2013-2014 学年第二学期高等数学期中测试及数学竞赛试卷（2013 级）

（参加竞赛的同学全做，其他同学只做一、二大题）

一、填空题（8×5 分）

1. 设 $\vec{a}=(2,1,-2)$，$\vec{b}=(1,-1,-1)$，则 $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=$ <u>6</u>，$(3\vec{a}-5\vec{b})\times(5\vec{a}-8\vec{b})=$ <u>$(-3,0,-3)$</u>。

2. 过三点 $A(0,4,-5)$，$B(-1,-2,2)$，$C(4,2,1)$ 的平面方程为 <u>$11x-17y-13z+3=0$</u>。

3. 直线 $L:\begin{cases}x-y-1=0\\y+z-1=0\end{cases}$ 在平面 $\pi: x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 L_0 的方程为 <u>$\begin{cases}x-3y-2z+1=0\\x-y+2z-1=0\end{cases}$</u>。

4. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}(a\neq 0)=$ <u>$e^{\frac{1}{a}}$</u>。

5. 设 $z=(1+xy)^y$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=$ <u>1</u>，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}=$ <u>$2\ln 2+1$</u>。

6. 曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $2x+4y-z=0$ 平行的切平面方程是 <u>$2x+4y-z-5=0$</u>。

7. 已知 $f(x,y)$ 可微，且 $f(1,2)=2$，$f'_x(1,2)=3$，$f'_y(1,2)=4$，记 $\varphi(x)=f(x,f(x,2x))$，$\varphi'(1)=$ <u>47</u>。

8. 由 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$，则 $dz|_{(1,0,-1)}=$ <u>$dx-\sqrt{2}\,dy$</u>。

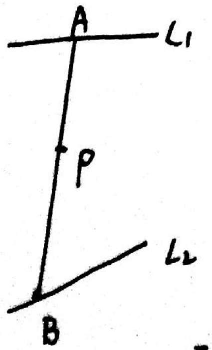
二、计算题（4×15 分）

1. 设直线通过点 $P(-3,5,-9)$，且和两直线 $L_1:\begin{cases}y=3x+5\\z=2x-3\end{cases}$，$L_2:\begin{cases}y=4x-7\\z=5x+10\end{cases}$ 相交，求此直线方程。

L_1 过点 $M_1(0,5,-3)$，$\vec{s_1}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&-1&0\\2&0&-1\end{vmatrix}=(1,3,2)$；$L_2$ 过点 $M_2(0,-7,10)$，$\vec{s_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\4&-1&0\\5&0&-1\end{vmatrix}=(1,4,5)$

由 $\vec{s_1}\times\vec{s_2}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\neq 0$ 可知 L_1 与 L_2 异面．易见 $P\notin L_1$，$P\notin L_2$

法一：



设所求直线交 L_1 于点 $A(m,3m+5,2m-3)$，交 L_2 于点 $B(n,4n-7,5n+10)$

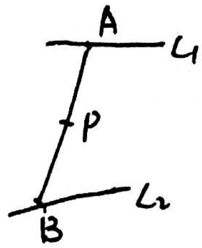
由 A.P.B 共线可得：$\overrightarrow{AP}=t\,\overrightarrow{PB}$

即 $(-3-m,-3m,-6-2m)=t(n+3,4n-12,5n+19)$

由 $\begin{cases}-3-m=t(n+3)\\-6-2m=t(5n+19)\end{cases}$ 易得 $5n+19=2(n+3)$，$n=-\dfrac{13}{3}$．

从而 $\overrightarrow{PB}=-\dfrac{4}{3}(1,22,2)$．$\therefore$ 所求直线为 $x+3=\dfrac{y-5}{22}=\dfrac{z+9}{2}$

法二：设所求直线为 $\begin{cases} x=-3+mt \\ y=5+nt \\ z=-9+pt \end{cases}$，$A(-3+mt_1, 5+nt_1, -9+pt_1)$，



$B(-3+mt_2, 5+nt_2, -9+pt_2)$. 由 $A\in L_1$，$B\in L_2$.

可得：$\begin{cases} 5+nt_1=3(-3+mt_1)+5 \\ -9+pt_1=2(-3+mt_1)-3 \end{cases}$ ① 及 $\begin{cases} 5+nt_2=4(-3+mt_2)-7 \\ -9+pt_2=5(-3+mt_2)+10 \end{cases}$ ②

① $\Longrightarrow \begin{cases} (3m-n)t_1=9 \\ (2m-p)t_1=0 \end{cases} \Longrightarrow p=2m$；② $\Longrightarrow \begin{cases} (4m-n)t_2=24 \\ (5m-p)t_2=-4 \end{cases} \Longrightarrow \dfrac{4m-n}{5m-p}=-6$

又 $p=2m$，$\therefore n=22m$. 从而所求直线方向向量为 $(1,22,2)$.

