河海大学 2014~2015 学年第一学期

《高等数学（上）》期末试卷

考试对象：2014 级

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $f(0)=0, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(-x)}=-2$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为（ B ）.

   A. $y=-\dfrac{1}{2}x$；　B. $y=\dfrac{1}{2}x$；　C. $y=-2x$；　D. $y=2x$.

2. 已知 $\dfrac{1}{1-x}=ax^2+bx+c+o(x^2),(x\to 0)$，其中 a,b,c 为常数,则（ A ）.

   A. $abc=1$；　B. $abc=2$；　C. $abc=3$；　D. $abc=4$.

3. 设圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 所围成图形绕 y 轴旋转一周所成的旋转体，则体积为（ C ）

   A. $4\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy$；　；　B. $6\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy$；

   C. $8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy$；　D. $10\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy$.

4. 设 $F(0)=0, F(x)=\dfrac{1}{x^2}\int_0^{\tan x}\dfrac{dt}{\sqrt{1+t^4}},(x\neq 0)$，则点 $x=0$ 是函数 $F(x)$ 的（ D ）.

   A. 连续点；　B. 可去间断点；　C. 跳跃间断点；　D. 无穷间断点.

5. 方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内有唯一实根的充分条件是（ D ）.

   A. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界,且 $f(a)f(b)<0$；

   B. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调,且 $f(a)f(b)<0$；

   C. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)f(b)<0$；

   D. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,单调,且 $f(a)f(b)<0$.

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $g(x)=f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)\neq 0$，$f_i(x)$ 可导，$f_i(0)=f_i'(0),(i=1,2,\cdots,n)$，

则 $\left.\dfrac{g'(x)}{g(x)}\right|_{x=0}=$ __ n __ 。　2. 已知 $f'(\sin^2 x)=\tan^2 x$，则 $f(x)=$ $-\ln|1-x|-x+C$

3. 曲线 $x=t^2, y=3t+t^3(t>0)$ 的拐点坐标是 __ $(1,4)$ __。

4. 设 $f(x)=x^2e^x$，则 $f^{(50)}(0)=$ __ 2450 __。

5. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5 x+\cos^5 x)dx=$ $\dfrac{16}{15}$ 。

三、试解下列各题（每小题 7 分，共 35 分）

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^2\tan x}$.　2. 设 $y=\int_0^{\beta(x)}\sqrt{1+t^4}\,dt$，其中 $\beta(x)=x^x,(x>0)$，求 dy.

$dy=\sqrt{1+x^{4x}}\cdot x^x(\ln x+1)\,dx$

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^3}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}=+\dfrac{\frac{1}{(1+x^2)^2}\cdot 2x}{6x}=\dfrac{1}{3(1+x^2)^2}$

$x\to 0\ \lim\to\dfrac{1}{3}$

$5.\int (t\frac{1}{2}x^2)(-2xe^{-x^2})dx = -\frac{1}{2}x\cdot e^{-x^2} - \int e^{-x^2}(-x)dx = -\frac{1}{2}x^2\cdot e^{-x^2} - \frac{1}{2}\int(-2x)e^{-x^2}dx$

$= \frac{1}{2} + \lim_{x\to+\infty}(-\frac{1}{2})\cdot\frac{x^2+1}{e^{x^2}} \quad \frac{2x}{e^{x^2}\cdot 2x} \quad \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{2}$

$= -\frac{1}{2}x^2\cdot e^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty}$

$= -\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^2+1) = -\frac{1}{2}\frac{x^2+1}{e^{x^2}}\Big|_0^{+\infty}$

3. 求函数 $f(x) = x^3 - x^2 + 2x + 2$ 在 $x = 1$ 点处的具有拉格朗日型余项的 $n(n \ge 1)$ 阶泰勒公式

$f'(x) = 3x^2 - 2x + 2 \quad f^{(3)}(x) = 6 \quad f(x) = 4 + 3(x-1) + 2(x-1)^2 + (x-1)^3 \quad (n\geq 2)$

