2009-2010 学年第二学期高等数学期中测试及数学竞赛试卷（2009 级）

（参加竞赛的同学全做，其他同学只做一、二大题）

一、填空题（10×4 分）

1. 设 $\vec{a}=(3,2,-1)$，$\vec{b}=(4,-1,3)$，则 $\vec{a}\cdot\vec{i}+\vec{b}\cdot\vec{k}=$ $\underline{\ 6\ }$，$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=$ $\underline{\ 3\sqrt{35}\ }$。

2. 已知平面与两直线 $l_1: x=1, y=1+t, z=2+t$，$l_2:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 平行，且过原点，则该平面的方程为 $\underline{\ x-y+z=0\ }$。

3. 曲线 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1\\ z=0\end{cases}$ 绕 x 轴一周的旋转面的方程是 $\underline{\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{z^2}{16}=1\ }$。

4. 设 $z=(1+xy)^y$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=$ $\underline{\ 1\ }$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}=$ $\underline{\ 2\ln 2+1\ }$。(10级-5)
(13级-5)

5. 在曲线 $x=t, y=-t^2, z=t^3$ 的所有切线中，与平面 $x+2y+z-4=0$ 平行的切线有 $\underline{\ 2\ }$ 条，切点分别为 $\underline{\ (1,-1,1),\ \left(\frac{1}{3},-\frac{1}{9},\frac{1}{27}\right)\ }$。

6. 由 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$，则 $dz\big|_{(1,0,-1)}=$ $\underline{\ dx-\sqrt{2}\,dy\ }$。
(13级-8)

7. 在点 $(4,2,1)$ 处，$U=z\sqrt{x^2-y^2}$ 沿方向 $\vec{l}=(2,1,-1)$ 的方向导数 $\left.\dfrac{\partial U}{\partial l}\right|_{(4,2,1)}=$ $\underline{\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ }$。
(11级-4)

8. 设 $D: 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}, 0\le y\le\dfrac{\pi}{2}$，则 $\iint\limits_D \sin(x+y)\,dxdy=$ $\underline{\ 2\ }$。

9. 交换积分次序 $\int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y)\,dx=$ $\underline{\ \int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)\,dy\ }$。
(10级-9)

10. $\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f\left(x^2+y^2\right)dy$ 的极坐标形式为 $\underline{\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1} f(r^2)\cdot r\,dr\ }$。

二、计算题（4×15 分）

1. 设 f 具二阶连续偏导数，g 具二阶连续导数，$z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{y}{x}\right)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot y+f_2'\cdot\frac{1}{y}+g'\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=yf_1'+\frac{1}{y}f_2'-\frac{y}{x^2}g'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y\left[f_{11}''\cdot x+f_{12}''\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}\left[f_{21}''\cdot x+f_{22}''\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^2}g''\cdot\frac{1}{x}$$

$$=f_1'-\frac{1}{y^2}f_2'+xyf_{11}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''$$

2. 求直线 $L:\begin{cases}2x-y+z-1=0\\x+y-z+1=0\end{cases}$ 在平面 $\pi: x+2y-z=0$ 上的投影直线 L_0 的方程。(10级-4)(11级-3)

设过 L 且与 π 垂直的平面为：$2x-y+z-1+m(x+y-z+1)=0$ (*)

$\vec{n}=(2+m,-1+m,1-m)\perp(1,2,-1)$

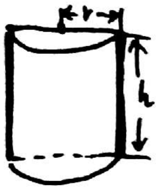
则有 $(2+m)+2(-1+m)+(1-m)\cdot(-1)=0 \Longrightarrow m=\frac{1}{4}$.

代入(*)整理得：$3x-y+z-1=0$

$\therefore L_0:\begin{cases}3x-y+z-1=0\\x+2y-z=0\end{cases}$

3. 横断面为半圆形的正柱形无盖容器，其表面积为定数 S $(S>0)$，应如何选择尺寸，方可使此容器的容积最大。

$V=\frac{1}{2}\pi r^2 h$，$\frac{1}{2}\pi r^2+2rh+\pi rh=S$.



设 $L(r,h,\lambda)=\frac{1}{2}\pi r^2 h+\lambda(\frac{1}{2}\pi r^2+2rh+\pi rh-S)$

由 $\begin{cases}L_r=\pi rh+\lambda(\pi r+2h+\pi h)=0\\L_h=\frac{1}{2}\pi r^2+\lambda(2r+\pi r)\\L_\lambda=\frac{1}{2}\pi r^2+2rh+\pi rh-S=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}r=\sqrt{\frac{2S}{3\pi}}=\frac{\sqrt{6\pi S}}{3\pi}\\h=\frac{\pi}{\pi+2}r=\frac{\sqrt{6\pi S}}{3(\pi+2)}\end{cases}$

$\therefore$ 横断面半径为 $\frac{\sqrt{6\pi S}}{3\pi}$，高为 $\frac{\sqrt{6\pi S}}{3(\pi+2)}$ 时，容积最大.

