专业班级__________学号__________姓名__________

习题一　随机事件及其概率和性质

1.1 选择题

(1) 设 A, B 为任意两个事件, 则下列关系式成立的是 (　　).

(A) $(A \cup B) - B = A$　　(B) $(A \cap B) - B \supset A$

(C) $(A \cap B) - B \subset A$　　(D) $(A - B) \cup B = A$

(C)

(2) 以 A 表示 "甲种产品畅销, 乙种产品滞销", 则对立事件 $\overline{A}$ 为 (　　).

(A) 甲种产品滞销, 乙种产品畅销　　(B) 甲、乙产品均畅销

(C) 甲种产品滞销　　(D) 甲产品滞销或乙产品畅销

(D)

1.2 指出下列关系中那些是正确的, 那些是错误的, 并说明理由.

(1) $(A \cup B) - C = A \cup (B - C)$；　　(2) $(A \cup B) - A = B$；

(3) $(\overline{A \cup B})C = \overline{A}B \cup \overline{B}C$；　　(4) $\overline{A}B \cup A\overline{B} \cup \overline{A}\,\overline{B} = \overline{AB}$；

(5) $(AB)(A\overline{B}) = \emptyset$；　　(6) 若 $B \subset A$, 则 $A \cup B = A$.

解：（1）错误；（2）错误；（3）错误；（4）正确；（5）正确；（6）正确

1.3 试把 $A \cup B \cup C$ 表示成三个两两互不相容事件的和.

解：$A \cup (\bar{A}B) \cup (C\overline{A \cup B})$

1.4 设 $\Omega = \{x \mid 0 \le x \le 2\}$, $A = \{x \mid 0.5 < x \le 1\}$, $B = \{x \mid 0.25 \le x < 1.5\}$, 请具体写出下列各事件:

(1) $\overline{A}B$;　　(2) $\overline{A} \cup B$;　　(3) $\overline{\overline{A}\,\overline{B}}$;　　(4) $\overline{AB}$.

解：(1)$\overline{A}B = \{x|\frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2}$ 或 $1 < x < \frac{3}{2}\}$

(2)$\overline{A} \cup B = \Omega$

(3)$\overline{\overline{A}\,\overline{B}} = A \cup B = B$

(4)$\overline{AB} = \overline{A} = \{x|0 \le x \le \frac{1}{2}$ 或 $1 < x \le 2\}$.

1.5 一个工人生产了四件产品, 以 A_i 表示他生产的第 i 件产品是正品 $(i=1,2,3,4)$, 试用 A_i $(i=1,2,3,4)$ 表示下列事件:

(1) 没有一件产品是次品; (2) 至少有一件产品是次品;

(3) 恰有一件产品是次品; (4) 至少有两件产品不是次品.

解：(1)$A_1A_2A_3A_4$;

(2)$\overline{A_1A_2A_3A_4}$

(3)$\bar{A}_1A_2A_3A_4\cup A_1\bar{A}_2A_3A_4\cup A_1A_2\bar{A}_3A_4\cup A_1A_2A_3\bar{A}_4$

(4)$A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_1A_4\cup A_2A_3\cup A_2A_4\cup A_3A_4$

1.6 设 A,B,C 是三个事件, 且 $P(A)=P(B)=P(C)=1/4$, $P(AC)=1/8$, $P(AB)=P(BC)=0$, 求 A,B,C 中至少有一个发生的概率.

解： $P(A\cup B\cup C)=P(A\cup C)+P(B)=P(A)+P(C)-P(AC)+P(B)=5/8.$

1.7 设 A,B 是两事件, 且 $P(A)=0.6$, $P(B)=0.7$. 问

(1) 在什么条件下 $P(AB)$ 取到最大值, 最大值是多少?

(2) 在什么条件下 $P(AB)$ 取到最小值, 最小值是多少?

解： 当 $A\subset B$ 时， $P(AB)=0.6$;

当 $A\cup B=\Omega$ 时， $P(AB)=0.3$.

1.8 袋中有白球 5 只, 黑球 6 只, 依次从袋中不放回取出三只, 求顺序为黑白黑的概率.

解：

$$p=\frac{6\times 5\times 5}{11\times 10\times 9}=5/33.$$

1.9 (1) 用 "$\le$" 按由小到大的顺序排列 $P(A)$, $P(A\cup B)$, $P(AB)$, $P(A)+P(B)$ 四个数.

(2) 已知 $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(B)=\frac{1}{3}$, $P(AB)=\frac{1}{6}$, 求 $P(A\cup B)$, $P(\overline{A}\cap\overline{B})$, $P(A\overline{B})$, $P(A\overline{B}\cup\overline{A}B)$.

解：(1)

$$AB\subset A\subset A\cup B.$$

$$P(AB)\le P(A)\le P(A\cup B)\le P(A)+P(B).$$

(2)$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=5/12,$

$P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-P(A\cup B)=7/12,$

$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=1/12,$

同理 $P(\overline{A}B)=1/6$,

$P(A\overline{B}\cup\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=1/4$..

1.10 设 A,B 为随机事件, $P(A)=0.5$, $P(A-B)=0.2$, 求 $P(\overline{AB})$.

解:

$$P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-[P(A)-P(A-B)]=0.7.$$

专业班级____________学号____________ 姓名 ____________

习题二　古典概型、条件概率及事件的独立性

2.1 在 1500 个产品中有 400 个次品, 1100 个正品, 任取 200 个.

(1) 求确有 90 个次品的概率;　　(2) 求至少有 2 个次品的概率.

解：(1)

$$p = \frac{C_{400}^{90} C_{1100}^{110}}{C_{1500}^{200}}.$$

(2)

$$p = 1 - \frac{C_{1100}^{200}}{C_{1500}^{200}} - \frac{C_{400}^{1} C_{1100}^{199}}{C_{1500}^{200}}$$

2.2 盒子中有 10 只球, 其中 4 只红球, 6 只黑球, 今从盒中取三次球, 一次取一只, 不放回.

(1) 求第三次取球取到黑球的概率;　　(2) 求第三次取球才取到黑球的概率.

解：(1)$p = 3/5$,

(2)

$$p = \frac{C_4^1 C_3^1 C_6^1}{10 \times 9 \times 8} = 1/10.$$

2.3 从 $a, b, c, ..., h$ 这 8 个字母中任意选出三个不同的字母, 试求下列事件的概率:

$A = \{$三个字母中不含 a 与 $b\}$;

$B = \{$三个字母中不含 a 或 $b\}$;

$C = \{$三个字母中不含 a 但含有 $b\}$.

解：设 所取三字母中不含 a 为事件 B_1；所取三字母中不含 b 为事件 B_2，

$$A = B_1 B_2; B = B_1 \cup B_2, C = B_1 \bar{B}_2,$$

$$P(A) = \frac{C_6^3}{C_8^3} = 5/14;$$

$$P(B) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 B_2) = \frac{C_6^3 + C_6^2 \times 2}{C_8^3} = 25/28 = \frac{C_7^3 + C_7^3 - C_6^3}{C_8^3};$$

$$P(C)=\frac{C_6^2}{C_8^3}=15/56.$$

2.4 从 6 双不同的手套中任取 4 只, 问其中至少有一双配对的概率是多少?

解:

$$p=1-\frac{C_6^4(C_2^1)^4}{C_{12}^4}=17/33\approx 0.515.$$

2.5 袋中有 10 只球, 9 只白球, 1 只红球, 10 个人依次从袋中各取一球, 每人取球后不再放回袋中, 问第一人、第二人、...、最后一人取得红球的概率各是多少?

解：设 A_i 为 第 i 个取得红球，则由乘法公式

$$P(A_1)=1/10$$

$$P(A_2)=P(\bar{A}_1A_2)=P(A_2|\bar{A}_1)P(\bar{A}_1)=9/10\cdot 1/9=1/10....$$

2.6 (1) 已知 $P(\overline{A})=0.3, P(B)=0.4, P(A\overline{B})=0.4$. 求 $P(B|A\cup\overline{B})$;

(2) 已知 $P(A)=\frac{1}{4}, P(B|A)=\frac{1}{3}, P(A|B)=\frac{1}{2}$. 求 $P(A\cup B)$.

解：(1)

$$P(B|A\cup\overline{B})=\frac{P(AB)}{P(A\cup\overline{B})}=1/3.$$

(2)

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=1/3.$$

2.7 有两箱同种类的零件, 第一箱装 50 只, 其中 10 只一等品; 第二箱装 30 只, 其中 18 只一等品. 今从两箱中任挑出一箱, 然后从该箱中取零件两次, 每次任取一只, 作不放回抽样. 试求:

(1) 第一次取到的零件是一等品的概率;

(2) 第一次取到的零件是一等品的条件下, 第二次取到的也是一等品的概率.

解：A_i 表示取出的零件来自第 i 箱; B_i 表示第 i 次取出的零件是一等品,$i=1,2$;

(1)

$$P(B_1)=P(A_1)P(B_1|A_1)+P(A_2)P(B_1|A_2)=2/5;$$

(2)

$$P(B_2|B_1) = \frac{P(B_1B_2)}{P(B_1)} = \frac{690}{1421} \approx 0.485.$$

2.8 甲、乙、丙三人同时对飞机进行射击, 三人击中的概率分别是 0.4, 0.5, 0.7, 飞机被一人击中而被击落的概率为 0.2, 被两人击中而被击落的概率为 0.6, 若三人都击中, 飞机必定被击落. 求飞机被击落的概率.

解：设 A_i 为飞机被击中 i 次， $i = 0, 1, 2, 3$, B 为飞机被击落

$$P(A_1) = 0.36, P(A_2) = 0.41, P(A_3) = 0.14.$$

$$P(B) = \sum_{i=0}^{3} P(A_i)P(B|A_i) = 0.458.$$

2.9 设玻璃杯整箱出售, 每箱 20 只, 各箱含 0, 1, 2 只残次品的概率分别为 0.8, 0.1, 0.1. 一顾客欲购买一箱玻璃杯, 由售货员任取一箱, 顾客从中随机察看 4 只, 若无残次品, 则买下该箱玻璃杯, 否则不买. 求:

(1) 顾客买下该箱玻璃杯的概率;

(2) 在顾客买下该箱玻璃杯中, 确实没有残次品的概率.

解：A_i 表示每箱含有0，1，2只残次品， B 表示顾客买下该箱玻璃杯；

(1)

$$P(B) = \sum_{i=0}^{2} P(A_i)P(B|A_i) = \frac{448}{475} \approx 0.943;$$

(2)

$$P(A_0|B) = \frac{95}{112} \approx 0.848.$$

2.10 有朋友自远方来访, 他乘火车、轮船、汽车、飞机来的概率分别是 0.3, 0.2, 0.1, 0.4. 如果他乘火车、轮船、汽车来的话, 迟到的概率分别是 $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}$, 而乘飞机则不会迟到. 结果他迟到了, 试问他是乘火车来的概率是多少?

解：设 A_1, A_2, A_3, A_4 分别表示朋友乘火车、轮船、汽车、飞机来， B 表示朋友迟到；则

$$P(B) = \sum_{i=1}^{4} P(A_i)P(B|A_i) = 0.15,$$

$$P(A_1|B) = 0.5.$$

2.11 (1) 设四事件 A, B, C, D 相互独立, 且 $P(A) = 0.1$, $P(B) = 0.2$, $P(C) = 0.3$, 则 “这三个事件恰好发生两个” 的概率为 ________________;

(2) 若事件 A 与 B ________________, 则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;

(3) 若事件 A 与 B ________________, 则 $P(AB) = P(A)P(B)$;

(4) 若事件 A 与 B ________________, 则 $P(A) = 1 - P(B)$.

(1)0.092（23/250）；

(2)互不相容;

(3) 相互独立;

(4) 相互对立。

专业班级__________学号__________姓名 __________

习题三 离散型随机变量及其分布

3.1 填空题

(1) 进行重复独立试验, 设每次试验成功的概率为 p, 失败的概率为 $q = 1 - p$ $(0 < p < 1)$.

a. 将试验进行到出现一次成功为止, 以 X 表示所需的试验次数, 则 X 的分布律为 $P\{X = k\} =$ __________$(k =$ __________$)$;

b. 将试验进行到出现 r 次成功为止, 以 Y 表示所需的试验次数, 则 Y 的分布律为 $P\{Y = k\} =$ __________$(k =$ __________$)$.

(2) 某人射击命中率为 0.7, 现独立射击 10 次, 以 X 表示命中次数, 则 X 的分布律为 $P\{X = k\} =$ __________$(k =$ __________$)$.

(1)$q^{k-1}p, k = 1, 2, \cdots,$

(2) $C_{k-1}^{r-1}p^r q^{k-r}, k = r, r+1, \cdots,$

(3)$C_{10}^{k}0.7^k 0.3^{10-k}, k = 0, 1, \cdots, 10.$

3.2 试判断下面给出的是否为某个随机变量的分布律?

(1)

X	1	2	3
p	0.7	0.1	0.1

(2)

X	1	2	...	k	...
p	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	...	$\left(\frac{1}{2}\right)^k$	

解：(1)不是， $0.7 + 0.1 + 0.1 \neq 1$;

(2)几何分布

3.3 计算下列各题

(1) 已知随机变量 X 的分布律为 $P\{X = k\} = a\frac{\lambda^k}{k!}, \lambda > 0$ 为常数, $k = 0, 1, 2, ...$, 求 a.

(2) 已知随机变量 X 的分布律为 $P\{X = k\} = a\left(\frac{2}{3}\right)^k, k = 1, 2, 3$, 求 a.

(3) 设随机变量 X 服从泊松分布, 且 $P\{X = 1\} = P\{X = 2\}$, 求 $P\{X = 4\}$.

解：(1)

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} P\{X = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} a\frac{\lambda^k}{k!} = a \cdot e^{\lambda}, a = e^{-\lambda}.$$

(2)

$$1 = \sum_{k=1}^{3} P\{X = k\} = \sum_{k=1}^{3} a(2/3)^k = a \cdot e^{\lambda}, a = \frac{27}{38}.$$

(3)

$$P\{X=1\}=P\{X=2\}\Rightarrow \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}\Rightarrow \lambda=2,$$

$P\{X=4\}=\frac{\lambda^4}{4!}e^{-\lambda}=2e^{-2}/3.$

3.4 有甲、乙两种味道和颜色都极为相似的名酒各 4 杯. 如果任选 4 杯, 从中能将甲种酒全部辨别出来, 算是试验成功一次.

(1) 某人随机地去猜, 问他试验一次成功的概率是多少?

(2) 某人声称他通过品尝能区分两种酒. 他连续试验 10 次, 成功 3 次. 试推断他是猜对的, 还是确有区分的能力 (设各次试验是相互独立的).

解：(1)超几何分布

$$P\{X=k\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}.$$

$$p=\frac{1}{C_8^4}=1/70.$$

(2)$X\sim B(10,1/70)$,

$$P\{X=3\}\approx 0.0003.$$

认为他有区分能力。

3.5 有一大批产品, 其验收方案如下. 先作第一次检验: 从中任取 10 件, 经检验无次品接受这批产品, 次品数大于 2 拒收; 否则作第二次检验, 其做法是从中再任取 5 件, 仅当 5 件中无次品时接受这批产品. 若产品的次品率为 10%, 求

(1) 这批产品经第一次检验就被接受的概率.

(2) 这批产品需要做第二次检验的概率.

(3) 这批产品按第二次检验的标准被接受的概率.

(4) 这批产品在第一次检验时未能作出决定且第二次检验时被接受的概率.

解：设第一次检验出的次品数为 X, 第二次检验出的次品数为 Y, 则 $X\sim B(10,0.1), Y\sim B(5,0.1)$.

(1)

$$P\{X=0\}\approx 0.349.$$

(2)

$$P\{1\le X\le 2\}=P\{X=1\}+P\{X=2\}\approx 0.581.$$

(3)

$$P\{Y=0\}\approx 0.590.$$

(4)

$$P\{Y=0,1\le X\le 2\}\approx 0.343.$$

(X,Y 相互独立。)

3.6 某产品的次品率为 0.1, 检验员每天检验 4 次, 每次随机地任取 10 件产品进行检验, 如果发现其中的次品数多于 1, 就去调整设备. 以 X 表示一天中调整设备的次数, 求 X 的分布律.

解： Y 表示 10件中次品的个数， $Y\sim B(10,0.1)$.

$X\sim B(4,p)$, 其中

$$p=P\{Y\ge 2\}=1-P\{Y=0\}-P\{Y=1\}\approx 0.264.$$

3.7 把三个球随机地投入三个盒子中去, 每个球投入各个盒子的可能性是相同的. 设随机变量 X 及 Y 分别表示投入第一个及第二个盒子中的球的个数, 求 (X,Y) 的分布律.

解：

$$P\{X=i,Y=j\}=\frac{C_3^iC_{3-i}^j}{3^3},(i,j=0,1,2,3,i+j\le 3.)$$

X \ Y	0	1	2	3
0	$\frac{1}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{1}{27}$
1	$\frac{3}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{3}{27}$	0
2	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	0	0
3	$\frac{1}{27}$	0	0	0

3.8 以 X 记某医院一天出生的婴儿人数, Y 记其中男婴的人数, 设 X 和 Y 的联合分布律为:

$$P\{X=n,Y=m\}=\frac{e^{-14}\,(7.14)^m\,(6.86)^{n-m}}{m!\,(n-m)!},\quad m=0,1,2,...,n;\quad n=0,1,2,...$$

求 (1) 边缘分布律; (2) 条件分布律.

解： (1)

$$P\{X=n\}=\sum_{m=0}^{n}\frac{e^{-14}\,(7.14)^m\,(6.86)^{n-m}}{m!\,(n-m)!}=e^{-14}14^n/(n!),n=0,1,2,\cdots,$$

$$P\{Y=m\}=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{e^{-14}\,(7.14)^m\,(6.86)^{n-m}}{m!\,(n-m)!}=7.14^m e^{-7.14}/(m!),m=0,1,2,\cdots,$$

(2)

$$P\{X=n|Y=m\}=6.86^{n-m}e^{-6.86}/((n-m)!),n=m,m+1,\cdots,$$

$$P\{Y=m|X=n\}=C_n^m(7.14/14)^m(1-7.14/14)^{n-m},m=0,1,\cdots,n.$$

3.9 设某班车起点站时车上乘客人数 X 服从参数为 $\lambda\,(\lambda>0)$ 的泊松分布, 每位乘客在中途下车的概率为 $p\,(0<p<1)$, 且各乘客中途下车与否相互独立. 以 Y 表示在中途下车的乘客人数. 求:

(1) 在发车时有 n 位乘客的条件下, 中途有 m 人下车的概率;

(2) 二维随机向量 (X,Y) 的概率分布.

