$\therefore \int_0^T xf(x)dx = \frac{T}{2}\int_0^T f(x)dx$。

八、(1) $\because f'(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right] < 0$，$\therefore f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的递减。

(2) $g'(x) = n(1-x)^{n-1}\left[1-(n+1)x\right]$，在 (0, 1) 内，$W = \left\{\frac{1}{n+1}\right\}$，

而 $g(\frac{1}{n+1}) = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$，$g(0) = g(1) = 0$，由 $g(x)$ 在[0, 1]连续必有最大值。故

$\max\limits_{x\in[0,1]} g(x) = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$。由（1）知 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 单减，知 $\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$ 单增，

$\therefore \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} \le \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{e}$，从而 $\max\limits_{x\in[0,1]} g(x) \le \frac{1}{e}$。

九、令 $F(x) = f(x) - g(x)$。若在 (a,b) 内同一点 x_0 处取到最大值 M，则 $F(a) = F(x_0) = F(b) = 0$，由 Roll 定理得证。若在 (a,b) 内不同点取到最大值 M，不妨设 $f(x_1) = g(x_2) = M$，则 $F(x_1) = M - g(x_1) > 0$，$F(x_2) = f(x_2) - M < 0$，由根的存在定理，$\exists x_3 \in (a,b)$，使得 $F(x_3) = 0$，因此 $F(a) = F(x_3) = F(b) = 0$，由 Roll 定理得证。

2013 级试卷

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1.隐函数方程 $e^y + xy - e = 0$ 表示的曲线在对应 $x = 0$ 点处的法线方程为（　　）.

$A.\ y = -\frac{1}{e}x + 1$　$B.\ y = \frac{1}{e}x + 1$　$C.\ y = -ex + 1$　$D.\ y = ex + 1$

2. 下列反常积分收敛的是（　　）

$A.\ \int_{-\infty}^{0} e^x dx$　$B.\ \int_{1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$　$C.\ \int_{-\infty}^{0} e^{-x} dx$　$D.\ \int_{-\infty}^{0}\cos x dx$

3.设 $f(x)$ 满足 $xf''(x) + 3x[f'(x)]^2 = 1 - e^{-x}$，若 $f'(x_0) = 0$，$(x_0 \ne 0)$ 则函数 $f(x)$ 在点 x_0（　　）

A. 取得极大值　　*B.* 取得极小值　　*C.* 某个邻域内单调增加　*D.* 某个邻域内单调减少

4. 函数 $y = x + \dfrac{x}{x^2 - 1}$ 的图象（　　）.

A. 有水平渐近线和垂直渐近线　　*B.* 有倾斜渐近线和垂直渐近线

C. 无水平渐近线,无垂直渐近线　　*D.* 无倾斜渐近线,有垂直渐近线

5. 若 $f(x) = e^x \cos 2x$，则 $f''(x) - 2f'(x) + 6f(x) = ($　　$)$.

$A.\ e^x \sin 2x$，　$B.\ -e^x \sin 2x$，　$C.\ e^x \cos 2x$，　$D.\ -e^x \cos 2x$

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 假设 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ （ $x > 0$ ），则 $y = f(x)$ 的图形的拐点坐标为 ______。

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{n}\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{n}\right)^2} + \dfrac{2}{n}\sqrt{1+\left(\dfrac{2}{n}\right)^2} + \cdots + \dfrac{n}{n}\sqrt{1+\left(\dfrac{n}{n}\right)^2}\right) =$ ______________。

3. 函数 $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{|x|(x^2 - 4)}$ 的第二类间断点是 ____________________。

4. 设 $f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{\tan x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$，则 $f'(0) =$ ___ 。

5. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{(\arctan x)^2 + \sin x}{1 + x^2} dx =$ ______。

三、试解下列各题（每小题 7 分，共 35 分）

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x \ln(1 + x^2)}$　　2. 设 $y = \sqrt{x + \sqrt{x}} + e^{\arctan x^2} + x^x \quad (x > 0)$，求 dy.

3. 求函数 $f(x) = xe^x$ 的具有拉格朗日型余项的 n 阶麦克劳林公式.

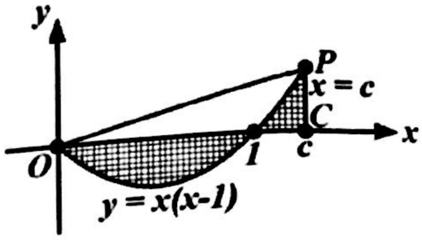
4. 求 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}} dx$.　　5.求 $\displaystyle\int \cos(\ln x) dx$.

