1 2014-2015 学年第一学期《概率统计》试卷（A）

授课班号________年级专业 13工商管理 学号________姓名________

题型	填空题	计算题	综合题	总分	审核
得分					

一、填空题(每小题 5 分，共 25 分)

得分	阅卷人

1. 习题44 已知 $P(A)=0.75$, $P(B)=0.65$ 及条件概率 $P(B|A)=0.8$，则和事件 $A\cup B$ 的概率 $P(A\cup B)=$ 0.8 .

2. 要使

$$F(x)=\begin{cases} A-\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{100}\right)^2}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases},$$

是某随机变量的分布函数，则需 $A=$ 1 .

3. 已知二维随机变量 (ξ,η) 的联合分布函数

$$F(x,y)=P\{\xi<x,\ \eta<y\}$$

用它表示 $P\{a\le\xi<b,\ c\le\eta<d\}=$ $F(b,d)-F(a,d)-F(b,c)+F(a,c)$

4. 设随机变量 $X\sim N(1,4)$, 随机变量 Y 服从参数 $\lambda=\frac{1}{2}$ 的指数分布，其密度函数为 $D(X)=4$ $D(Y)=4$.

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y}, & y>0 \\ 0, & y\le 0\end{cases},$$

而且 X 与 Y 的相关系数为 $\rho_{X,Y}=\frac{1}{2}$，则 $\mathrm{cov}(X,Y)=$ 2 .

5. 设随机变量 ξ 的方差 $D(\xi)=\frac{5}{2}$, $E(\xi)$ 存在，用切比雪夫不等式估计概率 $P\left\{|\xi-E(\xi)|\ge\frac{15}{2}\right\}\le$ $\frac{2}{45}$.

二、计算题(每小题 6 分，共 36 分)

得分	阅卷人

1. 习题44 车间里有甲、乙、丙 3 台机床生产同一种产品，已知它们的次品率依次是 0.2, 0.3, 0.1，而产品数量比为：甲:乙:丙=2:3:5，现从产品中任取 1 个发现它是次品，求次品来自机床乙的概率.

A="任取一件为次品"，B_1="任取一件为甲生产"
B_2="……乙……"
B_3="……丙……"

由Bayes公式

$$P(B_2|A)=\frac{P(B_2)P(A|B_2)}{\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)}\ (3')=\frac{\frac{3}{10}\times0.3}{\frac{2}{10}\times0.2+\frac{3}{10}\times0.3+\frac{5}{10}\times0.1}\ (2')=0.5\ (1')$$

2. 设公共汽车到达某车站的时刻服从10点到10点30分之间的均匀分布，现有乘客10点钟到达这个车站，求他等车时间至少要10分钟的概率.

设等车时间为 X min. 则 $X \sim U(0,30)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30}, & 0<x<30 \\ 0, & 其他. \end{cases} \quad (3')$$

$$P\{X \geq 10\} = \int_{10}^{+\infty} f(x)dx = \int_{10}^{30} \frac{1}{30} dx = \frac{2}{3}. \quad (3')$$

3. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，下表列出了二维随机变量 (X,Y) 联合分布率及关于 X 与 Y 的边缘分布率中的部分数值，试将其余数值填入表中的空白处：

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	p_i
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
p_j	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

设分布律为

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$p_{i\cdot}$
x_1	a_1b_1	a_1b_2	a_1b_3	a_1
x_2	a_2b_1	a_2b_2	a_2b_3	a_2
$p_{\cdot j}$	b_1	b_2	b_3	1

则
$$\begin{cases} a_1b_2 = \frac{1}{8} \\ a_2b_1 = \frac{1}{8} \\ b_1 = \frac{1}{6} \\ a_1+a_2 = 1 \\ b_1+b_2+b_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = \frac{3}{4} \\ a_1 = \frac{1}{4} \\ b_2 = \frac{1}{2} \\ b_3 = \frac{1}{3} \end{cases} \quad (4')$$

(其他 2')

4. 设随机变量 X 服从泊松分布，且

$$3P\{X=1\}+2P\{X=2\}=4P\{X=0\},$$

求 X 的期望与方差.

设 $X \sim P(\lambda)$ ($\pi(\lambda)$). 则 $P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k=0,1,2,\cdots$ $(\lambda>0)$

由已知，$3\cdot\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} + 2\cdot\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} = 4\cdot\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}$ (2')

解得 $\lambda=1$ ($\lambda=-4$ 舍去) (2')

$\therefore E(X) = D(X) = \lambda = 1$. (2')

5. 一加法器同时收到 20 个噪声电压 $V_i\,(i=1,2,\cdots,20)$. 设它们是相互独立的随机变量，且均在 (0,10) 上服从均匀分布，记

教材

$$V=\sum_{i=1}^{20} V_i,$$

试用中心极限定理求 $P\{V>105\}$. 已知：

$F_{0,1}(0.38)=0.648$, $\Phi_{0,1}(0.39)=0.6517$.

$E(V_i)=5$, $D(V_i)=\frac{100}{12}$ $(i=1,2,\cdots,20)$. 从而 $E(V)=20\times5$, $D(V)=20\times\frac{100}{12}$

$V^*=\frac{V-E(V)}{\sqrt{D(V)}}=\frac{V-100}{\sqrt{20\times\frac{100}{12}}}\overset{\sim}{\sim} N(0,1)$ (中心极限Th). (3′)

$P\{V>105\}=P\{V^*>\frac{105-100}{\sqrt{20\times\frac{100}{12}}}\}=P\{V^*>0.39\}\approx1-\Phi(0.39)$

$=1-0.6517=0.3483$. (3′) 不写近似扣一分

6. 设总体 X 的密度为

往年试卷

$$p(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases},$$

其中 $\theta>-1$ 是未知参数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的一个容量为 n 的简单随机样本，试分别用矩法及最大似然法估计 θ.

