六、1、设$F(x)=f(x)-\frac{1}{2}$，$f(x)$在$[0,1]$连续，得$F(x)$在$[0,1]$连续。

则$F(0)=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\frac{1}{2}$，$F(1)=f(1)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=-F(0)$，若$F(0)=0$，则有$x_0=0\in[0,1]$，使$f(x_0)=\frac{1}{2}$；若$F(0)\neq 0$，$F(0)\cdot F(1)<0$，由零点定理，存在$x_0\in(0,1)$，$F(x_0)=0$，即$f(x_0)=\frac{1}{2}$。

2、令$F(x)=e^{-x}f(x)$，则$F(x)$在$[a,b]$可微,且$F(a)=F(b)=0$（3分），由罗尔定理，存在$\xi\in(a,b)$，$F'(\xi)=0$。而$F'(x)=-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)$，即$-e^{-\xi}f(\xi)+e^{-\xi}f'(\xi)=0$，所以，$f'(\xi)=f(\xi)$。

2013级试卷

一、选择题（每小题3分，共15分）

1. 若$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\infty$下列极限正确的是（　　）。

A. $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+g(x))=\infty$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-g(x))=0$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{f(x)+g(x)}=0$　　D. $\lim\limits_{x\to 0}kf(x)=\infty$（$k$为常数且$k\neq 0$）

2. 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则$f(x)$在$x_0$处（　　）。

A. 一定有定义　　B. 一定无定义　　C. 可以有定义，也可无定义

D. 有定义且有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

3. 下列函数中，在$x=0$处可导的是（　　）。

A. $y=\ln x$　　B. $y=|\cos x|$　　C. $y=|\sin x|$　　D. $y=\begin{cases}x^2 & x<0\\ x & x\geq 0\end{cases}$

4. 设$x\to 0$时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$是比$x\sin x^n$高阶的无穷小，而$x^n\sin x$是比$e^{x^2}-1$高阶的无穷小，则正整数$n=$（　　）。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 设$f(x)$可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，若使$F(x)$在$x=0$处可导，则必有（　　）。

A. $f(0)=0$　　B. $f'(0)=0$　　C. $f(0)+f'(0)=0$　　D. $f(0)-f'(0)=0$

二、填空题（每小题3分，共15分）：

1. 当$x \to 0^+$时，$\sin(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})$ 是x 的______ 阶无穷小(数量阶)。

2. 极限$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}} =$____。 3. 已知：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{2013}}{x^n-(x-1)^n}=\dfrac{1}{2014}$，则自然数$n=$___。

4. 设$y^{(n-2)}=x\cos x$，则$y^{(n)}=$ ________________ 。

5. 设函数 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，$f(1)=4$，且在邻域 $U(1,\delta)$ 内 $f(x)=1+3x+o(x-1)$，则曲线$y=f(x)$在$x=1$处的切线方程是____________ 。

三、试解下列各题（每小题5分，共25分）

1、用极限定义证明$\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$ 。 2、求极限$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\cos(x-1)}{\ln x}$。

3、求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\tan 3x+x^2\sin\frac{1}{x}}{(1+\cos x^2)\ln(1+x)}$。

4、设$f(x)=\begin{cases}x & x<1\\ a & x\geq 1\end{cases}$，$\varphi(x)=\begin{cases}b & x\leq 0\\ x+1 & x>0\end{cases}$，求$a,b$使$f(x)+\varphi(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续。

5、设函数$y=y(x)$由方程$2^{xy}=x+y$确定，求$dy\big|_{x=0}$。

四、求下列函数的一阶或高阶导数（每小题6分，共18分）

1、设$y=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\left(\dfrac{x}{a}\right)^b$，$(a>0,b>0)$，求$y'$。 2、设$y=(x+1)e^x$，求$y^{(100)}(0)$ 。

3、设$\begin{cases}x=\ln\sqrt{1+t^2}\\ y=\arctan t\end{cases}$，求$y',y''$。

五、（8分）求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$。

六、（8分）设$f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，求函数$f(x)$的间断点并指出其类型。

七、（5 分）设函数$f(x)$在有限开区间(a,b)内连续，$f(a+0),f(b-0)$存在且$f(a+0)\cdot f(b-0)<0$，证明存在$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=0$。

八、（6 分）设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，$f'(x)$在开区间(a,b)内存在，又

$f'_+(a), f'_-(b)$存在且$f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$，证明存在$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$。

2013 级参考答案

一、D,C,B,B,A 。二、1. $\dfrac{1}{3}$；2. e^6； 3. 2014；4. $-2\sin x - x\cos x$；5. $y=3x+1$。

