2015－2016 学年第一学期《理论力学》课内考试卷 A 卷

授课班号 6111819 年级专业 机自、材料、热动 14 级 学号________姓名___________

考试时间：95 分钟

题号	一	二			总分	审核
		1	2	3		
题分	40	20	20	20		
得分						

题分	40
得分	

一、基本概念及运算题（共 40 分）

注：请在空白处写出必要的计算步骤，必要时画出力学简图

1、(本题 5 分)　如图 1 所示，圆盘半径 $R=1\text{ m}$，一个大小为 50 N 的力 $\boldsymbol{F}$ 作用在圆盘边缘的点 B 上，求此力对于点 A 的矩（结果保留 2 位小数）：

$M_A(\boldsymbol{F})=$ ________________

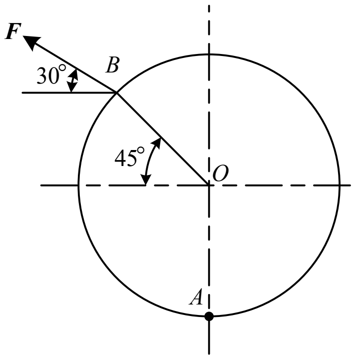


图 1

[解答]

$$M_A(\boldsymbol{F})=M_A(F_x)+M_A(F_y)$$

$$=F\cos30°\times R(1+\cos45°)-F\sin30°\times R\sin45°$$

$$=50\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times1\times\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-50\times\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=56.24\text{ N}\cdot\text{m}$$

2、（本题 6 分）力 $\boldsymbol{F}$ 的大小及方向如图 2 所示，角度φ已知，正方体边长为 a，则力 $\boldsymbol{F}$ 对三轴之矩分别为：

(1) $M_x(\boldsymbol{F})=$ ________________

(2) $M_y(\boldsymbol{F})=$ ________________

(3) $M_z(\boldsymbol{F})=$ ________________

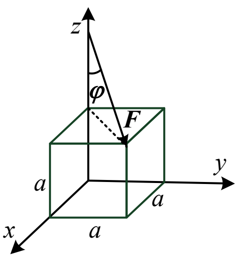


图 2

[解答]

$$F_z=F\cos\varphi;F_x=F\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi;F_y=F\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi$$

$$M_x(\boldsymbol{F})=M_x(F_y)+M_x(F_z)=-\frac{\sqrt{2}}{2}Fa\sin\varphi-Fa\cos\varphi$$

$$M_y(\boldsymbol{F})=M_y(F_x)+M_y(F_z)=\frac{\sqrt{2}}{2}Fa\sin\varphi+Fa\cos\varphi \qquad M_z(\boldsymbol{F})=0$$

3、（本题 3 分）如图 3 所示，已知静止的物块 *A* 重 $W=100\ \text{N}$，物块与地面的静滑动摩擦因数 $\mu_{\text{s}}=0.3$，若力 $F=25\ \text{N}$，此物块受到的静摩擦力 $F_{\text{s}}=$ ________________。

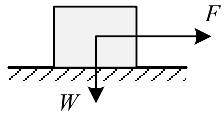


图 3

[解答]

$$F_{\text{smax}}=\mu_{\text{s}}F_{\text{N}}=0.3\times100=30\text{N}$$

由平衡条件，$F_{\text{s}}=F=25\ \text{N}$

4、（本题 6 分）点在平面上运动，其轨迹的参数方程为$\begin{cases}x=2\sin(\pi t/3)\\ y=4+4\sin(\pi t/3)\end{cases}$。设 $t=0$ 时，$s_0=0$，s 正方向相当于 x 增大的方向。求

(1)点在直角坐标系下的轨迹方程：________________________

(2)点的速度关于时间的函数：$v(t)=$ ______________________

(3)点沿轨迹的运动方程 $s(t)=$ _________________________

[解答]

(1)在参数方程中消去时间 *t*，得轨迹方程 $y=4+2x$

(2) $v_x=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2\pi}{3}\cos\left(\dfrac{\pi t}{3}\right)$ $v_y=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{4\pi}{3}\cos\left(\dfrac{\pi t}{3}\right)$ $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\dfrac{2\sqrt{5}\pi}{3}\cos\left(\dfrac{\pi t}{3}\right)$

