数学释疑解难系列丛书

线性代数

释疑解难

4

李大卫　齐淑华　徐鹏春　王学理　主编

大学生同步辅导佳作

考研者强化训练精品

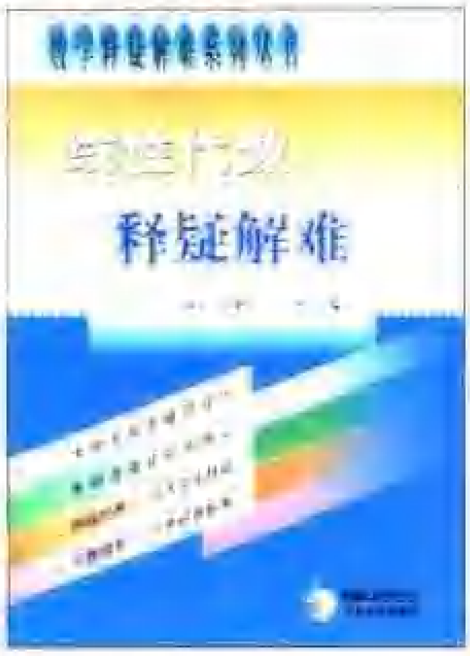
例题经典——为大学生释疑

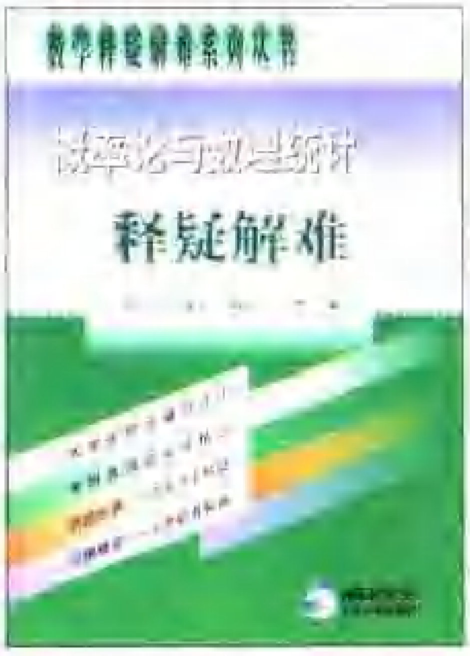
习题精萃——为考研者解难

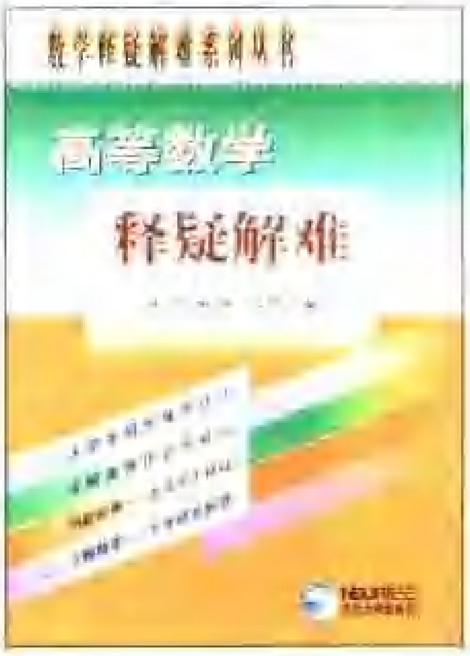
NEUPRESS

东北大学出版社

数学释疑解难系列丛书







丛书特色

- 基本概念讲解透彻
- 归类分析条理清楚
- 突出重点　强化训练
- 攻克难点　掌握方法

ISBN 7-81054-626-0
9 787810 546263 >

ISBN 7-81054-626-0
O·46　定价：15.00元

线性代数释疑解难

主　编　李大卫　齐淑华　徐鹏春　王学理
副主编　李建华　沙秋夫　刘　群

东 北 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书将“线性代数”诸多内容进行系统的归类分析，通过对典型问题的解答帮助读者释疑解难，同时，也向读者介绍方便快捷的解题方法。

全书共七讲。第一至六讲均包含内容提要、客观题归类分析、主观题归类分析、释疑解难、单元统测和答案等六部分，第七讲为模拟试题。

本书可作为理工科高等院校学生的学习辅导用书，对于准备“考研”的朋友，也是一本内容翔实的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数释疑解难/李大卫主编 .—沈阳：东北大学出版社，2001.9
ISBN 7-81054-626-0

Ⅰ. 线…　Ⅱ. 李…　Ⅲ. 线性代数-高等学校-教学参考资料　Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 048681 号

©东北大学出版社出版
（沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号　　邮政编码 110004）
电话：(024) 23890881（社务室）　(024) 23892538（传　真）
93687331（发行部）　83687332（出版部）
网址：http://www.neupress.com　E-mail:neuph@neupress.com

东北大学印刷厂印刷		新华书店总店北京发行所发行
开本：787mm×1092mm　1/16	字数：256 千字	印张：10.25
2001 年 9 月第 1 版		2001 年 9 月第 1 次印刷
责任编辑：刘宗王　孟　颖		责任校对：米　戎
封面设计：唐敏智		责任出版：杨华宁

定价：15.00 元

序　　言

“线性代数”是理工科高等院校学生的一门必修课，也是“考研”的必考内容。它不但是其他数学课程的基础，也是解决实际问题的工具。另外，由于电子计算机的飞速发展和广泛应用，许多问题经过离散化处理后，需要借助数值计算，而数值计算更离不开“线性代数”的基础知识。

“线性代数”因内容多、理论体系抽象而比较难学，并且又有一套特殊的思维方法和解题思路。这就给学习者带来更多的不便。

编写本书的目的就是要帮助读者理清“线性代数”的脉络，介绍一些方便快捷的解题方法，培养读者掌握其特殊的思维方法和解题思路。本书所选例题均具有典型性，希望通过典型问题和典型习题的解答，收到举一反三、触类旁通的功效。书中编排了少而精的习题，希望读者能够独立解算。

本书主编为李大卫、齐淑华、徐鹏春、王学理，副主编为李建华、沙秋夫、刘群，参加编写的还有张友、谢延波、阎慧臻、李艳坡、杨中兵等。

由于编者水平所限，书中难免存在不妥之处，恳请读者与同仁赐教。

编　者

2001 年 6 月 15 日

目　录

第一讲　行列式

一、内容提要

(一) 主要定义

1. 行列式　把 n^2 个数排成 n 行 n 列的表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积，并冠以符号$(-1)^t$，得到形如

$$(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

的项，其中 p_1，p_2，…，p_n 为自然数 1，2，…，n 的一个排列，t 是其逆序数．这样的项共有 $n!$ 个，其代数和

$$\sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

称为 n 阶行列式，记为

$$D_n = \Delta(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 a_{ij}称为行列式的第 i 行、第 j 列元素．a_{11}，a_{22}，…，a_{nn}形成行列式的主对角线，a_{1n}，$a_{2,n-1}$，…，a_{n1}形成另一条对角线．

2. 对角行列式　上(下)三角行列式　对角线以外的元素全为零的行列式称为对角行列式．其形式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ 和 } \begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & 0 \end{vmatrix}.$$

对角线以下(上)的元素全为零的行列式称为上(下)三角行列式．其形式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ 和 } \begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} * & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & 0 \end{vmatrix} \text{ 和 } \begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & * \end{vmatrix}.$$

3. 转置行列式　把行列式 D 的行列互换所得的行列式称为 D 的转置行列式，记为 D'

或 D^{T}.

4. 余子式　代数余子式　在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列划去后所得的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}. 而 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为 a_{ij} 的代数余子式.

（二）主要定理和公式

1. 对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},\quad \begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

下三角行列式和上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

$$\begin{vmatrix} * & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & * \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

2. 行列式的性质

(1) 行列式与它的转置行列式相等.

(2) 互换行列式的两行(列)，行列式变号.

(3) 如果行列式有两行(列)完全相同，那么行列式为零.

(4) 行列式的某一行(列)中所有元素都乘以同一个数 k，等于用此数 k 乘以此行列式.

(5) 行列式的某一行(列)中所有元素的公因子可以提到行列式符号之外.

(6) 如果行列式中有两行(列)元素成比例，那么此行列式为零.

(7) 如果行列式的某一行(列)的元素都是两个数之和，那么此行列式可写成两个行列式之和

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i}+a_{1i}') & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i}+a_{2i}') & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni}+a_{ni}') & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}' & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i}' & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}' & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(8) 把行列式的某一行(列)各元素乘以同一个数再加到另一行(列)的对应元素上去，行列式不变.

3. 行列式按行(列)展开法则　行列式等于它的任一行(列)各元素与其对应的代数余子式乘积之和，行列式任意一行(列)的各元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式的乘积之和为零，即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, & \text{当 } i=j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j; \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, & \text{当 } i=j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j. \end{cases}$$

二、客观题归类分析

(一) 填空题

【例 1-1】 设 $f(x) = D = \begin{vmatrix} 2x & 3 & 1 & 2 \\ x & x & 0 & 1 \\ 2 & 1 & x & 4 \\ x & 2 & 1 & 4x \end{vmatrix}$，则 x^3 项的系数为________，x^4 项的系数为________，常数项为________.

【解】 应依次填 -14，8，-2. 含有 x^3 的项是 $-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ 和 $-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$，即 $-12x^3$ 和 $-2x^3$，故 x^3 的系数为 -14. 含有 x^4 的项为 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$，即 $8x^4$，故 x^4 的系数为 8. 常数项为 $f(0)$，即

$$f(0) = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

【例 1-2】 设方程

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = 0,$$

其中 $a_i(i=1, 2, \cdots, n-1)$是互不相等的实常数，则方程的全部解为________.

【解】 全部解为 a_1，a_2，$\cdots$，a_{n-1}. 原因是把 $x=a_1$，a_2，$\cdots$，a_{n-1}依次代入，则左边行列式有两行相同. 这样的行列式必为 0，所以 a_1，a_2，$\cdots$，a_{n-1}是原方程的解. 但把左边行列式按第一行展开时，成为 $n-1$ 次多项式，故方程的全部解就是 a_1，a_2，$\cdots$，a_{n-1}. 这一问题也可以利用范德蒙行列式的展开式讨论. 方程左边是范德蒙行列式，其展开式中有因子 a_1-x，a_2-x，$\cdots$，$a_{n-1}-x$，其他因子因 $a_i \neq a_j(i \neq j)$而不等于零，故有 $a_1-x=0$，$a_2-x=0$，$\cdots$，$a_{n-1}-x=0$，即 $x=a_1$，a_2，$\cdots$，a_{n-1}为方程的解.

【例 1-3】 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 22 & 13 & 40 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & -9 \end{vmatrix} =$ ________.

【解】 应填 90. 注意两种特殊类型的行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ & & & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ & 0 & & \vdots & & \vdots \\ & & & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

和

$$\begin{vmatrix} & & & c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ & 0 & & \vdots & & \vdots \\ & & & c_{k1} & \cdots & c_{kk} \\ d_{11} & \cdots & d_{1r} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ d_{r1} & \cdots & d_{rr} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{kr} \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & \cdots & c_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{r1} & \cdots & d_{rr} \end{vmatrix},$$

左边每个行列式的两个空白处至少有一处全为零元素. 本题中的行列式属第二种类型，所以它等于

$$(-1)^{3\times 2} \begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -45\cdot(-2) = 90.$$

如果行列式能利用性质化成上述两种类型，那么可以简化计算.

【例 1-4】 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，$|\boldsymbol{A}| = -4$，设 $\boldsymbol{A}_i$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个列向量，则 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3)$. 这时，行列式 $|\boldsymbol{A}_3 + 3\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, 4\boldsymbol{A}_1| =$ ________.

【解】 应填 16. 原因是

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}_3 + 3\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, 4\boldsymbol{A}_1| &= |\boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_2, 4\boldsymbol{A}_1| + |3\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, 4\boldsymbol{A}_1| = 4|\boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_1| \\ &= -4|\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3| = -4(-4) = 16. \end{aligned}$$

上述计算过程中，运用了第一讲内容提要(二)中行列式性质(7)，(6)，(4)，(2).

练 习 1-1

1. 若 $a_{31}a_{2k}a_{54}a_{1l}a_{43}$ 是 5 阶行列式中的一项，则当 $k =$ ________，$l =$ ________ 时，该项符号为正号.

2. 设 $f(x) = \begin{vmatrix} x & -3 & 0 & x \\ 2 & 1 & 3 & x \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & x \end{vmatrix}$，则 $f(x)$ 中 x^2 项的系数为 ________，常数项为 ________.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶方阵，$\boldsymbol{B}$ 为 3 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}| = 2$，$|\boldsymbol{B}| = -1$，则 $||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}| =$ ________，$||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}| =$ ________.

4. $D=\begin{vmatrix}3&0&-1&0&0\\0&2&4&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&6&4\\0&0&0&5&2\end{vmatrix}=$ ______.

5. 设 5 阶行列式 $D=20$，依次作下列变换：用 3 乘所有元素，交换第二行和第五行，转置，把第一列各元素乘 2 加到第四列对应元素之上，用 9 除第二行各元素，其结果为 ______.

(二) 选择题

【例 1-5】 如果 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=M\neq0$，而 $D_1=\begin{vmatrix}3a_{11}&4a_{11}-a_{12}&-a_{13}\\3a_{21}&4a_{21}-a_{22}&-a_{23}\\3a_{31}&4a_{31}-a_{32}&-a_{33}\end{vmatrix}$，则 $D_1=$[ ].

(A) $-3M$; (B) $3M$; (C) $12M$; (D) $-12M$.

【解】 应选(B). 计算如下：

$$D_1=\begin{vmatrix}3a_{11}&4a_{11}&-a_{13}\\3a_{21}&4a_{21}&-a_{23}\\3a_{31}&4a_{31}&-a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3a_{11}&-a_{12}&-a_{13}\\3a_{21}&-a_{22}&-a_{23}\\3a_{31}&-a_{32}&-a_{33}\end{vmatrix}=3\times(-1)\times(-1)M=3M.$$

【例 1-6】 $\begin{vmatrix}99&100&203\\202&200&397\\298&300&601\end{vmatrix}=$[ ].

(A) 2000; (B) -2000; (C) 2300; (D) -2300.

【解】 应选(C). 把第二列乘以(-1)加到第一列，乘以(-2)加到第三列，再从第二列提出公因子 100，则行列式变得简单了. 这时进行展开运算就容易得多.

【例 1-7】 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_4|$，其中 $\boldsymbol{A}_i$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个列向量，则 $|\boldsymbol{A}|=$[ ].

(A) $|\boldsymbol{A}_4, \boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2|$;

(B) $|\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{A}_4, \boldsymbol{A}_4+\boldsymbol{A}_1|$;

(C) $|2\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3, -\boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_4|$;

(D) $|\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{A}_4|$.

【解】 应选(D). 因为对(D)中行列式作如下变换：第三列乘(-1)加到第四列，第二列乘(-1)加到第三列，第一列乘(-1)加到第二列则变为$|\boldsymbol{A}|$. 而(A)为$-|\boldsymbol{A}|$，(B)为 0，(C)为$-2|A|$.

【例 1-8】 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 都是 4 维列向量，且 4 阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1|=m$，$|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\alpha}_3|=n$，则 4 阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|=$[ ].

(A) $m+n$; (B) $-(m+n)$; (C) $n-m$; (D) $m-n$.

【解】 应选(C). 实际上，$|\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|=|\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1|+|\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_2|=-|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1|+|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\alpha}_3|=-m+n$.

练　习　1-2

1. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 6 阶方阵，则[　　　]为其行列式中带负号的项.

(A) $a_{61}a_{12}a_{43}a_{34}a_{25}a_{56}$；　　(B) $a_{21}a_{32}a_{13}a_{46}a_{55}a_{64}$；

(C) $a_{26}a_{14}a_{35}a_{62}a_{43}a_{51}$；　　(D) $a_{31}a_{12}a_{23}a_{64}a_{56}a_{45}$.

2. 设 $|\boldsymbol{A}|$ 为 4 阶行列式，且 $|\boldsymbol{A}|=-3$，则 $||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}|=$[　　　].

(A) 9；　(B) 3^5；　(C) -3^5；　(D) 12.

3.[　　　]是行列式 $\boldsymbol{A}$ 非零的充分条件.

(A) $\boldsymbol{A}$ 的所有元素都不为零；

(B) $\boldsymbol{A}$ 至少有 n^2-n 个元素不为零；

(C) $\boldsymbol{A}$ 的任意两列元素之间不成比例；

(D) 以 $\boldsymbol{A}$ 为系数行列式的线性方程组有惟一解.

4. 设 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\gamma}_2,\ \boldsymbol{\gamma}_3,\ \boldsymbol{\gamma}_4]$，$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma}_2,\ \boldsymbol{\gamma}_3,\ \boldsymbol{\gamma}_4]$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}_2$，$\boldsymbol{\gamma}_3$，$\boldsymbol{\gamma}_4$ 为 4 维列向量，且 $|\boldsymbol{A}|=-2$，$|\boldsymbol{B}|=3$，则 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}|=$[　　　].

(A) -14；　(B) 14；　(C) 108；　(D) -108.

5. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是 $n(\geqslant 2)$ 阶方阵，则必有[　　　].

(A) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$；　　(B) $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$；

(C) $||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}|=||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}|$；　　(D) $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|$.

三、主观题归类分析

(一) 三阶、四阶行列式的计算

以下采用一些简单记号表示行列式的运算，在第二讲矩阵的初等变换中也采用这样的记号，这些记号及其意义列举如下：

$r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)$表示交换第 i 行(列)和第 j 行(列).

$r_i\times k(c_i\times k)$表示以数 k 乘第 i 行(列)各元素.

$r_i\div k(c_i\div k)$表示从第 i 行(列)提出公因子 k.

$r_j+kr_i(c_j+kc_i)$表示把第 i 行(列)各元素的 k 倍加到第 j 行(列)的对应元素之上.

$r_j-kr_i(c_j-kr_i)$表示从第 j 行(列)各元素中减去第 i 行(列)对应元素的 k 倍.

【例 1-9】 计算 3 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}\alpha^2+1 & \alpha\beta & \alpha\gamma\\ \alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\gamma\\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1\end{vmatrix}$.

【解】 $$D\xlongequal[\substack{c_1\div\alpha\\ c_2\div\beta\\ c_3\div\gamma}]{\substack{r_1\div\alpha\\ r_2\div\beta\\ r_3\div\gamma}}\alpha^2\beta^2\gamma^2\begin{vmatrix}1+\dfrac{1}{\alpha^2} & 1 & 1\\ 1 & 1+\dfrac{1}{\beta^2} & 1\\ 1 & 1 & 1+\dfrac{1}{\gamma^2}\end{vmatrix}$$

$$=\alpha^2\beta^2\gamma^2\left[\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{1}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{1}{\gamma^2}\right)+1+1-1-\frac{1}{\beta^2}-1-\frac{1}{\alpha^2}-1-\frac{1}{\gamma^2}\right]$$
$$=\alpha^2\beta^2\gamma^2\left(\frac{1}{\beta^2\gamma^2}+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}+\frac{1}{\alpha^2\gamma^2}+\frac{1}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}\right)=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+1.$$

注　直接用对角线法展开也可.

【例 1-10】　计算 4 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}4&1&0&5\\3&1&-1&2\\-2&0&6&-4\\2&5&-3&2\end{vmatrix}$.

【解】

$$D\xlongequal[c_4-2c_1]{c_3+3c_1}\begin{vmatrix}4&1&12&-3\\3&1&8&-4\\-2&0&0&0\\2&5&3&-2\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按 }r_3\text{ 展开}}-2\begin{vmatrix}1&12&-3\\1&8&-4\\5&3&-2\end{vmatrix}\xlongequal[c_2-8c_1]{c_3+4c_1}-2\begin{vmatrix}1&4&1\\1&0&0\\5&-37&18\end{vmatrix}$$
$$\xlongequal{\text{按 }r_2\text{ 展开}}-2\cdot(-1)\begin{vmatrix}4&1\\-37&18\end{vmatrix}=2(72+37)=218.$$

【例 1-11】　计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a^2&(a+1)^2&(a+2)^2&(a+3)^2\\b^2&(b+1)^2&(b+2)^2&(b+3)^2\\c^2&(c+1)^2&(c+2)^2&(c+3)^2\\d^2&(d+1)^2&(d+2)^2&(d+3)^2\end{vmatrix}.$$

【解】

$$D\xlongequal[c_3-c_2]{c_4-c_1}\begin{vmatrix}a^2&(a+1)^2&(a+2)^2-(a+1)^2&(a+3)^2-a^2\\b^2&(b+1)^2&(b+2)^2-(b+1)^2&(b+3)^2-b^2\\c^2&(c+1)^2&(c+2)^2-(c+1)^2&(c+3)^2-c^2\\d^2&(d+1)^2&(d+2)^2-(d+1)^2&(d+3)^2-d^2\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}a^2&(a+1)^2&2a+3&3(2a+3)\\b^2&(b+1)^2&2b+3&3(2b+3)\\c^2&(c+1)^2&2c+3&3(2c+3)\\d^2&(d+1)^2&2d+3&3(2d+3)\end{vmatrix}=0.$$

练　习　1-3

1. 计算 3 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}\sin\alpha&\cos\alpha&1\\\sin\beta&\cos\beta&1\\\sin\gamma&\cos\gamma&1\end{vmatrix}$.

2. 验证 3 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&1\\x&y&z\\x^2&y^2&z^2\end{vmatrix}$能被$(x-y)$，$(y-z)$，$(z-x)$整除.

3. 计算 4 阶行列式

(1) $D_1=\begin{vmatrix}2&-1&1&0\\0&1&2&-1\\3&-1&2&3\\3&1&6&1\end{vmatrix}$； (2) $D_2=\begin{vmatrix}2&3&-3&4\\2&1&-1&2\\6&2&1&0\\2&3&0&-5\end{vmatrix}$.

4. 计算4阶行列式

(1) $D_1=\begin{vmatrix}1&1+a&1+2a&1+3a\\1&1+b&1+2b&1+3b\\1&r&r^2&r^3\\1&s&s^2&s^3\end{vmatrix}$；(2) $D_2=\begin{vmatrix}1&a_1&a_2&a_3\\1&a_1+b_1&a_2&a_3\\1&a_1&a_2+b_2&a_3\\1&a_1&a_2&a_3+b_3\end{vmatrix}$；

(3) $D_3=\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\1&1-x&1&1\\1&1&1+y&1\\1&1&1&1-y\end{vmatrix}$.

5. 求方程$\begin{vmatrix}x&-1&0&0\\0&x&-1&0\\0&0&x&-1\\1&4&6&x+4\end{vmatrix}=0$的解.

(二) n 阶行列式的计算

【例 1-12】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-1\\n&0&0&\cdots&0\end{vmatrix}$.

【解】 D 中不为零的元素为 $a_{12}=1$，$a_{23}=2$，…，$a_{n-1,n}=n-1$，$a_{n1}=n$. 故在 $n!$ 项中，非零项只有 $a_{12}a_{23}a_{34}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}=n!$. 其列标排列 $2\cdot3\cdot4\cdot\cdots\cdot(n-1)\cdot1$ 的逆序数为 $n-1$，所以 $D=(-1)^{n-1}n!$.

【例 1-13】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}x&a&a&\cdots&a\\a&x&a&\cdots&a\\a&a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$.

【解】

$$D\xlongequal{r_1+r_2+\cdots+r_n}\begin{vmatrix}x+(n-1)a&x+(n-1)a&\cdots&x+(n-1)a\\a&x&\cdots&a\\a&a&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1\div[x+(n-1)a]}[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a&x&\cdots&a\\a&a&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_n-c_1]{\substack{c_2-c_1\\c_3-c_1\\\cdots}}[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0\\a&x-a&0&\cdots&0\\a&0&x-a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&0&0&\cdots&x-a\end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

【例 1-14】 计算 $n+1$ 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}a_0&b_1&b_2&\cdots&b_n\\c_1&a_1&0&\cdots&0\\c_2&0&a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\c_n&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}$，其中 $a_i\neq0(i=1,2,\cdots,n)$.

【解】

$$D\xlongequal[r_{n+1}\div a_n]{\substack{r_2\div a_1\\r_3\div a_2\\\cdots}}a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix}a_0&b_1&b_2&\cdots&b_n\\\frac{c_1}{a_1}&1&0&\cdots&0\\\frac{c_2}{a_2}&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\\frac{c_n}{a_n}&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_1-\frac{c_n}{a_n}c_{n+1}]{\substack{c_1-\frac{c_1}{a_1}c_2\\c_1-\frac{c_2}{a_2}c_3\\\cdots}}a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix}a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i}&b_1&b_2&\cdots&b_n\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i}\right).$$

注　凡是第一行、第一列和主对角线以外的元素全为零的行列式或可以化成这种类型的行列式均可用上述方法计算.

【例 1-15】 计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1+a_1&1&1&\cdots&1\\1&1+a_2&1&\cdots&1\\1&1&1+a_3&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&1+a_n\end{vmatrix}$，其中 $a_i\neq0$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

【解】

$$D \xrightarrow[r_n - r_1]{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1 \\ \cdots}} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \xrightarrow[r_n \div a_n]{\substack{r_2 \div a_2 \\ r_3 \div a_3 \\ \cdots}} a_2 a_3 \cdots a_n \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -\dfrac{a_1}{a_2} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\dfrac{a_1}{a_3} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\dfrac{a_1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_1 + \frac{a_1}{a_n} c_n]{\substack{c_1 + \frac{a_1}{a_2} c_2 \\ c_1 + \frac{a_1}{a_3} c_3 \\ \cdots}} a_2 a_3 \cdots a_n \begin{vmatrix} 1 + a_1 + \sum\limits_{i=2}^{n} \dfrac{a_1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a_2 a_3 \cdots a_n \left(1 + a_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{a_1}{a_i} \right)$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n + a_2 a_3 \cdots a_n + a_1 a_3 \cdots a_n + \cdots + a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \right).$$

【例 1-16】 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$.

【解】

$$D_n \xrightarrow{\text{按} r_1 \text{展开}} a_0 \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = a_0 x^{n-1} + D_{n-1}.$$

注 $D_1 = a_{n-1}$，故由递推公式有：

$$D_n = a_0 x^{n-1} + D_{n-1} = a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + D_{n-2} = \cdots = a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}.$$

【例 1-17】 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} \lambda & a & a & a & \cdots & a \\ b & \alpha & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ b & \beta & \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ b & \beta & \beta & \alpha & \cdots & \beta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & \beta & \beta & \beta & \cdots & \alpha \end{vmatrix}$.

【解】

$$D \xlongequal[r_n - r_2]{\substack{r_3-r_2\\ r_4-r_2\\ \cdots}} \begin{vmatrix} \lambda & a & a & a & \cdots & a \\ b & \alpha & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ 0 & \beta-\alpha & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta-\alpha & 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \beta-\alpha & 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2+c_3+\cdots+c_n} \left|\begin{array}{cc:cccc} \lambda & (n-1)a & a & a & \cdots & a \\ b & \alpha+(n-2)\beta & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ \hdashline 0 & 0 & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta \end{array}\right|$$

$$\xlongequal{*} \begin{vmatrix} \lambda & (n-1)a \\ b & \alpha+(n-2)\beta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta \end{vmatrix}$$

$$=(\alpha-\beta)^{n-2}[\lambda\alpha+(n-2)\lambda\beta-(n-1)ab].$$

【例 1-18】 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$.

【解】 注意 D_n 不是范德蒙行列式，因为最后一行不是 $n-1$ 次幂．现作一个辅助的范德蒙行列式

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & y \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & y^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & y^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & y^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & y^n \end{vmatrix}$$

由范德蒙行列式的展开式知

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)\prod_{k=1}^{n}(y-x_k) \\ &= \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)[y^n-(x_1+x_2+\cdots+x_n)y^{n-1}+\cdots+(-1)^n x_1x_2\cdots x_n]. \end{aligned}$$

另一方面，如果把 D_{n+1} 按最后一列展开，又有 $D_{n+1}=A_{n+1,n+1}y^n+A_{n,n+1}y^{n-1}+\cdots+A_{1,n+1}$(其中 $A_{i,n+1}$ 为 D_{n+1} 中最后一列各元素的代数余子式)，注意 y^{n-1} 的代数余子式恰为所求行列式 D_n 的负值．比较 D_{n+1} 的两个表达式中 y^{n-1} 项的系数得

$$D_n=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)\sum_{k=1}^{n}x_k.$$

【例 1-19】 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}$.

【解】

$$D_n\xlongequal{\text{按 } r_1 \text{ 分成两个行列式}}\begin{vmatrix}\alpha & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix},$$

第一个行列式记为 D_{n1}，则

$$D_{n1}\xlongequal[r_2-r_1]{r_1\div\alpha}\alpha\begin{vmatrix}1 & \beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \alpha & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-r_2]{r_2\div\alpha}\alpha^2\begin{vmatrix}1 & \beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \beta & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}$$

$$=\cdots$$

$$\xlongequal[\substack{r_n-r_{n-1}\\ r_n\div\alpha}]{r_{n-1}\div\alpha}\alpha^n\begin{vmatrix}1 & \beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \beta & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{vmatrix}=\alpha^n.$$

第二个行列式记为 D_{n2}，则

$$D_{n2}\xlongequal{\text{按 } r_1 \text{ 展开}}\beta\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0\\ 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}=\beta D_{n-1}.$$

故 $D_n=D_{n1}+D_{n2}=\alpha^n+\beta D_{n-1}$. 由于在 D_n 中 α，β 地位相同，交换位置不改变 D_n，因此 $D_n=\beta^n+\alpha D_{n-1}$. 两式联立求解得 $D_n=\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$. 当 $\alpha=\beta$ 时，

$$\begin{aligned}D_n&=\alpha^n+\beta D_{n-1}=\alpha^n+\alpha D_{n-1}=\alpha^n+\alpha(\alpha^{n-1}+\alpha D_{n-2})=2\alpha^n+\alpha^2D_{n-2}\\&=\cdots=(n-1)\alpha^n+\alpha^{n-1}D_1=(n+1)\alpha^n.\end{aligned}$$

【例 1-20】 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$，其中 $a_j\neq 0$；$j=1, 2, \cdots, n$.

【解】

$$D_n \xlongequal{\text{加 边}} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ 0 & a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\ 3,\ \cdots,\ n+1]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ -1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & a_n & a_n & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{再加边}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & -1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & -1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & -1 & a_n & a_n & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=3,\ 4,\ \cdots,\ n+2]{c_j-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & -1 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & -1 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & -1 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_2-\frac{1}{2a_j-2}c_j\quad j=3,\ 4,\ \cdots,\ n+2]{c_1+\frac{1}{2}c_j} \begin{vmatrix} 1-\frac{n}{2} & \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k & 1-\frac{n}{2} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-2)^n a_1 a_2\cdots a_n\left[\left(1-\frac{n}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\right].$$

练　习　1-4

计算下列行列式

1. $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

2. $D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ b & x & a & \cdots & a \\ b & b & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x \end{vmatrix}$.

3. $D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ c & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ c & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$.

4. $D_n = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 & a_{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}$.

5. $D_n = \begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x_{n-2} & x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x_{n-1} & x_n \end{vmatrix}$.

四、释疑解难

【例 1-21】 求 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1 & -1 & \cdots & -1\\ 1 & 1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & -1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{vmatrix}$ 展开后的正项总数.

【解】

$$D_n \xlongequal{c_1+c_n}\begin{vmatrix}0 & -1 & \cdots & -1\\ 0 & 1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 1 & \cdots & -1\\ 2 & 1 & \cdots & 1\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按 } c_1 \text{ 展开}}(-1)^{n+1}2\begin{vmatrix}-1 & -1 & \cdots & -1\\ 1 & -1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & -1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1+r_{n-1}}(-1)^{n+1}2\begin{vmatrix}0 & 0 & \cdots & -2\\ 1 & -1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & -1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按 } r_1 \text{ 展开}}(-1)^{n+1}2(-1)^{n-1+1}(-2)D_{n-2}=4D_{n-2},$$

所以，$D_n=4D_{n-2}=2^2D_{n-2}=2^4D_{n-4}=\cdots=2^{n-1}$. 又因 D_n 展开后各项的值为 $+1$, -1, 而 $n!$ 项的和为 2^{n-1}，可见，正项个数比负项个数多 2^{n-1}个，于是正项总数为

$$\frac{1}{2}(n!\ +2^{n-1})=2^{n-2}+\frac{1}{2}n!\ \text{个}.$$

【例 1-22】 设 α, β, γ 为互不相等的实数，证明 $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \alpha & \beta & \gamma\\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3\end{vmatrix}=0$ 的充要条件是 $\alpha+\beta+\gamma=0$.

【证】 展开行列式

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \alpha & \beta & \gamma\\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3\end{vmatrix}\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ \alpha & \beta-\alpha & \gamma-\alpha\\ \alpha^3 & \beta^3-\alpha^3 & \gamma^3-\alpha^3\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按 } r_1 \text{ 展开}}\begin{vmatrix}\beta-\alpha & \gamma-\alpha\\ \beta^3-\alpha^3 & \gamma^3-\alpha^3\end{vmatrix}$$

$$=(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)\begin{vmatrix}1 & 1\\ \beta^2+\alpha\beta+\alpha^2 & \gamma^2+\alpha\gamma+\alpha^2\end{vmatrix}$$

$$=(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma^2+\alpha\gamma+\alpha^2-\beta^2-\alpha\beta-\alpha^2)$$

$$=(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\alpha+\beta+\gamma),$$

因 α, β, γ 互不相等，故 $\beta-\alpha$, $\gamma-\alpha$, $\gamma-\beta$ 不为零，行列式为零的充要条件是 $\alpha+\beta+\gamma=0$.

【例 1-23】 证明：$D_n=\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta \end{vmatrix}=\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$.

【证】 当 $n=2$ 时，

$$D_2=\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 \\ 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}=4\cos^2\theta-1=\frac{4\cos^2\theta-1}{\sin\theta}\cdot\sin\theta$$
$$=\frac{2\sin2\theta\cos\theta-\sin\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin3\theta+\sin\theta-\sin\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin3\theta}{\sin\theta}.$$

等式成立.

设 $n\leqslant k-1$ 时等式成立，则当 $n=k$ 时，

$$D_k\xlongequal{\text{按}r_1\text{展开}}2\cos\theta D_{k-1}-D_{k-2}=2\cos\theta\cdot\frac{\sin k\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin(k-1)\theta}{\sin\theta}$$
$$=\frac{\sin(k+1)\theta+\sin(k-1)\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin(k-1)\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}.$$

所以由归纳法知等式成立.

注 当递推公式仅涉及 D_{n-1}时，用第一数学归纳法(即假设 $n=k-1$ 时结论成立，证明 $n=k$ 时结论也成立)．当递推公式不仅涉及 D_{n-1}，还含有 D_{n-2}等更低阶的行列式时，用第二数学归纳法(即假设 $n\leqslant k-1$ 时结论成立，证明 $n=k$ 时结论也成立).

练 习 1-5

1. 证明在 n 元排列中($n\geqslant2$)，奇排列与偶排列个数相等，各为$\frac{1}{2}n!$ 个.

2. 已知 a，b，c 为一元三次方程$x^3+px+q=0$的三个根，求 $D=\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$.

3. 用数学归纳法证明：当 $a\neq b$ 时，

$$D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}.$$

4. 用数学归纳法证明

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & a & \cdots & a & a \\ -a & -a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix}=\frac{1}{2}[(x+a)^n+(x-a)^n].$$

五、单元统测

第一套

一、填空题

1.5 阶行列式中包括 $a_{24}a_{31}$的所有正项是________.

2. 设 $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=0$, 则 $a=1$ 或________.

3. $f(x)=\begin{vmatrix} 3 & -1 & x \\ x & 2 & 5 \\ 1 & 4 & x \end{vmatrix}$是________次多项式, 其一次项的系数是________.

4. 如果 n 阶行列式零元素的个数超过 $n(n-1)$个, 则行列式为________.

5. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & x & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$中元素 x 的代数余子式是________.

二、选择题

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & 0 \end{vmatrix}=[\qquad]a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.

(A) -1; (B) $-n$; (C) $-\frac{1}{2}n(n-1)$; (D) $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}$.

2. 如果 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=m\neq0$, 则 $D_1=\begin{vmatrix} 4a_{11} & 5a_{11}-2a_{12} & a_{13} \\ 4a_{21} & 5a_{21}-2a_{22} & a_{23} \\ 4a_{31} & 5a_{31}-2a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=[\qquad]$.

(A) $-40m$; (B) $40m$; (C) $-8m$; (D) $20m$.

3. 行列式 $D=0$ 的必要条件是[　　].

(A) D 中有两行(列)元素对应成比例;

(B) D 中至少有一行各元素可用行列式的性质化为 0;

(C) D 中有一行元素全为 0;

(D) D 中任意一行各元素都可用行列式的性质化为 0.

4. $D=\begin{vmatrix} 9 & 4 & 2 & 1 & 6 \\ 5 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=[\qquad]$.

(A) -294;　(B) 294;　(C) 61;　(D) -61

5. $\begin{vmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{vmatrix}=$[　　　].

(A) $(x-y)^3$;　　(B) $(x+2y)(x+y)^2$;

(C) $(x+2y)(x-y)^2$;　　(D) $(x-2y)(x+y)^2$.

三、计算下列行列式

1. $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;

2. $D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

3. $D_n=\begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$.

四、解方程

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4+x \\ a_1 & a_2 & a_3+x & a_4 \\ a_1 & a_2+x & a_3 & a_4 \\ a_1+x & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}=0.$$

五、证明

1. 奇数阶反对称行列式 $D=0$.

2. n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & & -1 & 2 \end{vmatrix}=n+1.$$

第二套

一、填空题

1. 6 阶行列式中 $a_{21}a_{12}a_{56}a_{43}a_{35}a_{64}$的符号为________.

2. 如果 $abcdef$ 是偶排列，则 $afcdeb$ 是________排列。

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}=$________.

4. 方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & x \\ 1 & 4 & 9 & x^2 \\ 1 & 8 & 27 & x^3 \end{vmatrix}=0$ 的全部根是________.

5. 如果对于 n 阶行列式 D 的元素 a_{ij} 及其代数余子式 A_{ij}，总有 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=0(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，则 $D=$________.

二、选择题

1. 设 $D_1=\begin{vmatrix} 3a_1 & & & 0 \\ & 3a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 3a_n \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix}$，其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq0$，则 [　　].

(A) $D_1=D_2$;　(B) $D_1=\frac{1}{3n}D_2$;　(C) $D_1=3^nD_2$;　(D) $D_1=-3^nD_2$.

2. 设 $D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a_{nn} & a_{n-1,n} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n,n-1} & a_{n-1,n-1} & \cdots & a_{1n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n-1,n} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix}$，则[　　].

(A) $D_1=D_2$;　　(B) $D_1=-D_2$;

(C) $D_1=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}D_2$;　　(D) $D_1=(-1)^nD_2$.

3. 下列各式中[　　]是 4 阶行列式的一项.

(A) $-a_{21}a_{13}a_{34}a_{42}$;　　(B) $-a_{11}a_{21}a_{33}a_{42}$;

(C) $-a_{31}a_{12}a_{13}a_{44}$;　　(D) $-a_{14}a_{21}a_{32}a_{41}$.

4. 已知 $A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=4$，$B=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}=1$，把 A，B 对应元素相加所得的行列式=[　　].

(A) 5;　(B) 10;　(C) 20;　(D) 40.

5. $\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & a_{13}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & a_{23}+x \\ a_{31}+x & a_{32}+x & a_{33}+x \end{vmatrix}$展开式中$x$的最高次数是[　　].

(A) 0;　　(B) 1;　　(C) 2;　　(D) 3.

三、计算下列行列式

1. $\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}$ $(n\geqslant 3)$.

3. $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ 10^{10} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$.

四、解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1)-x \end{vmatrix}=0.$$

五、证明题

1. 已知 1632，2160，3696，5024 都可被 16 整除，不经计算，证明$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 6 \\ 5 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$可被16 整除.

2. 如果 n 次多项式$f(x)=C_0+C_1x+\cdots+C_nx^n$ 对于$n+1$个不同的 x 值都等于 0，则$f(x)\equiv 0$.

六、答　　案

练　习　1-1

1. $k=5$，$l=2$;　　2. -15，54;　　3. -8，2.;　　4. -48;　　5. 540.

练　习　1-2

1.(B);　　2.(C);　　3.(D);　　4.(C);　　5.(B).

练　　习　　1-3

1. $\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)$.

2. $D=(x-y)(y-z)(z-x)$，故能被 $x-y$，$y-z$，$z-x$ 整除.

3. (1) $D_1=0$；　(2) $D_2=48$.

4. (1) r_1-r_2，r_3-r_4，r_4-r_2，按 c_1 展开；$r_1\div(a-b)$，$r_3\div(r-s)$；c_2-2c_1，c_3-3c_1，按 r_1 展开；$c_2\div(s-1)^2$，把所得的二阶行列式展开，$D_1=(a-b)(r-s)(s-1)^2(r-1)^2$.

(2) r_2-r_1，r_3-r_1，r_4-r_1 得上三角行列式，$D_2=b_1b_2b_3$.

(3) c_1-c_4，c_2-c_4，c_3-c_4；r_2-r_1，r_4-r_3；$r_2\div(-x)$，$r_4\div y$；r_4-r_2；c_1-c_2，$D_3=x^2y^2$.

5. 方程左边行列式按 c_1 展开，第一个行列式按 r_1 展开，所得两个二阶行列式再展开得 $x^4+4x^3+6x^2+4x+1=(x+1)^4$，故方程有四重根 $x=-1$.

练　　习　　1-4

1. 按 c_1 展开后，第一个行列式为 D_{n-1}，第二个行列式按 r_1 展开得 D_{n-2}，故有递推公式：$D_n=2D_{n-1}-D_{n-2}$. 依此推出 $D_n=n+1$.

2. 加边得

$$D_n=\frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} b-a & a-a & a-a & \cdots & a-a \\ b & x & a & \cdots & a \\ b & b & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x \end{vmatrix}\text{按第一行分为两个行列式}$$

$$D_n=\frac{1}{b-a}\left(\begin{vmatrix} b & a & a & \cdots & a \\ b & x & a & \cdots & a \\ b & b & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ b & x & a & \cdots & a \\ b & b & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x \end{vmatrix}\right)$$

$$\xlongequal[\text{第二个行列式各列减 } c_1]{\text{第一个行列式各行减 } r_1}\frac{1}{b-a}\left(\begin{vmatrix} b & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b-a & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b-a & b-a & \cdots & x-a \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & x-b & a-b & \cdots & a-b \\ b & 0 & x-b & \cdots & a-b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & 0 & 0 & \cdots & x-b \end{vmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{b-a}[b(x-a)^n-a(x-b)^n].$$

3. $c_1\div c$，$c_2\div a_2$，$\cdots$，$c_n\div a_n$；c_1-c_2，c_1-c_3，$\cdots$，c_1-c_n 得上三角行列式. $D_n=ca_2\cdots a_n\cdot\left(\dfrac{a_1}{c}-\dfrac{a_2}{b_2}-\cdots-\dfrac{a_n}{b_n}\right)$.

4. 用数学归纳法. 当 $n=1$ 时，$D_1=|x+a_{1-1}|=x+a_0$；当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix} x & a_{2-2} \\ -1 & x+a_1 \end{vmatrix}=x^2+a_1x+a_0$，故推测

$$D_n=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0.$$

用归纳法证明这一推测. 假设对于 D_{n-1} 推测成立，即

$$D_{n-1}=x^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_2x+a_1$$

则

$$D_n\xlongequal{\text{按 } r_1 \text{ 展开}}xD_{n-1}+(-1)^{1+n}a_0\begin{vmatrix} -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$= xD_{n-1} + (-1)^{1+n}(-1)^{n-1}a_0 = xD_{n-1} + a_0$

$= x(x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_2x + a_1) + a_0$

$= x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0.$

5. 仿照上题，$D_n = x_1 \cdots x_n\left(1 + \frac{a_1}{x_1} + \cdots + \frac{a_n}{x_n}\right)$.

练　　习　　1-5

1. 设 $n!$ 个排列中，奇、偶排列分别为 p，q 个. 对 p 个奇排列进行同样的一次对换，得到 p 个偶排列，因偶排列共有 q 个，故 $p \leqslant q$. 同理，对 q 个偶排列进行同样的一次对换，得到 q 个奇排列，又有 $q \leqslant p$，所以 $p = q$. 因全部排列为 $n!$ 个，故 $p = q = \frac{1}{2}n!$.

