9

2015－2016 学年第二学期《线性代数》课内考试卷（A 卷）

授课班号 660050401-02 年级专业 机电学院 15 级 学号__________ 姓名__________

题号	一	二	三	四	五	六	总分	审核
题分	24	32	12	12	12	8		
得分								

得分	评阅人

一、填空（共 24 分，每空格 3 分）

1. 在五阶行列式 D 中，项 $a_{13}a_{24}a_{32}a_{45}a_{51}$ 前的符号应取 正 号. 重复

2. 已知 $D=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$，则 $A_{31}+A_{32}-A_{33}=$ 6（其中 A_{ij} 为 D 的代数余子式）.

3. 设 3 阶方阵 A，B 的行列式 $|A|=3$，$|B|=\dfrac{1}{2}$，则 $\left|(|A|B)^{-1}-B^{*}\right|=$ $-\dfrac{1}{108}$.

4. $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{2015}\begin{bmatrix}1&a&1\\1&b&1\\1&c&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{2016}=$ $\begin{bmatrix}1&c&2017\\1&b&2017\\1&a&2017\end{bmatrix}$.

$r_1\leftrightarrow r_3$　　c_3+c_1

5. 已知 $A=\begin{bmatrix}1&c&\cdots&c\\c&1&\cdots&c\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\c&c&\cdots&1\end{bmatrix}$ 的秩为 $n-1(n>3)$，，则 $c=$ $\dfrac{1}{1-n}$.

6. 已知 $\vec{\beta}_1=\vec{\alpha}_1-2\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3,\vec{\beta}_2=\vec{\alpha}_2-2\vec{\alpha}_3+\vec{\alpha}_1,\vec{\beta}_3=\vec{\alpha}_3-2\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2$，且向量组 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$ 线性无关，则向量组 $\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\vec{\beta}_3$ 线性 相关 。 重复

7. 已知矩阵 $A=[\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots\vec{\alpha}_n]$ 的秩 $r(A)=n-1$，且满足 $\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+\cdots+\vec{\alpha}_n=\vec{0}$，$\vec{\alpha}_1+2\vec{\alpha}_2+\cdots+n\vec{\alpha}_n=\vec{b}$，则线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的通解 $\vec{x}=$ $\begin{bmatrix}1\\2\\\vdots\\n\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$.

8. 设 $\vec{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$,是 A 的对应于特征值 2 的特征向量，$\vec{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ 是 A 的对应于特征值 3 的特征向量,则 $A(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2)=$ $\begin{bmatrix}5\\4\\5\end{bmatrix}$.

得分	评阅人

二、计算（共32分，每小题8分）

1. $D=\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x-1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & x+1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x-1 \end{vmatrix}$

2. 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求 A^2 及 $|A^8|$.

$$D \xlongequal{r_1+(r_2+r_3+r_4)} \begin{vmatrix} x & x & x & x \\ -1 & x-1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & x+1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x-1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & x+1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$= x^4$$

$$A^2=\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

直接计算
或分块乘法

$$|A^8| = |A|^8 = (-9)^8 = 9^8$$

$$\text{或 } |A^8| = |A^2|^4 = \left(\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\right)^4$$

$$= (-81)^4 = 9^8$$

3. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 满足 $AX=B+2X$，求 X.

$$(A-2E)X=B \Rightarrow X=(A-2E)^{-1}B$$

$$(A-2E,B)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -5 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

4. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 与矩阵 $B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$ 相似，求 a,b.

$$\begin{cases} tr(A)=tr(B) \\ |A|=|B| \\ |\lambda E-A|=|\lambda E-B| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-1=b+1 \\ -2(a-2)=-2b \\ (\lambda+2)(\lambda^2-a\lambda-\lambda+a-2)=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-2 \end{cases}$$

9'

得分	评阅人

三、(本题 12 分)

求下列向量组的秩和它的一个极大线性无关组，并用该极大线性无关组表示其余向量。

$$\vec{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\1\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_3=\begin{bmatrix}2\\2\\2\\2\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_4=\begin{bmatrix}2\\1\\3\\0\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_5=\begin{bmatrix}2\\5\\-1\\4\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_6=\begin{bmatrix}2\\-1\\5\\0\end{bmatrix}.$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6)=\begin{bmatrix}1&1&2&2&2&2\\0&2&2&1&5&-1\\2&0&2&3&-1&5\\1&1&2&0&4&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&2&2&2&2\\0&2&2&1&5&-1\\0&-2&-2&-1&-5&1\\0&0&0&-2&2&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&2&0&4&0\\0&1&1&\frac{1}{2}&\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&2&0&4&0\\0&1&1&0&3&-1\\0&0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&1\\0&1&1&0&3&-1\\0&0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\therefore r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6)=3$

一个极大无关组为：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$.

