

# 2013-2014 学年第一学期《高等数学 AI》期末试卷 (A)

授课班号 \_\_\_\_\_ 年级专业 \_\_\_\_\_ 学号 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_

题型	选择题	填空题	计算题	综合题	总分	审核
得分						

## 一、填空题(每小题 3 分, 共 30 分)

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2}{\sin x}} = e^6$

2. 设  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x) = \ln(1+ax^2)$  与  $g(x) = \sin^2 3x$  是等价无穷小, 则  $a = 9$

3. 设  $y = \ln(f(\sin x))$ , 其中  $f(u)$  为可导函数, 且  $f(u) > 0$ , 则  $y'(x) = \frac{f'(\sin x) \cos x}{f(\sin x)}$

4. 设  $y = \arctan e + \cos x - \sec x$ , 则  $y' = -\sin x - \sec x \tan x$

5. 设曲线  $y = ax^3 + bx^2$  以点  $(1, 3)$  为拐点, 则数组  $(a, b) = (-\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$

6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-x} - 3x}{1 - \cos x}$  的值等于 3

7. 已知  $\frac{\cos x}{x}$  是  $f(x)$  的一个原函数, 则  $\int f(x) \cdot \frac{\cos x}{x} dx = \frac{\cos^2 x}{2x^2} + C$

8.  $\int_{-\pi}^{\pi} |\cos x| \sin^2 x dx = \frac{4}{3}$

9. 设  $f(x)$  连续, 且  $\int_0^{x^3} f(t) dt = x$ , 则  $f(8) = \frac{1}{12}$

10. 抛物线  $y = x(x-2)$  与直线  $y = x$  所围成的平面图形的面积为  $\frac{9}{2}$

## 二、计算题(每小题 7 分, 共 42 分)

1. 设  $f(x)$  可导, 且  $f(0) = 0, f'(0) = 2$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{2} f'(0) = 1$$

(注: 无  $f'(x)$  连续性, 错解为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2}$ )

得分	阅卷人



2. 设  $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$ , 求  $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a(\cos t - \cos t + t \sin t)}{a(-\sin t + \sin t + t \cos t)} = \frac{at \sin t}{at \cos t} = \tan t \quad (13')$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sec^2 t}{at \cos t} = \frac{\sec^3 t}{at} \quad (14')$$

3. 设  $y = \frac{4x^2-1}{x^2-1}$ , 求  $y^{(n)}$ .

$$y = \frac{4(x^2-1)+3}{x^2-1} = 4 + \frac{3}{x^2-1} = 4 + \frac{3}{(x+1)(x-1)} = 4 + \frac{3}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) \quad (12')$$

$$\therefore y^{(n)} = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{x-1} \right)^{(n)} - \frac{3}{2} \left( \frac{1}{x+1} \right)^{(n)} \quad \text{利用导数公式} \quad (1')$$

$$= \frac{3}{2} \cdot (-1)^n \cdot n! \cdot \left[ \frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right] \quad (4')$$

4. 求不定积分  $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{1+x^4}} dx$ .

法:

$$\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{1+x^4}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} dx + \int \frac{1}{x\sqrt{1+x^4}} dx \quad (1')$$

$$\text{其中 } \int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} dx = \int \frac{\frac{1}{2} d(x^2)}{\sqrt{1+(x^2)^2}} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + \sqrt{1+x^4}) + C \quad (2')$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^4}} \stackrel{\text{令 } x^2 = t}{=} \int \frac{\frac{1}{2} dt}{\frac{1}{2} \sqrt{1+t^2}} = \int \frac{-t}{\sqrt{t^2+1}} dt = \int \frac{-\frac{1}{2} dt^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1+t^2+1}} \quad (3')$$

$$= -\frac{1}{2} \ln(t^2 + \sqrt{1+t^2}) + C = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{x^2} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) + C \quad (13')$$

$$\therefore \int \frac{x^2+1}{x\sqrt{1+x^4}} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + \sqrt{1+x^4}) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{x^2} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) + C \quad (1')$$

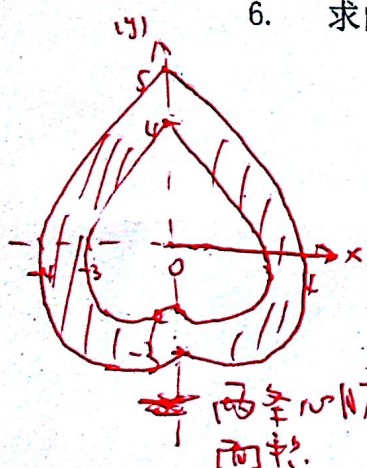
法二: ①  $x > 0$  时  $\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+x^2}} dx = \int \frac{d(x-\frac{1}{x})}{\sqrt{(x-\frac{1}{x})^2+2}} = \ln \left| x - \frac{1}{x} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} \right| + C$  ②  $x < 0$  时  $\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+x^2}} dx = \ln \left| x - \frac{1}{x} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} \right| + C$  ③  $x = 0$  时  $\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+x^2}} dx = \ln \left| x - \frac{1}{x} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} \right| + C$



5. 计算  $\int_0^1 \ln(1+\sqrt{x}) dx$ .

