河海大学 2009~2010 学年第一学期

《高等数学》(上) 期末试卷

考试对象：2009 级

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，且（　　　）则 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加且是凹的。

(A) $f'(x)>0, f''(x)>0$；　(B) $f'(x)>0, f''(x)<0$

(C) $f'(x)<0, f''(x)>0$；　(D) $f'(x)<0, f''(x)<0$

2.如果对所有 x, $F(x)$ 具有连续的导数，那么 $\lim\limits_{h\to\infty}\frac{1}{h}\int_1^{1+h}F'(x)dx$ 等于（　　　　）。

(A) $F(0)$；　(B) $F(1)$；　(C) $F'(0)$；　(D) $F'(1)$

3. 以下反常积分（　　　　）收敛。

(A) $\int_e^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$；　(B) $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$；　(C) $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2}$；　(D) $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

4. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上连续，在开区间 $(-1,1)$ 内可导，且 $|f'(x)|\le M$，$f(0)=0$，则必有（　　　）。

(A) $|f(x)|\ge M$；　(B) $|f(x)|>M$；　(C) $|f(x)|\le M$；　(D) $|f(x)|<M$

5. 若 $\int f(x)dx=F(x)+C$，则 $\int f(ax+b)dx$ 等于（　　　），其中 a,b 为常数，$a\ne 0$.

(A) $aF(ax+b)+C$；　(B) $\frac{F(ax+b)}{a}+C$；　(C) $aF(x)+C$；　(D) $\frac{F(x)}{a}+C$

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，则

$\int_{-1}^{1}\left[f(x)-f(-x)+e^{x}\right]dx=$ ________。

2. 曲线 $y=x^5+5x^3-x-2$ 的拐点为________。

3. 曲线 $y=\cos x, 0\le x\le\dfrac{\pi}{4}$ 绕 x 轴旋转一周所得立体体积为________。

4. 若 $\lim\limits_{x\to o}\dfrac{2\sin x-\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{x^p}=c$，$c$ 是非零实数，则 $p=$________。

5. 若 $f'\left(x^3\right)=1+x$，则 $f(x)=$ ________。

三、试解下列各题（每小题 6 分，共 30 分）

1.求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left(e^t-e^t\right)dt}{1-\cos x}$

2. 求 $\int\sin^2 x\cos^3 x dx$

3.求 $f(x)=x^2-4x+\ln(x+1)$ 的极大值与极小值。

4.求定积分 $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$ 。

5．求由曲线 $y=x^3$ 与 $y=2x-x^2$ 所围成的图形面积。

四、试解下列各题（每小题 7 分，共 21 分）

1. 讨论函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2\left(e^{x}-1\right)}{e^{x}-1}, x>0;\\ 2, x=0;\\ \dfrac{1}{x}\int_{0}^{x}\cos^{2} tdt, x<0\end{cases}$ ；在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上的连续性。

