$F(\frac{\pi}{2})=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^5 tdt<0, F(\pi)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^5 tdt>0,$

$\exists\xi\in(\frac{\pi}{2},\pi), F(\xi)=0$，$F'(x)=\sin^5 x-\cos^5 x>0, x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 实根个数为 1.

六、$f(x)=(x-b-\sqrt{3})(x-b)(x-b+\sqrt{3})==(x-b)^3-3(x-b)$，

$f'(x)=3(x-b)^2-3$，$f'(x)=0\Rightarrow x=b\pm1$，$f(a)=f(c)=0, f(b\pm1)=\mp2$，

$m=-2, M=2$

七、$V_1=\pi\int_0^c x^2(x-1)^2dx=\pi\left(\frac{1}{5}c^5-\frac{1}{2}c^4+\frac{1}{3}c^3\right)$，$V_2=\frac{\pi}{3}c^3(c-1)^2$，

$V_1=V_2\Rightarrow c=\frac{5}{4}$

八、$f(x),\ln(1+x)$ 符合柯西中值定理条件，由柯西中值定理：

$\frac{f(c)}{\ln(1+c)}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{1+\xi}}$，$f(c)=(1+\xi)f'(\xi)\ln(1+c)$

九、$\forall x\in[a,b]$，$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(x)dx\Rightarrow|f(x)|\le\int_a^x|f'(x)|dx$，

$f(x)-f(b)=\int_b^x f'(x)dx\Rightarrow|f(x)|\le\int_x^b|f'(x)|dx$。

$|f(x)|\le\frac{1}{2}\int_a^b|f'(x)|dx$，$\therefore\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{1}{2}\int_a^b|f'(x)|dx$

2014 级试卷

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $f(0)=0,\lim_{x\to0}\frac{x}{f(-x)}=-2$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为（　　）.

   A. $y=-\frac{1}{2}x$；　B. $y=\frac{1}{2}x$；　C. $y=-2x$；　D. $y=2x$.

2. 已知 $\frac{1}{1-x}=ax^2+bx+c+o(x^2),(x\to0)$，其中 a,b,c 为常数,则（　　）.

   A. $abc=1$；　B. $abc=2$；　C. $abc=3$；　D. $abc=4$.

3. 设圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 所围成图形绕 y 轴旋转一周所成的旋转体，则体积为(　　)

$A.\ 4\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}dy$；　　　；　　$B.\ 6\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}dy$；

$C.\ 8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}dy$；　　　　$D.\ 10\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}dy$.

4. 设$F(0)=0, F(x)=\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^{\tan x}\dfrac{dt}{\sqrt{1+t^4}}, (x\neq 0)$，则点$x=0$是函数$F(x)$的（　　）.

$A.$ 连续点；　$B.$可去间断点；　$C.$跳跃间断点；　$D.$无穷间断点.

5. 方程$f(x)=0$在(a,b)内有唯一实根的充分条件是(　　).

$A.\ f(x)$在$[a,b]$上有界,且$f(a)f(b)<0$；

$B.\ f(x)$在$[a,b]$上单调,且$f(a)f(b)<0$；

$C.\ f(x)$在$[a,b]$上连续,且$f(a)f(b)<0$；

$D.\ f(x)$在$[a,b]$上连续,单调,且$f(a)f(b)<0$.

二、填空题（每小题3分，共15分）

1.设$g(x)=f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)\neq 0$, $f_i(x)$可导，$f_i(0)=f_i'(0), (i=1,2,\cdots,n)$，

则$\left.\dfrac{g'(x)}{g(x)}\right|_{x=0}=$ ________ 。　2. 已知$f'(\sin^2 x)=\tan^2 x$，则$f(x)=$ ______。

3. 曲线 $x=t^2, y=3t+t^3\ (t>0)$ 的拐点坐标是 ________。

4. 设$f(x)=x^2e^x$，则$f^{(50)}(0)=$ ______ 。

5. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5 x+\cos^5 x)dx=$ _____。

三、试解下列各题（每小题7分，共35分）

1. 求 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^2\tan x}$.　　2. 设$y=\displaystyle\int_0^{\beta(x)}\sqrt{1+t^4}\,dt$，其中$\beta(x)=x^x, (x>0)$，求$dy$.

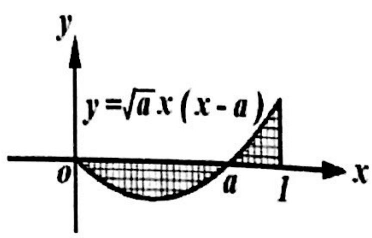
3. 求函数$f(x)=x^3-x^2+2x+2$在$x=1$点处的具有拉格朗日型余项的$n(n\geq 1)$阶泰勒公式.

