2014-2015 学年第二学期《高等数学AII》试卷（B）

授课班号__________ 年级专业__________ 学号__________ 姓名__________

题型	填空题	计算题	综合题	总分	审　　核
得分					

一、填空题(每小题 3 分，共 24 分)

得分	阅卷人

1. 由三点 $M_1(1,-1,2)$, $M_2(3,3,1)$, $M_3(3,1,3)$ 决定的平面垂直的单位向量 $a_0 =$ $\pm\frac{1}{\sqrt{17}}(3,-2,-2)$

2. 曲线 $x=t^2e^{2t}$, $y=te^{2t}$, $z=e^{2t}$ 在对应于 $t=1$ 点处的切线与 yz 平面的夹角正弦 $\sin\varphi =$ $\frac{4}{\sqrt{29}}$.

3. 设 $u(x,y,z)=\left(\frac{x}{y}\right)^z$，则 $du|_{(1,2,3)} =$ $\frac{3}{8}dx-\frac{3}{16}dy-\frac{1}{8}\ln 2\,dz$.

4. 设 $f(x)$ 连续，a, m 为常数．把 $I=\int_0^a dy\int_0^y e^{m(a-x)}f(x)dx$ 写成定积分时，$I=$ $\int_0^a (a-x)e^{m(a-x)}f(x)\,dx$

5. 设 C 为抛物线 $y=x^2$ 从点 $(0,0)$ 到 $(2,4)$ 一段弧，则
$$\int_C (x^2-y^2)\,dx = -\frac{56}{15}.$$

6. 函数 $e^x\sin x$ 的马克劳林级数至含 x^3 的项是 $x+x^2+\frac{x^3}{3}$

7. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛域为 $[4,6)$.

8. 若某个二阶常系数线性齐次微分方程的通解为 $y=C_1+C_2x$，其中 C_1, C_2 为独立的任意常数，则该方程为 $y''=0$.

二、计算题(每小题 8 分，共 32 分)

得分	阅卷人

1. 一直线在 $\pi: x+2y=0$ 上，且和两直线
$$l_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{-1},\qquad l_2:\frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-2}{-1}$$
都相交，求该直线的方程.

$\begin{cases} x+2y=0 \\ \frac{x}{1}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{-1} \end{cases} \Rightarrow l_1$ 与 π 交点 $(0,0,1)$

$\begin{cases} x+2y=0 \\ \frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-2}{-1} \end{cases} \Rightarrow l_2$ 与 π 交点 $(-2,1,5)$

$\therefore \vec{s}=(-2,1,4)$

$\frac{x}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{4}$

2. 设 $z=xf\left(2x,\frac{y^2}{x}\right)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f + x\left[f_1'\cdot 2 + f_2'\cdot\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)\right]$$

$$= f + 2x f_1' - \frac{y^2}{x} f_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_2'\cdot\frac{2y}{x} + 2x f_{12}''\cdot\frac{2y}{x} - \frac{2y}{x} f_2' - \frac{y^2}{x} f_{22}''\cdot\frac{2y}{x}$$

$$= 4y f_{12}'' - \frac{2y^3}{x^2} f_{22}''$$

3. 计算二重积分 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由曲线 $y=x^2$, 直线 $y=0, x=2$ 所围成区域.

$$\text{原式} = \int_0^2 dx \int_0^{x^2} xy\, dy$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{2}x^5\, dx$$

$$= \frac{16}{3}$$

4. 求微分方程 $3xy' + y + x^2y^4 = 0$ 的通解.

$$-3y^{-4}y' - \frac{y^{-3}}{x} = x$$

令 $y^{-3} = z$.

$$z' - \frac{z}{x} = x$$

$$\frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2} = 1$$

$$\left(\frac{z}{x}\right)' = 1$$

$$\frac{z}{x} = x + C$$

$$\therefore y^{-3} = z = x^2 + Cx$$

$$\therefore y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+Cx}}$$

三、综合题(满分 44 分)

1. (11 分) 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3x \\ 2x-3y+5z=4 \end{cases}$，在点 (1, 1, 1) 处的切线方程和法平面方程.

得分	阅卷人

$$\begin{cases} 2x+2y\cdot\frac{dy}{dx}+2z\cdot\frac{dz}{dx}=3 \\ 2-3\frac{dy}{dx}+5\frac{dz}{dx}=0 \end{cases}$$

(1,1,1) 处 $\begin{cases} 2+2\frac{dy}{dx}+2\frac{dz}{dx}=3 \\ 2-3\frac{dy}{dx}+5\frac{dz}{dx}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dx}=\frac{9}{16} \\ \frac{dz}{dx}=-\frac{1}{16} \end{cases}$

$\therefore \vec{T}=(1,\frac{9}{16},-\frac{1}{16})=\frac{1}{16}(16,9,-1)$

切线: $\frac{x-1}{16}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-1}$

法平面: $16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0$ 即: $16x+9y-z-24=0$

. (11 分) 设 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 都是有二阶连续偏导数的二元函数，且使曲线积分 $\int_L Q\mathrm{d}x+P\mathrm{d}y$ 与路径无关. 试证明: 积分 $\int_L \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x+\int_L \frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}y$ 也与路径无关.

