2010-2011 学年第二学期《高等数学》期末试卷

一、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 已知点 $A(1,4,-2)$，$B(5,2,0)$，$C(6,4,-3)$，则 ΔABC 的面积等于 $5\sqrt{3}$。

2. 过点 $M_1(3,-2,1)$，$M_2(-1,0,2)$ 的直线方程为 $\frac{x-3}{-4}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$。

3. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+y+z=e^{-(x^2+y^2+z^2)}$ 所确定，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ $-\frac{1+2xe^{-(x^2+y^2+z^2)}}{1+2ze^{-(x^2+y^2+z^2)}}$。

4. 曲面 $3x^2+5y^2-2z=2$ 在点 $(1,1,3)$ 处的法线方程为 $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-3}{-1}$。

5. 二次积分 $\int_{-1}^{1}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,dy$ 在极坐标系下先对 r 积分的二次积分为 $\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r\,dr$。

6. 已知 L 为自原点至点 $A(2,2)$ 的圆弧 $y=\sqrt{4x-x^2}$，则 $\int_L xy\,dy=$ $\frac{4}{3}$。

7. 函数 $\cos x$ 的麦克劳林展开式为 $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},\ -\infty<x<+\infty$；$\cos^{(n)}(0)=$ $\cos\frac{n\pi}{2}$。

8. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<\frac{1}{2}\\ 0, & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$，已知 $S(x)$ 是 $f(x)$ 的以 2 为周期的正弦级数展开式的和函数，则

$S\left(\frac{7}{4}\right)=$ $-\frac{1}{4}$。

9. 一曲线过原点，其上任一点 (x,y) 处切线斜率为 $2x+y$，则曲线方程是 $y=2(e^x-x-1)$。

10. 若某个二阶常系数线性齐次微分方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$，其中 C_1,C_2 为独立的任意常数，则该方程为 $y''-y=0$。

二、计算题（每小题 6 分，共 36 分）

1. 设 $f(x,y)$ 具有连续的一阶偏导数，$f(1,1)=1$，$f_1(1,1)=a$，$f_2(1,1)=b$，

又 $\varphi(x)=f\{x,f[x,f(x,x)]\}$，求 $\varphi(1)$，$\varphi'(1)$。

设 $u=f(x,x)$，$v=f(x,u)$，则 $\varphi(x)=f(x,v)$.

1) $x=1$ 时，$u=f(1,1)=1$，$v=f(1,1)=1$，$\varphi(1)=f(1,1)=1$

2) $u'_x=f_1(x,x)+f_2(x,x)$，$v'_x=f_1(x,u)+f_2(x,u)\cdot u'_x$，

$\varphi'(x)=f_1(x,v)+f_2(x,v)\cdot v'_x$

$x=1$ 时，$u'_x=a+b$，$v'_x=a+b(a+b)$，

$\varphi'(1)=a+b[a+b(a+b)]=a+ab+ab^2+b^3$.

2. 求函数 $z=y-e^x$ 在 $(1,e)$ 点沿曲线 $y=e^x$ 切线正向（x 增大方向）的方向导数。

法一：$\vec{l}=\vec{T}=(1,y')\Big|_{(1,e)}=(1,e^x)\Big|_{x=1}=(1,e)$

$\Rightarrow (\cos\varphi,\sin\varphi)=\dfrac{\vec{l}}{|\vec{l}|}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+e^2}},\dfrac{e}{\sqrt{1+e^2}}\right)$

又∵ $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,e)}=-e^x\Big|_{(1,e)}=-e$，

$\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,e)}=1$

∴ $\dfrac{\partial z}{\partial l}\Big|_{(1,e)}=-e\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+e^2}}+1\cdot\dfrac{e}{\sqrt{1+e^2}}=0$

法二：由 $y=e^x$ 为 $z=y-e^x$ 的等高线，可得沿等高线 z 不变.

从而 $\dfrac{\partial z}{\partial l}=0$.

3. 试求由 $z=4-x^2-y^2$ 与 $z=4x+4$ 所围立体的体积。

D_{xy}：$4x+4\le 4-x^2-y^2$，即 $(x+2)^2+y^2\le 4$

$$V=\iint\limits_{D_{xy}}[(4-x^2-y^2)-(4x+4)]\,dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}[4-(x+2)^2-y^2]\,dxdy$$

$$=4\iint\limits_{D_{xy}}dxdy-\iint\limits_{D_{xy}}[(x+2)^2+y^2]\,dxdy$$

$$=4\times4\pi-\iint\limits_{D_{xy}}[(x+2)^2+y^2]\,dxdy$$

令 $\begin{cases}x+2=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ $16\pi-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3\,dr$

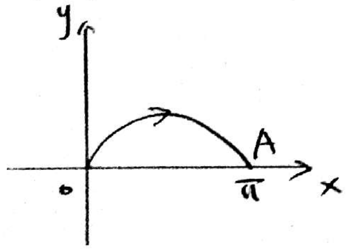
$=16\pi-8\pi$

$=8\pi$.

注：$z=4-x^2-y^2$ 为立体的顶

$z=4x+4$ 为立体的底

4. 计算积分 $\int_L(x^2+2xy-y^2)\,dx+(x^2-2xy-y^2)\,dy$，式中 L 是从点 $O(0,0)$ 沿曲线 $y=\sin x$ 到点 $A(\pi,0)$ 的弧段。



$P=x^2+2xy-y^2$，$Q=x^2-2xy-y^2$

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=2x-2y=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

∴ 积分与路径无关.