2. $D \xlongequal{c_1+c_2+c_3} (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}$，因 a，b，c 为 $x^3 + px + q = 0$ 的根，故 $a + b + c = x$ 的 2 次项系数，即 $a + b + c = 0$，可见 $D = 0$.

第一套

一、1. $a_{15}a_{24}a_{31}a_{43}a_{52}$，$a_{12}a_{24}a_{31}a_{45}a_{53}$，$a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}a_{55}$；　2. -2；　3. 4；　4. 0；

5. $-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

二、1. (C)；　2. (C)；　3. (B)；　4. (B)；　5. (C).

三、1. x^4；　2. $(-1)^{n-1}(n-1)$；　3. 按 D_n 的最后一列把 D_n 分成两个 n 阶行列式，其中第一个行列式的最后一列的最后两个元素为 a_n，$-a_n$，第二个行列式的最后一列的最后两个元素为 0，1，第一个行列式从最后一行起每行加上前一个，第二个行列式按最后一列展开，得递推公式 $D_n = (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n + D_{n-1}$，故 $D_n = (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n + (-1)^{n-1} a_1 a_2 \cdots a_{n-1} + \cdots + a_1 a_2 - a_1 + 1$.

四、$x_1 = x_2 = x_3 = 0$，$x_4 = -\sum\limits_{i=1}^{4} a_i$.

五、1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $2n+1$ 阶反对称矩阵，则 $|\boldsymbol{A}|$ 为 $2n+1$ 阶反对称行列式。这时，因 $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}'$，故 $|\boldsymbol{A}| = |-\boldsymbol{A}'| = (-1)^{2n+1}|\boldsymbol{A}'| = -|\boldsymbol{A}|$，即 $|\boldsymbol{A}| = 0$.

2. 提示：用数学归纳法.

第二套

一、1. 正号；　2. 奇；　3. 1；　4. 1，2，3；　5. 0.

二、1. (C)；　2. (A)；　3. (A)；　4. (D)；　5. (B).

三、1. $1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5$；　2. 0；　3. $\lambda^{10} - 10^{10}$.

四、$x = 0, 1, \cdots, n-2$.

五、1. 对行列式作 $C_4 + 1000C_1 + 100C_2 + 10C_3$，则第 4 列各元素都有因子 16，提出公因子 16.

2. 设 $x = a_i (i = 1, 2, \cdots, n+1)$ 时，$f(x) = 0$，则有

$$\begin{cases} C_0 + C_1 a_1 + \cdots + C_n a_1^n = 0, \\ C_0 + C_1 a_2 + \cdots + C_n a_2^n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_0 + C_1 a_{n+1} + \cdots + C_n a_{n+1}^n = 0, \end{cases}$$

把它看成以 C_0，C_1，$\cdots$，C_n 为未知量的齐次线性方程组，其系数行列式 D 恰为范德蒙行列式，因各不相同，故 $D \neq 0$，方程组仅有零解：$C_0 = C_1 = \cdots = C_n = 0$，即 $f(x) \equiv 0$.

第二讲　矩　　阵

一、内容提要

(一)主要定义

1. 矩阵　由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成 m 行 n 列的数表

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵. a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素. a_{ij} 全为实数的矩阵称为实矩阵. $m\times n$ 矩阵记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，无须指明元素时也可记为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}$.

2. 行矩阵　列矩阵　同型矩阵　只有一行的矩阵称为行矩阵，只有一列的矩阵称为列矩阵. 如果两个矩阵的行数相同，列数也相同时，那么称它们为同型矩阵.

3. 零矩阵　所有元素全为零的矩阵称为零矩阵，记为 $\boldsymbol{O}$.

4. 单位矩阵　$n\times n$ 矩阵(简称 n 阶矩阵或 n 阶方阵)的主对角线元素都是 1，其他元素都是 0 时，称为 n 阶单位矩阵，记为 $\boldsymbol{E}$.

5. 对角矩阵　三角矩阵　主对角线以外的元素都是 0 的方阵称为对角矩阵. 主对角线下方的元素全为零的方阵称为上三角矩阵，主对角线上方的元素全为 0 的方阵称为下三角矩阵.

6. 负矩阵　把矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的全部元素改变符号后所得的矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵，记为 $-\boldsymbol{A}$，$-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})$.

7. 转置矩阵　把矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的行列互换所得的矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记为 $\boldsymbol{A}'$ 或 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

8. 矩阵相等　同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，如果满足 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$，即对应元素相等时，那么称矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 相等，记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

9. 对称矩阵　反对称矩阵　满足 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}$ 的方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为对称矩阵. 满足 $\boldsymbol{A}'=-\boldsymbol{A}$ 的方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为反对称矩阵.

10. 矩阵的加法　两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 的和记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，仍为 $m\times n$ 矩阵，规定为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}&\cdots&a_{1n}+b_{1n}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}&\cdots&a_{2n}+b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}+b_{m1}&a_{m2}+b_{m2}&\cdots&a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}$$

这种运算称为矩阵的加法. 规定矩阵的减法为 $A-B=A+(-B)$.

11. 数与矩阵相乘　数 λ 与 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$ 的乘积，记为 λA，仍为 $m\times n$ 矩阵，规定为

$$\lambda A=\begin{pmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn}\end{pmatrix},$$

这种运算称为数与矩阵相乘.

12. 矩阵的线性运算　矩阵的加法和数与矩阵相乘两种运算统称矩阵的线性运算.

13. 矩阵的乘法　$m\times s$ 矩阵 $A=(a_{ij})$ 和 $s\times n$ 矩阵 $B=(b_{ij})$ 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})$，其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum\limits_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，乘积记为 $C=AB$. 这种运算称为矩阵的乘法.

14. 方阵的幂　k 个 n 阶方阵 A 连乘称为方阵 A 的 k 次幂，记为 A^k，即 $A^k=\underbrace{AA\cdots A}_{k\text{个}}$.

15. 方阵的行列式　由 n 阶方阵 A 的元素构成的行列式(各元素位置不变)称为方阵 A 的行列式，记为 $|A|$.

16. 伴随矩阵　由 n 阶方阵 A 的行列式 $|A|$ 的各元素的代数余子式 A_{ij} 构成的 n 阶方阵，记为 A^*，

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}$$

称为方阵 A 的伴随矩阵. 注意 $|A|$ 中第 i 行各元素的代数余子式位于 A^* 中的第 i 列 $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$.

17. 逆矩阵　对于 n 阶方阵 A，若存在 n 阶方阵 B，使得 $AB=BA=E$，则称 A 可逆，并称 B 是 A 的逆矩阵. 这时 A 也是 B 的逆矩阵，可逆矩阵也称非奇异矩阵、满秩矩阵，不可逆矩阵也称奇异矩阵、降秩矩阵.

18. 分块矩阵　把矩阵 A 用若干条纵线和横线分成许多小矩阵，每个小矩阵称为 A 的一个子块，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵. 分块矩阵的各种运算仿照一般矩阵的运算定义，所不同的是一般矩阵的运算是在元素与元素之间(即数与数之间)进行，而分块矩阵的运算是在子块与子块之间(即矩阵与矩阵之间)进行.

19. 矩阵的初等变换　对调矩阵 A 的两行，以不等于 0 的数 k 乘 A 的某行各元素，把 A 的某行所有元素乘以数 k 后加到另一行对应元素上去，这三种对矩阵 A 的变换称为矩阵的初等行变换. 把上述定义中的"行"字换成"列"字，即得矩阵的初等列变换. 矩阵的初等行变换和初等列变换统称矩阵的初等变换.

20　矩阵等价　如果矩阵 A 经有限次初等变换变成矩阵 B，那么称 A 与 B 等价，记为 $A\sim B$.

21. 矩阵的行阶梯形　行最简形　经初等行变换后，如果每个非零行(元素不全为零的行)的第一个非零元素前边的零元素个数不同，且非零行依第一个非零元素前边的零元素的

个数由少到多排列在上，零行(元素全为零的行)排列在下，那么称变成这种形式的矩阵为原来矩阵的行阶梯形．对行阶梯形再进行初等行变换，使每个非零行的第一个非零元素都变成1，而含有这个元素1的列中的其他元素都变为0，那么称变成这种形式的行阶梯形为原来矩阵的行最简形．$m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次初等行变换一定可化为行阶梯形及行最简形．

22．矩阵的标准形　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行最简形再经初等列变换可化为

$$\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1&\cdots&0\\0&0&\cdots&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

的形式，称为 $\boldsymbol{A}$ 的标准形，$\boldsymbol{I}$ 的左上角为 r 阶单位矩阵．

23．矩阵的子式　在 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中，任取 k 行与 k 列，位于这些行、列交叉处的 k^2 个元素(不改变它们在 $\boldsymbol{A}$ 中所处的位置次序)所构成的 k 阶行列式，称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式．

24．矩阵的秩　如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有一个不等于零的 r 阶子式 D，而所有 $r+1$ 阶子式(如果有的话)全等于零，那么称 r 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，记为 $R(\boldsymbol{A})$，即 $R(\boldsymbol{A})=r$．

25．初等方阵　由单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 经一次初等变换得到的方阵称为初等方阵．初等方阵有三种，分别是：

(1) 由 $\boldsymbol{E}$ 对调第 i 行和第 j 行所得的方阵 $\boldsymbol{E}(i,\ j)$；

(2) 用数 $k\neq 0$ 乘 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 行所得的方阵 $\boldsymbol{E}(i(k))$；

(3) 用数 k 乘 $\boldsymbol{E}$ 的第 j 行加到第 i 行上所得的方阵 $\boldsymbol{E}(j(k),\ i)$．

(二) 主要定理与公式

1．矩阵加法　设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 为同型矩阵，则

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

(3) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$；

(4) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$．

2．数与矩阵相乘　设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵，λ，μ 为数，则

(1) $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})=\mu(\lambda\boldsymbol{A})$；

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$；

(3) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$．

3．矩阵相乘　设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 为矩阵，λ 为数，且运算可行，则

(1) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

(2) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$，$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$；

(3) $\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$；

(4) $\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{A}$．

4．方阵的幂　设 $\boldsymbol{A}$ 为方阵，l，k 为正整数，则

(1) $A^kA^l=A^{k+l}$;

(2) $(A^k)^l=A^{kl}$.

当 A 可逆时，有

(3) $A^0=E$，$A^{-k}=(A^{-1})^k=(A^k)^{-1}$.

5. 矩阵转置　设 A，B 为矩阵，λ 为数，且运算可行，则

(1) $(A')'=A$;

(2) $(A+B)'=A'+B'$;

(3) $(\lambda A)'=\lambda A'$;

(4) $(AB)'=B'A'$，可推广到有限多个矩阵.

6. 方阵的行列式　设 A，B 为 n 阶方阵，λ 为数，且运算可行，则

(1) $|A'|=|A|$;

(2) $|\lambda A|=\lambda^n|A|$;

(3) $|AB|=|BA|=|A||B|$，可推广到有限多个 n 阶方阵.

7. 逆矩阵　设 A，B 为 n 阶可逆方阵，$\lambda\neq0$ 为数，则

(1) $(A^{-1})^{-1}=A$;

(2) $(\lambda A)^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$;

(3) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$，可推广到有限多个同阶可逆方阵;

(4) $(A')^{-1}=(A^{-1})'$.

8. 分块矩阵　设 A，B 为同型矩阵，对 A，B 用相同的方式分块，即

$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$，$A_{ij}$ 与 B_{ij} 同型($i=1$，$\cdots$，s；$j=1$，$\cdots$，r)，

则

(1) $A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1r}+B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{pmatrix}$.

(2) $\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}$($\lambda$ 为数).

(3) $A'=\begin{pmatrix} A_{11}' & \cdots & A_{s1}' \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}' & \cdots & A_{sr}' \end{pmatrix}$.

设 A 为 $m\times l$ 矩阵，B 为 $l\times n$ 矩阵，分块为

$A=\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{bmatrix}$，　其中 A_{i1}，A_{i2}，$\cdots$，A_{it} 的列数分别与 B_{1j}，B_{2j}，$\cdots$，B_{tj} 的行数相等，则

(4) $AB=C=\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}$，其中 $C_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{t}A_{ik}B_{kj}$ $(i=1, \cdots, s;\ j=1, \cdots, r)$.

设 A 为 n 阶方阵，分块后如果仅在主对角线上有非零子块且均为方阵，即

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix},$$

$A_i(i=1, 2, \cdots, s)$均为方阵.

(5) $|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|$.

(6) $A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$.

9. 方阵 A 可逆的充要条件是$|A|\neq 0$.

10. 对于 n 阶方阵A，有 $AA^*=A^*A=|A|E$.

11. 数乘对角矩阵　两个 n 阶对角矩阵相加和相乘仍为对角矩阵.

12. 数乘上(下)三角矩阵　两个 n 阶上(下)三角矩阵相加和相乘仍为上(下)三角矩阵，可逆的上(下)三角矩阵的逆仍为上(下)三角矩阵.

13. 数乘对称矩阵　两个 n 阶对称矩阵相加仍为对称矩阵，可逆的对称矩阵的逆仍为对称矩阵. 但两个 n 阶对称矩阵相乘不一定是对称矩阵.

14. 数乘反对称矩阵　两个 n 阶反对称矩阵相加仍为反对称矩阵，但两个 n 阶反对称矩阵相乘不一定是反对称矩阵.

(三) 结论补充

1. 关于矩阵的秩有

(1) $R(A)=R(A')$，$R(A)=R(A^{-1})$;

(2) 如果 $A\sim B$，那么 $R(A)=R(B)$;

(3) $R(AB)\leqslant\min\{R(A), R(B)\}$，$R(AB)\geqslant R(A)+R(B)-n$($n$ 为 A 的列数);

(4) $R(A)=A$ 的行阶梯形中非零行的个数.

(5) 如果 A 为n 阶方阵，那么 $R(A)<n$ 的充要条件为$|A|=0$;

(6) A 与可逆方阵的乘积的秩等于A 的秩;

(7) $R(A+B)\leqslant R(A)+R(B)$;

(8) $R(A^*)=\begin{cases} n, & R(A)=n \\ 1, & R(A)=n-1 \\ 0, & R(A)<n-1 \end{cases}$　(A 为n 阶方阵).

2. 对 $m\times n$ 矩阵A 进行一次初等行变换，相当于在 A 的左边乘以相应的 m 阶初等方阵；对 A 进行一次初等列变换，相当于在 A 的右边乘以相应的n 阶初等方阵.

3. 初等方阵都是可逆的，$E(i, j)^{-1}=E(i, j)$，$E(i(k))^{-1}=E\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right)$，$E(j(k)$,

$i)^{-1}=E(j(-k),\ i)$.

4. 如果 A 为可逆方阵，那么存在有限个初等方阵 P_1，P_2，…，P_s，使 $A=P_1P_2\cdot\cdots\cdot P_s$.

5. $m\times n$ 矩阵 $A\sim B$ 的充要条件是：存在 m 阶可逆方阵 P 和 n 阶可逆方阵 Q，使 $PAQ=B$.

二、客观题归类分析

(一) 填空题

【例 2-1】 设 A 为 3 阶方阵，且 $|A|=3$，则 $\left|\left(\frac{1}{2}A\right)^2\right|=$ ________.

【解】 $\left|\left(\frac{1}{2}A\right)^2\right|=\left|\frac{1}{4}A^2\right|=\left(\frac{1}{4}\right)^3|A^2|=\frac{1}{64}|A|^2=\frac{1}{64}\cdot 9=\frac{9}{64}$. 故应填 $\frac{9}{64}$.

注 若 A 为 n 阶方阵，a 为常数，则 $|aA|=a^n|A|$.

【例 2-2】 设 $A=(1\quad 2\quad 3)$，$B=(1\quad 1\quad 1)$，则 $(A'B)^k=$ ________.

【解】

$$(A'B)^k=(A'B)(A'B)\cdots(A'B)=A'(BA')(BA')\cdots(BA')B$$
$$=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(6)(6)\cdots(6)(1\ 1\ 1)=6^{k-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(1\ 1\ 1)=6^{k-1}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}.$$

注 如果先计算 $A'B$，再 k 次幂，显然要麻烦得多. 此处运用了矩阵乘法的结合律.

【例 2-3】 设 A 为 3 阶方阵，且 $|A|=2$，则 $|3A^{-1}-2A^*|=$ ________. $|3A-(A^*)^*|=$ ________.

【解】 $|3A^{-1}-2A^*|=|3A^{-1}-2|A|A^{-1}|=|3A^{-1}-4A^{-1}|=|-A^{-1}|=(-1^3)|A|^{-1}=-\frac{1}{2}$.

$|3A-(A^*)^*|=|3A-|A|A|=|3A-2A|=|A|=2$.

注 此种问题若先计算 A^{-1}，A^*，$(A^*)^*$，既费时，又可能出错. 一定要注意 A^{-1}，$|A|$，A^* 之间的关系式 $|A|A^{-1}=A^*$ 的灵活运用. 另外，此题中 $(A^*)^*=|A^*|(A^*)^{-1}=|A|^{3-1}\cdot\frac{1}{|A|}A=|A|^{3-2}A=|A|A$.

【例 2-4】 $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{20}\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{21}=$ ________.

【解】 应填 $\begin{pmatrix}a_3&a_2&a_1\\b_3&b_2&b_1\\c_3&c_2&c_1\end{pmatrix}$. 注意 $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ 即初等方阵 $E(1,\ 3)$，它左乘于矩阵 A 相当于把 A 的第一、三行交换位置. 它的 20 次幂左乘于 A，即 A 的第一、三两行交换 20 次，结果仍为 A. 同理，它的 21 次幂右乘于 A，相当于把 A 的第一、三两列交换 21 次，结果是 A 的第一、三两列交换了位置.

练　习　2-1

1. 设 A 为 n 阶矩阵，且 $|A|=3$，则 $||A|A'|=$______.

2. 设 $A=\begin{pmatrix}0&0&1&2\\0&0&0&1\\3&3&0&0\\2&1&0&0\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$______，$(A^*)^{-1}=$______，$(A^*)^*=$______.

3. 设 $B=\begin{pmatrix}5&4\\3&2\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}2&1\\-3&4\end{pmatrix}$，且 $BAC=E$，则 $A^{-1}=$______.

4. 设 $A=(1\quad 2\quad 3)$，$B=\left(1\quad \frac{1}{2}\quad \frac{1}{3}\right)$，$C=A'B$，则 $C^k=$______，$C^*=$______.

5. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $(A+3E)^{-1}(A^2-9E)=$______.

(二) 选择题

【例 2-5】 设 A，B 均为 n 阶矩阵，则必有[　　].

(A) $|A+B|=|A|+|B|$；　　(B) $AB=BA$；

(C) $|AB|=|BA|$；　　(D) $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$.

【解】 应选(C). 因为两矩阵和的行列式不一定等于各自行列式的和，所以(A)错；又 A，B 不一定可交换，故(B)错；两矩阵和的逆不一定等于各自逆的和，有时甚至 $A+B$ 可逆，但 A，B 不一定可逆，即 $(A+B)^{-1}$ 存在，A^{-1}，B^{-1} 可能不存在，故(D)错.

【例 2-6】 设 A，B 为 n 阶方阵，满足关系 $AB=0$，则必有[　　].

(A) $A=B=O$；　　(B) $A+B=O$；

(C) $|A|=0$ 或 $|B|=0$；　　(D) $|A|+|B|=0$.

【解】 因 $AB=O$，故 $|AB|=|O|=0$，又 $|AB|=|A||B|$，即 $|A||B|=0$，故 $|A|=0$ 或 $|B|=0$，应选(C).

注　对(A)，(B)，(D)可以分别举出反例.

【例 2-7】 设 A 为 n 阶方阵，且 $|A|=a\neq 0$，则 $|A^*|=$[　　].

(A) a；　　(B) $\frac{1}{a}$；　　(C) a^{n-1}；　　(D) a^n.

【解】 因 $|A|=a\neq 0$，故 A^{-1} 存在，且 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$，故 $A^*A=|A|E$，$|A^*||A|=||A|E|=|A|^n$，$|A^*|=|A|^{n-1}=a^{n-1}$. 应选(C).

【例 2-8】 设 A，B 均为 n 阶非零矩阵，且 $AB=O$，则 $R(A)$，$R(B)$[　　].

(A) 必有一个等于 0；　　(B) 都小于 n；

(C) 一个小于 n，一个等于 n；　　(D) 都等于 n.

【解】 若 $R(A)$，$R(B)$ 中有一个为 n，例如 $R(A)=n$，则 A^{-1} 存在. 由 $AB=O$，

得 $B=A^{-1}O=O$，与 B 为非零矩阵矛盾．故 $R(A)$，$R(B)$都小于 n，即(C)，(D)错．又若 $R(A)$，$R(B)$中有一个为0，例如 $R(A)=0$，则 $A=O$，与 A 为非零矩阵矛盾，故(A)错，应选(B)．

练　习　2-2

1．设 A，B 均为 n 阶可逆矩阵，则 $\left|-2\begin{pmatrix} A' & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}\right|=$[　　　]．

(A)　$(-2)^n|A||B^{-1}|$；　　(B)　$-2|A'||B|$；

(C)　$-2|A||B^{-1}|$；　　(D)　$(-2)^{2n}|A||B|^{-1}$．

2．设 A 是 n 阶对称矩阵，B 是 n 阶反对称矩阵，则下列矩阵中的反对称矩阵是[　　　]．

(A)　BAB；　(B)　ABA；　(C)　$ABAB$；　(D)　$BABA$．

3．设 A，B 均为 n 阶方阵，下列结论正确的是[　　　]．

(A)　若 A，B 均可逆，则 $A+B$ 可逆；

(B)　若 A，B 均可逆，则 AB 可逆；

(C)　若 $A+B$ 可逆，则 $A-B$ 可逆；

(D)　若 $A+B$ 可逆，则 A，B 均可逆．

4．设分块矩阵 $X=\begin{pmatrix} A_1 & \alpha_1 \\ \beta_1 & 1 \end{pmatrix}$，$X^{-1}=\begin{pmatrix} A_2 & \alpha_2 \\ \beta_2 & a \end{pmatrix}$，其中，$A_1$，$A_2$ 为 n 阶矩阵，α_1，α_2 为 $n\times1$ 矩阵，β_1，β_2 为 $1\times n$ 矩阵，a 为实数，则 $a=$[　　　]．

(A)　1；　　(B)　$\beta_1A_1^{-1}\alpha_1$；

(C)　$\dfrac{1}{1-\beta_1A_1^{-1}\alpha_1}$；　　(D)　$\dfrac{1}{1+\beta_1A_1^{-1}\alpha_1}$．

5．设 $A=(a_{ij})$为3阶矩阵，$B=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22}+ka_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+ka_{33} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12}+ka_{13} & a_{13} \end{bmatrix}$，$P_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$P_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix}$，则 $B=$[　　　]．

(A)　AP_1P_2；　(B)　P_1AP_2；　(C)　AP_2P_1；　(D)　P_2AP_1．

三、主观题归类分析

(一) 矩阵的最基本运算

【例2-9】　设 A 是 n 阶矩阵，满足 $AA'=E$，$|A|<0$，求$|A+E|$．

【解】　$|A+E|=|A+AA'|=|A(E+A')|=|A||E+A'|=|A||(E+A)'|$

$$=|A||E+A|=|A||A+E|.$$

因$|A|<0$，$|AA'|=|E|=1$，即$|A|^2=1$，知$|A|=-1$，故有$|A+E|=-|A+E|$，可见$|A+E|=0$.

【例2-10】 设$A=\begin{pmatrix}-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}$，求$A^6$.

【解】 $A^2=AA=\begin{pmatrix}-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}4&-4&-4&4\\-4&4&4&-4\\-4&4&4&-4\\4&-4&-4&4\end{pmatrix}=-4A,$$

故 $A^3=A^2A=-4AA=-4A^2=-4(-4)A=(-4)^2A$,

$A^4=A^2A^2=(-4A)(-4A)=(-4)^2A^2=(-4)^2(-4)A=(-4)^3A$,

$A^5=A^3A^2=(-4)^2A(-4)A=(-4)^3A^2=(-4)^3(-4)A=(-4)^4A$,

$A^6=A^4A^2=(-4)^3A(-4)A=(-4)^4A^2=(-4)^4(-4)A=(-4)^5A$

$=-1024A$

$$=\begin{pmatrix}1024&-1024&-1024&1024\\-1024&1024&1024&-1024\\-1024&1024&1024&-1024\\1024&-1024&-1024&1024\end{pmatrix}$$

注 由求解的过程可见，求方阵A的高次幂时，一定要找出规律性．本题中，$A^n=(-4)^{n-1}A$．这一结论可用数学归纳法加以证明．

【例2-11】 设$A=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&3&0\\0&0&2&1\end{pmatrix}$，求$|A^6|$，$A^4$.

【解】 利用矩阵的分块法，把A写成

$$A=\begin{pmatrix}B_1&O\\O&B_2\end{pmatrix}，其中，B_1=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}，B_2=\begin{pmatrix}3&0\\2&1\end{pmatrix}.$$

则 $|A^6|=|A|^6=(|B_1||B_2|)^6=[(-3)\cdot3]^6=3^{12}$,

$$A^4=\begin{pmatrix}B_1^4&O\\O&B_2^4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}41&40&0&0\\40&41&0&0\\0&0&81&0\\0&0&80&1\end{pmatrix}.$$

【例2-12】 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，求与$A$相乘可交换的矩阵$B$.

【解】 设 $B=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}$，则 $AB=\begin{pmatrix}a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}$，

$BA=\begin{pmatrix}a_1 & a_1+a_2 & a_3\\ b_1 & b_1+b_2 & b_3\\ c_1 & c_1+c_2 & c_3\end{pmatrix}$.

由 $AB=BA$ 得对应元素之间的关系式

$a_1+b_1=a_1$，$a_2+b_2=a_1+a_2$，$a_3+b_3=a_3$，

$b_1=b_1$，$b_2=b_1+b_2$，$b_3=b_3$，

$c_1=c_1$，$c_2=c_1+c_2$，$c_3=c_3$.

故有 $b_1=b_3=0$，$c_1=0$. 所以与 A 可交换的矩阵 $B=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ 0 & b_2 & 0\\ 0 & c_2 & c_3\end{pmatrix}$，其中 a_1，a_2，a_3，b_2，c_2，c_3 可取任意实数.

练 习 2-3

1. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$，求 $2A+3B$，$AB-BA$，A^2-B^2.

2. 当 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 时，$A^6=E$，求 A^{11}.

3. 设 $P^{-1}AP=\Lambda$，$P=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，求 A^{11}.

4. 计算 $\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}^n$.

5. 设 $f(x)=x^2-x+1$，$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$，求 $f(A)$.

6. 求满足方程 $A^2=O$ 的所有 2 阶矩阵.

7. 计算 $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^n$，并由此计算 $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}^4$.

(二) 矩阵求逆

【例 2-13】 判断矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\1&3&0&0\\1&0&2&3\\0&1&1&2\end{pmatrix}$是否可逆，若可逆，则用分块矩阵的方法求 A^{-1}.

【解】 把 A 分块如下

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc}1&2&0&0\\1&3&0&0\\ \hdashline 1&0&2&3\\0&1&1&2\end{array}\right)=\begin{pmatrix}C&O\\E&B\end{pmatrix},$$

则 $|A|=|C||B|=1\times1=1\neq0$，故 A 可逆.

又 $A^{-1}=\begin{pmatrix}C&O\\E&B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}C^{-1}&O\\-B^{-1}C^{-1}&B^{-1}\end{pmatrix}$，而 $C^{-1}=\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix}$，$B^{-1}=\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}$.

故
$$A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-2&0&0\\-1&1&0&0\\-9&7&2&-3\\5&-4&-1&2\end{pmatrix}.$$

【例 2-14】 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}$，求$(A^*)^{-1}$.

【解】 因 $A^*=|A|A^{-1}$，故$(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$. 又因$|A|=10$，

故
$$(A^*)^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}.$$

注 若先求出 A^*，再求 A^*的逆阵，或利用关系式$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$来计算则较为麻烦.

练 习 2-4

1. 求下列矩阵的逆矩阵：

(1) $A=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta&0\\-\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}$；　(2) $B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$；

(3) $C=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$；　　(4) $D=\begin{pmatrix}2&3&0&0&0\\2&1&0&0&0\\0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$.

2. 已知矩阵 A 的逆矩阵 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$，求 A^* 的逆矩阵.

3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0&0\\0&0&2&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-1&0&0\\n&0&0&\cdots&0&0&0\\0&0&0&\cdots&0&2&1\\0&0&0&\cdots&0&5&3\end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

(三) 矩阵方程

【例 2-15】 已知矩阵 X 满足方程 $\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\1&-2\end{pmatrix}$，求 X.

【解】 X 左边的矩阵不可逆(其行列式为 0)，

故设

$$X=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\\x_{31}&x_{32}\end{pmatrix},$$

则得线性方程组

$$\begin{cases}x_{11}+x_{31}=1,\\2x_{11}+x_{21}-x_{31}=0,\\-x_{11}-x_{21}+2x_{31}=1,\end{cases}\qquad\begin{cases}x_{12}+x_{32}=0,\\2x_{12}+x_{22}-x_{32}=2,\\-x_{12}-x_{22}+2x_{32}=-2,\end{cases}$$

由此解得

$$\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{21}\\x_{31}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix},\qquad\begin{pmatrix}x_{12}\\x_{22}\\x_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}\quad(k_1,\ k_2\in R),$$

故所求矩阵

$$X=\begin{pmatrix}1-k_1&-k_2\\-2+3k_1&2+3k_2\\k_1&k_2\end{pmatrix}\quad(k_1,\ k_2\in R).$$

【例 2-16】 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $AX+E=A^2+X$，求矩阵 X.

【解】 由 $AX+E=A^2+X$ 化简得 $(A-E)X=A^2-E$. 而

$$A-E=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

可逆，故 $X=(A-E)^{-1}(A^2-E)=(A-E)^{-1}(A-E)(A+E)=A+E$

$$=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}.$$

【例 2-17】 设 4 阶矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$，又矩阵 X 满足方程 $X(E-C^{-1}B)'C'=E$，化简方程并求 X.

【解】 因 $X(E-C^{-1}B)'C'=X[C(E-C^{-1}B)]'=X(C-B)'$，故方程变为 $X(C-B)'=E$. 又

$$(C-B)'=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\3&2&1&0\\4&3&2&1\end{pmatrix}$$

可逆，且

$$[(C-B)']^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\3&2&1&0\\4&3&2&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix},$$

故 $X=E[(C-B)']^{-1}=[(C-B)']^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}.$

【例 2-18】 设方阵 X 满足 $X^2-X-2E=O$，证明 X，$X+2E$ 都可逆，并求 X^{-1}，$(X+2E)^{-1}$.

【解】 方程化为 $X^2-X=2E$，即 $X(X-E)=2E$，取行列式得 $|X||X-E|=|2E|\neq 0$，故 $|X|\neq 0$，即 X 可逆，又因为 $X\left[\frac{1}{2}(X-E)\right]=E$，故 $X^{-1}=\frac{1}{2}(X-E)$.

方程也可化为 $X^2=X+2E$，故 $|X+2E|=|X^2|=|X|^2\neq 0$，即 $X+2E$ 可逆.

$$(X+2E)^{-1}=(X^2)^{-1}=(X^{-1})^2=\left[\frac{1}{2}(X-E)\right]^2=\frac{1}{4}(X-E)^2$$

$$=\frac{1}{4}(X^2-2X+E)=\frac{1}{4}(3E-X).$$

练 习 2-5

1. 解矩阵方程 $X\begin{bmatrix}3 & -2\\5 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\-5 & 6\end{bmatrix}$.

2. 设分块矩阵 $\begin{pmatrix}A & B\\C & D\end{pmatrix}$ 中 A 为可逆矩阵，求矩阵 $\begin{bmatrix}X & Y\\Z & W\end{bmatrix}$，使 $\begin{bmatrix}X & Y\\Z & W\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & B\\C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B\\O & F\end{bmatrix}$.

3. 设 3 阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\0 & \frac{1}{4} & 0\\0 & 0 & \frac{1}{7}\end{bmatrix}$，矩阵 X 满足 $A^{-1}XA=6A+XA$，求矩阵 X.

4. 求满足方程 $\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\4 & -2 & -1\\-3 & 1 & 2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\1 & 0 & -1\\-2 & 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0 & -1\\1 & -3 & 0\\-2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ 的矩阵 X.

（四）矩阵求秩

【例 2-19】 求矩阵的秩.

(1) $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & 2\\1 & -1 & 2 & -1\\1 & 3 & -4 & 4\end{pmatrix}$；(2) $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1 & -3 & -2\\2 & -1 & 3 & 1 & -3\\7 & 0 & 5 & -1 & -8\end{pmatrix}$

【解】 (1)

$$A\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -1\\3 & 1 & 0 & 2\\1 & 3 & -4 & 4\end{pmatrix}\underset{r_4-r_1}{\overset{r_2-3r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -1\\0 & 4 & -6 & 5\\0 & 4 & -6 & 5\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3-r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -1\\0 & 4 & -6 & 5\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

故 $R(A)=2$.

(2)

$$B\overset{r_1-r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 3 & -4 & -4 & 1\\2 & -1 & 3 & 1 & -3\\7 & 0 & 5 & -1 & -8\end{pmatrix}\underset{r_3-7r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 3 & -4 & -4 & 1\\0 & -7 & 11 & 9 & -5\\0 & -21 & 33 & 27 & -15\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3-3r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 3 & -4 & -4 & 1\\0 & -7 & 11 & 9 & -5\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

故 $R(B)=2$.

【例 2-20】 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 2 & -1 & \lambda & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{pmatrix}$的秩.

【解】

$$A \underset{r_2-2r_3}{\overset{r_1-r_3}{\sim}} \begin{pmatrix}0 & \lambda-10 & 5 & 1\\ 0 & -21 & \lambda+12 & 3\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{pmatrix} \underset{\substack{c_3+6c_1\\ c_4-c_1}}{\overset{c_2-10c_1}{\sim}} \begin{pmatrix}0 & \lambda-10 & 5 & 1\\ 0 & -21 & \lambda+12 & 3\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{r_1\leftrightarrow r_3\\ r_3-3r_2}}{\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-10 & 5 & 1\\ 0 & 9-3\lambda & \lambda-3 & 0\end{pmatrix} \underset{c_3-5c_4}{\overset{c_2-(\lambda-10)c_4}{\sim}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-3 & 0\end{pmatrix},$$

可见，当 $\lambda=3$ 时，$R(A)=2$；当 $\lambda\neq3$ 时，$R(A)=3$.

练 习 2-6

1. 求下列矩阵的秩

(1) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 3 & 2\\ 3 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$； (2) $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & -2 & -3\\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4\\ 2 & 3 & -4 & -8 & -3\\ 3 & 8 & 1 & -5 & -8\end{pmatrix}$.

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 4 & k & 1\end{pmatrix}$，当 k 取何值时，$R(A)=3$? 当 k 取何值时，$R(A)<3$?

3. 求 λ 的值，使矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1 & 4\\ \lambda & 4 & 10 & 1\\ 1 & 7 & 17 & 3\\ 2 & 2 & 4 & 3\end{pmatrix}$的秩最小.

(五) 用逆矩阵解线性方程组

【例 2-21】 求线性方程组$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=1\\ 2x_1+2x_2+5x_3=2\\ 3x_1+5x_2+x_3=3\end{cases}$的解.

【解】 记 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 5\\ 3 & 5 & 1\end{pmatrix}$，则 $|A|=15$，$A^{-1}=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}-23 & 13 & 4\\ 13 & -8 & 1\\ 4 & 1 & -2\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=$

$A^{-1}B=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}-23 & -13 & 4\\ -13 & -8 & 1\\ 4 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}15\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$. 方程组的解为 $x_1=1$，$x_2=x_3=0$.

【例 2-22】 一次解出下列三个同系数的线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0,\\2x_1+2x_2+x_3=2,\\3x_1+4x_2+3x_3=1;\end{cases}\quad\begin{cases}y_1+2y_2+3y_3=0,\\2y_1+2y_2+y_3=1,\\3y_1+4y_2+3y_3=0;\end{cases}\quad\begin{cases}z_1+2z_2+3z_3=1,\\2z_1+2z_2+z_3=0,\\3z_1+4z_2+3z_3=1.\end{cases}$$

【解】 三个方程组可分别写成 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}_1$，$\boldsymbol{AY}=\boldsymbol{B}_2$，$\boldsymbol{AZ}=\boldsymbol{B}_3$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}$.

把三个方程组表示成一个矩阵方程

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{XYZ})=(\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_3),$$

其中

$$(\boldsymbol{XYZ})=\begin{bmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{bmatrix},\quad(\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_3)=\begin{bmatrix}0&0&1\\2&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}.$$

因为 $|\boldsymbol{A}|=2$，故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{bmatrix}$，

故 $(\boldsymbol{XYZ})=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_3)=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\2&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&3&-1\\-\dfrac{7}{2}&-3&1\\1&1&0\end{bmatrix}$.

即三个方程组的解分别为

$$\begin{cases}x_1=4,\\x_2=-\dfrac{7}{2},\\x_3=1;\end{cases}\quad\begin{cases}y_1=3,\\y_2=-3,\\y_3=1;\end{cases}\quad\begin{cases}z_1=-1,\\z_2=1,\\z_3=0.\end{cases}$$

练 习 2-7

1. 利用逆矩阵求解下列线性方程组：

(1) $\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=5,\\2x_1-x_2+x_3=6,\\x_1+5x_2=-3;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}7x+2y+3z=15,\\5x-3y+2z=15,\\10x-11y+5z=66.\end{cases}$

2. 已知一个二次多项式 $f(x)$ 满足 $f(1)=-1$，$f(-1)=9$，$f(2)=-3$，求此二次多项式 $f(x)$.

3. 一次解出下列三个同系数的线性方程组：

$$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=6,\\2x_1+3x_2-7x_3=16,\\5x_1+2x_2+x_3=16;\end{cases}\quad\begin{cases}2y_1+y_2+y_3=7,\\2y_1+3y_2-7y_3=-13,\\5y_1+2y_2+y_3=12;\end{cases}\quad\begin{cases}2z_1+z_2+z_3=-1,\\2z_1+3z_2-7z_3=-9,\\5z_1+2z_2+z_3=-4.\end{cases}$$

四、释疑解难

(一) 矩阵的可逆性

【例 2-23】 已知 n 阶矩阵 A 满足 $2A(A-E)=A^3$，证明：$E-A$ 可逆，且求 $(E-A)^{-1}$.

【证】 由 $2A(A-E)=A^3$ 得 $A^3-2A^2+2A=O$，即 $A^3-2A^2+2A+E=E$. 于是 $(E-A)(A^2-A+E)=E$，可见，$E-A$ 可逆且 $(E-A)^{-1}=A^2-A+E$.

【例 2-24】 设 A，B 为 n 阶方阵. 证明：若 $E-AB$ 可逆，则 $E-BA$ 也可逆.

【证】 因 $E-AB$ 可逆，故存在 n 阶方阵 C，使得 $C(E-AB)=(E-AB)C=E$，即 $C-CAB=C-ABC=E$，或写成 $CAB=ABC=C-E$. 由 $ABC=C-E$ 左乘 B，右乘 A 得 $BABCA=B(C-E)A=BCA-BA$，故有 $BCA-BA-BABCA=O$. 两边加 E 得 $E+BCA-BA-BABCA=E$，即 $(E-BA)(E+BCA)=E$. 可见，$E-BA$ 可逆，且 $(E-BA)^{-1}=E+BCA$.

【例 2-25】 设 A，B 均可逆，证明：分块矩阵 $\begin{bmatrix}A&O\\C&B\end{bmatrix}$ 也可逆，且

$$\begin{bmatrix}A&O\\C&B\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A^{-1}&O\\-B^{-1}CA^{-1}&B^{-1}\end{bmatrix}.$$

【证】 设分块矩阵 $\begin{bmatrix}X&Y\\Z&W\end{bmatrix}$ 使 $\begin{bmatrix}A&O\\C&B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X&Y\\Z&W\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E&O\\O&E\end{bmatrix}$，

即

$$\begin{bmatrix}AX&AY\\CX+BZ&CY+BW\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E&O\\O&E\end{bmatrix},$$

比较对应子块得

$AX=E$，故 $X=A^{-1}$；$AY=0$，故 $Y=A^{-1}O=O$；

$CX+BZ=O$，故 $BZ=-CA^{-1}$，$Z=-B^{-1}CA^{-1}$；

$CY+BW=E$，故 $W=B^{-1}$.

于是可知 $\begin{bmatrix}A&O\\C&B\end{bmatrix}$ 可逆，且其逆矩阵为 $\begin{bmatrix}A^{-1}&O\\-B^{-1}CA^{-1}&B^{-1}\end{bmatrix}$.

【例 2-26】 设 n 阶矩阵 A 可逆. 证明：A^* 也可逆，且 $(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$.

【证】 由 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$，得 $A^*=|A|A^{-1}$，故 $|A^*|=||A|A^{-1}|=|A|^n\cdot\frac{1}{|A|}=|A|^{n-1}\neq0$，即 A^* 可逆.

又由 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$，左乘 A 得 $E=\frac{1}{|A|}AA^*$，可见，$(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$.

练 习 2-8

1. 已知 n 阶矩阵 A 满足 $A^2+2A-3E=O$. 证明：$A+4E$ 可逆，并求出 $(A+4E)^{-1}$.

2. 设 A 为 n 阶矩阵，且对某个自然数 m，有 $A^m=O$. 证明：$E-A$ 可逆，并求出 $(E-A)^{-1}$.

3. 设 n 阶矩阵 A，B 满足 $A+B=AB$. 证明：$A-E$ 可逆. 当 $B=\begin{bmatrix}1 & -3 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$ 时，求 A.

4. 设 A，B 均可逆. 证明：分块矩阵 $\begin{bmatrix}A & C\\ O & B\end{bmatrix}$ 可逆，且

$$\begin{bmatrix}A & C\\ O & B\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1}\\ O & B^{-1}\end{bmatrix}.$$

5. 若 n 阶矩阵 $A\neq E$，且 $A^2=A$. 证明：A 不可逆.

6. 设 A 为 n 阶非零矩阵. 证明：当 $A^*=A'$ 时，A 可逆.

(二) 矩阵的秩

【例 2-27】 设 A，B 为行数相同的矩阵，记 (A, B) 为 A 与 B 按行并在一起的矩阵. 证明：$R(A, B)\leqslant R(A)+R(B)$.

【证】 设 $R(A)=p$，$R(B)=q$，$R(A, B)=m$，又设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ 为 A 的列向量组的一个极大无关组，$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_q$ 为 B 的列向量组的一个极大无关组，$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m$ 为 (A, B) 的列向量组的一个极大无关组. 则 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_q$ 线性表示. 因 $\gamma_1, \cdots, \gamma_m$ 线性无关，故 $m\leqslant p+q$（这一结论可参见第三讲一(二)14.）. 即 $R(A, B)\leqslant R(A)+R(B)$.

【例 2-28】 设 A 是 n 阶矩阵. 证明：$R(A^*)=\begin{cases}n, & R(A)=n;\\ 1, & R(A)=n-1;\\ 0, & R(A)<n-1.\end{cases}$

【证】 当 $R(A)=n$ 时，$|A|\neq 0$. 由 $AA^*=|A|E$ 取行列式得 $|AA^*|=|A||A^*|=||A|E|=|A|^n|E|=|A|^n\neq 0$ 得 $|A^*|\neq 0$，故 A^* 可逆，$R(A^*)=n$.

当 $R(A)=n-1$ 时，$|A|=0$. 但 A 至少有一个 $n-1$ 阶子式不为 0，由 A^* 的定义知，A^* 中至少有一个元素不为 0，故 $R(A^*)\geqslant 1$. 又由 $AA^*=|A|E=O$ 知 A^* 的列向量都是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解，而当 $R(A)=n-1$ 时，$Ax=0$ 的基础解系只包含一个解向量，故 $R(A^*)\leqslant 1$. 综上所述，$R(A^*)=1$.

当 $R(A)<n-1$ 时，A 的所有 $n-1$ 阶子式全为 0，故 A^* 为零矩阵，即 $R(A^*)=0$.

【例 2-29】 设 AB，C，D 均为 $n(\geqslant 1)$ 阶方阵. 若分块矩阵 $G=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$，且 $AC=CA$，$AD=CB$，又行列式 $|A|\neq 0$. 证明：$n\leqslant R(G)<2n$.

【证】 因 G 中子式 A 的行列式 $|A|\neq 0$；故 $R(G)\geqslant n$. 又因为

$$\begin{pmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

两边取行列式得

$$\begin{vmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{vmatrix},$$

即$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|A||D-CA^{-1}B|=|AD-ACA^{-1}B|=|AD-CAA^{-1}B|=|AD-CB|=0$.

