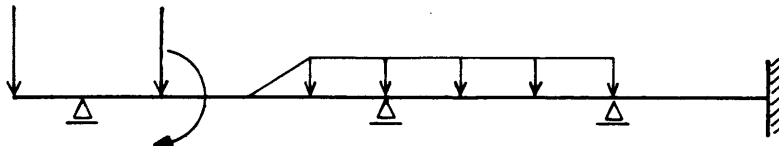


Das Übertragungsmatrizenverfahren



Inhalt:

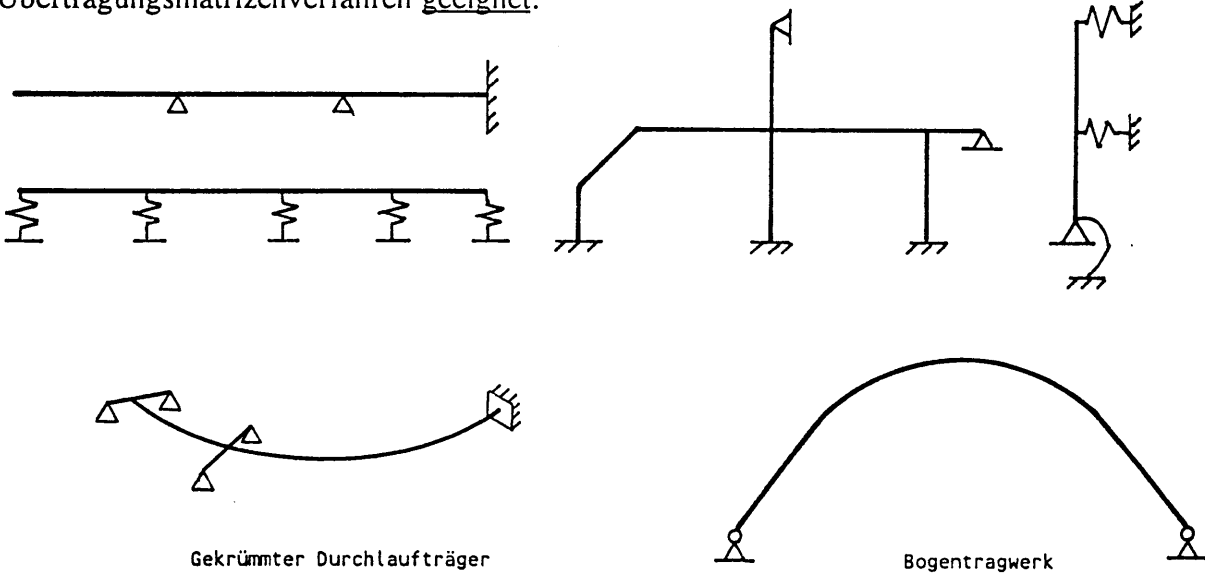
	Seite
1 Einführung	1
2 Übertragungsmatrix des Biegebalkens	2
3 Punktvektor und Punktmatrix	8
4 Anfangsvektor	12
5 Übertragungsverfahren	14
6 Berechnungsbeispiel Einfeldträger	15
7 Übertragungsverfahren beim Durchlaufträger	22
8 Berechnungsbeispiel Durchlaufträger	26
9 Übertragungsmatrizenbibliothek	33

ÜBERTRAGUNGSMATRIZENVERFAHREN

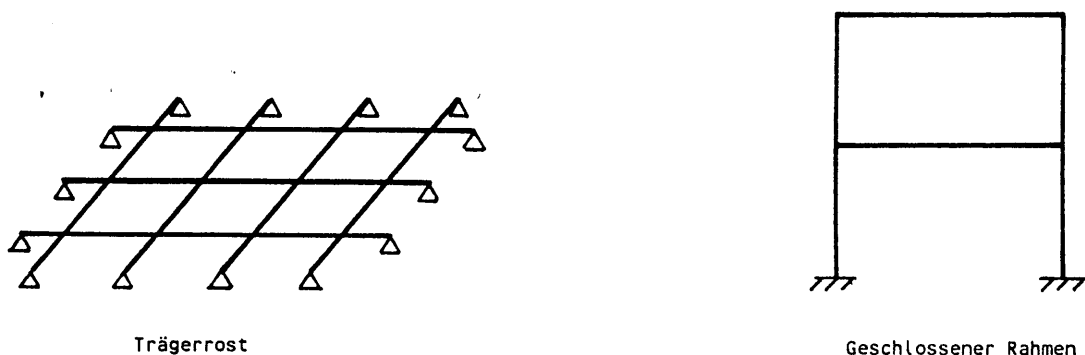
1 Einführung

Das Verfahren der Übertragungsmatrizen ist ein elektronisches Berechnungsverfahren, das speziell zur Ermittlung der Schnittgrößen, Biegelinien und Einflußlinien von Durchlaufträgern entwickelt wurde. Es geht auf die Arbeiten von Falk [1] (dort als 'Reduktionsverfahren' bezeichnet) zurück. Programme zur Berechnung von Durchlaufträgern werden meistens nach dem Übertragungsmatrizenverfahren programmiert. Das Verfahren wird auch auf Platten und Schalen sowie für dynamische Berechnungen angewandt. Wesentlich für die Anwendbarkeit ist, daß die zu berechnende Struktur topologisch eindimensional, d.h. nicht ringförmig geschlossen ist. 'Verzweigungen' der Struktur, z.B. in einen Träger einmündende Stäbe (unverschieblicher Rahmen) können hingegen im Prinzip behandelt werden.

Für Übertragungsmatrizenverfahren geeignet:



Nicht geeignet:

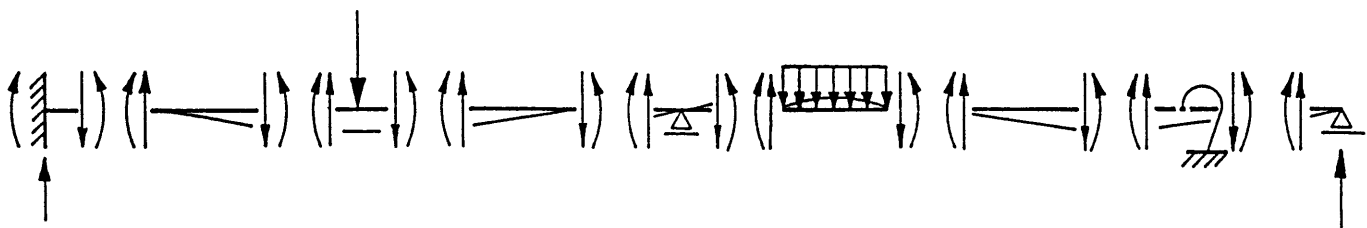
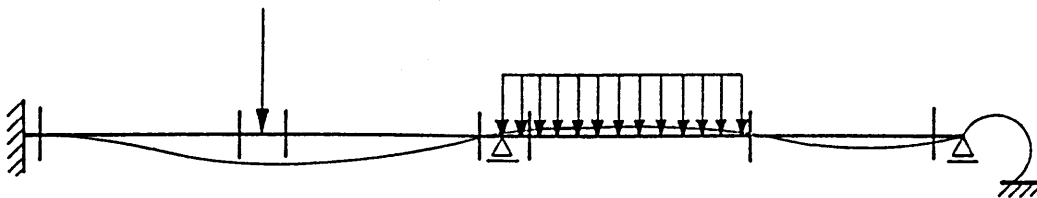


Das Übertragungsmatrizenverfahren zeichnet sich durch seinen leicht schematisierbaren Rechenablauf und durch die geringe Größe des zu lösenden Gleichungssystems aus. Diese ist unabhängig von der Größe des zu berechnenden Systems. Die topologische Eindimensionalität des Systems wird also bereits bei der Formulierung der Methode berücksichtigt. Das Verfahren wird dadurch sehr übersichtlich und leicht programmierbar.

