Método das Diferenças Finitas

Isadora Marcondes A F Lopes
Marcos de Cerqueira Leite
Paola Ferrari

RESUMO: O trabalho apresenta uma abordagem de modelagem e análise numérica baseada na equação do calor, explorando sua utilização como uma ferramenta poderosa para investigar e prever o comportamento térmico de sistemas físicos. Além disso, investiga-se a equação de advecção, com ênfase na análise teórica e na simulação numérica de seu comportamento. Para ambas equações, foi realizado o método de diferenças finitas, uma técnica comumente usada para resolver equações diferenciais parciais numericamente.

PALAVRAS-CHAVE: Equação do calor, Equação de Advecção, Diferenças finitas

1 Introdução

A propagação de calor é um fenômeno fundamental em diversas áreas da ciência e engenharia, desempenhando um papel crucial no projeto e na análise de sistemas térmicos. A equação do calor, uma equação diferencial parcial que descreve a distribuição e a evolução da temperatura em um meio, tem sido amplamente utilizada como uma ferramenta poderosa para investigar e prever o comportamento térmico de sistemas físicos.

A equação de advecção é uma das equações diferenciais parciais mais fundamentais na modelagem e simulação de fenômenos de transporte em fluidos e meios porosos. Ela descreve o transporte de uma quantidade física, como massa, calor ou quantidade de substância, pela convecção de um fluxo em um meio contínuo.

Neste trabalho, apresentamos uma abordagem de modelagem e análise numérica baseada na equação do calor. Também, apresentamos uma investigação sobre a equação de advecção, com foco na análise teórica e na simulação numérica de seu comportamento. Ambas as análises serão feitas pelo método de diferenças finitas.

2 Diferenças Finitas

O método de diferenças finitas tem como maior objetivo resolver Equações Diferenciais Parciais (EDPs), equações que dependem de mais de uma variável, por aproximações muito boas. Ele depende das derivadas parciais em relação ao espaço e/ou tempo, juntamente com determinadas condições de contorno nas fronteiras do domínio determinadas pelo problema.

Para alcançar isso, o método das diferenças finitas substitui as derivadas nas equações diferenciais por aproximações baseadas em diferenças finitas. No caso do uso do método para o cálculo de segundas derivas (equação do calor), vamos partir da definição de derivadas em uma função $u(x)$

$$u_x = \lim_{h \to 0} \frac{(u(x+h) - f(x))}{h} \approx \frac{(u(x+h) - f(x))}{h}$$

que é a diferença adiantada. Para a segunda derivada, escrita como u_{xx}, vamos simplesmente derivar a própria derivada, aproximando novamente pela diferença finita adiantada:

$$u_{xx} = \frac{u_x(x+h) - u_x(x)}{h} = \frac{u(x+2h) - 2u(x+h) + u(x)}{h^2}$$

Essa abordagem transforma a equação diferencial em um sistema algébrico, que é mais facilmente resolvido numericamente ou computacionalmente. Isso permite discretizar o domínio espacial e temporal em uma grade de pontos, onde a função desconhecida é calculada em cada ponto.

3 Equação do Calor

A equação do calor pode ser descrita por

$$u_t = k u_{xx}$$

Sabendo que u_{xx} é a derivada segunda de u_t. Utilizaremos as condições de contorno, para os valores da esquerda, $x = 0$

$$u(0, t) = 0$$

e valores da direita, $x = 1$

$$u(1, t) = 0$$

Para a distribuição inicial, ou seja, para $t = 0$

$$u(x, 0) = x(x - 1)^2$$

Resolveremos a equação diferencial parcial do calor utilizando a aproximação por diferenças finitas descrita na seção anterior

$$u_t = \frac{u(t - h) - u(t)}{h}$$

$$u(t) = u(t - h) + h\, u_t$$

Pela equação do calor, $u_t = ku_{xx}$, portanto

$$u(t) = u(t - h) + h \cdot k \cdot u_{xx} = h \cdot k \cdot \frac{u(x + 2h) - 2u(x + h) + u(x)}{h^2}$$

Onde k é a condutividade térmica, e para nosso problema será $k = 0.5$. Para resolver essa equação, vamos então começar por definir a matriz X, onde as linhas representam as temperaturas para cada x. Agora vamos calcular para cada linha a derivada da linha anterior, até que a matriz seja completa.