(3) $v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},\ \mathrm{d}s=v\mathrm{d}t,\ \int_0^s\mathrm{d}s=\int_0^t\dfrac{2\sqrt{5}\pi}{3}\cos\left(\dfrac{\pi t}{3}\right)\mathrm{d}t,\ s=2\sqrt{5}\sin\left(\dfrac{\pi t}{3}\right)$

5、(本题 8 分)　如图 4 所示，直角弯杆 *OBA* 以匀角速度 ω 绕 *O* 轴转动，*A* 端推动直杆 *CD* 绕 *C* 轴转动。已知 $OB=AB=l,CD=2l$，当 $OB\perp OC$ 时，若取 *OBA* 上的点 *A* 为动点，动参考系固连在 *CD* 上，则

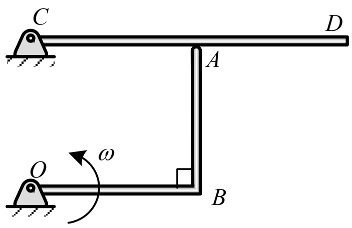


图 4

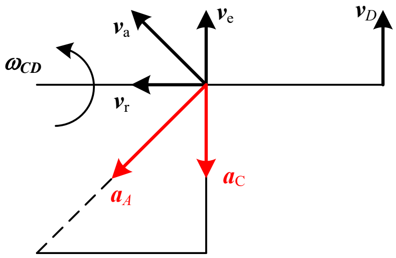
(1) 点 D 的速度 $v_D =$ ________________

(2) 点 A 的加速度 $a_A =$ _____ ，**并在图中标出其方向**。

(3) **不计算科氏加速度的大小，仅在图中标出科氏加速度** a_C **的方向**。

[解答]

(1) 以点 A 为动点，动系固连在 CD 杆上，画出速度关系图如下



容易得出，$v_a = \sqrt{2}\omega l; v_e = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2}\omega l = \omega l, \omega_{CD} = \frac{\omega l}{l} = \omega; v_D = \omega_{CD} \cdot 2l = 2\omega l$ ；

(2) 方向见上图；$a_A = a_A^n = \omega^2 |OA| = \sqrt{2}\omega^2 l$ ；

(3) 科氏加速度方向见上图。

6、(本题 6 分) 如图 5 所示，质量为 m ,半径为 r 的均质圆盘，绕定轴 O 转动，轮上缠绕不计质量的细绳，绳端悬挂质量为 $\frac{1}{2}m$ 的物块 A。此时求：

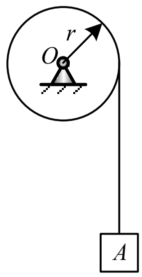


图 5

(1) 若物块 A 的速度为 v，则物块 A 对定轴 O 的动量矩为

$L_O^A =$ ________________

系统对定轴 O 的动量矩为

$L_O =$ ________________

(2) 物块 A 的加速度

$a_A =$ ________________

[解答]

(1) $L_O^A = -m_A r v = -\frac{1}{2}mvr$ ； (2) $L_O = L_O^A + L_O^O = -\frac{1}{2}mvr - \frac{1}{2}mr^2\frac{v}{r} = -mvr$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}L_O}{\mathrm{d}t}=\sum M_O\left(F_i^e\right), -mra_A=-m_Agr=-\dfrac{1}{2}mgr,\ a_A=\dfrac{1}{2}g$

7、(本题 6 分) 如图 6 所示的半径为 R，质量为 m 的偏心轮，若其轴心为 A，质心为 C，偏心距 $e=\dfrac{R}{2}$，偏心轮做纯滚动。若已知在图示位置时，轴心 A 的速度为 v_0，轮对轴心 A 的转动惯量为 J_A，则此时：

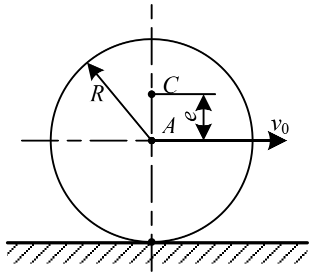


图 6

(1) 偏心轮的动量 $p=$ ______________

(2) 偏心轮的动能 $E_\mathrm{k}=$ ______________ 、

［解答］

(1)接触点为瞬心，因此，偏心轮的角速度为 $\omega=\dfrac{v_0}{R}$，

此时质心 C 的速度：$v_C=\omega\left(R+e\right)=\dfrac{v_0}{R}\left(R+e\right)=\dfrac{3}{2}v_0$，那么动量

$$p=mv_C=m\frac{v_0}{R}\left(R+e\right)=\frac{3}{2}mv_0$$

(2)由平行移轴公式，知道：$J_A=J_C+m\left(\dfrac{R}{2}\right)^2;J_C=J_A-\dfrac{1}{4}mR^2$

$$E_\mathrm{k}=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega^2=\frac{1}{2}m\frac{9}{4}v_0^2+\frac{1}{2}\left(J_A-\frac{1}{4}mR^2\right)\frac{{v_0}^2}{R^2}=\frac{1}{2}J_A\frac{{v_0}^2}{R^2}+mv_0^2$$

