八、(1) $\because f'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right]<0$，$\therefore f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的递减。

(2) $g'(x)=n(1-x)^{n-1}[1-(n+1)x]$，在 (0, 1) 内，$W=\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$，

而 $g(\frac{1}{n+1})=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$，$g(0)=g(1)=0$，由 $g(x)$ 在[0, 1]连续必有最大值。故 $\max\limits_{x\in[0,1]} g(x)=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$。

由 (1) 知 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 单减，知 $\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$ 单增，$\therefore \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}\le\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}=\frac{1}{e}$，从而 $\max\limits_{x\in[0,1]} g(x)\le\frac{1}{e}$。

九、令 $F(x)=f(x)-g(x)$。若在 (a,b) 内同一点 x_0 处取到最大值 M，则 $F(a)=F(x_0)=F(b)=0$，由 Roll 定理得证。若在 (a,b) 内不同点取到最大值 M，不妨设 $f(x_1)=g(x_2)=M$，则 $F(x_1)=M-g(x_1)>0$，$F(x_2)=f(x_2)-M<0$，由根的存在定理，$\exists x_3\in(a,b)$，使得 $F(x_3)=0$，因此 $F(a)=F(x_3)=F(b)=0$，仍由 Roll 定理可以得证。

河海大学 2013~2014 学年第一学期

《高等数学（上）》期末试卷

考试对象：2013 级

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1.隐函数方程 $e^y+xy-e=0$ 表示的曲线在对应 $x=0$ 点处的法线方程为（　　）.

$A.\ y=-\frac{1}{e}x+1$　　$B.\ y=\frac{1}{e}x+1$　　$C.\ y=-ex+1$　　$D.\ y=ex+1$

2. 下列反常积分收敛的是（　　）

$A.\ \int_{-\infty}^{0}e^{x}dx$　　$B.\ \int_{1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$　　$C.\ \int_{-\infty}^{0}e^{-x}dx$　　$D.\ \int_{-\infty}^{0}\cos x dx$

3.设 $f(x)$ 满足 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$,若 $f'(x_0)=0,(x_0\neq0)$ 则函数 $f(x)$ 在点 x_0（　　）

$A.$取得极大值　　$B.$取得极小值　　$C.$某个邻域内单调增加　　$D.$某个邻域内单调减少

4. 函数$y=x+\dfrac{x}{x^2-1}$的图象（　　）.

A. 有水平渐近线和垂直渐近线　　B. 有倾斜渐近线和垂直渐近线

C. 无水平渐近线,无垂直渐近线　　D. 无倾斜渐近线,有垂直渐近线

5. 若$f(x)=e^x\cos 2x$，则$f''(x)-2f'(x)+6f(x)=($　　$)$.

A. $e^x\sin 2x$，　　B. $-e^x\sin 2x$，　　C. $e^x\cos 2x$，　　D. $-e^x\cos 2x$

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 假设$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$（$x>0$），则$y=f(x)$的图形的拐点坐标为________。

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{n}\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{n}\right)^2}+\dfrac{2}{n}\sqrt{1+\left(\dfrac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\dfrac{n}{n}\sqrt{1+\left(\dfrac{n}{n}\right)^2}\right)=$________。

3. 函数$f(x)=\dfrac{x^2-2x}{|x|(x^2-4)}$的第二类间断点是________。

4. 设$f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{\tan x}{x} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$，则$f'(0)=$____。　　5. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{(\arctan x)^2+\sin x}{1+x^2}dx=$____。

三、试解下列各题（每小题 7 分，共 35 分）

1. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x\ln(1+x^2)}$　　2. 设$y=\sqrt{x+\sqrt{x}}+e^{\arctan x^2}+x^x$　$(x>0)$，求dy.

3. 求函数$f(x)=xe^x$的具有拉格朗日型余项的n阶麦克劳林公式.

4. 求$\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx$.

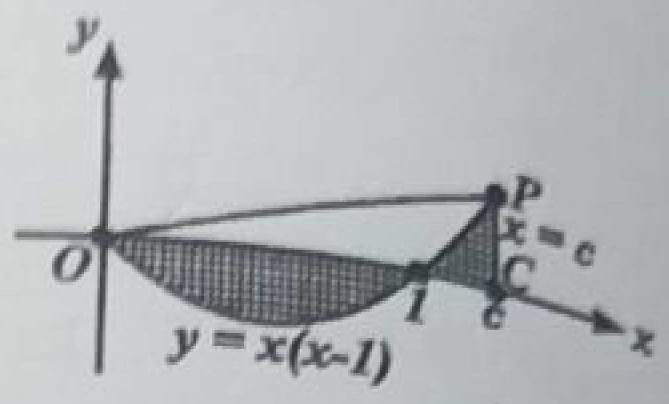
5.求 $\int \cos(\ln x)dx$.

