2008-2009 学年第二学期《高等数学》期末试卷

一、填空题（每小题 3 分，共 36 分）

1. 已知 $\overrightarrow{OA}=\vec{i}+3\vec{k}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{j}+3\vec{k}$，则 ΔAOB 的面积为 $\frac{\sqrt{19}}{2}$。

2. 点 $P(1,2,1)$ 到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离为 1。

3. xOy 坐标面上曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ 绕 y 轴一周的旋转面名称是 旋转单叶双曲面。

4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=$ $-\frac{1}{4}$。

5. 函数 $z=\ln(1+x^2+y^2)$ 在点 $(1,2)$ 的全微分为 $\frac{1}{3}dx+\frac{2}{3}dy$。

6. 曲线 $x=t^2-1, y=t+1, z=t^3$ 在点 $(0,2,1)$ 处的切线方程为 $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{3}$。

7. 交换积分次序 $\int_0^1 dx\int_{2x}^{x^2+1} f(x,y)\,dy=$ $\int_0^1 dy\int_0^{\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx+\int_1^2 dy\int_{\sqrt{y-1}}^{\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx$。

8. 设 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=1$ 在第一卦限的部分，则 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\,dS=$ $\frac{\pi}{2}$。

9. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n+1}}{n^k}$ 收敛的充要条件是 k 满足不等式 $k>\frac{3}{2}$。

10. 设 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $(-\pi,\pi]$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0\\ 1+x^2, & 0<x\le\pi\end{cases}$，$S(x)$ 为 $f(x)$ 的傅立叶级数的和函数，则 $S(2009\pi)=$ $\frac{\pi^2}{2}$。

11. 设微分方程为 $y'=xy^2-x$，则其通解为 $\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|=x^2+C$ 或 $y=\frac{1+Ce^{x^2}}{1-Ce^{x^2}}$。

12. 设 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$（C_1,C_2 为任意常数）为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解，则该方程是 $y''-y'-2y=0$。

二、计算题（每小题 6 分，共 24 分）

1. 一平面通过原点和点 $M(0,1,-1)$，且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，求此平面的方程。

06级

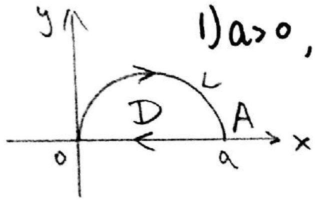
2. 设 g 具二阶导数，f 具二阶偏导，$z = g(x+y) + f(xy, \frac{x}{y})$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

$$\frac{\partial z}{\partial x} = g' + f_1' \cdot y + f_2' \cdot \frac{1}{y} = g' + y f_1' + \frac{1}{y} f_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = g'' + f_1' + y\left[f_{11}'' \cdot x + f_{12}'' \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)\right] - \frac{1}{y^2} f_2' + \frac{1}{y}\left[f_{21}'' \cdot x + f_{22}'' \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]$$

$$= g'' + f_1' - \frac{1}{y^2} f_2' + xy f_{11}'' \underbrace{- \frac{x}{y} f_{12}'' + \frac{x}{y} f_{21}''}_{\text{无二阶偏导连续条件，不合并.}} - \frac{x}{y^3} f_{22}''$$

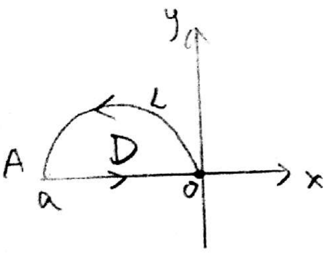
3. $\int_L (e^x \sin y - 8y)\,dx + (e^x \cos y - 8)\,dy$，$L$ 为上半圆周 $x^2 + y^2 = ax$ 从 $(0,0)$ 到 $(a,0)$ 的一段弧。



1) $a>0$，设 $A(a,0)$，补 $\overline{AO}$: $y=0$, $x: a \to 0$，$L \cup \overline{AO}$ 为 D 边界，顺时针.

则 原式 $= -\iint_D [e^x \cos y - (e^x \cos y - 8)]\,dxdy$

$- \int_{\overline{AO}} (e^x \sin y - 8y)\,dx + (e^x \cos y - 8)\,dy$



$= -\iint_D 8\,dxdy - \int_a^0 0\,dx$

$= -8 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 0$

$= -\pi a^2$

2) $a<0$，$L \cup \overline{AO}$ 逆时针. 则原式 $= \iint_D 8\,dxdy - \int_a^0 0\,dx = \pi a^2$.

