原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{f(\frac{2}{n})}{\frac{1}{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{f(0+\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{2}{n}}2}=\sqrt{f'(0)2}=\sqrt{2}$

七、设$F(x)=x+f(x)$，在$(-\infty,+\infty)$上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)=+\infty$，

$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)=-\infty$，所以，$\exists\xi\in(-\infty,,+\infty)$，使得$f(\xi)+\xi=0$。

八、1）$F(x)=f(x)-x$，在区间$[0,1]$上连续，$F(1/2)=f(1/2)-1/2=1/2>0$，

$F(1)=f(1)-1=-1<0$，所以$\exists\eta\in(1/2,1)$，使$F(\eta)=0$；即$f(\eta)=\eta$；

2）$G(x)=(f(x)-x)e^{-\lambda x}$，在区间$[0,\eta]$上连续，$G(0)=f(0)=0$，

$G(\eta)=(f(\eta)-\eta)e^{-\lambda\eta}=0$，由洛尔定理，$\exists\xi\in(0,\eta)$，使

$G'(\xi)=-\lambda(f(\xi)-\xi)e^{-\lambda\xi}+(f'(\xi)-1)e^{-\lambda\xi}=0$,即$f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$。

近五年《高等数学 I》期末试卷

2010 级试卷

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1.设$f(x)=x(x-1)^2(x-2)^3$，则$f'(0)$等于（　）。

$A.\ -6$　　$B.\ 6$　　$C.\ 8$　　$D.\ -8$

2.曲线$y=xe^x$的拐点为（　）。

$A.\ (1,e)$　　$B.\ (-1,e^{-1})$　　$C.\ (-2,-2e^{-2})$　　$D.\ (2,2e^2)$

3. $f(x)$在$[a,b]$上连续是$\int_a^b f(x)dx$存在的(　)。

$A.$充分条件　　$B.$充要条件　　$C.$必要条件　　$D.$既不充分也不必要.

4. $\int_{-a}^{a}(\sin x^2+x\cos x)dx$（　）$\int_{-a}^{a}(\sin x^2+x^2\sin x)dx$。

$A.$不等于　　$B.$等于　　$C.$大于　　$D.$小于

5.假设$P_m(x)$，$Q_n(x)$均为多项式，$Q_n(x)\neq0$，$f(x)=a\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}+b\dfrac{P_m(\sin x)}{Q_n(\cos x)}$,则下述命题正确的是(　)。(其中$a,b$为常数)

A. $f(x)$ 的原函数不一定存在, B. $f(x)$ 的原函数一定是有理函数

C. $f(x)$ 的原函数一定不是有理函数 D. $f(x)$ 的原函数一定是初等函数.

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 当 $x \to 0$ 时，$1-\cos 2x$ 是关于 x 的______阶无穷小(写出阶数)。

2. 函数 $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$ 在闭区间__上单调增加。 3. $\int_0^2 \min(1,x^2)dx =$________。

4. 由 $y=\sqrt{|\cos x|}, y=0, x=0$ 及 $x=\pi$ 所围成的平面区域绕 x 轴旋转一周所形成的立体

体积为____________ 。

5. 设 $5x^3+40=\int_c^x f(t)dt$,其中 $f(t)$ 连续，积分下限 c 为常数,则 $f(c)=$_____。

三、试解下列各题（每小题 7 分，共 35 分）

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{x-\int_0^x \cos\sqrt{t}dt}{x\sin x}$ 2. 求函数 $f(x)=x\ln(1+x)$ 的具有皮亚诺型余项的三

阶麦克劳林公式。 3. 设 $\int xf(x)dx=\arctan x+c$，求 $\int f(x)dx$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x}, x\ge 0\\ e^x, x<0\end{cases}$，求 $\int_0^2 f(x-1)dx$. 5. 求 $\int_1^e \cos(\ln x)dx$.

四、（6 分）一立体 Ω：以抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $x=2$ 所围成的图形为底,而垂直于抛物线的轴的平面与 Ω 的截面都是等边三角形区域,求 Ω 的体积。

五、（7 分）在区间 $[0,\pi]$ 上讨论方程 $\sin^3 x\cos x=a$ 的实根的个数(其中 a 是正常数)。

六、（5 分）证明：当 $0<\vartheta<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$1+\vartheta\tan\vartheta>\dfrac{1}{\cos\vartheta}$。

七、（6 分）求曲线 $y=\ln x$ 的一条切线,切点的横坐标在区间 $[2,6]$ 内,使得该切线与直线 $x=2$, $x=6$ 和曲线 $y=\ln x$ 所围成的图形面积最小。

八、（6 分）设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内二阶可导, $f(0)=f(\frac{1}{2})$, $2\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx=f(2)$,证明存在一个 $\xi\in(0,2)$,使得 $f''(\xi)=0$ 。

九.（5 分）设 $f(x)$ 在 $[-1/a,a]$ 上非负连续 $(a>0)$,且 $\int_{-1/a}^a xf(x)dx=0$，证明:

$$\int_{-1/a}^a x^2 f(x)dx \le \int_{-1/a}^a f(x)dx$$

2010 级参考解答

一、DCABD　　二、1. $\underline{2}$;　2. $\underline{[0,1]}$;　3. $\underline{\frac{4}{3}}$;　4. $\underline{2\pi}$;　5. $\underline{60}$

