河海大学 2024—2025 学年第一学期

《高等数学 BI》期末试卷（A 卷）

考试对象：2024 级全校工科各专业本科生

考试日期：2025 年 1 月 16 日

专业__________ 学号__________ 姓名__________ 成绩__________

任课教师（金坛重修学生填写）____________________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	成绩
得分									

得 分	

一、单选题（每小题 3 分，共 15 分）

1．当 $x \to 0^+$ 时，下列与 x 等价无穷小的是（　　）.

A．$e^{-\sin x}-1$　　B．$\sqrt{1+\arctan x}-1$　　C．$1-\cos\sqrt{2x}$　　D．$1-\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

2．设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$，$ab \neq 0$ 且 $a \neq b$，则在 a、b 之间使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ 成立的点 ξ（　　）.

A．不存在　　B．只有一点　　C．有两个点　　D．是否存在与 a、b 之值有关

3．设 $f(x)=|x^3-1|\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处连续，则 $\varphi(1)=0$ 是 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导的（　　）.

A．充分必要条件　　B．必要但非充分条件

C．充分但非必要条件　　D．既非充分也非必要条件

4．若 $\int f'(x^2)\mathrm{d}x = x^4+C \quad (x>0)$，则 $f(x)=$（　　）.

A．x^2+C　　B．$\dfrac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$　　C．x^4+C　　D．$\dfrac{8}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$

5．函数 $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$ 的麦克劳林公式为（　　）.

A．$-2\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x^{2k}}{2k}+o(x^{2n})$　　B．$-2\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x^{2k-1}}{2k-1}+o(x^{2n-1})$

C. $2\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2k}}{2k}+o(x^{2n})$　　　　D. $-2\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+o(x^{2n-1})$

得 分	

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 不定积分 $\int\frac{x+5}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x=$____________________.

2. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $\sqrt[x]{y}=\sqrt[y]{x}(x>0,y>0)$ 所确定，则 $\mathrm{d}y=$____________________.

3. 极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\left(\sqrt[3]{1+t^2}-1\right)\mathrm{d}t}{x^3(e^{-x^3}-1)}=$____________________.

4. 曲线 $y=\frac{\ln x}{x}-2x$ 的渐近线方程为____________________.

5. 反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{e^x+e^{-x}}\mathrm{d}x=$____________________.

得 分	

三、解答下列各题（每小题 6 分，共 30 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

2. 求曲线 $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$ $(a>0)$ 在 $t=\frac{\pi}{6}$ 处的曲率.

3．已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\dfrac{(\arcsin x)^2}{x}$，求 $\int x f'(x)\mathrm{d}x$.

4. 计算定积分 $\int_1^{\sqrt{3}} \dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$.

5. 设 $f(x)=3x^2+Ax^{-3}$，问正数 A 至少为何值时，可使得对任意 $x\in(0,+\infty)$ ，都有 $f(x)\geq 20$?

得 分	

四、(8 分) 求 $f(x)=xe^x$ 的 n 阶分别具有拉格朗日型余项和皮亚诺型余项的麦克劳林公式.

得 分	

五、(8 分) 过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，该切线与曲线 $y=\ln x$ 以及 x 轴所围成的平面图形记为 D.

（1）求 D 的面积 A；

（2）求 D 绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积 V.

得 分	

六、(8 分) 设函数 $f(x)$ 连续.

(1) 证明 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$；

(2) 计算 $\int_0^2 \frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{4-x}+\sqrt{x+2}}\mathrm{d}x$.

得 分	

七、(8 分)(1) 计算不定积分 $\int e^x \sin x\mathrm{d}x$；

(2) 求 $I_n = \int e^x \sin^n x\mathrm{d}x$ 的递推公式, 其中 n 为大于 1 的整数.

得 分	

八、(8 分) 设 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处三阶可导，且 $f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)\neq 0$.（1）证明 $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点；（2）试问 $x=x_0$ 是否是函数 $y=f(x)$ 的极值点？为什么？

河海大学2024—2025学年第一学期《高等数学BI》(A卷)期末试卷参考解答

一、1．C；2．D；3．A；4．D；5．B

二、1．$\dfrac{1}{2}\ln(x^2-6x+13)+4\arctan\dfrac{x-3}{2}+C$；　2．$\mathrm{d}y=\dfrac{1+\ln x}{1+\ln y}\mathrm{d}x$；　3．$-\dfrac{1}{9}$；

4．$x=0$ 与 $y=-2x$；　5．$\dfrac{\pi}{2}$．

三、1．解 原极限$=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{\tan x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\tan x-x}\cdot\frac{\tan x-x}{x^3}}\overset{2'}{=}e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}}\overset{4'}{=}e^{\frac{1}{3}}$.

2．解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\tan t$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{1}{3a\cos^4 t\sin t}$，所以$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{6}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{6}}=\dfrac{32}{27a}$【4分】.

曲率$K\big|_{t=\frac{\pi}{6}}=\left.\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_{t=\frac{\pi}{6}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{9a}$【2分】.

