2011-2012 学年第二学期《高等数学Ⅱ》期末试卷

一、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 与点 $M_1(1,-1,2)$，$M_2(3,3,1)$，$M_3(3,1,3)$ 决定的平面垂直的单位向量 $\vec{a}_0 =$ $\pm\frac{1}{\sqrt{17}}(3,-2,-2)$。

2. 过点 $(1,2,1)$ 与向量 $\vec{S}_1 = \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$，$\vec{S}_2 = -\vec{j} - \vec{k}$ 平行的平面方程为 $x-y+z=0$。

3. 设 $z = x^3y^2 - x^2 - e^y$，则 $dz =$ $(3x^2y^2-2x)dx+(2x^3y-e^y)dy$。

4. 曲线 $x = t^2, y = 2t, z = \frac{1}{3}t^3$ 在点 $\left(1,2,\frac{1}{3}\right)$ 处的切线方程是 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-\frac{1}{3}}{1}$。

5. 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 的收敛半径是 1，则级数在开区间 $(0,2)$ 内收敛。

6. 设 L 为圆周 $x^2 + y^2 = 1$，则 $\oint_L x^2 ds =$ π。

7. 交换积分次序 $\int_0^1 dy \int_{e^y}^{e} f(x,y)\, dx =$ $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)\,dy$。

8. 设区域 D 是 $x^2 + y^2 \le 1$ 与 $x^2 + y^2 \le 2x$ 的公共部分，试写出 $\iint_D f(x,y)\, dxdy$ 在极坐标系下先对 r 积分的累次积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}} d\theta\int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r\,dr+\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r\,dr+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r\,dr$。

9. 已知一个二阶常系数线性齐次微分方程的特征方程有两个实根 a 与 b，且 $a \ne b$，此微分方程是 $y''-(a+b)y'+aby=0$，通解是 $y=C_1e^{ax}+C_2e^{bx}$。

10. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ x-1, & 1 \le x < 2 \end{cases}$，又设 $S(x)$ 是 $f(x)$ 的以 4 为周期的正弦级数展开式的和函数，则 $S(7) =$ $-\frac{1}{2}$。

二、计算题（每小题 6 分，共 36 分）

1. 设 $z = xF(xy^2, e^{x^2y})$，F 有连续偏导数，求 z_x，z_y。

$$z_x = F(xy^2, e^{x^2y}) + x(F_1'\cdot y^2 + F_2'\cdot e^{x^2y}\cdot 2xy)$$
$$= F(xy^2, e^{x^2y}) + xy^2F_1' + 2x^2ye^{x^2y}F_2'$$

$$z_y = x(F_1'\cdot 2xy + F_2'\cdot e^{x^2y}\cdot x^2)$$
$$= 2x^2yF_1' + x^3e^{x^2y}F_2'$$

2. 在椭圆抛物面 $z=x^2+2y^2$ 上求一点，使曲面在该点处的切平面垂直于直线 $\begin{cases}2x+y=0\\ y+3z=0\end{cases}$，并写出曲面在该点处的法线方程。

$z=x^2+2y^2$ 上任一点 (x,y,z) 处切平面法向量为 $(2x,4y,-1)$.

法一：已知直线与切平面垂直，则直线方向向量为 $(2x,4y,-1)$

从而 $\begin{cases}(2x,4y,-1)\cdot(2,1,0)=0\\ (2x,4y,-1)\cdot(0,1,3)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4x+4y=0\\ 4y-3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-\frac{3}{4}\\ y=\frac{3}{4}\end{cases}$

$\therefore$ 所求点为 $\left(-\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{27}{16}\right)$，法线为 $\dfrac{x+\frac{3}{4}}{-\frac{3}{2}}=\dfrac{y-\frac{3}{4}}{3}=\dfrac{z-\frac{27}{16}}{-1}$

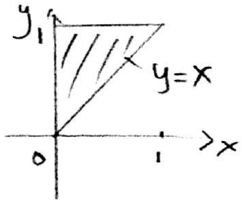
法二：已知直线方向向量为 $\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&1&0\\0&1&3\end{vmatrix}=(3,-6,2)\,//\,(2x,4y,-1)$

$\Rightarrow \dfrac{2x}{3}=\dfrac{4y}{-6}=\dfrac{-1}{2} \Rightarrow x=-\frac{3}{4},\ y=\frac{3}{4}$

$\therefore$ 所求点为 $\left(-\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{27}{16}\right)$，

法线为 $\dfrac{x+\frac{3}{4}}{3}=\dfrac{y-\frac{3}{4}}{-6}=\dfrac{z-\frac{27}{16}}{2}$.

