2014-2015 学年第一学期《复变函数与积分变换 A》

课内考试卷（B 卷）

答案

授课班号________ 专业________ 学号________ 姓名________

题号	一	二	三	总分	审核
得分					

一、填空题(共 30 分，每空 3 分)

阅卷人	得分

1. 设复数 $z=\dfrac{2i}{-1+2i}$ $=-\frac{4}{5}+\frac{2}{5}i$，则 $\arg\bar{z}=$ $\arctan\frac{1}{2}-\pi$

2. 已知函数 $f(z)=(ax+by)+i(x+2y)$ 在复平面内处处解析，则 $f'(z)=$ $2+i$

$\Rightarrow a=2,\ b=-1$

3. $\oint_{|z|=2}(\dfrac{\sin z}{z-1}-\dfrac{ze^z}{(z+3)^2})dz=$ $2\pi i\sin 1$

4. $\int_i^{3i}e^z dz=$ $e^{3i}-e^{i}=(\cos 3-\cos 1)+i(\sin 3-\sin 1)$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-i}{3}\right)^n=$ 0

6. $f(z)=\sin 2z$ 展开为 z 的泰勒级数为= $2z-\frac{(2z)^3}{3!}+\frac{(2z)^5}{5!}\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2z)^{2n-1}}{(2n-1)!}$

7. $F[\cos t]=$ $\pi[\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)]$ $F[u(t)]=$ $\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$

8. $L^{-1}[\dfrac{1}{(s-2)^2+3}]=$ $\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t\, e^{2t}$ $L[\delta(t-2)]=$ e^{-2s}

阅卷人	得分

二：计算题(共 30 分，每小题 6 分)

1. 解方程 $z^4-i=-1$

解：$z^4=-1+i=\sqrt{2}\left[\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right]$

$z=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{4}\right)$

$k=0,1,2,3.$

2. 计算$(2-i)^i$的值

$$(2-i)^i = e^{i\,Ln(2-i)}$$

$$= e^{i[\ln\sqrt{5}+i(\arctan(-\frac{1}{2})+2k\pi)]}$$

$$= e^{(\arctan\frac{1}{2}-2k\pi)+i\cdot\ln\sqrt{5}}$$

3. 利用拉氏变换求积分$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2t}-e^{-3t}}{t}dt$.

$$\because \mathcal{L}[e^{-2t}-e^{-3t}] = \frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+3}$$

$$\therefore \int_0^{+\infty}\frac{e^{-2t}-e^{-3t}}{t}dt = \int_0^{\infty}\left(\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+3}\right)ds$$

$$= \ln\frac{s+2}{s+3}\Big|_0^{\infty} = -\ln\frac{2}{3} = \ln 3-\ln 2$$

4. 计算积分$\oint_C\frac{\cos z}{z^2(1-z)}dz$的值，其中$C$为正向圆周$|z|=2$.

$$\oint_c\frac{\cos z}{z^2(1-z)}dz = \oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{\frac{\cos z}{1-z}}{z^2}dz + \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}}\frac{-\frac{\cos z}{z^2}}{z-1}dz$$

$$= 2\pi i\left(\frac{\cos z}{1-z}\right)'\Big|_{z=0} + 2\pi i\left(-\frac{\cos z}{z^2}\right)\Big|_{z=1}$$

$$= 2\pi i\,\frac{\sin z\,(z-1)+\cos z}{(1-z)^2}\Big|_{z=0} - 2\pi i\cos 1$$

$$= 2\pi i\,(1-\cos 1)$$

5. 求$f(t)=\int_0^t e^{-3t}\sin 4t\,dt$的拉氏变换.

$$\mathcal{L}[\sin 4t] = \frac{4}{s^2+4^2}$$

$$\mathcal{L}[\sin 4t\, e^{-3t}] = \frac{4}{(s+3)^2+4^2}$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{4}{s[(s+3)^2+4^2]}$$

三：解答题(共 40 分，每小题题 10 分)

1．在复平面上求解析函数 $f(z)$ 使其虚部 $v(x,y)=3(x^2-y^2)-2y$．

$\because u_x = v_y = -6y-2$

$\therefore u(x,y) = -6xy-2x+c(y)$

$2 \because u_y = -6x + c'(y) = -v_x = -6x$

$\therefore c'(y)=0$

$\therefore c(y)=c$

从而 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

$= -6xy-2x+c+i(3(x^2-y^2)-2y)$.

2．求函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-2)}$ 分别在圆环域 (1) $0<|z|<2$ (2) $|z|>2$ 内的洛朗展开式.

$f(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z}\right)$

(1) $0<|z|<2$ $\quad \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\left(\frac{z}{2}\right)^3\cdots\right)$

$\therefore f(z) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\left(\frac{z}{2}\right)^3\cdots\right)-\frac{1}{2z}\right.$

$= -\frac{1}{2z}-\frac{1}{4}-\frac{z}{8}-\frac{z^2}{16}-\cdots$

(2) $|z|>2$ $\quad \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \left(1+\frac{2}{z}+\left(\frac{2}{z}\right)^2+\cdots\right)$

$\therefore f(z) = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{z}\right)^2+\cdots\right)-\frac{1}{2z}$

$= -\frac{1}{2z}+\frac{1}{2}+\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{4}{z^3}\cdots$

3、求函数 $f_1(t)=t^m u(t)$ 和 $f_1(t)=t^n u(t)$ 的卷积.

$$\mathcal{L}[f_1(t)*f_2(t)]=\mathcal{L}[f_1(t)]\,\mathcal{L}[f_2(t)]$$

$$=\frac{m!}{s^{m+1}}\cdot\frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\therefore f_1(t)*f_2(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{m!\,n!}{s^{m+n+2}}\right]$$

$$=\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}t^{m+n+1}$$

4、求微分方程 $y''-2y'+y=0$ 的满足 $y(0)=0, y'(0)=3$ 的特解.

设 $\mathcal{L}[y(t)]=Y(s)$ 则 $\mathcal{L}[y'(t)]=sY(s)-y(0)=sY(s)$

$$\mathcal{L}[y''(t)]=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)=s^2Y(s)-3$$

原方程两端求拉氏变换得

$$s^2Y(s)-3-2sY(s)+Y(s)=0$$

$$\therefore Y(s)=\frac{3}{s^2-2s+1}=\frac{3}{(s-1)^2}$$

$$\therefore y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=3te^t$$