2012-2013 学年第二学期《高等数学 AⅡ》期末试卷

一、填空题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与柱面 $z^2=2x$ 所围立体在 xOy 面上的投影曲线的方程

   为____________________________。

2. 设 $u=\ln\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}$，则 $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right|_{(1,1,1)}=$______________________。

3. 交换积分次序 $\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x,y)\,dx=$__________________________________。

4. 设平面曲线 L 为下半圆周 $y=-\sqrt{1-x^2}$，则曲线积分 $\int_L (x^2+y^2)\,ds=$

   ____________。

5. 设 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，已知 $f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\le x<0\\ 1-x, & 0\le x<3\end{cases}$，

   又设 $f(x)$ 的傅立叶级数展开式的和函数为 $S(x)$，则 $S(\pi)=$________________。

6. 若方程 $y''+py'+qy=0$（p,q 均为实常数）有特解 $y_1=\sin 2x$，$y_2=\cos 2x$，

   则 p 等于______________，q 等于______________。

二、计算题（每小题 6 分，共 36 分）

1. 设 $f(x,y)=xe^{-y}+\sin\sqrt[3]{y}\cdot\tan\sqrt[3]{x}$，试讨论在点 $(0,0)$ 处的两个偏导数 $f'_x(0,0)$，

   $f'_y(0,0)$ 是否存在？如存在求出导数值。

2. 设$u = x^2 yz^3$，其中$z = z(x, y)$是由方程$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0$所确定的可微函数，且$z(1,1) = 1$，求$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$。

3. 计算二重积分$\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}\,dxdy$，其中$D$是由$y = x$，$y = 0$，$x = 1$所围成的区域。

4. 计算$\iint\limits_\Sigma (x - y^2)\,dydz + (y - z^2)\,dzdx + (z - x^2)\,dxdy$，其中$\Sigma$是圆锥面$z^2 = x^2 + y^2$在区域$0 \le z \le h$中的部分曲面的下侧，$h$是正数。

5. 求级数$1+3x+5x^2+7x^3+\cdots$在$(-1,1)$内的和函数。

6. 求微分方程$y^2\cdot y''=y'$的通解。

三、综合题（满分 34 分）

1. （10 分）若$u_n>0$，$v_n>0$（$n=1,2,\cdots$），且$\frac{u_{n+1}}{u_n}\le\frac{v_{n+1}}{v_n}$。证明：若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$$

也收敛。

2. （12 分）当$x>0$，$y>0$，$z>0$时，求函数$u=\ln x+2\ln y+3\ln z$在球面$x^2+y^2+z^2=6r^2$上的最大值，并证明对任意的正实数a，b，c，不等式$ab^2c^3\le 108\left(\dfrac{a+b+c}{6}\right)^6$均成立。

3. （12 分）已知上半平面内一曲线$y=y(x)\,(x\ge 0)$过原点，且曲线上任一点$M(x_0,y_0)$处切线斜率数值上等于该点横坐标减去此曲线与x轴，直线$x=x_0$所围成的面积，求此曲线方程。