facilitar a visualização deste processo iremos utilizar o símbolo $\$$ para indicar o *token* especial *fim de ficheiro*.
- Podemos assim visualizar o processo de análise ascendente com uma tabela onde se mostra o conteúdo da pilha, o *buffer* de entrada e a acção a tomar.
- Podemos efectuar as seguintes acções:

  1. **redução**: o topo da pilha é substituído pela cabeça da produção (respectiva);

2. **deslocamento**: o próximo *token* da entrada é colocado no topo da pilha.
3. **aceitar**: entrada reconhecida com sucesso
4. **rejeição**: erro sintáctico

- Pegando novamente no exemplo dado, teremos a seguinte tabela:

pilha	*entrada*	*acção*
$\$$	$\mathbf{id_1} * \mathbf{id_2}\,\$$	deslocamento
$\$\,\mathbf{id_1}$	$*\,\mathbf{id_2}\,\$$	redução por $F \to \mathbf{id}$
$\$\,F$	$*\,\mathbf{id_2}\,\$$	redução por $T \to F$
$\$\,T$	$*\,\mathbf{id_2}\,\$$	deslocamento
$\$\,T\,*$	$\mathbf{id_2}\,\$$	deslocamento
$\$\,T * \mathbf{id_2}$	$\$$	redução por $F \to \mathbf{id}$
$\$\,T * F$	$\$$	redução por $T \to T * F$
$\$\,T$	$\$$	redução por $E \to T$
$\$\,E$	$\$$	aceitar

- Uma vez que estamos na presença de derivações à direita (embora feitas "ao contrário", partindo das folhas da árvore para a raiz), é garantido que, a existir, o corpo da produção aparecerá sempre no topo da pilha.
- Vamos implementar um analisador ascendente por deslocamento/redução para processar expressões aritméticas simples.
- Para simplificar, vamos considerar que um *token* é um carácter (os números são apenas um dígito).
- A gramática pretendida é: $e \to (e) \mid e+e \mid e-e \mid e*e \mid e/e \mid \mathrm{D}$

O programa 1 resolve este problema.

6.3 Conflitos

- Existem gramáticas independentes de contexto para as quais a análise sintáctica por deslocamento e redução não funciona.
- Nessas gramáticas, mesmo com o conhecimento do conteúdo actual da pilha e da entrada, o analisador não consegue decidir se deve fazer uma redução ou um deslocamento (conflito do tipo *shift/reduce*), ou não consegue decidir qual das reduções possíveis deve fazer (conflito do tipo *reduce/reduce*).
- Como exemplo deste tipo de situações temos as gramáticas ambíguas.

Conflitos: *shift/reduce*

- Um exemplo de conflitos do tipo *shift/reduce* é a seguinte gramática da instrução condicional:

$$
\begin{array}{lcl}
\text{stat} & \to & \textbf{if}\ \text{expr}\ \textbf{then}\ \text{stat} \\
 & \mid & \textbf{if}\ \text{expr}\ \textbf{then}\ \text{stat}\ \textbf{else}\ \text{stat} \\
 & \mid & \text{other}
\end{array}
$$

- Quando o analisador estiver no estado:

pilha	*entrada*
$\$ \cdots$ **if** expr **then** stat	**else** $\cdots \$$

  pode fazer quer um deslocamento, quer uma redução.
- Uma possibilidade simples para resolver este tipo de conflitos é privilegiar uma dessas acções (por exemplo, o deslocamento).

