2014-2015 学年第二学期高等数学期中测试及数学竞赛试卷（2014 级）

（参加竞赛的同学全做，其他同学只做一、二大题）

一、填空题（8×6 分）

1. 设 $\vec{a}=(2,1,-2)$，$\vec{b}=(1,-1,-1)$，则 $(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(2\vec{a}+3\vec{b})=$______，$(2\vec{a}-3\vec{b})\times(2\vec{a}+3\vec{b})=$________。

2. 过直线 $l:\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{4}$ 且垂直平面 $\pi: x+4y-3z+7=0$ 的平面方程为________________。

3. 直线 $l:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+7}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$ 上与点 $(3,2,6)$ 距离最近的点的坐标为______________。

4. 设 $u=z\arctan\dfrac{y}{x}$，则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=$_______________。

5. 曲线 $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ x^2+y^2=2y \end{cases}$ 在点 $(1,1,2)$ 的切线的参数方程为_________________________。

6. 已知 $u=u(x,y)$ 由方程 $u=f(x,y,z,t)$ 和 $g(y,z,t)=0, h(z,t)=0$ 确定（f,g,h 均为可微函数），则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=$____________________。

7. 交换积分次序 $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{3-x} f(x,y)\,dy=$____。

8. 已知 $f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$，其中 D 由 $y=0, x=0, x^2+y^2=4$ 所围在第一象限内，则 $f(x,y)=$_________________________。

二、计算题（4×13 分）

1. 已知 f 的二阶导数连续，g 的二阶偏导数连续，$z=f\left(\dfrac{y}{x}\right)+g(e^x,\sin y)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

2. 求函数$z = x^3 + 4xy + y^2 + 3x - y + 3$的极大值点或极小值点。

3. 已知$D: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$，计算二重积分$\iint\limits_D \left| y - x^2 \right| dxdy$。

4. 已知D为由$x^2 + y^2 = 4$，$\left(x^2 + y^2\right)^2 = x^2 - y^2$，直线$y = \sqrt{3}x$及$x$轴在第一象限所围的区域，计算二重积分$\iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy$。

三、数学竞赛加题（5×20 分）

1. 1）设 $f(x)$ 可导，$f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} f(t)\,dt}{x^2\int_0^{x} f(t)\,dt}$；

2）设 $x_1=10$，$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在。

2. 设 $f(x,y)=\begin{cases} y\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0), \end{cases}$，试讨论 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性，可偏导性与可微性。

3. 计算 1）求$\int \frac{x+\sin x\cos x}{(\cos x - x\sin x)^2}dx$；　　2）设$f(x)$连续，$\int_0^x tf(x-t)dt = 1-\cos x$，求$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$。

4. 设$f(x)$在$[0,1]$上具有连续导数，且$f(0)=0$，$f(1)=\frac{1}{3}$，证明：存在$\xi \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$，$\eta \in \left(\frac{1}{2},1\right)$，使得$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$。

5. 已知$f(x)$在$[0,1]$上连续，证明$\left[\int_0^1 \frac{f(x)}{t^2+x^2}dx\right]^2 \le \frac{\pi}{2t}\int_0^1 \frac{f^2(x)}{t^2+x^2}dx \ (t>0)$。

参考答案

一、

1. 第一空 9 ；第二空 $(-36,0,-36)$

2. $22x-19y-18z-27=0$

3. $(3,-1,0)$

4. 0

5. $\begin{cases} x=1, \\ y=1+t, \\ z=2+2t \end{cases}$

6. $\dfrac{\partial f}{\partial x}$

7. $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx+\int_1^2 dy\int_0^1 f(x,y)\,dx+\int_2^3 dy\int_0^{3-y} f(x,y)\,dx$

8. $xy+\dfrac{2}{1-\pi}$

二、

1. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2}f'+e^x g_1'$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{x}f'+\cos y g_2'$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{1}{x^2}f'-\dfrac{y}{x^3}f''+e^x\cos y g_{12}''$

2. 极小值点$\left(\dfrac{5}{3},-\dfrac{17}{6}\right)$

3. $\dfrac{11}{30}$

4. $\dfrac{125\pi}{96}$

三、

1. 1）1

2. $f(x,y)$在点$(0,0)$处连续；$f_x(0,0)=0$，$f_y(0,0)=\dfrac{\pi}{2}$；$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微，

3. 1）$-\dfrac{1}{x\tan x-1}+C$ 2）1

4. 提示：拉格朗日中值定理

5. 提示：柯西—施瓦茨不等式