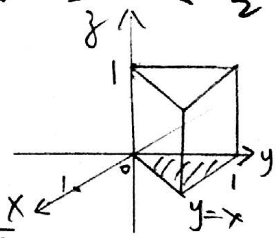
3. 计算 $\int_0^1 dz\int_0^1 dx\int_x^1 \sin y^2 dy$。



换序：

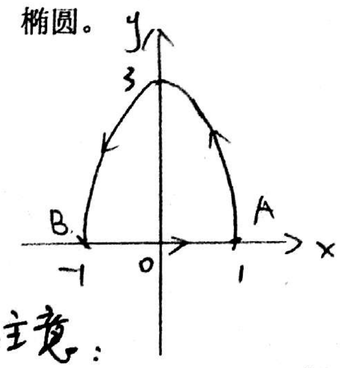
原式 $=\int_0^1 dz\int_0^1 dy\int_0^y \sin y^2 dx=\int_0^1 dz\int_0^1 y\sin y^2 dy=1\cdot\left[-\frac{\cos y^2}{2}\right]_0^1$

$=\frac{1}{2}(1-\cos 1)$



或 原式 $=\int_0^1 dy\int_0^y dx\int_0^1 \sin y^2 dz=\cdots$

4. 计算曲线积分 $\int_L (x+e^{\sin y})dy-ydx$，其中 L 是从点 $A(1,0)$ 沿 $y=3\sqrt{1-x^2}$ 到点 $B(-1,0)$ 的上半椭圆。



L: $x^2+\frac{y^2}{9}=1\ (y\geq 0)$，$A\to B$

添 $\overline{BA}$: $y=0$，x: $-1\to 1$

则原式 $=\iint\limits_D 2\,dxdy-\int_{\overline{BA}}(x+e^{\sin y})dy-ydx$

$=2\times\frac{1}{2}\pi\cdot 3\cdot 1-\int_{-1}^1 0\,dx=3\pi$.

注意：

$P=-y$，$Q=x+e^{\sin y}$

$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2$，用Green公式

5. 判别级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n-1}$ 的敛散性，对收敛情况说明是绝对收敛还是条件收敛。

1) 设 $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-1}\ (x\geq 2)$，由 $f'(x)=-\frac{x+1}{2\sqrt{x}\,(x-1)^2}<0\ (x\geq 2)$

可得 $f(x)\downarrow$，$x\geq 2$. 从而 $\left\{\frac{\sqrt{n}}{n-1}\right\}\downarrow$. 又 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n-1}=0$

$\therefore$ 由 Leibniz 判别法，级数收敛.

2) 对 $\sum_{n=2}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}\right|=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n-1}$ $\because$ $\frac{\sqrt{n}}{n-1}\sim\frac{1}{\sqrt{n}}$, $n\to\infty$

$\therefore$ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n-1}$ 发散

从而级数为条件收敛.

6. 求微分方程 $x''(t)-4x'(t)+5x(t)=5$ 的通解。

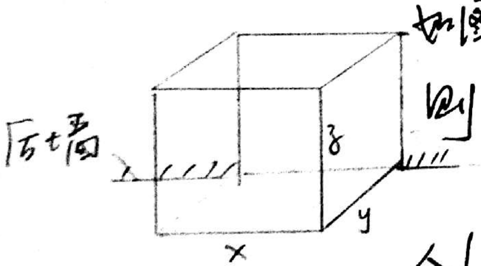
$r^2-4r+5=0 \Rightarrow r_{1,2}=2\pm i$

易见 $x=1$ 是一个特解.

