习题一　事件与概率

一. 填空题

1. **答**　$A = B$.

2. **答**　$C_5^1 \cdot C_5^1 = 25$.

3. **答**　$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

4. **答**　$A_1A_1A_1 + A_1A_1A_2 + A_1A_2A_2 + A_1A_1A_3$.

5. **答**　不大于二次 (≤ 2).

二. 计算题

1. **答**　(1) $A_1A_2A_3$；　(2) $A_1A_2A_3$；　(3) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

2. **解**　每一个部件用 3 只强度较弱的钉的概率为 $\dfrac{1}{C_{50}^3}$，则发生一个部件较弱的概率为 $\dfrac{10}{C_{50}^3} = \dfrac{1}{1960}$.

3. **解一**　A 表事件“取到二只球中至少有一只是白球.
基本事件总数

$$n = C_{10}^2 = 45.$$

A 所包含基本事件数

$$C_4^1 \times C_6^1 + C_4^2 = 30, \quad P(A) = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}.$$

解二　$P(A) = \dfrac{C_4^1 C_6^1 + C_4^2 C_6^0}{C_{10}^2} = \dfrac{24+6}{45} = \dfrac{2}{3}$.

解三　$P(A) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{C_6^2 \cdot C_4^0}{C_{10}^2} = 1 - \dfrac{15}{45} = \dfrac{2}{3}$.

4. **解** 这是一古典概型概率问题，设 A 表示“3 卷一套的放在一起”，B 表示“4 卷一套的放在一起”，C 表示“两套各自放在一起”，D表示“两套按卷次顺序排好”.

3 卷一套的放在一起，可把 3 卷看成一个整体，总共有 8 个位置，不同的放法共有 8！种，3 卷一套之间可以任意排，共有 3!种放法，所以

$$P(A)=\frac{8!\times 3!}{10!}=\frac{1}{15}.$$

5. **解** A 表事件“每一个班级各分配到一名优秀生”.

基本事件总数

$$r=C_{15}^{5}\cdot C_{10}^{5}\cdot C_{5}^{5}=\frac{15\,!}{5\,!\cdot 5\,!\cdot 5\,!}\ .$$

A 所包含的基本件数

$$r=C_{3}^{1}\cdot C_{12}^{4}\cdot C_{2}^{1}\cdot C_{8}^{4}\cdot C_{1}^{1}\cdot C_{4}^{4}=\frac{3\,!\times 12\,!}{4\,!\cdot 4\,!\cdot 4\,!},$$

$$P(A)=\frac{r}{n}=\frac{25}{91}\ .$$

习题二 概率性质 条件概率

一. 填空题

1. **答** 0.6.

2. **答** 0.8.

3. **答** 0.5.

若 A 与 B 相互独立，则 $P(AB)=P(A)P(B)$, 由概率的加法公式

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B),$$

则得 $$P(B)=\frac{P(A\bigcup B)-P(A)}{1-P(A)}=\frac{0.7-0.4}{1-0.4}=\frac{0.3}{0.6}=0.5.$$

4. **答** $\frac{17}{30}$.

二. 计算题

1. **解** A:“抽到的一人为男人”, B:“抽到的一人为色盲者”.

则 $$P(A)=\frac{3}{5},\quad P(B\mid A)=\frac{5}{100}=\frac{1}{20},$$

$$P(\boldsymbol{A})=\frac{2}{5},\quad P(B\mid \boldsymbol{A})=\frac{25}{10000}=\frac{1}{400}.$$

于是

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\boldsymbol{A})P(B\mid \boldsymbol{A})=\frac{3}{5}\times\frac{1}{20}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{400}=\frac{31}{1000}.$$

2. **解** (1) 因为 $AB\subset A$, $AB\subset B$, 所以 $P(AB)\le P(A)$, $P(AB)\le P(B)$, $A\subset B$时$P(AB)$ 最大，其值为 $P(A)=0.6$;

(2) 由$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$知，$P(A\cup B)$最大时，$P(AB)$最小，当 $A\cup B=\Omega$ 时，$P(A\cup B)$最大，此时$P(AB)$最小为0.3.

3. **解** 设 $A=\{$父亲得病$\}$, $B=\{$母亲得病$\}$, $C=\{$孩子得病$\}$.

已知 $P(C)=0.6$, $P(B|C)=0.5$, $P(A|BC)=0.4$,

则所求为 $P(BC\overline{A})$.

$$\begin{aligned}P(BC\overline{A})&=P(C)P(B\mid C)P(\overline{A}\mid BC)\\&=0.6\times0.5\times(1-0.4)\\&=0.18.\end{aligned}$$

4. **证** 由概率性质 $AB \subset C$，有 $P(AB) \le P(C)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

即 $$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \le P(C)$$

$$1 \ge P(A \cup B) \ge P(A) + P(B) - P(C)$$

故 $P(A) + P(B) - P(C) \le 1$.

5. **证** $$P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)} = \frac{P(A) + P(B) - P(A+B)}{P(A)}$$

因为 $P(A+B) \le 1$，所以

$$P(A+B) \ge \frac{p_1 + p_2 - 1}{p_1} = 1 - \frac{1 - p_2}{p_1}.$$

习题三 全概率公式 贝叶斯公式

一. 计算题

1. **解** 令事件 A_1={警报系统 A 有效}, 事件 A_2={警报系统 B 有效},

由 $P(A_1)=0.93$, $P(A_2)=0.94$, $P(A_2\mid\overline{A_1})=0.85$, 得

$$P(\overline{A_1}A_2)=P(\overline{A_1})P(A_2\mid\overline{A_1})=0.07\times0.85=0.0595,$$

$$P(A_1A_2)=P(A_2)-P(\overline{A_1}A_2)=0.94-0.0595=0.8805,$$

于是 $$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)$$

$$=0.93+0.94-0.8805=0.9895.$$

或用下面方法计算

$$P(A_1\cup A_2)=1-P(\overline{A_1\cup A_2})=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}\mid A_1)$$

$$=1-P(\overline{A_1})[1-P(\overline{A_2}\mid A_1)]=1-0.07\times(1-0.85)$$

$$=1-0.07\times0.15=0.9895.$$

2. **解** 设 A_1 = "从甲袋中取出的为白球", A_2 = "从甲袋中取出的为红球", B = "从乙袋中取出的为白球", 则

$$P(A_1)=\frac{n}{m+n},\quad P(A_2)=\frac{m}{n+m}$$

$$P(B|A_1)=\frac{N+1}{M+N+1},\quad P(B|A_2)=\frac{N}{M+N+1}.$$

则由全概率公式, 有

$$P(B)=P(A_1).\,P(B|A_1)+P(A_2).\,P(B|A_2)=\frac{n\,(N+1)+m.N}{(m+n).(M+N+1)}.$$

3. **解** 设 A =“抽得次品”, B_1, B_2, B_3 分别表示抽得甲、乙、丙机床的产品. 由全概率公式

$$P(A)=P(B_1)\,P(A|B_1)+P(B_2)\,P(A|B_2)+P(B_3)\,P(A|B_3)$$

$$=0.2\times0.2+0.3\times0.3+0.5\times0.1=0.18.$$

由贝叶斯公式, 所求概率为

$$P(B_2|A)=\frac{P(B_2)\,P(A|B_2)}{P(A)}=\frac{0.3\times0.3}{0.18}=0.5.$$

4. **解** 令事件 $A=\{原发信息0\}$，$\overline{A}=\{原发信息1\}$. $B=\{收到信息为0\}$, 首先求 $P(B)$.

