

Sucessões e Séries de Funções

Corpo Docente:

Ana Breda, Eugénio Rocha, Paolo Vettori
Sandrina Santos, Diana Costa, Rita Guerra

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro, 2017

Consideremos uma **sucessão de funções** $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ todas definidas em $D \subset \mathbb{R}$. Notamos uma tal sucessão por $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou simplesmente por (f_n) e f_n será designado por **termo geral** da sucessão.

Observe-se que, para cada $x \in D$ a sucessão $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de números reais.

Def. 4.1

A sucessão de funções (f_n) definidas em D **converge pontualmente para** a função f em D e escrevemos $f_n \xrightarrow{p} f$, se $\forall x \in D \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.

Exemplo 4.2

Consideremos a sucessão de funções (f_n) que tem por termo geral a função f_n definida por $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$. Podemos facilmente constatar que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Por outras palavras, a sucessão de funções f_n converge pontualmente, em $[0, 1]$, para a função f .

Def. 4.3

A sucessão de funções (f_n) definidas em D **converge uniformemente** para a função f em D , se a sucessão numérica $(M_n)_{n \in \mathbb{N}} = \sup_{x \in D} \{|f_n(x) - f(x)|\}$ é um infinitésimo, isto é, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} \{|f_n(x) - f(x)|\} = 0$$

Obs. 4.4

Retomando o exemplo anterior, constatamos que a sucessão de funções

$$f_n(x) = x^n, x \in [0, 1],$$

não converge uniformemente para f .

De facto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} \{|f_n(x) - f(x)|\} = 1.$$

Exemplo 4.5

Consideremos a sucessão de funções

$$g_n(x) = \frac{x^n}{n}, \quad x \in [0, 1].$$

Para cada $x \in [0, 1]$ a sucessão numérica $g_n(x) = \frac{x^n}{n}$ converge para 0. Assim, g_n converge pontualmente, em $[0, 1]$, para a função $g(x) = 0$.

Será esta convergência uniforme?

Dado que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} M_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} \{|g_n(x) - g(x)|\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} \{|g_n(x)|\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} \left\{ \frac{x^n}{n} \right\} = 0, \end{aligned}$$

a convergência é também uniforme.

Teo. 4.6

Se (f_n) converge uniformemente para f num conjunto D , então (f_n) converge pontualmente para f nesse conjunto.

Demonstração: Exercício.

Convergência uniforme \implies Convergência Pontual

Teo. 4.7

Seja (f_n) uma sucessão de funções contínuas em $I = [a, b]$. Suponha-se que f_n converge uniformemente para f em I . Então:

- 1 f é contínua em I ;
- 2 f é integrável em I e

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

- 3 Adicionalmente se as funções f_n têm derivadas contínuas em $[a, b]$ e a sucessão das suas derivadas f'_n converge uniformemente em $[a, b]$. então f é diferenciável em I e

$$f'(x) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

Obs. 4.8

O resultado 3 do teorema anterior mantém-se válido se a convergência de (f_n) para f for apenas pontual. Na verdade para que o resultado seja válido basta que exista $x_0 \in I$ tal que a sucessão numérica $(f_n(x_0))$ seja convergente.

Def. 4.9

Sejam $f_n : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $S_n = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

Dizemos que a **série de funções** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **converge pontualmente** (resp. **uniformemente**) em D se a sucessão das somas parciais, S_n , convergir pontualmente (resp. uniformemente) em D .

Em caso de convergência, a função $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, designa-se por **soma da série** e escrevemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = S.$$

Def. 4.10

O **domínio de convergência** da série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é o conjunto constituído pelos pontos x para os quais a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ é convergente.

Dos critérios já conhecidos para séries numéricas podemos concluir que, se $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ convergem pontualmente em, respetivamente, D_f e D_g então:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} (f_n \pm g_n)$ converge pontualmente em $D_f \cap D_g$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \pm g_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} g_n;$$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda f_n$ converge pontualmente em D_f e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda f_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

Exer. 4.11

Determine, indicando o domínio de convergência de uma representação em série de potências de $\cosh(x)$ e de $\sinh(x)$ a partir do desenvolvimento de série de MacLaurin de e^x .

Teo. 4.12

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uma série de funções contínuas em $I = [a, b]$.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente em I , então:

- 1** a soma S é contínua em I ;
- 2** a soma S é integrável em I e

$$\int_a^b S(x) dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx .$$

(integração termo a termo)

- 3** Adicionalmente, se cada f_n possui derivada de primeira ordem contínua em I e $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ converge uniformemente em I , então S é diferenciável em I e

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

(derivação termo a termo)

Obs. 4.13

O resultado 3 do teorema anterior mantém-se válido se a hipótese da convergência uniforme de $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ for substituída pela convergência pontual de $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ou, simplesmente, pela convergência da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ para algum $x_0 \in I$.

