

Mecânica e Campo Eletromagnético

2017/2018 – parte 5

Luiz Pereira

luiz@ua.pt



Tópicos

- **Movimento de um sistema de partículas**
 - **Momento linear do sistema**
 - **Conservação do momento linear**
 - **Centro de massa**
 - **Colisões**
 - **Sistema de massa variável**

Momento linear (recordar)

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

direção e sentido: velocidade

Unidades fundamental do S.I: (kg .m / s)

Quanto maior é o momento linear de um corpo, mais difícil é travá-lo e maior será o efeito provocado se for posto em repouso por impacto ou colisão.

Força (resultante) e momento linear

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_{ext} &= \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \\ \vec{F}_{ext}^R &= m \frac{d\vec{v}}{dt} \\ \vec{F}_{ext}^R &= m\vec{a}\end{aligned}$$

Na mecânica clássica,
para uma partícula isolada,

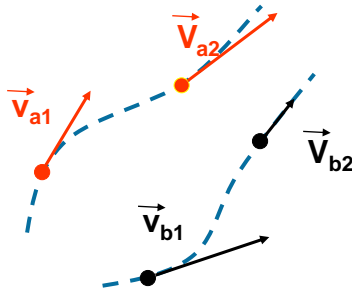
$$\vec{F}_{ext}^R = m\vec{a} \quad \text{e} \quad \vec{F}_{ext}^R = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

são completamente
equivalentes

A variação temporal do momento linear de um corpo é igual à **força resultante** que atua sobre o corpo.

Princípio da conservação do momento linear

Sistema: **partícula a + partícula b**



$$\vec{P}_{\text{sistema}} = \vec{p}_a + \vec{p}_b$$

Instante t_1 $\vec{P}_{\text{sistema}}^1 = \vec{p}_{a1} + \vec{p}_{b1}$

Instante t_2 $\vec{P}_{\text{sistema}}^2 = \vec{p}_{a2} + \vec{p}_{b2}$

O MOMENTO LINEAR TOTAL DE UM SISTEMA COMPOSTO POR DUAS PARTÍCULAS SUJEITAS APENAS ÀS SUAS INTERAÇÕES MÚTUAS PERMANECE CONSTANTE

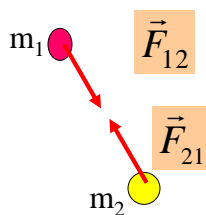
$$\vec{P}_{\text{SISTEMA}}^1 = \vec{P}_{\text{SISTEMA}}^2$$

Sistema Isolado: Conservação do Momento Linear

Consideremos um sistema isolado constituído por duas partículas.

Ser isolado significa que não há forças exteriores aplicadas (ou resultante nula)

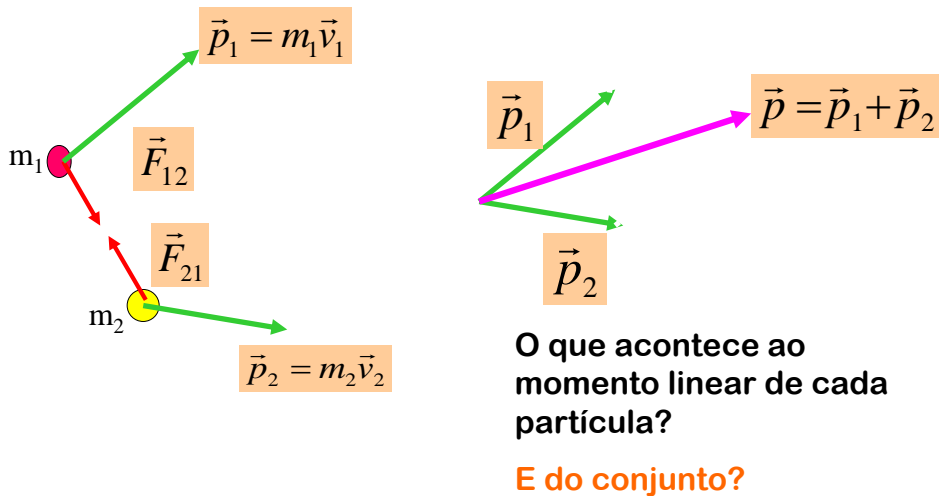
Assim cada partícula estará apenas sujeita à interação com a outra partícula.



