2012-2013 学年第一学期《高等数学 AI》期末试卷（A）

授课班号________ 年级专业________ 学号________ 姓名________

题型	选择题	填空题	计算题	综合题	总 分	审 核
得分						

一. 填空题（4 分×7）

得分	阅卷人

1. 当 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，则 $a=$ $-\frac{3}{2}$.

2. 函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的间断点为 $x=\pm1$.

3. 设 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\arctan\dfrac{x}{2}+\arcsin 2x$，则 $y'(0)=$ $\frac{5}{2}$.

4. 曲线 $y=e^{\arctan x}$ 的凹区间为 $(-\infty,\frac{1}{2}]$.

5. 若 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，且 $x=at+b$，则 $\int f(t)\mathrm{d}t=$ $F(t)+C$.

6. 设 $f(5)=2$，$\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x=3$，则 $\int_0^5 xf'(x)\mathrm{d}x=$ 7.

7. 设 $F(x)=\int_{-x}^{\sqrt{x}}e^{t^2}\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=$ $\frac{e^x}{2\sqrt{x}}+e^{x^2}$.

二. 计算题（6 分×6）

得分	阅卷人

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}$.

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x+2e^{2x}+\cdots+ne^{nx}}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}$$

L'Hospital 3'

计算 3'

$$=\frac{1+2+\cdots+n}{n}$$

$$=\frac{n+1}{2}$$

或 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}-1}{x}$ 等价无穷小代换

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{n}\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{e^{2x}-1}{x}+\cdots+\frac{e^{nx}-1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{n}(1+2+\cdots+n)$$

2. 设 $y=xe^{2x}$，求 $y^{(n)}$.

Leibniz 或归纳法.

$$y^{(n)}=(e^{2x})^{(n)}\cdot x+C_n^1\cdot(e^{2x})^{(n-1)}\cdot(x)'=2^n\cdot e^{2x}\cdot x+n\cdot2^{n-1}\cdot e^{2x}$$

$$=2^{n-1}(2x+n)e^{2x}$$

Scanned by CamScanner

3. 设 $y=y(x)$ 由方程组 $\begin{cases} x=e^t+t-1 \\ e^y\cos t+y-1=0 \end{cases}$ 所确定，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$ 的值.

$\boxed{x=0 \text{ 时}, t=0 \text{ 此时 } y=0}$

参数方程求导.

$$\begin{cases} x=e^t+t-1 \Rightarrow \dfrac{dx}{dt}=e^t+1 \\ e^y\cos t+y-1=0 \Rightarrow y=y(t) \text{ 隐函数} \end{cases} : e^y\dfrac{dy}{dt}\cdot\cos t-e^y\sin t+\dfrac{dy}{dt}=0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{e^y\sin t}{e^y\cos t+1} \quad \therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\left.\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right|_{t=0}=\left.\frac{e^y\sin t}{(e^y\cos t+1)(e^t+1)}\right|_{t=0}=0$$

(3')

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=\left.\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}\right|_{x=0}=\frac{\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\frac{dy}{dx}-\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}}{t-0}}{\left.e^t+1\right|_{t=0}}=\frac{1}{8}$$

(用极限/定义/洛必达)

(3')

4. 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导且 $f'(1)=2$，求极限

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1-x)-f(1+x)}{x}.$$

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{f(1-x)-f(1)}{x}-\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}$$

$$=-f'(1)-f'(1)$$

$$=-4$$

不妨设 $a>0$.

5. 求 $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$，其中 a 是非零常数.

1) $x>a$ 时.

令 $x=a\sec t$ 原式 $=\displaystyle\int\frac{a\sec t\cdot\tan t}{a\sec t\cdot a\tan t}dt=\frac{t}{a}+C=\frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}+C$

(写出此步即给6')

2) $x<-a$ 时.

令 $x=-t$ 原式 $=\displaystyle\int\frac{-dt}{-t\sqrt{(-t)^2-a^2}}=\int\frac{dt}{t\sqrt{t^2-a^2}}=\frac{1}{a}\arccos\frac{a}{t}+C=\frac{1}{a}\arccos\frac{a}{-x}+C$ $(t>a)$

综1).2). 原式 $=\dfrac{1}{a}\arccos\dfrac{a}{|x|}+C$.

或倒代换(也需讨论区间)

Scanned by CamScanner

6. 计算 $\int_1^{e^3}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$.

