FYS3110 - Oblig 2 - Karl Henrik Fredly

3. september 2020

Problem 2.6(X)

En hermitisk operator er en operator som er lik sin egen hermitisk konjugerte. Dvs.

$$\hat{O} = \hat{O}^\dagger \iff \langle\psi|\,\hat{O}\,|\phi\rangle = \langle\phi|\,\hat{O}\,|\psi\rangle^* \tag{1}$$

Hermitiske operatorer passer godt til å representere fysiske observable fordi de kun har reelle egenverdier.

Problem 2.7(X)

$$\langle\psi|\,\hat{O}\,|\phi\rangle = \langle\psi|\,\hat{A}\hat{B}\,|\phi\rangle = \left\langle \hat{A}^\dagger\psi \middle|\, \hat{B}\,|\phi\rangle = \left\langle \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger\psi \middle| \phi \right\rangle = \left\langle \hat{O}^\dagger\psi \middle| \phi \right\rangle \Rightarrow \hat{O} = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger \tag{2}$$

$\hat{B}\,|\phi\rangle$ er en vektor, så man kan flytte $\hat{A}$ alene inn i ket-en først.

Hvis $\hat{O}$, $\hat{A}$, og $\hat{B}$ er hermitiske har vi

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger = \hat{O} - \hat{O}^\dagger = \hat{O} - \hat{O} = 0 \tag{3}$$

Problem 2.8(X)

Vi uttrykker $\hat{K}$ ved operatorene $\hat{x}$ og $\hat{p}$ siden vi vet at disse er hermitiske

$$\hat{K} = x\frac{d}{dx} = \frac{1}{-i\hbar}x(-i\hbar\frac{d}{dx}) = \frac{1}{-i\hbar}\hat{x}\hat{p} \tag{4}$$

Da finner vi $\hat{K}^\dagger$ ved regler for hermitisk konjugerte

$$\hat{K}^\dagger = (\frac{1}{-i\hbar}\hat{x}\hat{p})^\dagger = (\frac{1}{-i\hbar})^*\hat{p}^\dagger\hat{x}^\dagger = (\frac{1}{i\hbar})\hat{p}\hat{x} = \frac{1}{i\hbar}(-i\hbar\frac{d}{dx})x = -\frac{d}{dx}x \tag{5}$$

Vi kan også gjøre det på en mer tungvindt måte:

$$\begin{aligned}\langle\psi|\,\hat{K}^\dagger\,|\phi\rangle &= \langle\phi|\,\hat{K}\,|\psi\rangle^* \\ &= (\int_{-\infty}^{\infty}\phi^*(x)\hat{K}\psi(x)dx)^* \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)x\frac{d}{dx}\psi^*(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}u\frac{dv}{dx}dx\end{aligned} \tag{6}$$

der $u = \phi(x)x$ og $\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}\psi^*(x)$

$$\begin{aligned}\langle\psi|\,\hat{K}^\dagger\,|\phi\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}u\frac{dv}{dx}dx \\ &= [uv]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}v\frac{du}{dx}dx \\ &= [x\phi(x)\psi^*(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\frac{d}{dx}x\phi(x)dx \\ &= 0 + \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)(-\frac{d}{dx}x)\phi(x)dx \\ &= \langle\psi|\,\hat{K}^\dagger\,|\phi\rangle \Rightarrow \hat{K}^\dagger = -\frac{d}{dx}x\end{aligned} \tag{7}$$

Problem 2.9(H)

a)

$$\langle\psi| = c^*(\sqrt{7}\,\langle 0| + i\,\langle 1|)^* = c^*(\sqrt{7}\,\langle 0| - i\,\langle 1|) \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\langle\psi|\psi\rangle = cc^*(\sqrt{7}\sqrt{7}\,\langle 0|0\rangle + i(-i)\,\langle 0|0\rangle) = cc^*(\sqrt{7}\sqrt{7}+1) = 8cc^* = 1 \\ \Rightarrow cc^* = \frac{1}{8} \Rightarrow |c| = \frac{1}{\sqrt{8}}\end{aligned} \tag{9}$$

b)

$$|\psi\rangle = c(\sqrt{7}\,|0\rangle + i\,|1\rangle) = c(\sqrt{7}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) = c(\begin{pmatrix}\sqrt{7}\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}) = c\begin{pmatrix}\sqrt{7}\\i\end{pmatrix} \tag{10}$$

