$$x_n > \frac{1}{\sqrt{n^6+n^2}} + \frac{2^2}{\sqrt{n^6+n^2}} + \cdots + \frac{n^2}{\sqrt{n^6+n^2}} = \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{\sqrt{n^6+n^2}} \to \frac{1}{3}(n\to\infty),$$

$$x_n < \frac{1}{\sqrt{n^6+n}} + \frac{2^2}{\sqrt{n^6+n}} + \cdots + \frac{n^2}{\sqrt{n^6+n}} = \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{\sqrt{n^6+n}} \to \frac{1}{3}(n\to\infty),$$

由夹逼原理知原极限为$\frac{1}{3}$.

六、当$x<0$时，$f(x)=\frac{\sin 2x}{|x|}=\frac{\sin 2x}{-x}$，由初等函数的连续性知，当$x<0$、$0<x<1$及 $x>1$ 时，$f(x)$ 连续；当 $x=0$ 时，$f(0-0)=\lim\limits_{x\to0-}\frac{\sin 2x}{-x}=-2$，$f(0+0)=\lim\limits_{x\to0+}(2x^2-2)=-2$，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=-2\neq f(0)=0$，$x=0$是第一类(可去)间断点；当$x=1$时，$f(1+0)=\lim\limits_{x\to1-}x=1$，$f(1-0)=\lim\limits_{x\to1+}(2x^2-2)=0$，$x=1$是第一类(跳跃)间断点；所以$f(x)$连续区间为$(-\infty,0)$, $(0,1)$, $(1,+\infty)$

七、(1)令 $F(x)=f(x)-1+x$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $F(0)=-1<0$，$F(1)=1>0$，由零点定理可知存在$\xi\in(0,1)$，使得$F(\xi)=0$，即$f(\xi)=1-\xi$；

(2)在$[0,\xi]$和$[\xi,1]$上对$f(x)$分别应用拉格朗日中值定理，知存在两个不同的点$x_1\in(0,\xi),x_2\in(\xi,1)$，使得$f'(x_1)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}$，$f'(x_2)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}$，于是

$$f'(x_1)\cdot f'(x_2)=\frac{f(\xi)}{\xi}\cdot\frac{1-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{1-\xi}{\xi}\cdot\frac{\xi}{1-\xi}=1$$

2012级试卷

一、选择题（每小题3分，共15分）

1. $f(x)$在点$x=x_0$处有定义，是$f(x)$当$x\to x_0$时存在极限的（　　）。

A. 必要条件　　B. 充分条件　　C. 充要条件　　D. 无关条件

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x+3}=$（　　）。　A. e^3　　B. e^{-3}　　C. e^{-1}　　D. e

3. 设函数$f(x)$在$x=x_0$可导，且$f(x_0)<0$，则下列说法正确的是（　　）。

A. $|f(x)|$在$x=x_0$处不可导　　B. $|f(x)|$在$x=x_0$处可导且导数为$-f'(x_0)$

C. $|f(x)|$在$x=x_0$处可导且导数为$f'(x_0)$　D. $|f(x)|$在$x=x_0$处不一定可导

4. 设函数$f(x)=(x^2-3x+2)\sin x$，则方程$f'(x)=0$在$(0,\pi)$内根的个数为（　　）。

A. 至少3个　　B. 至少2个　　C. 3个　　D. 2个

5. 下列不正确的是（　　）。

A. 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$，则从某项之后起，所有的$a_n>0$

B. 设$a_n>0$且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则有$a>0$　　C. $\lim|a_n|=0$，则有$\lim a_n=0$

D. $\lim a_n=a$的充分必要条件是对$\forall\varepsilon>0$，只有$\{a_n\}$的有限多项不在$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$中

二、填空题（每小题3分，共15分）：

1. 指出$f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$的间断点并说明其类型＿＿＿＿＿。

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^{2n}+3^n}=$＿＿＿＿＿。　　3. 设$y=x^x(x>0)$，则$y'=$＿＿＿＿＿。