已知 $P(A)=\dfrac{7}{10}$, $P(\overline{A})=\dfrac{3}{10}$, $P(B\mid A)=0.98$, $P(B\mid \overline{A})=0.01$, 利用全概率公式, 得

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid \overline{A})=\frac{7}{10}\times 0.98+\frac{3}{10}\times 0.01=0.689.$$

再利用贝叶斯公式, 得

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(B)}=\frac{\frac{7}{10}\times 0.98}{0.689}=0.9956.$$

5. **解** 设 A_i 为"第 i 项考核合格" $(i=1, 2, 3, 4)$. 已知

$$P(A_1)=0.6,\ P(A_2)=0.8,\ P(A_3)=0.91,\ P(A_4)=0.95,$$

因为 4 项考核相互独立，且被淘汰的对立事件为 4 过, 所以:

(1) 这项招工的淘汰率为

$$\begin{aligned} P(\overline{A_1A_2A_3A_4}) &= 1-P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) \\ &= 1-0.6\times 0.8\times 0.91\times 0.95 \\ &= 0.585. \end{aligned}$$

(2) 通过第一、三项被淘汰的概率为

$$\begin{aligned} P(A_1A_3\overline{A_2A_4}) &= P(A_1)P(A_3)P(\overline{A_2A_4}) \\ &= P(A_1)P(A_3)[1-P(A_2A_4)] \\ &= P(A_1)P(A_3)[1-P(P(A_2)P(A_4))] \\ &= 0.69\times 0.91\times [1-0.8\times 0.95]=0.131. \end{aligned}$$

(3) 若考核按顺序进行，应聘者一项考核不合格就被淘汰，不再参加后面项目考核, 这种情况下的淘汰率为

$$\begin{aligned} & P\{\overline{A}_1\cup(A_1\overline{A}_2)\cup(A_1A_2\overline{A}_3)\cup(A_1A_2A_3\overline{A}_4)\} \\ &= P(\overline{A}_1)+P(A_1\overline{A}_2)+P(A_1A_2\overline{A}_3)+P(A_1A_2A_3\overline{A}_4) \\ &= P(\overline{A}_1)+P(A_1)P(\overline{A}_2)+P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) \\ &\qquad +P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(\overline{A}_4) \\ &= (1-0.6)+0.6\times(1-0.8)+0.6\times 0.8\times(1-0.91) \\ &\qquad +0.6\times 0.8\times 0.91\times(1-0.95) \\ &= 0.585. \end{aligned}$$

习题四 离散型随机变量

一. 填空题

1. **答** 0.2.

2. **答** $\frac{27}{8}e^{-3}$ 或 $3.375e^{-3}$.

二. 计算题

1. **解**

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{44}$	$\frac{9}{220}$	$\frac{1}{220}$

2. **解** ξ 的取值范围为 $\xi=1$, $\xi=2$, $\xi=3$, $\xi=4$,

$$P\{\xi=1\}=\frac{c_3^3\times c_6^1}{c_9^4}=\frac{1}{21}, \qquad P\{\xi=2\}=\frac{c_3^2\times c_6^2}{c_9^4}=\frac{5}{14},$$

$$P\{\xi=3\}=\frac{c_3^1\times c_6^3}{c_9^4}=\frac{3\times 20}{126}=\frac{10}{21}, \qquad P\{\xi=4\}=\frac{c_3^0\times c_6^4}{c_9^4}=\frac{5}{42}.$$

即

ξ	1	2	3	4
p	$\frac{1}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{42}$

.

3. **解** (1) 此题为贝努利概型. 每次试验成功的概率 $p=0.3$, 设 5 次独立试验中成功的次数为 X, $X\sim B(5,0.3)$. 要求 $P\{X\geq 3\}$, 有

$$\begin{aligned}P\{X\geq 3\}&=C_5^3\times 0.3^3\times 0.7^2+C_5^4\times 0.3^4\times 0.7+0.3^5\\&\approx 0.1323+0.02835+0.00243\\&\approx 0.163.\end{aligned}$$

(2) 此题也为贝努利概型.

$$p=0.3,\ n=7,\ X\sim B(7,0.3).$$

$$\begin{aligned}P\{X\geq 3\}&=1-P\{X\leq 2\}\\&=1-[0.7^7+C_7^1\times 0.3\times 0.7^6+C_7^2\times 0.3^2\times 0.7^5]\\&\approx 0.353.\end{aligned}$$

4.

解 $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

又由分布律的性质有

$$1=\sum_{k=1}^{\infty}P\left\{X=k\right\}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A}{k(k+1)}=A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=A.$$

所以 $A=1$.

5.

解 $$P\{\xi=n\}=\begin{cases}0.3\times(0.42)^{k-1}, & n=2k-1\\ 0.28\times(0.42)^{k-1}, & n=2k\end{cases}.$$

$n=1,2,\cdots\cdots$

习题五　　分布函数 连续型随机变量

一. 填空题

1. **答**　由公式 $P\{X=x_0\}=F(x_0)-F(x_0-0)$, 算出

$$P\{X=-1\}=0.4-0=0.4,$$
$$P\{X=1\}=0.8-0.4=0.4,$$
$$P\{X=3\}=1-0.8=0.2.$$

所以X的概率分布为

X	-1	1	3
p	0.4	0.4	0.2

.

2. **答**　$\begin{cases} x,\ 0\le x\le\sqrt{2} \\ 0, \end{cases}$ (没有等号也对).

二. 计算题

1. **解**　因 $F(+\infty)=1$, 可知 $A=1$.

因为 $F(x)$ 是连续函数，所以有

$$\lim_{x\to(-\pi/2)^+} F(x)=C=0,\quad \lim_{x\to 0^-} F(x)=B=1.$$

2. **解**　$P\{0<\xi\le x\}=cx$,

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{x}{a}, & 0\le x<a \\ 1, & a\le x \end{cases}.$$

3. **解** 设 $F(x)$ 表示 X 的分布函数，当 $x<0$ 时，则

$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{u}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}e^{x};$$

当 $x\ge 0$ 时，则

$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)\,\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{u}\,\mathrm{d}u+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}e^{-u}\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-x}\right)=1-\frac{1}{2}e^{-x},$$

综合表示为

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x<0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, & x\ge 0\end{cases}.$$

4. **解** (1) $P\{\xi\ge 2\}=1-P\{\xi<2\}=1-F(2)=e^{-4}$.

