九、$(x+\frac{1}{a})(x-a)f(x)\le 0$; $\int_{-1/a}^{a}(x+\frac{1}{a})(x-a)f(x)dx\le 0$;.

$\int_{-1/a}^{a}x^2f(x)dx+(\frac{1}{a}-a)\int_{-1/a}^{a}xf(x)dx-\int_{-1/a}^{a}f(x)dx\le 0$;　$\int_{-1/a}^{a}x^2f(x)dx\le\int_{-1/a}^{a}f(x)dx$

2011 级试卷

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1.设 $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}, g(x)=\sin x$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$（　　）。

$A.$ 同阶无穷小但不等价　$B.$ 低阶无穷小　$C.$ 高阶无穷小　$D.$ 等价无穷小

2.下列哪组函数中，$F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 是同一个函数的两个不同的原函数（　　）。

$A.\ F_1(x)=x^3, F_2(x)=4-x^3$　　$B.\ F_1(x)=x^3, F_2(x)=4-\frac{x^3}{2}$

$C.\ F_1(x)=x^3, F_2(x)=x^3-2x$　　$D.\ F_1(x)=x^3, F_2(x)=x^3-2$

3. 若 $f(x)$ 连续且满足关系式: $\int_0^{x^3+1}f(t)dt=x^2$，则 $f(9)$ 等于(　)。

$A.\ \frac{1}{3}$　　$B.\ 1$　　$C.\ -1$　　$D.\ 0$

4.设 $y=f(x)$ 对一切 x 满足 $y''-2y'-4y=0$，若 $f(x_0)>0$，且 $f'(x_0)=0$，则函数 $f(x)$ 在点 x_0（　　）

$A.$ 取得极大值　$B.$ 取得极小值　$C.$ 某个邻域内单调增加　$D.$ 某个邻域内单调减少

5.下列广义积分收敛的是（　）

$A.\ \int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$　$B.\ \int_0^1\frac{1}{x^2}dx$　$C.\ \int_{-1}^1\frac{1}{x}dx$　$D.\ \int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}dx$

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & x\ne 0\\ 1 & x=0\end{cases}$，则 $f'(0)=$__ 。2. 函数 $f(x)=\frac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}$ 的第一类间断点是__。

3. $\int_{-1}^{1}\frac{1+\tan x}{1+x^2}dx=$______。　　4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\dots+n^k}{n^{k+1}}=$_________。$(k>0)$

5. 已知 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 有一拐点 $(-1,4)$ 且在 $x=0$ 处有极小值 2，则 $a=$___。

三、试解下列各题（每小题 7 分，共 35 分）

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x e^{t^2}dt-x}{x\sin x^2}$ ； 2. 求 $\int\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

3. 求函数 $f(x)=\arctan x$ 的具有 Lagrange 型余项的二阶 Maclaurin 公式。

4. 求 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx$. 5.求 $\int_0^1 e^x\sin xdx$.

四、(5 分) 讨论方程 $\int_0^x e^{t^2}dt+\int_1^x e^{-t^2}dt=0$ 在区间 $(0,1)$ 内实根的个数.

五、(6 分) 讨论函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在区间 $[e,+\infty)$ 上的单调性,并比较 π^e 与 e^π 的大小.

六、(6 分) 一抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过 $(0,0),(1,2)$ 两点,且 $a<0$,确定 a,b,c 的值,使抛物线与 x 轴所围区域的面积为最小.

七、(7 分) 求由 $y=2x-x^2, y=0$ 所围图形: (1). 绕 x 轴旋转所成立体的体积; (2). 绕 y 轴旋转所成立体的体积.

八、(6 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上连续, 求证: $\int_0^4 f(x)dx=\int_0^2\ [f(x)+f(4-x)]dx$.

九.(5 分) 已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 ($a>0$),且 $\int_a^b f(x)dx=0$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $\int_a^\xi f(x)dx=\xi f(\xi)$.

2011 级参考解答

一、CDABD 二、1. $\underline{0}$; 2. $\underline{x=1}$; 3. $\underline{\frac{1}{2}\pi}$; 4. $\underline{\frac{1}{k+1}}$; 5. $\underline{1}$.

三、1. $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x e^{t^2}dt-x}{x\sin x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x e^{t^2}dt-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$;

2. $\int\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\sin^2 tdt=\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{4}\sin 2t+C=\dfrac{1}{2}\arcsin x-\dfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C.$

3. $f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=0;, f'''(x)=\dfrac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$

$$\arctan x=x+\frac{3\vartheta^2x^2-1}{3(1+\vartheta^2x^2)^3}x^3,(0<\vartheta<1)$$

4. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\sin xdx=\dfrac{4}{3}$

$5.I=\int_0^1 e^x \sin x dx = e\sin 1-\int_0^1 e^x \cos x dx = e\sin 1 - e\cos 1+1-\int_0^1 e^x \sin x dx,$

$I=\frac{1}{2}(e\sin 1-e\cos 1+1).$

四、$F(x)=\int_0^x e^{t^2}dt+\int_1^x e^{-t^2}dt$，$F(0)=\int_1^0 e^{-t^2}dt<0, F(1)=\int_0^1 e^{t^2}dt>0$。

零点定理：在$(0,1)$至少存在一个方程的根，$F'(x)=e^{x^2}+e^{-x^2}>0$，方程根的个数为 1。

五、$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}<0,(x>e)$，

$f(x)$在$[e,+\infty)$上单调减少。 $f(\pi)<f(e)\Rightarrow \pi^e<e^\pi$。

六、$c=0,a+b=2$， $A(a)=\int_0^{\frac{a-2}{a}}[ax^2+(2-a)x]dx=\dfrac{(2-a)^3}{6a^2},(a<0)$

$$A'(a)=-\frac{(2-a)^2(a+4)}{6a^3}, A'(a)=0\Rightarrow a=-4,\quad c=0,b=6.$$

七、(1).$V_x=\pi\int_0^2(2x-x^2)^2dx=\dfrac{16}{15}\pi$ ；

(2).$V_y=\pi\int_0^1(1+\sqrt{1+y})^2dy-\pi\int_0^1(1-\sqrt{1+y})^2dy$

$V_y=\dfrac{8}{3}\pi$.。或用公式$V_y=2\pi\int_0^1 xf(x)dx=2\pi\int_0^1 x(2x-x^2)dx=\dfrac{8}{3}\pi$。

八、$\int_0^4 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx; \int_2^4 f(x)dx \underset{x=4-t}{=} \int_0^2 f(4-t)dt$，

$\int_0^4 f(x)dx=\int_0^2[f(x)+f(4-x)]dx$

九、$F(x)=\dfrac{\int_a^x f(t)dx}{x}$， $F(a)=\dfrac{\int_a^a f(t)dx}{a}=0, F(b)=\dfrac{\int_a^b f(t)dx}{b}=0$

由罗尔定理,$\exists\xi\in(a,b)$，使得$F'(\xi)=\dfrac{\xi f(\xi)-\int_a^\xi f(t)dt}{\xi^2}=0, \int_a^\xi f(t)dt=\xi f(\xi)$。

2012 级试卷

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）