72

2016—2017 学年第二学期《线性代数》课内考试卷（A 卷）

授课班号______ 年级专业 机电学院 ____ 学号____________ 姓名________________

题号	一	二	三	四	五	六	总分	审核
题分	24	32	12	12	12	8		
得分								

得分	评阅人

一、填空（共 24 分，每空格 3 分）

1. 在五阶行列式 D 中，项 $a_{13}a_{24}a_{32}a_{45}a_{51}$ 前的符号应取 __正__ 号。

2. 已知四阶行列式 D 中第 2 列元素依次为 1，2，3，4，它们对应的代数余子式依次为 2，3，4，5，则该行列式 $D=$ __40__。

3. 设 $A=\begin{bmatrix}2&1\\-1&2\end{bmatrix}$，则 $\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|=$ __$\frac{84}{45}$__。

4. $r_1 \leftrightarrow r_2$ $\quad$ $c_2 \leftrightarrow c_3$

$$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{2017}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^{2016}=\begin{bmatrix}3&4&5\\2&3&4\\1&2&3\end{bmatrix}$$。

5. 已知 $A=\begin{bmatrix}a&2&-1&1\\-1&1&0&1\\-5&0&1&1\end{bmatrix}$ 的秩为 2，则 $a=$ __3__。

6. 若 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots\vec{\alpha}_s$ 线性相关，A 为 $m\times n$ 阶矩阵，则 $A\vec{\alpha}_1,A\vec{\alpha}_2,\cdots A\vec{\alpha}_s$ 线性 __相关__。

7. 已知四元线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的三个解向量为 $\vec{\eta}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\vec{\eta}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix},\vec{\eta}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$，且 $r(A)=2$，则方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的通解 $\vec{x}=$ __$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\2\\3\\4\end{bmatrix}$__。

8. 设 $\vec{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},\vec{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ 是 A 的对应于特征值 2 的特征向量，则 $A(\vec{\alpha}_1+2\vec{\alpha}_2)=$ __$\begin{bmatrix}6\\4\\4\end{bmatrix}$__。

得分	评阅人

二、计算（共32分，每小题8分）

1. 计算n阶行列式$\begin{vmatrix} 2 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$化上三角 的值。2. 设$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，求$AB$及$BA$.

$$D=[2+3(n-1)]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 3 & 2 & \cdots & 3 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 3 & 3 & \cdots & 2 \end{vmatrix}=(3n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}\cdot(3n-1)$$

$$AB=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

3. 已知矩阵$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$，矩阵$X$满足$AX+B=2X$，求矩阵$X$.

$$(A-2E)X=-B \Rightarrow X=(A-2E)^{-1}\cdot(-B)$$

$$(A-2E,-B)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \therefore X=\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

4. 设三阶矩阵A的特征值分别为4,5,6，求（1）$A^2-5A+6E$的特征值；（2）$|A^2-5A+6E|$。

1) 设A有特征值λ，则$A^2-5A+6E$有特征值$\lambda^2-5\lambda+6$，

将$\lambda=4,5,6$分别代入，得：2, 6, 12

2) $|A^2-5A+6E| = 2\times6\times12=144$

7

得分	评阅人

三、（本题 12 分）

求下列向量组的**秩**和它的一个**极大线性无关组**，并用该极大线性无关组**表**示其余向量。

$$\vec{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\4\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\3\\1\\2\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_3=\begin{bmatrix}3\\0\\7\\14\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_4=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\0\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_5=\begin{bmatrix}2\\1\\5\\6\end{bmatrix}.$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-1&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&0&3\\0&1&1&0&1\\0&2&2&-4&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-4&-4\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&0&1\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$ (行最简形)

$\therefore\ r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=3$，一个极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$

$\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2+0\alpha_4$，$\alpha_5=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4$

得分	评阅人

四、（本题 12 分）讨论 a、b 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=1\\2x_1+4x_2-2x_3=b\\2x_1+3x_2+ax_3=0\end{cases}$$

有惟一解、无解、有无穷多解；在线性方程组有无穷多解时，求出其通解。

重复

得分	评阅人

五、（本题 12 分）

（1）求矩阵A的特征值与特征向量；（2）求可逆矩阵 P 及对角矩阵 Λ，使 $P^{-1}AP=\Lambda$，其中矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}。$$

1)
$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-1 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-4)=0 \Rightarrow \lambda_1=-2,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=4$$

$$(\lambda_1E-A)X=0:\ \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{cases} x_1=\frac{x_3}{2} \\ x_2=x_3 \end{cases},\ \therefore k_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}\ (k_1\neq 0)$$

$$(\lambda_2E-A)X=0:\ \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{cases} x_1=-x_3 \\ x_2=-\frac{1}{2}x_3 \end{cases},\ \therefore k_2\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\ (k_2\neq 0)$$

$$(\lambda_3E-A)X=0:\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{cases} x_1=2x_3 \\ x_2=-2x_3 \end{cases},\ \therefore k_3\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\ (k_3\neq 0)$$

2)
$$P=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\ \text{s.t.}\ P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{bmatrix}$$

得分	评阅人

六、证明（本题 8 分）

设向量组 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_{s-1}$ 线性相关，向量组 $\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s$ 线性无关，证明：(1) $\vec{\alpha}_1$ 能够由 $\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_{s-1}$ 线性表示；(2) $\vec{\alpha}_s$ 不能由 $\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_{s-1}$ 线性表示。

(1) 由 $\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，可得部分组 $\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性无关.

又∵ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性相关 ∴ α_1 可由 $\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性表示.

(2) 若 α_s 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性表示，则可设。

$\alpha_s=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{s-1}\alpha_{s-1}$ (*)，又由(1)，设 $\alpha_1=\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_{s-1}\alpha_{s-1}$ 代入(*).

$\alpha_s=(k_1\lambda_2+k_2)\alpha_2+\cdots+(k_1\lambda_{s-1}+k_{s-1})\alpha_{s-1}$.

即 α_s 可由 $\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性表示. 从而 $\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关.

与已知条件"$\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关"矛盾. ∴ α_s 不能由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性表示.