Listing 1: Exemplo simples de analisador ascendente

```java
import static java.lang.System.*;
import java.util.Stack;

public class ExprLR1
{
   public static void main(String[] args) {
      String[] grammar = {"(e)","e+e","e-e","exe","e:e","D"};
      Stack<Character> stack = new Stack<>();
      for(int i = 0; i < args.length; i++) {
         if (args[i].length() != 1) {
            err.println("Invalid token \""+args[i]+"\"");
            exit(1);
         }
         // shift next token:
         char t = args[i].charAt(0);
         if (t >= '0' && t <= '9')
            t = 'D';
         stack.push(t);
         out.printf(" [shift]: %5c - stack: %s\n", t, stack);
         boolean reduce;
         // attempt as much reduces as possible:
         do {
            reduce = false;
            for(String p: grammar)
               if(topMatches(stack,p)) {
                  reduce = true;
                  popN(stack, p.length());
                  stack.push('e');
                  out.printf("[reduce]: %5s - stack: %s\n", p, stack);
               }
         }
         while(reduce);
      }
      out.println();
      if (stack.size() == 1 && stack.pop() == 'e')
         out.println("Syntactical valid expression!");
      else
         err.println("ERROR: Syntactical invalid expression!");
   }

   static boolean topMatches(Stack<Character> stack, String rule) {
      assert stack != null;
      assert rule != null && !rule.isEmpty();

      boolean res = stack.size() >= rule.length();
      for(int i = 0; res && i < rule.length(); i++)
         res = stack.get(stack.size()-rule.length()+i) == rule.charAt(i);
      return res;
   }

   static void popN(Stack<Character> stack, int n) {
      assert stack != null;
      assert n > 0 && stack.size() >= n;

      for(int i = 0; i < n; i++)
         stack.pop();
   }
}
```

Conflitos: *reduce/reduce*

- Vejamos agora a seguinte gramática:

$$
\begin{array}{rcl}
\text{stat} & \rightarrow & \textbf{id}\,(\,\text{parameterList}\,) \\
 & | & \textbf{id} := \text{expr} \\
\text{parameterList} & \rightarrow & \text{parameterList}\,,\,\text{parameter} \\
 & | & \text{parameter} \\
\text{parameter} & \rightarrow & \textbf{id} \\
\text{expr} & \rightarrow & \textbf{id} \\
 & | & \textbf{id}\,(\,\text{exprList}\,) \\
\text{exprList} & \rightarrow & \text{exprList}\,,\,\text{expr} \\
 & | & \text{expr}
\end{array}
$$

- Quando o analisador estiver no estado:

pilha	*entrada*
$\$ \cdots \textbf{id}\,(\textbf{id}$	$,\,\textbf{id} \cdots \$$

temos outro tipo de conflito (*reduce/reduce*) já que o analisador não consegue decidir como reduzir o **id** que está no topo da pilha (parameter ou expr?).

6.4 Construção de um analisador ascendente

- O tipo de analisadores ascendentes mais em uso são os chamados $LR(k)$.
- O primeiro L indica que a entrada é analisada da esquerda para a direita, e o R significa que se escolhe sempre a derivação à direita.
- O k é o número de *tokens* de entrada de antevisão (*lookahead*).
- Os casos práticos de interesse tem valores de k iguais a 0 ou a 1.
- Os analisadores *LR* são baseados em tabelas (à semelhança dos analisadores *LL* não recursivos).

- Este tipo de analisadores sintácticos têm as seguintes características:
  - É possível construir analisadores para virtualmente todo o tipo de linguagens para as quais existem gramáticas independentes de contexto;
  - O método de análise *LR* é o método por deslocamento/redução sem *backtracking* mais genérico conhecido;
  - Permite a detecção de erros sintácticos assim que possível numa análise da entrada sequencial da esquerda para direita;
  - Em teoria, a classe de gramáticas passível de ser analisada supera a dos analisadores *LL* preditivos.
- Uma das suas limitações é ser mais complicado ter acesso ao contexto (*top-down*) envolvido no processo de reconhecimento de uma regra (dificultando a passagem de informação para baixo).
- Outro "problema" é a complexidade no seu desenvolvimento, pelo que requer uma ferramenta para esse fim (*yacc*/*bison*).

