2015-2016 学年第一学期《高等数学AI》期末试卷（A）

授课班号____________年级专业____________学号____________姓名____________

题型	填空题	计算题	综合题	总分	审　核
得分					

一、填空题(每小题 4 分，共 32 分)

得分	阅卷人

1. 当 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，则 $a=$ $-\frac{3}{2}$.

2. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=9$，则 $a=$ $\ln 3$.

3. 设 $F(x)=xf\left(\frac{1}{x}\right)$，其中 f 为可微函数，则 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}=$ $f\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}f'\left(\frac{1}{x}\right)$.

4. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{x+y}-\cos(xy)=0$ 确定，则 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ -1.

5. 曲线 $y=\frac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线为 $y=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$.

6. $\int\frac{2x+3}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x=$ $\ln(x^2+2x+2)+\arctan(x+1)+C$ （缺"C"扣1'）

7. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=x(1+\cos x)$，则 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ $=$ $1-\frac{\pi}{2}$.

8. 曲线 $y=e^{-x}(x\geq 0)$ 与 x 轴，y 轴所围成的开口图形绕 x 轴旋转所成旋转体的体积为 $\frac{\pi}{2}$.

二、计算题(每小题 6 分，共 36 分)

得分	阅卷人

1. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x(a^t-b^t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^{2x}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t}$ $(a>0,\ b>0)$. 变上限求导

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{2\ln(1+2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a-b^x\ln b}{4}$$

(3') 此步开放多种计算方法

$$=\frac{\ln a-\ln b}{4}$$

(3')

2. 设 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 在 $x=1$ 处有极值 -2，试确定系数 a，b，并求出 $y=f(x)$ 的所有极值点及拐点.

① $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$$\begin{cases} f'(1)=0 \\ f(1)=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3+2a+b=0 \\ 1+a+b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-3 \end{cases} \quad (2')$$

② $f'(x)=3x^2-3 \Rightarrow$ 驻点 $x=\pm 1$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

∴ 极大值点 $x=-1$

极小值点 $x=1$ (2′)

③ $f''(x)=6x$，$f'''(x)=6 \Rightarrow f''(0)=0$，$f'''(0)\neq 0$

∴ 拐点 $(0,0)$ (2′)

△无判定极值点和拐点理由不给分

3. 设 $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{a(\cos t-\cos t+t\sin t)}{a(-\sin t+\sin t+t\cos t)}=\tan t \quad (3')$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sec^2 t}{at\cos t}=\frac{\sec^3 t}{at} \quad (3')$$

4. 求 $\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}}$. <多种解法>

法三：令 $x+\sqrt{x^2-1}=t$，…

法一：原式 $=\int(x-\sqrt{x^2-1})dx=\frac{x^2}{2}-\int\sqrt{x^2-1}\,dx$

其中 $I=\int\sqrt{x^2-1}\,dx=x\sqrt{x^2-1}-\int\frac{x^2-1+1}{\sqrt{x^2-1}}dx=x\sqrt{x^2-1}-I-\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

(分部积分) (积分方程)

$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1}-\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right)+C$

∴ 原式 $=\frac{1}{2}\left(x^2-x\sqrt{x^2-1}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right)+C$

上下同乘 $\cos t$

法二：令 $x=\sec t$，原式 $=\int\frac{\sec t\tan t}{\sec t+\tan t}dt=\int\frac{\sin t}{\cos t(1+\sin t)}dt$，再令 $\sin t=u$，…

5. 设$f(x)=\begin{cases} x\sqrt{1+3x^2}, & x\le 0 \\ \ln(1+x), & x>0 \end{cases}$，求$\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x$.

令 $x-1=t$

原式 $=\int_{-1}^{1} f(t)\,dt=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0} x\sqrt{1+3x^2}\,dx+\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$ (2')

$=\int_{-1}^{0}\frac{1}{6}(1+3x^2)^{\frac{1}{2}}d(1+3x^2)+\int_0^1 \ln(1+x)\,d(1+x)$ (此种方法分部积分计算量小)

$=\left[\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}(1+3x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{0}+\left[(1+x)\ln(1+x)\right]_0^1-\int_0^1 dx$

$=-\frac{7}{9}+2\ln 2-1$

$=-\frac{16}{9}+2\ln 2$ (4')

6. 求星形线$\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$围成图形的面积.