(2) $P\{-3\le\xi<4\}=F(4)-F(-3)=1-e^{-8}-0=1-e^{-8}$.

(3) 由 $P\{\xi\ge a\}=1-F(a)=P\{\xi<a\}=F(a)$,

知 $2(1-e^{-2a})=1$，解得 $a=\dfrac{\ln 2}{2}$.

5. **解** 首先求一只电子管工作 1000 小时以上的概率.

$$p=\int_{1000}^{+\infty}\frac{1}{1000}e^{-\frac{x}{1000}}dx=e^{-1}\approx 0.3679.$$

只有当 5 只电子管皆工作在 1000 小时以上，仪器才能工作 1000 小时以上. 又“每只电子管工作 1000 小时以上”是相互独立的，所以所求概率为

$$p^{5}\approx 0.00673.$$

此概率很小.

习题六　　随机变量的函数分布

一．填空题

1.

答　$\psi(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 1\le y\le 3\\ 0, & \end{cases}$.

2.

答案　$\begin{array}{c|ccc} Y & 0 & \sqrt{2}/2 & 1 \\ \hline p & 9/16 & 5/16 & 1/8 \end{array}$.

提示　$P\left\{Y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}=P\left\{X=\dfrac{\pi}{4}\right\}+P\left\{X=-\dfrac{\pi}{4}\right\}=\dfrac{5}{16}$，等.

二．计算题

1.　**解**

η	1	2	5	10
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{8}$

2.

解 $y=2x^2+1$，$x^2=\dfrac{y-1}{2}$.

见图 2-1，当 $y\geq 1$ 时，Y 的分布函数

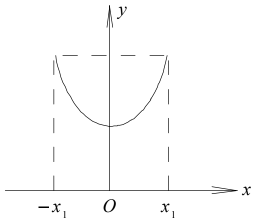

图 2-1

$$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\left\{X^2\leq \frac{y-1}{2}\right\}=P\{-x_1\leq X\leq x_1\}.$$

其中 $x_1=\sqrt{\dfrac{y-1}{2}}$

从而

$$F_Y(y)=\int_{-x_1}^{x_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\int_{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=2\int_0^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\ .$$

对变上限求导，得

$$f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}e^{-\frac{(y-1)}{4}}.$$

当 $y<1$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=0$，从而 $f_Y(y)=0$.

故 $$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}e^{-\frac{(y-1)}{4}}, & y\geq 1\\ 0, & y<1\end{cases}.$$

3. **解** K 服从 $U(0,5)$ 分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}1/5, & 0<x<5\\ 0, & 其它\end{cases}$$

方程 $4x^2+4Kx+K+2=0$ 有实根的条件是：

$$\Delta=(4K)^2-4\times4(k+2)=16(K-2)(K+1)\geq 0$$

解得 $K\geq 2$ 或 $K\leq -1$.

即 $\{方程有实根\}=\{K\geq 2\}\cup\{K\leq -1\}$.

故 $P\{方程有实根\}=P\{K\geq 2\}+P\{K\leq -1\}$

$$=\int_2^5 1/5\,dx+0=3/5.$$

4. **证** $P\{|X|<a\}=P\{-a<X<a\}=\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$

$$=2[F(a)-F(0)]=2F(a)-1.$$

5. **解** (1) $Y=2X+3$，于是

$$y=2x+3,\ x=\frac{y-3}{2},\ x'=\frac{1}{2},$$

故

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\frac{y-3}{2}\right)^3 e^{-\left(\frac{y-3}{2}\right)^2}, & y\geq 3\\ 0, & y<3\end{cases};$$

(2) $Y=X^2$，由 $y=x^2$，得出

$$x_1=\sqrt{y},\ x_1'=\frac{1}{2\sqrt{y}};\quad x_2=-\sqrt{y}<0,\ x_2'=-\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

故

$$f_Y(y)=f(\sqrt{y})(\sqrt{y})'+f(-\sqrt{y})\,|(-\sqrt{y})'|$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{y}}(\sqrt{y})^3 e^{-(\sqrt{y})^2}+0\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}ye^{-y}, & y>0\\ 0, & y\leq 0\end{cases};$$

(3) $Y=\ln X$，于是

$$y=\ln x,\ x=e^y,\ x'=e^y,$$

故

$$f_Y(y)=f(e^y)e^y=2e^{4y}e^{-e^{2y}}\ (-\infty<y<+\infty).$$

习题七　　二维随机变量

一．填空题

1. **答案** $\dfrac{1}{36}$.

提示 $\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3} cij = 1$.

2. **答** $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases},$$

设二维随机变量 (X,Y) 服从平面区域 D 上的均匀分布，且区域 D 的面积为 A，则 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases},$$

而区域 $D=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$ 的面积为 π，因此 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}.$$

二．计算题

1. **解**　$F(x,y)$ 不可能是某二维随机变量的联合分布函数．因

$$P\{0<\xi\le 2, 0<\eta\le 1\}=F(2,1)-F(0,1)-F(2,0)+F(0,0)$$
$$=1-1-1+0=-1<0.$$

故 $F(x,y)$ 不可能是某二维随机变量的联合分布函数．

2. **解** (1)

$\xi\backslash\eta$	0	1
-1	1 / 2	0
0	1 / 3	1 / 6

(2) $$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<-1 \text{ 或 } y<0\\ 1/2, & -1\le x<0,\ y\ge 0\\ 5/6, & x\ge 0,\ 0\le y<1\\ 1, & x\ge 0,\ y\ge 1\end{cases}.$$

3. **解** $P\{\max\{X, Y\} \geq 0\}$

$$= P\{X, Y \text{ 至少一个大于等于 } 0\}$$

$$= P\{X \geq 0\} + P\{Y \geq 0\} - P\{X \geq 0, Y \geq 0\}$$

$$= \frac{4}{7} + \frac{4}{7} - \frac{3}{7} = \frac{5}{7}.$$

4. **解** (Y, Z) 可能取值为 $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, 且

$$P\{Y=0, Z=0\} = P\{X \leq 1, X \leq 2\} = P\{X \leq 1\} = F(1) = 1 - e^{-1}$$

$$P\{Y=0, Z=1\} = P\{X \leq 1, X > 2\} = 0$$

$$P\{Y=1, Z=0\} = P\{X > 1, X \leq 2\} = P\{1 < X \leq 2\}$$

$$= F(2) - F(1) = e^{-1} - e^{-2}$$

$$P\{Y=1, Z=1\} = P\{X > 1, X > 2\} = P\{X > 2\}$$

$$= \int_2^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-2}$$

故

Z \ Y	0	1
0	$1 - e^{-1}$	$e^{-1} - e^{-2}$
1	0	e^{-2}

5.