四、(5 分) 证明不等式: $\dfrac{\arctan x}{\ln(1+x)} < 1+x \quad (x>0)$.

五、(6 分) 讨论方程 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin^5 t dt + \int_{x}^{\pi} \cos^5 t dt = 0$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ 内实根的个数.

六、(6 分) 设函数 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$, 其中 a, b, c 为实常数, 且 $c=b+\sqrt{3}=a+2\sqrt{3}$, 求函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,c]$ 上的最大值与最小值.

七、(6 分) 已知抛物线 $y=x(x-1)$ 与直线 $y=0, x=c, (c>1)$ 所围成的图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积恰好等于直角三角形 OCP 绕 x 轴旋转一周所得锥体的体积,求 c 的值.(如图所示)



八.(6 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,c]$ 上连续, 在 $(0,c)$ 内可导, $f(0)=0$,证明:$\exists\xi\in(0,c)$,使得. $f(c)=(1+\xi)f'(\xi)\ln(1+c)$

九、(6 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $f(a)=f(b)=0$, 证明: $\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{1}{2}\int_a^b |f'(x)|dx$.

2013 级《高等数学(上)》期末试卷参考答案

一、DABBC 二、1. $\underline{\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{3}{4}\right)}$; 2. $\underline{\frac{1}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right)}$; 3. $\underline{x=-2}$; 4. $\underline{1}$; 5. $\underline{\frac{\pi^3}{96}}$.

三、1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x\ln(1+x^2)}\overset{\gamma}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}\overset{\gamma}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}\overset{\gamma}{=}\dfrac{1}{6}$

2. $dy=\dfrac{1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}+e^{\arctan x^2}\dfrac{2x}{1+x^4}+x^x(\ln x+1)]dx$

3. $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x^k}{(k-1)!}+\dfrac{(\theta x+n+1)e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$

4. $\int_1^{\sqrt{3}}\dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx\underset{x=\tan t}{=}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sec t}{\tan^2 t}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}dt=-\dfrac{1}{\sin t}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{2}-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$

5. $\int\cos(\ln x)dx=x\cos(\ln x)+\int\sin(\ln x)dx=x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x)dx$

$\therefore\int\cos(\ln x)dx=\dfrac{x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)}{2}+C$

四、$F(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x$，$F'(x)=\ln(1+x)+\dfrac{x^2}{1+x^2}>0, F(x)>F(0)=0$

五、$F(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\sin^5 t dt+\int_x^{\pi}\cos^5 t dt$，$F(\frac{\pi}{2})=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^5 t dt<0, F(\pi)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^5 t dt>0,$

$\exists\xi\in(\frac{\pi}{2},\pi), F(\xi)=0$，$F'(x)=\sin^5 x-\cos^5 x>0, x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 实根个数为 1.

六、$f(x)=(x-b-\sqrt{3})(x-b)(x-b+\sqrt{3})==(x-b)^3-3(x-b)$，$f'(x)=3(x-b)^2-3,$

$f'(x)=0\Rightarrow x=b\pm1$，$f(a)=f(c)=0, f(b\pm1)=\mp2$，　$m=-2, M=2$

七、$V_1=\pi\int_0^c x^2(x-1)^2dx=\pi\left(\dfrac{1}{5}c^5-\dfrac{1}{2}c^4+\dfrac{1}{3}c^3\right)$，　$V_2=\dfrac{\pi}{3}c^3(c-1)^2$，　$V_1=V_2\Rightarrow c=\dfrac{5}{4}$

八、$f(x), \ln(1+x)$ 符合柯西中值定理条件, $\dfrac{f(c)}{\ln(1+c)}=\dfrac{f'(\xi)}{\dfrac{1}{1+\xi}}$，$f(c)=(1+\xi)f'(\xi)\ln(1+c)$

九、$\forall x\in[a,b]$，$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(x)dx\Rightarrow|f(x)|\le\int_a^x|f'(x)|dx$，

$f(x)-f(b)=\int_b^x f'(x)dx\Rightarrow|f(x)|\le\int_x^b|f'(x)|dx$。

$|f(x)|\le\dfrac{1}{2}\int_a^b|f'(x)|dx$，　$\therefore\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|\le\dfrac{1}{2}\int_a^b|f'(x)|dx$