Im folgenden wird das Verfahren ausschließlich für Durchlaufträger behandelt.

2 Übertragungsmatrix des Biegebalkens

Beim Übertragungsmatrizenverfahren teilt man den Träger in Abschnitte und zwischen den Abschnitten liegende Punkte ein.



Die Schnittgrößen und Verformungen des Trägers an einer bestimmten Stelle faßt man zum Zustandsvektor \underline{Z} zusammen. Beim ebenen Biegebalken hat der Zustandsvektor die Form:

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} w \\ \varphi \\ M \\ Q \end{bmatrix} \quad (1)$$

mit

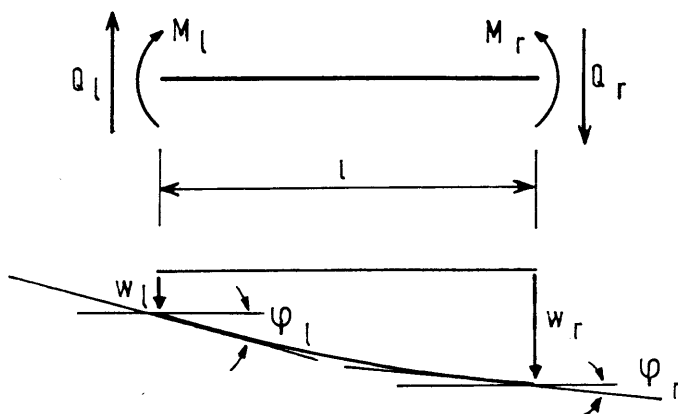
- w = Durchbiegung (nach unten positiv)
- φ = Drehwinkel (rechtsdrehend positiv)
- M = Biegemoment (Faserdefinition)
- Q = Querkraft (Faserdefinition)

Die Übertragungsmatrix gibt nun den Zusammenhang zwischen den Zustandsvektoren am linken und rechten Rand eines Abschnitts an, also:

$$\underline{Z}_r = \underline{A} \cdot \underline{Z}_l + \underline{L} \quad (2)$$

mit

- \underline{Z}_r = Zustandsvektor am rechten Abschnittsrand
- \underline{Z}_l = Zustandsvektor am linken Abschnittsrand
- \underline{A} = Übertragungsmatrix
- \underline{L} = Lastvektor



Zur Herleitung der Übertragungsmatrix des Biegebalkens geht man von dessen Differentialgleichungssystem aus:

$$\begin{aligned}
 \frac{dw}{dx} &= \varphi \\
 \frac{d\varphi}{dx} &= - \frac{1}{E \cdot I} \cdot M \\
 \frac{dM}{dx} &= Q \\
 \frac{dQ}{dx} &= - q
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

mit

- $q(x)$ = Streckenlast
- $Q(x)$ = Querkraft
- $M(x)$ = Biegemoment
- $\varphi(x)$ = Biegewinkel
- $E \cdot I$ = Biegesteifigkeit

Für einen gegebenen Verlauf der Streckenlast $q(x)$ und ein abschnittsweise konstantes $E \cdot I$ erhält man die Schnittgrößen und Verformungen des Balkens durch direkte Integration zu:

$$Q(x) = - \int q \, dx = C_1 - \int_0^1 q \, dx \tag{4a}$$

$$M(x) = \int Q \, dx = C_2 + C_1 \cdot x - \int_0^1 \int q \, dx^2 \tag{4b}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) &= \int \frac{M}{E \cdot I} \, dx = \\
 &= C_3 - C_2 \cdot \frac{x}{E \cdot I} - C_1 \cdot \frac{x^2}{2 \cdot E \cdot I} + \frac{1}{E \cdot I} \int_0^1 \int \int q \, dx^2 \, dx
 \end{aligned}
 \tag{4c}$$

$$\begin{aligned}
 w(x) &= \int \frac{\varphi}{E \cdot I} dx = \\
 &= C_4 + C_3 \cdot x - C_2 \cdot \frac{x^2}{2 \cdot E \cdot I} - C_1 \cdot \frac{x^3}{6 \cdot E \cdot I} + \frac{1}{E \cdot I} \int_0^1 \int \int q \, dx^2 \, dx^2 \quad (4d)
 \end{aligned}$$

Die Integrationskonstanten C_1 bis C_4 lassen sich durch die Schnittgrößen und Verschiebungsgrößen am linken Abschnittsrand, an dem $x=0$ gilt, ersetzen. Beispielsweise erhält man aus Gl. (4a) mit $Q(x=0)=Q_1$: $C_1=Q_1$. Durch Einsetzen von $M(x=0)=M_1$, $\varphi(x=0)=\varphi_1$ und $w(x=0)=w_1$ in die Gl'n (4a-c) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= Q_1 \\
 C_2 &= M_1 \\
 C_3 &= \varphi_1 \\
 C_4 &= w_1
 \end{aligned}$$

Damit erhält man mit Gl. (4) für einen Abschnitt der Länge l , d.h. für $x=l$, die Zustandsgrößen am rechten Abschnittsrand zu:

$$\begin{aligned}
 Q_R &= Q_1 - \int_0^l q \, dx \\
 M_R &= M_1 + Q_1 \cdot l - \int_0^l \int q \, dx^2 \\
 \varphi_R &= \varphi_1 - M_1 \cdot \frac{1}{E \cdot I} - Q_1 \cdot \frac{l^2}{2 \cdot E \cdot I} + \frac{1}{E \cdot I} \int_0^l \int \int q \, dx^2 \, dx \\
 w_R &= w_1 + \varphi_1 \cdot l - M_1 \cdot \frac{l^2}{2 \cdot E \cdot I} - Q_1 \cdot \frac{l^3}{6 \cdot E \cdot I} + \frac{1}{E \cdot I} \int_0^l \int \int \int q \, dx^2 \, dx^2
 \end{aligned} \quad (5)$$

oder in Matrizenschreibweise:

$$\begin{bmatrix} w_r \\ \varphi_r \\ M_r \\ Q_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{l^2}{2 \cdot E \cdot I} & \frac{l^3}{6 \cdot E \cdot I} \\ 0 & 1 & \frac{l}{E \cdot I} & \frac{l^2}{2 \cdot E \cdot I} \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_l \\ \varphi_l \\ M_l \\ Q_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{E \cdot I} \iiint q dx^2 dx^2 \\ \frac{1}{E \cdot I} \iint q dx^2 dx \\ - \int q dx^2 \\ - \int q dx \end{bmatrix} \quad (6)$$

bzw:

$$\underline{Z}_r = \underline{A} \cdot \underline{Z}_l + \underline{L} \quad (7)$$

Die Matrix \underline{A} ist die Übertragungsmatrix des Stababschnitts, der Vektor \underline{L} enthält die Lastterme. Man erhält den Lastvektor \underline{L} durch Integration der Streckenlast über die Abschnittslänge. Beispielsweise ergibt sich für eine konstante Streckenlast q_0 :

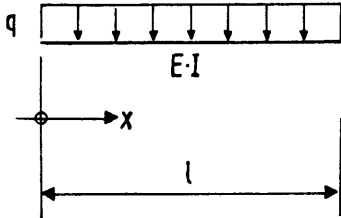
$$- \int_0^1 q \, dx = - q_0 \cdot x \Big|_0^1 = - q_0 \cdot l$$

$$- \int_0^1 \int q \, dx^2 = - \int q \cdot x \, dx = - \frac{1}{2} \cdot q_0 \cdot x^2 \Big|_0^1 = - \frac{1}{2} \cdot q_0 \cdot l^2$$

$$\frac{1}{E \cdot I} \int_0^1 \int \int q \, dx^3 = \frac{1}{E \cdot I} \int \frac{1}{2} \cdot q \cdot x^2 \, dx = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{1}{6} \cdot q_0 \cdot x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{6 \cdot E \cdot I} \cdot q_0 \cdot l^3$$

