2007-2008 学年第二学期高等数学期中测试及数学竞赛试卷（2007 级）

（参加竞赛的同学全做，其他同学只做一、二大题）

一、填空题（10×6 分）

1. 设 $\vec{a}=(2,-3,1)$，$\vec{b}=(1,-1,3)$，则 $(-2\vec{a})\cdot(3\vec{b})=$ -48，$\vec{a}\times(2\vec{b})=$ $(-16,-10,2)$。

2. 设 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为单位向量，且满足 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=$ $-\frac{3}{2}$。

3. xOy 坐标面上曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ 绕 y 轴一周的旋转面名称是 旋转单叶双曲面，旋转面的方程是 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$。（10级—3）

4. 过直线 $L_1: x=2t-1, y=3t+2, z=2t-3$ 和 $L_2: x=2t+3, y=3t-1, z=2t+1$ 的平面方程为 $x-z-2=0$。（11级—2）

5. 直线 $\begin{cases}2x-4y+z=0\\3x-y-2z-9=0\end{cases}$ 在平面 $4x-y+z-1=0$ 上的投影直线方程为 $\begin{cases}17x+31y-37z-117=0\\4x-y+z-1=0\end{cases}$。（12级—2）

6. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{3(x^2+y^2)^2e^{x^2y^2}}=$ $\frac{1}{6}$。

7. 设 $z=\arctan(xy^2+1)$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ $\frac{y^2}{1+(xy^2+1)^2}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=$ $\frac{2xy}{1+(xy^2+1)^2}$。

8. $z=z(x,y)$ 由 $F(x^2-y^2, y^2-z^2)=0$ 所确定，$F(u,v)$ 可微，则 $yz\frac{\partial z}{\partial x}+xz\frac{\partial z}{\partial y}=$ xy。

9. 曲线 $x=t^2-1, y=t+1, z=t^3$ 在点 $(0,2,1)$ 处的切线方程为 $\frac{x}{2}=y-2=\frac{z-1}{3}$。

10. 设 $U=\ln(x^2+y^2+z^2)$，则 $gradU\big|_{(1,1,1)}=$ $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$。

二、计算题（2×20 分）

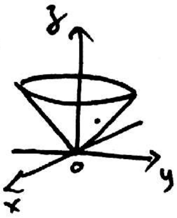
1. 设 g 具二阶导数，f 具二阶偏导，$z=g(x+y)+f\left(xy,\frac{x}{y}\right)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

（11级 二 1）

2. 在曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 上找一点，使它到点 $\left(1,\sqrt{2},3\sqrt{3}\right)$ 的距离最短，并求最短距离。

法一：（12级二.2）Lagrange乘数法

法二：



由圆锥面图形特点，所求点在第一卦限，

过该点的法线通过 $(1,\sqrt{2},3\sqrt{3})$.

设所求点为 (x_0,y_0,z_0)，$x_0,y_0,z_0>0$

法线方向向量为 $\left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}},\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}},-1\right)\parallel\left(x_0-1,y_0-\sqrt{2},z_0-3\sqrt{3}\right)$

由 $\begin{cases}\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=t(x_0-1)\\ \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=t(y_0-\sqrt{2})\\ -1=t(z_0-3\sqrt{3})\\ z_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2}\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=2\\ y_0=2\sqrt{2}\\ z_0=2\sqrt{3}\end{cases}$

$\therefore$ 所求点为 $(2,2\sqrt{2},2\sqrt{3})$

$d_{min}=\sqrt{(2-1)^2+(2\sqrt{2}-\sqrt{2})^2+(2\sqrt{3}-3\sqrt{3})^2}=\sqrt{6}$.

三、数学竞赛加题（5×20 分）

1. 求极限：1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}-1}{2}\right)^n\ (a>0)$；　2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+4}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+16}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+4n^2}}\right)$。

法一：

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{2}\right)^{\frac{2}{a^{\frac{1}{n}}-1}}\right]^{\frac{n(a^{\frac{1}{n}}-1)}{2}}$

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{2}\right)^{\frac{2}{a^{\frac{1}{n}}-1}}=e$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(a^{\frac{1}{n}}-1)}{2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot\frac{1}{n}\cdot\ln a}{2}=\frac{\ln a}{2}$

$\therefore$ 原式 $=e^{\frac{\ln a}{2}}=\sqrt{a}$

法二：考虑 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{a^x-1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

利用函数极限与数列极限关系.

