2014-2015 学年第一学期《复变函数与积分变换 B》

课内考试卷（B 卷）

答案

授课班号__________专业__________ 学号__________姓名__________

题号	一	二	三	总分	审核
得分					

一、填空题(共 30 分，每空 3 分)

阅卷人	得分

$=(\sqrt{2})^5[\cos(-\frac{5}{4}\pi)+i\sin(-\frac{5}{4}\pi)]$

1. 设 $\bar{z}=(1-i)^5$，则 z 的模为 $(\sqrt{2})^5$ z 的辐角主值为 $-\frac{3}{4}\pi$

2. $\sqrt[3]{-1-2i}=$ $5^{\frac{1}{6}}\left[\cos\frac{\arctan 2-\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\arctan 2-\pi+2k\pi}{3}\right]$ $k=0,1,2$.

3. $\oint_{|z|=2}(\frac{\sin z}{z-i}+\frac{\cos z}{(z-3)^3})dz=$ $2\pi i\sin i$

4. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}(z-i)^n$ 的收敛圆是 $|z-i|=1$

5. $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2ni}{1-ni}=$ -2.

6. $f(z)=z\sin z$ 在 $z=0$ 的泰勒级数为 $z^2-\frac{z^4}{3!}+\frac{z^6}{5!}\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^{2n}}{(2n-1)!}$

7. $Ln(2-i)$ 的主值为 $\ln\sqrt{5}+i\arctan(-\frac{1}{2})$

8. $L[t^3e^{2t}+\delta(t)]=$ $\frac{3!}{(s-2)^4}+1$ $L^{-1}[\frac{1}{(s-1)^2+2}]=$ $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t\,e^t$

二、计算题(共 30 分，每小题 6 分)

阅卷人	得分

1. 计算 $(-2-i)^{-i}$ 的值

$$(-2-i)^{-i} = e^{-i\,\mathrm{Ln}(-2-i)}$$

$$= e^{-i\left(\ln\sqrt{5} + i\left(\arctan\frac{1}{2} - \pi + 2k\pi\right)\right)}$$

$$= e^{\arctan\frac{1}{2} - \pi + 2k\pi - i\cdot\ln\sqrt{5}}$$

2. 设 $f(z) = 4my^3 + nx^2y + i(x^3 + lxy^2)$，试指出 $f(z)$ 解析的条件，并在此条件下求 $f(z)$ 的导数.

记 $u = 4my^3 + nx^2y$，$v = x^3 + lxy^2$

$u_x = 2nxy$，$v_y = 2lxy$

$u_y = 12my^2 + nx^2$，$v_x = 3x^2 + ly^2$

$\because f(z)$ 解析

$$\therefore \begin{cases} 2nxy = 2lxy \\ 12my^2 + nx^2 = -(3x^2 + ly^2) \end{cases}$$

$\therefore n = l = -3$

$m = \frac{1}{4}$

$f'(z) = u_x + iv_x = -6xy + i(3x^2 - 3y^2)$

3. 计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t} e^{-2t} dt$ 的值.

$\because \mathcal{L}[1-\cos t] = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}$

$$\therefore \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t} e^{-2t} dt = \int_2^{\infty} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right) ds = \left(\ln s - \ln\sqrt{s^2+1}\right)\Big|_2^{\infty}$$

$= \ln\sqrt{5} - \ln 2$

4. 讨论级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ 的收敛性和绝对收敛性.

$\because \sum_{n=2}^{\infty} \left|\frac{i^n}{n}\right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$（调和级数，由高数知识发散）发散

$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ 非绝对收敛

$\because \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{n} = \frac{-1}{2} + \frac{-i}{3} + \frac{1}{4} + \frac{i}{5} \cdots = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \cdots\right) + i\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \cdots\right)$

而 $-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \cdots$ 及 $-\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ 是莱布尼茨型级数，是收敛的

$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ 收敛.

