2010－2011 学年第二学期《线性代数》课内考试卷（A 卷）

授课班号______ 年级专业 2010 级信息 学号________ 姓名________

题号	一	二	三	四	五	六	总分	审核
题分	32	24	12	12	12	8		
得分								

得分	评阅人

一、填空（共 32 分，每空格 4 分）

1. 已知四阶行列式D中第3列元素依次为1,2,3,4，它们对应的余子式依次为1,1,1,1，则该行列式D= -2 。

2. 已知$A=[\vec{\alpha}_1,\ \vec{\alpha}_2,\ \vec{\alpha}_3]$，$|A|=2$，则$|\vec{\alpha}_3-2\vec{\alpha}_1,\ 3\vec{\alpha}_2,\ \vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_3|=$ -18 。

3. 设$A=\begin{bmatrix}2&1\\-1&2\end{bmatrix}$，$B$满足$BA=B+2E$则 $|B|=$ 2 。 $B=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$ 写 $\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}$ 給2

4. $A=\begin{bmatrix}A_1&A_2\\A_3&A_4\end{bmatrix}$，则$A^T=$ $\begin{bmatrix}A_1^T&A_3^T\\A_2^T&A_4^T\end{bmatrix}$ 。

5. 已知矩阵$A=\begin{bmatrix}1&1&t\\1&t&1\\t&1&1\end{bmatrix}$的秩为 3，则$t$应满足的条件是 $t\neq-2$ 且 $t\neq1$。

6. 设$\vec{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$,$\vec{\alpha}_2=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$是$R^2$的一组基，$\vec{\alpha}=\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}$在这基下的坐标为 $(1,1)^T$。

7. 已知$\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2,\vec{\eta}_3$是四元线性方程组$A\vec{x}=\vec{b}$的三个解向量，其中$\vec{\eta}_1=[2\ \ 0\ \ 1\ \ 1]^T$，$\vec{\eta}_2+\vec{\eta}_3=[2\ \ 0\ \ 1\ \ 0]^T$，且$R(A)=3$，则线性方程组$A\vec{x}=\vec{b}$的通解$\vec{x}=$ $(2,0,1,1)^T+k(2,0,1,2)^T$, $k\in\mathbb{R}$.

8. 已知$A=\begin{bmatrix}1&-2&-4\\-2&4&-2\\-4&-2&1\end{bmatrix}$与$B=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&m&0\\0&0&-4\end{bmatrix}$相似，则$m=$ 5 。

得分	评阅人

二、计算（共 24 分，每小题 6 分）

1. $D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n\\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0\end{vmatrix}$

$D_n = n!\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 1\\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 0\end{vmatrix} = n!\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2\cdots & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix} = n!$

提 c_2-c_n 公因子（列除）

r_2+r_1，化上三角
r_3+r_1
$\vdots$
r_n+r_1

2′ 3′ 1′

2. 已知 $\vec{x}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$，求 $\vec{x}^T\vec{x}$ 及 $\vec{x}\vec{x}^T$.

$X^TX=(1,2,1)\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=6$ 3′

$XX^T=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}(1,2,1)=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{bmatrix}$ 3′

3. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&-1\\2&0\\5&-2\end{bmatrix}$, $X=AX+B$，求矩阵 X.

$(E-A)X=B$ 1′ $(E-A)^{-1}=\begin{bmatrix}0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\-1&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1&-1&0&1&-1\\1&0&-1&2&0\\1&0&2&5&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0&1&-1\\0&1&-1&1&1\\0&0&3&3&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&3&-\frac{2}{3}\\0&1&0&2&\frac{1}{3}\\0&0&1&1&-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$ 4′

$\therefore X=\begin{bmatrix}3&-\frac{2}{3}\\2&\frac{1}{3}\\1&-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$ 1′

4. 设三阶矩阵 A 的特征值分别为 1,2,3，求（1）A^3-5A^2+7A 的特征值；（2）$|A^3-5A^2+7A|$。

(1) 若A有特征值λ，则 A^3-5A^2+7A 有特征值 $\lambda^3-5\lambda^2+7\lambda$

λ 因 1,2,3 代入，得：3,2,3 3′

(2) $|A^3-5A^2+7A|=3\times2\times3=18$ 3′

得分	评阅人

三、（本题 12 分）

求下列向量组的秩和它的一个极大线性无关组，并用该极大线性无关组表示其余向量.

