2016—2017 学年第一学期《复变函数与积分变换 B》

课内考试卷(A 卷)

授课班号 6600506 专业________ 学号________ 姓名________

题号	一	二	三	审核	总分
得分					

一、填空题(共 24 分，每空 3 分)

阅卷人	得分

1．设复数 $z=\dfrac{i}{(-1-i)^{2016}}$，则 $\arg z=$ $\frac{\pi}{2}$，$|z|=$ $\frac{1}{2^{1008}}$

2. $Ln(-4+3i)=$ $\ln 5+i(\pi-\arctan\frac{3}{4}+2k\pi)$

3. $\oint_c \dfrac{e^z \sin z}{(z-1)^4(z-i)^2}dz=$ 0，其中 $c:|z|=\dfrac{1}{2}$ 为正向

4. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-i)^{2n}z^n$ 的收敛半径是 $\frac{1}{2}$

5. 设 $f(z)=x^2+iy^2$，则 $f'(2)=$ 不存在

6. $L[\delta(t-1)]=$ e^{-s}

7. $L^{-1}\left[\dfrac{1}{(s^2-1)(s^2+1)}\right]=$ $\frac{1}{4}(e^t-e^{-t})-\frac{1}{2}\sin t$

二、计算题(共 36 分，每小题 6 分)

阅卷人	得分

1.求 $\sqrt[5]{-1+2i}$ 的值.

$\sqrt[5]{-1+2i}=\sqrt[5]{\sqrt{5}[\cos(\pi-\arctan 2)+i\sin(\pi-\arctan 2)]}$

$=\sqrt[10]{5}(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

$\varphi=\dfrac{\pi-\arctan 2+2k\pi}{5}$ $k=0,1,2,3,4$.

2. 计算 $1^{\sqrt{3}}$ 的值.

$1^{\sqrt{3}}=e^{\sqrt{3}\,Ln 1}$

$=e^{\sqrt{3}i(0+2k\pi)}$

$=e^{2\sqrt{3}k\pi i}$

3．求 $t^m * t^n$ 的值

$$\mathcal{L}[t^m * t^n] = \mathcal{L}[t^m]\cdot\mathcal{L}[t^n]$$

$$= \frac{m!}{s^{m+1}}\cdot\frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{(m+n+1)!}{s^{m+n+2}}\ \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$$

$$\therefore t^m * t^n = t^{m+n+1}\ \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$$

4．计算 $\int_C \bar{z}dz$，其中 C 为（1）从 1 到 i 的直线段（2）从 i 到-2 的直线段.

(1) $C:\ z(t) = t + i(1-t)\quad t: 1 \to 0.$

$$\int_C \bar{z}\,dz = \int_1^0 [t - i(1-t)](1-i)\,dt$$

$$= i\ \left(或\ \tfrac{1}{2}(i-1)^2\right)$$

或 $= \int_0^1 [(1-t) - it](-1+i)\,dt$

$= i$

(2) $z(t) = t + i(\frac{t}{2}+1)\quad t: 0 \to -2$

$$\int_C \bar{z}\,dz = \int_0^{-2}[t - i(\tfrac{t}{2}+1)]\cdot(1+\tfrac{i}{2})\,dt$$

$$= \frac{3}{2} + 2i$$

或 $\int_1^0 [(2t-2) - it](2+i)\,dt$

$= (1+\frac{i}{2})(2+i) = \frac{3}{2} + 2i$

5．写出 $f(z) = \cos\frac{1}{z}$ 在 $0 < |z| < +\infty$ 的洛朗展开式，并求积分 $\oint_{|z|=3} z^3\cos\frac{1}{z}dz$ 的值.

$$f(z) = 1 - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4}\cdots\quad 0<|z|<+\infty$$

$$z^3 f(z) = z^3 - \frac{z}{2!} + \frac{1}{4!z}\cdots$$

$$C_{-1} = \frac{1}{4!}$$

$$\therefore \oint_{|z|=3} z^3\cos\frac{1}{z}\,dz = \frac{2\pi i}{4!} = \frac{\pi i}{12}$$

6．利用微分性质求 $L[f(t)]$，其中 $f(t) = t^2$.