解：(1)$Y\sim B(n,p)$,

$$P\{Y=m|X=n\}=P\{Y=m\}=C_n^m p^m(1-p)^{n-m},0\le m\le n,n=0,1,2,\cdots,$$

(2)

$$\begin{aligned}&P\{X=n,Y=m\}=P\{X=n\}P\{Y=m|X=n\}\\&=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}C_n^m p^m(1-p)^{n-m}.0\le m\le n,n=0,1,2,\cdots,\end{aligned}$$

专业班级____________学号____________姓名____________

习题四　离散型随机变量的独立性及其函数的分布

4.1 填空题

(1) 设 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	1	2	3
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β

若 X 与 Y 相互独立, 则 $\alpha =$ ____________, $\beta =$ ____________.

(2) 设随机变量 X 的分布律为

X	-2	-1	0	1	2
p	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

则 $Y = X^2$ 的分布律为 ____________.

(3) 设相互独立的随机变量 X,Y 有相同的分布律, X 的分布律为

X	0	1
p	0.5	0.5

则 $U = \max\{X,Y\}$ 的分布律为 ____________; $V = \min\{X,Y\}$ 的分布律为 ____________.

(1)2/9,1/9;

(2)

X^2	0	1	4
p	2/5	1/5	2/5

(3)

U	0	1
p	0.25	0.75

,

V	0	1
p	0.75	0.25

4.2 设随机变量 X_1, X_2, X_3, X_4 独立同分布, 且$P\{X_i = 1\} = 0.6$, $P\{X_i = 0\} = 0.4$, $(i = 1,2,3,4)$. 试求行列式 $\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$ 的分布律.

解: $\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix} = X_1X_4 - X_2X_3$

$$Y_1 = X_1X_4, Y_2 = X_2X_3, Y = Y_1 - Y_2.$$

Y_1	0	1
p	0.64	0.36

,

Y_2	0	1
p	0.64	0.36

,

Y	-1	0	1
p	0.2304	0.5392	0.2304

.

4.3 设离散型随机变量 X 的分布律为

X	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

求 (1) $\sin(X)$ 的分布律; (2) $\frac{X^2}{\pi^2}$ 的分布律; (3) $\cos(X)$ 的分布律.

解: (1)

$\sin X$	-1	$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

.

(2)

$\frac{X^2}{\pi^2}$	0	1/16	1/4
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{9}{16}$

.

(3)

$\cos X$	0	$\sqrt{2}/2$	1
p	$\frac{9}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{8}$

.

4.4 设 $X \sim B(n_1, p), Y \sim B(n_2, p)$ 且相互独立, 求 $Z = X + Y$ 的分布律, 并问 Z 服从什么分布.

解:

$$
\begin{aligned}
P\{Z=k\} &= P\{X+Y=k\} \\
&= P\{\cup_{l=0}^{k}(X=i, Y=k-i)\} = \sum_{l=0}^{k} P\{X=i, Y=k-i\} \\
&= \sum_{l=0}^{k} P\{X=i\} \cdot P\{Y=k-i\} \\
&= \sum_{l=0}^{k} C_{n_1}^{k} p^k (1-p)^{n_1-l} C_{n_2}^{k-l} p^{k-l} (1-p)^{n_2-(k-l)} \\
&= C_{n_1+n_2}^{k} p^k (1-p)^{n_1+n_2-k}, k = 0, 1, 2, \cdots, n_1+n_2
\end{aligned}
$$

即 $Z = X + Y \sim B(n_1 + n_2, p)$.

4.5 设随机变量 $X \sim B\left(3, \frac{1}{2}\right)$, 求 X 的分布函数 $F(x)$.

解:

X	0	1	2	3
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$F(x) = P\{X \le x\} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1/8, & 0 \le x < 1, \\ 1/2, & 1 \le x < 2, \\ 7/8, & 2 \le x < 3, \\ 1, & x \ge 3. \end{cases}$$

4.6 在区间 $[0,2]$ 上任意投掷一个质点, 以 X 表示这个质点的坐标, 设这个质点落在 $[0,2]$ 中任意小区间内的概率与这个小区间的长度成正比, 试求 X 的分布函数.

解:

$$F(x) = P\{X \le x\} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x/2, & 0 \le x < 2, \\ 1, & x \ge 2. \end{cases}$$

4.7 确定下列函数中常数 A, 使之成为密度函数.

(1) $f(x) = Ae^{-|x|}$; (2) $f(x) = \begin{cases} \frac{Ax}{(1+x)^4}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$

解: (1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1, \Rightarrow A = 1/2.$$

(2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1, \Rightarrow \int_{0}^{+\infty} (\frac{Ax + A}{(1+x)^4} - \frac{A}{(1+x)^4})dx = 1, \Rightarrow A = 6.$$

4.8 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, & 1 < x \le 2, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

求 (1) X 的分布函数 $F(x)$; (2) 概率 $P\{X < 0.5\}$, $P\{X > 1.3\}$, $P\{0.2 < X < 1.2\}$.

解：

$$F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$$
$$=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2/2, & 0\le x<1,\\ 2x-x^2/2-1, & 1\le x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$

(2) $P\{X<0.5\}=1/8$,

$P\{X>1.3\}=1-F(1.3)=0.245$,

$P\{0.2<X<1.2\}=F(1.2)-F(0.2)=0.66$.

4.9 设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ Ax^2, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

试求 (1) 系数 A; (2) X 落在区间 (0.3, 0.7) 内的概率; (3) X 的密度函数.

解：(1)$F(1)=A=1$;

(2)

$$P\{0.3<X<0.7\}=F(0.7)-F(0.3)=0.4;$$

(3)

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}\begin{cases}0, & x<0,\\ 2Ax=2x, & 0\le x<1,\\ 0, & x\ge 1.\end{cases}$$

专业班级____________学号____________姓名____________

习题五　一维连续型随机变量及其分布

5.1 设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X (以分计) 服从指数分布, 其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

某顾客在窗口等待服务, 若超过 10 分钟, 他就离开. 他一个月要到银行 5 次, 以 Y 表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数, 写出 Y 的分布律, 并求 $P\{Y\ge 1\}$.

解：

$$P\{X>10\}=\int_{10}^{+\infty}\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}dx=e^{-2},\quad Y\sim B(5,e^{-2}).$$

$$P\{Y\ge 1\}=1-P\{Y=0\}=1-(1-e^{-2})^5.$$

5.2 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}4x^3, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求常数 a, 使 $P\{X>a\}=P\{X<a\}$ 成立.

解：

$$\because P\{X>a\}=P\{X<a\}=1-P\{X<a\},\therefore P\{X<a\}=0.5,$$

$a^4=1/2, a=1/\sqrt[4]{2}.$

5.3 在 $\triangle ABC$ 内取一点 P, P 到 AB 的距离为 X, 求 X 的分布函数.

解：设 AB 边上的高为 h, AB 长度为 a.

$$F(x)=P\{X\le x\}=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{2hx-x^2}{h^2}, & 0\le x<h,\\ 1, & x\ge h.\end{cases}$$

5.4 假设随机变量 X 的绝对值不大于 1, $P\{X=-1\}=\frac{1}{8}$, $P\{X=1\}=\frac{1}{4}$ 在事件 $\{-1<X<1\}$ 出现的条件下, X 在 $(-1,1)$ 内的任一子区间上取值的条件概率与该子区间的长度成正比. 试求:

(1) X的分布函数 $F(x)=P\{X\le x\}$;　　(2) X 取负值的概率 P.

解：(1)

$$F(x)=P\{X\le x\}=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \frac{5x+7}{16}, & -1\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

(2) X 取负值的概率

$$P\{-1\le X<0\}=P\{X=-1\}+P\{-1<X<0\}=7/16.$$

5.5 某公共汽车站从上午 7 时起每 15 分钟发一班车, 即在 7:00, 7:15, 7:30,... 有汽车发出. 如果乘客到达此汽车站的时间 X 服从 7:00 $\sim$ 7:30 上的均匀分布, 试求乘客在车站等待:

(1) 不到 5 分钟的概率;　　(2) 超过 10 分钟的概率.

解：设乘客 于 7时过 X 分钟到到此站， $X\sim U(0,30)$.

(1)

$$P\{10<X<15\}+P\{25<X<30\}=1/3.$$

(2)

$$P\{0<X<5\}+P\{15<X<30\}=1/3.$$

5.6 设 $X\sim N(108,9)$.

(1) 求 $P\{101.1<X<117.6\}$;

(2) 求常数 a, 使 $P\{X<a\}=0.90$;

(3) 求常数 a, 使 $P\{|X-a|>a\}=0.01$.

解：(1)

$$P\{101.1<X<117.6\}=\Phi(\frac{117.6-108}{3})-\Phi(\frac{101.1-108}{3})=0.9886.$$

(2)

$$P\{X<a\}=\Phi(\frac{a-108}{3})=0.90=\Phi(1.282), a=111.84.$$

(3)

$$P\{|X-a|>a\}=0.01, P\{|X-a|\leq a\}=0.99=P\{0\leq X\leq 2a\},$$
$$\Phi(\frac{2a-108}{3})-\Phi(\frac{0-108}{3})=\Phi(2.326), a=57.489.$$

5.7 从南郊某地到北区火车站有两条路可走, 第一条路线穿过市区, 路程短, 但交通拥挤, 所需时间 (以分计) 服从正态分布 $N(50,100)$; 第二条路线沿环城公路走, 路线较长, 但阻塞少, 所需时间服从正态分布 $N(60,16)$.

(1) 假如有 70 分钟可用, 问应走哪一条路线?

(2) 若只有 65 分钟可用, 又应走哪一条路线?

解：设第一条路线所用时间为 X,第二条路线所用时间为 Y

(1)

$$p_1=P\{0<X\leq 70\}=\Phi(\frac{70-50}{10})-\Phi(\frac{0-50}{10})\approx 0.9772.$$
$$p_2=P\{0<Y\leq 70\}=\Phi(\frac{70-60}{4})-\Phi(\frac{0-60}{4})\approx 0.9938.$$

(2)

$$p_3=P\{0<X\leq 65\}=\Phi(\frac{65-50}{10})-\Phi(\frac{0-50}{10})\approx 0.9332.$$
$$p_4=P\{0<Y\leq 65\}=\Phi(\frac{65-50}{4})-\Phi(\frac{0-50}{4})\approx 0.8944.$$

(1) 假如有 70 分钟可用, 应走第二条路线。

(2) 若只有 65 分钟可用, 应走第一条路线。

5.8 电源电压在不超过 200 伏、200 ~ 240 伏和超过 240 伏这三种情况下, 元件损坏的概率分别为 0.1, 0.001, 0.2. 设电源电压服从正态分布 $N(220,25^2)$, 求

(1) 元件损坏概率 α;

(2) 元件损坏时, 电压在 200 ~ 240 伏间的概率 β.

解：设元件损坏为事件 A, 电源电压在不超过 200 伏、200 ~ 240 伏和超过 240 伏分别为事件 B_1,B_2,B_3. 电源电压为 $X\sim N(220,25^2)$

(1) 元件损坏概率

$$\alpha=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=0.064146.$$

(2) 元件损坏时, 电压在 200 ~ 240 伏间的概率

$$\beta=\frac{P(AB_3)}{\alpha}=0.0089826.$$

专业班级__________学号__________姓名 __________

习题六　二维连续型随机变量的联合与边缘分布及独立性

6.1 设平面区域 D 由曲线 $y=\frac{1}{x}$ 及直线 $y=0, x=1, x=e^2$ 所围成, 二维随机向量 (X,Y) 在区域 D 上服从均匀分布, 则 (X,Y) 关于 X 的边缘密度在 $x=2$ 处的值为 ________________.

1/4.

$$S=\int_0^{e^2}\frac{1}{x}dx=2, f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 1\le x\le e^2,\ 0\le y\le 1/x,\\ 0, & other.\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^{1/x}1/2dy=1/4.$$

6.2 设 (X,Y) 的分布函数为

$$F(x,y)=A\left(B+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(C+\arctan\frac{y}{2}\right),\quad -\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty.$$

(1) 求系数 A,B,C;　　(2) 求 (X,Y) 的密度函数;

(3) 求关于 X 和 Y 的边缘分布函数和边缘密度函数.

解：(1)

$$F(-\infty,0)=A\cdot(B-\pi/2)\cdot C=0;$$
$$F(0,-\infty)=A\cdot B\cdot(C-\pi/2)=0;$$
$$F(-\infty,+\infty)=A\cdot(B+\pi/2)\cdot(C+\pi/2)=1.$$

得 $A=\frac{1}{\pi^2}, B=C=\pi/2$.

(2)

$$f(x,y)=\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{4}{\pi^2(4+x^2)(4+y^2)},-\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty.$$

(3)

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\frac{1}{\pi}(\pi/2+\arctan x/2),$$
$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\frac{1}{\pi}(\pi/2+\arctan y/2),$$
$$f_X(x)=F'(x,+\infty)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(x/2)^2}\cdot 1/2=\frac{2}{\pi(4+x^2)},$$

$$f_Y(y)=\frac{2}{\pi(4+y^2)}.$$

注意

$$\arctan\frac{x}{2}=y--->x=a\tan y,(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$$

6.3 设 (X,Y) 的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

求 X 与 Y 中至少有一个小于 $\frac{1}{2}$ 的概率.

解:

$$\begin{aligned}p&=P\{X<1/2\}+P\{Y<1/2\}-P\{X<1/2,Y<1/2\}\\&=\int_0^2\int_0^{1/2}1/2dxdy+\int_0^1\int_0^{1/2}1/2dydx-\int_0^{1/2}\int_0^{1/2}1/2dxdy\\&=1/2+1/4-1/8=5/8.\end{aligned}$$

$$P\{X\ge 1/2,Y\ge 1/2\}=3/8,p=1-3/8=5/8.$$

6.4 设 (X,Y) 具有下列密度函数, 分别求边缘密度函数.

(1) $f(x,y)=\begin{cases}4.8y(2-x), & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<y,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

解: (1)

$$f_X(x)=\begin{cases}2.4x^2(2-x), & 0\le x\le 1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}2.4y(3-4y+y^2), & 0\le y\le 1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

(2)

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} ye^{-y}, & y>0, \\ 0, & 其它. \end{cases}$$

6.5 设 (X,Y) 的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} k(6-x-y), & 0<x<2,\ 2<y<4, \\ 0, & 其它. \end{cases}$$

(1) 求常数 k; (2) 求 $P\{X<1,Y<3\}$; (3) 求 $P\{X<1.5\}$; (4) 求 $P\{X+Y\le 4\}$.

解：(1)

$$\int_0^2\int_2^4 k(6-x-y)dxdy=1, k=1/8.$$

(2)

$$P\{X<1,Y<3\}=\int_0^1\int_2^3 1/8(6-x-y)dydx=3/8.$$

(3)

$$P\{X<1.5\}=\int_0^{1.5}\int_2^4 1/8(6-x-y)dydx=27/32.$$

(4)

$$P\{X+Y\le 4\}=\int_0^2 dx\int_2^{4-x} 1/8(6-x-y)dy=2/3.$$

6.6 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量, X 在 $(0,0.2)$ 上服从均匀分布, Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases} 5e^{-5y}, & y>0, \\ 0, & y\le 0. \end{cases}$$

(1) 求 X 和 Y 的联合密度函数; (2) 求 $P\{Y\le X\}$.

解：(1)

$$f(x,y)=\begin{cases} 25e^{-5y}, & 0<x<0.2, y>0, \\ 0, & 其它. \end{cases}$$

(2)

$$P\{Y\le X\}=\iint_{y\le x} f(x,y)dxdy=\int_0^{0.2}dx\int_0^x 25e^{-5y}dy=e^{-1}.$$

6.7 已知随机变量 X 和 Y 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+\frac{1}{3}xy, & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

证明: X 和 Y 的不相互独立.

解:

$$f_X(x)=\begin{cases} 2x^2+2x/3, & 0\le x\le 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} 1/3+y/6, & 0\le y\le 2, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

$$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y).$$

故X 和 Y 的不相互独立.

6.8 某电子仪器由两个部件构成, 其寿命 (单位: 千小时) X 与 Y 的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases} 1-e^{-0.5x}-e^{-0.5y}+e^{-0.5(x+y)}, & x\ge 0,\ y\ge 0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

问: (1) X与 Y 是否独立? (2) 两部件的寿命都超过 100 小时的概率.

解: (1)

$$F_X(x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases} 1-e^{-0.5x}, & x\ge 0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

$$F_Y(y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases} 1-e^{-0.5y}, & y\ge 0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

有

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y).$$

故X与 Y 是相互独立的.

(2)

$$P\{X>100/1000, Y>100/1000\}=(1-F_X(0.1))(1-F_Y(0.1))=e^{-0.1}.$$

专业班级__________学号__________姓名__________

习题七 连续型随机变量函数的分布、及随机变量的数学期望(I)

7.1 随机变量 X 服从 $(1,2)$ 上的均匀分布, 求 $Y=e^{2X}$ 的概率密度函数.

解:

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 1\le x\le 2,\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

$\because y=e^{2x}>0$单调↑, $\therefore x=\frac{1}{2}\ln y.\ x'=\frac{1}{2}\frac{1}{y}$;

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X(\frac{1}{2}\ln y)\frac{1}{2y}=\frac{1}{2y}, & 1\le\frac{1}{2}\ln y\le 2, 即e^2<y<e^4\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

7.2 设 X,Y 是相互独立的随机变量, 密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & 其它,\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

求 $Z=X+Y$ 的密度函数.

解:

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0\le x\le 1, y>0\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

(1)分布函数法

$$F_Z(z)=P\{X+Y\le z\}=\iint_{x+y\le z}f(x,y)dxdy$$
$$=\begin{cases}0, & z\le 0;\\ \int_0^z dx\int_0^{z-x}e^{-y}dy=z-1+e^{-z}, & 0<z\le 1\\ \int_0^1 dx\int_0^{z-x}e^{-y}dy=1-e^{1-z}+e^{-z}, & z>1.\end{cases}$$

(2)公式法

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$$
$$=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ \int_0^z e^{-(z-x)}dx=1-e^{-z}, & 0<z\le 1,\\ \int_0^1 1\cdot e^{-(z-x)}dx=(e-1)e^{-z}, & z>1.\end{cases}$$

7.3 设 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}2, & 0\le x\le 1,\ x\le y\le 1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$ 求 $Z=X+Y$ 的密度函数.