De acordo com a 3ª Lei de Newton:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Sistema Isolado: Conservação do Momento Linear



Sistema Isolado: Conservação do Momento Linear

Para cada partícula temos

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Então:

$$\vec{F}_{12} = \frac{d\vec{p}_1}{dt}$$

$$\vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

O momento linear de cada partícula varia

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0} \quad \longrightarrow \quad \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const.}$$

O momento linear do conjunto **NÃO** varia

Sistema Isolado: Conservação do Momento Linear

O momento linear total de um sistema, composto de duas partículas sujeitas somente às suas interações mútuas, **permanece constante**

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$

Princípio da Conservação do Momento Linear num Sistema Isolado

O princípio de conservação do momento linear é um dos conceitos mais importantes na física

Sistema Isolado: Conservação do Momento Linear

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots = \text{const.}$$

A três dimensões:

$$P_{x_i} = P_{x_f}$$

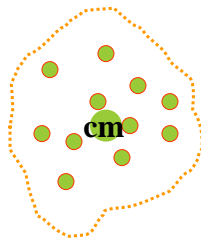
$$P_{y_i} = P_{y_f}$$

$$P_{z_i} = P_{z_f}$$

Centro de massa

Vamos ver que:

Para qualquer sistema de partículas existe um ponto que se move sob a ação das forças aplicadas ao sistema como se toda a sua massa desse sistema estivesse concentrada nesse ponto: **o centro de massa (cm)**



Independente dos movimentos individuais neste grupo de partículas, a dinâmica do centro de massa obedece à 2ª Lei de Newton

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm}.$$

Centro de massa a 1D

A diagram showing a horizontal line with a coordinate system starting at 0. Two particles, labeled m1 and m2, are on the line. A larger pink circle labeled M represents the center of mass. Position vectors x1, x2, and xcm are shown as arrows from the origin. A red arrow below the line also points to the right, labeled xcm.

$$M = m_1 + m_2$$

$$M\vec{x}_{cm} = (m_1x_1 + m_2x_2)\hat{i}$$

$$\vec{x}_{cm} = \left(\frac{m_1x_1 + m_2x_2}{M} \right) \hat{i}$$

$$\vec{x}_{cm} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{x}_i$$

Para N partículas

Centro de massa a 3D

Posição do centro de massa para um **sistema de partículas**

$$\vec{r}_{c.m.} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$$

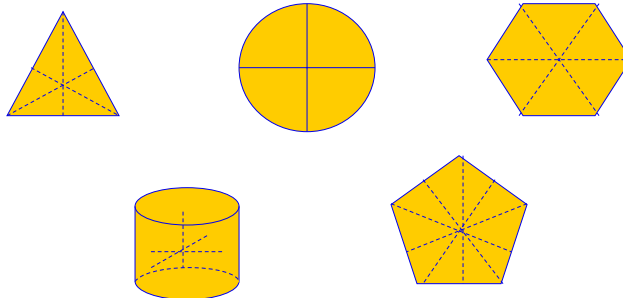
com $\vec{r}_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}$ e $M = \sum m_i$

Posição do centro de massa para uma **distribuição contínua de massa**

$$\vec{r}_{c.m.} = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\sum \Delta m_i \vec{r}_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$$

Centro de massa a 3D

No caso de objectos simétricos com densidade uniforme o centro geométrico do corpo coincide com o centro de massa do mesmo.



Movimento de um sistema de partículas

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M} \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{M}$$

$$M\vec{v}_{cm} = \sum m_i \vec{v}_i = \sum \vec{p}_i = \vec{P}$$

O momento linear total de um sistema de várias partículas é igual ao de uma partícula de massa M deslocando-se com velocidade \vec{v}_{cm}

Movimento de um sistema de partículas

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M} \sum m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{M}$$

$$M\vec{a}_{cm} = \sum m_i \vec{a}_i = \sum \vec{F}_i$$

\vec{F}_i são as forças exteriores aplicadas sobre cada uma das partículas componentes do sistema.