$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2+0\alpha_4$

$\alpha_5=\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_4$

$\alpha_6=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_4$

得分	评阅人

四、(本题 12 分) 讨论 a,b 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases}x_1-2x_2-x_3=1\\3x_1-x_2-3x_3=2\\2x_1+x_2+ax_3=b\end{cases}$$

有惟一解、无解、有无穷多解，在线性方程组有无穷多解时，求出其通解。

1) $|A|=\begin{vmatrix}1&-2&-1\\3&-1&-3\\2&1&a\end{vmatrix}=5(a+2)\neq 0$，即 $a\neq -2$ 时，有唯一解.

2) $a=-2$ 时. $\begin{bmatrix}1&-2&-1&1\\3&-1&-3&2\\2&1&-2&b\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&-1&1\\0&5&0&-1\\0&5&0&b-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&-1&1\\0&5&0&-1\\0&0&0&b-1\end{bmatrix}(*)$

$\therefore a=-2$ 且 $b\neq 1$ 时，无解.

3) $a=-2$ 且 $b=1$ 时，有无穷多解，$(*)\to\begin{bmatrix}1&-2&-1&1\\0&1&0&-\frac{1}{5}\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&\frac{3}{5}\\0&1&0&-\frac{1}{5}\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

$\begin{cases}x_1=x_3+\frac{3}{5}\\x_2=-\frac{1}{5}\end{cases}$，通解为：$\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\-\frac{1}{5}\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$.

得分	评阅人

五、（本题 12 分）

1）求矩阵A的全部特征值与特征向量；2）求正交矩阵 P 及对角矩阵 Λ，使 $P^{-1}AP=\Lambda$，其中矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 3\end{bmatrix}。$$

答复.

1) $|\lambda E-A|=0 \Rightarrow \lambda_1=-1, \lambda_2=2, \lambda_3=5$

对应于 $\lambda_1=-1$ 的特征向量：$k_1\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}$ $(k_1\neq 0)$

〃 $\lambda_2=2$ 〃 ：$k_2\begin{bmatrix}-2\\1\\2\end{bmatrix}$ $(k_2\neq 0)$

〃 $\lambda_3=5$ 〃 ：$k_3\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}$ $(k_3\neq 0)$

2) 15 全省试卷.

得分	评阅人

六、证明（本题 8 分）

设向量组 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots\vec{\alpha}_r$ 是线性方程组 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的基础解系，向量 $\vec{\beta}$ 满足 $A\vec{\beta}\neq\vec{0}$，证明：1）向量组 $\vec{\beta},\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_r$ 线性无关，2）向量组 $\vec{\beta}$，$\vec{\beta}+\vec{\alpha}_1$，$\vec{\beta}+\vec{\alpha}_2$，$\cdots,\vec{\beta}+\vec{\alpha}_r$ 线性无关。

证：1) 设 $k_0\beta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$ (*)

则有 $k_0(A\beta)+k_1(A\alpha_1)+k_2(A\alpha_2)+\cdots+k_r(A\alpha_r)=0$

又∵ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为 $AX=0$ 的基础解系，∴ $A\alpha_1=A\alpha_2=\cdots=A\alpha_r=0$

从而 $k_0(A\beta)=0$，又∵ $A\beta\neq 0$ ∴ $k_0=0$，代入(*)可得.

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$

∵ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关 ∴ $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$.

∴ (*) $\Rightarrow k_0=k_1=k_2=\cdots=k_r=0 \Rightarrow \beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.

2) $(\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_r)=(\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$

$=(\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)K$. 由K可逆,可得,

$r(\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_r)=r(\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)=r+1$

∴ $\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_r$ 线性无关.