四、（5 分）证明不等式：$\dfrac{\arctan x}{\ln(1+x)} < 1 + x \quad (x > 0)$.

五、（6 分）讨论方程 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin^5 t dt + \int_x^{\pi} \cos^5 t dt = 0$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ 内实根的个数.

六、（6 分）设函数 $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$，其中 a, b, c 为实常数，且 $c = b + \sqrt{3} = a + 2\sqrt{3}$，求函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, c]$ 上的最大值与最小值.

七、(6分) 已知抛物线 $y=x(x-1)$ 与直线 $y=0, x=c, (c>1)$ 所围成的图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积恰好等于直角三角形 OCP 绕 x 轴旋转一周所得锥体的体积,求 c 的值.(如图所示)



八.(6分) 设 $f(x)$ 在 $[0,c]$ 上连续,在 $(0,c)$ 内可导,$f(0)=0$,证明:$\exists \xi \in (0,c)$,

使得 $f(c)=(1+\xi)f'(\xi)\ln(1+c)$。

九、(6分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导,$f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连

续,$f(a)=f(b)=0$,证明:$\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)| \le \frac{1}{2}\int_a^b |f'(x)|dx$.

2013 级参考解答

一、DABBC　二、1. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{3}{4}\right)$; 2. $\frac{1}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right)$; 3. $x=-2$; 4. 1; 5. $\frac{\pi^3}{96}$.

三、1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6}$

2. $dy=\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}+e^{\arctan x^2}\frac{2x}{1+x^4}+x^x(\ln x+1)]dx$

3. $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{x^k}{(k-1)!}+\frac{(\theta x+n+1)e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$

4. $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx \underset{x=\tan t}{=} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sec t}{\tan^2 t}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt=-\frac{1}{\sin t}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{3}$

5. $\int\cos(\ln x)dx=x\cos(\ln x)+\int\sin(\ln x)dx=x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x)dx$

$\therefore \int\cos(\ln x)dx=\frac{x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)}{2}+C$

四、$F(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x$,

$F'(x)=\ln(1+x)+\frac{x^2}{1+x^2}>0, F(x)>F(0)=0$

五、$F(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\sin^5 t dt+\int_x^{\pi}\cos^5 t dt$,

$F(\frac{\pi}{2})=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^5 tdt<0, F(\pi)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^5 tdt>0,$

$\exists\xi\in(\frac{\pi}{2},\pi), F(\xi)=0$，$F'(x)=\sin^5 x-\cos^5 x>0, x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 实根个数为 1.

六、$f(x)=(x-b-\sqrt{3})(x-b)(x-b+\sqrt{3})==(x-b)^3-3(x-b)$，

$f'(x)=3(x-b)^2-3$，$f'(x)=0\Rightarrow x=b\pm1$，$f(a)=f(c)=0, f(b\pm1)=\mp2$，

$m=-2, M=2$

七、$V_1=\pi\int_0^c x^2(x-1)^2dx=\pi\left(\frac{1}{5}c^5-\frac{1}{2}c^4+\frac{1}{3}c^3\right)$，$V_2=\frac{\pi}{3}c^3(c-1)^2$，

$V_1=V_2\Rightarrow c=\frac{5}{4}$

八、$f(x), \ln(1+x)$ 符合柯西中值定理条件，由柯西中值定理：

$\frac{f(c)}{\ln(1+c)}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{1+\xi}}$，$f(c)=(1+\xi)f'(\xi)\ln(1+c)$

九、$\forall x\in[a,b]$，$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(x)dx\Rightarrow|f(x)|\le\int_a^x|f'(x)|dx$，

$f(x)-f(b)=\int_b^x f'(x)dx\Rightarrow|f(x)|\le\int_x^b|f'(x)|dx$。

$|f(x)|\le\frac{1}{2}\int_a^b|f'(x)|dx$，$\therefore\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{1}{2}\int_a^b|f'(x)|dx$

2014 级试卷

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $f(0)=0, \lim\limits_{x\to0}\frac{x}{f(-x)}=-2$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为（　　）.

   $A.\ y=-\frac{1}{2}x$；　$B.\ y=\frac{1}{2}x$；　$C.\ y=-2x$；　$D.\ y=2x$.

2. 已知 $\frac{1}{1-x}=ax^2+bx+c+o(x^2), (x\to0)$，其中 a,b,c 为常数，则（　　）.

   $A.\ abc=1$；　$B.\ abc=2$；　$C.\ abc=3$；　$D.\ abc=4$.

3. 设圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 所围成图形绕 y 轴旋转一周所成的旋转体，则体积为(　　)