5. $I=\int_0^1 e^x \sin x dx = e\sin 1-\int_0^1 e^x\cos x dx = e\sin 1 - e\cos 1+1-\int_0^1 e^x \sin x dx$,

$I=\frac{1}{2}(e\sin 1-e\cos 1+1)$.

四、$F(x)=\int_0^x e^{t^2}dt+\int_1^x e^{-t^2}dt$，$F(0)=\int_1^0 e^{-t^2}dt<0, F(1)=\int_0^1 e^{t^2}dt>0$。

零点定理: 在$(0,1)$至少存在一个方程的根，$F'(x)=e^{x^2}+e^{-x^2}>0$, 方程根的个数为 1。

五、$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}<0,(x>e)$，

$f(x)$在$[e,+\infty)$上单调减少。 $f(\pi)<f(e)\Rightarrow \pi^e<e^\pi$。

六、$c=0,a+b=2$， $A(a)=\int_0^{\frac{a-2}{a}}[ax^2+(2-a)x]dx=\dfrac{(2-a)^3}{6a^2},(a<0)$

$$A'(a)=-\frac{(2-a)^2(a+4)}{6a^3}, A'(a)=0\Rightarrow a=-4,\quad c=0,b=6.$$

七、(1). $V_x=\pi\int_0^2(2x-x^2)^2dx=\dfrac{16}{15}\pi$;

(2). $V_y=\pi\int_0^1(1+\sqrt{1+y})^2dy-\pi\int_0^1(1-\sqrt{1+y})^2dy$

$V_y=\dfrac{8}{3}\pi.$。或用公式$V_y=2\pi\int_0^1 xf(x)dx=2\pi\int_0^1 x(2x-x^2)dx=\dfrac{8}{3}\pi$。

八、$\int_0^4 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx; \int_2^4 f(x)dx \underset{x=4-t}{=} \int_0^2 f(4-t)dt$,

$$\int_0^4 f(x)dx=\int_0^2[f(x)+f(4-x)]dx$$

九、$F(x)=\dfrac{\int_a^x f(t)dx}{x}$， $F(a)=\dfrac{\int_a^a f(t)dx}{a}=0, F(b)=\dfrac{\int_a^b f(t)dx}{b}=0$

由罗尔定理, $\exists\xi\in(a,b)$，使得$F'(\xi)=\dfrac{\xi f(\xi)-\int_a^\xi f(t)dt}{\xi^2}=0, \int_a^\xi f(t)dt=\xi f(\xi)$。

2012 级试卷

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1-x)}{x} & x<0\\ 0 & x=0\\ \dfrac{\sin x}{x-1} & x>0\end{cases}$，则$x=0$是$f(x)$的（　　）。

A. 可去间断点　　*B*. 跳跃间断点　　*C*. 第二类间断点　*D*. 连续点

2、当$x\to 0^+$时，下列无穷小量中（　　）的阶数最高。

A. $x-\sin x$　　*B*. $1-\cos\sqrt{x}$　　*C*. $\sqrt{x}+x^4$　　*D*. $x(1-e^{4x})$

3、下述结论正确的是（　　）。

A. 若$f''(x_0)=0$，则$(x_0,f(x_0))$一定是曲线$y=f(x)$的拐点；

B. 若$f'(x_0)=0$，则函数$y=f(x)$在$x=x_0$处一定取极值；

C. 若$f(x)$可导，且在$x=x_0$处取极值，则$f'(x_0)$=0；

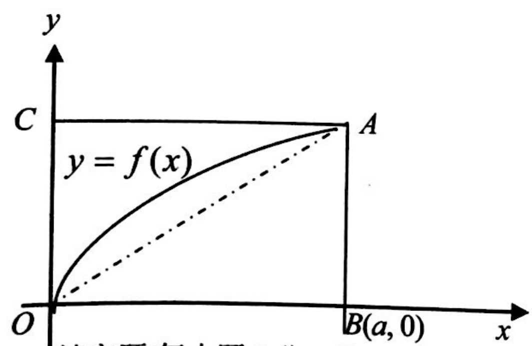
D. 若$f(x)$在$[a,b]$上取得最大值，则该最大值一定是$f(x)$在(a,b)内的极大值。

4. 下列等式成立的是（　　）。

A. $d(\int e^{x^2}dx)=e^{x^2}$　　　*B*. $\int d(e^{x^2})=e^{x^2}dx$

C. $\dfrac{d}{dx}(\int e^{x^2}dx)=e^{x^2}$　　　*D*. $\int\dfrac{d}{dx}(e^{x^2})dx=e^{x^2}$

5. 图中曲线的方程为$y=f(x)$，函数$f(x)$在$[0,a]$上有连续的导数，则积分$\int_0^a xf'(x)dx$表示（　　）。



A. 直角三角形*AOB*的面积

B. 直角三角形*AOC*的面积

C. 曲边三角形*AOB*的面积

D. 曲边三角形*AOC*的面积

二、填空题(每小题3分，共15分)：

1. 设$x>0$ 则$d(\sqrt{x}\arctan\sqrt{x})=$ ____________________ $d(\sqrt{x})$。

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right]=$______　　3. $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos x}dx=$______。

4. 曲线 $y=\dfrac{x^2}{2x-1}$ 的渐近线方程是 ______。　　5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1}e^{-t^2}dt}{x^2}=$ ____ 。

