河海大学常州校区 2002-2003 学年数学竞赛

一、填空题（12×3 分）

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)=$ $\underline{\;-1\;}$。

2. 当 $x\to0$ 时，$3x-4\sin x+\sin x\cos x$ 与 x^n 为同阶无穷小，则 $n=$ $\underline{\;5\;}$。(04级-1)

3. 在 $x=1$ 时有极大值 6，在 $x=3$ 时有极小值 2 的最低幂次多项式的表达式是 $\underline{\;x^3-6x^2+9x+2\;}$。

4. $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$，则 $f^{(100)}(0)=$ $\underline{\;100!\;}$。(展开式系数)

5. $\displaystyle\int\frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx=$ $\underline{\;-\frac{1}{2}e^{-2x}\arctan e^x-\frac{1}{2}e^{-x}-\frac{1}{2}\arctan e^x+C\;}$。

6. $\displaystyle\int_{-1}^{1}x\left(1+x^{2003}\right)\left(e^x-e^{-x}\right)dx=$ $\underline{\;\frac{4}{e}\;}$。 e^x-e^{-x} 奇

7. $f(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}dt$，则 $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=$ $\underline{\;\frac{1}{2}\ln^2x\;}$。(12级三1②)

8. 设 $f(x)$ 连续，$F(t)=\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2}f\left(x^2+y^2\right)dxdy\;(t>0)$，则 $F'(t)=$ $\underline{\;2\pi t f(t^2)\;}$。(04级五)

9. 已知平面过直线 $\begin{cases}x+y=0\\x-y+z=2\end{cases}$ 且平行另一直线 $x=y=z$，则该平面方程为 $\underline{\;x-3y+2z-4=0\;}$。(06级-2) (05级-2) (04级-7)

Ch11
10. 函数 $f(x)=\ln\left(1+3x+2x^2\right)$ 关于 x 的幂级数展开式为 $\underline{\;f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1+2^{n+1}}{n+1}x^{n+1},\;-\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2}\;}$。

Ch10
11. 设 Σ 为半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧，则 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+zdxdy}{x^2+y^2+z^2}=$ $\underline{\;-\frac{4}{3}\pi a\;}$。(04级-13)

Ch10
12. 设有向曲线 C 为 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x+z=a$ 的交线，从原点看去 C 的方向为顺时针，则

$\displaystyle\int_C ydx+zdy+xdz=$ $\underline{\;-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi a^2\;}$。(04级-14)

二、设一点先向正东移动 a 米，然后左拐弯垂直移动 aq 米（$0<q<1$），如此不断重复，使后一段移动距离为前一段的 q 倍，试问其极限位置与出发点相距多少米？（8 分）

设出发点 $(0,0)$. 动点 (x,y) 轨迹  极限点 (x_0,y_0)

则 $x_0=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a\cdot(-q^2)^n=\dfrac{a}{1+q^2}$

$y_0=\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq\cdot(-q^2)^n=\dfrac{aq}{1+q^2}$

$\therefore d=\dfrac{a}{\sqrt{1+q^2}}$

三、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，且满足条件 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx$，试证：存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$。（8 分）

设 $F(x)=xf(x)$

$F(1)=f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx = 2\xi^* f(\xi^*)\cdot\frac{1}{2}=F(\xi^*)$ ，$0\le\xi^*\le\frac{1}{2}$.

由 Rolle Th. $\exists\ \xi\in(\xi^*,1)$ s.t. $F'(\xi)=0$.

即 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

四、设 $f(x)$ 满足对任意 $x_1,x_2\in[a,b]$，恒有 $|f(x_1)-f(x_2)|\le|x_1-x_2|$，证明：

$\left|\int_a^b f(x)dx-f(a)(b-a)\right|\le\frac{(b-a)^2}{2}$。（8 分）

$左=\left|\int_a^b [f(x)-f(a)]dx\right| \le \int_a^b |f(x)-f(a)|dx$

$\le \int_a^b |x-a|dx = \int_a^b (x-a)dx = \frac{(b-a)^2}{2}$

五、设 $f(u,v)$ 具二阶连续偏导，且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=0$，令 $z=f(x^2-y^2,2xy)$，试证：$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$。（8 分）

$\frac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+2yf_2'$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f_1'+2x(f_{11}''\cdot 2x+f_{12}''\cdot 2y)+2y(f_{21}''\cdot 2x+f_{22}''\cdot 2y)$

$=2f_1'+4x^2f_{11}''+8xyf_{12}''+4y^2f_{22}''$

$\frac{\partial z}{\partial y}=-2yf_1'+2xf_2'$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2f_1'-2y[f_{11}''\cdot(-2y)+f_{12}''\cdot 2x]+2x[f_{21}''\cdot(-2y)+f_{22}''\cdot 2x]$

$=-2f_1'+4y^2f_{11}''-8xyf_{12}''+4x^2f_{22}''$

$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4x^2+4y^2)(f_{11}''+f_{22}'')=0$

六、将长为a的线段分为三段，分别围成圆、正方形和等边三角形，问怎样分使它们的面积之和最小，并求出最小值。（8 分）

(11级二2)

七、一个高为h的雪堆，其侧面满足方程$z=h-\dfrac{2\left(x^2+y^2\right)}{h}$，求雪堆的体积与侧面积之比。（8 分）

(08级二3) (06级二3)

Ch10

八、设$f(x)$具一阶连续导数，L是上半平面（$y>0$）内有向光滑曲线，起点为(a,b)，终点为(c,d)，且$ab=cd$，求$I=\int_L \frac{1}{y}\left[1+y^2 f(xy)\right]dx+\frac{x}{y^2}\left[y^2 f(xy)-1\right]dy$。（8 分）

$$I=\int_L \frac{1}{y}dx+yf(xy)dx+xf(xy)dy+xd\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$=\int_L d\left(\frac{x}{y}\right)+f(xy)d(xy)$$

$$=\left[\frac{x}{y}+F(xy)\right]_{(a,b)}^{(c,d)}$$ ，其中 $F'(u)=f(u)$，$ab=cd$

$$=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}.$$

Ch11

九、求$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$的和。（8 分）

设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$，$-1\le x\le 1$.

$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}$，$-1<x<1$

$S(x)=S(0)+\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}=\arctan x$，$-1\le x\le 1$.

原式 $=S(1)=\frac{\pi}{4}$.