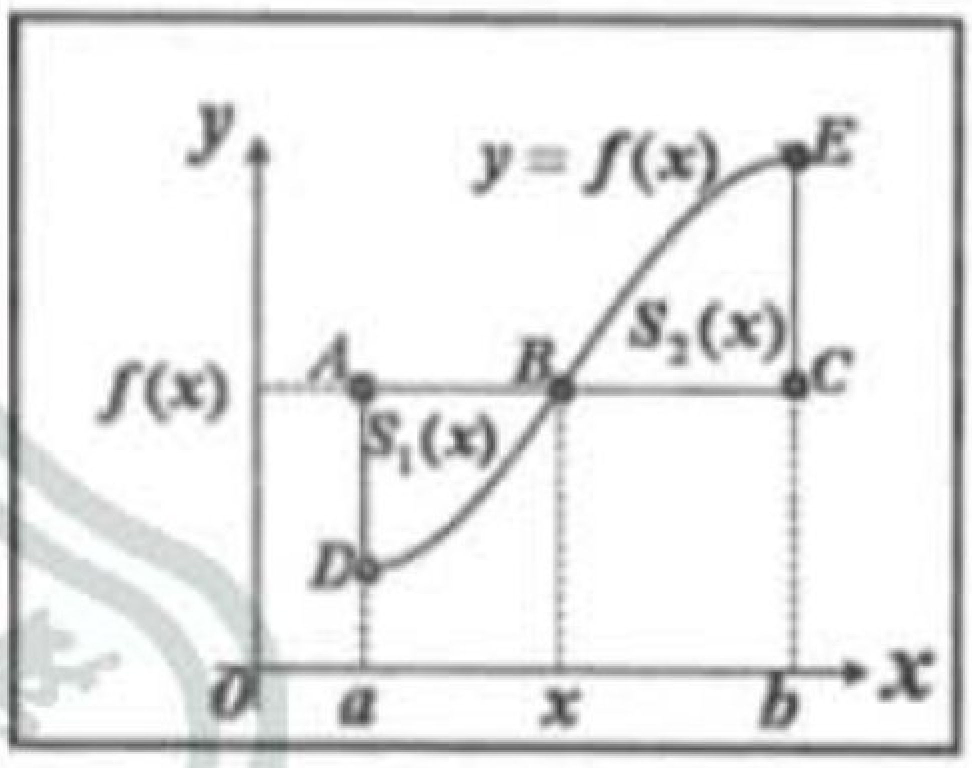
2. 已知 $f\left(x\right)$ 的一个原函数为 $\left(1+\sin x\right)\ln x$ ，求 $\int xf'\left(x\right)dx$ 。

3. 在半径为 1 的球的所有内接正圆锥体中，求体积为最大的内接正圆锥体的高与体积。

五、（6 分） 设 $0<x_1<x_2<\dfrac{\pi}{2}$ ，证明：$\dfrac{\tan x_2}{\tan x_1}>\dfrac{x_2}{x_1}$ 。

六、(6 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导且 $0<a<b$。证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $2\xi\left[f(b)-f(a)\right]=\left(b^2-a^2\right)f'(\xi)$.。

七、(7 分) 设函数在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x)>0, f(a)>0$，图形中所示的区域 ABD 的面积为 $S_1(x)$，区域 BCE 的面积为 $S_2(x), a<x<b$. 试证：存在唯一的 $\xi\in(a,b)$，使得：$\dfrac{S_1(\xi)}{S_2(\xi)}=2010$。



（图中：$A(a,f(x)), B(x,f(x)), C(b,f(x)), D(a,f(a)), E(b,f(b))$，且线段 ABC，AD，EC 均为直线段）。

附加题 (5 分) 设 $F(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt$，求 $F(e)+F\left(e^{-t}\right)$。

2009 级高等数学（上）期末试卷参考答案

一、ADCCB 二、1. $e-e^{-1}$； 2. $(0,-2)$； 3. $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi^2}{8}$； 4. 3；5. $x+\dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+c$。

二、1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left(e^t-e^{-t}\right)dt}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$。

2. $\int\sin^2 x\cos^3 xdx=\int\sin^2 s\cos^2 xd\sin x=\dfrac{1}{3}\sin^3 x-\dfrac{1}{5}\sin^5 x+C.$

3. $f'(x)=2x-4+\dfrac{4}{x+1}=2\dfrac{x(x-1)}{x+1}, x_1=0, x_2=1,$ 极小值 $f(1)=-3+4\ln 2,$ 极大值 $f(0)=0$

4. $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx\overset{x=\sin t}{=}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt=\left(-\cot t-t\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=1-\dfrac{\pi}{4}$。

5.交点：$(0,0),(1,1),(-2,-8)\cdots 1'$ $S_1=\int_0^1\left(2x-x^2-x^3\right)dx=\dfrac{5}{12}\cdots 2'$

$S_2=-\int_{-2}^{0}\left(2x-x^2-x^3\right)dx=\dfrac{8}{3}\cdots 2'$ $S=S_1+S_2=\dfrac{37}{12}\cdots 1'.$

四、1. $\lim\limits_{x\to o^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin 2\left(e^x-1\right)}{e^x-1}=2\cdots 2',$

