Exercícios sobre linguagens regulares

Marcus Vinícius Midena Ramos 07/05/2012

- Todos os exercícios propostos possuem solução (gramáticas e expressões regulares);
- Sugere-se analisar o problema, desenvolver uma solução e apenas depois comparar com a solução apresentada;
- Não existe solução única;
- O exercício procure abranger as principais propriedades estruturais exibidas pelas linguagens regulares, assim como as principais operações usadas para a sua formulação.

Comprimento:

- o Igual a ...
- o Maior (ou igual) a ...
- o Menor (ou igual) a ...
- o Par
- o Ímpar
- o Múltiplo de ...

Símbolos e subcadeias:

- o Começa com ...
- o Termina com ...
- o Contém ...
- o Contém exatamente tantas ocorrências ...
- o Contém no mínimo tantas ocorrências ...
- o Contém no máximo tantas ocorrências ...
- Justaposição

Combinações:

- o Negação
- 0 E
- o Ou
- Ou exclusivo

Para o grupo de linguagens a seguir, elaborar:

• Representação como conjuntos.

Para cada uma das linguagens, construir (e depois comparar com a solução apresentada):

- Gramática;
- Expressão regular.

Para cada uma das linguagens, obter (exercícios adicionais)

- Gramática linear à esquerda / linear à direita / unitária / nãounitária;
- Autômato finito;
- Autômato finito determinístico sem transições em vazio;
- Autômato finito mínimo.

 $\Sigma = \{a,b,c\}$

Cadeias de comprimento qualquer, incluindo zero.

{ε, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, aaa, aab, ... }

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

 $S \rightarrow aS$

 $S \rightarrow bS$

 $S \rightarrow cS$

 $S \rightarrow \epsilon$

 $(a|b|c)^*$

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

Cadeias de comprimento qualquer, maior que zero.

{a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, aaa, aab, ... }

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

 $S \rightarrow aS$

 $S \rightarrow bS$

 $S \rightarrow cS$

 $S \rightarrow a$

 $S \rightarrow b$

 $S \rightarrow c$

(a|b|c)*(a|b|c)

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

Cadeias de comprimento 3.

{bca, aab, aca, bab, cab, acc, abb, abc, acb, aaa, cbb, baa, ... }



$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

 $S \rightarrow XXX$

 $X \rightarrow a$

 $X \rightarrow b$

 $X \rightarrow c$

(a|b|c)(a|b|c)(a|b|c)

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

Cadeias de comprimento diferente de 3.

{a, bc, bbcc, bcabaab, bcaa, c, ɛ, acababab, acaacabbab, cabacacb, aabc, babac, ba, abaaa, bbcb, ... }



$\Sigma = \{a,b,c\}$

$$S \rightarrow \varepsilon \qquad X \rightarrow a$$

$$S \rightarrow X \qquad X \rightarrow b$$

$$S \rightarrow XX \qquad X \rightarrow c$$

$$S \rightarrow XXX \qquad Y \rightarrow XY$$

$$Y \rightarrow \varepsilon$$

ε|a|b|c| (a|b|c)(a|b|c)| (a|b|c)(a|b|c) (a|b|c)(a|b|c)*

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

Cadeias de comprimento maior que 3.

{bbcc, bcabaab, bcaa, cababab, acaacabbab, cabacacb, aabc, babac, abaaa, bbcb, ... }

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

 $S \rightarrow XXXXY$

 $X \rightarrow a$

 $X \rightarrow b$

 $X \rightarrow c$

 $Y \rightarrow XY$

 $Y \rightarrow \epsilon$

 $(a|b|c)(a|b|c)(a|b|c)(a|b|c)(a|b|c)^*$

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

Cadeias de comprimento maior ou igual a 3.

{bbc, bcabaab, bcaa, cababab, acaacabbab, acaacabbab, cabacacb, aabc, babac, abaaa, bcb, aaa, ... }



$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

 $S \rightarrow XP$

 $P \rightarrow XR$

 $R \rightarrow XT$

 $T \rightarrow XT$

 $T \rightarrow \epsilon$

 $X \rightarrow \underline{a}$

 $X \rightarrow b$

 $X \rightarrow c$

(a|b|c)(a|b|c)(a|b|c)(a|b|c)*

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

Cadeias de comprimento menor que 3.

{ε, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc}



$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

 $S \rightarrow XX$

 $X \rightarrow a$

 $X \rightarrow b$

 $X \rightarrow c$

 $X \rightarrow \epsilon$

ε|a|b|c|aa|ab|ac|ba|bb|bc|ca|cb|cc

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

Cadeias de comprimento múltiplo de 3.

