11 2016-2017 学年第一学期《概率统计》试卷（A）

授课班号__________ 年级专业 15管信.工商 学号__________ 姓名__________

题型	填空题	计算题	综合题	总分	审　　核
得分					

一、填空题(每小题 5 分，共 25 分)

得分	阅卷人

1. 已知 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B|A)=\frac{3}{5}$，$P(A\cup B)=\frac{3}{4}$，则 $P(A|B)=$ $\frac{12}{37}$.

2. $F(x)=\begin{cases}0, & x<-2\\ 0.4, & -2\le x<0\\ 1, & x\ge 0\end{cases}$，是随机变量 ξ 的分布函数，则 ξ 是 离散 型的随机变量.

3. $D(X)=25$，$D(Y)=36$，$\rho_{XY}=0.4$，则 $D(2X-Y)=$ 88 .

4. 设总体 X 服从参数为 λ 的 Poisson 分布，$\lambda>0$ 为未知参数．$(X_1,\cdots,X_n)$ 是从总体 X 中抽取的一个样本，则参数 λ 的矩估计量 $\lambda=$ $\bar{X}$.

5. 设 θ 和 $X_1,\cdots,X_n$ 是总体 X 的未知参数及样本，θ_1 和 θ_2 是由样本确定的两个统计量，满足 $P(\theta_1<\theta<\theta_2)=1-\alpha\ (0<\alpha<1)$，则称随机区间 (θ_1,θ_2) 为 θ 的置信区间，其置信度为 $100(1-\alpha)\%$ 或 $1-\alpha$，置信水平为 $1-\alpha$.

二、计算题(每小题 6 分，共 36 分)

得分	阅卷人

1. 用 3 个机床加工同一种零件，零件由各机床加工的概率分别为 0.5, 0.3, 0.2，各机床加工的零件为合格品的概率分别等于 0.94, 0.9, 0.95，求全部产品中的合格率．

设 A="任取一件产品为合格品"

B_i="产品由第 i 个机床加工"，$i=1,2,3$.

则 $P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)\cdot P(A|B_i)$ 2分

$=0.5\times0.94+0.3\times0.9+0.2\times0.95$ 2分

$=0.93$.

∴合格率为 93%. 2分

2. 设 $X \sim N(0,1)$, 求 $Y=2X^2+1$ 的概率密度.

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{2X^2+1\le y\}, -\infty<y<+\infty$ 2'

① $y\le 1$ 时, $F_Y(y)=0$, $f_Y(y)=0$ 1'

② $y>1$ 时, $F_Y(y)=P\{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\le X\le\sqrt{\frac{y-1}{2}}\}=F_X(\sqrt{\frac{y-1}{2}})-F_X(-\sqrt{\frac{y-1}{2}})$

$f_Y(y)=f_X(\sqrt{\frac{y-1}{2}})\cdot\frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{y-1}{2}}}-f_X(-\sqrt{\frac{y-1}{2}})\cdot\frac{-\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{y-1}{2}}}$ $\therefore f_Y(y)=\begin{cases}\cdots, & y>1\\ \cdots, & y\le 1\end{cases}$

又 $\because f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ $\therefore f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}e^{-\frac{y-1}{4}}, y>1$. 3'

3. 已知随机变量 ξ,η 不相关, 都具有零期望值及方差为1, 令

$$u=\xi,\ v=\xi+\eta,$$

试求 u 与 V 的相关系数 ρ_{uv}.

$\because \xi,\eta$ 不相关 $\therefore Cov(\xi,\eta)=0$ 1'

从而 $Cov(U,V)=Cov(\xi,\xi+\eta)=Cov(\xi,\xi)+Cov(\xi,\eta)=D(\xi)=1$. 2'

$D(U)=D(\xi)=1$, $D(V)=D(\xi+\eta)=D(\xi)+D(\eta)+2Cov(\xi,\eta)=2$. 2'

$\therefore \rho_{UV}=\frac{Cov(U,V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. 1'

4. 已知正常男性成人血液中, 每毫升 (ml) 白细胞数平均是 7300, 标准差是 700. 利用切比雪夫不等式估计每毫升男性成人血液中含白细胞数在 5200 至 9400 之间的概率 p.

设每ml男性成人血液中白细胞数为X.

则 $E(X)=7300$, $\sqrt{D(X)}=700$. 公式 3'

从而 $p=P\{5200<X<9400\}=P\{|X-E(X)|<2100\}$ 代入计算 3'

$\ge 1-\frac{D(X)}{2100^2}=\frac{8}{9}$.

5. 设随机变量X服从$(0,\theta)$上的均匀分布, $X_1,X_2,\cdots,X_n$是从总体 X 中抽取的简单随机样本, 求 θ 的矩估计量 θ_1 和极大似然估计量 θ_2.

