2003-2004 学年第二学期高等数学期中测试及数学竞赛试卷（2003 级）

一、填空题（12×4 分）

1. 设 $\vec{a}=(3,-1,-2)$，$\vec{b}=(1,2,-1)$，则 $(-2\vec{a})\cdot(3\vec{b})=$ -18 ，$\vec{a}\times(2\vec{b})=$ $(10,2,14)$ 。(05级-1)

2. 过原点且与两直线 $x+1=\dfrac{y+2}{2}=z-1$ 和 $\begin{cases}x=1\\ y=-1+t\\ z=2+t\end{cases}$ 平行的平面方程是 $x-y+z=0$ 。

3. $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x+z=a$ 的交线在 xOy 面上的投影曲线方程是 $\begin{cases}2x^2-2ax+y^2=0\\ z=0\end{cases}$ 。

4. 曲线 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴一周的旋转曲面的方程是 $\dfrac{x^2}{4}+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$ 。(06级-3)

5. 设 $U=\ln(x^2+y^2+z^2)$，则梯度 $gradU=$ $\dfrac{2}{x^2+y^2+z^2}(x,y,z)$ 。(05级-3)(07级-10)

6. 设 $U=\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{z}}$，则 $dU=$ $-\dfrac{1}{xz}\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{z}}dx+\dfrac{1}{yz}\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{z}}dy-\dfrac{1}{z^2}\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{z}}\ln\dfrac{y}{x}dz$ 。

7. 曲面 $2xy+z-e^z=3$ 在点 $M(1,2,0)$ 处的切平面方程为 $2x+y-4=0$ 。 (05/06级-4) 08/12

8. $\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy=$ $\dfrac{1}{2}(1-e^{-4})$ 。 换序.

9. $\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x^2+y^2)dy$ 的极坐标形式为 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta} f(r^2)\cdot r\,dr$ 。(05级-7)(11级-8)

10. 设 Ω 由 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围，则 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz=$ $\dfrac{4\pi}{5}$ 。(05级-8)(08级-8)

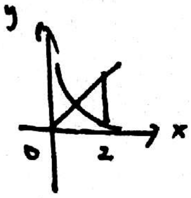
Chio
11. 设 $L: y=-\sqrt{1-x^2}$，则 $\int_L(x^2+y^2)ds=$ π 。

Chio
12. 设 Σ 为 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$ 在第一卦限的部分，则 $\iint\limits_{\Sigma}\left(z+2x+\dfrac{4y}{3}\right)dS=$ $4\sqrt{61}$ 。

二、计算题（4×8 分）

1. 设 $z=g(xy)+f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。(05级-1.)

2. 设 D 由 $xy=1$，$y=x$，$x=2$ 所围，求 $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$。



$$原式 = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy$$

$$= \int_1^2 (x^3 - x) dx$$

$$= \frac{9}{4}.$$

3. 计算 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le y\le x, x^2+y^2\le 2x\right\}$。

$$原式 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2 dr$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3\theta\, d\theta$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\sin^2\theta)\, d\sin\theta$$

$$= \frac{8}{3}\left[\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{10}{9}\sqrt{2}.$$

4. 计算 $\iiint\limits_\Omega (x+z)dv$，$\Omega$ 为 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围立体域。(05级二3)

三、求内接于半径为 R 的球且有最大体积的长方体的体积。（10 分）

设球面：$x^2+y^2+z^2=R^2$

长方体第一卦限顶点 (x,y,z).

则 $V=8xyz$, 设 $L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-R^2)$

或 $\ln x+\ln y+\ln z+\lambda(x^2+y^2+z^2-R^2)$

易得驻点：$x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}R$.

$V_{max}=\frac{8}{9}\sqrt{3}R^3$.

四、（任选做一题，10 分）

Ch11

1. 求 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n(n-1)x^{n-2}$ 的和函数及 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2-n}{2^n}$ 的和；

设 $S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n(n-1)x^{n-2}$, $-1<x<1$

易知 $S(x)=\left(\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n x^n\right)''=\left(\frac{x^2}{1+x}\right)''=\frac{2}{(1+x)^3}$, $-1<x<1$.

$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n^2-n}{2^n}=\frac{1}{4}S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{27}$.

Ch10

2. $S: x^2+y^2+z^2=4\,(z\geq 0)$外侧，求 $\iint\limits_S yzdzdx+2dxdy$ 。

添 S_1：$z=0$, $x^2+y^2\leq 4$, 下侧 .

则 $\oiint\limits_{S\cup S_1} yzdzdx+2dxdy=\iiint\limits_{\Omega} z\,dV=\int_0^2 dz\iint\limits_{D(z)} z\,dxdy$

$=\int_0^2 z\cdot\pi(4-z^2)\,dz=4\pi$.

又 $\iint\limits_{S_1} yzdzdx+2dxdy=\iint\limits_{S_1}2dxdy=-\iint\limits_{D_{xy}}2dxdy=-2\times4\pi=-8\pi$.

$\therefore$ 原式 $=4\pi-(-8\pi)=12\pi$.

五、竞赛加题（5×10 分）

1. 设 $x_1=10$，$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求出极限的值。(14级三12)

2. 设 $f(x)$ 具二阶连续导数，$f(a)=0$，$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x-a}, & x\neq a\\ f'(a), & x=a\end{cases}$，求 $g'(x)$，并证明 $g'(x)$ 在 $x=a$ 处连续。(06级三2)

3. 证明：$e<a<b<e^2$ 时，$\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$。

$\ln^2 b-\ln^2 a=\dfrac{2\ln\xi}{\xi}(b-a)$，$a<\xi<b$. (Lagrange中值定理)

设 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$e<x<e^2$

$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}<0$，$x>e \Rightarrow f(x)\searrow$，$x\in[e,e^2]$

从而 $f(\xi)>f(e^2)=\dfrac{2}{e^2}$

$\Rightarrow \ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$.

4. 计算：1）$\int \frac{2\ln x+1}{x^3(\ln x)^2}dx$；(07级三41)

2）$f(x)$连续，$\int_0^x tf(x-t)dt=1-\cos x$，求$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$。(14级三32)(07级三42)(05级三3)

5. 已知$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 2 \\ 2x-2, & 2<x<+\infty \end{cases}$，$S(t)$是由$y=f(x)$，$y=0$，$x=t\ (t>0)$三条曲线所围的图形的面积，求$S(t)$的表达式及$S'(t)$。

$0<t\le 2$ 时，$S(t)=\int_0^t x\,dx=\frac{1}{2}t^2$

$t>2$ 时，$S(t)=\int_0^2 x\,dx+\int_2^t (2x-2)\,dx=t^2-2t+2$.

$\therefore S(t)=\begin{cases} \frac{1}{2}t^2, & 0<t\le 2 \\ t^2-2t+2, & t>2. \end{cases}$

$S'(t)=\begin{cases} t, & 0<t\le 2 \\ 2t-2, & t>2 \end{cases}$