Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

# Álgebra Linear e Geometria Analítica

Exame Final

14 de Janeiro de 2008 Duração: 2 horas 30 minutos

**Nome:** ______________________________

**Nº mecanográfico:** ______________ **Curso:** ______________________

Caso pretenda desistir assine a seguinte declaração.
**Declaro que desisto.** ______________________________

| Questão | 1a | 1b | 2a | 2b | 3a | 3b | 3c | 3d | 4 | total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cotação | 15 | 10 | 10 | 10 | 15 | 10 | 10 | 10 | 15 | 105 |
| Classificação | | | | | | | | | | |

| Questão | 5a | 5b | 6a | 6b | 7a | 7b | 7c | 8a | 8b | total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cotação | 10 | 10 | 15 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 95 |
| Classificação | | | | | | | | | | |

**IMPORTANTE:** *Justifique resumidamente todas as suas afirmações e indique os cálculos que efectuou.*

1. Considere o seguinte sistema linear nas incógnitas $x$, $y$, $z$, onde $a$ é um parâmetro real.

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

(a) Determine os valores do parâmetro $a$ para os quais o sistema é impossível.

(b) Considere $a = 2$. Resolva o sistema, pelo método de eliminação de Gauß-Jordan, e indique o espaço nulo da matriz dos coeficientes do sistema.

2. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Utilizando propriedades dos determinantes, transforme a matriz $A$ numa matriz triangular do tipo $4 \times 4$ cujo determinante seja igual a $\det(A)$.

(b) Calcule $\det(A)$ e indique os valores de $a$ e $b$ para os quais $A$ é invertível.

3. (a) Seja $A$ uma matriz quadrada. Justifique que, se $2A^2 + A - I = 0$, então $A$ é invertível.

   (b) Sendo $B$ e $C$ duas matrizes reais do tipo $4 \times 4$, sabendo que $\det(A) = -2$ e $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = C^{-1}BC$, determine $\det(B)$.

   (c) Diga, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira.
   Se $A$ é uma matriz quadrada com os elementos diagonais todos iguais a zero, então $A$ é não invertível.

   (d) Diga, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira.
   Se $A$ é do tipo $20 \times 25$ e $\mathrm{car}(A) < 5$, então a dimensão do espaço nulo de $A$ é superior a 15.

4. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear que é representada pela matriz $A$ relativamente à base $B = ((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1))$. Determine $T(1,2,3)$.

5. Considere as rectas

$$\begin{aligned} \mathcal{R}: &\quad \frac{x-3}{-2} = y-4 = -z+1, \\ \mathcal{S}: &\quad \frac{x-5}{2} = 1-y = z-4. \end{aligned}$$

(a) Determine a posição relativa das duas rectas.

(b) Escreva a equação vectorial do plano $\mathcal{P}$ que as contém.

6. Considere o espaço vectorial $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes reais do tipo $2 \times 2$ e seja

$$S = \{M \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid M = M^{\mathrm{T}}\}.$$

   (a) Averigue se $S$ é subespaço vectorial de $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
   (b) Verifique que $\dim(S) = 3$.

7. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que $v = (-1, 1, 1)$ é um vector próprio de $A$.

(b) Calcule os valores próprios de $A$.

(c) A matriz $A$ é diagonalizável? Justifique.

8\. (a) Diagonalize a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

(b) Considere a cónica

$$3x^2 + 3y^2 + 4xy + \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0.$$

Escreve a sua equação reduzida e classifique-a.