Note que as forças internas (entre os componentes) não contribuem para a variação da quantidade do movimento do sistema.

Movimento de um sistema de partículas

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Diz-nos que:

Se a resultante das forças externas aplicadas é igual a zero: $a_{cm} = 0 \Rightarrow$ o sistema está em repouso ou em movimento uniforme

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_{c.m.} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = M\vec{v}_{cm} = const.$$

O centro de massa de um sistema de partículas move-se como se fosse uma partícula de massa igual à massa total do sistema sujeito à ação de uma força externa aplicada ao sistema

Colisões

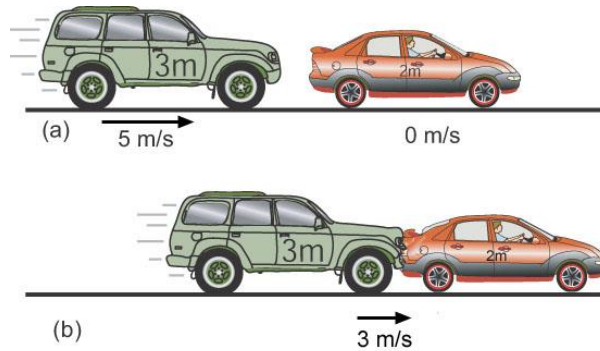
- Numa colisão há forte interação entre dois corpos
- As forças impulsivas são normalmente muito superiores a qualquer força externa
- Poderá ou não existir contato físico

De acordo com a 3ª Lei de Newton:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} &\Leftrightarrow \Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2 \\ \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 &= \vec{0} \end{aligned}$$

A variação do momento linear do sistema devido à colisão é zero

Colisões

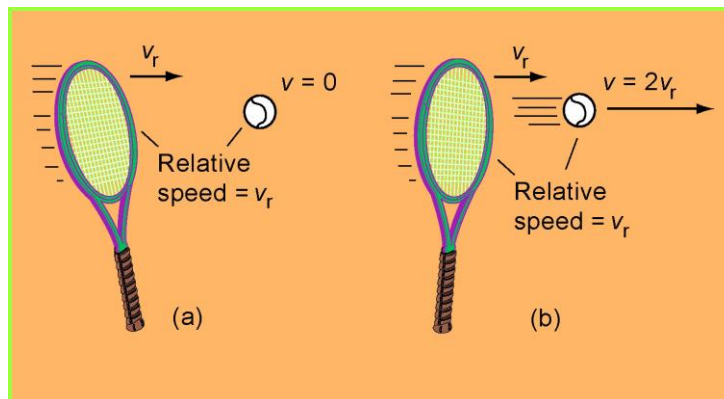


O momento é conservado nesta colisão?

Sim, o momento inicial é $3\text{m} \times 5 \text{ m/s} = 15 \text{ kgm/s}$

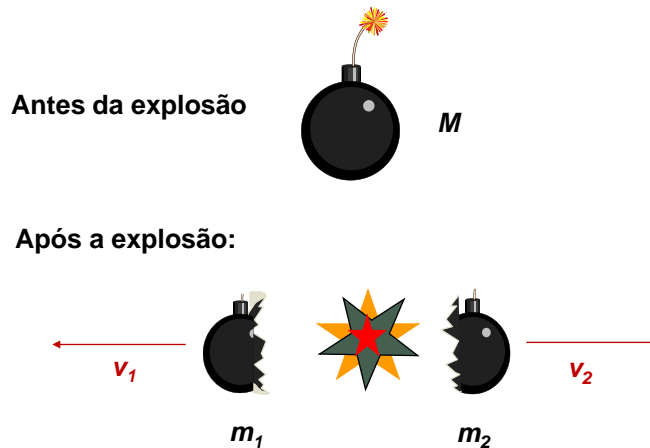
E o momento final é $5\text{m} \times 3 \text{ m/s} = 15 \text{ kgm/s}$

Colisão elástica



Numa colisão elástica a velocidade relativa entre os objetos mantém-se antes e após a colisão

Explosão a 1D: uma só componente



Explosão a 1D: uma só componente

- \mathbf{P} é conservado (forças externas são nulas).

