2007-2008 学年第二学期《高等数学》期末试卷

一、填空题（每小题 3 分，共 36 分）

1. 一平面通过点 $M(1,2,3)$ 且平行于平面 $x+2y+3z=10$，它的方程为 $x+2y+3z=14$。

2. xOy 坐标面上曲线 $x^2+y^2=2y$ 绕 y 轴的旋转曲面方程为 $x^2+y^2+z^2=2y$。

3. 设函数 $z=xy+\dfrac{x}{y}$，则全微分 $dz=$ $(y+\frac{1}{y})dx+(x-\frac{x}{y^2})dy$。

4. 函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 在点 $(1,1)$ 处的梯度为 $(1,1)$。

5. 设 $z=z(x,y)$ 为由方程 $z=e^{-xy}+e^z$ 所确定的隐函数，则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ $\dfrac{xe^{-xy}}{e^z-1}$。

6. 二次积分 $\int_0^1 dx\int_0^x f(\sqrt{x^2+y^2})\,dy$ 的极坐标形式为 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{\sec\theta} f(r)\cdot r\,dr$。

7. 设周期为 2 的函数 $f(x)$ 在一个周期内的表达式为 $f(x)=\begin{cases}x, & 0.5<x<1\\ 1, & -1\le x\le 0.5\end{cases}$，它的傅立叶级数的和函数为 $S(x)$，则 $S(-3.5)=$ $\frac{3}{4}$。

8. 设 L 的方程为 $y=-\sqrt{9-x^2}$，则曲线积分 $\int_L (x^2+y^2)\,ds=$ 27π。

9. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{n}$ 的收敛区间是 $(1,3)$。

10. 函数 $f(x)=x\sin x$ 的麦克劳林级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+2}$。

11. 已知二阶常系数线性齐次微分方程的特征根全为 1，则其对应的微分方程为 $y''-2y'+y=0$。

12. 微分方程 $y'+2xy=x$ 满足条件 $y(1)=\dfrac{1}{2}$ 的特解为 $y=\frac{1}{2}$。

二、计算题（每小题 6 分，共 24 分）

1. 设函数 $z=z(x,y)$ 为由方程 $f(x-z,y-z)=0$ 所确定的隐函数，其中 $f(u,v)$ 具有连续的偏导数且 $\dfrac{\partial f}{\partial u}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\neq 0$。求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 的值。

设 $F(x,y,z)=f(x-z,y-z)$，则 $F_x=f_1'$，$F_y=f_2'$，$F_z=-f_1'-f_2'$

从而 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_x}{F_z}-\dfrac{F_y}{F_z}=-\dfrac{f_1'}{-f_1'-f_2'}-\dfrac{f_2'}{-f_1'-f_2'}=1$.

2. 求微分方程 $xy' + y = x\ln x$ 的通解。

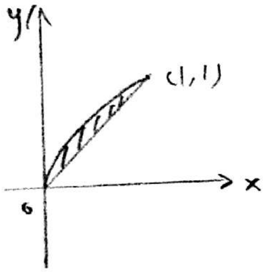
$$(xy)' = x\ln x$$

$$\Rightarrow xy = \int x\ln x\,dx = \int \ln x\,d\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

$\therefore$ 通解：$y = \frac{x}{2}\ln x - \frac{x}{4} + \frac{C}{x}$.

3. 计算二重积分 $\iint\limits_{D} \sin\frac{x}{y}\,d\sigma$，其中 D 是以直线 $y=x$ 和曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 为边界的曲边三角形区域（第一象限）。



$$\text{原式} = \int_0^1 dy \int_{y^3}^{y} \sin\frac{x}{y}\,dx$$

$$= \int_0^1 (y\cos y^2 - y\cos 1)\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\sin y^2 - \frac{\cos 1}{2} y^2 \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}(\sin 1 - \cos 1)$$

（注：$\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt[3]{x}} \sin\frac{x}{y}\,dy$ 无法计算）

4. 计算曲线积分 $\int_{\Gamma} x\,dx + y\,dy + (x+y-1)\,dz$，其中 Γ 是由点 $(1,1,1)$ 到点 $(1,2,3)$ 的直线段。

$$\Gamma: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1+t \\ z = 1+2t \end{cases} \quad t: 0 \to 1$$

$$\text{原式} = \int_0^1 [(1+t) + (1+1+t-1)\cdot 2]\,dt = \int_0^1 3(1+t)\,dt = \frac{9}{2}.$$

三、综合题（每小题 10 分，共 40 分）

1. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域与和函数 $S(x)$。

$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{(-1)^{n}}{2n+1}x^{2n+2}}{\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}}\right|=x^2$，$\rho<1$，即 $-1<x<1$ 时收敛；$\rho>1$ 时发散.