Kolonnene til $\hat{A}$ svarer til hvor den avbilder standardbasisvektorene $|0\rangle$ og $|1\rangle$.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

c)

$$\begin{aligned} \langle\psi|\,\hat{A}\,|\psi\rangle &= cc^* \begin{pmatrix} \sqrt{7} & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{7} \\ i \end{pmatrix} \\ &= cc^* \begin{pmatrix} \sqrt{7} & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^2 \\ -i\sqrt{7} \end{pmatrix} \\ &= cc^*(-\sqrt{7} - \sqrt{7}) = \frac{-2\sqrt{7}}{8} = \frac{-\sqrt{7}}{4} \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \langle\psi|\,\hat{A}\,|\psi\rangle &= c(\langle\psi|\,\hat{A}(\sqrt{7}\,|0\rangle + i\,|1\rangle)) \\ &= c(\langle\psi|\,(-i\sqrt{7}\,|1\rangle + i^2\,|0\rangle)) \\ &= cc^*((\sqrt{7}\,\langle 0| - i\,\langle 1|)(-i\sqrt{7}\,|1\rangle + i^2\,|0\rangle)) \\ &= cc^*(i^2\sqrt{7} + i^2\sqrt{7}) = cc^*(-\sqrt{7} - \sqrt{7}) = \frac{-\sqrt{7}}{4} \end{aligned} \tag{13}$$

Problem 2.10(H)

a)

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, U^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, U^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} \tag{14}$$

b)

For at U skal hære hermitisk må $U = U^\dagger$, altså må $a = a^*$, $b = c^*$, $c = b^*$ og $d = d^*$.

c)

Finner egenverdier ved å trekke fra λI og sette determinanten lik 0

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\
(a-\lambda)(d-\lambda) - bc &= 0 \\
\lambda^2 - a\lambda - d\lambda - ad - bc &= 0 \\
\lambda^2 + \lambda(-a-d) + (ad-bc) &= 0 \\
\lambda^2 + \lambda x + y &= 0
\end{aligned} \tag{15}$$

finner λ med abc (med a = 1, b = x og y = c)

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{-x \pm \sqrt{x^2-4y}}{2} \\
&= \frac{-(-a-d) \pm \sqrt{(-a-d)^2 - 4(ad-bc)}}{2} \\
&= \frac{a+d \pm \sqrt{a^2+d^2+2ad-4ad+4bc}}{2} \\
&= \frac{a+d \pm \sqrt{a^2+d^2-2ad+4bc}}{2} \\
&= \frac{a+d \pm \sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2}
\end{aligned} \tag{16}$$

Når U er hermitisk er a og d reelle siden a = a* og d = d*. Derfor er (a - d)^2 reellt og ikke-negativt. Når U er hermitisk er $bc = bb^* = |b|^2$ som er reellt og ikke-negativt. Da blir uttrykket under rottegnet reellt og ikke-negativt. Derfor er egenverdiene til U reelle når U er hermitisk.

d)

Når U er unitær og hermitisk er $UU^\dagger = UU = I$

$$\begin{aligned}
UU &= I \\
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{17}$$

Som gir disse ligningene

$$\begin{aligned}
a^2 + bc &= 1 \\
ab + b^2 &= 0 \\
ac + dc &= 0 \\
bc + d^2 &= 0
\end{aligned} \tag{18}$$

Vi ser at (ligning 1 og 4) $a^2 = d^2$. Og at(ligning 2) $b(a+b) = 0$ som gir $a = -b$ eller $b = 0$. Ligning 3 gir $c(a+d) = 0$ som gir $a = -d$ og/eller $c = 0$. Vi vet også at a og d er reelle, og at $b = c^*$, som gir (ligning 1) at $|a| \leq 1$.

