

## 2015-2016 学年第二学期《高等数学 A II》试卷

### 一、填空题 (每小题 3 分, 共 24 分)

1. 设  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 5$ ,  $|\vec{a} - \vec{b}| = 6$ , 则  $(\vec{a}, \vec{b}) =$  \_\_\_\_\_。
2. 曲线  $\begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2 \\ z = (x-1)^2 + (y-1)^2 \end{cases}$  在  $xOy$  面上的投影曲线的方程为 \_\_\_\_\_。
3. 曲线  $\begin{cases} x - 2y + 3z - 6 = 0 \\ x^3 + 2y^2 - 4z + 14 = 0 \end{cases}$  在点  $(-2, -1, 2)$  处的法平面方程为 \_\_\_\_\_。
4. 改变积分次序  $\int_{-2}^0 dy \int_{-y-2}^0 f(x, y) dx + \int_0^4 dy \int_{-\sqrt{4-y}}^0 f(x, y) dx =$  \_\_\_\_\_。
5. 设  $x + z = yf(x^2 - z^2)$ , 其中  $f(u)$  可导, 则  $z \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$  \_\_\_\_\_。
6. 设  $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , 则  $\oiint_{\Sigma} z^2 dS =$  \_\_\_\_\_。
7. 已知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = 2$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1} = 5$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的和是 \_\_\_\_\_。
8. 若方程  $y'' + py' + qy = 0$  ( $p, q$  均为实常数) 有特解  $y_1 = 10$ ,  $y_2 = e^{-2x}$ , 则  $p$  等于 \_\_\_\_\_,  $q$  等于 \_\_\_\_\_。

### 二、计算题 (每小题 8 分, 共 32 分)

1. 在曲面  $2z = x^2 + y^2$  上求一点, 使曲面在该点处的法线垂直于平面  $x - y + z = 1$ 。

2. 设  $z = yf(x+y, x-y)$ ,  $f$  具有二阶连续偏导数, 求  $\frac{\partial z}{\partial y}$  及  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 。
3. 计算二重积分  $I = \iint_D (1 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$ , 其中  $D$  是由  $x^2 + y^2 = a^2$  和  $x^2 + y^2 - ax = 0$  ( $a > 0$ ) 及  $x = 0$  所围在第一象限的区域。
4. 在  $(0, \pi)$  内把函数  $f(x) = \pi - x$  展开成以  $2\pi$  为周期的正弦级数。

三、综合题（每小题 11 分，共 44 分）

1. 在曲面  $(x^2y + y^2z + z^2x)^2 + (x - y + z) = 0$  上的点  $(0, 0, 0)$  处的切平面  $\pi$  内求一点  $P$ ，使  $P$  到点  $A(2, 1, 2)$  的距离的平方最小。
2. 计算曲面积分  $I = \iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + (z+1)dxdy$ ，其中  $\Sigma$  是曲面  $z = 1 - x^2 - y^2$  在  $z \geq 0$  部分的下侧。

3. 试求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$  在  $(-1,1)$  内的和函数。

4. 已知  $\varphi(x)$  有二阶连续导数, 且  $\varphi(0) = \varphi'(0) = \frac{1}{2}$ , 试确定  $\varphi(x)$ , 使曲线积分  $\int_L [\varphi(x) - e^x] y dx - \varphi'(x) dy$  与路径无关。