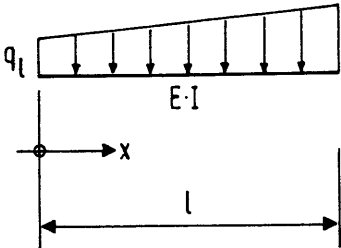
$$\frac{1}{E \cdot I} \int_0^1 \int \int \int q \, dx^4 = \frac{1}{E \cdot I} \int \frac{1}{6} \cdot q \cdot x^3 \, dx = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{1}{24} \cdot q_0 \cdot x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{24 \cdot E \cdot I} \cdot q_0 \cdot l^4$$

Damit lautet der Lastvektor nach Gl. (6) für eine konstante Streckenlast q_0 :

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} \frac{q_0 \cdot l^4}{24 \cdot E \cdot I} \\ \frac{q_0 \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I} \\ -\frac{q_0 \cdot l^2}{2} \\ -q_0 \cdot l \end{bmatrix}$$


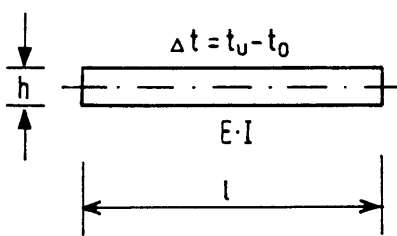
(8a)

Bei trapezförmiger Belastung erhält man den Lastvektor zu:

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} \frac{(4 \cdot q_l + q_r) \cdot l^4}{120 \cdot E \cdot I} \\ \frac{(3 \cdot q_l + q_r) \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I} \\ -\frac{(2 \cdot q_l + q_r) \cdot l^2}{6} \\ -\frac{(q_l + q_r) \cdot l}{2} \end{bmatrix}$$


(8b)

Im Lastfall Temperatur lautet der Lastvektor:

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} -\frac{E \cdot I \cdot \alpha_t \cdot \Delta t \cdot l^2}{2 \cdot h} \\ -\frac{E \cdot I \cdot \alpha_t \cdot \Delta t \cdot l}{h} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(8c)

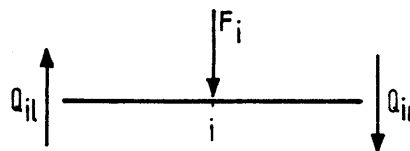
Treten in einem Abschnitt mehrere Lastarten gleichzeitig auf, so werden die Lastvektoren addiert.

3 Punktvektor und Punktmatrix

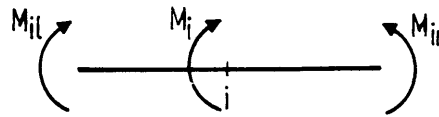
An Punkten zwischen einzelnen Trägerabschnitten können Einzelkräfte und -momente angreifen. Auch eine unstetige Veränderung von Verschiebungsgrößen, z.B. ein Sprung in der Biegelinie (als eingeprägte Verformung) kann hier definiert werden. Dies ermöglicht die Ermittlung von Einflußlinien. Weiterhin können Einzelfedern z.B. für eine elastische Stützung des Balkens berücksichtigt werden. Auflager und Gelenke erfordern jedoch besondere Betrachtungen. Sie werden deshalb später behandelt.

Zunächst wird die Behandlung von Einzellasten, eingeprägten Momenten und eingeprägten Verformungen betrachtet. Für das Gleichgewicht am Punkt sowie die Kompatibilität der Verschiebungsgrößen erhält man:

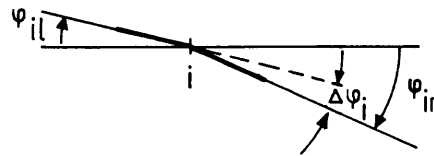
$$Q_{ir} = Q_{il} - F_i$$



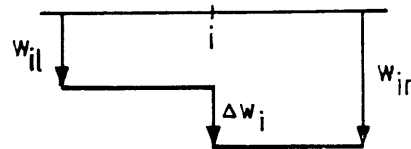
$$M_{ir} = M_{il} + M_i$$



$$\varphi_{ir} = \varphi_{il} + \Delta\varphi_i$$



$$w_{ir} = w_{il} + \Delta w_i$$



Die Verschiebungsgrößen Δw_i und $\Delta\varphi_i$ stellen einen "erzwungenen" Sprung bzw. einen "erzwungenen" Knick in der Biegelinie dar. Sie werden für die Ermittlung der Einflußlinien von Biegemomenten und Querkräften benötigt.

Faßt man diese Gleichungen zu Vektoren zusammen, erhält man:

$$\begin{bmatrix} w_{ir} \\ \varphi_{ir} \\ M_{ir} \\ Q_{ir} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{il} \\ \varphi_{il} \\ M_{ir} \\ Q_{ir} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta w_i \\ \Delta\varphi_i \\ M_i \\ F_i \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\underline{z}_{ir} = \underline{z}_{il} - \underline{s}_i \quad (10)$$

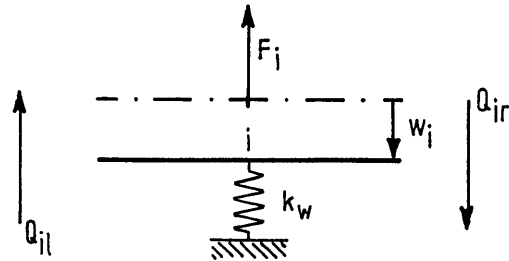
wobei \underline{s}_i den sogenannten Punktvektor darstellt.

Bei Federn besteht ein linearer Zusammenhang zwischen einer Kraftgröße und einer Verschiebungsgröße. Für verschiedene Federungsarten erhält man:

- Verschiebungsfeder:

$$F_i = k_w \cdot w_i$$

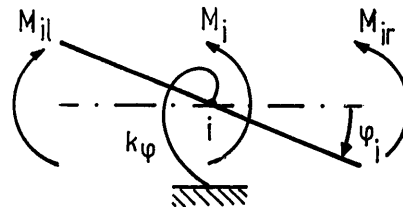
$$Q_{ir} = Q_{il} + k_w \cdot w_i$$



- Verdrehungsfeder:

$$M_i = k_\varphi \cdot \varphi_i$$

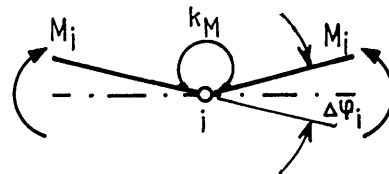
$$M_{ir} = M_{il} - k_\varphi \cdot \varphi_i$$



- Relativverdrehungsfeder:

$$\varphi_i = M_i / k_M$$

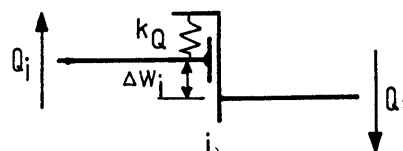
$$\varphi_{ir} = \varphi_{il} - M_i / k_M$$



Relativverschiebungsfeder:

$$w_i = Q_i / k_Q$$

$$w_{ir} = w_{il} + Q_i / k_Q$$



Alle Gleichungen werden zur sogenannten Punktmatrix zusammengefaßt:

$$\begin{bmatrix} w_{ir} \\ \varphi_{ir} \\ M_{ir} \\ Q_{ir} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/k_Q \\ 0 & 1 & -1/k_M & 0 \\ 0 & -k_\varphi & 1 & 0 \\ k_w & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_{il} \\ \varphi_{il} \\ M_{il} \\ Q_{il} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\underline{z}_{ir} = \underline{K} \cdot \underline{z}_{il} \quad (12)$$

4 Anfangsvektor

Am Trägeranfang kann der Zustandsvektor ganz allgemein in der Form

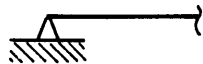
$$\begin{bmatrix} w_0 \\ \varphi_0 \\ M_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot w_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \varphi_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot M_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot Q_0 \quad (13)$$

geschrieben werden, wobei die Größen w_0 , φ_0 , M_0 und Q_0 die Anfangswerte der Komponenten des Zustandsvektors sind.

