# 2013-2014 学年第二学期高等数学期中测试及数学竞赛试卷（2013 级）

（参加竞赛的同学全做，其他同学只做一、二大题）

**一、填空题**（8×5 分）

1. 设 $\vec{a}=(2,1,-2)$，$\vec{b}=(1,-1,-1)$，则 $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=$______，$(3\vec{a}-5\vec{b})\times(5\vec{a}-8\vec{b})=$____________。

2. 过三点 $A(0,4,-5)$，$B(-1,-2,2)$，$C(4,2,1)$ 的平面方程为____________________________。

3. 直线 $L:\begin{cases}x-y-1=0\\ y+z-1=0\end{cases}$ 在平面 $\pi: x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 $L_0$ 的方程为__________________。

4. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}(a\neq 0)=$______________。

5. 设 $z=(1+xy)^y$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=$___________，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}=$_____________。

6. 曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $2x+4y-z=0$ 平行的切平面方程是______________________。

7. 已知 $f(x,y)$ 可微，且 $f(1,2)=2$，$f'_x(1,2)=3$，$f'_y(1,2)=4$，记 $\varphi(x)=f(x,f(x,2x))$，$\varphi'(1)=$______。

8. 由 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$，则 $dz|_{(1,0,-1)}=$___________________。

**二、计算题**（4×15 分）

1. 设直线通过点 $P(-3,5,-9)$，且和两直线 $L_1:\begin{cases}y=3x+5\\ z=2x-3\end{cases}$，$L_2:\begin{cases}y=4x-7\\ z=5x+10\end{cases}$ 相交，求此直线方程。

2. 设 $f$ 具二阶导数，$g$ 具二阶偏导，$z = f(2x+3y) + g(xy, x+y)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

3. 设在 $xOy$ 面上，各点的温度 $T$ 与点的关系为 $T = 4x^2 + 9y^2$，点 $P_0(9,4)$，求 1） $gradT\big|_{P_0}$；2）在点 $P_0$ 处沿极角为 $\dfrac{7}{6}\pi$ 的方向 $\vec{l}$ 的温度变化率；3）在何方向上点 $P_0$ 处的温度变化率取得最大值并求之。

4. 求二元函数 $f(x,y) = x^2(2+y^2) + y\ln y$ 的极值（需判定极大、极小）。

**三、数学竞赛加题**（5×20 分）

1. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$，记 $a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，1）求 $a$；2）当 $x\to 0$ 时，$f(x)-a$ 与 $x^k$ 是同阶无穷小，求常数 $k$。

2. 设 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0\\ f'(0), & x=0\end{cases}$，其中 $f(x)$ 具有连续导数且 $f(0)=0$，$f''(0)$ 存在，1）求 $F'(x)$；2）$F'(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续（要有过程）。

3. 1）$\begin{cases} x = \sin t \\ y = t\sin t + \cos t \end{cases}$，求 $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$；　　2）计算 $\int_0^1 \dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$，其中 $f(x) = \int_1^x \dfrac{\ln(t+1)}{t}dt$

。

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可微，且 $f(0) = f(1) = 0$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$，求证：1）在 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 内至少有一点 $\xi$，使得 $f(\xi) = \xi$；2）在 $(0,\xi)$ 内至少有一点 $\eta$，使得 $f'(\eta) = f(\eta) - \eta + 1$。

5. 1）比较 $\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| dt$ $(n = 1,2,\cdots)$ 的大小，说明理由；

2）记 $u_n = \int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n dt$ $(n = 1,2,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$。

## 参考答案

一、

1. 第一空 $6$ ；第二空 $(-3,0,-3)$

2. $11x-17y-13z+3=0$

3. $\begin{cases} x-3y-2z+1=0 \\ x-y+2z-1=0 \end{cases}$

4. $e^{\frac{1}{a}}$

5. 第一空 $1$ ；第二空 $2\ln 2+1$

6. $2x+4y-z-5=0$

7. $47$

8. $dx-\sqrt{2}dy$

二、

1. $\begin{cases} 2x-z-3=0 \\ 34x-y-6z+53=0 \end{cases}$ 或 $x+3=\dfrac{y-5}{22}=\dfrac{z+9}{2}$

2. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2f'+yg_1'+g_2'$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=3f'+xg_1'+g_2'$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6f''+g_1'+xyg_{11}''+yg_{12}''+xg_{21}''+g_{22}''$

3. 1）$(72,72)$　2）$-36\left(\sqrt{3}+1\right)$　3）$gradT\big|_{P_0}$ 方向上有最大变化率 $72\sqrt{2}$

4. 极小值 $f\left(0,\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{e}$

三、

1. 1）1　2）1　提示：泰勒公式

2. 1) $F'(x)=\begin{cases} \dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}, & x\neq 0 \\ \dfrac{1}{2}f''(0), & x=0 \end{cases}$　2）连续

3. 1）$\sec t$　2）$-4\ln 2+8-2\pi$

4. 提示：1）零点定理　2）罗尔定理

5. 1） $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt < \int_0^1 t^n |\ln t| dt \ (n=1,2,\cdots)$ 2） 0