2017—2018 学年第一学期《高等数学》期中试卷 （2017 级）

学院__________ 学号__________ 姓名__________ 成绩__________

一、填空题（8 × 3 分）

1. $\lim\limits_{t\to1}\dfrac{\sqrt{3-t}-\sqrt{1+t}}{t^2+t-2}=$ $-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ 。

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+x)(1+2x+3\sin x)}{x^2}=$ 2 。

3. 当 $x\to0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=(e^x-1)\ln(1+bx^2)$ 等价，则 $(a,b)=$ $(1,\frac{1}{6})$ 。

4. 设 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$，则 $f(x)$ 的可去间断点是 $x=0$ ，$f(x)$ 的跳跃间断点是 $x=1$ 。

5. 已知 $f(0)=0$，$f'(0)=3$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$ -3 。

6. 已知 $f(x)=\ln(\tan x+\sec x)+\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$，则 $f'(x)=$ $\sec x+\dfrac{1}{1+x^2}$ 。

7. 设 $y=(1+\sin x)^x$，则 $dy=$ $(1+\sin x)^x\left[\ln(1+\sin x)+\dfrac{x\cos x}{1+\sin x}\right]dx$ 。

8. 曲线 $xy+2\ln x=y^4$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程 $y=x$ 。

二、计算（6×6 分）

1、$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{x^2}$ 　　 2、$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\tan\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$

1. 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x\cos 2x\cos 3x+\cos x\cdot 2\sin 2x\cos 3x+\cos x\cos 2x\cdot 3\sin 3x}{2x}$

$=\frac{1}{2}+2+\frac{9}{2}=7$

2. 令 $x=\frac{1}{t}$

原式 $=\lim\limits_{t\to0^+}\left(\dfrac{\tan t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}}=\lim\limits_{t\to0^+}\left[\left(1+\dfrac{\tan t-t}{t}\right)^{\frac{t}{\tan t-t}}\right]^{\frac{\tan t-t}{t^3}}$

$\because \lim\limits_{t\to0^+}\left(1+\dfrac{\tan t-t}{t}\right)^{\frac{t}{\tan t-t}}=e$

$\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\tan t-t}{t^3}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{t+\frac{t^3}{3}+o(t^3)-t}{t^3}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore$ 原式 $=e^{\frac{1}{3}}$

3、$y=\ln f(x)$，求$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{f''(x)\cdot f(x)-[f'(x)]^2}{f^2(x)}$$

4、$\begin{cases}x=\sin t\\ y=t\sin t+\cos t\end{cases}$，求$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{\frac{\pi}{4}}$。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin t+t\cos t-\sin t}{\cos t}=t$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{1}{\cos t}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$$

5、已知$f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, & x\ge 1,\\ 2x-1, & x<1\end{cases}$，

$y=f(f(x))$，求$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=e}$。

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=e}=\left.f'(f(x))\cdot f'(x)\right|_{x=e}$$

$$=f'(\tfrac{1}{2})\cdot f'(e)$$

$$=2\cdot\left.\frac{1}{2x}\right|_{x=e}=\frac{1}{e}$$

6、$y=\dfrac{1}{x^2-5x+4}$，求$y^{(2017)}$。

$$y=\frac{1}{(x-1)(x-4)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-1}\right)$$

$$y^{(n)}=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{x-4}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x-4)^{n+1}}-\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x-1)^{n+1}}\right]$$

$$\therefore y^{(2017)}=\frac{2017!}{3}\left[\frac{1}{(x-1)^{2018}}-\frac{1}{(x-4)^{2018}}\right]$$

三、确定常数a,b使函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{4x}-e^{x}}{x}, x<0,\\ a\cos x+bx, x\geq 0,\end{cases}$处处可导，并求$f'(x)$。（8分）

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{4x}-e^{x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{4e^{4x}-e^{x}}{1}=3=f(0)=a$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{e^{4x}-e^{x}}{x}-3}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{4x}-e^{x}-3x}{x^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{4e^{4x}-e^{x}-3}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{16e^{4x}-e^{x}}{2}=\frac{15}{2}$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{3\cos x+bx-3}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-3\sin x+b}{1}=b=f'_-(0)=f'(0)$$

