Álgebra Linear e Geometria Analítica

Exame final - 07/01/2013 **Duração: 2h30**

Nome: ______________________________ **N.º mecanográfico:** ____________

Declaro que desisto ☐ ______________________________ **N.º de folhas suplementares:** __

	Grupo I
Cotação	50

	Grupo II					
Questões	1	2	3	4	5	Total
Cotação	26	48	36	18	22	150
Classificação						

Grupo I

As questões do grupo I encontram-se na folha em anexo que será recolhida após 45 minutos.

Grupo II

Justifique convenientemente todas as suas respostas e indique os cálculos que efetuar.

1. Considere em $\mathbb{R}^3$ o ponto $A = (2,0,3)$ e o plano $\mathcal{P}$ definido por $\begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

   (a) Escreva uma equação geral do plano $\mathcal{P}$.

   (b) Determine uma equação vetorial da reta ortogonal ao plano $\mathcal{P}$ e que passa pelo ponto A.

   (c) Calcule a distância do ponto A ao plano $\mathcal{P}$.

2. Seja A a matriz dos coeficientes do sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x - az = b \\ y - ax = 0 \\ z - ay = b \end{cases},$$

com a e b parâmetros reais.

(a) Escreva a matriz A e calcule o seu determinante.

(b) Discuta o sistema em função dos parâmetros a e b.

(c) Considere $a = 1$ e

i. verifique se as três colunas de A formam um conjunto linearmente independente;

ii. verifique se $(1, 0, 1)$ pertence ao espaço das colunas de A;

iii. indique a dimensão do espaço das colunas de A.

3. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine os valores próprios e os subespaços próprios de A.

(b) Determine uma equação reduzida e identifique a cónica de equação $2x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x + 2y = 1$.

4. Considere as bases $S = ((1,0,0),(0,1,0),(1,1,1))$ e $T = ((1,1),(0,1))$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respetivamente. Seja $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação linear definida por $L(x,y,z) = (y+2z, x+2y)$.

   (a) Determine a matriz representativa de L relativamente às bases S e T.

   (b) Sabendo que $[X]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, calcule $[L(X)]_T$.

5. Considere os vetores $X = (1,2,3)$, $Y = (1,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{W}$ o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por Y.

   (a) Calcule a projeção ortogonal de X sobre $\mathcal{W}$.

   (b) Escreva X como soma de um vetor do subespaço $\mathcal{W}$ com um vetor ortogonal a Y.