

# 河海大学 2009~2010 学年第一学期

## 《高等数学》(上) 期末试卷

考试对象: 2009 级

### 一、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 若  $f(x)$  在  $(a, b)$  内二阶可导, 且 ( ) 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  内单调增加且是凹的。

(A)  $f'(x) > 0, f''(x) > 0$ ; (B)  $f'(x) > 0, f''(x) < 0$

(C)  $f'(x) < 0, f''(x) > 0$ ; (D)  $f'(x) < 0, f''(x) < 0$

2. 如果对所有  $x, F(x)$  具有连续的导数, 那么  $\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h} \int_1^{1+h} F'(x) dx$  等于 ( )。

(A)  $F(0)$ ; (B)  $F(1)$ ; (C)  $F'(0)$ ; (D)  $F'(1)$

3. 以下反常积分 ( ) 收敛。

(A)  $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ ; (B)  $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ ; (C)  $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^2}$ ; (D)  $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}$

4. 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[-1, 1]$  上连续, 在开区间  $(-1, 1)$  内可导, 且  $|f'(x)| \leq M$ ,  $f(0) = 0$ , 则必有 ( )。

(A)  $|f(x)| \geq M$ ; (B)  $|f(x)| > M$ ; (C)  $|f(x)| \leq M$ ; (D)  $|f(x)| < M$

5. 若  $\int f(x) dx = F(x) + C$ , 则  $\int f(ax+b) dx$  等于 ( ), 其中  $a, b$  为常数,  $a \neq 0$ .

(A)  $aF(ax+b) + C$ ; (B)  $\frac{F(ax+b)}{a} + C$ ; (C)  $aF(x) + C$ ; (D)  $\frac{F(x)}{a} + C$

### 二、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 设函数  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上连续, 则



$$\int_{-1}^1 [f(x) - f(-x) + e^x] dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 曲线  $y = x^5 + 5x^3 - x - 2$  的拐点为  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 曲线  $y = \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$  绕  $x$  轴旋转一周所得立体体积为  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \ln \frac{1+x}{1-x}}{x^p} = c$ ,  $c$  是非零实数, 则  $p = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 若  $f'(x^3) = 1 + x$ , 则  $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

三、试解下列各题 (每小题 6 分, 共 30 分)

1. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^t - e^{-t}) dt}{1 - \cos x}$

2. 求  $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$

3. 求  $f(x) = x^2 - 4x + \ln(x+1)$  的极大值与极小值。

4. 求定积分  $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$ 。

5. 求由曲线  $y = x^3$  与  $y = 2x - x^2$  所围成的图形面积。

四、试解下列各题（每小题 7 分，共 21 分）

1. 讨论函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2(e^x - 1)}{e^x - 1}, & x > 0; \\ 2, & x = 0; \\ \frac{1}{x} \int_0^x \cos^2 t dt, & x < 0 \end{cases}$  ; 在  $(-\infty, +\infty)$  上的连续性。

2. 已知  $f(x)$  的一个原函数为  $(1 + \sin x) \ln x$  , 求  $\int x f'(x) dx$  。

3. 在半径为 1 的球的所有内接正圆锥体中, 求体积为最大的内接正圆锥体的高与体积。

五、(6 分) 设  $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$  , 证明:  $\frac{\tan x_2}{\tan x_1} > \frac{x_2}{x_1}$  。

