

# 高斯课堂系列课程

## 《力学》

习题答案

(微信扫一扫)



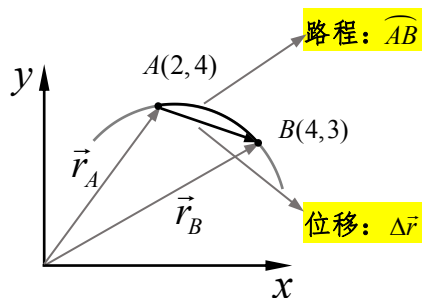
### 版权声明：

内容来自高斯课堂原创，讲义笔记和相关图文均有著作权，视频课程已申请版权，登记号：陕作登字-2018-I-00001958，根据《中华人民共和国著作权法》、《中华人民共和国著作权法实施条例》、《信息网络传播权保护条例》等有关规定，如有侵权，将根据法律法规提及诉讼。

## 课时一 质点运动学(一)

考点	重要程度	占 分	常见题型
1. 位移/速度/加速度	基础知识	0~3	选择
2. $\vec{r} \rightarrow \vec{v} \rightarrow \vec{a}$ 型	必考	5~10	大题
3. $\vec{a} \rightarrow \vec{v} \rightarrow \vec{r}$ 型			
4. 相对运动	★★★	0~3	填空

### 1. 位移、速度、加速度



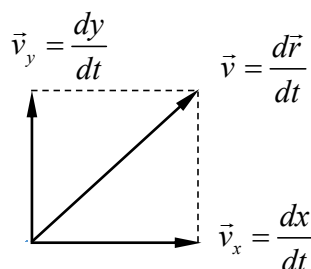
①位矢（位置矢量）：描述质点位置

$$\vec{r}_A = 2\vec{i} + 4\vec{j} \quad \vec{r}_B = 4\vec{i} + 3\vec{j}$$

②位移：起点指向终点，矢量有大小，有方向

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (4-2)\vec{i} + (3-4)\vec{j} = 2\vec{i} - \vec{j}$$

③路程： $\widehat{AB}$ （弧长）

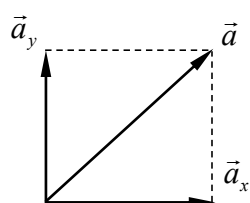


④速度（矢量有大小，有方向）

$$\text{平均速度: } \bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{t_2 - t_1}$$

$$\text{速度（瞬时速度）: } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}$$

$$\text{速度大小: } |\vec{v}| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \sqrt{\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2} = \frac{ds}{dt}$$



⑤加速度：

一个是速度对时间导数，表示加速度

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j}$$

一个是速度大小对时间导数，表示切向加速度大小

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2}{R}\vec{n}$$

$$\text{大小: } |\vec{a}| = \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| = \sqrt{\left( \frac{dv_x}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dv_y}{dt} \right)^2} = \sqrt{\left( \frac{dv}{dt} \right)^2 + \left( \frac{v^2}{R} \right)^2}$$

补充知识点：

圆周运动向心加速度： $a_n = \frac{v^2}{R}$ ，方向指向圆心



题 1. 一质点在  $xoy$  平面内运动，其运动学方程为  $x=3\cos 4t$ ， $y=3\sin 4t$ ，则  $t$  时刻质点的位矢

$\vec{r}(t) =$  \_\_\_\_\_

解：  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = 3\cos 4t \vec{i} + 3\sin 4t \vec{j}$

题 2. 已知平面内运动方程为  $x=at^2, y=bt^2$ （其中  $a, b$  为常量），则该质点运动轨迹为（ ）

A. 双曲线

B. 抛物线

C. 圆周

D. 直线

解：  $\begin{cases} x=at^2 \\ y=bt^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \Rightarrow y = \frac{b}{a}x$  是直线方程，故选 D。

题 3. 一运动质点在某瞬间矢径  $\vec{r}(x, y)$  的端点处，其速度大小为（ ）

A.  $\frac{dr}{dt}$

B.  $\frac{d\vec{r}}{dt}$

C.  $\frac{d|\vec{r}|}{dt}$

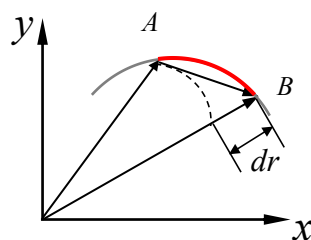
D.  $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$

解： A.  $\frac{dr}{dt}$  表示  $|\vec{r}|$  大小的变化量，为径向变化，故错误。

B.  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ ，表示速度，即有大小又有方向，故错误。

C.  $d|\vec{r}| = dr$ ，和 A 一样，故错误。

D.  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ ，故正确。



题 4. 质点作半径为  $R$  的变速圆周运动时的加速度大小为（ $v$  表示任一时刻质点的速率）（ ）

A.  $\frac{dv}{dt}$

B.  $\frac{v^2}{R}$

C.  $\frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{R}$

D.  $\sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$

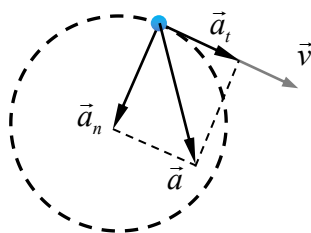
解：质点作圆周运动，故有切向加速度和法向加速度

A.  $\frac{dv}{dt} = a_t$  切向加速度大小

B.  $\frac{v^2}{R} = a_n$  法向加速度大小

C.  $a_t + a_n$  为代数和，错误。

D.  $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$ ，正确



2.  $\vec{r} \rightarrow \vec{v} \rightarrow \vec{a}$  型

题 1. 质点的运动方程为  $\vec{r} = (2 + 2t^2)\vec{i} + \left(\frac{1}{3}t^3 + 2t\right)\vec{j}$ ，求  $t = 2$  时的速度和加速度。

$$\text{解: } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 4t\vec{i} + (t^2 + 2)\vec{j} = 8\vec{i} + 6\vec{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 4\vec{i} + 2t\vec{j} = 4\vec{i} + 4\vec{j}$$

解题步骤：

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

题 2. 已知某质点的运动方程为  $x = 2t$ ， $y = 2 - t^2$ ，式中  $x$  以  $m$  计， $t$  以  $s$  计，求：

- 1) 位置矢量表达式，速度和加速度表达式；
- 2) 前  $2s$  内质点的平均速度和平均加速度；
- 3) 第  $2s$  内质点的平均速度；
- 4) 计算  $1s$  末和  $2s$  末质点的加速度。

$$\text{解: (1) } \vec{r} = 2t\vec{i} + (2 - t^2)\vec{j} \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{i} - 2t\vec{j} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -2\vec{j}$$

$$(2) \quad t = 0 \text{ 时 } \vec{r}_0 = 2\vec{j}, \quad \vec{v}_0 = 2\vec{i}$$

$$t = 2 \text{ 时 } \vec{r}_2 = 4\vec{i} - 2\vec{j}, \quad \vec{v}_2 = 2\vec{i} - 4\vec{j}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_0 = (4\vec{i} - 2\vec{j}) - 2\vec{j} = 4\vec{i} - 4\vec{j}$$

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{4\vec{i} - 4\vec{j}}{2 - 0} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_0 = (2\vec{i} - 4\vec{j}) - 2\vec{i} = -4\vec{j}$$

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{-4\vec{j}}{2 - 0} = -2\vec{j}$$

$$(3) \quad t = 1 \text{ 时 } \vec{r}_1 = 2\vec{i} + \vec{j} \quad t = 2 \text{ 时 } \vec{r}_2 = 4\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (4\vec{i} - 2\vec{j}) - (2\vec{i} + \vec{j}) = 2\vec{i} - 3\vec{j}$$

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{2\vec{i} - 3\vec{j}}{2 - 1} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$$

$$(4) \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -2\vec{j} \quad \text{故 } 1s \text{ 末和 } 2s \text{ 末质点的加速度 } \vec{a} = -2\vec{j}$$



### 3. $\vec{a} \rightarrow \vec{v} \rightarrow \vec{r}$ 型

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a dt \Rightarrow \int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t a dt$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v dt \Rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t v dt$$

题 1. 设质点沿  $x$  轴作匀变速直线运动，加速度为  $a$  不随时间变化，初速度为  $v_0$ ，初位置为  $x_0$ ，试根据速度、加速度的定义求出该质点的速度公式和运动学方程。

$$\text{解：} a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a dt \Rightarrow \int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt$$

$$\text{解得：} v - v_0 = at \Rightarrow v = v_0 + at$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v dt = (v_0 + at) dt \Rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_0^t (v_0 + at) dt$$

$$\text{解得：} x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \Rightarrow x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

匀变速直线运动：

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a(x_2 - x_1)$$

题 2. 一质点做直线运动，加速度  $a = 2m/s^2$ ，开始时  $v_1 = 2m/s$ ，一段时间后  $v_2 = 6m/s$ ，问质点在这段时间内的位移大小。

$$\text{解：} \text{由 } v_2^2 - v_1^2 = 2a(x_2 - x_1) \quad 6^2 - 2^2 = 2 \times 2 \times (x_2 - x_1) \quad x_2 - x_1 = 8m$$

题 3. 质点沿直线运动，加速度  $a = 4 - t^2$ ，式中  $a$  的单位为  $m/s^2$ ， $t$  的单位为  $s$ ，如果当  $t = 3s$  时， $x = 9m, v = 2m/s$ ，求质点的运动方程。

$$\text{解：} a = 4 - t^2 = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = (4 - t^2) dt \Rightarrow \int_{v_0}^v dv = \int_0^t (4 - t^2) dt$$

$$\text{解得：} \Rightarrow v = v_0 + 4t - \frac{1}{3} t^3 \quad \text{①}$$

$$v = v_0 + 4t - \frac{1}{3} t^3 = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = \left( v_0 + 4t - \frac{1}{3} t^3 \right) dt \Rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_0^t \left( v_0 + 4t - \frac{1}{3} t^3 \right) dt$$

$$\text{解得：} x = x_0 + v_0 t + 2t^2 - \frac{1}{12} t^4 \quad \text{②}$$

$$t = 3s \quad x = 9m \quad v = 2m/s \text{ 代入 ① ② 得：} v_0 = -1m/s \quad x_0 = 0.75m$$

$$\text{所以质点的运动方程为：} x = 0.75 - t + 2t^2 - \frac{1}{12} t^4 \quad (m)$$

题 4. 一质点沿一直线运动，其加速度为  $a = -2x$ ，式中  $x$  的单位为  $m$ ， $a$  的单位为  $m/s^2$ 。试求该质点的速度  $v$  与位置坐标  $x$  之间的关系。设当  $x_0 = 1$  时， $v_0 = 4m/s$ 。

$$\text{解：} a = -2x = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v$$

$$\frac{dv}{dx} \cdot v = -2x$$



$$\text{分离变量得: } vdv = -2xdx \quad \Rightarrow \int_{v_0}^v vdv = \int_{x_0}^x -2xdx$$

$$\text{解得: } \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = -x^2 + x_0^2$$

$$\text{代入 } x_0 = 1 \quad v_0 = 4 \quad \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 - 8 = -x^2 + 1 \quad \Rightarrow v^2 = -2x^2 + 18$$

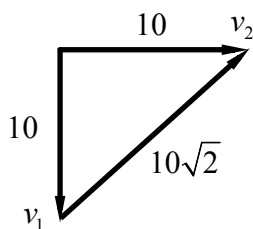
## 4. 相对运动

题 1. 甲船以  $v_1 = 10m/s$  的速度向南航行, 乙船以  $v_2 = 10m/s$  的速度向东航行, 则甲船上的人观察乙船的速度大小为 \_\_\_\_\_

解:  $v_1$ : 牵连速度;  $v_2$ : 绝对速度

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_{\text{相对}}$$

$$\vec{v}_{\text{相对}} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = 10\sqrt{2}m/s$$



$$\begin{aligned} \vec{v}_{\text{绝对}} &= \vec{v}_{\text{牵连}} + \vec{v}_{\text{相对}} \\ \vec{a}_{\text{绝对}} &= \vec{a}_{\text{牵连}} + \vec{a}_{\text{相对}} \end{aligned}$$

## 课时一 练习题答案

1. 一质点在平面内运动, 其运动方程为  $x = 2t, y = 4t^2 + 4t + 1$ , 则此运动的轨迹方程为 ( )

A.  $y = x^2 + x + 1$

B.  $y = (x+1)^2$

C.  $y = 2(x+1)$

D.  $y = (x+2)^2$

2. 质点作曲线运动,  $\vec{r}$  表示位置矢量,  $\vec{v}$  表示速度,  $\vec{a}$  表示加速度,  $s$  表示路程,  $a_t$  表示切向加速度, 下列表达式中正确的 ( )

