5′

2013－2014 学年第一学期《线性代数 B》课内考试卷（A 卷）

授课班号________ 年级专业________ 学号________ 姓名________

题号	一	二	三	四	五	六	总分	审核
题分	24	32	12	12	12	8		
得分								

得分	评阅人

一、填空（共 24 分，每空格 3 分）

1. 在五阶行列式 D 中，项 $a_{13}a_{24}a_{31}a_{45}a_{52}$ 前的符号应取___负___号。

2. 已知四阶行列式 D 中第 3 列元素依次为 1，2，3，4，它们对应的余子式依次为 2，3，4，5，则行列式 D=___-12___。

3. 已知方阵 A 的行列式 $|A|=5$，则 $\left|5\left(A^{*}\right)^{-1}\right|=$___5___。

4. $r_1 \leftrightarrow r_3$ $\quad$ $c_2 \leftrightarrow c_3$

$$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{2013}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^{2014}=\underline{\begin{bmatrix}7&8&9\\4&5&6\\1&2&3\end{bmatrix}}.$$

5. 设 $A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\2&0&4\\3&2&t\end{bmatrix}$，若存在非零向量 β 满足 $A\beta=0$，则 $t=$___6___。

6. 已知 $\vec{\beta}_1=\vec{\alpha}_1$，$\vec{\beta}_2=\vec{\alpha}_1+2\vec{\alpha}_2$，$\vec{\beta}_3=\vec{\alpha}_1+2\vec{\alpha}_2+3\vec{\alpha}_3$，且向量组 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$ 线性无关，则向量组 $\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\vec{\beta}_3$ 线性___无关___。 正负，

7. 已知四元线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的~~三~~两个解向量为 $\vec{\eta}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$，$\vec{\eta}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$，且 $r(A)=3$，则方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的通解 $\vec{x}=$ $\underline{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}}$。

8. 已知三阶方阵 A 的特征值为 0，-1，2，则行列式 $\left|A^2+E\right|=$___10___。

得分	评阅人

二、计算（共 32 分，每小题 8 分）

1. $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

重复

2. 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，求 AB 及 BA.

重复

3. 设 $X = AX + B$, 且 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$，求矩阵 X.

重复

4. 设 $3(\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}) + 2(\vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}) = 5(\vec{\alpha}_3 + \vec{\alpha})$，其中 $\vec{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \vec{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$，求 $\vec{\alpha}$。

重复

5

得分	评阅人

三、（本题 12 分）

求下列向量组的秩和它的一个极大线性无关组，并用该极大线性无关组表示其余向量。

$$\vec{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\1\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_3=\begin{bmatrix}2\\1\\3\\0\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_4=\begin{bmatrix}2\\5\\-1\\4\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_5=\begin{bmatrix}1\\-1\\3\\-1\end{bmatrix}.$$

重复

得分	评阅人

四、（本题 12 分）当 a,b 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=1\\ 2x_1+4x_2-2x_3=b\\ 2x_1+3x_2+ax_3=0\end{cases}$$

有惟一解、无解、有无穷多解，在线性方程组有无穷多解时，求出其通解。

1) $|A|=\begin{vmatrix}1&1&2\\2&4&-2\\2&3&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&2\\0&2&-6\\0&1&a-4\end{vmatrix}=2a-2\neq 0$，即 $a\neq 1$ 时，有唯一解

2) $a=1$ 时

$$\begin{bmatrix}1&1&2&1\\2&4&-2&b\\2&3&1&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&2&1\\0&2&-6&b-2\\0&1&-3&-2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&2&1\\0&1&-3&-2\\0&0&0&b+2\end{bmatrix}\ (*)$$

则 $b+2\neq 0$，即 $a=1$ 且 $b\neq -2$ 时无解.

3) $a=1$ 且 $b=-2$ 时，$(*)\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&5&3\\0&1&-3&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$；$\begin{cases}x_1=-5x_3+3\\x_2=3x_3-2\end{cases}$，有无穷多解.

通解为 $\begin{bmatrix}3\\-2\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}-5\\3\\1\end{bmatrix}$.

得分	评阅人

五、（本题 12 分）

求可逆矩阵 P 及对角矩阵 Λ，使 $P^{-1}AP=\Lambda$，其中矩阵

$$A=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{bmatrix}$$

重复

得分	评阅人

六、证明（本题 8 分）

设 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_{m-1}(m>3)$ 线性无关，而 $\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\cdots,\vec{\alpha}_{m-1},\vec{\alpha}_m$ 线性相关，证明；（1）$\vec{\alpha}_m$ 可由 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_{m-1}$ 线性表示；（2）$\vec{\alpha}_1$ 不能由 $\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\cdots,\vec{\alpha}_{m-1},\vec{\alpha}_m$ 线性表示。

重复