《高等数学 BI》期末试卷(A)

考试对象：2015 级全校工科学生
考试日期：2016 年 1 月 20 日

专业________学号________姓名________成绩________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	成 绩
得 分								

得分

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

A 1. 已知 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，$a\neq 0$，则 $\int \frac{f(ax)}{a}dx=$(　　).

(A) $\frac{\sin ax}{a^3x}+C$；　(B) $\frac{\sin ax}{a^2x}+C$；　(C) $\frac{\sin ax}{ax}+C$；　(D) $\frac{\sin ax}{x}+C$.

D 2. 当 $x\to 0$ 时，下列四个无穷小量中，比另外三个更高阶的无穷小量为（　　）.

(A) x^2-x^3；　(B) $1-\cos x$；　(C) $\sqrt{1-x^2}-1$；　(D) $x-\sin x$.

B 3. 反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$（　　）.

(A)等于 $\frac{\pi}{2}$；　(B)等于 $\frac{\pi}{4}$；　(C)发散；　(D)等于 π.

D 4. 已知 $I_1=\int_0^1 x dx$，$I_2=\int_0^1\sqrt{x}dx$，$I_3=\int_0^1 x^2dx$，则比较积分大小为(　　).

(A) $I_1>I_2>I_3$；　(B) $I_1>I_3>I_2$；　(C) $I_3>I_1>I_2$；　(D) $I_2>I_1>I_3$.

C 5. 设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，周期为 4，又 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处的切线斜率为(　　).

(A) $\frac{1}{2}$；　(B) 0；　(C) -2；　(D) -1.

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 一质点以 $v=2e^{-t}$ 米／秒的速度作直线运动，则该质点从 $t=0$ 到 $t=10$ 秒所经过的路程为 $2(1-e^{-10})$ 米.

2. 曲线 $y=\sqrt{1+x^2}$ 在点 $(1,\sqrt{2})$ 处的曲率为 $\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

3. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}}+\cdots+n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}}=$ $\frac{2}{3}$.

4. 计算 $\int_{-1}^{1}(x+\sqrt{1-x^2})^2dx=$ 2.

5. 曲线 $y=e^{\frac{-1}{x^2}}$ 的渐近线有 $y=0$.

得分

三、解答下列各题（每小题 6 分，共 42 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{3n^3+2}\right)\cdot\sin(n!)$；

解：∵ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{3n^3+2}=0$ 而 $|\sin(n!)|\leq 1$

∴ 原式 $=0$.

2. 设参数方程 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=t-\arctan t\end{cases}$ 确定函数 $y=y(x)$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$，

解：$\frac{dx}{dt}=\frac{2t}{1+t^2}$　$\frac{dy}{dt}=1-\frac{1}{1+t^2}=\frac{t^2}{1+t^2}$

∴ $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t}{2}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{4t}$

3. 计算 $\int \frac{xe^{-x}}{(1-x)^2}dx$；

解：原式 $= \int \frac{(x-1+1)}{(1-x)^2} e^{-x} dx$

$= \int \frac{e^{-x}}{(1-x)^2}dx - \int \frac{e^{-x}}{1-x}dx$

$= \int \frac{e^{-x}}{(1-x)^2}dx + \left(\frac{e^{-x}}{1-x} - \int e^{-x} \cdot \frac{e^{-x}}{(1-x)^2}dx\right)$

$= \frac{e^{-x}}{1-x}$

4. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$；

解：原式 $= \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{2}{\pi}\arctan x-1\right)^{\frac{1}{\frac{2}{\pi}\arctan x-1}}\right]^{x(\frac{2}{\pi}\arctan x-1)}$

$\because \lim\limits_{x\to+\infty} x(\frac{2}{\pi}\arctan x-1) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{\pi}\arctan x-1}{\frac{1}{x}} \overset{洛}{\underset{0}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$

$= -\frac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2} = -\frac{2}{\pi}$

$\therefore$ 原式 $= e^{-\frac{2}{\pi}}$

5. 设 $\int xf(x)dx = \arcsin x + C$，计算 $\int \frac{1}{f(x)}dx$；

解：$xf(x) = (\arcsin x + C)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore \int \frac{1}{f(x)}dx = \int x\sqrt{1-x^2}\,dx$

令 $x=\sin t$． $t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$． $\sqrt{1-x^2}=\cos t$

$\therefore$ 原式 $= \int \sin t\cos t\cdot\cos t\,dt = -\int \cos^2 t\,d(\cos t) = -\frac{1}{3}\cos^3 t + C$

$= -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

6. 计算 $\int_0^a \frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}dx$；

解：令 $x=a\sin t$． $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$\therefore$ 原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\cos t}{a\sin t+a\cos t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt$

令 $u=\frac{\pi}{2}-t$，可得：原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u}{\cos u+\sin u}du$

$\therefore$ 原式 $= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\cos t+\sin t}dt\right]$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt$

$= \frac{\pi}{4}$

7. 设 $f(x)=\begin{cases} e^{\sin x}\cos x, & x\le 0 \\ \sin\sqrt{x}+1, & x>0 \end{cases}$，求 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$，使得 $F(-\pi)=\frac{1}{2}$．

解：$F(x) = \frac{1}{2} + \int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt$．

①．$x\le 0$ 时． $F(x) = \frac{1}{2} + \int_{-\pi}^{x} e^{\sin t}\cos t\,dt$

$= \frac{1}{2} + e^{\sin t}\Big|_{-\pi}^{x}$

$= e^{\sin x} - \frac{1}{2}$

②．$x>0$ 时． $F(x) = \frac{1}{2} + \int_{-\pi}^{0} e^{\sin t}\cos t\,dt + \int_0^x(\sin\sqrt{t}+1)\,dt$