{bca, acabababb, ε, acabab, cabacacbb, aabcbabaccba, baaaba, aaa, bbbbbb, aabaacbab, aac, ... }



$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

 $S \rightarrow XXXS$

 $X \rightarrow a$

 $X \to b$

 $X \rightarrow c$

 $S \rightarrow \epsilon$

 $\overline{((a|b|c)(a|b|c)(a|b|c)}$

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

Cadeias de comprimento múltiplo de 4.

{bcaa, acababab, ε, aabcbabaccba, aaac, ... }



$\Sigma = \{a,b,c\}$

$$S \rightarrow XP$$

$$P \rightarrow XQ$$

$$Q \rightarrow XR$$

$$R \rightarrow XT$$

$$T \rightarrow XS$$

$$T \rightarrow \epsilon$$

$$X \rightarrow a$$

$$X \rightarrow b$$

$$X \rightarrow c$$

((a|b|c)(a|b|c)(a|b|c) (a|b|c))*

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

Cadeias com uma quantidade par de símbolos.

{ε, bb, ac, aabc, abac, abbc, abcc, acac, acbc, aaaacb, bababc, ... }

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

 $S \rightarrow XXS$

 $X \rightarrow a$

 $X \rightarrow b$

 $X \rightarrow c$

 $S \rightarrow \epsilon$

 $((a|b|c)(a|b|c))^*$

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

Cadeias com uma quantidade ímpar de símbolos.

{bcb, acbbb, a, c, aabcbbb, bbbacbbba, abc, cbabc, aaa, ... }

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

 $S \rightarrow XXS$

 $S \rightarrow X$

 $X \rightarrow a$

 $X \rightarrow b$

 $X \rightarrow c$

((a|b|c)(a|b|c))*(a|b|c)

 $\Sigma = \{a,b,c\}$

Cadeias iniciando com "abb".

{abb, abba, abbab, abbcabbc, abbcccbbb, ... }

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

 $S \rightarrow abbX$

 $X \rightarrow aX$

 $X \rightarrow bX$

 $X \rightarrow cX$

 $X \rightarrow \epsilon$

abb(a|b|c)*

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

Cadeias que não iniciam com "aa".

{abb, aba, abbb, bbabb, bcabbc, babbccc, ... }

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

 $S \rightarrow a$

 $S \rightarrow abX$

 $S \rightarrow bX$

 $S \rightarrow cX$

 $X \rightarrow aX$

 $X \rightarrow bX$

 $X \rightarrow cX$

 $X \rightarrow \epsilon$

a|(ab|b|c)(a|b|c)*

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

Cadeias terminando com 3 símbolos "b" consecutivos.

{bbb, acbbb, aabcbbb, abacbbb, abbb, abbb, bbbb, acacbbb, bbbacbbb, abababbb, ... }

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

 $S \rightarrow Xbbb$

 $X \rightarrow aX$

 $X \rightarrow bX$

 $X \rightarrow cX$

 $X \rightarrow \epsilon$

(a|b|c)*bbb

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

Cadeias terminando com 3 símbolos "b" consecutivos, e não mais que isso.

{bbb, acbbb, aabcbbb, abacbbb, abacbbb, abbb, acacbbb, bbbacbbb, abababbb, ... }

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

 $S \rightarrow Xbbb$

 $S \rightarrow bbb$

 $X \rightarrow aX$

 $X \rightarrow bX$

 $X \rightarrow cX$

 $\overline{X} \rightarrow a$

 $X \rightarrow c$

 $((a|b|c)*(a|c)|\epsilon)bbb$

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

Cadeias que não terminam com 2 símbolos "b" consecutivos.

{a, b, c, acbba, aab, abacbbc, abcc, acacbcb, bbbacaa, ababa, ccc, ... }

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

 $S \rightarrow Xa$

 $S \rightarrow Xc$

 $S \rightarrow Xba$

 $S \rightarrow Xbc$

 $X \rightarrow aX$

 $X \rightarrow bX$

 $X \rightarrow cX$

 $X \rightarrow \epsilon$

(a|b|c)*(a|c|ba|bc)|b|

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

Cadeias iniciando com "a" e terminando com "c".

