2011-2012 学年第二学期《高等数学Ⅱ》期末试卷

一、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 与点 $M_1(1,-1,2)$，$M_2(3,3,1)$，$M_3(3,1,3)$ 决定的平面垂直的单位向量 $\vec{a}_0 =$ ________。

2. 过点 $(1,2,1)$ 与向量 $\vec{S}_1 = \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$，$\vec{S}_2 = -\vec{j} - \vec{k}$ 平行的平面方程为________。

3. 设 $z = x^3y^2 - x^2 - e^y$，则 $dz =$ ________。

4. 曲线 $x = t^2, y = 2t, z = \frac{1}{3}t^3$ 在点 $\left(1,2,\frac{1}{3}\right)$ 处的切线方程是________。

5. 如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛半径是 1，则级数在开区间________内收敛。

6. 设 L 为圆周 $x^2 + y^2 = 1$，则 $\oint_L x^2 ds =$ ________。

7. 交换积分次序 $\int_0^1 dy \int_{e^y}^{e} f(x,y)\, dx =$ ________。

8. 设区域 D 是 $x^2 + y^2 \le 1$ 与 $x^2 + y^2 \le 2x$ 的公共部分，试写出 $\iint\limits_D f(x,y)\, dxdy$ 在极坐标系下先对 r 积分的累次积分________。

9. 已知一个二阶常系数线性齐次微分方程的特征方程有两个实根 a 与 b，且 $a \ne b$，此微分方程是________，通解是________。

10. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ x-1, & 1 \le x < 2 \end{cases}$，又设 $S(x)$ 是 $f(x)$ 的以 4 为周期的正弦级数展开式的和函数，则 $S(7) =$ ________。

二、计算题（每小题 6 分，共 36 分）

1. 设 $z = xF(xy^2, e^{x^2y})$，F 有连续偏导数，求 z_x，z_y。

2. 在椭圆抛物面 $z=x^2+2y^2$ 上求一点，使曲面在该点处的切平面垂直于直线 $\begin{cases}2x+y=0\\ y+3z=0\end{cases}$，并写出曲面在该点处的法线方程。

3. 计算 $\int_0^1 dz\int_0^1 dx\int_x^1 \sin y^2 dy$ 。

4. 计算曲线积分 $\int_L (x+e^{\sin y})\,dy-ydx$，其中 L 是从点 $A(1,0)$ 沿 $y=3\sqrt{1-x^2}$ 到点 $B(-1,0)$ 的上半椭圆。

5. 判别级数$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}$的敛散性，对收敛情况说明是绝对收敛还是条件收敛。

6. 求微分方程$x''(t)-4x'(t)+5x(t)=5$的通解。

三、综合题（满分 34 分）

1. （8 分）沿厂房的后墙修建一座容积为V形状为长方体的仓库，已知仓库的屋顶和墙壁每单位面积的造价分别为地面每单位面积造价的 2 倍和 1.5 倍，厂房后墙的长和高足够，因而这一面墙壁的造价不计，问如何设计，方能使仓库的造价最低？

2. （8 分）计算$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\,dzdx+zdxdy$，其中$\Sigma$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$在第一卦限中满足$z\le 1$的部分曲面的下侧。

3. （9 分）试求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\,(2n-1)}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$的和。

4. （9 分）上半平面内一单调上升曲线过点$(0,1)$，且曲线上任一点$M(x_0,y_0)$处切线与x轴，直线$x=x_0$所围三角形面积等于曲线与x轴，y轴，直线$x=x_0$所围成面积加上$\dfrac{1}{2}$，求此曲线方程。