河海大学常州校区 2004-2005 学年数学竞赛

一、填空题（16×4 分）

1. 当 $x\to 0$ 时，$3x-4\sin x+\sin x\cos x$ 与 x^n 为同阶无穷小，则 $n=$______________。

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a\ln x}{x-1}, & x>0,x\neq 1\\ b, & x=1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处可导，则 $f'(1)=$________________。

3. 设 $a>0$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a-x}{a+x}\right)^{\frac{2}{x}}=\int_{\frac{1}{a}}^{+\infty}xe^{-4x}dx$，则 $a=$________________。

4. 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$z=f\left(2x-y,\dfrac{x}{y}\right)$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$

__________________________________。

5. 设三角形的三条边的边长分别为 a,b,c（其面积记为 S），则该三角形内一点到三边距离之乘积的最大值为____________________。

6. 空间曲线 $\begin{cases}z=x^2+4y^2\\ y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 在点 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{7}{4}\right)$ 处的切线与 x 轴正向的夹角为________________。

7. 已知平面过直线 $\begin{cases}x+y=0\\ x-y+z=2\end{cases}$ 且平行另一直线 $x=y=z$，则该平面方程为_____________________。

8. 将函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+2x}$ 展开为 $x+1$ 的幂级数，则其展开式为__________________________________。

9. 级数 $x-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{1}{7}x^7+\cdots$ 的和函数为____。

10. 交换积分次序 $\int_0^1 dx\int_{x-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy=$____。

11. 设 $f(x)$ 具有连续导数，$f(0)=0$，$\int_C xy^2dx+yf(x)dy$ 与路径无关，则 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2dx+yf(x)dy=$____。

12. 设 Σ 为 $x+2y+3z=1$ 在第一卦限的部分，则 $\iint\limits_{\Sigma}\left(\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{2}\right)dS=$___________________。

13. 设 Σ 为半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧，则 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{xdydz+zdxdy}{x^2+y^2+z^2}=$________________。

14. 设有向曲线C为$x^2+y^2+z^2=a^2$与$x+z=a$的交线，从原点看去C的方向为顺时针，则

$\int_C ydx+zdy+xdz=$____________。

15. 微分方程$xy'+2y=x\ln x$满足$y(1)=-\dfrac{1}{9}$的解为____________________________。

16. 设$y=e^x(C_1\sin x+C_2\cos x)$（$C_1,C_2$为任意常数）为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解，则该方程为____________________________。

二、设$f(x)$在$[-L,L]$上可微，且$f'(0)\neq 0$，1）试证：$\forall\, 0<x<L$，$\exists\, 0<\theta<1$，使

$\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x} f(t)dt=x\left[f(\theta x)-f(-\theta x)\right]$；2）求$\lim\limits_{x\to 0^+}\theta$。（9分）

三、设$f(x)$具二阶连续导数，且$f(a)=f(b)=0$，$|f''(x)|\leq 8$，证明：$\left|f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\right|\leq (b-a)^2$。（9分）

四、一个高为h的雪堆，其侧面满足方程$z=h-\dfrac{2\left(x^2+y^2\right)}{h}$，求雪堆的体积与侧面积之比。（9 分）

五、设$f(x)$连续且恒大于零，$F(t)=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega} f\left(x^2+y^2+z^2\right)dv}{\iint\limits_{D} f\left(x^2+y^2\right)d\sigma}$，其中$\Omega=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2+z^2\le t^2\right\}$，

$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\le t^2\right\}$，证明：$F(t)$在区间$(0,+\infty)$内单调增加。（9 分）

参考答案

一、

1. 5　　提示：泰勒公式

2. $-\dfrac{a}{2}$

3. $\dfrac{4}{15}$

4. $-2f''_{11}-\left(\dfrac{2x}{y^2}+\dfrac{1}{y}\right)f''_{12}-\dfrac{1}{y^2}f'_2-\dfrac{x}{y^3}f''_{22}$

5. $\dfrac{8S^3}{27abc}$

6. $\dfrac{\pi}{3}$

7. $x-3y+2z-4=0$

8. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot 3+1}{2}(x+1)^n, -2<x<0$

9. $S(x)=\arctan x, -1\le x\le 1$

10. $\int_{-1}^{0}dy\int_{0}^{y+1}f(x,y)\,dx+\int_{0}^{1}dy\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,dx$

11. $\dfrac{1}{2}$

12. $\dfrac{\sqrt{14}}{72}$

13. $-\dfrac{4}{3}\pi a$　　提示：高斯公式

14. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi a^2$　　提示：斯托克斯公式

15. $y=\dfrac{1}{3}x\ln x-\dfrac{x}{9}$

16. $y''-2y'+2y=0$

二、提示：

令 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt+\int_0^{-x} f(t)\,dt, -L\le x\le L$，

则 $F'(x)=f(x)-f(-x)$，$F''(x)=f'(x)+f'(-x)$，

从而 $F(0)=0$，$F'(0)=0$，$F''(0)=2f'(0)\neq 0$。

1）由拉格朗日中值定理，$\forall\, 0<x<L$，$\exists\, 0<\theta<1$，使得

$$F(x)=F(x)-F(0)=xF'(\theta x)=x\left[\,f(\theta x)-f(-\theta x)\right]。$$

注意：θ 的取值与 x 有关，即 $\theta=\theta(x)$，故 2）应理解为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta=\lim\limits_{x\to 0^+}\theta(x)$。

2）由 $F''(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{F'(\theta x)-F'(0)}{\theta x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{F(x)}{x}-F'(0)}{\theta x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{F(x)-F'(0)x}{\theta x^2}$，

可得 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{F(x)-F'(0)x}{x^2}}{F''(0)}$，

而 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{F(x)-F'(0)x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{F'(x)-F'(0)}{2x}=\dfrac{1}{2}F''(0)$，

故 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta=\dfrac{1}{2}$。

三、提示：泰勒公式

四、体积 $V=\dfrac{\pi}{4}h^3$，侧面积 $S=\dfrac{13}{12}\pi h^2$，$\dfrac{V}{S}=\dfrac{3h}{13}$

五、提示：$\iiint\limits_{\Omega} f\left(x^2+y^2+z^2\right)dv=4\pi\int_0^t f\left(r^2\right)\cdot r^2dr$，

$$\iint\limits_{D} f\left(x^2+y^2\right)d\sigma=2\pi\int_0^t f\left(r^2\right)\cdot r\,dr$$