Übertragungsmatrizenverfahren

Matrizen und Operationen $ORIGIN := 1$

ABSCHNITT

$$A(l, EI) := \begin{pmatrix} 1 & l & -\frac{l^2}{2 \cdot EI} & -\frac{l^3}{6 \cdot EI} \\ 0 & 1 & -\frac{l}{EI} & -\frac{l^2}{2 \cdot EI} \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_q(q_l, q_r, l, EI) := \begin{bmatrix} \frac{(4 \cdot q_l + q_r) \cdot l^4}{120 \cdot EI} \\ \frac{(3 \cdot q_l + q_r) \cdot l^3}{24 \cdot EI} \\ \frac{-(2 \cdot q_l + q_r) \cdot l^2}{6} \\ \frac{-(q_l + q_r) \cdot l}{2} \end{bmatrix} \qquad L_{null} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

PUNKT

$$P(k_w, k_\phi) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -k_\phi & 1 & 0 \\ k_w & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_F(F, M) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -M \\ -F \end{pmatrix}$$

ÜBERTRAGUNG

$$Z_r(\text{ÜB\_MATRIX}, Z_l) := \text{ÜB\_MATRIX} \cdot Z_l$$

$$L_r(\text{ÜB\_MATRIX}, \text{LA\_VEKTOR}, L_l) := \text{ÜB\_MATRIX} \cdot L_l + \text{LA\_VEKTOR}$$

ANFANGSVEKTOREN

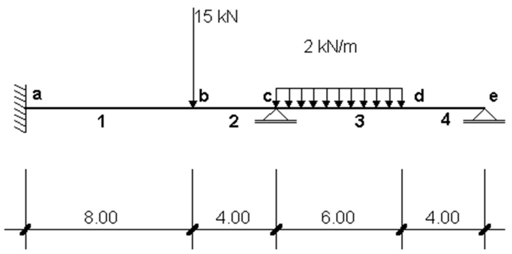
$$Z_{frei} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Z_{gelenk} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Z_{einspann} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

LÖSUNG

$$\text{UNBEK\_LI}(Z_{ende}, Z, L) := \text{submatrix}\left[\text{erweitern}(Z, -Z_{ende})^{-1} \cdot (-L), 1, 2, 1, 1\right]$$

$$\text{UNBEK\_RE}(Z_{ende}, Z, L) := \text{submatrix}\left[\text{erweitern}(Z, -Z_{ende})^{-1} \cdot (-L), 3, 4, 1, 1\right]$$

Beispiel



$l_1 := 8$ $l_2 := 4$ $l_3 := 6$ $l_4 := 4$ $EI := 1$

$F_b := 15$ $q_3 := 2$

Übertragungsmatrizen:

Punkt a: Einspannung am Trägeranfang

Abschnitt 1: $A_1 := A(l_1, EI) = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -32 & -85.333 \\ 0 & 1 & -8 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $L_1 := L_q(0, 0, l_1, EI) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Punkt b $A_b := P(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $L_b := P_F(F_b, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix}$

Abschnitt 2: $A_2 := A(l_2, EI) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 & -10.667 \\ 0 & 1 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $L_2 := L_q(0, 0, l_2, EI) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Punkt c: Gelenkiges Lager

Abschnitt 3: $A_3 := A(l_3, EI) = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -18 & -36 \\ 0 & 1 & -6 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $L_3 := L_q(q_3, q_3, l_3, EI) = \begin{pmatrix} 108 \\ 72 \\ -36 \\ -12 \end{pmatrix}$

Punkt d $A_d := P(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $L_d := P_F(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Abschnitt 4: $A_4 := A(l_4, EI) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 & -10.667 \\ 0 & 1 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $L_4 := L_q(0, 0, l_4, EI) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Punkt e: Gelenkiges Lager am Trägerende

Erste Übertragung mit Unbekannten im Zustandsvektor - beginnend mit dem ersten DLT-Feld

