河海大学 2007~2008 学年第一学期

《高等数学》（上）期末试卷

考试对象：2007 级

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1.设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{f(1)-f(1-x)}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(1,f(1)\right)$ 处的切线的斜率为（　　）。

A．2　　B.-2　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $-\dfrac{1}{2}$

2.曲线 $y=e^{-\frac{1}{x}}$（　　）。

A.仅有水平渐近线　　B.仅有垂直渐近线

C.既有水平渐近线又有垂直渐近线　　D.无渐近线

3.设 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极大值，则必有（　　）。

A． $f'(x_0)=0$　　B. $f''(x_0)<0$

C. $f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)<0$　　D. $f'(x_0)=0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在

4．若 $\int f(x)dx=F(x)+C$，且 $x=at+b$，则 $\int f(t)dt=$（　　）。

A. $F(x)+C$　　B. $\dfrac{1}{a}F(ax+b)+C$

C. $F(ax+b)+C$　　D. $F(t)+C$

5.当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\int_0^{\sin x}\sin(t^3)dt$ 与 $g(x)=x^3+x^4$ 相比是（　　）。

A.高阶无穷小　B.低阶无穷小　C.等价无穷小　D.同阶无穷小，但不是等价无穷小

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$_________。2.设 $f''(x)$ 连续，且 $n\int_0^1 xf''(2x)dx=\int_0^2 xf''(x)dx$，

则 n=________。___

3.设 $f(x)$ 为连续奇函数，记 $F(x)=\int_0^x \frac{f(t)+1}{1+t^2}dt$ 确定，则 $F'(0)=$____________。

4. $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=k$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x+a)-f(x)\right]=$____________。

5.设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2-2\cos x}}{x}, x<0\\ ae^x, x\ge 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 a=____________。

三、解下列各题（每小题 6 分，共 12 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$

2.设 $y^{(n-2)}=\sqrt{x^2+1}-\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，求 $y^{(n)}$

四、解下列各题（每小题 8 分，共 40 分）

1.设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，且 $f(x)>0$，证明曲线 $y=\int_{-1}^{1}|x-t|f(t)dt$ 在 $[-1,1]$ 上是凹的。

2.计算 $y=\int_{-1}^{1}(x^3\tan^2 x+\dfrac{x+1}{\sqrt{3-2x}})dx$

3.已知可微函数 $y=f(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\Delta x+\alpha$，其中当 $\Delta x\to 0$ 时，α 是 Δx 的高阶无穷小，求 $f(x)$。

4.设 $f(x)=x+\int_0^1 f(x)e^{-x}dx$，求 $f(x)$。　　5.设 $x>0$，求满足不等式 $\ln(x)\le A\sqrt{x}$ 的最小正数 A。

五、（8 分） 求曲线 $y=2x-x^2$ 及直线 $y=x$ 和 x 所围成的平面图形的面积，并求该平面图形绕 y 轴旋转所得旋转体体积。

六、（10 分） 设 $y=f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的任一非负连续函数，（1）试证存在 $\xi\in(0,1)$ 使得在 $[0,\xi]$ 上以 $f(\xi)$ 为高的矩形面积等于在 $[0,\xi]$ 上以 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形面积；（2）又设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导，且 $f'(x)>-\frac{2f(x)}{x}$，证明（1）中的 ξ 是唯一的。

附加题（5 分）　设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数，

$a_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)dx\,(n=1,2,\ldots)$，证明 $\lim_{n\to\infty}a_n$ 存在。

2007 级高等数学（上）期末试卷参考答案

一、B　C　D　D　A。　　　二、1. e^6，　2.4，　3.1，　4.ka，　5.-1

三、（1）原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{\tan x-\sin x}{x\left[\ln(1+x)-x\right]}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\right. = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\ln(1+x)-x} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\dfrac{1}{1+x}-1} = \dfrac{1}{2}$

（2）$y^{(n-1)}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{x-1}{\sqrt{1+x^2}},\ y^{(n)}=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-(x-1)\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\dfrac{1+x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

四、（1）$y=\int_{-1}^{1}|x-t|f(t)dt=\int_{x}^{1}(x-t)f(t)dt+\int_{x}^{1}(t-x)f(t)dt=x\int_{-1}^{x}f(t)dt-\int_{-1}^{x}tf(t)dt+$

$\int_{x}^{1}tf(t)dt-x\int_{x}^{1}f(t)dt$　　$y'=\int_{-1}^{x}f(t)dt+xf(x)-xf(x)-xf(x)-\int_{x}^{1}f(t)dt+xf(x)$

