FYS3110 - Oblig 3 - Karl Henrik Fredly

19. oktober 2020

Problem 7.5(H)

Antallet symmetriske og anti-symmetriske spin tilstander for to partikler med spin-s er gitt ved trekanttallene:

$$T_n = \frac{1}{2}n(n+1) \tag{1}$$

For to partikler med spin-s er antall symmetriske tilstander gitt ved T_{2s+1}, og antall anti-symmetriske tilstander gitt ved T_{2s}.

Problem 7.6(H)

Ser over tabellen for Clebsch-Gordan koeffisientene og ser at to spin-1 bosoner har 6 spin tilstander som er symmetriske (5 for totalspinn 2, 1 for totalspinn 0), og 3 spin tilstander som er anti-symmetriske (for totalspinn 1).

Bølgefunksjonene til harmonisk oscillator er gitt ved funksjonene $\psi_n(x)$ som har tilhørende energier $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ for $n = 0, 1, 2, \dots$.

Det laveste energinivået får vi når begge bosonene er i tilstand ψ_0, da får vi en symmetrisk romlig tilstand

$$\psi_0(x_1)\psi_0(x_2) \tag{2}$$

med energi $\hbar\omega$. Siden hele tilstanden skal bli symmetrisk (siden vi har to bosoner) har vi 6 mulige symmetriske spin tilstander, og dermed en degenerasjon på 6.

Det neste energinivået får vi når det ene bosonet er i tilstand ψ_0 og det andre i ψ_1. Da får vi en symmetrisk romlig tilstand

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0(x_1)\psi_1(x_2) + \psi_1(x_1)\psi_0(x_2)) \tag{3}$$

med energi $2\hbar\omega$. Vi får også en antisymmetrisk romlig tilstand

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0(x_1)\psi_1(x_2) - \psi_1(x_1)\psi_0(x_2)) \tag{4}$$

med energi $2\hbar\omega$. Den symmetriske romlige tilstanden har 6 mulige spinn tilstander, og den anti-symmetriske romlige tilstanden har 3 mulige spinn tilstander, så vi får totalt en degenerasjon på 9.

Det neste energinivået får vi når begge bosonene er i tilstand ψ_1, da får vi en symmetrisk romlig tilstand

$$\psi_1(x_1)\psi_1(x_2) \tag{5}$$

med energi $3\hbar\omega$. Vi har 6 mulige symmetriske spin tilstander, og dermed en degenerasjon på 6.

Problem 7.7(H)

Ved tiden t er partikkelen i tilstanden $|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\psi(0)\rangle = \hat{U}|\psi(0)\rangle$. Merk at $\hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{I}$. Hvis vi har en operator $\hat{Q}$ som kommuterer med $\hat{U}$ har vi

$$\begin{aligned}\langle\psi(t)|\hat{Q}|\psi(t)\rangle &= \langle\psi(0)|\hat{U}^\dagger\hat{Q}\hat{U}|\psi(0)\rangle \\ &= \langle\psi(0)|\hat{U}^\dagger\hat{U}\hat{Q}|\psi(0)\rangle = \langle\psi(0)|\hat{Q}|\psi(0)\rangle\end{aligned} \tag{6}$$

Altså er forventningsverdien til en størrelse gitt ved $\hat{Q}$ tidsuavhengig hvis $\hat{Q}$ kommuterer med $\hat{U}$, eller, siden $\hat{U}$ kan skrives som en kombinasjon av $\hat{H}$ potenser, hvis $\hat{Q}$ kommuterer med $\hat{H}$.

Vi kan skrive

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{J}{\hbar}\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2 - \frac{h_1}{\hbar}S_1^z \\ &= \frac{J}{\hbar}(S_1^xS_2^x + S_1^yS_2^y + S_1^zS_2^z) - \frac{h_1}{\hbar}S_1^z\end{aligned} \tag{7}$$