$$\begin{aligned}
 \text{令 } \sqrt{x} &= t, \text{ 则 } dx = 2t dt \\
 \text{原式} &= \int_0^1 \ln(1+t) \cdot 2t dt \quad (\text{分部积分}) \\
 &= [t^2 \ln(1+t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{1+t} dt \quad (4') \\
 &= \ln 2 - \int_0^1 (t-1 + \frac{1}{1+t}) dt \\
 &= \ln 2 - [\frac{1}{2}t^2 - t + \ln(1+t)]_0^1 \\
 &= \ln 2 - (-\frac{1}{2} + \ln 2) \\
 &= \frac{1}{2} \quad (13')
 \end{aligned}$$

6. 求由不等式  $r \leq 4 + \sin \theta$  和  $r \geq 3 + \sin \theta$  所确定的平面图形的面积.



$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (4 + \sin \theta)^2 d\theta - \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (3 + \sin \theta)^2 d\theta \quad (4') \\
 &= \int_0^{2\pi} (\frac{7}{2} + \sin \theta) d\theta = [\frac{7}{2}\theta - \cos \theta]_0^{2\pi} \\
 &\quad \left( \text{或理解为 } \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0 \right) \\
 &= 7\pi \quad (13')
 \end{aligned}$$

三、综合题(满分 28 分)

1. (9 分) 设  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^2 \ln x, & x > 0 \end{cases}$ , 试讨论  $f(x)$  在  $x=0$  处是否可导, 其导函数在  $x=0$  处是否连续?

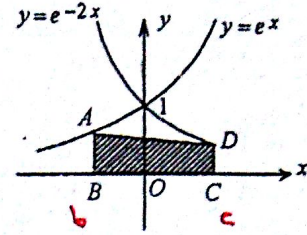
得分	阅卷人

$$\begin{aligned}
 1) \quad f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \ln x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 \quad (12') \\
 f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{0 - 0}{x} = 0 \quad (11') \therefore f'(0) = 0. \text{ 即 } f(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 处可导.} \quad (1') \\
 2) \quad x < 0 \text{ 时, } f'(x) &= 0. \quad x > 0 \text{ 时, } f'(x) = 2x \ln x + x \quad (12') \\
 \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) &= 0 = f'(0), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x \ln x + x) = 0 = f'(0) \quad (12') \\
 \therefore f'(x) &\text{ 在 } x=0 \text{ 处连续.} \quad (11')
 \end{aligned}$$



另解. 梯形的面积  $g(c) = \frac{1}{2} (e^{-2c} + 2e^{-2c}) \cdot (c-b) = \frac{1}{2} \cdot 3e^{-2c} (3c - \ln 2)$   
 $g'(c) = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} e^{-2c} (3 - 6c + \ln 2) = 0 \Rightarrow c = \frac{2\ln 2 + 3}{6}$

如右图, A 和 D 分别是曲线  $y=e^x$  和  $y=e^{-2x}$  上的点, AB 和 DC 均垂直 x 轴, 且



2. (10 分)

$|AB| : |DC| = 2:1, |AB| < 1,$

求点 B 和 C 的横坐标, 使梯形 ABCD 的面积最大.

设 B 和 C 横坐标分别为 b 和 c

由题意,  $\begin{cases} e^b = 2e^{-2c} \\ e^b < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \ln 2 - 2c \\ b < 0 \end{cases} \quad (1')$

从而梯形的面积为  $f(b) = \frac{1}{2} (e^b + \frac{1}{2}e^b) \cdot (c-b) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} e^b (\frac{\ln 2 - b}{2} - b)$   
 $= \frac{3}{8} e^b (\ln 2 - 3b) \quad (2')$

令  $f'(b) = \frac{3}{8} e^b (\ln 2 - 3b - 3) = 0$  解得  $b = \frac{\ln 2 - 3}{3}$

b	$(-\infty, \frac{\ln 2 - 3}{3})$	$\frac{\ln 2 - 3}{3}$	$(\frac{\ln 2 - 3}{3}, 0)$
$f'(b)$	+	0	-
$f(b)$		极大值	

$\therefore \begin{cases} b = \frac{\ln 2 - 3}{3} \\ c = \frac{2\ln 2 + 3}{6} \end{cases} \quad (3')$   
 此时梯形的面积最大.

设函数  $f(x)$  有一阶连续导数, 又  $a(a > 0)$  为函数

3. (9 分)

$F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f'(t) dt$

的驻点. 试证: 在  $(0, a)$  内至少有一点  $c$ , 使  $f'(c) = 0$ .

$F(x) = x^2 \int_0^x f'(t) dt - \int_0^x t^2 f'(t) dt$

$F'(x) = 2x \int_0^x f'(t) dt + x^2 f'(x) - x^2 f'(x)$

$= 2x \int_0^x f'(t) dt = 2x [f(t)]_0^x = 2x [f(x) - f(0)]$

又  $F'(a) = 0 \quad (a > 0) \therefore f(a) - f(0) = 0 \quad (4')$

从而  $f(x) \in C[0, a]$ ,  $f(x) \in D[0, a]$  且  $f(0) = f(a)$

$\therefore$  由 Rolle Th,  $\exists c \in (0, a)$  s.t.  $f'(c) = 0 \quad (5')$