9

2015-2016 学年第二学期《概率统计》试卷（A）

授课班号________ 年级专业 14 通信 ________ 学号________ 姓名________

题型	选择题	填空题	计算题	综合题	总分	审　　核
得分						

一、填空题(每小题 5 分，共 25 分)

得分	阅卷人

1. 随机试验 E 是记录某电话交换台 5 分钟内接到的呼唤次数，则 E 的样本空间是 $\{0,1,2,\cdots\}$.

2. 已知随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且

$$P\{X=0\}=\frac{1}{2},$$

则 $P\{X<2\}=$ $\frac{1+\ln 2}{2}$.

3. 设随机变量 $X\sim B(n,p)$，且

$$E(X)=0.5,\ D(X)=0.45,$$

则 $n=$ 5，$p=$ 0.1.

4. 抛一枚硬币三次，ξ 和 η 分别表示出现正面次数和出现反面次数，则 $P\{\xi>\eta\}=$ $\frac{1}{2}$.

5. 某产品以往废品率不高于 5%，今抽取一样本，以检验这批产品废品率是否高于 5%(显著水平：α). 此问题的假设为 H_0: $\mu\le\mu_0=5\%$ 犯第一类错误的概率为 $\le\alpha$.

本题未说明正态总体，可以写等价语言

二、计算题(每小题 6 分，共 36 分)

得分	阅卷人

1. 某人从甲地到乙地，乘火车、轮船和飞机来的概率分别为0.2，0.4和0.4，乘火车来迟到的概率为0.5，乘轮船来迟到的概率为0.2，乘飞机来不会迟到. 问他迟到的概率是多少？又如果他迟到乙地，问他乘轮船来的概率是多少？

设 A="迟到"，B_1="乘火车来"，B_2="乘轮船来"，B_3="乘飞机来"

① $P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=0.2\times0.5+0.4\times0.2+0.4\times0=0.18$ (3') (公式1')

② $P(B_2|A)=\frac{P(AB_2)}{P(A)}=\frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)}=\frac{0.4\times0.2}{0.18}=\frac{4}{9}$ (3')

(公式1')

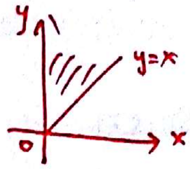
2. 某射手有五发子弹，射一次，命中的概率为0.9，如果命中了就停止射击，如果不命中就一直射到子弹用尽，求耗用子弹数 ξ 的分布律.

由独立性计算:

ξ	1	2	3	4	5	(1')
P	0.9	0.09	0.009	0.0009	0.0001	(5')

3. 设二维连续随机向量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y \\ 0, & 其它 \end{cases}$$



求关于 X 及关于 Y 的边缘概率密度.

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\begin{cases}\int_x^{+\infty} e^{-y}dy, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}=\begin{cases} e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases} \quad (3')$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\begin{cases}\int_0^{y} e^{-y}dx, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}=\begin{cases} ye^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases} \quad (3')$$

*

4. 设随机变量 ξ 的概率密度 $\varphi(x)$ 是一个偶函数，$\eta=\xi^2$，并设 $E(\xi)$，$E(\eta)$ 都存在，求证 $\mathrm{cov}(\xi,\eta)=0$，并说明 ξ,η 是否独立.

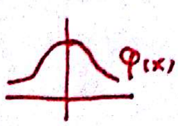
① $\mathrm{Cov}(\xi,\eta)=E(\xi\eta)-E(\xi)\cdot E(\eta)$

$=E(\xi^3)-E(\xi)\cdot E(\eta)$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}x^3\varphi(x)dx-\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx\cdot E(\eta)$

$=0-0\cdot E(\eta)=0$ （∵ $x^3\varphi(x)$. $x\varphi(x)$ 为奇函数） (5')

②



$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt$，由 $\Phi(0)=\frac{1}{2}$. $\Phi(+\infty)=1$.

可知 $\exists a>0$ s.t. $\Phi(a)\in(\frac{1}{2},1)$. (介值Th).

$P\{\xi\le a,\eta\le a^2\}=P\{\xi\le a,\xi^2\le a^2\}=P\{-a\le\xi\le a\}=2\Phi(a)-1$.

