2014-2015 学年第一学期《复变函数与积分变换 B》

课内考试卷（A 卷）

授课班号________ 专业__________ 学号__________ 姓名__________

题号	一	二	三	总分	审核
得分					

阅卷人	得分

一、填空题(每小题 3 分，共 24 分)

1. 复数 $\frac{2i}{-1+i}$ $=1-i$ 的共轭复数的模为 $\sqrt{2}$ 辐角主值为 $-\frac{\pi}{4}$

2. $\sqrt[3]{-1-i}=$ $\sqrt[6]{2}\left[\cos\frac{-\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{-\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{3}\right]$ $k=0,1,2.$

3. $\oint_{|z|=2}(\frac{i}{z-i}+\frac{e^z}{z-3})dz=$ -2π

4. $\oint_{|z|=2}\frac{1}{z^{n+1}}dz=$ $\begin{cases}2\pi i & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2ni}{1-3ni}=$ $-\frac{2}{3}$.

6. $f(z)=z^{-2}$ 在 $z=1$ 的泰勒级数为 $1-2(z-1)+3(z-1)^2\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(z-1)^{n-1}$

7. $Ln(-1-i)$ 的主值为 $\ln 2+i(-\frac{3}{4}\pi)$

8. $\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{(s-1)^2+4}]=$ $\frac{1}{2}e^t\sin 2t$

二、计算题(每小题 6 分，共 36 分)

阅卷人	得分

1. 解方程 $\sin iz=0$

$\Rightarrow \frac{e^{i\cdot iz}-e^{-i\cdot iz}}{2i}=0$

$\Rightarrow e^{-z}-e^{z}=0$

$\Rightarrow e^{2z}-1=0$

$\Rightarrow 2z=2k\pi i$

$\Rightarrow z=k\pi i.\quad k\in\mathbb{Z}$

2. 计算 $(1-i)^{1-i}$ 的值

$(1-i)^{1-i}=e^{(1-i)Ln(1-i)}$

$=e^{(1-i)(\ln\sqrt{2}+i(-\frac{\pi}{4}+2k\pi))}$

$=e^{(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2k\pi)+i(-\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}+2k\pi)}$

$=e^{(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2k\pi)+i(-\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4})}$

3. 设 $f(z)=x^2+2xyi$，试讨论 $f(z)$ 在何处可导，何处解析.

解 $u(x,y)=x^2$，$v(x,y)=2xy$

$u_x=2x \quad v_y=2x$

$u_y=0 \quad v_x=2y$

要 $f(z)$ 可导，必须

$$\begin{cases} u_x=v_y \\ u_y=-v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=2x \\ 0=-2y \end{cases} \Rightarrow y=0$$

$\therefore f(z)$ 在 $y=0$（直线）上可导.

但处处不解析.

4. 计算积分 $\oint_{|z|=2} z^3 e^{\frac{1}{z}} dz$ 的值.

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}\cdots$$

$$z^3e^{\frac{1}{z}}=z^3+z^2+\frac{z}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!z}+\cdots$$

$$\oint_{|z|=2} z^3e^{\frac{1}{z}}dz=2\pi i\, C_{-1}=2\pi i\cdot\frac{1}{4!}=\frac{\pi i}{12}$$

5. 讨论级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{i^n}{\ln n}$ 的收敛性和绝对收敛性.

$\left|\frac{i^n}{\ln n}\right|=\frac{1}{\ln n}$ $\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 发散. $\therefore$ 级数非绝对收敛.

$$\because \sum_{n=2}^{\infty}\frac{i^n}{\ln n}=\frac{-1}{\ln 2}+\frac{-i}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\frac{i}{\ln 5}+\cdots$$

$$=\left(\frac{-1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 4}+\frac{-1}{\ln 6}+\frac{1}{\ln 8}\right)+i\left(\frac{-1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 5}+\cdots\right)$$ 收敛

$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\frac{i^n}{\ln n}$ 条件收敛

6. 求 $F(s)=\dfrac{1}{s^4+5s^2+4}$ 的拉氏逆变换 $f(t)$.

$$\because F(s)=\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+4}\right)$$

$$\therefore f(t)=\frac{1}{3}\left(\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)$$

三、解答题(每小题 10 分, 共 40 分)

阅卷人	得分

1. 在复平面上求解析函数 $f(z)$ 使其虚部为 $v(x,y)=e^x\sin y+3y$.

法一: $u_x=v_y=e^x\cos y+3 \Rightarrow u(x,y)=e^x\cos y+3x+C(y)$

$u_y=-v_x \Rightarrow -e^x\sin y+C'(y)=-e^x\sin y$

$\Rightarrow C'(y)=0 \Rightarrow C(y)=C$

$\therefore u(x,y)=e^x\cos y+3x+C$

$\Rightarrow f(z)=e^x\cos y+3x+C+i(e^x\sin y+3y)$

法二: $f'(z)=u_x+iv_x=v_y+iv_x=e^x\cos y+3+i(e^x\sin y+0)$

$=e^z+3$

$\therefore f(z)=e^z+3z+C$

2. 求函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z-1)}$ 分别在圆环域 (1) $0<|z|<1$ (2) $|z-1|>1$ 内的洛朗展开式.

(1) $0<|z|<1$ $\qquad \dfrac{1}{z-1}=-\dfrac{1}{1-z}=-(1+z+z^2+\cdots)$

$\therefore f(z)=\dfrac{1}{z^2}\cdot\dfrac{1}{z-1}=-\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{z}-1-z\cdots=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^{n-2}}$

(2) $|z-1|>1$ $\qquad \dfrac{1}{z^2}=-\left(\dfrac{1}{z}\right)'=-\left(\dfrac{1}{z-1+1}\right)'$

$=-\left(1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3\cdots\right)'$

$=-\left(-1+2(z-1)-3(z-1)^2\cdots\right)$

$\therefore f(z)=\dfrac{1}{z-1}\cdot\dfrac{1}{z^2}=\dfrac{1}{z-1}-2+3(z-1)\cdots$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}n(z-1)^{n-2}$

3. 计算积分$\oint_C \frac{\sin z}{z^2(1-z)}dz$的值，其中$C$为负向圆周$|z|=2$.

$$\oint_{C^-} \frac{\sin z}{z^2(1-z)}dz = \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{\sin z}{1-z}}{z^2}dz + \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{-\frac{\sin z}{z^2}}{z-1}dz$$

$$= 2\pi i\left(\frac{\sin z}{1-z}\right)'\Big|_{z=0} + 2\pi i\left(-\frac{\sin z}{z^2}\right)\Big|_{z=1}$$

$$= 2\pi i\frac{\cos z\cdot(1-z)+\sin z}{(1-z)^2}\Big|_{z=0} + 2\pi i(-\sin 1)$$

$$= 2\pi i(1-\sin 1)$$

$\therefore$ 原积分 $= 2\pi i(\sin 1 - 1)$

4. 用拉氏变换求微分方程$y''-2y'+y=0$的满足$y(0)=0, y'(0)=1$的特解.

设 $\mathcal{L}[y(t)]=Y(s)$ 则 $\mathcal{L}[y'(t)] = sY(s)-y(0) = sY(s)$

$\mathcal{L}[y''(t)] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - 1$

原方程两端求拉氏变换得

$$s^2Y(s) - 1 - 2sY(s) + Y(s) = 0$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$\Rightarrow y(t) = e^t t.$$