解： (1)分布函数法

$$F_Z(z)=P\{X+Y\le z\}=\iint_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$$
$$=\begin{cases}0, & z\le 0;\\ \int_0^{z/2}dx\int_x^{z-x}2dy=z^2/2, & 0<z\le 1,\\ \int_0^{z-1}dx\int_x^1 2dy+\int_{z-1}^{z/2}dx\int_x^{z-x}2dy=-z^2/2+2z-1, & 1<z\le 2,\\ 1, & z>2.\end{cases}$$

(2)公式法

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,z-x)dx$$
$$=\begin{cases}\int_0^{z/2}2dx=z, & 0<z\le 1,\\ \int_{z-1}^{z/2}2dx=2-z, & 1<z\le 2,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

7.4 填空题

(1) 设 X 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数, 每次命中目标的概率为 0.4, 则 $E(X)=$ ________________, $D(X)=$ ________________.

(2) 已知随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{x}{4}, & 0<x\le 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$$

则 $E(X)=$ ________________, $E(3X^2-2X)=$ ________________.

(3) 设随机变量 X的分布律为

X	-2	0	2
p	0.4	0.3	0.3

则 $E(X)=$ ________________, $E(X^2)=$ ________________, $E(3X^2+5)=$ ________________

(4) 某新产品在未来市场上的占有率 X 是仅在区间 (0, 1) 上取值的随机变量, 它的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}4(1-x)^3, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

则平均市场占有率为 ________________.

(1) 4,2.4;

(2)2,12;

(3)-0.2,2.8,13.4;

(4)1/5

7.5 有同类型备件 10 个, 其中 7 个正品, 3 个次品. 修理机器时, 从中无放回一件接一件地取, 直到取得正品为止. 以 X 表示停止抽取时已取的备件的个数, 求 $E(X)$, $E(X^2)$, $E\{[X-E(X)]^2\}$.

解：

X	1	2	3	4
p	7/10	7/30	7/120	1/120

$$E(X)=1.375=11/8; E(X^2)=2.2917=55/24.$$

$$E\{[X-E(X)]^2\}=77/192\approx 0.401.$$

7.6 随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}a+bx^2, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$ 且已知 $E(X)=\frac{3}{5}$, 求 a,b.

解：

$$E(X)=\int_0^1 x(a+bx^2)dx=3/5=a/2+3/5,$$

$$\int_0^1 (a+bx^2)dx=1=a+b/3.$$

得 $a=3/5, b=6/5$.

7.7 设 (X,Y) 的分布律为

X \ Y	-1	0	1
1	0.2	0.1	0.1
2	0.1	0	0.1
3	0	0.3	0.1

求 (1) $E(X), E(Y)$;　　(2) $E[(X-Y)^2]$;　　(3) $E(XY)$.

解：(1) $E(X)=2, E(Y)=0$;

(2)

$X-Y$	0	1	2	3	4
p	0.1	0.2	0.3	0.4	0

$E[(X-Y)^2]=5$;

(3)

XY	-3	-2	-1	0	1	2	3
p	0	0.1	0.2	0.4	0.1	0.1	0.1

$E(XY)=0.2$.

7.8 假设某路公共汽车起点站于每时的 10 分、30 分、50 分发车, 乘客不知发车的时间, 在每小时内任一时刻到达车站是随机的. 求乘客到车站等车时间的数学期望.

解：等车时间为 $X\sim U[0,20]$,

$$f(x)=\begin{cases}1/20, & 0<x<20,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$E(X)=10.$$

专业班级__________学号__________ 姓名 __________

习题八　随机变量的数学期望(II)、方差、协方差与相关系数

8.1 设随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布, 且 $Z = 3X-2$, 则 $E(Z) =$ ______________.

4.

$$E(Z) = 3E(X) - 2.$$

8.2 某公司经销某种原料, 根据历史资料表明: 这种原料的市场需求量 X (单位: 吨) 服从 (300, 500) 上的均匀分布. 每售出 1 吨该原料, 公司可获利 1.5 (千元); 若积压 1 吨, 公司损失 0.5 (千元). 问公司应该组织多少货源, 可以使平均收益最大?

解：$X \sim f(x) = \begin{cases} 1/200, & 300 < x < 500, \\ 0, & 其它. \end{cases}$ t 表示进货数，Y 表示所获利润

$$Y = \begin{cases} 1.5X - 0.5(t-X), & 300 < x < t, \\ 1.5t, & t < x < 500. \end{cases}$$

$$E(Y) = \int_{300}^{500} y * f(x)dx, \frac{dE(Y)}{dt} = 0, t = 450.$$

8.3 将 n 只球 ($1 \sim n$ 号) 随机地放进 n 只盒子 ($1 \sim n$ 号) 中去, 一只盒子装一只球. 若一只球装入与球同号的盒子中, 称为一个配对. 记 X 为总的配对数, 求 $E(X)$.

解：设 $X_i = \begin{cases} 1, & 第\ i\ 只球与盒配对 \\ 0, & 否则. \end{cases}$ 则 $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

$$E(X_i) = P\{X_i = 1\} = 1/n, E(X) = 1.$$

8.4 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x-\mu|}, \ (-\infty < x < +\infty).$$

求 $E(X), D(X)$.

解：

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)\frac{1}{2}e^{-|x-\mu|}d(x-\mu) + \mu$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} t\frac{1}{2}e^{-|t|}dt + \mu = \mu.$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{2}e^{-|x-\mu|}dx$$
$$=2.$$

8.5 在长为 d 的线段上任选两点, 求两点间距离的数学期望与方差.

解：设 X,Y 为线段上的两点，则$X,Y\sim U[0,d]$.

$$(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{d^2}, & 0\le x,y\le d,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

法一： 设 $Z=|X-Y|=\max(X,Y)-\min(X,Y)$,

$$F(Z)=P\{Z\le z\}=\iint_{|x-y|<z}f(x,y)dxdy$$

$$E(Z)=d/3, E(Z^2)=d^2/6, D(Z)=d^2/18.$$

法二：

$$F_{\max(X,Y)}(x)=F^2(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ (x/d)^2, & 0\le x\le d,\\ 1, & x>d.\end{cases}$$

$$F_{\min(X,Y)}(x)=1-(1-F(x))^2=\begin{cases}0, & x<0,\\ (2x-x^2)/d^2, & 0\le x\le d,\\ 1, & x>d.\end{cases}$$

$$E(\max(X,Y))=2d/3, E(\min(X,Y))=d/3.$$

8.6 已知 $E(X)=0, P\{|X|<2\}=\frac{1}{2}$, 且 $D(X)$ 存在, 证明$D(X)\ge 2$.

解：$P\{|X|<2\}=P\{|X-E(X)|<2\}\frac{1}{2}\ge 1-\frac{D(X)}{2^2}, \Rightarrow D(X)\ge 2.$

8.7 填空题

(1) 设 $X\sim N(1,22), Y=2X+1$, 则 $\rho_{XY}=$ ____________________.

(2) 已知 $D(X)=0.54$, $D(Y)=0.25$, $Cov(X,Y)=-0.03$, 则 $D(X+Y)=$ ____________________.

(3) 随机变量 X 与 Y 相互独立的充分必要条件为 ____________________;

随机变量 X 与 Y 不相关的充分必要条件为 ____________________;

事件 A 与 B 互不相容的充分必要条件为 ____________________;

事件 A 与 B 互为对立事件的充分必要条件为 ______________________;

事件 A 与 B 相互独立的充分必要条件为 ______________________;

(1)1,

(2)0.73,

(3) $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$,

$\rho_{XY} = 0$,

$AB = \Phi$,

$A \cup B = \Omega$ 且 $AB = \Phi$,

$P(AB) = P(A)P(B)$.

8.8 设 (X,Y) 的密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+y), & 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

求 $E(X), E(Y), E(XY), Cov(X,Y), \rho_{XY}, D(X+Y)$.

解:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dxdy = 7/6.$$

$$E(Y) = 7/6, E(XY) = 4/3.$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -1/36. D(X) = 11/36 = D(Y).$$

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = -1/11.$$

$$D(X+Y) = 5/9.$$

8.9 已知三个随机变量 X, Y, Z 中, $E(X) = E(Y) = 1$, $E(Z) = -1$, $D(X) = D(Y) = D(Z) = 1$, $\rho_{XY} = 0$, $\rho_{XZ} = \frac{1}{2}$, $\rho_{YZ} = -\frac{1}{2}$. 求 $E(X+Y+Z), D(X+Y+Z)$.

解: $E(X+Y+Z) = E(X) + E(Y) + E(Z) = 1$,

$D(X+Y+Z) = 3$.

8.10 假设二维随机变量 (X,Y) 在矩形 $G = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\}$ 上服从均匀分布, 记

$$U = \begin{cases} 0, & X \le Y, \\ 1, & X > Y, \end{cases} \qquad V = \begin{cases} 0, & X \le 2Y, \\ 1, & X > 2Y. \end{cases}$$

(1) 求 U 和 V 的联合分布;　　(2) 求 U 和 V 的相关系数 ρ.

解：(1) (U,V) 可能的取值为 $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$.

U \ V	0	1
0	1/4	0
1	1/4	1/2

(2)

$$\rho_{UV} = \frac{Cov(U,V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

专业班级____________学号____________姓名 ____________

习题九　大数定律及中心极限定理

9.1 填空题

(1) 设 Y_n 是 n 次伯努利试验中事件 A 出现的次数, p 为 A 在每次试验中出现的概率, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{Y_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) =$ ____________________.

0.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{Y_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{Y_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right)$$

=1-1=0. (2) 设随机变量 X 和 Y 的数学期望是 2, 方差分别为 1 和 4, 而相关系数为 0.5, 则根据切比雪夫不等式 $P\{|X-Y| \geq 6\} \leq$ ____________________.

1/12.

$$E(X-Y) = 0, D(X-Y) = D(X) + D(Y) - 2\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)} = 3$$

$$P\{|X-Y| \geq 6\} \leq \frac{D(X-Y)}{6^2}.$$

9.2 一部件包括 10 部分, 每部分的长度是一个随机变量, 他们相互独立, 且服从同一分布, 其数学期望为 $2mm$, 均方差为 $0.05mm$. 规定总长度为 $(20 \pm 0.1)mm$ 时产品合格, 试求产品合格的概率.

解：设各部分的长度为 $X_i, i = 1, 2, \cdots, 10$, 则 $Y_{10} = \sum_{i=1}^{10} X_i$.

由中心极限定理：

$$\frac{Y_{10} - 10\cdot\mu}{\sqrt{10}\cdot\sigma} \overset{\text{近似地}}{\sim} N(0,1),$$

因此，所求合格概率为

$$p = P\{|\frac{\sum_{i=1}^{10} X_i - 20}{\sqrt{10}\cdot 0.05}| \leq \frac{0.1}{\sqrt{10}\cdot 0.05}\} = 2\Phi(\frac{2}{\sqrt{10}}) - 1 \approx 0.4714.$$

9.3 计算器在进行加法时, 将每个加数舍入最靠近他的整数. 设所有舍入误差是独立的且在 $(-0.5, 0.5)$ 上服从均匀分布.

(1) 若将 1500 个数相加, 问误差总和的绝对值超过 15 的概率是多少?

(2) 最多可有几个数相加使得误差总和的绝对值小于 10 的概率不小于 0.9?

解：设每次计算时所得到的误差 $X_i, i=1,2,\cdots,1500$, 则 $X_i \sim U(-0.5,0.5)$ $X=\sum_{i=1}^{1500} X_i$ 表示 1500个数相加所得到的误差总和，$E(X)=0, D(X)=\frac{1500}{12}=125.$
由中心极限定理：$X/\sqrt{125} \sim N(0,1).$

(1)

$$P\{|X|>15\}=1-P\{-15<X<15\}=2-2\Phi(15/\sqrt{125})=0.1802.$$

(2) 假设最多有 n 个相加

$$P\{|\sum_{i=1}^{n} X_i|<10\}>0.9 \Rightarrow P\{-10<\sum_{i=1}^{n} X_i<10\}=2\Phi(\frac{10}{\sqrt{n/12}})-1=0.9.$$

$n=443.$

9.4 设某车间有 200 台车床相互独立地工作着, 若因换料、检修等原因, 每台车床的开工率各为 0.6, 开工时耗电各为 1 千瓦, 问供电所至少要供给这个车间多少瓦电, 才能以 99.9% 的概率保证这个车间不会因供电不足而影响生产?

解：设 X_i 为第 i 台车床的开工数，停车取0，开工取1, $X_i \sim B(1,0.6)$,
200台车床开工数为 $Y=\sum_{i=1}^{200} X_i \sim B(200,0.6).$

$$P\{Y \le n\}=P\{\frac{Y-200*0.6}{\sqrt{200*0.6*0.4}} \le \frac{n-120}{\sqrt{48}}\} \ge 99.9\%.$$

查表 $\Phi(3.1)=0.999$, 故 $\frac{n-120}{\sqrt{48}} \ge 3.1, \Rightarrow n \ge 141.4774.$
供电所至少要供给这个车间142瓦电, 才能以 99.9% 的概率保证这个车间不会因供电不足而影响生产

9.5 现有一批种子, 其中良种占 $\frac{1}{6}$, 今任取 6000 粒, 问能以 0.99 的概率保证在这 6000 粒种子中良种所占的比例与 $\frac{1}{6}$ 的差不超过多少? 相应的良种粒数在哪个范围内?

解：设 X 为良种粒数，$X \sim B(n,p), n=6000, p=1/6,$
要求 a 使得

$$P\{|\frac{X}{6000}-1/6| \le a\}=P\{|\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}| \le \frac{6000a}{\sqrt{np(1-p)}}\}$$
$$2\Phi(\frac{6000a}{\sqrt{np(1-p)}})-1=0.99$$

查表 $\frac{6000a}{\sqrt{np(1-p)}}=2.58, \Rightarrow a=0.124.$ 良种粒数为

$$(1/6-0.0124)*6000 \le X \le (1/6+0.0124)*6000, \Rightarrow 925 \le X \le 1075.$$

9.6 某单位有 200 台电话分机, 每台分机有 5% 的时间要使用外线通话. 假定每台分机是否使用外线是相互独立的, 问该单位总机要安装多少条外线, 才能以 90% 以上的概率保证分机用外线时不等待?

解：设任意时刻使用外线的分机数为 $X, X \sim B(200, 0.05)$.

设至少需要 N 条外线，有

$$P\{0 < X \leq N\} = P\{-\frac{np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{N-np}{\sqrt{np(1-p)}}\}$$
$$= P\{-\frac{10}{\sqrt{9.5}} < \frac{X-10}{\sqrt{9.5}} < \frac{N-10}{\sqrt{9.5}}\} \approx \Phi(\frac{N-10}{\sqrt{9.5}}) - \Phi(\frac{-10}{\sqrt{9.5}}) \geq 0.9.$$

即 $\Phi(\frac{N-10}{\sqrt{9.5}}) \geq 0.9006. \Rightarrow N = 14.$

9.7 在掷硬币实验中, 至少掷多少次, 才能使正面出现的频率落在 (0.4, 0.6) 内的概率不小于 0.9?

解：设 X_n 为 n 次投掷正面出现的次数，则 $X_n \sim B(n, 0.5)$.

正面出现的频率为 $\frac{X_n}{n}$,

$$P\{0.4 < \frac{X_n}{n} < 0.6\} = P\{-0.2\sqrt{n} < \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < 0.2\sqrt{n}\}$$
$$= 2\Phi(0.2\sqrt{n}) - 1 \geq 0.9.$$

即 $\Phi(0.2\sqrt{n}) \geq 0.95. \Rightarrow n \geq 67.65, n = 68.$

9.8 某厂有 400 台同型机器, 各台机器发生故障的概率均为 0,02, 假如各台机器相互独立工作, 试求机器出现故障的台数不少于 2 台的概率.

解： X 表示400台机器中发生故障的台数 $X \sim B(400, 0.02)$

$$P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X \leq 1\} = 1 - P\{\frac{X-8}{\sqrt{400*0.02*0.98}} \leq \frac{-7}{\sqrt{400*0.02*0.98}}\}$$
$$\approx 1 - \Phi(-2.5) = 0.9938.$$

法二： $\lambda = np = 8, P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$,

$$P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} = 1 - 9e^{-8}.$$

专业班级__________学号__________姓名__________

习题十　样本及抽样分布

10.1 从总体中抽得一个容量为 8 的样本, 其观测值如下: 99, 98, 100, 101, 98, 99, 102, 100. 试求样本均值 $\overline{X}$, 样本二阶中心矩 B_2 及样本方差 S^2 的观测值.

解：$\bar{x} = 99.625, B_2 = 1.7344 = \frac{111}{64}, s^2 = 1.9821 = \frac{111}{56}$.

10.2 设 $X_1, ..., X_5$ 是 $X \sim N(12, 4)$ 的一个样本, 求

(1) $P\{|\overline{X} - E(X)| > 1\}$;　　　(2) $P\{\min\{X_1, ..., X_5\} < 10\}$.

解：(1)

$$\begin{aligned}
&P\{|\overline{X} - E(X)| > 1\} \\
=&1 - P\{|\overline{X} - E(X)| \le 1\} \\
=&1 - P\{|\frac{\overline{X} - E(X)}{\sigma/\sqrt{n}}| \le \frac{1}{2/\sqrt{5}}\} \\
=&1 - 2\Phi(\frac{1}{2/\sqrt{5}}) + 1 = 2(1 - \Phi(\frac{1}{2/\sqrt{5}})) = 0.2628.
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
&P\{\min\{X_1, ..., X_5\} < 10\} \\
=&1 - P\{\min\{X_1, ..., X_5\} \ge 10\} \\
=&1 - \prod_{i=1}^{5} P\{X_i \ge 10\} \\
=&1 - [1 - \Phi(\frac{10-12}{2})]^5 = 0.5785.
\end{aligned}$$

10.3 设总体 $X \sim N(0, 0.3^2)$.

(1) 若 $X_1, ..., X_{10}$ 为其一个样本, 试求 $P\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44\right\}$;

(2) 若 $X_1, ..., X_{10}$ 与 $Y_1, ..., Y_{15}$ 为其两个相互独立的样本, 试求 $P\{|\overline{X} - \overline{Y}| > 0.1\}$.

