2009-2010 学年第二学期《高等数学》期末试卷

一、填空题（每小题 4 分，共 32 分）

1. 设 $\vec{a}=(2,-1,2)$，向量 $\vec{x}$ 与 $\vec{a}$ 平行，且 $\vec{a}\cdot\vec{x}=-18$，则 $\vec{x}=$ $-2(2,-1,2)$。

2. 曲线 $\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=2-x^2 \end{cases}$ 在 xOy 平面上的投影曲线为 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$。

3. 设 $f(x,y)=\begin{cases} \ln(1-x^2-y^2), & x^2+y^2<\dfrac{1}{2} \\ A, & x^2+y^2\ge\dfrac{1}{2} \end{cases}$，要使 $f(x,y)$ 处处连续，则 $A=$ $-\ln 2$ (或 $\ln\frac{1}{2}$)。

4. 曲线 $x=t^2, y=2t, z=\dfrac{1}{3}t^3$ 在点 $\left(1,2,\dfrac{1}{3}\right)$ 处的切线方程是 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-\frac{1}{3}}{1}$。

5. 二次积分 $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$ 在极坐标系下先对 r 积分的二次积分为 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\,dr$。

6. 设 Σ：$x^2+y^2+z^2=R^2$，则 $\oint\!\!\oint_{\Sigma} z^2 dS=$ $\frac{4}{3}\pi R^4$。

7. 设 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<\dfrac{1}{2} \\ 0, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1 \end{cases}$，已知 $S(x)$ 是 $f(x)$ 的以 2 为周期的正弦级数展开式的和函数，则

$S\left(\dfrac{7}{4}\right)=$ $-\frac{1}{4}$。

8. 若某个二阶常系数线性齐次微分方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2$，其中 C_1,C_2 为独立的任意常数，则该方程为 $y''-y'=0$。

二、计算题（每小题 6 分，共 30 分）

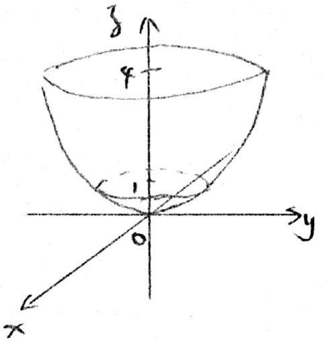
1. 设 $z=x^2f(x+y,x-y)$，其中 $f(u,v)$ 有连续二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xf+x^2(f_1'+f_2')$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x(f_1'-f_2')+x^2(f_{11}''-f_{12}''+f_{21}''-f_{22}'')$$

$$=2x(f_1'-f_2')+x^2(f_{11}''-f_{22}'')$$

2. 设Ω是由$x^2+y^2\le z$及$1\le z\le 4$所确定的有界闭区域。试计算$I=\iiint\limits_{\Omega} z dv$。



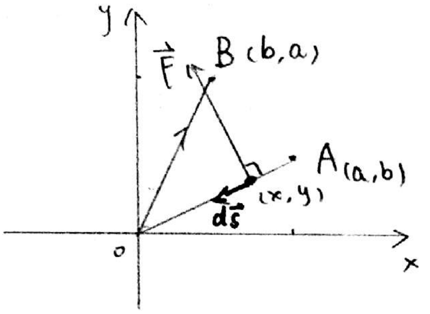
$$I=\int_1^4 dz\iint\limits_{D(z)} z\,dxdy$$

$$=\int_1^4 z\cdot\pi z\,dz$$

$$=\frac{\pi}{3}z^3\Big|_1^4$$

$$=21\pi$$

3. 计算曲线积分$\int_L -ydx+xdy$，式中L是由点$A(a,b)$沿直线段到$O(0,0)$再沿直线段至$B(b,a)$（$ab\ne 0$）。



法一：$\overline{AO}$: $y=\frac{b}{a}x$, $x: a\to 0$, $\overline{OB}$: $y=\frac{a}{b}x$, $x: 0\to b$

原式 $=\int_a^0\left(-\frac{b}{a}x+x\cdot\frac{b}{a}\right)dx+\int_0^b\left(-\frac{a}{b}x+x\cdot\frac{a}{b}\right)dx=0$

法二：$\vec{F}=(-y,x)$ 与 $d\vec{s}$ 在$\overline{AO}$及$\overline{OB}$上处处垂直.

从而 原式 $=\int_L \vec{F}\cdot d\vec{s}=0$.

4. 判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}$是否收敛？若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

法一：1) $\because \left\{\frac{1}{n2^n}\right\}\downarrow$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n2^n}=0$ $\therefore$ 由 Leibniz 判别法，级数收敛.

2) 对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$，$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n2^n}}=\frac{1}{2}<1$，

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$ 收敛. 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}$ 绝对收敛.

法二：由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}$ 绝对收敛，假收敛.

