7 2015-2016 学年第一学期《概率统计》试卷（A）

授课班号＿＿＿＿＿＿＿＿ 学号 13机械＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿＿＿＿

题型	填空题	计算题	综合题	总分	审　核
得分					

一、填空题(每小题 5 分，共 25 分)

得分	阅卷人

1. 已知 $P(A)=0.75$，$P(B)=0.65$ 及条件概率 $P(B|A)=0.8$，则和事件 $A\cup B$ 的概率 $P(A\cup B)=$ 0.8 . 132 [illegible]

2. 设随机变量 ξ 的概率密度为

$$f(x)=ke^{-\frac{(x-1)^2}{8}}\quad(-\infty<x<+\infty),$$

$\sigma=2$. $N(1,2^2)$

则 $k=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}$.

3. 设二维随机变量 (ξ,η) 在区域 G 上服从均匀分布，其中 G 是由曲线 $y=x^2$ 和 $y=x$ 所围成的区域，则 (ξ,η) 的联合概率密度

$\varphi(x,y)=\begin{cases}6, & (x,y)\in G\\ 0, & 其他\end{cases}$.

$A=\int_0^1(x-x^2)dx=\frac{1}{6}$

4. 设随机变量 X 与 Y 的相关系数为 0.2，$D(X)=25$，$D(Y)=9$，则

$D(X-2Y)=$ 49 . 12机械

5. 设随机变量 ξ 的方差 $D(\xi)=\frac{5}{2}$，$E(\xi)$ 存在，用切比雪夫不等式估计概率 $P\left\{|\xi-E(\xi)|\geq\frac{15}{2}\right\}\leq$ $\frac{2}{45}$. 132 [illegible]

二、计算题(每小题 6 分，共 36 分)

得分	阅卷人

1. 车间里有甲、乙、丙 3 台机床生产同一种产品，已知它们的次品率依次是 0.2，0.3，0.1，而产品数量比为：甲：乙：丙＝2：3：5，现从产品中任取 1 个发现它是次品，求次品来自机床乙的概率.

(1-5) 132 [illegible]. 0.5

$A=$"任取一件为次品". $B_i=$"任取一件为甲/乙/丙生产" $i=1,2,3$.

由 Bayes 公式

$$P(B_2|A)=\frac{P(B_2)P(A|B_2)}{\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)}=\frac{\frac{3}{10}\times0.3}{\frac{2}{10}\times0.2+\frac{3}{10}\times0.3+\frac{5}{10}\times0.1}=0.5$$

(3') (2') (1')

2. 设公共汽车到达某车站的时刻服从10点到10点30分之间的均匀分布，现有乘客10点钟到达这个车站，求他等车时间至少要10分钟的概率.

$\frac{2}{3}$

设等车时间为 X min，则 $X \sim U(0,30)$.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{30}, & 0<x<30 \\ 0, & 其他.\end{cases} \quad (3')$$

从而 $P\{X \geq 10\} = \int_{10}^{30} \frac{1}{30} dx = \frac{2}{3}$. (3')

3. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，下表列出了二维随机变量 (X,Y) 联合分布率及关于 X 与 Y 的边缘分布率中的部分数值，试将其余数值填入表中的空白处：

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	p_i
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
p_j	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

每错1个扣1分.

4. 一加法器同时收到20个噪声电压 $V_i\,(i=1,2,\cdots,20)$. 设它们是相互独立的随机变量，且均在 $(0,10)$ 上服从均匀分布，记

$$V=\sum_{i=1}^{20} V_i,$$

试用中心极限定理求 $P\{V>105\}$. 已知：

$F_{0,1}(0.38)=0.648$, $\quad F_{0,1}(0.39)=0.6517$.

0.3483

$E(V_i)=5$, $D(V_i)=\frac{100}{12}$ $(i=1,2,\cdots,20)$.

从而 $E(V)=20\times5$, $D(V)=20\times\frac{100}{12}$

$$V^*=\frac{V-E(V)}{\sqrt{D(V)}}=\frac{V-100}{\sqrt{20\times\frac{100}{12}}} \stackrel{\cdot}{\sim} N(0,1) \quad (3')$$

$$P\{V>105\}=P\left\{V^*>\frac{105-100}{\sqrt{20\times\frac{100}{12}}}\right\}=P\{V^*>0.39\}$$

$$\approx 1-\Phi(0.39)=1-0.6517=0.3483 \quad (3')$$

5. 设随机变量 X 服从泊松分布，且

$$3P\{X=1\}+2P\{X=2\}=4P\{X=0\},$$

求 X 的期望与方差. $\lambda=1.$

设 $X\sim\pi(\lambda)$. 则 $P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k=0,1,2,\cdots$ $(\lambda>0)$.

(2')

由题知, $3\cdot\lambda e^{-\lambda}+2\cdot\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}=4e^{-\lambda}$.

解得 $\lambda=1$ ($\lambda=-4$ 舍去) (2')

$\therefore E(X)=D(X)=1.$ (2')

6. 为确定某种溶液中的甲醛浓度，取样得 4 个独立测定值的平均值 $\bar{x}=6.34\%$，样本标准离差 $S=0.02\%$，并设被测总体近似地服从正态分布，求总体均值 μ 的 95% 置信区间.