解：(1)因为

$$\eta = \sum_{i=1}^{10} (\frac{X_i - 0}{0.3})^2 \sim \chi^2(10).$$

所以

$$P\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44\right\} = P\{\eta > 1.44/0.3^2\} = P\{\eta > 16\} = 0.1.$$

$(2)\bar{X}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}X_i,\bar{Y}=\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}Y_i,$

$$E(\bar{X})=E(\bar{Y})=0,E(\bar{X}-\bar{Y})=0,$$

$$D(\bar{X}-\bar{Y})=\frac{0.3^2}{10}+\frac{0.3^2}{15}=\frac{0.3^2}{6}.$$

$$(\bar{X}-\bar{Y})^*=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-0}{\sqrt{\frac{0.3^2}{6}}}\sim N(0,1),$$

$$\begin{aligned}P\{|\overline{X}-\overline{Y}|>0.1\}=&1-P\{|\overline{X}-\overline{Y}|\le 0.1\}\\=&1-P\{|\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{0.3/\sqrt{6}}|\le\frac{0.1}{0.3/\sqrt{6}}\}\\=&2(1-\Phi(\sqrt{6}/3))=0.4140.\end{aligned}$$

10.4 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自正态总体 $N(0,2^2)$ 的简单随机样本, $Z=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$, 求常数 a, b, 使 Z 服从 χ^2 分布, 并求其自由度.

解：$X_1\sim N(0,4),2X_2\sim N(0,16),X_1-2X_2\sim N(0,20).$

同理 $3X_3-4X_4\sim N(0,100).$

则

$$\frac{X_1-2X_2}{\sqrt{20}}\sim N(0,1),\frac{3X_3-4X_4}{\sqrt{100}}\sim N(0,1).$$

当 $a=1/20,b=1/100$ Z 服从 χ^2 分布, 并求其自由度 为 2.

10.5 填空题

(1) 设 $X_1,...,$ X_n 是来自 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本, 则 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2\sim$ ________________, $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2\sim$ ________________.

$(1)\chi^2(n),\chi^2(n-1);$

(2) 设 $X_1,...,$ X_9, $Y_1,...,$ Y_9 分别是来自正态分布 $N(0,5^2)$ 的两个相互独立的样本, 则统计量 $\frac{X_1+...+X_9}{\sqrt{Y_1^2+...+Y_9^2}}\sim$ ________________, 参数为 __________; $\frac{X_1^2+...+X_9^2}{Y_1^2+...+Y_9^2}\sim$ ________________, 参数为 __________.

$(2)t(9),9;F(9,9),(9,9)$

10.6 设在 $N(\mu,\sigma^2)$ 中抽取容量为 16 的样本, S^2 为其样本方差.

(1) 求 $P\{\frac{S^2}{\sigma^2}\le 2.04\}$;　　(2) 求 $D(S^2)$.

解：$\eta=\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),$

(1)

$$P\{\frac{S^2}{\sigma^2} \le 2.04\} = P\{\frac{(16-1)S^2}{\sigma^2} \le 2.04 * 15\}$$
$$= P\{\eta \le 30.6\} = 1 - P\{\eta > 30.6\}$$
$$= 1 - 0.01 = 0.99.$$

(2)

$$D(S^2) = D(\frac{15S^2}{\sigma^2}\frac{\sigma^2}{15}) = (\frac{\sigma^2}{15})^2 D(\frac{15S^2}{\sigma^2}) = (\frac{\sigma^2}{15})^2 2 * 15 = 2\sigma^4/15.$$

10.7 已知 $X \sim t(n)$, 求证 $X^2 \sim F(1,n)$.

解：$\because X \sim t(n)$, 若 $X = \frac{\xi}{\sqrt{\eta/n}}, \xi \sim N(0,1), \eta \sim \chi^2(n)$,

$\therefore \xi^2 \sim \chi^2(1), X^2 = \frac{\xi^2/1}{\eta/n} \sim F(1,n)$.

10.8 设 $X_1, ..., X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本, μ, σ^2 已知.

(1) 求统计量 $Z = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i X_i$的分布, 其中 $a_1, ..., a_n$ 为常数;

(2) 求统计量 $T = \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{B_2/(n-1)}}$ 的分布, 其中 $B_2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$.

解：(1)独立正态分布的随机变量的线性组合仍服从正态分布，

$E(Z) = E(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i X_i) = \mu \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, $D(Z) = D(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i X_i) = \sigma^2 \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$,

$$\therefore Z = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N(\mu \sum_{i=1}^{n} a_i, \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2).$$

(2)

$$\eta = \frac{nB_2}{\sigma^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$
$$X^* = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1),$$

且 η, ξ^* 相互独立，则

$$T = \frac{X^*}{\sqrt{\eta/(n-1)}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{B_2/(n-1)}} \sim t(n-1).$$

10.9 若 $X_1, ..., X_n, X_{n+1}$ 是来自 $N(0, \sigma^2)$ 的样本, 其中 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$.

(1) 求统计量 $\frac{(\frac{n}{3}-1)\sum\limits_{i=1}^{3}X_i^2}{\sum\limits_{i=4}^{n}X_i^2}$ 的分布, 其中 $n\geq 4$;

(2) 求统计量 $\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{S}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ 的分布.

解：(1)

$$\frac{(\frac{n}{3}-1)\sum\limits_{i=1}^{3}X_i^2}{\sum\limits_{i=4}^{n}X_i^2}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{3}(X_i/\sigma)^2/3}{\sum\limits_{i=4}^{n}(X_i/\sigma)^2/(n-3)}\sim F(3,n-3).$$

(2) $X_{n+1}-\bar{X}\sim N(0,\sigma^2+\sigma^2/n), Y=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1).$

$$X^*=\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{\sqrt{\sigma^2+\sigma^2/n}}\sim N(0,1).$$

则

$$T=\frac{X^*}{\sqrt{Y/(n-1)}}=\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{S}\sqrt{\frac{n}{n+1}}\sim t(n-1).$$

10.10 设总体 $X\sim N(0,1)$, $X_1,\ X_2$ 是来自 X 的容量为 2 的样本.

(1) 证明: X_1+X_2 与 X_1-X_2 相互独立;

(2) 试求常数 C, 使 $P\left\{\left(\frac{X_1+X_2}{X_1-X_2}\right)^2>C\right\}=0.1$.

解：(1)

$$Cov(X_1+X_2,X_1-X_2)=0.$$

X_1+X_2 与 X_1-X_2 不相关.

对于二维正态分布, 独立与不相关等价, 从而 X_1+X_2 与 X_1-X_2 相互独立.

(2)由 $\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$, $\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$.

$$\frac{(\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}})^2}{(\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}})^2}\sim F(1,1),$$

要使 $P\{F>C\}=0.1=\alpha, C=f_\alpha(1,1)=f_{0.1}(1,1)=39.86.$

10.* 设 X,Y 相互独立服从同一分布, 方差存在, 记 $U=X-Y$,$V=X+Y$, 则随机变量 U 与 V 是否一 定不相关,是否一定独立?

解：先求 U 和 V 的协方差:

$$Cov(U,V)=Cov(X-Y,X+Y)=D(X)-D(Y)=0.$$

所以 U 与 V 不相关.

但 U 与 V 不一定独立. 举例

(1) 设 X 与 Y 独立, 服从正态分布, 则 (U, V) 也服从正态分布, 对于二维正态分布, 独立与不相关等价, 从而 U 与 V 独立.

(2) 设 $X \sim B(1, 1/2)$ 即 $(0-1)$ 分布

$$P\{U = 1, V = 0\} = P\{X - Y = 1, X + Y = 0\} = 0$$

$$P\{U = 1\} = P\{X - Y = 1\} = P\{X = 1, Y = 0\} = 1/4$$

$$P\{V = 0\} = P\{X + Y = 0\} = P\{X = 0, Y = 0\} = 1/4$$

$$\Rightarrow P\{U = 1, V = 0\} \neq P\{U = 1\}P\{V = 0\}$$

从而 U 与 V 不独立.

专业班级__________学号__________姓名 __________

习题十一　参数估计

11.1 (1) 设 $X_1, ..., X_n$ 是 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, μ, σ^2 均未知,则 μ 的矩估计量为 ________________ σ^2 的矩估计量为 ________________;

(2) 设 $X_1, ..., X_n$ 是几何分布总体 X 的一个样本, 即 $X \sim P\{X = x\} = (1-p)^{x-1}p$, $x = 1, 2, ..., 0 < p < 1$, p 未知, 则 p 的矩估计量为 ________________.

(1)$\bar{X}$, $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$,

(2)$1/\bar{X}$

11.2 设总体 X 服从二项分布 $B(m, p)$, 其分布律为 $P\{X = k\} = C_m^k p^k (1-p)^{m-k}$, $k = 0, 1, 2, ..., m$, 其中 p 为未知参数, $0 < p < 1$, $X_1, ..., X_n$ 为 X 的简单随机样本, 求 p 的矩估计量.

解：$E(X) = mp = \bar{X}$, 得 $\hat{p}_M = \frac{\bar{X}}{m}$.

11.3 设 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} (\theta+1)x^{\theta}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

其中 $\theta > -1$ 未知, $X_1, ..., X_n$ 为 X 的样本, 求 θ 的矩估计量.

解：

$$E(X) = \int_0^1 x(\theta+1)x^{\theta}dx = \frac{\theta+1}{\theta+2} = \bar{X}.$$

θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_M = \frac{1}{1-\bar{X}} - 2$.

11.4 (1) 设 $X_1, ..., X_n$ 是 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, μ, σ^2 均未知, 则 μ 的极大似然估计量为 ________________, σ^2 的极大似然估计量为 ________________;

(2) 设 $X_1, ..., X_n$ 是几何分布总体 X 的一个样本, 即 $X \sim P\{X = x\} = (1-p)^{x-1}p$, $x = 1, 2, ..., 0 < p < 1$, p 未知, 则 p 的极大似然估计量为 ________________.

(1)$\bar{X}$, $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$,

(2)$1/\bar{X}$

11.5 已知总体 X 服从 $P(\theta)$, 其分布律为 $P\{X = k\} = \frac{\theta^k}{k!}e^{-\theta}$, $\theta > 0$, $k = 0, 1, 2, ...$, $X_1, ..., X_n$ 是 X 的样本. (1) 求 θ 的矩估计量;

(2) 求 θ 的极大似然估计量; (3) 求 $p=P\{X=0\}$ 的极大似然估计量.

解：(1)

$$E(X)=\sum_{x=0}^{\infty}xP\{X=x\}=\sum_{x=0}^{\infty}x\frac{\theta^x}{x!}e^{-\theta}=\theta=\bar{X}.$$

θ 的矩估计量$\hat{\theta}_M=\bar{X}$.

(2)

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\theta^{x_i}}{x_i!}e^{-\theta}=e^{-n\theta}\theta^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(\prod_{i=1}^{n}x_i!)^{-1},$$

$$\ln L(\theta)=-n\theta+\sum_{i=1}^{n}x_i\ln\theta-\ln(\prod_{i=1}^{n}x_i!),$$

由 $\frac{d\ln L}{d\theta}=0$, 得 $\hat{\theta}_L=\bar{X}$.

(3)

$$p=P\{X=0\}=e^{-\theta},\hat{p}_L=e^{-\hat{\theta}}=e^{-\bar{X}}.$$

11.6 设 X 的分布律为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 θ $(0<\theta<1)$ 未知, $X_1,\ldots,\ X_n$ 为 X 的样本.

(1)求 θ 的矩估计量; (2)利用样本值 3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3 求 的矩估计值和极大似然估计值.

解：(1)

$$E(X)=\sum_{0}^{3}xP\{X=x\}=3-4\theta=\bar{X}.$$

θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_M=(3-\bar{X})/4$,$\theta$ 的矩估计值 $\hat{\theta}_M=(3-\bar{X})/4=1/4$.

(2)

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{8}P\{X=x_i;\theta\}=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4,$$

由 $\frac{d\ln L}{d\theta}=0$, 得 $\hat{\theta}_L=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$.

11.7 总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}, & x\geq\mu,\\ 0, & x<\mu,\end{cases}$$

其中 $\theta>0,\theta,\ \mu$ 均未知, $X_1,...,\ X_n$ 为 X 的简单随机样本. 分别求 $\theta,\ \mu$ 的矩估计量 $\hat{\theta}_M,\hat{\mu}_M$ 和极大似然估计量 $\hat{\theta}_L,\hat{\mu}_L$.

解:

(1) 由已知

$$E(X)=\int_{\mu}^{+\infty}xf(x)dx=\theta+\mu=\bar{X}=A_1,$$

$$E(X^2)=\int_{\mu}^{+\infty}x^2f(x)dx=\theta^2+(\theta+\mu)^2=A_2,$$

可得

$$\hat{\theta}_M=\sqrt{A_2-A_1^2},\hat{\mu}_M=A_1-\sqrt{A_2-A_1^2}.$$

(2)

$$L(\theta,\mu)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\theta^{-n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)},$$

由 $\frac{\partial\ln L}{\partial\theta}=0$, 得 $\hat{\theta}_L=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)$.

又因为 $\mu\leq x_{(1)}\leq x_i$, μ 越大， $\ln L$ 越大，故 μ 能取到最大值为 $x_{(1)}$. 即 $\hat{\mu}_L=x_{(1)}$.

11.8 设总体 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{x^{\beta}}, & x>1,\\ 0, & x\leq1,\end{cases}$$

未知参数 $\beta>1, X_1,...,\ X_n$ 为 X 的简单随机样本. 分别求 β 的矩估计量和极大似然估计量. 解:

(1) 由已知

$$f(x)=\begin{cases}\beta\frac{1}{x^{\beta+1}}, & x>1,\\ 0, & x\leq1,\end{cases}$$

$$E(X)=\int_{1}^{+\infty}xf(x)dx=-\frac{\beta}{1-\beta}=\bar{X},$$

$$\hat{\beta}_M=\frac{\bar{X}}{\bar{X}-1}.$$

(2)

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i),$$

由 $\frac{d\ln L}{d\beta}=0$, 得

$$\hat{\beta}_L=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}.$$

11.9 设总体 X 的对数函数 $\ln X$ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, $X_1,\dots,$ X_n 是来自该总体的一个简单随机样本, 求 μ,σ^2 及 $E(X)$ 的极大似然估计量.

解：$Y=\ln X\sim N(\mu,\sigma^2)$,所以

$$x>0, F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{e^Y\le x\}=P\{Y\le \ln x\}=F_Y(\ln x),$$

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

$$L(\mu,\sigma)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n} f_X(x_i;\mu,\sigma), & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

由 $\frac{\partial \ln L}{\partial\mu}=0$, 得

$$\hat{\mu}_L=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i.$$

由 $\frac{\partial \ln L}{\partial\sigma^2}=0$, 得

$$\hat{\sigma}_L^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln X_i-\mu)^2.$$

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_0^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}e^te^{\mu}dt(t=\ln x-\mu)\\&=e^{\mu+\sigma^2/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}=e^{\mu+\sigma^2/2}.\end{aligned}$$

$E(X)$ 的极大似然估计量为 $e^{\hat{\mu}+\hat{\sigma}^2/2}$.

习题十二　估计量的评选标准

12.1 设 $X_1, ..., X_n$ 是总体 X 的一个简单随机样本, $c_i > 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i = 1$, 试证明 $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i X_i$ 是 $E(X)$ 的无偏估计量.

解:

$$E(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i E(X_i) = E(X),$$

$\sum\limits_{i=1}^{n} c_i X_i$ 是 $E(X)$ 的无偏估计量.

12.2 设 $X_1, ..., X_n$ 来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个简单随机样本, 试确定常数 C 使 $C\sum\limits_{i=1}^{n-1}(X_{i+1} - X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计量.

解:

$$\begin{aligned} E(C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1} - X_i)^2) &= CE(\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1} - X_i)^2 \\ &= CE[\sum_{i=1}^{n-1} X_{i+1}^2 - 2\sum_{i=1}^{n-1} X_{i+1}X_i + \sum_{i=1}^{n-1} X_i^2] \\ &= C[\sum_{i=1}^{n-1} E(X_{i+1}^2) - 2\sum_{i=1}^{n-1} E(X_{i+1})E(X_i) + \sum_{i=1}^{n-1} E(X_i^2)] \\ &= C[\sum_{i=1}^{n-1}(\sigma^2 + \mu^2) - 2\sum_{i=1}^{n-1} \mu\mu + \sum_{i=1}^{n-1}(\sigma^2 + \mu^2)] \\ &= C \cdot 2(n-1)\sigma^2, \end{aligned}$$

要使 $C \cdot 2(n-1)\sigma^2 = \sigma^2$, 即 $C = \frac{1}{2(n-1)}$.

12.3 设简单随机样本 $X_1, ..., X_n$ 来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$, 试求常数 k 使 $\hat{\sigma} = \frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i - \overline{X}|$ 为 σ 的无偏估计量.

解: $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, E(X_i - \bar{X}) = 0, D(X_i - \bar{X}) = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$

$$X_i - \bar{X} \sim N(0, \frac{n-1}{n}\sigma^2).$$

$$\xi = (X_i - \bar{X})^* = \frac{X_i - \bar{X} - 0}{\sqrt{\frac{n-1}{n}\sigma^2}} = \frac{X_i - \bar{X}}{\sigma\sqrt{\frac{n-1}{n}}} \sim N(0, 1).$$

$$E(\hat{\sigma}) = E(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\overline{X}|)$$
$$= \frac{1}{k}E(\sum_{i=1}^{n}|X_i-\overline{X}|) = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma\sum_{i=1}^{n}E(|\xi|)$$
$$= \frac{1}{k}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma n\sqrt{2/\pi} = \sigma,$$

所以 $k=\sqrt{\frac{2n(n-1)}{\pi}}$. $(E(|\xi|)=\int_{-\infty}^{\infty}|\xi|\frac{1}{2\pi}e^{-\xi^2/2}d\xi=\sqrt{2/\pi}.)$

12.4 从总体 X 中抽取样本 X_1, X_2, X_3, 构造三个统计量如下:

$$\hat{\mu}_1=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{6}X_3,\qquad \hat{\mu}_2=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{1}{4}X_3,\qquad \hat{\mu}_3=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{3}X_3.$$

(1) 证明 $\hat{\mu}_1$, $\hat{\mu}_2$, $\hat{\mu}_3$ 都是总体均值 $E(X)=\mu$ 的无偏估计量;

(2) 判断 $\hat{\mu}_1$, $\hat{\mu}_2$, $\hat{\mu}_3$ 哪个更有效?

