2012-2013 学年第二学期《高等数学 AII》期末试卷（B）

授课班号________ 年级专业________ 学号________ 姓名________

题型	选择题	填空题	计算题	综合题	总 分	审 核
得分						

一、填空题(每小题 5 分，共 30 分)

得分	阅卷人

1. 方程组 $\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \\ y=2 \end{cases}$ 在空间解析几何中表示________

2条直线

2. 设 $z=x^3y^2-x^2-e^y$，则 $dz=$ $(3x^2y^2-2x)dx+(2x^3y-e^y)dy$

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上连续，且 D：$x^2+y^2\le 4$，则 $\iint\limits_D f(x^2+y^2)\,dx\,dy$ 在极坐标系下先对 r 积分的二次积分为 $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 f(r^2)\cdot r\,dr$

4. L 为圆周 $x^2+y^2=1$，则 $\oint_L x^2 ds=$ π.

5. 设 $f(x)=\begin{cases} 2-x, & 0\le x<\frac{\pi}{2} \\ x, & \frac{\pi}{2}\le x<\pi \end{cases}$，又设 $S(x)$ 是 $f(x)$ 的以 2π 为周期的余弦级数展开式的和函数，则 $S(4)=$ $2\pi-4$.

6. 若方程 $y''+py'+qy=0$（p,q 均为实常数）有特解
$$y_1=e^{-x},\ y_2=e^{3x},$$
则 p 等于 -2，q 等于 -3.

二、计算题(每小题 6 分，共 36 分)

得分	阅卷人

1. 设 $z=f\left(x+\sqrt{1+e^y},\frac{y}{x}\right)+x^2y$，其中 f 具有一阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{e^y}{2\sqrt{1+e^y}}f_1'+\frac{1}{x}\cdot f_2'+x^2$$

4′ 2′

2. 函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z^x=x^2yz$ 所确定，求 z_x.

对数求

~~法二:~~

法一: 设 $F(x,y,z)=z^x-x^2yz$

$F_x=z^x\ln z-2xyz$ 3′

$F_z=xz^{x-1}-x^2y$

$\therefore z_x=-\dfrac{F_x}{F_z}=\dfrac{z^x\ln z-2xyz}{x^2y-xz^{x-1}}$ 3′

法二: $x\ln z=2\ln x+\ln y+\ln z$

$\ln z+\dfrac{x}{z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}\Rightarrow\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{z(2-x\ln z)}{x(x-1)}$

3. 利用极坐标计算二重积分 $\iint\limits_D\sin(x^2+y^2)\,dxdy$，其中 D:

$\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2$.

原式 $=\int_0^{2\pi}d\theta\int_\pi^{2\pi}\sin r^2\cdot r\,dr$ 3′

$=2\pi\cdot\left[-\frac{1}{2}\cos r^2\right]_\pi^{2\pi}$ 2′

$=\pi(\cos\pi^2-\cos4\pi^2)$ 1′

4. 计算 $\oiint\limits_\Sigma x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧.

原式 $=\iiint\limits_\Omega 3(x^2+y^2+z^2)\,dV$ 3′ $=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^\pi d\varphi\int_0^1 3r^2\cdot r^2\sin\varphi\,dr$ 2′

$=\frac{12}{5}\pi$ 1′

5. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$ 的和.

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$, $-1\le x<1$ (1′)

$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$, $-1<x<1$

$\therefore S(x)=S(0)+\int_0^x\frac{dt}{1-t}=-\ln(1-x)$, $-1\le x<1$ (4′)

$\sum_{n=1}\frac{1}{n2^n}=S(\frac{1}{2})=\ln 2$. (1′)

6. 求微分方程 $(a-2x)y''-y'=0$ 的通解（a 为常数）.

