2003-2004 学年第二学期高等数学期中测试及数学竞赛试卷（2003 级）

一、填空题（12×4 分）

1. 设 $\vec{a}=(3,-1,-2)$，$\vec{b}=(1,2,-1)$，则 $(-2\vec{a})\cdot(3\vec{b})=$______，$\vec{a}\times(2\vec{b})=$______。

2. 过原点且与两直线 $x+1=\dfrac{y+2}{2}=z-1$ 和 $\begin{cases}x=1\\ y=-1+t\\ z=2+t\end{cases}$ 平行的平面方程是______。

3. $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x+z=a$ 的交线在 xOy 面上的投影曲线方程是______。

4. 曲线 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴一周的旋转曲面的方程是______。

5. 设 $U=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$，则梯度 $gradU=$______。

6. 设 $U=\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{z}}$，则 $dU=$______。

7. 曲面 $2xy+z-e^z=3$ 在点 $M(1,2,0)$ 处的切平面方程为______。

8. $\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}\,dy=$______。

9. $\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f\left(x^2+y^2\right)dy$ 的极坐标形式为______。

10. 设 Ω 由 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围，则 $\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz=$______。

11. 设 $L: y=-\sqrt{1-x^2}$，则 $\int_L\left(x^2+y^2\right)ds=$______。

12. 设 Σ 为 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$ 在第一卦限的部分，则 $\iint\limits_{\Sigma}\left(z+2x+\dfrac{4y}{3}\right)dS=$______。

二、计算题（4×8 分）

1. 设 $z=g(xy)+f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

2. 设D由$xy=1$，$y=x$，$x=2$所围，求$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,dxdy$。

3. 计算$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$，其中$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\le y\le x, x^2+y^2\le 2x\right\}$。

4. 计算$\iiint\limits_\Omega (x+z)\,dv$，$\Omega$为$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$与$z=\sqrt{x^2+y^2}$所围立体域。

三、求内接于半径为 R 的球且有最大体积的长方体的体积。（10 分）

四、（任选做一题，10 分）

1. 求 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n(n-1)x^{n-2}$ 的和函数及 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2-n}{2^n}$ 的和；

2. $S: x^2+y^2+z^2=4\ (z\geq 0)$ 外侧，求 $\iint_S yzdzdx+2dxdy$ 。

五、竞赛加题（5×10 分）

1. 设 $x_1=10$，$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求出极限的值。

2. 设 $f(x)$ 具二阶连续导数，$f(a)=0$，$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x-a}, & x\neq a\\ f'(a), & x=a\end{cases}$，求 $g'(x)$，并证明 $g'(x)$ 在 $x=a$ 处连续。

3. 证明：$e<a<b<e^2$ 时，$\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$。

4. 计算：1）$\int \frac{2\ln x+1}{x^3(\ln x)^2}dx$；

2）$f(x)$连续，$\int_0^x tf(x-t)dt=1-\cos x$，求$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$。

5. 已知$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 2 \\ 2x-2, & 2<x<+\infty \end{cases}$，$S(t)$是由$y=f(x)$，$y=0$，$x=t\ (t>0)$三条曲线所围的图形的面积，求$S(t)$的表达式及$S'(t)$。

参考答案

一、

1. 第一空 -18 ；第二空 $(10,2,14)$

2. $x-y+z=0$

3. $\begin{cases} 2x^2-2ax+y^2=0 \\ z=0 \end{cases}$

4. $\dfrac{x^2+z^2}{4}+y^2=1$

5. $\dfrac{2}{x^2+y^2+z^2}(x,y,z)$

6. $-\dfrac{1}{xz}\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{z}}dx+\dfrac{1}{yz}\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{z}}dy-\dfrac{1}{z^2}\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{z}}\ln\dfrac{y}{x}dz$

7. $2x+y-4=0$

8. $\dfrac{1}{2}\left(1-e^{-4}\right)$

9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}f\left(r^2\right)\cdot r\,dr$

10. $\dfrac{4}{5}\pi$

11. π

12. $4\sqrt{61}$

二、

1. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yg'+yf_1'+\dfrac{1}{y}f_2'$， $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=g'+xyg''+f_1'+xyf_{11}''-\dfrac{x}{y}f_{12}''-\dfrac{1}{y^2}f_2'+\dfrac{x}{y}f_{21}''-\dfrac{x}{y^3}f_{22}''$

2. $\dfrac{9}{4}$

3. $\dfrac{10}{9}\sqrt{2}$

4. $\dfrac{\pi}{8}$

三、长方体的长、宽、高都为$\dfrac{2}{3}\sqrt{3}R$时，有最大体积$\dfrac{8}{9}\sqrt{3}R^3$

四、

1. $S(x)=\dfrac{2}{(1+x)^3},-1<x<1$；$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2-n}{2^n}=\dfrac{1}{4}S\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{4}{27}$

2. 12π　　提示：高斯公式

五、

1. $\{x_n\}$单调有界，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$

2. $g'(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-a)f'(x)-f(x)}{(x-a)^2}, & x\neq a\\ \dfrac{f''(a)}{2}, & x=a\end{cases}$

3. 提示：由拉格朗日中值定理，$\ln^2 b-\ln^2 a=\dfrac{2\ln\xi}{\xi}(b-a)$，

   只需证明$\dfrac{2\ln x}{x}>\dfrac{4}{e^2},e<x<e^2$

4. 1）$-\dfrac{1}{x^2\ln x}+C$　　提示：考虑$\int\dfrac{2x\ln x+x}{(x^2\ln x)^2}dx$

   2）1　　提示：令$x-t=u$

5. $S(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}t^2, & 0<t\leq 2\\ t^2-2t+2, & t>2\end{cases}$；

   $S'(t)=\begin{cases}t, & 0<t\leq 2\\ 2t-2, & t>2\end{cases}$