解 $$F(x, y) = \begin{cases} \int_0^x \int_0^y 12 e^{-(3x+4y)}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

$$= (1 - e^{-3x})(1 - e^{-4y})$$

$$P\{0 \leq \xi < 1, 0 \leq \eta < 2\} = F(1, 2) - F(1, 0) - F(0, 2) + F(0, 0)$$

$$= (1 - e^{-3})(1 - e^{-8}).$$

习题八　　　边缘分布 独立性

一．填空题

1.

解　①～⑦ 分别填：$\frac{5}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{5}{12}, \frac{1}{6}$.

2.

答　$\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$.

二．计算题

1.　**解**　当 $x>0$ 时

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty} e^{-y}\,\mathrm{d}y=e^{-x}.$$

当 $x\le 0$ 时，$f(x,y)=0$，故 $f_X(x)=0$. 得

$$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & 其它 \end{cases}.$$

同理　$$f_Y(y)=\begin{cases} \int_0^x e^{-y}\,\mathrm{d}y, & y>0 \\ 0, & 其它 \end{cases}=\begin{cases} ye^{-y}, & y>0 \\ 0, & 其它 \end{cases}.$$

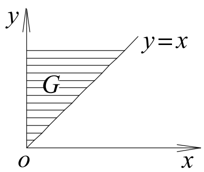

图 3-9

2.　**解** (1) 本题是已知了 X_1 与 X_2 的边缘分布律，条件 $P\{X_1X_2=0\}=1$，求出联合分布．列表如下：

X_2 \ X_1	-1	0	1	$P\{X_2=j\}$
0	1/4	0	1/4	1/2
1	0	1/2	0	1/2
$P\{X_1=i\}$	1/4	1/2	1/4	1

由已知 $P\{X_1X_2=0\}=1$，即等价于 $P\{X_1X_2\ne 0\}=0$，可知

$$P\{X_1=1, X_2=1\}=0,\ P\{X_1=-1, X_2=1\}=0.$$

再由 $p_{\cdot 1}=p_{-11}+p_{11}+p_{01}$， 得 $p_{01}=\frac{1}{2}$，

$$p_{-10}=p_{-1\cdot}-p_{-11}=\frac{1}{4},\ p_{10}=p_{1\cdot}-p_{11}=\frac{1}{4},$$

从而得　$p_{00}=0$.

(2) 由于　$p_{-10}=\frac{1}{4}\ne p_{-1\cdot}\cdot p_{\cdot 0}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$，

所以知 X_1 与 X_2 不独立．

3. **解** (1) 根据 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$

则 $$1 = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} ke^{-(5x+6y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= k\left(\int_0^{+\infty} e^{-5x}\,\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_0^{+\infty} e^{-6y}\,\mathrm{d}y\right)$$

$$= k \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{30}k$$

故 $k = 30$.

(2) 当 $x > 0$ 时

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} 30\,e^{-5x-6y}\,\mathrm{d}y$$

即 $$f_X(x) = \begin{cases} 5\,e^{-5x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases},$$

同理当 $y > 0$ 时

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} 30\,e^{-5x-6y}\,\mathrm{d}x$$

即 $$f_Y(y) = \begin{cases} 5\,e^{-6y}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases},$$

因为 $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$, 故 X, Y 相互独立.

4. **解** 先写出 (X, Y, Z) 的联合分布列, 再写出 (X, Z) 的联合分布列(用求边缘分布列的方法).

当 $z = 1$ 时

$Y \backslash X$	0	1
0	$(1-p)^2$	0
1	0	p^2

当 $z = 0$ 时

$Y \backslash X$	0	1
0	0	$p(1-p)$
1	$p(1-p)$	0

所以, (X, Z) 的联合分布列为

$X \backslash Z$	0	1
0	$p(1-p)$	$(1-p)^2$
1	$p(1-p)$	p^2

对 $X=i$, $Z=j$, $i, j = 0, 1$, 若 X, Z 独立, 应有 $p_{ij} = p_{i\cdot}\,p_{\cdot j}$. 由

$$P\{X=1, Z=1\} = p^2 = P\{X=1\}P\{Z=1\} = p[\,p^2 + (1-p)^2\,]$$

解得 $p = 1/2$, 经验证, 对 (X, Z) 的一切 (i, j), 均满足

$$p_{ij} = p_{i\cdot}\,p_{\cdot j},$$

所以, 当 $p = 1/2$ 时, X 与 Z 相互独立.

习题九　　条件分布　二维随机变量的函数分布

一. 填空题

1. **答**

Z	1	4
P	0.16	0.84

.

由 X 的分布律可得 X^2 的分布律

X^2	1	4
P	0.4	0.6

而 Y^2 的分布律与 X^2 的分布律相同，故随机变量 Z 的取值仅为1与4．于是

$$P(Z=1)=P(X^2=1,\ Y^2=1)=P(X^2=1)\,P(Y^2=1)=0.16,$$

$$P(Z=4)=1-P(Z=1)=0.84.$$

2. **答**

ξ	0	1
$P\{\xi\mid\eta\neq1\}$	3/7	4/7

.

二. 计算题

1. **解**

ξ	0	1
$\eta=1$	0.1	0.3
$\eta=2$	0.2	0.1
$\eta=3$	0.1	0.2

2. **解**

ζ	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0
P	0	4/15	1/5	0	8/15

评分参考: 每列 2 分 .

3.

解 $$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

注意在 y 处 x 值位于 $|x|\le\sqrt{R^2-y^2}$ 这个范围内，$f(x,y)$ 才有非零值，故在此范围内，有

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{\frac{1}{\pi R^2}}{\frac{2}{\pi R^2}\cdot\sqrt{R^2-y^2}}=\frac{1}{2\sqrt{R^2-y^2}},$$

即 $Y=y$ 时 X 的条件分布密度为

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{R^2-y^2}}, & |x|\le\sqrt{R^2-y^2}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}.$$

同法可得 $X=x$ 时 Y 的条件分布密度为

$$f_{X|Y}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{R^2-x^2}}, & |y|\le\sqrt{R^2-x^2}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}.$$

由于条件分布密度与边缘分布密度不相等，所以 X 与 Y 不独立.

4.

解 $$F(z)=P\{\xi+\eta<z\}=\iint_{x+y<z}\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

当 $z<1$ 时， $F(z)=0$；

当 $1\le z<2$ 时， $F(z)=\int_1^z \mathrm{d}y\int_0^{z-y}6\times\mathrm{d}x=(z-1)^3$；

当 $z\ge 2$ 时， $F(z)=1$；

$$F(z)=\begin{cases}0, & z<1\\ (z-1)^3, & 1\le z<2\\ 1, & z\ge 2\end{cases};$$

$$\varphi(z)=\begin{cases}3(z-1)^2, & 1\le z\le 2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}.$$

习题十　随机变量的数学期望

一．填空题

1.　**答**　2.4.

