# 2013-2014学年第二学期《复变函数与积分变换》课内考试卷(A)

授课班号_________年级专业___________学号_____________姓名___________

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 总分 | 审核 |
|---|---|---|---|---|---|
| 题分 | 30 | 30 | 40 | | |
| 得分 | | | | | |

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

一、选择与填空（每小题3分，共30分）

1. 下列命题中正确的是　　　　　　　　　　　　（ ）

(A) $-1$的幅角主值是$-\pi$　　(B) 仅存在一个数z，使$z^{-1}=-z$

(C) $|\sin z|\le 1$　　(D) $\frac{1}{i}\overline{z}=\overline{iz}$

2. 设$e^z=1-i$，则$\operatorname{Im} z$等于　　　　　　　　　　　　（ ）

2. 设$e^z=1-i$，则$\operatorname{Im} z$等于　　　　　　　　　　　　（ ）

(A) $-\frac{\pi}{4}$　　(B) $2k\pi-\frac{\pi}{4}$　　(C) $\frac{\pi}{4}$　　(D) $2k\pi+\frac{\pi}{4}$

3. $z=0$为本性奇点的函数是　　　　　　　　　　　　（ ）

(A) $\frac{\sin z}{z}$　　(B) $\frac{1}{z(z-1)^2}$　　(C) $e^{\frac{1}{z}}$　　(D) $\frac{1}{e^z-1}$

4. 下列变换中不正确的是　　　　　　　　　　　　（ ）

(A) $\mathcal{F}[\delta(t)]=1$　　(B) $\mathcal{F}[u(t)]=\frac{1}{jw}+\pi\delta(w)$

(C) $\mathcal{F}^{-1}[2\pi\delta(w)]=1$　　(D) $\mathcal{F}^{-1}[\cos\omega_0(t)]=j\pi[\delta(w-w_0)+\delta(w+w_0)]$

5. 若等式$\frac{x+1+i(y-3)}{5+3i}=1+i$成立，则$(x,y)$的值是__________________

6. 当$a=$________________时，函数$f(z)=a\ln(x^2+y^2)+i\arctan\frac{y}{x}$在$x>0$内解析.

7. $\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{(z-3)^{2014}}dz=$____________________________

8. $\int_0^i ze^z dz=$________________________________

9. $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1+n}{1-ni}+e^{\frac{i}{n}}]=$ ____________________

10. 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n(z-1)^n$ 的收敛圆为____________

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

二、计算题（每小题 6 分，共 30 分）

1. $\sqrt[4]{-1+3i}$

2. $z=\frac{(\cos 3\theta-i\sin 3\theta)^2}{(\cos\theta+i\sin\theta)^3}$，求 $\bar{z}$ 的指数表达式，其中 $\theta$ 是实常数.

2. $z=\frac{(\cos 3\theta-i\sin 3\theta)^2}{(\cos\theta+i\sin\theta)^3}$，求 $\bar{z}$ 的指数表达式，其中 $\theta$ 是实常数.

3. 试判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$ 的收敛性和绝对收敛性.

4. 计算积分$\oint_C \frac{e^z}{(z-1)^2 z}dz$的值，其中$C$为负向圆周$|z|=2$.

5. 把$f(z)=z^2\sin\frac{1}{z}$在$0<|z|<+\infty$内展开成洛朗级数，并计算$\oint_{|z|=1} f(z)dz$的值.

5. 把$f(z)=z^2\sin\frac{1}{z}$在$0<|z|<+\infty$内展开成洛朗级数，并计算$\oint_{|z|=1} f(z)dz$的值.

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

三、解答题（每题 10 分，共 40 分）

1. 在复平面上求解析函数$f(z)$使其虚部$v(x,y)=3x^2y-y^3-2y$.

2. 求函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z+2)}$ 分别在圆环域 (1) $0<|z-1|<3$ (2) $|z-1|>3$ 内的洛朗展开式.