三、1、$\because x\to 2,\therefore$ 不妨设 $|x-2|<1$ 。则对 $\forall\varepsilon>0$，要使得 $|x^2-4|=|x-2||x+2|\overset{令}{<}5|x-2|<\varepsilon$，只要 $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{5}$，取 $\delta=\min\left\{\dfrac{\varepsilon}{5},1\right\}$，当 $0<|x-2|<\delta$ 时，有$\left|x^2-2\right|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$。

2、$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\cos(x-1)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+\sin(x-1)}{\dfrac{1}{x}}=2$。

3、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\tan 3x+x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\left(1+\cos x^2\right)\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\tan 3x}{2x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\dfrac{1}{x}}{2}=3$。

4、$f(x)+\varphi(x)=\begin{cases}x+b & x\le 0\\ 2x+1 & 0<x<1\\ x+a+1 & x\ge 1\end{cases}$，$\lim\limits_{x\to 0-}(f+\varphi)=b$，$\lim\limits_{x\to 0+}(f+\varphi)=1$，$\lim\limits_{x\to 1-}(f+\varphi)=3$，

$\lim\limits_{x\to 1+}(f+\varphi)=2+a$，欲使$f(x)+\varphi(x)$在$x=0,x=1$处连续，必须$a=b=1$。

5、$2^{xy}\ln 2(y+xy')=1+y'\Rightarrow y'=\dfrac{1-y2^{xy}\ln 2}{x2^{xy}\ln 2-1}$，将$x=0$代入原方程得$y=1$，所以 $y'(0)=\ln 2-1$，所以$dy|_{x=0}=(\ln 2-1)dx$。

四、1、$\ln y=x\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)+a(\ln b-\ln x)+b(\ln x-\ln a)$,

$\dfrac{y'}{y}=\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)-\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x}$,所以$y'=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\left(\dfrac{x}{a}\right)^b\left(\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)-\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x}\right)$。

2、$y^{(n)}(x)=(x+n+1)e^x, n=0,1,2,\cdots$，所以$y^{(100)}(0)=101$。

3、$y'=\dfrac{\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{t}{1+t^2}}=\dfrac{1}{t}$，$y''=\dfrac{-\dfrac{1}{t^2}}{\dfrac{t}{1+t^2}}=-\dfrac{1+t^2}{t^3}$。

五、$\frac{i}{n^2+n+n}\le\frac{i}{n^2+n+i}\le\frac{i}{n^2+n+1}$ $(i=1,2,\cdots)$，所以

$$\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2+n+n}\le\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\le\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2+n+1}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2+n+n}=\frac{1}{2}$， $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2+n+1}=\frac{1}{2}$ 由夹逼准则得：

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}$。

六、$f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(1+\frac{\sin t-\sin x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{\sin t-\sin x}\cdot\frac{x}{\sin x}}=e^{\frac{x}{\sin x}}$，间断点为 $x=k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$，

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=e$，所以 $x=0$ 是第一类(可去)间断点； $\lim\limits_{x\to k\pi}f(x)$ 不存在($k\ne0$)，所以

$x=k\pi(k\ne0)$ 是第二类间断点。

七、设 $f(a+0)>0,f(b-0)<0$，由极限保号性，存在 a 的右邻域 $(a,a+\delta_1)$，当 $x\in(a,a+\delta_1)$，有 $f(x)>0$。同理存在 b 的左邻域 $(b-\delta_2,b)$，当 $x\in(b-\delta_2,b)$，有 $f(x)<0$。所以分别取 $x_1\in(a,a+\delta_1),x_2\in(b-\delta_2,b)$，使得

$f(x_1)>0,f(x_2)<0$，。$f(x)$ 在闭区间 $[x_1,x_2]$ 上连续，由零点定理存在 $\xi\in(a,b)$，使

得 $f(\xi)=0$。

八、函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 内连续，故 $f(x)$ 有最大值。设 $f'_+(a)>0,f'_-(b)<0$，因

为 $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_+(a)>0$，由极限保号性，存在 a 的右邻域 $(a,a+\delta_1)$ 的点 x_1，

使得 $\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}>0$，且由于 $x_1>a$ 得 $f(x_1)>f(a)$，同理由

$\lim\limits_{x\to b-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=f'_-(b)<0$，存在 $x_2\in(b-\delta_2,b)$ 有 $\frac{f(x_2)-f(b)}{x_2-b}<0$ 且由于 $x_2<b$ 得

$f(x_2)>f(b)$，这说明 $f(a),f(b)$ 不会是最大值，$f(x)$ 的最大值只能在 (a,b) 内取得，从而这最大值是极大值。设 $\xi\in(a,b)$，$f(\xi)$ 是最大值，由 Fermat 定理 $f'(\xi)=0$。

2014 级试卷

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1.下述说法中，（　　）与 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的定义等价。