2011—2012 学年第二学期《线性代数》课内考试卷（A 卷）

授课班号______ 年级专业________ 学号________ 姓名________

题号	一	二	三	四	五	六	总分	审核
题分	32	24	12	12	12	8		
得分								

得分	评阅人

一、填空（共 32 分，每空格 4 分）

$\left|(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}-2&0&1\\0&3&0\\1&0&1\end{bmatrix}\right| = |A|\cdot\begin{vmatrix}-2&0&1\\0&3&0\\1&0&1\end{vmatrix}$

1. 已知 $A=[\vec{\alpha}_1,\ \vec{\alpha}_2,\ \vec{\alpha}_3]$，$|A|=2$，则 $|\vec{\alpha}_3-2\vec{\alpha}_1,\ 3\vec{\alpha}_2,\ \vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_3|=$ $\underline{-18}$.

2. 设三阶方阵 A 的伴随矩阵为 A^*，且 $|A|=\dfrac{1}{2}$，则 $\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|=$ $\underline{-\dfrac{16}{27}}$.

3. 设 A,B,C 为方阵，且 $B=E+AB, C=A+CA$，$|E-A|\neq 0$ 则 $B-C=$ $\underline{E}$.

4. $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{2011}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}=$ $\underline{\begin{bmatrix}10&5&6\\4&2&3\\16&8&9\end{bmatrix}}$。

$r_1\leftrightarrow r_2$　　　　c_1+c_3

5. 设 $\vec{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\vec{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\2\\\vdots\\0\end{bmatrix},\cdots,\vec{\alpha}_n=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\n\end{bmatrix}$ 是 R^n 的一组基，$\vec{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\2\\\vdots\\n\end{bmatrix}$ 在这基下的坐标为 $\underline{\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}}$.

6. 已知 $\vec{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\2\end{bmatrix}$ $\vec{\beta}=\begin{bmatrix}2\\1\\-1\\4\end{bmatrix}$ $\vec{\gamma}=\begin{bmatrix}4\\5\\-3\\11\end{bmatrix}$ 是四元线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的解，且 $R(A)=2$,，则线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的通解 $\vec{x}=$ $\underline{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\2\end{bmatrix}+C_1\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\2\end{bmatrix}+C_2\begin{bmatrix}3\\6\\-3\\9\end{bmatrix}}$。

基础解系有一个写 $\begin{bmatrix}-2\\4\\-2\\7\end{bmatrix}$ 也可以

7. 已知 $A^2-5A-6E=O$，则 A 的特征值只能为 $\underline{-1 \text{ 或 } 6}$.

8. 已知 $f=x_1^2+2tx_1x_2+4x_2^2+2x_3^2+2x_2x_3$ 为正定二次型，则 t 满足 $\underline{-\dfrac{\sqrt{14}}{2}<t<\dfrac{\sqrt{14}}{2}}$.

得分	评阅人

二、计算（共 24 分，每小题 6 分）

1. $D=\begin{vmatrix}0&1&2&0\\8&0&0&3\\7&0&0&4\\0&6&5&0\end{vmatrix}$

2. $A=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&4\\0&0&4&-3\end{bmatrix}$，求 A^4.

原式 $=1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}8&0&3\\7&0&4\\0&5&0\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}8&0&3\\7&0&4\\0&6&0\end{vmatrix}$

$=-5\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}8&3\\7&4\end{vmatrix}+2\times6\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}8&3\\7&4\end{vmatrix}$

$=-7\begin{vmatrix}8&3\\7&4\end{vmatrix}=-7\times11=-77$

方法3′ 计算3′

$A^2=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&25&0\\0&0&0&25\end{bmatrix}$ （3′）

$A^4=(A^2)^2=\begin{bmatrix}16&0&0&0\\0&16&0&0\\0&0&625&0\\0&0&0&625\end{bmatrix}$ （3′）

3. 已知 $A=\begin{bmatrix}3&1&-1\\0&0&2\\1&-1&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\\3&1\end{bmatrix}$, $AX+B=2X$，求矩阵 X.