$\int_L Q\,dx+P\,dy$ 与路径无关

$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial x}$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$

又 Q 具二阶连续偏导 $\Rightarrow \frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial x}$

$\therefore \frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$

$\Rightarrow \int_L \frac{\partial Q}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial x}dy$ 与路径无关.

或 $\int_L \frac{\partial Q}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial x}dy=\int_L \frac{\partial Q}{\partial x}dx+\frac{\partial Q}{\partial y}dy=\int_L dQ$

$\Rightarrow$ 与路径无关.

3. (11 分) 试求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^n$ 的和函数，并计算 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ 的和.

① $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^n = 2x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}x^n$

$=2x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'-\frac{x}{1-x}$

$=2x\left(\frac{x}{1-x}\right)'-\frac{x}{1-x}$

$=\frac{2x}{(1-x)^2}-\frac{x}{1-x}$

$=\frac{x^2+x}{(1-x)^2}, \quad -1<x<1.$

② $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=S(\frac{1}{2})=3.$

4. (11 分) 已知上半平面内一曲线 $y=y(x)(x\geq 0)$ 过原点，且曲线上任一点 $M(x_0,y_0)$ 处切线斜率数值上等于该点横坐标减去此曲线与 x 轴，直线 $x=x_0$ 所围成的面积，求此曲线方程.

$y'(x_0)=x_0-\int_0^{x_0}y(t)\,dt$

由 (x_0,y_0) 任意性：$y'=x-\int_0^x y(t)\,dt$

$\Rightarrow y''=1-y$

从而 $\begin{cases} y''+y=1 & ① \\ y(0)=0,\ y'(0)=0 & ② \end{cases}$

易见①通解：$y=1+C_1\cos x+C_2\sin x$

又 $y'=-C_1\sin x+C_2\cos x$ 由②：$C_1=-1,\ C_2=0$

∴ 曲线方程：$y=1-\cos x.$

2015-2016 学年第二学期《高等数学AII》试卷（B）

授课班号________ 年级专业________ 学号________ 姓名________

题型	填空题	计算题	综合题	总分	审　　核
得分					

一、填空题(每小题 3 分，共 24 分)

得分	阅卷人

1. 已知向量 $a=\{2,3,-4\}$, $b=\{5,-1,-1\}$, 则向量 $c=2a-3b$ 在 y 轴上的分向量是 $9\vec{j}$.

2. 以曲线 $\Gamma:\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 为母线，以 Oz 轴为旋转轴的旋转曲面的方程是 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$

3. 设函数 $F(x,y,z)$ 可微, 曲面 $F(x,y,z)=0$ 过点 $P(1,-2,3)$ 且 $F_x(P)=4$, $F_y(P)=3$, $F_z(P)=-2$, 则曲面 $F(x,y,z)=0$ 在点 P 的切平面方程为 $4x+3y-2z+8=0$

4. 交换积分次序 $\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x,y)\,dx =$ $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)\,dy$

5. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+y+z=e^{-(x^2+y^2+z^2)}$ 所确定，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ $-\dfrac{2xe^{-(x^2+y^2+z^2)}+1}{2ze^{-(x^2+y^2+z^2)}+1}$

6. 设 L 为圆周 $x^2+y^2=1$, 则 $\oint_L x^2\,ds=$ π .

7. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=2$, 则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在开区间 $(-1,3)$ 内收敛.

8. 若某个二阶常系数线性齐次微分方程的通解为 $y=C_1+C_2x$, 其中 C_1, C_2 为独立的任意常数，则该方程为 $y''=0$.

二、计算题(每小题 8 分，共 32 分)

得分	阅卷人

1. 求函数 $z=xy-x^2+11y-y^3$ 的极值.

$\begin{cases} z_x=y-2x=0 \\ z_y=x+11-3y^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-\frac{11}{12} \\ y=-\frac{11}{6} \end{cases}$

$A=z_{xx}=-2<0$, $B=z_{xy}=1$, $C=z_{yy}=-6y$,

$AC-B^2=12y-1$.

$(1,2)$ 处：$AC-B^2>0$, $A<0$ $\therefore$ $(1,2)$ 为极大值点.

$(-\frac{11}{12},-\frac{11}{6})$ 处：$AC-B^2<0$ $\therefore$ $(-\frac{11}{12},-\frac{11}{6})$ 不为极值点.

综上：极大值 $z(1,2)=15$.

2. 设 $z = xf\left(2x, \dfrac{y^2}{x}\right)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f + x\left[f_1' \cdot 2 + f_2' \cdot \left(-\frac{y^2}{x^2}\right)\right] = f + 2xf_1' - \frac{y^2}{x}f_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_2' \cdot \frac{2y}{x} + 2x f_{12}'' \cdot \frac{2y}{x} - \frac{2y}{x} f_2' - \frac{y^2}{x} f_{22}'' \cdot \frac{2y}{x}$$

$$= 4y f_{12}'' - \frac{2y^3}{x^2} f_{22}''$$

关于xoy面对称

3. 试求圆锥面 $z^2 = x^2 + y^2$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 2ax\ (a > 0)$ 截下有限部分的曲面面积.

$$S = 2\iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy \quad (D: x^2+y^2 \le 2ax,\ z = \sqrt{x^2+y^2})$$

$$= 2\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\, dxdy$$

$$= 2\sqrt{2} \iint_D dxdy$$

$$= 2\sqrt{2}\pi a^2.$$

4. 用比值判别法判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ 的敛散性.

