2014-2015 学年第二学期《高等数学 AⅡ》试卷

一、填空题（每小题 3 分，共 24 分）

1. 设 $\vec{a}=(2,1,-3)$，$\vec{b}=(-3,2,1)$，则 $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=$ $\frac{2\pi}{3}$。

2. 设 $f(x,y,z)=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$，则 $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=$ -1。

3. 设 $f(u)$ 可导，$x^2+y^2+z^2=yf\left(\frac{z}{y}\right)$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ $\frac{2x}{f'-2z}$。

4. 设 D：$0\le y\le\sqrt{a^2-x^2}$，$0\le x\le a$，由二重积分的几何意义知
$$\iint_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy=\frac{1}{6}\pi a^3。$$

5. L 为圆周 $x^2+y^2=1$，则 $\oint_L x^2ds=$ π。

6. 周期为 2π 的周期函数 $f(x)$，它在一个周期上的表达式为 $f(x)=x\,(-\pi\le x<\pi)$，设它的傅立叶级数的和函数为 $S(x)$，则 $S\left(\frac{3\pi}{2}\right)=$ $-\frac{\pi}{2}$。

7. 若级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$，则其和是 -1。

8. 已知 t，$t\ln t$ 是微分方程 $x''-\frac{1}{t}x'+\frac{1}{t^2}x=0$ 的解，则其通解为 $x(t)=$ $C_1t+C_2t\ln t$。

二、计算题（每小题 8 分，共 32 分）

1. 已知两条直线的方程是 l_1：$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1}$，$l_2$：$\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$，求过 l_1 且平行于 l_2 的平面方程。

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&-1\\2&1&1\end{vmatrix}=(1,-3,1)\quad 且过点(1,2,3)$$

$\therefore$ 平面方程为 $x-1-3(y-2)+z-3=0$，

即：$x-3y+z+2=0$.

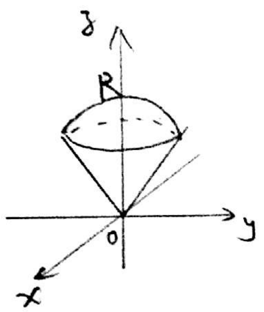
2. 设$z=yf(x+y,x-y)$，f具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial z}{\partial y}$及$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$。

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f+y(f_1'-f_2')$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_1'+f_2'+y[f_{11}''+f_{12}''-(f_{21}''+f_{22}'')]$$

$$=f_1'+f_2'+y(f_{11}''-f_{22}'')$$

3. 设Ω是由$x^2+y^2+z^2\le R^2$，$z\ge\sqrt{x^2+y^2}$所确定的闭区域，计算$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dv$。



$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^R r\cdot r^2\sin\varphi\, dr$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\, d\varphi\cdot\int_0^R r^3 dr$$

$$=2\pi\cdot\left(1-\frac{\sqrt2}{2}\right)\cdot\frac{R^4}{4}$$

$$=\frac{2-\sqrt2}{4}\pi R^4$$

4. 求微分方程$y''+2yy'=y'^2$满足条件$y(1)=0$，$y'(1)=2$的特解。

令$y'=p$，则$y''=p\dfrac{dp}{dy}$，原方程化为：$p\dfrac{dp}{dy}+2yp=p^2$

即：$\dfrac{dp}{dy}-p=-2y$，用$\mu=e^{-y}$乘两边，可得：$(e^{-y}\cdot p)'=-2ye^{-y}$

从而$e^{-y}p=\int -2ye^{-y}dy=\int 2y\,de^{-y}=2ye^{-y}-\int 2e^{-y}dy$

$=(2y+2)e^{-y}+C_1 \Rightarrow y'=p=2y+2+C_1e^{y}$

又$\because y(1)=0$，$y'(1)=2$ $\therefore C_1=0$. $\therefore \dfrac{dy}{dx}=2y+2$

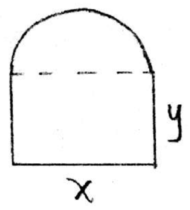
$\dfrac{dy}{y+1}=2dx \Rightarrow \ln|y+1|=2x+\ln|C_2| \Rightarrow y+1=C_2e^{2x}$

又$\because y(1)=0$ $\therefore C_2=e^{-2}$. 从而 $y=e^{2x-2}-1$.