$\begin{bmatrix}-1&-\frac{1}{2}&0\\-1&-\frac{1}{2}&1\\-1&-1&1\end{bmatrix}$

也可以 $X=(2E-A)^{-1}B=\begin{bmatrix}-2&1\\-1&0\\3&1\end{bmatrix}$

$(A-2E)X=-B$ （1′）

$(A-2E\,\vdots\,-B)=\left[\begin{array}{ccc:cc}1&1&-1&-2&-1\\0&-2&2&1&0\\1&-1&0&-3&-1\end{array}\right]\to\begin{bmatrix}1&1&-1&-2&-1\\0&-2&2&1&0\\0&-2&1&-1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-1&-2&-1\\0&-2&2&1&0\\0&0&-1&-2&0\end{bmatrix}$

$\to\begin{bmatrix}1&1&0&0&-1\\0&-2&0&-3&0\\0&0&1&2&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&0&-1\\0&1&0&\frac{3}{2}&0\\0&0&1&2&0\end{bmatrix}\to\left[\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&-\frac{3}{2}&-1\\0&1&0&\frac{3}{2}&0\\0&0&1&2&0\end{array}\right]$

$\therefore X=\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}&-1\\\frac{3}{2}&0\\2&0\end{bmatrix}$ （4′）

4. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}-2&0&0\\2&a&2\\3&1&1\end{bmatrix}$ 与矩阵 $B=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{bmatrix}$ 相似，求 a,b.

$\because A\sim B$ $\therefore tr(A)=tr(B)$, $|A|=|B|$ （写出一个给3′）

$\Rightarrow\begin{cases}-2+a+1=-1+2+b\\ ^{**}\begin{vmatrix}-2&0&0\\2&a&2\\3&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{vmatrix}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=b+2\\ ^{**}\text{重复}\end{cases}$

考虑A, B特征值相同 为 $-1, 2, b$.

或 只用 $|\lambda E-A|$ 即可.

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+2&0&0\\-2&\lambda-a&-2\\-3&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}\lambda-a&-2\\-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+2)[\lambda^2-(a+1)\lambda+a-2]$

容易 $b=-2$. $\therefore a=0,\ b=-2$. （3′）

$\lambda^2-(a+1)\lambda+a-2=0$ 根为 -1 和 2.

得分	评阅人

三、（本题 12 分）

求下列向量组的秩和它的一个极大线性无关组，并用该极大线性无关组表示其余向量.

$$\vec{\alpha}_1=\begin{bmatrix}2\\1\\4\\3\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\-6\\6\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-1\\-2\\2\\-9\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_4=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\\7\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_5=\begin{bmatrix}2\\4\\4\\9\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4\\2&-1&-1&1&2\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4\\0&-3&3&-1&-6\\0&-10&10&-6&-12\\0&3&-3&4&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4\\0&-3&3&-1&-6\\0&-1&1&6&-4\\0&0&0&3&-9\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4\\0&0&0&-19&57\\0&-1&1&6&-21\\0&0&0&1&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&-6&21\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&0&7\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\therefore r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$. (2') $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是一个极大无关组. (2') $\alpha_3=-\alpha_1-\alpha_2$ (6')

$\alpha_5=4\alpha_1+3\alpha_2-3\alpha_4$ (2')

得分	评阅人

四、（本题 12 分）讨论线性方程组

$$\begin{cases}x_1-\lambda x_2-2x_3=-1\\ x_1-x_2+\lambda x_3=2\\ 5x_1-5x_2-4x_3=1\end{cases}$$

当 λ 取何值时，线性方程组有惟一解、无解、有无穷多解，在线性方程组有无穷多解时，求出其通解.

$$\begin{vmatrix}1&-\lambda&-2\\1&-1&\lambda\\5&-5&-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1-\lambda&-2\\1&0&\lambda\\5&0&-4\end{vmatrix}=(1-\lambda)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&\lambda\\5&-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)(-4-5\lambda)$$

$\therefore$ 1) $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq-\frac{4}{5}$ 时，有惟一解 4'

2) $\lambda=1$ 时.
$$\begin{bmatrix}1&-1&-2&-1\\1&-1&1&2\\5&-5&-4&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-2&-1\\0&0&3&3\\0&0&6&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-2&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\begin{cases}x_1=x_2+1\\x_3=1\end{cases}$ $\therefore$ 有无穷多解. $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $k\in\mathbb{R}$. (4')

