2015-2016 学年第二学期《高等数学BII》试卷（A）

授课班号________年级专业________学号________姓名________

题型	填空题	计算题	综合题	总分	审　　核
得分					

一、填空题(每小题 3 分，共 24 分)

得分	阅卷人
$\frac{7}{25}$	

1. 设 $|a|=|b|=5$，$|a-b|=6$，则 $(\hat{a,b})=$ $2\arcsin\frac{3}{5}$ 或 $\arccos\frac{7}{25}$

2. 曲线 $\begin{cases} z=2-x^2-y^2 \\ z=(x-1)^2+(y-1)^2 \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影曲线的方程为

$2-x^2-y^2=x^2+y^2-2x-2y+2$

$x^2+y^2=x+y$

$\begin{cases} 2-x^2-y^2=(x-1)^2+(y-1)^2 \\ z=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x^2+y^2=x+y \\ z=0 \end{cases}$

3. 曲线 $\begin{cases} x-2y+3z-6=0 \\ x^3+2y^2-4z+14=0 \end{cases}$ 在点 $(-2,-1,2)$ 处的法平面方程为 $(x+2)+2(y+1)+(z-2)=0$ 或 $x+2y+z+2=0$

4. 改变积分次序

$\int_{-2}^{0}dy\int_{-y-2}^{0}f(x,y)dx+\int_{0}^{4}dy\int_{-\sqrt{4-y}}^{0}f(x,y)dx=$ $\int_{-2}^{0}dx\int_{-x-2}^{4-x^2}f(x,y)dy$.

5. 设 $x+z=yf(x^2-z^2)$，其中 $f(u)$ 可导，则 $z\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$ x.

6. 差分方程 $Y_{x+1}+Y_x=1$ 的通解为 $C(-1)^x+\frac{1}{2}$

7. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=2$，$\sum_{n=1}^{\infty}u_{2n-1}=5$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的和是

8

8. 若方程 $y''+py'+qy=0$ (p,q 均为实常数) 有特解

$$y_1=10,\ y_2=e^{-2x},$$

则 p 等于 2，q 等于 0.

二、计算题(每小题 8 分，共 32 分)

得分	阅卷人

1. 在曲面 $2z=x^2+y^2$ 上求一点，使曲面在该点处的法线垂直于平面 $x-y+z=1$.

$\begin{cases} (2x,2y,-2)\parallel(1,-1,1) \\ 2z=x^2+y^2 \end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$

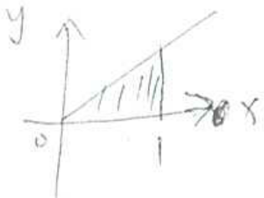
2. 设 $z=yf(x+y,x-y)$，f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f+y[f_1'-f_2'] \quad 4'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=f_1'+f_2'+y[f_{11}''+f_{12}''-(f_{21}''+f_{22}'')]$$

$$=f_1'+f_2'+yf_{11}''+ \quad -yf_{22}'' \quad 4'$$

3. 计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}\,dxdy$，其中 D 是由 $y=x$，$y=0$，$x=1$ 所围成的区域.



$$\int_0^1 dx\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dy \quad 5'$$

$$=\int_0^1 \sin x\,dx$$

$$=1-\cos 1 \quad 3'$$

4. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$ 的收敛域.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{4} \quad 5'$$

$\therefore R=4$.

$x=4$ 时. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}4^n$ $\therefore$ $\frac{[(n+1)!]^2 4^{n+1}}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n}=\frac{4(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}$

$=(-4,4)$ 1'　　$=\frac{4n^2+8n+4}{4n^2+6n+2}>1$ 2' $\therefore$ 通项不趋于0.

三、综合题（满分 44 分）

1.（11 分）

在曲面 $(x^2y+y^2z+z^2x)^2+(x-y+z)=0$ 上的点 $(0,0,0)$ 处的切平面 π 内求一点 p，使 p 到点 $A(2,1,2)$ 的距离的平方最小.

得分	阅卷人

d^2

(0,0,0) 之处的切平面为： $x-y+z=0$

$d^2=(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2$

设 $L=(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2+\lambda(x-y+z)$

令 $\begin{cases} 2(x-2)+\lambda=0 \\ 2(y-1)-\lambda=0 \\ 2(z-2)+\lambda=0 \\ x-y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$

2.（11 分） 试求曲面 $x^2+y^2=az$ 被曲面 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0)$ 截下部分的面积.

$S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\frac{4x^2}{a^2}+\frac{4y^2}{a^2}}\,dxdy$

D_{xy}: $2a-\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{x^2+y^2}{a} \Rightarrow r=a$

$\therefore$ ~~$S=\frac{2}{a}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^2dr$~~ $S=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\frac{1}{a}\sqrt{a^2+4r^2}\,r\,dr$

~~$=\frac{4\pi}{a}\cdot\frac{a^3}{3}=\frac{4\pi a^2}{3}$~~ ~~$=2\pi\cdot\frac{4}{3a}\cdot\left[(5\sqrt{5}-1)a^3\right]$~~

$\frac{\pi}{6}a^2(5\sqrt{5}-1)$

~~$=\frac{8\pi a^2}{3}(5\sqrt{5}-1)$~~

3. (11 分)

试求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ 在 $(-1,1)$ 内的和函数.

$D=[-1,1]$

令 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = S(x)$, $x \in (-1,1)$

$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

$S''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$

$\therefore S'(x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x)$

$S(x) = \int_0^x -\ln(1-t)dt = (1-x)\ln(1-x) + x$.

4. (11 分)

求微分方程 $y'' + \frac{1}{x}y' = 1$ 的通解.

令 $y' = p(x)$. $\therefore y'' = p'(x) = \frac{dp}{dx}$. 代入

$\frac{dp}{dx} + \frac{1}{x}p = 1$ 一阶线性

$e^{-\int \frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x}$

$\int 1 \cdot x\, dx = \frac{x^2}{2}$

$\therefore p = y' = \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) = \frac{x}{2} + \frac{C_1}{x}$

$\therefore y = \frac{x^2}{4} + C_1 \ln|x| + C_2$