2008-2009 学年第二学期高等数学期中测试及数学竞赛试卷（2008 级）

（参加竞赛的同学全做，其他同学只做一、二大题）

一、填空题（10×4 分）

1. 设$\vec{a}=(2,-3,1)$，$\vec{b}=(1,-1,3)$，$\vec{c}=(1,-2,0)$，则$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}=$ $(0,-8,-24)$。

2. 已知直线过点$(0,2,4)$且与两平面$x+2z=1$和$y-3z=2$平行，则该直线方程为 $\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{3}=z-4$。

3. 球面$x^2+y^2+z^2=9$与平面$x+z=1$的交线在xOy面上的投影方程是 $\begin{cases} x^2+y^2+(1-x)^2=9 \\ z=0 \end{cases}$。

4. 曲面$2xy+z-e^z=3$在点$M(1,2,0)$处的切平面方程为 $2x+y-4=0$。(12 $\cancel{级}$ 一.4)

5. 已知$z=f(x,y)$在点$(1,1)$处可微，且$f(1,1)=1$，$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2$，$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=3$，$\varphi(x)=f(x,f(x,x))$，

   则$\left.\left[\varphi^3(x)\right]'\right|_{x=1}=$ 51。

6. 交换积分次序$\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 f(x,y)dy=$ $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$。

7. 积分$\int_0^1 dx\int_0^x f(x^2+y^2)dy$的极坐标形式为 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{\sec\theta} f(r^2)\cdot r\,dr$。

8. Ω为$x^2+y^2+z^2=R^2$所围立体域，则$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv=$ $\frac{4}{5}\pi R^5$。

9. 设$L:x^2+y^2=a^2\ (a>0)$，则$\oint_L (x^2+y^2)^n ds=$ $2\pi a^{2n+1}$。Ch10

10. $\int_{(0,0)}^{(1,1)}\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx+\frac{e^y}{1+x^2}dy=$ $\frac{e-1}{2}$。Ch10

二、计算题（4×15 分）

1. 设$f(u,v)$具有二阶连续偏导数，$z=f(x^2-y^2,e^{xy})$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot 2x+f_2'\cdot e^{xy}\cdot y=2xf_1'+ye^{xy}f_2'$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot(-2y)+f_2'\cdot e^{xy}\cdot x=-2yf_1'+xe^{xy}f_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x\left[f_{11}''\cdot(-2y)+f_{12}''\cdot e^{xy}\cdot x\right]+e^{xy}f_2'+y\cdot e^{xy}\cdot xf_2'+ye^{xy}\cdot\left[f_{21}''\cdot(-2y)+f_{22}''\cdot e^{xy}\cdot x\right]$$

$$=(1+xy)e^{xy}f_2'-4xyf_{11}''+2(x^2-y^2)e^{xy}f_{12}''+xye^{2xy}f_{22}''$$

2. 求 $f(x,y)=-3xy+x^3-y^3$ 的极值。

$\frac{\partial f}{\partial x}=-3y+3x^2$，$\frac{\partial f}{\partial y}=-3x-3y^2$

令 $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$，得驻点 $(0,0)$、$(-1,1)$

$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x$，$B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-3$，$C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-6y$

$AC-B^2=-36xy-9$

① $AC-B^2\big|_{(0,0)}=-9<0$ ∴ $(0,0)$ 不是极值点.

② $AC-B^2\big|_{(-1,1)}=27>0$

$A\big|_{(-1,1)}=-6<0$

∴ $(-1,1)$ 是极大值点

$f(x,y)$ 有极大值 $f(-1,1)=1$

3. 一个高为 h 的雪堆，其侧面满足方程 $z=h-\frac{2(x^2+y^2)}{h}$，求雪堆的体积与侧面积之比。

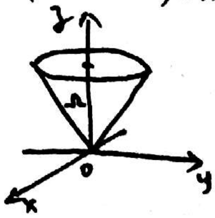
$V=\int_0^h dz\iint_{D(z)}1\,dxdy=\int_0^h\frac{\pi}{2}h(h-z)dz=\frac{\pi}{4}h^3$

$S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{\left(-\frac{4x}{h}\right)^2+\left(-\frac{4y}{h}\right)^2+1}\,dxdy$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{h}{\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{16}{h^2}r^2+1}\cdot r\,dr=\frac{13}{12}\pi h^2$

∴ $\frac{V}{S}=\frac{3h}{13}$.

