2014-2015 学年第二学期《高等数学BII》试卷（A）

授课班号__________年级专业__________学号__________姓名__________

题型	填空题	计算题	综合题	总分	审　核
得分					

一、填空题(每小题 3 分，共 24 分)

得分	阅卷人

1. 设 $a=\{2,1,-3\}$， $b=\{-3,2,1\}$，则 $(\hat{a,b})=$ $\frac{2\pi}{3}$.

2. 设 $f(x,y,z)=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$，则 $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=$ -1.

3. 设 $f(u)$ 可导，$x^2+y^2+z^2=yf\left(\frac{z}{y}\right)$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}$ $=\frac{2x}{f'(\frac{z}{y})-2z}$

4. 设 $D:0\le y\le\sqrt{a^2-x^2},0\le x\le a$，由二重积分的几何意义知
$$\iint_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y= \frac{\pi}{6}a^3.$$

5. 差分方程 $Y_{x+1}-3Y_x=2\cdot5^x$ 的通解为 $Y_x=C\cdot3^x+5^x$

6. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}(2x-3)^n$ 的收敛域是 $(1,2]$

7. 若级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$，则其和是 $\cancel{1-\sqrt{2}}$ -1

8. 已知 $t, t\ln t$ 是微分方程 $x''-\frac{1}{t}x'+\frac{1}{t^2}x=0$ 的解，则其通解为 $x(t)$
$=C_1t+C_2t\ln t$

数项级数敛散性

三重积分

交换积分次序

方向导数、梯度、切平面

旋转(曲面)

二、计算题(每小题 8 分，共 32 分)

得分	阅卷人

1. 已知两条直线的方程是
$$l_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1},\quad l_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1},$$
求过 l_1 且平行于 l_2 的平面方程.

$l_1:\begin{cases}y=2\\x+z-4=0\end{cases}$

过 l_1 的平面束：$x+z-4+\lambda(y-2)=0$

$\because$ l_2 平行于过 l_1 的平面.

$\therefore$ $(2,1,1)\perp(1,\lambda,1)$

$\therefore$ $2+\lambda+1=0$

$\lambda=-3$

$\therefore$ 所求平面为：

$x+z-4-3(y-2)=0$

即：$x-3y+z+2=0$

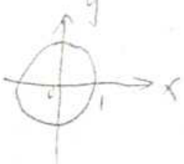
2. 设 $z=yf(x+y,x-y)$，f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f + y(f_1' - f_2') \quad 3'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_1' + f_2' + y[f_{11}'' + \underline{f_{12}'' - (f_{21}''} + f_{22}'')] \quad 5'$$

$$= f_1' + f_2' + y(f_{11}'' - f_{22}'') \quad 1'$$

3. 计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D:x^2+y^2\le 1$.



$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{1-r^2}{1+r^2}\, r\, dr \quad 3'$$

$$= 2\pi \int_0^1 \frac{-1-r^2+2}{1+r^2}\, r\, dr \quad 3'$$

$$= 2\pi\left[-\frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{2r}{1+r^2}\, dr\right]$$

$$= 2\pi\left[-\frac{1}{2} + \ln(1+r^2)\Big|_0^1\right]$$

$$= 2\pi\left[-\frac{1}{2} + \ln 2\right] \quad 2'$$

4. 求微分方程 $y''+2yy'=y'^2$ 满足条件 $y(1)=0$, $y'(1)=2$ 的特解.

令 $y'=P(y)$，$y''=\frac{dP}{dx}=\frac{dy}{dx}\frac{dP}{dy}=P\frac{dP}{dy}$ 2'

代入：$P\frac{dP}{dy}+2yP=P^2$

$\frac{dP}{dy}-P=-2y$ 2'

$e^{-\int dy}=e^y$

$\int -2ye^{-y}dy = e^{-y}2y-2\int e^{-y}dy$

$=2ye^{-y}+2e^{-y}$

$\therefore P(y)=e^y[2ye^{-y}+2e^{-y}+C_1]$

$=C_1e^y+2y+2$

$\because y(1)=0,\quad y'(1)=2$

$\therefore 2=C_1e^0+0+2$

$=2+C_1 \quad \therefore C_1=0$

$\therefore P(y)=2y+2=y'$ 2'