3. 解 $f(x)=\left(\dfrac{(\arcsin x)^2}{x}\right)'=\dfrac{2\arcsin x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}-(\arcsin x)^2}{x^2}$【3分】,

所以$\int xf'(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}f(x)=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{2(\arcsin x)^2}{x}+C$.【3分】

4．解 令$x=\tan t$,

则$\int_1^{\sqrt{3}}\dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t$【3分】$=-\left.\dfrac{1}{\sin t}\right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$【2分】$=\sqrt{2}-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$..【1分】

5．解 不等式写成 $A\ge 20x^3-3x^5$．设 $f(x)=20x^3-3x^5$，即求 $f(x)$ 的最大值．令 $f'(x)=60x^2-15x^4=0$,得$(0,+\infty)$内的唯一驻点$x=2$【4分】. 又$f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，故当 $x\in(0,+\infty)$时, $\max f(x)=f(2)=64$，即$A=64$【2分】.

四、解 $f^{(n)}(x)=C_n^0(e^x)^{(n)}x+C_n^1(e^x)^{(n-1)}x'=xe^x+ne^x$,【3分】

拉格朗日型: $xe^x=x+x^2+\dfrac{x^3}{2!}\cdots+\dfrac{x^n}{(n-1)}+\dfrac{e^{\theta x}(n+1+\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}.0<\theta<1$.【3分】

皮亚诺型: $xe^x=x+x^2+\dfrac{x^3}{2!}\cdots+\dfrac{x^n}{(n-1)}+o(x^n)$.【2分】

五、解 设切点为$(x_0,\ln x_0)$，则切线方程为$y=\ln x_0+\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$，切线过原点知

$\ln x_0-1=0, x_0=e$ 切点为$(e,1)$，切线方程为 $y=\dfrac{1}{e}x$【2 分】.面积 $A=\dfrac{e}{2}-\int_1^e \ln x\mathrm{d}x=\dfrac{e}{2}-1$【2 分】.

体积$V_y=\pi\int_0^1 e^{2y}\mathrm{d}y-\dfrac{1}{3}\pi e^2=\dfrac{\pi}{6}(e^2-3)$.【4 分】

六、(1) 证　令$a+b-x=t$，则$\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.【3 分】

(2) 解　$I=\int_0^2\dfrac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{4-x}+\sqrt{x+2}}\mathrm{d}x=\int_0^2\dfrac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{4-x}}\mathrm{d}x$【3 分】，所以$2I=2\Rightarrow I=1$.【2 分】

七、解 (1) $\int e^x\sin x\mathrm{d}x=\int\sin x\mathrm{d}e^x=e^x\sin x-\int e^x\cos x\mathrm{d}x=e^x\sin x-\int\cos x\mathrm{d}e^x$

$=e^x\sin x-\left[e^x\cos x+\int e^x\sin x\mathrm{d}x\right]$,由此得到$\int e^x\sin x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}e^x\left(\sin x-\cos x\right)+C$.【3 分】

(2)　$I_n=\int\sin^n x\mathrm{d}\left(e^x\right)=e^x\sin^n x-\int e^x\mathrm{d}\left(\sin^n x\right)=e^x\sin^n x-n\int e^x\sin^{n-1}x\cos x\mathrm{d}x$

$=e^x\sin^n x-n\int\sin^{n-1}x\cos x\mathrm{d}\left(e^x\right)=e^x\sin^n x-n\left[e^x\sin^{n-1}x\cos x-\int e^x\mathrm{d}\left(\sin^{n-1}x\cos x\right)\right]$.

$=e^x\sin^n x-ne^x\sin^{n-1}x\cos x+n\int e^x\left((n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 x-\sin^n x\right)\mathrm{d}x$

$=e^x\sin^n x-ne^x\sin^{n-1}x\cos x+n\int e^x\left((n-1)\sin^{n-2}x-n\sin^n x\right)\mathrm{d}x$

$=e^x\sin^n x-ne^x\sin^{n-1}x\cos x+n(n-1)I_{n-2}-n^2I_n$【4 分】

由此得到 $I_n=\dfrac{\mathrm{e}^x\sin^{n-1}x}{n^2+1}\left(\sin x-n\cos x\right)+\dfrac{n(n-1)}{n^2+1}I_{n-2}(n\ge 2)$.【1 分】

八、(1) 证 不妨设 $f'''(x_0)>0$，则 $f'''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)}{x-x_0}>0$，由极限的保号性，在 $\overset{o}{U}(x_0)$ 内有$\dfrac{f''(x)}{x-x_0}>0$，所以 $f''(x)$ 在 x_0 的两侧异号，所以$(x_0,f(x_0))$是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.【3 分】

(2) $x=x_0$不是函数 $y=f(x)$ 的极值点.【1 分】理由如下：

①若 $f'(x_0)\ne 0$，则由费马引理（取极值的必要条件）知 $x=x_0$ 不是函数 $y=f(x)$ 的极值点.【2 分】

②若 $f'(x_0)=0$，则由泰勒公式 $f(x)-f(x_0)=\dfrac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3)$.可见在 $x=x_0$ 的两侧 $f(x)-f(x_0)$的符合异号，所以 $x=x_0$ 不是函数 $y=f(x)$ 的极值点.【2 分】.

河海大学 2024—2025 学年第一学期《高等数学 BI》(B 卷)期末试卷参考解答

一、1. B；2. A；3. D；4. B；5. C

二、1. $\mathrm{d}y=\dfrac{1+\ln x}{1+\ln y}\mathrm{d}x$；　2. $\dfrac{1}{2}\ln(x^2-6x+13)+4\arctan\dfrac{x-3}{2}+C$；　3. $x=0$ 与 $y=-2x$；

4. $\dfrac{\pi}{2}$；　5. $-\dfrac{1}{9}$.