于是 $R(G)<2n$，即 $n\leqslant R(G)<2n$.

【例 2-30】 设 A 为 $s\times n$ 矩阵，B 为 $n\times m$ 矩阵. 证明：$R(AB)\geqslant R(A)+R(B)-n$.

【证】 设 $R(A)=r_1$，则 A 的标准形为$\begin{pmatrix} E_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix}$. 故有 s 阶可逆矩阵 P 及 n 阶可逆矩阵 Q，使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} E_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

从而 $PAB=PAQQ^{-1}B=\begin{pmatrix} E_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix}Q^{-1}B$，用 b_1，b_2，…，b_{r_1}表示 $Q^{-1}B$ 的前 r_1 行，则

$$PAB=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{r_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

即用$\begin{pmatrix} E_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix}$左乘 $Q^{-1}B$，将只剩下 $Q^{-1}B$ 的前 r_1 行，而其余各行均为零行. 因 P，Q 可逆，故

$$R(PAB)=R(AB),\ R(Q^{-1}B)=R(B).$$

设 $R(B)=r_2$，从 $Q^{-1}B$ 的行向量中任取 r_1 行，则剩下的 $n-r_1$ 个行向量至多全都线性无关，于是取出的 r_1 个行向量中线性无关的个数最少为 $r_2-(n-r_1)$个. 这样

$$R(AB)=R(PAB)\geqslant r_2-(n-r_1)=r_1+r_2-n=R(A)+R(B)-n.$$

练 习 2-9

1. 设 A 为 n 阶方阵. 证明：若 $A^2=A$，则 $R(A)+R(A-E)=n$.

2. 设 A，B 均为 $m\times n$ 矩阵. 证明：$R(A+B)\leqslant R(A)+R(B)$.

3. 设 $A=(a_1\,a_2\cdots\,a_n)'$，$B=(b_1\,b_2\cdots\,b_n)'$为两个非零列矩阵. 计算 AB'和 $A'B$，并证明：$R(AB')=1$.

(三) 对称矩阵与反对称矩阵

【例 2-31】 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，证明：AA'和$A'A$ 都是对称矩阵.

【证】 由矩阵对称的定义，因

$$(AA')'=(A')'A'=AA',$$

故 AA'是对称矩阵. 类似地，因

$$(A'A)'=A'(A')'=A'A,$$

故 $A'A$ 也是对称矩阵.

【例 2-32】 设 A，B 均为n 阶对称矩阵，证明：AB 是对称矩阵的充要条件是A，B 可交换，即 $AB=BA$.

【证】 必要性：设 AB 是对称阵，则 $AB=(AB)'=B'A'=BA$，故 A，B 可交换.

充分性：若 $AB=BA$，则$(AB)'=B'A'=BA=AB$，故 AB 为对称阵.

【例 2-33】 设可逆矩阵 A 的伴随矩阵A^*反对称，证明：A 的转置矩阵A'也是反对称的.

【证】 因 A^*反对称，$A^*=|A|A^{-1}$，故 A^{-1}也是反对称的. 又 $AA^{-1}=E$，故

$$(AA^{-1})'=(A^{-1})'A'=-A^{-1}A'=E'=E,$$

因此，$-A'=(A^{-1})^{-1}=A=(A')'$，即 A'是反对称的.

【例 2-34】 设 $A=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$，其中 $a_i\neq a_j(i\neq j;\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$. 证明：与 A 可交换的矩阵只能是对角矩阵.

【证】 设 $B=(b_{ij})$为与 A 可交换的矩阵，则由 $AB=BA$，有

$$\begin{pmatrix} a_1b_{11} & a_1b_{12} & \cdots & a_1b_{1n} \\ a_2b_{21} & a_2b_{22} & \cdots & a_2b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_{n1} & a_nb_{n2} & \cdots & a_nb_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11}a_1 & b_{12}a_2 & \cdots & b_{1n}a_n \\ b_{21}a_1 & b_{22}a_2 & \cdots & b_{2n}a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1}a_1 & b_{n2}a_2 & \cdots & b_{nn}a_n \end{pmatrix}.$$

比较对应元素可得 $a_ib_{ij}=b_{ij}a_j$，i，$j=1$，2，$\cdots$，n. 但因 $i\neq j$ 时$a_i\neq a_j$，故 $b_{ij}=0$，$i\neq j$. 这说明矩阵 B 除主对角线元素之外的所有元素均为 0，即 B 为对角矩阵.

练 习 2-10

1. 设 A 为主对角线元素均为 0 的 4 阶实对称可逆矩阵，矩阵

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l \end{pmatrix}\quad (k,\ l>0).$$

求$|E+AB|$及 $E+AB$ 可逆的条件. 当 $E+AB$ 可逆时，证明：$(E+AB)^{-1}A$ 是对称矩阵.

2. 设 A，B 为n 阶可逆矩阵，证明如下四个式子等价：

(1) $AB=BA$；(2) $AB^{-1}=B^{-1}A$；(3) $A^{-1}B=BA^{-1}$；(4) $A^{-1}B^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

3. 设矩阵 B，C 都与 A 可交换，证明：$B+C$，BC 也与 A 可交换.

4. 证明：任一 n 阶矩阵都可以表示为一个对称矩阵和一个反对称矩阵之和.

5. 设 E_{ij}为第 i 行第 j 列元素是 1，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵，$A=(a_{ij})$是任一 n 阶矩阵，证明：若 $AE_{12}=E_{12}A$，则当 $k\neq 1$ 时，$a_{k1}=0$；当 $k\neq 2$ 时，$a_{2k}=0$.

(四) 矩阵的行列式

【例 2-35】 设 A，B 为 n 阶方阵，且 $A'A=AA'=E$，$B'B=BB'=E$，$|A|=-|B|$，证明：$|A+B|=0$.

【证】
$$\begin{aligned}|A+B|&=|BB'A+BA'A|=|B(B'+A')A|=|B(B+A)'A|\\&=|B||(B+A)'||A|=|B||A+B||A|\\&=-|A|^2|A+B|,\end{aligned}$$
故有$(1+|A|^2)|A+B|=0$，即$|A+B|=0$.

【例 2-36】 设 A 为$m\times n$ 矩阵，B 为$n\times m$ 矩阵，且 $m>n$，证明：$|AB|=0$.

【证】 因 $R(A)\leqslant\min\{m,n\}=n$，$R(B)\leqslant\min\{m,n\}=n$，故
$$R(AB)\leqslant\min\{R(A),R(B)\}\leqslant n<m,$$
但 AB 为m 阶方阵，故 AB 是降秩的，即$|AB|=0$.

注 区别一个矩阵的行列式是否为 0，考虑该矩阵是满秩还是降秩是一个有效的方法.

【例 2-37】 设 n 阶方阵的伴随矩阵为A^*，证明：

(1) 若$|A|=0$，则$|A^*|=0$； (2) $|A^*|=|A|^{n-1}$.

【证】 (1) 若$|A|=0$，则$\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=0(i,j=1,2,\cdots,n)$，

即
$$\begin{aligned}&a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}+\cdots+a_{n1}A_{n1}=|A|=0,\\&a_{11}A_{12}+a_{21}A_{22}+a_{31}A_{32}+\cdots+a_{n1}A_{n2}=0,\\&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\&a_{11}A_{1n}+a_{21}A_{2n}+a_{31}A_{3n}+\cdots+a_{n1}A_{nn}=0,\end{aligned}$$
其中 a_{ij}为A 的第i 行第j 列元素，A_{ij}为其代数余子式，这样
$$\begin{aligned}|A^*|&=\begin{vmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&A_{3n}&\cdots&A_{nn}\end{vmatrix}\\&=\frac{1}{a_{11}}\begin{vmatrix}a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\a_{11}A_{12}+a_{21}A_{22}+\cdots+a_{n1}A_{n2}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{11}A_{1n}+a_{21}A_{2n}+\cdots+a_{n1}A_{nn}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{vmatrix}\\&=\frac{1}{a_{11}}\begin{vmatrix}0&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\0&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{vmatrix}=0.\end{aligned}$$

当 $a_{11}=0$ 而 $a_{k1}\neq 0$ 时，可类似计算．若 $a_{k1}=0(k=1,2,\cdots,n)$，则 A^*中必有零

行，仍有$|A^*|=0$.

(2) 当$|A|=0$时，因$|A^*|=0$，故$|A^*|=|a|^{n-1}$成立．当$|A|\neq 0$时，因$AA^*=|A|E$，两边取行列式得$|A||A^*|=||A|E|=|A|^n|E|=|A|^n$，故$|A^*|=|A|^{n-1}$成立．

注 凡涉及到伴随矩阵A^*的问题，等式$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$，$AA^*=|A|E$是经常用到的，这应引起足够的重视．

【例 2-38】 设A为n阶矩阵，证明：存在非零n阶矩阵B，使$AB=O$的充要条件是$|A|=0$.

【证】 必要性：若$AB=O$，且$B\neq O$，则因B的每一列向量都是线性方程组$Ax=0$的解向量，故$Ax=0$有非零解，由克莱姆法则知$|A|=0$.

充分性：若$|A|=0$，则线性方程组$Ax=0$必有非零解，任取一个非零解向量与$n-1$个零向量组成矩阵B，则必有$AB=O$.

练　习　2-11

1. 已知3阶矩阵$A=(a_{ij})$满足条件：$a_{11}\neq 0$及$a_{ij}=A_{ij}(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$，其中$A_{ij}$为$a_{ij}$的代数余子式，证明：$|A|=1$.

2. 设矩阵A为n阶可逆矩阵，A的所有元素均为整数，证明：A^{-1}的所有元素均为整数的充要条件是$|A|=\pm 1$.

3. 设A为$m\times n$矩阵，B为$n\times m$矩阵，E_m，E_n分别为m阶、n阶单位矩阵，又设分块矩阵$R=\begin{pmatrix} E_n & B \\ A & E_m \end{pmatrix}$，$S=\begin{pmatrix} E_n & O \\ -A & E_m \end{pmatrix}$，计算$RS$，并证明：$|E_m-AB|=|E_n-BA|$.

4. 设A为n阶矩阵，证明：存在不相等的n阶矩阵B，C，使得$AB=AC$的充要条件是$|A|=0$.

五、单元统测

第一套

一、填空题

1. 设A为3阶方阵，且$|A|=4$，则$|2A^*-6A^{-1}|=$________.

2. 设$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$，则$A^{-1}=$________．$(A^*)^{-1}=$________.

3. 设$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则$A=$________.

4. 设 $A=\begin{pmatrix}2&0&4\\-1&1&a\\1&2&6\end{pmatrix}$，且 $R(A)=2$，则 $a=$______.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为5阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}^*|=16$，则 $|\boldsymbol{A}|=$______.

二、选择题

1. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，运算[　　]正确.

(A) $(\boldsymbol{AB})^k=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$;

(B) $||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}|$;

(C) $\boldsymbol{B}^2-\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})$;

(D) 若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 可逆，$k\neq0$，则 $(k\boldsymbol{AB})^{-1}=\frac{1}{k}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

2. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆矩阵，则[　　].

(A) $[(\boldsymbol{AB})^2]^{-1}=(\boldsymbol{B}^2)^{-1}(\boldsymbol{A}^2)^{-1}$;

(B) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}$;

(C) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$;

(D) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{QP}$ 使 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

3. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，则必有[　　].

(A) $\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{E}$;　　(B) $\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{E}$;

(C) $\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{E}$;　　(D) $\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{E}$.

4. 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$，则[　　].

(A) $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$;　　(B) $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{C})$;

(C) $R(\boldsymbol{A})\leqslant R(\boldsymbol{B})$;　　(D) $R(\boldsymbol{A})\geqslant\max\{R(\boldsymbol{B}),\ R(\boldsymbol{C})\}$.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为阶 n 方阵，则[　　].

(A) $(-\boldsymbol{A})^*=(-1)^{n-1}\boldsymbol{A}^*$;　　(B) $(-\boldsymbol{A})^*=-\boldsymbol{A}^*$;

(C) $(-\boldsymbol{A})^*=(-1)^n\boldsymbol{A}^*$;　　(D) $(-\boldsymbol{A})^*=\boldsymbol{A}^*$.

三、设矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$，求满足 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})'\boldsymbol{C}'=\boldsymbol{E}$ 的矩阵 $\boldsymbol{X}$.

四、求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&0&0&0\\0&1&-1&2\\0&-2&-1&-2\\0&4&3&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

五、求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-4&3&1&0\\1&-2&1&-4&2\\0&1&-1&3&1\\4&-7&4&-4&5\end{pmatrix}$ 的秩.

六、利用逆矩阵求如下线性方程组的解

$$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3+x_4=1,\\ x_1+2x_2+x_3+x_4=1,\\ x_1+x_2+2x_3+x_4=1,\\ x_1+x_2+x_3+2x_4=1.\end{cases}$$

七、证明

1. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})$，则 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}$.

2. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，则 $R(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n$.

第二套

一、填空题

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{2}$，则 $|(2\boldsymbol{A}^*)^{-1}|=$________.

2. 5 阶方阵的标准形共有________种.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 5×3 矩阵，增加一行变为 $\boldsymbol{B}$，则 $R(\boldsymbol{B})$________ $R(\boldsymbol{A})$.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 5 阶方阵，且 $R(\boldsymbol{A})=3$，则 $R(\boldsymbol{A}^*)=$________.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A}=$________.

二、选择题

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 4 & 6 & 5\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{E}(1,2)\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}(2(3),1)=$[ ].

(A) $\begin{pmatrix}4 & 6 & 5\\ 1 & 3 & -2\end{pmatrix}$；　(B) $\begin{pmatrix}4 & 18 & 5\\ 1 & 6 & -2\end{pmatrix}$；

(C) $\begin{pmatrix}7 & 15 & -1\\ 1 & 3 & -2\end{pmatrix}$；　(D) $\begin{pmatrix}21 & 13 & 13\\ 6 & 4 & 5\end{pmatrix}$.

2. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，$\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$，则[ ]不一定成立.

(A) $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{BCA}$；　(B) $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{CBA}$；

(C) $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{BAC}$；　(D) $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{CAB}$.

3. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，则[ ]

(A) $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 可逆，必有 $\boldsymbol{AB}$ 可逆；

(B) $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 不可逆，必有 $\boldsymbol{AB}$ 不可逆；

(C) $\boldsymbol{A}$ 且 $\boldsymbol{B}$ 可逆，必有 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆；

(D) $\boldsymbol{A}$ 且 $\boldsymbol{B}$ 不可逆，必有 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 不可逆.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$，则 $R(\boldsymbol{A})=$[ ].

(A) 0；　(B) 1；　(C) 0 或 1；　(D) 2.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶反对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶对称矩阵，则[ ]是反对称矩阵.

(A) $\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{AB}$；　(B) $\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{AB}$；

(C) $(\boldsymbol{BA})^2$；　(D) $\boldsymbol{ABA}$.

三、解矩阵方程

$$\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1&1&\cdots&1\\0&0&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n\\0&1&2&\cdots&n-1\\0&0&1&\cdots&n-2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

四、求方阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5&6&0&0\\6&7&0&0\\0&0&4&11\\0&0&3&8\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

五、求矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&2&-4\\-1&-4&5\\3&1&7\\0&5&-10\\2&3&0\end{pmatrix}$ 的秩.

六、设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，证明：当 $n\geqslant3$ 时，$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}^{n-2}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$，并求 $\boldsymbol{A}^{100}$.

七、证明：$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$ 为 n 阶方阵，$\boldsymbol{A}$ 可逆时，

1. $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{D}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}|$；

2. 当 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 可交换时，$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{D}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}|$.

六、答　案

练　习　2-1

1. 3^{n+1}；　2. $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&-\frac{1}{3}&1\\0&0&\frac{2}{3}&-1\\1&-2&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$，$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&0&1&2\\0&0&0&1\\3&3&0&0\\2&1&0&0\end{pmatrix}$；

3. $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}13&10\\-3&-4\end{pmatrix}$；　　4. $\boldsymbol{C}^k=3^{k-1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\2&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}^*=\boldsymbol{O}$；

5. $\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$.

练　习　2-2

1.(D)；　2.(B)；　3.(B)；　4.(C)；　5.(B).

练　习　2-3

1. $2A+3B=\begin{pmatrix}2&7&2\\10&1&0\\2&8&3\end{pmatrix}$, $AB-BA=\begin{pmatrix}2&6&1\\-6&-2&-2\\-3&3&0\end{pmatrix}$, $A^2-B^2=\begin{pmatrix}4&0&1\\-2&2&2\\-1&-3&0\end{pmatrix}$.

2. $A^{11}=A^{12}\cdot A^{-1}=(A^6)^2\cdot A^{-1}=EA^{-1}=A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&\sqrt{3}\\-\sqrt{3}&1\end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix}2731&2732\\-683&-684\end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix}\lambda^n&n\lambda^{n-1}&\frac{1}{2}n(n-1)\lambda^{n-2}\\0&\lambda^n&n\lambda^{n-1}\\0&0&\lambda^n\end{pmatrix}$.　　5. $f(A)=\begin{pmatrix}5&1&3\\8&0&3\\-2&1&-2\end{pmatrix}$.

6. $A=\begin{pmatrix}\sqrt{-bc}&B\\C&-\sqrt{-bc}\end{pmatrix}$, b, $c\in R$, $bc\leqslant 0$.

7. $\begin{pmatrix}\cos n\theta&\sin n\theta\\-\sin n\theta&\cos n\theta\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{2}&\sin\frac{\pi}{2}\\-\sin\frac{\pi}{2}&\cos\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

练　习　2-4

1. (1) $A^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}$;　　(2) $B^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$;

(3) $C^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$;　　(4) $D^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&0&0&0\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$.

2. $(A^*)^{-1}=\begin{pmatrix}5&-2&-1\\-2&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$.

3. $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&\frac{1}{n}&0&0\\1&0&\cdots&0&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&\cdots&0&0&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&\frac{1}{n-1}&0&0&0\\0&0&\cdots&0&0&3&-1\\0&0&\cdots&0&0&-5&2\end{pmatrix}$.

练　习　2-5

1. $X=\begin{pmatrix}3&-2\\5&-4\end{pmatrix}$;　2. $\begin{pmatrix}E&O\\-CA^{-1}&E\end{pmatrix}$;　3. $X=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$;　4. $X=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2&-37&-8\\-1&-34&-6\\3&-38&-6\end{pmatrix}$.

练　习　2-6

1. (1) $R(A)=4$;　(2) $R(B)=3$.

2. $k\neq 17$ 时，$R(A)=3$；$k=17$ 时，$R(A)=2<3$.

3. $\lambda=0$ 时，$R(A)=2$ 最小.

练　习　2-7

1. (1) $x_1=2$，$x_2=-1$，$x_3=1$；　(2) $x=2$，$y=-1$，$z=1$.

2. $f(x)=x^2-5x+3$.

3. $x_1=3$，$x_2=1$，$x_3=-1$；$y_1=1$，$y_2=2$，$y_3=3$；$z_1=-1$，$z_2=0$，$z_3=1$.

练　习　2-8

1. 把 $A^2+2A-3E=O$ 变形为 $(A+4E)(A-2E)=-5E$，即 $(A+4E)\left(\frac{2}{5}E-\frac{1}{5}AA\right)=E$. 故 $(A+4E)^{-1}=\frac{2}{5}E-\frac{1}{5}A$.

2. 提示：$E-A^m=(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{m-1})$，$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{m-1}$.

3. $A=E+(B-E)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{3} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

5. 提示：用反证法.

6. 提示：用反证法.

练　习　2-9

1. 由 $A^2=A$ 得 $A(A-E)=O$，故 $R(A)+R(A-E)\leqslant n$. 又因 $R(A)+R(A-E)=R(A)+R(E-A)\geqslant R(A+E-A)=R(E)=n$，故 $R(A)+R(A-E)=n$.

2. 提示：证明 $A+B$ 的列向量均可由 A，B 列向量组的极大无关组 α_1，α_2，$\cdots$，α_s，β_1，β_2，$\cdots$，β_t 线性表示.

3. $AB'=\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{pmatrix}$，$A'B=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$.

练　习　2-10

1. 当 $a_{34}^2\neq\frac{1}{kl}$ 时，$E+AB$ 可逆.　　4. 提示：$A=\frac{1}{2}(A+A')+\frac{1}{2}(A-A')$.

练　习　2-11

1. 提示：由 $a_{ij}=A_{ij}$ 可得 $A^*=A'$. 故可推出 $|A|=1$ 或 0. 但由 $a_{11}\neq 0$，$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}^2+a_{22}^2+a_{33}^2>0$，故 $|A|=1$.

2. 提示：这时 $|A|$，$|A^{-1}|$，A^* 的元素均为整数，利用关系式 $AA^{-1}=E$，$A^{-1}=|A|^{-1}A^*$ 可证.

3. 提示：$|S|=1$，$|SR|=|R|=|RS|$.

第一套

一、1. 2；　2. $\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0\\ -2 & 5 & 0 & 0\\ 1 & -3 & -1 & 1\\ -1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-\frac{5}{2} & -1 & 0 & 0\\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0\\ -1 & -\frac{1}{2} & -1 & -1\\ -\frac{3}{2} & -1 & -\frac{5}{2} & -1\end{pmatrix}$；　3. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$；　4. 0；

5. 2.

二、1. (D)；　2. (D)；　3. (D)；　4. (C)；　5. (A).

三、$X=[(C-B)']^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}$.

四、$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&0&0&0\\0&3&9&4\\0&-2&-5&-2\\0&-2&-7&-3\end{pmatrix}$.

五、$R(A)=3$.

六、$x_1=x_2=x_3=x_4=\frac{1}{5}$.

七、1. 由 $A^2=A$ 得$\frac{1}{4}(B+E)^2=\frac{1}{2}(B+E)$，即 $B^2+2B+E=2B+2E$，故 $B^2=E$；反之，可由 $B^2=E$ 得$A^2=A$.

2. 提示：对 n 阶矩阵P，Q，总有 $R(PQ)\geqslant R(P)+R(Q)-n$，$R(P+Q)\leqslant R(P)+R(Q)$，利用此二式分别证明 $R(E+A)+R(E-A)\leqslant n$ 及$R(E+A)+R(E-A)\geqslant n$.

第二套

一、1. $\frac{1}{16}$； 2. 6； 3. $\geqslant$； 4. 0； 5. 0.

二、1.(B)； 2.(D)； 3.(B)； 4.(C)； 5.(B).

三、$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1&1&\cdots&1\\0&0&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$.

四、$B^{-1}=\begin{pmatrix}-7&6&0&0\\6&-5&0&0\\0&0&-8&11\\0&0&3&-4\end{pmatrix}$.

五、$R(B)=2$.

六、提示：用数学归纳法证明．$A^{100}=\begin{pmatrix}1&0&0\\50&1&0\\50&0&1\end{pmatrix}$.

七、提示：注意$\begin{pmatrix}E&0\\-BA^{-1}&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\B&D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&C\\0&D-BA^{-1}C\end{pmatrix}$，且$\begin{vmatrix}E&0\\-BA^{-1}&E\end{vmatrix}=1$.

第三讲　向　　量

一、内容提要

(一)主要定义

1. n 维向量　向量的分量(坐标)　n 个有序的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 所组成的数组 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 称为 n 维向量. 每个数称为向量的一个分量(坐标), a_i 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第 i 个分量(坐标). 分量写成一行的称为行向量, 分量写成一列的称为列向量.

2. 零向量　负向量　分量都是零的向量称为零向量. $(-a_1, -a_2, \cdots, -a_n)$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的负向量, 记为 $-\boldsymbol{\alpha}$.

3. 向量相等　设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$, 如果 $a_i=b_i(i=1, 2, \cdots, n)$, 那么称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 相等, 记为 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

4. 向量的线性运算　设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$, λ 为实数, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 相加仍是 n 维向量, 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和, 记为 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$, 且 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n)$.

数 λ 与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的乘积仍是 n 维向量, 记为 $\lambda\boldsymbol{\alpha}$, 且 $\lambda\boldsymbol{\alpha}=(\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n)$. 以上两种运算统称向量的线性运算. 又向量的减法定义为 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})$, 即减去一个向量等于加上其负向量.

5. 向量的内积　设有 n 维向量 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$, 那么称对应分量乘积之和为 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的内积, 记为 $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$, 即 $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$. 当 $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]=0$ 时, 称向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 正交.

6. 单位向量　令 $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}]}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$, 那么称 $\|\boldsymbol{x}\|$ 为向量 $\boldsymbol{x}$ 的长度. 当 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 时, 称 $\boldsymbol{x}$ 为单位向量.

7. 向量组的线性相关与线性无关　对于 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$, 如果存在一组不全为 0 的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$, 使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=0$, 那么称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, 否则称它们线性无关.

8. 向量组等价　设有两个 n 维向量组

$$A: \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s,$$

$$B: \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t,$$

如果向量组 A 中每个向量都能由向量组 B 中的向量线性表示, 那么称向量组 A 可由向量组 B 线性表示. 如果向量组 A 可由向量组 B 线性表示, 向量组 B 也可由向量组 A 线性表示, 那么称向量组 A 与向量组 B 等价.

9. 向量组的极大线性无关组　向量组的秩　如果向量组 A 中有 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 而 A 中任意 $r+1$ 个向量(如果有的话)都线性相关, 那么称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 为向量组 A 的一个极大线性无关组(最大线性无关组), 简称极大无关组(最大无关组). 数 r 称为向量组 A 的秩. 规定仅含零向量的向量组的秩为 0.

10. 向量空间　设 V 为 n 维向量的集合，如果 V 非空，且 V 对于向量加法和数乘两种运算封闭，那么称 V 为向量空间.

11. 向量空间的基　维数　r 维向量空间　如果向量空间 V 中有 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，且 V 中任一向量都可由这 r 个向量线性表示，那么称这 r 个向量为向量空间 V 的一个基，r 称为向量空间 V 的维数，同时称 V 为 r 维向量空间，基也称基底.

12. 子空间　对于向量空间 V_1，V_2，如果 $V_1 \subset V_2$，那么称 V_1 是 V_2 的子空间.

13. 向量的坐标　设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 维向量空间 V_n 的一个基，则对于 V_n 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$，有且仅有一组有序数 x_1，x_2，…，x_n，使得

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

这组有序数称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标，记为 $\boldsymbol{\alpha} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

14. 向量空间的基变换　坐标变换　过渡矩阵　设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_n$ 是 n 维向量空间的两个基，且

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1 = p_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + p_{21}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + p_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{\beta}_2 = p_{12}\boldsymbol{\alpha}_1 + p_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + p_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{\beta}_n = p_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1 + p_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + p_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n \end{cases}$$

这一从基 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_n$ 的变换称为基变换，这一变换式可用向量和矩阵的形式表示为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}' \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix},$$

或
$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P}.$$

称以上三种变换式为基变换公式，矩阵 $\boldsymbol{P}$ 称为从基 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵. 对 V_n 中的任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$，如果它在基 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，在基 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_n$ 下的坐标为 $(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)$，则有

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{P}$ 是从基 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵. 这两个变换式称为坐标变换公式. 同一向量在不同基下的坐标之间的变换称坐标变换.

15. 标准正交基　如果向量空间的一个基 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，…，$\boldsymbol{e}_r$ 中的每个向量都是单位向量，且任意两个向量 $\boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{e}_j$ 正交，那么称 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，…，$\boldsymbol{e}_r$ 为 V 的一个标准正交基.

16. 正交矩阵　满足 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$（即 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}'$）的 n 阶方阵称为正交矩阵.

(二) 主要定理与公式

1. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关的充要条件是其中至少有一个向量可由其余 $m-1$

个向量线性表示.

2. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 而 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_m$, $\boldsymbol{\beta}$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示, 且表示式是惟一的.

3. 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关, 那么 $\boldsymbol{\alpha}_1$, …, $\boldsymbol{\alpha}_r$, $\boldsymbol{\alpha}_{r+1}$, …, $\boldsymbol{\alpha}_m$ 也线性相关.

4. 含有零向量的向量组线性相关.

5. r 维向量组的每个向量添上 $n-r$ 个分量成为 n 维向量组, 如果 r 维向量组线性无关, 那么 n 维向量组也线性无关; 如果 n 维向量组线性相关, 那么 r 维向量组也线性相关.

6. 设 n 维行向量组 A: $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_r$ 构成矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn}\end{pmatrix},$$

当 $r\leqslant n$ 时, 向量组 A 线性无关的充要条件是: 在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中存在一个不等于 0 的 r 阶子式.

7. n 个 n 维向量线性相关的充要条件是它们构成的方阵的行列式等于 0.

8. 当 $m>n$ 时, m 个 n 维向量一定线性相关.

9. 如果 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有一个 r 阶子式 D 不等于 0, 那么含有 D 的 r 个行向量及 r 个列向量都线性无关; 如果 $\boldsymbol{A}$ 中所有 r 阶子式全等于 0, 那么 $\boldsymbol{A}$ 中任意 r 个行向量及任意 r 个列向量都线性相关.

10. 向量组线性无关的充要条件是它所含向量个数等于它的秩.

11. 如果 r 阶子式 D 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式, 那么 D 所在的 r 个行向量是 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的一个极大无关组; D 所在的 r 个列向量是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大无关组.

12. 矩阵的秩等于其行向量组的秩, 也等于其列向量组的秩.

13. 如果向量组 A: $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量组 T 的一个极大无关组, 那么向量组 A 与向量组 T 等价.

14. 如果向量组 A: $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_r$ 能由向量组 B: $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, …, $\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示, 且向量组 A 线性无关, 那么 $r\leqslant s$.

15. 等价的线性无关向量组所含向量个数相等.

16. 如果向量组 A 可由向量组 B 线性表示, 而 A 的秩为 r, B 的秩为 s, 那么 $r\leqslant s$.

17. 等价的向量组有相同的秩.

18. 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次初等行变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$, 那么 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价, $\boldsymbol{A}$ 的任意 k 个列向量与 $\boldsymbol{B}$ 中对应的 k 个列向量有相同的线性相关性. 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次初等列变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$, 那么 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价, $\boldsymbol{A}$ 的任意 k 个行向量与 $\boldsymbol{B}$ 中对应的 k 个行向量有相同的线性相关性.

19. 向量的线性运算规律　设 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 都是 n 维向量, λ, μ 是实数, 则有

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$;

(3) $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$;

(4) $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$;

(5) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

(6) $\lambda(\mu\boldsymbol{\alpha})=(\lambda\mu)\boldsymbol{\alpha}$;

(7) $\lambda(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\lambda\boldsymbol{\beta}$;

(8) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\alpha}$;

20. 施密特正交化过程　设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 为线性无关向量组，令

$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$;

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1;$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2;$$

…………

$$\boldsymbol{\beta}_r=\boldsymbol{\alpha}_r-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_r]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_r]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2-\cdots-\frac{[\boldsymbol{\beta}_{r-1},\ \boldsymbol{\alpha}_r]}{[\boldsymbol{\beta}_{r-1},\ \boldsymbol{\beta}_{r-1}]}\boldsymbol{\beta}_{r-1},$$

则 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_r$ 两两正交且与 $\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 等价.

再令

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}\boldsymbol{\beta}_1;\quad \boldsymbol{e}_2=\frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}\boldsymbol{\beta}_2;\ \cdots;\ \boldsymbol{e}_r=\frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_r\|}\boldsymbol{\beta}_r,$$

则 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，…，$\boldsymbol{e}_r$ 都是单位向量，且两两正交，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，…，$\boldsymbol{e}_r$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 等价. 这一由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 变为 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，…，$\boldsymbol{e}_r$ 的过程称为施密特正交化过程. 由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 变为 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_r$ 的 r 个变换式称为施密特正交化公式.

21. n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个行(列)向量构成 n 维向量空间 R^n 的一个标准正交基.

二、客观题归类分析

(一)填空题

【例 3-1】　设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ -1,\ 2,\ 4)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,\ 3,\ 1,\ 2)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,\ 0,\ 7,\ 14)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,\ -2,\ 2,\ 0)$，$\boldsymbol{\alpha}_5=(2,\ 1,\ 5,\ 10)$，则该向量组的一个极大线性无关组是______.

【解】　首先将向量组构成矩阵 $\boldsymbol{A}$，用初等行变换化 $\boldsymbol{A}$ 为阶梯形，若非零行有 r 个，则阶梯形中任一不为零的 r 阶子式的各列所对应的向量即为极大线性无关组：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-2&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&-1&3\\0&1&1&0&1\\0&2&2&-4&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

可见 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4$；$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$；$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\alpha}_5$ 都是该向量组的极大线性无关组.

【例 3-2】　设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 1,\ 1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\ 2,\ 3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,\ 3,\ t)$，则当 $t=$______时，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关；$t=$______时，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

【解】　当向量个数与维数相同时，用这些向量做行(列)向量构成的矩阵的行列式等于零，则向量组线性相关；否则向量组线性无关.

因为 $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&t\end{vmatrix}=t-5$，故 $t=5$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关；$t\neq5$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线

性无关.

【例 3-3】 n 维基本单位向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, …, $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示, 则 s ______ n.

【解】 注意到 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, …, $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是线性无关的. 由一(二)定理 14 知 $s \geqslant n$.

【例 3-4】 已知 3 维向量空间的一个基为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 1, 0)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1, 0, 1)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(0, 1, 1)$, 则向量 $\boldsymbol{u}=(2, 0, 0)$在该基下的坐标是______.

【解】 $\boldsymbol{u}$ 的坐标就是 $\boldsymbol{u}$ 用基 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示时的系数, 即若 $\boldsymbol{u}=x\boldsymbol{\alpha}_1+y\boldsymbol{\alpha}_2+z\boldsymbol{\alpha}_3$, 则 $\boldsymbol{u}$ 的坐标为(x, y, z), 求 x, y, z 的方法是: 用基 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $\boldsymbol{u}$ 做列向量构成矩阵$\boldsymbol{A}$(注意 $\boldsymbol{u}$ 做最后一个列向量), 对 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换, 化为行最简形, 则最后一列的元素由上至下依次为 $\boldsymbol{u}$ 的坐标. 对于更高维的向量空间也这样做. 因为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&0&2\\1&0&1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0&2\\0&-1&1&-2\\0&1&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0&2\\0&1&-1&2\\0&0&2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$, 即 $\boldsymbol{u}$ 的坐标为$(1, 1, -1)$.

练 习 3-1

1. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2, 1, 3, -1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(3, -1, 2, 0)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(4, 2, 6, -2)$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(4, -3, 1, 1)$, 则该向量组的秩是______.

2. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2, 1, 1, 1, 2)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(5, -1, 0, 2, 1)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1, 3, 2, 0, 3)$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(4, -1, 1, 1, 0)$, 则该向量组的一个极大线性无关组是______.

3. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a, b, 0)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(a, 2b, 1)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1, 2, 3)$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(2, 4, 6)$, 若 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 3, 则 a, b 应满足条件______.

4. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, -1, 2, 1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2, 0, 0, t)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1, -1, 3, 5)$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(2, 3, 2, -1)$, 则当 $t=$______时, $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关; 当 $t\neq$______时, $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

5. 向量空间 $V=\{(x_1, x_2, \cdots, x_n)\mid x_1+x_2+\cdots+x_n=0, x_i\in R\}$ 的维数是______.

(二) 选择题

【例 3-5】 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_s(3\leqslant s\leqslant n)$线性无关的充要条件是[ ].

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任何两个向量都线性无关;

(B) 存在不全为 0 的 s 个数 k_1, k_2, …, k_s, 使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\boldsymbol{0}$;

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任何一个向量都不能用其余向量线性表示;

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_s$ 中存在一个向量不能用其余向量线性表示.

【解】 应选(C). (C)是一(二)定理 1 的逆否定理.

(A)是错误的, 原因是: 考察向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 1, 1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1, 0, 0)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(0, 1, 0)$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(0, 0, 1)$, 其中任何两个向量都线性无关, 但该向量组线性相关. 用不全为 0 的四个数 1, 0, 0, 0, 依次乘到 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$ 上再相加得$(1, 1, 1)\neq(0, 0, 0)$, 说明

(B)也是错误的.

【例 3-6】 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则下列向量组线性相关的是[ ]

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$; (B) $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$;

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$; (D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, $2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$, $3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$.

【解】 应选(C). 显然有 $1(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+1(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)+1(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1)=0$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关. (A)中三个向量仍是线性无关的，可证明如下：设有三个数 k_1, k_2, k_3，使得 $k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$，即$(k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$. 因 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，故有方程组

$$\begin{cases} k_1+ k_3=0, \\ k_1+k_2 =0, \\ k_2+k_3=0. \end{cases}$$

该方程组仅有零解，即只有 $k_1=k_2=k_3=0$ 时，$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$才成立. 这就证明了(A)中三个向量线性无关. 对(B), (D)中的向量组可同样验证它们线性无关.

【例 3-7】 设向量组

(Ⅰ) $\boldsymbol{\alpha}_1=(a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(b_1, b_2, b_3)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(c_1, c_2, c_3)$;

(Ⅱ) $\boldsymbol{\beta}_1=(a_1, a_2, a_3, a_4)$, $\boldsymbol{\beta}_2=(b_1, b_2, b_3, b_4)$, $\boldsymbol{\beta}_3=(c_1, c_2, c_3, c_4)$.

则[ ].

(A) (Ⅰ)线性相关，则(Ⅱ)线性相关;

(B) (Ⅰ)线性无关，则(Ⅱ)线性无关;

(C) (Ⅱ)线性无关，则(Ⅰ)线性无关;

(D) (Ⅰ)线性无关的充要条件是(Ⅱ)线性无关.

【解】 应选(B). 对于(A)可举反例如下：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 0, 0)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0, 1, 0)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1, 1, 0)$; $\boldsymbol{\beta}_1=(1, 0, 0, 0)$, $\boldsymbol{\beta}_2=(0, 1, 0, 0)$, $\boldsymbol{\beta}_3=(1, 1, 0, 1)$. 不难验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，而 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关. 同时，这个反例也可用来说明(C)是错误的. (B)对而(C)错，说明(D)也是错误的.

【例 3-8】 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 是两个 n 维向量组，且两个向量组的秩都是 r，则[ ].

(A) 两个向量组等价;

(B) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 的秩也是 r;

(C) 当 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示时，$\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 也可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示;

(D) 当 $s=t$ 时，两向量组等价.

【解】 应选(C). 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 0, 0, 0)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0, 1, 0, 0)$; $\boldsymbol{\beta}_1=(0, 0, 1, 0)$, $\boldsymbol{\beta}_2=(0, 0, 0, 1)$. 则 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 的秩是 2, $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ 的秩也是 2，但两向量组并不等价，同时 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ 的秩是 4. 这一例子说明(A), (B), (D)都是不对的. 至于(C)为什么正确，这不难证明. 事实上，当 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示时，前者的极大线性无关组就可由后者的极大线性无关组线性表示. 注意二者的秩相等，即极大无关组所含向量的个数相同，所以后者的极大线性无关组也可由前者的极大线性无关组线性表示，于是后者也

可由前者线性表示.

练　习　3-2

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$R(\boldsymbol{A})<n$，则在 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个行向量中[　　　].

(A) 必有 r 个行向量线性无关；

(B) 任意 r 个行向量线性无关；

(C) 任意 r 个行向量都构成极大线性无关向量组；

(D) 任何一个行向量都可由其余 r 个行向量线性表示.

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 均为 n 维向量，那么下列结论正确的是[　　　].

(A) 若 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关；

(B) 若对任意一组不全为 0 的数 k_1，k_2，…，k_m，都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\neq\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关；

(C) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，则对任意一组不全为 0 的数 k_1，k_2，…，k_m，都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$；

(D) 若 $0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

3. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，则向量组[　　　]

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关；

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关；

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关；

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

4. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关的充要条件是[　　　]

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 中有一个零向量；

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量的分量成比例；

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 中有一个向量是其余向量的线性组合；

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意一个向量都是其余向量的线性组合.

5. 下列命题正确的是[　　　].

(A) 对于 $\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$，若有不全为 0 的数 k_1，…，k_s，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关；

(B) 若有一组不全为 0 的数 k_1，…，k_s，使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关；

(C) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则其中每个向量都可由其余向量线性表示；

(D) 任何 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关.

三、主观题归类分析

(一) 向量组的秩

【例 3-9】 判断下列各向量组的线性相关性，求它的秩和一个极大无关组，并把其余

向量用这个极大无关组线性表示.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,3,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(2,5,-1,4)$;

(2) $\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,-1,4)$, $\boldsymbol{\beta}_2=(9,100,10,4)$, $\boldsymbol{\beta}_3=(-2,-4,2,-8)$.

【解】 (1)用 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$ 构成矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&2&2\\0&2&1&5\\2&0&3&-1\\1&1&0&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&2&2\\0&2&1&5\\0&-2&-1&-5\\0&0&-2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&2&2\\0&2&1&5\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}_1,$$

可见向量组线性相关, 秩为 3, $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是一个极大无关组, 继续初等行变换

$$\boldsymbol{A}_1\sim\begin{pmatrix}1&1&2&2\\0&2&0&6\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0&4\\0&1&0&3\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&3\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.

(2) 用 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$ 构成矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&9&-2\\2&100&-4\\-1&10&2\\4&4&-8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&9&-2\\0&82&0\\0&19&0\\0&-32&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&9&-2\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

可见向量组线性相关, 秩为 2, $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ 为一个极大无关组, $\boldsymbol{\beta}_3=-2\boldsymbol{\beta}_1+0\boldsymbol{\beta}_2$.

【例 3-10】 向量 $\boldsymbol{\beta}=(4,4,1,2)$能否由下列各向量组线性表示? 若能, 则写出表示式.

(1)$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-1,0,5)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(-4,-2,3,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(0,-1,2,5)$;

(2)$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0,-1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,3,2)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(4,0,9,5)$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(3,1,2,1)$.

【解】 (1)用 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$, $\boldsymbol{\beta}$ 做列向量构成矩阵

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}2&-4&-1&0&4\\-1&-2&0&-1&4\\0&3&1&2&1\\5&0&0&5&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&0&1&-4\\0&-8&-1&-2&12\\0&3&1&2&1\\0&-10&0&0&22\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&0&1&-4\\0&1&2&4&15\\0&4&1&2&1\\0&-1&3&6&25\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&0&1&-4\\0&1&2&4&15\\0&0&-5&-10&-44\\0&0&5&10&40\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&0&1&-4\\0&1&2&4&15\\0&0&1&2&8\\0&0&0&0&-4\end{pmatrix},$$

由 $\boldsymbol{A}$ 的行阶梯形可见 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$, $\boldsymbol{\beta}$ 这五个向量的向量组的秩为 4, 它的任何一个极大无关组都必定包含 $\boldsymbol{\beta}$, 故 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示.

(2) 仿照(1)的方法有

$$A=\begin{pmatrix}1&2&4&3&4\\0&0&0&1&4\\0&3&9&2&1\\-1&2&5&1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&-\frac{26}{9}\\0&1&0&0&-3\\0&0&1&0&\frac{2}{9}\\0&0&0&1&4\end{pmatrix},$$

可见 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示，且 $\boldsymbol{\beta}=-\frac{26}{9}\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{2}{9}\boldsymbol{\alpha}_3+4\boldsymbol{\alpha}_4$.

【例 3-11】 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，问当 k 取何值时，$\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1$，$k\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 也线性无关？

【解】 设有数 λ_1，λ_2，λ_3，使 $\lambda_1(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1)+\lambda_2(k\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2)+\lambda_3(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0}$，则 $(\lambda_3-\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(\lambda_2k-\lambda_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，因 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，故有方程组

$$\begin{cases}-\lambda_1+\lambda_3=0,\\ \lambda_1-\lambda_2=0,\\ k\lambda_2-\lambda_3=0,\end{cases}$$

其系数行列式 $D=\begin{vmatrix}-1&0&1\\1&-1&0\\0&k&-1\end{vmatrix}=k-1$，当 $k\neq1$ 时，$D\neq0$，则 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$，$\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1$，$k\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

练　习　3-3

1. 判断下列各向量组的线性相关性，求秩和一个极大无关组，把其余向量用该极大无关组线性表示.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(3,\ 1,\ 2,\ 1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-6,\ 4,\ -1,\ -5)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-7,\ -1,\ -3,\ -4)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(3,\ 2,\ 1,\ 2)$；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,\ -1,\ 1,\ 4)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\ 3,\ 0,\ 2)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(7,\ 0,\ 3,\ 14)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(2,\ -2,\ 1,\ 0)$，$\boldsymbol{\alpha}_5=(5,\ 1,\ 2,\ 10)$.