5. 求 $f(t)=\dfrac{e^{-3t}\sin 2t}{t}$ 的拉氏变换.

$$\mathcal{L}[\sin 2t]=\frac{2}{s^2+4}$$

$$\mathcal{L}[e^{-3t}\sin 2t]=\frac{2}{(s+3)^2+4}$$

$$\mathcal{L}[f(t)]=\int_s^{\infty}\frac{2}{(s+3)^2+4}\,ds=\arctan\frac{s+3}{2}\Big|_s^{\infty}=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{s+3}{2}$$

三、解答题(共 40 分, 每小题题 10 分)

阅卷人	得分

1. 在复平面上求解析函数 $f(z)$ 使其实部 $u(x,y)=e^x\cos y+2x$，且 $f(0)=1$.

解: $u_x=v_y=e^x\cos y+2 \Rightarrow v(x,y)=e^x\sin y+2y+c(x)$

又 $\because u_y=-v_x \quad \therefore -e^x\sin y=-(e^x\sin y+c'(x))$

$\therefore c'(x)=0 \Rightarrow c(x)=C$

$\therefore v(x,y)=e^x\sin y+2y+C$

又 $\because f(0)=1$

$\therefore C=0$

$\therefore f(z)=e^x\cos y+2x+i(e^x\sin y+2y)$

$=e^z+2z$

2. 求函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-i)}$ 分别在圆环域 (1) $0<|z|<1$ (2) $|z|>1$ 内的洛朗展开式.

(1) $0<|z|<1$ $\quad \dfrac{1}{z-i} = -\dfrac{1}{i}\dfrac{1}{1-\frac{z}{i}} = -\dfrac{1}{i}\left(1+\dfrac{z}{i}+\left(\dfrac{z}{i}\right)^2+\cdots\right)$

$\therefore f(z) = i\left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{i}+\dfrac{z}{i^2}+\cdots\right)$

(2) $|z|>1$ $\quad \dfrac{1}{z-i} = \dfrac{1}{z}\dfrac{1}{1-\frac{i}{z}} = \dfrac{1}{z}\left(1+\dfrac{i}{z}+\left(\dfrac{i}{z}\right)^2+\cdots\right)$

$\therefore f(z) = \dfrac{1}{z^2}\left(1+\dfrac{i}{z}+\left(\dfrac{i}{z}\right)^2+\cdots\right) = \dfrac{1}{z^2}+\dfrac{i}{z^3}+\dfrac{i^2}{z^4}+\cdots$

3. 计算积分 $\oint_C \dfrac{1}{z(z-1)^2}dz$ 的值，其中 C 为负向圆周 $|z|=2$.

原积分 $= -\oint_{C^-}\dfrac{1}{z(z-1)^2}dz = -\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\dfrac{\frac{1}{(z-1)^2}}{z}dz - \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}}\dfrac{\frac{1}{z}}{(z-1)^2}dz$

$= -2\pi i\left.\dfrac{1}{(z-1)^2}\right|_{z=0} - 2\pi i\left.\left(\dfrac{1}{z}\right)'\right|_{z=1}$

$= 0$

4. 用拉氏变换求微分方程 $y''+2y'-3y=e^{-t}$ 的满足 $y(0)=0, y'(0)=1$ 的特解.

设 $\mathcal{L}[y(t)]=Y(s)$ 则 $\mathcal{L}[y'(t)]=sY(s)-y(0)=sY(s)$, $\mathcal{L}[y''(t)]=s^2Y(s)-1$

$\Rightarrow s^2Y(s)-1+2sY(s)-3Y(s)=\dfrac{1}{s+1}$

$\Rightarrow Y(s)=\dfrac{1+\frac{1}{s+1}}{s^2+2s-3}=\dfrac{s+2}{(s+3)(s+1)(s-1)}=\dfrac{1}{s-1}\cdot\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{s+1}\left(-\dfrac{1}{4}\right)+\left(-\dfrac{1}{8}\right)\dfrac{1}{s+3}$

$\Rightarrow y(t)=\dfrac{3}{8}e^{t}-\dfrac{1}{4}e^{-t}-\dfrac{1}{8}e^{-3t}$