2006-2007 学年第二学期高等数学期中测试及数学竞赛试卷（2006 级）

（参加竞赛的同学全做，其他同学只做一、二大题）

一、填空题（10×4 分）

1. 设 $\vec{a}=(1,1,1)$，$\vec{b}=(1,2,-1)$，则 $(-2\vec{a})\cdot(3\vec{b})=$ <u>-12</u>，$\vec{a}\times(2\vec{b})=$ <u>$(-6,4,2)$</u>。

2. 已知平面过直线 $\begin{cases}x+y=0\\x-y+z=2\end{cases}$ 且与另一直线 $x=y=z$ 平行，则该平面方程为 <u>$x-3y+2z-4=0$</u>。

3. 曲线 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\z=0\end{cases}$ 绕 y 轴一周的旋转面的方程是 <u>$\dfrac{x^2}{4}+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$</u>。

4. 曲面 $2xy+z-e^z=3$ 在点 $M(1,2,0)$ 处的切平面方程为 <u>$2x+y-4=0$</u>。(08级一.4)
(12级一.4)

5. 设 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微，且 $f(1,1)=1$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=3$，$\varphi(x)=f(x,f(x,x))$，则

   $\left.\dfrac{d}{dx}\varphi^3(x)\right|_{x=1}=$ <u>51</u>。(08级一.5)

6. 交换积分次序 $\int_0^1 dx\int_{x-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy=$ <u>$\int_{-1}^{0}dy\int_0^{y+1}f(x,y)\,dx+\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,dx$</u>。

7. 积分 $\int_0^1 dx\int_0^x f(x^2+y^2)\,dy$ 的极坐标形式为 <u>$\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sec\theta}f(r^2)\cdot r\,dr$</u>。(08级一.7)

8. Ω 为 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围立体域，则 $\iiint\limits_{\Omega} x\,dv=$ <u>0</u>。

9. 设 $L: x^2+y^2=2$，则 $\oint_L (x^2+y^2)\,ds=$ <u>$4\sqrt{2}\pi$</u>。 Ch10

10. 设 $f(0)=0$，$\int_C xy^2dx+yf(x)\,dy$ 与路径无关，则 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx+yf(x)\,dy=$ <u>$\dfrac{1}{2}$</u>。Ch10

二、计算题（4×15 分）

1. 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$z=f\left(2x-y,\dfrac{x}{y}\right)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2f_1'+\frac{1}{y}f_2', \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-f_1'-\frac{x}{y^2}f_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2\left[f_{11}''\cdot(-1)+f_{12}''\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}\left[f_{21}''\cdot(-1)+f_{22}''\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]$$

$$=-2f_{11}''-\left(\frac{2x}{y^2}+\frac{1}{y}\right)f_{12}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''-\frac{1}{y^2}f_2'$$

2. 求 $z=3axy-x^3-y^3$ 的极值（其中 $a\neq 0$）。

$\frac{\partial z}{\partial x}=3ay-3x^2$，$\frac{\partial z}{\partial y}=3ax-3y^2$

由 $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$ 得驻点 $(0,0)$，(a,a)

$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-6x$，$B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=3a$，$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-6y$

$AC-B^2=36xy-9a^2$

① $AC-B^2\big|_{(0,0)}=-9a^2<0$ ∴ $(0,0)$ 不是极值点.

② $AC-B^2\big|_{(a,a)}=27a^2>0$，$A\big|_{(a,a)}=-6a$

∴ $A<0$，即 $a>0$ 时，有极大值 $z(a,a)=a^3$；

$A>0$，即 $a<0$ 时，有极小值 $z(a,a)=a^3$.

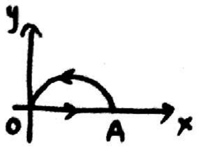
3. 一个高为 h 的雪堆，其侧面满足方程 $z=h-\frac{2(x^2+y^2)}{h}$，求雪堆的体积与侧面积之比。

(08级 二.3)

体积也可用柱坐标计算.