①  $\frac{dv}{dt} = \vec{a}$

②  $\frac{dr}{dt} = v$

③  $\frac{ds}{dt} = v$

④  $\left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| = a_t$

A. ①④

B. ②④

C. ②

D. ③

3. 质点作曲线运动,  $\vec{r}$  表示位置矢量,  $s$  表示路程,  $v$  表示速率,  $a_t$  表示切向加速度, 下列表达式中 ( )

A.  $\frac{dv}{dt} = a, \frac{d|\vec{r}|}{dt} = v$

B.  $\frac{d|\vec{v}|}{dt} = a_t, \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = v$

C.  $\frac{ds}{dt} = v, \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| = a_t$

D.  $\frac{d\vec{r}}{dt} = v, \frac{d|\vec{v}|}{dt} = a$

4. 一质点在平面上运动, 已知质点位置矢量的表示式为  $\vec{r} = at^2\vec{i} + bt^2\vec{j}$  (其中  $a, b$  为常量), 则该质点做 ( )

A. 匀速直线运动

B. 变速直线运动

C. 抛物线运动

D. 一般曲线运动



5. 某质点作直线运动的运动方程为  $x = 3t - 5t^3 + 6(SI)$ ，则该质点作( )

- A. 匀加速直线运动，加速度沿  $x$  轴正方向
- B. 匀加速直线运动，加速度沿  $x$  轴负方向
- C. 变加速直线运动，加速度沿  $x$  轴正方向
- D. 变加速直线运动，加速度沿  $x$  轴负方向

6. 已知质点的运动方程为  $\vec{r} = 2t\vec{i} + (2 - t^2)\vec{j}$ ，质点  $t = 1s$  到  $t = 2s$  内质点的平均速度  $\bar{v} = \underline{\hspace{2cm}}$

$m/s$ ，平均加速度  $\bar{a} = \underline{\hspace{2cm}} m/s^2$

7. 已知质点沿  $x$  轴作直线运动，运动方程  $x = 2 + 6t^2 - 2t^3$ ， $x$  的单位为  $m$ ， $t$  的单位为  $s$ 。求：

- 1) 质点在运动开始后  $4.0s$  内的位移的大小；
- 2) 质点在该时间内所通过的路程；
- 3)  $t = 4s$  时质点的速度和加速度。

8. 一物体做直线运动，运动方程为  $x = 6t^2 - 2t^3$ ，式中各量的单位均为  $(SI)$  制，求：

- (1) 第二秒内的平均速度；
- (2) 第三秒末的速度；
- (3) 第一秒末的加速度。

9. 已知一质点做直线运动，其加速度  $a = 2 + t$ ，其中  $a$  的单位  $m/s$ ， $t$  的单位  $s$ ，如果当  $t=1$  时，求质点的运动方程（已知  $v_0 = 0, x_0 = 0$ ， $v_0$  为初始速度， $x_0$  为初始位移）

10. 一艘正在沿直线行驶的电艇，在发动机关闭后，其加速度方向与速度方向相反，大小与速度大小平方成正比，即  $dv/dt = -kv^2$ ，式中  $k$  为常量，求发动机关闭后又行驶的距离与速度大小的关系（ $v_0$  为发动机关闭时速度， $x$  为行驶的距离）

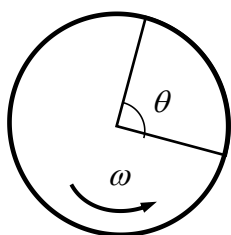
11. 雨滴以速率  $v$  落到静止的车窗玻璃时，方向竖直向下，问当车相对于地面以速率  $v_0$  向西行驶，车上的人观测的雨的速度。



## 课时二 质点运动学（二）

考点	重要程度	占 分	题型
1. 角位移/角速度/角加速度	基础知识	不单独出题	无
2. $\vec{\theta} \rightarrow \vec{\omega} \rightarrow \vec{\beta}$ 型	★★★	3~10	选填为主 偶尔大题
3. $\vec{\beta} \rightarrow \vec{\omega} \rightarrow \vec{\theta}$ 型	★★★★		
4. 角量与线量关系	必 考		

### 1. 角位移、角速度、角加速度



角位移：  $\theta$       单位：  $rad$  (弧度)    转过的角度  
 角速度：  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$       单位：  $rad/s$ ，单位时间内转过的角度  
 角加速度：  $\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$       单位：  $rad/s^2$  单位时间角速度的变化  
 周期：  $T = \frac{2\pi}{\omega}$       单位：  $s$     转一周所用的时间

### 2. $\vec{\theta} \rightarrow \vec{\omega} \rightarrow \vec{\beta}$ 型

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

题 1. 某质点的角位置和时间关系为  $\theta = 4t - 3t^2 + t^3 (SI)$ ，则在 2 秒末的角速度大小  $\omega = \underline{\hspace{2cm}}$ ，  
 角加速度大小  $\beta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。在 2 秒末到 4 秒末这段时间内，平均角速度大小  $\bar{\omega} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解：  $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 4 - 6t + 3t^2 \big|_{t=2} = 4 \text{ rad/s}$

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = -6 + 6t \big|_{t=2} = 6 \text{ rad/s}^2$$

$$t = 2s \text{ 时 } \theta_2 = 4, \quad t = 4s \text{ 时 } \theta_4 = 32 \quad \Delta\theta = \theta_4 - \theta_2 = 32 - 4 = 28$$

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{28}{4-2} = 14 \text{ rad/s}$$

### 3. $\vec{\beta} \rightarrow \vec{\omega} \rightarrow \vec{\theta}$ 型

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \beta dt \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_{t_0}^t \beta dt$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega dt \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^t \omega dt$$

题 1. 已知匀速圆周运动，角加速度为  $\beta$ ， $t=0$  时，角速度为  $\omega_0$ ，角位移为  $\theta_0$ ，试用定义公式，求角速度和角位移表达式。





解：  $\beta = \frac{d\omega}{dt} \quad d\omega = \beta dt \quad \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \beta dt$

解得：  $\omega - \omega_0 = \beta t \quad \Rightarrow \omega = \omega_0 + \beta t$

$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad d\theta = \omega dt = (\omega_0 + \beta t) dt \quad \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t (\omega_0 + \beta t) dt$

解得：  $\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2} \beta t^2 \quad \Rightarrow \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \beta t^2$

题 2. 搅拌机叶片以恒定角加速度  $1.50 \text{ rad/s}^2$  转动，求：

(1) 从静止启动后经过多少时间角速度将达到  $36.0 \text{ rad/s}$  ?

(2) 在此时间内共转过多少转？

解：(1) 由  $\omega = \omega_0 + \beta t$  得

$$36 = 0 + 1.5t \quad \Rightarrow t = 24s$$

(2) 由  $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \beta t^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2} \times 1.5 \times 24^2 = 432 \text{ rad}$

$$n = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{432}{2 \times 3.14} = 68.8 \quad (\text{转})$$

匀变速圆周运动：

$$\omega = \omega_0 + \beta t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \beta t^2$$

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = 2\beta(\theta_2 - \theta_1)$$

题 3. 绕定轴转动的飞轮，均匀减速， $t=0$  时  $\omega_0 = 5 \text{ rad/s}$ ， $t=20$  时  $\omega = 0.8\omega_0$  则飞轮的角加

速度  $\beta = \underline{\hspace{2cm}} \text{ rad/s}^2$ ，转过的角度  $\theta = \underline{\hspace{2cm}} \text{ rad}$ 。

解：依题意知  $t=0 \quad \omega_0 = 5$ ， $t=20 \quad \omega = 0.8\omega_0 = 4$

由  $\omega = \omega_0 + \beta t \quad \Rightarrow \quad 4 = 5 + \beta \times 20 \quad \text{解得：} \beta = -0.05 \text{ rad/s}^2$

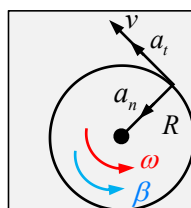
由  $\omega^2 - \omega_0^2 = 2 \cdot \beta \cdot \Delta\theta \quad \Rightarrow \quad \Delta\theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\beta} = \frac{4^2 - 5^2}{-2 \times 0.05} = 90 \text{ rad}$

#### 4. 角量与线量关系

题 1. 质点在作半径为  $R$  的圆周运动，质点的线速度  $v$  与角速度  $\omega$  的关系为       ，质点的切

向加速度  $a_t$  与角加速度  $\beta$  的关系为       ；质点的法向加速度  $a_n$  与角速度  $\omega$  的关系为       。

解：  $v = \omega R \quad a_t = \beta R \quad a_n = \omega^2 R$



$$v = \omega R$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \beta \cdot R$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$



题 2. 质点沿半径为  $R$  的圆周运动，运动学方程为  $\theta = 3 + 2t^2 (SI)$ ，则  $t$  时刻质点的法向加速度大小为  $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ ；切向加速度  $a_t = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解：  $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 4t$      $\beta = \frac{d\omega}{dt} = 4$      $\Rightarrow a_n = \omega^2 R = (4t)^2 R = 16Rt^2$      $a_t = \beta \cdot R = 4R$

题 3. 一质点在半径为  $0.1m$  的圆周上运动，其角位置变化关系为  $\theta = 2 + 4t^3 (rad)$ 。问：

- (1) 在  $t = 2s$  时，质点的法向加速度和切向加速度大小各为多少？
- (2) 当切向加速度大小恰等于总加速度大小的一半时， $\theta$  值为多少？
- (3) 在什么时刻，切向加速度和法向加速度恰好大小相等？

解：(1)  $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 12t^2$      $\beta = \frac{d\omega}{dt} = 24t$

法向加速度：  $a_n = \omega^2 R = (12t^2)^2 \times 0.1 = 14.4t^4 \Big|_{t=2} = 230.4 \text{ m/s}^2$

切向加速度：  $a_t = \beta R = 24t \times 0.1 = 2.4t \Big|_{t=2} = 4.8 \text{ m/s}^2$

(2)  $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(14.4t^4)^2 + (2.4t)^2}$

依题意：  $a_t = \frac{1}{2}a \Rightarrow 2.4t = \frac{1}{2}\sqrt{(14.4t^4)^2 + (2.4t)^2} \Rightarrow t^3 = \frac{\sqrt{3}}{6}$

$\Rightarrow \theta = 2 + 4t^3 = 2 + 4 \times \frac{\sqrt{3}}{6} = 3.15(rad)$

(3) 依题意  $a_t = a_n \Rightarrow 2.4t = 14.4t^4$     解得  $t = 0.55s$

## 课时二 练习题

1. 某转盘的角位置和时间关系为  $\theta = 2t - t^2 + 2t^3 (SI)$ ，则在 1 秒末的角速度大小  $\omega = \underline{\hspace{2cm}}$ ，角加速度大小  $\beta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 若飞轮的运动方程为  $\theta = 2 + 4\pi t + 2\pi^2 t^2 (SI)$ ，则其角加速度  $\beta$  为 ( )

A.  $\beta = 4\pi^2 t + 4\pi$

B.  $\beta = 4\pi^2$

C.  $\beta = 4\pi^2 t$

D.  $\beta = 4\pi t$



3. 物体做匀速圆周运动的半径为  $r$ ，线速度大小为  $v$ ，角速度为  $\omega$ ，周期为  $T$ ，向心加速度为  $a$ ，关于这些物理量之间的关系，下列表示正确的是（ ）

A.  $v = \frac{\omega}{r}$

B.  $a = \frac{\omega^2}{r}$

C.  $\omega = \frac{2\pi r}{T}$

D.  $a = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$

4. 一个转轮以恒定角加速度  $2\text{rad/s}^2$  转动，从静止启动经过  $30\text{s}$  角速度为\_\_\_\_\_，在此时间内共转过\_\_\_\_\_转。

5. 一质点沿半径  $R = 0.01\text{m}$  的圆周运动，其运动方程  $\theta = 2 + 4t^3$ ， $\theta, t$  分别以弧度和秒计，则当  $t = 2$  秒时，其切向加速度量值  $a_t = 0.48\text{m/s}^2$ ，法向加速度量值  $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ ，当  $a_t = \frac{a}{2}$ （ $a$  为总加速度量值）时， $\theta = \underline{\hspace{2cm}}$

6. 质点沿半径为  $r$  的圆周运动，运动学方程为  $\theta = 2 + 3t^2 (\text{SI})$ ，则  $t = 2\text{s}$  时质点的法向加速度  $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ ，切向加速度  $a_t = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

7. 质点沿半径为  $0.1\text{m}$  的圆周运动，其角位移  $\theta$  与时间  $t$  的关系为： $\theta = 5 + 2t^3$ ，当  $t = 1\text{s}$  时，它的加速度大小为（ ）

A.  $3.6\text{m/s}^2$

B.  $3.8\text{m/s}^2$

C.  $1.2\text{m/s}^2$

D.  $2.4\text{m/s}^2$

8. 一飞轮转速  $n = 1500$  转每分钟 ( $r/\text{min}$ ) 转动，受制动后均匀减速，经  $50\text{s}$  后静止，求：

