九、设$F(x)=f(x)-x$，则$F'(x)=f'(x)-1\le k-1<0$。对$\forall x\in$□，由 Lagrange 定理，$F(x)=F(0)+F'(\xi)x,\xi$介于0与 x 之间。由$F'(x)\le k-1<0$知$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=-\infty$，因此 $\exists X>0$ 当 $\exists x>X$ 时，有 $F(x)<0$，取 $x_1>X>0$，使得$F(x_1)<0$，同理$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=+\infty$，必存在$x_2<0$，使得$F(x_2)>0$，又$F(x)$连续，由根的存在定理$\exists\xi\in(x_2,x_1),F(\xi)=0$，即$f(\xi)=\xi$.

2011 级试卷

一、填空题(每小题 3 分，共 15 分):

1、设$y=f(x)$的定义域为$(0,1]$，$\varphi(x)=1-\ln x$，则复合函数$y=f[\varphi(x)]$的定义域为______. 2、当$x\to0$时，$\tan^2(2x^3)$与x^k是同阶无穷小，则$k=$__________.

3、设$f'(3)=2$，则$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$________.

4、已知$f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-2011)$，则$f'(2011)=$________.

5、曲线$e^y+xy=e$在点$(0,1)$处的切线方程为____________________.

二、选择题(每小题 3 分，共 15 分):

1、如果$\lim\limits_{x\to a}f(x)$存在，$\lim\limits_{x\to a}g(x)$不存在，则$\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$(　　　)

(A) 必存在；　(B) 必不存在；　(C) 可能存在；　(D) 不能确定.

2、设$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+a)x^4+bx^3+2}{x^3+x^2-1}=-2$，则$a,b$为(　　　)

(A) $a=-3,b=0$；(B) $a=0,b=-2$；(C) $a=-1,b=0$；(D) $a=-1,b=-2$.

3、函数$f(x)$在点$x=x_0$处可导，当自变量x由x_0增加到$x_0+\Delta x$时，记Δy为$f(x)$的增量，dy为$f(x)$的微分，则$\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta y-dy}{\Delta x}$等于(　　)

(A) 0；　(B) -1；　(C) 1；　(D) ∞.

4、设函数$f(x)=\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+3e^{\frac{1}{x}}}$，则$x=0$是$f(x)$的(　　　)

(A) 可去间断点；　(B) 跳跃间断点；　(C) 无穷间断点；　(D) 振荡间断点.

5、下列命题正确的是(　　)

(A) 无穷小量是一个很小很小的数；　(B) 无穷大量是一个很大很大的数；

(C) 无穷大量必是无界变量；　(D) 无界变量必是无穷大量.

三、解下列各题(每小题 5 分，共 35 分)：

1、计算 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

2、计算 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\sin^2 x\right)^{\frac{4}{x\tan 2x}}$.

3、求函数 $y=2^{\arctan x^2}+x^x$ 的导数 y'.

4、已知 $y=\sqrt{x+\sqrt{2x+\sqrt{3x}}}+\ln 2$，求 dy.

5、求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)\quad(n\ge3)$

6、求由参数方程 $\begin{cases}x=\ln\sin t\\ y=\cos t+t\sin t\end{cases}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的一阶导数 $\dfrac{dy}{dx}$ 和二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

7、已知 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, x\le1\\ ax+b, x>1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处可导，求 a,b 的值.

四、(9 分)设 $x_1=10$，$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}\quad(n=1,2,\cdots)$，试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在,并求此极限.

五、(9 分)求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^6+n}}+\dfrac{2^2}{\sqrt{n^6+2n}}+\cdots+\dfrac{n^2}{\sqrt{n^6+n^2}}\right)$.

六、(9 分)设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{|x|}, & x<0\\ 0, & 0\\ 2x^2-2, & 0<x\le1\\ x, & x>1\end{cases}$,确定 $f(x)$ 的连续区间. 如果有间断点, 判断其类型.

七、(8 分)已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0,\ f(1)=1$. 证明：(1) 存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$；(2) 存在两个不同的点 $x_1,x_2\in(0,1)$，使 $f'(x_1)\cdot f'(x_2)=1$.

2011 级参考答案

一、填空题 1、$[1,e)$；　2、6；　3、-1；　4、$2010!$；　5、$y-1=-\dfrac{1}{e}x$.

二、选择题(每小题 3 分，共 15 分)：　BDABC.

三、解下列各题(每小题 5 分，共 35 分)：

1、$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{2x-2\sin x\cos x}{4x^3}=\lim_{x\to0}\frac{2x-\sin 2x}{4x^3}=\lim_{x\to0}\frac{2-2\cos 2x}{12x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x^2}{6x^2}=\frac{1}{3}$$

2 、

$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2 x\right)^{\frac{4}{x\tan 2x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\frac{4\sin^2 x}{x\tan 2x}}=e^2$ 3 、

$y'=\ln 2\cdot 2^{\arctan x^2}\cdot\dfrac{2x}{1+x^4}+x^x(\ln x+1)$.