6.4.1 Analisador ascendente LR simples (SLR)

- Como é que um analisador por deslocamento/redução decide por uma das acções?
- Por exemplo, na gramática apresentadas com expressões aritméticas, se a pilha contiver $\$T$ e o próximo *token* for $*$, como é que o analisador sabe que o topo da pilha não é para reduzir ($E \rightarrow T$), mas sim deslocar esse símbolo para a pilha?
- Um analisador *SLR* toma estas decisões registando o estado onde está (*item*) no reconhecimento (como um autómato).

- Por exemplo, a produção $A \rightarrow XYZ$ tem 4 itens possíveis (o ponto indica o estado de reconhecimento):

$$A \rightarrow \cdot XYZ$$
$$A \rightarrow X \cdot YZ$$
$$A \rightarrow XY \cdot Z$$
$$A \rightarrow XYZ \cdot$$

- A produção vazia $A \rightarrow \varepsilon$ tem apenas um item: $A \rightarrow \cdot$

- Intuitivamente, um item mostra quando da produção é que já foi reconhecida e o que é esperado a seguir.
- Assim o item $A \rightarrow \cdot XYZ$ mostra que esperamos vir a reconhecer uma derivação de XYZ.
- Já o item $A \rightarrow X \cdot YZ$ mostra que acabamos de "consumir" um sequência derivada de X e esperamos uma derivação de YZ.
- O item $A \rightarrow XYZ \cdot$ indica que o corpo da produção A está completo pelo que podemos proceder à sua redução.

Analisador ascendente LR(*0*) canónica

- Uma colecção de conjuntos de $LR(0)$ – designada $LR(0)$ canónica – fornece a base para se construir um autómato finito determinista que é utilizado nesta decisão.
- Este autómato é chamado autómato $LR(0)$.
- Cada estado deste autómato representa um conjunto de itens nessa colecção $LR(0)$ canónica.
- Para construir a colecção de conjuntos de itens, vamos definir uma gramática aumentada e duas novas funções: CLOSURE (fecho) e GOTO
- Se uma gramática G tiver S como símbolo inicial, então G' será a sua gramática aumentada, em que passará a existir um novo símbolo inicial (S') definido pela produção $S' \rightarrow S$
- Este novo símbolo serve para indicar a aceitação da entrada.

Analisador ascendente LR(*0*) canónica: função CLOSURE

- Se I é um conjunto de itens para uma gramática G, então CLOSURE(I) é o conjunto de itens construído da seguinte forma:

  1. Todos os elementos de I pertencem a CLOSURE(I).
  2. Se $A \rightarrow \alpha \cdot B\beta$ for um dos itens de CLOSURE(I) e existir a produção $B \rightarrow \gamma$, então adicionar o item $B \rightarrow \cdot\gamma$ a CLOSURE(I) caso ainda lá não exista. Aplicar esta regra até não existirem mais itens a ser adicionados a CLOSURE(I).

- Considere a seguinte gramática aumentada (com E' como símbolo inicial):

$$\begin{array}{lcl} E' & \rightarrow & E \\ E & \rightarrow & E + T \mid T \\ T & \rightarrow & T * F \mid F \\ F & \rightarrow & (E) \mid \mathbf{id} \end{array}$$

- Se I é o conjunto de itens apenas com o elemento $\{[E' \rightarrow \cdot E]\}$, então:

$$\begin{aligned} \text{CLOSURE}(I) = \{&[E' \rightarrow \cdot E], [E \rightarrow \cdot E + T], [E \rightarrow \cdot T], [T \rightarrow \cdot T * F], \\ &[T \rightarrow \cdot F], [F \rightarrow \cdot(E)], [F \rightarrow \cdot \mathbf{id}]\} \end{aligned}$$

