

2014-2015 学年第一学期《高等数学 AI》试卷 (A)

授课班号 _____ 年级专业 _____ 机电、物联网 学号 _____ 姓名 _____

题型	填空题	计算题	综合题	总分	审核
得分					

一、填空题(每小题 4 分, 共 32 分)

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+5x} - \sqrt{1-3x}}{x^2+2x} = \underline{2}$.

得分	阅卷人

2. 设当 $x \rightarrow 1^+$ 时, $\sqrt{3x^2-2x-1} \cdot \ln x$ 与 $(x-1)^n$ 为同阶无穷小, 则 $n = \underline{\frac{3}{2}}$.
 $\hookrightarrow x-1=t, t \rightarrow 0^+$

3. 设 $f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & x < 0 \\ 2x^2+1, & x \geq 0 \end{cases}$, 则 $f'(0) = \underline{0}$.

✓ 4. 曲线 $y = e^{\arctan x}$ 的凹区间为 $\underline{(-\infty, \frac{1}{2}]}$.
 \hookrightarrow 写开区间扣一分

✓ 5. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处具有二阶导数, 且 $f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=3$, 则极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-x}{x^2} = \underline{\frac{3}{2}}$.
 $\hookrightarrow -\frac{1}{2} f(e^{-x^2}) + C$

6. 若 $F(x) + C = \int f(x) dx$, 则 $\int e^{-x^2} \cdot x \cdot f(e^{-x^2}) dx = \underline{\quad}$.
 $\hookrightarrow e^{-x^2} = t$

7. $\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin x}{1+x^2} + \cos^2 x \right) dx = \underline{\pi}$.
 $\hookrightarrow \frac{\pi}{2}$

8. $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \underline{1}$.

二、计算题(每小题 7 分, 共 35 分)

1. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^t - e^{-t}) dt}{1 - \cos x}$.

得分	阅卷人

原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^t - e^{-t}) dt}{\frac{1}{2} x^2}$ $\frac{0}{0}$ (1')

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$ $\frac{0}{0}$ (2')

$= \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + e^{-x}) = 2$ (3')

原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ (3')

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x}$ (3')

$= 2$ (1')

原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$ (2') (3')

2.

$$\text{设 } \begin{cases} x = \int_1^t \sqrt{\ln u} du \\ y = \int_1^{t^2} \sqrt{\ln u} du \end{cases} (t > 1), \text{ 求 } \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sqrt{\ln t^2} \cdot 2t}{\sqrt{\ln t}} = 2\sqrt{2}t \quad (3')$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\ln t}} \quad (4')$$

对 (4') 求导

3.

$$\text{求 } \int e^x \left(3^x + \frac{e^{-x}}{x \ln x} \right) dx.$$

$$\int f(x) = \int (3e)^x dx + \int \frac{dx}{x \ln x}$$

$$= \frac{(3e)^x}{\ln(3e)} + \int \frac{d \ln x}{\ln x}$$

$$= \frac{(3e)^x}{1 + \ln 3} + \ln |\ln x| + C$$

✓
 $\frac{3}{4} 3'$ $1'$

$$4. \text{ 求 } \int \sin^2 \sqrt{x} dx.$$

$$\text{令 } \sqrt{x} = t$$

$$\int f(x) = \int 2 \sin^2 t \cdot t dt = \int (1 - \cos 2t) \cdot t dt$$

$$= \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} \int t d \sin 2t$$

$$= \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} \left(t \sin 2t - \int \sin 2t dt \right)$$

$$= \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} t \sin 2t + \frac{1}{4} \cos 2t + C$$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sqrt{x} \sin 2\sqrt{x} + \frac{1}{4} \cos 2\sqrt{x} + C$$

方法：换元，1'

分部，3'

积分，3'

也可 $\int \frac{1 - \cos 2\sqrt{x}}{2} dx$ 凑出

5. 已知 $f(x) = xe^{-x} + 2 \int_0^1 f(t) dt$, 求 $f(x)$ 的具体表达式.

设 $\int_0^1 f(t) dt = A$. \triangle 定积分是一个常数.

(2) $f(x) = xe^{-x} + 2A$. 从而

$$A = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (xe^{-x} + 2A) dx = \int_0^1 x d(-e^{-x}) + 2A$$

$$= [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx + 2A$$

$$= -\frac{1}{e} + [-e^{-x}]_0^1 + 2A$$

$$= -\frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e} + 2A \quad (5') \quad \therefore A = \frac{2}{e} - 1. \quad (1')$$

$$\therefore f(x) = xe^{-x} + \frac{4}{e} - 2. \quad (1')$$

三、综合题(满分 33 分)

1. (11 分)

设 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ 是满足 $a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \dots + \frac{1}{n+1}a_n = 0$ 的实数, 试证: 方程 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个实根.

得分	阅卷人

设 $f(x) = a_0x + \frac{1}{2}a_1x^2 + \frac{1}{3}a_2x^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ (5')

(2) $f(x) \in C[0, 1], f(x) \in D(0, 1)$

且 $f(0) = f(1) = 0$. (3')

由 Rolle Th. $\exists \xi \in (0, 1)$ s.t. $f'(\xi) = 0$

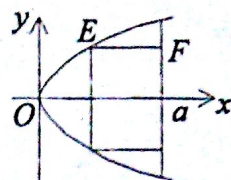
而 $f'(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

$\therefore \xi$ 是方程 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$ 在 $(0, 1)$ 内

的一个根. 得证. (3')

2. (11 分)

抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 和直线 $x = a$ ($a > 0$) 的内接矩形 (一边在 $x = a$ 上) 的宽度 EF 多少时, 其面积最大?



设 $E(x, \sqrt{2px})$

则 $S = 2(a-x)\sqrt{2px} = 2\sqrt{2p}(a\sqrt{x} - x\sqrt{x}), 0 < x < a. \quad (1')$

$S' = 2\sqrt{2p}(\frac{a}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}\sqrt{x}) = \sqrt{2p} \cdot \frac{a-3x}{\sqrt{x}}$

令 $S' = 0, x = \frac{a}{3}$

x	$(0, \frac{a}{3})$	$\frac{a}{3}$	$(\frac{a}{3}, a)$
S'	+	0	-
S	↗	极大值	↘

从而 $x = \frac{a}{3}, EF = \frac{2}{3}a$ 时,

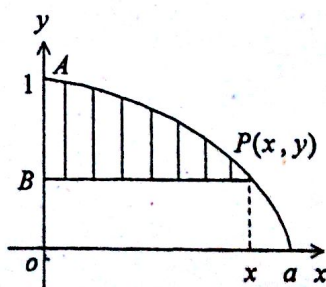
矩形面积最大.

(5')

(1')

3. (11 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上满足条件 $f(x) > 0, f''(x) < 0$, 且 $f(0) = 1$, 又曲边三角形 PAB (如图) 中阴影部分面积 $S = \frac{2}{3}x^3$, 试求 $f(x)$.



$S = \int_0^x f(t) dt - xf(x) = \frac{2}{3}x^3, x \in (0, a]$

(5')

求导: $f(x) - f(x) - xf'(x) = 2x^2$

$\therefore f'(x) = -2x, x \in (0, a]$

从而 $f(x) = -x^2 + C, x \in [0, a] \quad (4')$

又 $f(0) = 1, \therefore C = 1 \quad (1')$

$\therefore f(x) = -x^2 + 1, x \in [0, a]$

又 $f(a) = 0, \therefore a = 1$

故 $f(x) = -x^2 + 1, x \in [0, 1] \quad (1')$