{ac, abc, acc, aac, aabc, abac, abbc, abcc, acac, acbc, aaaac, aabc, ... }

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

 $S \rightarrow aXc$

 $X \rightarrow aX$

 $X \rightarrow bX$

 $X \rightarrow cX$

 $X \rightarrow \epsilon$

a(a|b|c)*c

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

Cadeias que iniciam com "a" e não terminam com "c".

{a, ab, acb, aaca, aabcb, aba, abb, abcca, acaca, acb, aaaa, aaab, ... }

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

 $S \rightarrow aXa$

 $S \rightarrow aXb$

 $X \rightarrow aX$

 $X \rightarrow bX$

 $X \rightarrow cX$

 $X \rightarrow \epsilon$

a(a|b|c)*(a|b)

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

Cadeias que não iniciam com "a" e que terminam com "c".

{c, bc, bac, bbc, , ccc, babcb, babac, babbc, bbcc, cacacac, cbc, cccc, bbbbc, ... }

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

 $S \rightarrow bXc$

 $S \rightarrow cXc$

 $S \rightarrow c$

 $X \rightarrow aX$

 $X \rightarrow bX$

 $X \rightarrow cX$

 $X \rightarrow \epsilon$

(b|c)(a|b|c)*c|c

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

Cadeias que não iniciam com "a" e não terminam com "c".

{baca, cb, cacb, caaa, caabcb, babacb, babbcb, cabccb, ca, bb, bcab, bbbcb, ... }

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

$$S \rightarrow XYZ$$

$$X \rightarrow b$$

$$X \rightarrow c$$

$$Z \rightarrow a$$

$$Z \rightarrow b$$

$$(b|c)(a|b|c)*(a|b)$$

$$Y \rightarrow aY$$

$$Y \rightarrow bY$$

$$Y \rightarrow cY$$

$$Y \rightarrow \epsilon$$

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

Cadeias com exatamente 3 símbolos "b".

{bcbb, acbbb, bbab, cbbb, aabcbb, bacabccba, bbbc, cbabcba, ababab, ... }

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

 $S \rightarrow XbXbXbX$

 $X \rightarrow aX$

 $X \rightarrow cX$

 $X \rightarrow \epsilon$

(a|c)*b (a|c)*b (a|c)*b (a|c)*

Cadeias com pelo menos 2 símbolos "a".

{bcbaab, acbabab, aaabbab, cababab, aabcbabaa, bacabcaacba, aaabaaabbc, cbabacaba, abbab, ... }

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

 $S \rightarrow XaXaX$

 $X \rightarrow aX$

 $X \rightarrow bX$

 $X \rightarrow cX$

 $X \rightarrow \epsilon$

(a|b|c)*a (a|b|c)*a (a|b|c)*

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

Cadeias com no máximo 4 símbolos "c".

{bcbaab, acbabab, ccabbab, cabacacb, aabcbabac, baabaaba, aaabbc, ccabcac, abcbab, ccc, ... }

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

 $S \rightarrow XYXYXYXYX$

 $X \rightarrow aX$

 $X \rightarrow bX$

 $X \rightarrow \epsilon$

 $Y \rightarrow c$

 $Y \rightarrow \epsilon$

 $(a|b)^*(c|\epsilon)(a|b)^*(c|\epsilon)(a|b)^*(c|\epsilon)(a|b)^*(c|\epsilon)(a|b)^*$

Cadeias que contenham no mínimo 2 símbolos "a" ou no máximo 3 símbolos "c", de forma não exclusiva.

{abccabc, abaccbcb, aaabcc, acccbc, abcabcabc, cababc, aa, ababbabca, ccc, ... }

 $S \rightarrow XaXaX$

 $S \rightarrow YZYZYZY$

 $X \rightarrow aX$

 $X \rightarrow bX$

 $X \rightarrow cX$

 $X \rightarrow \epsilon$

 $Y \rightarrow aY$

 $Y \rightarrow bY$

 $Y \rightarrow \epsilon$

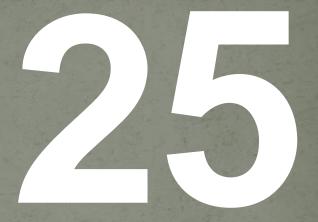
 $Z \rightarrow c$

 $Z \rightarrow \epsilon$

(a|b|c)*a(a|b|c)*a(a|b|c)*| $(a|b)*(c|\epsilon) (a|b)*(c|\epsilon)(a|b)*(c|\epsilon) (a|b)*$

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

Cadeias com no mínimo 3 e no máximo 5 símbolos "a".



