Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I (Segundo Semestre) — Ano lectivo 06/07

Resolução do Trabalho Teórico-Prático 2

1. Considere a função f definida por

$$f(x) = x^2 + \arctan(x^2)$$

para todo o $x \in D_f$.

(a) Determine o domínio de f, D_f.

Indicações para a resolução: $D_f = \mathbb{R}$.

(b) Determine o contradomínio de f, CD_f.

Indicações para a resolução: Uma vez que para, todo o $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, tem-se que $\arctan(x^2) \in [0, \frac{\pi}{2}[$ e, portanto, $CD_f = \mathbb{R}_\circ^+$.

(c) Justifique que o gráfico da função f não tem assimptotas.

Indicações para a resolução: O gráfico de f não tem assimptotas verticais porque f é contínua em $\mathbb{R}$. Uma vez que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(x + \frac{1}{x} \arctan(x^2) \right) = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(x + \frac{1}{x} \arctan(x^2) \right) = -\infty$$

(note que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \arctan(x^2) = 0 \cdot \frac{\pi}{2} = 0$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} \arctan(x^2) = 0 \times \frac{\pi}{2} = 0$)
podemos concluir que o gráfico de f não tem assimptotas não verticais.

(d) Estude a função f quanto à monotonia.

Indicações para a resolução: Uma vez que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 2x + \frac{2x}{1+x^4} = \frac{2x(2+x^4)}{1+x^4},$$

podemos concluir que o sinal de f' é o sinal de x (porque $2+x^4 > 0$ e $1+x^4 > 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$). Logo f é estritamente decrescente em $\mathbb{R}^-$ e estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$.

(e) Determine, se existirem, os extremos locais de f.

Indicações para a resolução: O único candidato a extremante local é o ponto crítico de f, $x = 0$. Como f é contínua em $\mathbb{R}$, estritamente decrescente em $\mathbb{R}^-$ e estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$, $x = 0$ é minimizante local de f. Logo, $f(0) = 0$ é mínimo local de f.

2. Considere a função $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = xe^{-\frac{1}{x}}.$$

Mostre que para todo o $x \in]1,3[$, $g(x)$ pode ser aproximado por

$$p(x) = 2e^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}}(x-2)$$

com um erro inferior a $\frac{1}{2\sqrt[3]{e}}$.

Indicações para a resolução: O polinómio de Taylor de ordem 1 da função g no ponto 2 , p_1, é dado por

$$p_1(x) = g(2) + g'(2)(x-2).$$

Uma vez que, para todo o $x \neq 0$,

$$g'(x) = e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$$

temos que

$$p_1(x) = 2e^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}}(x-2).$$

Logo, podemos afirmar que $g(x)$, para todo o $x \in]1,3[$, pode ser aproximado por $2e^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}}(x-2)$.
O erro cometido nessa aproximação é dado por

$$|R_1(x)| = \left|\frac{g''(\xi)(x-2)^2}{2!}\right|$$

para algum ξ entre x e 2.
Uma vez que

$$g''(x) = \frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}$$

tem-se que

$$| R_1(x) | = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{\xi}} \cdot \left| \frac{1}{\xi^3} \right| \cdot | x-2 |^2 .$$

Para todo o $x \in]1,3[$, $-1 < x-2 < 1$, logo, $| x-2 | < 1$ e, portanto, $| x-2 |^2 < 1$.
Logo, para todo o $x \in]1,3[$,

$$| R_1(x) | < \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{\xi}} \cdot \left|\frac{1}{\xi^3}\right|.$$

Como ξ está entre x e 2 e $1 < x < 3$, tem-se que $1 < \xi < 3$, donde $\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{\xi} < 1$.
Logo,

$$| R_1(x) | < \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{\xi}}.$$

Por outro lado, como $-1 < -\frac{1}{\xi} < -\frac{1}{3}$ e a função exponencial é estritamente crescente, podemos concluir que $e^{-\frac{1}{\xi}} < e^{-\frac{1}{3}}$ e, consequentemente,

$$| R_1(x) | < \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{e}}$$

como queríamos demonstrar.