三、试解下列各题（每小题 6 分，共 30 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\tan x}{x\sin^2 x}$ 。

2. 求由参数方程 $\begin{cases}x=\dfrac{t-1}{t+1}\\ y=\dfrac{t^2}{t+1}\end{cases}$ 所确定的曲线在点 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 处的切线方程。

3. 求函数 $f(x)=\ln x$ 在点 $x=2$ 处的带佩亚诺型余项的 n 阶泰勒公式。

4. 计算不定积分 $\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$ 。　　5. 计算定积分 $\int_1^2\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$ 。

四、（本题 7 分）求由方程 $\int_0^y e^{t^2}dt=\dfrac{1}{2}(\sqrt[3]{x}-1)^2$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的极值点。

五、（本题 7 分）利用拉格朗日中值定理证明：当 $e<x_1<x_2$ 时，有 $\dfrac{x_1}{x_2}<\dfrac{\ln x_1}{\ln x_2}$ 。

六、（本题 8 分）求由 $x^2+y^2=1$ ，$x^2=\dfrac{3}{2}y$ 以及 x 轴所围成的图形分别绕 x 轴与 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积。

七、(本题 6 分)设 $f(x)$ 为连续的偶函数，且周期为 T，证明 $\int_0^T xf(x)dx=\dfrac{T}{2}\int_0^T f(x)dx$

八、（本题 7 分）（1）求函数 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调区间。

（2）设 $g(x)=nx(1-x)^n,n\in N_+$.，证明 $\max\limits_{x\in[0,1]}g(x)\le\dfrac{1}{e}$

九、（本题 5 分）设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导且存在相等的最大值。$f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

2012 级参考解答

一、BACCD　二、1. $\arctan\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$　2. $\dfrac{\pi}{6}$　3. $2\sqrt{2}$

4. $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}$，$x=\dfrac{1}{2}$　5. $\dfrac{1}{2e}$

三、1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\tan x}{x\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sec^2 x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\tan^2 x}{3x^2}=-\dfrac{1}{3}$

2. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t^2+2t}{2}$， $\therefore \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(0,\frac{1}{2})}=\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1}=\dfrac{3}{2}$ $\therefore$ 切线方程为$y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}$

3. $\ln x=\ln 2+\ln\left(1+\dfrac{x-2}{2}\right)=\ln 2+\dfrac{1}{2}(x-2)-\dfrac{1}{2\cdot 2^2}(x-2)^2+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n\cdot 2^n}(x-2)^n+o((x-2)^n)$

4. $\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$

$=\left[x\ln(\sqrt{1+x^2}+x)\right]-\int\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$

5. $\int_1^2\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx\overset{x=2\sin t}{=\!=\!=}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^2 t\,dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\csc^2 t-1)dt=\left[-\cot t-t\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$

四、方程两边求导：$e^{y^2}\cdot y'=(\sqrt[3]{x}-1)\cdot\dfrac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}$，（2 分） W={0, 1}，

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	—		—		+
y	↘	非极值点	↘	极小值点	↗

$\therefore \int_0^T xf(x)dx = \frac{T}{2}\int_0^T f(x)dx$。

八、(1) $\because f'(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right] < 0$，$\therefore f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的递减。

(2) $g'(x) = n(1-x)^{n-1}\left[1-(n+1)x\right]$，在 (0, 1) 内，$W = \left\{\frac{1}{n+1}\right\}$，

而 $g(\frac{1}{n+1}) = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$，$g(0) = g(1) = 0$，由 $g(x)$ 在[0, 1]连续必有最大值。故

$\max\limits_{x\in[0,1]} g(x) = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$。由（1）知 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 单减，知 $\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$ 单增，

$\therefore \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} \le \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{e}$，从而 $\max\limits_{x\in[0,1]} g(x) \le \frac{1}{e}$。

九、令 $F(x) = f(x) - g(x)$。若在 (a,b) 内同一点 x_0 处取到最大值 M，则 $F(a) = F(x_0) = F(b) = 0$，由 Roll 定理得证。若在 (a,b) 内不同点取到最大值 M，不妨设 $f(x_1) = g(x_2) = M$，则 $F(x_1) = M - g(x_1) > 0$，$F(x_2) = f(x_2) - M < 0$，由根的存在定理，$\exists x_3 \in (a,b)$，使得 $F(x_3) = 0$，因此 $F(a) = F(x_3) = F(b) = 0$，由 Roll 定理得证。

2013 级试卷

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1.隐函数方程 $e^y + xy - e = 0$ 表示的曲线在对应 $x = 0$ 点处的法线方程为（　　）.

$A.\ y = -\frac{1}{e}x + 1$　　$B.\ y = \frac{1}{e}x + 1$　　$C.\ y = -ex + 1$　　$D.\ y = ex + 1$

2. 下列反常积分收敛的是（　　）

$A.\ \int_{-\infty}^{0} e^x dx$　　$B.\ \int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$　　$C.\ \int_{-\infty}^{0} e^{-x} dx$　　$D.\ \int_{-\infty}^{0}\cos x dx$

3. 设 $f(x)$ 满足 $xf''(x) + 3x[f'(x)]^2 = 1 - e^{-x}$，若 $f'(x_0) = 0$，$(x_0 \ne 0)$ 则函数 $f(x)$ 在点 x_0（　　）