$y''=f(x)+f(x)=2f(x)>0$, 所以 $f(x)$ 是凹的。

（2）原式 $=\int_{-1}^{1}\dfrac{x+1}{\sqrt{3-2x}}dx=\dfrac{1}{2}\int_{\sqrt{5}}^{1}\dfrac{5-t^2}{t}(-t)dt=\dfrac{1}{2}\int_{1}^{\sqrt{5}}(5-t^2)dt=\dfrac{1}{3}(5\sqrt{5}-7)$

（3）$y'=\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}},\ y=\int\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$, 令 $x=\tan t$, 则

$y=\int\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}=\int\tan^3 t\sec t dt=\int(\sec^2 t-1)d\sec t=\dfrac{1}{3}\sec^3 t-\sec t+C=\dfrac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}-(1+x^2)^{1/2}+C$

（4）$\int_0^1 f(x)e^{-x}dx=\int_0^1 xe^{-x}dx+\int_0^{1'}\left(\int_0^1 f(x)e^{-x}dx\right)e^{-x}dx=\int_0^1 xe^{-x}dx+\left(\int_0^1 f(x)e^{-x}dx\right)\int_0^1 e^{-x}dx$

$=-xe^{-x}\Big|_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx+\int_0^1 f(x)e^{-x}dx\int_0^1 e^{-x}dx$

$=-2e^{-1}+1-(1-e^{-1})\int_0^1 f(x)e^{-x}dx$ 所以 $\int_0^1 f(x)e^{-x}dx=e-2$, 即 $f(x)=x+e-2$

（5）即求函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ 在 $(0,+\infty)$ 内的最大值。$f'(x)=\dfrac{2-\ln x}{2x^{3/2}}$, 令 $f'(x)=0$,

得唯一驻点 $x=e^2$，当 $0<x<e^2$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>e^2$ 时，$f'(x)<o$，所以

$x=e^2$ 是 $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ 在 $(0,+\infty)$ 内的极大值即最大值点，此时 $A=f(e^2)=\dfrac{2}{e}$。

五、$y=2x-x^2$ 与 $y=x$ 的交点为（0,0），（1,1）面积 $A=\int_0^1(1+\sqrt{1-y}-y)dy=$

$(y-\frac{2}{3}(1-y)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}y^2)\Big|_0^1=\frac{7}{6}$ 体积 $V=\pi\int_0^1\left[(1+\sqrt{1-y})^2-y^2\right]dy=\pi\left[2y-\frac{4}{3}(1-y)^{3/2}-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right]\Big|_0^1=\frac{5}{2}\pi$

六、（1）即证 $\exists\xi\in(0,1)$ 使 $\xi f(\xi)=\int_\xi^1 f(x)dx$，即证方程 $xf(x)-\int_x^1 f(x)dx=0$ 在

（0,1）内有根。令 $F(x)=x\int_x^1 f(t)dt$，则 $F(x)$ 在[0,1]上连续，当 $x\in(0,1)$，且

$F(0)=0=F(1)$，由罗尔定理知 $\exists\xi\in(0,1)$，使 $F'(\xi)=0$，即 $\xi f(\xi)=\int_\xi^1 f(x)dx$。

（2）反证：若 $\exists\xi,\eta\in(0,1)$，且 $\xi\neq\eta$ 使 $F'(\xi)=F'(\eta)=0$，在以 ξ,η 为端点的区间上，$F'(x)$ 满足罗尔定理，故在 ξ,η 之间，使 $F''(\varsigma)=0$，但

$F''(x)=-f(x)-f(x)-xf'(x)<0$ 矛盾，唯一性得证。

附加题：$f(x)$ 单调减少，故当 $k<x<k+1$ 时，$f(k+1)<f(x)<f(k)$，$f(k+1)<$

$\int_k^{k+1}f(x)dx<f(k)(k=1,2,\ldots)$，$a_n=\sum_{k=1}^n f(k)-\int_1^n f(x)dx=\sum_{k=1}^n f(k)-\sum_{k=1}^{n-1}f(x)dx=$

$\sum_{k=1}^n\left[f(k)-\int_k^{k+1}f(x)dx\right]+f(n)=\sum_{k=1}^n\left[f(k)-f(\xi)\right]+f(n)\geq 0,\xi\in[k,k+1]$ 即数列有下界。又 $a_{n+1}-a_n$

$=f(n+1)-\int_n^{n+1}f(x)dx=f(n+1)-f(\eta)\leq 0,\eta\in[n,n+1]$，即数列 a_n 单调减少。所以 $\lim_{n\to\infty}a_n$

存在。