{bcabaab, acababab, acaacabbab, cabacacb, aabcbabac, baaba, aaabbc, acacabcac, aabaacbab, aaaa, ... }

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

 $S \rightarrow XaXaXaXYXYX$

 $X \rightarrow bX$

 $X \rightarrow cX$

 $X \rightarrow \epsilon$

 $Y \rightarrow a$

 $Y \rightarrow \epsilon$

 $(b|c)*a(b|c)*a(b|c)*a(b|c)*(a|\epsilon)(b|c)*(a|\epsilon)(b|c)*$

Cadeias que iniciam e terminam com símbolos diferentes.

{abccabc, abaccbcb, caabca,acccb, abc, bababc, ba, bacacc, bcbabca, cca, ... }

 $S \rightarrow aXb$

 $S \rightarrow aXc$

 $S \rightarrow bXa$

 $S \rightarrow bXc$

 $S \rightarrow cXa$

 $S \rightarrow cXb$

 $X \rightarrow aX$

 $X \rightarrow bX$

 $X \rightarrow cX$

 $X \rightarrow \epsilon$

a(a|b|c)*b| a(a|b|c)*c| b(a|b|c)*a| b(a|b|c)*c| c(a|b|c)*a| c(a|b|c)*b

Cadeias que não possuem símbolos "a" à direita de símbolos "b", nem símbolos "c" à direita de símbolos "b".

{abcc, abbbbb, cccc, aabbcc, abc, bbbc, b, aaa, aacccc, bc, ε, abc, ... }

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

 $S \rightarrow aS$

 $S \rightarrow X$

 $X \rightarrow bX$

 $X \rightarrow Y$

 $Y \rightarrow cY$

 $Y \rightarrow \epsilon$

a*b*c*

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

Cadeias que possuem uma seqüência de um ou mais símbolos "b"imediatamente à direita de cada símbolo "a".

{abccabc, abbabbbccbcb, caabca,abcccb, abc, bababc, b, bacacc, bcbabca, ccabb, ... }

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

 $S \rightarrow XS$

 $S \rightarrow \epsilon$

 $X \rightarrow b$

 $X \rightarrow c$

 $X \rightarrow abY$

 $Y \rightarrow bY$

 $Y \rightarrow \epsilon$

(b|c|abb*)*

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

Cadeias que não contenham símbolos "b" justapostos.

{abccabc, abaccbcb, aaabcc,acccbc, abcabcabc, cababc, aa, bacacc, ababcbabca, ccc, ... }

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

$$S \rightarrow XYZX$$

$$X \rightarrow b$$

$$X \rightarrow \epsilon$$

$$Y \rightarrow ZbY$$

$$Y \rightarrow \epsilon$$

$$X \rightarrow \epsilon$$

$$Z \rightarrow aZ$$

$$Z \rightarrow cZ$$

$$Z \rightarrow a$$

$$Z \rightarrow c$$

 $(b|\epsilon)((a|c)(a|c)*b)*(a|c)(a|c)*(b|\epsilon)$

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

Cadeias com uma quantidade par de símbolos "b".



{bb, bcb, bbcc, bcababab, caa, c, ε, acbababab, acaacabba, acaacabba, cabacacb, ababc, bbabbac, babbb, aaaa, cbb, ... }

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

 $S \rightarrow XbXbS$

 $S \rightarrow \epsilon$

 $X \rightarrow aX$

 $X \rightarrow cX$

 $X \rightarrow \epsilon$

((a|c)*b(a|c)*b))*(a|c)*

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

Cadeias com uma quantidade ímpar de símbolos "c".

5

{bbc, bcb, cbbcc, bcababab, caa, c, acbababab, acaacabcba, acabaccacb, ababc, bbabbac, cbccabbb, acacaca, cbb, ... }

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

$$S \rightarrow XY$$

 $X \rightarrow ZcZcX$

 $X \rightarrow \epsilon$

 $Y \rightarrow ZcZ$

 $Z \rightarrow aZ$

 $Z \rightarrow bZ$

 $Z \rightarrow \epsilon$

((a|b)*c(a|b)*c))*(a|b)*c(a|b)*

Cadeias com quantidade par de símbolos "a" e ímpar de símbolos "c".