$\therefore R=1$.

又 $x=\pm1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$，由 Leibniz 判别法，收敛.

$\therefore$ 收敛域为 $[-1,1]$.

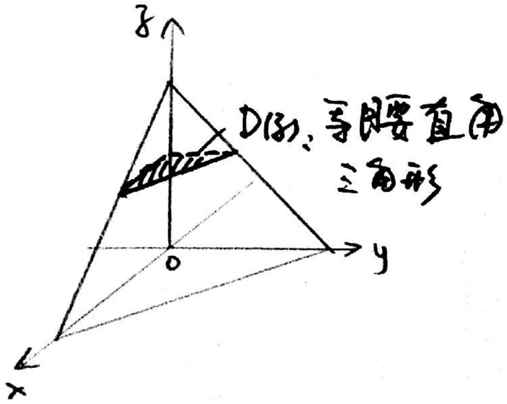
令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$，$-1\le x\le 1$；$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$，$-1<x<1$.

则 $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2}$，$-1<x<1$，

$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\,dt=0+\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\arctan x$，$-1<x<1$.

又 $\because S(x)\in C[-1,1]$. $\therefore S(x)=x\arctan x$，$-1\le x\le 1$.

2. 用高斯公式计算曲面积分 $\oiint_{\Sigma} xy\,dydz+yz\,dzdx+zx\,dxdy$，其中 Σ 是三个坐标面和平面 $x+y+z=1$ 所围成的四面体的边界的外侧。



原式 $=\iiint_{\Omega}(y+z+x)\,dxdydz$

$=3\iiint_{\Omega}z\,dxdydz$（轮换对称性）

$=3\int_0^1 dz\iint_{D(z)}z\,dxdy$

$=3\int_0^1 z\cdot\frac{1}{2}(1-z)^2\,dz$

$=\frac{1}{8}$

（或 $3\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}z\,dz=\cdots$）

3. 求曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ (a>0,b>0,c>0)$在第一卦限的切平面，使该切平面与三个坐标面围成的四面体体积最小，并写出该四面体的体积。

过曲面上任意一点(x,y,z)的切平面为$\frac{2x}{a^2}(X-x)+\frac{2y}{b^2}(Y-y)+\frac{2z}{c^2}(Z-z)=0$

即：$\frac{X}{\frac{a^2}{x}}+\frac{Y}{\frac{b^2}{y}}+\frac{Z}{\frac{c^2}{z}}=1$，∴四面体体积 $V=\frac{a^2b^2c^2}{6xyz}$ $(x,y,z>0)$

设$L(x,y,z,\lambda)=\ln x+\ln y+\ln z+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$

（注：$\ln x+\ln y+\ln z=\ln(xyz)$与$xyz$极值点相同）

由 $\begin{cases} L_x=\frac{1}{x}+\frac{2\lambda x}{a^2}=0 \\ L_y=\frac{1}{y}+\frac{2\lambda y}{b^2}=0 \\ L_z=\frac{1}{z}+\frac{2\lambda z}{c^2}=0 \\ L_\lambda=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \end{cases}$ $(x,y,z>0)$

解得唯一驻点$\left(\frac{a}{\sqrt3},\frac{b}{\sqrt3},\frac{c}{\sqrt3}\right)$，

即为V最小值点，

对应切平面：$\frac{X}{\sqrt3 a}+\frac{Y}{\sqrt3 b}+\frac{Z}{\sqrt3 c}=1$

$V_{min}=\frac{\sqrt3}{2}abc$

4. 已知$f(x)$有二阶连续的导数且$f(0)=0$，$f'(0)=1$，如果积分

$\int_L [x^2-f(x)]y\,dx+[f'(x)+y]\,dy$与路径无关，求$f(x)$。

由题，$x^2-f(x)=f''(x)$

从而 $\begin{cases} f''(x)+f(x)=x^2 & ① \\ f(0)=0,\ f'(0)=1 & ② \end{cases}$

由①：$r^2+1=0\Rightarrow r_{1,2}=\pm i$，设特解$f_{0(x)}=ax^2+bx+c$，

则$f'_{0(x)}=2ax+b$，$f''_{0(x)}=2a$，代入①可得：$a=1,b=0,c=-2$.

∴ $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+x^2-2$

$f'(x)=-C_1\sin x+C_2\cos x+2x$

又由②：$\begin{cases} C_1-2=0 \\ C_2=1 \end{cases}$ ∴$\begin{cases} C_1=2 \\ C_2=1 \end{cases}$

综上：$f(x)=2\cos x+\sin x+x^2-2$.