Analisador ascendente LR(0) canónica: função GOTO

- Se I é um conjunto de itens para uma gramática G e X um símbolo de G, então GOTO(I,X) é o fecho (*closure*) do conjunto de todos os itens $[A \to \alpha X \cdot \beta]$ desde que $[A \to \alpha \cdot X \beta]$ pertença a I.
- Se I é o conjunto de itens $\{[E' \to E\cdot], [E \to E \cdot +T]\}$, então:

$$\begin{aligned}\text{GOTO}(I,+) = \{&[E \to E + \cdot T], [T \to \cdot T * F], [T \to \cdot F],\\ &[F \to \cdot(E)], [F \to \cdot\textbf{id}]\}\end{aligned}$$

Analisador ascendente LR(0) canónica: algoritmo

- O seguinte algoritmo permite a criação do autómato $LR(0)$ para a gramática aumentada G':
  1. O estado inicial será CLOSURE$([S' \to \cdot S])$.
  2. Sempre que um novo estado é adicionado, verificar as transições que esse estado pode ter por ocorrência de símbolos (terminais ou não terminais).
  3. Sempre que dessas transições resultar um estado inexistente, criar esse novo estado, e repetir o processo.
- Note que este procedimento tem algumas semelhanças formais com a transformação de AFND em AFD (análise lexical, autómatos finitos).

Analisador ascendente LR(0) canónica: exemplo

- Recuperando a gramática aumentada de expressões aritméticas:

$$\begin{array}{lcl} E' & \to & E \\ E & \to & E+T \mid T \\ T & \to & T*F \mid F \\ F & \to & (E) \mid \textbf{id} \end{array}$$

- O estado inicial será:

$$\begin{aligned} I_0 =& \text{CLOSURE}(\{[E' \to \cdot E]\}) \\ =& \{[E' \to \cdot E], [E \to \cdot E+T], [E \to \cdot T], [T \to \cdot T*F], [T \to \cdot F], [F \to \cdot(E)], [F \to \cdot\textbf{id}]\} \end{aligned}$$

- Este estado pode evoluir pelos símbolos $E, T, F, (, \textbf{id}$, logo:

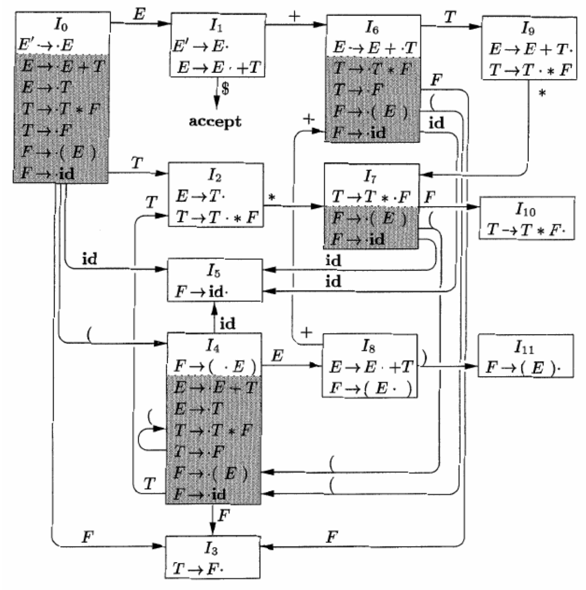
$$\begin{aligned} I_1 =& \text{CLOSURE}(\text{GOTO}(I_0,E)) = \{[E' \to E\cdot], [E \to E \cdot +T]\} \\ I_2 =& \text{CLOSURE}(\text{GOTO}(I_0,T)) = \{[E \to T\cdot], [T \to T \cdot *F]\} \\ I_3 =& \text{CLOSURE}(\text{GOTO}(I_0,F)) = \{[T \to F\cdot]\} \\ I_4 =& \text{CLOSURE}(\text{GOTO}(I_0,()) \\ =& \{[F \to (\cdot E)], [E \to \cdot E+T], [E \to \cdot T], [T \to \cdot T*F], [T \to \cdot F], [F \to \cdot(E)], [F \to \cdot\textbf{id}]\} \\ I_5 =& \text{CLOSURE}(\text{GOTO}(I_0,\textbf{id})) = \{[F \to \textbf{id}\cdot]\} \end{aligned}$$