$\therefore \frac{dy}{y+1}=2dx$

$\ln|y+1|=2x+C_2$

$\because y(1)=0$

$0=2+C_2$

$\therefore C_2=-2$

∴特解为

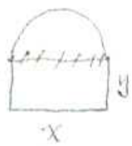
$\ln|y+1|=2x-2$

或 $y+1=e^{-2}e^{2x}$ 2'

三、综合题(满分 44 分)

1. (11 分) 用拉格朗日乘数法求解下面的问题，隧道截面的上部为半圆，下部为矩形，若隧道截面的周界长L固定，问矩形的边长各为多少时，隧道截面的面积最大？

得分	阅卷人



$L = \pi \frac{x}{2} + x + 2y$

$S = \frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2 + xy$

$= \frac{\pi}{8}x^2 + xy$

令 $G = \frac{\pi x^2}{8} + xy + \lambda\left(\frac{\pi x}{2} + x + 2y - L\right)$

$\therefore \begin{cases} \frac{\pi x}{4} + y + \lambda\left(\frac{\pi}{2}+1\right) = 0 \\ x + 2\lambda = 0 \\ \frac{\pi x}{2} + x + 2y = L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = \frac{L}{4+\pi} \end{cases}$

$\therefore$ 边长 $x = \frac{2L}{4+\pi}$，$y = \frac{L}{4+\pi}$ 时，截面面积最大

2. (11 分) 设某产品在时间 t 时的价格 P_t，总供给 R_t 与总需求 Q_t 三者有关系式：$Q_t = 5 - 4P_{t-1}$，$R_t = 1 + 2P_t$，$R_t = Q_t$，$t = 1, 2, 3\cdots\cdots$

试推出 P_t 满足的差分方程，并求出满足 $P_0 = 3$ 的特解。

$R_t = 1 + 2P_t = 5 - 4P_{t-1}$

$\therefore 2P_t + 4P_{t-1} - 4 = 0$

$P_t + 2P_{t-1} - 2 = 0$

$\lambda + 2 = 0$

$\lambda = -2$

$\overline{P_t} = C(-2)^t$

设 $P_t^* = a$，则 $3a = 2$

$a = \frac{2}{3}$

$\therefore P_t = C(-2)^t + \frac{2}{3}$

$\because P_0 = 3$

$\therefore C + \frac{2}{3} = 3$

$C = \frac{7}{3}$

$\therefore P_t = \frac{7}{3}(-2)^t + \frac{2}{3}$

3. (11 分)

试求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$ 的和函数并计算级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}$ 的和.

$R=1$ 收敛域 $[-1,1]$

$\forall x\in(-1,1)$ 令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$

$\therefore S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}$

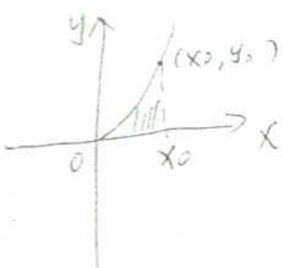
$S(x)-S(0)=\frac{1}{1+x^2}$, $S(0)=0$

$\therefore S(x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\arctan x$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^{2n-1}\cdot\left(-\frac{\sqrt3}{2}\right)$

$=-\frac{\sqrt3}{2}S\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)=-\frac{\sqrt3}{2}\arctan\frac{\sqrt3}{2}$

4. (11 分) 已知上半平面内一曲线 $y=y(x)(x\geq 0)$ 过原点，且曲线上任一点 $M(x_0,y_0)$ 处切线斜率数值上等于该点横坐标与纵坐标之和的2倍减去由此曲线与 x 轴，直线 $x=x_0$ 所围成的面积，求此曲线方程.



$y_0'=2(x_0+y_0)-\int_0^{x_0}y(t)dt$

$\therefore y'=2(x+y)-\int_0^x y(t)dt$

且 ~~$y'(0)=$~~ $y(0)=0$ $y'(0)=0$

$\therefore y''=2(1+y')-y$

$y''-2y'+y=2$

$r^2-2r+1=0$ $r_{1,2}=1$

$\therefore Y=(C_1+C_2x)e^x$

设 $y^*=a$ 代入

$a=2$

$\therefore y=(C_1+C_2x)e^x+2$

$\because y(0)=0$ $y'(0)=0$

$\therefore\begin{cases}C_1+2=0\\C_1+C_2=0\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}C_1=-2\\C_2=2\end{cases}$

$\therefore$ 曲线方程为

$y=(2x-2)e^x+2$