For å finne ut hva som kommuterer med $\hat{H}$ regner vi ut

$$\begin{aligned}\left[S_1^z, \hat{H}\right] &= \left[S_1^z, \frac{J}{\hbar}(S_1^xS_2^x + S_1^yS_2^y + S_1^zS_2^z) - \frac{h_1}{\hbar}S_1^z\right] \\ &= \left[S_1^z, \frac{J}{\hbar}(S_1^xS_2^x + S_1^yS_2^y)\right] \\ &= i\hbar\frac{J}{\hbar}(S_1^yS_2^x - S_1^xS_2^y)\end{aligned} \tag{8}$$

$$
\begin{aligned}
\left[S_2^z, \hat{H}\right] &= \left[S_1^z, \frac{J}{\hbar}(S_1^x S_2^x + S_1^y S_2^y + S_1^z S_2^z) - \frac{h_1}{\hbar} S_1^z\right] \\
&= \left[S_1^z, \frac{J}{\hbar}(S_1^x S_2^x + S_1^y S_2^y)\right] \\
&= i\hbar \frac{J}{\hbar}(S_1^x S_2^y - S_1^y S_2^x)
\end{aligned} \tag{9}
$$

Vi ser at av alle uttrykkene $G_i(t)$ er det kun $G_3(t)$ som er tidsuavhengig siden vi klart ser at det kun er $(S_1^z + S_2^z)$ som kommuterer med $\hat{H}$.

Problem 7.8(X)

a)

Velger basisen $|1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $|2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $|3\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ser da at produktet $|i\rangle \langle j|$ er matrisen med et 1-tall i posisjon ij, og nuller ellers. Setter da bare inn 1-tall på de gitte indeksene i uttrykket for H.

$$
H = -g \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{10}
$$

b)

På samme måte som i a) finner vi

$$
R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{11}
$$

ser at denne matrisen har egenskapen $R|1\rangle = |2\rangle$, $R|2\rangle = |3\rangle$, $R|3\rangle = |1\rangle$, den er derfor en slags translasjons/rotasjonssymmetri der partikkelen blir sendt til "neste" atom. Den er ikke hermitisk, siden den transponerte og komplekskonjugerte klart gir en helt annen matrise. Den er unitær siden $RR^\dagger = I$.

c)

Vi såg i b) at R sender egenkettene til neste egenket i rekka. R^3 sender derfor egenkettene til seg selv, og da må den være identitetsmatrisen, siden matriserepresentasjonen til en lineæravbilding er gitt av hvor den avbilder standardbasisvektorene. Vi får da

$$R^3 |\psi\rangle = \lambda^3 |\psi\rangle = |\psi\rangle \tag{12}$$

Vi får da egenverdiene $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ og $\lambda_3 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$.

Finner tilhørende egenvektorer

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

H har egenverdiene $\lambda_1 = g$ og $\lambda_2 = -2g$.

Finner tilhørende egenvektorer

$$v_{1,1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_{1,2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

d)

Vi skriver $|2\rangle$ som en lineærkombinasjon av egentilstandene til $\hat{H}$:

$$|2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3}(v_{1,1} - 0.5v_{1,2} + 0.5v_2) \tag{15}$$

Partikkelen blir beskrevet av tilstanden

$$\begin{aligned}
e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} |2\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\frac{2}{3}(v_{1,1} - 0.5v_{1,2} + 0.5v_2) \\
&= \frac{2}{3}(e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}v_{1,1} - 0.5e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}v_{1,2} + 0.5e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}v_2) \\
&= \frac{2}{3}(e^{-\frac{i}{\hbar}gt}v_{1,1} - 0.5e^{-\frac{i}{\hbar}gt}v_{1,2} + 0.5e^{2\frac{i}{\hbar}gt}v_2) \\
&= \frac{2}{3}(e^{-\frac{i}{\hbar}gt}(v_{1,1} - 0.5v_{1,2}) + 0.5e^{2\frac{i}{\hbar}gt}v_2) \\
&= \frac{2}{3}(e^{-\frac{i}{\hbar}gt}(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0.5\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) + 0.5e^{2\frac{i}{\hbar}gt}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix})
\end{aligned} \tag{16}$$

Sannsynligheten for å finne partikkelen ved atom 2 etter en tid t er:

$$|\langle 2| e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} |2\rangle|^2 = |\frac{2}{3}(e^{-\frac{i}{\hbar}gt}(1-0) + 0.5e^{2\frac{i}{\hbar}gt})|^2 = |\frac{2}{3}(e^{-\frac{i}{\hbar}gt} + 0.5e^{2\frac{i}{\hbar}gt})|^2 \tag{17}$$