- As evoluções para os novos estados são:

$$
\begin{aligned}
& \text{GOTO}(I_1, \$)) = \text{aceitar} \\
I_6 =\ & \text{CLOSURE}(\text{GOTO}(I_1, \mathbf{+})) \\
=\ & \{[E \to E \mathbf{+} \cdot T], [T \to \cdot T * F], [T \to \cdot F], [F \to \cdot(E)], [F \to \cdot\mathbf{id}]\} \\
I_7 =\ & \text{CLOSURE}(\text{GOTO}(I_2, *)) = \{[T \to T * \cdot F], [F \to \cdot(E)], [F \to \cdot\mathbf{id}]\} \\
I_8 =\ & \text{CLOSURE}(\text{GOTO}(I_4, E)) = \{[E \to E \cdot \mathbf{+} T], [F \to (E \cdot)]\} \\
& \text{CLOSURE}(\text{GOTO}(I_4, T)) = \{[E \to T \cdot], [T \to T \cdot * F]\} = I_2 \\
& \text{CLOSURE}(\text{GOTO}(I_4, F)) = \{[T \to F \cdot]\} = I_3 \\
& \text{CLOSURE}(\text{GOTO}(I_4, ()) = I_4 \\
& \text{CLOSURE}(\text{GOTO}(I_4, \mathbf{id})) = \{[F \to \mathbf{id} \cdot]\} = I_5 \\
I_9 =\ & \text{CLOSURE}(\text{GOTO}(I_6, T)) = \{[E \to E \mathbf{+} T \cdot], [T \to T \cdot * F]\} \\
& \text{CLOSURE}(\text{GOTO}(I_6, F)) = \{[T \to F \cdot]\} = I_3 \\
& \text{CLOSURE}(\text{GOTO}(I_6, ()) = I_4 \\
& \text{CLOSURE}(\text{GOTO}(I_6, \mathbf{id})) = \{[F \to \mathbf{id} \cdot]\} = I_5 \\
I_{10} =\ & \text{CLOSURE}(\text{GOTO}(I_7, F)) = \{[T \to T * F \cdot]\} \\
& \text{CLOSURE}(\text{GOTO}(I_7, ()) = I_4 \\
& \text{CLOSURE}(\text{GOTO}(I_7, \mathbf{id})) = \{[F \to \mathbf{id} \cdot]\} = I_5 \\
I_{11} =\ & \text{CLOSURE}(\text{GOTO}(I_8,))) = \{[F \to (E) \cdot]\} \\
& \text{CLOSURE}(\text{GOTO}(I_9, *)) = I_7
\end{aligned}
$$

Analisador ascendente LR(*0*) canónica: exemplo - diagrama de transições

Donde resulta o seguinte diagrama de transições do autómato:



Analisador ascendente LR(*0*) canónica: exemplo - diagrama de transições (2)

- O conjunto de itens de cada estado pode ser dividido em dois:
  1. Itens nucleares: o item inicial e todos os itens em cujos o ponto não está à esquerda;
  2. Itens não-nucleares: todos os itens restantes (i.e. todos os itens em que o ponto está à esquerda, excepto o item inicial).
- Apenas é necessário guardar os itens nucleares (os outros, representados a sombreado na figura, estão na transição dos estados).