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，当 a，b，c 满足什么条件时，$a\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$，$b\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$c\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$线性相关？

3. 向量 $\boldsymbol{\beta}=(3,\ 0,\ 7,\ 14)$能否用 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ -1,\ 2,\ 4)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,\ 3,\ 1,\ 2)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,\ -1,\ 2,\ 0)$线性表示？若能，则写出表示式.

4. 向量 $\boldsymbol{\beta}=(4,\ -3,\ 1,\ 1)$能否用 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,\ 1,\ 3,\ -1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(3,\ -1,\ 2,\ 0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,\ 3,\ 4,\ -2)$线性表示？若能，则写出表示式. 表示式是否惟一？

5. 讨论向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 1,\ 0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\ 3,\ -1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(5,\ 3,\ t)$的线性相关性.

(二) 向量组的等价关系

【例 3-12】 判断向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,\ 0,\ -1,\ 3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(3,\ -2,\ 1,\ -1)$与 $\boldsymbol{\beta}_1=(-5,\ 6,\ -5,\ 9)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(4,\ -4,\ 3,\ -5)$是否等价，若等价，则给出线性表示式.

【解】 由

$$A=\begin{pmatrix}2&3&-5&4\\0&-2&6&-4\\-1&1&-5&3\\3&-1&9&-5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&5&-3\\0&1&-3&2\\0&5&-15&10\\0&2&-6&4\end{pmatrix}$$
$$\sim\begin{pmatrix}1&-1&5&-3\\0&1&-3&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-3&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

知 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，且 $\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

由

$$B=\begin{pmatrix}-5&4&2&3\\6&-4&0&-2\\-5&3&-1&1\\9&-5&3&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&3&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

知 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示，且 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\beta}_1+3\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2$.

总之，两向量组等价，表示式如上.

【例 3-13】 下列各向量组是否等价？若等价，则写出线性表示式.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-2,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,-1,-1)$和 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(-1,-1,2)$，$\boldsymbol{\beta}_3=(3,3,6)$；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,0)$和 $\boldsymbol{\beta}_1=(4,-1,2)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,-1)$，$\boldsymbol{\beta}_3=(-2,5,-4)$.

【解】 (1)由 $B=\begin{pmatrix}1&-1&3&1&1&2\\1&-1&3&0&-2&-1\\1&2&6&-1&4&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&3&1&1&2\\0&1&1&-\frac{2}{3}&-\frac{5}{3}&-1\\0&0&0&1&3&3\end{pmatrix}$

知 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，故二向量组不等价.

(2) 由

$$A=\begin{pmatrix}1&2&4&1&-2\\-1&1&-1&2&5\\1&0&2&-1&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&4&1&-2\\0&3&3&3&3\\0&-2&-2&-2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&-1&-4\\0&1&1&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}4&1&-2&1&2\\-1&2&5&-1&1\\2&-1&-4&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&1&2&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

知两向量组等价，且 $\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{1}{3}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{1}{3}\boldsymbol{\beta}_2+0\boldsymbol{\beta}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\frac{1}{3}\boldsymbol{\beta}_1+\frac{2}{3}\boldsymbol{\beta}_2+0\boldsymbol{\beta}_3$；$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=-4\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$.

练 习 3-4

1. 判断向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)$与下列各向量组是否

等价，若等价，则写出线性表示式：

(1) $\boldsymbol{\beta}_1=(3, 2, -1)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(1, -1, 1)$；

(2) $\boldsymbol{\beta}_1=(3, 2, -1)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(1, -1, 1)$，$\boldsymbol{\beta}_3=(1, 0, 1)$；

(3) $\gamma_1=(1, 2, 3)$，$\gamma_2=(0, 1, -2)$，$\gamma_3=(2, 5, 4)$.

2. 已知两个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 2, 3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1, 0, 1)$；$\boldsymbol{\beta}_1=(-1, 2, t)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(4, 1, 5)$，问 t 取何值时，两向量组等价？等价时，写出线性表示式.

(三) 正交化与正交矩阵

【例 3-14】 用施密特法把下列向量组正交化：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 1, 1)'$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1, 2, 3)'$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1, 4, 9)'$；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 0, -1, 1)'$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1, -1, 0, 1)'$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1, 1, 1, 0)'$.

【解】 (1) 令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-\dfrac{6}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-$

$$\frac{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix}-\frac{14}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{8}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

故得正交向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1, 1, 1)'$，$\boldsymbol{\beta}_2=(-1, 0, 1)'$，$\boldsymbol{\beta}_3=\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)'$.

(2) 令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}-\dfrac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-$

$$\frac{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}+\frac{2}{15}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\3\\3\\4\end{pmatrix}.$$

故得正交向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1, 0, -1, 1)'$，$\boldsymbol{\beta}_2=\left(\frac{1}{3}, -1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)'$，$\boldsymbol{\beta}_3=\left(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)'$.

【例 3-15】 化 R^3 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 1, 1)'$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0, 1, 1)'$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1, 0, 1)'$为标准正交基，并求 $\boldsymbol{\beta}=(1, -1, 0)'$在此标准正交基下的坐标.

【解】 先正交化，令 $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\dfrac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$，

$$\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1-\frac{[\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2]}\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

再单位化得 $e_1=\frac{1}{|b_1|}b_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$e_2=\frac{1}{|b_2|}b_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$，$e_3=\frac{1}{|b_3|}b_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$，由

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & 1\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

得 β 的坐标为 $\left(0,\ -\frac{\sqrt{6}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

【例 3-16】 已知 $T=\begin{pmatrix}a & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7}\\ b & c & d\\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & e\end{pmatrix}$ 为正交矩阵，求 a，b，c，d，e 的值.

【解】 因 T 的第一、三行向量为单位向量，故有 $a^2+\frac{9}{49}+\frac{4}{49}=1$，$\frac{9}{49}+\frac{4}{49}+e^2=1$，于是得 $a=\pm\frac{6}{7}$，$e=\pm\frac{6}{7}$. 又因 T 的各列向量为单位向量，故有 $\frac{36}{49}+b^2+\frac{9}{49}=1$，$\frac{9}{49}+c^2+\frac{9}{49}=1$，$\frac{9}{49}+d^2+\frac{36}{49}=1$，于是得 $b=\pm\frac{2}{7}$，$c=\pm\frac{6}{7}$，$d=\pm\frac{3}{7}$.

又因 T 的第一、二列向量正交，故有 $-\frac{3}{7}a+bc-\frac{6}{49}=0$，即 $bc=\frac{6}{49}+\frac{3}{7}a$，由此得 $a=-\frac{6}{7}$，b，c 反号. 又因 T 的第一、三行向量正交及 $a=-\frac{6}{7}$，得 $\frac{18}{49}-\frac{6}{49}+\frac{2}{7}e=0$，故 $e=-\frac{6}{7}$. 再由 T 的第二、三行向量正交及 $a=-\frac{6}{7}$，$e=-\frac{6}{7}$ 得 $-\frac{3}{7}b+\frac{2}{7}c=\frac{6}{7}d$，当 $b=\frac{2}{7}$，$c=-\frac{6}{7}$ 时，$d=-\frac{3}{7}$；当 $b=-\frac{2}{7}$，$c=\frac{6}{7}$ 时，$d=\frac{3}{7}$. 总之，此问题有两组解：

$a=-\frac{6}{7}$，$b=\frac{2}{7}$，$c=-\frac{6}{7}$，$d=-\frac{3}{7}$，$e=-\frac{6}{7}$；

$a=-\frac{6}{7}$，$b=-\frac{2}{7}$，$c=\frac{6}{7}$，$d=\frac{3}{7}$，$e=-\frac{6}{7}$.

练 习 3-5

1. 用施密特正交化法化下列向量组为标准正交向量组：

(1) $\alpha_1=(1,\ 2,\ 2,\ -1)'$，$\alpha_2=(1,\ 1,\ -5,\ 3)'$，$\alpha_3=(3,\ 2,\ 8,\ -7)'$；

(2) $\alpha_1=(1,\ 1,\ -1,\ 2)'$，$\alpha_2=(5,\ 8,\ -2,\ -3)'$.

2. 把 R^3 的基 $\alpha_1=(1,\ -1,\ 1)'$，$\alpha_2=(-1,\ 1,\ 1)'$，$\alpha_3=(1,\ 1,\ -1)'$ 化为标准正交基，且求向量 $\beta=(1,\ -1,\ 0)'$ 在此标准正交基下的坐标.

3. 已知矩阵 $\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} a & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ b & c & d \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & e \end{pmatrix}$ 为正交矩阵，求 a，b，c，d，e 的值.

（四）向量空间与过渡矩阵

【例 3-17】 判断向量集合

(1) $V_1=\{\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\mid x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\in R$，满足 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0\}$；

(2) $V_2=\{\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\mid x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\in R$，满足 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1\}$；

是否为向量空间，若是向量空间，求其维数和一个基.

【解】 (1) 显然，n 维零向量 $\mathbf{0}\in V_1$，故 V_1 非空，又若 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)\in V_1$，$k\in R$，则

$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ \cdots,\ a_n+b_n)$，$k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,\ ka_2,\ \cdots,\ ka_n)$，

而因 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$，$b_1+b_2+\cdots+b_n=0$，故 $(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)=0$，$ka_1+ka_2+\cdots+ka_n=k(a_1+a_2+\cdots+a_n)=0$，即 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V_1$，$k\boldsymbol{\alpha}\in V_1$. 因此 V_1 是向量空间.

又因 V_1 的任一元素的 n 个分量满足线性方程组 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$，其基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{\xi}_{n-1}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}.$$

这 $n-1$ 个向量都是 V_1 的元素，它们线性无关，V_1 中任一元素均可由它们线性表示，所以它们就是 V_1 的一个基，V_1 的维数为 $n-1$.

(2)不难验证 V_2 对加法、乘数运算都不封闭，所以 V_2 不是向量空间.

【例 3-18】 判断下列 R^3 的子集合是否为 R^3 的子空间，若是，则求出一个其和维数.

(1) $U_1=\left\{\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)\ \middle|\ x_1=\frac{x_2}{2}=\frac{x_3}{3}\right\}$；

(2) $U_2=\{\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)\mid x_1+x_2=1\}$.

【解】 (1) 显然 $\mathbf{0}=(0,\ 0,\ 0)\in U_1$，故 U_1 非空，又若 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,\ b_2,\ b_3)\in U_1$，$k\in R$，则 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$，$k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,\ ka_2,\ ka_3)$. 因 $a_1=\frac{a_2}{2}=\frac{a_3}{3}$，$b_1=\frac{b_2}{2}=\frac{b_3}{3}$，故 $a_1+b_1=\frac{a_2+b_2}{2}=\frac{a_3+b_3}{3}$，$ka_1=\frac{ka_2}{2}=\frac{ka_3}{3}$，即 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in U_1$，$k\boldsymbol{\alpha}\in U_1$，因此 U_1 是 R^3 的子空间.

线性方程组 $x_1=\frac{x_2}{2}=\frac{x_3}{3}$，即 $\begin{cases}2x_1-x_2=0\\3x_1-x_3=0\end{cases}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}$ 就是 U_1 的一个基，U_1 的维数是 1.

(2) U_2 对加法不封闭，故不是 R^3 的子空间.

【例 3-19】 求向量空间 R^4 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 2,\ -1,\ 0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\ -1,\ 1,\ 1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=$

$(-1, 2, 1, 1)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(-1, -1, 0, 1)$到基$\boldsymbol{\beta}_1=(2, 1, 0, 1)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(0, 1, 2, 2)$，$\boldsymbol{\beta}_3=(-2, 1, 1, 2)$，$\boldsymbol{\beta}_4=(1, 3, 1, 2)$的过渡矩阵和向量的坐标变换公式.

【解】 因为

$$(\boldsymbol{AB})=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1&2&0&-2&1\\2&-1&2&-1&1&1&1&3\\-1&1&1&0&0&2&1&1\\0&1&1&1&1&2&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0&0&1\\0&1&0&0&1&1&0&1\\0&0&1&0&0&1&1&1\\0&0&0&1&0&0&1&0\end{pmatrix},$$

故过渡矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$，设向量 $\boldsymbol{\eta}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 下的坐标为(x_1, x_2, x_3, x_4)，在基 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$，$\boldsymbol{\beta}_4$ 下的坐标为(y_1, y_2, y_3, y_4)，则坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}.$$

【例 3-20】 已知 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1, 1, 0)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0, 1, 1)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3=(1, -1, 2)$和 $\boldsymbol{\eta}_1=(1, 0, 1)$，$\boldsymbol{\eta}_2=(0, 1, 1)$，$\boldsymbol{\eta}_3=(1, 1, 4)$为 R^3 的两个基，若 $\boldsymbol{\beta}$ 在 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的坐标为$(1, 1, 1)$，求 $\boldsymbol{\beta}$ 在 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\eta}_3$ 下的坐标.

【解】 先求从 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\eta}_3$ 到 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$.

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&1\\0&1&1&1&1&-1\\1&1&4&0&1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&2&0&0\\0&1&0&2&1&-2\\0&0&1&-1&0&1\end{pmatrix}，故过渡矩阵为\begin{pmatrix}2&0&0\\2&1&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}.$$

设 $\boldsymbol{\beta}$ 在 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\eta}_3$ 下的坐标为(y_1, y_2, y_3)，则

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\2&1&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}.$$

注 此类问题中要注意两个基之间的过渡矩阵在坐标公式中的位置．也不能把$(1, 1, 1)$写成 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\eta}_3$ 的线性组合，用组合系数作为 $\boldsymbol{\beta}$ 在 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\eta}_3$ 下的坐标，原因是$(1, 1, 1)$是 $\boldsymbol{\beta}$ 在 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的坐标，而不是在$(1, 0, 0)$，$(0, 1, 0)$，$(0, 0, 1)$下的坐标.

练 习 3-6

1．判断下列 R^3 的子集合是否为 R^3 的子空间，若是，则求一个基和维数.

(1) $U_1=\{\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)\mid x_1-x_2+x_3=0\}$；

(2) $U_2=\left\{\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)\,\middle|\,\dfrac{x_1-1}{2}=\dfrac{x_2}{3}=\dfrac{x_3-5}{-1}\right\}$.

2．求 $\boldsymbol{\xi}=(1, 2, -2, -1)$在 R^4 的一个基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1, 1, 1, 1)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(1, 1, -1, -1)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3=(1, -1, 1, -1)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_4=(1, -1, -1, 1)$下的坐标.

3. 已知 R^3 的两个基分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 1, 1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1, 0, -1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1, 0, 1)$；$\boldsymbol{\beta}_1=(1, 2, 1)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(2, 3, 4)$，$\boldsymbol{\beta}_3=(3, 4, 3)$，求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵. 若 ξ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 $(1, -1, 0)$，求 ξ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标.

4. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2, 0, -1, 1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0, -1, 0, 1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0, 1, 1, 0)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(0, 1, 0, 1)$ 是 R^4 的一个基，$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$，$\boldsymbol{\beta}_4$ 为 R^4 的另一个基. 若由基 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$，$\boldsymbol{\beta}_4$ 的过渡矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\3&1&0&0\\0&0&1&2\\0&0&1&3\end{bmatrix}.$$

(1) 求向量 $\boldsymbol{\eta}=(4, 0, 1, -3)$ 在两个基下的坐标；

(2) 求 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$，$\boldsymbol{\beta}_4$.

四、释疑解难

(一) 向量组的线性相关性

【例 3-21】 证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_r=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

【证】 必要性：若 $\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，设有 r 个数 k_1，…，k_r，使得

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\beta}_r=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_r(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_r)=0,$$

即

$$(k_1+k_2+\cdots+k_r)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+\cdots+k_r)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=0.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，故有方程组

$$\begin{cases}k_1+k_2+\cdots+k_r=0,\\ \qquad k_2+\cdots+k_r=0,\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \qquad\qquad\quad k_r=0,\end{cases}$$

此方程组的系数行列式等于 1，故仅有零解，即只有 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$ 时，$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\beta}_r=0$ 成立，故 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关.

充分性：若 $\boldsymbol{\beta}_1$，…，$\boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关，因 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_3-\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r=\boldsymbol{\beta}_r-\boldsymbol{\beta}_{r-1}$，设有 r 个数 l_1，l_2，…，l_r，使得

$$l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_r\boldsymbol{\alpha}_r=l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2(\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_1)+\cdots+l_r(\boldsymbol{\beta}_r-\boldsymbol{\beta}_{r-1})=0,$$

即

$$(l_1-l_2)\boldsymbol{\beta}_1+(l_2-l_3)\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+(l_{r-1}-l_r)\boldsymbol{\beta}_{r-1}+l_r\boldsymbol{\beta}_r=0.$$

因为 $\boldsymbol{\beta}_1$，…，$\boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关，故 $l_1-l_2=0$，$l_2-l_3=0$，…，$l_{r-1}-l_r=0$，$l_r=0$，由此得 $l_1=l_2=\cdots=l_r=0$. 于是知 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

【例 3-22】 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n(n\geqslant 2)$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{\alpha}_i+l_i\boldsymbol{\alpha}_n(i=1, \cdots, n-1)$，证明：$\boldsymbol{\beta}_1$，…，$\boldsymbol{\beta}_{n-1}$ 线性无关.

【证】 用反证法. 设 $\boldsymbol{\beta}_1$，…，$\boldsymbol{\beta}_{n-1}$ 线性相关，则存在 $n-1$ 个不全为 0 的数 k_1，…，k_{n-1}，使得

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\beta}_{n-1}=0,$$

即
$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+(k_1l_1+\cdots+k_{n-1}l_{n-1})\boldsymbol{\alpha}_n=0,$$

因 $\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，故有 $k_1=0$，…，$k_{n-1}=0$. 这一矛盾说明 $\boldsymbol{\beta}_1$，…，$\boldsymbol{\beta}_{n-1}$线性无关.

【例 3-23】 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，且表示的系数全不为 0，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}$ 中任意 s 个向量线性无关.

【证】 用反证法. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$，$\boldsymbol{\alpha}_{i+1}$，…，$\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则存在 s 个不全为 0 的数 k_1，…，k_{i-1}，k_{i+1}，…，k_s，k，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+k_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s+k\boldsymbol{\beta}=0$. 其中 k 必不为 0(否则，因 $\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$，$\boldsymbol{\alpha}_{i+1}$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，k_1，…，k_{i-1}，k_{i+1}，…，k_s 全为 0)，于是有

$$\boldsymbol{\beta}=\frac{-1}{k}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+k_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s),$$

这说明 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$，$\boldsymbol{\alpha}_{i+1}$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 表示，即 $\boldsymbol{\beta}$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示时，$\boldsymbol{\alpha}_i$ 的系数为 0，与题设矛盾. 故 $\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$，$\boldsymbol{\alpha}_{i+1}$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

【例 3-24】 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times m$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$n<m$，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，证明：$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关.

【证】 设 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_n)$，有 n 个数 k_1，k_2，…，k_n，使得

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\beta}_n=(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=0,$$

把此式简记为 $\boldsymbol{Bk}=\boldsymbol{0}$，两边左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，得 $\boldsymbol{ABk}=\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{0}$. 因 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，故得 $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$，即 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$. 由此知 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关.

注　本题还可如下证明：$R(\boldsymbol{B})\leqslant\min\{m,\ n\}=n$，$n=R(\boldsymbol{E})=R(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{R(\boldsymbol{A}),\ R(\boldsymbol{B})\}\leqslant R(\boldsymbol{B})$，故 $R(\boldsymbol{B})=n$，即 B 的列向量组线性无关.

练　习　3-7

1. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a_{11},\ a_{12},\ a_{13})$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(a_{21},\ a_{22},\ a_{23})$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(a_{31},\ a_{32},\ a_{33})$线性无关，证明：对于任意常数 a，b，c，向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ b)$，$\boldsymbol{\beta}_3=(a_{31},\ a_{32},\ a_{33},\ c)$线性无关.

2. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，又 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，试证：向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$，$\boldsymbol{\beta}_4$ 线性无关.

3. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 为一向量组，$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，每个 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=2,\ \cdots,\ s)$都不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表示，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

4. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 维向量组，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充要条件是任一 n 维向量 $\boldsymbol{\beta}$ 都可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.

5. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1$ 可由其线性表示，$\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由其线性表示，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$，$l\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 必线性无关(l 为常数).

6. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$, …, $\boldsymbol{\alpha}_t$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系，$\boldsymbol{\beta}$ 不是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解，即 $\boldsymbol{A\beta}\neq\boldsymbol{0}$，证明：$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关.

（二）关于向量组的秩

【例 3-25】 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 是一组 n 维向量，已知 n 维单位坐标向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，…，$\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 能由它们线性表示，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

【证】 因为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，…，$\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，而 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 也可由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，…，$\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性表示，故 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，…，$\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 两向量组等价. 又因 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，…，$\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关，秩是 n，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 的秩也是 n，故线性无关.

【例 3-26】 设向量组 A 与向量组 B 的秩相等，且 A 组能由 B 组线性表示，证明：A 组与 B 组等价.

【证】 设 A 组向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$，B 组向量为 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_t$，C 组向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_t$. 因为 A 组能由 B 组线性表示，故 C 组也能由 B 组线性表示，而 B 组显然能由 C 组线性表示，故 B 组与 C 组等价，A，B，C 三组的秩相同.

另一方面，因 A 组与 C 组的秩相同，所以 A 组的一个极大线性无关组一定也是 C 组的极大线性无关组. 因 A，C 两组都与该极大无关组等价，故 A 组与 C 组等价.

综上所述，A 组与 B 组等价(传递性).

【例 3-27】 设向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r_1，向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1$，…，$\boldsymbol{\beta}_t$ 的秩为 r_2，向量组 C：$\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}_1$，…，$\boldsymbol{\beta}_t$ 的秩为 r_3，证明：$\max\{r_1,\ r_2\}\leqslant r_3\leqslant r_1+r_2$.

【证】 不妨设 $r_1>r_2$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_{r_1}$是 A 组的一个极大线性无关组，它可扩充为 C 的极大线性无关组，而扩充的向量只能来自于 B 组(因 A 组中其余向量与 $\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_{r_1}$ 线性相关)，例如扩充的向量为 $\boldsymbol{\beta}_1$，…，$\boldsymbol{\beta}_r$，则因 $r\leqslant r_2$(若 $r>r_2$ 则 $\boldsymbol{\beta}_1$，…，$\boldsymbol{\beta}_r$ 线性相关)，故有，$r_3=r_1+r\leqslant r_1+r_2$，又 $r_3\geqslant\max\{r_1,\ r_2\}$，显然 $\max\{r_1,\ r_2\}\leqslant r_3\leqslant r_1+r_2$.

【例 3-28】 设向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1$，…，$\boldsymbol{\beta}_r$ 能由向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_r\end{pmatrix}=\boldsymbol{K}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_s\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{K}$ 为 $r\times s$ 矩阵，且 A 组线性无关. 证明：B 组线性无关的充要条件是 $R(\boldsymbol{K})=r$.

【证】 设矩阵 $\mathbf{K}$ 的 r 个行向量为 $\boldsymbol{k}_1$，$\boldsymbol{k}_2$，…，$\boldsymbol{k}_r$.

必要性：用反证法. 若向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1$，…，$\boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关，而 $R(\boldsymbol{K})\neq r$，则 K 的 r 个行向量线性无关，故存在 r 个不全为 0 的数 λ_1，…，λ_r，使得 $\lambda_1\boldsymbol{k}_1+\lambda_2\boldsymbol{k}_2+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{k}_r=\boldsymbol{0}$，即

$$(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_r)\begin{pmatrix}\boldsymbol{k}_1\\ \boldsymbol{k}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{k}_r\end{pmatrix}=(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_r)\mathbf{K}=\boldsymbol{0},$$

于是有

$$(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_r)\boldsymbol{K}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_s\end{pmatrix}=(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_r)\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_s\end{pmatrix}=\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{\beta}_r=\boldsymbol{0},$$

即 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_r$ 线性相关．这一矛盾说明 $R(\boldsymbol{K})=r$．

充分性：用反证法．若 $R(\boldsymbol{K})=r$，且 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_r$ 线性相关，则有不全为 0 的数 λ_1，λ_2，…，λ_r，使得 $\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{\beta}_r=\mathbf{0}$，即

$$(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_r)\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_r\end{pmatrix}=(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_r)\boldsymbol{K}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_s\end{pmatrix}=\mathbf{0}.$$

因 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，故

$$(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_r)\boldsymbol{K}=(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_r)\begin{pmatrix}\boldsymbol{k}_1\\ \boldsymbol{k}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{k}_r\end{pmatrix}=\lambda_1\boldsymbol{k}_1+\lambda_2\boldsymbol{k}_2+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{k}_r=\mathbf{0},$$

这说明 $\boldsymbol{k}_1$，$\boldsymbol{k}_2$，…，$\boldsymbol{k}_r$ 线性相关，与 $R(\boldsymbol{K})=r$ 矛盾，故 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关．

练　习　3-8

1．设向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩为 $r(>1)$，证明：向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m$，…，$\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m$，…，$\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$的秩也为 r．

2．已知向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为 3，向量组 B：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 3，向量组 C：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩为 4，证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 4．

3．设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩小于 3，且 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 仅差一个常数因子．

4．设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_k$ 是 n 维向量组，秩为 r；$\boldsymbol{\beta}_1$，…，$\boldsymbol{\beta}_l$ 是 n 维向量组，秩为 s．证明：向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_i+\boldsymbol{\beta}_j,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ k;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ l\}$ 的秩不超过 $\min\{r+s,\ n\}$．

5．设 n 阶矩阵 A 的秩为 1，证明：

(1) $\boldsymbol{A}$ 可以表示成 $n\times1$ 矩阵与 $1\times n$ 矩阵的乘积；

(2) 存在数 μ，使得 $\boldsymbol{A}^k=\mu^{k-1}\boldsymbol{A}$．

6．证明：n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充要条件是行列式

$$D=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}'_1\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}'_1\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}'_1\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\alpha}'_2\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}'_2\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}'_2\boldsymbol{\alpha}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}'_n\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}'_n\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}'_n\boldsymbol{\alpha}_n\end{vmatrix}\neq0.$$

(三) 正交矩阵

【例 3-29】　设 $\boldsymbol{x}$ 为 n 维列向量，$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}=1$，令 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'$，证明：$\boldsymbol{H}$ 为对称的正交矩阵．

【证】　$\boldsymbol{H}'=(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}')'=\boldsymbol{E}'-2(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}')'=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{H}$，所以 $\boldsymbol{H}$ 对称．这样

$$\boldsymbol{H}'\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}')(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}')$$

$$= E - 2Exx' - 2xx'E + 4(xx')(xx')$$
$$= E - 2xx' - 2xx' + 4xx' = E,$$

所以 H 是正交矩阵

【例 3-30】 已知 A 是反对称矩阵，且 $E+A$ 可逆，证明：$(E-A)(E+A)^{-1}$是正交矩阵.

【证】 $(E-A)(E+A)^{-1}[(E-A)(E+A)^{-1}]'$

$$= (E-A)(E+A)^{-1}[(E+A)^{-1}]'(E-A)'$$
$$= (E-A)(E+A)^{-1}[(E+A)']^{-1}(E+A)$$
$$= (E-A)(E+A)^{-1}(E-A)^{-1}(E+A)$$
$$= (E-A)[(E-A)(E+A)]^{-1}(E+A)$$
$$= (E-A)[(E+A)(E-A)]^{-1}(E+A)$$
$$= (E-A)(E-A)^{-1}(E+A)^{-1}(E+A) = E,$$

故$(E-A)(E+A)^{-1}$是正交阵.

【例 3-31】 设 $A=(a_{ij})$为 3 阶实正交矩阵，且$|A|=1$，证明：$(\mathrm{tr}A-1)^2+\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 3}(a_{ij}-a_{ji})^2=4$，$\mathrm{tr}A$ 表示A 的迹.

【证】 记 $a=(\mathrm{tr}A-1)^2+\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 3}(a_{ij}-a_{ji})^2$，则有

$$a=(a_{11}+a_{22}+a_{33}-1)^2+(a_{12}-a_{21})^2+(a_{13}-a_{31})^2+(a_{23}-a_{32})^2$$
$$=\sum_{k=1}^{3}(a_{1k}^2+a_{2k}^2+a_{3k}^2)+1+2a_{11}a_{22}+2a_{22}a_{33}+2a_{33}a_{11}-2a_{11}-2a_{22}-2a_{33}-2a_{12}a_{21}$$
$$-2a_{13}a_{31}-2a_{23}a_{32}$$
$$=4+2\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}-a_{33}\right)+2\left(\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{11}\right)+2\left(\begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11}\end{vmatrix}-a_{22}\right)$$
$$=4+2(A_{33}-a_{33})+2(A_{11}-a_{11})+2(A_{22}-a_{22}),$$

因$|A|=1$，故 $A^*=|A|A^{-1}=A^{-1}=A'$，故 $A_{ij}=a_{ij}(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$，从而 $a=4$.

练　习　3-9

1. 设 A 是正交阵，证明：A^{-1}，A^*也是正交阵.

2. 设 A，B 是正交阵，证明：分块矩阵 $C=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B\end{pmatrix}$也是正交阵.

3. 设 A，B，$A+B$ 均为n 阶正交阵，证明：$(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$.

4. 设 A 为实对称矩阵，B 为实反对称矩阵，且 $AB=BA$，$A-B$ 可逆，证明：$(A+B)(A-B)^{-1}$是正交阵.

5. 设 A 为n 阶矩阵($n\geqslant 3$)，若 A 的每个元素a_{ij}都等于其代数余子式A_{ij}，且至少有一个代数余子式不为零，证明：A 是正交矩阵.

（四）向量空间

【例 3-32】 证明 $\alpha_1=(1,\ -1,\ 0)$，$\alpha_2=(2,\ 1,\ 3)$，$\alpha_3=(3,\ 1,\ 2)$是 R^3 的一个基，并把 $v_1=(5,\ 0,\ 7)$，$v_2=(-9,\ -8,\ -13)$用这个基线性表示.

【证】 由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 的分量构成的行列式

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}=2-9-3+4=-6\neq0,$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，它们是 3 维向量空间 R^3 的一个基，又因

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 5 & -9\\ -1 & 1 & 1 & 0 & -8\\ 0 & 3 & 2 & 7 & -13\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2\end{pmatrix}$$

故 $\boldsymbol{v}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{v}_2=3\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$.

【例 3-33】 由 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 1,\ 0,\ 0)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\ 0,\ 1,\ 1)$所生成的向量空间记做 V_1，由 $\boldsymbol{\beta}_1=(2,\ -1,\ 3,\ 3)$, $\boldsymbol{\beta}_2=(0,\ 1,\ -1,\ -1)$所生成的向量空间记做 V_2，证明：$V_1=V_2$.

【证】 由

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 3 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得 $\boldsymbol{\beta}_1=-\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$.

又由

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得 $\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_1+\frac{3}{2}\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_2$.

可见，$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$; $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ 是 V_1, V_2 的基，且它们是等价的. 因此 $V_1=V_2$.

注 也可通过证明 V_1, V_2 互相包含来得到 $V_1=V_2$ 的结论. 设 $\boldsymbol{v}_1\in V_1$，则 $\boldsymbol{v}_1=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2=x_1\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_1+\frac{3}{2}\boldsymbol{\beta}_2\right)+x_2\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_2\right)=\left(\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2\right)\boldsymbol{\beta}_1+\left(\frac{3}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2\right)\boldsymbol{\beta}_2\in V_2$，故 $V_1\subset V_2$. 又设 $\boldsymbol{v}_2\in V_2$，则 $\boldsymbol{v}_2=y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2=y_1(-\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2)+y_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)=(-y_1+y_2)\boldsymbol{\alpha}_1+(3y_1-y_2)\boldsymbol{\alpha}_2\in V_1$，故 $V_2\subset V_1$. 于是 $V_1=V_2$.

【例 3-34】 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 R^3 的一个标准正交基，证明：$\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{3}(\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3)$也是 R^3 的一个标准正交基.

【证】 $[\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_1]=\frac{1}{9}[2\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\ 2\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3]=\frac{1}{9}(4+4+1)=1$，故 $\|\boldsymbol{\beta}_1\|=\sqrt{[\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2]}=1$. 同理可证$[\boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_2]=1$, $[\boldsymbol{\beta}_3,\ \boldsymbol{\beta}_3]=1$，故 $\|\boldsymbol{\beta}_2\|=1$, $\|\boldsymbol{\beta}_3\|=1$.

又$[\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2]=\frac{1}{9}[2\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\ 2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3]=\frac{1}{9}(4-2-2)=0$，故 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ 正交，同理可证 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_3$; $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$ 也正交，因此 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$ 也是 R^3 的一个标准正交基.

注 也可以写出从 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$ 的线性变换：由

$$\beta_1=\frac{3}{2}\alpha_1+\frac{2}{3}\alpha_2-\frac{1}{3}\alpha_3$$
$$\beta_2=\frac{3}{2}\alpha_1-\frac{1}{3}\alpha_2+\frac{2}{3}\alpha_3 \quad 得 \quad \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix},$$
$$\beta_3=\frac{1}{3}\alpha_1-\frac{2}{3}\alpha_2-\frac{2}{3}\alpha_3$$

这个线性变换的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

是正交阵，且 α_1，α_2，α_3 为标准正交基，故 β_1，β_2，β_3 也是标准正交基.

【例 3-35】 设 α_1，α_2，…，α_n 是 R^n 的一个基，证明：

(1) 若 $\alpha\in R^n$，均有 $[\alpha, \alpha_i]=0$，$i=1, 2, \cdots, n$，则 $\alpha=0$.

(2) 若 α，$\beta\in R^n$，均有 $[\alpha, \alpha_i]=[\beta, \alpha_i]$，$i=1, 2, \cdots, n$，则 $\alpha=\beta$.

【证】 (1) 设 α 在基 α_1，α_2，…，α_n 下的坐标为 x_1，x_2，…，x_n，即 $\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n$，则 $[\alpha, \alpha]=[x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n, \alpha]=x_1[\alpha_1, \alpha]+x_2[\alpha_2, \alpha]+\cdots+x_n[\alpha_n, \alpha]=x_1[\alpha, \alpha_1]+x_2[\alpha, \alpha_2]+\cdots+x_n[\alpha, \alpha_n]=0$，故 $\|\alpha\|=\sqrt{[\alpha, \alpha]}=0$，即 $\alpha=0$.

(2) 由已知 $[\alpha, \alpha_i]=[\beta, \alpha_i]$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，即 $[(\alpha-\beta), \alpha_i]=0$，$i=1, 2, \cdots, n$，

由(1)知 $\alpha-\beta=0$，故 $\alpha=\beta$.

注　在(1)的证明中，若认为：

$[\alpha, \alpha_i]=[x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n, \alpha_i]=x_i[\alpha_i, \alpha_i]=0$，从而 $x_i=0$ 即 $\alpha=0$. 这是错误的，原因是 α_1，…，α_n 并非标准正交基，故当 $i\neq j$ 时，$[\alpha_i, \alpha_j]$ 不一定为 0.

练　习　3-10

1. 在 R^4 中，求 $\alpha=(1, 2, 1, 1)$ 在基 $\alpha_1=(1, 1, 1, 1)$，$\alpha_2=(1, 1, -1, -1)$，$\alpha_3=(1, -1, 1, -1)$，$\alpha_4=(1, -1, -1, 1)$ 下的坐标.

2. 设 V_1 是由向量 $\alpha_1=(1, 1, 1, 1)$，$\alpha_2=(2, 3, 3, 0)$，$\alpha_3=(3, 5, 5, -1)$ 生成的向量空间，V_2 是由向量 $\beta_1=(-1, 2, 2, -7)$，$\beta_2=(1, 2, 2, -1)$ 生成的向量空间，证明：$V_1=V_2$.

3. 证明：向量 $\alpha_1=(1, 1, 1, 1, 1)$，$\alpha_2=(1, 1, 1, 1, 0)$，$\alpha_3=(1, 1, 1, 0, 0)$，$\alpha_4=(1, 1, 0, 0, 0)$，$\alpha_5=(1, 0, 0, 0, 0)$ 是 R^5 的一个基，并求向量 $\alpha=(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ 在这个基下的坐标.

4. 设 V 是由 α_1，α_2，…，α_n 生成的向量空间，已知 V 中有一个向量 v_0 用 α_1，α_2，…，α_n 线性表示时的表示法是惟一的，证明：V 是 n 维向量空间，且 α_1，α_2，…，α_n 是 V 的一个基.

5. 设 V_1，V_2 都是向量空间 V 的子空间，且 $V_1\subset V_2$，证明：若 V_1，V_2 的维数相等，

则 $V_1=V_2$.

6. 设由 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 生成的向量空间为 V_1，由 $\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 生成的向量空间为 V_2，若 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 满足 $k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta}+k_3\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{0}$，且 $k_1k_3\neq0$，证明：$V_1=V_2$.

五、单元统测

第一套

一、填空题

1. 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，那么 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性________关.

2. 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 1,\ 1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(m,\ n,\ 0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,\ 2,\ 3)$线性相关，那么 m，n 应满足关系式________.

3. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_m)$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}$，则 $R(\boldsymbol{A})=$ ________.

4. 与 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 2,\ -1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(4,\ 0,\ 2)$都正交的向量 $\boldsymbol{\beta}=$________.

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 为线性无关的 n 维向量，则 $V=\{\boldsymbol{x}\mid\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta}\mid\lambda,\ \mu\in R\}$的维数是________.

二、选择题

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 经若干次初等行变换后所得的矩阵，则[　　　].

(A)　$\boldsymbol{B}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示；

(B)　$\boldsymbol{B}$ 的行向量组可由 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性表示，但 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组不能由 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性表示；

(C)　$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的行向量组可以互相线性表示；

(D)　$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的行或列向量组之间无线性关系.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，且 $R(\boldsymbol{A})=m<n$，则[　　　].

(A)　$\boldsymbol{A}$ 的任意 m 个列向量线性无关；

(B)　$\boldsymbol{A}$ 经若干次初等行变换可化为$(\boldsymbol{E}_m,\ 0)$的形式；

(C)　$\boldsymbol{A}$ 中任一 m 阶子式为零；

(D)　$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 必有无穷多组解.

3. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 是秩为 r 的 n 维向量组，则[　　　].

(A)　该向量组中任意 r 个向量线性无关；

(B)　该向量组中任意 $r+1$ 个向量(如果有的话)线性相关；

(C)　该向量组存在惟一的极大线性无关组；

(D)　该向量组当 $s>r$ 时有若干个极大线性无关组.

4. 如果 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，那么 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_m$，$\boldsymbol{\beta}$[　　　].

(A)　必线性无关；

(B)　不一定线性无关；

(C)　必线性相关；

(D)　当 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 中不含零向量时，必线性无关.

5. 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\delta}$ 线性相关，则[　　　].

(A) $\boldsymbol{\alpha}$ 一定能由$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$，$\boldsymbol{\delta}$ 线性表示；

(B) $\boldsymbol{\beta}$ 一定不能由$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\gamma}$，$\boldsymbol{\delta}$ 线性表示；

(C) $\boldsymbol{\delta}$ 一定能由$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示；

(D) $\boldsymbol{\delta}$ 一定不能由$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示.

三、完成下列各题

1. 判断下列向量组的线性相关性，求秩和一个极大无关组：

$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ -1,\ 2,\ 1,\ 0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,\ 1,\ 4,\ -2,\ 0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,\ 0,\ 6,\ -1,\ 0)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(0,\ 3,\ 0,\ 0,\ 1)$.

2. 求下列向量组的一个极大无关组，并把其余向量用这个极大无关组线性表示.

$\boldsymbol{\alpha}_1=(5,\ 2,\ -3,\ 1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(4,\ 1,\ -2,\ 3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,\ 1,\ -1,\ -2)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(3,\ 4,\ -1,\ 2)$.

四、已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 0,\ 2,\ 3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\ 1,\ 3,\ 5)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,\ -1,\ a+2,\ 1)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,\ 2,\ 4,\ a+8)$，$\boldsymbol{\beta}=(1,\ 1,\ b+3,\ 5)$.

1. a，b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由$\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示？

2. a，b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 可由$\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 惟一地线性表示？写出该表示式.

五、设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 n 维向量，且向量组 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 也线性无关.

六、设向量 $\boldsymbol{a}=(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)'$，$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，证明：若 $\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$，而 $\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}$，…，$\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{a}$ 线性无关.

七、在 R^4 中，求从基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 1,\ 1,\ 1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\ 1,\ -1,\ -1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,\ -1,\ 1,\ -1)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,\ -1,\ -1,\ 1)$到基 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,\ 1,\ 0,\ 1)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(2,\ 1,\ 3,\ 1)$，$\boldsymbol{\beta}_3=(1,\ 1,\ 0,\ 0)$，$\boldsymbol{\beta}_4=(0,\ 1,\ -1,\ -1)$的过渡矩阵及向量 $\boldsymbol{\eta}=(1,\ 0,\ 0,\ -1)$在基 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$，$\boldsymbol{\beta}_4$ 下的坐标.

第二套

一、填空题

1. 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，那么 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性________关.

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 0,\ 3,\ 5)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\ 2,\ 1,\ 3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,\ 1,\ 2,\ 6)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,\ \lambda,\ 1,\ 2)$线性相关，则 $\lambda=$________.

3. 如果矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$经初等行变换变为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 3\\ 0 & 0 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，那么向量组$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$的一个极大无关组为________. 其余向量由此极大无关组线性表示的关系式为________.

4. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}_1,\ \boldsymbol{c}_2)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}_1,\ \boldsymbol{c}_2)$，且$|\boldsymbol{A}|=3$，$|\boldsymbol{B}|=5$，则$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$________.

5. 已知 3 维向量空间的一个基为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 1,\ 1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,\ -1,\ 0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,\ 3,\ 1)$，

则向量 $\boldsymbol{\beta}=(5, 2, 1)$在该基下的坐标为________.

二、选择题

1. 设有任意两个 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$；$\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$，如果存在两组不全为零的数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$；$\mu_1, \cdots, \mu_m$，使得$(\lambda_1+\mu_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(\lambda_m+\mu_m)\boldsymbol{\alpha}_m+(\lambda_1-\mu_1)\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+(\lambda_m-\mu_m)\boldsymbol{\beta}_m=0$，那么[　　].

(A)　两向量组都线性相关；

(B)　两向量组都线性无关；

(C)　$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\beta}_m, \boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m-\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关；

(D)　$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\beta}_m, \boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m-\boldsymbol{\beta}_m$ 线性相关.

2. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 维列向量组为 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$，则当 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 线性无关时，应有[　　].

(A)　$R(A)<m$；　(B)　$R(A)=m$；　(C)　$R(A)<n$；　(D)　$R(A)=n$.

3. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a_1, a_2, a_3)'$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(b_1, b_2, b_3)'$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(c_1, c_2, c_3)'$，且 $a_i^2+b_i^2\neq 0$ $(i=1, 2, 3)$，则三直线 $a_1x+b_1y+c_1=0$，$a_2x+b_2y+c_2=0$，$a_3x+b_3y+c_3=0$ 交于一点的充要条件是[　　].

(A)　$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关；

(B)　$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关；

(C)　$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关；而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关；

(D)　$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩等于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 的秩.

4. 设 $\boldsymbol{C}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times s}\boldsymbol{B}_{s\times n}$，则[　　].

(A)　$\boldsymbol{C}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示；

(B)　$\boldsymbol{C}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性表示；

(C)　$\boldsymbol{A}$ 的行向量组可由 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组线性表示；

(D)　$\boldsymbol{B}$ 的行向量组可由 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组线性表示.

5. 向量空间$\{\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_1+x_2+\cdots+x_n=0, x_1-x_2+\cdots+(-1)^{n-1}x_n=0, x_i\in R\}$的维数为[　　].

(A)　2；　(B)　$n-2$；　(C)　$n-1$；　(D)　1.

三、完成下列各题

1. 判断下列向量组的线性相关性，求秩和一个极大无关组：

$\boldsymbol{\beta}_1=(2, 1, 3, 4)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(5, 0, 1, -1)$，$\boldsymbol{\beta}_3=(1, -2, -5, -9)$，$\boldsymbol{\beta}_4=(3, -1, -2, -5)$，$\boldsymbol{\beta}_5=(0, 5, 13, 12)$.

2. 求下列向量组的一个极大无关组，并把其余向量用这个极大无关组线性表示：

$\boldsymbol{\alpha}_1=(2, -1, 7, 3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1, 4, 11, -2)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3, -6, 3, 8)$.

四、设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 1, 2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1, 2, 3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1, 3, t)$.

1. 当 t 为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关？

2. 当 t 为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关？

3. 当 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关时，将 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示.

