2007—2008学年第一学期《线性代数》（课内）考试卷（A卷）

授课班号________ 年级专业________ 学号________ 姓名________

题号	一	二	三	四	五	六	总分	审核
题分								
得分								

得分	评阅人

一、填空（共24分，每空格 3 分）

1. 设$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&2&1\\4&3&6\end{vmatrix}$，则代数余子式$A_{31}=$________.

2. 设$A=\begin{bmatrix}-4&3\\2&-1\end{bmatrix}$，其伴随矩阵为$A^*$，则$(A^*)^{-1}=$________。

3. 设A为三阶方阵，$|A|=\dfrac{1}{16}$，则$|2A^{-1}-(2A)^{-1}|=$________。

4. 设向量组$\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(1,2,3)^T,\alpha_3=(1,3,t)^T$，则$t=$____时$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关。

5. 设$A\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}z\\x\\y\end{bmatrix}$，则矩阵$A=$________

6. 已知$\alpha=(1,1,1,1)^T,\beta=(2,3,4,5)^T$是$Ax=b$的解，$r(A)=3$，则$Ax=b$的通解$x=$________

________。

7. 设三阶矩阵A的特征值为−1，1，2，则$|A^2+3A-2I|=$________。

8. 设$B=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，已知$A$相似于$B$，则$r(A-2I)+r(A)=$________。

$r(A)=r(B)=3$ $A-2E$ 3

得分	评阅人

二．计算（共30分，每小题6分）

1. $\begin{vmatrix}1&2&2&2\\2&2&2&2\\2&2&3&2\\2&2&2&4\end{vmatrix}$

1 1 1 2

2. $\begin{vmatrix}1&-1&1&3\\1&-1&5&-1\\1&3&1&-1\\5&-1&1&-1\end{vmatrix}$

解：1. $D = 4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{r_1-2r_2}{=} 4\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4\times(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4.$

3．设三阶方阵 A, B 满足关系式 $A^{-1}BA = 6A + BA$，且 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$，求 B。

解：

4．已知 $X = AX + B$，其中 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$，求矩阵 X。

解：$X - AX = B$

$(E-A)X = B$

$X = (E-A)^{-1}B.$

$(E-A \quad B) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \therefore X = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

5．已知 $f = x_1^{\ 2} + 2x_2^{\ 2} + (1-t)x_3^{\ 2} + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$ 为正定二次型，求 t 的取值范围。

解：(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 2 & 0 \\ 1 & 0 & (1-t) \end{bmatrix}$

$|A_1| = 1 > 0 \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 2 \end{vmatrix} = 2 - t^2 > 0 \Rightarrow t^2 - 2 < 0$

$-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}.$

$\therefore \cancel{-\sqrt{2} < t < 0}$

$-1 < t < 0$

$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 2 & 0 \\ 1 & 0 & (1-t) \end{vmatrix} = 1\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} t & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (1-t)\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 2 \end{vmatrix}$

$= -2 + (1-t)(2-t^2) = t^3 - t^2 - 2t$

$= t(t+1)(t-2) > 0 \Rightarrow t$