Von diesen 4 Größen sind am Trägeranfang immer 2 dem Betrag nach bekannt.



$$\begin{aligned} w &= 0 \\ \varphi &= 0 \\ M &\neq 0 \\ Q &\neq 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} w &= 0 \\ \varphi &\neq 0 \\ M &= 0 \\ Q &\neq 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} w &\neq 0 \\ \varphi &\neq 0 \\ M &= 0 \\ Q &= 0 \end{aligned}$$

Man sieht, daß die Größen

$$\begin{aligned} &w \text{ und } Q \\ &\varphi \text{ und } M \end{aligned}$$

einander jeweils paarweise zugeordnet sind und daß von einem Paar jeweils eine Größe am Trägeranfang bekannt, die andere vorläufig unbekannt ist. Im Fall einer Auflagersenkung ergibt sich beim gelagerten Rand eine Verschiebung $w = \bar{w}_0 \neq 0$. In Gl. (13) können nun die Spaltenvektoren der beiden unbekannten Anfangsgrößen zu einer Matrix zusammengefaßt werden, z.B. bei einer gelenkigen Lagerung und einer erzwungenen Lagerabsenkung um \bar{w}_0 :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} w_0 \\ \varphi_0 \\ M_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot w_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \varphi_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot Q_0 \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{w}_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{13a}$$

Entsprechend erhält man für den freien Rand

$$\begin{bmatrix} w_0 \\ \varphi_0 \\ M_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix} \tag{13b}$$

und für eine ~~freie~~ Einspannung

$$\begin{bmatrix} w_0 \\ \varphi_0 \\ M_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{w}_0 \\ \bar{\varphi}_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{13c}$$

\bar{w}_0 und $\bar{\varphi}_0$ stellen hierbei wiederum erzwungene, d.h. bekannte Auflagerverschiebungen bzw. -verdrehungen am Trägeranfang dar.

Der Zustandsvektor am Trägeranfang hat also die allgemeine Form:

$$\begin{bmatrix} w_0 \\ \varphi_0 \\ M_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \\ z_{31} & z_{32} \\ z_{41} & z_{42} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{bmatrix} \quad (14a)$$

$$\underline{z}_0 = \underline{z} \cdot \underline{u}_0 + \underline{l}_0 \quad (14b)$$

Darin sind u_1 und u_2 die beiden Anfangsunbekannten.

5 Übertragungsverfahren

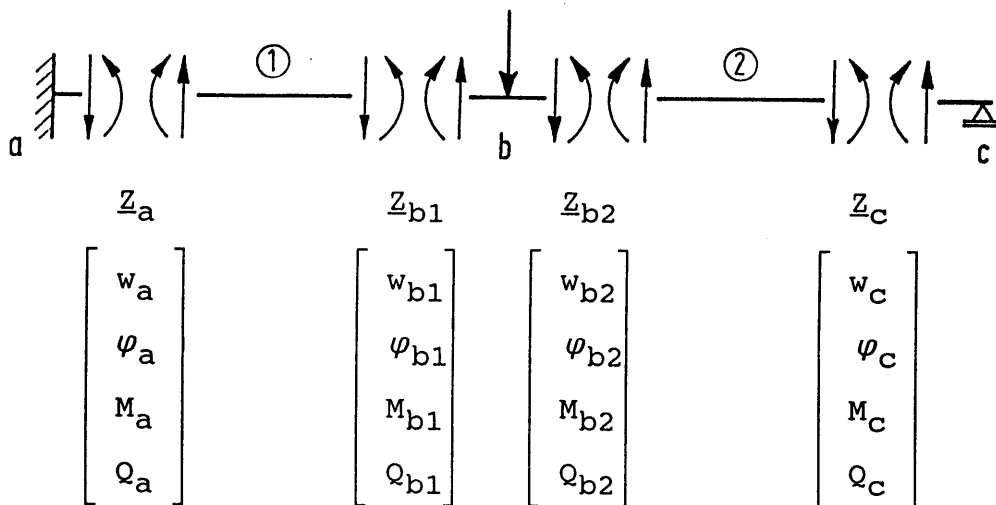
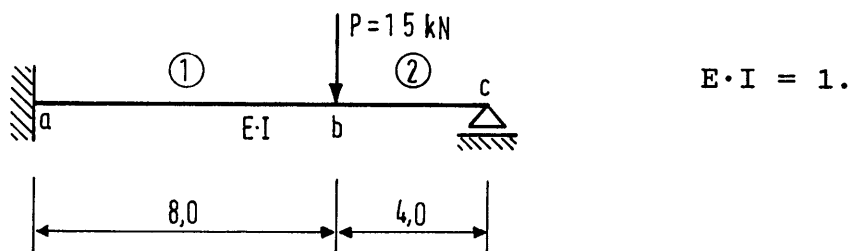
Zur Durchführung des Übertragungsverfahrens stellt man zunächst den Zustandsvektor am linken Trägerrand nach Gl. (13) auf. Dieser Anfangsvektor wird nun über die anschließenden Trägerabschnitte und Punkte "übertragen".

Der Anfangsvektor bildet den Zustandsvektor am linken Rand des ersten Abschnitts. Setzt man ihn in Gl. (6) ein und führt die dort angegebene Matrizenoperation zur "Übertragung über einen Abschnitt" durch, so erhält man den Zustandsvektor am rechten Rand des ersten Abschnitts. Dieser bildet den Anfangsvektor des folgenden Abschnitts, sofern keine Einzelkräfte zwischen den Abschnitten wirken oder Einzelfedern vorhanden sind. Einzelkräfte und Einzelfedern werden durch Anwendung der Übertragungsbeziehung Gl. (9) bzw. Gl. (11) berücksichtigt. Der Zustandsvektor wird nun durch wiederholte Anwendung der Gl. (6) für die Abschnitte und Gleichungen (9) und (11) für die Punkte über den Träger bis zu dessen Ende "übertragen".

Am Trägerende sind vom Zustandsvektor ähnlich wie am Trägeranfang zwei Zustandsgrößen bekannt, zwei weitere unbekannt. Man erhält also ein Gleichungssystem von 4 Gleichungen mit 4 Unbekannten, nämlich 2 Unbekannte am Trägeranfang und 2 Unbekannte am Trägerende. Die Größe des Gleichungssystems ist somit unabhängig von der Anzahl der Abschnitte. Nach der Lösung des Gleichungssystems sind alle Zustandsgrößen am Trägeranfang bekannt. Der Übertragungsprozess wird nun noch einmal mit bekannten Anfangswerten wiederholt. Damit erhält man die Zustandsgrößen an allen Abschnittsgrenzen.

6 Berechnungsbeispiel Einfeldträger

Die Berechnung der Verschiebungs- und Schnittgrößen wird an dem dargestellten Einfeldträger erläutert. Es wird hier mit den E·I-fachen Verformungen gerechnet.



