2015-2016 学年第二学期《高等数学 AⅡ》试卷

一、填空题（每小题 3 分，共 24 分）

1. 设 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=5$，$|\vec{a}-\vec{b}|=6$，则 $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=$ $\arccos\frac{7}{25}$。

2. 曲线 $\begin{cases} z=2-x^2-y^2 \\ z=(x-1)^2+(y-1)^2 \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影曲线的方程为 $\begin{cases} x^2+y^2-x-y=0 \\ z=0 \end{cases}$。

3. 曲线 $\begin{cases} x-2y+3z-6=0 \\ x^3+2y^2-4z+14=0 \end{cases}$ 在点 $(-2,-1,2)$ 处的法平面方程为 $x+2y+z+2=0$。

4. 改变积分次序 $\int_{-2}^{0}dy\int_{-y-2}^{0}f(x,y)\,dx+\int_{0}^{4}dy\int_{-\sqrt{4-y}}^{0}f(x,y)\,dx=$ $\int_{-2}^{0}dx\int_{-x-2}^{4-x^2}f(x,y)dy$。

5. 设 $x+z=yf(x^2-z^2)$，其中 $f(u)$ 可导，则 $z\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$ x。

6. 设 Σ：$x^2+y^2+z^2=a^2$，则 $\oiint\limits_{\Sigma} z^2dS=$ $\frac{4}{3}\pi a^4$。

7. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{2n-1}=5$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的和是 8。

8. 若方程 $y''+py'+qy=0$（p,q 均为实常数）有特解 $y_1=10$，$y_2=e^{-2x}$，
则 p 等于 2，q 等于 0。

二、计算题（每小题 8 分，共 32 分）

1. 在曲面 $2z=x^2+y^2$ 上求一点，使曲面在该点处的法线垂直于平面 $x-y+z=1$。

$z=\frac{x^2+y^2}{2}$ $\Rightarrow$ 法线方向向量为 $(z_x,z_y,-1)=(x,y,-1)$

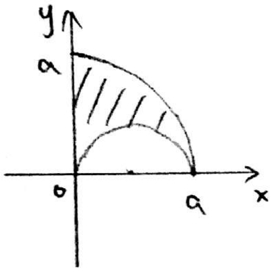
由题：$(x,y,-1)\parallel(1,-1,1)$ $\therefore$ $x=-1$，$y=1$

所求点为 $(-1,1,1)$.

2. 设 $z = yf(x+y, x-y)$，f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$。

14级

3. 计算二重积分 $I = \iint\limits_{D} (1-\sqrt{x^2+y^2})\,dxdy$，其中 D 是由 $x^2+y^2=a^2$ 和 $x^2+y^2-ax=0$（$a>0$）及 $x=0$ 所围在第一象限的区域。



$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{a\cos\theta}^{a} (1-r)\cdot r\,dr$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a^2}{2}\sin^2\theta - \frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{3}\cos^3\theta \right) d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\cdot\frac{1!!}{2!!}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{a^3}{3}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{a^3}{3}\cdot\frac{2!!}{3!!}$$

$$= \frac{\pi}{8}a^2 - \frac{\pi}{6}a^3 + \frac{2}{9}a^3$$

4. 在 $(0,\pi)$ 内把函数 $f(x) = \pi - x$ 展开成以 2π 为周期的正弦级数。

奇延拓，设 $\tilde{f}(x)$ 以 2π 为周期，且

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \pi - x, & 0<x<\pi \\ 0, & x=0 \\ -(\pi+x), & -\pi\le x<0 \end{cases}$$

则 $a_n = 0 \ (n=0,1,2,\cdots)$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \tilde{f}(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi-x)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi-x)\,d\frac{-\cos nx}{n} = \frac{-2(\pi-x)}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,dx$$

$$= \frac{2}{n} \quad (n=1,2,\cdots)$$

$$\therefore\ f(x) = \tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\sin nx,\quad 0<x<\pi.$$

三、**综合题**（每小题 11 分，共 44 分）

1. 在曲面$(x^2y+y^2z+z^2x)^2+(x-y+z)=0$上的点$(0,0,0)$处的切平面$\pi$内求一点$P$，使$P$到点$A(2,1,2)$的距离的平方最小。

设$F(x,y,z)=(x^2y+y^2z+z^2x)^2+(x-y+z)$

$F(x,0,0)=x \Rightarrow F_x(x,0,0)=1 \Rightarrow F_x(0,0,0)=1$

$F(0,y,0)=-y \Rightarrow F_y(0,y,0)=-1 \Rightarrow F_y(0,0,0)=-1$

$F(0,0,z)=z \Rightarrow F_z(0,0,z)=1 \Rightarrow F_z(0,0,0)=1$

$\therefore$ 切平面法向量 $\vec{n}=\nabla F|_{(0,0,0)}=(1,-1,1)$，$\pi: x-y+z=0$

令$L(x,y,z,\lambda)=(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2+\lambda(x-y+z)$

由$\begin{cases} L_x=2(x-2)+\lambda=0 \\ L_y=2(y-1)-\lambda=0 \\ L_z=2(z-2)+\lambda=0 \\ L_\lambda=x-y+z=0 \end{cases}$ 解得唯一驻点$(1,2,1)$

$\therefore P(1,2,1)$ （注：设$P(2+t,1-t,2+t)$，$P\in\pi$，P为A到π垂线垂足也可推出同样结果，本题有多种解法）

2. 计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx+(z+1)dxdy$，其中$\Sigma$是曲面$z=1-x^2-y^2$在$z\geq 0$部分的下侧。

13级

3. 试求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ 在 $(-1,1)$ 内的和函数。

$a_n = \frac{1}{n(n-1)}$，$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$，$\therefore R=1$

设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$，$-1<x<1$

则 $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，$S''(x) = \sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$，$-1<x<1$

$\therefore S'(x) = S'(0) + \int_0^x S''(t)\,dt = 0 + \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x)$，$-1<x<1$

$S(x) = S(0) + \int_0^x S'(t)\,dt = 0 + \int_0^x -\ln(1-t)\,dt = \int_0^x \ln(1-t)\,d(1-t)$

$= (1-t)\ln(1-t)\Big|_0^x + \int_0^x dt = (1-x)\ln(1-x) + x$，$-1<x<1$.

或 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)x^{n+1} = x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$

由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$，$-1\le x<1$，可得：

$S(x) = x\cdot[-\ln(1-x)] - [-\ln(1-x) - x] = (1-x)\ln(1-x) + x$，$-1<x<1$.

4. 已知 $\varphi(x)$ 有二阶连续导数，且 $\varphi(0)=\varphi'(0)=\frac{1}{2}$，试确定 $\varphi(x)$，. 使曲线积分

$\int_L [\varphi(x)-e^x]\,y\,dx - \varphi'(x)\,dy$ 与路径无关。

由题：$\varphi(x) - e^x = -\varphi''(x)$

$\therefore$ 只需求解 $\begin{cases}\varphi''(x) + \varphi(x) = e^x & ① \\ \varphi(0) = \varphi'(0) = \frac{1}{2} & ②\end{cases}$

由①：$r^2+1=0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm i$

设①有特解 $\varphi_0(x) = ae^x$，则 $\varphi_0'(x) = \varphi_0''(x) = ae^x$

代入①：$a = \frac{1}{2}$.

$\therefore \varphi(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}e^x$

$\varphi'(x) = -C_1\sin x + C_2\cos x + \frac{1}{2}e^x$

又由②，$\begin{cases}C_1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ C_2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}C_1 = 0 \\ C_2 = 0\end{cases}$

综上：$\varphi(x) = \frac{1}{2}e^x$.