① $\mu_1=E(X)=\frac{\theta}{2}\Rightarrow\theta=2\mu_1\Rightarrow\hat{\theta}=2\hat{\mu}_1=2A_1=2\bar{X}$. $\therefore$ 矩估计量 $\theta_1=2\bar{X}$. 3'

② $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\frac{1}{\theta^n}$

$\because L(\theta)\downarrow$ $\therefore \theta$ 取最小值时 $L(\theta)$ 最大.

$\because 0<x_i<\theta, i=1,2,\cdots,n$. $\therefore \hat{\theta}=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ (极大似然估计值)

极大似然估计量 $\theta_2=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$. 3'

6. 从一台车床加工的成批轴料中抽取15件测量其椭圆度(设椭圆度服从正态分布)，计算得 $s^2=0.025$ 问该批轴料的椭圆度的总体方差与规定的方差 $\sigma_0^2=0.04$ 有无显著差别？

(已知 $\alpha=0.05$, $\chi^2_{0.025}(14)=\cancel{5.629}$ 26.119, $\chi^2_{0.975}(14)=\cancel{26.119}$ 5.629)

由题意需检验假设 $H_0: \sigma^2=\sigma_0^2=0.04$; $H_1: \sigma^2\neq\sigma_0^2$ 1′

取检验统计量 $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$, 1′

拒绝域: $\chi^2\leq\chi^2_{0.975}(14)$ 或 $\chi^2\geq\chi^2_{0.025}(14)$, 即 $\chi^2\leq 5.629$ 或 $\chi^2\geq 26.119$. 1′

本题 $\chi^2=\frac{14\times0.025}{0.04}=8.75$ 不在拒绝域内. 1′

∴ 接受 H_0, 拒绝 H_1. 1′

认为无显著差别. 1′

三、综合题(满分 39 分)

得分	阅卷人

1. (10 分) 设总体 X 的 $E(X)=\mu$ 已知，方差 $\sigma^2=D(X)$ 未知，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为一样本．证明:

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

是 σ^2 的无偏估计．

由已知, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立且与 X 同分布. ∴ $E(X_i)=\mu$, $D(X_i)=\sigma^2$, $i=1,\cdots,n$.
(2′)

从而 $E(\hat{\sigma}^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i-\mu)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\sigma^2$
(5′) (3′)

∴ $\hat{\sigma}^2$ 是 σ^2 的无偏估计.

知道"无偏求 $E(\hat{\sigma}^2)$ 给5′

2. (9 分) 设随机变量 ξ 的概率密度 $\varphi(x)$ 为偶函数，试证：对任意 $a>0$, 分布函数 $F(x)$ 有

$$F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a\varphi(x)\,\mathrm{d}x \text{ 成立．}$$

多种证法.

∵ $\varphi(x)$ 为偶函数

∴ $\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=\frac{1}{2}$, (4′)

$\frac{1}{2}-\int_0^a\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)dx-\int_{-a}^{0}\varphi(x)dx$

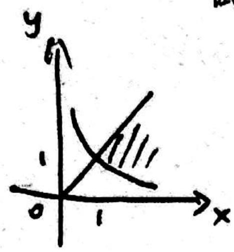
$=\int_{-\infty}^{-a}\varphi(x)dx=F(-a)$. (5′)

得证成立.

3. (10 分)　设 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x^2y}, & 1\le x<+\infty,\ \dfrac{1}{x}\le y\le x, \\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

试判断 X 与 Y 是否相互独立.



$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\begin{cases}\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{dy}{2x^2y}=\frac{\ln x}{x^2}, & x\geqslant 1\\ 0, & x<1\end{cases} \quad (4')$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\begin{cases}\displaystyle\int_{y}^{+\infty}\frac{dx}{2x^2y}=\frac{1}{2y^2}, & y>1\\ \displaystyle\int_{\frac{1}{y}}^{+\infty}\frac{dx}{2x^2y}=\frac{1}{2}, & 0<y\leq 1\\ 0, & y\leq 0\end{cases} \quad (4')$$

显然 $f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$ $\therefore$ X, Y 不独立. (2')

4. (10 分)　设随机变量 $X\sim N(\mu, 2.8^2)$, 现有 X 的10个观察值 $x_1, \cdots, x_{10}$, 已知 $\bar{x}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i=1500$. 求:

往年原题

(1) μ 的置信度为0.95的置信区间. ($z_{0.025}=1.96$)

(2) 要想使 0.95 的置信区间长度小于 1, 观察值个数 n 最少应取多少?

(1) $\left(\bar{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ (3') $\Rightarrow \left(1500\pm\frac{2.8}{\sqrt{10}}\times 1.96\right)$

$\Rightarrow (1498.26, 1501.74)$ (2')

(2) $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}<1$ (3') $\Rightarrow \frac{2\times 2.8}{\sqrt{n}}\times 1.96<1$

$\Rightarrow n>120.47$

$\Rightarrow n_{min}=121$. (2')