五、求与向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 1, 1, 1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1, 1, -1, -1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1, -1, 1, -1)$都正交的单位向量.

六、设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m(m>1)$，且

$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m$，

$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m$，

…………

$\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m$，

…………

$\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$

线性无关，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 也线性无关.

七、设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 R^n 中一个非零常向量，证明：

1. $V=\{\boldsymbol{x}\mid[\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\alpha}]=0,\ \boldsymbol{x}\in R^n\}$是 R^n 的一个子空间；

2. V 的维数为 $n-1$.

六、答　案

练　习　3-1

1. 2；　2. 3；　3. $3ab+b-2a\neq0$；　4. $t=-\frac{20}{7}$时线性相关，$t\neq-\frac{20}{7}$时线性无关；　5. $n-1$.

练　习　3-2

1. (A)；　2. (B)；　3. (C)；　4. (C)；　5. (D).

练　习　3-3

1.(1)线性相关，秩是 3，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 为一个极大无关组，$\boldsymbol{\alpha}_4=-\frac{3}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{3}{2}\boldsymbol{\alpha}_3$.

(2)线性相关，秩是 3，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 为一个极大无关组，$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_5=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$；

2. $abc=1$；

3. 能，$\boldsymbol{\beta}=3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_4$；

4. 能，表示式不惟一，$\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}=3\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_3$；

5. $t=1$ 时线性相关，$t\neq1$ 时线性无关.

练　习　3-4

1.(1)不等价；　(2)等价，$\boldsymbol{\beta}_1=3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$；$\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{1}{4}\boldsymbol{\beta}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_2-\frac{1}{4}\boldsymbol{\beta}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_2=-\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3=-\frac{1}{4}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_2+\frac{5}{4}\boldsymbol{\beta}_3$；　(3)不等价.

2. $t=1$ 时等价，$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{7}{2}\boldsymbol{\alpha}_2$；$\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{7}{9}\boldsymbol{\beta}_1+\frac{4}{9}\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2=-\frac{1}{9}\boldsymbol{\beta}_1+\frac{2}{9}\boldsymbol{\beta}_2$.

练　习　3-5

1.(1)$\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{\sqrt{10}}(1,\ 2,\ 2,\ -1)'$，$\boldsymbol{e}_2=\frac{1}{\sqrt{26}}(2,\ 3,\ -3,\ 2)'$，$\boldsymbol{e}_3=\frac{1}{\sqrt{10}}(2,\ -1,\ -1,\ -2)'$；

(2)$\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{\sqrt{7}}(1,\ 1,\ -1,\ 2)'$，$\boldsymbol{e}_2=\frac{1}{\sqrt{39}}(2,\ 5,\ 1,\ 3)'$.

2. 标准正交基为 $\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,\ -1,\ 1)'$，$\boldsymbol{e}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,\ 1,\ 2)'$，$\boldsymbol{e}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 1,\ 0)'$，$\boldsymbol{\beta}$ 的坐标为 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\ -\frac{\sqrt{6}}{3},\ 0\right)$.

3. $a=\frac{1}{9}$，$b=\frac{8}{9}$，$c=-\frac{1}{9}$，$d=\frac{4}{9}$，$e=\frac{7}{9}$或 $a=\frac{1}{9}$，$b=-\frac{8}{9}$，$c=\frac{1}{9}$，$d=-\frac{4}{9}$，$e=\frac{7}{9}$.

练　习　3-6

1.(1)是，2维，基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 1,\ 0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,\ 0,\ 1)$；　(2)不是.

2. 坐标为$\left(0,\ \frac{3}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right)$.

3. 过渡矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}$ 的坐标为$(1,\ 1,\ -1)$.

4.(1)$\boldsymbol{\eta}$ 在$\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 下的坐标为$(2,\ -1,\ 3,\ -4)$，在 $\boldsymbol{\beta}_1$，…，$\boldsymbol{\beta}_4$ 下的坐标为$(-3,\ 8,\ 17,\ -7)$.

(2)$\boldsymbol{\beta}_1=(4,\ -3,\ -2,\ 5)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(2,\ -1,\ -1,\ 2)$，$\boldsymbol{\beta}_3=(0,\ 2,\ 1,\ 1)$，$\boldsymbol{\beta}_4=(0,\ 5,\ 2,\ 3)$.

练　习　3-7

3. 提示：用反证法.

4. 提示：充分性，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 与$\boldsymbol{\varepsilon}_1$，…，$\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 等价.

练　习　3-8

1. 提示：$\boldsymbol{\alpha}_i=\frac{1}{m-1}(\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+\boldsymbol{\beta}_m)-\boldsymbol{\beta}_i(i=1,\ \cdots,\ m)$.

3. 提示：证明 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关.

4. 提示：证明$\{\boldsymbol{\alpha}_i+\boldsymbol{\beta}_i\}$中的向量均可由 $s+r$ 个向量$\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$，$\boldsymbol{\beta}_1$，…，$\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$；$\boldsymbol{\beta}_1$，…，$\boldsymbol{\beta}_s$ 分别为两个向量组的极大无关组.

5.(1) 提示：因 $R(A)=1$，故 A 的某非零列向量$\boldsymbol{\alpha}_i$ 是列向量组的极大无关组，其余列向量都是 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的倍数.

(2) 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\beta}'$，其中 $\boldsymbol{\beta}'=(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^k&=(\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\beta}')^k=(\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\beta}')(\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\beta}')\cdots(\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\beta}')\\&=\boldsymbol{\alpha}_i(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}_i)(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}_i)\cdots(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}_i)\boldsymbol{\beta}'\\&=\boldsymbol{\alpha}_i(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}_i)^{k-1}\boldsymbol{\beta}'=(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}_i)^{k-1}\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\beta}'=(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}_i)^{k-1}\boldsymbol{A}.\end{aligned}$$

6. 提示：$D=\left|\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}'_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}'_n\end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}'_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}'_n)\right|=|\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|^2$.

练　习　3-9

1. 提示：证明$(\boldsymbol{A}^*)'=\pm\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}^*)'=\boldsymbol{E}$. 从而$(\boldsymbol{A}^{-1})'\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{A}')'\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}$.

5. 提示：证明 $\boldsymbol{A}$ 中至少有一个元素 a_{ij}不为 0，则$\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}^2=|\boldsymbol{A}|\geqslant a_{ij}^2>0$. 又由$|\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}|=||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}|^n$ 和$|\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|^2$ 得$|\boldsymbol{A}|^n=|\boldsymbol{A}|^2$，即$|\boldsymbol{A}|=1$，从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$.

练　习　3-10

1.$\left(\frac{5}{4},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{4}\right)$.

2. 提示：证明 V_1，V_2 的基等价.

3.$\boldsymbol{\alpha}$ 的坐标为$(a_5,\ a_4-a_5,\ a_3-a_4,\ a_2-a_3,\ a_1-a_2)$.

4. 提示：证明 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

6. 提示：证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 与$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 等价.

第一套

一、1. 无；　2.$m=2n$；　3.1；　4.$k(2,\ -3,\ -4)$；　5.2.

二、1.(C)；　2.(D)；　3.(B)；　4.(B)；　5.(C).

三、1. 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 为一个极大无关组，$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，秩为 3.

2.$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4$；$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_4$.

四、1.$a=-1$，$b=0$；　2.$a\neq-1$ 时，$\boldsymbol{\beta}=-\frac{2b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{a+b+1}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_3+0\boldsymbol{\alpha}_4$.

六、设 $k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\cdots+k_m\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}=0$，左乘 $\boldsymbol{A}^{m-1}$，可得 $k_1=0$，左乘 $\boldsymbol{A}^{m-2}$，可得 $k_2=0$，依次可得

$k_3=\cdots=k_m=0$.

七、过渡矩阵

$$A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 7 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2 & 3\\ -1 & 3 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0 & -1\end{pmatrix},\quad \eta=\left(-2,\ -\frac{1}{2},\ 4,\ -\frac{3}{2}\right).$$

第二套

一、1. 相；　2. 2；　3. α_1，α_2，α_3，$\alpha_4=-2\alpha_1+6\alpha_2-5\alpha_3$；　4. 32；　5. 0，1，1.

二、1.(D)；　2.(B)；　3.(C)；　4.(A)；　5.(B).

三、1. 线性相关，α_1，α_2 为一个极大无关组，$\alpha_3=-2\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_4=-\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_5=5\alpha_1-2\alpha_2$；秩为 2.

2. α_1，α_2，$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2$.

四、1. $t\neq4$；　2. $t=4$；　3. $\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$.

五、$\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，$\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$.

第四讲　线性方程组

一、内容提要

(一)主要定义

1. 齐次线性方程组　非齐次线性方程组　含有 n 个未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 m 个线性方程的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{$*$}$$

称为线性方程组，如果 $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$，那么称方程组(*)为齐次线性方程组. 如果 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 不全为 0，那么称方程组(*)为非齐次线性方程组.

2. 系数矩阵　系数行列式　增广矩阵　方程组(*)中各未知数系数构成的矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为系数矩阵. 当 $m = n$ 时，$\boldsymbol{A}$ 为方阵，$\boldsymbol{A}$ 的行列式称为系数行列式. 对于非齐次线性方程组，矩阵

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

称为增广矩阵. 非齐次线性方程组可由向量方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 表示，其中 $\boldsymbol{x}$ 为由 n 个未知数构成的 n 维列向量，$\boldsymbol{b}$ 为由 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 构成的 m 维列向量. 齐次线性方程组可由向量方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$表示，其中$\boldsymbol{0}$为 m 维零向量.

3. 解向量　齐次线性方程组的解空间　如果向量 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)'$满足 $\boldsymbol{A\xi} = \boldsymbol{b}$，那么称 $\boldsymbol{\xi}$ 为非齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的一个解向量. 如果 $\boldsymbol{\xi}$ 满足 $\boldsymbol{A\xi} = \boldsymbol{0}$，那么称 $\boldsymbol{\xi}$ 为齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$的一个解向量. 齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$的所有解向量构成的向量空间，称为齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$的解空间.

4. 齐次线性方程组的基础解系　齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$的解空间的一个基称为一个基础解系. 如果系数矩阵的秩 $R(\boldsymbol{A}) = r$，那么基础解系含有 $n - r$ 个解向量，其中 n 为未知数个数.

5. 齐次线性方程组的通解　如果 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$的一个基础解系，那么 $\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 称为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$的通解，其中 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$

为任意实数.

6. 非齐次线性方程组的通解　如果 $\boldsymbol{\eta}^*$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的一个解向量，$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，…，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$(简称 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的导出组)的一个基础解系，那么 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}^*+k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 称为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解，其中 k_1，k_2，…，k_{n-r} 为任意实数.

(二) 主要定理

1. 克莱姆法则　如果含有 n 个未知数，n 个方程的线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的系数行列式 $D=|\boldsymbol{A}|\neq0$，那么该方程组有惟一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D},$$

其中 $D_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是把系数行列式 D 中的第 i 列用 $\boldsymbol{b}$ 代替后所得的行列式.

2. 克莱姆法则的其他表述

(1) 如果线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的系数行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq0$，那么该方程组一定有解，且解是惟一的.

(2) 如果线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 无解或有两个不同的解，那么它的系数行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$.

(3) 如果齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的系数行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq0$，那么该方程组没有非零解(仅有零解).

(4) 如果齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，那么它的系数行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$.

3. 齐次线性方程组解的性质　如果 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$ 都是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解(即解向量)，那么 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2$ 也是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解. 如果 $\boldsymbol{\xi}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，k 为实数，那么 $k\boldsymbol{\xi}$ 也是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

4. 非齐次线性方程组解的性质　如果 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，都是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解，那么 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 是对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解. 如果 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解，$\boldsymbol{\xi}$ 是对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，那么 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$ 仍是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解.

5. 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解的充分必要条件是：系数矩阵 A 与增广矩阵 B 的秩相等.

6. 齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充分必要条件是：系数矩阵 A 的秩小于未知数个数.

二、客观题归类分析

(一) 填空题

【例 4-1】　若 $\boldsymbol{A}$ 为 5 阶方阵，$R(\boldsymbol{A})=4$，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系含有________个解向量.

【解】　应填 4. 原因是 $R(\boldsymbol{A})=4=5-1$，则 $R(\boldsymbol{A}^*)=1$，所以 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系应有 $5-1=4$ 个解向量.

【例 4-2】　如果 n 元线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解，$R(\boldsymbol{A})=r$，那么当________时，有惟一解；当________时，有无穷多解.

【解】 应填 $r=n$，$r<n$．原因是 $r=n$ 时，导出组仅有零解，没有基础解系．$r<n$ 时，导出组的基础解系含 $n-r$ 个解向量．

【例 4-3】 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $n-1$，$\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 0，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的通解是________.

【解】 应填 $k(1,1,\cdots,1)'$，$k\in R$．$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的每个方程的系数之和为零，则$(1,1,\cdots,1)'$一定是解，它是线性无关的．又 $R(\boldsymbol{A})=n-1$，故基础解系应含 $n-(n-1)=1$ 个向量，故可取 $k(1,1,\cdots,1)'$为其通解．

【例 4-4】 与向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,-1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,1,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,6,6)$都正交的向量为________.

【解】 设为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$，则由正交定义应有

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=0,\\ x_1+2x_2+x_3+3x_4=0,\\ -x_1+x_2+6x_3+6x_4=0,\end{cases}$$

其基础解系为 $k(3,-3,0,1)$，这就是与 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 都正交的全部向量．

练 习 4-1

1．若齐次线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$有非零解，则 $\lambda=$________.

2．线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2=a_1\\ x_2+x_3=a_2\\ x_3+x_4=a_3\\ x_4+x_1=a_4\end{cases}$有解的充要条件是________.

3．$\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$有非零解的充要条件是________.

4．设 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\eta}_r$ 都是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，若 $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\eta}_r$ 也是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，则 k_1，k_2，$\cdots$，k_r 应满足________.

5．线性方程组 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0$ 的基础解系含有________个解向量．

（二）选择题

【例 4-5】 已知 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是其导出组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的基础解系，$k_1$，$k_2$ 是任意常数，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解是[　　].

(A) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)$；

(B) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)$；

(C) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)$；

(D) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)$.

【解】 应选(B). 原因是(A), (C)中没有 $Ax=b$ 的特解. (D)中 α_1 与 $\beta_1-\beta_2$ 不一定线性无关, 所以不一定是 $Ax=0$的基础解系. (B)中 α_1 与 $\alpha_1-\alpha_2$ 线性无关, 是 $Ax=0$的基础解系, 同时$\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)$是 $Ax=b$ 的一个特解, 所以(B)符合要求.

【例 4-6】 对非齐次线性方程组 $Ax=b$ 及其导出组 $Ax=0$, 应有[ ]成立.

(A) 若 $Ax=0$仅有零解, 则 $Ax=b$ 无解;

(B) 若 $Ax=0$有非零解, 则 $Ax=b$ 有无穷多解;

(C) 若 $Ax=b$ 有无穷多解, 则 $Ax=0$有非零解;

(D) 若 $Ax=b$ 有惟一解, 则 $Ax=0$有非零解.

【解】 应选(C).

注 由非齐次线性方程组解的情况可推断出导出组解的情况, 即

$Ax=b$ 有惟一解$\Rightarrow Ax=0$仅有零解,

$Ax=b$ 有无穷多解$\Rightarrow Ax=0$有非零解.

反之, 则不然, 即

$Ax=0$仅有零解时, $Ax=b$ 不一定有惟一解, 也可能无解, 例如$\begin{cases}x_1-x_2=0\\x_1+x_2=0\\x_1+x_2=0\end{cases}$仅有零解, 这时,

$\begin{cases}x_1-x_2=2\\x_1+x_2=4\\x_1+x_2=4\end{cases}$有惟一解, 而$\begin{cases}x_1-x_2=2\\x_1+x_2=4\\x_1+x_2=3\end{cases}$无解.

$Ax=0$有非零解时, $Ax=b$ 也不一定有无穷多解, 例如$\begin{cases}x_1+x_2=0\\2x_1+2x_2=0\end{cases}$有非零解,

但$\begin{cases}x_1+x_2=1\\2x_1+2x_2=3\end{cases}$无解.

【例 4-7】 如果 n 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 的秩小于 n, 则 [ ].

(A) 方程组有无穷多解; (B) 方程组有惟一解;

(C) 方程组无解; (D) 不能断定解的情况;

【解】 应选(D). 因为 $Ax=b$ 解的情况由 $R(A)$, $R(B)$决定, $R(A)=R(B)=n$ 时, 有惟一解, $R(A)=R(B)<n$ 时, 有无穷多解, $R(A)\neq R(B)$时, 无解, 仅从 $R(A)<n$ 不能断定解的情况. 但当 $R(A)=n$ 时, $R(B)$一定也是 n, 则可断定有惟一解.

【例 4-8】 设 A 为n 阶奇异方阵, A 中有一元素a_{ij}的代数余子式$A_{ij}\neq 0$, 则齐次线性方程组 $Ax=0$的基础解系所含向量个数为[ ].

(A) i 个; (B) j 个; (C) 1 个; (D) n 个

【解】 应选(C). 因为 A_{ij}为A 的$n-1$ 阶子式, $A_{ij}\neq 0$ 说明 $R(A)=n-1$.

练 习 4-2

1. 要使 $\xi_1=(1, 0, 2)$, $\xi_2=(0, 1, -1)$都是线性方程组 $Ax=0$的解, 只要系数矩阵 A 为[ ].

(A) $(-2, 1, 1)$;　　(B) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;　　(D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$仅有零解的充要条件是[　　].

(A)　$\boldsymbol{A}$ 的列向量线性无关；　　(B)　$\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关；

(C)　$\boldsymbol{A}$ 的行向量线性无关；　　(D)　$\boldsymbol{A}$ 的行向量线性相关.

3. 设 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_3$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系，则[　　]也是该方程组的一个基础解系.

(A)　$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_3$ 的一个等价向量组；　　(B)　$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_3$ 的一个等秩向量组；

(C)　$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3$；　　(D)　$\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_2-\boldsymbol{\xi}_3$，$\boldsymbol{\xi}_3-\boldsymbol{\xi}_1$.

4. n 阶方阵 A 可逆的充要条件是[　　].

(A)　$\boldsymbol{A}$ 的所有行向量都不是零向量；　　(B)　$\boldsymbol{A}$ 的所有列向量都不是零向量；

(C)　$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解；　　(D)　只有 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$成立.

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$的秩为 $R(\boldsymbol{A})=m<n$，$\boldsymbol{E}_m$ 为 m 阶单位阵，下述结论正确的是

[　　].

(A)　$\boldsymbol{A}$ 的任意 m 个列向量必线性无关；

(B)　$\boldsymbol{A}$ 的任意一个 m 阶子式不等于零；

(C)　$\boldsymbol{A}$ 通过初等行变换，必可化为$(\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{O})$的形式；

(D)　非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 必有无穷多解.

三、主观题归类分析

(一) 线性方程组的求解

【例 4-9】　求解方程组$\begin{cases} 2x_1+2x_2-3x_3=9, \\ x_1+2x_2+x_3=4, \\ 3x_1+9x_2+2x_3=19. \end{cases}$

【解】　因系数矩阵的行列式不为零，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 求 $\boldsymbol{A}^{-1}$得

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{-17}\begin{bmatrix} -5 & -31 & 8 \\ 1 & 13 & -5 \\ 3 & -12 & 2 \end{bmatrix},$$

故得解向量$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 19 \end{pmatrix}=\frac{1}{-17}\begin{pmatrix} -5 & -31 & 8 \\ 1 & 13 & -5 \\ 3 & -12 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 19 \end{pmatrix}=\frac{1}{-17}\begin{pmatrix} -17 \\ -34 \\ 17 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

【例 4-10】　求解方程组$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4, \\ \quad x_2-x_3+x_4=-3, \\ x_1+3x_2 \quad -3x_4=1, \\ \quad -7x_2+3x_3+x_4=-3. \end{cases}$

【解】 对增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 进行初等行变换，先化为阶梯形，比较 $R(\boldsymbol{A})$，$R(\boldsymbol{B})$，若不等，则无解；若相等，再继续化为行最简形．

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\1&3&0&-3&1\\0&-7&3&1&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&5&-3&1&-3\\0&0&-4&8&-24\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&1&-2&-2\\0&1&-1&1&-3\\0&0&2&-4&12\\0&0&1&-2&6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&-2&-2\\0&1&-1&1&-3\\0&0&1&-2&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&-8\\0&1&0&-1&3\\0&0&1&-2&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$(R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=3)$．

根据 $\boldsymbol{B}$ 的行最简形，可直接写出方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-8\\3\\6\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}(k\in R).$$

【例 4-11】 求线性方程组 $\begin{cases}2x_1-x_2\quad\quad+x_4=-1\\x_1+3x_2-7x_3+4x_4=3\\3x_1-2x_2+x_3+x_4=-2\end{cases}$ 的通解．

【解】 $$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-1&0&1&-1\\1&3&-7&4&3\\3&-2&1&1&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&-7&4&3\\0&-7&14&-7&-7\\0&-11&22&-11&-11\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&3&-7&4&3\\0&1&-2&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&1&0\\0&1&-2&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}(k_1,\ k_2\in R).$$

【例 4-12】 求齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0\\2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5=0\\3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5=0\\2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5=0\end{cases}$ 的一个基础解系和通解．

【解】 $$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&1&-1&1\\2&1&-1&2&-3\\3&-2&-1&1&-2\\2&-5&1&-2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{7}{8}\\0&1&0&\frac{1}{2}&-\frac{5}{8}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{5}{8}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}\frac{7}{8}\\\frac{5}{8}\\-\frac{5}{8}\\0\\1\end{pmatrix}$或写成 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-2\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}7\\5\\-5\\0\\8\end{pmatrix}$.

通解为

$$x=k_1\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-2\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}7\\5\\-5\\0\\8\end{pmatrix}(k_1,\ k_2\in R).$$

练 习 4-3

1. 求解非齐次方程组$\begin{cases}3x_1-2x_2-5x_3+x_4=3,\\2x_1-3x_2+x_3+5x_4=-3,\\x_1+\ 2x_2\qquad -4x_4=-3,\\x_1-\ x_2-\ 4x_3+9x_4=22.\end{cases}$

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&-3&-1\\1&-1&2&-1&1\\4&-2&6&-5&1\\2&4&-2&4&-16\end{pmatrix}$，求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系和通解．

3. 求非齐次线性方程组$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4=1\\x_1+2x_2+x_3-x_4=2\\x_1+x_2+2x_3+x_4=3\end{cases}$的通解.

4. 求齐次线性方程组$\begin{cases}2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0\\3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0\\4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0\end{cases}$ 的一个基础解系和通解.

(二) 带有参数的线性方程组

【例 4-13】 k 为何值时，线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+kx_3=4\\-x_1+kx_2+x_3=k^2\\x_1-x_2+2x_3=-4\end{cases}$有惟一解，无解，有无穷多解？在有解的情况下，求出其全部解.

【解】 系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&k\\-1&k&1\\1&-1&2\end{vmatrix}=-(k+1)(k-4),$$

故 $k\neq -1$，$k\neq 4$ 时，方程组有惟一解．这时，

$$D_1=\begin{vmatrix}4&1&k\\k^2&k&1\\-4&-1&2\end{vmatrix}=-k(k-4)(k+2),$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&4&k\\-1&k^2&1\\1&-4&2\end{vmatrix}=-(k-4)(k^2+2k+4),$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&4\\-1&k&k^2\\1&1&-4\end{vmatrix}=2k(k-4),$$

所以惟一解是

$$x_1=\frac{k(k+2)}{k+1},\quad x_2=\frac{k^2+2k+4}{k+1},\quad x_3=-\frac{2k}{k+1}.$$

当 $k=-1$ 时，增广矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&-1&4\\-1&-1&1&1\\1&-1&2&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&4\\0&0&0&5\\0&-2&3&-8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&4\\0&-2&3&-8\\0&0&0&5\end{pmatrix},$$

因 $R(A)=2$，$R(\boldsymbol{B})=3$，故方程组无解．

当 $k=4$ 时，增广矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&4&4\\-1&4&1&16\\1&-1&2&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&4&4\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

方程组有无穷多解，通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}(k\in R).$$

【例 4-14】 λ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_3=\lambda\\4x_1+x_2+2x_3=\lambda+2\\6x_1+x_2+4x_4=2\lambda+3\end{cases}$ 有解，并求出通解．

【解】 注意这个方程组系数矩阵中不含参数，所以只要把增广矩阵化为阶梯形，

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&1&\lambda\\4&1&2&\lambda+2\\6&1&4&2\lambda+3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&\lambda\\0&1&-2&-3\lambda+2\\0&1&-2&-4\lambda+3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&\lambda\\0&1&-2&-3\lambda+2\\0&0&0&-\lambda+1\end{pmatrix},$$

可见，只有 $\lambda=1$ 时，$R(A)=R(B)=2$，方程组有解．这时，

$$\boldsymbol{B}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故通解为 $$x=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}(k\in R).$$

【例 4-15】 已知线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a,\\3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0,\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b,\\5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2.\end{cases}$$

(1) a，b 为何值时，方程组有解?

(2) 方程组有解时，求其导出组的一个基础解系.

(3) 方程组有解时，求出其通解.

【解】 $$B=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&a\\3&2&1&1&-3&0\\0&1&2&2&6&b\\5&4&3&3&-1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&a\\0&1&2&2&6&3a\\0&0&0&0&0&6-3a\\0&0&0&0&0&2-2a\end{pmatrix},$$

故当 $a=1$，$b=3$ 时，$R(A)=R(B)=2$，方程组有解. 这时

$$B\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-5&-2\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

基础解系为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \xi_3=\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

通解为

$$x=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}\quad(k_1,\ k_2,\ k_3\in R).$$

练 习 4-4

1. a 取何值时，方程组 $\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=a-3\\x_1+ax_2+x_3=-2\\x_1+x_2+ax_3=-2\end{cases}$ 有解? 有解时，求出解来.

2. a，b 取何值时，线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\x_2+2x_3+2x_4=1\\-x_2+(a-3)x_3-2x_4=b\\3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1\end{cases}$有惟一解，无解，有无穷多解？有无穷多解时，求出通解．

3. a，b 取何值时，方程组$\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=4\\x_1+bx_2+x_3=3\\x_1+2bx_2+x_3=4\end{cases}$有解？有解时，求其解．

4. λ 取何值时，方程组$\begin{cases}2x_1-x_2+x_3+x_4=1\\x_1+2x_2-x_3+4x_4=2\\x_1+7x_2-4x_3+11x_4=\lambda\end{cases}$有解？有解时，求其通解．

（三）线性方程组解的结构

【例 4-16】 设 4 元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3，已知 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\eta}_3$ 是它的三个解向量，且 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，求该方程组的通解．

【解】 设方程组为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，则由

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)=\boldsymbol{A\eta}_1+\boldsymbol{A\eta}_2-\boldsymbol{A\eta}_3=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$$

知道

$$\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解向量．这样，

$$\boldsymbol{\eta}_1-\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$$

就是其导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个解向量．又因为 $R(\boldsymbol{A})=3$，未知数个数为 4 个，所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系仅含一个解向量．于是$(3, 4, 5, 6)'$就是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系．$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解可写成

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}(k\in R).$$

【例 4-17】 求一个齐次线性方程组，使其一个基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$.

【解】 设所求方程组中各方程为

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0,$$

把 ξ_1，ξ_2 代入，得

$$\begin{cases}a_1+2a_2+a_3=0,\\-a_1+a_4=0,\end{cases}$$

因为此方程组的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&2&1&0\\-1&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&2&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&2&1&0\end{pmatrix},$$

所以有

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix},$$

取 $k_1=1$，$k_2=0$ 和 $k_1=0$，$k_2=1$，得所求方程组为

$$\begin{cases}x_1-x_3+x_4=0,\\x_2-2x_3=0.\end{cases}$$

注 答案显然不是惟一的. 但任意正确答案都可经化简成为上述形式.

【例4-18】 设 4 元线性方程组(Ⅰ)为 $\begin{cases}x_1+x_2=0,\\x_2-x_4=0,\end{cases}$ 又已知齐次线性方程组(Ⅱ)的通解为

$$k_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\2\\2\\1\end{pmatrix}.$$

(1) 求方程组(Ⅰ)的基础解系；

(2) 问线性方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)是否有非零公共解？若有，则求出所有的非零公共解；若没有，则说明理由.

【解】 (1) $A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$,

故(Ⅰ)的基础解系为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

(2) 令(Ⅱ)中方程为 $ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0$，把(Ⅱ)的基础解系两个解向量代入得，

$$\begin{cases} b+c=0, \\ -a+2b+2c+d=0, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} b+c=0, \\ a-d=0, \end{cases}$$

所以(Ⅱ)可以写成

$$\begin{cases} x_2-x_3=0, \\ x_1+x_4=0, \end{cases}$$

把它与(Ⅰ)联立求解，其非零解即(Ⅰ)，(Ⅱ)的非零公共解. 由于

$$\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_2-x_4=0 \\ x_2-x_3=0 \\ x_1+x_4=0 \end{cases}$$

的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得(Ⅰ)，(Ⅱ)联立后的非零解为 $x=(-1, 1, 1, 1)'$. 显然，它可以写成(Ⅱ)的基础解系两向量的线性组合，即

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

也可以写成(Ⅰ)的基础解系两向量的线性组合，即

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

可见，(Ⅰ)，(Ⅱ)有非零公共解，其全部非零公共解是

$$k(-1, 1, 1, 1)' \quad (k \in R).$$

练　习　4-5

1. 已知齐次线性方程组(Ⅰ)为

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=0, \\ x_2+x_3-x_4=0, \end{cases}$$

齐次线性方程组(Ⅱ)的一个基础解系为

$$\xi_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \xi_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

求(Ⅰ)，(Ⅱ)的公共非零解．并指明该公共非零解如何由(Ⅰ)，(Ⅱ)的基础解系线性表示．

2．求一通解为 $x=\begin{pmatrix}1\\9\\9\\8\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\0\\0\\2\end{pmatrix}(k_1,\ k_2\in R)$ 的非齐次线性方程组．

3．已知四元非齐次线性方程组的三个解向量为 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\eta}_3$，$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\5\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}1\\9\\8\\6\end{pmatrix}$，且其导出组的基础解系仅含一个解向量．求该非齐次方程组的通解．

四、释疑解难

(一) 线性方程组的解

【例 4-19】 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系．证明：$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 也是该方程组的一个基础解系．

【证】 设有三个数 k_1，k_2，k_3，使

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{0},$$

则有

$$(k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以有

$$\begin{cases}k_1+k_3=0,\\k_1+k_2=0,\\k_2+k_3=0,\end{cases}$$

这个方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq0,$$

所以仅有零解，即 $k_1=k_2=k_3=0$．这说明 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关．又由齐次方程组解的性质知，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 都是方程组的解，所以它们构成方程组的一个基础解系．

注　向量组为齐次方程组的基础解系应满足三个条件：

(1) 每个向量都是解向量；

(2) 向量组线性无关；

(3) 所含向量个数等于未知数个数减去系数矩阵的秩．

【例 4-20】 设齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{r1}x_1+\cdots+a_{rn}x_n=0\end{cases}\qquad(*)$$

的系数矩阵的秩为 r，如果 $n-r$ 个数组

$$\begin{array}{llll}a_{r+1,1}, & a_{r+1,2}, & \cdots, & a_{r+1,n};\\ a_{r+2,1}, & a_{r+2,2}, & \cdots, & a_{r+2,n};\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots, & a_{nn};\end{array}$$

使得矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{r1} & \cdots & a_{rn}\\ a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

的秩为 n．证明：$\boldsymbol{\alpha}_1=(A_{r+1,1},\ \cdots,\ A_{r+1,n})$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_{n-r}=(A_{n1},\ \cdots,\ A_{nn})$是$(*)$的一个基础解系，其中 A_{ij}是A 中元素a_{ij}的代数余子式．

【证】　因为 $R(A)=n$，故$|A|\neq 0$．由 $AA^*=A^*A=|A|E$ 知A^*是可逆矩阵，从而其列向量组是线性无关的．由此得 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$线性无关．把 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$依次代入$(*)$，根据“行列式某行各元素与其他行对应元素的代数余子式乘积之和为零”知 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$都是$(*)$的解向量．总之，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$构成$(*)$的一个基础解系．

【例 4-21】　设 $\boldsymbol{\eta}^*$是非齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的一个解，$\boldsymbol{\xi}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$是对应的齐次方程组的一个基础解系．证明：

(1) $\boldsymbol{\eta}^*$，$\boldsymbol{\xi}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关；

(2) $\boldsymbol{\eta}^*$，$\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关．

【证】　(1) 用反证法．设 $\boldsymbol{\eta}^*$，$\boldsymbol{\xi}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性相关，则由于 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关，故 $\boldsymbol{\eta}^*$可由 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性表示，即 $\boldsymbol{\eta}^*$是对应齐次方程组的解．这与题设矛盾，故 $\boldsymbol{\eta}^*$，$\boldsymbol{\xi}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关．

(2) 用反证法．若 $\boldsymbol{\eta}^*$，$\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性相关，则存在 $n-r+1$ 个不全为零的数 k_0，k_1，$\cdots$，k_{n-r}，使

$$k_0\boldsymbol{\eta}^*+k_1(\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_1)+\cdots+k_{n-r}(\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r})=\mathbf{0},$$

这样，就有

$$(k_0+k_1+\cdots+k_{n-r})\boldsymbol{\eta}^*+k_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}=\mathbf{0}.$$

由(1)已知 $\boldsymbol{\eta}^*$，$\boldsymbol{\xi}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关，则 $k_0+k_1+\cdots+k_{n-r}=0$，$k_1=0$，$\cdots$，$k_{n-r}=0$，从而 $k_0=0$，这与 k_0，k_1，$\cdots$，k_{n-r}不全为零矛盾．故 $\boldsymbol{\eta}^*$，$\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关．

【例 4-22】　设非齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵的秩为 r，$\boldsymbol{\eta}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$是它的 $n-r+1$ 个线性无关的解．试证：它的任一解可表示为

$$x=k_1\eta_1+\cdots+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}(\text{其中 } k_1+\cdots+k_{n-r+1}=1).$$

【证】 根据非齐次线性方程组解的性质，$\eta_2-\eta_1$，…，$\eta_{n-r+1}-\eta_1$都是对应的齐次线性方程组的解. 又设有 $n-r$ 个数k_2，…，k_{n-r+1}，使

$$k_2(\eta_2-\eta_1)+\cdots+k_{n-r+1}(\eta_{n-r+1}-\eta_1)=\mathbf{0},$$

则有

$$-(k_2+\cdots+k_{n-r+1})\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}=\mathbf{0},$$

因为 η_1，…，η_{n-r+1}线性无关，故 $k_2=\cdots=k_{n-r+1}=0$. 可见，$\eta_2-\eta_1$，…，$\eta_{n-r+1}-\eta_1$是对应齐次线性方程组的 $n-r$ 个线性无关的解，它们构成一个基础解系. 于是，非齐次线性方程组的任一解可表示为

$$\begin{aligned} x &=\eta_1+\lambda_2(\eta_2-\eta_1)+\cdots+\lambda_{n-r+1}(\eta_{n-r+1}-\eta_1)\\ &=(1-\lambda_2-\cdots-\lambda_{n-r+1})\eta_1+\lambda_2\eta_2+\cdots+\lambda_{n-r+1}\eta_{n-r+1}, \end{aligned}$$

令 $k_1=1-\lambda_2-\cdots-\lambda_{n-r+1}$，$k_2=\lambda_2$，…，$k_{n-r+1}=\lambda_{n-r+1}$，则

$$x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1},\text{ 且 } k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1.$$

练 习 4-6

1. 设齐次线性方程组 $Ax=0$的系数矩阵的秩为 r. 证明：该方程组的任意 $n-r$ 个线性无关的解都是它的一个基础解系(n 为未知数个数).

2. 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n-1,1}x_1+a_{n-1,2}x_2+\cdots+a_{n-1,n}x_n=0 \end{cases}$$

的系数矩阵为 A，$M_i(i=1,2,\cdots,n)$是从 A 中划去第i 列所得的$n-1$ 阶子式. 证明：

(1) $(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)$是该方程组的一个解向量；

(2) 若 $R(A)=n-1$，则方程组的解都是$(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)$的倍数.

3. 设 A 为n 阶方阵，且$|A|=0$，A 中某一元素a_{ij}的代数余子式$A_{ij}\neq0$，证明：$(A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{in})$是齐次线性方程组 $Ax=0$的一个基础解系.

(二) 矩阵秩的进一步讨论

【例 4-23】 如果齐次线性方程组 $Ax=0$的解均为另一齐次线性方程组 $Bx=0$的解，证明：$R(A)\geqslant R(B)$.

【证】 显然，A，B 的列数相同，设为 n. 又设 $R(A)=r$，$R(B)=s$，则 $Ax=0$的基础解系含有 $n-r$ 个解向量，$Bx=0$的基础解系含有 $n-s$ 个解向量，因为 $Ax=0$的解均为 $Bx=0$的解，所以 $n-r\leqslant n-s$，即 $r\geqslant s$.

【例 4-24】 设 A，B 都是n 阶方阵，如果 $AB=O$，证明：$R(A)+R(B)\leqslant n$.

【证】 因 $AB=O$，故 B 的每个列向量$b_i(i=1,2,\cdots,n)$都是 $Ax=0$的解向量，如果 $R(A)=r$，那么 $Ax=0$有 $n-r$ 个线性无关的解向量，而 b_1，…，b_n 中线性无关的有

$R(\boldsymbol{B})$个，故 $R(\boldsymbol{B})\leqslant n-r=n-R(\boldsymbol{A})$，即 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

【例 4-25】 设 $\boldsymbol{A}$ 为n 阶实矩阵，证明：$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})$.

【证】 由例 4-23 可知，若两个齐次线性方程组同解，则系数矩阵的秩相同．现证齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$与 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$同解．设 $\boldsymbol{\xi}$ 是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解，则 $\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{0}$，于是 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$，故 $\boldsymbol{\xi}$ 也是$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解．设 $\boldsymbol{\eta}$ 是$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解，则 $\boldsymbol{\eta}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A\eta}=\boldsymbol{\eta}'\boldsymbol{0}=0$，故$(\boldsymbol{A\eta})'(\boldsymbol{A\eta})=0$，即 $\boldsymbol{A\eta}=\boldsymbol{0}$．这说明 $\boldsymbol{\eta}$ 也是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解．因此 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$与 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$同解，故 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})$.

【例 4-26】 设 $\boldsymbol{A}$ 为$m\times n$ 矩阵，且 $R(\boldsymbol{A})=r$，b_1，b_2，…，b_m 是 m 个不全为零的数，如果有矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & b_2 & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_m & b_m & \cdots & b_m \end{pmatrix}$，证明：$R(\boldsymbol{B})\leqslant n-r+1$.

【证】 设 $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, \cdots, b_m)'$，建立非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$．因为 $R(\boldsymbol{A})=r$，所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解向量组的秩为 $n-r+1$．又由 $\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}, \cdots, \boldsymbol{b})$可知 $\boldsymbol{B}$ 的列向量都是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解向量．所以 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的秩$=R(\boldsymbol{B})<n-r+1$.

练 习 4-7

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为n 阶方阵，证明：$R(\boldsymbol{A}^n)=R(\boldsymbol{A}^{n+1})$.
2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为$m\times p$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为$p\times n$ 矩阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，证明：$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant p$.
3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，证明：$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.

五、单元统测

第一套

一、填空题

1. n 元齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$仅有零解的充分必要条件是________.

2. 含有 n 个方程的齐次线性方程组$x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n=0$ 的系数行列式$|\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n|=0$，则此方程组有________解，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$ 线性________关.

3. 如果 4 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的同解方程组是$\begin{cases} x_1=-3x_3, \\ x_2=0, \end{cases}$那么 $R(\boldsymbol{A})=$________，基础解系有________个解向量.

4. 如果非齐次线性方程组增广矩阵经初等行变换化为$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$，那么该方程组的通解是________.

5. 如果方程组$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=\lambda-1 \\ 3x_2-x_3=\lambda-2 \\ \lambda x_2-x_3=(\lambda-3)(\lambda-4)+(\lambda-2) \end{cases}$有无穷多解，那么 $\lambda=$________.

二、选择题

1. 如果非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 中方程个数少于未知数个数，那么[　　].

(A) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 必有无穷多解；　　(B) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解；

(C) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解；　　(D) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 一定无解.

2. 要使 $\xi_1=(-1,\ 2,\ 0)'$，$\xi_2=(3,\ 0,\ 1)'$ 都是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，只要系数矩阵 A 是[　　].

(A) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$；　　(B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ -4 & -2 & 12 \end{bmatrix}$；　　(D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

3. 设 ξ_1，ξ_2，ξ_3 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，也是 $\boldsymbol{Bx}=0$ 的基础解系，且 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，则 ξ_1，ξ_2，ξ_3 也一定是[　　]的基础解系.

(A) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$；　　(B) $\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$；

(C) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$；　　(D) $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

4. 如果 ξ_1，ξ_2，ξ_3 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，则[　　]不是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

(A) $\xi_1+\xi_2$，$\xi_2+\xi_3$，$\xi_3+\xi_1$；　　(B) $\xi_1+2\xi_2$，$\xi_2+2\xi_3$，$\xi_3+2\xi_1$；

(C) $\xi_1-\xi_2$，$\xi_2-\xi_3$，$\xi_3-\xi_1$；　　(D) ξ_1，$\xi_1+\xi_2$，$\xi_1+\xi_2+\xi_3$.

5. 齐次线性方程组 $\begin{cases} a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0 \\ b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0 \end{cases}$ 的基础解系含有 $n-1$ 个解向量，则[　　].

(A) $a_1=a_2=\cdots=a_n$；　　(B) $b_1=b_2=\cdots=b_n$；

(C) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=0$；　　(D) $\dfrac{a_i}{b_i}=m \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$.

三、用克来姆法则求解方程组 $\begin{cases} 7x+2y+3z=15, \\ 5x-3y+2z=15, \\ 10x-11y+5z=36. \end{cases}$

四、求下列非齐次方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-6x_3-4x_4=6 \\ 3x_1-x_2-6x_3-4x_4=2 \\ 2x_1+3x_2+9x_3+2x_4=6 \\ 3x_1+2x_2+3x_3+8x_4=-7 \end{cases}$ 的通解.

五、求 λ 的值，使齐次方程组 $\begin{cases} (\lambda+3)x_1+x_2+2x_3=0 \\ \lambda x_1+(\lambda-1)x_2+x_3=0 \\ 3(\lambda+1)x_1+\lambda x_2+(\lambda+3)x_3=0 \end{cases}$ 有非零解，并求出通解.

六、证明：方程组$\begin{cases}\frac{1}{2}x_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\ \frac{1}{2}x_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\ \frac{1}{2}x_3=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3\end{cases}$只有零解，其中 a_{ij}均为整数.

七、已知$|a|\neq|b|$，求解非齐次方程组$\begin{cases}ax_1+bx_{2n}=1,\\ ax_2+bx_{2n-1}=1,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ ax_n+bx_{n+1}=1,\\ bx_n+ax_{n+1}=1,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ bx_1+ax_{2n}=1.\end{cases}$

第二套

一、填空题

1. 在齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=0$中，若 $R(A)=k$，且 ξ_1，ξ_2，…，ξ_r 是它的一个基础解系，则 $r=$________，当 $k=$________时，此方程组仅有零解.

2. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\end{pmatrix}$，$x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$，$a_i\neq a_j(i\neq j;\ i,\ j=1,$ $2,\ \cdots,\ n)$，则非齐次线性方程组 $A'x=b$ 的解是$x=$________.

3. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 4 & t & 3\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$，$B$ 为 3 阶非零矩阵，且 $AB=0$，则 $t=$________.

4. 齐次线性方程组 $Ax=0$的系数矩阵 A 经初等行变换化为$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，则方程组的基础解系________.

5. 齐次线性方程组 $Ax=0$的解空间的基是该方程组的一个________.

二、选择题

1. 非齐次线性方程组$\begin{cases}ax_1+ax_2+\cdots+ax_n=h,\\ bx_1+bx_2+\cdots+bx_n=l,\end{cases}$ a，b，h，l 均不为零，则该方程组无解的充分必要条件是[　　].

(A)　$\frac{a}{b}=\frac{h}{l}$；　　　　(B)　$\frac{a}{b}\neq\frac{h}{l}$；

(C) $\frac{h}{a}=1$; (D) $\frac{l}{b}=1$.

2. 如果 m 个方程 n 个未知数的非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 对任何非零向量 $\boldsymbol{b}$ 都有解，且 $m>n$，[　　].

