2014—2015 学年第一学期《线性代数》课内考试卷（A 卷）

授课班号________ 年级专业 2014 级物联网 学号__________ 姓名__________

题号	一	二	三	四	五	六	总分	审核
题分	32	24	12	12	12	8		
得分								

得分	评阅人

一、填空（共 32 分，每空格 4 分）

1. 已知四阶行列式 D 中第 4 列元素依次为 a,b,c,d，它们对应的余子式依次为 1,2,3,4，则该行列式 $D=$ $-a+2b-3c+4d$。

2. 设五阶矩阵 A 的伴随阵为 A^*，$|A|=1/3$，则 $\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|=$ $-\frac{1}{81}$。

3. $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{2015}\begin{bmatrix}a&x&1\\b&y&1\\c&z&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^{2014}=$ $\begin{bmatrix}b+2014&y&1\\a+2014&x&1\\c+2014&z&1\end{bmatrix}$

4. 已知 n 阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&c&\cdots&c\\c&1&\cdots&c\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\c&c&\cdots&1\end{bmatrix}$ 的秩为 $n-1$，，则 $c=$ $\frac{1}{1-n}$。$(n>2)$ 或 ±1 $(n=2)$

5. 设 $\vec{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\vec{\alpha}_2=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ 是 R^2 的一组基，则 $\vec{\alpha}=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$ 在这基下的坐标为 $\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$。

6. 已知 $\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2,\vec{\eta}_3$ 是四元线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的三个解向量，其中 $\vec{\eta}_1+\vec{\eta}_2=[2\ \ 0\ \ 1\ \ 4]^T$，$\vec{\eta}_2+\vec{\eta}_3=[2\ \ 0\ \ 1\ \ 5]^T$，且 $R(A)=3$，则线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的通解 $\vec{x}=$ $(1,0,\frac{1}{2},2)^T$。$+k(0,0,0,1)^T$. $k\in R$. 多解.

7. 设 $\vec{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\vec{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ 分别是 A 的对应于特征值 1 和 2 的特征向量，则 $A(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2)=$ $\begin{bmatrix}3\\2\\3\end{bmatrix}$。

8. 已知 $f=2x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+x_3^2+2(t+1)x_2x_3$ 为正定二次型，则 t 满足 $-1-\frac{\sqrt{2}}{2}<t<-1+\frac{\sqrt{2}}{2}$。

得分	评阅人

二、计算（共 24 分，每小题 6 分）

往年原题

1. $D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n\\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0\end{vmatrix}$

$D_n \xrightarrow[\text{化上三角}]{\substack{r_2+r_1\\ r_3+r_1\\ \vdots\\ r_n+r_1}} \begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 0 & 2 & 6 & \cdots & 2n\\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n\end{vmatrix}$

$=n!$

2. 设 $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 0 & 0\\ 4 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$，求 $|A^8|$ 及 A^4.　　※分块阵

记 $A_1=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{bmatrix}$，则 $A_1^2=\begin{bmatrix}25 & 0\\ 0 & 25\end{bmatrix}$，$A_1^4=\begin{bmatrix}625 & 0\\ 0 & 625\end{bmatrix}$

$A_2=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 2 & 2\end{bmatrix}$，则 $A_2^2=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 8 & 4\end{bmatrix}$，$A_2^4=\begin{bmatrix}16 & 0\\ 64 & 16\end{bmatrix}$

$|A^8|=|A|^8=(|A_1|\cdot|A_2|)^8=(-25\times4)^8=10^{16}$

$A^4=\begin{bmatrix}A_1^4 & 0\\ 0 & A_2^4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}625 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 625 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 16 & 0\\ 0 & 0 & 64 & 16\end{bmatrix}$

3. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ 5 & -2\end{bmatrix}$, $X=AX+B$，求矩阵 X. 往年原题

$(E-A)X=B$，$X=(E-A)^{-1}B$

$(E-A\,|\,B)=\left[\begin{array}{ccc|cc}1 & -1 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 5 & -2\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & 0 & 3 & -\frac{2}{3}\\ 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3}\end{array}\right]$ (初等行变换法)

$\therefore X=\begin{bmatrix}3 & -\frac{2}{3}\\ 2 & \frac{1}{3}\\ 1 & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}$　　※也可求 $(E-A)^{-1}$，再求 $(E-A)^{-1}B$.

4. 设矩阵 A 与矩阵 B 相似，且矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$，求矩阵 B 的特征值与行列式。

$\because A\sim B$ $\therefore$ B与A有相同的特征值.

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1\\ -2 & \lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda+6=0 \Longrightarrow \lambda_1=2,\lambda_2=3$

$\therefore$ B的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=3$；$|B|=\lambda_1\lambda_2=6$.

