Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Exame da 1ª chamada

8 de Janeiro de 2007 Duração: 3 horas

Nome: ____________________

Nº mecanográfico: ____________ **Curso:** ____________

Caso pretenda desistir assine a seguinte declaração.
Declaro que desisto. ____________________

Questão	1a	1b	1c	2	3a	3b	3c	4a	4b	total
Cotação	15	10	10	10	15	10	10	10	10	100
Classificação										

Questão	5a	5b	5c	5d	5e	6a	6b	6c	7a	7b	7c	total
Cotação	10	10	10	8	10	10	10	8	8	8	8	100
Classificação												

IMPORTANTE: *Justifique resumidamente todas as suas afirmações e indique os cálculos que efectuou.*

1. Dados a matriz A real de tipo 3×3 e o vector $B \in \mathbb{R}^3$, seja $AX = B$ um sistema que, por eliminação de Gauss, conduziu à seguinte matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \alpha & 2 \\ 0 & \alpha & 1 & \beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha(1-\beta) \end{array}\right].$$

   (a) Discuta para que valores dos parâmetros α e β o sistema é
      i. possível e determinado;
      ii. possível e indeterminado;
      iii. impossível.

(b) Para $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, indique justificando e sem recorrer a cálculos os seguintes conjuntos:

i. o espaço nulo de A, $\mathcal{N}(A)$.

ii. o espaço das colunas de A, $\mathcal{C}(A)$.

(c) Considere $\alpha = 0$ e $\beta = 0$. Resolva o sistema $AX = B$ e indique o seu conjunto de soluções.

2. Calcule a inversa da seguinte matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Seja A uma matriz quadrada $n \times n$ tal que $A^2 = A$.

   (a) Verifique que $\det(A) = 0$ ou $\det(A) = 1$.

   (b) Justificando, comente a seguinte afirmação: *A é invertível.*

   (c) Suponha que $car(A) = n$. Justifique que, neste caso, $A = I_n$.

4. Considere o subconjunto $S = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = c\}$.

   (a) Mostre que S é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$.

(b) Determine uma base de S e indique a dimensão de S.

5. Considere a base $\mathcal{B} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ em que

$$\omega_1 = (1,0,0), \quad \omega_2 = (1,1,0), \quad \omega_3 = (1,1,1),$$

e a transformação linear

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

definida por $\quad T(\omega_1) = \omega_2, \quad T(\omega_2) = \omega_1 + \omega_3, \quad T(\omega_3) = \omega_1.$

(a) Construa a matriz A desta transformação linear relativamente à base $\mathcal{B}$ do espaço de partida e à base canónica do espaço de chegada.

(b) Represente $X = (-2, 1, 1)$ como combinação linear dos vectores da base $\mathcal{B}$ e, usando a matriz A, calcule $T(X)$.

(c) Determine o subespaço $\ker(T)$ e diga qual a sua dimensão.

(d) Diga, justificando, se a transformação linear é injectiva. E sobrejectiva?

(e) Usando matrizes de mudança de base, construa a matriz de T relativamente à base canónica do espaço de partida e à base $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ do espaço de chegada.

6. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e a aplicação linear $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ X \mapsto AX$.

(a) Mostre que a matriz A é diagonalizável.

(b) Verifique que dois vectores próprios de A associados a valores próprios distintos são ortogonais.

(c) Encontre uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ tal que a matriz de L relativamente a esta base seja diagonal.

7. Para cada uma das afirmações seguintes diga se é verdadeira ou falsa, apresentando, em cada caso, uma justificação breve.

   (a) Se o espaço das linhas de uma matriz 2×3 é gerado por $(2, 1, 0)$, então a nulidade dessa matriz é dois.

   (b) Em $\mathbb{R}^3$, $x + y + z = 0$ é uma equação do plano ortogonal à recta que passa nos pontos $(1, 0, 1)$ e $(2, 1, 2)$.

   (c) Se uma matriz A do tipo 2×2 tem valor próprio -1, e a ele estão associados os vectores próprios $(1, 2)$ e $(2, -1)$, então $A^{123} = A$.