二、计算题（共 60）

题分	20
得分	

1、 如图 7 所示，已知：$q=10\,\mathrm{kN/m}$，$M=24\mathrm{kN\cdot m}$，$F=12\,\mathrm{kN}$，$l=3\,\mathrm{m}$，不计结构自重，求：支座 A、B 以及铰链 C 处的约束反力(偶)。

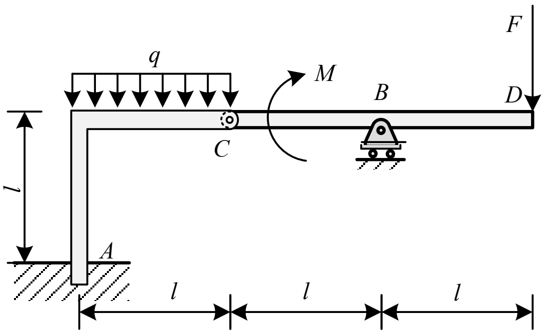
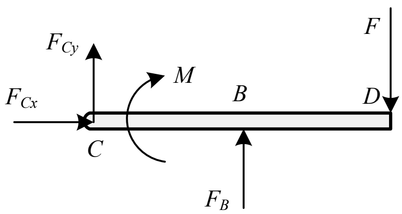


图 7

［解答］

(1) 分析 CBD 部分，画出其受力分析图如图(a)

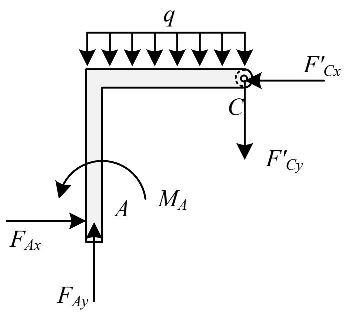


(a)

$$\sum M_C(F_i)=0 \quad -M+F_B l-F2l=0 \quad F_B=\frac{M+2Fl}{l}=\frac{24+2\times12\times3}{3}=32\text{ kN}$$

$$\sum F_y=0 \quad F_{Cy}+F_B-F=0 \quad F_{Cy}=F-F_B=12-32=-20\text{ kN}$$

(2) 分析 AC, 其受力分析图如图(b)



(b)

$$\sum F_x=0 \quad F_{Ax}=0$$

$$\sum F_y=0 \quad F_{Ay}-ql-F'_{Cy}=0 \quad F_{Ay}=ql+F'_{Cy}=10\times3-20=10\text{ kN}$$

$$\sum M_A(F)=0 \quad M_A-ql\frac{l}{2}-F'_{Cy}l=0 \quad M_A=\frac{10}{2}\times 9+(-20)\times 3=-15\,\mathrm{kN\cdot m}$$

题分	20
得分	

2、如图 8 所示的机构，长 0.5m 的杆 OA 以恒定的角速度 $\omega_0=1\,\mathrm{rad/s}$ 绕 O 转动，$AB=AC=1\,\mathrm{m}$，机构运动到图示位置时，$OA\perp BO$，求此时(1) 点 C 的速度，**并在图中标出速度的方向**。(2) 杆 BC 的角速度和角加速度。

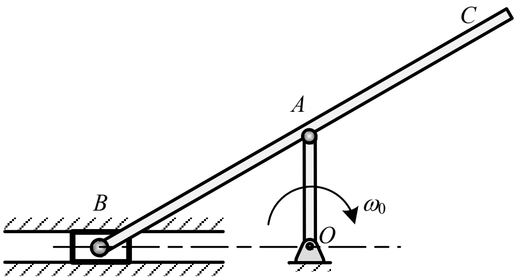


图 8

[解答]

