2009-2010 学年第二学期高等数学期中测试及数学竞赛试卷（2009 级）

（参加竞赛的同学全做，其他同学只做一、二大题）

一、填空题（10×4 分）

1. 设 $\vec{a}=(3,2,-1)$，$\vec{b}=(4,-1,3)$，则 $\vec{a}\cdot\vec{i}+\vec{b}\cdot\vec{k}=$__________，$|\vec{a}\times\vec{b}|=$____________。

2. 已知平面与两直线 $l_1: x=1, y=1+t, z=2+t$，$l_2:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 平行，且过原点，则该平面的方程为________________________。

3. 曲线 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1\\ z=0\end{cases}$ 绕 x 轴一周的旋转面的方程是________________。

4. 设 $z=(1+xy)^y$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=$___________，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}=$_____________。

5. 在曲线 $x=t, y=-t^2, z=t^3$ 的所有切线中，与平面 $x+2y+z-4=0$ 平行的切线有______条，切点分别为_________________________________。

6. 由 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$，则 $\left.dz\right|_{(1,0,-1)}=$__________________。

7. 在点 $(4,2,1)$ 处，$U=z\sqrt{x^2-y^2}$ 沿方向 $\vec{l}=(2,1,-1)$ 的方向导数 $\left.\dfrac{\partial U}{\partial l}\right|_{(4,2,1)}=$____________。

8. 设 $D: 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}, 0\le y\le\dfrac{\pi}{2}$，则 $\iint\limits_D \sin(x+y)\,dxdy=$______________。

9. 交换积分次序 $\int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y)\,dx=$____。

10. $\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x^2+y^2)\,dy$ 的极坐标形式为__________________________。

二、计算题（4×15 分）

1. 设 f 具二阶连续偏导数，g 具二阶连续导数，$z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{y}{x}\right)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

2. 求直线 $L:\begin{cases}2x-y+z-1=0\\ x+y-z+1=0\end{cases}$ 在平面 $\pi: x+2y-z=0$ 上的投影直线 L_0 的方程。

3. 横断面为半圆形的正柱形无盖容器，其表面积为定数 $S\ (S>0)$，应如何选择尺寸，方可使此容器的容积最大。

4. 求球体 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 被圆柱 $x^2+y^2=Rx$ 所截出部分的立体体积 V 。

三、数学竞赛加题（5×20 分）

1. 求极限：1） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$；　　2） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$。

2. 讨论 $f(x)=\begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ x^3, & x\le 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续性与可导性及 $f'(x)$ 的连续性。

3. 积分计算 1）$\int\dfrac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$； 2）$\int_{\frac{1}{2}}^{1}e^{\sqrt{2x-1}}\,dx$。

4. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$，证明：在 $(-1,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f'''(\xi)=3$。

5. 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调减少且连续，$f(1)>0$，求证：$\dfrac{\int_0^1 xf^2(x)\,dx}{\int_0^1 xf(x)\,dx} \le \dfrac{\int_0^1 f^2(x)\,dx}{\int_0^1 f(x)\,dx}$。

参考答案

一、

1. 第一空 6 ；第二空 $3\sqrt{35}$

2.　$x-y+z=0$

3.　$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2+z^2}{16}=1$

4.　第一空 1 ；第二空 $2\ln 2+1$

5.　第一空 2 ；第二空 $(1,-1,1),\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{9},\frac{1}{27}\right)$

6.　$dx-\sqrt{2}dy$

7.　$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

8.　2

9.　$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)\,dy$

10.　$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1} f\left(r^2\right)\cdot r\,dr$

二、

1.　$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+\frac{1}{y}f_2'-\frac{y}{x^2}g'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+xyf_{11}''-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^3}f_{22}''-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''$$

2.　$\begin{cases}3x-y+z-1=0\\ x+2y-z=0\end{cases}$

3.　容器横断面半径 $r=\sqrt{\frac{2S}{3\pi}}$，高 $h=\frac{\pi}{\pi+2}\sqrt{\frac{2S}{3\pi}}$ 时，容积最大

4.　$\frac{2}{3}\pi R^3-\frac{8}{9}R^3$

三、

1.　1）1　　提示：夹逼准则

　　2）$-\frac{1}{2}$

2.　$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续；

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}\ , & x>0\\ 3x^2\ , & x\le 0\end{cases}$$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续

注意：使用左、右导数来计算 $f'(0)$

3. 1）$\arctan\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C$　　提示：令 $x=\tan t$

 2）1

4. 提示：泰勒公式和介值定理

5. 提示：考虑 $F(x)=\int_0^x tf^2(t)\,dt\cdot\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x tf(t)\,dt\cdot\int_0^x f^2(t)\,dt$ 的单调性