$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{h}{\sqrt{2}}}dr\int_0^{h-\frac{2r^2}{h}}r\,dz$

4. 求 $\int_L\left(e^x\sin y-b(x+y)\right)dx+\left(e^x\cos y-ax\right)dy$，其中 a,b 为正的常数，L 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的弧。 Ch10



添 $\overline{OA}$，$y=0$，x: $0\longrightarrow 2a$

由 Green 公式，

$\oint_{L\cup\overline{OA}}(e^x\sin y-b(x+y))\,dx+(e^x\cos y-ax)\,dy$

$=\iint_D(b-a)\,dxdy=\frac{\pi}{2}a^2(b-a)$

$\int_{\overline{OA}}(e^x\sin y-b(x+y))\,dx+(e^x\cos y-ax)\,dy=\int_0^{2a}-bx\,dx=-2a^2b$

∴ 原式 $=\frac{\pi}{2}a^2(b-a)-(-2a^2b)=\frac{\pi}{2}a^2(b-a)+2a^2b$

三、数学竞赛加题（4×25 分）

1. 设 $0<x_1<\pi$，$x_{n+1}=\sin x_n\ (n=1,2,\cdots)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n}}$。

① $x_{n+1}=\sin x_n<x_n$ 且 $0<x_n\le 1,\ n=2,\cdots$

∴ 由单调有界准则，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，在 $x_{n+1}=\sin x_n$ 两边同时取极限，得 $a=\sin a$ ∴ $a=0$.

② $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n}}$ (*)

考虑 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$，利用函数极限与数列极限的关系求决，

∵ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\dfrac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x-x}}\right]^{\frac{\sin x-x}{x^2}}=e^0=1$

$\left(\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x-x}}=e,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{2x}=0\right)$

∴ (*) $=1$.

2. 设 $f(x)$ 具二阶连续导数，$f(a)=0$，$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x-a}, & x\neq a\\ f'(a), & x=a\end{cases}$，求 $g'(x)$，并证明 $g'(x)$ 在 $x=a$ 处连续。

1)

$x\neq a$ 时，$g'(x)=\dfrac{f'(x)(x-a)-f(x)}{(x-a)^2}$，

$g'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\frac{f(x)}{x-a}-f'(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)-f'(a)}{2(x-a)}=\dfrac{1}{2}f''(a)$

∴ $g'(x)=\begin{cases}\dfrac{f'(x)(x-a)-f(x)}{(x-a)^2}, & x\neq a\\ \dfrac{1}{2}f''(a), & x=a\end{cases}$

2) $\lim\limits_{x\to a}g'(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)(x-a)-f(x)}{(x-a)^2}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f''(x)(x-a)+f'(x)-f'(x)}{2(x-a)}$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f''(x)}{2}=\dfrac{f''(a)}{2}=g'(a)$

∴ $g'(x)$ 在 $x=a$ 处连续.

3. 设 $f(x)$ 连续，证明 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]\,dx$，并求 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x}\,dx$。

1) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$

其中 $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx \xlongequal{令x=-t} \int_{a}^{0} f(-t)\cdot(-1)\,dt = \int_{0}^{a} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx$

$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} [f(x)+f(-x)]\,dx$

2) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x}\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{1+\sin(-x)}\right] dx$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{1-\sin^2 x}\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 2\sec^2 x\,dx = 2\tan x \Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = 2$.

4. 1）比较 π^e，e^π 大小，并说明理由；2）证明：$e^x = ax^2+bx+c$ 的根不超过三个。

1) 07级 三5 2)

2) 令 $f(x) = e^x - (ax^2+bx+c)$，方程的根为 $f(x)$ 的零点.

若 $f(x)$ 至少有4个零点，则由 Rolle Th，

$f'(x)$ 至少有3个零点，$f''(x)$ 至少有2个零点，

从而 $f'''(x)$ 至少有1个零点 (*)

而 $f'''(x) = e^x > 0$. 与(*)矛盾.

$\therefore f(x)$ 至多有3个零点. 即方程的根不超过3个.