(1) 对角加速度  $\beta$  和从制动到静止飞轮的转数  $N$ ；

(2) 制动开发后  $t = 25\text{s}$  时飞轮角速度  $\omega$ ；

(3) 设飞轮半径  $R = 1\text{m}$ ，求  $t = 25\text{s}$  时飞轮边缘任一点的速度和加速度。



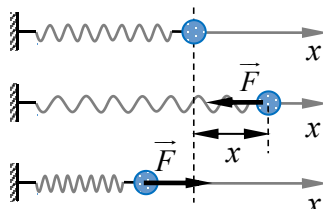
## 课时三 常见力和牛顿三定律

考点	重要程度	占分	常见题型
1. 常见力	基础知识	5~10	选择、填空、大题
2. 牛顿三定律			

### 1. 常见力

1) 重力:  $G = mg$   $g = 9.8 \text{ N/kg}$

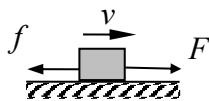
2) 弹力:  $F = kx$  ( $k$  为弹性系数)



3) 摩擦力:

① 滑动摩擦  $f = \mu_k N$

$\mu_k$ : 滑动摩擦系数  $N$  为支持力

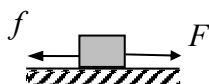


滑动摩擦

$$f = \mu_k mg$$

② 静摩擦力  $0 \leq f \leq \mu_s N$

$\mu_s$  为最大静摩擦系数



静摩擦

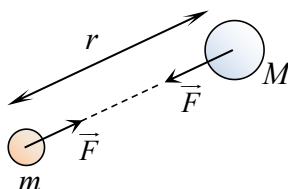
$f = F$   $F$  越大,  $f$  越大

$$f_{\max} = \mu_s N = \mu_s mg$$

4) 万有引力

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$$



### 2. 牛顿三定律

1) 不受力或合外力为 0, 质点保持静止或匀速直线运动

2)  $F_{\text{合}} = ma$  (力是物体产生加速度的原因)

3)  $F_{\text{作用}} = F_{\text{反作用}}$  (作用力等于反作用力)

题 1. 关于摩擦力的说法, 下列哪一种说法正确 ( )

A. 摩擦力总是阻碍物体运动

B. 摩擦力的方向总是与物体运动方向相反

C. 摩擦力总是对物体做负功

D. 以上说法都不对

解: 答案: D (详解见视频课程)



题 2. 用水平力  $F_N$  把一个物体压着靠在粗糙的竖直墙面上保持静止，当  $F_N$  逐渐增大时，物体所受到的静摩擦力  $F_f$  的大小（ ）

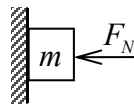
A. 不为零，但保持不变

B. 随  $F_N$  成正比增大

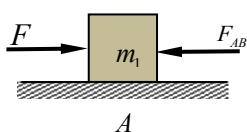
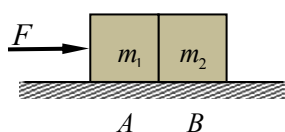
C. 开始随  $F_N$  增大，达到某一最大值后就保持不变

D. 无法确定

答案：A（详解见视频课程）



题 3. 两物体 A 和 B，质量分别是  $m_1$  和  $m_2$ ，互相接触放在光滑水平面上，如图所示。对物体 A 施以水平推力  $F$ ，则物体 A 对物体 B 的作用力等于\_\_\_\_\_。



(1) 选物体

(2) 分析受力

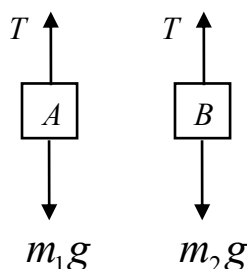
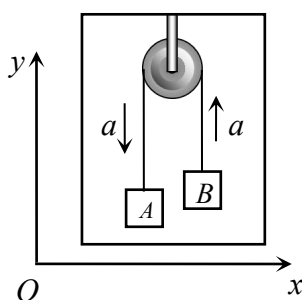
(3) 列方程

(4) 求解

解：①  $F = (m_1 + m_2)a$

$$\text{② } F - F_{AB} = m_1 a \quad \text{联立两式，解得 } F_{AB} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} F$$

题 4. 设电梯中有一质量可以忽略的滑轮，在滑轮两侧用轻绳悬挂着质量分别为  $m_1$  和  $m_2$  的重物 A 和 B，已知  $m_1 > m_2$ ，当电梯匀速上升，求绳中的张力和物体 A 相对于电梯的加速度  $a$ 。



解：对 A 受力分析  $m_1 g - T = m_1 a$

对 B 受力分析  $T - m_2 g = m_2 a$

$$\text{解得 } a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \quad T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$



题 5. 一艘行驶的质量为  $m$  的快艇，在发动机关闭后，受到一阻力作用，且  $f = -kv^2$ ，式中  $k$  为正常数，求快艇在关闭发动机后速度与行驶距离的关系。（已知发动机关闭时快艇速度为  $v_0$ ）

解：根据牛顿第二定律：

$$f = -kv^2 = ma = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = mv \frac{dv}{dx} \Rightarrow -kv = m \frac{dv}{dx}$$

$$\text{分离变量：} \frac{1}{v} dv = -\frac{k}{m} dx$$

$$\text{两边同时积分：} \int_{v_0}^v \frac{1}{v} dv = \int_0^x -\frac{k}{m} dx$$

$$\ln v - \ln v_0 = -\frac{k}{m} x \Rightarrow \ln \frac{v}{v_0} = -\frac{k}{m} x$$

$$\Rightarrow \frac{v}{v_0} = e^{-\frac{k}{m}x} \Rightarrow v = v_0 e^{-\frac{k}{m}x}$$

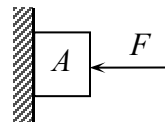
#### 题 6：简述牛顿定律的适用范围

- (1) 只适用于低速运动的物体（与光速比速度较低）。
- (2) 只适用于宏观物体，不适用于微观原子。
- (3) 参照系应为惯性系。

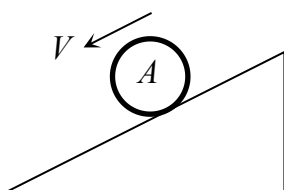


## 课时三 练习题

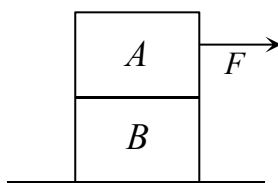
1. 沿水平方向的外力  $F$  将质量为  $m$  的物体  $A$  压在竖直墙上，由于物体与墙之间有摩擦力，物体保持静止，设摩擦力为  $f_0$ ，若外力增至  $2F$ ，则此时物体所受静摩擦力大小为\_\_\_\_\_



2. 将下列各种情形下的物体  $A$  进行受力分析（在下列情况下接触面均不光滑）



(1) 沿斜面下滚的小球



(2)  $A, B$  同时同速度向右行驶

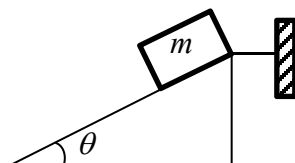
3. 如图所示，质量为  $m$  的物体用细绳水平拉住，静止在倾角为  $\theta$  的固定的光滑斜面上，则斜面给物体的支持力为（ ）

A.  $mg \cos \theta$

B.  $mg \sin \theta$

C.  $\frac{mg}{\cos \theta}$

D.  $\frac{mg}{\sin \theta}$



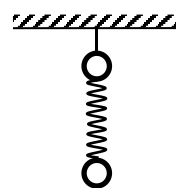
4. 两个质量相等的小球由一轻弹簧相连接，再用一细绳悬挂于天花板上，处于静止状态，如图所示。将绳子剪断的瞬间，球 1 和球 2 的加速度分别为（ ）

A.  $a_1 = g, a_2 = g$

B.  $a_1 = 0, a_2 = g$

C.  $a_1 = g, a_2 = 0$

D.  $a_1 = 2g, a_2 = 0$



5. 已知一质量为  $m$  的质点在  $x$  轴上运动，质点只受到指向原点的引力的作用，引力大小与质点离原点的距离  $x$  的平方成反比，即  $f = -k/x^2$ ， $k$  是比例常数。设质点在  $x = A$  时的速度为零，求质点在  $x = A/4$  处的速度大小。



## 课时四 动量/冲量/动量守恒

考点	重要程度	占分	题型
1. 动量定理	必考	5~10	选/填 大题
2. 动量守恒			

### 1. 动量定理

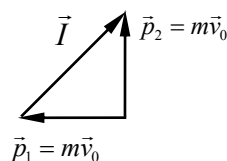
动量:  $\vec{p} = m\vec{v}$  单位:  $kg \cdot m/s$  (矢量, 有大小, 有方向)

动量定理:  $\vec{I} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$  单位  $N \cdot s$

- ① 冲量为矢量, 等于动量的矢量差, 也等于冲力对时间的积分
- ②  $\vec{F}$  为冲力, 为合外力
- ③  $F$  若为常力,  $\vec{I} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{F} \cdot \Delta t$

题 1. 一物体质量为  $m$ ,  $t_1$  时刻速度大小为  $v_0$ , 方向沿  $x$  负方向,  $t_2$  时刻速度大小仍为  $v_0$ , 方向沿  $y$  轴正方向,  $t_1$  到  $t_2$  冲量大小为\_\_\_\_\_.

解:  $I = \sqrt{(mv_0)^2 + (mv_0)^2} = \sqrt{2}mv_0$

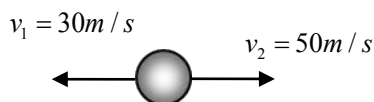


题 2. 一垒球的质量  $m = 0.20kg$ , 如果其投出时的速度为  $30m/s$ , 被棒击回的速度为  $50m/s$ , 方向相反, 球的冲量大小为\_\_\_\_\_, 球与棒的接触时间为  $\Delta t = 0.0020s$ , 则棒击打垒球的平均冲力  $F =$ \_\_\_\_\_.

解:  $I = mv_2 - mv_1 = 0.2 \times 50 - 0.2 \times (-30) = 16 N \cdot s$

由  $I = F \cdot \Delta t \Rightarrow 16 = F \cdot 0.002$

解得:  $F = 8000N$



题 3. 质量为  $3kg$  的静止物体在水平力  $F = 3t^2 (N)$  作用下, 在光滑水平面上作直线运动, 物体在  $0 \sim 3$  秒内获得的冲量\_\_\_\_\_  $N \cdot s$ , 第 3 秒末物体的速度值\_\_\_\_\_  $m/s$ .

解:  $I = \int_0^3 3t^2 dt = t^3 \Big|_0^3 = 27 N \cdot s$        $I = mv_2 - mv_1 = mv_2 - 0 \Rightarrow v_2 = \frac{I}{m} = \frac{27}{3} = 9 m/s$





题 4. 一静止的质点，在合力为  $\vec{F} = 10t\vec{i} + 2(2-t)\vec{j}$  作用下，在 2s 末的动量为\_\_\_\_\_.

解：  $F_x = 10t$     $F_y = 2(2-t)$

在 x 方向冲量：  $mv_{x2} - 0 = \int_0^2 F_x dt = \int_0^2 10t dt = 5t^2 \Big|_0^2 = 20 \text{ N} \cdot s$   $\Rightarrow \vec{p}_2 = 20\vec{i} + 4\vec{j}$

在 y 方向冲量：  $mv_{y2} - 0 = \int_0^2 F_y dt = \int_0^2 2(2-t) dt = (4t - t^2) \Big|_0^2 = 4 \text{ N} \cdot s$

## 2. 动量守恒

若  $F_{\text{合}} = 0$ ，则系统总动量守恒：  $m_1\vec{v}_1 = m_2\vec{v}_2$

(1)  $F_{\text{合}} = 0$ ，指不受外力或所受合外力为零

(2) 内力不改变系统的总动量

(3) 内力远大于外力时，也可认为  $F_{\text{合}} = 0$

题 1. 粒子 B 的质量是粒子 A 的质量的 4 倍，开始时粒子 A 的速度为  $3\vec{i}$ ，粒子 B 的速度为  $2\vec{i}$ ，

由于两者的相互作用，粒子 A 的速度变为  $7\vec{i}$ ，此时粒子 B 的速度为（    ）

A.  $\vec{i}$

B.  $2\vec{i}$

C. 0

D.  $5\vec{i}$

答案：A. 水平方向不受外力，动量守恒

$$m \cdot 3 + 4m \cdot 2 = m \cdot 7 + 4m \cdot v \quad \Rightarrow v = 1$$

题 2. 一人站在长度为 4m 的船一端，船漂浮于静止水面上。船的质量为 600kg，人的质量为

80kg，若此人从船头走到船尾，则船相对于水面移动了多少米？（忽略水对船的阻力）

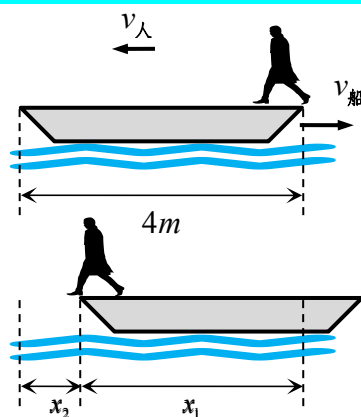
解：水平方向动量守恒：  $mv_{\text{人}} = Mv_{\text{船}} \Rightarrow m \frac{dx_1}{dt} = M \frac{dx_2}{dt}$

