2005-2006学年第二学期高等数学期中测试及数学竞赛试卷（2005级）

（参加竞赛的同学全做，其他同学只做一、二大题）

一、填空题（8×5分）

1. 设$\vec{a}=(3,-1,-2)$，$\vec{b}=(1,2,-1)$，则$(-2\vec{a})\cdot(3\vec{b})=$____________，$\vec{a}\times(2\vec{b})=$______________。

2. 平面过直线$\begin{cases}x+y=0\\x-y+z=2\end{cases}$且平行另一直线$x=y=z$，则该平面方程为________________________。

3. 设$U=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$，则$gradU\big|_{(1,1,1)}=$_____________________。

4. 设$F\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=0$，$F$偏导存在，则$\frac{\partial z}{\partial x}=$_________________________。

5. 曲面$2xy+z-e^z=3$在点$M(1,2,0)$处的切平面方程为________________________。

6. 交换积分次序$\int_0^1 dx\int_{x-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy=$_______________________________________。

7. $\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f\left(x^2+y^2\right)dy$的极坐标形式为______________________________。

8. 设Ω由$x^2+y^2+z^2=1$所围，则$\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz=$______________。

二、计算题（4×15分）

1. 设f具二阶偏导，g具二阶导数，$z=g(xy)+f\left(xy,\frac{x}{y}\right)$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

2. 设$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\le 1, x\ge 0\right\}$，求$I=\iint\limits_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\,dxdy$。

3. 计算$\iiint\limits_\Omega (x+z)\,dv$，$\Omega$为$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$与$z=\sqrt{x^2+y^2}$所围立体域。

4. 在曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$上找一点，使它到点$\left(1,\sqrt{2},3\sqrt{3}\right)$的距离最短，并求最短距离。

三、数学竞赛加题（5×20 分）

1. 已知两曲线 $y=f\left(x\right)$，$y=\int_0^{\arctan x}e^{-t^2}dt$ 在点 $\left(0,0\right)$ 处的切线相同，写出此切线方程，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\dfrac{2}{n}\right)$。

2. 设 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0\\ x^2g\left(x\right), & x\le 0\end{cases}$，其中 $g\left(x\right)$ 是有界函数，证明 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处可导。

3. 已知 $f\left(x\right)$ 连续，且 $\int_0^x tf\left(x-t\right)dt=1-\cos x$，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)dx$。

4. 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：1）存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $f(\xi)=1-\xi$；2）存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$。

5. 已知 $f(x)$ 单调增加且连续，求证：$\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$。

参考答案

一、

1. 第一空 -18 ；第二空 $(10,2,14)$

2. $x-3y+2z-4=0$

3. $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

4. $\frac{zF_1'}{xF_1'+yF_2'}$

5. $2x+y-4=0$

6. $\int_{-1}^{0}dy\int_{0}^{y+1}f(x,y)\,dx+\int_{0}^{1}dy\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,dx$

7. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{0}^{2\cos\theta}f(r^2)\cdot r\,dr$

8. $\frac{4}{5}\pi$

二、

1. $\frac{\partial z}{\partial x}=yg'+yf_1'+\frac{1}{y}f_2'$， $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=g'+xyg''+f_1'+xyf_{11}''-\frac{x}{y}f_{12}''-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{x}{y}f_{21}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''$

2. $\frac{\pi}{2}\ln 2$ 提示：奇偶对称性

3. $\frac{\pi}{8}$ 提示：奇偶对称性

4. 所求点为$(2,2\sqrt{2},2\sqrt{3})$ ；最短距离为$\sqrt{6}$

三、

1. 切线方程为$y=x$；$\lim_{n\to\infty}nf\left(\frac{2}{n}\right)=2$

2. $f_-'(0)=f_+'(0)=f'(0)=0$

3. 1 提示：令$x-t=u$

4. 提示：1）零点定理 2）在$[0,\xi]$和$[\xi,1]$上分别使用拉格朗日中值定理

5. 提示：考虑$F(x)=\int_a^x tf(t)\,dt-\frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)\,dt$的单调性