$= \frac{1}{2} + \int_0^x \sin\sqrt{t}\,dt + x$

$\int_0^x \sin\sqrt{t}\,dt \overset{令u=\sqrt{t}}{\underset{t=u^2,\ dt=2udu}{=\!=}} \int_0^{\sqrt{x}} \sin u\cdot 2u\,du = -2u\cos u\Big|_0^{\sqrt{x}} + 2\int_0^{\sqrt{x}}\cos u\,du$

$= -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x}$

$\therefore F(x) = \frac{1}{2} - 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x}$

$e^{\sin x}$ 1 $x\le 0$

52

得分

四、(8 分)求函数 $y=x^3(1-x)$ 的单调区间，极值及相应曲线的凹凸区间、拐点．

解：$y'=3x^2-4x^3$ 令 $y'=0$ 得 $x=0$，$\frac{3}{4}$

$y''=6x-12x^2$ 令 $y''=0$ 得 $x=0$，$\frac{1}{2}$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$	$\frac{3}{4}$	$(\frac{3}{4},+\infty)$
y	↗	拐	↗	拐	↗	极大	↘
y'	+	0	+	+	+	0	−
y''	−	0	+	0	−	−	−

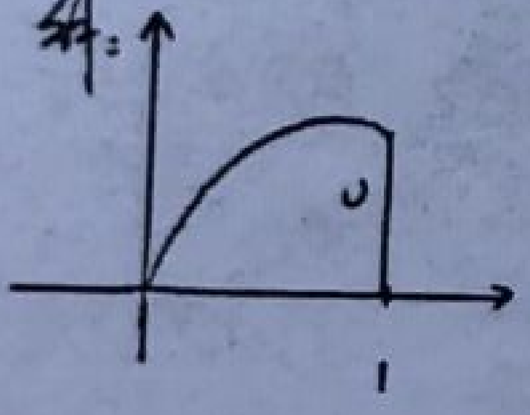
∴ y 在 $(-\infty,\frac{3}{4})$ 上单增，在 $(\frac{3}{4},+\infty)$ 上单减．在 $x=\frac{3}{4}$ 上取极大值 $\frac{27}{216}$

在 $(-\infty,0)$，$(\frac{1}{2},+\infty)$ 上凸，在 $(0,\frac{1}{2})$ 上凹．$(0,0)$，$(\frac{1}{2},\frac{1}{16})$ 为拐点．

得分

五、(8 分)设 $x\in[0,1]$ 时，曲线 $y=ax^2+2bx\ (\geq 0)$ 与 x 轴，直线 $x=1$ 围成平面图形为 D．将平面图形 D 绕 x 轴旋转一周得到一个旋转体，若已知图形 D 的面积为 $\frac{1}{3}$，试确定 a,b 的值，使得旋转体的体积最小．

解：



D的面积为

$\int_0^1 (ax^2+2bx)dx=\left(\frac{a}{3}x^3+bx^2\right)\Big|_0^1=\frac{a}{3}+b=\frac{1}{3}$．

∴ $a=1-3b$．$\frac{da}{db}=-3$．

旋转体体积为

$V=\int_0^1 \pi(ax^2+2bx)^2dx$

$=\pi\int_0^1(a^2x^4+4abx^3+4b^2x^2)dx$

$=\pi(\frac{1}{5}a^2+ab+\frac{4}{3}b^2)$

$-\frac{35}{4}+\frac{26}{4}<0$

$\frac{dV}{da}=\frac{2}{5}a+(b+a\cdot(-3))+\frac{8}{3}b\cdot(-3)=-\frac{13}{5}a-7b=0$

∴ $a=-\frac{35}{4}$．$b=\frac{13}{4}$ 此时最小体积为 $V_{min}=\frac{23}{24}$．

得分

六、(6 分)设函数 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^x tf(2x-t)dt=\frac{1}{2}\arctan x^2$，已知 $f(1)=1$，求 $\int_1^2 f(x)dx$．

解：令 $u=2x-t$，$\Rightarrow t=2x-u$

∴ $\frac{1}{2}\arctan x^2=\int_{2x}^{x}(2x-u)f(u)\,d(2x-u)=2x\int_x^{2x}f(u)du-\int_x^{2x}uf(u)du$．

对 x 求导，得：

$\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^4}\cdot 2x=2x(f(2x)\cdot 2-f(x))+2\int_x^{2x}f(u)du-(2xf(2x)\cdot 2-xf(x))$

$=-xf(x)+2\int_x^{2x}f(u)du$．

∴ $\int_x^{2x}f(u)du=\frac{1}{2}xf(x)+\frac{x}{2(1+x^4)}$

代入 $x=1$．可得：$\int_1^2 f(u)du=\frac{1}{2}f(1)+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$．

得分

七、(6 分)设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，且有 $f(1)-2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx=0$，证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$．

证明：由积分中值定理，知 $\exists\eta\in[0,\frac{1}{2}]$．s.t. $\eta f(\eta)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx$．

即 $\eta f(\eta)=f(1)$

令 $F(x)=xf(x)$．由 $F(1)=F(\eta)$ 及 Rolle定理．

知 $\exists\xi\in(\eta,1)$ s.t. $F'(\xi)=0$ 即 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$．又 $(\eta,1)\subset(0,1)$

∴ 本题得证．