2016-2017 学年第二学期《高等数学AII》试卷（A）

授课班号＿＿＿＿＿学院＿＿＿＿＿学号＿＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿＿

题型	填空题	计算题	综合题	总分	审核
得分					

一、填空题(每小题 3 分，共 24 分)

得分	阅卷人

1. 与点 $M_1(1,-1,2)$, $M_2(3,3,1)$, $M_3(3,1,3)$, 决定的平面垂直的单位向量 $a_0 =$ $\pm\frac{1}{\sqrt{17}}(3,-2,-2)$

2. 曲线 $\begin{cases} z=2-x^2-y^2 \\ z=(x-1)^2+(y-1)^2 \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影曲线的方程为 $\begin{cases} x^2+y^2-x-y=0 \\ z=0 \end{cases}$.

3. 曲线 $\begin{cases} 3x^2yz=1 \\ y=1 \end{cases}$ 在点 $\left(1,1,\frac{1}{3}\right)$处的切线与 z 轴正向所成的倾角为 $\pi-\arctan\frac{3}{2}$.

4. $\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} |xy|\,d\sigma =$ $\frac{a^4}{2}$.

5. 设 L 是圆周 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$ ($0\le t\le 2\pi$). 则 $\oint_L (x^2+y^2)^3\,dS =$ $2\pi a^7$.

6. 设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧，则曲面积分 $$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\,dxdy = 0.$$

7. 如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$的收敛半径是1，则级数在开区间 $(0,2)$ 内收敛.

8. 若y_1,y_2都是方程 $y'+p(x)y=f(x)$的解，且 y_1 与 y_2 线性无关，则上述方程的通解可以表示为 $y=y_1+C(y_1-y_2)$ 或 $y=y_2+C(y_1-y_2)$

二、计算题(每小题 8 分，共 32 分)

得分	阅卷人

1. 设 $z=xf\left(2x,\frac{y^2}{x}\right)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

法一, $\frac{\partial z}{\partial x} = f + x\left[f_1'\cdot 2 + f_2'\cdot\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)\right] = f + 2xf_1' - \frac{y^2}{x}f_2'$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = f_2'\cdot\frac{2y}{x} + 2xf_{12}''\cdot\frac{2y}{x} - \frac{2y}{x}\cdot f_2' - \frac{y^2}{x}f_{22}''\cdot\frac{2y}{x}$

$= 4yf_{12}'' - \frac{2y^3}{x^2}f_{22}''$

法二: $\frac{\partial z}{\partial y} = xf_2'\cdot\frac{2y}{x} = 2yf_2'$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = 2y\left[f_{21}''\cdot 2 + f_{22}''\cdot\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)\right] = 4yf_{21}'' - \frac{2y^3}{x^2}f_{22}''$

2. 已知两条直线的方程是

$$l_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1},\quad l_2: \frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1},$$

求过 l_1 且平行于 l_2 的平面方程.

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1,-3,1)$$

且平面过点 $(1,2,3)$，

$\therefore$ 平面方程：$x-1-3(y-2)+(z-3)=0$

即：$x-3y+z+2=0$

3. 设 $F(t)=\int_0^t dx\int_0^x dy\int_0^a (y+z)e^{z^2}dz$, 试求 $F''(0)$.

法一：$F'(t)=\int_0^t dy\int_0^a (y+z)e^{z^2}dz$

$F''(t)=\int_0^a (t+z)e^{z^2}dz$

$\therefore F''(0)=\int_0^a ze^{z^2}dz=\frac{e^{z^2}}{2}\Big|_0^a=\frac{e^{a^2}-1}{2}$

法二：$F(t)=\int_0^a dz\int_0^t dx\int_0^x (y+z)e^{z^2}dy=\int_0^a dz\int_0^t(\frac{x^2}{2}e^{z^2}+xze^{z^2})dx$

$=\int_0^a(\frac{t^3}{6}e^{z^2}+\frac{t^2}{2}ze^{z^2})dz=\frac{t^3}{6}\int_0^a e^{z^2}dz+\frac{t^2}{2}\int_0^a ze^{z^2}dz$

$\therefore F'(t)=\frac{t^2}{2}\int_0^a e^{z^2}dz+t\int_0^a ze^{z^2}dz$，$F''(t)=t\int_0^a e^{z^2}dz+\int_0^a ze^{z^2}dz$

从而 $F''(0)=\int_0^a ze^{z^2}dz=\frac{e^{a^2}-1}{2}$.

4. 试求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}x^n$ 在其收敛域上的和函数.

$a_n=\frac{n+1}{n}$，$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$ $\therefore R=1$

又 $x=\pm1$ 时，$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}x^n\neq0$，级数发散. $\therefore$ 收敛域为 $(-1,1)$.

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}x^n$，$-1<x<1$.

