五、$\frac{i}{n^2+n+n} \le \frac{i}{n^2+n+i} \le \frac{i}{n^2+n+1} \ (i=1,2,\cdots)$，所以

$$\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2+n+n} \le \frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n} \le \frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2+n+1}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2+n+n}=\frac{1}{2}$， $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2+n+1}=\frac{1}{2}$ 由夹逼准则得：

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}$。

六、$f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(1+\frac{\sin t-\sin x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{\sin t-\sin x}\cdot\frac{x}{\sin x}}=e^{\frac{x}{\sin x}}$，间断点为 $x=k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$，

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=e$，所以 $x=0$ 是第一类(可去)间断点； $\lim\limits_{x\to k\pi}f(x)$ 不存在($k\neq0$)，所以

$x=k\pi(k\neq0)$ 是第二类间断点。

七、设 $f(a+0)>0,f(b-0)<0$，由极限保号性，存在 a 的右邻域 $(a,a+\delta_1)$，当 $x\in(a,a+\delta_1)$，有 $f(x)>0$ 。同理存在 b 的左邻域 $(b-\delta_2,b)$，当 $x\in(b-\delta_2,b)$，有 $f(x)<0$ 。所以分别取 $x_1\in(a,a+\delta_1),x_2\in(b-\delta_2,b)$，使得 $f(x_1)>0,f(x_2)<0$，。$f(x)$ 在闭区间 $[x_1,x_2]$ 上连续，由零点定理存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$。

八、函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 内连续，故 $f(x)$ 有最大值。设 $f'_+(a)>0,f'_-(b)<0$，因为 $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_+(a)>0$，由极限保号性，存在 a 的右邻域 $(a,a+\delta_1)$ 的点 x_1，使得 $\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}>0$，且由于 $x_1>a$ 得 $f(x_1)>f(a)$，同理由 $\lim\limits_{x\to b-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=f'_-(b)<0$，存在 $x_2\in(b-\delta_2,b)$ 有 $\frac{f(x_2)-f(b)}{x_2-b}<0$ 且由于 $x_2<b$ 得 $f(x_2)>f(b)$，这说明 $f(a),f(b)$ 不会是最大值，$f(x)$ 的最大值只能在 (a,b) 内取得，从而这最大值是极大值。设 $\xi\in(a,b)$，$f(\xi)$ 是最大值，由 Fermat 定理 $f'(\xi)=0$。

2014 级试卷

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1.下述说法中，（　　）与 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的定义等价。

A. $\forall\varepsilon\in(0,1)$, $\exists N$, 当$n\ge N$时,有$|x_n-a|\le 100\varepsilon$

B. $\forall\varepsilon>1$, $\exists N$, 当$n>N$时,有$|x_n-a|<\varepsilon$

C. $\forall N$, $\exists\varepsilon>0$, 当$n>N$时,有$|x_n-a|<\varepsilon$

D. $\exists N$, $\forall\varepsilon>0$, 当$n>N$时,有$|x_n-a|<\varepsilon$

2.若$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则下列断言正确的是（　　）。

A. 若x_n发散，则y_n必发散　　B. 若x_n无界，则y_n必有界

C. 若x_n有界，则y_n必为无穷小　D. 若$1/x_n$为无穷小，则y_n必为无穷小

3. 设$f(x)$可导, 且$f'(x_0)=1/2$, 则当$\Delta x\to 0$时，$f(x)$在点x_0处的微分dy是(　　)。

A. 与Δx等价的无穷小　　B. 与Δx同阶但不等价的无穷小

C. 与Δx低阶的无穷小　　D. 与Δx高阶的无穷小

4. 设$F(x)=\begin{cases}f(x)/x, x\ne 0\\ f(0), \quad x=0\end{cases}$，其中$f(x)$在点$x=0$处可导，且$f'(0)\ne 0$，$f(0)=0$，则$x=0$是$F(x)$的（　　）。