原式 $=\int_{\overline{OA}}P\,dx+Q\,dy$，$\overline{OA}$：$y=0$，$x:0\to\pi$

$=\int_0^{\pi}x^2\,dx=\dfrac{\pi^3}{3}$.

5. 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-x}$的敛散性，对收敛情况说明是绝对收敛还是条件收敛。

级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$

1) $x\le 0$时，$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\ne 0$，级数发散

2) $x>0$时，$\{\frac{1}{n^x}\}\downarrow$且$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^x}=0$，由Leibniz判别法，

级数收敛.

又∵ $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$，当$x>1$时收敛，$x\le1$时发散.

∴ $x>1$时级数绝对收敛；$0<x\le1$时级数条件收敛.

6. 求微分方程$\frac{dy}{dx}=x+3+\frac{2}{x}-\frac{y}{x}$的通解。

$y'+\frac{1}{x}y=x+3+\frac{2}{x}$

因$\mu=x$乘两边，$(xy)'=x^2+3x+2$

∴ $xy=\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+2x+C$

通解为 $y=\frac{x^2}{3}+\frac{3}{2}x+2+\frac{C}{x}$

三、综合题（满分 34 分）

1. （8 分）平面$x+2y-3z=0$截椭圆抛物面$z=4-x^2-2y^2$成上、下两部分，试在上部分曲面上求一点，使它到此平面的距离为最大，并求最大距离。

上部分曲面：$z=4-x^2-2y^2$ $\left(z\ge\frac{x+2y}{3}\right)$

从而上部分曲面上任意一点(x,y,z)到平面$x+2y-3z=0$

距离为 $d=\frac{|x+2y-3z|}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}}=\frac{1}{\sqrt{14}}(3z-x-2y)$

令$L(x,y,z,\lambda)=3z-x-2y+\lambda(x^2+2y^2+z-4)$

由$\begin{cases}L_x=-1+2\lambda x=0\\L_y=-2+4\lambda y=0\\L_z=3+\lambda=0\\L_\lambda=x^2+2y^2+z-4=0\end{cases}$ 解得唯一驻点$\left(-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},\frac{47}{12}\right)$，即为所求最大值点，且

$d_{max}=\frac{1}{\sqrt{14}}\left(3\times\frac{47}{12}+\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}\right)=\frac{7}{8}\sqrt{14}$.

2. （8 分）计算 $\iint\limits_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy$，$\Sigma$ 是上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧。

06级：$2\pi|a|^3$.

3. （9 分）试求幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n(n-1)}$ 的收敛域及和函数。

1) $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}\right|=1 \quad \therefore R=1$

$x=1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$ 收敛 $(n\to\infty, \frac{1}{n(n-1)}\sim\frac{1}{n^2})$

$x=-1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ 绝对收敛，从收敛. $\therefore$ 收敛域为 $[-1,1]$.

2) 令 $S(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n(n-1)}$，$-1\le x\le 1$.

$S'(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}$，$S''(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}x^{n-2}=\frac{1}{1-x}$，$-1<x<1$.

$\therefore S'(x)=S'(0)+\int_0^x S''(t)dt=0+\int_0^x\frac{dt}{1-t}=-\ln(1-x)$，$-1<x<1$

$S(x)=S(0)+\int_0^x S'(t)dt=0+\int_0^x -\ln(1-t)dt=\int_0^x \ln(1-t)d(1-t)$

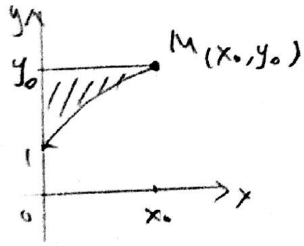
$=(1-t)\ln(1-t)\Big|_0^x+\int_0^x dt=(1-x)\ln(1-x)+x$，$-1<x<1$.

又 $\because S(x)\in C[-1,1]$.

$\therefore S(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}S(x)=1$

$$S(x)=\begin{cases}(1-x)\ln(1-x)+x, & -1\le x<1\\ 1, & x=1\end{cases}$$

4. （9 分）已知上半平面内一曲线 $y=y(x)$ 过点 $(0,1)$，曲线上任一点 $M(x_0,y_0)$ 处切线斜率在数值上等于由曲线，y 轴与直线 $y=y_0$ 所围成的面积，求此曲线方程。



由题：$y'(x_0)=x_0y(x_0)-\int_0^{x_0}y(t)dt$

由 (x_0,y_0) 任意性，上式可写为：

$y'=xy-\int_0^x y(t)dt$

从而 $y''=y+xy'-y=xy'$

只需求解 $\begin{cases}y''=xy' & ①\\ y(0)=1,\ y'(0)=0 & ②\end{cases}$

令 $y'=p$，则①化为 $\frac{dp}{dx}=xp \Rightarrow \frac{dp}{p}=xdx$

$\Rightarrow \ln|p|=\frac{x^2}{2}+\ln|C_1| \Rightarrow p=C_1e^{\frac{x^2}{2}}$，又 $p(0)=0 \quad \therefore C_1=0$

从而 $y'=0 \Rightarrow y=C_2$. 又 $\because y(0)=1 \quad \therefore C_2=1$

综上，所求曲线为 $y=1$