九、$F(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)dx}{x}$，　$F(a)=\dfrac{\int_0^a f(t)dx}{a}=0, F(b)=\dfrac{\int_0^b f(t)dx}{b}=0$

由罗尔定理，$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=\dfrac{\xi f(\xi)-\int_0^\xi f(t)dt}{\xi^2}=0, \int_0^\xi f(t)dt=\xi f(\xi)$。

河海大学 2012~2013 学年第一学期

《高等数学（上）》期末试卷

考试对象：2012 级

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1-x)}{x} & x<0\\ 0 & x=0\\ \dfrac{\sin x}{x-1} & x>0\end{cases}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　　）。

A. 可去间断点　　B. 跳跃间断点　　C. 第二类间断点　D. 连续点

2、当 $x\to 0^+$ 时，下列无穷小量中（　　）的阶数最高。

A. $x-\sin x$　　B. $1-\cos\sqrt{x}$　　C. $\sqrt{x}+x^4$　　D. $x(1-e^{4x})$

3、下述结论正确的是（　　）。

A．若 $f''(x_0)=0$，则 $(x_0, f(x_0))$ 一定是曲线 $y=f(x)$ 的拐点；

B．若 $f'(x_0)=0$，则函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处一定取极值；

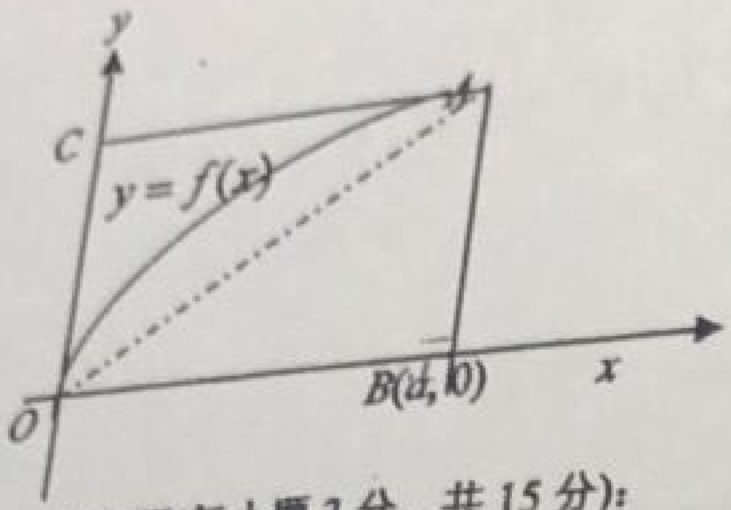
C．若 $f(x)$ 可导，且在 $x=x_0$ 处取极值，则 $f'(x_0)$=0；

D．若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取得最大值，则该最大值一定是 $f(x)$ 在 (a,b) 内的极大值

4. 下列等式成立的是（　　）。　A. $d(\int e^{x^2}dx)=e^{x^2}$　　B. $\int d(e^{x^2}$

C. $\dfrac{d}{dx}(\int e^{x^2}dx)=e^{x^2}$　　D. $\int\dfrac{d}{dx}(e^{x^2})dx=e^{x^2}$

5. 图中曲线的方程为 $y=f(x)$，函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上有连续的导数，则积分 $\int_0^a xf'(x)dx$ 表示（　　）。



A. 直角三角形 AOB 的面积
B. 直角三角形 AOC 的面积
C. 曲边三角形 AOB 的面积
D. 曲边三角形 AOC 的面积

二、填空题(每小题 3 分，共 15 分)：

1. 设 $x>0$ 则 $d(\sqrt{x}\arctan\sqrt{x})=$ ______ $d(\sqrt{x})$。

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right]=$ ______。 3. $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos x}\,dx=$ ______。

4. 曲线 $y=\frac{x^2}{2x-1}$ 的渐近线方程是______。 5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1}e^{-t^2}dt}{x^2}=$ ______。

三、试解下列各题（每小题 6 分，共 30 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x\sin^2 x}$。 2. 求由参数方程 $\begin{cases}x=\frac{t-1}{t+1}\\ y=\frac{t^2}{t+1}\end{cases}$ 所确定的曲线在点 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 处的切线方程。

3. 求函数 $f(x)=\ln x$ 在点 $x=2$ 处的带佩亚诺型余项的 n 阶泰勒公式。

4. 计算不定积分 $\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$。

5. 计算定积分 $\int_1^2\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$。

四、(本题 7 分) 求由方程 $\int_0^y e^{t^2}dt=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{x}-1)^2$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的极值点。

五、（本题 7 分）利用拉格朗日中值定理证明：当 $e<x_1<x_2$ 时，有 $\frac{x_1}{x_2}<\frac{\ln x_1}{\ln x_2}$。

六、（本题 8 分）求由 $x^2+y^2=1$，$x^2=\frac{3}{2}y$ 以及 x 轴所围成的图形分别绕 x 轴与 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积。

七、（本题 6 分）设 $f(x)$ 为连续的偶函数，且周期为 T，证明 $\int_0^T xf(x)dx=\frac{T}{2}\int_0^T f(x)dx$