由对称性，$A=4\int_0^a y\,dx$

$=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin^3 t\, d(a\cos^3 t)$ △利用参数方程换元不是极坐标！

$=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin^3 t\cdot a\cdot 3\cos^2 t(-\sin t)\,dt$ (3')

$=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos^2 t\,dt$

$=12a^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 t\,dt\right)$

$=12a^2\left(\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5!!}{6!!}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi a^2}{8}$ (3')

三、综合题(每小题 8 分，共 32 分)

得分	阅卷

1. 设 $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ x^2\ln x, & x>0 \end{cases}$，试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，其导函数在 $x=0$ 处是否连续？

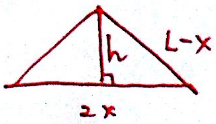
① $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{0}{x}=0$，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=0$

$\because f'_-(0)=f'_+(0)=0$ $\therefore f(x)$在$x=0$处可导，且$f'(0)=0$. (4')

② $f'(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ 2x\ln x+x, & x>0 \end{cases}$ △写错左右导数符号扣分

$\because \lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x\ln x+x)=0=f'(0)$ $\therefore f'(x)$在$x=0$处连续 (4')

2. 周长为$2L$的等腰三角形，绕其底边旋转一周，求使这种旋转体体积最大的，等腰三角形的底边之长．<多种设法>



设底边长为$2x$. 则腰长$L-x$. 底边上的高为$\sqrt{L^2-2Lx}$

<由圆锥体积公式> $V=\frac{\pi}{3}h^2\cdot 2x=\frac{2\pi}{3}x(L^2-2Lx)$ (3')

$V'=\frac{2\pi}{3}(L^2-4Lx)$

令$V'=0$得唯一驻点 $x=\frac{L}{4}$

∴底边长为$\frac{L}{2}$时，体积最大.

(5')

3. 设函数f在$[0,1]$内连续，$(0,1)$内可导，且满足

$$3\int_{2/3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=f(0),$$

证明：至少存在一点$\xi\in(0,1)$，使$f'(\xi)=0$．

由积分中值Th，$\exists\eta\in(\frac{2}{3},1)$ s.t. $\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)dx=f(\eta)\cdot(1-\frac{2}{3})$

写开区间.闭区间皆可.

从而$f(\eta)=f(0)$.

再由Rolle Th，$\exists\xi\in(0,\eta)$ s.t. $f'(\xi)=0$.

4. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续且递减，证明：当$0<\lambda<1$时，

$$\int_0^{\lambda} f(x)\,\mathrm{d}x\geq\lambda\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$ <多种证法>

法一：$\int_0^\lambda f(x)dx-\lambda\int_0^1 f(x)dx=\int_0^\lambda f(x)dx-\lambda\left(\int_0^\lambda f(x)dx+\int_\lambda^1 f(x)dx\right)$

$=(1-\lambda)\int_0^\lambda f(x)dx-\lambda\int_\lambda^1 f(x)dx$

$=(1-\lambda)f(\xi_1)\cdot(\lambda-0)-\lambda f(\xi_2)\cdot(1-\lambda)$, $0<\xi_1<\lambda<\xi_2<1$

$=\lambda(1-\lambda)[f(\xi_1)-f(\xi_2)]\geq 0$ ($f\downarrow\Rightarrow f(\xi_1)\geq f(\xi_2)$)

法二：$\int_0^\lambda f(x)dx$，令$x=\lambda t$换元 法三：讨论$F(\lambda)=\frac{\int_0^\lambda f(x)dx}{\lambda}$ 或 $\int_0^\lambda f(x)dx-\lambda\int_0^1 f(x)dx$ 单调性