(A) $R(\boldsymbol{A})=n$; (B) $R(\boldsymbol{A})=m$;

(C) $R(\boldsymbol{A})<n$; (D) $R(\boldsymbol{A})<m$.

3. 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 中未知数个数为 n，方程个数为 m，$R(\boldsymbol{A})=r$，则 [　　].

(A) $r=m$ 时，有解; (B) $r=n$ 时，有惟一解;

(C) $m=n$ 时，有惟一解; (D) $r<n$ 时，有无穷多解.

4. 设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=r$，$\boldsymbol{B}$ 为增广矩阵，则与此方程组同解的方程组为[　　].

(A) $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$;

(B) $\boldsymbol{QAx}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{Q}$ 为初等方阵;

(C) $\boldsymbol{PAx}=\boldsymbol{Pb}$，$\boldsymbol{P}$ 为可逆阵;

(D) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 中前 r 个方程组成的方程组.

5. 齐次线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+\lambda^2x_3=0\\x_1+\lambda x_2+x_3=0\\x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$ 的系数矩阵记为 $\boldsymbol{A}$，如果存在 3 阶非零矩阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，那么[　　].

(A) $\lambda=-2$，且 $|\boldsymbol{B}|=0$; (B) $\lambda=-2$，且 $|\boldsymbol{B}|\neq0$;

(C) $\lambda=1$，且 $|\boldsymbol{B}|=0$; (D) $\lambda=1$，且 $|\boldsymbol{B}|\neq0$.

三、用克莱姆法则求方程组$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3+2x_4=4\\3x_1+3x_2+3x_3+2x_4=6\\3x_1-x_2-x_3-2x_4=6\\3x_1-x_2+3x_3-x_4=6\end{cases}$的解.

四、求非齐次线性方程组的$\begin{cases}9x_1-3x_2+5x_3+6x_4=4\\6x_1-2x_2+3x_3+4x_4=5\\3x_1-x_2+3x_3+14x_4=-8\end{cases}$ 的通解.

五、已知非齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4=1,\\x_1+3x_2+6x_3+x_4=3,\\3x_1-x_2+ax_3+15x_4=3,\\x_1-5x_2-10x_3+12x_4=b,\end{cases}$ a，b 取何值时，方程组无解？有惟一解？有无穷多解？有无穷多解时，求出通解.

六、证明：齐次线性方程组 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 的一个基础解系和齐次线性方程组 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 的一个基础解系构成 R^n 的一个基.

七、如果非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{n\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 对任何 n 维列向量 $\boldsymbol{b}$ 都有解，则对任何 n 维列向量 $\boldsymbol{\beta}$，方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 必有惟一解，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

六、答　案

练　习　4-1

1. $\lambda=1$ 或 $\lambda=-2$；　2. $a_1-a_2+a_3-a_4=0$；　3. $R(A)<n$；　4. $k_1+k_2+\cdots+k_r=1$；　5. 4.

练　习　4-2

1. (A)；　2. (A)；　3. (C)；　4. (D)；　5. (D).

练　习　4-3

1. $x_1=-1$，$x_2=3$，$x_3=-2$，$x_4=2$.；

2. $\boldsymbol{\xi}_1=(-1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=(2,\ 2,\ 0,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$，通解为 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2(k_1,\ k_2\in R)$.

3. $\boldsymbol{x}=(1,\ 2,\ 1,\ 0)'+k(-3,\ 3,\ -1,\ 2)'(k\in R)$；

4. $\boldsymbol{x}=k_1(2,\ 1,\ 0,\ 0)'+k_2(2,\ 0,\ -5,\ 7)'(k_1,\ k_2\in R)$.

练　习　4-4

1. $a\neq1$ 且 $a\neq-2$ 时，有惟一解：$x_1=\dfrac{a-1}{a+2}$，$x_2=-\dfrac{3}{a+2}$，$x_3=-\dfrac{3}{a+2}$；$a=1$ 时，有无穷多解：$\boldsymbol{x}=(2,\ 0,\ 0)'+k_1(-1,\ 1,\ 0)'+k_2(-1,\ 0,\ 1)'(k_1,\ k_2\in R)$；$a=-2$ 时，无解.

2. $a\neq1$ 时，有惟一解；$a=1$，$b\neq-1$ 时，无解；$a=1$，$b=-1$ 时，有无穷多解：$\boldsymbol{x}=(-1,\ 1,\ 0,\ 0)'+k_1(1,\ -2,\ 1,\ 0)'+k_2(1,\ -2,\ 0,\ 1)\ (k_1,\ k_2\in R)$.

3. $a\neq1$，$b\neq0$ 时，有惟一解：$x_1=\dfrac{1-2b}{b(1-a)}$，$x_2=\dfrac{1}{b}$，$x_3=\dfrac{4b-2ab-1}{b(1-a)}$；$b=0$ 时，无解；$a=1$，$b\neq\dfrac{1}{2}$ 时，无解；$a=1$，$b=\dfrac{1}{2}$ 时，有无穷多解：$\boldsymbol{x}=(2,\ 2,\ 0)'+k(-1,\ 0,\ 1)'(k\in R)$.

4. $\lambda=5$ 时，有解：$\boldsymbol{x}=\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{3}{5},\ 0,\ 0\right)'+k_1(1,\ -3,\ -5,\ 0)'+k_2(6,\ 7,\ 0,\ -5)'\ (k_1,\ k_2\in R)$.

练　习　4-5

1. 非零公共解 $\boldsymbol{\eta}=k(1,\ 0,\ 1,\ 1)'(k\in R,\ k\neq0)$，$\boldsymbol{\eta}=0\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\lambda}_1+\boldsymbol{\lambda}_2$，$\boldsymbol{\lambda}_1=(2,\ -1,\ 1,\ 0)'$，$\boldsymbol{\lambda}_2=(-1,\ 1,\ 0,\ 1)'$是方程组(Ⅰ)的基础解系.

2. $\begin{cases}x_2-x_3=0,\\x_1+2x_2-x_4=11.\end{cases}$

3. $\boldsymbol{x}=(2,\ 0,\ 5,\ -1)'+k(3,\ -9,\ 2,\ -8)'(k\in R)$.

练　习　4-6

2. (1)提示：对于 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$，由

$$0=\begin{vmatrix}a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n-1,1}&a_{n-1,2}&\cdots&a_{n-1,n}\end{vmatrix}=a_{i1}M_1+a_{i2}(-M_2)+\cdots+a_{in}(-1)^{n-1}M_n$$

知$(M_1,\ -M_2,\ \cdots,\ (-1)^{n-1}M_n)$是方程组的解.

(2) 提示：证明$(M_1,\ -M_2,\ \cdots,\ (-1)^{n-1}M_n)\neq\boldsymbol{0}$.

3. 提示：$R(\boldsymbol{A})=n-1$，$(A_{i1},\ A_{i2},\ \cdots,\ A_{in})$是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的非零解.

练　习　4-7

1. 提示：证明 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$与 $\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$同解.

2. 提示：$\boldsymbol{B}$ 的列向量都是$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解向量，故 $R(\boldsymbol{B})\leqslant p-R(\boldsymbol{A})$.

第一套

一、1.0； 2. 非零，相； 3.2，2； 4. $x=(0,\ 1,\ 3,\ 0)'+k_1(1,\ 0,\ 0,\ 0)'+k_2(0,\ 2,\ -4,\ 1)$ $(k_1,\ k_2\in R)$； 5.3.

二、1.(B)； 2.(C)； 3.(C)； 4.(C)； 5.(D).

三、$x=2,\ y=-1,\ z=1$.

四、$x=\left(0,\ 2,\ \frac{1}{3},\ -\frac{3}{2}\right)'$.

五、$\lambda=0$ 时，$x=k(-1,\ 1,\ 1)'(k\in R)$；$\lambda=1$ 时，$x=k(-1,\ 2,\ 1)'(k\in R)$.

六、设 $f(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{22} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3+b_1\lambda^2+b_2\lambda+b_3$，这是 λ 的整系数多项式，$|A|=f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}b_1+\frac{1}{2}b_2+b_3=\frac{1}{8}(-1+2b_1+4b_2+8b_3)=\frac{1}{8}(-1+2m)$，因 m 为整数，故 $-1+2m\neq0$，于是 $|A|\neq0$，方程组有惟一解，即零解.

七、$x_i=\frac{1}{a+b}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 2n)$.

第二套

一、1. $n-k$，n； 2. $x=(1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0)'$； 3. -3； 4. 不存在； 5. 一个基础解系.

二、1.(B)； 2.(A)； 3.(A)； 4.(C)； 5.(C).

三、$x_1=2$，$x_2=x_3=x_4=0$.

四、$x=(0,\ -13,\ -7,\ 0)'+k(1,\ 3,\ 0,\ 0)(k\in R)$.

五、$a\neq2$ 时，有惟一解；$a=2$，$b\neq1$ 时，无解；$a=2$，$b=1$ 时，有无穷多解：$x=(-8,\ 3,\ 0,\ 2)'+k(0,\ -2,\ 1,\ 0)(k\in R)$.

六、提示：$x_1=x_2=\cdots=x_n$ 的基础解系为 $\eta=(k,\ k,\ \cdots,\ k)(k\neq0)$，如果 $\xi_1,\ \cdots,\ \xi_{n-1}$ 是 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 的基础解系，只要证明 η，ξ_1，$\cdots$，ξ_{n-1} 线性无关.

七、提示：A 的列向量组线性无关，故 A 可逆，于是 A^* 也可逆，$A^*x=\beta$ 有惟一解.

第五讲　特征值和特征向量

一、内容提要

(一) 主要定义

1. 特征值　特征向量　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，如果存在数 λ 和 n 维非零列向量 $\boldsymbol{x}$，使得 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$，那么称数 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{x}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量.

2. 特征方程　特征多项式　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，则以 λ 为未知数的一元 n 次方程 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程，方程左端的 λ 的 n 次多项式 $f(\lambda)=|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|$ 称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式. $\boldsymbol{A}$ 的特征值就是特征方程的解.

3. 相似矩阵　相似变换　设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，如果有 n 阶可逆方阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，那么称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的相似矩阵，或称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似. 对 $\boldsymbol{A}$ 的运算 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 称为对 $\boldsymbol{A}$ 进行相似变换. $\boldsymbol{P}$ 称为把 $\boldsymbol{A}$ 变成 $\boldsymbol{B}$ 的相似变换矩阵.

4. 矩阵的相似对角化　对 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，求相似变换矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵的过程称为 $\boldsymbol{A}$ 的相似对角化.

(二) 主要定理

1. n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个特征值，它们的和等于 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线元素之和($\boldsymbol{A}$ 的迹)，它们的乘积等于 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|$.

2. 如果 λ_1，λ_2，…，λ_m 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$，…，$\boldsymbol{p}_m$ 是与之对应的特征向量，λ_1，λ_2，…，λ_m 互不相等时，$\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$，…，$\boldsymbol{p}_m$ 线性无关.

3. 如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，那么 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征多项式，从而有相同的特征值.

4. 如果 n 阵方阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似，那么 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的主对角线元素就是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值.

5. n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似，即 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

6. 如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值互不相等，那么 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似，即 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化.

7. 实对称矩阵的特征值全为实数.

8. 实对称矩阵的不同特征值对应的特征向量正交.

9. 对 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，必存在正交阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为以 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特

征值为主对角线元素的对角阵.

二、客观题归类分析

(一) 填空题

【例 5-1】 已知 3 阶方阵 A 的 3 个特征值为 -2, 3, 4, 则 A^{-1}的特征值为________, A'的特征值为________, A^*的特征值为________, $A^2-3A+2E$ 的特征值为________.

【解】 设 λ 为 A 的一个特征值, x 是属于 λ 的特征向量, 由定义, 有 $Ax=\lambda x$. 如果 A 可逆, 那么有 $A^{-1}Ax=\lambda A^{-1}x$, 即 $A^{-1}x=\frac{1}{\lambda}x$, 故$\frac{1}{\lambda}$是$A^{-1}$的一个特征值. 又 $A^*x=|A|A^{-1}x=|A|\cdot\frac{1}{\lambda}x=\frac{|A|}{\lambda}x$, 故$\frac{|A|}{\lambda}$是$A^*$的一个特征值. 又$|A-\lambda E|=|(A-\lambda E)'|=|A'-\lambda E|$, 故 A'与A 有相同的特征值. 又$(A^2-3A+2E)x=A^2x-3Ax+2x=\lambda^2x-3\lambda x+2x=(\lambda^2-3\lambda+2)x$, 故 $\lambda^2-3\lambda+2$ 是 $A^2-3A+2E$ 的一个特征值. 由以上讨论可知, 各空应依次填: $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$; -2, 3, 4; 12, -8, -6; 12, 2, 6.

【例 5-2】 已知

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix},$$

且 A 与B 相似, 则 $\lambda=$________.

【解】 因为相似矩阵的迹相同, 这里 A 的迹是 10, B 的迹是$\lambda+4$, 故 $\lambda=6$.

【例 5-3】 已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&2\\0&1&x\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix},$$

且 A 与B 相似, 则 $x=$________, $y=$________.

【解】 由 A, B 的迹相等, 得 $2+x=1+y$. 又因相似矩阵的行列式相等, 所以$|A|=-2$, $|B|=-2y$, 故 $y=1$, 从而 $x=0$.

【例 5-4】 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{pmatrix}$有 3 个线性无关的特征向量, 则 x, y 应满足的条件是________.

【解】 应填 $x+y=0$. 原因是: 由 A 的特征方程

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&0&1\\x&1-\lambda&y\\1&0&-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$$

知, A 有二重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$, 故对于这个特征值, 应有 2 个线性无关的特征向量. 即 $R(A-E)$应为 1. 而

$$A-E=\begin{pmatrix}-1&0&1\\x&0&y\\1&0&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\x&0&y\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&x+y\\0&0&0\end{pmatrix},$$

可见，$x+y=0$.

练 习 5-1

1. 设 A，B 为 n 阶方阵，且 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$. 如果 A 与 B 相似，那么与 $f(A)$ 相似的矩阵为________.

2. 如果 A 与 kE 相似(其中 k 为非零常数)，那么 $A=$________.

3. 如果 2 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}7&12\\y&x\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$ 相似，那么 $x=$________，$y=$________.

4. n 阶零矩阵的全部特征向量是________.

5. 如果 x 是矩阵 A 的特征向量，那么________是矩阵 $P^{-1}AP$ 的特征向量.

(二) 选择题

【例 5-5】 如果 n 阶矩阵 A 任意一行的 n 个元素之和都是 a，那么 A 有一个特征值 [　　].

(A) a;　　(B) $-a$;　　(C) 0;　　(D) a^{-1}.

【解】 在 $|A-\lambda E|$ 中，把第二列到第 n 列都加到第 1 列上，则第 1 列有公因子 $a-\lambda$，提出后可知 $(a-\lambda)$ 是 $|A-\lambda E|$ 的因子，所以 a 是 A 的一个特征值. 应选(A).

【例 5-6】 设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&x\\-3&-3&5\end{pmatrix}$，且 A 的特征值为 $\lambda_1=6$，$\lambda_2=\lambda_3=2$，如果 A 有 3 个线性无关的特征向量，那么 $x=$[　　].

(A) 2;　　(B) -2;　　(C) 4;　　(D) -4.

【解】 这时 A 可对角化为 $\begin{pmatrix}6&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}$，故 $|A|=24$. 但

$$\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&4&x\\-3&-3&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&6&x-2\\0&-6&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&6&x-2\\0&0&x+6\end{vmatrix}=6(x+6),$$

故由 $6(x+6)=24$ 知 $x=-2$. 应选(B).

【例 5-7】 与 n 阶单位矩阵 E 相似的矩阵是[　　].

(A) 数量矩阵 $kE(k\neq1)$;　　(B) 对角矩阵 A(主对角线元素不为 1);

(C) E;　　(D) 任意 n 阶可逆矩阵.

【解】 n 阶单位矩阵只能与自己相似，故应选(C).

【例 5-8】 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\x&y&z\\0&0&1\end{pmatrix}$，$A$ 的特征值为 1，2，3，则[　　].

(A) $x=2$, $y=4$, $z=8$; (B) $x=-1$, $y=4$, $z\in R$;

(C) $x=-2$, $y=2$, $z\in R$; (D) $x=-1$, $y=4$, $z=3$.

【解】 把 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|$ 展开，与 $-(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=-\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6$ 比较系数，即可确定 x，y，z 的取值．$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=-\lambda^3+(2+y)\lambda^2+(2x-2y-1)\lambda+y-2x$，故由 $2+y=6$ 得 $y=4$，再由 $2x-2y-1=11$ 得 $x=1$．z 可取任意实数．故选(B)．

练 习 5-2

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，则以下结论中[ ]成立．

(A) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量也是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的对应于特征值 $\frac{1}{\lambda}$ 的特征向量；

(B) $\boldsymbol{A}$ 的特征向量即方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的全部解向量；

(C) $\boldsymbol{A}$ 的特征向量的任意线性组合仍为 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量；

(D) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}'$ 有相同的特征向量．

2. 矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$ 的非零特征值是[ ]．

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$，$\lambda_3=2$，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_3$，记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_2,\ \boldsymbol{\xi}_3,\ \boldsymbol{\xi}_1)$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=[\quad]$．

(A) $\begin{pmatrix}-1&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$; (B) $\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$;

(C) $\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}$; (D) $\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$.

4. 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则[ ]．

(A) $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}|$; (B) $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}=\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}$;

(C) $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 与同一个对角矩阵相似； (D) $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 有相同的伴随矩阵．

5. 设矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{C}$ 的特征值是[ ]．

(A) 1, 0, 1; (B) 1, 1, 2; (C) -1, 1, 2; (D) -1, 1, 1.

三、主观题归类分析

(一) 求矩阵的特征值和特征向量

【例 5-9】 求矩阵 A 的特征值和特征向量，已知 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{pmatrix}$.

【解】 A 的特征方程

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&3\\2&1-\lambda&3\\3&3&6-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+8\lambda^2+9\lambda=-\lambda(\lambda+1)(\lambda-9),$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=0$，$\lambda_3=9$.

对于 $\lambda_1=-1$，解方程组 $(A+E)x=0$，由

$$A+E=\begin{pmatrix}2&2&3\\2&2&3\\3&3&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&4\\2&2&3\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $p_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，故 $k_1p_1=k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}(k_1\neq0)$是对应于 $\lambda_1=-1$ 的全部特征向量.

对于 $\lambda_2=0$，解方程组 $Ax=0$，由

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-3\\0&-3&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $p_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，故 $k_2p_2=k_2\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}(k_2\neq0)$是对应于 $\lambda_2=0$ 的全部特征向量.

对于 $\lambda_3=9$，解方程组 $(A-9E)x=0$，由

$$A-9E=\begin{pmatrix}-8&2&3\\2&-8&3\\3&3&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&11&-6\\0&-30&15\\0&90&-45\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&-2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $p_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，故 $k_3p_3=k_3\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}(k_3\neq0)$是对应于 $\lambda_3=9$ 的全部特征向量.

【例 5-10】 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$，求 A 的特征值和特征向量.

【解】 A 的特征方程

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}4-\lambda&6&0\\-3&-5-\lambda&0\\-3&-6&1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)=0,$$

故 A 的特征值为$\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$.

对于 $\lambda_1=-2$，由

$$A+2E=\begin{pmatrix}6&6&0\\-3&-3&0\\-3&-6&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-3&3\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得 $p_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$，故 $k_1p_1=k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}(k_1\neq0)$是对应于 $\lambda_2=-2$ 的全部特征向量.

对于 $\lambda_2=\lambda_3=1$，由

$$A-E=\begin{pmatrix}3&6&0\\-3&-6&0\\-3&-6&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得 $p_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$p_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，故 $k_2p_2+k_3p_3=k_2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$($k_2$，$k_3$ 不同时为零)是对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的全部特征向量.

【例 5-11】 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&a&a&a\\a&a&a&a\\a&a&a&a\\a&a&a&a\end{pmatrix}(a\neq0)$的特征值和特征向量.

【解】 A 的特征方程

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}a-\lambda&a&a&a\\a&a-\lambda&a&a\\a&a&a-\lambda&a\\a&a&a&a-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3(4a-\lambda)=0,$$

故 A 的特征值为$\lambda_1=4a$，$\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$.

对于 $\lambda_1=4a$，由

$$A-4aE=\begin{pmatrix}-3a&a&a&a\\a&-3a&a&a\\a&a&-3a&a\\a&a&a&-3a\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&-3\\0&4&4&-8\\0&-4&0&4\\0&0&-4&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得 $p_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，故 $k_1p_1=k_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}(k\neq0)$是对应于 $\lambda_1=4a$ 的全部特征向量.

对于 $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$，由

$$A=\begin{pmatrix}a&a&a&a\\a&a&a&a\\a&a&a&a\\a&a&a&a\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得 $p_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$p_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$，$p_4=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$，故 $k_2p_2+k_3p_3+k_4p_4=k_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+$ $k_4\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$（$k_2$，$k_3$，$k_4$ 不同时为零）是对应于 $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$ 的全部特征向量.

练　习　5-3

1．求下列矩阵的特征值和特征向量

(1)　$A=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}$；　(2)　$B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

2．求下列矩阵的特征值和特征向量

(1)　$A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$；　(2)　$B=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}$.

3．求矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&2&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$ 及其逆矩阵 A^{-1} 的特征值和特征向量.

4．求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

5．求矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&a&\cdots&a\\a&a&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&\cdots&a\end{pmatrix}_{n\times n}$　（$a\neq0$）的特征值和特征向量.

（二）矩阵 A 的特征值

【例 5-12】　设三阶方阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=0$，$\lambda_3=-1$，对应的特征向量依次为 $p_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$，$p_2=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$，$p_3=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$，求 A.

【解】　由 p_1，p_2，p_3 做列向量构成矩阵 C，

$$C=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{pmatrix},$$

$|C|=-27$，故 C 可逆，且 $C^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ -2 & -1 & 2\end{pmatrix}$，

故 $$A=(\lambda_1 p_1,\ \lambda_2 p_2,\ \lambda_3 p_3)(p_1,\ p_2,\ p_3)^{-1}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ -2 & -1 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-3 & 0 & 6\\ 0 & 3 & 6\\ 6 & 6 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

【例 5-13】 设三阶实对称矩阵 A 的特征值为 6，3，3，与特征值 6 对应的特征向量为 $p_1=(1,\ 1,\ 1)'$，求 A.

【解】 设特征值 3 对应的特征向量为 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$，因为 A 是实对称矩阵，所以 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 与 p_1 正交．于是 x_1，x_2，x_3 应满足方程

$$x_1+x_2+x_3=0,$$

由此解得特征值 3 对应的特征向量为

$$p_2=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\quad p_3=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},$$

故 $$A=(6p_1,\ 3p_2,\ 3p_3)(p_1,\ p_2,\ p_3)^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}6 & -3 & -3\\ 6 & 3 & 0\\ 6 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}6 & -3 & -3\\ 6 & 3 & 0\\ 6 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}.$$

练　习　5-4

1. 设三阶矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=3$，对应的特征向量依次是 $\xi_1=(1,\ -1,\ 0)'$，$\xi_2=(1,\ -1,\ 1)'$，$\xi_3=(0,\ 1,\ -1)'$，求 A.

2. 设三阶实对称矩阵 A 的一个二重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$，对应的特征向量为 $\alpha_1=(2,\ 2,\ 1)'$，$\alpha_2=(1,\ 1,\ 1)'$．另一个特征值 $\lambda_3=-1$，求 A.

3. 设三阶矩阵 A 满足 $A\alpha_i=i\alpha_i\ (i=1,\ 2,\ 3)$，其中 $\alpha_1=(1,\ 2,\ 2)'$，$\alpha_2=(2,\ -2,\ 1)'$，$\alpha_3=(-2,\ -1,\ 2)'$，求 A.

（三）矩阵的相似对角化

【例 5-14】 判断下列矩阵能否化为相似对角阵：

(1) $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$；　(2) $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

【解】 (1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 0\\ 1 & 2-\lambda & -1\\ 1 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^2(1-\lambda)=0$$

得 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=\lambda_3=2$. 再求 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

对于 $\lambda_1=1$，由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得特征向量

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

对于 $\lambda_2=\lambda_3=2$，由

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得特征向量

$$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

因 $\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$，$\boldsymbol{p}_3$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{A}$ 可化为相似对角阵.

(2) 由

$$|\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & 2\\ 5 & -3-\lambda & 3\\ -1 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)^3=0$$

得 B 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$.

由

$$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 5 & -2 & 3\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & -2 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得特征向量 $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

因 $\boldsymbol{B}$ 没有 3 个线性无关的特征向量，故 $\boldsymbol{B}$ 不能化为相似对角阵.

【例 5-15】 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$ 是否能化为相似对角阵？如果能，求出可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$.

【解】 由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 0 & 0\\ -1 & 1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(2-\lambda)^2=0$$

得 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=\lambda_4=2$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=0$，由

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得特征向量
$$p_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad p_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

对于 $\lambda_3=\lambda_4=2$，由

$$A-2E=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得特征向量
$$p_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad p_4=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

因 p_1，p_2，p_3，p_4 线性无关，故 A 可以化为相似对角阵．以 p_1，p_2，p_3，p_4 为列向量构成的矩阵

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

即为所求的可逆矩阵，且

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

注　A 是实对称矩阵，一定可化为相似对角阵．

【例 5-16】　已知实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$，求正交矩阵 Q，使 $Q'AQ$ 为对角形．

【解】　由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-4)=0$$

得 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=4$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=1$，由

$$A-E=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得特征向量 $$p_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\qquad p_2=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},$$

正交化得 $$b_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\qquad b_2=p_2-\frac{[p_1,\ p_2]}{[p_1,\ p_1]}p_1=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}.$$

单位化得 $$e_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix},\qquad e_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$

对于 $\lambda_3=4$，由

$$A-4E=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -3 & 3\\ 0 & 3 & -3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得特征向量 $p_3=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$,

单位化得 $$e_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

以 e_1，e_2，e_3 为列向量构成正交阵

$$Q=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},$$

这时，$Q'AQ=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$.

【例 5-17】 已知实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$，求可逆的相似变换矩阵 U，使 $U^{-1}AU$ 为对角阵.

【解】 由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-2&0\\-2&1-\lambda&-2\\0&-2&-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+2)=0$$

得 A 的特征值 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=4$.

对于 $\lambda_1=-2$，由

$$A+2E=\begin{pmatrix}4&-2&0\\-2&3&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得特征向量 $$p_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}.$$

对于 $\lambda_2=1$，由

$$A-E=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&0&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得特征向量 $$p_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

对于 $\lambda_3=4$，由

$$A-4E=\begin{pmatrix}-2&-2&0\\-2&-3&-2\\0&-2&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得特征向量 $$p_3=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

由 p_1，p_2，p_3 构成的矩阵

$$U=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$$

即为所求的可逆的相似变换矩阵，这时

$$U^{-1}AU=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}.$$

练 习 5-5

1．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&0\\-2&-2&-1\end{pmatrix}$，

(1) 求 A 的特征值和特征向量；

(2) A 是否可以相似对角化？若可以，求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵Λ.

2．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{pmatrix}$相似，求出 x，y 及满足 $P^{-1}AP=B$ 的可逆矩阵P.

3．已知实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&2&0\\1&0&2\end{pmatrix}$.

(1) 求可逆的相似变换矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵；

(2) 求正交的相似变换矩阵 T，使 $T'AT$ 为对角阵.

4．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}7&4&-1\\4&7&-1\\-4&-4&x\end{pmatrix}$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=3$，$\lambda_3=12$.

(1) 求 x 的值；

(2) 若 A 可相似对角化，则求可逆的相似变换矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&12\end{pmatrix}$.

(四) 可相似对角化矩阵的幂.

【例 5-18】 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&1\\5&-1\end{pmatrix}$，求 A^{20}，A^{50}，$A^{100}\begin{pmatrix}10\\-2\end{pmatrix}$.

【解】 由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda&1\\5&-1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-4)=0$$

得 A 的特征值$\lambda_1=-2$，$\lambda_2=4$，可见，A 可以相似对角化.

对于 $\lambda_1=-2$，由

$$A+2E=\begin{pmatrix}5&1\\5&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}5&1\\0&0\end{pmatrix}$$

得特征向量
$$p_1=\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}.$$

对于 $\lambda_2=4$，由

$$A-4E=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 5 & -5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

得特征向量
$$p_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

由 p_1，p_2 构成可逆阵 $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -5 & 1\end{pmatrix}$，且 $P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & 1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$，$A=P\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}P^{-1}$.

于是，
$$A^{20}=P\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}^{20}P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-2)^{20} & 0\\ 0 & 4^{20}\end{pmatrix}\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\frac{2^{20}}{6}\begin{pmatrix}1+5\cdot 2^{20} & -1+2^{20}\\ -5+5\cdot 2^{20} & 5+2^{20}\end{pmatrix},$$
$$A^{50}=P\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}^{50}P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-2)^{50} & 0\\ 0 & 4^{50}\end{pmatrix}\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\frac{2^{50}}{6}\begin{pmatrix}1+5\cdot 2^{50} & -1+2^{50}\\ -5+5\cdot 2^{50} & 5+2^{50}\end{pmatrix},$$
$$A^{100}\begin{pmatrix}10\\-2\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}^{100}P^{-1}\begin{pmatrix}10\\-2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-2)^{100} & 0\\ 0 & 4^{100}\end{pmatrix}\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\-2\end{pmatrix}$$
$$=\frac{2^{100}}{6}\begin{pmatrix}1+5\cdot 2^{100} & -1+2^{100}\\ -5+5\cdot 2^{100} & 5+2^{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\-2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2^{203}+2^{101}\\ 2^{203}-5\cdot 2^{101}\end{pmatrix}.$$

【例 5-19】 设 $A=\begin{pmatrix}-4 & -10 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 3 & 6 & 1\end{pmatrix}$，求 A^{100}.

【解】 由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-4-\lambda & -10 & 0\\ 1 & 3-\lambda & 0\\ 3 & 6 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

得 A 的特征值 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$.

对于 $\lambda_1=-2$，由

$$A+2E=\begin{pmatrix}-2 & -10 & 0\\ 1 & 5 & 0\\ 3 & 6 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 5 & 0\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得特征向量
$$p_1=\begin{pmatrix}-5\\1\\3\end{pmatrix}.$$

对于 $\lambda_2=\lambda_3=1$，由

$$A-E=\begin{pmatrix}-5&-10&0\\1&2&0\\3&6&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得特征向量
$$p_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\qquad p_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

由 p_1，p_2，p_3 构成矩阵 $P=\begin{pmatrix}-5&-2&0\\1&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}$ 可逆，且 $P^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&-5&0\\-3&-6&-3\end{pmatrix}$，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

于是，
$$\begin{aligned}A^{100}&=P\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{100}P^{-1}\\&=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-5&-2&0\\1&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^{100}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&-5&0\\-3&-6&-3\end{pmatrix}\\&=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-5\cdot2^{100}+2&-5\cdot2^{101}+10&0\\2^{100}-1&2^{101}-5&0\\3.2^{100}-3&3.2^{101}-6&-3\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

【例 5-20】 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=3$，对应的特征向量依次为 $p_1=(1,\ 1,\ 1)'$，$p_2=(1,\ 2,\ 4)'$，$p_3=(1,\ 3,\ 9)'$，又已知向量 $q=(1,\ 1,\ 3)'$，求 A^nq（n 为正整数）.

【解】 显然，A 可相似对角化．用 p_1，p_2，p_3 构成可逆阵

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix},$$

则 $P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6&-5&1\\-6&8&-2\\2&-3&1\end{pmatrix}$，且 $A=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}P^{-1}$.

于是，

$$A^nq=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}^nP^{-1}$$

$$q=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^n&0\\0&0&3^n\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6&-5&1\\-6&8&-2\\2&-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{pmatrix}.$$

注　计算可相似对角化的矩阵的幂与一向量的乘积还可按如下较简便的方法进行．设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可相似对角化的矩阵，λ_1，λ_2，…，λ_n 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$，…，$\boldsymbol{p}_n$ 为与之对应的 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个线性无关的特征向量，$\boldsymbol{q}$ 为一个 n 维列向量．若 $\boldsymbol{q}=k_1\boldsymbol{p}_1+k_2\boldsymbol{p}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{p}_n$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{q}&=\boldsymbol{A}^m(k_1\boldsymbol{p}_1+k_2\boldsymbol{p}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{p}_n)\\&=k_1\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{p}_1+k_2\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{p}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{p}_n\\&=k_1\lambda_1^m\boldsymbol{p}_1+k_2\lambda_2^m\boldsymbol{p}_2+\cdots+k_n\lambda_n^m\boldsymbol{p}_n.\end{aligned}$$

利用这一结论计算例 5-20，因

$$\boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}=2\boldsymbol{p}_1-2\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3,$$

故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{q}&=\boldsymbol{A}^n(2\boldsymbol{p}_1-2\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3)\\&=2\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{p}_1-2\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{p}_3\\&=2\lambda_1^n\boldsymbol{p}_1-2\lambda_2^n\boldsymbol{p}_2+\lambda_3^n\boldsymbol{p}_3\\&=2\cdot1^n\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-2\cdot2^n\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}+3^n\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

练　习　5-6

1．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量及 $\boldsymbol{A}^5$，$\boldsymbol{A}^{10}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$．

2．设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=3$，对应的特征向量依次为 $\boldsymbol{p}_1=(1,\ -1,\ 0)'$，$\boldsymbol{p}_2=(1,\ -1,\ 1)'$，$\boldsymbol{p}_3=(0,\ 1,\ -1)'$，又向量 $\boldsymbol{\beta}=(3,\ -2,\ 0)'$．

(1) 将 $\boldsymbol{\beta}$ 用 $\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$，$\boldsymbol{p}_3$ 线性表示；

(2) 求 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}$（$n$ 为自然数）．

3．求

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{pmatrix}^n\ (n\ \text{为大于 1 的正整数}).$$

（五）矩阵 A 的特征值的进一步讨论

【例 5-21】 设 $A=\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&-2\\2&-2&-1\end{pmatrix}$.

(1) 求 A 的特征值；

(2) 求 $E+A^{-1}$的特征值.

【解】 (1) 由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-1-\lambda&2&2\\2&-1-\lambda&-2\\2&-2&-1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+5)(\lambda-1)^2=0$$

得 A 的特征值为$\lambda_1=-5$，$\lambda_2=\lambda_3=1$.

(2) 由 A 的特征值知A^{-1}的特征值为$-\frac{1}{5}$，1，1，故 $E+A^{-1}$的特征值为$1+\left(-\frac{1}{5}\right)$，$1+1$，$1+1$，即$\frac{4}{5}$，2，2.

【例 5-22】 已知 n 阶方阵A 的特征值为λ_1，λ_2，…，λ_n，p_1，p_2，…，p_n是对应的 n 个线性无关的特征向量，求矩阵 $A-\lambda_1E$ 的全部特征值和一组线性无关的特征向量.

【解】 由条件，有 $Ap_i=\lambda_ip_i(i=1,2,\cdots,n)$. 设 μ 为矩阵$A-\lambda_1E$ 的特征值，对应的特征向量为 x，则

$$(A-\lambda_1E)x=\mu x,$$

即

$$Ax-\lambda_1x=\mu x,$$

$$Ax=(\mu+\lambda_1)x,$$

可见，当 $\mu+\lambda_1=\lambda_i$ 时，$x=p_i(i=1,2,\cdots,n)$，即 $\mu=\lambda_i-\lambda_1$，$x=p_i(i=1,2,\cdots,n)$.

于是知 $A-\lambda_1E$ 的全部特征值为 0，$\lambda_2-\lambda_1$，$\lambda_3-\lambda_1$，…，$\lambda_n-\lambda_1$，对应的线性无关的特征向量为 p_1，p_2，p_3，…，p_n.

【例 5-23】 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 1，-1，2，设矩阵 $B=A^3-5A^2$，试求：

(1) B 的特征值；

(2) $|B|$及$|A-5P|$.

【解】 (1) B 是A 的多项式，故 B 的特征值分别为 $1^3-5(1)^2$，$(-1)^3-5(-1)^2$，$2^3-5\cdot2^2$，即-4，-6，12.

(2) $|B|=(-4)(-6)(-12)=-288$. 又由 $B=A^3-5A^2=A^2(A-5E)$

得

$$|B|=|A^2(A-5E)|=|A|^2|A-5E|,$$

而$|A|=1(-1)2=-2$，故$|A-5E|=|B||A|^{-2}=-288\cdot\frac{1}{4}=-72$.

注 $|A-5E|$也可如下求得：因 A 的特征值为 1，-1，2，故 A 的特征多项式

$$|A-\lambda E|=-(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2).$$

令 $\lambda=5$，则有$|A-5E|=-(5-1)(5+1)(5-2)=-72$. 显然，这一方法更具普遍意义.

【例 5-24】 设 4 阶方阵 A 满足条件$|3E+A|=0$，$AA'=2E$，$|A|<0$，求 A 的伴随矩阵A^*的一个特征值.

【解】 由$|3E+A|=|A-(-3)E|=0$得A的一个特征值为-3. 又由$|AA'|=|2E|=2^4|E|=16$, 得$|A|^2=16$. 因$|A|<0$, 故$|A|=-4$.

设A的对应于特征值-3的特征向量为α, 则$A\alpha=-3\alpha$, $A^{-1}\alpha=-3A^{-1}A\alpha$, 可见

$$A^{-1}\alpha=-\frac{1}{3}\alpha,$$

两边同乘$|A|$, 则$|A|A^{-1}\alpha=-\frac{1}{3}|A|\alpha$, 即

$$A^{*}\alpha=\frac{4}{3}\alpha,$$

这样, 就得到A^{*}的一个特征值为$\frac{4}{3}$.

练 习 5-7

1. 设A是n阶方阵, 2, 4, …, $2n$是A的n个特征值, 求行列式$|A-3E|$的值.

2. 已知3阶矩阵A的特征值为1, 2, -1, 设$B=A-2A^2+3A^3$, 求:

(1) B的特征值和相似对角形;

(2) $|B|$和$|A^2-3E|$.

3. 已知3阶实可逆矩阵A, B. A的特征值分别为$\frac{1}{\lambda_1}$, $\frac{1}{\lambda_2}$, $\frac{1}{\lambda_3}$(λ_1, λ_2, λ_3为互异正整数). 若B的特征值为-5, 1, 7, 且$B=(A^{-1})^2-6A$, 求λ_1, λ_2, λ_3, 并写出A, A^{-1}, B的相似对角形.

4. 已知向量$\alpha=(1, k, 1)'$是矩阵$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$的逆矩阵$A^{-1}$的特征向量, 求$k$的值.

四、释疑解难

(一) 矩阵特征值的证明题

【例5-25】 设λ_1, λ_2是矩阵A的两个特征值, $\lambda_1\neq\lambda_2$, p_1, p_2是对应的特征向量, 证明: p_1+p_2不是A的特征向量.

【证】 用反证法. 因$Ap_1=\lambda_1p_1$, $Ap_2=\lambda_2p_2$,

故
$$A(p_1+p_2)=Ap_1+Ap_2=\lambda_1p_1+\lambda_2p_2.$$

若p_1+p_2是A的特征向量, 则

$$A(p_1+p_2)=\lambda(p_1+p_2).$$

比较两式, 有$(\lambda-\lambda_1)p_1+(\lambda-\lambda_2)p_2=\mathbf{0}$. 因$p_1$, p_2是对应不同特征值的特征向量, 故p_1, p_2线性无关, 于是有$\lambda-\lambda_1=0$, $\lambda-\lambda_2=0$, 即$\lambda_1=\lambda_2$. 这与$\lambda_1\neq\lambda_2$矛盾. 这一矛盾说明p_1+p_2不是A的特征向量.

【例5-26】 设A为n阶方阵, 且$A^2=E$, 证明: A的特征值为1或-1.

【证】 设 λ 为 A 的任意特征值，$\alpha \neq 0$是对应的特征向量，则 $A\alpha=\lambda\alpha$. 两边左乘 A，得 $A^2\alpha=\lambda A\alpha=\lambda(\lambda\alpha)=\lambda^2\alpha$. 因 $A^2=E$，故 $\alpha=\lambda^2\alpha$，即$(\lambda^2-1)\alpha=0$，从而 $\lambda^2-1=0$，$\lambda=1$ 或 $\lambda=-1$.

【例 5-27】 设 A 为满足等式$A^2-3A+2E=O$ 的矩阵，证明：其特征值只能取值 1 或 2.

【证】 设 λ 为 A 的任意特征值，$\alpha \neq 0$是对应的特征向量，则 $A\alpha=\lambda\alpha$. 由条件 $A^2-3A+2E=O$ 得

$$
\begin{aligned}
0&=(A^2-3A+2E)\alpha=A^2\alpha-3A\alpha+2E\alpha\\
&=\lambda^2\alpha-3\lambda\alpha+2\alpha=(\lambda^2-3\lambda+2)\alpha,
\end{aligned}
$$

故有 $\lambda^2-3\lambda+2=(\lambda-1)(\lambda-2)=0$，即 $\lambda=1$，2.

【例 5-28】 设 A 为正交矩阵，若$|A|=-1$，证明：A 一定有特征值-1.

【证】 设 A 的特征多项式为$f(\lambda)=|A-\lambda E|$，则 $f(-1)=|A+E|$. 因 A 为正交阵，故 $AA'=A'A=E$，于是

$$
\begin{aligned}
f(-1)&=|A+E|=|A+AA'|=|A||E+A'|=-|E+A'|\\
&=-|(E+A)'|=-|E+A|=-|A+E|.
\end{aligned}
$$

由此得$|A+E|=|A-(-1)E|=0$，即-1是 A 的一个特征值.

练　习　5-8

1. 设 A 为n 阶方阵，$A^k=O$(k 为某自然数)，证明：A 的特征值为 0.

2. 设方阵 A 满足$A'A=E$，证明：A 的实特征向量对应的特征值的绝对值等于 1.

3. 设 A 为奇数阶正交矩阵，若$|A|=1$，证明：A 一定有特征值 1.

4. 设 A 为实对称矩阵，若 $A^2=O$，证明：$A=O$. 若 A 为可相似对角化的矩阵，结论是否成立?

5. 设 p_1，p_2 为 A 的对应于特征值λ_1，λ_2的特征向量，$\lambda_1\neq\lambda_2$，当数 k_1，k_2 满足什么条件时，$k_1p_1+k_2p_2$ 为 A 的特征向量?

6. 设 A 为n 阶矩阵，α 为A 的对应于特征值λ 的特征向量，β 为A'的对应于特征值μ 的特征向量，且 $\lambda\neq\mu$，证明：α，β 正交.

(二) 矩阵相似问题

【例 5-29】 设矩阵 A 与B 相似，证明：

(1) A'与B'相似；

(2) 当 A 可逆时，A^{-1}与 B^{-1}相似.

【证】(1) 因 A 与B 相似，故存在可逆矩阵 P，使得 $B=P^{-1}AP$，这时，$B'=P'A'(P^{-1})'=[(P')^{-1}]^{-1}A'(P')^{-1}$，故 A'与B'相似.

(2) 因 A 与B 相似，A 可逆，故 B 也可逆(原因是相似矩阵的行列式相等，$|B|=|A|\neq 0$). 由 $B=P^{-1}AP$ 得$B^{-1}=P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1}=P^{-1}A^{-1}P$，故 A^{-1}与 B^{-1}相似.

【例 5-30】 设 n 阶方阵A 满足$A^2-5A+6E=O$，证明：A 可相似于一个对角阵.

【证】 由 $A^2-5A+6E=O$ 知A 的特征值满足$\lambda^2-5\lambda+6=0$，故得 $\lambda_1=3$，$\lambda_2=2$.

又由 $A^2-5A+6E=O$ 得 $(A-2E)(A-3E)=O$ 或 $(A-3E)(A-2E)=O$. 于是 $R(A-2E)+R(A-3E)\leqslant n$.

另外, $R(A-2E)+R(A-3E)=R(A-2E)+R(3E-A)$

$$\geqslant R(A-2E+3E-A)=R(E)=n.$$

故
$$R(A-2E)+R(A-3E)=n,$$

由 $(A-2E)(A-3E)=O$ 知, $A-3E$ 的每个列向量都是齐次线性方程组 $(A-2E)x=0$ 的解向量, 即对应于特征值 $\lambda_2=2$ 的特征向量, 从而 $(A-2E)x=0$ 的线性无关的解向量的个数 $r_1\geqslant R(A-3E)$. 同理, 由 $(A-3E)(A-2E)=O$ 知, $A-2E$ 的每个列向量都是齐次线性方程组 $(A-3E)x=0$ 的解向量, 即对应于特征值 $\lambda_1=3$ 的特征向量, 所以 $(A-3E)x=0$ 的线性无关的解向量的个数 $r_2\geqslant R(A-2E)$. 因此 $r_1+r_2\geqslant R(A-3E)+R(A-2E)=n$. 再由 $r_1+r_2\leqslant n$, 知 $r_1+r_2=n$. 即 A 有 n 个线性无关的特征向量, 故 A 可相似于一个对角阵.

