2010-2011 学年第二学期高等数学期中测试及数学竞赛试卷（2010 级）

（参加竞赛的同学全做，其他同学只做一、二大题）

一、填空题（10×6 分）

1. 设$\vec{a}=(2,1,-2)$，$\vec{b}=(1,-1,-1)$，则$(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})=$______，$(3\vec{a}-5\vec{b})\times(5\vec{a}-8\vec{b})=$

   ____________。

2. 已知平面π过直线$l_1: x=1, y=1+t, z=2+t$，且平面π平行另一直线$l_2: x=y=z$，则平面π的方程为__________________________。

3. 设曲面为xOy坐标面上曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$绕$y$轴一周所得，则曲面名称是________________________，曲面的方程是____________________________。

4. 直线$L:\begin{cases}2x-y+z-1=0\\ x+y-z+1=0\end{cases}$在平面$\pi: x+2y-z=0$上的投影直线$L_0$的方程为__________________。

5. 设$z=(1+xy)^y$，则$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=$____________，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}=$______________。

6. 曲线$x=1, z=\sqrt{1+x^2+y^2}$在点$(1,1,\sqrt{3})$处的切线方程为________________________。

7. 设F可微，$z=z(x,y)$由方程$F(x-z,y-z)=0$所确定，则$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$____________。

8. f连续且$f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$，$D: y=0, y=x^2, x=1$所围，则$f(x,y)=$

   ______________。

9. 交换积分次序$\int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y)\,dx=$____。

10. $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy\int_0^y e^{-(x^2+y^2)}\,dx+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx=$_____________________________。

二、计算题（4×10 分）

1. 设$z=f(xy,g(x))$，f具二阶连续偏导，$g(x)$可导，且在$x=1$处取得极值$g(1)=1$，求$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\ y=1}}$。

2. 求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值。

3. 计算二重积分 $\iint\limits_D (x+y)^3 dxdy$，其中 D 由曲线 $x=\sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x+\sqrt{2}y=0$ 及 $x-\sqrt{2}y=0$ 围成。

4. 设 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的下侧 $(R>0)$，求 $\iint\limits_\Sigma y^2z^2dydz+zdxdy$ 。

三、数学竞赛加题（5×20 分）

1. 1）求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$；

2）求导：$\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=\int_0^{t^2}\ln(1+u)\,du \end{cases}$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

2. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，其中 $g(x)$ 具二阶连续导数，且 $g(0)=1$，$g'(0)=-1$，$g''(0)=3$

，1）求 $f'(x)$；2）讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续性。

3. 计算 1）设$\int xf(x)dx=\arcsin x+C$，求$\int\frac{1}{f(x)}dx$；2）$\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,dx$。

4. 设$f(x)$在$[0,1]$上具有连续导数，且$f(0)=0$，$f(1)=\frac{1}{3}$，证明：存在$\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$。

5. 已知$f(x)$在$[0,1]$上可导，且$0<f'(x)<1$，$f(0)=0$，求证：$\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2>\int_0^1[f(x)]^3dx$。

参考答案：

一、

1. 第一空 3 ；第二空 $(-3,0,-3)$

2. $y-z+1=0$

3. 第一空 旋转单叶双曲面；第二空 $\dfrac{x^2+z^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$

4. $\begin{cases}3x-y+z-1=0\\x+2y-z=0\end{cases}$

5. 第一空 1 ；第二空 $2\ln 2+1$

6. $\begin{cases}x=1\\y-\sqrt{3}z+2=0\end{cases}$

7. 1

8. $xy+\dfrac{1}{8}$

9. $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)\,dy$

10. $\dfrac{\pi}{8}\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$

二、

1. $f'_{1(1,1)}+f''_{11(1,1)}$

2. 极小值 $f\left(0,\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{e}$

3. $\dfrac{14}{15}$

4. $\dfrac{2}{3}\pi R^3$

三、

1. 1）$e^{-\frac{1}{2}}$ 2）$(1+t^2)\left[\ln(1+t^2)+1\right]$

2. 1) $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{xg'(x)+xe^{-x}-g(x)+e^{-x}}{x^2}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 2）连续（讨论 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性）

3. 1）$-\dfrac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C$ 2）-4π