- Antes da explosão: $\mathbf{P} = 0$



- Após a explosão: $\mathbf{P} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = 0$

$$m_1 \mathbf{v}_1 = -m_2 \mathbf{v}_2$$



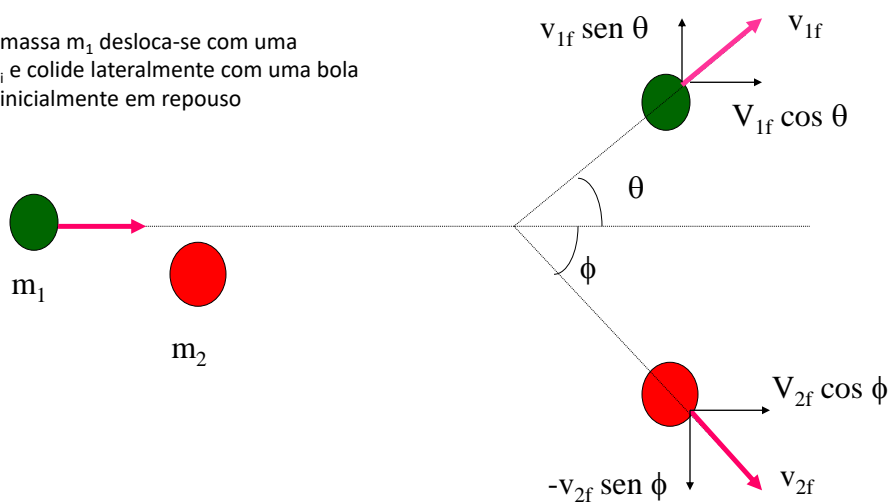
Colisões

A **conservação do momento linear** diz que, na **ausência de forças externas**, o **vetor momento total** antes da colisão é o mesmo após a colisão

- ❖ **Colisões elásticas**: colisões que conservam momento e energia cinética
- ❖ **Colisões inelásticas**: colisões que só conservam momento
- ❖ **Colisões perfeitamente inelásticas**: os objetos mantêm-se juntos após a colisão

Exemplo

Uma bola de massa m_1 desloca-se com uma velocidade v_{1i} e colide lateralmente com uma bola de massa m_2 inicialmente em repouso



Conservação do momento linear

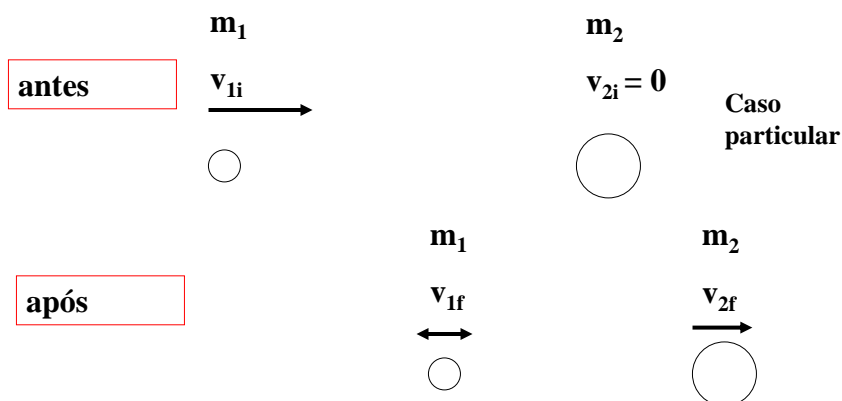
Lei da conservação do momento linear : $\vec{P}_i = \vec{P}_f$

$$\begin{array}{l} \text{Ox} \left\{ \begin{array}{l} P_{xi} = P_{xf} \\ P_{yi} = P_{yf} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos \theta + m_2 v_{2f} \cos \phi \\ 0 = m_1 v_{1f} \sin \theta - m_2 v_{2f} \sin \phi \end{array} \right. \end{array}$$

