河海大学 2019—2020 学年第一学期《高等数学 BI》期中试卷参考解答

一、1．C；2．C；3．A；4．D；5．B

二、1．$\dfrac{3}{4}$；　2．$[1,e]$；　3．-6；　4．$\dfrac{1}{3}$；　5．$2019!dx$。

三、1．$y'=\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{3+e^{2x}}}-\dfrac{\tan x}{\ln\sec x}+x^{\tan x}\left(\sec^2 x\ln x+\dfrac{\tan x}{x}\right)$，前两个导数【2 分】，后一个【3 分】.

2．函数在 $x=0,x=\pm3$ 处间断，连续区间为 $(-\infty,-3),(-3,0),(0,3),(3,+\infty)$.【1 分】

因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\dfrac{1}{3},\quad \lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\dfrac{1}{3}$, 所以 $x=0$ 是第一类间跳跃断点【2 分】;

$\lim\limits_{x\to3}f(x)=\dfrac{1}{6}$, $x=3$ 是第一类可去间断点;【2 分】

$\lim\limits_{x\to-3}f(x)=\infty$，$x=-3$ 是第二类无穷间断点【2 分】.

3. $$\lim_{x\to0}\frac{2x-\arcsin 2x}{(e^{x^2}-1)\ln(1+x)}\overset{2'}{=}\lim_{x\to0}\frac{2x-\arcsin 2x}{x^3}\overset{2'}{=}2\lim_{x\to0}\frac{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}}}{3x^2}$$
$$\overset{1'}{=}2\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-4x^2}-1}{3x^2}\overset{2'}{=}\lim_{x\to0}\frac{-4x^2}{3x^2}=-\frac{4}{3}.$$

4. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{3}{2t^2}$，【3 分】，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\dfrac{d}{dt}\left(dy/dx\right)}{dx/dt}=-\dfrac{9(1+t^4)}{4t^6}$.【4 分】

5. $\because y=\dfrac{3}{3x+1}+\dfrac{2}{2x-3}$　【2 分】

$\therefore y^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!3^{n+1}}{(3x+1)^{n+1}}+\dfrac{(-1)^n n!2^{n+1}}{(2x-3)^{n+1}}$，【4 分】$\therefore y^{(n)}(1)=(-1)^n n!\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}-n!2^{n+1}$.【1 分】

四、存在.【1 分】

因为 $4^n<\cos^2 n+3^n+4^n\le1+3^n+4^n<3\cdot4^n$，【4 分】

所以 $4<\left(\cos^2 n+3^n+4^n\right)^{\frac{1}{n}}<4\sqrt[n]{3}$，由夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos^2 n+3^n+4^n\right)^{\frac{1}{n}}=4$.【2 分】

五、$f(x)=\begin{cases}ax^2+bx, & |x|<1\\ \dfrac{1}{x}, & |x|>1\\ \dfrac{a+b+1}{2}, & x=1\\ \dfrac{a-b-1}{2} & x=-1\end{cases}$，【4 分】

要使得处处连续，则有 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=a+b=f(1)\Rightarrow a+b=1$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = a-b = \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -1 = f(-1) \Rightarrow a-b=-1$，【3 分】所以 $a=0, b=-1$.【1 分】

六、由题设 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) \Rightarrow f(1)=3$【1 分】，　$f'(1) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2$【1 分】

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(1-\frac{4}{n})}{f(1)}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{f(1-\frac{4}{n})-f(1)}{f(1)}\right)^{\frac{f(1)}{f(1-\frac{4}{n})-f(1)}\cdot\frac{\frac{f(1-\frac{4}{n})-f(1)}{f(1)}}{\frac{1}{n}}} = e^{-\frac{4f'(1)}{f(1)}} = e^{-\frac{8}{3}}$　【4 分】

七、正确叙述定义.【2 分】

$\forall \varepsilon > 0$，要使得 $\left|\dfrac{n+5}{3n-1}-\dfrac{1}{3}\right| = \dfrac{16}{3(3n-1)} < \dfrac{16}{n} < \varepsilon$，【3 分】即 $n > \dfrac{16}{\varepsilon}$，取 $N = \left[\dfrac{16}{\varepsilon}\right]$，则当 $n > N$ 时，就有 $\left|\dfrac{n+5}{3n-1}-\dfrac{1}{3}\right| < \varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+5}{3n-1} = \dfrac{1}{3}$.【2 分】

八、因为 $f(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上可导，所以 $f(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上连续，故 $|f(x)|$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上连续，$|f(x)|$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上必有最大值，设为 $|f(x_0)|$，$x_0\in[0,\frac{1}{2}]$.【2 分】

又 $f(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上可导，由 Lagrange 中值定理，$\exists \xi \in \left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，使得

$|f(x_0)| = |f(x_0)-f(0)| = |f'(\xi)x_0| \le |f(\xi)| x_0 \le |f(x_0)| x_0 \le \dfrac{1}{2}|f(x_0)|$，所以 $|f(x_0)| = 0$，【4 分】

由于 $\forall x \in \left[0,\dfrac{1}{2}\right], 0 \le |f(x)| \le |f(x_0)|$，故 $\forall x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right], |f(x)| \equiv 0$，当然 $f(x)\equiv 0$.【1 分】