Exemplo 4.14

A série de funções contínuas, em \mathbb{R} , $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ converge para a função descontínua

$$f(x) = \begin{cases} 1+x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(Observe-se que se trata de uma série geométrica de razão $\frac{1}{1+x^2}$ para cada $x \neq 0$).

Utilizando o teorema anterior podemos concluir que a convergência não é uniforme, é apenas pontual.

Teo. 4.15

Critério de Weierstrass

Sejam (f_n) uma sucessão de funções definidas em D e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série numérica convergente de termos não negativos, tais que

$$|f_n(x)| \leq a_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in D.$$

Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente em D .

Exer. 4.16

Mostre que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$ converge uniformemente em \mathbb{R} .

Como, para todo $x \in \mathbb{R}$, $\left| \frac{\sin(nx)}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ é convergente, pelo

Critério de Weierstrass, a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$ converge uniformemente em \mathbb{R} .

Exer. 4.17

Considere a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n+1}}$.

- (a) Mostre que esta série converge uniformemente em \mathbb{R} .
- (b) Justifique que a função $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n+1}}$ é contínua em \mathbb{R} .

Exer. 4.18

Obtenha uma representação em série de potências a partir dos desenvolvimentos em série de MacLaurin das funções exponencial $f(x) = e^x$ e de $g(x) = \cos(x)$, para as seguintes funções:

- (a) $\cosh(4x)$;
- (b) $2 \cos^2(x)$.

Exer. 4.19

Mostre que as seguintes séries convergem uniformemente nos intervalos indicados:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2x}{n^3x+1}} \text{ em } \mathbb{R}^+$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(2nx) - \ln(nx+1)}{n^2+1} \text{ em } [1, +\infty[$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2x^2}{n^4x^2+5n} \text{ em } \mathbb{R}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x - \frac{1}{n})^n}{n^2+1} \text{ em }]0, 1[$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{x^2+1}} \text{ em } \mathbb{R}$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-\frac{5}{4}}}{\cosh(nx)} \text{ em } \mathbb{R}$$

Séries de Potências

(séries uniformemente convergentes)

14

Teo. 4.20

Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^n$ uma série de potências com raio de convergência $R \neq 0$.
Então a série **converge uniformemente em qualquer subintervalo fechado e limitado do seu intervalo de convergência** $]c - R, c + R[$.

Teo. 4.21

Teorema de Abel

Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^n$ uma série de potências com raio de convergência $R \in \mathbb{R}^+$.
Se a série converge em $x = c + R$ (resp. em $x = c - R$) então ela converge uniformemente em $[\theta, c + R[$ (resp. em $x = [c - R, \theta]$), para qualquer $\theta \in]c - R, c + R[$.

Séries de Potências

(séries uniformemente convergentes)

15

Teo. 4.22

Sejam $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ uma série de potências com raio de convergência $R \neq 0$,

$I =]c - R, c + R[$ o seu intervalo de convergência e $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$.

Então:

■ f é contínua no seu domínio (de convergência da série) D .

■ f é diferenciável em I e

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}.$$

■ A função F definida por

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-c)^{n+1}.$$

é a primitiva de f em I tal que $F(c) = 0$.

■ f é integrável em qualquer subintervalo $[a, b] \subset D$ e

$$F(x) = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n (x-c)^n dx.$$

Séries de Potências

(séries uniformemente convergentes)

16

Teo. 4.23

Unicidade de representação em série de potências

Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, $x \in I =]c-R, c+R[$ ($R \neq 0$) então f possui

derivadas finitas de qualquer ordem em I e $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Consequentemente, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = T_c f(x)$.

Por outras palavras, a representação em série de potências de $x-c$ de uma função com derivadas finitas de todas as ordens numa vizinhança de c , é única e é a sua série de Taylor.

Exemplo 4.24

Já vimos que, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in]-1, 1[$. Como, $\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)'$,

obtemos

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \text{ para } x \in]-1, 1[.$$

Vamos agora considerar séries trigonométricas da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

com $\omega \in \mathbb{R}^+$ e $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ para todo o $n \in \mathbb{N}_0$.

Obs. 4.25

Uma série deste tipo converge absoluta e uniformemente em \mathbb{R} sempre que as séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergirem absolutamente. (Justifique).

Exer. 4.26

Mostre que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3} \cos(n\omega x) + \frac{(-1)^n}{n^2} \sin(n\omega x) \right)$ converge absoluta e uniformemente em \mathbb{R} .