4. 求球体 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 被圆柱 $x^2+y^2=Rx$ 所截出部分的立体体积 V。

$V=4V_1$ （V_1 为第一卦限部分体积）

$=4\iint\limits_{D_1}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-r^2}\cdot r\,dr$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{R^3}{3}(1-\sin^3\theta)\,d\theta$

$=\frac{4}{3}R^3(\frac{\pi}{2}-\frac{2!!}{3!!})$

$=\frac{2}{3}\pi R^3-\frac{8}{9}R^3$

三、数学竞赛加题（5×20分）

1. 求极限：1） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$；　　2） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$。

$$1\le\frac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}\le\sqrt[n]{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

由夹逼准则，原式 $=1$

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{[x\ln(1+x)-x^2]\cdot(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x\cdot(1-\cos x)}{2x[\ln(1+x)-x]}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{2[\ln(1+x)-x]}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{2(\frac{1}{1+x}-1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-(1+x)}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

2. 讨论 $f(x)=\begin{cases}x^3\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\\ x^3, & x\le0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续性与可导性及 $f'(x)$ 的连续性。

1)

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}x^3\sin\frac{1}{x}=0=f(0)$$

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，从而在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

2) $x>0$ 时，$f'(x)=3x^2\sin\frac{1}{x}+x^3\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})=3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}$

$x<0$ 时，$f'(x)=3x^2$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}x^2\sin\frac{1}{x}=0$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}x^2=0$$

$\therefore f'(0)=0$

从而 $f'(x)=\begin{cases}3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}, & x>0\\ 3x^2, & x\le0\end{cases}$

3)

$$\lim_{x\to0^+}f'(x)=\lim_{x\to0^+}(3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x})=0=f'(0)$$

$\therefore f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，从而 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

3. 积分计算 1）$\int \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$；　　2）$\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{\sqrt{2x-1}}\,dx$。

1)

令 $x=\tan t$

原式 $=\int \frac{\sec^2 t}{(2\tan^2 t+1)\cdot \sec t}\,dt$

$=\int \frac{\cos t}{2\sin^2 t+\cos^2 t}\,dt$

$=\int \frac{d\sin t}{1+\sin^2 t}$

$=\arctan(\sin t)+C$

$=\arctan\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C$

2）令 $\sqrt{2x-1}=t$　$(x=\frac{1+t^2}{2})$

原式 $=\int_0^1 e^t\cdot t\,dt$

$=\int_0^1 t\,de^t$

$=[te^t]_0^1-\int_0^1 e^t\,dt$

$=e-[e^t]_0^1$

$=1$

4. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$，证明：在 $(-1,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f'''(\xi)=3$。

由Taylor公式，$0=f(-1)=f(0)+\frac{f''(0)}{2!}\cdot(-1)^2+\frac{f'''(\xi_1)}{3!}\cdot(-1)^3$，$-1<\xi_1<0$　①

$1=f(1)=f(0)+\frac{f''(0)}{2!}\cdot 1^2+\frac{f'''(\xi_2)}{3!}\cdot 1^3$，$0<\xi_2<1$　②

②－①：$1=\frac{1}{3!}[f'''(\xi_2)+f'''(\xi_1)]$　③

∵ $f'''(x)$ 连续，∴ 由介值定理，$\exists\,\xi\in[\xi_1,\xi_2]$ s.t. $f'''(\xi)=\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}$.

从而由③，$f'''(\xi)=3$，结论成立.

5. 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调减少且连续，$f(1)>0$，求证：$\frac{\int_0^1 xf^2(x)\,dx}{\int_0^1 xf(x)\,dx}\le\frac{\int_0^1 f^2(x)\,dx}{\int_0^1 f(x)\,dx}$。

由 $f(x)\downarrow$，$f(1)>0$ 可得，$f(x)>0$，$x\in[0,1]$. 从而 $\int_0^1 xf(x)\,dx>0$，$\int_0^1 f(x)\,dx>0$.

令 $F(x)=\int_0^x tf^2(t)\,dt\cdot\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x f^2(t)\,dt\cdot\int_0^x tf(t)\,dt$

$F'(x)=xf^2(x)\cdot\int_0^x f(t)\,dt+\int_0^x tf^2(t)\,dt\cdot f(x)-f^2(x)\cdot\int_0^x tf(t)\,dt-\int_0^x f^2(t)\,dt\cdot xf(x)$

$=f(x)\left[xf(x)\int_0^x f(t)\,dt+\int_0^x tf^2(t)\,dt-f(x)\int_0^x tf(t)\,dt-x\int_0^x f^2(t)\,dt\right]$

令 $G(x)=xf(x)\int_0^x f(t)\,dt+\int_0^x tf^2(t)\,dt-f(x)\int_0^x tf(t)\,dt-x\int_0^x f^2(t)\,dt$

则 $G(x)=\int_0^x (x-t)[f(x)-f(t)]f(t)\,dt$　无 $f(x)$ 可导条件，不能求 $G'(x)$，只能作积分变形

$x-t\ge 0$，$f(x)-f(t)\le 0$，$f(t)>0$　∴ $G(x)\le 0$，从而 $F'(x)\le 0$，

$F(x)\downarrow$. ∴ $F(1)\le F(0)=0$　即 $\int_0^1 tf^2(t)\,dt\cdot\int_0^1 f(t)\,dt-\int_0^1 f^2(t)\,dt\cdot\int_0^1 tf(t)\,dt\le 0$

$\Longrightarrow \frac{\int_0^1 tf^2(t)\,dt}{\int_0^1 tf(t)\,dt}\le\frac{\int_0^1 f^2(t)\,dt}{\int_0^1 f(t)\,dt}$，结论成立.