Analisador ascendente LR(*0*) canónica: exemplo - tabela de *parsing*

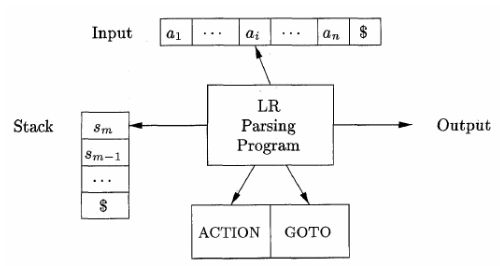
estado	*acção*						*GOTO*		
	id	**+**	$*$	(	)	\$	E	T	F
0	s_5			s_4			1	2	3
1		s_6				aceitar			
2		$r_{E\to T}$	s_7		$r_{E\to T}$	$r_{E\to T}$			
3		$r_{T\to F}$	$r_{T\to F}$		$r_{T\to F}$	$r_{T\to F}$			
4	s_5			s_4			8	2	3
5		$r_{F\to \mathbf{id}}$	$r_{F\to \mathbf{id}}$		$r_{F\to \mathbf{id}}$	$r_{F\to \mathbf{id}}$			
6	s_5			s_4				9	3
7	s_5			s_4					10
8		s_6			s_{11}				
9		$r_{E\to E+T}$	s_7		$r_{E\to E+T}$	$r_{E\to E+T}$			
10		$r_{T\to T*F}$	$r_{T\to T*F}$		$r_{T\to T*F}$	$r_{T\to T*F}$			
11		$r_{F\to (E)}$	$r_{F\to (E)}$		$r_{F\to (E)}$	$r_{F\to (E)}$			

- As acções s_i indicam deslocamento para o estado i, e r_p redução pela produção p.
- Na aplicação do analisador, a pilha irá agora registar estados (em vez de símbolos).
- Sempre que exista uma transição com o *token* de entrada optar-se-á pelo seu deslocamento, colocando na pilha o estado para onde a transição é feita.
- Caso contrário, opta-se pela redução, fazendo o número de pops na pilha igual ao número de símbolos do corpo da produção reduzida, e colocando na pilha a cabeça dessa produção.
- Para ilustrar o funcionamento do analisador, vamos aplicá-lo à entrada $\mathbf{id}*\mathbf{id}$

	pilha	*símbolos*	*entrada*	*acções*
(1)	0	\$	$\mathbf{id_1} * \mathbf{id_2}$ \$	deslocamento, *push* 5
(2)	0 5	\$$\mathbf{id_1}$	$*\mathbf{id_2}$ \$	redução por $F\to\mathbf{id}, 1\times pop$
(3)	0	\$$F$	$*\mathbf{id_2}$ \$	$push(goto(0,F))$
(4)	0 3	\$$F$	$*\mathbf{id_2}$ \$	redução por $T\to F, 1\times pop$
(5)	0	\$$T$	$*\mathbf{id_2}$ \$	$push(goto(0,T))$
(6)	0 2	\$$T$	$*\mathbf{id_2}$ \$	deslocamento, *push* 7
(7)	0 2 7	\$$T*$	$\mathbf{id_2}$ \$	deslocamento, *push* 5
(8)	0 2 7 5	\$$T*\mathbf{id_2}$	\$	redução por $F\to\mathbf{id}, 1\times pop$
(9)	0 2 7	\$$T*F$	\$	$push(goto(7,F))$
(10)	0 2 7 10	\$$T*F$	\$	redução por $T\to T*F, 3\times pop$
(11)	0	\$$T$	\$	$push(goto(0,T))$
(12)	0 2	\$$T$	\$	redução por $E\to T, 1\times pop$
(13)	0	\$$E$	\$	$push(goto(0,E))$
(14)	0 1	\$$E$	\$	aceitar

6.4.2 Outros analisadores ascendentes LR

- Todos os analisadores *LR* têm a seguinte estrutura:



- Os analisadores ascendentes gerados por ferramentas tipo *yacc*/*bison* não são analisadores $LR(0)$ simples.

- Ao contrário deste, esses analisadores fazem uso da antevisão do próximo token de entrada e são designados por $LALR(1)$.
- A utilização dessa informação permite uma melhor escolha das transições a serem feitas, e alargam enormemente o leque de gramáticas independentes de contexto que podem ser implementadas.
- A sua implementação directa é muito trabalhosa, pelo que não iremos detalhar a sua implementação.