Universidade de Aveiro Departamento de Matemática

ALGA — Agrupamento IV (ECT, EET, EI)

Teste 2

4/5 de dezembro de 2014 — Duração: **1h**

N.° Mec. ________________ **Escreva o número mecanográfico também na(s) folha(s) de rascunho**

Serão consideradas válidas apenas as respostas convenientemente justificadas

50 pontos

1. Considere a reta $\mathcal{R}$ de equação $X = t(4, 0, 1)$, $t \in \mathbb{R}$, e o ponto $Q = (10, -1, -6)$.
   (a) Verifique se o ponto Q pertence à reta $\mathcal{R}$.
   (b) Indique uma equação do plano $\mathcal{P}$ que passa no ponto Q e é ortogonal à reta $\mathcal{R}$.
   (c) Determine, caso exista, o conjunto de interseção da reta $\mathcal{R}$ e do plano $\mathcal{P}$.
   (d) Calcule $\operatorname{dist}(Q, \mathcal{R})$, a distância do ponto Q à reta $\mathcal{R}$.

40 pontos

2. (a) O plano de equação $X = \alpha(1, 0, -2) + \beta(-3, 1, 4)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, contém o ponto $P(-4, 6, -7)$? $\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$
   (b) Calcule a dimensão do **espaço das linhas** da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \\ -2 & 4 & -7 \end{bmatrix}$. $\dim \mathcal{L}(A) = \boxed{}$
   (c) Determine a dimensão do **espaço nulo** da matriz A. $\dim \mathcal{N}(A) = \boxed{}$
   (d) Indique uma base do **espaço das colunas** da matriz A, $\mathcal{C}(A)$.

30 pontos

3. Para cada um dos seguintes conjuntos assinale se é, ou não, um subespaço vetorial real de $\mathbb{R}^3$.
   (a) $\langle\, (-2, 1, 2)\, ,\, (2, -1, -2)\, \rangle$ $\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$
   (b) $\{(2 + a, 4 - b, 7 - a) : a, b \in \mathbb{R}\}$ $\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$
   (c) O plano de equação cartesiana $4x - 5y + 2z = 0$ $\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$

30 pontos

4. Para cada um dos seguintes conjuntos assinale se

	é lin. ind.,	gera $\mathbb{R}^3$,	é ortogonal.
(a) $\{(-2, 0, 0), (1, -3, 0), (-4, -1, 2), (4, 0, 2)\}$	$\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$	$\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$	$\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$
(b) $\{(6, -1, 9)\}$	$\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$	$\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$	$\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$
(c) $\{(0, 0, 0), (-7, -8, 9), (0, -9, -8)\}$	$\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$	$\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$	$\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$

50 pontos

5. Para além da base canónica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$, considere as bases ordenadas $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T} = \big((5, -1), (-2, 1)\big)$.
   Conhecendo a matriz de mudança de base $M_{\mathcal{T} \leftarrow \mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$ e o vetor de coordenadas $[X]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$,
   (a) indique o vetor X;
   (b) determine a base $\mathcal{S}$;
   (c) calcule $[X]_{\mathcal{S}}$.