3' 2012—2013学年第一学期《线性代数》课内考试卷（A卷）

授课班号 002904 5,6 年级专业 商学院11级 学号________ 姓名________

题号	一	二	三	四	五	六	总分	审核
题分	24	32	12	12	12	8		
得分								

得分	评阅人

一、填空（共24分，每空格3分）

1. 排列（$1,3,5,\cdots,2n-1,2,4,6,\cdots,2n$）的逆序数为 $\frac{n(n-1)}{2}$ 。

2. 已知四阶行列式 D 中第2列元素依次为1，1，1，1，它们对应的代数余子式依次为2，3，2，3，则行列式 $D=$ 10 。

3. 设3阶方阵 A 的行列式 $|A|=\frac{1}{2}$，则 $\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|=$ $-\frac{16}{27}$ 。

4. $\underset{r_1\leftrightarrow r_3}{\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{2012}}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\underset{c_2\leftrightarrow c_3}{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^{2013}}=$ $\begin{bmatrix}1&3&2\\4&6&5\\7&9&8\end{bmatrix}$ 。

5. 已知 $A=\begin{bmatrix}3&1&0&2\\1&-1&2&-1\\1&3&-4&4\end{bmatrix}$，则 A 的秩为 2 。

6. 已知 $\vec{\beta}_1=\vec{\alpha}_1$，$\vec{\beta}_2=\vec{\alpha}_1+2\vec{\alpha}_2$，$\vec{\beta}_3=\vec{\alpha}_1+2\vec{\alpha}_2+3\vec{\alpha}_3$，且向量组 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$ 线性无关，则向量组 $\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\vec{\beta}_3$ 线性 无关 。

7. 已知四元线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的~~某~~两个解向量为 $\vec{\eta}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$，$\vec{\eta}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$，且 $r(A)=3$，则方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的通解 $\vec{x}=$ $\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix}$ 。

8. 已知 $\vec{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\a\\-1\end{bmatrix}$，$\vec{\beta}=\begin{bmatrix}5\\1\\4\end{bmatrix}$，且 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 的内积等于9，$a=$ 8 。

得分	评阅人

二、计算（共 32 分，每小题 8 分）

1. $D=\begin{vmatrix}3&2&2&2\\2&3&2&2\\2&2&3&2\\2&2&2&3\end{vmatrix}$ 化上三角

$$D \xlongequal{r_1+(r_2+r_3+r_4)} 9\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&2&2\\2&2&3&2\\2&2&2&3\end{vmatrix}$$

$$=9\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}=9$$

2. 设 $A=\begin{bmatrix}2&1\\1&3\\-1&-2\\0&3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&2&-1&2\\-3&0&1&1\end{bmatrix}$，求 AB 及 BA.

$$AB=\begin{bmatrix}-1&4&-1&5\\-8&2&2&5\\5&-2&-1&-4\\-9&0&3&3\end{bmatrix},\quad BA=\begin{bmatrix}5&15\\-7&-2\end{bmatrix}$$

3. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}4&-3\\2&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2&3&0\\0&-1&4\end{bmatrix}$, $XA=B^T+3X$，求矩阵 X.

$$X(A-3E)=B^T \Rightarrow (A-3E)^T X^T=B \Rightarrow (A^T-3E)X^T=B \Rightarrow X^T=(A^T-3E)^{-1}B$$

$$(A^T-3E,B)=\begin{bmatrix}1&2&2&3&0\\-3&-2&0&-1&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&2&3&0\\0&4&6&8&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&2&3&0\\0&2&3&4&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-1&-2\\0&1&\frac{3}{2}&2&1\end{bmatrix}$$

$$\therefore X^T=\begin{bmatrix}-1&-1&-2\\\frac{3}{2}&2&1\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}-1&\frac{3}{2}\\-1&2\\-2&1\end{bmatrix}$$

4. 设 $3(\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha})+2(\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha})=5(\vec{\alpha}_3+\vec{\alpha})$，其中 $\vec{\alpha}_1=\begin{bmatrix}2\\5\\1\end{bmatrix}$, $\vec{\alpha}_2=\begin{bmatrix}10\\1\\5\end{bmatrix}$, $\vec{\alpha}_3=\begin{bmatrix}4\\1\\-1\end{bmatrix}$，求 $\vec{\alpha}$.

$$\alpha=\frac{1}{6}(3\alpha_1+2\alpha_2-5\alpha_3)=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}6\\12\\18\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

3'

得分	评阅人

三、（本题 12 分）

求下列向量组的秩和它的一个极大线性无关组，并用该极大线性无关组表示其余向量。

$$\vec{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\1\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_3=\begin{bmatrix}2\\1\\3\\0\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_4=\begin{bmatrix}2\\5\\-1\\4\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_5=\begin{bmatrix}1\\-1\\3\\-1\end{bmatrix}.$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{bmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&-2&-1&-5&1\\0&0&-2&2&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&2&2&1\\0&1&\frac{1}{2}&\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&0&4&-1\\0&1&0&3&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&3&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\therefore r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=3$

一个极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

$\alpha_4=\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3$

$\alpha_5=0\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$

得分	评阅人

四、（本题 12 分）当 λ 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$$

有惟一解、无解、有无穷多解，在线性方程组有无穷多解时，求出其通解。

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$$

1) $|A|\neq0$，即 $\lambda\neq-2$ 且 $\lambda\neq1$ 时，有唯一解.

2) $\lambda=-2$ 时，$\begin{bmatrix}-2&1&1&1\\1&-2&1&-2\\1&1&-2&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&1&-2\\0&-3&3&-3\\0&3&-3&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&1&-2\\0&-3&3&-3\\0&0&0&3\end{bmatrix}$ 无解

3) $\lambda=1$ 时，$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，$x_1=-x_2-x_3+1$

有无穷多解.

通解为，$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$.

得分	评阅人

五、（本题 12 分）

求可逆矩阵 P 及对角矩阵 Λ，使 $P^{-1}AP=\Lambda$，其中矩阵

$$A=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{bmatrix}$$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&0&0\\0&\lambda-3&-1\\0&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-4)^2(\lambda-2)=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=4,\ \lambda_3=2$$

$$(\lambda_1E-A)X=0,\ \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ \begin{matrix}x_2=x_3\\x_1\text{任意}\end{matrix},\ p_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ p_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$(\lambda_3E-A)X=0,\ \begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-1&-1\\0&-1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix},\ \begin{cases}x_1=0\\x_2=-x_3\end{cases},\ p_3=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

$$\therefore\ P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{bmatrix}\quad \text{s.t.}\quad P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}4&&\\&4&\\&&2\end{bmatrix}.$$

得分	评阅人

六、证明（本题 8 分）

设 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_{m-1}(m>3)$ 线性无关，而 $\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\cdots,\vec{\alpha}_{m-1},\vec{\alpha}_m$ 线性相关，证明；（1）$\vec{\alpha}_m$ 可由 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_{m-1}$ 线性表示；（2）$\vec{\alpha}_1$ 不能由 $\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\cdots,\vec{\alpha}_{m-1},\vec{\alpha}_m$ 线性表示。

重复