【例 5-31】 已知矩阵 A 与 C 相似, 矩阵 B 与 D 相似, 证明: 分块矩阵

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} 与 \begin{pmatrix} C & O \\ O & D \end{pmatrix} 相似.$$

【证】 由条件知, 存在可逆矩阵 P, Q, 使得 $C=P^{-1}AP$, $D=Q^{-1}BQ$. 取

$$X=\begin{pmatrix} P & O \\ O & Q \end{pmatrix},$$

则 X 可逆, 且
$$X^{-1}=\begin{pmatrix} P^{-1} & O \\ O & Q^{-1} \end{pmatrix},$$

这时,

$$X^{-1}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} P^{-1} & O \\ O & Q^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & O \\ O & Q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P^{-1}AP & O \\ O & Q^{-1}BQ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C & O \\ O & D \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} 与 \begin{pmatrix} C & O \\ O & D \end{pmatrix} 相似.$$

练　习　5-9

1. 设 n 阶方阵 A, B 中至少有一个是非奇异的, 则 AB 与 BA 相似.

2. 设 n 阶方阵 A 与 B 相似, $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n(a_0\neq 0)$. 证明: $f(A)$ 与 $f(B)$ 相似.

3. 设 2 阶矩阵 A 的行列式为负数, 证明: A 与一对角矩阵相似.

4. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2-3A+2E=O$, 证明: A 与一对角矩阵相似.

(三) 其他证明问题举例

【例 5-32】 设 n 阶方阵 A 的 n 个特征值互异, n 阶方阵 B 与 A 有相同的特征值. 证明: 存在可逆矩阵 Q 和一个 n 阶方阵 R, 使得 $A=QP$, $B=PQ$.

【证】 设 A 的特征值为 λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_n. 因 λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_n 互异, 故 A 可相似对角

化，即 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

相似、又因 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 有相同的特征值，故 $\boldsymbol{B}$ 也与 $\boldsymbol{A}$ 相似，从而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似．于是知，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$．两边右乘 $\boldsymbol{Q}^{-1}$得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}$．令 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{Q}$．

【例 5-33】 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，任意非零的 n 维向量都是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量．证明

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda\end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{A}$ 为矩阵．

【证】 ，设 $a_{ij}(i,\ j=1,\ \cdots,\ n)$是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行、第 j 列元素．因单位坐标向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，设 λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_n 是对应的特征值，则有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}_i=\lambda_i\boldsymbol{\varepsilon}_i\quad(i=1,\ \cdots,\ n),$$

即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}_i=\begin{pmatrix}a_{1i}\\ \vdots\\ a_{ii}\\ \vdots\\ a_{ni}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \lambda_i\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}(i=1,\ \cdots,\ n),$$

故 $a_{ii}=\lambda_i$，$a_{ji}=0(j\neq i)$．这样，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

因为 $\boldsymbol{\varepsilon}_i+\boldsymbol{\varepsilon}_j\neq\boldsymbol{0}(i\neq j)$也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，设 λ 为对应的特征值，则由

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_i+\boldsymbol{\varepsilon}_j)=\lambda(\boldsymbol{\varepsilon}_i+\boldsymbol{\varepsilon}_j)=\lambda\boldsymbol{\varepsilon}_i+\lambda\boldsymbol{\varepsilon}_j,$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_i+\boldsymbol{\varepsilon}_j)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}_i+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}_j=\lambda_i\boldsymbol{\varepsilon}_i+\lambda_j\boldsymbol{\varepsilon}_j,$$

有

$$(\lambda-\lambda_i)\boldsymbol{\varepsilon}_i+(\lambda-\lambda_j)\boldsymbol{\varepsilon}_j=\boldsymbol{0},$$

因 $\boldsymbol{\varepsilon}_i$，$\boldsymbol{\varepsilon}_j$ 线性无关，故 $\lambda_i=\lambda_j=\lambda$．于是可得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda\end{pmatrix}.$$

【例 5-34】 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为两个 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值两两互异，若 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量总是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量，证明：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$．

【证】 设 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是 A 的分别对应于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的特征向量，则 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 线性无关. 因此矩阵 $P=(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 可逆，且有

$$AP = P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

由条件又有

$$Bp_i = \mu_i p_i \quad (i=1, \cdots, n),$$

其中 μ_i 是 B 的对应于 p_i 的特征值，故

$$BP = P\begin{pmatrix}\mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

于是

$$\begin{aligned}BAP &= BP\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}\mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix} \\ &= P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n\end{pmatrix} = AP\begin{pmatrix}\mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n\end{pmatrix} = ABP,\end{aligned}$$

两边右乘 P^{-1}，得 $BA = AB$.

五、单元统测

第一套

一、填空题

1. 设 A 为 3 阶矩阵，其特征值为 3，-1，2，则 $|A| =$ ________.

2. 设 $A=\begin{pmatrix}0 & x & 3 & y \\ x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 4\end{pmatrix}$，如果 A 的两个特征值为 0，-1，那么 $x=$ ________，$y=$ ________.

3. 设 A 是 $n(>3)$ 阶矩阵，λ 是 A 的三重特征值，x 为 A 的对应于 λ 的线性无关的特征向量的个数，则 x 的取值范围是________.

4. 如果 $\lambda=0$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，那么齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 必有_______.

5. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ 的特征值为_______，特征向量为_______.

二、选择题

1. 如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有两个特征值为 0，那么 $R(\boldsymbol{A})=$[　　　].

(A)　n;　(B)　$n-1$;　(C)　$n-2$;　(D)　0.

2. 满足条件[　　　]的两个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，B 相似.

(A)　$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$　;

(B)　$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$;

(C)　$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 有相同的特征多项式;

(D)　$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值且 n 个特征值各不相同.

3. 对于 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，下列结论中[　　　]正确.

(A)　$\boldsymbol{A}$ 一定有 n 个不同特征值;

(B)　存在正交矩阵 $\boldsymbol{T}$，使 $\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角阵;

(C)　特征值均为整数;

(D)　对应于不同特征值的特征向量线性无关，但不一定正交.

4. 可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵[　　　]有相同的特征值.

(A)　$\boldsymbol{A}'$;　(B)　$\boldsymbol{A}^{-1}$;　(C)　$\boldsymbol{A}^2$;　(D)　$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$.

5. 已知矩阵 $\begin{pmatrix} 22 & 30 \\ -12 & x \end{pmatrix}$ 有一个特征向量 $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$，则 $x=$[　　　].

(A)　-18;　(B)　-16;　(C)　-14;　(D)　-12.

三、求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ 的特征值.

四、设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=\lambda_3=1$，对应于 $\lambda_1=-1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=(0,\ 1,\ 1)'$，求 $\boldsymbol{A}$.

五、已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{100}$.

六、设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$.

1. 判断 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是否相似;

2. 如果 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 相似，求出可逆矩阵 $\boldsymbol{M}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{M}$.

七、设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，$f(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式，证明：$f(\boldsymbol{A})$ 逆的充要条件是 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 没有公共的特征值.

第二套

一、填空题

1. 设 A 为3阶矩阵，其特征值为4，-2，-3，则 A^{-1}的特征值为________.

2. 如果 n 阶矩阵A 与B 相似，且 $A^2=A$，那么 $B^2=$________.

3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&x\end{pmatrix}$有一个特征值为0，则 $x=$________，A 的另一个特征值是________.

4. n 阶矩阵A 满足$A^2=A$，则 A 的特征值为________.

5. 设 A 为3阶矩阵，如果存在可逆阵 P，使 $B=PAP^{-1}$，且 A 的特征值为4，-2，3，那么 B 的特征值为________.

二、选择题

1. $A=\begin{pmatrix}2&5\\2&-1\end{pmatrix}$，则 A 的特征多项式是[　　].

(A) $\lambda^2+\lambda-12$;　　(B) $\lambda^2+\lambda+12$;

(C) $\lambda^2-\lambda-12$;　　(D) $\lambda^2-\lambda+12$.

2. 设 x 是矩阵A 对应于λ_0 的特征向量，且 k_1，k_2 是满足条件[　　]的常数，则 $(k_1+k_2)x$ 也是A 对应于 λ_0 的特征向量.

(A) $k_1\neq -k_2$;　　(B) $k_1\neq 0$;

(C) $k_2\neq 0$;　　(D) $k_1\neq 0$，$k_2\neq 0$.

3. 当 x，y 满足[　　]时，矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&x&1\\x&1&y\\1&y&1\end{pmatrix}$与 $B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$相似.

(A) $x=0$，$y=0$;　　(B) $x=0$ 或 $y=0$;

(C) $x=y$;　　(D) $x\neq y$.

4. 设 A 为n 阶可逆矩阵，λ 是A 的一个特征值，则 A 的伴随矩阵A^*的特征值之一是[　　].

(A) $\lambda^{-1}|A|^n$;　(B) $\lambda^{-1}|A|$;　(C) $\lambda|A|$;　(D) $\lambda|A|^n$.

5. n 阶矩阵A 与某对角矩阵相似，则[　　].

(A) $R(A)=n$;　　(B) A 是实对称矩阵;

(C) A 有n 个不同的特征值;　　(D) A 有n 个线性无关的特征向量.

三、求下列矩阵的特征值和特征向量：

1. $A=\begin{pmatrix}3&-1&1\\2&0&1\\1&-1&2\end{pmatrix}$;　　2. $B=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$.

四、求 n 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\0&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

五、已知 $A=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}$，求 A^{100}.

六、求正交的相似变换矩阵 T，使 $A=\begin{pmatrix}0&1&1&-1\\1&0&-1&1\\1&-1&0&1\\-1&1&1&0\end{pmatrix}$ 化为对角矩阵.

七、设 A 为 $n\times m$ 矩阵，B 为 $m\times n$ 矩阵，证明：n 阶矩阵 AB 与 m 阶矩阵 BA 有相同的非零特征值.

六、答　案

练　习　5-1

1. $f(B)$；　2. kE；　3. -2，-1；　4. 所有 n 维非零向量；　5. $P^{-1}x$.

练　习　5-2

1.(A)；　2.(D)；　3.(A)；　4.(A)；　5.(C).

练　习　5-3

1.(1) 特征值 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$. 特征向量 $C_1(1,\ 1,\ 1)'$，$C_1\neq0$；$C_2(1,\ -1,\ 0)'+C_3(1,\ 0,\ -1)'$，$C_2$，$C_3$ 不同时为 0.

(2) 特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. 特征向量 $C(1,\ 0,\ 0)$，$C\neq0$.

2.(1) 特征值 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$. 特征向量 $C_1(0,\ 0,\ 1)'$，$C_1\neq0$；$C_2(1,\ 2,\ -1)'$，$C_2\neq0$.

(2) 特征值 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=\lambda_3=2$. 特征向量 $C_1(1,\ 0,\ 1)'$，$C_1\neq0$；$C_2(0,\ 1,\ -1)'+C_3(1,\ 0,\ 4)'$，$C_2$，$C_3$ 不同时为 0.

3. A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=1$. 特征向量 $C_1(1,\ 0,\ 0)'+C_2(0,\ 1,\ -1)'$，$C_1$，$C_2$ 不同时为 0；$C_3(1,\ 0,\ -1)'$，$C_3\neq0$. A^{-1}的特征值 $\mu_1=\mu_2=\dfrac{1}{2}$，$\mu_3=1$. 特征向量与 A 相同.

4. 特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$，$\lambda_4=-2$. 特征向量 $C_1(1,\ 1,\ 0,\ 0)'+C_2(1,\ 0,\ 1,\ 0)'+C_3(1,\ 0,\ 0,\ 1)'$，$C_1$，$C_2$，$C_3$ 不同时为 0；$C_4(-1,\ 1,\ 1,\ 1)'$，$C_4\neq0$.

5. 特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0$，$\lambda_n=na$. 特征向量 $C_1(-1,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)'+C_2(-1,\ 0,\ 1,\ \cdots,\ 0)'+\cdots+C_{n-1}(-1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 1)'$，$C_1$，$C_2$，$\cdots$，$C_{n-1}$不同时为 0；$C_n(1,\ 1,\ 1,\ \cdots,\ 1)'$，$C_n\neq0$.

练　习　5-4

1. $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}$.　　2. $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　3. $A=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}7&0&-2\\0&5&-2\\-2&-2&6\end{pmatrix}$.

练　习　5-5

1.(1) 特征值 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=2$. 特征向量 $C_1(0,\ 0,\ 1)'$，$C_1\neq0$；$C_2(-1,\ 0,\ 1)'$，$C_2\neq0$；$C_3(2,\ 1,\ -2)'$，$C_3\neq0$.

(2) $P=\begin{pmatrix}0&-1&2\\0&0&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$，　$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

2. $x=0$, $y=-2$. $\quad P=\begin{pmatrix}0&0&1\\2&1&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}$.

3. (1) $P=\begin{pmatrix}-1&0&2\\1&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, $\quad P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}$;

(2) $T=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$, $\quad T^{-1}AT=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}$.

4. (1) $x=4$; $\quad$ (2) $P=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&0&-1\\0&4&1\end{pmatrix}$.

练 习 5-6

1. 特征值 $\lambda_1=5$, $\lambda_2=\lambda_3=-1$. 特征向量 $C_1(1,\ 1,\ 1)'$, $C_1\neq0$; $C_2(-1,\ 1,\ 0)'+C_3(-1,\ 0,\ 1)'$, C_2, C_3 不同时为 0.

$A^5=\begin{pmatrix}1041&1042&1042\\1042&1041&1042\\1042&1042&1041\end{pmatrix}$, $\quad A^{10}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times5^{10}\\2\times5^{10}+1\\2\times5\ 10-1\end{pmatrix}$.

2. (1) $\beta=2p_1+p_2+p_3$; $\quad$ (2) $A^n\beta=\begin{pmatrix}2(-1)^n+1\\2(-1)^{n+1}+3^n-1\\1-3^n\end{pmatrix}$.

3. $B=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}4\times8^n+5(-1)^n&2\times8^n+2(-1)^{n+1}&4\times8^n+4(-1)^{n+1}\\2\times8^n+2(-1)^{n+1}&8^n-8(-1)^{n+1}&2\times8^n+2(-1)^{n+1}\\4\times8^n+4(-1)^{n+1}&2\times8^n+2(-1)^{n+1}&4\times8^n+5(-1)^n\end{pmatrix}$.

练 习 5-7

1. $-[(2n-3)!!]$.

2. (1) 特征值 $\lambda_1=2$, $\lambda_2=18$, $\lambda_3=-6$, $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&18&0\\0&0&-6\end{pmatrix}$; $\quad$ (2) $|B|=-216$, $\quad |A^2-3E|=4$.

3. $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$, A, A^{-1}, B 的相似对角形依次为 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-5&0&0\\0&1&0\\0&0&7\end{pmatrix}$.

4. $k=1$, -2.

练 习 5-8

3. 提示：设 A 的特征多项式为 $f(\lambda)=|A-\lambda E|$, 则 $f(1)=|A-P|=|A-AA'|=\cdots=-|A-E|$. 故 $|A-E|=0$, 即 A 有特征值 1.

4. A 为可相似对角化矩阵时，结论仍成立.

5. $k_1=0$ 而 $k_2\neq0$ 或 $k_1\neq0$ 而 $k_2=0$.

练　习　5-9

1. $\boldsymbol{A}$ 非奇异，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AB}$，右乘 $\boldsymbol{A}$，得 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{ABA}$.

2. 提示：用 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 相似定义直接证明.

3. 提示：证明二特征值不相等.

第一套

一、1. -6；　2. 0，任意实数；　3. $1,2,3$；　4. 非零解；　5. a,a,a；(k_1,k_2,k_3)，k_1,k_2,k_3 为不全为 0 的任意常数.

二、1.(C)；　2.(D)；　3.(B)；　4.(A)；　5.(B).

三、$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1，2，3，4.

四、$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$.

五、$\boldsymbol{A}^{100}=\begin{pmatrix}1&2^{101}-2&0\\0&2^{100}&0\\0&\frac{5}{3}(1-2^{100})&1\end{pmatrix}$.

六、1. 相似；　2. $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}0&-2&1\\1&-1&0\\1&1&0\end{pmatrix}$.

七、设，$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的特征值，则 $f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n)$，故 $f(\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{E})\cdots(\boldsymbol{A}-\lambda_n\boldsymbol{E})$，若 $f(\boldsymbol{A})$ 可逆，即 $|f(\boldsymbol{A})|\neq 0$，则 $|\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{E}|,\cdots,|\boldsymbol{A}-\lambda_n\boldsymbol{E}|$ 均不为 0，故 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，反之，则由 $|\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{E}|,\cdots,|\boldsymbol{A}-\lambda_n\boldsymbol{E}|$ 不为 0，知 $|f(\boldsymbol{A})|\neq 0$.

第二套

一、1. $\frac{1}{4}$，$-\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{3}$；　2. $\boldsymbol{B}$；　3. $1,2$；　4. $0,1$；　5. $4,-2,3$.

二、1.(C)；　2.(A)；　3.(A)；　4.(B)；　5.(D).

三、1. 特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=\lambda_3=0$. 特征向量 $C_1(0,1,1)'$，$C_1\neq0$；$C_2(1,1,0)$，$C_2\neq0$.

2. 特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=4$，$\lambda_3=-2$. 特征向量 $C_1(-2,1,2)'$，$C_1\neq0$；$C_2(2,-1,1)'$，$C_2\neq0$；$C_3(1,2,2)'$，$C_3\neq0$.

四、特征值 $\lambda=0$（n 重）. 特征向量 $C(1,0,0,\cdots,0)'$，$C\neq0$.

五、$\boldsymbol{A}^{100}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5^{100}+2&5^{100}-1\\2\times5^{100}-2&2\times5^{100}+1\end{pmatrix}$.

六、$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt6}{6}&\frac{\sqrt3}{6}&\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt6}{6}&\frac{\sqrt3}{6}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{\sqrt6}{3}&\frac{\sqrt3}{6}&-\frac{1}{2}\\0&0&\frac{\sqrt3}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

七、设 λ 为 n 阶矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的一个非零特征值，$\boldsymbol{p}$ 为对应的特征向量，则 $\boldsymbol{ABp}=\lambda\boldsymbol{p}$，这时，$\boldsymbol{Bp}\neq\boldsymbol{0}$（否则有 $\lambda\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}$，$\lambda=0$），以 B 左乘上式两边，得 $\boldsymbol{BA}(\boldsymbol{Bp})=\lambda\boldsymbol{Bp}$，可见，$\lambda$ 也是 $\boldsymbol{BA}$ 的特征值，同法可证 $\boldsymbol{BA}$ 的非零特征值也是 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值.

第六讲　二次型

一、内容提要

(一) 主要定义

1. 二次型　标准形　含有 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \qquad (a_{ij}\text{ 均为实数})$$

称为实二次型(以下简称为二次型). 经可逆线性变换 $x_i = c_{i1}y_2 + c_{i2}y_2 + \cdots + c_{in}y_n (i=1, 2, \cdots, n)$, 二次型可以化为仅含平方项的形式

$$f = k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \cdots + k_ny_n^2,$$

称为二次型的标准形.

2. 二次型的矩阵　对称矩阵的二次型　二次型的秩　二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 可用矩阵表示为

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots,x_n) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + \\ &\quad 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \\ &= (x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，称为二次型 f 的矩阵，而二次型 f 称为对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的二次型，$\boldsymbol{A}$ 的秩称为二次型 f 的秩.

3. 正交变换　如果 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵，那么线性变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ 称为正定变换.

4. 正定二次型　正交矩阵　设 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为实二次型,如果对任何非零向量 $\boldsymbol{x}$,都有 $f(\boldsymbol{x}) > 0$,那么称 f 为正定二次型,对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为正定矩阵(记为 $\boldsymbol{A} > 0$). 如果对任何非零向量 $\boldsymbol{x}$,都有 $f(\boldsymbol{x}) < 0$,那么称 f 为负定二次型,对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为负定矩阵(记为 $\boldsymbol{A} < 0$).

(二) 主要定理

1. 经可逆变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$, 二次型 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 变为 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$, 但 f 的秩不变.

2. 对于任一二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 总有正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$, 使 f 化为标准形 $f=\lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \cdots + \lambda_ny_n^2$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值.

3. 惯性定理　设实二次型 $f=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的秩为 r, 两个实的可逆变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{z}$ 都把 f 化为标准形 $f=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2$, $f=\lambda_1z_1^2+\lambda_2z_2^2+\cdots+\lambda_nz_n^2$ 时, $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 中正数的个数与 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 中正数的个数相等，称为正惯性指数. 负数的个数也相等，称为负惯性指数.

4. 实二次型 $f=x'Ax$ 正定的充分必要条件是其标准形的 n 个系数全是正数.

5. 对称矩阵 A 正定的充分必要条件是 A 的特征值全是正数.

6. 霍尔维茨定理　对称矩阵 A 正定的充分必要条件是 A 的各阶主子式为正，即

$$a_{11}>0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\quad \cdots,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}>0;$$

对称矩阵 A 负定的充分必要条件是 A 的奇数阶主子式为负，偶数阶主子式为正，即

$$(-1)^r\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}>0\ (r=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

二、客观题归类分析

(一) 填空题

【例 6-1】　二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-4x_1x_3+6x_2x_3$ 的矩阵是______,该二次型的秩是______.

【解】　f 的矩阵是 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$，$f$ 的秩等于该矩阵的秩，经初等行变换得秩是 3.

注　二次型的矩阵中，主对角线元素 a_{ii} 为 x_i^2 项系数，其余元素 a_{ij} 为 x_ix_j 项系数的一半.

【例 6-2】　如果矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 \\ 0 & 1 & t^2 \end{pmatrix}$ 正定，那么 t 应满足的条件是______.

【解】　A 的顺序主子式 $|1|=1>0$，$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{vmatrix}=t>0$，$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 \\ 0 & 1 & t^2 \end{vmatrix}=t^3-1>0$，所以应填 $t>1$.

【例 6-3】　二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+4x_2^2+6x_3^2+2tx_1x_2-4x_2x_3$ 正定,则 t 应满足的条件是______.

【解】　f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 5 & t & 0 \\ t & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$，这时 A 的顺序主子式都应大于零. 由 $\begin{vmatrix} 5 & t \\ t & 4 \end{vmatrix}=20-t^2>0$ 及 $\begin{vmatrix} 5 & t & 0 \\ t & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix}=100-6t^2>0$ 得 $-\sqrt{\frac{50}{3}}<t<\sqrt{\frac{50}{3}}$，即 $-\frac{5\sqrt{6}}{3}<t<\frac{5\sqrt{6}}{3}$.

【例 6-4】　二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=-x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2$,则 f 的正惯性指数是______,f 的秩是______.

【解】 正惯性指数是 2，秩是 4.

练 习 6-1

1. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2-2x_2^2+x_3^2-5x_4^2+2x_2x_3$ 的矩阵是________，秩是________.

2. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2-2tx_1x_2+2x_1x_3$ 正定时，t 应满足的条件是________.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则把二次型 $f=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为 $f=\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}$ 的线性变换是 $\boldsymbol{x}=$ ________ $\boldsymbol{y}$.

4. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&t&1\\0&1&-t^2\end{pmatrix}$ 负定时，t 应满足的条件是________.

5. 二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_r^2$，则当 $r=$ ________时，f 正定.

(二) 选择题

【例 6-5】 二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是正定二次型的充要条件是[ ].

(A) 存在 n 维非零向量 $\boldsymbol{x}$，使 $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$；

(B) $|\boldsymbol{A}|>0$；

(C) f 的正惯性指数为 n；

(D) f 的负惯性指数为 0.

【解】 应选(C)，而(A)，(B)，(D)仅为 f 正定的必要条件，不是充分条件.

注 f 的负惯性指数为 0 并不意味正惯性指数为 n，因为 f 的标准形中也可能有系数是 0 的平方项.

【例 6-6】 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+tx_2^2+3x_3^2+2x_1x_2$，当 $t=$[ ]时，f 的秩是 2.

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3.

【解】 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&t&0\\0&0&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0\\0&t-1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，可见，$t-1=0$，即 $t=1$ 时，$R(\boldsymbol{A})=2$，所以应选(B).

【例 6-7】 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定的充要条件是[ ].

(A) $R(\boldsymbol{A})=n$； (B) $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值非负；

(C) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 正定； (D) $\boldsymbol{A}$ 的主对角线元素都大于零.

【解】 (A)为必要条件，因为满秩的实对称矩阵不一定正定，如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ 满秩，但 $|\boldsymbol{A}|=-3<0$. (B)为必要条件，因为正定矩阵不会有特征值 0. (D)也为必要条件，如上述 2 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，虽然主对角线两个元素都大于零，但 $\boldsymbol{A}$ 不正定. (C)是正确的，原因是如果 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，那么 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值为 $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \cdots, \frac{1}{\lambda_n}$，如果 $\lambda_i>0(i=1, 2, \cdots, n)$，那么一定有 $\frac{1}{\lambda_i}>0(i=1, 2, \cdots, n)$，反之亦然.

【例 6-8】 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 正定．如果矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相似，那么 $\boldsymbol{B}$ 必为 [ ]．

(A) 实对称矩阵； (B) 正定矩阵；

(C) 可逆矩阵； (D) 正交矩阵．

【解】 一般的相似变换不保持对称性，所以(A)不对．因为正定矩阵是对称的，从而(B)也不对．又显然(D)也不对．现考虑(C)，因为相似变换不改变矩阵的秩，而 $\boldsymbol{A}$ 是满秩的，所以 $\boldsymbol{B}$ 也满秩，即 $\boldsymbol{B}$ 为可逆矩阵，应选(C)．

练 习 6-2

1．以下各式中，[ ]是二次型．

(A) $x_1^2-2x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3-2$；

(B) $2x_1^2-2x_2^2-2x_3^2+x_1x_2-x_2x_3+x_1+x_2-x_3$；

(C) $x_1x_2-x_1x_3+x_2x_3-x_2x_4$；

(D) $x_1^2-2x_1x_2+x_2^2-x_3^2=0$．

2．以下二次型中，[ ]是正定二次型．

(A) $x_1^2-x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+6x_2x_3$； (B) $2x_1x_2-4x_1x_3+2x_2x_3$；

(C) $x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2$； (D) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_3+x_2x_3$．

3．如果 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是正定的 n 阶实对称矩阵，那么 $\boldsymbol{AB}$ 一定是[ ]

(A) 实对称矩阵； (B) 正交矩阵；

(C) 正定矩阵； (D) 可逆矩阵．

4．如果 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ_1，λ_2，…，λ_n，那么当[ ]时，$\boldsymbol{A}-t\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵．

(A) $t<\min\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$； (B) $t>\min\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$；

(C) $t<\max\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$； (D) $t>\max\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$．

5．n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定的充要条件是[ ]．

(A) 对于任意的分量全不为 0 的列向量 $\boldsymbol{x}$，有 $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$；

(B) $\boldsymbol{A}$ 不是负定的；

(C) $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式都大于 $0(k=1, 2, \cdots, n)$；

(D) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{U}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}'\boldsymbol{U}$．

三、主观题归类分析

(一) 含有参数的二次型的正定性

【例 6-9】 已知二次型 $f=x_1^2+x_2^2+(1-t)x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$，求 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及使 f 为正定二次型的 t 的取值范围．

【解】 f 的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}1 & t & 1\\ t & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1-t\end{pmatrix},$$

由 f 正定的充要条件有，$|1|=1>0$，$\begin{vmatrix}1 & t\\ t & 2\end{vmatrix}=2-t^2>0$，$\begin{vmatrix}1 & t & 1\\ t & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1-t\end{vmatrix}=t(t-2)(t+1)>0$. 关于 t 的不等式组为

$$\begin{cases}2-t^2>0,\\ t(t-2)(t+1)>0,\end{cases}$$

由此解得 $-1<t<0$.

【例 6-10】 求使二次型 $f=2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2\lambda x_1x_2+2x_1x_3$ 正定的 λ 的范围.

【解】 f 的矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & \lambda & 1\\ \lambda & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$，由 f 正定的充要条件有，$|2|=2>0$，$\begin{vmatrix}2 & \lambda\\ \lambda & 1\end{vmatrix}=2-\lambda^2>0$，$\begin{vmatrix}2 & \lambda & 1\\ \lambda & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{vmatrix}=5-3\lambda^2>0$. 关于 λ 的不等式组为 $\begin{cases}2-\lambda^2>0,\\ 5-3\lambda^2>0.\end{cases}$ 由此解得 $-\sqrt{\dfrac{5}{3}}<\lambda<\sqrt{\dfrac{5}{3}}$.

练　习　6-3

1. 设有二次型 $f=x_1^2+2x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$，试问 a 为何值时，f 是正定的?

2. 求 λ 的值，使二次型 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+2xy-2xz+2\lambda yz$ 是正定的，并讨论 $\lambda\geqslant 1$ 时的情况.

3. t 取什么值时，二次型 $f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 是正定的?

(二) 带参数的二次型的正交变换

【例 6-11】 设二次型 $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\alpha x_1x_2+2\beta x_2x_3+2x_1x_3$，经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化为标准形 $f=y_2^2+2y_3^2$，求常数 α，β 和 $\boldsymbol{P}$.

【解】 二次型 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及其标准形的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & \alpha & 1\\ \alpha & 1 & \beta\\ 1 & \beta & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

因为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是相似矩阵，它们的特征多项式相同，即 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}|$，或写成

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & \alpha & 1\\ \alpha & 1-\lambda & \beta\\ 1 & \beta & 1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix},$$

展开，得 $-\lambda^3+3\lambda^2+(\alpha^2+\beta^2-2)\lambda-(\alpha-\beta)^2=-\lambda^3+3\lambda^2-2\lambda$，比较两边 λ 同次幂的系数，得

$$\begin{cases}\alpha^2+\beta^2-2=-2,\\(\alpha-\beta)^2=0.\end{cases}$$

由此解得 $\alpha=\beta=0$. 这样，f 的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},$$

由 B 的主对角元素得知，A 的特征值是 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=2$.

当 $\lambda_1=0$ 时,解方程组 $Ap=0$,得 $p_1=(-1,0,1)'$.

当 $\lambda_2=1$ 时,解方程组 $(A-E)p=0$,得 $p_2=(0,1,0)'$.

当 $\lambda_3=2$ 时,解方程组 $(A-2E)p=0$,得 $p_3=(1,0,1)'$.

把 p_1,p_2,p_3 单位化,得 $e_1=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)'$, $e_2=(0,1,0)'$, $e_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)'$. 以 e_1,e_2,e_3 为列向量构成的矩阵

$$P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

就是所求的正交变换矩阵.

【例 6-12】 如果二次型 $f=2x_1^2+4x_2^2+ax_3^2-2bx_1x_3$ 经正交变换 $x=Py$ 化为标准形 $f=4y_1^2+y_2^2+6y_3^2$，求 a，b 的值和正交变换矩阵 P.

【解】 f 的矩阵和标准形的矩阵分别为

$$A=\begin{pmatrix}2&0&-b\\0&4&0\\-b&0&a\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&6\end{pmatrix},$$

因为 $B=P'AP=P^{-1}AP$，所以 A 与 B 是相似矩阵，它们的特征多项式相同，即

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&0&-b\\0&4-\lambda&0\\-b&0&a-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4-\lambda&0&0\\0&1-\lambda&0\\0&0&6-\lambda\end{vmatrix},$$

展开，得 $-\lambda^3+(6-a)\lambda^2+(b^2-8-6a)\lambda+8a-4b^2=-\lambda^3+11\lambda^2-34\lambda+24$，比较两边系数，得方程组

$$\begin{cases}6+a=11,\\b^2-8-6a=-34,\\8a-4b^2=24,\end{cases}$$

由此解得 $a_1=5$，$b_1=2$ 或 $a_2=5$，$b_2=-2$.

当 $a_1=5$，$b_1=2$ 时，f 的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&4&0\\-2&0&5\end{pmatrix},$$

其特征值为 $\lambda_1=4$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=6$.

当 $\lambda_1=4$ 时，解方程组 $(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{p}_1=(0,1,0)'$.

当 $\lambda_2=1$ 时，解方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{p}_2=(2,0,1)'$.

当 $\lambda_3=6$ 时，解方程组 $(\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E})\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{p}_3=(-1,0,2)'$.

把 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 单位化，得 $\boldsymbol{e}_1=(0,1,0)'$，$\boldsymbol{e}_2=\left(\frac{2}{\sqrt5},0,\frac{1}{\sqrt5}\right)'$，$\boldsymbol{e}_3=\left(-\frac{1}{\sqrt5},0,\frac{1}{\sqrt5}\right)'$. 以 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 为列向量构成的矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0 & \frac{2}{\sqrt5} & -\frac{1}{\sqrt5}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}$$

就是把 $f=2x_1^2+4x_2^2+5x_3^2-4x_1x_2$ 化为标准形 $f=4y_1^2+y_2^2+6y_3^2$ 的正交变换矩阵.

类似地，当 $a_2=5$，$b_2=-2$ 时，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0 & -\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}$.

练 习 6-4

1. 已知二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2\lambda x_2x_3(\lambda>0)$，通过正交变换化为标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求 λ 及所用的正交变换矩阵.

2. 设二次型 $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2bx_2x_3+2x_1x_3(a>0,\ b>0)$，经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化为标准形 $f=\frac{1}{2}y_1^2+\frac{5}{2}y_2^2$，求常数 a，b 及正交矩阵 $\boldsymbol{P}$.

(三) 化已知二次型为标准形

【例 6-13】 用配方法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+2x_1x_2-2x_1x_3$ 为标准形，并写出所用的可逆线性变换.

【解】 f 中含有 x_1^2 项，所以把含有 x_1 的三项集中在一起配方，得

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=(x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3)+2x_2^2\\&=(x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3+x_2^2+x_3^2)+2x_2x_3+x_2^2-x_3^2\\&=(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2-x_3^2+2x_2x_3,\end{aligned}$$

所余三项中含有 x_2^2 项，所以再把含 x_2 的两项集中在一起配方，得

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2^2+2x_2x_3+x_3^2)-2x_3^2\\&=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2-2x_3^2,\end{aligned}$$

这时二次型已成为平方和的形式，所以令

$$\begin{cases}y_1=x_1+x_2-x_3,\\ y_2=x_2+x_3,\\ y_3=x_3,\end{cases}$$

则 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+y_2^2-2y_3^2$.而由上述变换解得

$$\begin{cases}x_1=y_1-y_2+2y_3,\\x_2=y_2-y_3,\\x_3=y_3,\end{cases}$$

就是所用的线性变换.其矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0,$$

所以这一线性变换是可逆线性变换.

【例6-14】 用配方法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$ 为标准形,并写出所用的可逆线性变换.

【解】 f 中不含平方项,但有 x_1x_2 项,所以先做变换

$$\begin{cases}x_1=y_1-y_2,\\x_2=y_1+y_2,\\x_3=y_3,\end{cases}$$

于是二次型变为

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=(y_1-y_2)(y_1+y_2)+(y_1-y_2)y_3+(y_1+y_2)y_3\\&=y_1^2-y_2^2+2y_1y_3.\end{aligned}$$

出现 y_1^2 项,把含 y_1 的两项集中在一起配方得

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=(y_1^2+2y_1y_3+y_3^2)-y_2^2-y_3^2\\&=(y_1+y_3)^2-y_2^2-y_3^2,\end{aligned}$$

令

$$\begin{cases}z_1=y_1+y_3,\\z_2=y_2,\\z_3=y_3,\end{cases}\qquad (*)$$

则 $f(x_1,x_2,x_3)=z_1^2-z_2^2-z_3^2$.由(*)解出

$$\begin{cases}y_1=z_1-z_3,\\y_2=z_2,\\y_3=z_3,\end{cases}$$

代入第一个变换式,得

$$\begin{cases}x_1=z_1-z_2-z_3,\\x_2=z_1+z_2-z_3,\\x_3=z_3,\end{cases}$$

因为

$$\begin{vmatrix}1&-1&-1\\1&1&-1\\0&0&1\end{vmatrix}=2\neq 0,$$

所以最后的变换式就是所用的可逆线性变换.

【例6-15】 用正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$ 为

标准型.

【解】 f 的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix},$$

特征多项式

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&-2&0\\-2&1-\lambda&-2\\0&-2&-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+3\lambda^2+6\lambda-8=-(\lambda+2)(\lambda-1)\lambda-4),$$

特征值是 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=4$.

当 $\lambda_1=-2$ 时，

$$A+2E=\begin{pmatrix}4&-2&0\\-2&3&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{2}&1\\0&4&-4\\0&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{2}&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以对应的特征向量是

$p_1=\left(\frac{1}{2},\ 1,\ 1\right)'=\frac{1}{2}(1,\ 2,\ 2)'$，单位化为 $e_1=\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)'$.

当 $\lambda_2=1$ 时，

$$A-E=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&0&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&-4&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以对应的特征向量是

$p_2=\left(-1,\ -\frac{1}{2},\ 1\right)'=-\frac{1}{2}(2,\ 1,\ -2)'$，单位化为 $e_2=\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)'$.

当 $\lambda_3=4$ 时，

$$A-4E=\begin{pmatrix}-2&-2&0\\-2&-3&-2\\0&-2&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以对应的特征向量是

$p_3=(2,\ -2,\ 1)'$，单位化为 $e_3=\left(\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)'$.

这样，正交变换矩阵是

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix},$$

在正交变换 $x=Py$ 之下，$f=-2y_1^2+y_2^2+4y_3^2$.

【例 6-16】 求正交变换把二次曲面方程 $2x_1+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3=1$ 化为标准方程，说明这是何种二次曲面.

【解】 方程左边二次型的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix},$$

特征多项式

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-4\\-2&-4&5-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-10),$$

特征值是 $\lambda_1=10$，$\lambda_2=\lambda_3=1$.

当 $\lambda_1=10$ 时，

$$A-10E=\begin{pmatrix}-8&2&-2\\2&-5&-4\\-2&-4&-5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&-5&-4\\0&-9&-9\\0&18&18\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

所以对应的特征向量是

$p_1=\left(-\frac{1}{2},\ -1,\ 1\right)'=-\frac{1}{2}(1,\ 2,\ -2)'$，单位化为 $e_1=\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right)'$.

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，

$$A-E=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以对应的特征向量是

$$p_2=(-2,1,0)',p_3=(2,0,1)',$$

正交化为

$$b_2=(-2,1,0)',b_3=(2,0,1)'-\frac{-4}{5}(-2,1,0)'=\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5},1\right)'=\frac{1}{5}(2,4,5)'$$

单位化为

$$e_2=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}},\ 0\right)',\quad e_3=\left(\frac{2}{3\sqrt{5}},\ \frac{4}{3\sqrt{5}},\ \frac{5}{3\sqrt{5}}\right)'.$$

所以方程在正交变换

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2\sqrt{5}}{5}&\frac{2\sqrt{5}}{15}\\\frac{2}{3}&\frac{\sqrt{5}}{5}&\frac{4\sqrt{5}}{15}\\-\frac{2}{3}&0&\frac{\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

之下，化为 $10y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$. 这个二次曲面是旋转椭球面.

练 习 6-5

1. 用配方法化以下二次型为标准形，并写出所用的变换

(1) $f=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2$;

(2) $f=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4$.

2. 求一个正交变换化二次型 $f=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$ 为标准形.

3. 用正交变换化二次型 $f=2x_1x_2-2x_3x_4$ 为标准形，并写出所用的变换.

4. 用正交变换把二次曲面方程 $2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3=1$ 化为标准方程，并说明它表示何种二次曲面.

四、释疑解难

(一) 正定性的判定

【例 6-17】 设 A，B 为 n 阶正定矩阵，证明：$A+B$ 也是正定矩阵.

【证】 $(A+B)'=A'+B'=A+B$，所以 $A+B$ 对称. 又因为 A，B 正定，所以对于任意非零向量 x，有 $x'Ax>0$，$x'Bx>0$. 这时，二次型 $x'(A+B)x=x'Ax+x'Bx>0$. 由定义知 $A+B$ 正定.

【例 6-18】 设 n 阶实对称矩阵 $A=(a_{ij})$ 正定，b_1，b_2，…，b_n 为非零实数. 证明：矩阵 $B=(a_{ij}b_ib_j)$ 也正定.

【证】 因为 $a_{ij}=a_{ji}$，所以 $a_{ij}b_ib_j=a_{ji}b_jb_i$，即 B 是对称的. 令

$$C=\begin{pmatrix}\frac{1}{b_1} & & & \\ & \frac{1}{b_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{b_n}\end{pmatrix},$$

显然 $|C|\neq 0$,则 $C'BC=A$,于是 $B=(C')^{-1}AC^{-1}=(C^{-1})'AC^{-1}$.又因 A 正定,所以一定存在可逆矩阵 D，使 $A=D'D$. 这样，就有 $B=(C^{-1})'AC^{-1}=(C^{-1})'D'DC^{-1}=(DC^{-1})'(DC^{-1})$,因为 DC^{-1} 可逆,所以 B 正定.

注　证明中使用了矩阵正定的充要条件，即：对称阵 A 正定⇔存在可逆阵 U，使 $A=U'U$.

【例 6-19】 设 A 为 n 阶实对称矩阵，且满足 $A^3-2A^2+2A-4E=O$. 证明：A 是正定矩阵.

【证】 设 λ 是 A 的任意一个特征值，对应的特征向量为 $p\neq 0$，则 $Ap=\lambda p$. 于是

$$\begin{aligned}(A^3-2A^2+2A-4E)p&=A^3p-2A^2p+2Ap-4Ep\\&=\lambda^3p-2\lambda^2p+2\lambda p-4p\\&=(\lambda^3-2\lambda^2+2\lambda-4)p,\end{aligned}$$

而 $A^3-2A^2+2A-4E=O$，所以$(\lambda^3-2\lambda^2+2\lambda-4)p=0$. 又因 $p\neq 0$，因此有

$$\lambda^3-2\lambda^2+2\lambda-4=0,$$

这个三次方程仅有一个实根 $\lambda=2$，因为 A 的特征值都是实数，所以 2 是 A 的 n 重特征根，A 是一个正定矩阵.

【例 6-20】 设 A，B 都是正定矩阵. 证明：AB 是正定矩阵的充要条件是 $AB=BA$.

【证】 必要性：因为 A,B 正定，所以 $A'=A,B'=B$. 如果 AB 正定，则 $(AB)'=AB$. 但因 $(AB)'=B'A'=BA$，故 $AB=BA$.

充分性：设 $AB=BA$，则 $(AB)'=B'A'=BA=AB$，所以 AB 是对称的. 又因为 A,B 正定，故存在可逆矩阵 P,Q，使 $A=P'P,B=Q'Q$. 于是 $AB=P'PQ'Q$，

又因为 $QP'PQ'=Q(P'PQ'Q)Q^{-1}$，可见，AB 与 $QP'PQ'$ 是相似矩阵，从而二者有相同的特征值. 但是

$$QP'PQ'=(PQ')'(PQ')$$

是正定的，特征值都是正数，故 AB 的特征值也都是正数，即 AB 正定.

【例 6-21】 设 A 为 n 阶实对称矩阵，其特征值全都大于常数 a，证明：当 $t\leqslant a$ 时，二次型 $f=x'(A-tE)x$ 是正定二次型.

【证】 设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$. 因为 A 是实对称矩阵，所以一定存在正交矩阵 P，使

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

对于任意非零向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，令 $y=P^{-1}x$，其中 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$，则 $x=Py$. 这时，

$$\begin{aligned} f &= x'(A-tE)x = y'P'(A-tE)Py = y'P^{-1}(A-tE)Py \\ &= y'(P^{-1}AP-tP^{-1}EP)y = y'(\Lambda-tE)y \\ &= y'\begin{pmatrix}\lambda_1-t & & & \\ & \lambda_2-t & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n-t\end{pmatrix}y \\ &= (\lambda_1-t)y_1^2+(\lambda_2-t)y_2^2+\cdots+(\lambda_n-t)y_n^2. \end{aligned}$$

因为 $\lambda_i>a(i=1,2,\cdots,n)$，$t\leqslant a$，故 $\lambda_i-t>0(i=1,2,\cdots,n)$. 即 f 正定.

