河海大学常州校区 2006-2007 学年第二学期

《线性代数》考试试卷 A

一、填空(3 分×10=30 分)

1、设 A 是 n 阶方阵，且 $|A|=3$，则 $\left|(3A^T)^{-1}\right|=$ ______

2、设 A 是 3 阶方阵，$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\\2&4&-1\end{pmatrix}$，则 $|A|$ 中元素 $A_{13}+A_{23}+A_{33}=$ <u>-7</u>

3、设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0&1\\-1&0&1&1\\0&1&-1&k\end{pmatrix}$，$R(A)=2$，则 $k=$ <u>-2</u>

4、设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&0&4\\3&2&t\end{pmatrix}$，若存在非零向量 β 满足 $A\beta=0$，则 $t=$ <u>6</u>

5、$A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&4\end{pmatrix}$，则特征向量 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 对应的特征值 $\lambda=$ <u>2</u>

$A\alpha=\lambda\alpha$

6、设 A,B,C,D 均为方阵，且 $ABCD=E$，则 $(BC)^T(DA)^T=$ <u>I</u>

7、设 A 是 5×8 矩阵，且 $R(A)=4$，则齐次线性方程组 $AX=O$ 的基础解系包含向量的个数为 <u>4</u>

8、若 3 阶方阵 A 有 3 个特征值 -2，3，5，则 $|A|=$ <u>-30</u>

9、若 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\k\end{pmatrix}$ 线性相关，则 $k=$ <u>17/7</u>

10、若向量 β 可由向量组 α_1，α_2，…，α_r 线性表示，则表示方法唯一的充要条件是 <u>$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性相关</u>

二、计算(6 分× 4 =24 分)

1、计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&4&9&16\\1&8&27&64\end{vmatrix}$

$=(2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3)$

$=12$

列式 3 分

计算 3 分

$(2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3)$

$=1\times2\times3\times1\times2\times1=12$

$|3A^T|^{-1}=\frac{1}{3^{n+1}}$

2、已知 $A=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$

法一：$\begin{bmatrix}4&-2\\5&10\end{bmatrix}$

法二：

3、设 $A=$

法一：B

法二：B

4、设

$\begin{bmatrix}30 & -59\\ -7 & 82\end{bmatrix}$

5+70+7　4-14-49

12+4+14　15-20-2　12+4+14　4-14-49　5+70+7　15-20-2

2、已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 5\\ 4 & 3 & 6\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3 & -2 & 2\\ 1 & 7 & -7\end{bmatrix}$，求 BB^T+AB^T。　$(B+A)B^T$

法一：$\begin{bmatrix}4 & -2 & 7\\ 5 & 10 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 7\\ 2 & -7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30 & -59\\ -7 & 82\end{bmatrix}$　　法1 3分　计算5分

法二：$\begin{bmatrix}1 & 0 & 5\\ 4 & 3 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 7\\ 2 & -7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -2 & 2\\ 1 & 7 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 7\\ 2 & -7\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}13 & -34\\ 18 & -17\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}17 & -25\\ -25 & 99\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30 & -59\\ -7 & 82\end{bmatrix}$

3、设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$，且 $A^2-AB=E$，求 B　　A^{-1} (3分)　　$A^2-I=AB$

$A(A-B)=E$　$A-B=A^{-1}$　$B=A-A^{-1}$

法一：$B=A^{-1}(A^2-I)=A-A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1\end{array}\right]$

法二：$B=A^{-1}(A^2-I)=\begin{bmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$-7k+35-18$
$=-7k+17$

4、设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，求 A^n（n为正整数）　　$A^2=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$　$\begin{bmatrix}1 & 2n\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

归纳法 或 二项式展开

二. α_1,β 线性相关

$A^2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$A^3=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

三、（12分）

设有向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\3\\2\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_5=\begin{pmatrix}1\\2\\4\\1\end{pmatrix}$

10分 求向量组的秩及一个极大线性无关组，并把不属于该极大线性无关组的向量用该极大线性无关组线性表示。

2分

$$\begin{bmatrix}1&1&2&1&1\\1&2&3&2&2\\1&1&2&3&4\\1&0&1&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&2&1&1\\0&1&1&1&1\\0&0&0&2&3\\0&-1&-1&-1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&2&1&1\\0&1&1&1&1\\0&0&0&2&3\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$r=4$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5$

$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$.

四、(12分)

λ取何值时，线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1-x_2=\lambda\\\lambda x_2-x_3=\lambda\\\lambda x_3-x_4=\lambda\\-x_1+\lambda x_4=\lambda\end{cases}$无解？有唯一解？无穷多个解？在无穷多个解的情况下求通解。

$$\begin{vmatrix}\lambda&-1&0&0\\0&\lambda&-1&0\\0&0&\lambda&-1\\-1&0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\0&\lambda&-1\\0&0&\lambda\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1&0&0\\\lambda&-1&0\\0&\lambda&-1\end{vmatrix}=\lambda^4-1=(\lambda^2+1)(\lambda^2-1)$$

4分 1) $\lambda\neq\pm1$时，有唯一解.

4分 2) $\lambda=1$ 无解

4分 3) $\lambda=-1$

$x_1=-x_4+1$

$x_2=x_4$

$x_3=-x_4+1$

五、(12分)

已知$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$相似

求：(1) x与y

$\begin{cases}1+x=y\\-1=-y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$ (2分)

(2)求一个满足$P^{-1}AP=B$的可逆矩阵P.

(10分)

由(1)：A特征值为1(2重) −1(1重)

$(I-A)X=0$

$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ $\begin{cases}x_1=x_1\\x_2=x_3\end{cases}$ $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$

$(-I-A)X=0$

$\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-1&-1\\0&-1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ $\begin{cases}x_1=0\\x_2=-x_3\end{cases}$ $\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$

六、证明题(10分)

设$m\times n$矩阵A的秩为n，n维列向量组α_1，α_2，…，$\alpha_l(l\leqslant n)$线性无关。

证明：向量组$A\alpha_1$，$A\alpha_2$，…，$A\alpha_l$线性无关。

$A(k_1\alpha_1+\cdots+k_l\alpha_l)=0$

$AX=0$只有零解

$\Rightarrow\sum k_i\alpha_i=0$

$\Rightarrow k_i=0$