Álgebra Linear e Geometria Analítica

1.ª Prova de Avaliação Discreta - 24/10/2012 **Duração: 1h30**

Nome: ______________________________ **N.º mecanográfico:** __________

Declaro que desisto ☐ ______________________________ **N.º de folhas suplementares:** __

	Grupo I
Cotação	60

	Grupo II				
Questões	1	2 (a)(b)	2 (c)	3	Total
Cotação	45	45	20	30	140
Classificação					

Classificação final
valores

Grupo I

Este grupo é constítuido por 5 questões de escolha múltipla. Cada questão tem uma só opção correta que deve assinalar na folha de resposta em anexo e que será recolhida após 45 minutos.

Uma resposta correta é cotada com 12 pontos, uma resposta em branco com 0 pontos e uma resposta errada com -3 pontos.

1. A caraterística da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é igual a

   A. 1;
   B. 2;
   C. 3;
   D. 4.

2. Quaisquer que sejam as matrizes invertíveis A e B, satisfazendo $\left(AX^T\right)^T = B$, tem-se

   A. $X = B(A^{-1})^T$;
   B. $X = (A^T)^{-1}B$;
   C. $X = A^T B^{-1}$;
   D. $X = A^{-1}B^T$.

3. Qualquer que seja a matriz A quadrada 2×2 com $\det(A) = 3$, tem-se

   A. $\det\left(-A^T\right) = -3$;
   B. $\det\left(A + A^T\right) = 6$;
   C. $\det\left(AA^{-1}\right) = 9$;
   D. $\det\left(2A^T\right) = 12$.

4. Sabendo que $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 1$, então $\begin{vmatrix} c_1 & 2a_1 + b_1 & a_1 \\ c_2 & 2a_2 + b_2 & a_2 \\ c_3 & 2a_3 + b_3 & a_3 \end{vmatrix}$ é igual a

   A. 2;
   B. -2
   C. 1;
   D. -1.

5. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, existe pelo menos uma matriz B do tipo 3×2, tal que

A. $BB^T = A$;

B. $AA^T = B$;

C. $AB = I_2$;

D. $BA = I_3$.

Grupo II

Justifique convenientemente todas as suas respostas e indique os cálculos que efetuar.

1. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Aplique eliminação de Gauss-Jordan à matriz ampliada do sistema representado por $AX = B$.

(b) Sem efetuar cálculos adicionais, mostre que A é invertível e indique a última coluna da inversa de A.

2. Considere o sistema representado matricialmente por $AX = B$, com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}.$$

(a) Indique, justificando, os valores do parâmetro real α para os quais A é invertível.

(b) Discuta o sistema em função do parâmetro real α.

(c) Para $\alpha = 2$, determine se possível o valor da incógnita x do sistema, recorrendo à Regra de Cramer.

3. Justifique a igualdade

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

e determine o valor deste determinante.