近五年《高等数学Ⅰ》期中试卷

2010级试卷

一、填空题(每小题3分，共计15分)

1、函数$f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\ln x}}{x-1}$的定义域为________________。

2、设$f(x)$在x_0处可导，则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-2\Delta x)}{\Delta x}=$________________。

3、设函数$f(x)=\begin{cases}\sin x & x\le 0\\ \ln(1+x) & x>0\end{cases}$，则$f(x)$的可导区间为________________。

4、$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{2}{x^2}}=$______。 5、设$0<x<1$，则$d(\sqrt{x}\arctan\sqrt{x})=$______$d(\sqrt{x})$。

二、选择题(每小题3分，共计15分)

1. 当$x\to 0$时，$(\sqrt{x}-x)\ln(1+x)$是x的（　　）阶无穷小。

$A.\ 2$　　$B.\ \dfrac{3}{2}$　　$C.\ \dfrac{1}{2}$　　$D.\ \dfrac{2}{3}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$等于(　　)

$A.$ 不存在　　$B.\ 0$　　$C.\ 1$　　$D.\ \infty$.

3. 下列命题正确的是（　　）

$A.$ 数列$\{a_n\}$极限存在的充要条件是数列$\{a_{2n}\}$与$\{a_{2n+1}\}$极限都存在;

$B.$ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的充要条件是$f(x_0+0)$与$f(x_0-0)$都存在;

$C.$ $f(x)$在x_0处连续的充要条件是$f(x)$在x_0处既是左连续，又是右连续;

$D.$ $f(x)$在x_0处可导的充要条件是$f'_+(x_0)$与$f'_-(x_0)$都存在。

4、当$x\to 0$时，变量$\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$是（　　）

$A.$无穷小　　$B.$无穷大　　$C.$有界量但不是无穷小　　$D.$无界量但不是无穷大

5、下列函数中在$[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$上满足Roll中值定理条件的是（　　）

A. $y=|\cos x|$ B. $y=|x|$ C. $y=|\tan x|$ D. $y=|\sin x|$

三、解答题(每小题5分，共计30分)

1、用$\varepsilon-\delta$定义证明：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x}=0$。 2、设$\varphi(x)$可导，求$y=\sqrt[\varphi(x)]{\varphi(x)}$的导函数。

3、求曲线$y=e^{xy}+x$上对应于$x=0$处的法线方程。

4、已知$f(x)=\ln x, g(x)=\sec^2 x$，求$f'(g(x))$与$[f(g(x))]'$。

5、设$f(x)=\ln(1+x)$，求$f^{(20)}(x)$。 6、设$\begin{cases}x=\sqrt{1+t^2}\\ y=\arctan t\end{cases}$，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

四、(6分) 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$。

五、(6分) 设$f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，求$f(x)$的间断点及类型。

六、(6分) 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，求 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[na_n]}{n}$； (2) 设$a>0$,求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$。

七、(6分) 证明方程$x-2\sin x=a(a>0)$至少有一正实根。

八、(5分) 利用单调有界原理证明$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$存在。

九. (5分) 设函数$f(x)$在□ 上可导，且对$\forall x\in$□ 有$|f'(x)|\le k<1$。证明存在$\xi\in$□，使得$f(\xi)=\xi$。

2010级参考答案

一、1. $\left\{x \middle| x\ge \dfrac{1}{e}, x\ne 1\right\}$；2. $2f'(x_0)$；3. $(-\infty,+\infty)$；4. e^{-1}；5. $\arctan\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$。

二、BCCDA.

三、1. $\because x\to 1,\therefore$不妨设$|x-1|<\dfrac{1}{2}$，则对于$\forall\varepsilon>0$，要$\left|\dfrac{x-1}{x}-0\right|<2|x-1|<\varepsilon$，

则$|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，所以取$\delta=\min\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{\varepsilon}{2}\right\}$，则当$0<|x-1|<\delta$时，就有$\left|\dfrac{x-1}{x}-0\right|<\varepsilon$，

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x}=0$。

2、$\ln y=\frac{\ln\phi(x)}{\phi(x)}$ ，$\frac{y'}{y}=\frac{\phi'(x)-\phi'(x)\ln\phi(x)}{\phi^2(x)}$ $y'={}^{\phi(x)}\sqrt{\phi(x)}\,\frac{\phi'(x)-\phi'(x)\ln\phi(x)}{\phi^2(x)}$

3、$y'=e^{xy}(y+xy')+1\Rightarrow y'(0)=2$，所以法线方程$x+2y-2=0$。

4、$f'(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow f'(g(x))=\cos^2 x$；

