2014--2015 学年第二学期高等数学期中测试及数学竞赛试卷（2014 级）

________学院　授课班号____________学号____________姓名____________

试题	一	二 1	二 2	二 3	二 4	三 1	三 2	三 3	三 4	三 5	总计
得分											

一、　填空题 (8×6 分)（参加竞赛同学做一、二、三大题，其他同学只做一、二大题）

1. 设 $\vec{a}=(2,1,-2)$ $\vec{b}=(1,-1,-1)$，则 $(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(2\vec{a}+3\vec{b})=$ $\underline{9}$，$(2\vec{a}-3\vec{b})\times(2\vec{a}+3\vec{b})=$ $\underline{(-36,0,-36)}$。

2. 过直线 $l:\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{4}$ 且垂直平面 $\pi: x+4y-3z+7=0$ 上的平面方程为 $\underline{22x-19y-18z-27=0}$。习题册

✓3. 直线 $l:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+7}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$ 上与点 (3,2,6) 距离最近的点的坐标为 $\underline{(3,-1,0)}$

4. 设 $u=z\arctan\dfrac{y}{x}$，则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=$ $\underline{0}$。

5. 曲线 $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ x^2+y^2=2y \end{cases}$ 在点（1，1，2）的切线的参数方程为 $\begin{cases} x=1 \\ y=1+t \\ z=2+2t \end{cases}$。

✓6. 已知 $u=u(x,y)$ 由方程 $u=f(x,y,z,t)$ 和 $g(y,z,t)=0, h(z,t)=0$ 确定 (f,g,h 均为可微函数)，则

则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=$ $\underline{\dfrac{\partial f}{\partial x}}$。注：$\begin{cases} g(y,z,t)=0 \\ h(z,t)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=z(y) \\ t=t(y) \end{cases}$ 本题难算的是 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

7. 交换积分次序 $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{3-x} f(x,y)dy=$ $\underline{\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^1 f(x,y)dx+\int_2^3 dy\int_0^{3-y} f(x,y)dx}$

8. 已知 $f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，其中 D 由 $y=0, x=0, x^2+y^2=4$ 所围在第一象限内，则 $f(x,y)=$ $\underline{xy+\dfrac{2}{1-\pi}}$。

二、计算题(4×13 分)

1. 已知 f 的二阶导数连续，g 的二阶偏导数连续，$z=f(\dfrac{y}{x})+g(e^x,\sin y)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot(-\frac{y}{x^2})+g_1'\cdot e^x=-\frac{y}{x^2}f'+e^x g_1' \qquad 4'$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'\cdot\frac{1}{x}+g_2'\cdot\cos y=\frac{1}{x}f'+\cos y\, g_2' \qquad 4'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{x^2}f'-\frac{y}{x^2}\cdot f''\cdot\frac{1}{x}+e^x\cdot g_{12}''\cdot\cos y=-\frac{1}{x^2}f'-\frac{y}{x^3}f''+e^x\cos y\, g_{12}'' \qquad 5'$$

2. 求函数 $z=x^3+4xy+y^2+3x-y+3$ 的极大值点或极小值点。 习题册

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+4y+3 \qquad \text{由}\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases} \text{解得驻点 } \left(1,-\frac{3}{2}\right) \text{ 及 } \left(\frac{5}{3},-\frac{17}{6}\right) \quad 3'$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=4x+2y-1$$

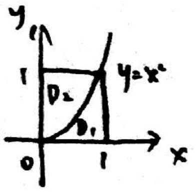
$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x,\quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4,\quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2,\quad AC-B^2=12x-16$$

$5'$

① $AC-B^2\Big|_{(1,-\frac{3}{2})}<0 \quad \therefore \left(1,-\frac{3}{2}\right)$ 不是极值点.

② $AC-B^2\Big|_{(\frac{5}{3},-\frac{17}{6})}>0,\quad A\Big|_{(\frac{5}{3},-\frac{17}{6})}>0 \quad \therefore \left(\frac{5}{3},-\frac{17}{6}\right)$ 为极小值点. $5'$

3. 已知 $D:0\le x\le 1, 0\le y\le 1$，计算二重积分 $\iint\limits_D \left|y-x^2\right|dxdy$



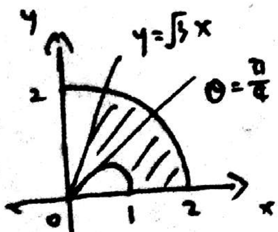
$$\text{原式}=\iint\limits_{D_1}(x^2-y)\,dxdy+\iint\limits_{D_2}(y-x^2)\,dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}(x^2-y)\,dy+\int_0^1 dx\int_{x^2}^1(y-x^2)\,dy \quad 6'$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{2}x^4\,dx+\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^4-x^2+\frac{1}{2}\right)dx \quad 6'$$

$$=\frac{11}{30} \quad 1'$$

4. 已知 D 为由 $x^2+y^2=4$，$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$，直线 $y=\sqrt{3}x$ 及 x 轴在第一象限所围的区域，计算二重积分 $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$。 习题册 $r=a\sqrt{\cos 2\theta}\ (a>0)$ 考场上通知改 $a=1$



$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{\sqrt{\cos 2\theta}}^{2}r^3\,dr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_0^2 r^3\,dr \quad 6'$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(4-\frac{1}{4}\cos^2 2\theta\right)d\theta+\frac{\pi}{12}\times 4$$

$$=\pi-\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 4\theta)\,d\theta+\frac{\pi}{3}$$

$$=\pi-\frac{\pi}{32}+\frac{\pi}{3} \quad 6'$$

$$=\frac{125}{96}\pi \quad 1'$$

三、数学竞赛加题(5×20 分)

1. 1）设 $f(x)$ 可导，$f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}f(t)dt}{x^2\int_0^x f(t)dt}$；2）设 $x_1=10, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在　往年原题

1) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)\cdot 2x}{2x\int_0^x f(t)dt+x^2 f(x)}$　3′

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f(x^2)}{2\int_0^x f(t)dt+xf(x)}$　△无 $f'(x)$ 连续条件，不能再求导将 $x=0$ 代入 $f'(x)$ 计算.