Der Anfangsvektor für einen eingespannten Rand lautet:

$$\underline{Z}_a = \begin{bmatrix} w_a \\ \varphi_a \\ M_a \\ Q_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_a \\ Q_a \end{bmatrix} ; \quad \underline{L}_0 = \underline{0}$$

Der Anfangsvektor ist nun über den ersten Abschnitt zu übertragen. Dazu ermittelt man die Übertragungsmatrix des ersten Stababschnitts nach Gl. (6) zu:

$$\underline{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 8 & -\frac{8^2}{2} & -\frac{8^3}{6} \\ 0 & 1 & -8 & -\frac{8^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & -32 & -85,3 \\ 0 & 1 & -8 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{L}_1 = \underline{0}$$

Für die Übertragung des Zustandsvektors Z_a über den Abschnitt 1 gilt nach Gl. (6):

$$\underline{Z}_{b1} = \underline{A}_1 \cdot \underline{Z}_a + \underline{L}_1$$

oder:

$$\underline{Z}_{b1} = \begin{bmatrix} w_{b1} \\ \varphi_{b1} \\ M_{b1} \\ Q_{b1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & -32 & -85,3 \\ 0 & 1 & -8 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_a \\ Q_a \end{bmatrix} + \underline{0}$$

$$= \begin{bmatrix} -32 & -85,3 \\ -8 & -32 \\ 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_a \\ Q_a \end{bmatrix}$$

$$\underline{L}_{b1} = \underline{0}$$

Zwischen den Abschnitten 1 und 2 des Stabes greift die Einzellast P an. Man ermittelt nun den Punktvektor für die Stelle b zu

$$\underline{s}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -15 \end{bmatrix}$$

und erhält den Zustandsvektor rechts des Punktes b nach Gl. (9) zu

$$\underline{z}_{b2} = \underline{z}_{b1} + \underline{s}_b$$

oder:

$$\underline{z}_{b2} = \begin{bmatrix} w_{b2} \\ \varphi_{b2} \\ M_{b2} \\ Q_{b2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{b1} \\ \varphi_{b1} \\ M_{b1} \\ Q_{b1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -32 & -85,3 \\ -8 & -32 \\ 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Ma \\ Qa \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -15 \end{bmatrix}$$

Dies ist der Zustandsvektor am Anfang des zweiten Stababschnitts.

Mit der Übertragungsmatrix für Abschnitt 2

$$\underline{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -\frac{4^2}{2} & -\frac{4^3}{6} \\ 0 & 1 & -4 & -\frac{4^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -8 & -10,66 \\ 0 & 1 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{L}_2 = 0$$

erfolgt die Übertragung über den Abschnitt 2:

$$\underline{Z}_{C2} = \underline{A}_2 \cdot \underline{Z}_{b2} + \underline{L}_2$$

oder:

$$\underline{Z}_{C2} = \begin{bmatrix} w_{C2} \\ \varphi_{C2} \\ M_{C2} \\ Q_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -8 & -10,66 \\ 0 & 1 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_{b2} \\ \varphi_{b2} \\ M_{b2} \\ Q_{b2} \end{bmatrix} + 0$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 & -8 & -10,66 \\ 0 & 1 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} -32 & -85,3 \\ -8 & -32 \\ 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_a \\ Q_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -15 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} -72 & -288 \\ -12 & -72 \\ 1 & 12 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_a \\ Q_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 159,9 \\ 120 \\ -60 \\ -15 \end{bmatrix}$$

Z_{C2} ist der Zustandsvektor am rechten Trägerrand. Der Übertragungsvorgang ist damit beendet.

Aufgrund der gelenkigen Lagerung gilt am rechten Trägerrand:

$$w_{c2} = 0 \quad , \quad M_{c2} = 0$$

Berücksichtigt man die Auflagerbedingungen im Zustandsvektor Z_{c2} erhält man:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_{c2} \\ 0 \\ Q_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -72 & -288 \\ -12 & -72 \\ 1 & 12 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_a \\ Q_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 159,9 \\ 120 \\ -60 \\ -15 \end{bmatrix}$$

Diese Beziehung stellt ein System von 4 Gleichungen mit den 4 Unbekannten φ_{c2} , Q_{c2} , M_a , Q_a dar. Die beiden Anfangsunbekannten M_a , Q_a können aus der ersten und dritten Zeile des Gleichungssystems bestimmt werden.

$$\text{Zeile (1):} \quad -72 \cdot M_a - 288 \cdot Q_a + 159,9 = 0 \quad (a)$$

$$\begin{aligned} \text{Zeile (3):} \quad M_a + 12 \cdot Q_a - 60 &= 0 & (b) \\ M_a &= 60 - 12 \cdot Q_a \end{aligned}$$

(b) in (a) eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} -72 \cdot (60 - 12 \cdot Q_a) - 288 \cdot Q_a &= -159,9 \\ 576 \cdot Q_a &= +4160 \\ Q_a &= +7,22 \end{aligned}$$

und aufgelöst nach M_a

$$M_a = -26,6$$

Damit ist der Zustandsvektor an der Stelle a (Anfangsvektor) vollständig bekannt.

$$\underline{z}_a = \begin{bmatrix} w_a \\ \varphi_a \\ M_a \\ Q_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -26,6 \\ 7,72 \end{bmatrix}$$

Analog können aus Zeile (2) und Zeile (4) des Gleichungssystems φ_{c2} und Q_{c2} bestimmt werden.

Die Schnittgrößen und Verschiebungsgrößen an den Abschnittsrändern werden nun endgültig durch eine erneute Übertragung des Zustandsvektors bestimmt:

Übertragung Abschnitt 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 & -32 & -85,3 \\ 0 & 1 & -8 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -26,6 \\ 7,72 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 235,3 \\ -18,24 \\ 31,16 \\ 7,72 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{b1} \\ \varphi_{b1} \\ M_{b1} \\ Q_{b1} \end{bmatrix}$$

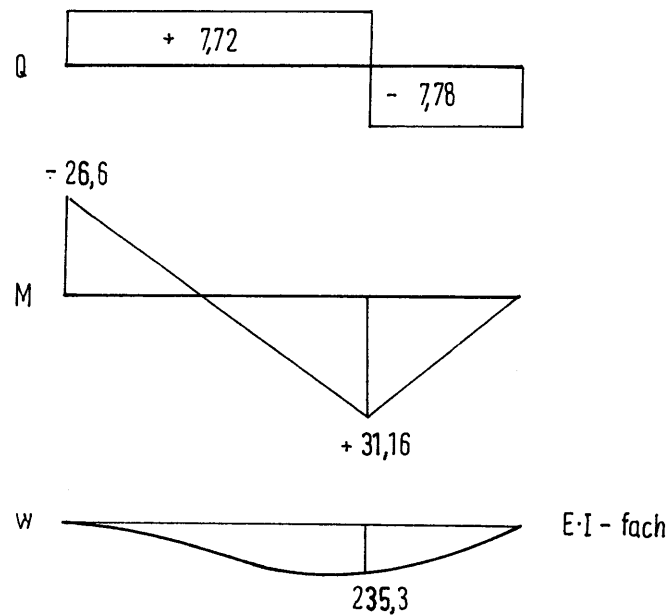
Übertragung Punkt b:

$$\begin{bmatrix} w_{b1} \\ \varphi_{b1} \\ M_{b1} \\ Q_{b1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 235,3 \\ -18,24 \\ 31,16 \\ 7,72 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 235,3 \\ -18,24 \\ 31,16 \\ -7,78 \end{bmatrix}$$

Übertragung Abschnitt 2:

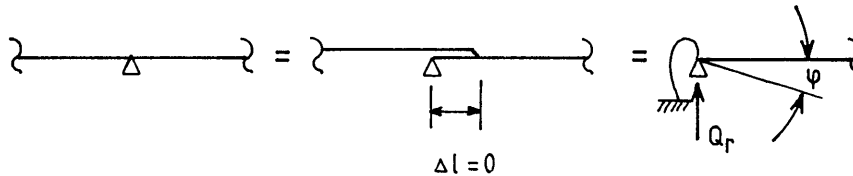
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -8 & -10,66 \\ 0 & 1 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 235,3 \\ -18,24 \\ 31,16 \\ -7,78 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \approx 0 \\ -0,64 \\ 0 \\ -7,78 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{C2} \\ \varphi_{C2} \\ M_{C2} \\ Q_{C2} \end{bmatrix}$$

Damit sind die Durchbiegungen, Drehwinkel, Momente und Querkräfte an allen Abschnittsgrenzen bekannt.