2.　**答**　2.

二．计算题

1.　**解**　$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$

$$=\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1500}\frac{x^2}{(1500)^2}\mathrm{d}x+\int_{1500}^{3000} x\frac{3000-x}{(1500)^2}\mathrm{d}x+\int_{3000}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{1500}\frac{x^2}{(1500)^2}\mathrm{d}x+\int_{1500}^{3000}\frac{(3000-x)x}{(1500)^2}\mathrm{d}x=1500\,.$$

2.

解　$E(\xi)=\sum_{k=1}^{3} x_k p_k=(-2)\times 0.4+0\times 0.3+2\times 0.3=-0.2$

$$E(\xi-E(\xi))^3=\sum_{k=1}^{3}(x_k-E\xi)^3 p_k$$

$$=[-2-(-0.2)]^3\times 0.4+(0+0.2)^3\times 0.3$$

$$+(2+0.2)^3\times 0.3$$

$$=0.864\,.$$

3.　**解**　$E(V)=E(IR)=E(I)\cdot E(R)$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi_I(x)\,\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi_R(y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 x\cdot 3x^2\mathrm{d}x\cdot\int_0^2 y\cdot\frac{1}{2}y\mathrm{d}y=\frac{3}{4}x^4\Big|_0^1\cdot\frac{1}{6}y^3\Big|_0^2$$

$$=\frac{3}{4}\times\frac{8}{6}=1.$$

4.

解 $P\{Y=-1\}=P\{X<10\}=P\left\{\dfrac{X-\mu}{1}<\dfrac{10-\mu}{1}\right\}=\Phi(10-\mu),$

$$P\{Y=-5\}=P\{X>12\}=P\left\{\dfrac{X-\mu}{1}>\dfrac{12-\mu}{1}\right\}=1-\Phi(12-\mu),$$

$$P\{Y=20\}=P\{10\le X\le 12\}=P\left\{\dfrac{10-\mu}{1}\le\dfrac{X-\mu}{1}\le\dfrac{12-\mu}{1}\right\}$$

$$=\Phi(12-\mu)-\Phi(10-\mu).$$

所以，随机变量 Y 的分布律为

Y	-5	-1	20
P	$1-\Phi(12-\mu)$	$\Phi(10-\mu)$	$\Phi(12-\mu)-\Phi(10-\mu)$

由此得

$$\begin{aligned}E(Y)&=(-5)\times[1-\Phi(12-\mu)]+(-1)\times\Phi(10-\mu)\\&\quad+20\times[\Phi(12-\mu)-\Phi(10-\mu)]\\&=25\Phi(12-\mu)-21\Phi(10-\mu)-5.\end{aligned}$$

令 $g(\mu)=25\Phi(12-\mu)-21\Phi(10-\mu)-5$，则

$$\begin{aligned}g'(\mu)&=-25\Phi(12-\mu)+21\Phi(10-\mu)\\&=-25\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(12-\mu)^2}{2}}+21\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(10-\mu)^2}{2}}\\&=(-25\times e^{2\mu-22}+21)\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(10-\mu)^2}{2}}.\end{aligned}$$

令 $g'(\mu)=0$，得 $g(\mu)$ 的唯一驻点

$$\mu_0=11+\frac{1}{2}\ln\frac{21}{25}\approx 10.9128.$$

而且可以判定 μ_0 点是函数 $g(\mu)$ 的极大值点，从而也是 $g(\mu)$ 的最大值点. 因此，当 $\mu_0=11+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{21}{25}\approx 10.9128$ 时，零件的利润为最大.

习题十一　　　随机变量的方差

一. 填空题

1. **答**　$\frac{1}{6}$.

2. **答**　由题设知X的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & x\in[-1,2]\\ 0, & 其它\end{cases},$$

由连续型随机变量的数学期望公式有

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}Y(x)f(x)\,dx=\frac{1}{3}\int_{-1}^{2}Y(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[\int_{-1}^{0}Y(x)\,dx+\int_{0}^{2}Y(x)\,dx\right]=\frac{1}{3}(-1+2)=\frac{1}{3}.$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}Y^2(x)f(x)\,dx=\frac{1}{3}\int_{-1}^{2}Y^2(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[\int_{-1}^{0}Y^2(x)\,dx+\int_{0}^{2}Y^2(x)\,dx\right]=\frac{1}{3}(1+2)=1.$$

于是　$$D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}.$$

二. 计算题

1. **解** 设 ξ 表示 k 次所抽球的号码和，ξ_i 表示第 i 次所抽球的号码，

则 $\xi=\sum_{i=1}^{k}\xi_i$

$$p(\xi_i=j)=\frac{1}{n}\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

$$E(\xi_i)=\sum_{j=1}^{n}j\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}j=\frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}$$

$$E(\xi_i^2)=\sum_{j=1}^{n}j^2\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}j^2=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$D(\xi_i)=E(\xi_i^2)-(E(\xi_i))^2$$

$$=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{(n+1)^2}{4}=\frac{n^2-1}{12}$$

$$E(\xi)=E\left(\sum_{i=1}^{k}\xi_i\right)=\sum_{i=1}^{k}E(\xi_i)=\frac{k(n+1)}{2}$$

因 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$ 相互独立，故

$$D(\xi)=D\left(\sum_{i=1}^{k}\xi_i\right)=\sum_{i=1}^{k}D(\xi_i)=\frac{k(n^2-1)}{12}.$$

2. **解** 随机变量 X 的所有可能取值为 3, 4, 5, 取各个值的概率为

$$P(X=3)=\frac{1}{C_5^3}=\frac{1}{10},\quad P(X=4)=\frac{C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{10},\quad P(X=5)=\frac{C_4^2}{C_5^3}=\frac{6}{10},$$

则 X 的概率分布为

X	3	4	5
p_k	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

而 $$E(X)=3\times\frac{1}{10}+4\times\frac{3}{10}+5\times\frac{6}{10}=\frac{45}{10}=4.5,$$

$$E(X^2)=9\times\frac{1}{10}+16\times\frac{3}{10}+25\times\frac{6}{10}=\frac{207}{10}=20.7,$$

所以 $$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=20.7-(4.5)^2=0.45.$$

3. **证** $E[(\xi-c)^2]=E(\xi^2-2\xi c+c^2)=E(\xi^2)-2cE(\xi)+c^2$

$$=E(\xi^2)+[c-E(\xi)]^2-[E(\xi)]^2$$

$$=[c-E(\xi)]^2+D(\xi)>D(\xi)\ (c\neq E(\xi)).$$

4. **解** AB 的弦长为 $\eta=2R|\sin\xi|$, ξ 的概率密度为

$$\varphi(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & -\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$E(\eta)=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}2R|\sin\theta|\cdot\frac{1}{\pi}\,d\theta=\frac{4R}{\pi}$$

$$E(\eta^2)=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}4R^2\sin^2\theta\cdot\frac{1}{\pi}\,d\theta=2R^2$$

$$D(\eta)=E(\eta^2)-E(\eta)^2=2R^2\left(1-\frac{8}{\pi^2}\right).$$

习题十二　　　　协方差 相关系数

一．填空题

1. **答**　由于

$$\operatorname{Cov}(2X,3Y)=E\{[2X-E(2X)][3Y-E(3Y)]\}$$

$$=6E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=6\operatorname{Cov}(X,Y)$$

又 $\rho_{XY}=\dfrac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$，故

$$\operatorname{Cov}(2X,3Y)=6\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$$

得　$D(2X-3Y)=D(2X)+D(3Y)-2Cov(2X,3Y)$

$$=4D(X)+9D(Y)-12\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$$

$$=4\times4+9\times9-12\times0.5\times2\times3$$

$$=97-36=61.$$

2. **答**　0.1.