令 $\ln x = t$.

原式 $=\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\Big|_0^3 = \ln(3+\sqrt{10})$

(3′) (2′) (1′)

写 $\ln|\sec(\arctan 3)+3|$ 扣1分

三．综合题（满分 36 分）

得分	阅卷人

1.（本题 7 分）

证明函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，在点 $x=0$ 处连续，但不可导.

证: 1) $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}x}{\sqrt{x}} = 0 = f(0) = \lim_{x\to0^-} f(x)$

2′ 1′ (3′)

∴ $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

2) $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}}-0}{x} = \cancel{\lim_{x\to0^+}}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x\sqrt{x}}$ 2′

$=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}x}{x\sqrt{x}} = +\infty$ 2′ (4′)

∴ $f'_+(0)$ 不存在. $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

2.（本题 7 分）试证：当 $x>0$ 时，$x-\frac{1}{2}x^2<\ln(1+x)<x$.

证: 单调性或 Taylor 公式 或 Lagrange 中值 Th.

1) 设 $f(x)=x-\frac{1}{2}x^2-\ln(1+x)$

$x>0$ 时，$f'(x)=1-x-\frac{1}{1+x}=\frac{-x^2}{1+x}<0$.

∴ $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ ↓

$x>0$ 时. $f(x)<f(0)=0$.

2) 设 $g(x)=\ln(1+x)-x$

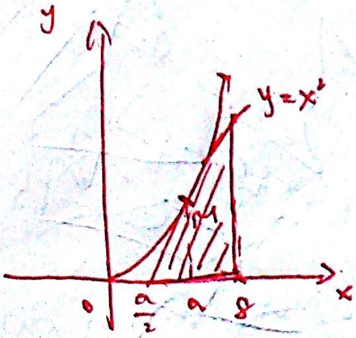
$x>0$ 时. $g'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}<0$

∴ $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ ↓

$x>0$ 时. $g(x)<g(0)=0$.

Scanned by CamScanner

3. （本题 7 分） 试在曲线段 $y=x^2(0<x<8)$ 上求一点 M 的坐标，使得由曲线在 M 点切线与直线 $x=8$, $y=0$ 所围成的三角形面积最大.



设M点坐标 (a, a^2)

切线斜率 $y'|_{x=a} = 2a$. 切线：$y = 2a(x-a)+a^2$

∴切线与x轴交点为 $(\frac{a}{2}, 0)$

切线与 $x=8$ 交点为 $(8, 16a-a^2)$.

∴三角形面积为 $f(a) = \frac{1}{2} \times (8-\frac{a}{2}) \times (16a-a^2)$

$= \frac{a}{4}(16-a)^2 = \frac{1}{4}(a^3-32a^2+256a)$ $(0<a<8)$

令 $f'(a) = \frac{1}{4}(3a^2-64a+256) = 0 \Rightarrow a = \frac{16}{3}$ 唯一驻点 且为极大值点.

$f''(a) = \frac{1}{4}(6a-64) \Rightarrow f''(\frac{16}{3}) < 0$ ∴ $a=\frac{16}{3}$ 为最大值点.

M坐标为 $(\frac{16}{3}, \frac{256}{9})$

4. （本题 7 分） 求定积分 $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| \mathrm{d}x$.

原式 $= \int_{\frac{1}{e}}^{1} (-\ln x)dx + \int_{1}^{e} \ln x \, dx$

$= -x\ln x \Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + \int_{\frac{1}{e}}^{1} dx + x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e 1\, dx$

$= \frac{1}{e}\ln\frac{1}{e} + (1-\frac{1}{e}) + e\ln e - (e-1) = (1-\frac{2}{e}) + 1$

$= 2 - \frac{2}{e}$

5. （本题 8 分） 求由不等式 $r \le 3\cos\theta$ 和 $r \le 1+\cos\theta$ 所确定的公共部分的面积.

$A = 2\left[\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}(1+\cos\theta)^2 d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(3\cos\theta)^2 d\theta\right]$

$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1+2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}) d\theta + 9\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta$

$= \frac{\pi}{3} + 2\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3} + \frac{1}{4}\sin 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{9}{2}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}) + \frac{9}{4}\sin 2\theta\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{\pi}{3} + \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{3}{4}\pi - \frac{9}{8}\sqrt{3} = \frac{5}{4}\pi$.

Scanned by CamScanner