2005-2006 学年第二学期高等数学期中测试及数学竞赛试卷（2005 级）

（参加竞赛的同学全做，其他同学只做一、二大题）

一、填空题（8×5 分）

1. 设 $\vec{a}=(3,-1,-2)$，$\vec{b}=(1,2,-1)$，则 $(-2\vec{a})\cdot(3\vec{b})=$ $\underline{-18}$，$\vec{a}\times(2\vec{b})=$ $\underline{(10,2,14)}$。

2. 平面过直线 $\begin{cases}x+y=0\\x-y+z=2\end{cases}$ 且平行另一直线 $x=y=z$，则该平面方程为 $\underline{x-3y+2z-4=0}$。
(06级-2)

3. 设 $U=\ln(x^2+y^2+z^2)$，则 $gradU|_{(1,1,1)}=$ $\underline{(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})}$。(07级-10)

4. 设 $F\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=0$，$F$ 偏导存在，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ $\underline{\frac{zF_1'}{xF_1'+yF_2'}}$。(12级-5)

(06级-4)

5. 曲面 $2xy+z-e^z=3$ 在点 $M(1,2,0)$ 处的切平面方程为 $\underline{2x+y-4=0}$。(08级-4)

(12级-4)

6. 交换积分次序 $\int_0^1 dx\int_{x-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy=$ $\underline{\int_{-1}^{0}dy\int_0^{y+1}f(x,y)\,dx+\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,dx}$。(06级-6)

7. $\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x^2+y^2)\,dy$ 的极坐标形式为 $\underline{\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r^2)\cdot r\,dr}$。(11级-8)

8. 设 Ω 由 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围，则 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz=$ $\underline{\frac{4}{5}\pi}$。(08级-8)

二、计算题（4×15 分）

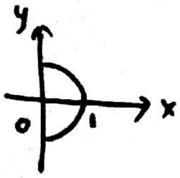
1. 设 f 具二阶偏导，g 具二阶导数，$z=g(xy)+f\left(xy,\frac{x}{y}\right)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yg'+yf_1'+\frac{1}{y}f_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=g'+y\cdot g''\cdot x+f_1'+y\left[f_{11}''\cdot x+f_{12}''\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}\left[f_{21}''\cdot x+f_{22}''\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]$$

$$=g'+xyg''+f_1'-\frac{1}{y^2}f_2'+xyf_{11}''-\frac{x}{y}f_{12}''+\frac{x}{y}f_{21}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''$$

2. 设$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1, x\ge 0\}$，求$I=\iint\limits_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy$。



$\because$ D关于x轴对称 $\therefore \iint\limits_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy=0$

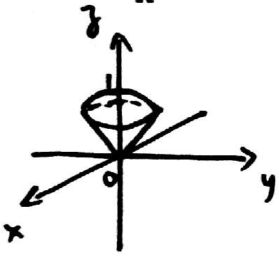
$$I=\iint\limits_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy=2\iint\limits_{D_上}\frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{r}{1+r^2}dr$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln(1+r^2)\Big|_0^1$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln 2$$

3. 计算$\iiint\limits_\Omega (x+z)dv$，$\Omega$为$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$与$z=\sqrt{x^2+y^2}$所围立体域。



$\because \Omega$关于yoz面对称 $\therefore \iiint\limits_\Omega x\,dV=0$

$$原式=\iiint\limits_\Omega z\,dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^1 r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,dr$$

$$=2\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\cdot\int_0^1 r^3dr$$

$$=2\pi\cdot\left[\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{8}$$

或 $\iiint\limits_\Omega z\,dV=\int_0^{\frac{1}{\sqrt2}}dz\iint\limits_{D(z)}z\,dxdy+\int_{\frac{1}{\sqrt2}}^1 dz\iint\limits_{D(z)}z\,dxdy$

$$=\int_0^{\frac{1}{\sqrt2}}z\cdot\pi z^2dz+\int_{\frac{1}{\sqrt2}}^1 z\cdot\pi(1-z^2)dz=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{16}=\frac{\pi}{8}$$

4. 在曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$上找一点，使它到点$(1,\sqrt2,3\sqrt3)$的距离最短，并求最短距离。

(07级二2)

(12级二2)

三、数学竞赛加题（5×20 分）

1. 已知两曲线 $y=f(x)$，$y=\int_0^{\arctan x} e^{-t^2}dt$ 在点 $(0,0)$ 处的切线相同，写出此切线方程，并求 $\lim_{n\to\infty} nf\left(\frac{2}{n}\right)$。

① $y'(0) = e^{-(\arctan x)^2} \cdot \frac{1}{1+x^2}\Big|_{x=0} = 1$

∴ 切线为 $y=x$

② $\lim_{n\to\infty} nf(\frac{2}{n}) = \lim_{n\to\infty} 2\cdot\frac{f(\frac{2}{n})}{\frac{2}{n}} = 2$.

由 $f'(0) = \lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x} = 1$ 可得 $\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{2}{n})}{\frac{2}{n}} = 1$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0\\ x^2g(x), & x\le 0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 是有界函数，证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导。

$f'_+(0) = \lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x\sqrt{x}} = \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\sqrt{x}} = 0$

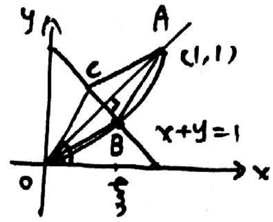
$f'_-(0) = \lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^-} xg(x) = 0$

∴ $f'(0)=0$，（$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导）.

3. 已知 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^x tf(x-t)dt = 1-\cos x$，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$。

（07级 三 4 21）

4. 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：1）存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $f(\xi)=1-\xi$；2）存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$。



几何意义

1) $y=f(x)$ 与 $y=1-x$ 有交点.

2) $k_{OB}\cdot k_{BA}=1$（OBAC 为菱形且关于 $y=x$ 对称）

1) 设 $F(x)=f(x)+x-1$

由已知，$F(0)=-1$，$F(1)=1$

$\therefore$ 由零点定理，$\exists\,\xi\in(0,1)$ s.t. $F(\xi)=0$.

从而 $f(\xi)=1-\xi$，结论成立.

2) 由 Lagrange 中值定理.

$\exists\,\eta\in(0,\xi)$ s.t. $f'(\eta)=\dfrac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=\dfrac{1-\xi}{\xi}$

$\exists\,\zeta\in(\xi,1)$ s.t. $f'(\zeta)=\dfrac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\dfrac{1-(1-\xi)}{1-\xi}=\dfrac{\xi}{1-\xi}$

从而 $f'(\eta)\cdot f'(\zeta)=1$，结论成立.

5. 已知 $f(x)$ 单调增加且连续，求证：$\int_a^b xf(x)dx\ge\dfrac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$。 $(a\le b)$

设 $F(x)=\int_a^x tf(t)dt-\dfrac{a+x}{2}\int_a^x f(t)dt$，$x\in[a,b]$

$$F'(x)=xf(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)dt-\frac{a+x}{2}\cdot f(x)$$

$$=\frac{x-a}{2}\cdot f(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)dt$$

$$=\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{1}{2}f(\xi)\cdot(x-a),\quad a\le\xi\le x$$

$$=\frac{x-a}{2}[f(x)-f(\xi)]\qquad \because f(x)\uparrow\Rightarrow f(x)\ge f(\xi)$$

$$\ge 0$$

$\therefore F(x)\uparrow$，$F(b)\ge F(a)$，即 $\int_a^b tf(t)dt-\dfrac{a+b}{2}\int_a^b f(t)dt\ge 0$

从而结论成立.