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot\dfrac{f(x^2)-f(0)}{x^2}}{\dfrac{2\int_0^x f(t)dt}{x^2}+\dfrac{f(x)-f(0)}{x}}$

（其中 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\int_0^x f(t)dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$）

$=\dfrac{2f'(0)}{f'(0)+f'(0)}=1$　7′

2) $x_{n+1}=f(x_n)$，$f(x)=\sqrt{6+x}$ ↗

$x_1>x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ 即 $x_2>x_3$

$\Rightarrow f(x_2)>f(x_3)$ 即 $x_3>x_4$

依此递推 $x_n>x_{n+1}$，$\{x_n\}\downarrow$. 8′

易见 $\{x_n\}$ 有下界 0. 2′ 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 在 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$

两边令 $n\to\infty$ 取极限可得：

$a=\sqrt{6+a}$. 解得 $a=3$.

△本题有多种证法.

2. 设 $f(x,y)=\begin{cases} y\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 试讨论 $f(x,y)$ 在点（0，0）处的连续性，可偏导性与可微性。

① $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}y\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0)$ ∴ $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

（无穷小乘有界函数）　4′

② $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0-0}{x}=0$（或 $f(x,0)\equiv 0\Rightarrow f_x(0,0)=0$）

$f_y(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y\arctan\frac{1}{\sqrt{y^2}}-0}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\arctan\dfrac{1}{\sqrt{y^2}}=\dfrac{\pi}{2}$.

6′

∴ $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可偏导.

③ $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\cdot\Delta x-f_y(0,0)\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$

$=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta y\arctan\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}-0-0\cdot\Delta x-\frac{\pi}{2}\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$ (4′) $=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left(\arctan\dfrac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}-\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot\dfrac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$

无穷小乘有界函数

$=0 \Rightarrow f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=f_x(0,0)\cdot\Delta x+f_y(0,0)\cdot\Delta y+o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$，$\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$

∴ $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微. (6′)　10′

3. 计算 1)求 $\int\frac{x+\sin x\cos x}{(\cos x-x\sin x)^2}dx$； 2)设 $f(x)$ 连续，$\int_0^x t f(x-t)dt=1-\cos x$，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$。徐华隆

1) 原式 $=\int\frac{x\sec^2 x+\tan x}{(1-x\tan x)^2}dx$

$=\int\frac{d(x\tan x-1)}{(x\tan x-1)^2}$ 8'

$=-\frac{1}{x\tan x-1}+C$ 2'

2) 令 $x-t=u$

$\int_0^x t f(x-t)dt=\int_x^0 (x-u)f(u)\cdot(-1)du$

$=\int_0^x (x-u)f(u)du=x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du=1-\cos x$ 5'

求导 $\Rightarrow \int_0^x f(u)du+xf(x)-xf(x)=\sin x$

即 $\int_0^x f(u)du=\sin x$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(u)du=\sin\frac{\pi}{2}=1$ 5'

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有连续导数，且 $f(0)=0, f(1)=\frac{1}{3}$，证明：存在 $\xi\in(0,\frac{1}{2}),\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$。设 徐华隆

令 $F(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3,\ x\in[0,1]$. 8'

$F'(x)=f'(x)-x^2,\ F(0)=F(1)=0$.

由 Lagrange 中值 th.

$\exists\xi\in(0,\frac{1}{2})$ s.t. $F(\frac{1}{2})-F(0)=F'(\xi)\cdot\frac{1}{2}$ ①

$\exists\eta\in(\frac{1}{2},1)$ s.t. $F(1)-F(\frac{1}{2})=F'(\eta)\cdot\frac{1}{2}$ ②

①+②: $F(1)-F(0)=\frac{1}{2}[F'(\xi)+F'(\eta)]=0$

$\Rightarrow F'(\xi)+F'(\eta)=0$

$\Rightarrow[f'(\xi)-\xi^2]+[f'(\eta)-\eta^2]=0$

$\Rightarrow f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$. 12'

5. 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：$\left[\int_0^1\frac{f(x)}{t^2+x^2}dx\right]^2\le\frac{\pi}{2t}\int_0^1\frac{f^2(x)}{t^2+x^2}dx\ (t>0)$。

由 Cauchy-Schwarz 不等式，$(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2\le\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx,\ f,g\in C[a,b]$

$(\int_0^1\frac{f(x)}{t^2+x^2}dx)^2=(\int_0^1\frac{1}{\sqrt{t^2+x^2}}\cdot\frac{f(x)}{\sqrt{t^2+x^2}}dx)^2$

$\le\int_0^1\frac{dx}{(\sqrt{t^2+x^2})^2}\cdot\int_0^1(\frac{f(x)}{\sqrt{t^2+x^2}})^2dx=\int_0^1\frac{dx}{t^2+x^2}\cdot\int_0^1\frac{f^2(x)}{t^2+x^2}dx$

$=\left[\frac{1}{t}\arctan\frac{x}{t}\right]_0^1\cdot\int_0^1\frac{f^2(x)}{t^2+x^2}dx=\frac{1}{t}\arctan\frac{1}{t}\cdot\int_0^1\frac{f^2(x)}{t^2+x^2}dx$

$\le\frac{\pi}{2t}\int_0^1\frac{f^2(x)}{t^2+x^2}dx$