解:

$$E(\hat{\mu}_1)=E(\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{6}X_3)=E(X)=\mu.$$

同理 $E(\hat{\mu}_2)=E(\hat{\mu}_3)=\mu$.

$$D(\hat{\mu}_1)=D(\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{6}X_3)=\frac{14}{36}D(X)\approx 0.388D(X),$$

同理 $D(\hat{\mu}_2)=\frac{6}{16}D(X)\approx 0.375D(X)$. $D(\hat{\mu}_3)=\frac{1}{3}D(X)\approx 0.333D(X)$.

$$D(\hat{\mu}_1)>D(\hat{\mu}_2)>D(\hat{\mu}_3).$$

所以 $\hat{\mu}_3$ 更有效.

12.5 设 $X_1,\ldots,$ X_n 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个简单随机样本, 其中 μ 已知, 试证明 $S_\mu^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 是 σ^2 的无偏估计.

解: (1)

$$E(S_\mu^2)=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2)$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2-2X_i\mu+\mu^2)$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[E(X_i^2)-2E(X_i)\mu+\mu^2]=\sigma^2.$$

(2)

$$\eta=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n).$$

$$E(S_\mu)=E(\sqrt{\frac{1}{n}\sigma^2\eta})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}E(\sqrt{\eta})$$
$$=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\int_0^\infty y^{(n-1)/2}e^{-y/2}dy=\frac{2}{n}\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)\sigma}\neq\sigma.$$

12.6 设有两总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$ 分别从两总体中抽取容量为 n_1,n_2 的两个独立的样本, 样本方差分别为 S_1^2, S_2^2. 试证: 对任意常数 a, b, 如果 $a+b=1$, 则 $Z=aS_1^2+bS_2^2$ 都是 σ^2 的无偏估计量, 并确定使 $D(Z)$ 达到最小的 a, b.

解：解：$\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1-1), \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_2-1)$.

$E(\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2})=n_1-1=\frac{(n_1-1)}{\sigma^2}E(S_1^2), E(\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2})=n_2-1=\frac{(n_2-1)}{\sigma^2}E(S_2^2)$;

$D(\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2})=2(n_1-1)=\frac{(n_1-1)^2}{\sigma^4}D(S_1^2), D(\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2})=2(n_2-1)=\frac{(n_2-1)^2}{\sigma^4}D(S_2^2)$;

$$E(S_1^2)=\sigma^2=E(S_2^2), D(S_1^2)=\frac{2\sigma^4}{n_1-1}, D(S_2^2)=\frac{2\sigma^4}{n_2-1}.$$

$$\begin{cases} E(Z)=E(aS_1^2+bS_2^2)=(a+b)\sigma^2. \\ D(Z)=D(aS_1^2+bS_2^2)=2\sigma^2(\frac{a^2}{n_1-1}+\frac{b^2}{n_2-1}) \end{cases}$$

$$\frac{\partial D(Z)}{da}=0, \frac{\partial D(Z)}{db}=0\Rightarrow a=\frac{n_1-1}{n_1+n_2-2}, b=\frac{n_2-1}{n_1+n_2-2}.$$

12.7* 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, $X_1,\ldots, X_{2n}$ 是其容量为 $2n$ 的简单随机样本 $(n\geq 2)$, 其样本均值 $\overline{X}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$, 已知 $\hat{\sigma^2}=C\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2$, 试确定常数 C 使其成为 σ^2 的无偏估计量.

解：$Y_i=X_i+X_{n+i}, i=1,\cdots,n$,

$E(Y_i)=2\mu, D(Y_i)=2\sigma^2, E(\bar{Y})=2\mu, D(\bar{Y})=\frac{2\sigma^2}{n}$.

$$2\bar{X}=\frac{2}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}).$$

$$X_i+X_{n+i}-2\overline{X}=X_i+X_{n+i}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i})=Y_i-\bar{Y}.$$

$E(Y_i-\bar{Y})=0, D(Y_i-\bar{Y})=\frac{n-1}{n}2\sigma^2$.

$$\begin{aligned}E(C\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2)&=C\sum_{i=1}^{n}E((X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2)\\&=C\sum_{i=1}^{n}E(Y_i-\bar{Y})^2=C\sum_{i=1}^{n}[D(Y_i-\bar{Y})+(E(Y_i-\bar{Y}))^2]\\&=Cn\frac{n-1}{n}2\sigma^2=C(n-1)2\sigma^2=\sigma^2.\end{aligned}$$

则 $C = \frac{1}{2(n-1)}$.

专业班级__________ 学号__________ 姓名 __________

习题十三　参数区间估计

13.1 设 $X_1, ..., X_n$ 是总体 X 的一个样本, X 的概率函数为 $f(x;\theta)$, θ 为未知参数, 已知存在统计量 $\theta_1 = \theta_1(X_1, ..., X_n)$, $\theta_2 = \theta_2(X_1, ..., X_n)$ 和正数 α : $0 < \alpha < 1$, 使得 $P\{\theta_1 < \theta < \theta_2\} = 1 - \alpha$, 则称区间 (θ_1, θ_2) 是 θ 的 ________________; $1 - \alpha$ 是 ________________; 给定 $1 - \alpha$, (θ_1, θ_2) 的长度 $L = \theta_2 - \theta_1$ 是 ________________ 越好.

置信区间，置信度，越短

13.2 设某种清漆的 9 个样品, 其干燥时间 (小时) 分别为

$$6.0, 5.7, 5.8, 6.5, 7.0, 6.3, 5.6, 6.1, 5.0$$

设干燥时间总体服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 在下列条件下分别求出 μ 的置信度为 95% 的置信区间:

(1) $\sigma = 0.6$ (小时);　　(2) 若 σ 未知.

解：(1)

1. 由已知 构造统计量
$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1),$$
2. 令
$$P\{|Z| < z_{\alpha/2}\} = 1 - \alpha = 0.95,$$
$$P\{|\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}| < z_{\alpha/2}\} = 0.95,$$
即
$$P\{\bar{X} - \sigma/\sqrt{n} \cdot z_{\alpha/2} < \mu < \bar{X} + \sigma/\sqrt{n} \cdot z_{\alpha/2}\} = 0.95.$$
3. 由观测值 $\bar{x} = 6$.
4. 查表 $z_{\alpha/2} = z_{0.05/2} = z_{0.025} = 1.96$.
5. 故μ 的置信度为 $1 - \alpha = 0.95$ 的置信区间 为
$$(\bar{x} - \sigma/\sqrt{n} \cdot z_{\alpha/2}, \bar{x} + \sigma/\sqrt{n} \cdot z_{\alpha/2}) = (5.608, 6.392).$$

(2)

1. 构造统计量
$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1),$$

2. 令
$$P\{|T| < t_{\alpha/2}(n-1)\} = 1 - \alpha = 0.95,$$
即
$$P\{\bar{X} - S/\sqrt{n} \cdot t_{\alpha/2}(n-1) < \mu < \bar{X} + S/\sqrt{n} \cdot t_{\alpha/2}(n-1)\} = 0.95.$$

3. 由观测值 $\bar{x} = 6.0, s = 0.5745.$

4. 查表 $t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.05/2}(9-1) = t_{0.025}(8) = 2.3060.$

5. 故μ 的置信度为 $1-\alpha = 0.95$ 的置信区间 为
$$(\bar{x} - s/\sqrt{n} \cdot t_{\alpha/2}(n-1), \bar{x} + s/\sqrt{n} \cdot t_{\alpha/2}(n-1)) = (5.5584, 6.4416).$$

13.3 已知一批产品的长度指标 $X \sim N(\mu, 0.5^2)$, 要使样本均值 $\overline{X}$ 与总体均值 μ 的误差在置信度为 0.95 的情况下小于 0.1, 问至少应抽取多大容量的样本?

解:

1. 由已知 $\sigma = 0.5$ 已知， 构造统计量
$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1),$$

2. 令
$$P\{|Z| < z_{\alpha/2}\} = 1 - \alpha = 0.95,$$
$$P\{|\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}| < z_{\alpha/2}\} = 0.95,$$
即
$$P\{|\bar{X} - \mu| \leq \sigma/\sqrt{n} \cdot z_{\alpha/2}\} = 0.95.$$

3. 查表 $z_{\alpha/2} = z_{0.05/2} = z_{0.025} = 1.96.$

4. $\sigma/\sqrt{n}\cdot z_{\alpha/2} < 0.1, \Rightarrow n > 96.04$. 可取 $n = 97$. 至少要取 97 的样本才能满足要求。

13.4 随机地选取某种炮弹 9 发做试验, 测得炮口速度的样本标准差 $s = 11(m/s)$, 设炮口速度服从正态分布, 分别求炮口速度的方差 σ^2 和标准差 σ 的置信度为 95% 的置信区间.

解：μ 未知.

1. 构造统计量
$$\eta = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$
2. 令
$$P\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \eta < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\} = 1-\alpha = 0.95,$$
即
$$P\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\} = 0.95.$$
3. 由观测值 $s = 11$.

4. 查表 $\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.05/2}(9-1) = \chi^2_{0.025}(8) = 17.534$.
$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{1-0.05/2}(9-1) = \chi^2_{0.975}(8) = 2.180$.

5. 故σ 的置信度为 $1-\alpha = 0.95$ 的置信区间 为
$$(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}, \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}) = (7.430, 21.072).$$

13.5 就 13.2 题中的两种情况分别求出 μ 的置信度为 95% 的单侧置信上限和单侧置信下限.

解：(1) σ 已知.

1. 由已知 构造统计量
$$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1),$$
2. 令
$$P\{Z > -z_\alpha\} = 1-\alpha = 0.95,$$

3. 故μ 的置信度为 $1-\alpha=0.95$ 的单侧置信上限为

$$\bar{x}+\sigma/\sqrt{n}\cdot z_\alpha=6.0+0.6/3*1.645=6.329.$$

(2) σ 未知.

1. 构造统计量

$$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1),$$

2. 令

$$P\{T>-t_\alpha(n-1)\}=1-\alpha=0.95,$$

3. 故μ 的置信度为 $1-\alpha=0.95$ 的单侧置信上限为

$$\bar{x}+s/\sqrt{n}\cdot t_{\alpha/2}(n-1)=6.0+0.5745/3*1.8695=6.358.$$

13.6 现有两批导线, 随机地从 A 批导线中选取 4 根, 从 B 批导线中选取 5 根, 测得电阻值 (欧) 分别为

A 批: 0.143, 0.142, 0.143, 0.137;　　B 批: 0.140, 0.142, 0.136, 0.138, 0.140

设两组导线的电阻分别服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma^2)$, $N(\mu_2,\sigma^2)$, 方差相等, 两样本相互独立, μ_1,μ_2,σ^2 均为未知, 试求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 95% 的置信区间.

解:

1. 构造统计量 $T=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$, 其中 $S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$.
2. 令
$$P\{|T|<t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\}=1-\alpha=0.95,$$
即 $P\{(\bar{X}-\bar{Y})-t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$
$<\mu_1-\mu_2<(\bar{X}-\bar{Y})+t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\}=0.95.$
3. 由观测值 $\bar{x}=0.141,\bar{y}=0.139,n_1=4,n_2=5,\ s_1^2=8.23\times10^{-6},s_2^2=5.25\times10^{-6},s_w=2.56\times10^{-3}$.

4. 查表 $t_{0.025}(7)=2.3646$.

5. 故$\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha=0.95$ 的置信区间 为

$$(-0.002, 0.006).$$

13.7 两化验员 A,B 各自独立地用相同的方法对某种聚合物的含氯量各做 10 次测量, 分别求得测定值的样本方差为 $S_A^2=0.5419$, $S_B^2=0.6965$. 设测定值总体分别服从正态分布 $N(\mu_A,\sigma_A^2)$, $N(\mu_B,\sigma_B^2)$. 试求方差比 σ_A^2/σ_B^2 的置信度为 95% 的置信区间.

解:

(1) μ_A,μ_B 未知.

令

$$F=\frac{S_A^2/\sigma_A^2}{S_B^2/\sigma_B^2}\sim F(n_A-1,n_B-1)$$

查表 $f_{0.025}(9,9)=4.03$, $f_{0.975}(9,9)=1/4.03=0.248$.

由已知数据 $s_A^2/s_B^2=0.5419/0.6965=0.7780$.

(2) 由 $P\{f_{1-\alpha/2}(n_A-1,n_B-1)<F<f_{\alpha/2}(n_A-1,n_B-1)\}=1-\alpha$, 可得 σ_A^2/σ_B^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{S_A^2/S_B^2}{f_{\alpha/2}(n_A-1,n_B-1)},\frac{S_A^2/S_B^2}{f_{1-\alpha/2}(n_A-1,n_B-1)}\right)=(0.7780/4.03, 0.7780/0.248).$$

13.8 假设 0.50, 1.25, 0.80, 2.00 是来自总体 X 的简单随机样本, 已知 $Y=\ln X$ 服从正态分布 $N(\mu,1)$.

(1) 试求 X 的数学期望 $E(X)$ (记 $E(X)=b$);

(2) 试求 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间;

(3) 利用上述结果求 b 的置信水平 0.95 的置信区间.

解:

X	0.5	1.25	0.80	2.0
$Y=\ln X$	-0.693	0.223	-0.223	0.693

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(\ln x-\mu)^2/2}\frac{1}{x}. & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

(1)

$$\begin{aligned}E(X)=&\int_0^{\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(\ln x-\mu)^2/2}\frac{1}{x}dx\\ =&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2+t}e^{\mu}dt(t=\ln x-\mu)\\ =&e^{\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(t^2-2t+1)/2}e^{1/2}dt\\ =&e^{\mu+1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(t-1)^2/2}d(t-1)=e^{\mu+1/2}.\end{aligned}$$

(2)$Y \sim N(\mu, 1)$, 构造 $Z = \frac{\bar{Y}-\mu}{1/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$,
由 $P\{|\bar{Y} - \mu| < z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}\} = 1 - \alpha = 0.95$, $\bar{Y} = 0$,
得 $\mu \in (-z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}, z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}) = (-1.96/2, 1.96/2) = (-0.98, 0.98)$.

$$\begin{aligned} P\{-0.98 < \mu < 0.98\} &= P\{e^{-0.98+0.5} < e^{\mu+0.5} < e^{0.98+0.5}\} \\ &= P\{0.619 < e^{\mu+0.5} < 4.39\} = 0.95. \end{aligned}$$

即

$$P\{0.619 < b < 4.39\} = 0.95$$

b 的置信水平 0.95 的置信区间为 $(0.619, 4.39)$.

专业班级__________学号__________ 姓名 __________

习题十四　单正态总体参数的假设检验

14.1 (1) 假设检验的理论依据是 ________________.

小概率原理

(2) 对正态总体的数学期望 μ 进行假设检验, 如果在显著性水平 0.05 下接受假设 $H_0:\mu=\mu_0$, 那么在显著性水平 0.01 下, 下列结论中正确的是 (　　).

(A) 必接受　　(B) 可能接受, 也可能拒绝

(C) 必拒绝　　(D) 不接受, 也不拒绝

A

(3) 在假设检验中, 记 H_1 为备择假设, 则称 (　　) 为犯第 I 类错误.

(A) H_1 为真接受 H_1　　(B) H_1 不真接受 H_1

(C) H_1 为真拒绝 H_1　　(D) H_1 不真拒绝 H_1

B

14.2 设某产品的某项指标服从正态分布, 已知它的标准差 $\sigma=150$. 现从一批产品中随机抽取 26 个, 测得该项指标的平均值为 1637. 问能否认为这批产品的该项指标值为 1600 ($\alpha=0.05$)?

解：σ 已知.

1. 提出假设 $H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu\neq\mu_0$. 其中 $\mu_0=1600$.
2. 构造统计量：　$Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\overset{H_0\text{真}}{=}\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$.
3. 拒绝域 $|Z|=|\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}|\geq z_{\alpha/2}$
4. 由已知 $\bar{x}=1637,\sigma=150,\alpha=0.05,z_{0.025}=1.96,n=26$

$$Z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{1637-1600}{150/\sqrt{26}}=1.256<1.96=z_{\alpha/2}.$$

即 $|\bar{x}-\mu_0|$ 不会太大，在可接受的范围内，故接受原假设，即认为批产品的该项指标值为 1600.

14.3 某测距仪在 500 米范围内, 测距精度 $\sigma = 10$ 米. 今对距离 500 米的目标测量 9 次, 得到平均距离 $\overline{x} = 510$ 米. 设测量的距离服从正态分布, 问该测距仪是否存在系统误差 ($\alpha = 0.05$)?

解：σ 已知.

1. 提出假设 $H_0 : \mu = \mu_0, H_1 : \mu \neq \mu_0$. 其中 $\mu_0 = 500$.
2. 构造统计量：$Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{H_0\text{真}}{=} \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$.
3. 拒绝域 $|Z| = |\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}| \geq z_{\alpha/2}$
4. 由已知 $\bar{x} = 510, \sigma = 10, \alpha = 0.05, z_{0.025} = 1.96, n = 9$

$$Z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{510-500}{10/\sqrt{9}} = 3 > 1.96 = z_{\alpha/2}.$$

即 $|\bar{x}-\mu_0|$ 太大，不在可接受的范围内，故拒绝原假设，即测距仪存在系统误差.

14.4 某药厂生产一种抗菌素, 已知在正常生产情况下, 每瓶抗菌素的某项指标服从均值为 23.0 的正态分布. 某日开工后随机抽取 5 瓶, 测得数据如下: 22.3, 21.5, 22.0, 21.8, 21.4. 问该日生产是否正常 ($\alpha = 0.05$)?

解：σ 未知.

1. 提出假设 $H_0 : \mu = \mu_0, H_1 : \mu \neq \mu_0$. 其中 $\mu_0 = 23$.
2. 构造统计量：$T = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \overset{H_0\text{真}}{=} \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$.
3. 拒绝域 $|T| = |\frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}}| \geq t_{\alpha/2}$
4. 由已知 $\bar{x} = 21.8, s^2 = 0.135, \alpha = 0.05, t_{0.025}(5-1) = 2.7764, n = 5$

$$|T| = |\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}| = |\frac{21.8-23}{\sqrt{0.135}/\sqrt{5}}| = 7.30296 > 2.7764 = t_{\alpha/2}(4).$$

即 $|\bar{x}-\mu_0|$ 太大，不在可接受的范围内，故拒绝原假设，即该日生产不正常.

