2013—2014 学年第一学期《线性代数》课内考试卷（A 卷）

授课班号______ 年级专业 2013 级信息 学号__________ 姓名__________

题号	一	二	三	四	五	六	总分	审核
题分	32	24	12	12	12	8		
得分								

得分	评阅人

一、填空（共 32 分，每空格 4 分）

1. 已知四阶行列式 D 中第 4 列元素依次为 1,2,3,4，它们对应的余子式依次为 a,b,c,d，则该行列式 $D=$ $-a+2b-3c+4d$。

2. 已知 $A=[\vec{\alpha}_1,\ \vec{\alpha}_2,\ \vec{\alpha}_3]$，$|A|=2$，则 $|\vec{\alpha}_3-2\vec{\alpha}_1,\ 2\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3,\ \vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_3|=$ -12。

3. 设四阶矩阵 A 的伴随阵为 A^*，$|A|=1/2$，则 $|(3A)^{-1}-2A^*|=$ $\frac{32}{81}$。

4. $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{2013}\begin{bmatrix}1&2&3\\f&e&d\\a&b&c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}=$ $\begin{bmatrix}f+d&e&d\\4&2&3\\a+c&b&c\end{bmatrix}$。

$r_1\leftrightarrow r_2$ c_1+c_3

5. 已知向量组 $\vec{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\vec{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix},\vec{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-1\\-8\\t\end{bmatrix}$ 线性相关，则 $t=$ 2。

6. 已知 $\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2,\vec{\eta}_3$ 是四元线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的三个解向量，其中 $\vec{\eta}_1=[2\quad 0\quad 1\quad 3]^T$，$\vec{\eta}_2+\vec{\eta}_3=[2\quad 0\quad 1\quad 4]^T$，且 $R(A)=3$，则线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的通解 $\vec{x}=$ $(2,0,1,3)^T+k(2,0,1,2)^T,\ k\in R$。

7. 已知 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&m\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&n&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ 相似，则 $(m,n)=$ $(0,1)$。

8. 已知 $f=2x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+x_3^2+tx_2x_3$ 为正定二次型，则 t 满足 $-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$。

得分	评阅人

二、计算（共 24 分，每小题 6 分）

1. $D_n=\begin{vmatrix}1+\lambda & 2 & 3 & \cdots & n\\ 1 & 2+\lambda & 3 & \cdots & n\\ 1 & 2 & 3+\lambda & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n+\lambda\end{vmatrix}$

$D_n \xlongequal[c_1\text{提取公因子}]{c_1+(c_2+c_3+\cdots+c_n)} \left[\frac{n(n+1)}{2}+\lambda\right]\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 1 & 2+\lambda & 3 & \cdots & n\\ 1 & 2 & 3+\lambda & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n+\lambda\end{vmatrix}$

$\xlongequal[c_n+c_1\cdot(-n)]{\substack{c_2+c_1\cdot(-2)\\ c_3+c_1\cdot(-3)}} \left[\frac{n(n+1)}{2}+\lambda\right]\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{vmatrix}$

$=\lambda^{n-1}\cdot\left[\frac{n(n+1)}{2}+\lambda\right]$

2. 已知 $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -6 & 2\end{bmatrix}$，求 $AB,(BA)^T$.

$AB=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1\\ -6 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

$(BA)^T=A^TB^T=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -6\\ -1 & 2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}10 & -20\\ 5 & -10\end{bmatrix}$

3. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}, A+X=AX$，求矩阵 X.

$(A-E)X=A \Rightarrow X=(A-E)^{-1}A$

$(A-E, A)=\left[\begin{array}{ccc|ccc}0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{\text{行变换}} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{array}\right]=(E, (A-E)^{-1}A)$

$\therefore X=\frac{A}{2}$.

4. 设三阶矩阵 A 的特征值分别为 4,5,6，求（1）$A^2-5A+6E$ 的特征值；（2）$|A^2-5A+6E|$。

(1) 设 A 有特征值 λ，则 $A^2-5A+6E$ 有特征值 $\lambda^2-5\lambda+6$

将 $\lambda=4,5,6$ 代入上式，得：2，6，12.

(2) $|A^2-5A+6E|=2\times6\times12=144$.

得分	评阅人

三、（本题 12 分）

1）求下列向量组的秩 2）求它的一个极大线性无关组，3）用该极大线性无关组表示其余向量。

$$\vec{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_3=\begin{bmatrix}3\\3\\2\\0\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_4=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_5=\begin{bmatrix}3\\2\\1\\0\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_6=\begin{bmatrix}4\\3\\2\\0\end{bmatrix}$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6)=\begin{bmatrix}1&1&3&1&3&4\\1&1&3&0&2&3\\1&0&2&0&1&2\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{bmatrix}1&0&2&0&1&2\\0&1&1&0&1&1\\0&0&0&1&1&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

∴ (1) 秩为3.

(2) 一个极大无关组：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$

(3) $\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2+0\alpha_4$; $\alpha_5=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4$; $\alpha_6=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4$.

得分	评阅人

四、（本题 12 分）讨论线性方程组

$$\begin{cases}-2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1\\ 2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2\\ (2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1\end{cases}$$

当 λ 取何值时，线性方程组有惟一解、无解、有无穷多解，在线性方程组有无穷多解时，求出其通解。

$$|A|=\begin{vmatrix}-2&-4&5-\lambda\\2&5-\lambda&-4\\2-\lambda&2&-2\end{vmatrix}\overset{c_2+c_3}{=\!=}\begin{vmatrix}-2&1-\lambda&5-\lambda\\2&1-\lambda&-4\\2-\lambda&0&-2\end{vmatrix}\overset{r_1+r_2\cdot(-1)}{=\!=}\begin{vmatrix}-4&0&9-\lambda\\2&1-\lambda&-4\\2-\lambda&0&-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$$

① $|A|\neq0$，即 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq10$ 时，有惟一解.

② $\lambda=10$ 时，$(A,b)=\begin{bmatrix}-2&-4&-5&-11\\2&-5&-4&2\\-8&2&-2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&-9&-9&-9\\2&-5&-4&2\\0&-18&-18&9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&-5&-4&2\\0&-9&-9&-9\\0&0&0&27\end{bmatrix}$

<阶梯形矩阵形式>

$R(A)=2<R(A,b)=3$ ，无解

③ $\lambda=1$ 时，$(A,b)=\begin{bmatrix}-2&-4&4&-2\\2&4&-4&2\\1&2&-2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&-2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow x_1=-2x_2+2x_3+1$，

有无穷多解.

通解为：$(1,0,0)^T+k_1(-2,1,0)^T+k_2(2,0,1)^T$ ，$k_1,k_2\in\mathbb{R}$.

得分	评阅人

五、(本题 12 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2^2+4x_3^2-8x_2x_3$，1）求二次型矩阵 A；2）A 的特征值与特征向量；3）求一正交变换 $\vec{x}=Q\vec{y}$，使二次型化为标准形。 <11-12 考题>

得分	评阅人

六、证明（本题 8 分）

设向量组 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots\vec{\alpha}_n(n>1)$ 中前 $n-1$ 个向量线性无关，后 $n-1$ 个向量线性相关，试证：1）$\vec{\alpha}_1$ 能否由向量组 $\vec{\alpha}_2,\cdots\vec{\alpha}_{n-1}$ 线性表示；2）$\vec{\alpha}_n$ 能否由向量组 $\vec{\alpha}_1,\cdots\vec{\alpha}_{n-1}$ 线性表示。 <11-12 考题>