{cabccabcc, aaacacbcb, bccc,cb, aabcabacaabc, cabccabcc, accca, bacacc, aca, ccc, ... }

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

$$S \rightarrow XY$$

$$X \rightarrow ZcZcX$$

$$X \rightarrow \epsilon$$

$$Z \rightarrow WaWaZ$$

$$Z \rightarrow \epsilon$$

$$Y \rightarrow ZcZ$$

$$W \rightarrow bW$$

$$W \rightarrow \epsilon$$

((b*ab*a)*c (b*ab*a)*c)* (b*ab*a)*c (b*ab*a)*

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

Cadeias que contenham a subcadeia "abc".

35

{abcb, babcb, bbabcc,abc, abcaabcb, cbabc, ababbabca, ... }

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

 $S \rightarrow XabcX$

 $X \rightarrow aX$

 $X \rightarrow bX$

 $X \rightarrow cX$

 $X \rightarrow \epsilon$

(a|b|c)*abc(a|b|c)*

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

Cadeias que contenham pelo menos três símbolos iguais consecutivos.

{abbb, cacccbab, bbbbbcccc,bbaaa, aaaaa, ccccbabc, abaaabbabca, ... }

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

 $S \rightarrow XYX$

 $Y \rightarrow aaa$

 $Y \rightarrow bbb$

 $Y \rightarrow ccc$

 $X \rightarrow aX$

 $X \rightarrow bX$

 $X \rightarrow cX$

 $X \rightarrow \epsilon$

 $\overline{(a|b|c)^*(aaa|bbb|ccc)(a|b|c)^*}$

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

Cadeias que não contenham dois símbolos consecutivos iguais.

{abcb, cacbcbab, bababababacacbcac,babababa, acabacaca, cbabc, a, b ... }

55

$$S \rightarrow aX$$

$$S \rightarrow bY$$

$$S \rightarrow cZ$$

$$X \rightarrow bY$$

$$X \rightarrow cZ$$

$$Y \rightarrow aX$$

$$Y \rightarrow cZ$$

$$Z \rightarrow aX$$

$$Z \rightarrow bY$$

$$X \rightarrow \epsilon$$

$$Y \rightarrow \epsilon$$

$$Z \rightarrow \epsilon$$

 $b|(a|ba)(ba)^*(\epsilon|b)|(c|bc|(a|ba)(ba)^*(c|bc))(bc|(a|ba)(ba)^*(c|bc))^*(\epsilon|b|(a|ba)(ba)^*(\epsilon|b))$

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

Cadeias que não contenham o símbolo "a".

{cbbbc, ccbcb, bb,cb, bbabaabb, babb, aaa, ε, aaabbb, aababa, baa, ... }

56

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

 $S \rightarrow bS$ $S \rightarrow cS$

 $S \rightarrow \epsilon$

(b|c)*(b|aa*c))* $(\epsilon|aa*|aa*b(aa*b)*(\epsilon|aa*))$

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

Cadeias que não contenham a subcadeia "ab".

5

{cbacbc, acacbcb, acacbb, caaaa, aacbbbacacbbc, cbbb, aaa, ɛ, aaacbbb, bbac, cccbaa, ... }

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

 $S \rightarrow aX$

 $S \rightarrow bS$

 $S \rightarrow cS$

 $X \rightarrow aX$

 $X \rightarrow cS$

 $S \rightarrow \epsilon$

 $X \rightarrow \epsilon$

 $(b|c|aa*c)*(aa*|\epsilon)$

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

Cadeias que não contenham a subcadeia "abc".



{cababbc, acacbcb, aabb, caaaba, aabbabacabbc, cbabb, aaa, ɛ, aaabbb, aababac, cccbaa, ... }

 $S \rightarrow XS$

 $S \rightarrow Y$

 $X \rightarrow b|c|M|N$

 $M \rightarrow Tc$

 $N \rightarrow PQR$

 $P \rightarrow Tb$

 $Q \rightarrow PQ$

 $Q \rightarrow \epsilon$

 $T \rightarrow a$

 $T \rightarrow aT$

 $R \rightarrow b$

 $R \rightarrow M$

 $Y \rightarrow \epsilon$

 $Y \rightarrow T$

 $Y \rightarrow PQ$

 $Y \rightarrow PQT$

(b|c|aa*c|aa*b(aa*b)*(b|aa*c))* $(\epsilon|aa*|aa*b(aa*b)*(\epsilon|aa*))$

- Identificadores
 utilizados em
 linguagens de
 programação de alto
 nível qualquer
- Conjunto dos símbolos utilizados por uma linguagem de programação qualquer

5

- Números inteiros positivos
- Números inteiros positivos e negativos
- Números reais com sinal
- Números reais em notação científica
- Números reais em notação científica com expoente positivos ou negativo