$f''(x) = 6x - 2 \quad f^{(4)}(x) = f^{(5)}(x) = \cdots f^{(n)}(x) = 0 \quad n=1.\ f(x) = 4 + 3(x-1) + (3\xi-1)(x-1)^2$

4. 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$ $x = t^6$ 　　5.求 $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$

$\xi \in (1, x)$

$\int \frac{1}{t^3(1+t^2)}6t^5dt = 6\int\frac{t^2}{1+t^2}dt = 6\int\frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt = 6\int(1-\frac{1}{1+t^2})dt = 6(t - \arctan t) + c$

四、(5 分) 证明:当 $x > 0$ 时, $2x\arctan x + 2e^x > \ln(1 + x^2) + (x + 1)^2 + 1$. $= 6x^{\frac{1}{6}} - 6\arctan x^{\frac{1}{6}} + c$

$x=0 \quad 2=2 \quad f(x) = (\ ) - (\ ) \quad f(0)=0 \quad f'(x) = 2\arctan x + 2e^x + 2x + 2$

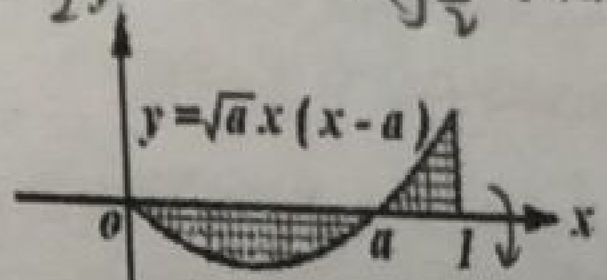
五、(6 分) 求曲线 $y = \sin x$ 与 $y = \sin 2x$ 在 $[0, \pi]$ 中所围成图形的面积. $\quad x>0,\ f(x)>0$

$\sin x = \sin 2x = 2\sin x\cos x \quad \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x - \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x - \sin 2x\, dx \quad f(x)\uparrow\ f(x)>f(0)=0$

$x=0,\ x=\frac{\pi}{3},\ x=\pi$

$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x dx + (-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin 2x dx) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 +$

六、(6 分) 求由曲线 $y = \sqrt{a}x(x - a)$,$(0 < a \le \frac{5+\sqrt{5}}{10})$ 与直线 $y = 0, x = 1$ 所围成的图形(如图所示)绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积。并求当 a 为何值时, 体积最大? $=$



$\pi\int_0^1 [\sqrt{a}x(x-a)]^2 dx = \pi\int_0^1 ax^4 - 2a^2x^3 + a^3x^2 dx = \pi(\frac{1}{5}ax^5 - \frac{1}{2}a^2x^4 + \frac{1}{3}a^3x^3)\Big|_0^1$

$= \pi(\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{5}a) \quad f(a) = \pi(\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{5}a) \quad f'(a) = \pi(a^2 - a + \frac{1}{5}) \quad a = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$

七、(6 分) 设 $f(x) = x - \int_0^{\pi} f(x)\cos x dx$, 求 $f(x)$.

$f(x) = x + C \qquad \int(x+c)\cos x dx = (x+c)\cdot\sin x - \int\sin x dx = (x+c)\sin x +$

$-C = \int_0^{\pi}(x+c)\cos x dx. \qquad -C = -2. \quad f(x) = x+2$

八、(6 分) 设 $\varphi(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续, 在 $(0, a)$ 内可导, 证明:$\exists\xi \in (0, a)$, 使得:

$$a\varphi(a) = (1 + \xi^2)[\varphi(\xi) + \xi\varphi'(\xi)]\arctan a$$

$f(a) = a\varphi(a) = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}g(a) \qquad \frac{f(a)}{g(a)}$

$f(x) = x\varphi(x) \quad f(0)=0$

$g(x) = \arctan x \quad g(0)=0 \qquad \frac{f(a)-f(0)}{g(a)-g(0)}$

九、(6 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $\int_a^b xf(x)dx = b\int_a^b f(x)dx$, 证明:存在 $\xi \in (a,b)$,

使得 $\int_a^{\xi} f(x)dx = 0$.

