# 2012-2013 学年第二学期《高等数学 BII》期末试卷（A）

授课班号________ 年级专业________ 学号________ 姓名________

| 题型 | 选择题 | 填空题 | 计算题 | 综合题 | 总 分 | 审 核 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | |

一、填空题(每小题 5 分，共 30 分)

| 得分 | 阅卷人 |
|---|---|
| | |

1. 曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x^2+y^2=2az$ 的交线为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^2+y^2=2az \end{cases}$

2. 设 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$，则 $df=$ $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$

3. 交换积分次序 $\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x,y)\,dx=$ $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)\,dy$

4. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，其部分和为 $S_n$，$v_n=\frac{1}{S_n}$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n=$ $+\infty$

5. 设 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=3$，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 的收敛半径是 $\sqrt{3}$.

6. 差分方程 $Y_{x+1}-8Y_x=7$ 的通解为 $Y_x = C\cdot 8^x - 1$

二、计算题(每小题 6 分，共 36 分)

| 得分 | 阅卷人 |
|---|---|
| | |

1. 设 $f(x,y)=xe^{-y}+\sin\sqrt[3]{y}\cdot\tan\sqrt[3]{x}$，试讨论在点(0,0)处的两个偏导数 $f_x'(0,0)$, $f_y'(0,0)$ 是否存在？如存在求出导数值.

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x}=1$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0.$$

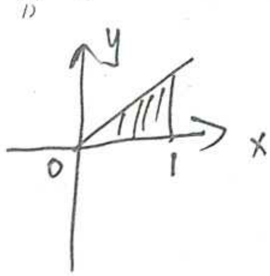
2. 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$z=f\left(x,\frac{x}{y}\right)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1' + \frac{1}{y} f_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{11}'' + \frac{1}{y} f_{12}'' + \frac{1}{y}\left( f_{21}'' + \frac{1}{y} f_{22}'' \right)$$

$$= f_{11}'' + \frac{2}{y} f_{12}'' + \frac{1}{y^2} f_{22}''$$

3. 计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D$ 是由 $y=x$，$y=0$，$x=1$ 所围成的区域.




$$\int_0^1 dx \int_0^x \frac{\sin x}{x}\, dy$$

$$= \int_0^1 \sin x\, dx$$

$$= \cos x \Big|_1^0 = 1 - \cos 1$$

4. 计算 $I=\iiint\limits_\Omega xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $\Omega$ 由 $0\le x\le 1$，$1\le y\le 2$，$0\le z\le 1$ 确定.

$$\int_0^1 dx \int_1^2 dy \int_0^1 xyz\, dz$$

$$= \int_0^1 x\, dx \int_1^2 y\, dy \int_0^1 z\, dz$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4-1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}x^n$ 分开算，更简单．

5. 试求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}x^n$ 在其收敛域上的和函数．

解：$R=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}=1$ ∴ 收敛收区间 $(-1,1)$

当 $x=1$．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}$ 发散．，当 $x=-1$ 时．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}(-1)^n$ 发散

∴ $D=(-1,1)$．

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}x^n$，$x\in(-1,1)$．

$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^{n-1}$

$\therefore \cancel{xS'(x)} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$

$=\frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}\right)'$

$=\frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'=\frac{2-x}{(1-x)^2}$

$\therefore S(x)-S(0)=\int_0^x\frac{2-t}{(1-t)^2}dt$

$\because S(0)=0$．$\therefore S(x)=\int_0^x\frac{1-t+1}{(1-t)^2}dt$

$=\frac{x}{1-x}-\ln(1-x)$．

6. 求微分方程 $y^2\cdot y''=y'$ 的通解．

令 $y'=z(y)$

$\therefore y''=\frac{dz}{dy}\cdot y'$

代入：$y^2\cdot\frac{dz}{dy}y'=y'$

$\therefore \int dz=\int\frac{dy}{y^2}$

$\therefore y'=z=-\frac{1}{y}+C_1$

$\therefore y'=\frac{C_1y-1}{y}$

$\int\frac{y\,dy}{C_1y-1}=\int dx$

$\frac{1}{C_1}\int\frac{C_1y-1+1}{C_1y-1}dy=x+C_2$

$\therefore \frac{1}{C_1}\left(y+\frac{1}{C_1}\ln|C_1y-1|\right)=x+C_2$

$\therefore \frac{y}{C_1}+\frac{1}{C_1^2}\ln|C_1y-1|=x+C_2$

三、综合题（满分 34 分）

| 得分 | 阅卷人 |
| --- | --- |
| | |

1.（10 分）设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，试证明 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，并说明其逆不成立．

(1) $\because \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛．$\therefore |a_n|\to 0\ (n\to\infty)$

$\because \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$

∴ 由比较判别法的极限形式．

$\because \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛．

(2) $\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛

但 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散．

2. (12 分) 某工厂生产两种产品I与II，出售单价分别为10元与9元，生产 $x$ 单位的产品I与生产 $y$ 单位的产品II的总费用是(单位：元)

$$C = 400 + 2x + 3y + 0.01(3x^2 + xy + 3y^2)$$

求两种产品各生产多少时取得利润最大？

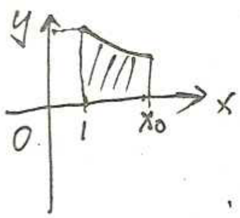
解：$P = 10x + 9y - 400 - 2x - 3y - 0.01(3x^2 + xy + 3y^2)$

$= 8x + 6y - 400 - 0.03x^2 - 0.01xy - 0.03y^2$

令 $\begin{cases} P_x = 8 - 0.06x - 0.01y = 0 \\ P_y = 6 - 0.01x - 0.06y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 120 \\ y = 80 \end{cases}$

∴当 $x=120$，$y=80$ 时，利润最大．

(12 分) 求一曲线，使其在区间 $[1, x]$ 上所形成的曲边梯形的面积大小为该曲线段终点坐标 $x$ 与 $y$ 之积的两倍减 4，且曲线过点 $(1, 2)$．设 $y=y(x)$ 为所求．




$$\int_1^{x_0} y(t)\,dt = 2x_0y_0 - 4$$

$$\therefore \int_1^{x} y(t)\,dt = 2xy - 4$$

$$\therefore y = 2y + 2xy'$$

$$\therefore 2xy' = -y$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{-1}{2x}\,dx$$

$$\ln|y| = -\frac{1}{2}\ln|x| + C$$

$$y = \frac{C}{\sqrt{x}}$$

$\therefore \sqrt{x}\,y = C$

$\because y(1) = 2$.

$\therefore \sqrt{1} \cdot 2 = C$

$\therefore C = 2$

$\therefore y = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$