练 习 6-6

1. 设 A 是 n 阶正定矩阵. 证明：A^{-1} 和 A^* 也是正定矩阵.
2. 设 A，B 是 n 阶正定矩阵，证明：$\lambda A+\mu B$（λ，μ 为正的常数）也是正定矩阵.
3. 设 A 为 n 阶实对称矩阵，且满足 $A^3+A^2+A=3E$，证明：A 是正定矩阵.
4. 设 A 为 n 阶实对称矩阵，其特征值全都小于常数 b，证明：当 $t\geqslant b$ 时，二次型 $f=x'(tE-A)x$ 是正定二次型.
5. 证明：二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$ 是正定二次型.

（二）正定矩阵的性质

【例 6-22】 设 A 是 n 阶正定矩阵，E 是 n 阶单位阵. 证明：$|A+E|>1$.

【证】 因为 A 也是实对称矩阵，所以一定存在正交阵 P，使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}，且 \lambda_i>0(i=1, 2, \cdots, n),$$

于是

$$A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1},$$

这样

$$\begin{aligned}|A+E|&=\left|P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}+PEP^{-1}\right|\\&=\left|P\left[\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}+E\right]P^{-1}\right|\\&=|P|\begin{vmatrix}\lambda_1+1 & & & \\ & \lambda_2+1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n+1\end{vmatrix}|P^{-1}|\\&=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)+\cdots+(\lambda_n+1)>1.\end{aligned}$$

【例 6-23】 设 A 是正定矩阵，证明：存在正定矩阵 B，使得 $A=B^2$.

【证】 设 $\lambda_i(i=1, 2, \cdots, n)$是 A 的特征值，则 $\lambda_i>0(i=1, 2, \cdots, n)$，且存在正交阵 P，使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}^2.$$

因此有

$$A=P\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}^2P^{-1}=\left[P\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}P^{-1}\right]^2,$$

令 $B=P\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}P^{-1}$，则 $A=B^2$. 同时，因为 $P^{-1}BP=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}$，且 $\sqrt{\lambda_i}>0(i=1,2,\cdots,n)$，可见，$B$ 是正交矩阵.

练 习 6-7

1. 设 A 为 n 阶正定矩阵，证明：A 的主对角线元素都大于零.
2. 证明：在 n 阶实对称阵中，正定矩阵只能与正定矩阵相似.
3. 设 U 为可逆矩阵，且 $A=U'U$，证明：A 是正定矩阵.

(三) 与二次型有关的其他问题

【例 6-24】 设 $f=x'Ax$ 是二次型，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是实对称矩阵 A 的特征值，且 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$. 证明：对任一 n 维向量 x，有 $\lambda_1x'x\leqslant x'Ax\leqslant\lambda_nx'x$.

【证】 因为 A 为实对称矩阵，所以一定存在正交阵 P，使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}=\Lambda(\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n),$$

在正交变换 $x=Py$ 下，有

$$\lambda_1x'x=\lambda_1y'P'Py=\lambda_1y'P^{-1}Py=\lambda_1y'y=\lambda_1y_1^2+\lambda_1y_2^2+\cdots+\lambda_1y_n^2,$$

$$x'Ax=y'P'APy=y'P^{-1}APy=y'\Lambda y=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

和

$$\lambda_nx'x=\lambda_ny'P'Py=\lambda_ny'P^{-1}Py=\lambda_ny'y=\lambda_ny_1^2+\lambda_ny_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

因此对任意 n 维向量 x，都有

$$\lambda_1y_1^2+\lambda_1y_2^2+\cdots+\lambda_1y_n^2\leqslant\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2\leqslant\lambda_ny_1^2+\lambda_ny_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

即

$$\lambda_1x'x\leqslant x'Ax\leqslant\lambda_nx'x.$$

【例 6-25】 证明：二次型 $f=x'Ax$ 在 $\|x\|=1$ 时的最大值为方阵 A 的最大特征值.

【证】 设 $x=Py$ 是把 f 化为标准形的正交变换，则

$$f=x'Ax=y'P'APy=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2.$$

设 $\lambda_i=\max\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$，则当 $\|x\|=1$，即 $x'x=1$ 时，有

$$x'x=y'P'Py=y'P^{-1}Py=y'y=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=1,$$

故

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2\leqslant\lambda_i(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)=\lambda_i,$$

可见，f 在 $\|x\|=1$ 条件下的最大值不超过 λ_i(即 A 的最大特征值). 再证 f 可达到 λ_i. 为此，取

$$y_0=(0,0,\cdots,1,0,\cdots,0)(\text{第 } i \text{ 个分量为 } 1),$$

则当 $x_0=Py_0$ 时，$f=x_0'Ax_0=y_0'P'APy_0=y_0'P^{-1}APy_0=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2=\lambda_i$，
而 $x_0'x_0=y_0'P'Py_0=y_0'P^{-1}Py_0=y'_0y_0=1$，

所以 f 在 $\|x\|=1$ 时的最大值恰为 A 的最大特征值.

【例 6-26】 如果 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶实对称矩阵，且对任意 n 维向量 x 有 $x'Ax=0$，证明：$A=O$.

【证】 取 $x_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)'$(第 i 个分量为1)，则 $x_i'Ax_i=a_{ii}$，因为 $x'Ax=0$，故 A 的主对角线元素全为零. 又取 $x_{ij}=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$(第 i 个第j 个分量为1)，则 $x_{ij}'Ax_{ij}=a_{ij}+a_{ji}$，因 $x'Ax=0$，故 $a_{ij}+a_{ji}=0$. 但由 A 的对称性有$a_{ij}=a_{ji}$，于是得 $a_{ij}=0(i,j=1,2,\cdots,n)$，即 $A=O$.

练 习 6-8

1. 证明：A 是n 阶反对称矩阵的充要条件是对任意 n 维向量，有 $x'Ax=0$.

2. 设 n 元二次型$f=x'Ax$ 的正惯性指数为 r，负惯性指数为 0，且 $0<r<n$，证明：一定存在非零的 n 维向量x_0，使得 $f=x_0'Ax_0=0$.

3. 证明：二次型 $f=x'Ax$ 在 $\|x\|=1$ 时的最小值为方阵 A 的最小特征值.

五、单元统测

第一套

一、填空题

1. 二次型 $f=x_1^2+x_2^2+7x_3^2-6x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$ 的矩阵 $A=$________. 秩是________.

2. 矩阵 A 是正定矩阵的充要条件是 A 的顺序主子式________.

3. 二次型 $f=-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 经非奇异线性变换 $\begin{cases}x_1=y_1+y_2+\frac{1}{2}y_3\\ x_2=y_1-y_2+\frac{1}{2}y_3\\ x_3=y_3\end{cases}$ 所得的标准形为________.

4. 二次型 $f=x_1^2-x_2^2+3x_3^2$ 的正惯性指数为________. 负惯性指数为________.

5. 如果二次型 $f=2x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3-2tx_2x_3$ 正定，那么 t 的取值范围是________.

二、选择题

1. 设 A,B 均为n 阶矩阵，$x=(x_1,\cdots,x_n)'$，且 $x'Ax=x'Bx$，则当[ ]时 $A=B$.

(A) $R(A)=R(B)$; (B) $A'=A$;

(C) $B'=B$; (D) $A'=A$ 且$B'=B$.

2. 矩阵[　　]与$\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&5\end{pmatrix}$合同.

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$;　　(B) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$;

(C) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$;　　(D) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

3. 以下各结论正确的是[　　].

(A) 对于方阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, 如果存在矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$, 那么 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同;

(B) 如果存在矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$, 那么 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵;

(C) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+x_2^2$ 正定;

(D) 如果 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部顺序主子式都大于零, 那么 $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是正定二次型.

4. 两个 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 合同的充要条件是[　　].

(A) $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})<n$;

(B) $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=n$;

(C) $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 有相同的秩和正惯性指数;

(D) $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 有相同的正惯性指数.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵, 则[　　]一定是某个二次型的矩阵.

(A) $\boldsymbol{A}'$;　(B) $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$;　(C) $\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{A}$;　(D) $(\boldsymbol{A}')^2$.

三、用配方法化二次型 $f=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$ 为标准形.

四、用正交变换化二次型 $f=8x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+8x_2x_4$ 为标准形, 并给出所用的正交变换.

五、设 $\boldsymbol{A}$ 为实可逆矩阵, 证明: $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

六、设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位阵, 证明: 当正数 t 充分大时, $t\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

第二套

一、填空题

1. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&3&2\\3&-1&1\\2&1&4\end{pmatrix}$的二次型 $f=$________.

2. 二次型 $f=4x_1^2+4x_2^2-x_3^2+2x_4^2$ 化为 $f=y_1^2+y_2^2+y_3^2-y_4^2$ 的可逆线性变换为________.

3. n 元实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 正定的充要条件是它的正惯性指数为________.

4. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 合同, 且 $R(\boldsymbol{A})=r$, 则 $R(\boldsymbol{B})=$________.

5. 如果 $f=-2x_1^2-x_2^2-x_3^2+2tx_2x_3$ 负定, 那么 t 的取值范围是________.

二、选择题

1. 以下命题正确的是[　　　].

(A) 如果 n 阶矩阵A 的顺序主子式都大于零，那么 A 是正定矩阵；

(B) 如果 n 阶矩阵A 的特征值都大于零，那么 A 是正定矩阵；

(C) 如果 n 阶实对称矩阵A 的主对角线元素都大于零，那么 A 是正定矩阵；

(D) 如果 n 阶实对称矩阵A 的主对角线元素不都大于零，那么 A 一定不是正定矩阵.

2. 以下命题错误的是：[　　　].

(A) 如果存在非零向量 x，使 $x'Ax>0$ 成立，那么 $f=x'Ax$ 为正定二次型；

(B) 如果 n 元二次型 $f=x'Ax$ 正定，那么实对称矩阵 A 去掉第 n 行第 n 列后所得的矩阵仍为正定矩阵；

(C) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+x_2)^2+(x_3+x_4)^2$ 不是正定二次型；

(D) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_1+x_3)^2+(x_2+x_3)^2$ 是正定二次型.

3. 设 A，B 为 n 阶正定矩阵，则[　　　]是正定矩阵.

(A) k_1A+k_2B(k_1，k_2 为实数)；　　(B) A^*+B^*；

(C) $A^{-1}-B^{-1}$；　　(D) AB.

4. 二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x'Ax$ 为正定二次型的充要条件是：[　　　].

(A) 负惯性指数为 0；

(B) $|A|>0$；

(C) 存在 n 阶矩阵 T，使 $A=T'T$；

(D) 对任意非零向量 x，有 $x'Ax>0$.

5. 如果所有合同的 n 阶矩阵的集合称为一个合同类，那么 2 阶矩阵的合同类共有[　　　]种.

(A) 3；　(B) 4；　(C) 5；　(D) 6.

三、用配方法化二次型 $f=x_1^2+2x_2^2+x_4^2+4x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$ 为标准形，并写出所用的变换.

四、用正交变换化二次型 $f=x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_4+x_2^2-2x_2x_3+x_3^2+2x_3x_4+x_4^2$ 为标准形，并给出所用的正交变换.

五、证明：实对称矩阵 A 正定的充要条件是 A 与 E 合同.

六、设 A，B 为 n 阶实对称矩阵，且 A 正定，证明：存在 n 阶实可逆阵 T，使得 $T'AT$ 与 $T'BT$ 都是对角阵.

六、答　案

练　习　6-1

1. $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-2&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&-5\end{pmatrix}$，4；　2. $-1<t<1$；　3. A^{-1}；　4. $t<-1$；　5. n.

练　习　6-2

1.(C)；　2.(D)；　3.(D)；　4.(B)；　5.(D).

练　习　6-3

1. $a>1$;　2. $-\sqrt{2}-1<\lambda<\sqrt{2}-1$，$\lambda\geqslant 1$ 时，f 不正定;　3. $-\frac{4}{5}<t<0$.

练　习　6-4

1. $\lambda=2$，$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$;　2. $a=b=\frac{\sqrt{6}}{4}$，$P=\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \end{pmatrix}$.

练　习　6-5

1. (1) $f=y_1^2+y_2^2$，$x=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}y$;

(2) $f=y_1^2-\frac{1}{4}y_2^2-y_3^2-\frac{3}{4}y_4^2$，$x=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}y$.

2. $x=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}y$，$f=9y_3^2$.

3. $x=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}y$，$f=y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$.

4. $x=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}y$，方程变为 $y_1^2+2y_2^2+5y_3^2=1$. 这是椭球面方程.

练　习　6-6

1. 提示：如果 A 的特征值是 λ_1，λ_2，…，λ_n，则 A^{-1} 的特征值是 $\frac{1}{\lambda_1}$，$\frac{1}{\lambda_2}$，…，$\frac{1}{\lambda_n}$，A^* 的特征值是 $\frac{|A|}{\lambda_1}$，$\frac{|A|}{\lambda_2}$，…，$\frac{|A|}{\lambda_n}$.

5. 提示：写出该二次型的矩阵后可见它恰为第六讲例 6-17 的情形.

练　习　6-7

1. 提示：用单位坐标向量 ε_i 代入 $f=x'Ax$，可得 $a_{ii}>0$.

3. 显然，A 对称. $f=x'Ax=x'U'Ux=[Ux]'[Ux]=\|Ux\|\geqslant 0$，但若 $x\neq 0$，则 $Ux\neq 0$，故 $f>0$，

即 $\boldsymbol{A}$ 正定.

练　习　6-8

2. f 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 变为 $f=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ry_r^2$，其中 λ_1，…，λ_r 均为正数. 取向量 $\boldsymbol{y}_0=(0,\ \cdots,\ 0,\ 1,\ \cdots,\ 1)'$（前 r 个分量为 0），则当 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}_0$ 时，$f=0$. 而 $\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{0}$.

第一套

一、1. $\begin{pmatrix}1&-3&-3\\2&1&4\\-2&4&7\end{pmatrix}$，3；　2. 都大于 0；　3. $f=-4y_1^2+4y_2^2+y_3^2$；　4. 2，1；　5. $|t|<\dfrac{\sqrt{14}}{4}$.

二、1.(D)；　2.(A)；　3.(D)；　4.(C)；　5.(B).

三、$f=z_1^2-z_2^2-z_3^2$，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{z}$.

四、$f=5y_1^2-5y_2^2+3y_3^2-3y_4^2$，$\boldsymbol{x}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\boldsymbol{y}$.

五、提示：证明 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 合同.

六、提示：先证 $t\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，再证其顺序主子式

$$D_k(t)=\begin{vmatrix}t+a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1k}\\a_{12}&t+a_{22}&\cdots&a_{2k}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1k}&a_{2k}&\cdots&t+a_{kk}\end{vmatrix}.$$

第二套

一、1. $-x_2^2+4x_3^2+6x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$；　2. $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{pmatrix}\boldsymbol{y}$；

3. n；　4. r；　5. $|t|<1$.

二、1.(D)；　2.(A)；　3.(B)；　4.(D)；　5.(D).

三、$f=y_1^2-2y_2^2+\dfrac{1}{2}y_3^2$，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1&-2&1&-1\\0&1&-\frac{3}{2}&1\\0&0&0&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{y}$.

四、$f=y_1^2+y_2^2-y_3^2+3y_4^2$，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}$.

五、$\boldsymbol{A}$ 正定，则 $f=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经可逆线性变换化为 $f=\boldsymbol{y}\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}=y_1^2+\cdots+y_n^2=\boldsymbol{y}'\boldsymbol{E}\boldsymbol{y}$，即 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{A}$

与 E 合同；反之，$f(y)$ 经可逆线性变换化为 $f(x)$，因 $f(y)$ 正定，故 $f(x)$ 也正定，即 A 正定．

六、提示：A 与 E 合同，则有可逆阵 T_1，使 $T_1'AT_1 = E$，又 $(T_1'BT_1)' = T_1'BT_1 = B_1$，则 B_1 对称，故存在正交阵 T_2，使 $T'_2B_1T_2 = B_2$ 为对角阵，令 $T = T_1T_2$，则 T 可逆，且 $T'AT = E$，$T'BT = B_2$．

第七讲　模拟试题

第一套

一、填空题(4×5=20 分)

1. 如果 n 阶行列式的每行元素之和都等于 0，那么此行列式等于________.

2. 当 k ________时，矩阵 $A=\begin{bmatrix}0 & k & 0\\1 & -1 & 1\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}$可逆.

3. 已知 $2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta}=(1,\ 2,\ 3,\ 4)$，$\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}=(1,\ 2,\ 2,\ -1)$，则 $\boldsymbol{\alpha}=$________，$\boldsymbol{\beta}=$________.

4. 含 n 个方程的齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=0$ 的系数行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n|=0$，则该方程组有________解.

5. $A=\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\0 & b & 0\\0 & 0 & c\end{bmatrix}$的特征值为________，单位特征向量为________，其中 a，b，c 互不相等.

二、选择题(4×5=20 分)

1. 在下列 6 阶行列式展开式的各项中，带“ - ”的项是[　　].

(A)　$a_{13}a_{25}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$；　(B)　$a_{11}a_{26}a_{34}a_{42}a_{53}a_{65}$；

(C)　$a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{64}a_{35}$；　(D)　$a_{52}a_{31}a_{14}a_{43}a_{65}a_{26}$.

2. 如果 A，B 是同阶对称矩阵，那么 AB[　　].

(A)　是对称矩阵；　(B)　不是对称矩阵；

(C)　是反对称矩阵；　(D)　不一定是对称矩阵.

3. 已知，$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}4\\2\\-8\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$，则 $x=$[　　]是 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

(A)　$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$；　(B)　$\begin{bmatrix}4\\2\\-6\end{bmatrix}$；　(C)　$\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}$；　(D)　$\begin{bmatrix}-1\\2\\3\end{bmatrix}$.

4. 如果非齐次线性方程组 $Ax=b$ 中方程个数少于未知数个数，那么[　　].

(A)　$Ax=b$ 必有无穷多解；　(B)　$Ax=0$必有非零解；

(C)　$Ax=0$仅有零解；　(D)　$Ax=0$一定无解.

5. 如果 n 阶矩阵A 有一个特征值$\lambda=0$，那么 $R(A)=$[　　].

(A)　n；　(B)　$n-1$；　(C)　1；　(D)　0.

三、(10 分)计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{vmatrix}$.

四、(10 分)解下列矩阵方程，求 $\boldsymbol{X}$.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

五、(10 分)求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(5,\ 2,\ -3,\ 1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(4,\ 1,\ -2,\ 3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,\ 1,\ -1,\ -2)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(3,\ 4,\ -1,\ 2)$的一个极大无关组，并把其余向量用这个极大无关组线性表示.

六、(10 分)已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a, \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b, \end{cases}$$

a，b 为何值时，此方程组有解？求出对应的齐次方程组的一个基础解系，在有解的情况下，写出此方程组的通解.

七、(10 分)求正交变换，把二次型 $f=x_1^2+2x_2^2-4x_1x_2-4x_1x_3$ 化为标准形，给出所用的变换.

八、(10 分)设 n 阶矩阵A 的伴随矩阵为A^*，证明：$(aA)^*=a^{n-1}A^*$(a 为实常数).

答　　案

一、1.0；　2.$\neq 0$；　3.$(-1,\ -2,\ 0,\ 11)$，$(1,\ 2,\ 1,\ -6)$；　4. 非零；　5.a，b，c. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

二、1.(A)；　2.(D)；　3.(B)；　4.(B)；　5.(B).

三、$D=-(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

四、$X=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

五、极大无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$.

六、$a=0$，$b=2$ 时有解，$\boldsymbol{\xi}_1=(1,\ -2,\ 1,\ 0,\ 0)'$，$\boldsymbol{\xi}_2=(1,\ -2,\ 0,\ 1,\ 0)'$，$\boldsymbol{\xi}_3=(5,\ -6,\ 0,\ 0,\ 1)'$，通解 $\boldsymbol{x}=(-2,\ 3,\ 0,\ 0,\ 0)'+k_1(1,\ -2,\ 1,\ 0,\ 0)'+k_2(1,\ -2,\ 0,\ 1,\ 0)'+k_3(5,\ -6,\ 0,\ 0,\ 1)'(k_1,\ k_2,\ k_3\in R)$.

七、$4y_1^2+y_2^2-2y_3^2$，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\boldsymbol{y}$.

八、提示：设 A 的元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}，则 aA 的对应元素的代数余子式为 $a^{n-1}A_{ij}$.

第二套

一、填空题(4×5=20 分)

1. 如果 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1$，那么 $D_1=\begin{vmatrix} 4a_{11} & 2a_{11}-3a_{12} & a_{13} \\ 4a_{21} & 2a_{21}-3a_{22} & a_{23} \\ 4a_{31} & 2a_{31}-3a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$________.

2. 如果 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆矩阵，那么 $\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & 0 \end{pmatrix}^{-1}=$________.

3. 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,\ 2,\ 4,\ 0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,\ -3,\ a,\ 1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,\ 1,\ b,\ 2)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(0,\ 1,\ 2,\ 0)$线性相关，那么 a，b 满足________.

4. 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等行变换化为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则方程组的通解 $\boldsymbol{x}$ ________.

5. 如果 λ_0 是 n 阶可逆矩阵 A 的一个特征值，则 $\lambda_0^2-\dfrac{1}{\lambda_0}$是________的一个特征值.

二、选择题(4×5=20 分)

1. 设 $D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} & a_{22} \\ a_{11} & a_{31} & a_{21} \\ a_{13} & a_{33} & a_{23} \end{vmatrix}$，则[　　　].

(A)　$D_1=D_2$;　　　(B)　$D_1=-D_2$;

(C)　$D_1=2D_2$;　　　(D)　$D_1=\dfrac{1}{2}D_2$.

2. 如果 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$，那么 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=$[　　　].

(A)　$\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$;　　　(B)　$\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$;

(C)　$\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$;　　　(D)　$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$.

3. 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$线性无关，那么[　　　].

(A)　$a=b=c$;　　　(B)　$b=c=0$;

(C)　$c=0$;　　　(D)　$c\neq 0$.

4. 如果 m 个方程 n 个未知数的非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 对于任何 $\boldsymbol{b}$ 都有解，那么 [　　　].

(A)　$R(\boldsymbol{A})=n$;　　　(B)　$R(\boldsymbol{A})=m$;

(C)　$R(\boldsymbol{A})<n$;　　　(D)　$R(\boldsymbol{A})<m$.

5. 如果 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，那么[　　　]不是正交矩阵(k 为正整数).

(A) A^{-1}; (B) A'; (C) A^k; (D) kA.

三、(10分)计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 \\ c_1 & 0 & d_1 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & d_2 \end{vmatrix}$.

四、(10分)求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 1,\ 1,\ 4)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,\ 1,\ 3,\ 5)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,\ -1,\ 3,\ -2)$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(3,\ 1,\ 5,\ 6)$的一个极大无关组，把其余向量用这个极大无关组线性表示.

五、(10分)a 取何时值，方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a \\ x_1+2x_3+3x_4+2x_5=3 \\ 4x_1+5x_2+3x_3+2x_4+3x_5=2 \\ x_1+x_4+2x_5=1 \end{cases}$有解？求 a 取该值时的通解.

六、(10分)设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & c \\ b & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(1) a, b, c 满足什么条件时，$R(A)=3$;

(2) a, b, c 取何值时，A 是对称矩阵;

(3) 取 a, b, c 的一组值，使 A 为正交矩阵.

七、(10分)用施密特正交化法把向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 2,\ 2,\ -1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\ 1,\ -5,\ 3)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(3,\ 2,\ 8,\ -7)$化为单位正交向量组.

八、(10分)设 n 阶矩阵A 的伴随矩阵为A^*，证明：$(A^*)'=(A')^*$

答　案

一、1. -12; 2. $\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$; 3. $b-2a=14$;

4. $x=k_1(-2,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)+k_2(-4,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0)+k_3(1,\ 0,\ -3,\ 0,\ 1)(k_1,\ k_2,\ k_3\in R)$;
5. A^2-A^{-1}.

二、1.(A); 2.(A); 3.(D); 4.(A); 5.(D).

三、$D=(a_1d_1-b_1c_1)(a_2d_2-b_2c_2)$.

四、极大无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3=-3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_4=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

五、$a=1$ 时有解，通解 $x=(1,\ -1,\ 1,\ 0,\ 0)'+k_1(-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ 0)'+k_2(-2,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1)'$ $(k_1,\ k_2\in R)$.

六、(1) $a\neq 2bc$; (2) $a=1$, $b=c=0$; (3) $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $c=\frac{\sqrt{3}}{2}$或 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $c=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $c=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

七、$\frac{1}{\sqrt{10}}(1,\ 2,\ 2,\ -1)$, $\frac{1}{\sqrt{26}}(2,\ 3,\ 3,\ 2)$, $\frac{1}{\sqrt{10}}(2,\ -1,\ -1,\ -2)$.

八、因 A^*的第 i 行第j 列元素为A_{ji}，故$(A^*)'$的第i 行第j 列元素为A_{ij}，又 A'的第i 行第j 列元素为 a_{ji}，故$(A')^*$的第 i 行第j 列元素为 A_{ij}.

第三套

一、填空题(4×5=20 分)

1. 如果方程组$\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=0\\ x_1+ax_2-x_3=0\\ 2x_1-x_2+x_3=0\end{cases}$有非零解，那么 $a=$________.

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，那么当 a，b 为任意常数，且 $d=$________，$c=$________时，总有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

3. 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，那么当 l，m 满足________时，$l\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1$，$m\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

4. 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有惟一解的充要条件是对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$________.

5. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2，-3，1，且 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2$，则 B 的特征值为________.

二、选择题(4×5=20 分)

1. 已知 $D=\begin{vmatrix}-1 & x & -1 & 0\\ 2 & 4 & 1 & -1\\ 1 & -6 & -2 & -2\\ 1 & 5 & 3 & 1\end{vmatrix}$，则展开式中 x 的一次项系数为[　　].

(A) -5;　(B) 5;　(C) -10;　(D) 10.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=a\neq0$，则 $|\boldsymbol{A}^*|=$[　　].

(A) a;　(B) $\dfrac{1}{a}$;　(C) a^{n-1};　(D) a^n.

3. 设 n 维向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$，B：$\boldsymbol{\beta}_1$，…，$\boldsymbol{\beta}_r$ 都线性无关，且 A 不能由 B 线性表示，B 也不能由 A 线性表示，则向量组 C：$\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}_1$，…，$\boldsymbol{\beta}_r$[　　].

(A) 线性相关;

(B) 线性无关;

(C) 可能线性相关也可能线性无关;

(D) 既不线性相关也不线性无关.

4. 如果 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_3$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系，那么[　　]不是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系.

(A) $\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3$，$\boldsymbol{\xi}_3+\boldsymbol{\xi}_1$;

(B) $\boldsymbol{\xi}_1+2\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_2+2\boldsymbol{\xi}_3$，$\boldsymbol{\xi}_3+2\boldsymbol{\xi}_1$;

(C) $\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_2-\boldsymbol{\xi}_3$，$\boldsymbol{\xi}_3-\boldsymbol{\xi}_1$;

(D) $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3$.

5. 使二次型 $kx_1^2+kx_2^2+kx_3^2+2kx_1x_2+2x_1x_3$ 正定的 k[　　].

(A) <0;　　(B) >0;

(C) 不存在;　　(D) 可以是任意实数.

三、(10 分)计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$.

四、(10 分)已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,\ 1,\ 4,\ 0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,\ -1,\ 2,\ 2)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,\ 2,\ 5,\ 4)$，求两个单位向量，使它们同时与 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 正交.

五、(10 分)设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 R^n 的一个基，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n$ 也是 R^n 的一个基. 又如果向量 $\boldsymbol{x}$ 关于前一个基的坐标为 $(n,\ n-1,\ \cdots,\ 2,\ 1)'$，求 $\boldsymbol{x}$ 关于后一个基的坐标.

六、(10 分)已知非齐次线性方程组 $\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=4 \\ x_1+bx_2+x_3=3 \\ x_1+2bx_2+x_3=4 \end{cases}$ 当 a，b 取何值时，方程组无解，有惟一解，有无穷多解？有解时，求出方程组的解.

七、(10 分)已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$，求

(1) $\boldsymbol{A}$ 的特征值和全部特征向量；

(2) 正交矩阵 $\boldsymbol{T}$，使 $\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角矩阵.

八、(10 分)证明：如果 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆矩阵，那么 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

答　案

一、1.4，-1；　2.0，$a+b$；　3.$lm\neq1$；　4.仅有零解；　5.-14，-72，-4.

二、1.(B)；2.(C)；3.(C)；4.(C)；5.(C).

三、$a^n+(-1)^{n+1}b^n$.

四、$\pm\sqrt{249}(10,\ -12,\ -2,\ 1)$.

五、$(1,\ 1,\ \cdots,\ 1)'$.

六、$a=1$，$b\neq\frac{1}{2}$ 或 $a=1$，$b=0$ 时，无解；$a\neq1$，$b\neq0$ 时，有惟一解：$x_1=\frac{1-2b}{b(1-a)}$，$x_2=\frac{1}{b}$，$x_3=\frac{4a-2ab-1}{b(1-a)}$；$a=1$，$b=\frac{1}{2}$ 时，有无穷多解 $\boldsymbol{x}=(2,\ 2,\ 0)'+k(-1,\ 0,\ 1)(k\in R)$.

七、特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=4$，$\lambda_3=-2$，特征向量 $\boldsymbol{p}_1=k_1\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_2=k_2\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_3=k_3\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$，$k_1$，$k_2$，$k_3$ 不为零，$\boldsymbol{T}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

八、$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})[\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}]\triangleq(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{-1}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{A}]^{-1}\triangleq\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}\triangleq\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})[\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})]^{-1}\triangleq\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}$

$\triangleq E + BA^{-1} - BA^{-1} = E$,

所以$(A+B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1}$.

第四套

一、填空题$(4\times 5=20$ 分)

1.4 阶行列式的展开式中，含有 a_{41}的项共________个.

2. 设 A 为 n 阶矩阵，且存在正整数 k，使 $A^k=0$，那么$(E-A)^{-1}=$________.

3. 对任意向量组 β_1，β_2，如果 $\alpha_1=\beta_1-\beta_2$，$\alpha_2=\beta_1+2\beta_2$，$\alpha_3=5\beta_1-2\beta_2$，那么 α_1，α_2，α_3 一定线性________.

4. 当 $\lambda=$________时，方程组$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=4\\ x_2+2x_3=2\\ (\lambda-1)(\lambda-2)x_3=(\lambda-3)(\lambda-4)\end{cases}$ 无解.

5. 设 λ_0 是 n 阶矩阵 A 的一个特征值，则 $R(A-\lambda_0E)$________ n.

二、选择题$(4\times 5=20$ 分)

1. 设 A，B 都是 n 阶矩阵，则$|(kAB)^m|=$[　　].

(A)　$k^n|A|^n|B|^n$;　　　(B)　$k^{mn}|A|^m|B|^m$;

(C)　$k^{m+n}|A|^m|B|^m$;　　　(D)　$k^m|A|^n|B|^n$.

2. 设 A 为 n 阶矩阵，则$(A^*)^*=$[　　].

(A)　$|A|E$;　(B)　A;　(C)　$|A|^nA$;　(D)　$|A|^{n-2}A$.

3. 如果向量 b 可由向量组 A：a_1，…，a_m 线性表示，那么向量组 B：a_1，…，a_m，b 的秩[　　].

(A)　大于 A 组的秩;　　　(B)　小于 A 组的秩;

(C)　等于 A 组的秩;　　　(D)　与 A 组的秩无关.

4. 有 m 个方程 n 个未知数的非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解时，它的全部解 [　　].

(A)　构成 $n-R(A)$维向量空间;

(B)　构成 $n-R(A)+1$ 维向量空间;

(C)　构成 m 维向量空间;

(D)　不构成向量空间.

5. 如果 a，b，c 满足[　　]，那么二次型 $f=ax_1^2+bx_2^2+ax_3^2+2cx_1x_3$ 正定.

(A)　$a>0$，$b+c>0$;　　　(B)　$a>0$，$b>0$，$c>0$;

(C)　$|a|>c$，$b>0$;　　　(D)　$a>|c|$，$b>0$.

三、(10 分)已知向量组 α_1，α_2，…，α_{s+1}线性无关，而 $\beta_i=\alpha_i+t_i\alpha_{s+1}(i=1, 2, \cdots, s)$，证明：$\beta_1$，…，$\beta_s$ 也线性无关.

四、(10 分)已知非齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=1,\\ 2x_1+(a+2)x_2+(-b-2)x_3=3,\\ -3ax_2+(a+2b)x_3=-3,\end{cases}$就 a，b 的各种情况讨论该方程组的解，有解时求解.

五、(10 分)设 A 为 n 阶反对称矩阵，证明：

(1) 如果 n 为奇数，那么 A^* 为对称矩阵，如果 n 为偶数，那么 A^* 为反对称矩阵；

(2) 如果 A 可逆，那么 A^{-1} 也是反对称矩阵.

六、(10 分) n 维向量空间 $R^n(n>1)$ 中满足条件 $x_{i+2}=x_{i+1}+x_i(i=1, 2, \cdots, n-2)$ 的向量 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全体是否构成子空间？如果能，其维数是多少？

七、(10 分)用正交变换化二次型 $f=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1$ 为标准形，并给出所用的变换.

八、(10 分)设 $A=(a_{ij})$ 为 $m\times n$ 矩阵，证明：$R(AA')=R(A'A)=R(A)$.

答　案

一、1.6；　2. $E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$；　3. 无关；　4.1, 2；　5. $<n$.

二、1.(B)；2.(D)；3.(C)；4.(D)；5.(D).

三、提示：设有 s 个数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，使得 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s=0$，证明 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$.

四、$a=0$，无解；$a\neq0$，$a=b$，有无穷多解，通解为 $x=\left(1-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}, 0\right)+k(0, 1, 1)(k\in R)$；$a\neq0$，$a\neq b$，有惟一解，$x_1=1-\frac{1}{a}$，$x_2=\frac{1}{a}$，$x_3=0$.

五、(1) $(A^*)'=(A')^*=(-A)^*=(-1)^{n-1}A^*$，当 n 为奇数时，$(A^*)'=A^*$，当 n 为偶数时 $(A^*)'=-A^*$；

(2) $(A^{-1})'=(A')^{-1}=(-A)^{-1}=-A^{-1}$.

六、是 2 维子空间.

七、$f=y_1^2-y_2^2$，$x=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & \sqrt{2} & 0\\ 1 & -1 & 0 & \sqrt{2}\\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 0\\ 1 & -1 & 0 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}y$.

八、提示：先证明 $Ax=0$ 与 $(A'A)x=0$ 同解.

第五套

一、填空题(4×5=20 分)

1. 方程 $\begin{vmatrix} a & b & c & d+x\\ a & b & c+x & d\\ a & b+x & c & d\\ a+x & b & c & d\end{vmatrix}=0$ 的根为_______.

2. 设 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$________.

3. 设矩阵 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 经初等行变换变为 $\begin{pmatrix}1 & -2 & 6 & 3\\ 0 & -1 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则 α_1，α_2，

α_3 线性________，α_1，α_2，α_4 线性________.

4. λ ________时，方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=4 \\ x_2-4x_3=2 \\ x_1+(\lambda-1)(\lambda+2)x_3=(\lambda-3)(\lambda+4) \end{cases}$有解.

5. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$相似，则 $x=$ ________，$y=$ ________.

二、选择题($4\times5=20$ 分)

1. 如果实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{AA}'=\boldsymbol{0}$，那么[　　].

(A) $\boldsymbol{A}$ 必为零矩阵；　(B) $\boldsymbol{A}$ 不一定是零矩阵；

(C) $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$；　(D) $|\boldsymbol{A}|=0$.

2. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$[　　].

(A) $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$；　(B) $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$；

(C) $-\frac{1}{3}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$；　(D) $\frac{1}{3}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$.

3. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$，则 $R(\boldsymbol{C})$[　　].

(A) 小于 $R(\boldsymbol{A})$ 也小于 $R(\boldsymbol{B})$；

(B) 小于 $R(\boldsymbol{A})$ 而大于 $R(\boldsymbol{B})$；

(C) 大于 $R(\boldsymbol{A})$ 而小于 $R(\boldsymbol{B})$；

(D) 大于 $R(\boldsymbol{A})$ 也大于 $R(\boldsymbol{B})$.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵，则对方程组(Ⅰ)$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$和(Ⅱ)$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$必有[　　].

(A) (Ⅰ)，(Ⅱ)同解；

(B) (Ⅰ)的解是(Ⅱ)的解，但(Ⅱ)的解不是(Ⅰ)的解；

(C) (Ⅰ)的解不是(Ⅱ)的解，但(Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解；

(D) (Ⅰ)的解不是(Ⅱ)的解，(Ⅱ)的解也不是(Ⅰ)的解.

5. 设 $\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{C}$ 分别是 m 阶，n 阶可逆矩阵，则[　　]是错误的.

(A) $R(\boldsymbol{AB})<R(\boldsymbol{A})$；　(B) $R(\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{BC})$；

(C) $R(\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{ABC})$；　(D) $R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{ABC})$.

三、(10 分)计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 0 & 1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

四、(10 分)设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{2}$，求$|(3\boldsymbol{A})^{-1}-2\boldsymbol{A}^*|$.

五、(10 分)证明$\begin{cases} x_1+2x_2=a_1 \\ x_2+2x_3=a_2 \\ x_3+2x_4=a_3 \\ x_1+3x_2+x_3-2x_4=a_4 \end{cases}$有解的充要条件是 $a_1+a_2=a_3+a_4$.

六、(10 分)已知向量组 A，B 的秩相等，并且 A 可由 B 线性表示，证明：A 与 B 等价.

七、(10 分)已知二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3(a>0)$经正交变换化为标准形 $y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求 a 的值及正交变换矩阵.

八、(10 分)设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，证明：$(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$，其中 n 为大于 2 的整数.

答　案

一、1.0，$-(a+b+c+d)$；　2.A；　3. 无关，相关；　4. 是任意实数；　5.0，1.

二、1.(A)；2.(D)；3.(A)；4.(A)；5.(A).

三、$(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$.

四、$-\dfrac{16}{27}$.

五、对增广矩阵初等行变换化为 $\begin{pmatrix}1&2&0&0&a_1\\0&1&2&0&a_2\\0&0&1&2&a_3\\0&0&0&0&a_4-a_1-a_2+a_3\end{pmatrix}$.

六、设 A：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$，B：$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_t$ 秩都是 r，考虑向量组 C：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_t$，因 $\boldsymbol{A}$ 可由 B 线性表示，故 C 与 B 等价，故 C 的秩也是 r，$\boldsymbol{A}$ 的一个极大无关组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}$，…，$\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 也是 C 的极大无关组。于是 $\boldsymbol{\beta}_1$，…，$\boldsymbol{\beta}_t$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}$，…，$\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表示，从而也可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，即 $\boldsymbol{A}$，B 等价.

七、$a=2$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$.

八、如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆，那么由 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 得$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$，因为$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}^*|}(\boldsymbol{A}^*)^*$，所以有$\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}^*|}(\boldsymbol{A}^*)^*=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|^{n-1}}(\boldsymbol{A}^*)^*$，可见，$(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$；如果 $\boldsymbol{A}$ 不可逆，那么 $R(\boldsymbol{A}^*)\leqslant1$，因为 $n>2$，所以$(\boldsymbol{A}^*)^*=0$，这时$(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$ 仍成立.

第六套

一、填空题($4\times5=20$ 分)

1. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵，如果 $|\boldsymbol{A}|=5$，$\boldsymbol{B}=3(\boldsymbol{A}^{-1})^2-(2\boldsymbol{A}^2)^{-1}$，那么 $|\boldsymbol{B}|=$________.

2. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{AB}|=0$ 的充要条件是________.

3. 向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$在基 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$下的坐标是________.

4. 如果对于方程组$\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0\\2x_1-x_2+kx_3=0\\3x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$，存在非零矩阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{AB}=0$，那么 $k=$________.

5. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 次幂 $\boldsymbol{A}^n \to 0(n\to\infty)$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值的绝对值都________.

二、选择题(4×5=20 分)

1. 如果 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{AB}$ 不可逆，那么[　　].

(A) $\boldsymbol{A}$ 不可逆；　　(B) $\boldsymbol{B}$ 不可逆；

(C) $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都不可逆；　(D) $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 中有一个不可逆.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵且 $|\boldsymbol{A}|=4$，则 $|4\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}^{-1}|=$[　　].

(A) 4^{n-1}；　(B) 4^{n+1}；　(C) 4^{3n}；　(D) 4^n.

3. n 维列向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m<n)$ 线性无关，则 n 维列向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 也线性无关的充要条件的[　　].

(A) A 可由 B 线性表示；

(B) B 可由 A 线性表示；

(C) A，B 等价；

(D) 矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$ 与 $(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$ 等价.

4. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+k\boldsymbol{\alpha}_1$，则 $k=$[　　]时，$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 不是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

(A) 1；　(B) -1；　(C) 0；　(D) 2.

5. 如果 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 相似，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{6}$，那么 $|\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}|=$[　　].

(A) 48；　(B) 15；　(C) 6；　(D) $\frac{1}{48}$.

三、(10 分)计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_{n-1} & a_1a_n \\ a_2a_1 & 2+a_2^2 & \cdots & a_2a_{n-1} & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}a_1 & a_{n-1}a_2 & \cdots & (n-1)+a_{n-1}^2 & a_{n-1}a_n \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_na_{n-1} & n+a_n^2 \end{vmatrix}$.

四、(10 分)设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，求 $|\boldsymbol{A}^{2k}|$，$\boldsymbol{A}^{2k}$(k 为正整数).

五、(10 分)设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_m(m>1)$，且 $\boldsymbol{\alpha}_m\neq\boldsymbol{0}$，又对于任意 $m-1$ 个数 $k_1,\cdots,k_{m-1}$，有向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+k_1\boldsymbol{\alpha}_m$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_m$，$\boldsymbol{\beta}_{m-1}=\boldsymbol{\alpha}_{m-1}+k\boldsymbol{\alpha}_m$，证明：

(1) 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，那么 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{m-1}$ 也线性无关；

(2) 如果 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{m-1}$ 线性无关，那么 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 也线性无关.

六、(10 分)设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，如果存在正整数 k，使线性方程组 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有解向量 $\boldsymbol{\xi}$，且 $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}$，证明：向量组 $\boldsymbol{\xi}$，$\boldsymbol{A\xi}$，$\cdots$，$\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\xi}$ 线性无关.

七、(10 分)用正交变换化二次曲面方程 $2x^2+y^2-4xy-4yz=1$ 为标准方程，并指明这是何种二次曲面.

八、(10 分)设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，证明：存在秩为 $n-r$ 的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$.

答　案

一、1. $\frac{5}{8}$；　2. $|A|=0$ 或 $|E+B|=0$；　3. $\left(-\frac{3}{2},\ -1,\ -\frac{3}{2}\right)$；　4. 1；　5. 小于 1.

二、1.(D)；　2.(B)；　3.(D)；　4.(B)；　5.(B).

三、$D_n=n!\left(1+a_1^2+\frac{1}{2}a_2^2+\frac{1}{3}a_3^2+\cdots+\frac{1}{n}a_n^2\right)$.

四、$|\boldsymbol{A}^k|=100^{2k}$，$\boldsymbol{A}^{2k}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^{2k} & 0\\ 0 & \boldsymbol{C}^{2k}\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{B}^{2k}=\begin{pmatrix}5^{2k} & 0\\ 0 & 5^{2k}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}^{2k}=\begin{pmatrix}4^k & 4^{k+1}k\\ 0 & 4^k\end{pmatrix}$.

五、提示：用反证法证明.

六、设存在 k 个数 $\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_k$，使 $\lambda_1\xi+\lambda_2A\xi+\cdots+\lambda_kA^{k-1}\xi=0$.

两边左乘 $\boldsymbol{A}^{k-1}$，因 $\boldsymbol{A}^k\xi=\boldsymbol{0}$，故上式变为 $\lambda_1\boldsymbol{A}^{k-1}\xi=\boldsymbol{0}$，可见，$\lambda_1=0$，于是 $\lambda_2\boldsymbol{A}\xi+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{A}^{k-1}\xi=0$，两边左乘 $\boldsymbol{A}^{k-2}$，可得 $\lambda_2=0$，依次可得 $\lambda_3=\lambda_4=\cdots=\lambda_k=0$.

七、$4x^2+y^2-2z^2=1$，单叶双曲面.

八、如果 $r=n$，那么可取 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$；如果 $r<n$，那么以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系和 r 个零向量做列向量，构成 $\boldsymbol{B}$.

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝线性代数释疑解难
作者＝
页数＝１５７
ＳＳ号＝０
出版日期＝
Ｖｓｓ号＝６４８４５７４２