Def. 4.27

Uma **função** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se **periódica** de período T , $T > 0$, ou **T -periódica** se T é o menor número real positivo tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + T) = f(x).$$

Obs. 4.28

Toda a função T -periódica $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pode ser *transformada* numa função 2π -periódica $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ da forma $F(x) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$. (Verifique.)

Iremos apenas considerar funções 2π -periódicas.

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função 2π -periódica tal que

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (\text{ST})$$

Se esta série convergir uniformemente os coeficientes a_n e b_n são completamente determinados por f .

De facto,
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2\pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx \right) = 2\pi a_0,$$

pelo que $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$. Dado que,

$$\begin{aligned} \bullet \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx &= 0; & \bullet \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx &= \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \end{cases}; \\ \bullet \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx &= \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \end{cases}. \end{aligned}$$

Podemos concluir (multiplicando por $\cos(mx)$ (resp. $\sin(mx)$) e integrando em $[-\pi, \pi]$, ambos os membros de (ST))

que:
$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx \quad \text{e} \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx.$$

Usar as fórmulas trigonométricas: $2 \cos(mx) \cos(nx) = \cos[(m+n)x] + \cos[(m-n)x]$;

$2 \sin(mx) \sin(nx) = \cos[(m-n)x] - \cos[(m+n)x]$; $2 \sin(mx) \cos(nx) = \sin[(m+n)x] + \sin[(m-n)x]$.

Def. 4.29

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função 2π -periódica e integrável em $[-\pi, \pi]$. Chamamos **série de Fourier associada à função f** ou série de Fourier de f à série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad (\text{SF})$$

onde $a_n, n \in \mathbb{N}_0$ e $b_n, n \in \mathbb{N}$, ditos **coeficientes de Fourier** de f , são dados por:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx. \quad (*)$$

Obs. 4.30

- Se a série (SF) convergir a sua soma $F := F(x)$ é uma função 2π -periódica que pode ser diferente de f .
- Para exprimirmos que os coeficientes da série (SF) foram calculados à custa de f através das fórmulas $(*)$ escrevemos

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

e dizemos que a série (SF) está associada à função f .

Obs. 4.31

- Se f é 2π -periódica então os coeficientes de fourier no intervalo $[-\pi, \pi]$ coincidem com os coeficientes obtidos em qualquer intervalo de amplitude 2π ;

$$\begin{aligned}\int_a^{a+2\pi} f(x) \cos(nx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx; \\ \int_a^{a+2\pi} f(x) \sin(nx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx\end{aligned}$$

- Se f é ímpar ($f(-x) = -f(x)$, $x \in \mathbb{R}$) então $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$;

$$\text{Se } f \text{ é par } (f(-x) = f(x), x \in \mathbb{R}) \text{ então } \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) dx$$

- As séries de Fourier permitem lidar com funções meramente integráveis, ao contrário das séries de Taylor onde é exigido que as funções sejam infinitamente diferenciáveis.

Exemplo 4.32

Seja f a função 2π -periódica definida em $[-\pi, \pi]$ por $f(x) = |x|$.
Determinar a série de Fourier de f .

Os coeficientes de Fourier de f são $b_n = 0$ e $a_n = \begin{cases} \pi, & n = 0 \\ 0, & n \text{ par} \\ -\frac{4}{\pi n^2}, & n \text{ ímpar} \end{cases}$.

A série de Fourier de f é

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos(x) - \frac{4}{\pi} \frac{\cos(3x)}{3^2} - \frac{4}{\pi} \frac{\cos(5x)}{5^2} - \dots = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}.$$

Obs. 4.33

Toda a função f definida em $[-\pi, \pi[$ admite uma única extensão 2π -periódica.
A série de Fourier de f é tomada como a série de f dessa sua extensão.

Exer. 4.34

Considere a função 2π -periódica g definida em $[-\pi, \pi[$ por

$$g(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ \pi, & 0 \leq x < \pi. \end{cases} \quad \text{Mostre que } g(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)} \sin((2n-1)x).$$

Exer. 4.35

Determine as séries de Fourier das seguintes funções:

1 $f(x) = x + x^2, x \in [-\pi, \pi[$

2 $g(x) = e^x, x \in [-\pi, \pi[$

3
$$h(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Soluções:

1
$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx) + (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin(nx) \right];$$

2
$$g(x) \sim \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \left[\frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2 + 1} \sin(nx) \right];$$

3
$$h(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2n - 1} \sin((2n - 1)x).$$

- Se f é uma **função** 2π -periódica **par** a série de Fourier a ela associada é uma **série de cossenos**

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx),$$

onde,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx.$$

- Se f é uma **função** 2π -periódica **ímpar** a série de Fourier a ela associada é uma **série de senos**

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx),$$

onde,

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Seja f uma função real integrável e definida em $[0, \pi]$.