4. 计算 $\iint_\Sigma x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中 Σ 为锥面 $x^2+y^2=z^2$ $(0\le z\le h)$ 的外侧。Ch10



添 Σ_1：$z=h$，$x^2+y^2\le h^2$，上侧

由Gauss公式，

$\iint_{\Sigma\cup\Sigma_1}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\iiint_\Omega 2(x+y+z)\,dV$

$=2\iiint_\Omega z\,dV=2\int_0^h dz\iint_{D(z)}z\,dxdy=2\int_0^h z\cdot\pi z^2dz=\frac{\pi}{2}h^4$

又 $\iint_{\Sigma_1}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\iint_{D_{xy}}h^2dxdy=\pi h^4$

∴原式 $=\frac{\pi}{2}h^4-\pi h^4=-\frac{\pi}{2}h^4$.

三、数学竞赛加题（4×25 分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，其中 $\varphi(x)$ 具二阶连续导数，且 $\varphi(0)=\varphi'(0)=\varphi''(0)=1$，

1）确定 a 的值，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；2）求 $f'(x)$；3）讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}[\varphi'(x)+\sin x]=\varphi'(0)=1$

$\therefore a=1$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

2) $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\dfrac{[\varphi'(x)+\sin x]\cdot x-[\varphi(x)-\cos x]}{x^2}=\dfrac{x\varphi'(x)+x\sin x-\varphi(x)+\cos x}{x^2}$

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\varphi(x)-\cos x}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)-\cos x-x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi'(x)+\sin x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi''(x)+\cos x}{2}=\dfrac{\varphi''(0)+1}{2}=1$

$\therefore f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\varphi'(x)+x\sin x-\varphi(x)+\cos x}{x^2}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

3) $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\varphi'(x)+x\sin x-\varphi(x)+\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi'(x)+x\varphi''(x)+\sin x+x\cos x-\varphi'(x)-\sin x}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi''(x)+\cos x}{2}=\dfrac{\varphi''(0)+1}{2}=f'(0)$　　$\therefore f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

2. 1）已知 $e^y+xy=e$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$，$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$；　　2）$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[x\sin x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\sqrt{\ln^2(1-x)}\right]dx$。

① $e^y\cdot y'+y+xy'=0$　$\therefore y'=-\dfrac{y}{e^y+x}$

$x=0$ 时，$y=1$　$\therefore y'(0)=-\dfrac{1}{e}$

② $y''=-\dfrac{y'(e^y+x)-y(e^y\cdot y'+1)}{(e^y+x)^2}$

将 $y(0)=1$，$y'(0)=-\frac{1}{e}$ 代入，

$y''(0)=\dfrac{1}{e^2}$

由奇偶对称性，

原式 $=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{\ln^2(1-x)}\,dx$

$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|\ln(1-x)|\,dx$

$=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\ln(1-x)\,dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}-\ln(1-x)\,dx$

$=[x\ln(1-x)]_{-\frac{1}{2}}^{0}-\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\dfrac{x}{x-1}dx+[-x\ln(1-x)]_{0}^{\frac{1}{2}}$

$-\int_{0}^{\frac{1}{2}}\dfrac{x}{1-x}dx$

$=-\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}-\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(1+\frac{1}{x-1})dx+\frac{1}{2}\ln 2+\int_{0}^{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{x-1})dx$

$=\frac{1}{2}\ln 3-[\ln|x-1|]_{-\frac{1}{2}}^{0}+[\ln|x-1|]_{0}^{\frac{1}{2}}$

$=\frac{3}{2}\ln 3-2\ln 2$

3. 已知函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导且存在相等的最大值，又 $f(0)=g(0)$，$f(1)=g(1)$，证明：1）存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $f(\xi)=g(\xi)$；2）存在 $\eta\in(0,1)$，使得 $f''(\eta)=g''(\eta)$。

1) 设 $f(x_1)=\max f(x)$, $g(x_2)=\max g(x)$, $0<x_1<1$, $0<x_2<1$, $\underline{f(x_1)=g(x_2)}$

① 若 $x_1=x_2$, 取 $\xi=x_1=x_2$ 即可.