7 Übertragungsverfahren beim Durchlaufträger

Bei Durchlaufträgern tritt beim Übertragungsverfahren an jeder Zwischenstütze eine Auflagerkraft als zusätzliche Unbekannte auf.



Man führt nun die Berechnung so fort, als würde am Auflager ein neuer, gelenkig gelagerter Träger beginnen, d.h. man führt einen neuen Anfangsvektor mit der Auflagerkraft Q_r und dem Drehwinkel am Auflager als Unbekannte ein. Den links anschließenden Teil des Durchlaufträgers stellt man als Koppelfeder, die am Anfang des neuen Feldes des Durchlaufträgers wirkt, dar.

Dazu ist für das ankommende Feld die Federungsbeziehung aufzustellen. Der Zustandsvektor des ankommenden Feldes kann nach Gl. (14a) allgemein geschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} w_0 \\ \varphi_0 \\ M_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \\ z_{31} & z_{32} \\ z_{41} & z_{42} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{bmatrix} \quad (14a)$$

Dieses Gleichungssystem wird nun geschrieben:

$$\begin{bmatrix} w \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \quad (15a)$$

$$\begin{bmatrix} M \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{31} & z_{32} \\ z_{41} & z_{42} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_3 \\ l_4 \end{bmatrix} \quad (15b)$$

Das erste Gleichungssystem, Gl. (15a) gibt die Verschiebungsgrößen, das zweite Gleichungssystem die Schnittgrößen an.

Man löst nun das erste Gleichungssystem, Gl. (15a) nach den Anfangsunkannten u_1, u_2 auf und erhält:

$$\begin{bmatrix} w \\ \varphi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{bmatrix} w \\ \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \right) \quad (15c)$$

Setzt man diese Beziehung in Gl. (15b) ein, erhält man die gesuchte Federungsbeziehung zu:

$$\begin{bmatrix} M \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{31} & z_{32} \\ z_{41} & z_{42} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} w \\ \varphi \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} z_{31} & z_{32} \\ z_{41} & z_{42} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_3 \\ l_4 \end{bmatrix}$$

oder

$$\begin{bmatrix} M \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w \\ \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_3^* \\ l_4^* \end{bmatrix} \quad (16)$$

mit der Federungsmatrix

$$\underline{K}_k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{31} & z_{32} \\ z_{41} & z_{42} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}^{-1} \quad (16a)$$

und den Ersatzlasten:

$$\underline{L}_k = \begin{bmatrix} l_3^* \\ l_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 \\ l_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \quad (16b)$$

Erweitert man diese Beziehung auf alle Terme des Zustandsvektors, so erhält man für die "Anfederung" des vorangehenden Feldes:

$$\begin{bmatrix} w_{re} \\ \varphi_{re} \\ M_{re} \\ Q_{re} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{li} \\ \varphi_{li} \\ M_{li} \\ Q_{li} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ Q \end{bmatrix}$$

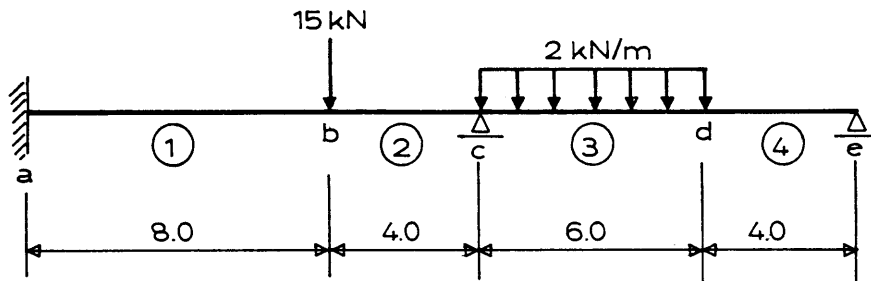
$$\begin{bmatrix} w_{re} \\ \varphi_{re} \\ M_{re} \\ Q_{re} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ k_{11} & k_{21} & 1 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_{li} \\ \varphi_{li} \\ M_{li} \\ Q_{li} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_3^* \\ l_4^* \end{bmatrix} \quad (17)$$

Die Matrix \underline{K}_K stellt eine gekoppelte Feder für die Freiheitsgrade der Verschiebung u und des Drehwinkels φ dar. An Zwischenstützen von Durchlaufträgern wird der Anfangsvektor des neuen Feldes zunächst über diese Feder übertragen, um die Steifigkeit des links angeschlossenen Trägereils zu berücksichtigen. Auf die gleiche Weise lassen sich auch Stabverzweigungen, wie z.B. bei unverschieblichen Rahmen einmündende Stiele behandeln.

Das Übertragungsverfahren wird, beginnend am linken Auflager des Durchlaufträgers, nach rechts über den Durchlaufträger fortschreitend durchgeführt. Beim letzten Feld wird wie beim Einfeldträger das erhaltene Gleichungssystem gelöst. Mit dem damit bekannten Anfangsvektor des letzten Feldes werden die Schnittgrößen innerhalb des letzten Feldes bestimmt. Den Anfangsvektor des vorletzten Feldes erhält man mit Gl.(15c), da nunmehr die Verschiebungsgrößen w , φ bekannt sind. Auf diese Weise werden, beim letzten Feld beginnend, nach links fortschreitend, die Schnittgrößen in den einzelnen Feldern ermittelt.

Das Verfahren ist auch bei einer großen Anzahl von Feldern numerisch unempfindlich.

8 Berechnungsbeispiel Durchlaufträger



Der dargestellte Zweifeldträger sei nach dem Übertragungsmatrizenverfahren zu untersuchen. Das linke Feld ist mit dem in Abschnitt 6 untersuchten Einfeldträger identisch. Der Anfangsvektor und das Übertragungsverfahren für die Abschnitte 1 und 2 können daher von dort übernommen werden. Am Ende des Stababschnitts 2 erhält man demnach:

$$\begin{bmatrix} w_{C2} \\ \varphi_{C2} \\ M_{C2} \\ Q_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -72 & -288 \\ -12 & -72 \\ 1 & 12 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_a \\ Q_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 159,9 \\ 120 \\ -60 \\ -15 \end{bmatrix}$$

Die Koppelfedermatrix \underline{K}_K erhält man nach Gl. (16a) mit:

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -72 & -288 \\ -12 & -72 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} z_{31} & z_{32} \\ z_{41} & z_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/24 & 1/6 \\ 1/144 & -1/24 \end{bmatrix}$$

nach Gl. (16a) zu

$$\underline{K}_K = \begin{bmatrix} z_{31} & z_{32} \\ z_{41} & z_{42} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/24 & -1/3 \\ 1/144 & -1/24 \end{bmatrix}$$

Der Lastterm ergibt sich analog mit

$$\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 159,9 \\ 120 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} l_3 \\ l_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60 \\ -15 \end{bmatrix}$$

nach Gl. (16b) zu

$$\underline{L}_K = \begin{bmatrix} l_3 \\ l_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -26,66 \\ -11,11 \end{bmatrix}$$

Der Anfangsvektor des Feldes 2 lautet:

$$\begin{bmatrix} w_{C0} \\ \varphi_{C0} \\ M_{C0} \\ Q_{C0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ Q_1 \end{bmatrix}$$

Dabei entsprechen Q_1 und φ_1 der Auflagerkraft dem Drehwinkel am Auflager C.

