

Matemática Discreta

Funções Geradoras 3

Universidade de Aveiro 2016/2017

<http://moodle.ua.pt>

Funções geradoras mais gerais

Exemplos de funções geradoras bidimensionais

Funções geradoras de duas variáveis

- As funções geradoras podem ser utilizadas nos casos multidimensionais.
- Porém, no contexto deste curso, vamos analisar apenas o caso bidimensional.

Definição (Função geradora ordinária com duas variáveis)

Dada a sucessão bidimensional de números $(a_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}_0}$, designa-se por função geradora (ordinária) bidimensional desta sucessão a série formal de potências

$$\mathcal{A}(x, y) = \sum_{n,k \in \mathbb{N}_0} a_{n,k} x^n y^k. \quad (1)$$

Exemplos

Exemplo 1

Vamos determinar a função geradora para a sucessão de números binomiais $(b_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}_0}$, tal que $b_{n,k} = \binom{n}{k}$.

Solução. Uma vez que $k > n \Rightarrow \binom{n}{k} = 0$, vem

$$B(x, y) = \sum_{n,k \in \mathbb{N}_0} b_{n,k} x^n y^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^n y^k. \text{ Logo,}$$

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} y^k \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1+y)^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} ((1+y)x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (x+xy)^n \end{aligned}$$

e, conseqüentemente, $B(x, y) = \frac{1}{1-x-xy}$.

Exemplos (cont.)

Exemplo 2

Vamos determinar a função geradora para a sucessão $(b_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}_0}$, tal que $b_{n,k} = \frac{n^k}{k!}$, convencionando que $0^0 = 1$.

Solução. Uma vez que

$$B(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} x^n y^k = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} y^k \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ny)^k}{k!} \right) x^n,$$

$$\text{vem } B(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{ny} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (xe^y)^n.$$

$$\text{Logo, } B(x, y) = \frac{1}{1 - xe^y}.$$