2012-2013学年第二学期高等数学期中测试及数学竞赛试卷（2012级）

（参加竞赛的同学全做，其他同学只做一、二大题）

一、填空题（8×6分）

1. 设$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{p}=3\vec{a}-2\vec{b}$，$\vec{q}=4\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{p}\perp\vec{q}$，则$(\hat{\vec{a},\vec{b}})=$ $\underline{\arccos\frac{2}{5}}$，$|\vec{p}\times\vec{q}|=$ $\underline{\frac{22}{5}\sqrt{21}}$。

2. 直线$\begin{cases}2x-4y+z=0\\3x-y-2z-9=0\end{cases}$在平面$4x-y+z-1=0$上的投影直线方程为$\underline{\begin{cases}17x+31y-37z-117=0\\4x-y+z-1=0\end{cases}}$。

3. 设$u=x^3-y^3+x^2y+2xy+xy^2$，则$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=$ $\underline{12x+4}$。

4. 曲面$2xy+z-e^z-3=0$在点$M(1,2,0)$处的切平面方程为$\underline{2x+y-4=0}$。

5. 设$F(u,v)$可微，$z=z(x,y)$由方程$F\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=0$所确定，则$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$ $\underline{z}$。

6. 交换积分次序$\int_0^1dy\int_0^{2y}f(x,y)\,dx+\int_1^3dy\int_0^{3-y}f(x,y)\,dx=$ $\underline{\int_0^2dx\int_{\frac{x}{2}}^{3-x}f(x,y)\,dy}$。

7. 二次积分$\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}f(x,y)\,dy$在极坐标系下先对$r$积分的二次积分为$\underline{\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r\,dr}$。

8. 已知$f(x,y)$具连续二阶偏导，$L:\frac{x^2}{4}+y^2=1$（顺时针方向），则

$\oint_L[3y+f_x(x,y)]dx+f_y(x,y)dy=$ $\underline{6\pi}$。 ch10

二、计算题（4×13分）

1. 已知$f(x,y)$可微，且$f(1,2)=2$，$f_x'(1,2)=3$，$f_y'(1,2)=4$，记$\varphi(x)=f(x,f(x,2x))$，计算$\varphi'(1)$。

设$u=f(x,2x)$. 则$\varphi(x)=f(x,u)$.

令$x=1$, $u=f(1,2)=2$.

又$u'=f_1(x,2x)+f_2(x,2x)\cdot 2 \Rightarrow u'|_1=f_1(1,2)+2f_2(1,2)=3+2\times4=11$

$\therefore \varphi'(x)=f_1(x,u)+f_2(x,u)\cdot u' \Rightarrow \varphi'|_1=f_1(1,2)+f_2(1,2)\cdot u'|_1$

$=3+4\times11=47$. (13级一.7)

2. 在曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 上找一点，使它到点 $\left(1,\sqrt{2},3\sqrt{3}\right)$ 的距离最短，并求最短距离。

设所求点为 (x,y,z). 则 $d=\sqrt{(x-1)^2+(y-\sqrt{2})^2+(z-3\sqrt{3})^2}$.

设 $L(x,y,z,\lambda)=(x-1)^2+(y-\sqrt{2})^2+(z-3\sqrt{3})^2+\lambda\left(\sqrt{x^2+y^2}-z\right)$

由 $\begin{cases} L_x=2(x-1)+\dfrac{\lambda x}{\sqrt{x^2+y^2}}=0 \\ L_y=2(y-\sqrt{2})+\dfrac{\lambda y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0 \\ L_z=2(z-3\sqrt{3})-\lambda=0 \\ L_\lambda=\sqrt{x^2+y^2}-z=0 \end{cases}$ 解得驻点 $(2,2\sqrt{2},2\sqrt{3})$ 及 $(-1,-\sqrt{2},\sqrt{3})$

代入 d 比较可得: $(2,2\sqrt{2},2\sqrt{3})$ 到点 $(1,\sqrt{2},3\sqrt{3})$ 距离最短，且 $d_{min}=\sqrt{6}$.

3. 已知 $D: x^2+y^2\le 9$，计算二重积分 $\iint\limits_D \left|x^2+y^2-4\right| dxdy$。

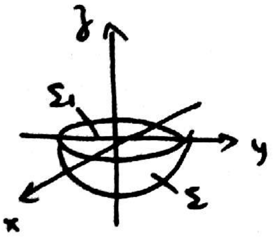
$$原式=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}(4-x^2-y^2)\,dxdy+\iint\limits_{4\le x^2+y^2\le 9}(x^2+y^2-4)\,dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(4-r^2)\cdot r\,dr+\int_0^{2\pi}d\theta\int_2^3(r^2-4)\cdot r\,dr$$

$$=8\pi+\frac{25}{2}\pi$$

$$=\frac{41}{2}\pi \ .$$

4. 设 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}\ (R>0)$ 的下侧，求 $\iint\limits_\Sigma x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$。ch10



添 Σ_1: $z=0$, $x^2+y^2\le R^2$, 上侧

由Gauss公式,

$$\iint\limits_{\Sigma\cup\Sigma_1}x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$$

$$=\iiint\limits_\Omega 3(x^2+y^2+z^2)\,dV$$

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi\int_0^R r^2\cdot r^2\sin\varphi\,dr=\frac{6}{5}\pi R^5$$

又∵ $\iint\limits_{\Sigma_1}x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy=0$

∴ 原式 $=\frac{6}{5}\pi R^5-0=\frac{6}{5}\pi R^5$.