而 $P\{\xi\le a\}\cdot P\{\eta\le a^2\}=P\{\xi\le a\}\cdot P\{-a\le\xi\le a\}=\Phi(a)\cdot[2\Phi(a)-1]<2\Phi(a)-1$

∴ $P\{\xi\le a,\eta\le a^2\}\ne P\{\xi\le a\}\cdot P\{\eta\le a^2\}$，$\xi,\eta$ 不独立.

(" -定 " " n 个 " " 独立 " 各 1)

5. 设 x_1, x_2, x_3, x_4 是来自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的样本, 记

$$V = \frac{\sqrt{3}x_1}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}}$$

x_i 改 X_i

求: (1) V 的分布; (2) $E(V)$.

(1) 由题, X_1, X_2, X_3, X_4 独立且 $X_i \sim N(0, \sigma^2)$, $i=1,2,3,4$.

从而 $\frac{X_i}{\sigma} \sim N(0,1)$, $i=1,2,3,4$, 且 $\frac{X_1}{\sigma}, \frac{X_2}{\sigma}, \frac{X_3}{\sigma}, \frac{X_4}{\sigma}$ 独立. $\therefore (\frac{X_2}{\sigma})^2 + (\frac{X_3}{\sigma})^2 + (\frac{X_4}{\sigma})^2 \sim \chi^2(3)$ 且 $\frac{X_1}{\sigma}$ 与 $(\frac{X_2}{\sigma})^2 + (\frac{X_3}{\sigma})^2 + (\frac{X_4}{\sigma})^2$ 独立.

由 t 分布定义, $\dfrac{\frac{X_1}{\sigma}}{\sqrt{[(\frac{X_2}{\sigma})^2 + (\frac{X_3}{\sigma})^2 + (\frac{X_4}{\sigma})^2]/3}} = \dfrac{\sqrt{3}X_1}{\sqrt{X_2^2 + X_3^2 + X_4^2}} = V \sim t(3)$. (4')

(2) 设 V 的密度为 $h(t)$. 则 $h(t)$ 为偶函数.

$\therefore E(V) = \int_{-\infty}^{+\infty} t h(t)\, dt = 0$. ($t h(t)$ 为奇函数)

(2')

6. 设总体的概率密度为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & 其它 \end{cases}, \quad (\theta > 0),$$

试用来自总体的样本 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 求未知参数 θ 的矩估计和极大似然估计.

① $\mu_1 = E(X) = \int_0^1 x \cdot \theta x^{\theta-1} dx = \frac{\theta}{\theta+1} \Rightarrow \theta = \frac{\mu_1}{1-\mu_1} \Rightarrow$ 矩估计量 $\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$.

$\cdots$ 值 $\hat{\theta} = \frac{\bar{x}}{1-\bar{x}}$. (3')

② 设样本值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. $L(\theta) = \prod_{i=1}^n (\theta x_i^{\theta-1})$,

$\ln L(\theta) = \sum_{i=1}^n [\ln\theta + (\theta-1)\ln x_i] = n\ln\theta + (\theta-1)\sum_{i=1}^n \ln x_i$.

$\frac{L'(\theta)}{L(\theta)} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \ln x_i$, 令 $L'(\theta) = 0$, 得最(极大)大似然估计值 $\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}$.

$\therefore$ 最(极大)大似然估计量 $\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i}$. (3')

得分	阅卷人

三、综合题(满分 39 分)

1. (10 分) 设总体 X 的期望 $E(X)$, 方差 $D(X)$ 均存在. x_1, x_2 是 X 的一个样本, 试证明统计量

x_i 改 X_i

(1) $\varphi_1(x_1, x_2) = \frac{1}{4}x_1 + \frac{3}{4}x_2$, (2) $\varphi_2(x_1, x_2) = \frac{3}{8}x_1 + \frac{5}{8}x_2$.

都是 $E(X)$ 的无偏估计量, 并说明那个较为有效?

(1) $E(\varphi_1(X_1, X_2)) = \frac{1}{4}E(X_1) + \frac{3}{4}E(X_2) = (\frac{1}{4} + \frac{3}{4})E(X) = E(X)$.