$\lim\limits_{x\to o^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}\int_0^x\cos^2 tdt=1\cdots 2', x>0. f(x)=\dfrac{sinx2\left(e^x-1\right)}{e^x-1}$ --连续$\cdots 1'$，

$x<0,\ f(x)=\dfrac{1}{x}\int_0^x\cos^2 tdt$ -连续$\cdots 1'$ $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$、$(0,+\infty)$ -连续$\cdots 1'$

2. $\int xf'(x)dx=\int xdf(x)=xf(x)-\int f(x)dx=xf(x)-(1+\sin x)\ln x+C$

$f(x)=\left[(1+\sin x)\ln x\right]'=\cos x\ln x+\dfrac{1+\sin x}{x}\therefore\int xf'(x)dx=x\cos x\ln x+(1-\ln x)(1+\sin x)+C$

3. 球心到锥底面的距离为：x，正圆锥体积为

$V=\dfrac{\pi}{3}\left(\sqrt{1-x^2}\right)(1+x)=\dfrac{\pi}{3}(1-x)(1+x)^2\ (0<x<1)\cdots 2', \dfrac{dV}{dx}=\dfrac{\pi}{3}(1+x)(1-3x)$

驻点：$x=\frac{1}{3}\cdots 2'$ $\quad \left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{\frac{1}{3}} = -\frac{2\pi}{3}(3x+1)\Big|_{\frac{1}{3}} < 0$ $V_{max}=V\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{32}{81}\pi$ ，高：$\frac{4}{3}\cdots 3'$

五、$f(x)=\frac{\tan x}{x}, 0<x<\frac{\pi}{2}. f'(x)=\frac{x\sec^2 x-\tan x}{x^2}=\sec^2 x\frac{x-\sin x\cos x}{x^2}$

$x-\sin x\cos x > x-\sin x > 0, f'(x)>0, \therefore f(x)$ 增 $\therefore \frac{\tan x_2}{\tan x_1} > \frac{x_2}{x_1}$

六、$f(x), g(x)=x^2$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，

$g'(x)=\left(x^2\right)'=2x\neq 0\cdots 2'$ 由 Cauchy 中值定理：

$\exists \zeta\in(a,b), \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}\cdots 2'$ $\quad \frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\zeta)}{2\zeta}$，

$2\zeta\left[f(b)-f(a)\right]=\left(b^2-a^2\right)f'(\zeta)\cdots 2'$

七、$S_1(x)=\int_a^x\left[f(x)-f(t)\right]dt; S_2(x)=\int_x^b\left[f(t)-f(x)\right]dt;$

$F(x)=S_1(x)-2010S_2(x)\cdots 2'$ $\quad F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$F(a)<0, F(b)>0$，

由介值定理，$\exists \zeta\in(a,b)$，使得 $F(\zeta)=0\Rightarrow \frac{S_1(\zeta)}{S_2(\zeta)}=2010$ $S_1'(x)=f'(x)(x-a)>0$

$S_2'(x)=-f'(x)(b-x)<0\Rightarrow F'(x)=S_1'(x)-2010S_2'(x)>0, F(x)$ 单增

$\Rightarrow F(x)$ 的零点唯一。

附加题、$F(e)+F\left(e^{-1}\right)=\int_1^e\frac{\ln t}{1+t}dt+\int_1^{e^{-1}}\frac{\ln t}{1+t}dt\int_1^{e^{-1}}\frac{\ln t}{1+t}dt \overset{t=\frac{1}{x}}{=} \int_1^e\frac{\ln\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$

$=\int_1^e\frac{\ln x}{x^2+x}dx=\int_1^e\frac{\ln t}{t(t+1)}dt$ $\quad F(e)+F\left(e^{-1}\right)=\int_1^e\frac{\ln t}{t}dt=\frac{1}{2}(\ln t)\Big|_1^e=\frac{1}{2}.$

$$F(e)+F\left(e^{-1}\right)=\int_1^e\frac{\ln t}{t}dt=\frac{1}{2}(\ln t)\Big|_1^e=\frac{1}{2}.$$