则 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\frac{x}{1-x}+\int_0^x(\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1})dt$

$=\frac{x}{1-x}+\int_0^x\frac{dt}{1-t}=\frac{x}{1-x}-\ln(1-x)$，$-1<x<1$.

三、综合题(满分 44 分)

1. (11 分)

得分	阅卷人

证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_n^{n+1}\sin\frac{1}{x}dx$ 收敛.

① $x\geq 1$ 时，$\sin\frac{1}{x}>0$ 且单调递减

从而 $\left\{\int_n^{n+1}\sin\frac{1}{x}dx\right\}$ 单调递减，且 $\int_n^{n+1}\sin\frac{1}{x}dx>0\ (\forall n)$.

② $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+1}\sin\frac{1}{x}dx=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{\xi_n}\cdot[(n+1)-n]$ (积分中值定理)

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{\xi_n}=0\quad(n\leq\xi_n\leq n+1)$

∴ 由 Leibniz 判别法，级数收敛.

2. (11 分)

设 $f(x)$ 是非负连续函数，且 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=1$. 计算曲线积分

$$\int_L x\mathrm{d}y-(y+e^x)\mathrm{d}x,$$

式中 L 为沿 $y=f(x)$ 从点 $O(0,0)$ 到 $A(2,0)$ 的曲线段.

法一：原式 $=\int_0^2 x\,df(x)-[f(x)+e^x]dx$

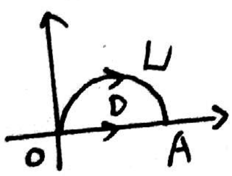
$=[xf(x)]_0^2-\int_0^2 f(x)dx-\int_0^2 f(x)dx-\int_0^2 e^x dx$

$=0-2\int_0^2 f(x)dx-[e^x]_0^2$ (由题 $f(2)=0$)

$=-2-(e^2-1)$

$=-1-e^2$.

法二：



添 $\overline{OA}$: $y=0$, $0\leq x\leq 2$.

由 Green 公式，$\int_{\overline{OA}\cup(-L)}x\,dy-(y+e^x)dx$ 逆时针边界.

$=\iint_D 2\,dxdy=2\int_0^2 f(x)dx=2$.

又 $\int_{\overline{OA}}x\,dy-(y+e^x)dx=\int_0^2-e^x dx=-(e^2-1)$

∴ $\int_L x\,dy-(y+e^x)dx=-(e^2-1)-2=-e^2-1$.

3. (11 分) 计划作一批形状为圆柱体的油桶，每只油桶造价定为 a 元，已知油桶侧壁每单位面积的造价是其上下两面每单位面积造价的 1.5 倍，问如何设计油桶的尺寸，才能使每只油桶的容积达到最大？

设上下两面单位面积造价为k元（k为定值）.

则有：$2\pi r^2 k + 2\pi r h \cdot 1.5k = a$，即 $2r^2 + 3rh = \frac{a}{\pi k}$

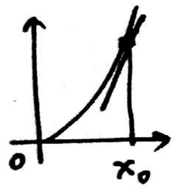
设 $L(r,h,\lambda) = \pi r^2 h + \lambda\left(2r^2 + 3rh - \frac{a}{\pi k}\right)$

由 $\begin{cases} L_r = 2\pi r h + \lambda(4r+3h) = 0 \\ L_h = \pi r^2 + \lambda \cdot 3r = 0 \\ L_\lambda = 2r^2 + 3rh - \frac{a}{\pi k} = 0 \end{cases}$

解得唯一驻点 $\left(\sqrt{\frac{a}{6\pi k}}, \frac{4}{3}\sqrt{\frac{a}{6\pi k}}\right)$.

$\therefore r = \sqrt{\frac{a}{6\pi k}}$，$h = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{a}{6\pi k}}$ 时容积最大.

4. (11 分) 已知曲线 $y = y(x)(x \geq 0)$ 过原点，位于 x 轴上方，且曲线上任一点 $M(x_0, y_0)$ 处切线斜率数值上等于此曲线与 x 轴，直线 $x = x_0$ 所围成的面积与该点横坐标的和，求此曲线方程.



由题，$y'(x_0) = \int_0^{x_0} y(t)\,dt + x_0$

由 (x_0, y_0) 任意性，$y' = \int_0^{x} y(t)\,dt + x$

求导可得：$y'' = y + 1$.

从而只需求解 $\begin{cases} y'' - y = 1 & ① \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 & ② \end{cases}$

由①：$r^2 - 1 = 0$，$r_{1,2} = \pm 1$. 且①显然有特解 $y_0 = -1$.

$\therefore$ ①通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 1$.

$y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x}$

又由②：$\begin{cases} C_1 + C_2 - 1 = 0 \\ C_1 - C_2 = 0 \end{cases}$ $\therefore C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$

综上：曲线方程为 $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2)$ $(x \geq 0)$.