必须写估计量(大写)才给分

(1) $\mu_1=E(X)=\int_0^1 x(\theta+1)x^{\theta}dx=\frac{\theta+1}{\theta+2}\Rightarrow\theta=\frac{1-2\mu_1}{\mu_1-1}\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{1-2\bar{X}}{\bar{X}-1}$ 为矩估计量. $\hat{\theta}=\frac{1-2\bar{x}}{\bar{x}-1}$ 为矩估计值

(1′) (1′) (1′)

设样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$.

(2) $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}[(\theta+1)x_i^{\theta}]$, $\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}[\ln(\theta+1)+\theta\ln x_i]=n\ln(\theta+1)+\theta\cdot\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

$\frac{L'(\theta)}{L(\theta)}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$, 令 $L'(\theta)=0$ 得 $\hat{\theta}=-\frac{n+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$ (2′)

∴ 最大似然估计量为 $\hat{\theta}=-\frac{n+\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$ (1′)

三、综合题(满分 39 分)

1. (9 分) 假设随机变量 X 服从 (0,1) 上的均匀分布，求证：随机变量

$$Y=-\frac{\ln(1-X)}{2}$$

服从参数为 2 的指数分布.

得分	阅卷人

$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其他.\end{cases}$ (2′)

$y=-\frac{\ln(1-x)}{2}$ 在 (0,1) 内 ↑，采用公式法求 $f_Y(y)$. 方法.公式占4′

$x\in(0,1)$ 时, $y=-\frac{\ln(1-x)}{2}\in(0,+\infty)$

反函数 $x=1-e^{-2y}$. ∴ $y>0$ 时. $f_Y(y)=1\cdot|(1-e^{-2y})'|=2e^{-2y}$ (6′)

从而 $f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, & y>0\\ 0, & y\le0\end{cases}$. (1′)

$Y\sim E(2)$.

②（10 分） 已知随机变量 X_1 和 X_2 的概率分布

习题4.4

X_1	-1	0	1
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

X_2	0	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

而且 $P\{X_1X_2=0\}=1$，（1）求 X_1 和 X_2 的联合分布；

（2）问 X_1 和 X_2 是否独立？为什么？

(1)

$X_2 \backslash X_1$	-1	0	1	$p_{\cdot j}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

(6′)

△ $P\{X_1X_2\neq 0\}=0$

$\{X_1X_2\neq 0\}=\{X_1=-1, X_2=1\}\cup\{X_1=1, X_2=1\}$

(2) 不独立. (2′)

$P\{X_1=-1, X_2=0\}=\frac{1}{4}\neq P\{X_1=-1\}\cdot P\{X_2=0\}$

$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}$ (2′)

3.（10 分） 从自动车床加工的一批零件中随机抽取 10 个，测得其直径与标准尺寸间的偏差（单位：毫米）分别为 2,1,−2,3,2,4,−2,5,3,4 记零件尺寸间的偏差为 ξ，并设 $\xi\sim N(a,\sigma^2)$，试求 a 及 σ^2 的无偏估计值，并求 σ^2 的置信度为 0.9 的置信区间.

{已知 $\chi^2_{\cancel{0.95}\ 0.05}(9)=16.919$, $\chi^2_{\cancel{0.05}\ 0.95}(9)=3.325$}.

$\hat{a}=\bar{\xi}=\frac{1}{10}(2+1+\cdots+4)=2$. (2′)

$\hat{\sigma}^2=S^2=\frac{1}{9}[(2-2)^2+(1-2)^2+\cdots+(4-2)^2]=\frac{52}{9}\approx 5.78$ (2′)

置信区间：$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$ (4′) △ $\alpha=0.1$.

即 $(3.073, 15.639)$ (2′)

4.（10 分） 美国民政部门对某住宅区住户的消费情况进行的调查报告中抽出 9 户为样本，其每年开支除去税款和住宅费用外，依次为：

4.9、5.3、6.5、5.2、7.4、5.4、6.8、5.4、6.3（单位：千元）

若给定（$\alpha=0.05$），试问：所有住户消费数据的总体方差 $\sigma_0^2=0.3$ 是否可信？假定所有户消费数据的总体服从正态分布.

（已知 $\chi^2_{\cancel{0.025}\ 0.975}(8)=2.180$, $\chi^2_{0.95}(8)=15.507$, $\chi^2_{\cancel{0.975}\ 0.025}=17.535$）.

△ 步骤到位要写教材例题那些（拒绝域+结论）

由题意需检验假设 $H_0: \sigma^2=\sigma_0^2=0.3$; $H_1: \sigma^2\neq\sigma_0^2$ (3′)

取检验统计量 $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ (1′) 拒绝域：$\chi^2\leq\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\chi^2\geq\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

即 $\chi^2\leq 2.180$ 或 $\chi^2\geq 17.535$ (1′)

本题，$\bar{x}=\frac{1}{9}(4.9+5.3+\cdots+6.3)=5.9$ (1′)

$S^2=\frac{1}{8}[(4.9-5.9)^2+(5.3-5.9)^2+\cdots+(6.3-5.9)^2]\approx 0.74$ (1′)

$\chi^2=19.767$ 在拒绝域内 (1′) ∴ 拒绝 H_0，接受 H_1，不可信. (2′)