3. 求函数 $te^{-4t}\sin 3t$ 的拉氏变换及 $\dfrac{1}{(s^2+1)(s^2-1)}$ 的拉氏逆变换.

3. 求函数 $te^{-4t}\sin 3t$ 的拉氏变换及 $\dfrac{1}{(s^2+1)(s^2-1)}$ 的拉氏逆变换.

4. 利用拉氏变换求微分方程 $y''+4y=\sin t$ 的满足 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解.

# 2014-2015 学年第一学期《复变函数与积分变换 B》

## 课内考试卷（A 卷）

授课班号________ 专业________ 学号________ 姓名________

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 总分 | 审核 |
|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | |

| 阅卷人 | 得分 |
|---|---|
| | |

一、填空题(每小题 3 分，共 24 分)

1. 复数 $\frac{2i}{-1+i}$ $= 1-i$ 的共轭复数的模为 $\sqrt{2}$ 辐角主值为 $-\frac{\pi}{4}$

2. $\sqrt[3]{-1-i}=$ $\sqrt[6]{2}\left[\cos\frac{-\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{-\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{3}\right]$ $k=0,1,2.$

3. $\oint_{|z|=2}\left(\frac{i}{z-i}+\frac{e^z}{z-3}\right)dz=$ $-2\pi$

4. $\oint_{|z|=2}\frac{1}{z^{n+1}}dz=$ $\begin{cases}2\pi i & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2ni}{1-3ni}=$ $-\frac{2}{3}$.

6. $f(z)=z^{-2}$ 在 $z=1$ 的泰勒级数为 $1-2(z-1)+3(z-1)^2\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(z-1)^{n-1}$

7. $Ln(-1-i)$ 的主值为 $\ln 2+i\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$

8. $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2+4}\right]=$ $\frac{1}{2}e^t\sin 2t$

二、计算题(每小题 6 分，共 36 分)

| 阅卷人 | 得分 |
|---|---|
| | |

1. 解方程 $\sin iz=0$

$\Rightarrow \frac{e^{i\cdot iz}-e^{-i\cdot iz}}{2i}=0$

$\Rightarrow e^{-z}-e^{z}=0$

$\Rightarrow e^{2z}-1=0$

$\Rightarrow 2z=2k\pi i$

$\Rightarrow z=k\pi i,\ k\in Z$

2. 计算 $(1-i)^{1-i}$ 的值

$(1-i)^{1-i}=e^{(1-i)Ln(1-i)}$

$=e^{(1-i)(\ln\sqrt{2}+i(-\frac{\pi}{4}+2k\pi))}$

$=e^{(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2k\pi)+i(-\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}+2k\pi)}$

$=e^{(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2k\pi)+i(-\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4})}$

3. 设 $f(z)=x^2+2xyi$，试讨论 $f(z)$ 在何处可导，何处解析.

$u(x,y)=x^2$，$v(x,y)=2xy$

$u_x=2x \quad v_y=2x$

$u_y=0 \quad v_x=2y$

要 $f(z)$ 可导，必须

$\begin{cases} u_x=v_y \\ u_y=-v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=2x \\ 0=-2y \end{cases} \Rightarrow y=0$

$\therefore f(z)$ 在 $y=0$（直线）上可导.

但处处不解析.

4. 计算积分 $\oint_{|z|=2} z^3 e^{\frac{1}{z}} dz$ 的值.

$e^{\frac{1}{z}} = 1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}\cdots$

$z^3 e^{\frac{1}{z}} = z^3+z^2+\frac{z}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!z}+\cdots$

$\oint_{|z|=2} z^3 e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i\, C_{-1} = 2\pi i\cdot\frac{1}{4!} = \frac{\pi i}{12}$

5. 讨论级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{i^n}{\ln n}$ 的收敛性和绝对收敛性.

$\left|\frac{i^n}{\ln n}\right| = \frac{1}{\ln n}$ $\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 发散. $\therefore$ 级数非绝对收敛.