二．计算题

1.

解 由 $P(XY=1)=\frac{1}{5}$，得 $P(X=1,Y=1)=\frac{1}{5}$，利用 X,Y 的边缘概率分布，有

$$P(X=0,Y=1)=P(Y=1)-P(X=1,Y=1)=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20},$$

$$P(X=0,Y=2)=P(X=0)-P(X=0,Y=1)=\frac{1}{3}-\frac{1}{20}=\frac{17}{60},$$

$$P(X=1,Y=2)=P(X=1)-P(X=1,Y=1)=\frac{2}{3}-\frac{1}{5}=\frac{7}{15}.$$

则得 (X,Y) 的联合概率分布为

$Y \backslash X$	0	1	$P(Y=y_j)$
1	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{17}{60}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{3}{4}$
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

XY 的概率分布为

XY	0	1	2
p_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{15}$

X 和 Y 的协方差为

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y)&=E(XY)-E(X)E(Y)\\&=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{7}{15}-\left(1\times\frac{2}{3}\right)\left(1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{3}{4}\right)\\&=\frac{1}{5}+\frac{14}{15}-\frac{2}{3}\times\frac{7}{4}\\&=\frac{17}{15}-\frac{14}{12}=-\frac{1}{30}.\end{aligned}$$

2. **解** $E(\eta_1)=aE(\xi_1)+bE(\xi_2)=0$, $E(\eta_2)=aE(\xi_1)-bE(\xi_2)=0$,

$$D(\eta_1)=D(\eta_2)=a^2D(\xi_1)+b^2D(\xi_2)=a^2+b^2.$$

(1) $$E(\eta_1^2+\eta_2^2)=E(\eta_1^2)+E(\eta_2^2)$$
$$=D(\eta_1)+E^2(\eta_1)+D(\eta_2)+E^2(\eta_2)$$
$$=2(a^2+b^2),$$
$$E(\eta_1^2-\eta_2^2)=E(\eta_1^2)-E(\eta_2^2)=0.$$

(2) $$\rho=\frac{\operatorname{cov}(2\eta_1,\ 3\eta_2)}{\sqrt{D(2\eta_1)}\ \sqrt{D(3\eta_2)}}=\frac{6\operatorname{cov}(a\xi_1+b\xi_2,a\xi_1-b\xi_2)}{\sqrt{2^2D(\eta_1)}\ \sqrt{3^2D(\eta_2)}}$$
$$=\frac{a^2D(\xi_1)-b^2D(\xi_2)}{a^2+b^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

3. **解** $p(AB)=p(A)\cdot p\left(\dfrac{B}{A}\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{8}$，$p(\overline{A})=\dfrac{3}{4}$

$p(AB)=p(B)$ 及 $p(B)=\dfrac{1}{2}$，$p(\overline{B})=\dfrac{1}{2}$

$p(\overline{A}\,\overline{B})=1-p(A\cup B)=1-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{3}{8}$

$p(\overline{A}B)=p(B)\cdot p\left(\dfrac{\overline{A}}{B}\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{8}$

$p(A\overline{B})=p(A)\cdot p\left(\dfrac{\overline{B}}{A}\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{8}$

故 (ξ,η) 的联合分布律为

η	$\xi=0$	$\xi=1$	p_{oj}
0	3/8	1/8	4/8
1	3/8	1/8	4/8
p_{io}	6/8	2/8	

$$E(\xi)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4},\quad E(\eta)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2},\quad E(\xi\eta)=\frac{1}{8}$$

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=E(\xi\eta)-E(\xi)\cdot E(\eta)=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=0.$$

4. **证** $E(X)=E(\cos Z)$

$$=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\times 0.3+\cos\frac{\pi}{2}\times 0.3+\cos 0\times 0.4=0.4\,.$$

$$E(Y)=E(\sin Z)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\times 0.3+\sin 0\times 0.4+\sin\frac{\pi}{2}\times 0.3=0.$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=0.24\,,\ D(Y)=0.6\,,$$

$$E(XY)=E\,[\cos Z\sin Z\,]=\frac{1}{2}E\,(\sin 2Z)=0.$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=0.$$

所以 $\rho_{XY}=0$, 即 X, Y 不相关.

$$P\{X=1\}=P\{\cos Z=1\}=P\{Z=0\}=0.4\,,$$

$$P\{Y=1\}=P\{\sin Z=1\}=P\left\{Z=\frac{\pi}{2}\right\}=0.6\,,$$

$$P\{X=1\}\cdot P\{Y=1\}=0.24\,,$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{\cos Z=1,\sin Z=1\}=0\,,$$

$$P\{X=1,Y=1\}\neq P\{X=1\}\cdot P\{Y=1\}.$$

故 X, Y 不相互独立 .

习题十三　　　中心极限定理　统计量分布

一．填空题

1.　**答**　0.5.

2.　**答**　$\frac{1}{12}$.

二．计算题

1.　**解**　设各零件的重量为 $X_i\,(i=1,2,\cdots,5000)$, 已知

$$\mu=E(X_i)=0.5\,\text{kg}\,,\ \ \sqrt{D(X_i)}=\sigma=0.1\,\text{kg}\,,$$

总重量 $Z=\sum\limits_{i=1}^{5000}X_i$，故所求概率为

$$P\{Z>2510\}=P\left\{\frac{Z-5000\times 0.5}{0.1\sqrt{5000}}>\frac{2510-5000\times 0.5}{0.1\sqrt{5000}}\right\}$$

$$\approx 1-\Phi\left(\frac{10}{0.1\sqrt{5000}}\right)$$

$$=1-\Phi(1.414)=1-0.9214=0.0787\,.$$

2.　**解**　(1) 因为 X 的分布律为

$$P\{X=x\}=p^{x}(1-p)^{1-x},\ \ x=0.1,$$

所以 $X_1, X_2,\cdots, X_5$ 的联合概率密度为

$$\prod_{i=1}^{5}P\{X=x_i\}=\prod_{i=1}^{5}p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}=p^{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i}(1-p)^{5-\sum\limits_{i=1}^{5}x_i}\,.$$

(2) X_1+X_2，$\max\limits_{1\le i\le 5}X_i$，$(X_5-X_1)^2$ 都是统计量，X_5+2p 不是统计量 (因 p 是未知参数).