Der Anfangsvektor wird zunächst über die gekoppelte Feder für das Feld 1 übertragen. Weiterhin werden die Lastterme berücksichtigt.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} w_{C3} \\ \varphi_{C3} \\ Q_{C3} \\ M_{C3} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/24 & -1/3 & 1 & 0 \\ 1/144 & -1/24 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ Q_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -26,66 \\ -11,11 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1/3 & 0 \\ -1/24 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ Q_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -26,66 \\ -11,11 \end{bmatrix} \quad (B1)
 \end{aligned}$$

Es folgt die Übertragung des Zustandsvektors über den Abschnitt 3.

Mit

$$\underline{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -\frac{6^2}{2} & -\frac{6^3}{6} \\ 0 & 1 & -6 & -\frac{6^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{L}_3 = \begin{bmatrix} \frac{2 \cdot 6^4}{24} \\ \frac{2 \cdot 6^3}{6} \\ -\frac{2 \cdot 6^2}{2} \\ -2 \cdot 6 \end{bmatrix}$$

erhält man

oder
$$\underline{Z}_{d3} = \underline{A}_3 \cdot \underline{Z}_C + \underline{L}_3$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} w_{c3} \\ \varphi_{c3} \\ Q_{c3} \\ M_{c3} \end{bmatrix} &= \underline{A}_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1/3 & 0 \\ -1/24 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ Q_1 \end{bmatrix} + \underline{A}_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -26,66 \\ -11,11 \end{bmatrix} + \underline{L}_3 \\
 &= \begin{bmatrix} 13,499 & -36 \\ 3,75 & -18 \\ -0,583 & 6 \\ -0,042 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ Q_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 987,88 \\ 431,95 \\ -129,32 \\ -23,11 \end{bmatrix} \quad (B2)
 \end{aligned}$$

Die Übertragung am Punkt d entfällt, d.h. es gilt: $\underline{Z}_{d4} = \underline{Z}_{d3}$

Für die Übertragung über den Abschnitt 4 erhält man mit

$$\underline{A}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -\frac{4^2}{2} & -\frac{4^3}{6} \\ 0 & 1 & -4 & -\frac{4^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{L}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

oder
$$\underline{Z}_{e4} = \underline{A}_4 \cdot \underline{Z}_{d4} + \underline{L}_4$$

Man erhält

$$\underline{Z}_{e4} = \begin{bmatrix} w_{e4} \\ \varphi_{e4} \\ M_{e4} \\ Q_{e4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33,611 & -166,667 \\ 6,418 & -50 \\ -0,751 & 10 \\ -0,042 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ Q_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3997 \\ 1134 \\ -221,76 \\ -23,11 \end{bmatrix}$$

Mit $w_{e4} = M_{e4} = 0$ stellt diese Beziehung ein Gleichungssystem mit 4 Gleichungen für die 4 Unbekannten φ_1 , Q_1 , φ_{e4} , Q_{e4} , dar. Dessen Auflösung liefert:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_{c3} = -14,2 \\ Q_1 &= Q_{c3} = 21,1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{e4} &= 389,2 \\ Q_{e4} &= -1,41 \end{aligned}$$

Damit lassen sich die Schnittgrößen und Verformungen im Feld 2 ermitteln.

Den Zustandsvektor zu Beginn des Feldes 2 erhält man aus Gl. (B1), den Zustandsvektor am Punkt d aus Gl. (B2).

$$\begin{bmatrix} w_{c3} \\ \varphi_{c3} \\ M_{c3} \\ Q_{c3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -14,2 \\ -21,93 \\ 10,58 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} w_{d3} \\ \varphi_{d3} \\ M_{d3} \\ Q_{d3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{d4} \\ \varphi_{d4} \\ M_{d4} \\ Q_{d4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36,59 \\ -1,1 \\ 5,56 \\ -1,41 \end{bmatrix}$$

Für das Feld 1 ermittelt man den Anfangsvektor mit Gl. (15c) und mit $w_{c2} = w_{c3} = 0$, $\varphi_{c2} = \varphi_{c3} = -14,2$ zu:

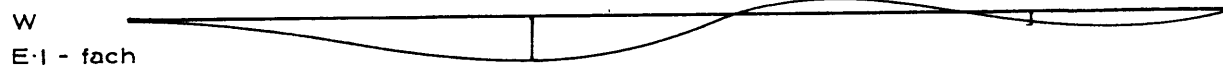
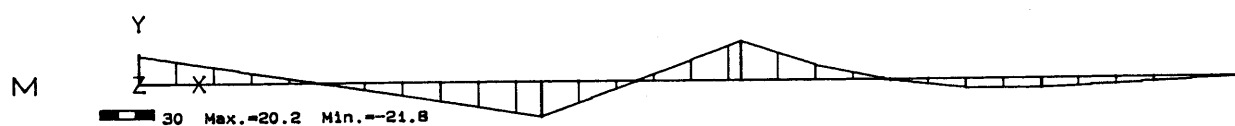
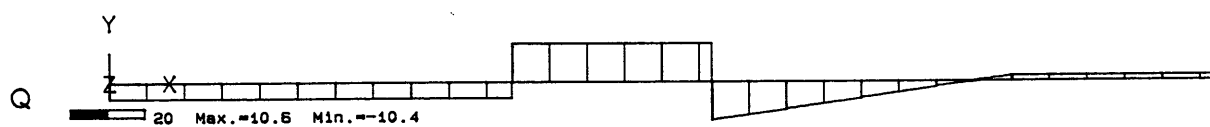
$$\begin{bmatrix} M_a \\ Q_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/24 & 1/6 \\ 1/144 & -1/24 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -14,2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 159,9 \\ 120 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -15,71 \\ 4,48 \end{bmatrix}$$

Die Zustandsvektoren im Feld 1 erhält man nach Übertragung über Abschnitt 1 und Punkt b zu:

$$\begin{bmatrix} w_{a1} \\ \varphi_{a1} \\ M_{a1} \\ Q_{a1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -15,71 \\ 4,48 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} w_{b1} \\ \varphi_{b1} \\ M_{b1} \\ Q_{b1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120,26 \\ -17,76 \\ 20,14 \\ 4,48 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} w_{b2} \\ \varphi_{b2} \\ M_{b2} \\ Q_{b2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120,26 \\ -17,76 \\ 20,14 \\ 4,48 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} w_{c2} \\ \varphi_{c2} \\ M_{c2} \\ Q_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \approx 0 \\ -14,16 \\ -21,94 \\ -10,52 \end{bmatrix}$$

Damit sind die gesuchten Durchbiegungen, Drehwinkel, Momente und Querkräfte bekannt.



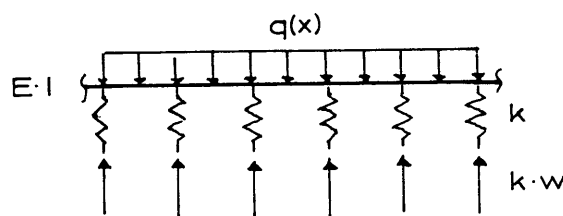
9 Übertragungsmatrizenbibliothek

Übertragungsmatrizen lassen sich für alle topologisch eindimensionalen Strukturen angeben. Dazu ist der Zustandsvektor zu definieren und die Übertragungsmatrix durch Lösen der entsprechenden Differentialgleichung zu ermitteln. Einige Beispiele sind im folgenden angegeben.

Beim elastisch gebetteten Balken tritt als Streckenlast eine der Durchbiegung proportionale Belastung infolge der Bettung auf. Es gilt also

$$q(x) = q(x) + k \cdot w$$

mit k = Bettungsziffer $[\text{kN/m}^3]$.