显然，BAC 是瞬时平动，由此，

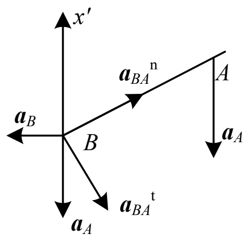
$v_C=v_A=\omega_0 l_{OA}=1\times 0.5=0.5\mathrm{m/s}$，$\omega_{BC}=0$

点 C 的速度方向水平向右。

以点 A 为基点，分析点 B,有以下关系：

$\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{a}_{BA}^{\mathrm{n}}+\boldsymbol{a}_{BA}^{\mathrm{t}}$，由于 $\omega_{BC}=0$，因此 $\boldsymbol{a}_{BA}^{\mathrm{n}}=0$

画出加速度关系示意图如下



将表达式向 x'轴投影：

$0=-a_A-a_{BA}^{\mathrm{t}}\cos 30°$

$$a_{BA}^{\mathrm{t}} = -a_A / \cos 30° = -\omega_0^2 l_{OA} / \cos 30° = -\frac{1}{2} / \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\ \mathrm{m/s^2}$$

那么：$\alpha_{BA} = \dfrac{a_{BA}^{\mathrm{t}}}{BA} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} / 1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\ \mathrm{rad/s^2}$ 实际角加速度的转向为顺时针。

题分	25
得分	

3、质量为 9kg，长为 1m 的均质细杆 OA，一端与一个半径 $R = 0.5\ \mathrm{m}$，质量 4kg 的均质圆环焊接，另一端可绕轴 O 转动。初始系统在铅垂平面内，以图示位置处于静止。在发生微小的挠动后，系统向右发生倾倒，求当杆倒至水平位置时：

(1) 系统对于转轴 O 的转动惯量；在图中标出系统质心的位置；

(2) OA 的角速度、角加速度；(3)铰 O 处的约束力。已知重力加速度 $g = 10\mathrm{m/s^2}$

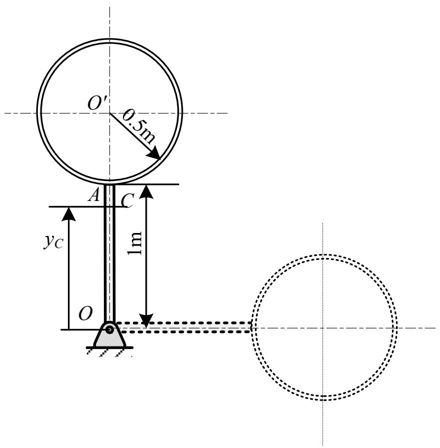


图 9

[解答]

(1) 相对于转轴 O 的转动惯量：

$$J_O = \frac{1}{3} m_{OA} l_{OA}^2 + m_{O'} R^2 + m_{O'} \left(l_{OA} + R\right)^2 = \frac{1}{3} \times 9 \times 1^2 + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \times 1.5^2 = 13\ \mathrm{kg \cdot m^2}$$

质心位置：

$$y_C = \frac{m_{OA} \times 0.5 + m_{O'} \times 1.5}{m_{OA} + m_{O'}} = \frac{9 \times 0.5 + 4 \times 1.5}{13} = 0.808\ \mathrm{m}$$

(2) 考虑动能定理：

$E_{\mathrm{k}1}=0\quad E_{k2}=\dfrac{1}{2}J_O\omega^2$，外力功$W_{12}=Mgy_C$ 由$W_{12}=\Delta E_{\mathrm{k}}$

$$\frac{1}{2}J_O\omega^2=Mgy_C，\ \omega^2=\frac{2Mgy_C}{J_O}=\frac{2\times 13\times 10\times 0.808}{13}=16.16\mathrm{rad}^2/\mathrm{s}^2，\ \omega=4.02\ \mathrm{rad/s}$$

(3) 根据定轴转动微分方程

$$J_O\alpha=Mgy_C，\ \alpha=\frac{Mgy_C}{J_O}=\frac{13\times 10\times 0.808}{13}=8.08\ \mathrm{rad/s}^2$$

(4) 质心运动定理

$$Ma_{Cx}=\sum F_{ix}\quad -M\omega^2 y_C=F_{Ox}，\ F_{Ox}=-13\times 16.16\times 0.808=-169.74\mathrm{N}$$

$$Ma_{Cy}=\sum F_{iy}\quad -M\alpha y_C=F_{Oy}-Mg,$$
$$F_{Oy}=Mg-M\alpha y_C=13\times(10-8.08\times 0.808)=45.13\ \ \mathrm{N}$$