O resultado foi observado pelo gráfico plotado das matrizes na Figure 1.

Podemos aplicar a equação do calor em diversas áreas do conhecimento e em diferentes frentes científicas, a seguir daremos alguns exemplos. Ela pode ser utilizada para a previsão de preços em matemática financeira, já que é parecida com a equação de Black–Scholes; também existem aplicações no campo médico, no qual o paciente é aliviado de dores por meio de bolsas de água quente, nesse caso existe a transferência de calor entre a bolsa e o corpo, região quente para a fria, usando uma forma modificada da equação do calor (Equação de Pennes), que leva em consideração fatores biológicos.

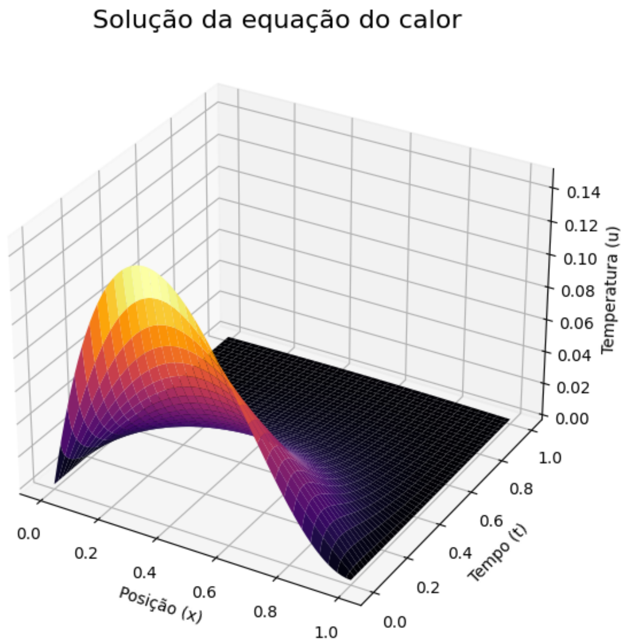

Figure 1: Plot 3D da matriz gerada a partir da solução numérica de diferenças finitas na resolução da equação do calor. O gráfico nos mostra como a temperatura muda de acordo com o tempo e a posição.

4 Equação de Advecção

A equação da advecção é dada por

$$u_t + \mu u_x = 0$$

Observa-se que se a distribuição inicial for uma função $f(x)$, então a distribuição num instante t qualquer é igual a $f(x - \mu t)$, ou seja, a função é transladada na direção x com velocidade constante μ. Isso por que, usando a regra da cadeia, se $y = x - \mu t$, vemos que

$$u_t = \frac{df}{dy}\frac{dy}{dt} = -\mu f'(x - \mu t)$$

Além disso,

$$u_x = \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} = f'(x - \mu t)$$

Logo,

$$u_t + \mu u_x = -\mu f'(x - \mu t) + \mu f'(x - \mu t) = 0$$

No nosso caso, em que a distribuição inicial é $u(x, 0) = x(1 - x)$, a solução analítica é:

$$u(x,t) = x - x^2 + x\mu t - \mu t + 2x\mu t - \mu^2 t^2$$

No entanto, podemos calcular $u(x,t)$ numericamente, usando a diferença finita atrasada, para aproximar a derivada em x, para comparar com a solução analítica:

$$u_x = \frac{u(x-h) - u(x)}{h}$$

E depois usando a equação da advecção para aproximar $u(x,t)$ a partir do valor de $u(x, t-h)$:

$$u_t = \frac{u(t-h) - u(t)}{h}$$

$$u(t) = u(t-h) + h \cdot u_t$$

$$u(t) = u(t-h) + h \cdot (-\mu \cdot u_x)$$

Chegamos assim na função que podemos iterar:

$$u(t+h) = u(t) + h \cdot \mu \cdot \frac{u(x-h) - u(x)}{h}$$

Vamos considerar o Coeficiente de advecção $\mu = 0.25$ Para resolver essa equação, vamos definir a matriz $X \times T$, na qual cada linha será a temperatura para todos os x, assim a próxima linha será feita a partir do cálculo das derivas da linha anterior e essa nova linha de tornará a linha zero novamente. Isso se repete sucessivamente até acabarem os x.