3. **解** $X_1-2X_2\sim N(0,5),\ 3X_3-4X_4\sim N(0,25).$

故 $$\frac{1}{\sqrt5}(X_1-2X_2)\sim N(0,1),$$

$$\frac{1}{\sqrt5}(3X_1-4X_2)\sim N(0,1),$$

从而 $$\frac{1}{5}(X_1-2X_2)^2+\frac{1}{25}(3X_1-4X_2)^2\sim\chi^2(2)$$

应取 $a=\frac{1}{5},\ b=\frac{1}{25},$

此时 X 服从自由度为 2 的 χ^2 分布.

4.

解 由于 $$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{Y_i-\overline{Y}}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n-1)$$

依题意 $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i-\mu}{\sigma}$ 与 $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{Y_i-\overline{Y}}{\sigma}\right)^2$ 相互独立, 所以

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i-\mu}{\sigma}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{Y_i-\overline{Y}}{\sigma}\right)^2}{n}}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}}$$

服从 $t(n-1)$ 分布.

习题十四　　点估计

一．计算题

1.

解　(1) 因为 $E(X)=\dfrac{a+8}{2}$，得 $a=2E(X)-8$，所以 $a=2(\overline{X})-8$；

(2) 因为 $E(X)=\dfrac{3+b}{2}$，得 $b=2E(X)-3$，所以 $b=2(\overline{X})-3$.

2. **解**　$\because \quad E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\,\mathrm{d}x=0$，

$\therefore$ 不能利用 $E(X)$ 构造 θ 的估计.

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi(x)\,\mathrm{d}x=2\theta^2$$

$\therefore \quad \theta^2=\dfrac{1}{2}E(X^2)$

$$\theta=\sqrt{\frac{1}{2}E(X^2)}=\sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\ .$$

3.

解
$$L(\sigma)=\frac{1}{(2\sigma)^n}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma}\right)$$

$$\ln L(\sigma)=-n\ln(2\sigma)-\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma}=-n\ln 2-n\ln\sigma-\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma}$$

$$\frac{\partial\ln L(\sigma)}{\partial\sigma}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma^2}=0$$

则　$\hat{\sigma}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$.

4. **解**　令

$$E(a\theta_1+2a\theta_2)=\theta,\ aE(\theta_1)+2aE(\theta_2)=\theta$$

由题设 $E(\theta_1)=\theta,\ E(\theta_2)=\theta$，所以有 $a\theta+2a\theta=\theta$，解得 $a=\dfrac{1}{3}$.

即应选择　$a=\dfrac{1}{3}$.

5.

解 $\because\ E(a_1)=\dfrac{a}{5}+\dfrac{3a}{10}+\dfrac{a}{2}=a,\ D(a_1)=\dfrac{1}{25}+\dfrac{9}{100}+\dfrac{1}{4}=0.38;$

$$E(a_2)=\frac{a}{3}+\frac{a}{4}+\frac{5a}{12}=a,\qquad D(a_2)=\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{144}=0.347;$$

$$E(a_3)=\frac{a}{3}+\frac{a}{6}+\frac{a}{2}=a,\qquad D(a_3)=\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{4}=0.389,$$

$\therefore\ \ a_1, a_2, a_3$ 均为a的无偏估计量, a_2 的方差最小.

6.

解 (1) $E(X)=\displaystyle\int_0^{+\infty}k\left(\frac{x}{b}\right)^k e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^k}\,\mathrm{d}x$

令 $\left(\dfrac{x}{b}\right)^k=u$, 则 $\dfrac{k}{b}\left(\dfrac{x}{b}\right)^{k-1}\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$,

于是 $\quad E(X)=\displaystyle\int_0^{+\infty}bu^{\frac{1}{k}}e^{-u}\,\mathrm{d}u=b\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right).$

其中 k 为已知.

以 $\bar{x}$ 代 $E(X)$, $\hat{b}$ 代 b, 得 b 的矩估计

$$\hat{b}=\frac{\bar{x}}{\Gamma\left(\dfrac{1}{k}+1\right)}.$$

(2) 似然函数

$$L(b)=\left(\frac{k}{b}\right)^n\left(\frac{x_1,\cdots,x_n}{b^n}\right)^{k-1}e^{-\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{b}\right)^k},$$

$$\ln L=n\ln k-n\ln b+(k-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-(k-1)n\ln b-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^k}{b^k}\ \frac{\partial\ln L}{\partial b}$$

$$=-\frac{n}{b}-\frac{(k-1)n}{b}+\frac{1}{b^{k+1}}\sum_{i=1}^{n}x_i^k=0.$$

解和 b 的极大似然估计 $\hat{b}=\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^k\right)^{1/k}.$

习题十五　　区间估计

一. 填空题

1.　**答**　$P\{\hat{\theta}_1 \le \theta \le \hat{\theta}_2\} = 0.95.$

2.　**答**　$(5.204, 36.667).$

$n=10$, $S^2=11$, $\alpha=0.05$，$\chi^2_{0.025}(9)=19.023$，$\chi^2_{0.975}(9)=2.700$，

因此　$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right) = (5.204, 36.667).$$

3.　**答**　$\dfrac{4\sigma^2}{L^2} Z^2_{\frac{\alpha}{2}}.$

由 $2\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}} \le L$，得 $n \ge \left(\dfrac{2\sigma}{L} Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2.$

二. 计算题

1.　**解**　$\bar{x}=1509.5$, $S=32.226$, $n=16$, $t_{0.025}(15)=2.1315.$

μ 的置信设为 0.95 的置信区间为

$$1509.5 \pm \frac{32.226}{\sqrt{16}} \times 2.1315 = 1509.5 \pm 17.172$$

$$= [1492.33,\ 1526.67].$$

2.　**解**　如果总体期望 μ 未知时，则 σ^2 的置信区间公式为

$$I = \left[\frac{1}{\lambda_2}\sum_{i=1}^{12}(x_i - \bar{x})^2, \frac{1}{\lambda_1}\sum_{i=1}^{12}(x_i - \bar{x})^2\right]$$

由题知　$$\sum_{i=1}^{12}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{12} x_i^2 - 12\bar{x}^2 = 4.05$$

$$\lambda_1 = \chi^2_{0.95}(11) = 4.58,\quad \lambda_2 = \chi^2_{0.05}(11) = 19.68$$

故所求的置信区间为 $[0.21, 0.88]$.