$\therefore$ 通解为 $x=C_1e^{2t}\cos t+C_2e^{2t}\sin t+1$

三、**综合题**（满分 34 分）

1. （8 分）沿厂房的后墙修建一座容积为 V 形状为长方体的仓库，已知仓库的屋顶和墙壁每单位面积的造价分别为地面每单位面积造价的 2 倍和 1.5 倍，厂房后墙的长和高足够，因而这一面墙壁的造价不计，问如何设计，方能使仓库的造价最低？



如图，设仓库长.宽.高分别为 x, y, z. 地面单位面积造价为1，

则总造价为：$xy+2xy+1.5(xz+2yz)$

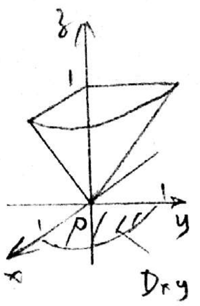
$=1.5(2xy+xz+2yz)$

令 $L(x,y,z,\lambda)=2xy+xz+2yz+\lambda(xyz-V)$

由 $\begin{cases} L_x=2y+z+\lambda yz=0 \\ L_y=2x+2z+\lambda xz=0 \\ L_z=x+2y+\lambda xy=0 \\ L_\lambda=xyz-V=0 \end{cases}$ $(x,y,z>0)$ 解得唯一驻点 $\left(\sqrt[3]{2V}, \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}, \sqrt[3]{2V}\right)$

$\therefore$ 长.宽.高分别为 $\sqrt[3]{2V}$, $\frac{\sqrt[3]{2V}}{2}$, $\sqrt[3]{2V}$ 时，造价最低.

2. （8分）计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\,dzdx+zdxdy$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在第一卦限中满足 $z\le 1$ 的部分曲面的下侧。



$$\text{原式}=\iint\limits_{D_{xy}}(0,\ x^2+y^2,\ \sqrt{x^2+y^2})\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},-1\right)dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\left(y\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1(r^2\sin\theta-r)\cdot r\,dr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{4}\sin\theta-\frac{1}{3}\right)d\theta=\frac{1}{4}-\frac{\pi}{6}.$$

3. （9分）试求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ 的和。

考虑 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$，$x\in I$，$I$ 为收敛域.

则 $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$，$S''(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}2\cdot(-1)^{n-1}\cdot x^{2n-2}=\frac{2}{1+x^2}$，$-1<x<1$.

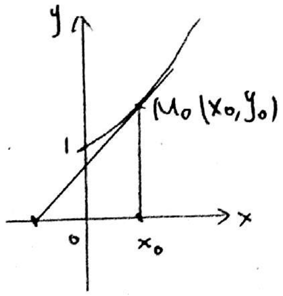
从而 $S'(x)=S'(0)+\int_0^x S''(t)\,dt=0+\int_0^x\frac{2}{1+t^2}dt=2\arctan x$，

$S(x)=S(0)+\int_0^x S'(t)\,dt=0+\int_0^x 2\arctan t\,dt$

$=2t\arctan t\Big|_0^x-\int_0^x\frac{2t}{1+t^2}dt=2x\arctan x-\ln(1+x^2)$，$-1<x<1$.

$\therefore\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n=S\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}-\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}\pi}{9}-\ln\frac{4}{3}$.

4. （9分）上半平面内一单调上升曲线过点 $(0,1)$，且曲线上任一点 $M(x_0,y_0)$ 处切线与 x 轴，直线 $x=x_0$ 所围三角形面积等于曲线与 x 轴，y 轴，直线 $x=x_0$ 所围成面积加上 $\frac{1}{2}$，求此曲线方程。



过 M_0 点的切线为：$y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$

令 $y=0$，得 $x=x_0-\frac{y_0}{y'(x_0)}$

三角形面积为 $\frac{1}{2}\cdot\frac{y_0}{y'(x_0)}\cdot y_0$

从而由 (x_0,y_0) 任意性，可得：$\frac{y^2}{2y'}=\int_0^x y(t)\,dt+\frac{1}{2}$ $(*)$

求导得：$\frac{1}{2}\cdot\frac{2y\cdot(y')^2-y^2\cdot y''}{(y')^2}=y$，即 $y^2y''=0$

又 $y(0)=1$，$y\uparrow$，$\therefore\ y^2\ne 0$，$y''=0\ \Rightarrow\ y'=C_1$，

$\Rightarrow\ y=C_1x+C_2$

又 $\because\ y(0)=1$，$y'(0)=1$（由 $(*)$），$\therefore\ C_1=C_2=1$

综上，所求曲线为 $y=x+1$.