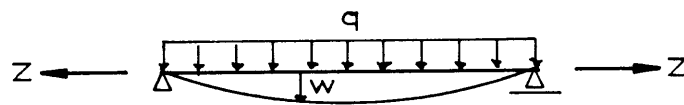


Führt man diesen Ansatz in die Differentialgleichung des Biegebalkens ein, so erhält man aus deren Lösung die Übertragungsmatrix zu:

$\cos \lambda x \cosh \lambda x$	$\frac{1}{2\lambda} (\cos \lambda x \sinh \lambda x + \sin \lambda x \cosh \lambda x)$	$-\frac{1}{2\lambda^3 EJ} \sin \lambda x \sinh \lambda x$	$-\frac{1}{4\lambda^3 EJ} (\sin \lambda x \cosh \lambda x - \cos \lambda x \sinh \lambda x)$
$-\lambda (\sin \lambda x \cosh \lambda x - \cos \lambda x \sinh \lambda x)$	$\cos \lambda x \cosh \lambda x$	$-\frac{1}{2\lambda EJ} (\cos \lambda x \sinh \lambda x + \sin \lambda x \cosh \lambda x)$	$-\frac{1}{2\lambda^3 EJ} \sin \lambda x \sinh \lambda x$
$2\lambda^2 EJ \sin \lambda x \sinh \lambda x$	$\lambda EJ (\sin \lambda x \cosh \lambda x - \cos \lambda x \sinh \lambda x)$	$\cos \lambda x \cosh \lambda x$	$\frac{1}{2\lambda} (\cos \lambda x \sinh \lambda x + \sin \lambda x \cosh \lambda x)$
$2\lambda^3 EJ (\cos \lambda x \sinh \lambda x + \sin \lambda x \cosh \lambda x)$	$2\lambda^2 EJ \sin \lambda x \sinh \lambda x$	$-\lambda (\sin \lambda x \cosh \lambda x - \cos \lambda x \sinh \lambda x)$	$\cos \lambda x \cosh \lambda x$

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}$$

Zur Untersuchung von Stützen mit großer Normalkraft läßt sich die Übertragungsmatrix des Biegebalkens nach Theorie II-ter Ordnung verwenden. Dazu bildet man beim Aufstellen der Differentialgleichung des Biegebalkens das Gleichgewicht am verformten System. Die Verformungen selbst werden mit den Voraussetzungen der Theorie I-ter Ordnung ermittelt.



Die Lösung der Differentialgleichung liefert für Druckbeanspruchung ($Z < 0$) die Übertragungsmatrix zu:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha} \sin \alpha x & \frac{-1}{\alpha^2 EJ} (1 - \cos \alpha x) & \frac{-1}{\alpha^3 EJ} (\alpha x - \sin \alpha x) \\ 0 & \cos \alpha x & \frac{-1}{\alpha EJ} \sin \alpha x & \frac{-1}{\alpha^2 EJ} (1 - \cos \alpha x) \\ 0 & -\frac{Z}{\alpha} \sin \alpha x & \cos \alpha x & \frac{1}{\alpha} \sin \alpha x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{-Z}{EJ}}$$

und den Lastvektor zu:

$$\begin{bmatrix} -\frac{q}{\alpha^4 EJ} \left(1 - \cos \alpha x - \frac{\alpha^2}{2} x^2 \right) \\ \frac{q}{\alpha^3 EJ} (\alpha x - \sin \alpha x) \\ -\frac{q}{\alpha^2} (1 - \cos \alpha x) \\ -q \cdot x \end{bmatrix}$$

Zum Aufstellen der Übertragungsmatrix muß die Normalkraft vorab bekannt sein. Bei Stützen aus Stahlbeton muß die Berechnung iterativ erfolgen, wobei die Stütze in verhältnismäßig kleine Abschnitte eingeteilt wird, und die Biegesteifigkeit schrittweise den Beanspruchungen angepaßt wird.

Literaturverzeichnis

- [1] Falk, S.: Die Berechnung des beliebig gestützten Durchlaufträgers nach dem Reduktionsverfahren.
Ing.-Arch. 24 (1956) S. 216 ff.

- [2] Kersten, R.: Das Reduktionsverfahren der Baustatik.
Springer Berlin 1962.

- [3] Pestel, E.C., Leckie, F.A.: Matrix Methods in Elastomechanics. McGraw Hill,
New York 1963

- [4] Petersen, Chr.: Die Übertragungsmatrix des kreisförmig gekrümmten Trägers auf elastischer Unterlage.
Bautechnik 44 (1967) S. 289.

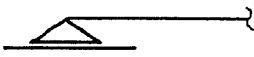
- [5] Petersen, Chr.: Das Verfahren der Übertragungsmatrizen für den kontinuierlich elastisch gebetteten Träger
Bautechnik 42 (1965) S. 87.

- [6] Hirschfeld, K.: Baustatik, Springer-Verlag,
Berlin 1969.

Formeln zum Übertragungsmatrizenverfahren

Anfangsvektoren

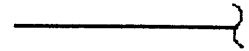
$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_a \\ Q_a \end{bmatrix}$$



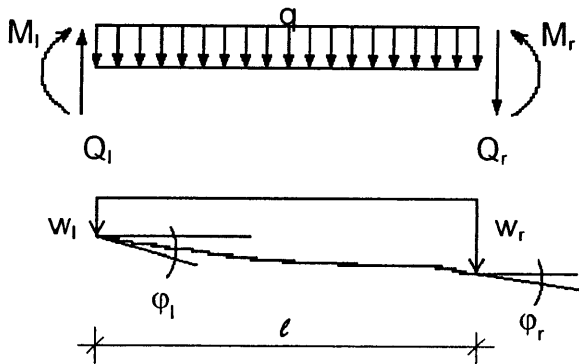
$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_a \\ Q_a \end{bmatrix}$$



$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_a \\ \varphi_a \end{bmatrix}$$



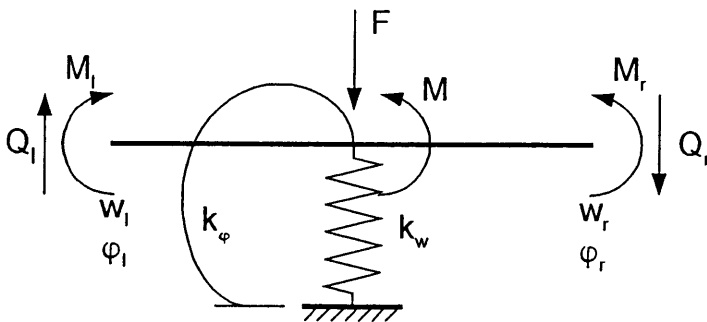
Abschnittsmatrix



$$\begin{bmatrix} w_r \\ \varphi_r \\ M_r \\ Q_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \ell & \frac{-\ell^2}{2 \cdot E \cdot I} & \frac{-\ell^3}{6 \cdot E \cdot I} \\ 0 & 1 & \frac{-\ell}{E \cdot I} & \frac{-\ell^2}{2 \cdot E \cdot I} \\ 0 & 0 & 1 & \ell \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_l \\ \varphi_l \\ M_l \\ Q_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{q \cdot \ell^4}{24 \cdot E \cdot I} \\ \frac{q \cdot \ell^3}{6 \cdot E \cdot I} \\ -\frac{q \cdot \ell^2}{2} \\ -q \cdot \ell \end{bmatrix}$$

EI = Biegesteifigkeit

Punktmatrix



$$\begin{bmatrix} w_r \\ \varphi_r \\ M_r \\ Q_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -k_\varphi & 1 & 0 \\ k_w & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_l \\ \varphi_l \\ M_l \\ Q_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -M \\ -F \end{bmatrix}$$