2008-2009 学年第二学期高等数学期中测试及数学竞赛试卷（2008 级）

（参加竞赛的同学全做，其他同学只做一、二大题）

一、填空题（10×4 分）

1. 设 $\vec{a}=(2,-3,1)$，$\vec{b}=(1,-1,3)$，$\vec{c}=(1,-2,0)$，则 $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}=$________。

2. 已知直线过点 $(0,2,4)$ 且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行，则该直线方程为________。

3. 球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$ 的交线在 xOy 面上的投影方程是________。

4. 曲面 $2xy+z-e^z=3$ 在点 $M(1,2,0)$ 处的切平面方程为________。

5. 已知 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微，且 $f(1,1)=1$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=3$，$\varphi(x)=f(x,f(x,x))$，则 $\left.\left[\varphi^3(x)\right]'\right|_{x=1}=$________。

6. 交换积分次序 $\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 f(x,y)\,dy=$________。

7. 积分 $\int_0^1 dx\int_0^x f\left(x^2+y^2\right)dy$ 的极坐标形式为________。

8. Ω 为 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所围立体域，则 $\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)dv=$________。

9. 设 $L:x^2+y^2=a^2\ (a>0)$，则 $\oint_L\left(x^2+y^2\right)^n ds=$________。

10. $\int_{(0,0)}^{(1,1)}\dfrac{2x\left(1-e^y\right)}{\left(1+x^2\right)^2}dx+\dfrac{e^y}{1+x^2}dy=$________。

二、计算题（4×15 分）

1. 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$z=f\left(x^2-y^2,e^{xy}\right)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

2. 求 $f(x,y)=-3xy+x^3-y^3$ 的极值。

3. 一个高为 h 的雪堆，其侧面满足方程 $z=h-\frac{2\left(x^2+y^2\right)}{h}$，求雪堆的体积与侧面积之比。

4. 计算 $\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中 Σ 为锥面 $x^2+y^2=z^2\ (0\le z\le h)$ 的外侧。

三、数学竞赛加题（4×25 分）

1. 设 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\varphi\left(x\right)-\cos x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，其中 $\varphi\left(x\right)$ 具二阶连续导数，且 $\varphi\left(0\right)=\varphi'\left(0\right)=\varphi''\left(0\right)=1$，

1）确定 a 的值，使 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处连续；2）求 $f'\left(x\right)$；3）讨论 $f'\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

2. 1）已知 $e^{y}+xy=e$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$，$\left.\dfrac{d^2 y}{dx^2}\right|_{x=0}$； 2）$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[x\sin x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\sqrt{\ln^2\left(1-x\right)}\right]dx$

。

3. 已知函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导且存在相等的最大值，又 $f(0)=g(0)$，$f(1)=g(1)$，证明：1）存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $f(\xi)=g(\xi)$；2）存在 $\eta\in(0,1)$，使得 $f''(\eta)=g''(\eta)$。

4. 设 $f''(x)>0$，$x\in[a,b]$，试证：$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\le\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\le\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$。

参考答案

一、

1. $(0,-8,-24)$

2. $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-2}{3}=z-4$

3. $\begin{cases} x^2+y^2+(1-x)^2=9 \\ z=0 \end{cases}$

4. $2x+y-4=0$

5. 51

6. $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$

7. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{\sec\theta} f(r^2)\cdot r\,dr$

8. $\dfrac{4}{5}\pi R^5$

9. $2\pi a^{2n+1}$

10. $\dfrac{e-1}{2}$

二、

1. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+ye^{xy}f_2'$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2yf_1'+xe^{xy}f_2'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-4xyf_{11}''+2(x^2-y^2)e^{xy}f_{12}''+(1+xy)e^{xy}f_2'+xye^{2xy}f_{22}''$$

2. 极大值 $f(-1,1)=1$

3. 体积 $V=\dfrac{\pi}{4}h^3$，侧面积 $S=\dfrac{13}{12}\pi h^2$，$\dfrac{V}{S}=\dfrac{3h}{13}$

4. $-\dfrac{1}{2}\pi h^4$

三、

1. 1) $a=1$　2）$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{x\varphi'(x)+x\sin x-\varphi(x)+\cos x}{x^2}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$　3）连续

2. 1）$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=-\dfrac{1}{e}$，$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=\dfrac{1}{e^2}$；　2）$\dfrac{3}{2}\ln 3-2\ln 2$　提示：奇偶性

3. 提示：1）零点定理　2）罗尔定理

4. 提示：构造积分上限函数，考虑单调性