4、$dy=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{2x+\sqrt{3x}}}}\cdot\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{2x+\sqrt{3x}}}\cdot(2+\dfrac{3}{2\sqrt{3x}})\right)dx$.

5、$f^{(n)}(x)=x^2\cdot\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}+2nx\cdot\dfrac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}+n(n-1)\dfrac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}$

$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-3}n(n-1)(n-3)!=\dfrac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}$

6、$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\cos t}{\sin t}=\cot t$，$\dfrac{dy}{dt}=-\sin t+\sin t+t\cos t=t\cos t$，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{t\cos t}{\cot t}=t\sin t$；

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}(\dfrac{dy}{dx})\cdot\dfrac{dt}{dx}=(\sin t+t\cos t)\cdot\dfrac{\sin t}{\cos t}=\dfrac{\sin^2 t+t\sin t\cos t}{\cos t}$

7、 函数 $f(x)$ 应在点 $x=1$ 处连续， $f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1+}(ax+b)=a+b$ ，

$f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1-}(x^2+1)=2=f(1)$ ，则 $a+b=2$ ；函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 可导，

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{(x^2+1)-2}{x-1}=2$，

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{(ax+b)-2}{x-1}==\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{ax-a}{x-1}=a$，则$a=2$，

所以$a=2,b=0$.

四、$x_1=10$，$x_2=4$，因此$x_1>x_2$，假设$x_{k-1}>x_k$，则$6+x_{k-1}>6+x_k$，有

$x_k=\sqrt{6+x_{k-1}}>\sqrt{6+x_k}=x_{k+1}$，由归纳原理知$\{x_n\}$单调递减，又

显然$x_n=\sqrt{6+x_{n-1}}>0$，$\{x_n\}$有下界，所以数列$\{x_n\}$极限存在；令$\lim\limits_{x\to\infty}x_n=a$，

对$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$两边取极限，得$a=\sqrt{6+a}$，解得$a=3$，故$\lim\limits_{x\to\infty}x_n=3$.

一、 记数列为$\{x_n\}$，则

$$x_n > \frac{1}{\sqrt{n^6+n^2}} + \frac{2^2}{\sqrt{n^6+n^2}} + \cdots + \frac{n^2}{\sqrt{n^6+n^2}} = \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{\sqrt{n^6+n^2}} \to \frac{1}{3}(n \to \infty),$$

$$x_n < \frac{1}{\sqrt{n^6+n}} + \frac{2^2}{\sqrt{n^6+n}} + \cdots + \frac{n^2}{\sqrt{n^6+n}} = \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{\sqrt{n^6+n}} \to \frac{1}{3}(n \to \infty),$$

由夹逼原理知原极限为$\frac{1}{3}$.

六、当$x<0$时，$f(x)=\frac{\sin 2x}{|x|}=\frac{\sin 2x}{-x}$，由初等函数的连续性知，当$x<0$、$0<x<1$及 $x>1$ 时， $f(x)$ 连续；当 $x=0$ 时， $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0-}\frac{\sin 2x}{-x}=-2$ ，$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0+}(2x^2-2)=-2$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-2\neq f(0)=0$，$x=0$是第一类(可去)间断点；当$x=1$时，$f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1-}x=1$，$f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1+}(2x^2-2)=0$，$x=1$是第一类(跳跃)间断点；所以$f(x)$连续区间为$(-\infty,0)$，$(0,1)$，$(1,+\infty)$

七、(1) 令 $F(x)=f(x)-1+x$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $F(0)=-1<0$，$F(1)=1>0$，由零点定理可知存在$\xi\in(0,1)$，使得$F(\xi)=0$，即$f(\xi)=1-\xi$；

(2)在$[0,\xi]$和$[\xi,1]$上对$f(x)$分别应用拉格朗日中值定理，知存在两个不同的点$x_1\in(0,\xi),x_2\in(\xi,1)$，使得$f'(x_1)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}$，$f'(x_2)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}$，于是$f'(x_1)\cdot f'(x_2)=\frac{f(\xi)}{\xi}\cdot\frac{1-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{1-\xi}{\xi}\cdot\frac{\xi}{1-\xi}=1$

2012 级试卷

一、选择题（每小题3分，共15分）

1. $f(x)$在点$x=x_0$处有定义，是$f(x)$当$x\to x_0$时存在极限的（　　）。

A. 必要条件　　B. 充分条件　　C. 充要条件　　D. 无关条件

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x+3}=$（　　）。　A. e^3　　B. e^{-3}　　C. e^{-1}　　D. e

3. 设函数$f(x)$在$x=x_0$可导，且$f(x_0)<0$，则下列说法正确的是（　　）。

A. $|f(x)|$在$x=x_0$处不可导　　B. $|f(x)|$在$x=x_0$处可导且导数为$-f'(x_0)$