4. 计算 $\iiint_\Omega e^{x+y+z}\,dv$，$\Omega = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}$

原式 $= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 e^x \cdot e^y \cdot e^z\,dz$

$= \int_0^1 e^x\,dx \cdot \int_0^1 e^y\,dy \cdot \int_0^1 e^z\,dz$

$= (e-1)^3$.

三、（10 分）欲围一个面积为 $60\,m^2$ 的矩形场地，正面所用材料每米造价 10 元，其余三面每米造价 5 元，求场地的长、宽各为多少米时，所用材料费最少？

设正面长为 x m，侧面宽为 y m.

则材料费为 $10x+5\cdot(x+2y)=15x+10y$ 元.

令 $L(x,y,\lambda)=15x+10y+\lambda(xy-60)$

由 $\begin{cases} L_x=15+\lambda y=0 \\ L_y=10+\lambda x=0 \\ L_\lambda=xy-60=0 \end{cases}$ $(x,y>0)$

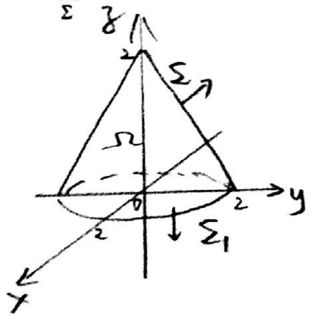
解得唯一驻点 $(2\sqrt{10},3\sqrt{10})$.

即为最小值点.

$\therefore$ 长 $2\sqrt{10}$ m，宽 $3\sqrt{10}$ m 时，所用材料费最少.

四、（10 分）设 Σ 是曲面 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\le z\le 2)$ 的上侧，计算曲面积分

$I=\iint\limits_{\Sigma}(y^2+xz)\,dydz+(z^2+y)\,dzdx+(x^2-z)\,dxdy$。



添 Σ_1: $z=0$ $(x^2+y^2\le 4)$，下侧.

则 $I=\iiint\limits_{\Omega}(z+1-1)\,dxdydz-\iint\limits_{\Sigma_1}(y^2+xz)dydz+(z^2+y)dzdx+(x^2-z)dxdy$

$=\iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz-\iint\limits_{\Sigma_1}x^2dxdy$

$=\int_0^2 dz\iint\limits_{D(z)} z\,dxdy+\iint\limits_{D_{xy}}x^2dxdy$

$=\int_0^2 z\cdot\pi(2-z)^2dz+\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy$

$=\pi\int_0^2(z^3-4z^2+4z)dz+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3dr$

$=\frac{4\pi}{3}+4\pi$

$=\frac{16\pi}{3}$.

五、（10 分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的收敛区间与和函数，并计算 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n3^{2n}}$ 。

06级：收敛区间为 $(-1,1)$，$S(x)=-\ln(1-x)$，$-1\le x<1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n3^{2n}}=S\left(\frac{2}{9}\right)=-\ln\frac{7}{9}$$

六、（10 分）已知曲线积分 $\int_L [4f(x)y]\,dx+[f'(x)-\frac{e^{2x}}{2}]\,dy$ 与路径无关，其中 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(0)=1$，$f'(0)=2$，求 $f(x)$。

由题：$4f(x)=f''(x)-e^{2x}$

从而 $\begin{cases} f''(x)-4f(x)=e^{2x} & ① \\ f(0)=1,\ f'(0)=2 & ② \end{cases}$

由①：$r^2-4=0 \Rightarrow r_{1,2}=\pm 2$

设①有特解 $f_0(x)=axe^{2x}$，

则，$f_0'(x)=a(1+2x)e^{2x}$，

$f_0''(x)=a(4+4x)e^{2x}$

代入①，$a=\frac{1}{4}$.

$\therefore f(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+\frac{x}{4}e^{2x}$

$f'(x)=2C_1e^{2x}-2C_2e^{-2x}+\frac{1}{4}(1+2x)e^{2x}$

又由②：$\begin{cases} C_1+C_2=1 \\ 2C_1-2C_2+\frac{1}{4}=2 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} C_1=\frac{15}{16} \\ C_2=\frac{1}{16} \end{cases}$

综上：

$f(x)=\frac{15}{16}e^{2x}+\frac{1}{16}e^{-2x}+\frac{x}{4}e^{2x}$.