Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I — Segundo Mini-Teste (27/11/2006)

Resolução

1. Considere a função f de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = x^2 \ln \dfrac{1}{x}$.

   (a) Estude f quanto à existência de extremos locais.

   Indicações para a resolução:
   Temos, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \ln \frac{1}{x} + x^2 \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} \\ &= 2x \ln \frac{1}{x} - x \\ &= x\left(2\ln\frac{1}{x} - 1\right), \end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff x\left(2\ln\frac{1}{x} - 1\right) = 0 \\ &\iff \underbrace{x = 0}_{\text{Condição impossível em } \mathbb{R}^+} \vee\ 2\ln\frac{1}{x} - 1 = 0 \\ &\iff \ln\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \\ &\iff -\ln x = \frac{1}{2} \\ &\iff x = \mathrm{e}^{-1/2}. \end{aligned}$$

Uma vez que $x \in \mathbb{R}^+$ temos que o sinal de f' coincide com o sinal do factor $2\ln\frac{1}{x} - 1$. Atendendo a que

$$\begin{aligned} 2\ln\frac{1}{x} - 1 > 0 &\iff \ln\frac{1}{x} > \frac{1}{2} \\ &\iff -\ln x > \frac{1}{2} \\ &\iff \ln x < -\frac{1}{2} \\ &\iff x < \mathrm{e}^{-1/2} \end{aligned}$$

temos

	0	$\mathrm{e}^{-1/2}$	$+\infty$
$x\left(2\ln\frac{1}{x} - 1\right)$	$+$	0	$-$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	máx. local	$\searrow$

Da análise do quadro anterior resulta que a função f tem um máximo local $f\left(\mathrm{e}^{-1/2}\right) = \dfrac{1}{2\mathrm{e}}$ em $x = \mathrm{e}^{-1/2}$.

(b) Averigue se o gráfico de f admite assimptotas verticais.

Indicações para a resolução:

Uma vez que f tem domínio $\mathbb{R}^+$ e é contínua em $\mathbb{R}^+$ a recta de equação $x = 0$ é a única candidata a assimptota vertical do gráfico de f.

Temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} x^2 \ln \frac{1}{x} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} \\
&\underbrace{=}_{\text{R.C.}} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

o que permite concluir que o gráfico de f não admite assimptotas verticais.

2. Sejam f e g duas funções contínuas em $[a, b]$ e diferenciáveis em $]a, b[$ tais que $f(a) = g(a)$ e $f(b) = g(b)$. Mostre que existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = g'(c)$.
Sugestão: Considere a função h definida por $h(x) = f(x) - g(x)$.

Indicações para a resolução:

Uma vez que:

- a função h é contínua em $[a, b]$, já que é a diferença de duas funções contínuas em $[a, b]$;
- a função h é diferenciável em $]a, b[$, já que é a diferença de duas funções diferenciáveis em $]a, b[$;
- $h(a) = f(a) - g(a) = 0$ já que, por hipótese, $f(a) = g(a)$;
- $h(b) = f(b) - g(b) = 0$ já que, por hipótese, $f(b) = g(b)$;

o Teorema de Rolle garante que existe $c \in]a, b[$ tal que $h'(c) = 0$.

Uma vez que, pelas propriedades das funções diferenciáveis, $h'(x) = f'(x) - g'(x)$, para todo o $x \in]a, b[$, temos

$$\begin{aligned}
g'(c) = 0 &\iff f'(c) - g'(c) = 0 \\
&\iff f'(c) = g'(c)\ .
\end{aligned}$$

Está então provado que existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = g'(c)$, como se pretendia.

3. Utilizando o método de primitivação por partes calcule $\displaystyle\int x^2 \mathrm{e}^{-x}\, dx$.

Indicações para a resolução:

Para efeitos de aplicação do método de primitivação por partes consideremos

$$\begin{aligned}
f'(x) = \mathrm{e}^{-x} &\implies f(x) = -\mathrm{e}^{-x} \\
g(x) = x^2 &\implies g'(x) = 2x
\end{aligned}$$

Temos então

$$\begin{aligned}\int x^2 \mathrm{e}^{-x}\,dx &= -x^2\mathrm{e}^{-x} - \int -2x\mathrm{e}^{-x}\,dx \\ &= -x^2\mathrm{e}^{-x} + \int 2x\mathrm{e}^{-x}\,dx\end{aligned}$$

Utilizando uma vez mais o método de primitivação por partes e considerando

$$\begin{aligned} f'(x) = \mathrm{e}^{-x} &\implies f(x) = -\mathrm{e}^{-x} \\ g(x) = 2x &\implies g'(x) = 2\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}\int x^2 \mathrm{e}^{-x}\,dx &= -x^2\mathrm{e}^{-x} + \left(-2x\mathrm{e}^{-x} - \int -2\mathrm{e}^{-x}\,dx\right) \\ &= -x^2\mathrm{e}^{-x} - 2x\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-x} + C \\ &= -\mathrm{e}^{-x}(x^2+2x+2) + C, \quad C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

4. Utilizando a substituição definida por $x = \operatorname{tg}\, t$, com $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, calcule $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

Indicações para a resolução:

Utilizando a substituição indicada temos

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\,dx &= \int \frac{1}{\operatorname{tg}^2 t\sqrt{\operatorname{tg}^2 t + 1}}\,(\operatorname{tg} t)'dt \\ &= \int \frac{1}{\operatorname{tg}^2 t \sec t}\,\sec^2 t\,dt \\ &= \int \frac{\sec t}{\operatorname{tg}^2 t}\,dt \\ &= \int \frac{\cos t}{\operatorname{sen}^2 t}\,dt \\ &= -\frac{1}{\operatorname{sen} t} + C \\ &= -\operatorname{cosec} t + C \\ &= -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C, \quad C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Cálculos auxiliares: Uma vez que considerámos a substituição $x = \operatorname{tg} t$, com $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, temos que $x > 0$. Consequentemente, podemos escrever $\cot t = \frac{1}{x}$.

Da relação fundamental da trigonometria resulta que $\operatorname{cosec}^2 t = 1 + \cot^2 t$. Como $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ temos $\operatorname{cosec} t > 0$ e, portanto, $\operatorname{cosec} t = \sqrt{1+\cot^2 t}$. Temos então $\operatorname{cosec} t = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}$ e, uma vez que $x > 0$, podemos escrever $\operatorname{cosec} t = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.