Chamamos **extensão ímpar** de f à função f_i , 2π -periódica que em $[-\pi, \pi]$ é dada por

$$f_i(x) = \begin{cases} -f(-x) & \text{se } x \in [-\pi, 0[\\ f(x) & \text{se } x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Chamamos **extensão par** de f à função f_p , 2π -periódica que em $[-\pi, \pi]$ é dada por

$$f_p(x) = \begin{cases} f(-x) & \text{se } x \in [-\pi, 0[\\ f(x) & \text{se } x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

A **série de senos** da função f é a série de Fourier (que é uma série de senos) da função f_i .

A **série de cossenos** da função f é a série de Fourier (que é uma série de cossenos) da função f_p .

Questão

Que condições devem ser satisfeitas para que a soma de uma série de Fourier coincida com a função que lhe deu origem?

Recordemos:

- Uma função f diz-se **seccionalmente contínua** em $[a, b]$ se existir uma partição $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) de $[a, b]$ tal que f é contínua em cada um dos subintervalos abertos $]a_{j-1}, a_j[$, ($j = 1, 2, \dots, n$) e existem e são finitos os limites laterais

$$f(a_{j-1}^+) = \lim_{x \rightarrow a_{j-1}^+} f(x) \quad \text{e} \quad f(a_j^-) = \lim_{x \rightarrow a_j^-} f(x).$$

- Uma função f diz-se **seccionalmente diferenciável** se a sua derivada f' for seccionalmente contínua.

Teo. 4.36

Teorema de Dirichlet

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função 2π -periódica e seccionalmente diferenciável em \mathbb{R} . Então, para cada $c \in \mathbb{R}$, a série de Fourier de f converge, no ponto c , para $\frac{f(c^+) + f(c^-)}{2}$.

Obs. 4.37

Nas condições do Teorema de Dirichelet, a série de Fourier de f converge (pontualmente) para a função

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \text{ é ponto de continuidade de } f \\ \frac{f(c^+) + f(c^-)}{2} & \text{se } x \text{ não é ponto de continuidade de } f \end{cases}$$

Exer. 4.38

Considere a função constante $f(x) = 2$ no intervalo $[0, \pi]$. Determine as somas da série de Fourier de senos e da série de Fourier de cossenos de f e represente-as graficamente no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.

Exer. 4.39

Determine a série de Fourier de senos da função f dada $f(x) = \cos x$ em $[0, \pi]$. Qual será a sua série de Fourier de cossenos?

Exer. 4.40

Considere a função f , 2π -periódica, definida por $f(x) = x^2$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

1 Determine a série de Fourier de f .

2 Mostre que

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx), \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

3 Usando a representação de f em série de Fourier, mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

4 Verifique que a série de Fourier de f é uniformemente convergente em \mathbb{R} .

5 Justifique que

$$\frac{x^3 - \pi^2 x}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^3} \operatorname{sen}(nx), \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Exer. 4.41

- 1** Determine o integral geral da equação diferencial

$$y'' - 6y' + 9y = \frac{2e^{3x}}{x}, \quad x > 0.$$

- 2** (a) Determine a solução geral da equação diferencial $y''' + 4y' = 0$.

- (b) Determine a solução geral da equação diferencial

$$y''' + 4y' = \cos(3x).$$

- (c) Sabendo que e^{x^2} é solução da equação diferencial

$$y''' + 4y' = f(x),$$

indique, justificando, a solução geral da equação diferencial

$$y''' + 4y' = f(x) + \cos(3x).$$

- 3** Considere o problema de valores iniciais

$$y'' - 2y' + y = te^t + 4, \quad y(0) = y'(0) = 1.$$

- (a) Justifique que o problema dado possui uma única solução, em \mathbb{R} , e mostre que a sua transformada de Laplace é dada por

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^4} + \frac{4}{s(s-1)^2}, \quad s > 1.$$

- (b) Determine a solução f do problema.

Exer. 4.42

1 Diga, justificando, se são verdadeiras as seguintes proposições:

(a) Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ tem raio de convergência 2, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(b) Se $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n$ então $f^{(100)}(1) = -99!$.

2 Determine o domínio de convergência da série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(b+1)4^n} (x-3)^n \text{ indicando os pontos onde a convergência é}$$

simples ou absoluta.

3 Sabendo que $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, x \in]-1, 1[$, determine a série de

MacLaurin da função f definida por $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ (indicando o maior conjunto onde a representação ao é válida).