4. 设$\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\y=t-\arctan t\end{cases}$，则$\dfrac{d^2y}{dx^2}=$＿＿＿＿＿。

5. 当$x\to0$时，把以下的无穷小：　A) a^x-1　$(a>0,a\neq1)$；　B) $1-e^{x^3}$；

C) $1-\cos4x$；　D) $\ln(1+\sqrt{x})$，按x的低阶至高阶重新排列是＿＿＿，＿＿＿，

＿＿＿，＿＿＿(以字母表示)。

三、试解下列各题（每小题7分，共42分）

1、求a,b的值，使函数$f(x)=\begin{cases}\ln(1+x) & x>1\\ax+b & x\le1\end{cases}$处处可导，并写出导函数$f'(x)$。

2、设$xy^3+1=ye^x+\arcsin x$，求$dy\big|_{x=0}$

3、已知$y=x\sqrt{\dfrac{3-x}{2+x}}$，利用对数求导法求$y'(2)$，以及求曲线$y=y(x)$在$x=2$点处的切线和法线方程。

4、利用Lagrange定理证明不等式：当$x>0$时，$e^x>1+x$。

5、求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+2x)^{2x}-1}{x^2}$　　6、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}\left(2-\dfrac{x}{e^x-1}\right)$

四、(8分) 设函数$f(x)=x^2\ln(x+1)$，求$f^{(2012)}(0)$。

五、(8分) 设$f(x)$满足$f(a)=2$，$f'(a)=1$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)^n$。

六、证明题（每小题6分，共12分）：

1、设 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[0,1]$，令 $f(x)=\dfrac{|x-x_1|+|x-x_2|+\cdots+|x-x_n|}{n}$，证明存在 $x_0\in[0,1]$，使得$f(x_0)=\dfrac{1}{2}$。

2、设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可微，且 $f(a)=f(b)=0$，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=f(\xi)$。

2012级参考答案

一、DCBAB 二、1. $x=0$，是跳跃间断点; 2. 4; 3. $x^x(\ln x+1)$; 4. $\dfrac{1+t^2}{4t}$; 5. DACB。

三、1、$x\neq 1$处$f(x)$是初等函数，故可导。欲使$f(x)$处处可导，只需要在$x=1$处，可导即可。在 $x=1$ 处 $f(x)$ 连续，$\therefore f(1+0)=f(1-0)$，而 $f(1+0)=\ln 2$，$f(1-0)=a+b\Rightarrow a+b=\ln 2$；$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-a}{x-1}=a$，

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-a-b}{x-1}=\dfrac{1}{2}$，$f'_+(1)=f'_-(1)$，$\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$，

$b=\ln 2-\dfrac{1}{2}$，$f(x)$在$x=1$处可导。$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x} & x>1\\ \dfrac{1}{2} & x\leq 1\end{cases}$

2、方程两端关于 x 求导，得 $y^3+3xy^2y'=y'e^x+ye^x+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，于是

$y'=\dfrac{ye^x+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-y^3}{3xy^2-e^x}$，再将$x=0$代人方程，得$y(0)=1$，于是：$y'(0)=-1$，

$dy|_{x=0}=y'(0)dx=-dx$。

3、$\ln y=\ln x+\frac{1}{2}\ln(3-x)-\frac{1}{2}\ln(2+x)$，$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x}-\frac{1}{2(3-x)}-\frac{1}{2(2+x)}$，又$y(2)=1$，

所以，$y'(2)=-\frac{1}{8}$。切线方程：$y-1=-\frac{1}{8}(x-2)$；法线方程：$y-1=8(x-2)$。

4、令$f(x)=e^x$，$f'(x)=e^x$，由 L 定理，$f(x)-f(0)=f'(\xi)x$，$\xi\in(0,x)$ 即 $e^x-1=e^{\xi}x$，由于$\xi>0\Rightarrow e^{\xi}>1$，又$x>0$，所以，$e^x-1>x$ 移项即得结论。

