2012-2013 学年第二学期高等数学期中测试及数学竞赛试卷（2012 级）

（参加竞赛的同学全做，其他同学只做一、二大题）

一、填空题（8×6 分）

1. 设$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{p}=3\vec{a}-2\vec{b}$，$\vec{q}=4\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{p}\perp\vec{q}$，则$\left(\vec{a},\hat{\vec{b}}\right)=$____________，$|\vec{p}\times\vec{q}|=$__________。

2. 直线$\begin{cases}2x-4y+z=0\\3x-y-2z-9=0\end{cases}$在平面$4x-y+z-1=0$上的投影直线方程为_______________________。

3. 设$u=x^3-y^3+x^2y+2xy+xy^2$，则$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=$_________________。

4. 曲面$2xy+z-e^z-3=0$在点$M(1,2,0)$处的切平面方程为_______________________。

5. 设$F(u,v)$可微，$z=z(x,y)$由方程$F\left(\dfrac{x}{z},\dfrac{y}{z}\right)=0$所确定，则$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$____________。

6. 交换积分次序$\int_0^1 dy\int_0^{2y} f(x,y)\,dx+\int_1^3 dy\int_0^{3-y} f(x,y)\,dx=$________________________________。

7. 二次积分$\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dy$在极坐标系下先对$r$积分的二次积分为_______________________。

8. 已知$f(x,y)$具连续二阶偏导，$L:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$（顺时针方向），则

$$\oint_L \left[3y+f_x(x,y)\right]dx+f_y(x,y)\,dy=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_。$$

二、计算题（4×13 分）

1. 已知$f(x,y)$可微，且$f(1,2)=2$，$f_x'(1,2)=3$，$f_y'(1,2)=4$，记$\varphi(x)=f(x,f(x,2x))$，计算$\varphi'(1)$。

2. 在曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 上找一点，使它到点 $(1,\sqrt{2},3\sqrt{3})$ 的距离最短，并求最短距离。

3. 已知 $D: x^2+y^2 \le 9$，计算二重积分 $\iint\limits_{D}\left|x^2+y^2-4\right|dxdy$。

4. 设 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}\ (R>0)$ 的下侧，求 $\iint\limits_{\Sigma}x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$。

三、数学竞赛加题（5×20 分）

1. 1）求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$；

2）$f(x)=\int_1^x \dfrac{2\ln u}{1+u}du$，求 $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$。

2. 设 $\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，求 1）$\varphi'(x)$；2）讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

3. 计算 1）求 $\int \frac{x\cos^4 \frac{x}{2}}{\sin^3 x} dx$； 2）$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+x)} dx$。

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(0)=f(1)=0$，$f'(0)f'(1)>0$，证明：存在 $\xi \in (0,1)$，$\eta \in (0,1)$，使得 $f(\xi)=0$，$f''(\eta)=0$。

5. 已知 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\, dx\,(n>1)$，证明：1）$I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$；2）$\frac{1}{2(n+1)} < I_n < \frac{1}{2(n-1)}$。

参考答案

一、

1. 第一空 $\arccos\frac{2}{5}$ ；第二空 $\frac{22}{5}\sqrt{21}$

2. $\begin{cases}17x+31y-37z-117=0\\4x-y+z-1=0\end{cases}$

3. $12x+4$

4. $2x+y-4=0$

5. z

6. $\int_0^2 dx\int_{\frac{x}{2}}^{3\text{-}x} f(x,y)\,dy$

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^a f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\,dr$

8. 6π

二、

1. 47

2. 所求点为 $\left(2,2\sqrt{2},2\sqrt{3}\right)$ ；最短距离为 $\sqrt{6}$

3. $\frac{41}{2}\pi$

4. $\frac{6}{5}\pi R^5$

三、

1. 1） $e^{-\frac{1}{2}}$ 2） $\ln^2 x$

2. 1) $\varphi'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)\,du}{x^2}, & x\neq 0\\ \dfrac{A}{2}, & x=0\end{cases}$ 提示：令 $xt=u$（注意本题默认函数 $f(x)$ 连续，否则积分上限函数无法求导）； 2）连续

3. 1） $-\frac{x}{8}\csc^2\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\cot\frac{x}{2}+C$ 2） $1-\ln 2$