$E(\varphi_2(X_1, X_2)) = \frac{3}{8}E(X_1) + \frac{5}{8}E(X_2) = (\frac{3}{8} + \frac{5}{8})E(X) = E(X)$ 4'

$\therefore$ 都是无偏估计量.

(2) 由 X_1, X_2 独立, $D(\varphi_1(X_1, X_2)) = (\frac{1}{4})^2 D(X_1) + (\frac{3}{4})^2 D(X_2) = (\frac{1}{16} + \frac{9}{16})D(X) = \frac{5}{8}D(X)$

$D(\varphi_2(X_1, X_2)) = (\frac{3}{8})^2 D(X_1) + (\frac{5}{8})^2 D(X_2) = (\frac{9}{64} + \frac{25}{64})D(X) = \frac{17}{32}D(X)$

$\because D(\varphi_2(X_1, X_2)) < D(\varphi_1(X_1, X_2))$ $\therefore \varphi_2(X_1, X_2)$ 较有效. (6')

2. (9 分) 在人寿保险公司里有 3000 个同一年龄的人参加人寿保险. 在 1 年中, 每人的死亡率为 0.1%. 参加保险的人在 1 年的第 1 天交付保险费 10 元, 死亡时, 家属可以从保险公司领取 2000 元. 求保险公司亏本的概率. $\Phi(x)=1,\ x>3.5$

设1年中死亡人数为X. 则 $X\sim b(3000, 0.1\%)$.

亏本: $2000X>3000\times10$, 即 $X>15$. 由中心极限定理,

$P\{X>15\}=P\left\{\frac{X-3000\times0.1\%}{\sqrt{3000\times0.1\%\times(1-0.1\%)}}>6.93\right\}$ (5')

$\approx 1-\Phi(6.93)=0$.

(2')

3. (10 分) 某工厂生产滚珠, 从某日生产的产品中随机抽取 9 个, 测得直径 (单位: mm) 如下:

14.5, 14.7, 15.1, 14.9, 14.8, 15.0, 15.1, 15.2, 14.8

设滚珠直径服从正态分布, 若置信度为0.95,

(1) 已知滚珠直径的标准差 $\sigma=0.15\,mm$;

(2) 未知标准差 σ. 求直径均值 μ 的置信区间. ($z_{0.025}=1.96$, $t_{0.025}(8)=2.306$)

$1-\alpha=0.95$, $\alpha=0.05$. $\bar{x}=\frac{1}{9}(14.5+\cdots+14.8)=14.9$.

(1) $(\bar{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}})$, $S^2=\frac{1}{8}[(14.5-14.9)^2+\cdots+(14.8-14.9)^2]=\frac{0.40}{8}=0.05$

即 $(14.9\pm\frac{0.15}{\sqrt{9}}\times1.96)\Rightarrow(14.802, 14.998)$ (5') (公式3')

(2) $(\bar{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$,

即 $(14.9\pm\frac{\sqrt{0.05}}{\sqrt{9}}\times2.306)\Rightarrow$ (14.728, 15.072) ~~(14.802, 14.998)~~ (5') (公式3')

4. (10 分) 某种织物的强力指标的均值为 $\mu=21$(kg). 改进工艺后生产一批织物, 今抽取25件, 测得 $\bar{x}=21.55$(kg), $s=1.2$(kg). 假设强力指标服从正态分布. 问在显著水平 $\alpha=0.01$ 条件下, 新生产织物比过去的织物的强力是否更高?

附表:

$u_{0.99}=2.58$,	$u_{0.975}=1.96$,	$t_{0.95}(25)=1.708$,	$t_{0.95}(24)=1.711$,
$t_{0.975}(24)=2.064$,	$t_{0.99}(25)=2.485$,	$t_{0.99}(24)=2.492$.	

由题意, 需检验假设 $H_0:\mu\le\mu_0=21$, $H_1:\mu>21$. (3')

取检验统计量 $t=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ (2'), 拒绝域: $t\ge t_{0.01}(24)=2.492$. (2')

本题 $t=\frac{21.55-21}{1.2/\sqrt{25}}=2.292$ 不在拒绝域内. (1')

∴ 接受 H_0, 拒绝 H_1. (1')

认为强力没有更高. (1')