5、设$y=(1+2x)^{2x}$，$\ln y=2x\ln(1+2x)$，$\frac{y'}{y}=2\left(\ln(1+2x)+\frac{2x}{1+2x}\right)$，

由洛必达法则，并注意到：$\lim\limits_{x\to0}y=1$。

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{2y\left(\ln(1+2x)+\frac{2x}{1+2x}\right)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\ln(1+2x)+\frac{2x}{1+2x}\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1+2x)\ln(1+2x)+2x}{x(1+2x)}=\lim_{x\to0}\frac{2\ln(1+2x)+4}{1+4x}=4$$

6、由于$\lim\limits_{x\to0}\left(2-\frac{x}{e^x-1}\right)=2-\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{e^x-1}=1$，所以，

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{x^2\left(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}\right)}{1-\cos x+x\sin x}=2\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos x+x\sin x}=2\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\sin x}{x}}=\frac{4}{3}。$$

四、$f^{(n)}(x)=x^2\ln^{(n)}(1+x)+C_n^{\,1}\ln^{(n-1)}(1+x)\cdot2x+C_n^{\,2}\ln^{(n-2)}(1+x)\cdot2$

$$f^{(n)}(0)=C_n^{\,2}\ln^{(n-2)}(1+x)\cdot2\Big|_{x=0}=2C_n^{\,2}\cdot\frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}\Bigg|_{x=0}=\frac{(-1)^{n-3}n!}{n-2}(n\geq3)\quad,$$

$$f^{(2012)}(0)=-\frac{2012!}{2010}$$

$$五、原式=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{f(a)}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{f(a)}\right)^{\frac{f(a)}{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}\cdot\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{f(a)\frac{1}{n}}}$$

$$=e^{\frac{1}{f(a)}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{\frac{1}{n}}}=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}=e^{\frac{1}{2}}。$$

六、1、设$F(x)=f(x)-\frac{1}{2}$,$f(x)$在$[0,1]$连续，得$F(x)$在$[0,1]$连续。

则$F(0)=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\frac{1}{2}$，$F(1)=f(1)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=-F(0)$，若$F(0)=0$，则有$x_0=0\in[0,1]$，使$f(x_0)=\frac{1}{2}$；若$F(0)\neq 0$，$F(0)\cdot F(1)<0$，由零点定理，存在$x_0\in(0,1)$，$F(x_0)=0$，即$f(x_0)=\frac{1}{2}$。

2、令$F(x)=e^{-x}f(x)$，则$F(x)$在$[a,b]$可微,且$F(a)=F(b)=0$（3分），由罗尔定理，存在$\xi\in(a,b)$，$F'(\xi)=0$。而$F'(x)=-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)$，即$-e^{-\xi}f(\xi)+e^{-\xi}f'(\xi)=0$，所以，$f'(\xi)=f(\xi)$。

2013级试卷

一、选择题（每小题3分，共15分）

1. 若$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\infty$下列极限正确的是（　　）。

A. $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+g(x))=\infty$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-g(x))=0$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{f(x)+g(x)}=0$　　D. $\lim\limits_{x\to 0}kf(x)=\infty$（$k$为常数且$k\neq 0$）

2. 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则$f(x)$在$x_0$处（　　）。

A. 一定有定义　　B. 一定无定义　　C. 可以有定义，也可无定义

D. 有定义且有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

3. 下列函数中，在$x=0$处可导的是（　　）。

A. $y=\ln x$　　B. $y=|\cos x|$　　C. $y=|\sin x|$　　D. $y=\begin{cases}x^2 & x<0\\ x & x\geq 0\end{cases}$

4. 设$x\to 0$时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$是比$x\sin x^n$高阶的无穷小，而$x^n\sin x$是比$e^{x^2}-1$高阶的无穷小，则正整数$n=$（　　）。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 设$f(x)$可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，若使$F(x)$在$x=0$处可导，则必有（　　）。

A. $f(0)=0$　　B. $f'(0)=0$　　C. $f(0)+f'(0)=0$　　D. $f(0)-f'(0)=0$