整理得：  $mdx_1 = Mdx_2$

两边同时积分：  $\int_0^{x_1} m dx_1 = \int_0^{x_2} M dx_2 \Rightarrow mx_1 = Mx_2$

即：  $80x_1 = 600x_2$     又：  $x_1 + x_2 = 4$

联立两式解得：  $\begin{cases} x_1 = 3.53m \\ x_2 = 0.47m \end{cases}$     故船移动了 0.47m



题 3. 下列几种说法正确的是 ( )

- (1) 作用力的冲量与反作用力的冲量总是等值相反的
- (2) 系统的内力不能改变系统的总动量
- (3) 冲量的方向与物体动量的方向相同
- (4) 以恒力作用于物体，时间越长，物体的动量越大

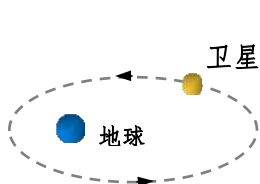
- A. 只有 (1) 是正确的
- B. (1) (2) 是正确的
- C. (1) (3) 是正确的
- D. (2) (4) 是正确的

答案：B. (详细解答见视频课程)

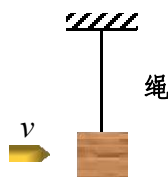
题 4. 判断下列运动是否动量守恒



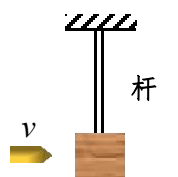
匀速圆周运动  
动量\_\_\_\_\_



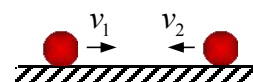
卫星绕地球  
卫星动量\_\_\_\_\_



子弹打击木块  
系统动量\_\_\_\_\_



子弹打击木块  
系统动量\_\_\_\_\_



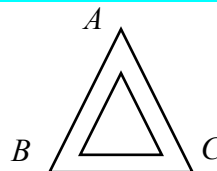
弹性碰撞，系统动量\_\_\_\_\_  
非弹性碰撞，系统动量\_\_\_\_\_  
完全非弹性碰撞，系统动量\_\_\_\_\_

(详细解答见视频课程)

## 课时四 练习题

1. 质量为  $m$  的质点，以不变速率  $V$  沿图中正三角形  $ABC$  的水平光滑轨道运动，质点越过  $A$  角时，轨道作用于质点的冲量大小为 ( )

- A.  $mV$
- B.  $\sqrt{2}mV$
- C.  $\sqrt{3}mV$
- D.  $2mV$



2. 设作用于物体上的力  $F = 6t + 3(SI)$ 。如果物体在这力的作用下，由静止开始沿直线运动，在 0 到 2.0s 的时间间隔内，这个力作用在物体上的冲量大小\_\_\_\_\_



3. 一质量为  $m$  的质点在  $xoy$  平面上运动，其速度矢量为  $\vec{V} = -a\omega \sin \omega t \vec{i} + b\omega \cos \omega t \vec{j}$ ，则  $t=0$  到  $t = \frac{\pi}{2\omega}$  时间内质点所受的合力的冲量是\_\_\_\_\_

4. 一质量为  $m$  的小球，从  $h_1$  高度处由静止下落到水平桌面上，反弹高度  $h_2$ 。设小球与桌面的接触时间为  $\tau$ ，则小球对桌面的平均冲力的大小为\_\_\_\_\_

5. 一人用恒力  $\vec{F}$  推地上的木箱，经历时间  $\Delta t$  未能推动木箱，此推力的冲量等于多少？木箱既然受了力  $\vec{F}$  的冲量，为什么它的动量没有改变？

6. 一质量为  $60\text{kg}$  的人起初站在一条质量为  $300\text{kg}$ ，且正以  $2\text{m/s}$  的速率向湖边驰近的小木船上，湖水是静止的，且阻力不计。现在人相对于船以一水平速率  $V$  沿船的前进方向向河岸跳去，该人起跳后，船速减为原来的一半， $V$  应为( )

A.  $2\text{m/s}$ B.  $3\text{m/s}$ C.  $5\text{m/s}$ D.  $6\text{m/s}$ 

7. 质量为  $M$  的木块静止在光滑的水平面桌面上，质量为  $m$ ，速度为  $v_0$  的子弹水平射入木块，并陷在木块内与木块一起运动，求：

- (1) 子弹相对木块静止后，木块的速度和动量；
- (2) 子弹相对木块静止后，子弹的动量；
- (3) 在这个过程中，子弹施于木块的冲量；

8. 一小船质量为  $100\text{kg}$ ，船头到船尾共长  $3.6\text{m}$ 。现有一质量为  $50\text{kg}$  的人从船尾走到船头时，船头移动多少距离？假定水的阻力不计。



## 课时五 质点运动的功和能

考点	重要程度	占 分	题型
1. 做功	★★★★	0~3	填空
2. 动能定理	★★★★★	5~10	大题
3. 保守力、势能			填空
4. 机械能守恒			大题

### 1. 做功 (恒力: $W = F \cdot s \cdot \cos\theta$ 变力: $W = \int dW = \int F ds$ )

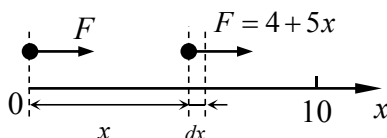
题 1. 某质点在力  $\vec{F} = (4+5x) \vec{i} (SI)$  的作用力下沿  $x$  轴做直线运动, 在从  $x=0$  移动到  $x=10m$  的过程中, 力  $\vec{F}$  所做的功为 \_\_\_\_\_ J

解: 如图建立坐标

$$x \text{ 处: } F = (4+5x)$$

$$dW = F \cdot dx = (4+5x)dx$$

$$W = \int dW = \int_0^{10} (4+5x)dx = 290 \text{ J}$$



变力做功解题:

① 定坐标, 取微元  $dx$

② 定  $F$ , 表元功  $dW$

③ 计算:  $W = \int dW$

题 2. 一质点在恒力为  $\vec{F} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + 1\vec{k} (SI)$  的作用下产生位移为  $\Delta\vec{r} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k} (SI)$  则此力在该位移过程中所做的功为 \_\_\_\_\_

$$\text{解: } W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = 4 \times 2 + (-5) \times (-4) + 1 \times (-3) = 25 \text{ J}$$

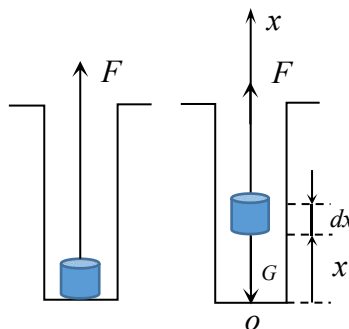
题 3. 一人从  $10m$  深的井中提水, 起始桶中装有  $10.0Kg$  的水, 由于水桶漏水, 每升高  $1.00m$  要漏去  $0.20Kg$  的水, 水桶被匀速地从井中提到井口, 求人所做的功。

解: 如图建立坐标

$$F = G = mg = (10 - 0.2x)g$$

$$dW = F \cdot dx = (10 - 0.2x)g dx$$

$$W = \int dW = \int_0^{10} (10 - 0.2x)g dx = 882 \text{ J}$$



## 2. 动能定理 (动能: $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ 单位: $J$ 标量, 有大小, 没有方向)

动能定理:  $W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$

(1) 质点: 合外力做功 = 动能变化

(2) 质点系: 合外力做功 + 非保守内力做功 = 动能变化 (例如爆炸)

题 1. 质量为  $1.0\text{Kg}$  的物体运动速率由  $2.0\text{m/s}$  增加到  $4.0\text{m/s}$  的过程中, 合外力对它所做的功为\_\_\_\_\_.

解:  $W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2} \times 1 \times 4^2 - \frac{1}{2} \times 1 \times 2^2 = 6\text{J}$

题 2. 用铁锤把钉子敲入墙面木板, 设木板对钉子的阻力与钉子进入木板的深度成正比, 即  $F = kx$ 。若第一次打击时, 能把钉子打入木板  $1\text{cm}$ , 第二次打击时, 保持第一次打击的速度, 第二次能把钉子打入的深度为\_\_\_\_\_。

解: 第一次打击:  $\frac{1}{2}mv^2 = \int_0^1 kx dx = \frac{1}{2}k$

第二次打击:  $\frac{1}{2}mv^2 = \int_1^x kx dx = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}k$

解得  $x = \sqrt{2}\text{cm}$  故第二次打击深度为  $(\sqrt{2}-1)(\text{cm})$

题 3. 质量均匀分布的刚性链条, 总长为  $L$ , 伸出光滑桌面的长度为  $a$ , 若由静止释放求: 链条全部脱离光滑桌面时速率。

解: 线密度:  $\lambda = \frac{m}{L}$

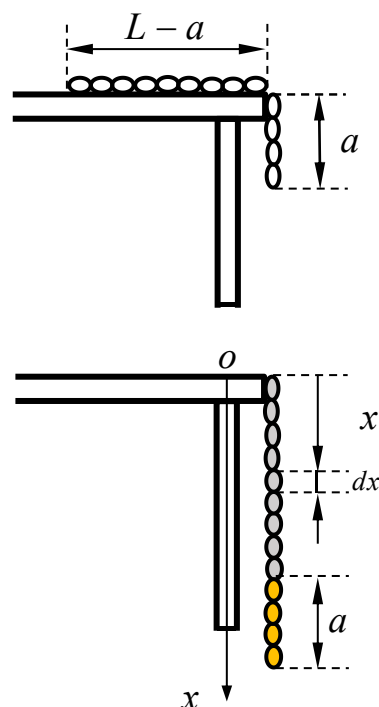
$a$  段:  $W_1 = \frac{m}{L}a \cdot g \cdot (L-a) = \frac{mga(L-a)}{L}$

$L-a$  段:  $dW_2 = dm \cdot g \cdot x = \frac{m}{L}dx \cdot g \cdot x = \frac{mgx}{L}dx$

$W_2 = \int dW = \int_0^{L-a} \frac{mgx}{L} dx = \frac{mg(L-a)^2}{2L}$

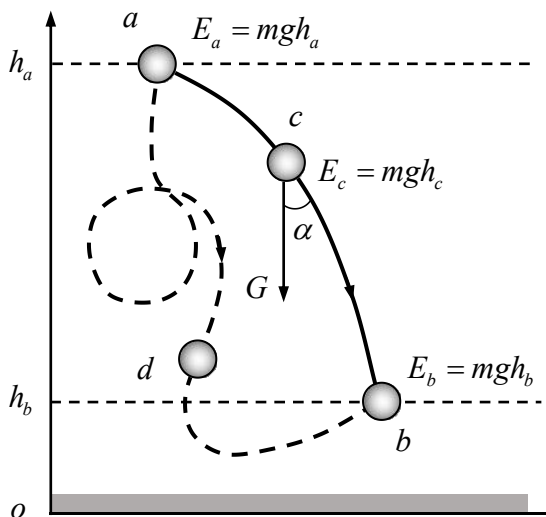
$W = W_1 + W_2 = \frac{mga(L-a)}{L} + \frac{mg(L-a)^2}{2L} = \frac{mg(L^2 - a^2)}{2L}$

动能定理:  $W = \frac{1}{2}mv^2 - 0$  解得  $v = \sqrt{\frac{g(L^2 - a^2)}{L}}$



### 3. 保守力、势能

	重力	弹力	万有引力	静电力
保守力	$G = mg$	$F = kx$	$F = G \frac{Mm}{r^2}$	$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2}$
势能	$E_p = mgh$	$E_p = \frac{1}{2}kx^2$	$E_p = -G \frac{Mm}{r}$	$U_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r}$
常用零势能点	地面	平衡位置	无穷远处	无穷远处



- 1) 保守力做功与路径无关，只与始末位置有关
- 2) 保守力沿一闭合路径运动一周，做功为零
- 3) 势能的引入是以保守力做功为前提
- 4) 不同的势能零点，对应的势能值不一样
- 5) 势能大小=保守力把物体移至势能零点所做的功
- 6) 保守力做正功，对应势能减小
- 7) 功能计算时，保守力做功和势能只能计算一个

### 4. 机械能守恒

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$$

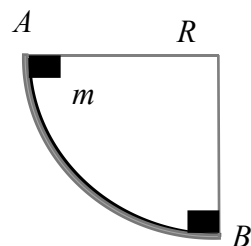
- 1) 机械能只包含动能和势能
- 2) 系统内只有保守力做功，其他内力和一切外力都不做功