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+4\cdot(\frac{i}{n})^2}}$

$=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}}$

$=\int_0^1\frac{1}{2}\cdot\frac{d(2x)}{\sqrt{(2x)^2+1}}$

$=\frac{1}{2}\left[\ln\left(2x+\sqrt{(2x)^2+1}\right)\right]_0^1$

$=\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})$

2. 设$\varphi(x)$具二阶连续导数，$\varphi(0)=1$，$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，

1）确定a使$f(x)$在$x=0$处连续；2）求$f'(x)$并证明$f'(x)$在$x=0$处连续。

（08级 三1）

3. 设一质点在平面内运动，它的坐标为$x=t^3-t, y=t^4+t\ (-\infty<t<+\infty)$，证明质点运动曲线在$t=0$处有一拐点，且运动速度在$t=0$处有一极大值。

1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{4t^3+1}{3t^2-1}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{12t^2(3t^2-1)-(4t^3+1)\cdot 6t}{(3t^2-1)^3}=\dfrac{12t^4-12t^2-6t}{(3t^2-1)^3}=\dfrac{6(2t^4-2t^2-t)}{(3t^2-1)^3}$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6(8t^3-4t-1)(3t^2-1)^3-6(2t^4-2t^2-t)\cdot 3(3t^2-1)^2\cdot 6t}{(3t^2-1)^7}$$

易见 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=0$，$\dfrac{d^3y}{dx^3}=-6\neq 0$ ∴运动曲线在$t=0$处有一拐点.

2) $V(t)=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(3t^2-1)^2+(4t^3+1)^2}=\sqrt{16t^6+9t^4+8t^3-6t^2+2}$

$$V'(t)=\frac{16\times 6t^5+9\times 4t^3+8\times 3t^2-6\times 2t}{2\sqrt{16t^6+9t^4+8t^3-6t^2+2}}=\frac{6(8t^5+3t^3+2t^2-t)}{\sqrt{16t^6+9t^4+8t^3-6t^2+2}}$$

$$V''(t)=\frac{6\cdot(40t^4+9t^2+4t-1)\cdot\sqrt{16t^6+9t^4+8t^3-6t^2+2}-6\cdot(8t^5+3t^3+2t^2-t)\cdot\frac{(16t^6+9t^4+8t^3-6t^2+2)'}{2\sqrt{16t^6+9t^4+8t^3-6t^2+2}}}{16t^6+9t^4+8t^3-6t^2+2}$$

易见 $V'(0)=0$，$V''(0)=-3\sqrt{2}<0$.

∴运动速度在$t=0$处有一极大值.

4. 1）计算：$\int \frac{2\ln x+1}{x^3(\ln x)^2}dx$；

原式 $= \int \frac{2x\ln x + x}{(x^2\ln x)^2}dx$

$= \int \frac{d(x^2\ln x)}{(x^2\ln x)^2}$

$= -\frac{1}{x^2\ln x} + C$

2）设 $f(x)$ 连续，$\int_0^x tf(x-t)\,dt = 1-\cos x$，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$。

令 $x-t=u$，$\int_0^x t f(x-t)\,dt = \int_x^0 (x-u)f(u)\cdot(-1)du$

$= \int_0^x (x-u)f(u)du = x\int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du$

求导得：$\int_0^x f(u)du + xf(x) - xf(x) = (1-\cos x)' = \sin x$

$\therefore \int_0^x f(u)du = \sin x$

从而 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)du = \sin\frac{\pi}{2} = 1$.

5. 1）设 $f(x)$ 可导，$f(1)=0$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $f(\xi) = -\xi f'(\xi)$。

令 $F(x) = xf(x)$. 则 $F'(x) = f(x) + xf'(x)$

由已知，$F(0) = F(1) = 0$.

$\therefore$ 由 Rolle Th，$\exists\,\xi\in(0,1)$ s.t. $F'(\xi)=0$.

此时 $f(\xi) = -\xi f'(\xi)$，结论成立.

2）比较 e^{π} 与 π^{e} 大小，并说明理由。

设 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0$，$x>e \Rightarrow f(x)$ 在 $[e,+\infty)$ 上 $\searrow$

$\therefore f(\pi) < f(e)$

即 $\frac{\ln\pi}{\pi} < \frac{\ln e}{e} \Rightarrow e\ln\pi < \pi\ln e \Rightarrow \pi^e < e^{\pi}$