令 $y'=p$. $(a-2x)p'-p=0$ (2′)

法一: 分离变量可得, $\frac{dp}{p}=\frac{dx}{a-2x}$ $\Rightarrow p=\frac{C_1}{\sqrt{2x-a}}$

法二: $p'-\frac{1}{a-2x}p=0$ 因 $\mu=\sqrt{2x-a}$ 乘两边

即 $y'=\frac{C_1}{\sqrt{2x-a}}$ (3′)

$\therefore y=C_1\sqrt{2x-a}+C_2$ (1′)

三、综合题（满分 34 分）

得分	阅卷人

1.（10 分）

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 绝对收敛.

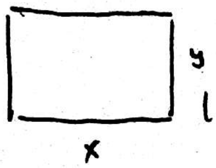
对于 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{n}\right|$

$\because \left|\frac{a_n}{n}\right|\le\frac{1}{2}(a_n^2+\frac{1}{n^2})$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{n}\right|$ 也收敛 .

2.（12 分） 将周长为 $2p$ 的矩形绕它的一边旋转而构成的一个圆柱体，问矩形的边长各为多少时，才能使圆柱体的体积为最大？

如图，$x+y=p$. $V_{柱}=\pi x^2 y$ （2′）



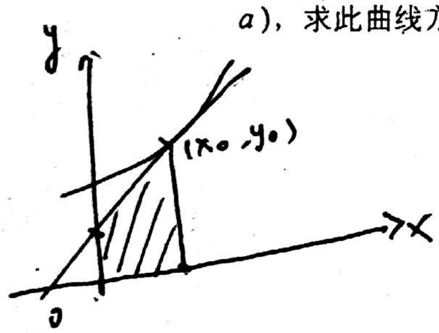
法一：$L(x,y,\lambda)=\pi x^2 y+\lambda(x+y-p)$ （4′）

令 $\begin{cases} L_x = 2\pi x y+\lambda=0 \\ L_y=\pi x^2+\lambda=0 \\ L_\lambda = x+y-p=0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=\frac{2}{3}p \\ y=\frac{1}{3}p \end{cases}$ （2′）

（4′）

法二：$V=\pi x^2(p-x)$ 令 $V'=2\pi p x-3\pi x^2=0$

3.（12 分） 位于第一象限的一曲线，其上任一点的切线与坐标轴和过切点垂直于 x 轴的直线所围成的梯形面积等于常数 a^2，且曲线过点（a，a），求此曲线方程.



设切点 (x_0,y_0). 切线 $y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$

令 $x=0$，$y=y_0-y'(x_0)\cdot x_0$

$\therefore S_{梯}=\frac{1}{2}(y_0-y'(x_0)\cdot x_0+y_0)\cdot x_0$

$\therefore \begin{cases} \frac{1}{2}(2y-xy')\cdot x=a^2 \quad (*) \quad 4' \\ y(a)=a \quad 2' \end{cases}$ 即 $y'-\frac{2}{x}y=-\frac{2a^2}{x^2}$

(*) 式为：$x^2y'-2xy=-2a^2$

因 $u=\frac{1}{x^2}$ 乘以两边，$\left(\frac{y}{x^2}\right)'=-\frac{2a^2}{x^4}$

$\therefore \frac{y}{x^2}=\frac{2}{3}a^2\cdot x^{-3}+C$ 从而 $y=\frac{2a^2}{3x}+Cx^2$ 4′

又 $\because y(a)=a$ $\therefore C=\frac{1}{3a}$ （由题意 $a\neq 0$）

$\therefore y=\frac{2a^2}{3x}+\frac{x^2}{3a}$ 2′

2013-2014 学年第二学期《高等数学 AII》试卷（B）

授课班号__________年级专业__________学号__________姓名__________

题型	填空题	计算题	综合题	总分	审 核
得分					

一、填空题(每小题 3 分，共 24 分)

得分	阅卷人

1. 设 $a=3i-j-2k$，$b=i+2j-k$，则 $a\times 2b=$ (10, 2, 14)

