4

2013—2014 学年第二学期《线性代数 B》课内考试卷（A 卷）

授课班号________ 年级专业__________ 学号__________ 姓名__________

题号	一	二	三	四	五	六	总分	审核
题分	24	32	12	12	12	8		
得分								

得分	评阅人

一、填空（共 24 分，每空格 3 分）

1. 排列（$2,4,6,\cdots,2n,1,3,5,\cdots,2n-1$）的逆序数为 $\frac{n(n+1)}{2}$ 。

2.设 $D=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&-1&5\\3&0&6\end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 为其代数余子式，则 $A_{11}+A_{12}+A_{13}=$ 0 。

3. 设三阶方阵 A 的伴随矩阵为 A^*，且 $|A|=\frac{1}{2}$，则 $\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|=$ $-\frac{16}{27}$ 。 重复

4.设向量组 $\vec{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\4\\2-t\end{pmatrix}$，$\vec{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\3-t\\1\end{pmatrix}$，$\vec{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1-t\\2\\3\end{pmatrix}$ 线性相关，则实数 $t=$ 6 。

5. 已知 $A=\begin{bmatrix}1&-1&1&2\\3&\lambda&-1&2\\5&3&1&6\end{bmatrix}$，且 $r(A)=2$，则 $\lambda=$ 5 。

6. 已知四元线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的~~三~~两个解向量为 $\vec{\eta}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$，$\vec{\eta}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$，，且 $r(A)=3$，则方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的通解 $\vec{x}=$ $\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+C\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix}$ 。 重复

7.已知 $\vec{\xi}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ 是 $A=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{bmatrix}$ 的特征向量，则 $(a,b)=$ (13,-8) 。

8.已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 相似，则 $y=$ 1 。

得分	评阅人

二、计算（共 32 分，每小题 8 分）

1.计算 $D_n=\begin{vmatrix}3&2&2&\cdots&2\\2&3&2&\cdots&2\\2&2&3&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\2&2&2&\cdots&3\end{vmatrix}$ 化上三角

$$D \xlongequal{r_1+(r_2+\cdots+r_n)} [3+2(n-1)]\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\2&3&2&\cdots&2\\2&2&3&\cdots&2\\\vdots&\vdots&&&\vdots\\2&2&2&\cdots&3\end{vmatrix}$$

$$=(2n+1)\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=2n+1$$

2.已知 $A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ 求 A^TB,AB^T。

$$A^TB=2$$

$$AB^T=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&-2&2\\3&-3&3\end{bmatrix}$$

3.已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&-1\\2&0\\5&-2\end{bmatrix}$，$X=B+AX$，求矩阵 X.

$$(E-A)X=B \Rightarrow X=(E-A)^{-1}B$$

$$(E-A,B)=\begin{bmatrix}1&-1&0&1&-1\\1&0&-1&2&0\\1&0&2&5&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0&1&-1\\0&1&-1&1&1\\0&1&2&4&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0&1&-1\\0&1&-1&1&1\\0&0&3&3&-2\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&-1&2&0\\0&1&-1&1&1\\0&0&1&1&-\frac{2}{3}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&3&-\frac{2}{3}\\0&1&0&2&\frac{1}{3}\\0&0&1&1&-\frac{2}{3}\end{bmatrix}\quad\therefore X=\begin{bmatrix}3&-\frac{2}{3}\\2&\frac{1}{3}\\1&-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

4. 设 $3(\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha})+2(\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha})=5(\vec{\alpha}_3+\vec{\alpha})$，其中 $\vec{\alpha}_1=\begin{bmatrix}2\\5\\1\end{bmatrix},\vec{\alpha}_2=\begin{bmatrix}10\\1\\5\end{bmatrix},\vec{\alpha}_3=\begin{bmatrix}4\\1\\-1\end{bmatrix}$，求 $\vec{\alpha}$。

重复

4

得分	评阅人

三、（本题 12 分）

求下列向量组的**秩**和它的一个**极大线性无关组**，并用该极大线性无关组表示其余向量。

$$\vec{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\4\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\3\\1\\2\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_3=\begin{bmatrix}3\\0\\7\\14\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_4=\begin{bmatrix}2\\1\\5\\6\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_5=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\0\end{bmatrix}.$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{bmatrix}1&0&3&2&1\\-1&3&0&1&-1\\2&1&7&5&2\\4&2&14&6&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&2&1\\0&3&3&3&0\\0&1&1&1&0\\0&2&2&-2&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&2&1\\0&1&1&1&0\\0&0&0&-4&-4\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&3&2&1\\0&1&1&1&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&0&-1\\0&1&1&0&-1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$\therefore r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=3$.

一个极大无关组为：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$.

$\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2+0\alpha_4$

$\alpha_5=-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_4$

得分	评阅人

四、（本题 12 分）当λ为何值时，线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$$

有惟一解、无解、有无穷多解，在线性方程组有无穷多解时，求出其通解。 重复

得分	评阅人

五、（本题 12 分）

求可逆矩阵 P 及对角矩阵 Λ，使 $P^{-1}AP=\Lambda$，其中矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{bmatrix}$$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda+2 & -4\\ -2 & -4 & \lambda+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda+2 & -4\\ 0 & \lambda-2 & \lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 4 & -2\\ 2 & \lambda+6 & -4\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+7)=0$$

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=-7$.

$(\lambda_1E-A)X=0$: $\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 4 & -4\\ -2 & -4 & 4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$. $x_1=-2x_2+2x_3$, $p_1=\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$, $p_2=\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$

$(\lambda_3E-A)X=0$: $\begin{bmatrix}-8 & 2 & -2\\ 2 & -5 & -4\\ -2 & -4 & -5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2 & -5 & -4\\ 0 & -18 & -18\\ 0 & -9 & -9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2 & -5 & -4\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}x_3\\ x_2=-x_3\end{cases}$, $p_3=\begin{bmatrix}-1\\ -2\\ 2\end{bmatrix}$

$\therefore P=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$, s.t. $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & -7\end{bmatrix}$

得分	评阅人

六、证明（本题 8 分）

设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，证明：$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 也线性无关。

设 $x_1(\alpha_1+\alpha_2)+x_2(\alpha_2+\alpha_3)+x_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$

则 $(x_1+x_3)\alpha_1+(x_1+x_2)\alpha_2+(x_2+x_3)\alpha_3=0$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，可得 $\begin{cases}x_1+x_3=0\\ x_1+x_2=0\\ x_2+x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\ x_2=0\\ x_3=0\end{cases}$

$\therefore\ \alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 也线性无关.