题 1. 如图所示，质量  $m = 2\text{Kg}$  的物体从静止开始，沿  $1/4$  圆弧从  $A$  滑到  $B$ ，在  $B$  处的大小为  $v = 6\text{m/s}$ ，已知圆的半径  $R = 4\text{m}$ ，则物体从  $A$  到  $B$  的过程中摩擦力对它所做的功  $W = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解：A 点机械能： $E_A = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgR = mgR$

B 点机械能： $E_B = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_B^2$

$$W_f = E_A - E_B = mgR - \frac{1}{2}mv_B^2 = 2 \times 9.8 \times 4 - \frac{1}{2} \times 2 \times 6^2 = 42.4 \text{ J}$$



题 2. 质量为  $m$  的子弹，穿过如图所示的摆锤后，速率由  $v$  变为  $v/2$ 。已知摆锤的质量为  $M$ ，摆线的长度为  $L$ ，如果摆锤能在垂直平面内完成一个完全的圆周运动，弹丸的速度最小值应为多大？

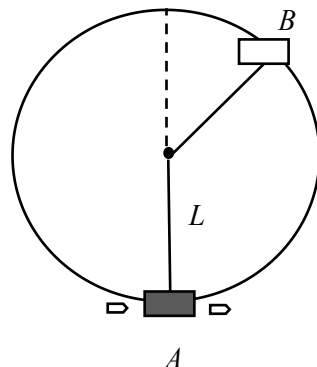
解：穿过的瞬间，动量守恒： $mv = m \cdot \frac{v}{2} + M \cdot V_A \Rightarrow V_A = \frac{mv}{2M}$

摆锤可以完成圆周运动，则在最高点满足

$$Mg = M \frac{V_B^2}{L} \Rightarrow V_B^2 = gL$$

摆锤开始上扬，满足机械能守恒： $\frac{1}{2}MV_A^2 + 0 = \frac{1}{2}MV_B^2 + Mg \cdot 2L$

$$\text{代入数据：} \frac{1}{2}M \cdot \left(\frac{mv}{2M}\right)^2 = \frac{1}{2}M \cdot gL + 2MgL \Rightarrow v = \frac{2M\sqrt{5gL}}{m}$$



题 3. 子弹水平地射入一端固定在弹簧上的木块内，由弹簧压缩的距离求出子弹的速度，已知子弹质量是  $0.02\text{kg}$ ，木块质量是  $8.98\text{kg}$ 。弹簧的劲度系数是  $100\text{N/m}$ ，子弹射入木块后，弹簧被压缩  $10\text{cm}$ 。设木块与平面间的动摩擦因数为  $0.2$ ，求子弹的速度。

解：射入瞬间，动量守恒

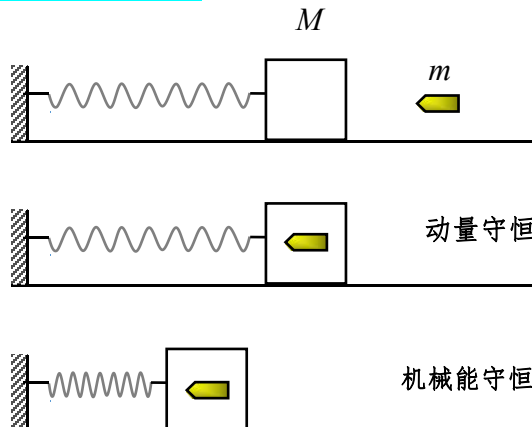
$$mv = (m + M)v' \Rightarrow v' = \frac{mv}{m + M} = \frac{0.02}{0.02 + 8.98}v = \frac{1}{450}v$$

弹簧开始压缩，满足机械能守恒

$$\frac{1}{2}(m + M)v'^2 - \mu(m + M)g \cdot x = \frac{1}{2}kx^2 + 0$$

$$\frac{1}{2} \times 9 \times \left(\frac{v}{450}\right)^2 - 0.2 \times 9 \times 9.8 \times 0.1 = \frac{1}{2} \times 100 \times 0.1^2$$

解得  $v = 319.2\text{m/s}$



题 4. 对于一个物体来说，在下列的哪种情况下系统的机械能守恒( )

(A). 合外力为 0

(B). 合外力不做功

(C). 外力和非保守力都不做功

(D). 外力和保守内力都不做功

解：机械能守恒条件：外力和非保守力都不做功，故选 C



## 题 5. 对功的概念有以下几种说法

- (1) 保守力作正功时，系统内相应的势能增加；  
 (2) 质点运动经一闭合路径，保守力对质点作的功为零；  
 (3) 作用力与反作用力大小相等，方向相反，所以两者所做功的代数和必为零。

以上说法正确的是( )

- A. (1)(2)      B. (2)(3)      C. 只有 (2)      D. 只有 (3)

答案：C (详细解答见视频课程)

## 课时五 练习题

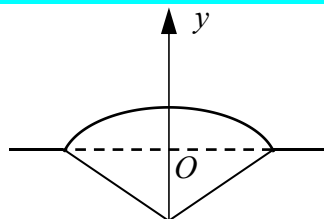
1. 用水平力  $F$  将置于水平面上的木箱向前拉动距离  $S$ ，力  $F$  对木箱所做的功为  $W_1$ ；第二次用相同的水平力  $F$  将置于粗糙水平面上的同一木箱向前拉动相同距离  $S$ ，力  $F$  对木箱所做的功为  $W_2$ ，则( )

- A.  $W_1 = W_2$       B.  $W_1 > W_2$       C.  $W_1 < W_2$       D. 无法判断

2. 某质点在力  $\vec{F} = (2+6x)\vec{i} \text{ (SI)}$  的作用下，沿  $x$  轴从原点移动到  $3\text{m}$  处的过程中，则力  $\vec{F}$  所做的功为：\_\_\_\_\_ J

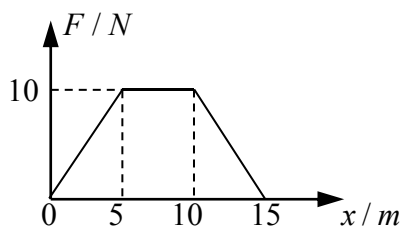
3. 一个在  $xOy$  平面内运动的质点，在力  $\vec{F} = (5\vec{i} + 2\vec{j})\text{N}$  的作用下移动一段位移  $\Delta\vec{r} = (2\vec{i} + 3\vec{j})\text{m}$ ，则此过程中该恒力所做的功为\_\_\_\_\_

4. 如图，射箭运动员用力  $f = 490\text{N}$  使弓弦中点产生  $0.6\text{m}$  的位移，然后把质量  $0.06\text{kg}$  的箭竖直上射。设拉力和弓弦中点的位移成正比（准弹性力  $f = -k\Delta x$ ），试求变力做功。

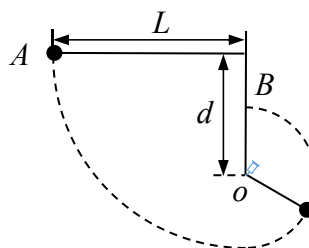




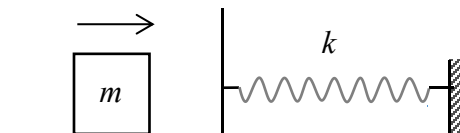
5. 质量为  $2\text{kg}$  的物体，在沿  $x$  方向的变力作用下，在  $x=0$  处由静止开始运动，设变力与  $x$  的关系如图所示，试由动能定理求物体在  $x=5, 10, 15\text{m}$  处的速率。



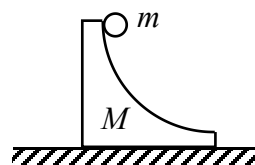
6. 如图所示，长度为  $L$  的轻绳一端固定，另一端有一个质量为  $m$  的小球，绳的悬挂点下方距悬挂点的距离为  $d$  处的  $O$  点有一钉子，小球从水平位置无初速释放，欲使球在以钉子  $O$  为中心的圆周上绕一圈，求最小的  $d$  为多少。



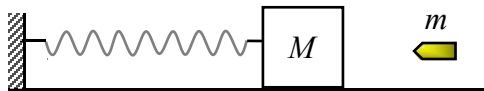
7. 如图所示，质量  $m$  为  $0.1\text{kg}$  的木块，在一个水平面上和一个劲度系数  $k$  为  $20\text{N/m}$  的轻弹簧碰撞，木块将弹簧由原长压缩了  $x=0.4\text{m}$ 。假设木块与水平面间的滑动摩擦系数  $\mu_k$  为  $0.25$ ，问在将要发生碰撞时木块的速率  $V$  为多少？



8. 质量为  $M$  的大木块具有半径为  $R$  的四分之一弧形槽，如图所示。质量为  $m$  的小球从曲面的顶端滑下，大木块放在光滑水平面上，二者都作无摩擦的运动，而且都从静止开始，求小球脱离大木块时的速度。



9. 一弹簧振子置于光滑的水平面上，弹簧的劲度系数  $k = 900 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ ，振子质量  $M = 0.99 \text{ kg}$ ，一质量  $m = 0.01 \text{ kg}$  的子弹水平射入振子内而不穿出，并一起向右压缩弹簧，已知弹簧的最大压缩量  $x_m = 0.10 \text{ m}$ ，求子弹射入  $M$  前的速度  $V_0$ 。



10. 对质点系下列说法正确的是( )

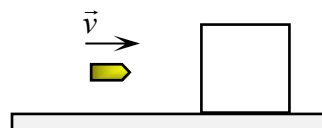
- A. 质点系总动量的改变和内力无关
- B. 质点系总动能的改变和内力无关
- C. 质点系机械能的改变与保守内力有关
- D. 质点系内可选一点代表其转动规律

11. 质点系的内力可以改变( )

- A. 系统的总质量
- B. 系统的总动量
- C. 系统的总动能
- D. 系统的总角动量

12. 如图所示，子弹射入放在水平光滑地面上静止的木块后而穿出，以地面为参考系，下列说法中正确的是( )

- A. 子弹减少的动能转变为木块的动能
- B. 子弹—木块系统的机械能守恒
- C. 子弹动能的减少等于子弹克服木块阻力所做的功
- D. 子弹克服木块阻力所做的功等于这一过程中产生的热量



13. 在光滑的水平面内有两个物体  $A$  和  $B$ ，已知  $m_A = 2m_B$ ，物体  $A$  以一定的动能  $E_k$  与静止的物体  $B$  发生完全弹性碰撞，则碰撞后两物体的总动能为\_\_\_\_\_

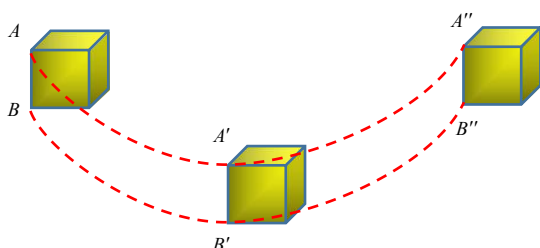
14. 物体的动量发生变化，它的动能是否一定发生变化？为什么？



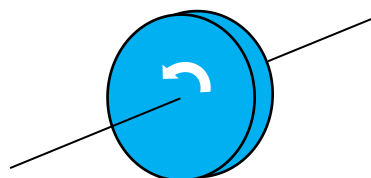
## 课时六 刚体转动惯量

考点	重要程度	占分	题型
1. 认识刚体	基础知识	不单独考	无
2. 转动惯量	★★★★★	0~3	填空、大题
3. 平行轴定理	★★	0~3	填空

### 1. 认识刚体



(a) 刚体的平动



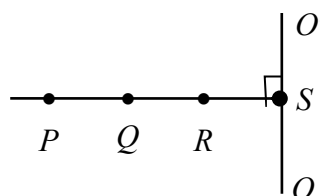
(b) 刚体的转动

- ① 刚体具有一定形状和大小，并且在外力作用下，形变并不显著。
- ② 刚体分为平动和转动，若可以忽略形状和大小，刚体平动即质点运动，1~5课时所讲
- ③ 6~9课时，只研究刚体转动

### 2. 转动惯量 (离散型: $J = \sum r_i^2 \cdot m_i$ 连续型: $dJ = r^2 dm$ $J = \int dJ$ 单位: $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ )

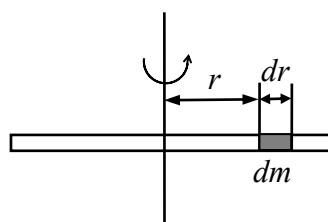
题 1. 如图所示,  $P$ 、 $Q$ 、 $R$  和  $S$  是附于刚性轻质细杆上的质量分别为  $4m, 3m, 2m$  和  $m$  的四个质点,  $PQ = QR = RS = d$ , 则系统对  $OO'$  轴的转动惯量为\_\_\_\_\_。

$$\begin{aligned}
 \text{解: } J &= \sum r_i^2 m_i \\
 &= 4m \cdot (3d)^2 + 3m \cdot (2d)^2 + 2m \cdot d^2 + m \cdot 0^2 \\
 &= 50md^2
 \end{aligned}$$