直线方程为 $x+3=\dfrac{y-5}{22}=\dfrac{z+9}{2}$.

法三：设过P及L_1的平面为π_1，过P及L_2的平面为π_2.

易见所求直线为π_1与π_2的交线.

设π_1：$2x-z-3+m(3x-y+5)=0$，将$P(-3,5,-9)$代入，$m=0$.

$\therefore \pi_1$：$2x-z-3=0$.

设π_2：$5x-z+10+n(4x-y-7)=0$，将$P(-3,5,-9)$代入，$n=\frac{1}{6}$

$\therefore \pi_2$：$34x-y-6z+53=0$

$\therefore$ 所求直线为 $\begin{cases} 2x-z-3=0 \\ 34x-y-6z+53=0 \end{cases}$

无g二阶偏导连续条件，不需合并g_{12}'', g_{21}''

2. 设f具二阶导数，g具二阶偏导，$z = f(2x+3y) + g(xy, x+y)$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f' \cdot 2 + g_1' \cdot y + g_2' \cdot 1 = 2f' + y g_1' + g_2'$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f' \cdot 3 + g_1' \cdot x + g_2' \cdot 1 = 3f' + x g_1' + g_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2f'' \cdot 3 + g_1' + y(g_{11}'' \cdot x + g_{12}'' \cdot 1) + g_{21}'' \cdot x + g_{22}'' \cdot 1$$

$$= 6f'' + g_1' + xy g_{11}'' + y g_{12}'' + x g_{21}'' + g_{22}''$$

3. 设在xOy面上，各点的温度T与点的关系为$T = 4x^2 + 9y^2$，点$P_0(9,4)$，求 1）$gradT|_{P_0}$；2）在点P_0处沿极角为$\frac{7}{6}\pi$的方向$\vec{l}$的温度变化率；3）在何方向上点P_0处的温度变化率取得最大值并求之。

1) $gradT\big|_{P_0} = (8x, 18y)\big|_{(9,4)} = (72, 72)$

2) $\vec{l} = (\cos\frac{7}{6}\pi, \sin\frac{7}{6}\pi) = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$

$\frac{\partial T}{\partial l}\Big|_{P_0} = gradT\big|_{P_0} \cdot \vec{l} = -36(\sqrt{3}+1)$

3) 在$gradT\big|_{P_0}$方向上有$\max \frac{\partial T}{\partial l}\Big|_{P_0} = \left|gradT\big|_{P_0}\right| = 72\sqrt{2}$.

4. 求二元函数$f(x,y) = x^2(2+y^2) + y\ln y$的极值（需判定极大、极小）。

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x(2+y^2)$，$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 y + \ln y + 1$

令$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$ 可得驻点$(0, \frac{1}{e})$

$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2(2+y^2)$，$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy$，$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 + \frac{1}{y}$

$AC - B^2\big|_{(0,\frac{1}{e})} = 2e(2+\frac{1}{e^2}) > 0$，$A_{(0,\frac{1}{e})} = 2(2+\frac{1}{e^2}) > 0$

$\therefore$ 有极小值$f(0, \frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$

三、数学竞赛加题（5×20 分）

1. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$，记 $a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，1）求 a；2）当 $x\to 0$ 时，$f(x)-a$ 与 x^k 是同阶无穷小，求常数 k。

$$1)\ a=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^2)}{x^2}=1$$

$$2)\ x\to 0\text{ 时，}f(x)-a=\frac{1+x}{\sin x}-\frac{1}{x}-1=\frac{x+x^2-\sin x-x\sin x}{x\sin x}$$

$$=\frac{x+x^2-\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)-x\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)}{x\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)}=\frac{\frac{x^3}{3!}+o(x^3)}{x^2+o(x^2)}\sim\frac{x}{3!}$$

$\therefore k=1$

2. 设 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0\\ f'(0), & x=0\end{cases}$，其中 $f(x)$ 具有连续导数且 $f(0)=0$，$f''(0)$ 存在，1）求 $F'(x)$；2）$F'(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续（要有过程）。

则 $f'(x)$ 在 $x=0$ 邻域内存在，

◆ 无 $f''(x)$ 在 $x=0$ 邻域内存在条件。

$$1)\ F'(x)=\frac{f'(x)\cdot x-f(x)\cdot 1}{x^2}=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2},\ x\neq 0$$

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f'(0)x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\frac{1}{2}f''(0)$$