三、数学竞赛加题（5×20分）

1. 1）求极限：$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$；

令 $y=\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x\to0}\ln y=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-x}{2x(1+x)}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{x\to0}y=e^{-\frac{1}{2}}$

2）$f(x)=\int_1^x\dfrac{2\ln u}{1+u}du$，求 $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$。

$$f\left(\tfrac{1}{x}\right)=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{2\ln u}{1+u}du\ \overset{\text{令}u=\frac{1}{t}}{=\!=\!=}\ \int_1^x\frac{-2\ln t}{1+\frac{1}{t}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=\int_1^x\frac{2\ln t}{t(t+1)}dt=\int_1^x\left(\frac{2\ln t}{t}-\frac{2\ln t}{t+1}\right)dt$$

$$=\int_1^x\frac{2\ln t}{t}dt-\int_1^x\frac{2\ln t}{t+1}dt$$

$$=\left[\ln^2t\right]_1^x-\int_1^x\frac{2\ln u}{u+1}du$$

$$=\ln^2x-f(x)$$

$$\therefore f(x)+f\left(\tfrac{1}{x}\right)=\ln^2x.$$

2. 设 $\varphi(x)=\int_0^1f(xt)dt$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，求 1）$\varphi'(x)$；2）讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

1）$x\neq0$ 时，令 $xt=u$，$\varphi(x)=\int_0^xf(u)\cdot\frac{1}{x}du=\frac{1}{x}\int_0^xf(u)du$，

$\varphi'(x)=\dfrac{xf(x)-\int_0^xf(u)du}{x^2}$ <本题默认 $f(x)$ 连续，否则 $\varphi'(x)$ 无法计算>

$f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot x=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0}x=A\times0=0$.

从而 $\varphi(0)=\int_0^1f(0)dt=f(0)=0$.

$\varphi'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^xf(u)du}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{2x}=\dfrac{A}{2}$.

$$\therefore\ \varphi'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf(x)-\int_0^xf(u)du}{x^2}, & x\neq0\\[2ex]\dfrac{A}{2}, & x=0\end{cases}$$

2）$\lim\limits_{x\to0}\varphi'(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf(x)-\int_0^xf(u)du}{x^2}$ $\boxed{\overset{\text{洛}}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+xf'(x)-f(x)}{2x}\text{ 为常见错误，无 }f'(x)\text{ 存在条件！}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to0}\frac{\int_0^xf(u)du}{x^2}$$

$=A-\dfrac{A}{2}=\dfrac{A}{2}=\varphi'(0)$ $\quad\therefore$ $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

3. 计算 1）求 $\int \frac{x\cos^4\frac{x}{2}}{\sin^3 x}dx$； 2）$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2(1+x)}dx$。

1）

$$原式=\int\frac{x\cos\frac{x}{2}}{8\sin^3\frac{x}{2}}dx$$

$$=-\frac{1}{8}\int x\,d\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=-\frac{x}{8}\csc^2\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\int\csc^2\frac{x}{2}dx$$

$$=-\frac{x}{8}\csc^2\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\cot\frac{x}{2}+C$$

2）令 $x=\frac{1}{t}$

$$原式=\int_1^0\frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2}(1+\frac{1}{t})}dt$$

$$=\int_0^1\frac{t}{t+1}dt$$

$$=\int_0^1\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=1-\left[\ln|t+1|\right]_0^1$$

$$=1-\ln 2$$

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(0)=f(1)=0$，$f'(0)f'(1)>0$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，$\eta\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$，$f''(\eta)=0$。

1）不妨设 $f'(0)>0$，$f'(1)>0$，

由 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}>0$ 可得，$\exists\delta_1>0$ s.t. $x\in(0,\delta_1)$ 时，有 $f(x)>0$.

由 $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)}{x-1}>0$ 可得：$\exists\delta_2>0$ s.t. $x\in(1-\delta_2,1)$ 时，有 $f(x)<0$.

从而由零点定理，$\exists\xi\in(0,1)$ s.t. $f(\xi)=0$.

2）由 Rolle 定理，$\exists x_1\in(0,\xi)$ s.t. $f'(x_1)=0$，$\exists x_2\in(\xi,1)$ s.t. $f'(x_2)=0$.

再由 Rolle 定理，$\exists\eta\in(x_1,x_2)$ s.t. $f''(\eta)=0$.

5. 已知 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx\,(n>1)$，证明：1）$I_n+I_{n-2}=\frac{1}{n-1}$；2）$\frac{1}{2(n+1)}<I_n<\frac{1}{2(n-1)}$。

法一，

1）$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\cdot(\sec^2x-1)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\,d\tan x-I_{n-2}$

$$=\left[\frac{\tan^{n-1}x}{n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-I_{n-2}=\frac{1}{n-1}-I_{n-2}$$

$\therefore I_n+I_{n-2}=\frac{1}{n-1}$.

2）由 $\{I_n\}\downarrow$ 可得：$I_n+I_{n+2}<2I_n<I_n+I_{n-2}$

由1)，$I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}$，$I_n+I_{n-2}=\frac{1}{n-1}$，$\therefore\frac{1}{2(n+1)}<I_n<\frac{1}{2(n-1)}$

法二：1) 令 $\tan x = t$，$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$

$$I_n + I_{n-2} = \int_0^1 \frac{t^n + t^{n-2}}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{t^{n-2}(t^2+1)}{t^2+1} dt = \int_0^1 t^{n-2} dt = \frac{1}{n-1}$$

2) 由 $\int_0^1 \frac{t^n}{2} dt < \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt < \int_0^1 \frac{t^n}{2t^2} dt$

可得：$\frac{1}{2(n+1)} < I_n < \frac{1}{2(n-1)}$.