Vale lembrar que, como estamos usando a diferença finita atrasada, excluímos o primeiro ponto e o calculamos com diferença finita adiantada, para não ficarmos com nenhum número faltando na matriz. Outro ponto a se considerar, são o erro que o método comete, sendo de ordem $O(h)$.

Plotando as matrizes, tanto da solução analítica, como a feita por diferenças finitas, em um gráfico 3D (Figure 2), podemos notar que a diferença entre as duas representações é muito pequena, difícil de notar. Isso demonstra que o método das diferenças finitas funciona muito bem, nesse caso, para modelar fenômenos de advecção.

Assim como a equação do calor, podemos usar a equação de advecção em diferentes contextos, como por exemplo: em exames de imageamento da perfusão de fluxos no corpo, estimando a velocidade e a difusão de substâncias usadas em equipamentos que exigem contraste.

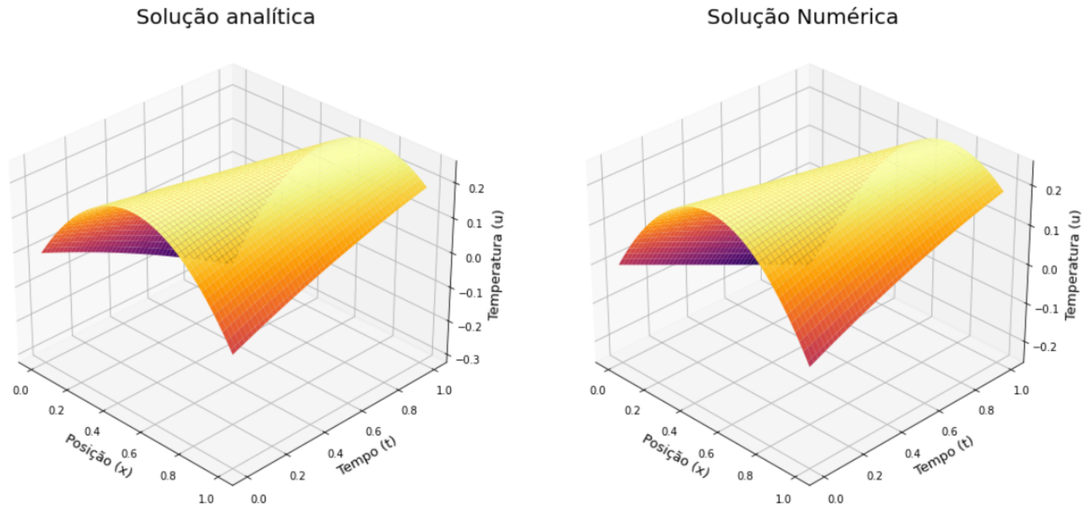

Figure 2: Plot 3D das matrizes geradas a partir da equação analítica e de diferenças finitas. O gráfico nos mostra como a temperatura muda de acordo com o tempo e a posição para ambos os casos.

5 Conclusão

Podemos concluir então, que o método das diferenças finitas é muito válido para modelagem de fenômenos físicos e químicos. Podemos utilizar naqueles que possuem soluções analíticas, com mais destaque para as funções diferenciais que não possuem soluções, já que esse é um dos jeitos de se saber como é o comportamento desses fenômenos. Além do fato de ser de fácil implementação computacional eficiente, ou seja, não é preciso o uso de super computadores, o que torna mais abrangente o seu uso.

Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer o professor Vinícius Francisco Wasques, que ministrou a disciplina de Análise Numérica.

Referências

Wasques, Vinicius. Notas de Matemática: Análise Numérica. Ilum Escola de Ciência. Campinas, 2023.

Itkin, A, e tal. Multilayer heat equations and their financial applications. 2021

Petrofsky J, e tal. The contribution of skin blood flow in warming the skin after the application of local heat; the duality of the Pennes heat equation. Med Eng Phys. 2011 Apr;33(3):325-9. doi: 10.1016/j.medengphy.2010.10.018.

Liu P, e tal. Perfusion Imaging: An Advection Diffusion Approach. IEEE Trans Med Imaging. 2021 Dec;40(12):3424-3435. doi: 10.1109/TMI.2021.3085828.

Contribuição de cada integrante

Marcos de Cerqueira Leite: Código, construção dos gráficos e revisão

Isadora Marcondes: Escrita do documento, interpretação e revisão

Paola Ferrari: Escrita do documento, exemplos de utilização em outras áreas e revisão