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \frac{[(n+1)!]^2 \cdot (2n)!}{(2n+2)!\,(n!)^2}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}$$

$$= \frac{1}{4} < 1$$

∴ 级数收敛.

三、综合题（满分 44 分）

1.（11 分）

得分	阅卷人

求点 $(3,0)$ 到抛物线 $y=x^2$ 的距离.

抛物线上任意一点 (x,y) 与 $(3,0)$ 距离 $d=\sqrt{(x-3)^2+y^2}$

设 $L(x,y,\lambda)=(x-3)^2+y^2+\lambda(x^2-y)$

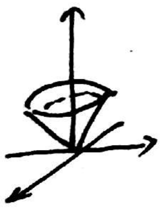
由 $\begin{cases} L_x = 2(x-3)+2\lambda x=0 \\ L_y = 2y-\lambda=0 \\ L_\lambda = x^2-y=0 \end{cases}$ 解得唯一驻点 $(1,1)$

$\therefore d_{min}=\sqrt{(1-3)^2+1^2}=\sqrt{5}$.

2.（11 分） 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(xy^2\cos\alpha+yx^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$，其中 Σ 是球体

$x^2+y^2+z^2\le 2z$ 和锥体 $z\ge\sqrt{x^2+y^2}$

的公共部分 Ω 的表面，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是此表面的外法线方向的方向余弦.



由 Gauss 公式,

$$原式=\iiint\limits_{\Omega}(y^2+x^2+2z)\,dV$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_r^{1+\sqrt{1-r^2}}(r^2+2z)\cdot r\,dz \quad \leftarrow 柱坐标$$

$$=2\pi\int_0^1\left\{r^3(1+\sqrt{1-r^2}-r)+r\left[(1+\sqrt{1-r^2})^2-r^2\right]\right\}dr$$

$$=2\pi\int_0^1\left(2r-r^3-r^4+r^3\sqrt{1-r^2}+2r\sqrt{1-r^2}\right)dr$$

$$=2\pi\cdot\left[r^2-\frac{r^4}{4}-\frac{r^5}{5}\right]_0^1+2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3t\cos^2t\,dt$$

$$+2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin t\cos^2t\,dt$$

$$=2\pi\cdot\frac{11}{20}+2\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3t\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5t\,dt\right)-\frac{4\pi}{3}\cos^3t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{11\pi}{10}+2\pi\left(\frac{2!!}{3!!}-\frac{4!!}{5!!}\right)+\frac{4\pi}{3}$$

$$=\frac{27\pi}{10}.$$

3. (11 分) 确定幂级数 $1+\frac{x^3}{3}+\frac{x^6}{6}+\frac{x^9}{9}+\cdots$ 的收敛区间，并求和函数．

① 设 $u_n(x)=\frac{x^{3n}}{3n}$，$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=|x|^3$

$\rho<1$ 时级数收敛，$\rho>1$ 时级数发散 $\therefore R=1$

收敛区间为 $(-1,1)$．

② $x=-1$ 时，$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{3n}$ 收敛 (Leibniz 判别法)

$x=1$ 时，$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{3n}$ 发散． $\therefore$ 收敛域为 $[-1,1)$．

设 $S(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{3n}$，$-1\le x<1$．

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{3n-1}=\frac{x^2}{1-x^3},$$

$$S(x)=S(0)+\int_0^x S'(t)\,dt=1+\int_0^x\frac{t^2}{1-t^3}\,dt$$

$$=1-\frac{1}{3}\ln(1-t^3)\Big|_0^x=1-\frac{1}{3}\ln(1-x^3),\quad -1\le x<1.$$

4. (11 分) 设降落伞自塔顶自由下落，已知阻力与速度成正比（比例系数为 k），求降落伞的下落速度与时间的函数关系.

$$mg-kv=m\cdot\frac{dv}{dt}\quad ①$$

法一：① $\Rightarrow \frac{dv}{mg-kv}=\frac{dt}{m}$

$\Rightarrow -\frac{1}{k}\ln(mg-kv)=\frac{t}{m}+C_1$

$\Rightarrow v=\frac{mg}{k}+Ce^{-\frac{kt}{m}}$

又 $v(0)=0$ $\therefore C=-\frac{mg}{k}$．

从而 $v=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{kt}{m}}\right)$．

法二：① $\Rightarrow \frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v=g \Rightarrow \left(e^{\frac{k}{m}t}\cdot v\right)'=ge^{\frac{kt}{m}}$

$\Rightarrow e^{\frac{kt}{m}}\cdot v=\frac{mg}{k}e^{\frac{kt}{m}}+C$，$C=-\frac{mg}{k}$

$\Rightarrow v=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{kt}{m}}\right)$．