往年原题 + $\vec{\alpha}_6$

得分	评阅人

三、（本题 12 分）

求下列向量组的秩和它的一个极大线性无关组，并用该极大线性无关组表示其余向量。

$$\vec{\alpha}_1=\begin{bmatrix}2\\1\\4\\3\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\-6\\6\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-1\\-2\\2\\-9\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_4=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\\7\end{bmatrix},\ \vec{\alpha}_5=\begin{bmatrix}2\\4\\4\\9\end{bmatrix}\ \vec{\alpha}_6=\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\-2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2&-1&-1&1&2&0\\1&1&-2&1&4&-1\\4&-6&2&-2&4&0\\3&6&-9&7&9&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4&-1\\2&-1&-1&1&2&0\\4&-6&2&-2&4&0\\3&6&-9&7&9&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4&-1\\0&-3&3&-1&-6&2\\0&-10&10&-6&-12&4\\0&3&-3&4&-3&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4&-1\\0&1&-1&\frac{1}{3}&2&-\frac{2}{3}\\0&1&-1&\frac{3}{5}&\frac{6}{5}&-\frac{2}{5}\\0&1&-1&\frac{4}{3}&-1&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4&-1\\0&1&-1&\frac{1}{3}&2&-\frac{2}{3}\\0&0&0&\frac{4}{15}&-\frac{4}{5}&\frac{4}{15}\\0&0&0&1&-3&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&\frac{2}{3}&2&-\frac{1}{3}\\0&1&-1&\frac{1}{3}&2&-\frac{2}{3}\\0&0&0&1&-3&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&0&4&-1\\0&1&-1&0&3&-1\\0&0&0&1&-3&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

∴ 秩为3，一个极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$， $\alpha_3=-\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_5=4\alpha_1+3\alpha_2-3\alpha_4$，$\alpha_6=-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_4$.

得分	评阅人

四、（本题 12 分）讨论线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda\\x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3\\(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$$

当 λ 取何值时，线性方程组有惟一解、无解、有无穷多解，在线性方程组有无穷多解时，求出其通解。

① $\begin{vmatrix}1&1&1+\lambda\\1&1+\lambda&1\\1+\lambda&1&1\end{vmatrix}=(\lambda+3)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1+\lambda&1\\1+\lambda&1&1\end{vmatrix}=(\lambda+3)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda&0\\\lambda&0&0\end{vmatrix}=-\lambda^2(\lambda+3)\neq0$，即 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq-3$ 时，唯一解

② $\lambda=0$ 时，$\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&3\\1&1&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，无解.

③ $\lambda=-3$ 时，$\begin{bmatrix}1&1&-2&-3\\1&-2&1&3\\-2&1&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&-3\\0&-3&3&6\\0&3&-3&-6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&-3\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ 无穷多解

$\begin{cases}x_1=x_3-1\\x_2=x_3-2\end{cases}$ 通解：$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，$k\in R$.

得分	评阅人

五、（本题 12 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+2x_1x_3+2x_2^2+3x_3^2$，1）求二次型矩阵 A；2）A 的特征值与特征向量；3）求一正交变换 $\vec{x}=Q\vec{y}$，使二次型化为标准形。

1) $A=\begin{bmatrix}3&0&1\\0&2&0\\1&0&3\end{bmatrix}$

2) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&0&-1\\0&\lambda-2&0\\-1&0&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-4)$

$\therefore \lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=4$

$(\lambda_1E-A)=\begin{bmatrix}-1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow x_1=-x_3$

基础解系：$\vec{\xi}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，$\vec{\xi}_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

$\therefore$ 属于 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 的特征向量为

$k_1\vec{\xi}_1+k_2\vec{\xi}_2$，$k_1,k_2$ 不全为0.

$(\lambda_3E-A)=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=0\end{cases}$

基础解系，$\vec{\xi}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

$\therefore$ 属于 $\lambda_3=4$ 的特征向量为 $k_3\vec{\xi}_3$，$k_3\neq0$.

3) $\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2$ 正交，$\vec{\xi}_2$ 单位化为 $\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}\\0\\\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$；

$\vec{\xi}_3$ 单位化为 $\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\0\\\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$.

$\therefore$ 取 $Q=\begin{bmatrix}0&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$

令 $\vec{x}=Q\vec{y}$，则 $f=2y_1^2+2y_2^2+4y_3^2$.　多解

得分	评阅人

六、证明（本题 8 分）　往年原题

设 n 维向量组 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_t$ 是齐次线性方程组 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的一个基础解系，向量 $\vec{\beta}$ 不是齐次线性方程组 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的解，即 $A\vec{\beta}\neq\vec{0}$，试证明：n 维向量组 $\vec{\beta}$，$\vec{\beta}+\vec{\alpha}_1,\vec{\beta}+\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\beta}+\vec{\alpha}_t$ 线性无关。

设 $x_0\vec{\beta}+x_1(\vec{\beta}+\vec{\alpha}_1)+x_2(\vec{\beta}+\vec{\alpha}_2)+\cdots+x_t(\vec{\beta}+\vec{\alpha}_t)=\vec{0}$. ①

往证 $x_0=x_1=x_2=\cdots=x_t=0$

① $\Longleftrightarrow$ $(x_0+x_1+x_2+\cdots+x_t)\vec{\beta}+x_1\vec{\alpha}_1+x_2\vec{\alpha}_2+\cdots+x_t\vec{\alpha}_t=\vec{0}$ ②

由②：$(x_0+x_1+x_2+\cdots+x_t)(A\vec{\beta})+x_1(A\vec{\alpha}_1)+x_2(A\vec{\alpha}_2)+\cdots+x_t(A\vec{\alpha}_t)$

$=(x_0+x_1+x_2+\cdots+x_t)(A\vec{\beta})+x_1\vec{0}+x_2\vec{0}+\cdots+x_t\vec{0}=\vec{0}$，其中 $A\vec{\beta}\neq\vec{0}$

$\therefore x_0+x_1+x_2+\cdots+x_t=0$. ③

将③代入②：$x_1\vec{\alpha}_1+x_2\vec{\alpha}_2+\cdots+x_t\vec{\alpha}_t=\vec{0}$

$\because \vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_t$ 线性无关. $\therefore x_1=x_2=\cdots=x_t=0$ ④

将④代入③：$x_0=0$. 得证.