14.5 某厂生产的某种型号的电池, 其寿命 (以小时计) 长期以来服从方差 $\sigma^2 = 5000$ 的正态分布. 现有一批该型号电池, 从它的生产情况看, 寿命的波动性有所改变. 现随机抽取 26 只电池, 测得其寿命的样本方差 $S^2 = 9200$, 问根据这一数据能否推断这批电池寿命的波动性较以往有显著的变化 (取 $\alpha = 0.05$) ?

解：μ 未知.

由已知 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

1. 提出假设 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2, H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$. 其中 $\sigma_0^2 = 5000$.
2. 构造统计量： $\eta = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \overset{H_0真}{=} \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.
3. 拒绝域 $\eta \leq \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ 或 $\eta \geq \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$.
4. 计算： 由已知 $\alpha = 0.05$, 查表 $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.975}(25) = ?$, $\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.025}(25) = 40.646$.
   由观测值 $\eta = \frac{(26-1)*9200}{5000} = 46 > 40.646$.
   即在拒绝域内，故拒绝原假设，即认为这批电池寿命的波动性较以往有显著的变化.

14.6 已知维尼纶纤度在正常条件下服从正态分布 $N(1.405, 0.048^2)$, 某日抽取 5 根纤维, 测得其纤度为 1.32, 1.55, 1.36, 1.40, 1.44. 问这一天纤度的总体标准差是否正常 $(\alpha = 0.05)$?

解： μ 已知.

由已知 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

1. 提出假设 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2, H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$. 其中 $\sigma_0^2 = 0.048^2$.
2. 构造统计量： $\eta = \frac{nS_\mu^2}{\sigma_0^2} \overset{H_0真}{=} \frac{nS_\mu^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$.
3. 拒绝域 $\eta \leq \chi^2_{1-\alpha/2}(n)$ 或 $\eta \geq \chi^2_{\alpha/2}(n)$.
4. 计算： 由已知 $\alpha = 0.05$, 查表 $\chi^2_{1-\alpha/2}(n) = \chi^2_{0.975}(5) = ?$, $\chi^2_{\alpha/2}(n) = \chi^2_{0.025}(5) = ?$.
   由观测值 $\bar{x} = 1.414, ns_\mu^2 = \sum(x_i - \mu)^2 = ?$.
   $? < \eta = \frac{n*s_\mu^2}{\sigma^2} = ? < ?$.

14.7 某厂生产的固体燃料推进器的燃烧率服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, $\mu = 40$ cm/s, $\sigma = 2$ cm/s. 现用新方法生产了一批推进器, 从中随机抽取 25 只, 测得燃烧率的样本均值为 $\mu = 41.25$ cm/s. 设在新方法下总体标准差仍为 2 cm/s, 问这批推进器是否较以往生产的推进器的燃烧率有显著提高? $(\alpha = 0.05)$

解： σ^2 已知.

1. 提出假设 $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu > \mu_0$. 其中 $\mu_0 = 40$.
2. 构造统计量： $Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{H_0真}{=} \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$.
3. 拒绝域 $Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha$

4. 由已知 $\bar{x} = 41.25, \alpha = 0.05, z_{0.05} = 1.645, , n = 25$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{41.25 - 40}{2/\sqrt{25}} = 3.125 > 1.645 = z_\alpha.$$

即 $|\bar{x} - \mu_0|$ 太大，不在可接受的范围内，故拒绝原假设，即该认为较以往有显著提高.

14.8* 某车间有一台包装机包装葡萄糖. 包得的袋装糖重是一个随机变量, 它服从正态分布. 当机器工作正常时, 其均值为 0.5 公斤, 标准差为 0.015 公斤. 某日开工后为检查包装机是否正常, 随机抽取它所包装的糖 9 袋, 称得净重为 (公斤):

$$0.497, 0.506, 0.518, 0.524, 0.498, 0.511, 0.520, 0.515, 0.512.$$

问这天该机器工作是否正常 ($\alpha = 0.05$)?

解： $\sigma = 0.015$ 已知.

1. 提出假设 $H_0 : \mu = \mu_0, H_1 : \mu > \mu_0$. 其中 $\mu_0 = 0.5$.
2. 构造统计量： $Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{H_0\text{真}}{=} \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$.
3. 拒绝域 $|Z| = |\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}| \geq z_{\alpha/2}$
4. 由已知 $\bar{x} = 0.512, \alpha = 0.05, z_{0.025} = 1.96, , n = 9$

$$|Z| = |\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}| = \frac{0.512 - 0.5}{0.015/\sqrt{9}} = 2.4 > 1.96 = z_{\alpha/2}.$$

即 $|\bar{x} - \mu_0|$ 太大，不在可接受的范围内，故拒绝原假设，即该认为包装机工作不正常.

专业班级＿＿＿＿＿＿学号＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿

习题十五　双正态总体参数的假设检验与χ^2检验

15.1 对两种羊毛织品的强度进行试验所得结果如下 (磅/平方英寸)：

第一种: 138, 127, 134, 125;　　第二种: 134, 137, 135, 140, 130, 134;

设两种羊毛织品的强度服从方差相同的正态分布. 问是否可得结论: 一种羊毛较另一种羊毛好 ($\alpha = 0.05$)?

解：设 $X_1, \cdots, X_{n_1} \overset{iid}{\sim} N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2} \overset{iid}{\sim} N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 且两样本独立, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma, \sigma$ 未知 。

1). 若假设检验 $H_0: \mu_1 = \mu_2; H_1: \mu_1 \neq \mu_2$,
即 $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0; H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$.

2). 当 H_0 成立时， $T = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$, $S_w^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$.

3). 由 $P\{|T| \geq t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\} = \alpha = 0.05$, 查表 $t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2) = t_{0.025}(8) = 2.3060$.

4). 由样本值 $\bar{x} = 131, \bar{y} = 135, (n_1-1)s_1^2 = 110, (n_2-1)s_2^2 = 56, s_w^2 = 166/8$.

$$-t_{0.025}(8) < \frac{\bar{x}-\bar{y}}{s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = -1.36 < t_{0.025}(8).$$

故接受 H_0. 即不能认为一种羊毛较另一种羊毛好.

15.2 有两箱灯泡, 从第一箱中取 9 只测试, 算得其平均寿命为 1532 小时, 标准差为 423 小时; 从第二箱中取 18 只测试, 算得其平均寿命为 1412 小时, 标准差为 380 小时. 设两箱灯泡寿命都服从正态分布, 且方差相等. 试判断是否可以认为这两箱灯泡是同一批生产的? ($\alpha = 0.05$)

解： $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma, \sigma$ 未知 。

1). 若假设检验 $H_0: \mu_1 = \mu_2; H_1: \mu_1 \neq \mu_2$,
即 $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0; H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$.

2). 当 H_0 成立时， $T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2), S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$.

3). 由 $P\{|T|\geq t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\}=\alpha=0.05$, 查表 $t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)=t_{0.025}(25)=2.0595$.

4). 由样本值 $\bar{x}=1531, \bar{y}=1412, s_1^2=423^2, s_2^2=380^2$.

$$-t_{0.025}(25)<\frac{\bar{x}-\bar{y}}{s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\doteq 0.746<t_{0.025}(25).$$

故接受 H_0. 即可以认为这两箱灯泡是同一批生产的.

15.3 两台机床加工同一种零件, 分别取其 6 个和 9 个, 量其长度计算得 $s_1^2=0.345$, $s_2^2=0.357$. 假定零件长度服从正态分布, 问是否可以认为这两台机床加工的零件长度的方差无显著差异 ($\alpha=0.05$)?

解： μ 未知。

1. 假设检验 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2; H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$.

2. 由于假设 H_0 成立 $F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$,

3. 由于 $P\{F<f_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\text{或}F>f_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\}=\alpha$,
$f_{0.025}(5,8)=4.82$, $f_{0.975}(5,8)=\frac{1}{f_{0.025}(8,5)}=\frac{1}{6.76}=0.148$.
由观测值
$$4.82>F=0.345/0.357=0.9664>0.148.$$
故接受 H_0. 即无明显差异.

15.4 有甲、乙两台机床加工同一种产品, 从这两台机床加工的产品中抽取若干产品, 测得直径 (单位: mm) 为：

机床甲: 20.5, 19.8, 19.7, 20.4, 20.1, 20.0, 19.0, 19.9;

机床乙: 19.7, 20.8, 20.5, 19.8, 19.4, 20.6, 19.2

假定产品直径均服从正态分布, 试比较甲、乙两机床加工的精度有无显著差异 ($\alpha=0.05$) ?

解：解：μ 未知。

1). 假设检验 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2; H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$.

2). 由于假设 H_0 成立 $F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$,

3). 由于 $P\{F<f_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\text{或}F>f_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\}=\alpha$,
$f_{0.025}(8-1,7-1)=5.70$, $f_{0.975}(7,6)=\frac{1}{f_{0.025}(6,7)}=\frac{1}{5.12}=0.195$.
由观测值

$$5.70>F=\frac{s_1^2}{s_2^2}=0.2164/0.3967=0.546>0.195.$$

故接受 H_0. 即无明显差异.

15.5 设总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$, $X_1,...,\ X_{n_1}$ 为来自总体 X 的一个样本, 总体 $Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$, $Y_1,...,\ Y_{n_2}$ 为来自总体 Y 的一个样本, 两样本相互独立, 参数均未知. 试构造出原假设 $H_0:\mu_1=C\mu_2$ 的一个水平为 α 的检验, 这里 C 为不为零的已知常数.

解：σ 未知 。

1. 若假设检验 $H_0:\mu_1=c\mu_2; H_1:\mu_1\neq c\mu_2$,

2. 当 H_0 成立时， $Z=\frac{\bar{X}-c\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1}+\frac{c^2\sigma^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$,
$\eta=\frac{(n_1+n_2-2)S_w^2}{\sigma^2}=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1+n_2-2)$. 当 H_0 成立时，构造

$$T=\frac{Z}{\sqrt{\eta/(n_1+n_2-2)}}=\frac{\bar{X}-c\bar{Y}}{s_w^2\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2).$$

15.6 从甲、乙两校的高考英语试卷中各抽 27 份和 26 份, 其英语平均成绩分别为甲校 67 分, 乙校 71 分, 样本标准差分别为甲校 8 分, 乙校 6 分. 假定学生的英语成绩均服从正态分布, 试问两校英语成绩有无显著差异 ($\alpha=0.05$)?

解：(1) σ^2 未知

1. 若假设检验 $H_0:\mu_1=\mu_2; H_1:\mu_1\neq\mu_2$,

2. 当 H_0 成立时，构造

$$T=\frac{\bar{X}-c\bar{Y}}{s_w^2\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2), S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}.$$

3. 由 $P\{|T|\geq t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\}=\alpha=0.05$, 查表 $t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)=t_{0.025}(51)=?$.

4. 由样本值 $s_w^2=\frac{26*8^2+25*6^2}{(27+26-2)}$.

$$T=\frac{67-71}{s_w\sqrt{\frac{1}{27}+\frac{1}{26}}}\doteq.$$

(2) μ 未知

1. 假设检验 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2; H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$.

2. 由于假设 H_0 成立 $F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$,

3. 由于 $P\{F<f_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\text{或}F>f_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\}=\alpha$,
$f_{0.025}(26,25)=2.26$, $f_{0.975}(26,25)=\frac{1}{f_{0.025}(25,26)}=0.4425$.
由观测值
$$2.26>F=\frac{s_1^2}{s_2^2}=8^2/6^2=1.778>0.4425.$$
故接受 H_0. 即成绩无明显差异.

15.7 * 对某汽车零件制造厂所生产的汽缸螺栓口径进行 100 次抽样检查, 得 100 个数据, 分组列表如下:

组 限	频 数	组 限	频 数
$10.93\sim10.95$	5	$11.01\sim11.03$	17
$10.95\sim10.97$	8	$11.03\sim11.05$	6
$10.97\sim10.99$	20	$11.05\sim11.07$	6
$10.99\sim11.01$	34	$11.07\sim11.09$	4

试检验螺栓口径是否服从正态分布 ($\alpha=0.05$).

解：假设 $H0:X\sim N(\mu,\sigma^2)$. $\bar{x}=11.0024=\hat{\mu},\hat{\sigma^2}=0.0319.^2$,

编号	$(x_{i-1}, x_i]$	f_i	中间值	P_i	nP_i	$\frac{(f_i-nP_i)^2}{nP_i}$
1	$(-\infty, 10.95]$	5	10.94	0.0503	5.03	0.0002
2	$(10.95, 10.97]$	8	10.96	0.1047	10.47	0.5821
3	$(10.97, 10.99]$	20	10.98	0.1938	19.38	0.0197
4	$(10.99, 11.01]$	34	11	0.2453	24.53	3.6525
5	$(11.01, 11.03]$	17	11.02	0.2123	21.23	0.8442
6	$(11.03, 11.05]$	6	11.04	0.1256	12.56	3.4300
7	$(11.05, 11.07]$	6	11.06	0.0508	5.08	0.1658
8	$(11.07, \infty)$	4	11.08	0.0171	1.71	3.0812
合计	$(-\infty, \infty)$	100	$\bar{x}$	1	100	11.7755

情况 1： $k = 8, r = 2, \alpha = 0.05$:

$$\chi^2_\alpha(k - r - 1) = \chi^2_{0.05}(5) = 11.0705 < v = 11.7755$$

故拒绝 $H0$.

情况 2：

编号	$(x_{i-1}, x_i]$	f_i	中间值	P_i	nP_i	$\frac{(f_i-nP_i)^2}{nP_i}$
1	$(-\infty, 10.95]$	5	10.94	0.0503	5.03	0.0002
2	$(10.95, 10.97]$	8	10.96	0.1047	10.47	0.5821
3	$(10.97, 10.99]$	20	10.98	0.1938	19.38	0.0197
4	$(10.99, 11.01]$	34	11	0.2453	24.53	3.6525
5	$(11.01, 11.03]$	17	11.02	0.2123	21.23	0.8442
6	$(11.03, 11.05]$	6	11.04	0.1256	12.56	3.4300
7	$(11.05, 11.07]$	6	11.06	0.0679	6.79	1.5189
8	$(11.07, \infty)$	4	11.08			
合计	$(-\infty, \infty)$	100	$\bar{x}$	1	100	10.0474

$k = 7, r = 2, \alpha = 0.05$: (合并最后两组)

$$\chi^2_\alpha(k - r - 1) = \chi^2_{0.05}(4) = 9.4877 < v. = 10.0474$$

故拒绝 $H0$.

```
% 15.7
zoom=[10.94,10.96,10.98,11,11.02,11.04,11.06,11.08];
f_zoom=[5,8,20,34,17,6,6,4];
k=length(f_zoom);
r=2;%parameter number;
alpha=0.05;
n=sum(f_zoom);
x_bar=sum(zoom.*f_zoom)/n;
mu_bar_square=sum((zoom-x_bar).^2.*f_zoom)/n;
mu_bar=sqrt(mu_bar_square)
p=zeros(1,8);
p(1)=normcdf(zoom(1)+0.01,x_bar,mu_bar)-0;
for i=2:7
    p(i)=normcdf(zoom(i)+0.01,x_bar,mu_bar)-normcdf(zoom(i)-0.01,x_bar,mu_bar);
end
p(8)=1-normcdf(zoom(8)-0.01,x_bar,mu_bar);
n_p=n*p;
v=sum((f_zoom-n_p).^2./n_p)
chi2alpha=chi2inv(0.95,8-2-1)
if v<chi2inv(1-alpha,k-r-1)
    disp('accept H0')
else
    disp('reject H0')
end
```

```
x_bar =

   11.0024


mu_bar =

    0.0319


p =

    0.0503    0.1047    0.1938    0.2453    0.2123    0.1256    0.0508    0.0171


v =

   11.7755


chi2alpha =

   11.0705

reject H0
```

测验一　随机事件和概率

一、填空题

1 设 A, B, C 为三个事件, 且 $P(\overline{A}\cup\overline{B})=0.9$, $P(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C})=0.97$, 则 $P(AB-C)=$ ____________________.

0.07.

$$P(ABC)=0.03$$

2 设 10 件产品中有 4 件不合格品, 从中任取两件, 已知所取两件产品中有一件是不合格品, 则另一件也是不合格品的概率为 ____________________.

1/5.

设 A 所取两件产品中有一件是不合格品; B 所取两件产品中2件不合格;

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{C_4^2/C_{10}^2}{(C_{10}^2-C_6^2)/C_{10}^2}$$

3 设随机事件 A, B 及其和事件 $A\cup B$ 的概率分别是 0.4, 0.3, 0.6. 若 $\overline{B}$ 表示 B 的对立事件, 则概率 $P(A\overline{B})=$ ____________________.

0.3

4 某市有 50 % 住户订日报, 有 65 % 住户订晚报, 有 85 % 住户至少订这两种报纸中的一种, 则同时订这两种报纸的住户的百分比是 ____________________.

0.3.

设 A 定日报，B 定晚报，

$$P(A)=0.5, P(B)=0.65, P(A\cup B)=0.85, P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$

5 三台机器相互独立运转, 设第一、第二、第三台机器不发生故障的概率依次为 0.9、0.8、0.7, 则这三台机器中至少有一台发生故障的概率为 ____________________.

0.496.

设 A_i 为第 i 台机器不发生故障,

$$P(A_1)=0.9, P(A_2)=0.8, P(A_3)=0.7,$$
$$P(\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3})=P(\overline{A_1A_2A_3})=1-P(ABC)=1-P(A)P(B)P(C).$$

6 设 A,B,C 两两独立的事件, 且 $ABC=\emptyset$. 若 $P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$, 且 $P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$, 则 $P(A)=$ ____________________.

1/4.

设 $p=P(A)=P(B)=P(C)$,

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)\\&=3p-3p^2=9/16.\end{aligned}$$

7 在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数, 则两数之和小于 $\frac{6}{5}$的概率为 ____________________.

17/25.(画图)

8 三人独立破译一密码, 他们能单独译出的概率分别为 $\frac{1}{5},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$, 则此密码被译出的概率 ____________________.

3/5.

设 A_i 为第 i 人独立破译一密码,

$$\begin{aligned}&P(A_1\cup A_2\cup A_3)\\&=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)\\&=1/5+1/3+1/4-1/15-1/12-1/20+1/60.\end{aligned}$$

二、选择题

1 设 A,B,C 是三个事件, 与事件 A 互斥的事件是 (　　).

(A) $\overline{A}B\cup A\overline{C}$　　(B) $\overline{A(B\cup C)}$　　(C) $\overline{ABC}$　　(D) $\overline{A\cup B\cup C}$

D

2 设 A,B 是任意二个事件, 则 (　　).

