Departamento de Matemática – Universidade de Aveiro

Álgebra Linear e Geometria Analítica

1º TESTE

Data: 22 de Novembro de 2006 **Duração: 2horas**

Nome ______________________________

Nº Mecanográfico __________ Curso ______________________

Caso pretenda desistir assine a seguinte declaração.

Declaro que desisto ______________________________

Questão	1a	1b	1c	2a	2b	3a	3b	4a	4b	4c	4d	4e	5a	5b	Total
Cotação	10	2	5	5	5	8	15	5	18	5	4	4	7	7	100
Classif.															

1. Considere o seguinte sistema, nas variáveis x, y e z, com parâmetro real a:

$$\begin{cases} (a+1)x+y = 1 \\ (-a-1)x+(a+1)y+2z = 1 \\ y+z = a+1 \end{cases}$$

a) Discuta o sistema em função do parâmetro a.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 0 & 1 \\ -(a+1) & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a+1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3' \leftarrow L_3]{L_2' \leftarrow L_2+L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a+2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & a+1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a+1 \\ 0 & a+2 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & -a & -a(a+3) \end{array}\right]$$

$L_3' \leftarrow L_3 - (a+2)L_2$

se $a+1 \neq 0$ e $a = 0$ — sist. poss. e determinado

se $a = 0$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ — sist. poss e indeterminado

se $a = -1$ obtemos $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$

$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ — sistema impossível

b) Verifique que (1,0,1) é solução do sistema se e só se $a = 0$. subst. (x,y,z) por $(1,0,1)$

$$\begin{cases} (a+1)1 + 0 = 1 \\ -(a+1)1 + (a+1)0 + 2.1 = 1 \\ 0 + 1 = a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+1 = 1 \\ -a-1+2 = 1 \\ 1 = a+1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 0$$

$(1,0,1)$ é sol. do sistema sse $a = 0$

c) Considere $a = 0$. Determine o conjunto solução do sistema.

se $a = 0$ da alínea (a) temos $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

logo $\begin{cases} x+y = 1 \\ y+z = 1 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1-y \\ y = 1-z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 1-z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$

o conj.^{to} solução é

$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z \text{ e } y = 1-z\}$
$= \{(z, 1-z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \{(0,1,0) + z(1,-1,1), z \in \mathbb{R}\}$

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a_1+c_1 & a_2+c_2 & a_3+c_3 & a_3+c_3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 & 2c_3 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 & -b_3 \end{bmatrix}$.

a) Verifique que o complemento algébrico do elemento (2,2) da matriz A é zero.

$$A_{2,2} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_1+c_1 & a_3+c_3 & a_3+c_3 \\ 2c_1 & 2c_3 & 2c_3 \\ -b_1 & -b_3 & -b_3 \end{vmatrix} = 0$$ porque o

determinante tem 2 colunas iguais.

b) Sabendo que $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 3$ calcule o determinante de A.

usando a 2ª linha obtemos

$$\det(A) = 2\, \underbrace{A_{2,2}}_{\substack{=0 \\ \text{(alínea (a))}}} + (-1)(-1)^{2+4} \begin{vmatrix} a_1+c_1 & a_2+c_2 & a_3+c_3 \\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 \end{vmatrix}$$

$$= -(-2) \begin{vmatrix} a_1+c_1 & a_2+c_2 & a_3+c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$\overrightarrow{L_1' \leftarrow L_1 - L_2}$

$$= -2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 = -6$$

3.Seja A uma matriz nxn invertível.

a) Verifique que: Como A é invertível, então $\det(A) \neq 0$

i) $\det(adj(A)) = (\det(A))^{n-1}$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) \Leftrightarrow \det(A) \cdot A^{-1} = \operatorname{adj}(A)$$

logo $\det(\operatorname{adj}(A)) = \det\left(\det(A) \cdot A^{-1}\right) = (\det(A))^n \det(A^{-1})$

$$= (\det(A))^n \frac{1}{\det(A)} = (\det(A))^{n-1}$$

ii) $adj(A)^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} A$.

c/o $\det(\operatorname{adj}(A)) = \underbrace{(\det(A))}_{\neq 0}^{n-1} \neq 0$, $\operatorname{adj}(A)$ é invertível

usando novamente $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) \Leftrightarrow \operatorname{adj}(A) = \det(A) A^{-1}$

temos $(\operatorname{adj}(A))^{-1} = \left(\det(A) \cdot A^{-1}\right)^{-1}$

$$= \frac{1}{\det(A)} A$$

b) Considere a matriz

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

i) Calcule o determinante de B.

usando a última linha

$$\det(B) = 1 \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 1$$

ii) Determine, se possível, B^{-1}.