$\exists\xi\in(a,b) \qquad F(x) = \int_a^x (x-$

$F'(\xi)=0. \qquad F'(x) = \int_a^x f($

$(\xi-b)f(\xi)=0$

$\int_a^b (x-b)f(x)dx = 0.$

$= F(b) - F(a) = 0 \qquad \xi\neq b\ f(\xi)=0.$

$F(x) = \int(x-b)f(x)dx$

$F(b) = F(a)$

$F'(x) = (x-b)f(x)$

2014级《高等数学（上）》期末试卷参考答案

一、BACDD.　二、1. π;　2. $\underline{-x-\ln|x-1|+C}$;　3. $\underline{(1,4)}$;　4. $\underline{2C_{10}^{2}}$;　5. $\underline{\frac{16}{15}}$.

三、1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^2\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\frac{1}{3}$

2. $y'=\sqrt{1+x^{4x}}(x^x)'=\sqrt{1+x^{4x}}x^x(\ln x+1)$, $dy=\sqrt{1+x^{4x}}x^x(\ln x+1)dx$.

3. 一阶泰勒公式: $f(x)=4+3(x-1)+(3\xi-1)(x-1)^2$

$n(n\geq 2)$ 阶泰勒公式 $f(x)=4+3(x-1)+2(x-1)^2+(x-1)^3$

4. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\overset{x=t^6}{=}6\int\frac{t^2}{1+t^2}=6t-6\arctan t+c=6\sqrt[6]{x}-6\arctan\sqrt[6]{x}+c.$.

5. $\int_0^{+\infty}x^3e^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}x^2de^{-x^2}=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx^2=\frac{1}{2}.$

四、$F(x)=2x\arctan x+2e^x-\ln(1+x^2)-(x+1)^2-1$,

$F'(x)=2\arctan x+2e^x-2(x+1)$,

$F''(x)=\frac{2}{1+x^2}+2e^x-2>0$, $F'(x)>F'(0)=0, F(x)\uparrow, F(x)>F(0)=0$

五、$A=\int_0^{\pi}|\sin 2x-\sin x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin x-\sin 2x)dx$

$=(-\frac{1}{2}\cos 2x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+(-\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=\frac{5}{2}.$

六、$V(a)=\pi a\int_0^1x^2(x-a)^2dx=(\frac{1}{5}a-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}a^3)\pi$,

$V'(a)=(\frac{1}{5}-a+a^2)\pi,\ V'=0\Rightarrow a=\frac{5\pm\sqrt{5}}{10}$

$0<a\leq\frac{5-\sqrt{5}}{10}, V\uparrow, \frac{5-\sqrt{5}}{10}\leq a\leq\frac{5+\sqrt{5}}{10}, V\downarrow$，当 $a=\frac{5-\sqrt{5}}{10}$，体积最大。

七、$A=\int_0^{\pi}f(x)dx, f(x)=x-A$，$\int_0^{\pi}f(x)\cos xdx=\int_0^{\pi}x\cos xdx-A\int_0^{\pi}\cos xdx$

$A=\int_0^{\pi}x\cos xdx=x\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin xdx=-2,\quad f(x)=x+2.$

八、$x\varphi(x), \arctan x$ 符合柯西中值定理条件，所以有

$$\frac{a\phi(a)}{\arctan a}=\frac{\phi(\xi)+\xi\phi'(\xi)}{\frac{1}{1+\xi^2}}$$，即 $a\varphi(a)=(1+\xi^2)[\varphi(\xi)+\xi\varphi'(\xi)]\arctan a$

九、$\forall x\in[a,b]$，令 $F(x)=\int_a^x (x-t)f(t)dt$，则有 $F'(x)=\int_a^x f(t)dt$，且 $F(a)=0=F(b)=0$。由 Rolle 定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$. $F'(\xi)=\int_a^\xi f(t)dt=0$。