Exame de Álgebra Linear e Geometria Analítica

03/11/2011

Duração: 2h00 min

Nome:____ Classificação:____

Nº Mec._________

(40) 1. Considere o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + \alpha y + z = \alpha \\ x + y + \alpha z = \alpha^2 \\ (1-\alpha)(2-\alpha)z = (1-\alpha^2)(1+\alpha) \end{cases}$$

onde α é um parâmetro real.

a) Indique, justificando, os valores de α para os quais o sistema é:

a1) possível e determinado,

a2) possível e indeterminado,

a3) impossível.

b) Considere $\alpha = 0$. Designando por A a matriz do sistema de equações linear, para este valor de α, determine A^{-1} e apresente o conjunto solução do sistema.

(20) 2. Mostre que para quaisquer valores de $x, y, z \in \mathbb{R}$, se tem

$$\begin{vmatrix} x-y & -10 & 2 & y \\ 0 & z & 0 & 0 \\ x-y & 5 & 2 & 1 \\ x^2-y^2 & 11 & 2x+2y & x \end{vmatrix} = 0.$$

(60) 3. No espaço vectorial das matrizes quadradas de ordem 2 com entradas reais, $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, considere o conjunto, $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+b \\ -a-b & -a \end{bmatrix}, \;\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Mostre que S e um subespaço de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e indique uma base ordenada para S.

b) Considere a aplicação linear $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$ definida por

$$\varphi(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = a + (b+c)X + (c+d)X^2 + dX^3,$$

onde $\mathbb{R}_3[X]$ designa o espaço vectorial dos polinómios de coeficientes reais na indeterminada X e de grau inferior ou igual a 3.

b1) Determine a matriz da aplicação linear φ relativamente às bases canónicas de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}_3[X]$ e comente a seguinte afirmação "*φ é um isomorfismo*".

b2) Determine uma base para o subespaço vectorial de $\mathbb{R}_3[X]$, $T + \varphi(S)$, onde $T =< 1 - X^2 - X^3, 1 - X^3, X >$.

(45) 4. Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno seguinte:

$< (x_1, x_2, x_3)/(y_1, y_2, y_3) >= x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3.$

a1) Determine a matriz de Gram (matiz da métrica), associada a este produto interno, relativamente à base ordenada canónica de $\mathbb{R}^3$.

a2) Seja $T =< (0, 1, 0) >$. Determine uma base para o subespaço $T^\perp$.

a3) Determine a projecção ortogonal de $u = (1, 1, 0)$ sobre o subespaço $T =< (0, 1, 0) >$.

(35) 5. Considere a aplicação linear $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $L(x, y, z) = (x, y + 2z, 2y + z)$. Averigúe se L é diagonalizável.