2. 曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x^2+y^2=2az$ 的交线为 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\x^2+y^2=2az\end{cases}\Rightarrow$ 圆 $\begin{cases}x^2+y^2=2(\sqrt{2}-1)a^2\\z=(\sqrt{2}-1)a\end{cases}$

3. 函数 $z=x\sin y$ 在点 $\left(2,\dfrac{\pi}{3}\right)$ 沿 $a=\{2,1\}$ 方向的方向导数是 $\frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{3}+1)$

$\vec{a}_0=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$

4. 二次积分 $\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$ 在极坐标系下先对 r 积分的二次积分为 $\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr$

5. 设 L 为圆周 $x^2+y^2=1$，则 $\oint_L x^2 ds=$ π.

6. 设 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2$，则 $\oiint\limits_{\Sigma} z^2 dS=$ $\frac{4}{3}\pi a^4$

7. 当 $0<p\le 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p}$ 条件收敛.

8. 若方程 $y''+py'+qy=0$ (p,q 均为实常数) 有特解

$$y_1=e^x\cos x,\ y_2=e^x\sin x,$$ $r=1\pm i$

则 p 等于 -2，q 等于 2.

二、计算题(每小题 8 分，共 32 分)

得分	阅卷人

1. 一直线过 $A(2,-3,4)$ 且与 z 轴垂直相交，求其方程.

设直线与z轴相交点 $(0,0,t)$.

则 $(-2,3,t-4)\perp(0,0,1)$

所以 $-2\times0+3\times0+(t-4)\times1=0\Rightarrow t=4$. (4′)

$\therefore \vec{s}=(-2,3,0)$. 直线: $\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-4}{0}$ 或 $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-4}{0}$ (2′)

(等价形式)

或 $\begin{cases}3x+2y=0\\z-4=0\end{cases}$

(2′)

2. 设$z=f(x,u,v)$, $u=2x+y$, $v=xy$, f具有一阶连续偏导数，求 z 对 x,y 的全微分 $\mathrm{d}z$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+2\frac{\partial f}{\partial u}+y\frac{\partial f}{\partial v}\quad 3'$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}+x\frac{\partial f}{\partial v}\quad 3'$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=(f_x+2f_u+yf_v)dx+(f_u+xf_v)dy$$

$2'$

3. 计算二重积分 $\iint\limits_D (x^2+y^2)\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域$D$是 $x^2+y^2\le a^2\ (a>0)$.

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^2\cdot\sqrt{a^2-r^2}\cdot r\,dr$$

$$=2\pi\int_0^a r^3\cdot\sqrt{a^2-r^2}\,dr\quad (4')$$

$$\overset{令\ r=a\sin t}{=\!=\!=}\ 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3\sin^3 t\cdot a\cos t\cdot a\cos t\,dt$$

$$=2\pi a^5\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 t-\sin^5 t)\,dt$$

$$=2\pi a^5\cdot\left(\frac{2!!}{3!!}-\frac{4!!}{5!!}\right)=\frac{4}{15}\pi a^5.\quad (4')$$

4. 试求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^5x^{2n}}{2n+1}$ 的收敛域.

法一：令 $u_n(x)=\frac{(n+1)^5}{2n+1}x^{2n}$.

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+2)^5}{2n+3}x^{2n+2}}{\frac{(n+1)^5}{2n+1}x^{2n}}\right|=x^2<1\quad (5')$$

$\Rightarrow R=1$. 又 $x=\pm1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^5}{2n+1}$ 发散 $\left(\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^5}{2n+1}=+\infty\right)$ (1')

∴ 收敛域为 $(-1,1)$

法二：令 $x^2=t$. $\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)$ $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1\Rightarrow R=1$ ...