4. 求 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$.　　　5.求 $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^3e^{-x^2}dx$

四、(5分) 证明:当$x>0$时，$2x\arctan x+2e^x>\ln(1+x^2)+(x+1)^2+1$.

五、(6分) 求曲线$y=\sin x$与$y=\sin 2x$在$[0,\pi]$中所围成图形的面积.

六、(6分) 求由曲线$y=\sqrt{a}x(x-a)$，$(0<a\leq\dfrac{5+\sqrt{5}}{10})$与直线$y=0, x=1$所围成的图形(如图所示)绕$x$轴旋转一周所



得的旋转体体积。并求当a为何值时，体积最大?

七、（6 分）设$f(x)=x-\int_0^{\pi} f(x)\cos x dx$，求$f(x)$.

八.（6 分）设$\varphi(x)$在$[0,a]$上连续，在$(0,a)$内可导，证明:$\exists\xi\in(0,a)$，使得:

$$a\varphi(a)=(1+\xi^2)[\varphi(\xi)+\xi\varphi'(\xi)]\arctan a.$$

九、（6 分）设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$\int_a^b xf(x)dx=b\int_a^b f(x)dx$，证明:存在

$\xi\in(a,b)$，

使得$\int_a^{\xi} f(x)dx=0$.

2014 级参考解答

一、BACDD.　二、1. $\underline{n}$;　2. $\underline{-x-\ln|x-1|+C}$;　3. $\underline{(1,4)}$;　4. $\underline{2C_{50}^2}$;　5. $\underline{\dfrac{16}{15}}$.

三、1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^2\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$

2. $y'=\sqrt{1+x^{4x}}(x^x)'=\sqrt{1+x^{4x}}x^x(\ln x+1)$,　$dy=\sqrt{1+x^{4x}}x^x(\ln x+1)dx$.

3. 一阶泰勒公式: $f(x)=4+3(x-1)+(3\xi-1)(x-1)^2$

$n(n\geq 2)$阶泰勒公式$f(x)=4+3(x-1)+2(x-1)^2+(x-1)^3$

4. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\underset{x=t^6}{=}6\int\frac{t^2}{1+t^2}=6t-6\arctan t+c=6\sqrt[6]{x}-6\arctan\sqrt[6]{x}+c..$

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^3e^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}x^2de^{-x^2}=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx^2=\frac{1}{2}.$

四、$F(x)=2x\arctan x+2e^x-\ln(1+x^2)-(x+1)^2-1$,

$F'(x)=2\arctan x+2e^x-2(x+1)$,

$F''(x)=\dfrac{2}{1+x^2}+2e^x-2>0$,　$F'(x)>F'(0)=0, F(x)\uparrow, F(x)>F(0)=0$

五、$\displaystyle A=\int_0^{\pi}|\sin 2x-\sin x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin x-\sin 2x)dx$

$\displaystyle=(-\frac{1}{2}\cos 2x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+(-\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=\frac{5}{2}.$

六、$\displaystyle V(a)=\pi a\int_0^1 x^2(x-a)^2dx=(\frac{1}{5}a-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}a^3)\pi$,

$$V'(a)=(\frac{1}{5}-a+a^2)\pi,\ V'=0\Rightarrow a=\frac{5\pm\sqrt{5}}{10}$$

$0<a\le\frac{5-\sqrt{5}}{10}, V\uparrow, \frac{5-\sqrt{5}}{10}\le a\le\frac{5+\sqrt{5}}{10}, V\downarrow$， ，当$a=\frac{5-\sqrt{5}}{10}$，体积最大。

七、$A=\int_0^{\pi}f(x)d\ x f(x)=x-A$ ， $\int_0^{\pi}f(x)\cos xdx=\int_0^{\pi}x\cos xdx-A\int_0^{\pi}\cos xdx$

$$A=\int_0^{\pi}x\cos xdx=x\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin xdx=-2,\quad f(x)=x+2.$$

八、$x\varphi(x),\arctan x$ 符合柯西中值定理条件，所以有

$\frac{a\phi(a)}{\arctan a}=\frac{\phi(\xi)+\xi\phi'(\xi)}{\frac{1}{1+\xi^2}}$，即$a\varphi(a)=(1+\xi^2)[\varphi(\xi)+\xi\varphi'(\xi)]\arctan a$

九、 $\forall x\in[a,b]$ ， 令 $F(x)=\int_a^x(x-t)f(t)dt$ ， 则 有 $F'(x)=\int_a^x f(t)dt$, 且 $F(a)=0=F(b)=0$ 。 由 Rolle 定 理 ， 存 在 $\xi\in(a,b)$ ， 使 得 $F'(\xi)=0.$ $F'(\xi)=\int_a^{\xi}f(t)dt=0$。