Anfangsvektor mit 2 Unbekannten (M_a, Q_a)

$$Z_a := Z_{einspann} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Übertragung Abschnitt 1

$$Z_{b\_li} := A_1 \cdot Z_a = \begin{pmatrix} -32 & -85.333 \\ -8 & -32 \\ 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_{b\_li} := L_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Übertragung Punkt b

$$Z_{b\_re} := A_b \cdot Z_{b\_li} = \begin{pmatrix} -32 & -85.333 \\ -8 & -32 \\ 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_{b\_re} := A_b \cdot L_{b\_li} + L_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix}$$

Übertragung Abschnitt 2

$$Z_{c\_li} := A_2 \cdot Z_{b\_re} = \begin{pmatrix} -72 & -288 \\ -12 & -72 \\ 1 & 12 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_{c\_li} := A_2 \cdot L_{b\_re} + L_2 = \begin{pmatrix} 160 \\ 120 \\ -60 \\ -15 \end{pmatrix}$$

Punkt c: - Ersatzfeder-Matrix für linken Trägerteil

$$Z_{c\_oben} := \mathrm{submatrix}\left(Z_{c\_li}, 1, 2, 1, 2\right) = \begin{pmatrix} -72 & -288 \\ -12 & -72 \end{pmatrix} \qquad L_{c\_oben} := \mathrm{submatrix}\left(L_{c\_li}, 1, 2, 1, 1\right) = \begin{pmatrix} 160 \\ 120 \end{pmatrix}$$

$$Z_{c\_unten} := \mathrm{submatrix}\left(Z_{c\_li}, 3, 4, 1, 2\right) = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_{c\_unten} := \mathrm{submatrix}\left(L_{c\_li}, 3, 4, 1, 1\right) = \begin{pmatrix} -60 \\ -15 \end{pmatrix}$$

$$K_{c\_s} := Z_{c\_unten} \cdot Z_{c\_oben}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.042 & -0.333 \\ 6.944 \times 10^{-3} & -0.042 \end{pmatrix} \qquad L_{c\_s} := L_{c\_unten} - K_{c\_s} \cdot L_{c\_oben} = \begin{pmatrix} -26.667 \\ -11.111 \end{pmatrix}$$

$$A_c := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ K_{c\_s_{1,1}} & K_{c\_s_{1,2}} & 1 & 0 \\ K_{c\_s_{2,1}} & K_{c\_s_{2,2}} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.042 & -0.333 & 1 & 0 \\ 6.944 \times 10^{-3} & -0.042 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_c := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_{c\_s_1} \\ L_{c\_s_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -26.667 \\ -11.111 \end{pmatrix}$$

Die Federungsmatrix Ac und der Lastvektor Lc geben die Steifigkeit des linken Trägerteils, d.h. hier des Feldes a-c, wieder.

Punkt c: - Neues Auflager mit neuen Unbekannten (phi_c, Q_c) für das nächste DLT-Feld

$$Z_c := Z_{gelenk} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Unbekannten sind ab jetzt für das Feld c-e phi_c und Q_c.

Punkt c - Übertragung des Anfangsvektors über die Feder, die das linke DLT-Feld ersetzt:

$$Z_{c\_re} := A_c \cdot Z_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -0.333 & 0 \\ -0.042 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_{c\_re} := L_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -26.667 \\ -11.111 \end{pmatrix}$$

Übertragung Abschnitt 3

$$Z_{d\_li} := A_3 \cdot Z_{c\_re} = \begin{pmatrix} 13.5 & -36 \\ 3.75 & -18 \\ -0.583 & 6 \\ -0.042 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_{d\_li} := A_3 \cdot L_{c\_re} + L_3 = \begin{pmatrix} 988 \\ 432 \\ -129.333 \\ -23.111 \end{pmatrix}$$

Übertragung Punkt d

$$Z_{d\_re} := A_d \cdot Z_{d\_li} = \begin{pmatrix} 13.5 & -36 \\ 3.75 & -18 \\ -0.583 & 6 \\ -0.042 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_{d\_re} := A_d \cdot L_{d\_li} + L_d = \begin{pmatrix} 988 \\ 432 \\ -129.333 \\ -23.111 \end{pmatrix}$$

