Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I (Segundo Semestre) — Ano lectivo 06/07

Resolução do Trabalho Teórico-Prático 1

1. Considere a função f definida por

$$f(x) = \frac{e^x - x^3}{e^x - 1}$$

para todo o $x \in D_f$.

(a) Determine o domínio de f, D_f.

Indicações para a resolução: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Enuncie o Teorema de Bolzano.

Resolução: Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função. Se f é contínua em $[a,b]$ e $f(a) \neq f(b)$, então, para todo o y entre $f(a)$ e $f(b)$, existe $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = y$.

(c) Prove que f tem um zero no intervalo $[1,3]$.

Indicações para a resolução: Como f é contínua em $[1,3]$ (porque é o quociente de duas funções contínuas em que o denominador nunca se anula em $[1,3]$) e

$$f(1) = \frac{e-1}{e-1} = 1 > 0$$

e

$$f(3) = \frac{e^3 - 3^3}{e^3 - 1} < 0$$

podemos concluir pelo Teorema de Bolzano que existe $c \in]1,3[$ tal que $f(c) = 0$, o que prova que f tem um zero em $[1,3]$.

2. Considere a função g definida do modo seguinte

$$g(x) = \begin{cases} x^5 \cos(\frac{1}{x^2}) & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ \ln(1+x) & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

(a) Estude a continuidade da função g.

Indicações para a resolução:
* g é contínua em $\mathbb{R}^-$ porque é o produto de duas funções contínuas.
* g é contínua em $\mathbb{R}^+$ porque é a composta de duas funções contínuas.
* Uma vez que

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} x^5 \cos(\frac{1}{x^2}) = 0$$

(porque o produto de um infinitésimo por uma função limitada é um infinitésimo)
e

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) \neq g(0)$$

podemos concluir que g não é contínua em $x = 0$.
<u>Conclusão</u>: g é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Determine o contradomínio da restrição da função g a $\mathbb{R}^+$, $g_{|_{\mathbb{R}^+}}$.

Indicações para a resolução: Para todo o $x > 0$, temos que $1 + x > 1$. Como a função logaritmo é estritamente crescente, podemos concluir que, para todo o $x > 0$,

$$\ln(1+x) > \ln(1) = 0.$$

Logo

$$CDg_{|_{\mathbb{R}^+}} = \mathbb{R}^+.$$