

授课班号 _____ 年级专业 _____ 学号 _____ 姓名 _____

题型	选择题	填空题	计算题	综合题	总分	审核
得分						

一、填空题(每小题 4 分, 共 28 分)

得分	阅卷人

1. 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \sqrt{1 + ax^2}$ 与 x^2 是等价无穷小, 则 $a = \underline{-2}$.

2. 设 $f(x) = \begin{cases} e^x \\ a+x \end{cases}$, 要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a = \underline{1}$.

3. 设 $y = (x + e^{-\frac{x}{2}})^{\frac{2}{3}}$, 则 $y'(0) = \underline{\frac{1}{3}}$.

4. 曲线 $y = \ln(x^2 + 1)$ 的拐点为 $\underline{(\pm 1, \ln 2)}$.

5. 设 $\int f(x) dx = e^{-x^2} + C$, 则 $f'(x)$ 为 $\underline{(4x^2 - 2)e^{-x^2}}$.

6. $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx = \underline{2 - e^{\frac{1}{2}}}$.

7. $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^0 x \cos(t^2) dt = \underline{-\int_0^{x^2} \cos t^2 dt - 2x^2 \cos x^4}$.

二、计算题(每小题 6 分, 共 36 分)

得分	阅卷人

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x}$$

$$= 2$$

L'Hospital 法则 3' 过程 2'
结果 1'



2. 求函数 $y = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$ 的 n 阶导数的一般表达式.

$$y = \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$$

分拆法 3'

过程+结果 3'

$$y^{(n)} = \left(\frac{1}{x-3}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}$$

$$= (-1)^n \cdot n! \cdot \left[\frac{1}{(x-3)^{n+1}} - \frac{1}{(x-2)^{n+1}} \right]$$

3. 设 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = 2t^3 + 3t^2 \end{cases}$ 确定了函数 $y = y(x)$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{6t^2 + 6t}{2t + 2} = 3t \quad (3')$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3}{2t + 2} \quad (3'')$$

4. 已知 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续. $\varphi(x) = (x-a)f(x)$, 求 $\varphi'(a)$.

$$\varphi'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)f(x) - 0}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad (4')$$

$$\because f(x) \text{ 在 } x=a \text{ 处连续} \therefore \varphi'(a) = f(a) \quad (2'')$$



5. 求不定积分 $\int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}} dx$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}} dx - \int \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}} dx \\ &= \int \frac{\frac{1}{2} d(2x)}{\sqrt{3^2-(2x)^2}} - \int \frac{-\frac{1}{8} d(9-4x^2)}{\sqrt{9-4x^2}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x}{3} + \frac{1}{4} \sqrt{9-4x^2} + C \end{aligned}$$

6. 计算积分 $\int_{-2}^2 (|x|+x)e^{-|x|} dx$.

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 (|x|+x)e^{-|x|} dx &= \int_{-2}^2 |x| \cdot e^{-|x|} dx + \int_{-2}^2 x e^{-|x|} dx \\ &\stackrel{\text{奇偶性}}{=} 2 \int_0^2 x e^{-x} dx + 0 \quad (3') \\ &= 2 \int_0^2 -x d(e^{-x}) = -2x e^{-x} \Big|_0^2 - 2 \int_0^2 e^{-x} d(-x) \quad (3') \\ &= -4e^{-2} - 2e^{-x} \Big|_0^2 = 2 - 6e^{-2} \end{aligned}$$

三、综合题(满分 36 分)

或 $\int_{-2}^2 (|x|+x)e^{-|x|} dx = \int_{-2}^0 (-x+x)e^{-x} dx + \int_0^2 (x+x)e^{-x} dx = \int_0^2 2x e^{-x} dx$ (3')

1. (7 分) 设 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ \ln(1+x), & x \geq 0, \end{cases}$ 试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性.

$$f'_{-}(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x - 0}{x} = 1 \quad (3')$$

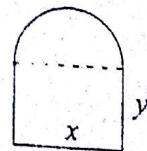
$$f'_{+}(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \quad (3')$$

$$\therefore f'_{-}(0) = f'_{+}(0) = 1 \quad \therefore f'(0) = 1 \quad (1')$$

$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

2. (7 分)

某地区防空洞的截面积建成如图矩形加半圆, 截面的面积为 $5m^2$, 问底宽 x 为多少时才能使截面的周长最小, 从而使建造时所用的材料最省?



$$\text{面积: } xy + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 5$$

$$\therefore y = \frac{1}{x} \cdot \left(5 - \frac{\pi}{8} x^2\right) \quad \therefore 0 < x < \frac{2}{\pi} \sqrt{10\pi}$$

$$\text{从而周长 } C(x) = x + 2y + \pi \cdot \frac{x}{2} = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x + \frac{10}{x} \quad (3')$$

$$C'(x) = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{10}{x^2}$$

$$\text{令 } C'(x) = 0 \Rightarrow x = 2 \sqrt{\frac{10}{4+\pi}} =: x_0$$

$$\therefore x = 2 \sqrt{\frac{10}{4+\pi}} \text{ m 时周长最小.} \quad (1')$$

x	(x_0, y_0)	x_0	$C(x_0)$	$\sqrt{10\pi}$
$C'(x)$	-	0	+	
$C(x)$	↘	最小值	↗	



3. (7分)

证明: 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时 $x > \sin x \cos x$.

$$y'_{\frac{1}{2}} f(x) = x - \sin x \cos x = x - \frac{1}{2} \sin 2x \quad (2')$$

$$f'(x) = 1 - \cos 2x > 0 \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上 \uparrow

x	$(0, \frac{\pi}{4})$	$\frac{\pi}{4}$	$(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	\nearrow		\searrow

$$\text{又 } f(0) = 0$$

$$\therefore f(x) > f(0), \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$\text{即 } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ 时, } x - \sin x \cos x > 0$$

$$\therefore \text{证毕} \quad (3')$$

$$\text{或 } f'(x) = 1 - \cos^2 x + \sin^2 x = 2\sin^2 x > 0$$

4. (7分)

设 $f(x) = \int_0^1 \sin|x-t| dt$, 求 $f'(x)$.

$$\text{令 } x-t=u, \quad \text{则 } f(x) = \int_x^{x-1} \sin|u| \cdot (-1) du$$

$$= \int_{x-1}^x \sin|u| du \quad (4')$$

$$\therefore f'(x) = \sin|x| - \sin|x-1| \quad (3')$$

5. (8分)

求曲线 $x=t^2+1, y=2t-t^2$ 与 x 轴所围成的封闭图形绕 x 轴旋转所得的立体的体积.

曲线与 x 轴交点: $t=0$ 时点 $(1,0)$

$t=2$ 时点 $(5,0)$

$$V = \int_1^5 \pi y^2 dx = \int_0^2 \pi (2t-t^2)^2 d(t^2+1)$$

$$= \int_0^2 2\pi (4t^3+t^5-4t^4) dt$$

$$= 2\pi \left[t^4 + \frac{1}{6}t^6 - \frac{4}{5}t^5 \right]_0^2$$

$$= \frac{32}{15}\pi$$

较难
适当练习



由 扫描全能王 扫描创建