3. **解** $\mu_1-\mu_2=\mu_\alpha$ 因这是成对数据样本，距离差 $d\sim N(\mu_d,\sigma_d^2)$，$\mu_d,\sigma_d^2$ 未知，求 μ_d 的 99% 的置信区间.

由所给数据，算得距离差样本均值为

$$\bar{d}=1112.5,\ s_d=1454.49.$$

选 t 分布随机变量

$$T=\frac{\bar{d}-\mu_d}{S_d/\sqrt{n}}\sim t(n-1),$$

得 $\mu_d=\mu_1-\mu_2$ 的 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\bar{d}\pm t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{S_d}{\sqrt{n}}\right).$$

由 $1-\alpha=0.99$，$\alpha=0.01$，$\dfrac{\alpha}{2}=0.005$，$n=8$，查 t 分布表得

$$t_{0.005}(7)=3.499,$$

于是 μ_d 的置信区间为

$$(1112.5\pm3.499\times1454.49/\sqrt{8}),\ 即\ (-687,2912).$$

4. **解** 由所给数据算出

$\bar{x}_1=98.40$，$\bar{x}_2=110.71$，$s_1^2=8.73^2$，$s_2^2=32.19^2$，$n_1=5$，$n_2=7$.

因为是求方差比的区间估计，故选用 F 分布变量，即

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}\Big/\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1).$$

对于置信度 $1-\alpha$，取双侧概率相等的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\ \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\right).$$

本题所给 $1-\alpha=0.90$，$\alpha=0.10$，$\dfrac{\alpha}{2}=0.05$，$n_1=5$，$n_2=7$.

查 F 分布表得

$$F_{0.05}(6,4)=6.16,\ F_{0.05}(4,6)=4.53.$$

$$\frac{s_1^2}{s_2^2}=\frac{8.73^2}{32.19^2}=0.0376.$$

于是 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的 0.90 的置信区间为

$$\left(0.0736\times\frac{1}{4.53},0.0736\times6.16\right),\ 即\ (0.016,0.453).$$

习题十六　　假设检验

一. 填空题

1. **答**　$T = \dfrac{\overline{X}}{Q}\sqrt{n(n-1)}$.

2. **解**　填 $\dfrac{s_1^2}{\lambda s_2^2}$;

$\{F < F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$ 或 $F > F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\}$.

$$F = \frac{s_1^2\sigma_1^2}{s_2^2\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$$

当 H_0 成立时 $\left(\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=\lambda\right)$,

$$F = \frac{s_1^2}{\lambda s_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1).$$

从而拒绝域 W 为上式所示.

3. **答**　-0.53 .

二. 计算题

1. **解**　(1) $\bar{x}=499,\ s=16.031,\ n=9$.

$$t=\frac{(\bar{x}-\mu_0)}{s}\sqrt{n}=\frac{999-500}{16.031}\sqrt{9}=0.1871,$$

$$\alpha=0.05,\quad t_{0.025}(8)=2.306.$$

因 $|t|<t_{0.025}(8)$, 故接受 H_0, 认为该天每袋平均质量可视为500g.

(2)
$$\chi^2=\frac{8\times s^2}{\sigma_0^2}=\frac{8\times 16.301^2}{10^2}=21.258,$$

$$\alpha=0.05,\quad \chi^2_{0.05}(8)=15.507,$$

因 $\chi^2>\chi^2_{0.05}(8)=15.507$, 故拒绝 H_0, 认为该天标准差超过10g.

2. **解** (1) $H_0: \mu = \mu_0 = 15.25$, 这是个双侧检验问题; σ 已知, 故可选统计量 $U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, 代入观察值得

$$U = \frac{15.06 - 15.25}{\sqrt{0.05}/\sqrt{6}} = -2.08.$$

相应的拒绝域为 $W_1: \{ U / |U| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}} = U_{0.975} = 1.96 \}$.

而由于 $U = -2.08$ 落入拒绝域 W_1 中, 故在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下, 拒绝 H_0.

(2) 该问题 $H_0: \mu \leq \mu_0 = 15.25$, 这是个单侧检验问题; 所选统计量 U 以及 U 值与上题相同; 但拒绝域为:

$$W_1 = (U_{1-\alpha}, +\infty) = (U_{0.95}, +\infty) = (1.65, +\infty).$$

注意到 U 值不落入 W_1, 故不拒绝 H_0, 即接受 $H_0: \mu \leq 15.25$.

3. **解** 作假设 $H_0: \sigma_1 = \sigma_2$.

$$\frac{1}{50-1}\sum_{i=1}^{50}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{50 \times s_1^2}{49} = \frac{50 \times 0.0139}{49} = 0.0142 \text{ (大)}$$

$$\frac{1}{50-1}\sum_{i=1}^{52}(y_i - \bar{y})^2 = \frac{52 \times s_2^2}{51} = \frac{52 \times 0.0053}{51} = 0.0054 \text{ (小)}$$

代入统计量得 $F = \dfrac{0.0142}{0.0054} = 2.63$, 查 F 表得

$$F_{\frac{\alpha}{2}}(50-1, 52-1) = F_{0.05}(49, 51) = 1.59,$$

$$F_{\frac{\alpha}{2}}(50-1, 52-1) = F_{0.01}(49, 51) = 1.93,$$

故 $F_{\frac{\alpha}{2}} = F_{0.025} = \dfrac{1}{2}(F_{0.05} + F_{0.01}) = \dfrac{1}{2}(1.59 + 1.93) = 1.76$

由 $F = 2.63 > 1.76 = F_{\frac{\alpha}{2}}$, 故假设 $H_0: \sigma_1 = \sigma_2$ 被否定, 即甲、乙两段岩心磁化率测定数据的标准差在 $\alpha = 5\%$ 时有显著差异.

4. **解** 这问题即是在 $\alpha=0.05$ 下检验两正态总体均值有无显著差，应该先检验方差齐性 $H_0: \sigma_1^2=\sigma_2^2$；$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$，

$n_1=10$，$\boldsymbol{x}_1=9.4$，$(n_1-1)s_1^2=40.4$，$s_1^2=4.4889$，

$n_2=8$，$\boldsymbol{x}_2=8.125$，$(n_2-1)s_2^2=36.88$，$s_2^2=5.2686$.

$$F=\frac{s_2^2}{s_1^2}=1.1737<4.20=F_{0.975}(7,9)=F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2-1,n_1-1),$$

故接受 H_0，认为两正态总体具有方差齐性. 再检验

$$H_0': \mu_1-\mu_2=0;\quad H_1': \mu_1-\mu_2\neq 0.$$

$$t=\frac{\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

$$=\frac{9.4-8.125}{\sqrt{\frac{40.4+36.88}{16}}\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{8}}}=1.247,$$

由于 $|t|=1.247<2.12=t_{0.975}(16)=t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$，

故接受 H_0'，即认为两个班组生产的导线的平均电阻无显著差异.