2007-2008 学年第二学期《高等数学》期末试卷

一、填空题（每小题 3 分，共 36 分）

1. 一平面通过点 $M(1,2,3)$ 且平行于平面 $x+2y+3z=10$，它的方程为____________________。

2. xOy 坐标面上曲线 $x^2+y^2=2y$ 绕 y 轴的旋转曲面方程为_________________________。

3. 设函数 $z=xy+\dfrac{x}{y}$，则全微分 $dz=$____________________________________。

4. 函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 在点 $(1,1)$ 处的梯度为_________________________。

5. 设 $z=z(x,y)$ 为由方程 $z=e^{-xy}+e^z$ 所确定的隐函数，则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=$______________________。

6. 二次积分 $\int_0^1 dx\int_0^x f(\sqrt{x^2+y^2})\,dy$ 的极坐标形式为________________________________。

7. 设周期为 2 的函数 $f(x)$ 在一个周期内的表达式为 $f(x)=\begin{cases} x, & 0.5<x<1 \\ 1, & -1\le x\le 0.5 \end{cases}$，它的傅立叶级数的和函数为 $S(x)$，则 $S(-3.5)=$______________。

8. 设 L 的方程为 $y=-\sqrt{9-x^2}$，则曲线积分 $\int_L (x^2+y^2)\,ds=$___________________。

9. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{n}$ 的收敛区间是___________________。

10. 函数 $f(x)=x\sin x$ 的麦克劳林级数为_____________________________。

11. 已知二阶常系数线性齐次微分方程的特征根全为 1，则其对应的微分方程为_________________。

12. 微分方程 $y'+2xy=x$ 满足条件 $y(1)=\dfrac{1}{2}$ 的特解为________________________。

二、计算题（每小题 6 分，共 24 分）

1. 设函数 $z=z(x,y)$ 为由方程 $f(x-z,y-z)=0$ 所确定的隐函数，其中 $f(u,v)$ 具有连续的偏导数且 $\dfrac{\partial f}{\partial u}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\neq 0$。求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 的值。

2. 求微分方程 $xy' + y = x\ln x$ 的通解。

3. 计算二重积分 $\iint\limits_{D} \sin\frac{x}{y} d\sigma$，其中 D 是以直线 $y = x$ 和曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 为边界的曲边三角形区域（第一象限）。

4. 计算曲线积分 $\int_{\Gamma} xdx + ydy + (x + y - 1)\,dz$，其中 Γ 是由点 $(1,1,1)$ 到点 $(1,2,3)$ 的直线段。

三、综合题（每小题 10 分，共 40 分）

1. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域与和函数 $S(x)$。

2. 用高斯公式计算曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma} xydydz + yzdzdx + zxdxdy$，其中 Σ 是三个坐标面和平面 $x+y+z=1$ 所围成的四面体的边界的外侧。

3. 求曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ (a>0, b>0, c>0)$ 在第一卦限的切平面，使该切平面与三个坐标面围成的四面体体积最小，并写出该四面体的体积。

4. 已知 $f(x)$ 有二阶连续的导数且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，如果积分

$\int_L [x^2-f(x)]\,y\,dx+[f'(x)+y]\,dy$ 与路径无关，求 $f(x)$。