三、1. $I=\lim\limits_{x\to0+0}\frac{x-\int_0^x\cos\sqrt{t}dt}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0+0}\frac{x-\int_0^x\cos\sqrt{t}dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to0+0}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{2x}=\frac{1}{4}$;

2. $f(0)=0,f'(0)=0,f''(0)=2;f'''(0)=-3..$ $x\ln(1+x)=x^2-\frac{1}{2}x^3+o(x^3),(x\to0)$

3. $xf(x)=\frac{1}{1+x^2}..$ $\int f(x)dx=\int\frac{1}{x(1+x^2)}dx=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c..$

4. $\int_0^2 f(x-1)dx\underset{x=1+t}{=}\int_{-1}^1 f(t)dt=\int_{-1}^0 e^x dx+\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=1-e^{-1}+\ln2.$

5. $I=\int_1^e\cos(\ln x)dx=e\cos1-1+\int_1^e\sin(\ln x)dx=e\cos1+e\sin1-1-\int_1^e\cos(\ln x)dx;$

$I=\frac{1}{2}(e\cos1+e\sin1-1).$

四、$\forall x\in[0,2];A(x)=\sqrt{12}x;$ $V=\int_0^2 A(x)dx=\int_0^2\sqrt{12}xdx=4\sqrt{3}.$

五、$f'(x)=\sin^2x(3-4\sin^2x).$ $x=\frac{\pi}{3},f(\frac{\pi}{3})=\frac{3\sqrt{3}}{16}-a.$ 当$a<\frac{3\sqrt{3}}{16}$时,方程有两个实

根,; 当$a=\frac{3\sqrt{3}}{16}$时, 方程有唯一实根,　当$a>\frac{3\sqrt{3}}{16}$时, 方程没有实根.

六、$f(\vartheta)=\cos\vartheta+\vartheta\sin\vartheta.;$ $f'(\vartheta)=\vartheta\cos\vartheta>0.;$ $f(\vartheta)>f(0)=1.$

七、$t\in[2,6]$; 切线方程: $y=\frac{1}{t}x+\ln t-1$

面积: $A(t)=\int_2^6(\frac{1}{t}x+\ln t-1-\ln x)dx=4\ln t+\frac{16}{t}-\int_2^6(1+\ln x)dx.$

$A'(t)=\frac{4}{t}-\frac{16}{t^2}=0,t=4,.$ 所求切线方程: $y=\frac{1}{4}x+2\ln2-1.$

八、$2\int_{1/2}^1 f(x)dx=f(2)\Rightarrow\exists\eta\in[1/2,1],st.f(\eta)=f(2);.$

Rolle $\exists\xi_1\in(0,\frac{1}{2}),\xi_2\in(\eta,2),st.f'(\xi_1)=0,f'(\xi_2)=0$

$\therefore\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,2),st.f''(\xi)=0.$

九、$(x+\frac{1}{a})(x-a)f(x)\le 0$; $\int_{-1/a}^{a}(x+\frac{1}{a})(x-a)f(x)dx\le 0$;.

$\int_{-1/a}^{a}x^2f(x)dx+(\frac{1}{a}-a)\int_{-1/a}^{a}xf(x)dx-\int_{-1/a}^{a}f(x)dx\le 0$; $\int_{-1/a}^{a}x^2f(x)dx\le\int_{-1/a}^{a}f(x)dx$

2011 级试卷

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1.设 $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}, g(x)=\sin x$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$（　　）。

$A.$ 同阶无穷小但不等价　$B.$ 低阶无穷小　$C.$ 高阶无穷小　$D.$ 等价无穷小

2.下列哪组函数中, $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 是同一个函数的两个不同的原函数（　　）。

$A.\ F_1(x)=x^3, F_2(x)=4-x^3$　　$B.\ F_1(x)=x^3, F_2(x)=4-\frac{x^3}{2}$

$C.\ F_1(x)=x^3, F_2(x)=x^3-2x$　　$D.\ F_1(x)=x^3, F_2(x)=x^3-2$

3. 若 $f(x)$ 连续且满足关系式: $\int_0^{x^3+1}f(t)dt=x^2$,则 $f(9)$ 等于(　)。

$A.\ \frac{1}{3}$　$B.\ 1$　$C.\ -1$　$D.\ 0$

4.设 $y=f(x)$ 对一切 x 满足 $y''-2y'-4y=0$,若 $f(x_0)>0$,且 $f'(x_0)=0$,则函数 $f(x)$ 在点 x_0（　　）

$A.$ 取得极大值　$B.$ 取得极小值　$C.$ 某个邻域内单调增加　$D.$ 某个邻域内单调减少

5.下列广义积分收敛的是（　）

$A.\ \int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$　$B.\ \int_0^1\frac{1}{x^2}dx$　$C.\ \int_{-1}^1\frac{1}{x}dx$　$D.\ \int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}dx$

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & x\ne 0\\ 1 & x=0\end{cases}$，则 $f'(0)=$__ 。2. 函数 $f(x)=\frac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}$ 的第一类间断点是__。

3. $\int_{-1}^{1}\frac{1+\tan x}{1+x^2}dx=$______。　　4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\dots+n^k}{n^{k+1}}=$________。$(k>0)$

5. 已知 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 有一拐点 $(-1,4)$ 且在 $x=0$ 处有极小值 2 ，则 $a=$___。

三、试解下列各题（每小题 7 分，共 35 分）