Se a colisão for elástica : $E_{ci} = E_{cf}$

$$1/2 m_1 v_{1i}^2 = 1/2 m_1 v_{1f}^2 + 1/2 m_2 v_{2f}^2$$

Colisão elástica a uma dimensão



Colisão elástica a uma dimensão

Conservação do momento $m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \dots (1)$

$$m_2 v_{2f} = m_1 (v_{1i} - v_{1f}) \dots (2)$$

Conservação de Energia $\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$

$$\frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 = \frac{1}{2} m_1 (v_{1i}^2 - v_{1f}^2)$$

$$m_2 v_{2f}^2 = m_1 (v_{1i} - v_{1f}) (v_{1i} + v_{1f}) \dots (3)$$

Dividindo a Eq. (3) pela (2) $\rightarrow v_{2f} = v_{1i} + v_{1f} \dots (4)$

Colisão elástica a uma dimensão

v_{1i} geralmente é dado, pelo que para calcular v_{2f} precisamos de uma expressão para v_{1f} . A partir da Eq. (1):

$$m_1 v_{1f} = m_1 v_{1i} - m_2 v_{2f}$$

$$v_{1f} = \frac{m_1 v_{1i} - m_2 v_{2f}}{m_1} = v_{1i} - \frac{m_2}{m_1} v_{2f}$$

Substituindo na Eq. (4)

$$v_{2f} = v_{1i} + v_{1i} - \frac{m_2}{m_1} v_{2f}$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i}$$

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i}$$

Colisão elástica a uma dimensão

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i}$$

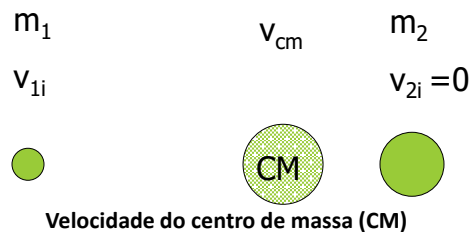
$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i}$$

Se $m_1 \gg m_2$ $v_{2f} \rightarrow 2v_{1i}$ $v_{1f} \rightarrow v_{1i}$

Se $m_2 \gg m_1$ $v_{2f} \rightarrow 0$ $v_{1f} \rightarrow -v_{1i}$

Se $m_1 = m_2$ $v_{2f} \rightarrow v_{1i}$ $v_{1f} \rightarrow 0$

Velocidade do centro de massa (CM)

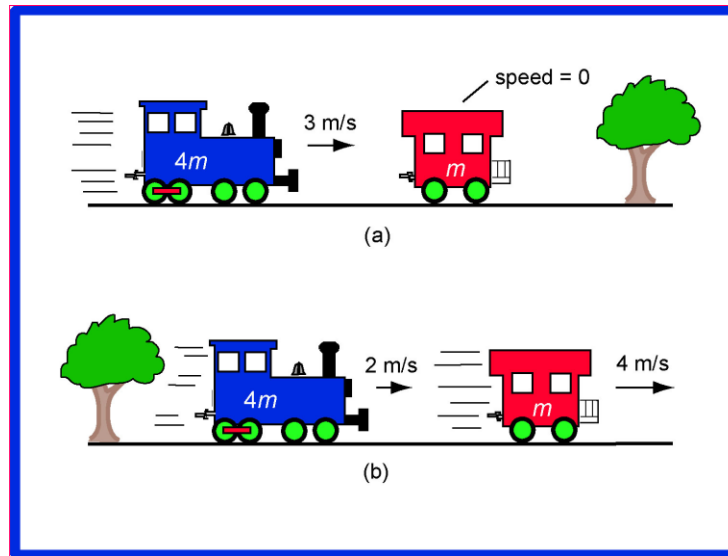


Momento linear do CM = momento de m_1 + momento de m_2 : $(m_1 + m_2) V_{cm} = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}$

$$V_{cm} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

É constante!