(A) $P(A\cup B)P(AB)\geq P(A)P(B)$ (B) $P(A\cup B)P(AB)\leq P(A)P(B)$

(C) $P(A-B)P(B-A)\leq P(A)P(B)-P(AB)$ (D) $P(A-B)P(B-A)\geq \frac{1}{4}$

B.

$$
\begin{aligned}
&P(A\cup B)P(AB)-P(A)P(B)=(P(A)+P(B)-P(AB))P(AB)\\
&=-P(A)(P(B)-P(AB))+P(AB)(P(B)-P(AB))\\
&=-(P(A)-P(AB))(P(B)-P(AB))\leq 0.
\end{aligned}
$$

3 事件 A 与 B 相互独立的充要条件为 ( ).

(A) $A\cup B=\Omega$ (B) $P(AB)=P(A)P(B)$

(C) $AB=\emptyset$ (D) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

B

4 设 A,B 为二个事件, 且 $P(AB)=0$, 则 ( ).

(A) A,B 互斥 (B) AB 是不可能事件

(C) AB 未必是不可能事件 (D) $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$

C

5 设 A,B 为任意二个事件, 且 $A\subset B$, $P(B)>0$, 则下列选项必然成立的是 ( ).

(A) $P(A)<P(A|B)$;(B) $P(A)\leq P(A|B)$;

(C) $P(A)>P(A|B)$;(D) $P(A)\geq P(A|B)$.

B.

因为 $A\subset B$,

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}\leq P(A).$$

三、计算题

1 某厂生产的产品次品率为 0.05, 每 100 个产品为一批, 抽查产品质量时, 在每批中任取一半来检查, 如果发现次品不多于 1 个, 则这批产品可以认为合格的, 求一批产品

被认为是合格的概率.

解：X 表示次品数，

$$\begin{aligned} p &= P\{X=0\}+P\{X=1\} \\ &= \frac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}}+\frac{C_{95}^{49}C_5^1}{C_{100}^{50}} = 0.2794. \end{aligned}$$

2 书架上按任意次序摆着 15 本教科书, 其中有 5 本是数学书, 从中随机地抽取 3 本, 至少有一本是数学书的概率.

解：X 表示数学书的数目，

$$p = 1-P\{X=0\} = 1-\frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = 67/91.$$

3 某种产品的商标为 “MAXAM”, 其中有 2 个字母脱落, 有人捡起随意放回, 求放回后仍为 “MAXAM” 的概率.

解：A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 表示事件脱落 MM, AA, MA, XA, XM;

B 表示放回仍为 $MAXAM$, 则 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 互不相容， 且 $A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5=\Omega$,

$$\begin{aligned} P(A_1) = \frac{C_2^2}{C_5^2}, P(A_2) = 1/10, P(A_3) = 4/10, P(A_4) = P(A_5) = 1/10, \\ P(B|A_1) = P(B|A_2) = 1, P(B|A_3) = P(B|A_4) = P(B|A_5) = 1/2, \end{aligned}$$

因此，由全概率公式 $P(B) = 3/5$.

4 设甲、乙两袋, 甲袋中有 n 个白球, m 个红球, 乙袋中有 N 个白球, M 个红球, 今从甲袋中任取一只放入乙袋, 再从乙袋中任取一球, 问取到白球的概率.

解：A 表示先从甲袋取一球为白球;

B 表示先从甲袋取一球为红球;

C 表示再从乙袋取一球为白球;

$$P(C) = P(AC)+P(BC) = P(C|A)P(A)+P(C|B)P(B) = \frac{n(N+1)+Nm}{(N+M+1)(m+n)}.$$

测验二　离散型随机变量及其分布

一、填空题

1 设随机变量 $X \sim B(2,p)$, $Y \sim B(3,p)$, 若$P\{X \geq 1\} = \frac{5}{9}$，则 $P\{Y \geq 1\} =$ ________.

19/27.

$$P\{X=0\} = 1 - P\{X \geq 1\} = 1 - 5/9 = 4/9 = C_2^0 p^0 (1-p)^2. -->p = 1/3.$$

$$P\{Y \geq 1\} = 1 - P\{Y=0\} = 1 - (1-p)^3.$$

2 已知随机变量 X 只能取 $-1, 0, 1, 2$ 四个数值, 其相应的概率依次为 $\frac{1}{2c}, \frac{3}{4c}, \frac{5}{8c}, \frac{2}{16c}$, 则 $c =$ ________.

2.

$$\frac{1}{2c} + \frac{3}{4c} + \frac{5}{8c} + \frac{2}{16c} = 1$$

3 设在 15 只同类型的零件中有 2 只是次品, 在其中取 3 次, 每次任取 1 只, 作不放回抽样, 以 X 表示取出的次品数, 则 X 的分布律为 ________.

X	0	1	2
P	$\frac{22}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

$$P\{X=0\} = \frac{C_2^0 C_{13}^3}{C_{15}^3}$$

4 已知 $P\{X = k\} = \frac{a}{k}$, $P\{Y = -k\} = \frac{b}{k^2}$ $(k = 1, 2, 3)$, X 与 Y 独立, 则 $a =$ ________, $b =$ ________.

6/11,36/49.

$$a + a/2 + a/3 = 1, b + b/4 + b/9 = 1$$

$$a = 6/11, b = 36/49.$$

二、选择题

1 $P\{X=k\}=c\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\ (k=0,2,4,...)$ 是随机变量 X 的概率分布, 则 λ, c 一定满足 ( )

(A) $\lambda>0$; (B) $c>0$; (C) $c\lambda>0$; (D) $c>0$ 且 $\lambda>0$

B.

$C>0$,k 为偶数，λ 可非负.

2 设每次试验成功的概率为 $p\ (0<p<1)$, 则在三次独立重复试验中至少成功一次的概率为 ( ).

(A) p^3 (B) $1-p^3$ (C) $(1-p)^3$ (D) $1-(1-p)^3$

D

三、计算题

1 设一批产品中有 10 件正品, 3 件次品, 现一件一件地随机取出, 分别求出在下列各情形中直到取得正品为止所需次数 X 的分布律.

(1) 每次取出的产品不放回;

(2) 每次取出的产品经检验后放回, 再抽取;

(3) 每次取出一件产品后总以一件正品放回, 再抽取.

解：用 A_i 表示第 i 次取出正品，

$$P\{X=1\}=P\{A_1\}=10/13, P\{X=k\}=P\{\overline{A_1}\cdots\overline{A_{k-1}}A_k\}.$$

(1)

X	1	2	3	4
P	$\frac{10}{13}$	$\frac{10}{12}\frac{2}{13}$	$\frac{10}{11}\frac{2}{12}\frac{3}{13}$	$1\cdot\frac{1}{11}\frac{2}{12}\frac{3}{13}$

(2)

X	1	2	$\cdots$	k	$\cdots$
P	$\frac{10}{13}$	$\frac{3}{13}\frac{10}{13}$	$\cdots$	$(\frac{3}{13})^{k-1}\frac{10}{13}$	$\cdots$

(3)

X	1	2	3	4
P	$\frac{10}{13}$	$\frac{3}{13}\frac{11}{13}$	$\frac{3}{13}\frac{2}{13}\frac{12}{13}$	$1\cdot\frac{1}{13}\frac{2}{13}\frac{3}{13}$

2 设 X, Y 的联合分布律为

X \ Y	-2	-1	0
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
3	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{2}{12}$

求 (1) $Z = X + Y$ 的分布律; (2) $W = X - Y$ 的分布律; (3) $U = X^2 + Y - 2$ 的分布律.

解: (1)

$X+Y$	-3	-2	-1	-3/2	-1/2	1	3
P	1/12	1/12	3/12	2/12	1/12	2/12	2/12

(2)

$X-Y$	-1	0	1	3/2	5/2	3	5
P	3/12	1/12	1/12	1/12	2/12	2/12	2/12

(3)

X^2-Y-2	-15/4	-3	-11/4	-2	-1	5	7
P	2/12	1/12	1/12	1/12	3/12	2/12	2/12

3 已知 X 服从参数 $p = 0.6$ 的 $(0-1)$ 分布, 在 $X = 0, X = 1$ 下, 关于 Y 的条件分布分别如表 1、表 2 所示.

表 1

Y	1	2	3
$P\{Y\|X=0\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

表 2

Y	1	2	3
$P\{Y\|X=1\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

求 (X,Y) 的联合概率分布, 以及在 $Y\neq 1$ 时, 关于 X 的条件分布.

解:

X	0	1
p	0.4	0.6

Y	1	2	3
p	0.4	0.3	0.3

X \ Y	1	2	3
0	0.1	0.2	0.1
1	0.3	0.1	0.2

$$P\{X=0|Y\neq 1\}=\frac{P\{X=0,Y\neq 1\}}{P\{Y\neq 1\}}=0.5,$$
$$P\{X=1|Y\neq 1\}=\frac{P\{X=1,Y\neq 1\}}{P\{Y\neq 1\}}=0.5.$$

测验三　连续型随机变量及其分布

一、填空题

1 随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2x-x^2}$ 内掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比，则原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为________________.

$\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$.

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{1/2+\int_1^2\sqrt{1-(x-1)^2}dx}{\pi/2}(x=1+\cos t) \\
&= \frac{1/2+\int_0^{pi/2}\sin^2 tdt}{\pi/2}.
\end{aligned}
$$

2 设 k 在 (0, 5) 上服从均匀分布，则 $4x^2+4kx+k+2=0$ 有实根的概率为________________.

3/5.

$$\Delta \geq 0--->k\geq 2ork\leq -1.$$

3 已知 (X,Y) 联合密度为

$$
f(x,y)=\begin{cases} c\sin(x+y), & 0\leq x\leq \frac{\pi}{4},\ 0\leq y\leq \frac{\pi}{4}, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}
$$

则 $c=$________________, Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)=$________________.

$\sqrt{2}+1$, $\begin{cases} (\sqrt{2}+1)(\cos y-\cos(y+\pi/4)) & 0\leq y\leq \frac{\pi}{4} \\ 0, & other \end{cases}$.

$$
\begin{aligned}
\iint_D \sin(x+y)dxdy &= \int_0^{\pi/4}dx\int_0^{\pi/4}\sin(x+y)dy \\
&= \int_0^{\pi/4}(\cos x-\cos(\pi/4+x))dx.
\end{aligned}
$$

4 随机变量 X 分布密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & |x|<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

则 X 的分布函数 $F(x)=$ ________________.

$$\begin{cases}0, & x<-1,\\ \int_{-1}^{x}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}dx, & -1\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}.$$

$$\int_{-1}^{x}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}dx=(t\sqrt{1-t^2}/\pi+\arcsin t/\pi)|_{x=-1}^{x}$$

$$=x\sqrt{1-x^2}/\pi+\arcsin x/\pi-\arcsin(-1)/\pi$$

二、选择题

1 如下四个函数哪个可以作为随机变量 X 的分布函数 (　　).

(A) $F(x)=\begin{cases}0, & x<-2,\\ \frac{1}{2}, & -2\le x<0,\\ 2, & x\ge 0.\end{cases}$　(B) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \sin x, & 0\le x<\pi,\\ 1, & x\ge\pi.\end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \sin x, & 0\le x<\frac{\pi}{2},\\ 1, & x\ge\frac{\pi}{2}.\end{cases}$　(D) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x+\frac{1}{3}, & 0\le x<\frac{1}{2},\\ 1, & x\ge\frac{1}{2}.\end{cases}$

C D

2 $X\sim N(1,1)$, 概率密度为 $f(x)$, 则 (　　).

(A) $P\{X\le 0\}=P\{X\ge 0\}=0.5$　(B) $f(x)=f(-x),\ x\in(-\infty,+\infty)$

(C) $P\{X\le 1\}=P\{X\ge 1\}=0.5$　(D) $F(x)=1-F(-x),\ x\in(-\infty,+\infty)$

C

3 X,Y 相互独立, 且都服从区间 $[0,1]$ 上的均匀分布, 则服从区间或区域上的均匀分布的随机变量是 (　　).

(A) (X,Y)　(B) $X+Y$　(C) X^2　(D) $X-Y$

A

4 设函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0,\\ \frac{x}{2}, & 0<x\leq 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$ 则 (　　).

(A) $F(x)$ 是随机变量 X 的分布函数　　(B) 不是分布函数

(C) 离散型分布函数　　(D) 连续型分布函数

B.

不满足右连续性.

5 设 X,Y 是相互独立的两个随机变量, 其分布函数分别为 $F_X(x)$, $F_Y(y)$. 则 $Z=\max(X,Y)$ 的分布函数是 (　　).

(A) $F_Z(z)=\max\{F_X(z),F_Y(z)\}$　　(B) $F_Z(z)=\max\{|F_X(z)|,|F_Y(z)|\}$

(C) $F_Z(z)=F_X(z)F_Y(z)$　　(D) 都不是

C

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{Z\leq z\}=P\{\max(X,Y)\leq z\}\\&=P\{X\leq z,Y\leq z\}=P\{X\leq z\}P\{Y\leq z\}\end{aligned}$$

6 设 X,Y 是相互独立的两个随机变量, 其分布函数分别为 $F_X(x)$, $F_Y(y)$. 则 $Z=\min(X,Y)$ 的分布函数是 (　　).

(A) $F_Z(z)=F_X(z)$　　(B) $F_Z(z)=F_Y(z)$

(C) $F_Z(z)=\min\{F_X(z),F_Y(z)\}$　　(D) $F_Z(z)=1-(1-F_X(z))(1-F_Y(z))$

D

7 设 X 的密度函数为 $f(x)$, 而 $f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$, 则 $Y=2X$ 的概率密度是 (　　).

(A) $\frac{1}{\pi(1+4y^2)}$　　(B) $\frac{2}{\pi(4+y^2)}$　　(C) $\frac{1}{\pi(1+y^2)}$　　(D) $\frac{1}{\pi}\arctan y$

B.

分布函数法

$$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{X\leq y/2\}=F_X(\frac{y}{2})$$
$$\Rightarrow f_Y(y)=\frac{1}{2}f_X(\frac{y}{2})$$

8 设随机变量 (X,Y) 的联合分布函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0,\ y>0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

则 $Z=\frac{X+Y}{2}$ 的分布密度是 (　　).

(A) $f_Z(z)=\begin{cases} \frac{1}{2}e^{-(x+y)}, & x>0,\ y>0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$　(B) $f_Z(z)=\begin{cases} e^{-\frac{x+y}{2}}, & x>0,\ y>0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

(C) $f_Z(z)=\begin{cases} 4ze^{-2z}, & z>0, \\ 0, & z\le 0. \end{cases}$　(D) $f_Z(z)=\begin{cases} \frac{1}{2}e^{-z}, & z>0, \\ 0, & z\le 0. \end{cases}$

C.

分布函数法. 当 $z>0$ 时;

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \iint_{x+y\le 2z} e^{-(x+y)}dxdy = \int_0^{2z}(\int_0^{2z-x} e^{-(x+y)}dy)dx \\ &= \int_0^{2z}(e^{-x}-e^{-2z})dx = 1-e^{-2z}-2ze^{-2z} \end{aligned}$$

9 设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$, 则下列结论正确的是 (　　).

(A) $P\{X+Y\le 0\}=\frac{1}{2}$　(B) $P\{X+Y\le 1\}=\frac{1}{2}$

(C) $P\{X-Y\le 0\}=\frac{1}{2}$　(D) $P\{X-Y\le 1\}=\frac{1}{2}$

B

三、计算题

1 随机变量 X 的密度为

$$f(x)=\begin{cases} \frac{c}{\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

求 (1) 常数 c;　(2) X 落在 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 内的概率.

解: (1)

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=1, \text{令} x=\sin t \Rightarrow c=\frac{1}{\pi}.$$

(2)

$$P\{-1/2<X<1/2\}=1/3.$$

2 设测量从某地到某一目标的距离时带有的随机误差 X 具有分布密度函数

$$f(x) = \frac{1}{40\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-20)^2}{3200}\right), \quad -\infty < x < +\infty.$$

试求: (1) 测量误差的绝对值不超过 30 的概率;

(2) 接连独立测量三次, 至少有一次误差的绝对值不超过 30 的概率.

解：(1)

$$P\{|X| \leq 30\} = \Phi(0.25) - \Phi(-1.25) = 0.4931.$$

(2)

$$p = 1 - P\{\text{三次误差的绝对值都超过30}\} = 1 - 0.4931^3 = 0.88.$$

3 设电子元件的寿命 X 具有密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{100}{x^2}, & 100 < x, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

问在 150 小时内, (1) 三只元件中没有一只损坏的概率是多少?

(2) 三只电子元件全损坏的概率是多少?

(3) 只有一个电子元件损坏的概率是多少?

解：

$$P\{X > x\} = 1 - F(x) = \begin{cases} \frac{100}{x}, & 100 < x, \\ 1, & \text{其它}. \end{cases}$$

$P\{X < 150\} = 1/3, P\{X \geq 150\} = 2/3 = p.$

(1)

$$P\{X_1 > 150, X_2 > 150, X_3 > 150\} = p^3 = 8/27 \approx 0.296,$$

(2)

$$P\{X_1 < 150, X_2 < 150, X_3 < 150\} = (1-p)^3 = 1/27,$$

(3)

$$P\{\text{只有一只元件损坏}\} = C_3^1 p(1-p)^2 = 4/9.$$

4 对圆片直径进行测量, 其值在 [5, 6] 上服从均匀分布, 求圆片面积的概率密度函数.

解： 直径 D 的分布密度函数是

$$\phi(d) = \begin{cases} 1, & 5 \leq d \leq 6 \\ 0, & other. \end{cases}$$

假设 $X=\pi D^2/4$,

$$F(x)=P\{X\le x\}=P\{\pi D^2\le 4x\}$$
$$=\begin{cases}0, & x<25\pi/4,\\ \sqrt{4x/\pi}-5, & 25\pi/4\le x\le 9\pi,\\ 1, & x>9\pi.\end{cases}$$

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{\pi x}}, & 25\pi/4\le x\le 9\pi,\\ 0, & other.\end{cases}$$

5 设 (X,Y) 的密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}24y(1-x-y), & x>0,\ y>0,\ x+y<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求: (1) $f_X(x)$; (2) $f(y|x)$; (3) $f\left(y|x=\frac{1}{2}\right)$.

