3.3. Séries de termos não negativos

Teorema Uma série de termos não negativos converge se, e só se, a sua sucessão das somas parciais é limitada superiormente.

Exemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Teorema (Critério do Integral) Sejam $a_n \geq 0$ e $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função decrescente tal que $f(n) = a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ têm a mesma natureza.

Séries de Dirichlet de ordem α:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

A série de Dirichlet de ordem α converge se e so se $\alpha > 1$. Em particular, a chamada série harmónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente.

3.3. Séries de termos não negativos

Teorema (Critério de Comparação) Suponha-se que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq a_n \leq b_n$, para todo $n \geq n_0$. Então:

1. Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
2. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

Exemplo:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

3.3. Séries de termos não negativos

O Critério de comparação nada diz nas situações em que a série de termo geral mais pequeno é convergente, ou quando a série de termo geral maior é divergente. A comparação dos termos gerais de duas séries pode também ser feita na forma de limite do seguinte modo:

Corolário (comparação por passagem ao limite) Sejam a_n e b_n tais que $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponha-se que existe o limite (finito ou infinito)

$$L := \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

Então:

1. Se $L \notin \{0, +\infty\}$, as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são da mesma natureza;
2. Se $L = 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge;
3. Se $L = +\infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

3.3. Séries de termos não negativos

Exemplos:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{1+n^4}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+3^n}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})$

Exercícios de revisão capítulos 1 e 2:

1ª teste 2014/15 (cont.

2. Resolve:
   1. $y' + \frac{x \cos x}{y \sin y} = 0$
   2. $xy'' - y' = 3x^2$ (sugestão: começa por fazer uma mudança de variável $z = y'$).
3. Considera a EDO $y'' - 5y + 6y = e^{3x}$.
   1. Determina a solução geral da EDO homogénea associada.
   2. Determina a solução geral da EDO pelo método dos coeficientes.
   3. Determina a solução geral da EDO pelo método da variação das constantes.