$$\vec{\alpha}_1=\begin{bmatrix}2\\1\\4\\3\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\-6\\6\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-1\\-2\\2\\-9\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_4=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\\7\end{bmatrix},\ \vec{\alpha}_5=\begin{bmatrix}2\\4\\4\\9\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4\\2&-1&-1&1&2\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4\\0&-3&3&-1&-6\\0&-10&10&-6&-12\\0&3&-3&4&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&\frac{1}{3}&2\\0&1&-1&\frac{3}{5}&\frac{6}{5}\\0&1&-1&\frac{4}{3}&-1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&\frac{1}{3}&2\\0&0&0&\frac{4}{15}&-\frac{4}{5}\\0&0&0&1&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&\frac{2}{3}&2\\0&1&-1&\frac{1}{3}&2\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\therefore r=3$ (2′)

$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为一个极大线性无关组. (2′) $\alpha_3=-\alpha_1-\alpha_2$

$\alpha_5=4\alpha_1+3\alpha_2-3\alpha_4$ (2′)

(6′) 讨论给4′ 合理给6′

得分	评阅人

四、（本题 12 分）讨论线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+\lambda x_2-x_3=1\\ \lambda x_1-x_2+x_3=2\\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1\end{cases}$$ 当 λ 取何值时，线性方程组有惟一解、无解、有无穷多解，在线性方程组有无穷多解时，求出其通解.

1) $\begin{vmatrix}2&\lambda&-1\\\lambda&-1&1\\4&5&-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+2&\lambda-1&0\\\lambda&-1&1\\5\lambda+4&0&0\end{vmatrix}=(5\lambda+4)(\lambda-1)$ $\therefore\ \lambda\neq-\frac{4}{5}$ 且 $\lambda\neq1$ 时，唯一解. (4′)

2) $\lambda=-\frac{4}{5}$ 时. $\begin{bmatrix}2&-\frac{4}{5}&-1&1\\-\frac{4}{5}&-1&1&2\\4&5&-5&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&-\frac{4}{5}&-1&1\\-4&-5&5&10\\4&5&-5&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&-\frac{4}{5}&-1&1\\-4&-5&5&10\\0&0&0&9\end{bmatrix}$ 无解 (4′)

3) $\lambda=1$ 时. $\begin{bmatrix}2&1&-1&1\\1&-1&1&2\\4&5&-5&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&1&2\\0&3&-3&-3\\0&9&-9&-9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&1&2\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

$\therefore\begin{cases}x_1=1\\x_2=x_3-1\end{cases}$ 无穷多解: $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},k\in R$ (4′)

得分	评阅人

五、（本题 12 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_1x_3+2x_2^2+x_3^2$，求一正交变换 $\vec{x}=Q\vec{y}$，使二次型化为标准形。

1) $A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$ (2′)

2) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&1\\0&\lambda-2&0\\1&0&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2$

$\therefore \lambda_1=0,\ \lambda_2=\lambda_3=2.$ (2′)

3) 对 $\lambda_1=0$, $\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&-2&0\\1&0&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

4′

$\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=0\end{cases}$ 基础解系: $p_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ (2′)

单位化: $e_1=(\frac{1}{\sqrt2},0,\frac{1}{\sqrt2})^T$

对 $\lambda_2=\lambda_3=2$, $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ (2′)

$\therefore\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=x_2\end{cases}$ 基础解系: $p_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $p_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ 正交.

单位化: $e_2=(0,1,0)^T$

$e_3=(-\frac{1}{\sqrt2},0,\frac{1}{\sqrt2})^T$

4) 取 $Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&0&-\frac{1}{\sqrt2}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$ (2′)

令 $X=QY$.

则 $f=2y_2^2+2y_3^2$ (2′)

得分	评阅人

六、证明（本题 8 分）

证明: 向量组 $\vec\alpha_1,\vec\alpha_2,\cdots,\vec\alpha_s$ 线性无关的充分必要条件是向量组 $\vec\alpha_1$, $\vec\alpha_1+\vec\alpha_2,\cdots,\vec\alpha_1+\vec\alpha_2+\cdots+\alpha_s$ 线性无关.

$(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&1\\0&0&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$ (3′)

$K=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&1\\0&0&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$ 可逆, 则两组等价

(3′)

从而秩相等 (2′)