三、综合题（每小题 11 分，共 44 分）

1. 用拉格朗日乘数法求解下面的问题，隧道截面的上部为半圆，下部为矩形，若隧道截面的周界长 L 固定，问矩形的边长各为多少时，隧道截面的面积最大？

如图设矩形边长 x, y.



则截面积 $S = xy + \frac{\pi}{8}x^2$，周长 $x + 2y + \frac{\pi}{2}x = L$

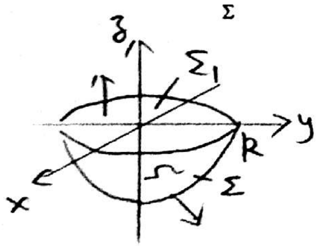
令 $L(x,y,\lambda) = xy + \frac{\pi}{8}x^2 + \lambda\left(x + 2y + \frac{\pi}{2}x - L\right)$

由
$$\begin{cases} L_x = y + \frac{\pi}{4}x + \lambda\left(1+\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ L_y = x + 2\lambda = 0 \\ L_\lambda = x + 2y + \frac{\pi}{2}x - L = 0 \end{cases}$$

解得唯一驻点 $\left(\frac{2L}{\pi+4}, \frac{L}{\pi+4}\right)$

∴ 矩形底边长为 $\frac{2L}{\pi+4}$，高为 $\frac{L}{\pi+4}$ 时，截面积最大.

2. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} y^2z^2dydz + zdxdy$，其中 Σ 为下半球面 $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的下侧，$R > 0$。



添 Σ_1: $z = 0$ $(x^2+y^2 \le R^2)$，上侧.

由Gauss公式.

$$原式 = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz - \iint\limits_{\Sigma_1} y^2z^2dydz + zdxdy$$

$$= \frac{2}{3}\pi R^3 - 0$$

$$= \frac{2}{3}\pi R^3.$$

3. 试求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$的和函数，并计算级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}$的和。

1) $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}}{\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}}\right|=x^2$，$\rho<1$ 即 $-1<x<1$ 时级数收敛；

$\rho>1$ 即 $|x|>1$ 时级数发散 $\therefore R=1$

又$\because x=-1$ 时级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$，$x=1$ 时级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$，由Leibniz判别法，

均收敛. $\therefore$ 收敛域为 $[-1,1]$.

令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$，$-1\le x\le 1$.

则有 $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2}$，$-1<x<1$

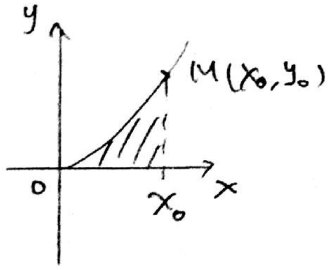
$\therefore S(x)=S(0)+\int_0^x S'(t)dt=0+\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\arctan x$，$-1<x<1$

又$\because S(x)\in C[-1,1]$ $\therefore S(x)=\arctan x$，$-1\le x\le 1$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n-1}\cdot\frac{-\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}S\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. 已知上半平面内一曲线$y=y(x)\,(x\ge 0)$过原点，且曲线上任一点$M(x_0,y_0)$处切线斜率数值上等于该点横坐标与纵坐标之和的2倍减去由此曲线与x轴，直线$x=x_0$所围成的面积，求此曲线方程。



由题：$y'(x_0)=(x_0+y_0)\cdot 2-\int_0^{x_0}y(t)\,dt$

由(x_0,y_0)任意性，可得

$y'=2(x+y)-\int_0^x y(t)\,dt$，求导可得：

$y''=2(1+y')-y$，即 $y''-2y'+y=2$ ①

由①：$r^2-2r+1=0\Rightarrow r_{1,2}=1$ 且有特解 $y_0=2$.

$\therefore y=C_1e^x+C_2xe^x+2$，$y'=(C_1+C_2+C_2x)e^x$

又 $y(0)=0$，$y'(0)=0$，$\therefore\begin{cases}C_1+2=0\\C_1+C_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=-2\\C_2=2\end{cases}$

综上：曲线为 $y=(2x-2)e^x+2$.