$[f(g(x))]'=f'(g(x))g'(x)=\cos^2 x\cdot 2\sec^2 x\tan x=2\tan x$。

5、$f^{(20)}(x)=\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(19)}=-\frac{19!}{(1+x)^{20}}$ 6、$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{t\sqrt{1+t^2}},\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1+2t^2}{t^3(1+t^2)}$

四、原式$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}$。

五、$f(x)=e^{\frac{x}{\sin x}}$，$\because \lim\limits_{x\to 0}f(x)=e,\therefore x=0$是可去间断点；又因为$f(x)$在$x=k\pi(k\neq 0)$处的单侧极限至少有一个为$\infty$，所以$x=k\pi(k\neq 0)$为$f(x)$的第二类间断点。

六、（1）$\because na_n-1<[na_n]\le na_n,\therefore a_n-\frac{1}{n}<\frac{[na_n]}{n}\le a_n$，由夹逼定理$\lim\limits_{x\to 0}\frac{[na_n]}{n}=a.$

（2）由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$, 对于 $\varepsilon=\frac{a}{2}>0,\exists N$,当$n>N$时,有$|a_n-a|<\frac{a}{2}$，即有 $\frac{a}{2}<a_n<\frac{3a}{2}$，所以 $\sqrt[n]{\frac{a}{2}}<\sqrt[n]{a_n}<\sqrt[n]{\frac{3a}{2}}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a}{2}}=1$和$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3a}{2}}=1$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1.$

七、设$f(x)=x-2\sin x-a,f(0)=-a<0,\ f(3+a)=3-2\sin(3+a)>0$，
又$f(x)$在$[0,3+a]$上连续，由根的存在定理得证。

八、设$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，则$x_n>0$；由$\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}\ge\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots\frac{1}{x_n}}$

得$\sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\cdot 1}\ge\frac{n+2}{\frac{n}{n+1}\cdot(n+1)+1}=1+\frac{1}{n+1}$，即有$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\ge\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$，

所以$\{x_n\}$单减，命题得证。

九、设$F(x)=f(x)-x$, 则$F'(x)=f'(x)-1\le k-1<0$。对$\forall x\in$□，由 Lagrange 定理，$F(x)=F(0)+F'(\xi)x,\xi$介于0与 x 之间。由$F'(x)\le k-1<0$知$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=-\infty$，因此 $\exists X>0$ 当 $\exists x>X$ 时，有 $F(x)<0$，取 $x_1>X>0$,使得$F(x_1)<0$，同理$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=+\infty$，必存在 $x_2<0$,使得$F(x_2)>0$，又 $F(x)$ 连续，由根的存在定理$\exists\xi\in(x_2,x_1),F(\xi)=0$,即$f(\xi)=\xi$.

2011 级试卷

一、填空题(每小题 3 分，共 15 分):

1、设$y=f(x)$的定义域为$(0,1]$，$\varphi(x)=1-\ln x$，则复合函数$y=f[\varphi(x)]$的定义域为______.　　2、当$x\to 0$时，$\tan^2(2x^3)$与x^k是同阶无穷小，则$k=$__________.

3、设$f'(3)=2$，则$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$________.

4、已知$f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-2011)$，则$f'(2011)=$________.

5、曲线$e^y+xy=e$在点$(0,1)$处的切线方程为________________.

二、选择题(每小题 3 分，共 15 分):

1、如果$\lim\limits_{x\to a}f(x)$存在，$\lim\limits_{x\to a}g(x)$不存在，则$\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$(　　)

(A) 必存在;　(B) 必不存在;　(C) 可能存在;　(D) 不能确定.

2、设$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+a)x^4+bx^3+2}{x^3+x^2-1}=-2$，则$a,b$为(　　)

(A) $a=-3,b=0$；(B) $a=0,b=-2$；(C) $a=-1,b=0$；(D) $a=-1,b=-2$.

3、函数$f(x)$在点$x=x_0$处可导，当自变量x由x_0增加到$x_0+\Delta x$时，记Δy为$f(x)$的增量，dy为$f(x)$的微分，则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y-dy}{\Delta x}$等于(　　)

(A) 0；(B) -1；(C) 1；(D) ∞.

4、设函数$f(x)=\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+3e^{\frac{1}{x}}}$，则$x=0$是$f(x)$的(　　)

(A) 可去间断点;　(B) 跳跃间断点;　(C) 无穷间断点;　(D) 振荡间断点.

5、下列命题正确的是(　　)

(A) 无穷小量是一个很小很小的数;　(B) 无穷大量是一个很大很大的数;

(C) 无穷大量必是无界变量;　(D) 无界变量必是无穷大量.