注：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{2}$ 为常见错误，无 $f''(x)$ 存在条件！

$$\therefore F'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}, & x\neq 0\\[2mm] \dfrac{1}{2}f''(0), & x=0\end{cases}$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}F'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x[f'(x)-f'(0)]+xf'(0)-f(x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}+\frac{xf'(0)-f(x)}{x^2}\right]=f''(0)-\frac{1}{2}f''(0)=\frac{1}{2}f''(0)=F'(0)$$

$\therefore F'(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

3. 1) $\begin{cases}x=\sin t\\ y=t\sin t+\cos t\end{cases}$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$；

2) 计算 $\int_0^1\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$，其中 $f(x)=\int_1^x\dfrac{\ln(t+1)}{t}dt$。

1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\sin t+t\cos t-\sin t}{\cos t}=t$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{1}{\cos t}=\sec t$

2) $f'(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$

$\int_0^1\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=\int_0^1 f(x)d(2\sqrt{x})$

$=\left[2\sqrt{x}f(x)\right]_0^1-\int_0^1 2\sqrt{x}f'(x)dx$

$=2f(1)-\int_0^1\dfrac{2\ln(x+1)}{\sqrt{x}}dx$

$=0-\int_0^1 4\ln(x+1)d\sqrt{x}$

$=-4\left[\sqrt{x}\ln(x+1)\right]_0^1+4\int_0^1\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}dx$ （令 $\sqrt{x}=t$）

$=-4\ln 2+4\int_0^1\dfrac{t}{t^2+1}\cdot 2t\,dt$

$=-4\ln 2+8\int_0^1\left(1-\dfrac{1}{t^2+1}\right)dt$

$=-4\ln 2+8-8\left[\arctan t\right]_0^1$

$=-4\ln 2+8-2\pi$

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可微，且 $f(0)=f(1)=0$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$，求证：1）在 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=\xi$；2）在 $(0,\xi)$ 内至少有一点 η，使得 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$。

1) 设 $F(x)=f(x)-x$

则 $F(x)\in C[\frac{1}{2},1]$ 且 $F(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$，$F(1)=f(1)-1=-1<0$

$\therefore$ 由零点定理，$\exists\,\xi\in(\frac{1}{2},1)$ s.t. $F(\xi)=f(\xi)-\xi=0$，即 $f(\xi)=\xi$，结论成立.

2) 设 $G(x)=e^{-x}\cdot(f(x)-x)$，则 $G(x)\in C[0,\xi]$，$G'(x)=-e^{-x}[f(x)-x-f'(x)+1]$，$G(x)\in D(0,\xi)$，且 $G(0)=G(\xi)=0$. 由 Rolle 定理，$\exists\,\eta\in(0,\xi)$ s.t. $G'(\eta)=0$

从而 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$，结论成立.

5. 1）比较 $\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n|\ln t|dt\ (n=1,2,\cdots)$ 的大小，说明理由；

2）记 $u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt\ (n=1,2,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$。

1) $0<t\le 1$ 时，$\ln(1+t)<t$（上册13题）

又 $\lim\limits_{t\to0^+}|\ln t|\cdot[\ln(1+t)]^n=\lim\limits_{t\to0^+}|\ln t|\cdot t^n=0$

$\therefore$ 令 $f(t)=\begin{cases}|\ln t|\cdot[\ln(1+t)]^n, & 0<t\le1\\ 0, & t=0\end{cases}$，$g(t)=\begin{cases}t^n\cdot|\ln t|, & 0<t\le1\\ 0, & t=0\end{cases}$

可得 $f(t), g(t)\in C[0,1]$ 且 $f(t)\le g(t)$，$f(t)\not\equiv g(t)$，$t\in[0,1]$.

$\therefore\int_0^1 f(t)dt<\int_0^1 g(t)dt$，即 $\int_0^1|\ln t|\cdot[\ln(1+t)]^n dt<\int_0^1 t^n\cdot|\ln t|dt$，$n=1,2,\cdots$

2) 由1)，$0<u_n<\int_0^1 t^n|\ln t|dt$

而 $\int_0^1 t^n|\ln t|dt = -\int_0^1 t^n \ln t\,dt = -\int_0^1 \frac{\ln t}{n+1}\,d t^{n+1}$

$= -\left[\frac{t^{n+1}\ln t}{n+1}\right]_{0^+}^1 + \int_0^1 \frac{t^n}{n+1}dt$ （下限0不能直接代入原函数，应计算右极限）

$= 0 + \left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)^2}$

$\therefore\ 0<u_n<\frac{1}{(n+1)^2}$，$n=1,2,\cdots$

由夹逼准则，$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$