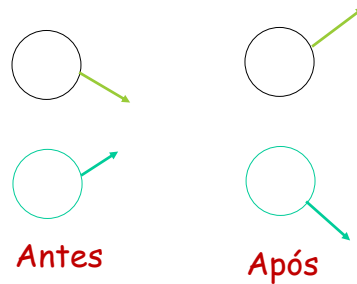
Colisão inelástica



Colisão perfeitamente inelástica



Colisões a duas dimensões



$P_{\text{total},x}$ e $P_{\text{total},y}$ **conservam-se individualmente**

$$P_{\text{total},x,\text{antes}} = P_{\text{total},x,\text{após}}$$

$$P_{\text{total},y,\text{antes}} = P_{\text{total},y,\text{após}}$$

Sistemas de massa variável



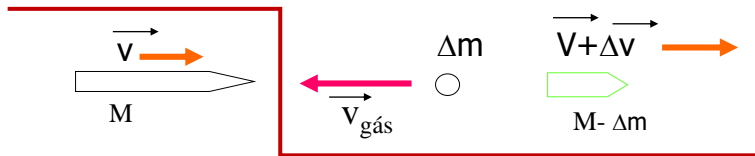
Porque se movimenta um foguete? Porque um balão de borracha cheio de ar se escapa?

No espaço livre, o movimento de um foguete pode ser compreendido pela conservação do momento linear do sistema (foguete + gases) pois é um sistema isolado.

O efeito da gravidade para um foguete **em movimento vertical**, perto da Terra p. ex., pode ser acrescentado, à parte, na força resultante sobre o foguete.

Sistemas de massa variável: Movimento de um foguete

Consideremos o movimento horizontal de um foguete e analisemos a variação do momento linear do sistema (foguete + gases).



Num certo instante t o sistema de massa M (foguete mais combustível) desloca-se à velocidade v .

Num instante posterior, o foguete liberta uma quantidade de combustível Δm que se escapa à velocidade $v_{\text{gás}}$.

O sistema (foguete mais combustível que ainda resta) de massa $M - \Delta m$ adquire uma velocidade $v + \Delta v$.

Sistemas de massa variável: Movimento de um foguete

No instante t : $M\vec{v}$

No instante posterior $t + \Delta t$: $(M - \Delta M)(v + \Delta v) + \Delta M \vec{v}_{\text{gás}}$

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{ext}} &\cong \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} \\ \vec{F}_{\text{ext}} &\cong \frac{\vec{P}_f - \vec{P}_i}{\Delta t} = \frac{(M - \Delta M)(\vec{v} + \Delta \vec{v}) + \Delta M \vec{v}_{\text{gás}} - M\vec{v}}{\Delta t} \\ \vec{F}_{\text{ext}} &\cong M \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} + \underbrace{(\vec{v}_{\text{gás}} - (\vec{v} + \Delta \vec{v}))}_{\vec{v}_e} \frac{\Delta M}{\Delta t} \\ \vec{F}_{\text{ext}} &= M \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dM}{dt} \vec{v}_e\end{aligned}$$

Se passarmos ao limite
 $\Delta t \rightarrow 0$: $\Delta v \rightarrow dv$ e $\Delta M / \Delta t \rightarrow -dM/dt$

Onde \vec{v}_e é a velocidade da massa de gás expelida, medida em relação ao foguete

Sistemas de massa variável: Força de Reação

$$\vec{F}_{ext} = M \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dM}{dt} \vec{v}_e$$

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{ext} + \frac{dM}{dt} \vec{v}_e$$

A massa expelida pelo foguete na unidade de tempo deve ser a maior possível, e a velocidade desta relativamente ao foguete deve ser a maior possível

Força de reação: força que os gases expelidos exercem sobre o foguete

$$\vec{F}_{reacção} = \frac{dM}{dt} \vec{v}_e$$

Sistemas de massa variável: Força de Reação

Se \vec{F}_{ext} for nula então

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dM}{dt} \vec{v}_e$$

Podemos determinar a velocidade do foguete integrando a equação, considerando M_i e M_f a massa inicial e final do foguete mais combustível

$$\int_{v_i}^{v_f} d\vec{v} = \vec{v}_e \int_{M_i}^{M_f} \frac{1}{M} dM$$

$$\vec{v}_f - \vec{v}_i = \vec{v}_e \ln \frac{M_f}{M_i}$$

A velocidade final não depende da taxa (dM/dt) com que os gases são expelidos (consumo de combustível). Só depende de v_e e das massas inicial e final.

Atenção, M_f não deverá ser zero! Deve sobrar sempre o foguete, quando acaba o combustível...