(注: $t_{0.975}(4)=2.7764$, $t_{0.975}(3)=3.1824$, $t_{0.95}(3)=2.3534$). (12 批才找的数字)

$\left(\bar{x}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$, $\alpha=0.05$ (3')

$\Rightarrow \left(6.34\%\pm\frac{0.02\%}{\sqrt{4}}\times3.1824\right)$

$\Rightarrow (6.308\%, 6.372\%)$ (3')

三、综合题(满分 39 分)

1. (9 分) 假设随机变量 X 服从 $(0,1)$ 上的均匀分布，求证：随机变量

$$Y=-\frac{\ln(1-X)}{2}$$

服从参数为 2 的指数分布. (132 页)

得分	阅卷人

$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$ (2')

$X\in(0,1)$ 时, $y=-\frac{\ln(1-x)}{2}\in(0,+\infty)$.

且 $x=1-e^{-2y}$, $x'(y)=2e^{-2y}$. 少区间扣2'

$\therefore y>0$ 时, $f_Y(y)=1\cdot2e^{-2y}=2e^{-2y}$ (5')

所以 $f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, & y>0\\ 0, & y\le0\end{cases}$, $Y\sim E(2)$ (2')

2. (10 分)　已知随机变量 X_1 和 X_2 的概率分布

X_1	-1	0	1
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

X_2	0	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

而且 $P\{X_1X_2=0\}=1$，(1) 求 X_1 和 X_2 的联合分布；
(2) 问 X_1 和 X_2 是否独立？为什么？　(1、2 题)

(1)

$X_2 \backslash X_1$	-1	0	1	$p_{\cdot j}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

(6′)

(2) $P\{X_1=-1, X_2=0\}=\frac{1}{4}$

$\neq P\{X_1=-1\}\cdot P\{X_2=0\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}$

$\therefore$ X_1 与 X_2 不独立.

(4′)

3. (10 分)　设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\theta,\lambda)=\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{|x-\theta|}{\lambda}}$$

其中 $\lambda>0$. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自这一总体的样本. 求:
(1) θ,λ 的矩估计;　(2) θ,λ 的极大似然估计.

(1) $\mu_1=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{2\lambda}e^{-\frac{|x-\theta|}{\lambda}}dx$

令 $x-\theta=t$ $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(t+\theta)}{2\lambda}e^{-\frac{|t|}{\lambda}}dt$

$=\int_0^{+\infty}\frac{\theta}{\lambda}e^{-\frac{t}{\lambda}}dt=\theta$.

$\mu_2=E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{2\lambda}e^{-\frac{|x-\theta|}{\lambda}}dx$

令 $x-\theta=t$ $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(t+\theta)^2}{2\lambda}\cdot e^{-\frac{|t|}{\lambda}}dt$

$=\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{\lambda}e^{-\frac{t}{\lambda}}dt+\int_0^{+\infty}\frac{\theta^2}{\lambda}e^{-\frac{t}{\lambda}}dt$

$=2\lambda^2+\theta^2=2\lambda^2+\mu_1^2$

$\therefore\begin{cases}\theta=\mu_1\\ \lambda=\sqrt{\frac{\mu_2-\mu_1^2}{2}}\end{cases}$　(3′)

矩估计量: $\hat{\theta}=\hat{\mu}_1=A_1=\overline{X}$.

$\hat{\lambda}=\sqrt{\frac{\hat{\mu}_2-\hat{\mu}_1^2}{2}}=\sqrt{\frac{A_2-A_1^2}{2}}$

$=\sqrt{\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2}{2}}$

$=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{2n}}$　(2′)

(2) $L(\theta,\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{|x_i-\theta|}{\lambda}}\right)$

$\ln L=-n\ln 2-n\ln\lambda-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\theta|$.　(2′)

$\hat{\theta}$ 满足 $\sum_{i=1}^{n}|x_i-\hat{\theta}|=\min$.　(1′)

$\frac{\partial L}{\partial\lambda}=-\frac{n}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\theta|=0$

$\Rightarrow\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\hat{\theta}|$　(2′)

4. (10 分)　美国民政部门对某住宅区住户的消费情况进行的调查报告中抽出 9 户为样本, 其每年开支除去税款和住宅费用外, 依次为:

4.9、5.3、6.5、5.2、7.4、5.4、6.8、5.4、6.3 (单位: 千元)

若给定 ($\alpha=0.05$), 试问: 所有住户消费数据的总体方差 $\sigma_0^2=0.3$ 是否可信? 假定所有户消费数据的总体服从正态分布.

(已知 $\chi^2_{\cancel{0.025}\,0.975}(8)=2.180$, $\chi^2_{0.95}(8)=15.507$, $\chi^2_{\cancel{0.975}\,0.025}(8)=17.535$).　(1、2 题)

由题意需检验假设 $H_0: \sigma^2=\sigma_0^2=0.3$; $H_1: \sigma^2\neq\sigma_0^2$　(3′)

取检验统计量 $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$　(1′)

拒绝域: $\chi^2\leq\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\chi^2\geq\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$, $\alpha=0.05$, i.e. $\chi^2\leq 2.180$ 或 $\chi^2\geq 17.535$

$\overline{x}=\frac{1}{9}(4.9+5.3+\cdots+6.3)=5.9$, $s^2=\frac{1}{8}[(4.9-5.9)^2+(5.3-5.9)^2+\cdots+(6.3-5.9)^2]=\frac{5.93}{8}$　(1′)

$\chi^2=19.767>17.535$　(3′)　$\therefore$ 拒绝 H_0, 接受 H_1. 认为不可信.　(2′)