解： (1)

$$f_X(x)=\begin{cases}4(1-x)^3, & 0<x<1,\\ 0, & other.\end{cases}$$

(2)

$$f(y|x)=\begin{cases}\frac{6y(1-x-y)}{(1-x)^3}, & x>0,y>0,x+y<1,\\ 0, & other.\end{cases}$$

(3)

$$f\left(y|x=\frac{1}{2}\right)=\begin{cases}24y(1-2y), & 0<y<1/2,\\ 0, & other.\end{cases}$$

测验四　随机变量的数字特征

一、填空题

1 设随机变量 X 与 Y 相互独立, $D(X)=2, D(Y)=4, D(2X-Y)=$ ____________.

12.

$$D(2X-Y)=2^2D(X)+D(Y)$$

2 已知随机变量 $X\sim N(-3,1), Y\sim N(2,1)$, 且 X 与 Y 相互独立, $Z=X-2Y+7$, 则 $Z\sim$ ____________.

$N(0,5)$.

$$E(Z)=0, D(Z)=5$$

3 设离散型随机变量 X 的取值是在两次独立试验中事件 A 发生的次数, 如果在这些试验中事件发生的概率相同, 并且已知 $E(X)=0.9$, 则 $D(X)=$ ____________.

0.495.

$$X\sim B(2,p), E(X)=2p=0.9, p=0.45, q=0.55, D(X)=2pq.$$

4 设随机变量 X 在区间 $[-1,2]$ 上服从均匀分布, 随机变量 $Y=\begin{cases}1, & X>0,\\ 0, & X=0,\\ -1, & X<0.\end{cases}$

则 $D(Y)=$ ____________.

8/9.

$$X\sim f(x)=\begin{cases}1/3, & -1<x<2,\\ 0, & other\end{cases}$$

$$P\{X>0\}=2/3, P\{X=0\}=0, P\{X<0\}=1/3.$$

5 若随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立, 且服从相同的两点分布 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$, 则 $X = \sum_{i=1}^{3} X_i$ 服从 ____________ 分布, $E(X) =$ ____________, $D(X) =$ ____________.

$B(3, 0.2)$,0.6,0.48.

$$p = 0.2, X \sim B(3, 0.2), E(X) = 3p, D(X) = 3p(1-p).$$

6 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量, 且 $X \sim N(0,1)$, Y 在 $[-1,1]$ 上服从均匀分布, 则 $Cov(X,Y) =$ ____________.

0.

$$E(X) = 0, E(Y) = 0, f(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} e^{-x^2/2}/2\sqrt{2\pi}, & -1 < y < 1, \\ 0, & other \end{cases}$$

7 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量, 其概率密度分别为:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \qquad f(y) = \begin{cases} e^{-(y-5)}, & y > 5, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

则 $E(XY) =$ ____________.

4.

$$E(X) = 2/3, E(Y) = 6.$$

8 若随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立, 其中 X_1 在 [0, 6] 服从均匀分布, X_2 服从正态分布 $N(0, 2^2)$, X_3 服从参数 $\lambda = 3$ 的泊松分布, 记 $Y = X_1 - 2X_2 + 3X_3$, 则 $D(Y) =$ ____________. 46.

$$D(Y) = D(X_1 - 2X_2 + 3X_3), D(X_1) = 6^2/12, D(X_2) = 4, D(X_3) = 3.$$

二、选择题

1 设随机变量 X 和 Y 独立同分布, 记 $U = X - Y, V = X + Y$, 则 U 和 V 必然 (　　).

(A)不独立;　(B) 独立;　(C) 相关系数不为零;　(D) 相关系数为零.

D.

$$E(UV) = E(X^2 - Y^2) = 0, E(U) = E(X) - E(Y) = 0,$$
$$cov(U, V) = E(UV) - E(U)E(V) = 0$$

2 设离散型随机变量 X 可能取值为: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$, 且 $E(X) = 2.3,\ E(X^2) = 5.9$, 则 $x_1,\ x_2,\ x_3$ 所对应的概率为 (　　).

(A)　$p_1 = 0.1,\ p_2 = 0.2,\ p_3 = 0.7$　　(B)　$p_1 = 0.2,\ p_2 = 0.3,\ p_3 = 0.5$

(C)　$p_1 = 0.3,\ p_2 = 0.5,\ p_3 = 0.2$　　(D)　$p_1 = 0.2,\ p_2 = 0.5,\ p_3 = 0.3$

B.

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 = 2.3;$$
$$E(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 = 5.9;$$

3 已知 X 和 Y 的联合分布如下表所示, 则有 (　　).

X \ Y	0	1	2
0	0.1	0.05	0.25
1	0	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0

(A)　X 与 Y 不独立　　(B)　X 与 Y 独立

(C)　X 与 Y 不相关　　(D)　X 与 Y 彼此独立且相关

A.

$$P\{X = 0, Y = 0\} \neq P\{X = 0\}P\{Y = 0\}.$$

4 现有 10 张奖券, 其中 8 张为 2 元, 2 张为 5 元, 今每人从中随机地无放回地抽取 3 张, 则此人抽得奖券的金额的数学期望 (　　).

(A) 6　　(B) 12　　(C) 7.8　　(D) 9

C.

设 X 为抽的奖券的金额数，

X	6	9	12
p	7/15 ($\frac{C_8^3}{C_{10^3}}$)	7/15($\frac{C_8^1 C_2^1}{C_{10^3}}$)	1/15($\frac{C_8^1 C_2^2}{C_{10^3}}$)

5 设随机变量 X 和 Y 服从正态分布, $X \sim N(\mu, 4^2)$, $Y \sim N(\mu, 5^2)$, 记 $P_1 = P\{X \leq \mu - 4\}$, $P_2 = P\{Y \geq \mu + 5\}$, 则 (　　).

(A) 对任何 μ, 都有 $P_1 = P_2$　　(B) 对任何实数 μ, 都有 $P_1 < P_2$

(C) 只有 μ 的个别值, 才有 $P_1 = P_2$　　(D) 对任何实数 μ, 都有 $P_1 > P_2$

A.

$$p_1 = P\{\frac{X-\mu}{4} \leq -1\} = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1),$$

$$p_2 = P\{\frac{Y-\mu}{5} \leq -1\} = 1 - \Phi(1)$$

6 随机变量 $\xi = X + Y$ 与 $\eta = X - Y$ 不相关的充分必要条件为 (　　).

(A) $E(X) = E(Y)$　　(B) $E(X^2) - E^2(X) = E(Y^2) - E^2(Y)$

(C) $E(X^2) = E(Y^2)$　　(D) $E(X^2) + E^2(X) = E(Y^2) + E^2(Y)$

B.

$$cov(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta) = (E(X^2) - E(Y^2)) - (E^2(X) - E^2(Y))$$

三、计算题

1 设 X 的分布律为 $P\{X=k\}=\frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}, k=0,1,2,...,a>0$, 试求 $E(X), D(X)$.

解:

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}kP\{X=k\}=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{\infty}k(\frac{a}{1+a})^{k+1}$$

令

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}kx^{k+1}=x^2\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1} \\ &= x^2(\sum_{k=1}^{\infty}x^k)'=x^2\cdot(\frac{x}{1-x})'=\frac{x^2}{(1-x)^2} \\ & f(\frac{a}{1+a})=a^2, E(X)=a^2/a=a. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty}k^2P\{X=k\}=\sum_{k=1}^{\infty}k(k+1-1)P\{X=k\} \\ &= \frac{1}{a+1}\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)k(\frac{a}{1+a})^k-a \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)kx^k=x\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)kx^{k-1} \\ &= x(\sum_{k=1}^{\infty}x^{k+1})''=x\cdot(\frac{x^2}{1-x})''=\frac{2x}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

$$g(\frac{a}{1+a})=2a(1+a)^2, E(X^2)=a+2a^2.D(X)=a+a^2.$$

2 设随机变量 X 具有概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} \frac{2}{\pi}\cos^2 x, & |x|\leq\frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

求$E(X), D(X)$.

解:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}x\frac{2}{\pi}\cos^2 xdx=0.$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}x^2\frac{2}{\pi}\cos^2 xdx=\pi^2/12-1/2.$$

$E(X)=0, D(X)=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}$.

3 设随机变量 X 和 Y 的联合概率分布为

(X,Y)	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)	(2, 0)	(2, 1)
$P\{X=x,Y=y\}$	0.10	0.15	0.25	0.20	0.15	0.15

求 $E\left(\sin\frac{\pi(X+Y)}{2}\right)$.

解：

$\sin\frac{\pi(X+Y)}{2}$	0	1	-1
P	0.45	0.40	0.15

$E\left(\sin\frac{\pi(X+Y)}{2}\right)=0.25.$

4 一汽车沿一街道行驶需要通过三个设有红绿信号灯路口, 每个信号灯为红或绿与其它信号灯为红或绿相互独立, 且红绿两种信号显示的时间相等, 以 X 表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数. 求

(1) X 的概率分布; (2) $E\left(\frac{1}{1+X}\right)$.

解：(1)

X	0	1	2	3
P	1/2	1/4	1/8	1/8

(2)$E\left(\frac{1}{1+X}\right)=\frac{67}{96}$.

5 设 (X,Y) 的分布密度

$$f(x,y)=\begin{cases}4xye^{-(x^2+y^2)}, & x>0,\ y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求 $E(\sqrt{X^2+Y^2})$.

解：

$$\begin{aligned}E(\sqrt{X^2+Y^2})&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}f(x,y)dxdy\\&=\iint_{x>0,y>0}\sqrt{x^2+y^2}4xye^{-(x^2+y^2)}dxdy(x=r\cos\theta,y=r\sin\theta)\\&=\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^{+\infty}r\cdot 4r^2\cdot e^{-r^2}rdr=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}.\end{aligned}$$

6 设 (X,Y) 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求 $E(X), D(Y), \rho_{XY}$.

解：

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy\\ &=\frac{1}{\pi}\iint_{x^2+y^2\le 1}xdxdy(x=r\cos\theta,y=r\sin\theta)\\ &=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta\int_0^1 r^2dr=0\end{aligned}$$

同理：

$$E(Y)=0, E(X^2)=1/4=E(Y^2), E(XY)=0,$$

则 $D(X)=D(Y)=1/4$, $\rho_{XY}=0$.

7 假设一部机器在一天内发生故障的概率为 0.2, 机器发生故障时全天停止工作. 若一周 5 个工作日里无故障, 可获利润 10 万元, 发生一次故障仍可获利润 5 万元; 发生二次故障所获利润 0 元; 发生三次或三次以上故障就要亏损 2 万元. 求一周内期望利润是多少?

解：假设 X 表示一周内发生故障的天数 $X\sim B(5,0.2)$.

假设 Y 为该企业的利润

Y	10	5	0	-2
P	0.33=$P\{X=0\}$	0.41	0.20	0.06

$E(Y)=5.23$.

测验五　数理统计

一、填空题

1 设总体 $X \sim N(0,\sigma^2)$, X_1, X_2, X_3, X_4 为来自 X 的样本, 则统计量 $\frac{(X_1+X_2)^2}{(X_3-X_4)^2}$ 的分布为 ________.

$F(1,1)$.

$$\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0,1), \frac{X_3-X_4}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0,1)$$

2 若总体 X 的一个样本值为 0, 0, 1, 1, 0, 1, 则总体均值的矩估计值为 ________, 总体方差的矩估计值为 ________.

1/2,1/4.

$$\bar{X} = \hat{\mu}_M, \sigma_M^2 = A_2 - A_1^2$$

3 对正态总体若方差 σ^2 未知, $H_0 : \mu = \mu_0$, 应选取统计量 ________, 在 ________ 条件下, 统计量服从自由度为 ________ 的 ________ 分布.

$\frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}$, H_0 为真， $n-1$, t

二、选择题

1 设总体 $X \sim N(0,1)$, X_1, $X_2, ...,$ X_n $(n > 1)$ 为来自该总体的一个简单随机样本, $\overline{X}$, S^2 分别是样本均值和样本方差, 则有 (　　).

(A)$\overline{X} \sim N(0,1)$　(B)$n\overline{X} \sim N(0,1)$　(C) $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$　(D)$\overline{X}/S \sim t(n-1)$

C

2 θ 为总体 X 的未知参数, θ 的估计量为 $\hat{\theta}$, 则有 (　　).

(A) $\hat{\theta}$ 是一个数, 近似等于 θ (B) $\hat{\theta}$ 是一个随机变量

(C) $\hat{\theta}$ 是一个统计量, 且 $E(\hat{\theta})=\theta$ (D) 当 n 越大, $\hat{\theta}$ 的值可任意靠近 θ

B

3 对正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ (σ^2 未知) 的假设检验问题: $H_0:\mu\le 1$, $H_1:\mu>1$, 若取显著性水平 $\alpha=0.05$, 则其拒绝域为 ( ).

(A) $|\overline{X}-1|>z_{0.05}$ (B) $\overline{X}>1+t_{0.05}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$

(C) $|\overline{X}-1|>t_{0.05}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$ (D) $\overline{X}<1-t_{0.05}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$

B.

$$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S\sqrt{n}}\sim t(n-1).$$

三、计算题

1 在测量反应时间中, 一名心理学家估计的标准差为 0.05s, 为了以 95% 的置信水平使他对平均反应时间的估计误差不超过 0.01s, 应取多大的样本容量?

解：σ 已知， 构造 $Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$,

由 $P\{|Z|<1.96\}=0.95$, $1.96\sigma/\sqrt{n}\le 0.01$, $\Rightarrow n\ge 96.04$, $n=97$.

2 设 θ 为总体 X 的未知参数, 其密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{6x}{\theta^3}(\theta-x), & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

又设 $X_1,\ X_2,\dots,\ X_n$ 是来自总体 X 的样本, 试求:

(1) θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$; (2) $\hat{\theta}$ 的方差 $D(\hat{\theta})$.

解：(1)

$$E(X)=\int_0^\theta xf(x;\theta)=\frac{1}{2}\theta,$$

令 $E(X)=\bar{X}$, $\hat{\theta}_M=2\bar{X}$.

(2)

$$D(\hat{\theta})=D(2\bar{X})=\frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^n D(X_i),$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{1}{20}\theta^2,$$

所以 $D(\hat{\theta})=\frac{4}{5n}\bar{X}^2$.

3 从自动机床加工的同类零件中抽取 16 个, 测得长度值为 (单位: mm):

12.15, 12.12, 12.01, 12.28, 12.09, 12.16, 12.03, 12.06,
12.01, 12.13, 12.07, 12.11, 12.08, 12.03, 12.01, 12.13,

若可认为这是来自正态总体的样本观测值. 求总体标准差 σ 的置信水平位 0.99 的置信区间.

解：由已知

1. 构造统计量
$$\eta=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),$$
2. 令
$$P\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)<\eta<\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\}=1-\alpha=0.99,$$
即
$$P\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}<\sigma^2<\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\}=0.99.$$
3. 由观测值 $\bar{x}=12.091875, s^2=0.00512.$
4. 查表 $\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.01/2}(16-1)=\chi^2_{0.005}(15)=32.801.$
$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{1-0.01/2}(16-1)=\chi^2_{0.995}(15)=4.601.$
5. 故σ 的置信度为 $1-\alpha=0.99$ 的置信区间 为
$$(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}},\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}})=(0.0484,0.1292).$$

4 某纯净水生产厂用自动灌装纯净水, 该自动灌装机正常灌装量 $X\sim N(18,0.4^2)$, 现测量某厂 9 个灌装样品的灌装量 (单位: L) 为:

18.0, 17.6, 17.3, 18.2, 18.1, 18.5, 17.9, 18.1, 18.3.

在显著性水平 0.05 下, 试问该天灌装是否合格?

解：

1. 提出假设 $H_0: \mu = \mu_0 = 18, H_1: \mu \neq \mu_0$.

2. 构造统计量： $Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{H_0\text{真}}{=} \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$.

3. 由

   $P\{|Z| < z_{\alpha/2}\} = 1-\alpha, \alpha = 0.05$, 查表： $z_{\alpha/2} = 1.96$.

4. 由观察值， $\bar{x} = 18$,

$$Z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{18-18}{0.4/\sqrt{9}} = 0 < z_{\alpha/2}.$$

   接受原假设，即认为该日此包装机的工作是否正常。

5 某项考试要求成绩的标准差为 12 分, 现从考试成绩单中任取 15 份, 计算样本标准差为 16 分. 设成绩服从正态分布, 问此次考试的标准差是否不合要求 ($\alpha = 0.05$)?

解：

由已知 $X \sim N(\mu, 12^2), n = 15, s = 16$.

1. 提出假设 $H_0: \sigma = \sigma_0 = 12, H_1: \sigma \neq \sigma_0$.

2. 构造统计量： $\eta = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \overset{H_0\text{真}}{=} \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(14)$.

3. 根据样本方差 s^2, 去判断小概率事件是否发生,

   即 $\eta \leq \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ 或 $\eta \geq \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ 是否成立?

4. 计算： 由已知 $\alpha = 0.05$, 查表 $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.975}(14) = 5.629$, $\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.025}(14) = 26.119$. 由观测值 $\eta = \frac{(15-1)16^2}{12^2} = 24.889$. 比较大小,

$$\chi^2_{0.975}(14) = 5.629 < 24.889 < 26.119 = \chi^2_{0.025}(14)$$

   即不在拒绝域内，故接受原假设，即考试标准差符合要求。

6 设总体 X 的数学期望为 μ, 方差为 σ^2, $(X_1, X_2, ..., X_n)$ 和 $(Y_1, Y_2, ..., Y_m)$ 分别是来自 X 的两个独立样本. 证明 $S^2 = \dfrac{1}{m+n-2}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 + \sum_{i=1}^{m}(Y_i-\overline{Y})^2\right]$ 是 σ^2 的无偏估计.

解：因为

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n}X_i^2 - n\bar{X}^2,$$

同理：

$$\sum_{i=1}^{m}(Y_i-\bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{m}Y_i^2 - m\bar{Y}^2.$$

则

$$\begin{aligned}
E(S^2) &= E(\frac{1}{m+n-2}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{i=1}^{m}(Y_i-\overline{Y})^2\right]) \\
&= \frac{1}{m+n-2}E(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2+\sum_{i=1}^{m}Y_i^2-m\bar{Y}^2) \\
&= \frac{1}{m+n-2}(\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-nE(\bar{X}^2)+\sum_{i=1}^{m}E(Y_i^2)-mE(\bar{Y}^2)) \\
&= \frac{1}{m+n-2}(\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2+\mu^2)-n(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2)+\sum_{i=1}^{m}(\sigma^2+\mu^2)-m(\frac{\sigma^2}{m}+\mu^2)=\sigma^2
\end{aligned}$$

故 S^2 是 σ^2 的无偏估计.