② 若 $x_1\neq x_2$, 不妨设 $x_1<x_2$. 令 $\varphi(x)=f(x)-g(x)$

则 $\varphi(x_1)=f(x_1)-g(x_1)=g(x_2)-g(x_1)>0$

$\varphi(x_2)=f(x_2)-g(x_2)=f(x_2)-f(x_1)<0$

由零点定理, $\exists\,\xi\in(x_1,x_2)$ s.t. $\varphi(\xi)=0$. 从而 $f(\xi)=g(\xi)$ 成立. $\underline{\varphi(0)=\varphi(\xi)=\varphi(1)=0}$

2) 由 Rolle Th, $\exists\,x_3\in(0,\xi)$, $x_4\in(\xi,1)$ s.t. $\varphi'(x_3)=\varphi'(x_4)=0$.

再由 Rolle Th, $\exists\,\eta\in(x_3,x_4)$ s.t. $\varphi''(\eta)=0$. 从而 $f''(\eta)=g''(\eta)$ 成立.

4. 设 $f''(x)>0$，$x\in[a,b]$，试证：$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\le\frac{f(a)+f(b)}{2}$。

法一: 1) 由 Taylor 公式, $f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-\frac{a+b}{2})^2$, ξ 介于 x 与 $\frac{a+b}{2}$ 之间.

$\geq f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})$　　$\underline{f''(\xi)>0}$

$\therefore \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b [f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})]dx = f(\frac{a+b}{2})\cdot(b-a)+f'(\frac{a+b}{2})\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})dx$

$= f(\frac{a+b}{2})\cdot(b-a)+f'(\frac{a+b}{2})\cdot 0 = f(\frac{a+b}{2})\cdot(b-a)$ ①

2) $f''(x)>0 \Rightarrow f'(x)\nearrow$, 由Lagrange中值定理.

$\forall x\in(a,b]$. $f(x)-f(a)=f'(\eta)(x-a)\le f'(x)(x-a)$, $a<\eta<x$

$\therefore \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b [f(a)+f'(x)(x-a)]dx = f(a)(b-a)+\int_a^b(x-a)df(x)$

$= f(a)(b-a)+[(x-a)f(x)]_a^b-\int_a^b f(x)dx = f(a)(b-a)+f(b)(b-a)-\int_a^b f(x)dx$

$\therefore \int_a^b f(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}\cdot(b-a)$ ②　　$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$.

由①.②, 结论成立.

法二：1) 令 $\varphi(x)=\int_a^x f(t)\,dt-(x-a)f\left(\frac{a+x}{2}\right)$，$x\in[a,b]$

$\forall x\in(a,b]$，$\varphi'(x)=f(x)-f\left(\frac{a+x}{2}\right)-(x-a)f'\left(\frac{a+x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}$

$$=f'(\xi)\left(x-\frac{a+x}{2}\right)-f'\left(\frac{a+x}{2}\right)\cdot\frac{x-a}{2}\ ,\quad \frac{a+x}{2}<\xi<x$$

$$=\frac{x-a}{2}\cdot\left[f'(\xi)-f'\left(\frac{a+x}{2}\right)\right]$$

$f''(x)>0\Rightarrow f'(x)\nearrow\Rightarrow f'(\xi)\geq f'\left(\frac{a+x}{2}\right)$ $\therefore \varphi'(x)\geq 0\Rightarrow\varphi(x)\nearrow$

从而 $\varphi(b)\geq\varphi(a)$，即 $\int_a^b f(t)\,dt-(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq 0$ ①

2) 令 $\psi(x)=\int_a^x f(t)\,dt-(x-a)\cdot\frac{f(a)+f(x)}{2}$

$\forall x\in(a,b]$，$\psi'(x)=f(x)-\frac{f(a)+f(x)}{2}-(x-a)\cdot\frac{f'(x)}{2}$

$$=\frac{1}{2}[f(x)-f(a)]-\frac{f'(x)}{2}(x-a)$$

$$=\frac{1}{2}f'(\eta)(x-a)-\frac{f'(x)}{2}(x-a)\ ,\quad a<\eta<x$$

≤ 0 $\therefore \psi(x)\searrow$. $\psi(b)\leq\psi(a)\Rightarrow\int_a^b f(t)\,dt-(b-a)\cdot\frac{f(a)+f(b)}{2}\leq 0$

从而 $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt\leq\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$ ②

由①.②，结论成立.