3) $\lambda=-\frac{4}{5}$ 时.
$$\begin{bmatrix}1&\frac{4}{5}&-2&-1\\1&-1&-\frac{4}{5}&2\\5&-5&-4&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&\frac{4}{5}&-2&-1\\0&-\frac{9}{5}&\frac{6}{5}&3\\0&-9&6&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&\frac{4}{5}&-2&-1\\0&-9&6&15\\0&-9&6&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&\frac{4}{5}&-2&-1\\0&-9&6&15\\0&0&0&-9\end{bmatrix}$$

"$0=-9$" 矛盾.

$\therefore$ 无解 (4')

得分	评阅人

五、（本题 12 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2^2+4x_3^2-8x_2x_3$，（1）求二次型矩阵 A 及其特征值与特征向量，（2）求一正交变换 $\bar{x}=Q\bar{y}$，使二次型化为标准形。

(1) $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 4 & -4\\ 2 & -4 & 4\end{bmatrix}$ （1′）

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda-4 & 4\\ -2 & 4 & \lambda-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda-4 & 4\\ 0 & \lambda & \lambda\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 4 & -2\\ 2 & \lambda-8 & 4\\ 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\lambda-1 & 4\\ 2 & \lambda-8\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-9)$

$\therefore \lambda_1=\lambda_2=0$．$\lambda_3=9$． （2′）

$\lambda_1=\lambda_2=0$ 时 $\begin{bmatrix}-1 & 2 & -2\\ 2 & -4 & 4\\ -2 & 4 & -4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$x_1=2x_2-2x_3$，$p_1=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$，$p_2=\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}$

$\therefore k_1p_1+k_2p_2$（$k_1.k_2$ 不同时为 0）为对应于 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 的特征向量．（2′）

$\lambda_3=9$ 时 $\begin{bmatrix}8 & 2 & -2\\ 2 & 5 & 4\\ -2 & 4 & 5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & \frac{5}{2} & 2\\ 0 & -18 & -18\\ 0 & 9 & 9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$\therefore \begin{cases}x_1=\frac{1}{2}x_3\\ x_2=x_3\end{cases}$ $p_3=\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}$

k_3p_3（$k_3\neq0$）为对应于 $\lambda_3=9$ 的特征向量 （2′）

(2) Schimidt 正交化得：

$\beta_1=p_1=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$，$\beta_2=p_2-\frac{(p_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\cdot\beta_1=\begin{bmatrix}-\frac{2}{5}\\ \frac{4}{5}\\ 1\end{bmatrix}$

$\beta_3=p_3=\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}$．

单位化：$e_i=\frac{\beta_i}{\|\beta_i\|}$．$\therefore Q=(e_1,e_2,e_3)$

$=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt5} & \frac{-2}{3\sqrt5} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{4}{3\sqrt5} & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{\sqrt5}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$ （4′）

令 $X=QY$．$f=9y_3^2$ （答案不唯一） （1′）

写对基础解系算对

得分	评阅人

六、证明（本题 8 分）

设 n 维向量组 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots\vec{\alpha}_n(n>1)$ 中前 $n-1$ 个向量线性无关，而后 $n-1$ 个向量线性相关，试问：（1）$\vec{\alpha}_n$ 能否由向量组 $\vec{\alpha}_1,\cdots\vec{\alpha}_{n-1}$ 线性表示；（2）$\vec{\alpha}_1$ 能否由向量组 $\vec{\alpha}_2,\cdots\vec{\alpha}_n$ 线性表示；请证明你的结论．

(1) $\because \alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_{n-1}$ 线性无关

$\therefore \alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}$ 也线性无关

又 $\because \alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n$ 线性相关

$\therefore \alpha_n$ 可由 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性表示．

记作 $\alpha_n=k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+\cdots+k_{n-1}\alpha_{n-1}$ (*)

从而 $\alpha_n=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-1}\alpha_{n-1}$，$k_1=0$．

即 α_n 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性表示． （4′）

(2) 由(1) 若 α_1 可由 $\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示．

则 α_1 必可由 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性表示．

从而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性相关，矛盾．

$\therefore \alpha_1$ 不能由 $\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示 （4′）