$\therefore a=3,\ b=\frac{15}{2}$

且 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{(4e^{4x}-e^{x})\cdot x-(e^{4x}-e^{x})}{x^2}, & x<0\\ -3\sin x+\dfrac{15}{2}, & x\geq 0\end{cases}$

四、求$y=(x+6)e^{\frac{1}{x}}$的单调区间、凹凸区间、极值、渐近线及曲线的拐点（要求列表表示）。（12分）

① $y'=\dfrac{x^2-x-6}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=\dfrac{(x-3)(x+2)}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

x:	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	$(0,3)$	3	$(3,+\infty)$
y':	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y:	↗	极大值	↘	↘	极小值	↗

② $y''=\dfrac{13x+6}{x^4}e^{\frac{1}{x}}$

x:	$(-\infty,-\frac{6}{13})$	$-\frac{6}{13}$	$(-\frac{6}{13},0)$	$(0,+\infty)$
y'':	$-$	0	$+$	$+$
y:	$\cap$	拐点	$\cup$	$\cup$

∴单调增区间:

$(-\infty,-2]$, $[3,+\infty)$

单调减区间:

$[-2,0)$, $(0,3]$

极大值 $y(-2)=4e^{-\frac{1}{2}}$

极小值 $y(3)=9e^{\frac{1}{3}}$

凸区间: $(-\infty,-\frac{6}{13}]$

凹区间: $[-\frac{6}{13},0)$, $(0,+\infty)$

拐点: $(-\frac{6}{13}, \frac{72}{13}e^{-\frac{13}{6}})$

③ $\lim\limits_{x\to\infty}(x+6)e^{\frac{1}{x}}=\infty$ ∴无水平渐近线

$\lim\limits_{x\to 0^+}(x+6)e^{\frac{1}{x}}=+\infty$ ∴有垂直渐近线 $x=0$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+6)e^{\frac{1}{x}}}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}[(x+6)e^{\frac{1}{x}}-x]=\lim\limits_{x\to\infty}[x(e^{\frac{1}{x}}-1)+6e^{\frac{1}{x}}]$

$=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}6e^{\frac{1}{x}}=1+6=7$ ∴有斜渐近线 $y=x+7$

五、曲线 $xy=1$ 在第一象限有一定点 $P(a,\frac{1}{a})$，曲线在第三象限有一动点 Q，求 Q 点坐标使线段 PQ 的长度最短。(8 分)

设 $Q(x,\frac{1}{x})$ $(x<0)$

$$|PQ|^2=(x-a)^2+(\frac{1}{x}-\frac{1}{a})^2=:f(x)$$

$$f'(x)=2(x-a)+2(\frac{1}{x}-\frac{1}{a})\cdot(-\frac{1}{x^2})=2(x-a)(1+\frac{1}{ax^3})$$

$\therefore f(x)$ 有唯一驻点，$x=-\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$

从而 $Q\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{a}},-\sqrt[3]{a}\right)$

六、证明题 (12 分):

(1) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=f(1)=0$，$f(\frac{1}{2})=1$，则存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $f'(\xi)=1$。

令 $F(x)=f(x)-x$

$F(0)=0$，$F(1)=-1<0$，$F(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}>0$

从而 $\exists\eta\in(\frac{1}{2},1)$ s.t. $F(\eta)=0$

由 Rolle th，

$\exists\xi\in(0,\eta)$ s.t. $F'(\xi)=f'(\xi)-1=0$

从而 $f'(\xi)=1$，结论成立．

(2) $0<x<1$ 时，$(1+x)\ln x<2(x-1)$。

令 $f(x)=(1+x)\ln x-2(x-1)$，$0<x\le1$

$$f'(x)=\ln x+\frac{1+x}{x}-2=\ln x+\frac{1}{x}-1$$

$$f''(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}<0,\quad 0<x<1.$$

从而 $f'(x)\searrow$，$0<x\le1$

又 $f'(1)=0$ $\therefore f'(x)>0$，$0<x<1$

从而 $f(x)\nearrow$，$0<x\le1$

又 $f(1)=0$

$\therefore f(x)<0$，$0<x<1$

从而 $(1+x)\ln x<2(x-1)$，$0<x<1$

结论成立．