$f'(t) = 2t,\ f''(t) = 2$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = \mathcal{L}[2] = s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0)$$

$$\therefore \frac{2}{s} = s^2\mathcal{L}[f(t)]$$

$$\therefore \mathcal{L}[f(t)] = \frac{2}{s^3}$$

三、解答题(每小题 10 分，共 40 分)

阅卷人	得分

1. 计算积分 $\oint_{|z-1|=3} \frac{e^z}{(z-1)^2(z-i)}dz$ 的值.

$$原式 = \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{e^z}{z-i}}{(z-1)^2}dz + \oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{e^z}{(z-1)^2}}{z-i}dz$$

$$= 2\pi i \cdot \left(\frac{e^z}{z-i}\right)'\bigg|_{z=1} + 2\pi i \frac{e^z}{(z-1)^2}\bigg|_{z=i}$$

$$= 2\pi i \frac{e(1-i)-e}{(1-i)^2} + 2\pi i \frac{e^i}{(i-1)^2}$$

$$= \pi e i - \pi e^i$$

2. 将函数 $f(z)=\frac{1}{(z+2)^2 z}$ 分别在区域 (i) $0<|z+2|<2$ 和 (ii) $|z|>2$ 内展成洛朗级数。

(i) $0<|z+2|<2$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z+2-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z+2}{2}} = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{z+2}{2}+\left(\frac{z+2}{2}\right)^2+\cdots\right)$$

$$f(z)=\frac{1}{(z+2)^2 z} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(z+2)^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z+2} - \frac{1}{8}\cdots$$

(ii) $|z|>2$

$$\frac{1}{(z+2)^2} = -\left(\frac{1}{z+2}\right)' = -\left(\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{-2}{z}}\right)'$$

$$= -\left(\frac{1}{z}\left(1+\frac{-2}{z}+\left(\frac{-2}{z}\right)^2+\cdots\right)\right)'$$

$$= -\left(\frac{1}{z}+\frac{-2}{z^2}+\frac{(-2)^2}{z^3}+\cdots\right)'$$

$$= \frac{1}{z^2}+\frac{-2\cdot 2}{z^3}+\frac{(-2)^2\cdot 3}{z^4}+\cdots$$

$$\therefore f(z)=\frac{1}{(z+2)^2 z} = \frac{1}{z^3}+\frac{-2\cdot 2}{z^4}+\frac{(-2)^2\cdot 3}{z^5}+\cdots$$

3. 已知 $v = e^x \sin y + 2xy$，求 $f(z)$ 使得 $f(z) = u + iv$ 是解析函数，且 $f(1) = 0$。

$f'(z) = u_x + i v_x = v_y + i v_x$

$= e^x \cos y + 2x + i(e^x \sin y + 2y)$

$= e^z + 2z$

$f(z) = e^z + z^2 + C$

由 $f(1)=0$ 得 $e + 1 + C = 0$

$\therefore C = -e-1$

$\therefore f(z) = e^z + z^2 - e - 1$.

4. 求方程 $y'' + 4y' + 3y = 0$ 满足初始条件 $y|_{t=0} = y'(0) = 1$ 的特解.

$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$, $\mathcal{L}[y'(t)] = sY(s) - 1$, $\mathcal{L}[y''(t)] = s^2 Y(s) - s - 1$

$\Rightarrow s^2 Y(s) - s - 1 + 4(sY(s) - 1) + 3Y(s) = 0$

$\Rightarrow (s^2 + 4s + 3) Y(s) = s + 5$

$\Rightarrow Y(s) = \dfrac{s+5}{(s+1)(s+3)} = \dfrac{2}{s+1} - \dfrac{1}{s+3}$

$\Rightarrow y(t) = 2e^{-t} - e^{-3t}$