八、（本题 7 分）（1）求函数 $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调区间。

（2）设 $g(x)=nx(1-x)^n, n\in N_+$.，证明 $\max\limits_{x\in[0,1]} g(x)\le\frac{1}{e}$

九、（本题 5 分）设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导且存在相等的最大值。

$f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

2012 级《高等数学（上）》期末试卷参考答案

一、BACCD 二、1. $\arctan\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{1+x}$ 2. $\frac{\pi}{6}$ 3. $2\sqrt{2}$ 4. $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$，$x=\frac{1}{2}$ 5. $\frac{1}{2e}$

三、1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sec^2 x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\tan^2 x}{3x^2}=-\frac{1}{3}$

2. $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{t^2+2t}{2}$， $\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,\frac{1}{2})}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}=\frac{3}{2}$ ∴ 切线方程为 $y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$

3. $\ln x=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)=\ln 2+\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{2\cdot 2^2}(x-2)^2+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 2^n}(x-2)^n+o((x-2)^n)$

4. $\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx=\left[x\ln(\sqrt{1+x^2}+x)\right]-\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$

5. $\int_{1}^{2}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx\overset{x=2\sin t}{=\!=}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^2 t\,dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\csc^2 t-1)dt=\left[-\cot t-t\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

四、方程两边求导：$e^{y^2}\cdot y'=(\sqrt[3]{x}-1)\cdot\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}$， W={0, 1}，

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	—		—		+
y	↘	非极值点	↘	极小值点	↗

由上表，x=1 极小值点。

五、设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $f(x)$ 满足 Lagrange 定理的条件，且 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0$。

由 Lagrange 定理，$\exists\xi\in(x_1,x_2)$，使得 $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)=\frac{1-\ln\xi}{\xi^2}(x_2-x_1)<0$，即证。

六、$V_x=2\left[\int_0^{\sqrt{3}/2}\pi\left(\frac{2}{3}x^2\right)^2dx+\int_{\sqrt{3}/2}^{1}\pi(1-x^2)dx\right]=\left(\frac{4}{3}-\frac{7\sqrt{3}}{10}\right)\pi$， $V_y=\int_0^{1/2}\pi(1-y^2)dy-\int_0^{1/2}\pi\left(\frac{3}{2}y\right)dy=\frac{13}{48}\pi$

七、令 $x=T-u$，则 $\int_0^T xf(x)dx=\int_0^T(T-u)f(-u)du=\int_0^T(T-u)f(u)du=\int_0^T(T-x)f(x)dx$

$\therefore\int_0^T xf(x)dx=\frac{T}{2}\int_0^T f(x)dx$。

八、(1) $\because f'(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x}\right]<0$，$\therefore f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的递减。

(2) $g'(x)=n(1-x)^{n-1}\left[1-(n+1)x\right]$，在 (0, 1) 内，$W=\left\{\dfrac{1}{n+1}\right\}$，

而 $g(\dfrac{1}{n+1})=\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}}$，$g(0)=g(1)=0$，由 $g(x)$ 在[0, 1]连续必有最大值。故 $\max\limits_{x\in[0,1]} g(x)=\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}}$。

由 (1) 知 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ 单减，知 $\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}}$ 单增，$\therefore \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}}\le\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}}=\dfrac{1}{e}$，从而 $\max\limits_{x\in[0,1]} g(x)\le\dfrac{1}{e}$。

九、令 $F(x)=f(x)-g(x)$。若在 (a,b) 内同一点 x_0 处取到最大值 M，则 $F(a)=F(x_0)=F(b)=0$，由 Roll 定理得证。若在 (a,b) 内不同点取到最大值 M，不妨设 $f(x_1)=g(x_2)=M$，则 $F(x_1)=M-g(x_1)>0$，$F(x_2)=f(x_2)-M<0$，由根的存在定理，$\exists x_3\in(a,b)$，使得 $F(x_3)=0$，因此 $F(a)=F(x_3)=F(b)=0$，仍由 Roll 定理可以得证。

河海大学 2013~2014 学年第一学期

《高等数学（上）》期末试卷

考试对象：2013 级

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1.隐函数方程 $e^y+xy-e=0$ 表示的曲线在对应 $x=0$ 点处的法线方程为（　　）.

$A.\ y=-\dfrac{1}{e}x+1$　　$B.\ y=\dfrac{1}{e}x+1$　　$C.\ y=-ex+1$　　$D.\ y=ex+1$

2. 下列反常积分收敛的是（　　）

$A.\ \int_{-\infty}^{0}e^{x}dx$　　$B.\ \int_{1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$　　$C.\ \int_{-\infty}^{0}e^{-x}dx$　　$D.\ \int_{-\infty}^{0}\cos x dx$

3.设 $f(x)$ 满足 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$,若 $f'(x_0)=0$,$(x_0\ne0)$ 则函数 $f(x)$ 在点 x_0（　　）

A.取得极大值　　B.取得极小值　　C.某个邻域内单调增加　　D.某个邻域内单调减少