2015-2016 学年第一学期《高等数学A1》期末试卷（B）

授课班号__________ 年级专业__________ 学号__________ 姓名__________

题型	填空题	计算题	综合题	总分	审　核
得分					

一、填空题(每小题 4 分，共 32 分)

得分	阅卷人

1. 设 $f(x)=\begin{cases} e^x & x\geq 0 \\ a+x & x<0 \end{cases}$，要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ 1 .

2. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)=$ $\frac{1}{2}$.

3. 设 $f(x)=(k-1)x^3-3(k-1)x^2+1$，当 $x>2$ 时，$f(x)$ 为严格单调递增函数，则 k 的范围是 $k>1$.

4. 设 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\arctan\frac{x}{2}+\arcsin 2x$，则 $y'(0)=$ $\frac{5}{2}$.

5. 将多项式 $f(x)=(4+x)^5$ 按 5 阶麦克劳林展开式展开，则其余项 $R_5(x)=$ 0 .

6. 设 $f'(\ln x)=x$，其中 $1<x<+\infty$，及 $f(0)=0$，则 $f(x)=$ $e^x-1 \quad (x\geq 0)$.

7. 设 $f'(x)$ 在 $[1,3]$ 上连续，则 $\int_1^3 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx=$ $\arctan f(3)-\arctan f(1)$.

8. 曲线 $y=\sin x$ 在 $[\frac{\pi}{2},2\pi]$ 上的弧段与 x 轴及直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 所围成所围成图形的面积 $A=$ 3 .

二、计算题(每小题 6 分，共 36 分)

得分	阅卷人

1. 研究 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{1+e^{1/x}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的左右连续性.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1\neq f(0)$ ∴ 不左连续 (3')

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0=f(0)$ ∴ 右连续 (3')

2. 设方程 $\arcsin\frac{1}{\sqrt{x+2}}+xe^{y}=\operatorname{arctg}y$ 确定了函数 $y=y(x)$，求 $y'(0)$.

令 $x=0$，得 $y=1$ (1′)

又 $\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}}\right)^2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(x+2)^{-\frac{3}{2}}+e^{y}+xe^{y}\cdot y'=\frac{y'}{1+y^2}$ (4′)

令 $x=0$，$y=1$，得：$y'(0)=2\left(e-\frac{1}{4}\right)$ (1′)

3. 设 $y=y(x)$ 由方程组 $\begin{cases}x=3+f'(t)\\ y=2+f(t)-tf'(t)\end{cases}$ 所确定，$f''(t)$ 存在且不为零，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{f'(t)-f'(t)-tf''(t)}{f''(t)}=-t$ (3′)

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{1}{f''(t)}$ (3′)

4. 求 $\int\frac{1}{x^3-x}\mathrm{d}x$.

原式 $=\int\frac{dx}{x(x+1)(x-1)}=\int\left(\frac{-1}{x}+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}\right)dx$ (3′)

$=-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x-1|+C$ (3′)

法二：令 $x=\frac{1}{t}$. 原式 $=\int\frac{t}{t^2-1}dt=\frac{1}{2}\ln|t^2-1|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{x^2}-1\right|+C$

(3′) (3′)

设 $f(x) = \begin{cases} \ \\ e^x, & x\in[0,1] \end{cases}$ …… $-\pi/2$

$$\text{原式} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos x\,dx + \int_0^1 e^x\,dx \quad (2')$$

$$= \sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + e^x\Big|_0^1$$

$$= 1 + (e-1)$$

$$= e \quad (4')$$

6. 求由曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x=0$, $x=1$ 及 x 轴所成的平面图形绕 x 轴轴旋转而成的旋转体的体积.

$$V = \int_0^1 \pi\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2 dx \quad (3')$$

$$= \pi\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \pi \arctan x\Big|_0^1$$

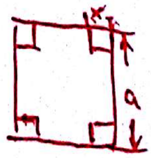
$$= \frac{\pi^2}{4} \quad (3')$$

三、综合题(每小题 8 分，共 32 分)

得分	阅卷人

1. 设有一块边长为 a 的正方形铁皮，从四个角截去同样的小方块，作成一个无盖的方盒子，问小方块的边长为多少才使盒子的容积最大?

设小方块边长为 x.



则 $V=(a-2x)^2\cdot x \quad (0<x<\frac{a}{2})$ (3')

$V' = -4(a-2x)\cdot x + (a-2x)^2 = (a-2x)(a-6x)$

令 $V'=0$ 得唯一驻点 $x=\frac{a}{6}$

$\therefore$ 小方块边长为 $\frac{a}{6}$ 时,容积最大 (5')

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，在 $(0,a)$ 内可导，且 $f(a)=0$，证明：存在 $\xi\in(0,a)$，使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

设 $F(x) = xf(x)$. (3')

则 $F(0)=F(a)=0$，$F'(x) = f(x)+xf'(x)$，$0<x<a$

由 Rolle Th，$\exists\, \xi$ s.t. $F'(\xi)=0$

i.e. $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$. (5')

3. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x)\le M$，$f(a)=0$，试证

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{2}M(b-a)^2.$$

$\forall x\in(a,b]$. 由 Lagrange 中值 Th，$\exists\, \xi\in(a,x)$ s.t.

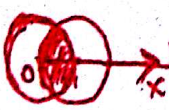
$f(x)-f(a) = f'(\xi)(x-a)$ (3') 又 $f(a)=0$. $f'(x)\le M$.

$\therefore f(x) = f'(\xi)(x-a) \le M(x-a)$，$x\in[a,b]$.

从而 $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M(x-a)\,dx = \frac{M}{2}(b-a)^2$

(5')

4. 求曲线 $r=1$，$r=2\cos\theta$ 围成公共部分的面积.



由对称性，$A = 2\left[\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}\cdot 1^2 d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cdot (2\cos\theta)^2 d\theta\right]$ (4')

$= 2\left[\frac{\pi}{6} + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)\,d\theta\right]$

$= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ (4')