Matemática Discreta

Números Combinatórios

Universidade de Aveiro 2016/2017

http://moodle.ua.pt

Factoriais e números binomiais

Números de Fibonacci e número de ouro

Factorial

- $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n \cdot (n-1)!$.
- Esta fórmula recursiva $\quad \Rightarrow \quad$ elevado esforço de cálculo!
- Por convenção, $0! = 1$.

Teorema (fórmula de Stirling)

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$\sqrt{2\pi n}\ \ n^n e^{-n} < n! < \sqrt{2\pi n}\ \ n^n e^{-n+\frac{1}{12n}}.$$

Factorial duplo

- Para $n \in \mathbb{N}_0$,

$$n!! = \begin{cases} 1, & \text{se } n \in \{0, 1\} \\ n(n-2)!!, & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

- Observações:
  - $n!!$ é o produto de todos os números naturais não superiores a n e com a paridade de n.
  - Para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$n!!(n-1)!! = n!$$

Exemplo e exercício

Exemplo

Vamos mostrar que para $n = 2k$ $(k \in \mathbb{N})$ $n!! = 2^k k!$.

- Solução.

$$\begin{aligned} n!! &= 2 \cdot 4 \cdot 6 \ \ldots \ (n-2) \cdot n \\ &= (2 \cdot 1)(2 \cdot 2)(2 \cdot 3) \ldots 2(k-1)(2k) \\ &= 2^k k! \end{aligned}$$

Exercício

Mostrar que para $n = 2k + 1$, com $k \in \mathbb{N}_0$, $\quad n!! = \frac{n!}{2^k k!}$.

Números binomiais e números binomiais generalizados

- Uma vez que para $1 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \frac{A_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

obtém-se a fórmula recursiva para a de terminação de $\binom{n}{k}$:

- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, para $0 < k < n$ e $n > 2$.

Definição (de número binomial generalizado)

Dado $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned} \binom{x}{k} &= \frac{(x)_k}{k!} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{se } k = 0 \\ \frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}, & \text{se k>0.} \end{cases} \end{aligned}$$

Exemplo e exercício

Exemplo

Vamos determinar $\binom{-1}{k}$.

- Solução.

$$\begin{aligned}\binom{-1}{k} &= \frac{(-1)_k}{k!}\\ &= \frac{(-1)(-2)(-3)\dots(-k)}{k!}\\ &= (-1)^k.\end{aligned}$$

Exercício

Determinar $\binom{-1/2}{k}$.

Números de Fibonacci

- Os números de Fibonacci foram definidos pela seguinte fórmula recursiva:

$$\begin{aligned} f_n &= f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 3 \\ f_1 &= f_2 = 1 \end{aligned}$$

- Raízes características da fórmula recursiva:
  - $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033988749894...$ (Número de ouro).
  - $\hat{\Phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{-1}{\Phi} = -0.61803988749...$.

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \qquad (1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n - \hat{\Phi}^n), \; n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Função geradora dos números de Fibonacci

- $\mathcal{F}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}$.

Exemplo

Determinar a soma dos n primeiros números de Fibonacci.

Solução. Da igualdade $f_n = f_{n+1} - f_{n-1},\ n \geq 2$, vem

$$\begin{array}{rcl} f_2 & = & f_3 - f_1 \\ f_3 & = & f_4 - f_2 \\ & \vdots & \\ f_{n-1} & = & f_n - f_{n-2} \\ f_n & = & f_{n+1} - f_{n-1} \\ \hline \sum_{k=2}^{n} f_k & = & f_n + f_{n+1} - f_1 - f_2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} f_k = f_{n+2} - 1 \end{array}$$

Exercício

Exercício

Determinar a soma dos n primeiros números de Fibonacci com índice par e com índice ímpar, ou seja,

$$P_n = f_2 + f_4 + \cdots + f_{2n} = \sum_{k=1}^{n} f_{2k},$$

e

$$I_n = f_1 + f_3 + \cdots + f_{2n-1} = \sum_{k=1}^{n} f_{2k-1}.$$

Exemplo

Exemplo

Vamos determinar uma fórmula não recursiva para os números de Lucas definidos por:

$$L_n = f_{n+1} + f_{n-1}, \tag{2}$$

onde f_k denota o $k^{-\text{ésimo}}$ número de Fibonacci e $f_0 = 0$.

Solução. Dado que

$$\begin{aligned} L_{n-1} + L_{n-2} &\overset{(2)}{=} f_n + f_{n-2} + f_{n-1} + f_{n-3} \\ &= f_{n+1} + f_{n-1} \\ &= L_n, \end{aligned} \tag{3}$$

a solução geral da equação de recorrência (3) é (ver (1))

$$L_n = C_1 \Phi^n + C_2 \hat{\Phi}^n. \tag{4}$$

Exemplo (cont.)

- Os valores iniciais de $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são:

$$
\begin{aligned}
L_1 &\overset{(2)}{=} f_2 + f_0 = 1 && (5)\\
L_2 &\overset{(2)}{=} f_3 + f_1 = 3 &&\\
L_0 &\overset{(3)}{=} L_2 - L_1 = 2 && (6)
\end{aligned}
$$

- A determinação de C_1 e C_2 faz-se a partir de (4), (5) e (6).
- Assim, obtém-se $C_1 = C_2 = 1$. Logo,

$$L_n = \Phi^n + \hat{\Phi}^n.$$