A. 连续点　B. 第一类间断点　C. 第二类间断点　D. 不能确定

5.已知$f(x)$具有任意阶导数，且$f'(x)=[f(x)]^2$，则n阶导数$f^{(n)}(x)$是(　　)。

A. $[f(x)]^{2n}$　B. $n[f(x)]^{n+1}$　C. $n![f(x)]^{n+1}$　D. $n![f(x)]^{2n}$

二、填空题（每小题3分，共15分）:

1. 设$f(\sin\frac{x}{2})=1+\cos x$，则$f(\cos x)=$ __________。

2. 当$x\to 0$时，$x-\sin x$是x的______阶无穷小(数量阶)。

3. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$ ______。　4. 设$f(\frac{x}{2})=\sin x$，则$f'(f(x))=$ __________。

5. d(______)$=\sec^2 3xdx$，括号内是所有可能成立的函数。

三、试解下列各题（每小题5分，共40分）

1、用极限定义证明$\lim\limits_{x\to -3}x^2=9$　。　　2、求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$。

3、求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^2(e^x-1)}$。

4、试确定a,b的值，使$f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$有无穷间断点$x=0$和可去间断点$x=1$。

5、设$y=\sqrt[3]{x\ln x\sqrt{1-\sin x}}$，求$y'$。

6、设函数$y=y(x)$由方程$\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$确定，求$dy|_{x=0}$。

7、设$\begin{cases}x=1+t^2\\y=\sec t\end{cases}$，求$y',y''$。

四、（7分）设$f(x)=|x-1|\ln(1+x^2)$，试讨论$f(x)$在点$x=1$处的连续性与可导性。

五、（7分）求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^3+1}+\dfrac{2^2}{n^3+2^2}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3+n^2}\right)$。

六、（7分）设曲线$y=f(x)$在原点与曲线$y=\sin x$相切，试求极限$\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{2}}\sqrt{f(\frac{2}{n})}$。

七、（6分）设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$，证明存在$\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得$f(\xi)+\xi=0$。

八、（8分）设$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，在区间$(0,1)$内可导，且$f(0)=f(1)=0$，$f(1/2)=1$，证明：（1）存在$\eta\in(1/2,1)$，使$f(\eta)=\eta$；（2）对任意实数λ，必存在$\xi\in(0,\eta)$，使$f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$。

2014级参考答案

一、ADBBC 。 二、1. $2\sin^2 x$；2. 3阶；3. $e^{-\frac{1}{2}}$；4. $2\cos 2(\sin 2x)$；5. $\dfrac{1}{3}\tan 3x+c$。

三、1、$\because x\to-3,\therefore$ 限制 $-4<x<-2$。对于$\forall\varepsilon>0$，要使得$|x^2-9|=|x+3||x-3|<7|x+3|<\varepsilon$，只要$|x+3|<\dfrac{\varepsilon}{7}$，取$\delta=\min\left\{\dfrac{\varepsilon}{7},1\right\}$，则当$0<|x+3|<\delta$时，有$|x^2-9|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{x\to-3}x^2=9$。

2、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos x}(e^{1-\cos x}-1)}{\frac{1}{3}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{3}x^2}=\dfrac{3}{2}e$。

3、原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^2x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3}=\frac{1}{4}$$

4、由于$\lim\limits_{x\to 0}(e^x-b)=1-b$，如$x=0$是无穷间断点必须$\lim\limits_{x\to 0}(x-a)(x-1)=0$即$a=0$，

又$\lim\limits_{x\to 1}(x-a)(x-1)=0$，如$x=1$是可去间断点必须$\lim\limits_{x\to 1}(e^x-b)=0$即$b=e$。

5、$\ln y=\dfrac{1}{3}\ln x+\dfrac{1}{3}\ln\ln x+\dfrac{1}{6}\ln(1-\sin x)$

$$y'=\sqrt[3]{x\ln x\sqrt{1-\sin x}}\left(\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x\ln x}+\frac{-\cos x}{6(1-\sin x)}\right)$$

6、$y'=\dfrac{(x^2+y)(3x^2y+\cos x)-2x}{1-x^3(x^2+y)}$，将$x=0$代入原方程得$y=1, y'(0)=1$，$dy|_{x=0}=dx$。

