2014-2015 学年第二学期《高等数学 AⅡ》试卷

一、填空题（每小题 3 分，共 24 分）

1. 设 $\vec{a}=(2,1,-3)$，$\vec{b}=(-3,2,1)$，则 $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=$________________。

2. 设 $f(x,y,z)=\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$，则 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=$________________。

3. 设 $f(u)$ 可导，$x^2+y^2+z^2=yf\left(\dfrac{z}{y}\right)$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$______________________。

4. 设 D：$0\le y\le\sqrt{a^2-x^2}$，$0\le x\le a$，由二重积分的几何意义知

$$\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_。$$

5. L 为圆周 $x^2+y^2=1$，则 $\oint_L x^2ds=$________________。

6. 周期为 2π 的周期函数 $f(x)$，它在一个周期上的表达式为 $f(x)=x\,(-\pi\le x<\pi)$，设它的傅立叶级数的和函数为 $S(x)$，则 $S\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=$________________。

7. 若级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$，则其和是________________。

8. 已知 t，$t\ln t$ 是微分方程 $x''-\dfrac{1}{t}x'+\dfrac{1}{t^2}x=0$ 的解，则其通解为 $x(t)=$ _____________________。

二、计算题（每小题 8 分，共 32 分）

1. 已知两条直线的方程是 l_1：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$，$l_2$：$\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$，求过 l_1 且平行于 l_2 的平面方程。

2. 设$z = yf(x+y, x-y)$，f 具有二阶连续偏导数，求$\frac{\partial z}{\partial y}$及$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$。

3. 设Ω是由$x^2+y^2+z^2 \le R^2$，$z \ge \sqrt{x^2+y^2}$所确定的闭区域，计算$\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dv$。

4. 求微分方程$y'' + 2yy' = y'^2$满足条件$y(1)=0$，$y'(1)=2$的特解。

三、综合题（每小题 11 分，共 44 分）

1. 用拉格朗日乘数法求解下面的问题，隧道截面的上部为半圆，下部为矩形，若隧道截面的周界长 L 固定，问矩形的边长各为多少时，隧道截面的面积最大？

2. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} y^2 z^2 dydz + zdxdy$，其中 Σ 为下半球面 $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的下侧，$R > 0$。

3. 试求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$的和函数，并计算级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}$的和。

4. 已知上半平面内一曲线$y=y(x)\,(x\geq 0)$过原点，且曲线上任一点$M(x_0,y_0)$处切线斜率数值上等于该点横坐标与纵坐标之和的2倍减去由此曲线与x轴，直线$x=x_0$所围成的面积，求此曲线方程。