5. 求方程$y^2-x=2xyy'$的通解。

$y'-\frac{1}{2x}y=-\frac{1}{2y}$ （Bernoulli方程）

$yy'-\frac{1}{2x}y^2=-\frac{1}{2}$

令 $z=y^2$，$z'=2yy'$，从而 $\frac{1}{2}z'-\frac{1}{2x}z=-\frac{1}{2}$

即 $z'-\frac{1}{x}z=-1$. 用 $\mu=\frac{1}{x}$ 乘两边，可得

$\left(\frac{z}{x}\right)'=-\frac{1}{x}$，$\therefore \frac{z}{x}=-\ln|x|+C$，$z=x(C-\ln|x|)$.

$\therefore$ 通解：$y^2=x(C-\ln|x|)$

三、**综合题**（满分 38 分）

1.　（8 分）设 $f(x)$ 二阶连续可微，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，试确定 $f(x)$，使方程 $[f(x)+1]ydx-[f'(x)+x]dy=0$ 是全微分方程。

由题，$f(x)+1=-f''(x)-1$

从而 $\begin{cases} f''(x)+f(x)=-2 & ① \\ f(0)=0,\ f'(0)=1 & ② \end{cases}$

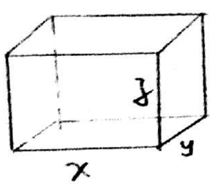
由①，$r^2+1=0 \Rightarrow r_{1,2}=\pm i$

易得 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x-2$，$f'(x)=-C_1\sin x+C_2\cos x$

又由②，$\begin{cases} C_1-2=0 \\ C_2=1 \end{cases}$

$\therefore f(x)=2\cos x+\sin x-2$

2.　（10 分）修建一座形状为长方体的仓库，已知仓库顶每平方米造价为 300 元，墙壁每平方米造价为 200 元，地面每平方米造价为 100 元，其它的固定费为 2 万元，现投资 14 万元，问如何设计方能使仓库的容积最大？



设仓库长宽高分别为 x,y,z m.

则 $300xy+200(2yz+2xz)+100xy+20000=140000$，即：$xy+yz+xz-300=0$

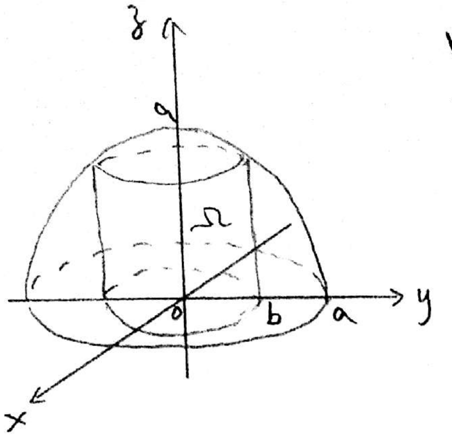
令 $L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(xy+yz+xz-300)$

由 $\begin{cases} L_x=yz+\lambda(y+z)=0 \\ L_y=xz+\lambda(x+z)=0 \\ L_z=xy+\lambda(y+x)=0 \\ L_\lambda=xy+yz+xz-300=0 \end{cases}$　$(x,y,z>0)$

解得唯一驻点 $(10,10,10)$.

从而仓库长.宽.高都为 10m 时，容积最大.

3.　（10 分）计算 $\oiint\limits_{\Sigma} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$，其中 Σ 是由曲面 $z=0$，$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 及 $x^2+y^2\le b^2$ 所围的含 Oz 轴的那部分立体的表面外侧，a 和 b 都是正数且 $a>b$。



由Gauss公式，

$$原式 = \iiint\limits_{\Omega} 2(x+y+z)\,dxdydz$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} 2z\,dxdydz \quad （奇偶对称性）$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} 2z\,dz$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} (a^2-x^2-y^2)\,dxdy$$

$$= a^2\iint\limits_{D_{xy}} dxdy - \iint\limits_{D_{xy}} (x^2+y^2)\,dxdy$$

$$= a^2\cdot\pi b^2 - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^b r^3\,dr$$

$$= \pi a^2 b^2 - \frac{\pi}{2} b^4$$

4.　（10 分）求幂级数 $1+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{9}x^9+\cdots$ 的和。

1) 通项为 $\frac{x^{3n}}{3n}$，$\rho = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{3(n+1)}}{3(n+1)}}{\frac{x^{3n}}{3n}}\right| = |x^3|<1$ 时收敛，$\rho>1$ 时发散。

$\therefore R=1$.

$x=1$ 时，级数为 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$ 发散

$x=-1$ 时，级数为 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n}$ 收敛（Leibniz判别法）

$\therefore$ 收敛域为 $[-1,1)$.

2) 设 $S(x)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{3n}$，$-1\le x<1$.

则 $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{3n-1} = \frac{x^2}{1-x^3}$，$-1<x<1$

从而 $S(x)=S(0)+\int_0^x S'(t)\,dt = 1+\int_0^x \frac{t^2}{1-t^3}\,dt$

$= 1-\frac{1}{3}\ln(1-x^3)$，$-1<x<1$

又 $\because S(x)$ 在 $[-1,1)$ 上连续.

$\therefore S(x)=1-\frac{1}{3}\ln(1-x^3)$，$-1\le x<1$.