$\det(B) \neq 0$ logo B é invertível

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[L_3' \leftarrow L_3 - L_1]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{L_2' \leftarrow L_2 - L_4\\ L_3' \leftarrow L_3 - L_4}]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_1' \leftarrow L_1 + L_3\\ L_2' \leftarrow L_2 - L_3}]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

iii) Considere A uma matriz 4x4 tal que $adj(A) = B$.Calcule A. (Sugestão: utilize, se possível, o resultado da alínea a) ii))

em (a)(ii) obtivemos $adj(A)^{-1} = \frac{1}{det(A)} A \Leftrightarrow A = det(A)\, adj(A)^{-1}$

e como $adj(A) = B$ temos $A = det(A)\, B^{-1}$

por outro lado em (a)(i) obtivemos $det(adj(A)) = (det(A))^{n-1}$

e c/ $adj(A) = B$, $det(B) = (det(A))^{n-1}$. C/ $det(B) = 1$

e $n = 4$ ficamos com $1 = det(A)^3 \Rightarrow det(A) = 1$

e portanto $A = B^{-1}$

4. Considere os vectores $X = (1,1,-1)$, $Y = (0,1,1)$ e $Z = (1,1,a)$, onde a é um parâmetro real.

a) Verifique que X e Y são linearmente independentes.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\alpha X + \beta Y = 0 \Leftrightarrow \alpha(1,1,-1) + \beta(0,1,1) = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow (\alpha, \alpha+\beta, -\alpha+\beta) = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha+\beta = 0 \\ -\alpha+\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$

logo X e Y são L.I.

b) Determine todos os valores de a tais que:

i) Z seja combinação linear de X e de Y.

Z é comb. linear de X e Y

$\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : Z = \alpha X + \beta Y$

$\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : (1,1,a) = \alpha(1,1,-1) + \beta(0,1,1)$

$\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha+\beta = 1 \\ -\alpha+\beta = a \end{cases} \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \\ a = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \alpha = 1, \beta = 0$ e $a = -1$

ii) $\{X,Y,Z\}$ seja uma base de IR^3 .

C/o $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ e X, Y, Z são 3 vectores, então $\{X, Y, Z\}$ é base de $\mathbb{R}^3$ sse X, Y e Z são L. I.

Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0 \Leftrightarrow \alpha(1,1,-1) + \beta(0,1,1) + \gamma(1,1,a) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta + \gamma a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ -\alpha + \gamma a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\gamma \\ \beta = 0 \\ \gamma + \gamma a = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\gamma \\ \beta = 0 \\ \gamma(1+a) = 0 \end{cases}$$

se $a \neq -1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$ e X, Y, Z são L. I

se $a = -1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\gamma \\ \beta = 0 \\ \gamma \in \mathbb{R} \end{cases}$ e X, Y, Z ñ são L. I.

logo X, Y, Z são L. I. sse $a \neq -1$

<u>Nota</u> se $a = -1$ vimos na alínea (i) que Z é comb. linear de X e Y, logo ñ são L. I. e $\{X, Y, Z\}$ não é base

iii) o volume do paralelipípedo com arestas correspondentes aos vectores *X, Y* e *Z* seja igual a 1.

$$V = |(X \times Y) \cdot Z| = \left| \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \right| = |a + 1 + 1 - 1|$$

$$= |a + 1|$$

$$V = 1 \Leftrightarrow |a+1| = 1 \Leftrightarrow a + 1 = 1 \lor a + 1 = -1$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \lor a = -2$$

c) Verifique que X e Y são ortogonais e que não existe $a \in IR$ tal que Z seja ortogonal a X e a Y.