题 2. 一根均质细棒长度为  $l$ , 质量为  $m$ , 绕着与棒垂直且通过中心的转轴转动, 则其转动惯量为\_\_\_\_\_。

$$\begin{aligned}
 \text{解: } dm &= \lambda \cdot dr = \frac{m}{l} \cdot dr & dJ &= r^2 \cdot dm = r^2 \cdot \frac{m}{l} dr \\
 J &= \int r^2 dm = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} r^2 \cdot \frac{m}{l} dr = \frac{1}{12} ml^2
 \end{aligned}$$



题 4. 一均质圆盘，质量为  $m$ ，半径为  $R$ ，绕着通过圆盘中心且与盘面垂直的转轴转动，则其转动惯量\_\_\_\_\_。

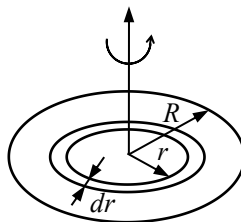
解：面密度  $\lambda = \frac{m}{\pi R^2}$

取宽度为  $dr$  的圆环

$$dm = \lambda \cdot dS = \frac{m}{\pi R^2} \cdot 2\pi r \cdot dr = \frac{2m}{R^2} \cdot r dr$$

$$dJ = r^2 \cdot dm = \frac{2m}{R^2} \cdot r^3 dr$$

$$J = \int r^2 dm = \int_0^R \frac{2m}{R^2} \cdot r^3 dr = \frac{1}{2} m R^2$$



题 3. 某一刚体作定轴转动时，其转动惯量与下列因素无关的是（ ）

- A. 刚体的总质量大小
- B. 刚体的转轴的位置
- C. 刚体所受合外力矩的大小
- D. 刚体质量的分布情况

解：由定义  $J = \sum m_i r_i^2$  知：

决定转动惯量大小的因素：

- 1) 刚体的总质量
- 2) 质量的分布
- 3) 给定转轴的位置

故本题答案：C

3. 平行轴定理  $J = J_C + mh^2$

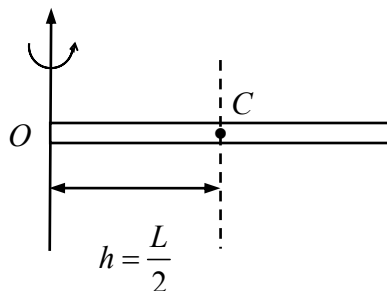
题 1. 一质量为  $m$  的均质杆长为  $L$ ，绕通过其一端且垂直于杆的轴转动，其转动惯量为\_\_\_\_\_。

解：已知绕  $C$  点轴：  $J_C = \frac{1}{12} mL^2$

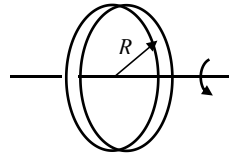
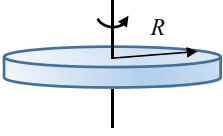
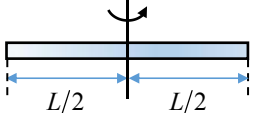
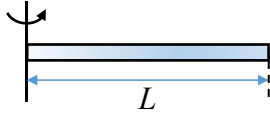
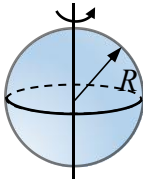
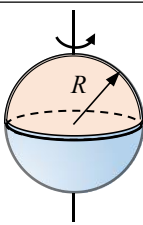
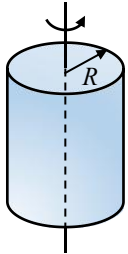
将转轴从  $C$  点移动到  $O$  点

根据平行轴定理：

$$J = J_C + mh^2 = \frac{1}{12} mL^2 + m \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} mL^2$$



常用刚体的转动惯量

刚体	转轴	转动惯量	图
均质圆环 (质量为 $M$ , 半径为 $R$ )	通过圆环中心与环面垂直	$MR^2$	
均质圆盘 (质量为 $M$ , 半径为 $R$ )	通过圆盘中心与盘面垂直	$\frac{1}{2}MR^2$	
均质细杆 (质量为 $M$ , 长为 $L$ )	通过中心与杆垂直	$\frac{1}{12}ML^2$	
均质细杆 (质量为 $M$ , 长为 $L$ )	沿细棒一端与棒垂直	$\frac{1}{3}ML^2$	
均质球体 (质量为 $M$ , 半径为 $R$ )	沿直径	$\frac{2}{5}MR^2$	
均质球壳 (质量为 $M$ , 半径为 $R$ )	沿直径	$\frac{2}{3}MR^2$	
均质柱体 (质量为 $M$ , 半径为 $R$ )	沿几何轴	$\frac{1}{2}MR^2$	

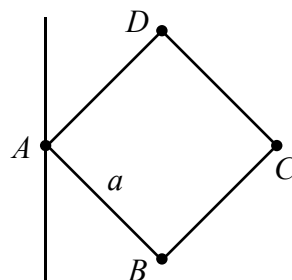


## 课时六 练习题

1. 刚体作定轴转动时，刚体上各点具有相同的\_\_\_\_\_（填“速度”，“加速度”，“角速度”，“角加速度”）

2. 如图所示，在边长为  $a$  的正方形的顶点上，分别有质量为  $m$  的 4 个质点，质点之间用轻质杆连接，求此系统绕下列转轴的转动惯量：

- (1) 通过其中一个质点  $A$ ，并平行于对角线  $BD$  的转轴；
- (2) 通过质点  $A$  并垂直于质点所在平面的转轴。



3. 半径为  $R$ ，质量为  $M$  的圆轮（当作均匀圆盘）可绕通过其中心的水平光滑固定轴自由旋转。一质量为  $m$  的杂技演员（当作质点）抓住圆轮水平半径的末端，与圆轮一起从静止开始自由旋转。杂技演员和圆轮整体对固定轴的转动惯量  $J =$  \_\_\_\_\_

4. 有两个半径相同，质量相等的细圆环  $A$  和  $B$ ， $A$  环的质量分布均匀， $B$  环的质量分布不均匀。它们与通过环心并与环面垂直的轴的转动惯量分别为  $J_A$  和  $J_B$ ，则  $J_A$  和  $J_B$  的大小关系为

5. 关于刚体对轴的转动惯量，下列说法正确的是（ ）

- A. 只取决于刚体的质量，与质量的空间分布和轴的位置无关
- B. 取决于刚体的质量和质量的空间分布，与轴的位置无关
- C. 取决于刚体的质量，质量的空间分布和轴的位置
- D. 只取决于转轴的位置，与刚体的质量和空间分布无关

6. 某一刚体作定轴转动时，其转动惯量与下列因素无关的是（ ）

- A. 刚体的总质量大小
- B. 刚体的转轴的位置
- C. 刚体所含外力矩的大小
- D. 刚体质量的分布情况



## 课时七 力矩 转动定理

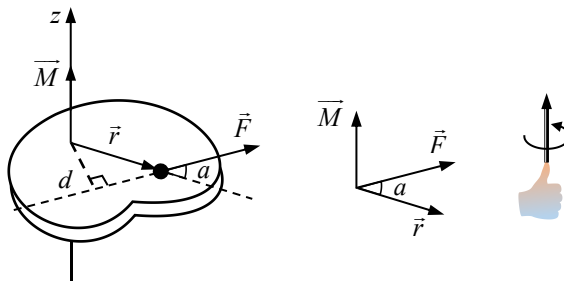
考点	重要程度	占分	题型
1. 力矩	★★	0~3	选择填空
2. 转动定理	必考	5~10	大题

### 1. 力矩

矢量： $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

大小： $M = F \cdot r \sin \alpha = F \cdot d$

单位： $N \cdot m$



### 2. 转动定理

转动定理： $M = J \cdot \beta$  （力矩等于转动惯量乘角加速度）

对比： $F = ma$  牛二定律：合外力 使物体运动

$M = J \cdot \beta$  转动定理：合外力矩 使刚体转动

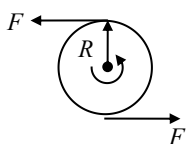
题 1. 几个力同时作用在一个具有光滑固定轴的刚体上，如果这几个力的矢量和为零，则此物体（ ）

(A) 必然不会转动

(B) 转速必然不变

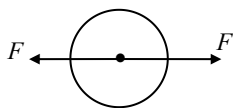
(C) 转速必然改变

(D) 转速可能不变，也可能改变



$F_{\text{合}} = 0$ ，但不在一条直线上。

合外力矩： $M = F \cdot R + F \cdot R = 2FR \Rightarrow \beta \neq 0$  转速改变



$F_{\text{合}} = 0$ ，合外力矩： $M = 0 \Rightarrow \beta = 0$  转速不变

题 2. 电动机带动一个转动惯量为  $50 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  的系统作定轴转动，在  $0.5 \text{ s}$  内由静止开始最后达到

$120 \text{ r/min}$  的转速，假定转速是均匀增加的，则该转动系统在上述过程中的角加速度为\_\_\_\_\_，

电动机对转动系统施加的力矩为\_\_\_\_\_。

解：角速度： $\omega = \frac{n \cdot 2\pi}{60} = \frac{120 \times 2\pi}{60} = 4\pi \text{ rad/s}$

由  $\omega = \beta \cdot t \Rightarrow \beta = \frac{\omega}{t} = \frac{4\pi}{0.5} = 8\pi \text{ rad/s}^2$

$M = J \cdot \beta = 50 \times 8\pi = 1256 \text{ N} \cdot \text{m}$

匀变速转动

$\omega = \omega_0 + \beta t$

$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \beta t^2$

$\omega_2^2 - \omega_1^2 = 2\beta(\theta_2 - \theta_1)$



题 3. 定滑轮质量  $M = 4.0\text{kg}$ ，可看成均质圆盘，一条不可伸长的轻绳绕过定滑轮，绳的两端分别悬挂两物块， $m_1 = 10\text{kg}$ ,  $m_2 = 8.0\text{kg}$ ，忽略滑轮与轴间的摩擦， $g$  取  $10\text{m/s}^2$ ，求：

- (1) 两物块的加速度。
- (2) 滑轮两边绳中张力。

解：  $m_1g - T_1 = m_1a$

$$T_2 - m_2g = m_2a$$

$$T_1R - T_2R = J \cdot \beta$$

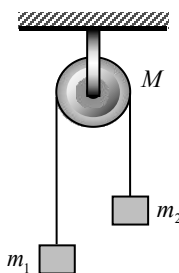
角量和线量关系：  $a = \beta \cdot R$

联立方程可得

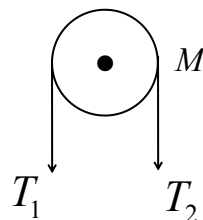
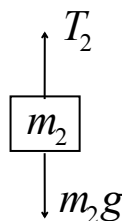
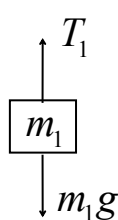
$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M} = \frac{(10 - 8) \times 10}{10 + 8 + \frac{1}{2} \times 4} = 1 \text{ m/s}^2$$

$$T_1 = m_1g - m_1a = 10 \times 10 - 10 \times 1 = 90 \text{ N}$$

$$T_2 = m_2g + m_2a = 8 \times 10 + 8 \times 1 = 88 \text{ N}$$



- (1) 选物体
- (2) 分析受力
- (3) 列方程
- (4) 求解



题 4. 如图，有一半半径为  $R$ ，质量为  $M$  的匀质圆盘，可绕通过盘心  $O$  垂直盘面的水平轴无摩擦转动，转动惯量为  $\frac{1}{2}MR^2$ ，圆盘上绕轻绳，绳的一端固定在圆盘上，另一端系质量为  $m$  的物体，物体从静止开始下落，试求物块下落速度随时间的变化关系。

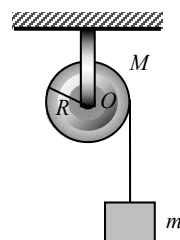
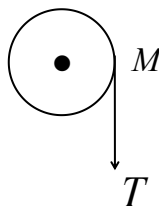
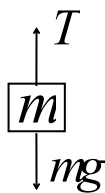
解：  $mg - T = ma$

$$T \cdot R = J \cdot \beta = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \beta$$

$$a = \beta \cdot R$$

联立解得  $a = \frac{2mg}{2m + M}$

$$v = v_0 + at = 0 + at = \frac{2mg}{2m + M} \cdot t$$



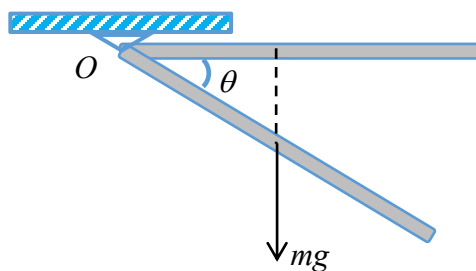


题 5. 一均匀细棒可绕通过其端点并与棒垂直的水平轴转动，已知棒长为  $L$ ，质量为  $m$ ，转动惯量为  $J = \frac{1}{3}mL^2$ ，令棒由水平位置自由摆下，求棒与水平方向的夹角为  $\theta$  时的角加速度。