$\because \sum_{n=2}^{\infty}\frac{i^n}{\ln n} = \frac{-1}{\ln 2}+\frac{-i}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\frac{i}{\ln 5}+\cdots$

$= \left(\frac{-1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 4}+\frac{-1}{\ln 6}+\frac{1}{\ln 8}\right)+i\left(\frac{-1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 5}+\cdots\right)$ 收敛

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{\ln n}$ 条件收敛

6. 求 $F(s)=\dfrac{1}{s^4+5s^2+4}$ 的拉氏逆变换 $f(t)$.

$\because F(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+4}\right)$

$\therefore f(t) = \frac{1}{3}\left(\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)$

三、解答题(每小题 10 分，共 40 分)

| 阅卷人 | 得分 |
|---|---|
| | |

1. 在复平面上求解析函数 $f(z)$ 使其虚部为 $v(x,y)=e^x\sin y+3y$.

法一：$u_x=v_y=e^x\cos y+3 \Rightarrow u(x,y)=e^x\cos y+3x+C(y)$

$u_y=-v_x \Rightarrow -e^x\sin y+C'(y)=-e^x\sin y$

$\Rightarrow C'(y)=0 \Rightarrow C(y)=C$

$\therefore u(x,y)=e^x\cos y+3x+C$

$\Rightarrow f(z)=e^x\cos y+3x+C+i(e^x\sin y+3y)$

法二：$f'(z)=u_x+iv_x=v_y+iv_x=e^x\cos y+3+i(e^x\sin y+0)$

$=e^z+3$

$\therefore f(z)=e^z+3z+C$

2. 求函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z-1)}$ 分别在圆环域 (1) $0<|z|<1$ (2) $|z-1|>1$ 内的洛朗展开式.

(1) $0<|z|<1$ $\quad \dfrac{1}{z-1}=-\dfrac{1}{1-z}=-(1+z+z^2+\cdots)$

$\therefore f(z)=\dfrac{1}{z^2}\cdot\dfrac{1}{z-1}=-\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{z}-1-z\cdots=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^{n-2}}$

(2) $|z-1|>1$ $\quad \dfrac{1}{z^2}=-\left(\dfrac{1}{z}\right)'=-\left(\dfrac{1}{z-1+1}\right)'$

$=-\left(1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3\cdots\right)'$

$=-\left(-1+2(z-1)-3(z-1)^2\cdots\right)$

$\therefore f(z)=\dfrac{1}{z-1}\cdot\dfrac{1}{z^2}=\dfrac{1}{z-1}-2+3(z-1)\cdots$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}n(z-1)^{n-2}$

3. 计算积分 $\oint_C \frac{\sin z}{z^2(1-z)}dz$ 的值，其中 $C$ 为负向圆周 $|z|=2$.

$$\oint_{C^-} \frac{\sin z}{z^2(1-z)} dz = \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{\sin z}{1-z}}{z^2} dz + \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{-\frac{\sin z}{z^2}}{z-1} dz$$

$$= 2\pi i \left(\frac{\sin z}{1-z}\right)'\Big|_{z=0} + 2\pi i \left(-\frac{\sin z}{z^2}\right)\Big|_{z=1}$$

$$= 2\pi i \frac{\cos z\cdot(1-z)+\sin z}{(1-z)^2}\Big|_{z=0} + 2\pi i(-\sin 1)$$

$$= 2\pi i(1-\sin 1)$$

$\therefore$ 原积分 $= 2\pi i(\sin 1 - 1)$

4. 用拉氏变换求微分方程 $y''-2y'+y=0$ 的满足 $y(0)=0, y'(0)=1$ 的特解.

设 $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ 则 $\mathcal{L}[y'(t)] = sY(s) - y(0) = sY(s)$

$\mathcal{L}[y''(t)] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - 1$

原方程两端求拉氏变换得

$$s^2Y(s) - 1 - 2sY(s) + Y(s) = 0$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$\Rightarrow y(t) = e^t t.$$