$X \cdot Y = (1,1,-1) \cdot (0,1,1) = 0 + 1 - 1 = 0$

logo são ortogonais

Z ortogonal a X e Y $\Leftrightarrow \begin{cases} Z \cdot X = 0 \\ Z \cdot Y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1,1,a)\cdot(1,1,-1) = 0 \\ (1,1,a)\cdot(0,1,1) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+1-a = 0 \\ 1+a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases}$ o que é impossível

logo ñ existe a tq Z seja ortogonal a X e a Y.

d) Determine um vector não nulo ortogonal a X e a Y.

$W = X \times Y$ é ortogonal a X e a Y

$W = X \times Y = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right)$

$= (1+1, -1, 1) = (2, -1, 1)$

C. A. $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

e) Considere $a = -1$. Determine o subespaço gerado por X, Y e Z.

Se $a = -1$ então Z é comb. linear de X, Y,

logo $\text{span}\{X, Y, Z\} = \text{span}\{X, Y\}$

$(x,y,z) \in \text{span}\{X,Y\} \Leftrightarrow \exists_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}} \; (x,y,z) = \alpha(1,1,-1) + \beta(0,1,1)$

$\Leftrightarrow \exists_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}} : (x,y,z) = (\alpha, \alpha+\beta, -\alpha+\beta)$

$\Leftrightarrow \exists_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}} : \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha + \beta \\ z = -\alpha + \beta \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ o sistema nas var. α e β $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha+\beta \\ z = -\alpha+\beta \end{cases}$ for possível

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ -1 & 1 & z \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2' \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3' \leftarrow L_3 + L_1}]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 1 & x+z \end{array}\right] \xrightarrow[L_3' \leftarrow L_3 - L_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & x+z-y+x \end{array}\right]$

o sist. é possível sse $2x - y + z = 0$ logo

$\text{span}\{X,Y\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0\}$

5. Considere o espaço vectorial IR^3 munido das operações usuais e o conjunto

$$S = \{(x,y,z) \in IR^3 : x+y+z=0\}$$

a) Verifique que S é um subespaço vectorial de IR^3.

(i). $S \subset \mathbb{R}^3$ por definição

(ii). $S \neq \{\}$ porque $(0,0,0) \in S$ $(0+0+0=0)$

(iii). Sejam $(x_1, y_1, z_1) \in S$ $(\Rightarrow x_1 + y_1 + z_1 = 0)$
e $(x_2, y_2, z_2) \in S$ $(\Rightarrow x_2 + y_2 + z_2 = 0)$

Temos $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

e $x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2 = \underbrace{x_1 + y_1 + z_1}_{=0} + \underbrace{x_2 + y_2 + z_2}_{=0} = 0$

logo $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in S \Leftrightarrow S$ é fechado p/a $+$

(iv). Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(x, y, z) \in S$ $(\Rightarrow x + y + z = 0)$

Temos $\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$

e $\alpha x + \alpha y + \alpha z = \alpha \underbrace{(x + y + z)}_{=0} = \alpha \cdot 0 = 0$

logo $\alpha(x, y, z) \in S \Leftrightarrow S$ é fechado p/a $\cdot$

Concluimos por (i), (ii), (iii) e (iv) que S é subesp. de $\mathbb{R}^3$

b) Determine uma base e a dimensão de S.

- $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$

$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -y - z\}$

$= \{(-y - z, y, z), \ y, z \in \mathbb{R}\}$

$= \{y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1), \ y, z \in \mathbb{R}\}$

$= \text{Span}\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$

- verificar se $(-1, 1, 0)$ e $(-1, 0, 1)$ são l.i.

sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha(-1, 1, 0) + \beta(-1, 0, 1) = (0, 0, 0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$

logo $(-1, 1, 0)$ e $(-1, 0, 1)$ são l.i.

C/o $(-1, 1, 0)$ e $(-1, 0, 1)$ geram S e são l.i.
formam uma base de S

e $\dim S = 2$.

FIM