三、综合题(满分 44 分)

得分	阅卷人

1. (11 分)

求表面积为 S，而体积为最大的圆柱体的体积．

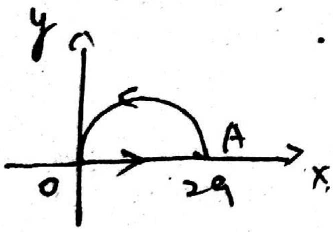
$V=\pi r^2 h$ ． $S=2\pi r^2+2\pi r h$ ．

令 $L(r,h,\lambda)=\pi r^2 h+\lambda(2\pi r^2+2\pi r h-S)$ (3′)

$$\begin{cases} L_r=2\pi r h+4\pi\lambda r+2\pi\lambda h=0 \\ L_h=\pi r^2+2\pi\lambda r=0 \\ L_\lambda=2\pi r^2+2\pi r h-S=0 \end{cases} \text{(3′)} \Longrightarrow \begin{cases} r=\sqrt{\frac{S}{6\pi}} \\ h=2r=2\sqrt{\frac{S}{6\pi}} \end{cases} \text{(3′)}$$

$\therefore V_{max}=\dfrac{S\sqrt{6\pi S}}{18\pi}$ ． (2′)

2. (11 分) 计算曲线积分 $\int_L (e^x\sin y-m\cdot y)\mathrm{d}x+(e^x\cos y-m)\,\mathrm{d}y$ 式中 L 是由点 $A(2a,0)$ 沿 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到 $O(0,0)$ 的上半圆周 $(a>0)$.



$P=e^x\sin y-my$ ， $Q=e^x\cos y-m$

$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=m$ ． 添辅助线 $\overline{OA}$: $y=0$ (2′)

$x: 0\to 2a$

由Green公式: $\oint_{\overset{\frown}{AO}\cup\overline{OA}} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D m\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=m\cdot\frac{\pi}{2}\cdot a^2=\frac{\pi}{2}ma^2$ (3′) (3′)

而 $\int_{\overline{OA}} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$ ． (2′)

$\therefore \int_{\overset{\frown}{OA}}=\frac{\pi}{2}ma^2-0=\frac{\pi}{2}ma^2$ (1′)

3. (11 分)　求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$ 在 $(-1,1)$ 内的和函数.

$$S(x) = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = x^2 \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = x^2 \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)' \quad 9'$$

$$= x^2 \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x^2}{(1-x)^2}, \quad -1<x<1.$$

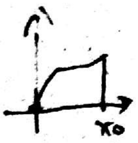
$(2')$

或 $$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+2) x^{n+1} - 2\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1}$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+2}\right)' - 2 \cdot \frac{x^2}{1-x}$$

$$= \left(\frac{x^3}{1-x}\right)' - \frac{2x^2}{1-x} = \frac{x^2}{(1-x)^2}, \quad -1<x<1.$$

4. (11 分)　已知上半平面内一曲线 $y = y(x)(x \geq 0)$ 过原点，且曲线上任一点 $M(x_0, y_0)$ 处切线斜率数值上等于该点横坐标与纵坐标之和的 2 倍减去由此曲线与 x 轴，直线 $x = x_0$ 所围成的面积，求此曲线方程.



$$y'(x_0) = 2(x_0 + y_0) - \int_0^{x_0} y(t)\,dt$$

$$\Rightarrow y' = 2(x+y) - \int_0^x y(t)\,dt$$

$$\Rightarrow y'' = 2 + 2y' - y \Rightarrow \begin{cases} y'' - 2y' + y = 2 & (*) \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0. & (5') \end{cases}$$

$r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow r = 1$

$2 = e^{0x} \cdot 2$. $\lambda = 0$ 不是特征根.　$(2')$

设特解 $y_0(x) = a$ 易得 $a = 2$.　$(2')$

$(*)$ 通解 $y(x) = 2 + C_1 e^x + C_2 x e^x$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 + C_1 = 0 \\ C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -2 \\ C_2 = 2 \end{cases} \quad (2')$$

$y'(x) = C_1 e^x + C_2 (x+1) e^x$

$$\therefore y = 2 - 2e^x + 2xe^x.$$