解：绕  $O$  点力矩：  $M = mg \cdot \frac{1}{2}L \cdot \cos \theta$

由  $M = J \cdot \beta$  得

$$\beta = \frac{M}{J} = \frac{\frac{1}{2}mgL \cos \theta}{\frac{1}{3}mL^2} = \frac{3g \cos \theta}{2L}$$



## 课时七 练习题

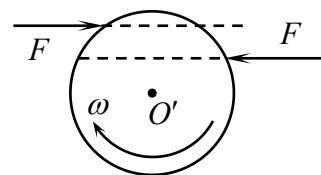
1. 一圆盘绕过盘心且与盘面垂直的轴  $O'$  以角速度  $\omega$  按图示方向转动，如图所示，若将两个大小相等，方向相反但不在同一条直线的力  $F$  沿盘面同时作用到圆盘上，则圆盘的角速度  $\omega$  ( )

A. 必然增大

B. 必然减少

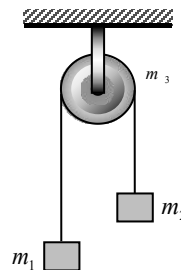
C. 不会改变

D. 如何变化，不能确定



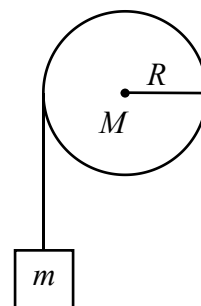
2. 一定轴转动的飞轮转动惯量  $J = 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，其转速在 5 秒内由  $900 \text{ rev/min}$  (转/分) 均匀减至  $600 \text{ rev/min}$ ，则飞轮所受的外力矩  $M = \underline{\hspace{2cm}} \text{ Nm}$ ，这 5 秒内飞轮的角位移  $\Delta \theta = \underline{\hspace{2cm}} \text{ rad}$

3. 一轻绳跨过定滑轮  $C$ ，滑轮视为均匀质圆盘，绳的两端分别悬挂有质量为  $m_1$  和  $m_2$  的物体  $A$  和物体  $B$ ，其中  $m_1 < m_2$ ，如图所示。设滑轮的质量为  $m_3$ ，半径为  $R$ ，其转动惯量为  $\frac{m_3 R^2}{2}$ ，滑轮与轴承间的摩擦力可略去不计。绳与滑轮之间无相对滑动，试求物体的加速度和绳中的张力。



4. 如图所示，一个质量为  $m$  的物体与绕在定滑轮上的绳子相连，绳子质量可以忽略，它与定滑轮之间无滑动，假设定滑轮质量为  $M$ ，半径为  $R$ ，其转动惯量为  $MR^2/2$ ，滑轮轴光滑，试求：求两滑块系统的加速度大小

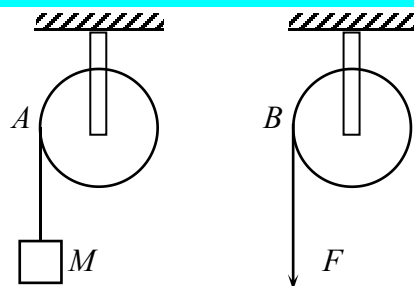
- (1) 该物体由静止开始下落的过程中，物体的加速度和滑轮的角加速度；  
(2) 绳子的张力。



5. 一匀质圆盘对某轴的转动惯量  $J = 50 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，若它受到对于该轴的合外力矩  $M = 100 \text{ N} \cdot \text{m}$ ，则圆盘的角加速度  $\beta = \underline{\hspace{2cm}} \text{ rad/s}^2$

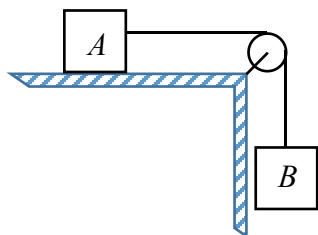
6. 如图所示， $A, B$  两个相同的绕着轻绳的定滑轮， $A$  滑轮挂一质量为  $M$  物体， $B$  滑轮受拉力  $F$ ，而且  $F = Mg$ 。设  $A, B$  两滑轮的角加速度分别为  $\beta_A$  和  $\beta_B$ ，不计滑轮轴的摩擦，则有 ( )

- A.  $\beta_A = \beta_B$       B.  $\beta_A > \beta_B$   
C.  $\beta_A < \beta_B$       D. 开始时  $\beta_A = \beta_B$ ，以后  $\beta_A < \beta_B$



7. 质量分别为  $m_A$  和  $m_B$  的  $A, B$  两滑块，通过一理想的细线相连接。细线穿过一不计摩擦的滑轮，其中滑块  $A$  放在光滑的水平桌面上，如图所示。

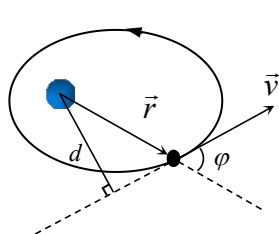
- (1) 不计滑轮的质量，计算两滑块的加速度和绳子张力的大小；  
(2) 假若滑轮为一质量为  $m$ ，半径为  $R$  的圆盘(圆盘的转动惯量为  $J = mR^2/2$ )



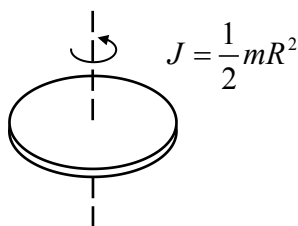
## 课时八 角动量、角动量守恒

考点	重要程度	占分	题型
1. 认识角动量	基础知识	不单独出题	无
2. 角动量守恒	必考	5~10	选择、填空、大题

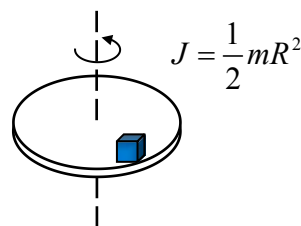
### 1. 认识角动量



质点角动量  
 $L = mv \cdot d$



刚体角动量  
 $L = J \cdot \omega$



混合角动量  
 $L = L_1 + L_2 = mv \cdot R + J \cdot \omega$

### 2. 角动量守恒 (若合外力矩: $M = F \cdot d = 0$ , 则角动量守恒: $J_1 \omega_1 = J_2 \omega_2$ )

题 1. 花样滑冰运动员绕自身的竖直轴转动, 开始时两臂伸开, 转动惯量为  $J_0$ , 角速度为  $\omega_0$ , 然后她将两臂收回, 使转动惯量减少为  $\frac{1}{3}J_0$ , 此时它转动的角速度变为 ( )

- A.  $3\omega_0$       B.  $4\omega_0$       C.  $\frac{\omega_0}{3}$       D.  $\frac{\omega_0}{4}$

答案: A. 力矩  $M = 0$ , 角动量守恒:  $J_1 \omega_1 = J_2 \omega_2$  即:  $J_0 \omega_0 = \frac{1}{3} J_0 \cdot \omega \Rightarrow \omega = 3\omega_0$

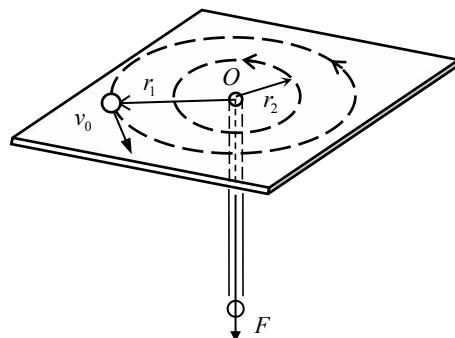
题 2. 质量为  $0.05\text{kg}$  的小块物体, 置于一光滑水平面上, 有一绳一端连接此物, 另一端穿过桌面中心的小孔 (如图所示)。该物体原以  $3\text{rad/s}$  的角速度在距孔  $0.2\text{m}$  的圆周上转动, 今将绳从小孔缓慢往下拉, 使该物体的转动半径减为  $0.1\text{m}$ , 则该物体的角速度  $\omega =$  \_\_\_\_\_

解: 物块受力沿绳子通过转轴中心, 故  $M = 0$ , 角动量守恒

$$r_1 = 0.2 \text{ 时}, L_1 = mv_1 \cdot r_1 = m\omega_1 r_1 \cdot r_1 = 0.05 \times 3 \times 0.2^2 = 6 \times 10^{-3}$$

$$r_2 = 0.1 \text{ 时}, L_2 = mv_2 \cdot r_2 = m\omega_2 r_2 \cdot r_2 = 0.05 \times 0.1^2 \omega_2 = 0.5 \times 10^{-3} \omega_2$$

角动量守恒:  $L_1 = L_2$  解得:  $\omega_2 = 12\text{rad/s}$



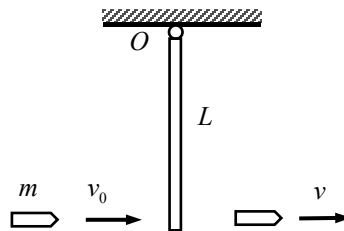
题 3. 如图，杆的长度为  $L$ ，它的上端悬挂在水平轴  $O$  上，杆对  $O$  的转动惯量为  $J$ ，起初杆处于静止状态，现有一质量为  $m$  的子弹以水平速度  $v_0$  击中杆的端点并以速度  $v$  穿出，则动量\_\_\_\_\_

(守恒, 不守恒), 角动量\_\_\_\_\_ (守恒, 不守恒), 此杆的角速度为\_\_\_\_\_

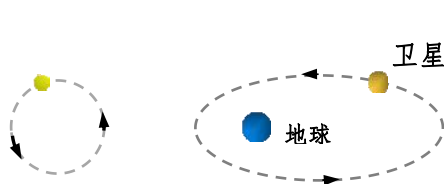
解：动量不守恒，角动量守恒

$$mv_0 \cdot L = mv \cdot L + J \cdot \omega$$

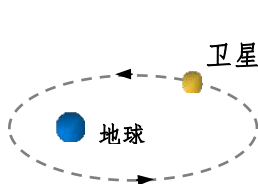
$$\text{解得 } \omega = \frac{mv_0 L - mvL}{J}$$



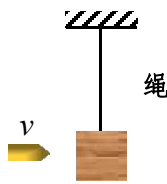
题 4. 判断下列运动角动量是否守恒



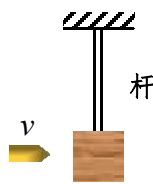
匀速圆周运动  
角动量\_\_\_\_\_



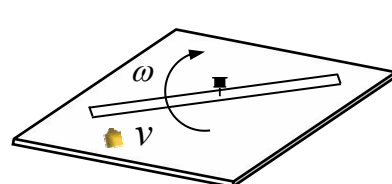
卫星绕地球  
卫星角动量\_\_\_\_\_



子弹打击木块  
系统角动量\_\_\_\_\_



子弹打击木块  
系统角动量\_\_\_\_\_



水平面内物块打击杆  
系统角动量\_\_\_\_\_

解：守恒；守恒；守恒；守恒；守恒（详细解答见视频课程）

## 课时八 练习题

1. 有一半半径为  $R$  的水平圆转台，可绕通过其中心的竖直固定光滑轴转动，转动惯量为  $J$ ，开始时转台以匀角速度  $\omega_0$  转动，此时有一质量为  $m$  的人站在转台中心，随后人沿半径向外跑去，当人到达转台边缘时，转台的角速度为( )

A.  $\frac{J}{J+mR^2} \omega_0$

B.  $\frac{J}{(J+m)R^2} \omega_0$

C.  $\frac{J}{mR^2} \omega_0$

D.  $\omega_0$

2. 一人站在无摩擦的转动平台上，双臂水平地举着二哑铃，当他把二哑铃水平地收缩到胸前的过程中，人与哑铃组成的系统应满足( )

A. 机械能守恒，角动量守恒

B. 机械能守恒，角动量不守恒

C. 机械能不守恒，角动量守恒

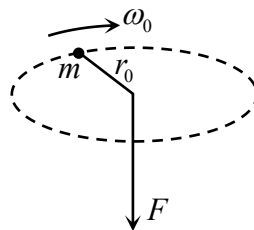
D. 机械能不守恒，角动量不守恒



3. 一质点的角动量守恒的条件是外力对  $O$  点的\_\_\_\_\_为零

4. 如图所示，一质量为  $m = 0.5\text{kg}$  的小球由一绳索系着，以角速度  $\omega_0 = 5\text{rad/s}$  在无摩擦的水平面上，作半径为  $r_0 = 0.4\text{m}$  的圆周运动。如果在绳的另一端作用一竖直向下的拉力，使小球作半径  $r = 0.2\text{m}$  的圆周运动。则小球新的角速度  $\omega =$ \_\_\_\_\_  $\text{rad/s}$ ；拉力所作的功为