7、$y'=\dfrac{\sec t\tan t}{2t}$，$y''=\dfrac{t(\sec t\tan^2 t+\sec^3 t)-\sec t\tan t}{4t^3}$。

四、$\lim\limits_{x\to 1}|x-1|\ln(1+x^2)=0=f(1)$，所以连续；$\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\ln 2=f'_+(1)$，

$\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-1}=-\ln 2=f'_-(1)\neq f'_+(1)$，所以不可导。

五、由于$\dfrac{1}{n^3+n^2}\le\dfrac{1}{n^3+i^2}\le\dfrac{1}{n^3+1}$，$\dfrac{\sum i^2}{n^3+n^2}<\dfrac{1}{n^3+1}+\dfrac{2^2}{n^3+2^2}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3+n^2}<\dfrac{\sum i^2}{n^3+1}$

而$\dfrac{\sum i^2}{n^3+n^2}=\dfrac{1}{n^3+n^2}\cdot\dfrac{1}{6}\cdot n(n+1)(2n+1)\to\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{\sum i^2}{n^3+1}=\dfrac{1}{n^3+1}\cdot\dfrac{1}{6}\cdot n(n+1)(2n+1)\to\dfrac{1}{3}$

由夹逼准则得：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^3+1}+\dfrac{2^2}{n^3+2^2}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3+n^2}\right)=\dfrac{1}{3}$

六、因为$y=f(x)$在原点与$y=\sin x$相切，所以$f'(0)=(\sin x)'|_{x=0}=1$,且$f(0)=0$.

原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{f(\frac{2}{n})}{\frac{1}{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{f(0+\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{2}{n}}2}=\sqrt{f'(0)2}=\sqrt{2}$

七、设$F(x)=x+f(x)$，在$(-\infty,+\infty)$上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)=+\infty$，

$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)=-\infty$，所以，$\exists\xi\in(-\infty,,+\infty)$，使得$f(\xi)+\xi=0$。

八、1）$F(x)=f(x)-x$，在区间$[0,1]$上连续，$F(1/2)=f(1/2)-1/2=1/2>0$，

$F(1)=f(1)-1=-1<0$，所以$\exists\eta\in(1/2,1)$，使$F(\eta)=0$；即$f(\eta)=\eta$；

2）$G(x)=(f(x)-x)e^{-\lambda x}$，在区间$[0,\eta]$上连续，$G(0)=f(0)=0$，

$G(\eta)=(f(\eta)-\eta)e^{-\lambda\eta}=0$，由洛尔定理，$\exists\xi\in(0,\eta)$，使

$G'(\xi)=-\lambda(f(\xi)-\xi)e^{-\lambda\xi}+(f'(\xi)-1)e^{-\lambda\xi}=0$,即$f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$。

近五年《高等数学 I》期末试卷

2010 级试卷

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1.设$f(x)=x(x-1)^2(x-2)^3$，则$f'(0)$等于（　）。

$A.\ -6$　　$B.\ 6$　　$C.\ 8$　　$D.\ -8$

2.曲线$y=xe^x$的拐点为（　）。

$A.\ (1,e)$　　$B.\ (-1,e^{-1})$　　$C.\ (-2,-2e^{-2})$　　$D.\ (2,2e^2)$

3. $f(x)$在$[a,b]$上连续是$\int_a^b f(x)dx$存在的(　)。

$A.$充分条件　　$B.$充要条件　　$C.$必要条件　　$D.$既不充分也不必要.

4. $\int_{-a}^{a}(\sin x^2+x\cos x)dx$（　）$\int_{-a}^{a}(\sin x^2+x^2\sin x)dx$。

$A.$不等于　　$B.$等于　　$C.$大于　　$D.$小于

5.假设$P_m(x)$，$Q_n(x)$均为多项式，$Q_n(x)\neq0$，$f(x)=a\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}+b\dfrac{P_m(\sin x)}{Q_n(\cos x)}$,则下述命题正确的是(　)。(其中$a,b$为常数)