河海大学常州校区 2001-2002 学年数学竞赛

一、计算题（6×5 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{x^2}^{x}\frac{\sin xt}{t}dt}{x^2}$；

2. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$；

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1^2}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$；

4. $\int \frac{dx}{(1+\sin x)\cos x}$；

5. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}} dx$；

6. $f(x)=\begin{cases} 1+x, & x \geq 0 \\ 2^x, & x<0 \end{cases}$，求$\int_0^2 f(x-1)dx$。

二、证明下列各题（5×6 分）

1. $\frac{2}{2x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(x>0\right)$。

2. $\sin 1 = \cos\xi$。

3. 设 $f\left(x\right)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，$a \le x_1 < x_2 < \cdots < x_n \le b$，则存在 $\xi \in \left[x_1, x_n\right]$，使

$$f\left(\xi\right) = \frac{f\left(x_1\right) + f\left(x_2\right) + \cdots + f\left(x_n\right)}{n}$$。

4. 设 $f\left(x\right)$，$g\left(x\right)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，且 $f\left(a\right) > g\left(a\right)$，$f\left(b\right) < g\left(b\right)$，则存在 $\xi \in \left(a,b\right)$，使 $f\left(\xi\right) = g\left(\xi\right)$

。

5. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且在 (a,b) 内 $f'(x)<0$，则 $F(x)=\dfrac{\int_a^x f(t)\,dt}{x-a}$ 在 (a,b) 内是单调递减函数。

三、设可导函数 $f(x)$ 对任何 x_1,x_2 恒有 $f(x_1+x_2)=e^{x_2}f(x_1)+e^{x_1}f(x_2)$，且 $f'(0)=2$，求 $f'(x)$ 与 $f(x)$ 的关系式。（10 分）

四、求曲线 $y=\ln x$ 在区间 $(2,6)$ 内的一条切线，使得该切线与 $x=2$，$x=6$ 和曲线 $y=\ln x$ 所围图形的面积最小。（10 分）

五、已知函数 $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$，求：函数的增减区间及极值；函数图形的凹凸区间及拐点；函数图形的渐近线。（10 分）

六、求 $r=\sqrt{3}\cos\theta$，$r=\sin\theta$ 所围公共部分的面积。（10 分）

参考答案

一、

1. 1
2. $e^{\frac{2}{\pi}}$
3. $\dfrac{\pi}{4}$
4. $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}-\dfrac{1}{2(1+\sin x)}+C$
5. $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{4}$
6. $\dfrac{1}{2\ln 2}+\dfrac{3}{2}$

三、$f'(x)=f(x)+2e^{x}$

四、$y=\dfrac{x}{4}-1+2\ln 2$

五、函数的增区间为$(-\infty,1),[3,+\infty)$，减区间为$(1,3]$，极小值$y(3)=\dfrac{27}{4}$；

函数的凹区间为$[0,1),(1,+\infty)$，凸区间为$(-\infty,0]$，拐点为$(0,0)$；

函数有铅直渐近线$x=1$，斜渐近线$y=x+2$，无水平渐近线。

六、$\dfrac{5}{24}\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$