$W =$ \_\_\_\_\_  $J$



5. 人造卫星绕地球作椭圆轨道运动，地球在椭圆的一个焦点上，则卫星的( )

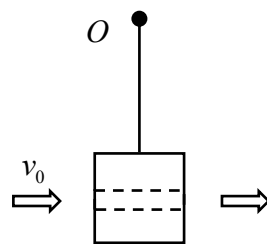
- A. 动量不守恒，动能守恒
- B. 动量守恒，动能不守恒
- C. 角动量守恒，动能不守恒
- D. 角动量不守恒，动能守恒

6. 地球卫星以地球中心为焦点做椭圆运动，则地球与卫星组成的系统( )

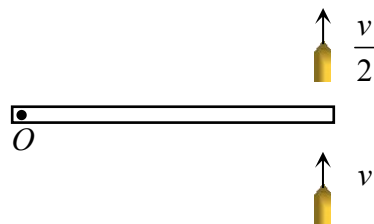
- A. 引力势能变化，卫星对地心的角动量不变
- B. 引力势能不变，卫星对地心的角动量不变
- C. 引力势能变化，卫星对地心的角动量变化
- D. 引力势能不变，卫星对地心的角动量变化

7. 一个子弹以  $v_0$  射入一冲击摆(如图)，假若子弹非常迅速地穿过该摆，该过程中子弹和冲击摆所构成的系统( )

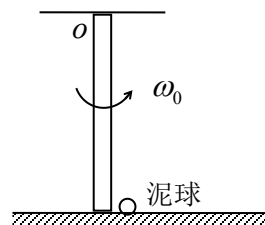
- A. 动量守恒；关于  $O$  点的角动量守恒
- B. 动量不守恒；关于  $O$  点的角动量守恒
- C. 动量守恒；关于  $O$  点的角动量不守恒
- D. 动量不守恒；关于  $O$  点的角动量不守恒



8. 如图所示，一静止的均匀细棒，长为  $L$ ，质量为  $M$ ，可绕通过棒的端点且垂直于棒长的光滑固定轴  $O$  在水平面内转动，转动惯量为  $ML^2/3$ 。一质量为  $m$ ，速率为  $v$  的子弹在水平面内沿与棒垂直的方向射入并穿过棒的自由端，设穿过棒后子弹的速率为  $v/2$ ，则此时棒的角速度应为



9. 一根长度为  $L = 0.60m$  的均匀棒，绕其端点  $O$  转动时的转动惯量为  $J = 0.12kg \cdot m^2$ 。当棒摆到竖直位置时，其角速度为  $\omega = 2.4rad \cdot s^{-1}$ 。此时棒的下端和一质量为  $m = 0.20kg$  的泥球相碰并粘在一起，问棒粘有泥球后的角速度是多少？



## 课时九 刚体转动的功和能

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 力矩做功	★	0~3	选择、填空
2. 刚体动能定理	必考	10~15	大 题
3. 刚体机械能守恒			

### 1. 力矩做功 $W = M\theta$

题 1. 一个滑轮半径为  $0.5m$ ，质量为  $5kg$ ，边缘绕有绳子，用恒力  $T = 20N$  拉绳子一端，一段时间后滑轮转过的角度为  $15.7rad$  求：拉力所做的功。

解：力矩： $M = TR = 20 \times 0.5 = 10$

力矩做功： $W = M\theta = 10 \times 15.7 = 157(J)$

### 2. 动能定理

题 1. 某冲床上飞轮的转动惯量为  $4.00 \times 10^3 kg \cdot m^2$ ，当它的转速到  $30 r/min$  时，它的转动动能是多少？冲击一次，其转速降到  $10 r/min$ 。求每冲击一次飞轮对外所作的功。

解：(1)  $n_1 = 30 r/min \Rightarrow \omega_1 = \frac{30 \times 2\pi}{60} = \pi rad/s$

$$E_{k1} = \frac{1}{2} J \omega_1^2 = \frac{1}{2} \times 4.00 \times 10^3 \times \pi^2 = 1.97 \times 10^4 J$$

(2)  $n_2 = 10 r/min \Rightarrow \omega_2 = \frac{10 \times 2\pi}{60} = \frac{\pi}{3} rad/s$

$$E_{k2} = \frac{1}{2} J \omega_2^2 = \frac{1}{2} \times 4.00 \times 10^3 \times \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 = 2.19 \times 10^3 J$$

由转动动能定理，得外力矩对飞轮做功为： $A = E_{k2} - E_{k1} = -1.75 \times 10^4 J$

飞轮对外所作的功为： $A' = -A = 1.75 \times 10^4 J$

刚体动能：

$$E_k = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$$

刚体动能定理：

$$A = \frac{1}{2} J \omega_2^2 - \frac{1}{2} J \omega_1^2$$

### 3. 刚体机械能守恒：

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$$

①刚体机械能只包含刚体动能和刚体势能

②系统内只有保守力做功，其他内力和一切外力都不做功



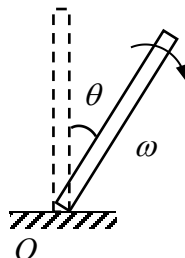
题 1. 长为  $L$ 、质量为  $m$  的匀质细棒，如图所示，可绕水平轴  $O$  在竖直面内旋转，若轴光滑，今使棒从竖直位置自由下摆（设转轴位于棒的一端时，棒的转动惯量为  $J = \frac{1}{3}mL^2$ ），求：棒转过  $\theta$  角时的角速度。

解：由机械能守恒得

$$0 + mg \frac{L}{2} = \frac{1}{2} J \omega^2 + mg \frac{L}{2} \cos \theta$$

$$\text{又 } J = \frac{1}{3} mL^2$$

$$\text{解得 } \omega = \sqrt{\frac{3g(1 - \cos \theta)}{L}}$$



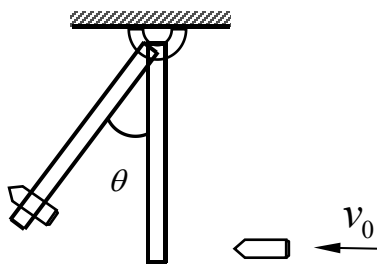
题 2. 一长为  $L$  的均质细杆如图悬挂， $O$  为水平光滑固定转轴，平衡时杆铅直下垂，一速度为  $v_0$  的子弹水平射入杆的最下端并与杆一起摆动，设杆和子弹的质量均为  $m$ ，求：

- (1) 杆开始摆动时角速度的大小；
- (2) 杆和子弹一起摆动时的最大摆角  $\theta$

解：(1) 系统角动量守恒

$$mv_0 L = mvL + J\omega = m\omega L \cdot L + \frac{1}{3}mL^2\omega$$

$$\text{解得： } \omega = \frac{3v_0}{4L}$$



(2) 机械能守恒  $E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$

$$\frac{1}{2} m (\omega L)^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 + mg \frac{L}{2} = mg(L - L \cos \theta) + mg(L - \frac{L}{2} \cos \theta)$$

$$\frac{1}{2} m \omega^2 L^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} mL^2 \omega^2 + \frac{1}{2} mgL = 2mgL - \frac{3}{2} mgL \cos \theta$$

$$\frac{2}{3} \omega^2 L - \frac{3}{2} g = -\frac{3}{2} g \cos \theta$$

$$\frac{2}{3} \left( \frac{3v_0}{4L} \right)^2 L - \frac{3}{2} g = -\frac{3}{2} g \cos \theta$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{v_0^2}{4gL} \Rightarrow \theta = \arccos \left( 1 - \frac{v_0^2}{4gL} \right)$$





刚体的平动和定轴转动中的一些重要公式

质点的直线运动（刚体的平动）	刚体的定轴转动
速度： $v = \frac{ds}{dt}$	角速度： $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
加速度： $a = \frac{dv}{dt}$	角加速度： $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
匀速直线运动： $s = vt$	匀角速转动： $\theta = \omega t$
匀变速直线运动 $v = v_0 + at$ $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ $v^2 - v_0^2 = 2as$	匀变速转动 $\omega = \omega_0 + at$ $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}at^2$ $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\theta$
力 $F$ ，质量 $m$ 牛顿第二定律： $F = ma$	力矩 $M$ ，转动惯量 $J$ 转动定律： $M = J\alpha$
动量 $mv$ ，冲量 $Ft$ （常力） 动量定理： $Ft = mv - mv_0$	角动量 $J\omega$ ，冲量 $Mt$ （常力矩） 角动量定理： $Mt = J\omega - J\omega_0$ （常力矩）
动量守恒定律： $\sum mv = \text{常量}$	角动量守恒定律： $\sum J\omega = \text{常量}$
平动动能 $\frac{1}{2}mv^2$ 常力的功 $A = Fs$ 动能定理（常力）： $Fs = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$	转动动能 $\frac{1}{2}J\omega^2$ 常力矩的功 $A = M\theta$ 动能定理： $M\theta = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2$ （常力矩）

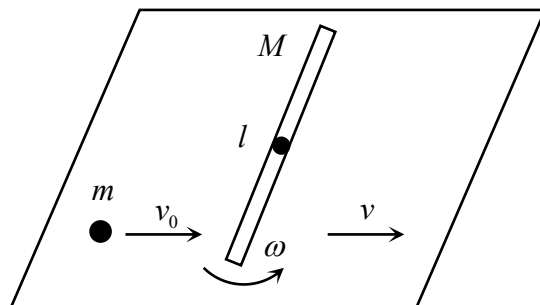


## 课时九 练习题

1. 在光滑水平桌面上放置一个静止的质量为  $m'$ ，长为  $2l$ ，可绕过与杆垂直的光滑轴中心转动的细杆，有一质量为  $m$  的小球以沿水平方向与杆垂直的速度  $\vec{v}_0$  与杆的一端发生完全弹性碰撞，求小球的反弹速度  $\vec{v}$  及杆的转动角速度  $\omega$ 。

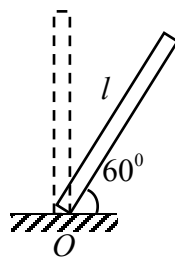
2. 长为  $l$ ，质量为  $M$  的均匀直棒静止在一光滑水平面上。它的中点有一竖直光滑固定轴，质量为  $m$  的小球以水平速度  $\vec{v}_0$  垂直于棒冲击其一端而粘上。已知棒绕  $O$  点的转动惯量  $J = \frac{Ml^2}{12}$ ， $M = 3m$ ，求：

- (1) 碰撞后棒的角速度  $\omega$  和球的速率  $V$ ；
- (2) 由此而损失的机械能  $\Delta E$

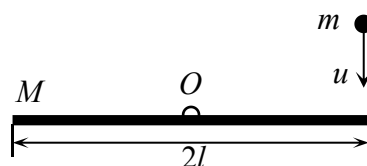


3. 一长为  $l = 1m$  的均匀直棒可绕过其一端且与棒垂直的水平光滑固定轴转动。抬起另一端使棒向上与水平面成  $60^\circ$ ，然后无初转速地将棒释放。已知棒对轴的转动惯量为  $\frac{ml^2}{3}$ ，其中  $m$  和  $l$  分别为棒的质量和长度。 $(g = 10m/s^2)$  求：

- (1) 放手时棒的角加速度；
- (2) 棒转到水平位置时的角速度

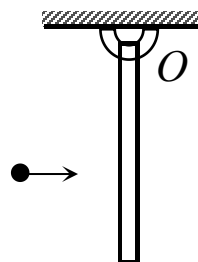


4. 如题图所示，一根长为  $2l$ ，质量为  $M$  的匀质细棒，可绕棒中点的水平轴  $O$  在竖直面内转动，开始时棒静止在水平位置，质量为  $m$  的小球以速度  $u$  垂直下落在棒的端点，设小球与棒作弹性碰撞，问碰撞后小球的反弹速度  $v$  及棒转动的角速度  $\omega$  各为多少？



5. 如图所示，一匀质细杆可绕通过上端与杆垂直的水平光滑固定轴  $O$  旋转，初始状态为静止悬挂，现有一个小球自左方打击细杆，设小球与细杆之间为非弹性碰撞，则在碰撞过程中对细杆与小球这一系统( )

- A. 只有机械能守恒  
B. 只有动量守恒  
C. 只有对转轴  $O$  的角动量守恒  
D. 机械能，动量和角动量均守恒



6. 一均质细杆，长  $L = 1m$ ，可绕通过一端的水平光滑轴  $O$  在铅垂面内自由转动，如题图所示。开始时杆处于铅垂位置，今有一子弹沿水平方向以  $v = 10m \cdot s^{-1}$  的速度射入细杆。设入射点离  $O$  点的距离为  $\frac{3}{4}L$ ，子弹的质量是杆质量的  $\frac{1}{9}$ ，试求：

- (1) 子弹和杆开始共同运动的角速度；  
(2) 子弹和杆共同摆动能达到的最大角度