Det er uendelig mange verdier for a, b, c og d som oppfyller disse kravene.

e)

Når U er unitær og hermitisk er $UU^\dagger = UU = I$. La v være en egenvektor til U med tilhørende egenverdi λ.

$$UU^\dagger v = Iv = v = UUv = \lambda^2 v \tag{19}$$

Vi ser at $\lambda^2 = 1$, dvs. $\lambda = \pm 1$.

Problem 2.11(H)

En operator er hermitisk hvis $\langle u|\hat{O}|v\rangle = \langle v|\hat{O}|u\rangle^*$ for vilkårlige vektorer u og v. Vi kan skrive en vilkårlig vektor som $u = a|\psi\rangle + b|\phi\rangle + \sum_{n=1}^{N} c_n |\gamma_n\rangle$, $a, b, c_n \in \Re$, siden $|\psi\rangle$, $|\phi\rangle$ og alle $|\gamma_n\rangle$ er lineært uavhengige og danner en komplett basis.

Tilsvarende skriver vi en vilkårlig vektor $v = x|\psi\rangle + y|\phi\rangle + \sum_{n=1}^{N} z_n |\gamma_n\rangle$, $x, y, z_n \in \Re$.

Regner nå ut $\langle u|\hat{H}|v\rangle$

$$\begin{aligned}
\langle u|\hat{H}|v\rangle &= \langle u|\hat{H}(x|\psi\rangle + y|\phi\rangle + \sum_{n=1}^{N} z_n|\gamma_n\rangle) \\
&= \langle u|(xg|\phi\rangle + yg^*|\psi\rangle) \\
&= (a\langle\psi| + b\langle\phi| + \sum_{n=1}^{N} c_n\langle\gamma_n|)(xg|\phi\rangle + yg^*|\psi\rangle) \\
&= (a\langle\psi| + b\langle\phi|)(xg|\phi\rangle + yg^*|\psi\rangle) \\
&= ayg^*\langle\psi|\psi\rangle + bxg\langle\phi|\phi\rangle + axg\langle\psi|\phi\rangle + byg^*\langle\phi|\psi\rangle \\
&= ayg^* + bxg + axg\langle\psi|\phi\rangle + byg^*\langle\phi|\psi\rangle
\end{aligned} \tag{20}$$

og nå $\langle v|\hat{H}|u\rangle^*$

$$\begin{aligned}
\langle v|\hat{H}|u\rangle^* &= (\langle v|\hat{H}(a|\psi\rangle + b|\phi\rangle + \sum_{n=1}^{N} c_n|\gamma_n\rangle))^* \\
&= (\langle v|(ag|\phi\rangle + bg^*|\psi\rangle))^* \\
&= ((x\langle\psi| + y\langle\phi| + \sum_{n=1}^{N} z_n\langle\gamma_n|)(ag|\phi\rangle + bg^*|\psi\rangle))^* \\
&= ((x\langle\psi| + y\langle\phi|)(ag|\phi\rangle + bg^*|\psi\rangle))^* \\
&= (xbg^*\langle\psi|\psi\rangle + yag\langle\phi|\phi\rangle + xag\langle\psi|\phi\rangle + ybg^*\langle\phi|\psi\rangle)^* \\
&= (xbg^* + yag + xag\langle\psi|\phi\rangle + ybg^*\langle\phi|\psi\rangle)^* \\
&= xbg + yag^* + xag^*\langle\phi|\psi\rangle + ybg\langle\psi|\phi\rangle
\end{aligned} \tag{21}$$

Setter nå $\langle u|\hat{H}|v\rangle = \langle v|\hat{H}|u\rangle^*$

$$\begin{gathered}
ayg^* + bxg + axg\langle\psi|\phi\rangle + byg^*\langle\phi|\psi\rangle = xbg + yag^* + xag^*\langle\phi|\psi\rangle + ybg\langle\psi|\phi\rangle \\
axg\langle\psi|\phi\rangle + byg^*\langle\phi|\psi\rangle = axg^*\langle\phi|\psi\rangle + byg\langle\psi|\phi\rangle
\end{gathered} \tag{22}$$

$\hat{H}$ er hermitisk hvis likheten holder, som er hvis $\langle\psi|\phi\rangle = 0$ eller hvis $\langle\psi|\phi\rangle = g^*$.