Übertragung Abschnitt 4

$$Z_{e\_li} := A_4 \cdot Z_{d\_re} = \begin{pmatrix} 33.611 & -166.667 \\ 6.417 & -50 \\ -0.75 & 10 \\ -0.042 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_{e\_li} := A_4 \cdot L_{d\_re} + L_4 = \begin{pmatrix} 3.997 \times 10^3 \\ 1.134 \times 10^3 \\ -221.778 \\ -23.111 \end{pmatrix}$$

Punkt e: gelenkiges Lager am Trägerende

$$Z_e := Z_{gelenk} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Am rechten Rand des DLTs Gleichungssystem aufstellen und lösen

$$XM := \mathrm{erweitern}\left(Z_e, -Z_{e\_li}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -33.611 & 166.667 \\ 1 & 0 & -6.417 & 50 \\ 0 & 0 & 0.75 & -10 \\ 0 & 1 & 0.042 & -1 \end{pmatrix} \qquad X_{vek} := XM^{-1} \cdot L_{e\_li} = \begin{pmatrix} -12.674 \\ -1.408 \\ -14.253 \\ 21.109 \end{pmatrix} \qquad X_c := \begin{pmatrix} X_{vek_3} \\ X_{vek_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14.253 \\ 21.109 \end{pmatrix}$$

Zweite Übertragung mit bekannten Größen im Zustandsvektor - beginnend mit dem letzten DLT-Feld

DLT-Feld c-e

Punkt c: - Auflager mit nunmehr bestimmten Werten für phi_c, Q_c

$$Z_{e\_c} := Z_{gelenk} \cdot X_c = \begin{pmatrix} 0 \\ -14.253 \\ 0 \\ 21.109 \end{pmatrix} \qquad u_{c\_re} := \begin{pmatrix} Z_{e\_c_1} \\ Z_{e\_c_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -14.253 \end{pmatrix}$$

Punkt c - Übertragung des Anfangsvektors über die Feder, die das linke DLT-Feld ersetzt:

$$Z_{e\_c\_re} := A_c \cdot Z_{e\_c} + L_c = \begin{pmatrix} 0 \\ -14.253 \\ -21.916 \\ 10.592 \end{pmatrix}$$

Dies sind die Zustandsgrößen am Anfang des Feldes c-e

Übertragung Abschnitt 3 $$Z_{e\_d\_li} := A_3 \cdot Z_{e\_c\_re} + L_3 = \begin{pmatrix} 35.672 \\ -1.406 \\ 5.634 \\ -1.408 \end{pmatrix}$$

Übertragung Punkt d $$Z_{e\_d\_re} := A_d \cdot Z_{e\_d\_li} + L_d = \begin{pmatrix} 35.672 \\ -1.406 \\ 5.634 \\ -1.408 \end{pmatrix}$$

Übertragung Abschnitt 4 $$Z_{e\_e\_li} := A_4 \cdot Z_{e\_d\_re} + L_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -12.674 \\ -0 \\ -1.408 \end{pmatrix}$$

DLT-Feld a-c

$$X_a := Z_{c\_oben}^{-1} \cdot \left(u_{c\_re} - L_{c\_oben}\right) = \begin{pmatrix} -15.709 \\ 4.483 \end{pmatrix}$$

$$Z_{e\_a} := Z_{einspann} \cdot X_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -15.709 \\ 4.483 \end{pmatrix}$$

Dies sind die Zustandsgrößen am Anfang des Feldes a-c

Übertragung Abschnitt 1 $$Z_{e\_b\_li} := A_1 \cdot Z_{e\_a} + L_1 = \begin{pmatrix} 120.153 \\ -17.778 \\ 20.153 \\ 4.483 \end{pmatrix}$$

Übertragung Punkt b $$Z_{e\_b\_re} := A_b \cdot Z_{e\_b\_li} + L_{b\_re} = \begin{pmatrix} 120.153 \\ -17.778 \\ 20.153 \\ -10.517 \end{pmatrix}$$

Übertragung Abschnitt 2 $$Z_{e\_c\_li} := A_2 \cdot Z_{e\_b\_re} + L_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -14.253 \\ -21.916 \\ -10.517 \end{pmatrix}$$