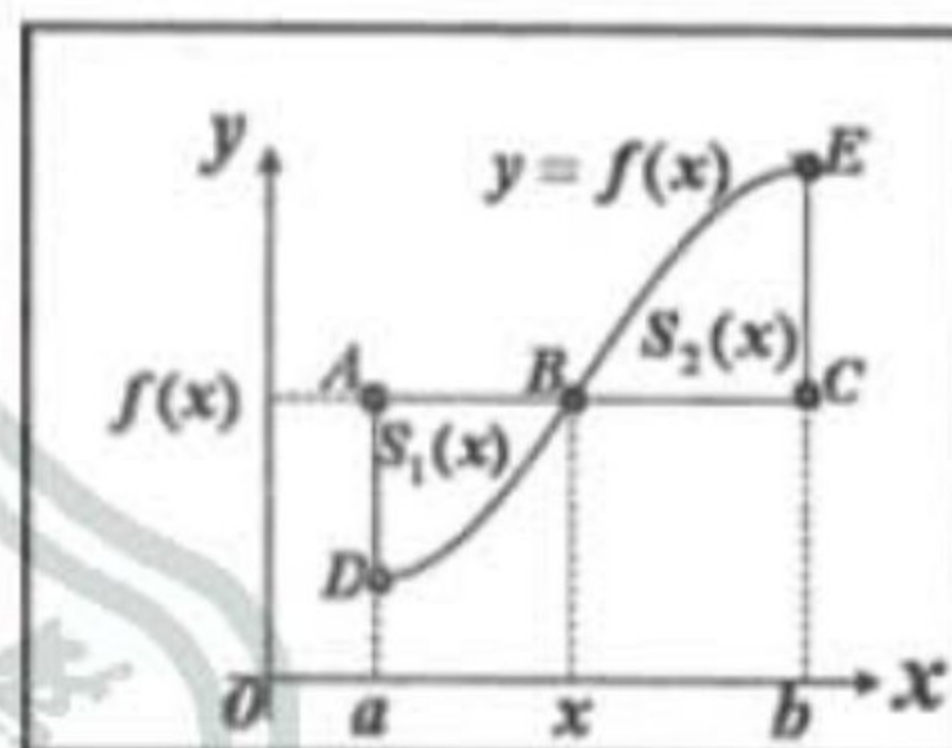


**六、(6分)** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导且  $0 < a < b$ 。证明: 在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使得  $2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi)$ 。

**七、(7分)** 设函数在  $[a, b]$  上可导, 且

$f'(x) > 0, f(a) > 0$ , 图形中所示的区域 ABD 的面积为  $S_1(x)$ , 区域 BCE 的面积为  $S_2(x), a < x < b$ 。试证:

存在唯一的  $\xi \in (a, b)$ , 使得:  $\frac{S_1(\xi)}{S_2(\xi)} = 2010$ 。



(图中:  $A(a, f(x)), B(x, f(x)), C(b, f(x)), D(a, f(a)), E(b, f(b))$ , 且线段 ABC, AD, EC 均为直线段)。

**附加题 (5分)** 设  $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt$ , 求  $F(e) + F(e^{-1})$ 。



## 2009 级高等数学（上）期末试卷参考答案

一、ADCCB 二、1.  $e - e^{-1}$ ; 2.  $(0, -2)$ ; 3.  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi^2}{8}$ ; 4. 3; 5.  $x + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + c$ 。

二、1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^t - e^{-t}) dt}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$ 。

2.  $\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 s \cos^2 x d \sin x = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C$ 。

3.  $f'(x) = 2x - 4 + \frac{4}{x+1} = 2 \frac{x(x-1)}{x+1}$ ,  $x_1 = 0, x_2 = 1$ , 极小值  $f(1) = -3 + 4 \ln 2$ , 极大值  $f(0) = 0$

4.  $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx \stackrel{x=\sin t}{=} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt = (-\cot t - t) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{4}$ 。

5. 交点:  $(0, 0), (1, 1), (-2, -8) \dots 1'$   $S_1 = \int_0^1 (2x - x^2 - x^3) dx = \frac{5}{12} \dots 2'$

$S_2 = -\int_{-2}^0 (2x - x^2 - x^3) dx = \frac{8}{3} \dots 2'$   $S = S_1 + S_2 = \frac{37}{12} \dots 1'$

四、1.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2(e^x - 1)}{e^x - 1} = 2 \dots 2'$ ,

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \int_0^x \cos^2 t dt = 1 \dots 2'$ ,  $x > 0, f(x) = \frac{\sin x 2(e^x - 1)}{e^x - 1}$  --连续  $\dots 1'$ ,

$x < 0, f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \cos^2 t dt$  -连续  $\dots 1'$   $f(x)$  在  $(-\infty, 0), (0, +\infty)$  -连续  $\dots 1'$

2.  $\int x f'(x) dx = \int x df(x) = x f(x) - \int f(x) dx = x f(x) - (1 + \sin x) \ln x + C$

$f(x) = [(1 + \sin x) \ln x]' = \cos x \ln x + \frac{1 + \sin x}{x} \therefore \int x f'(x) dx = x \cos x \ln x + (1 - \ln x)(1 + \sin x) + C$

3. 球心到锥底面的距离为:  $x$ , 正圆锥体积为

$V = \frac{\pi}{3} (\sqrt{1-x^2}) (1+x) = \frac{\pi}{3} (1-x)(1+x)^2 \quad (0 < x < 1) \dots 2', \frac{dV}{dx} = \frac{\pi}{3} (1+x)(1-3x)$



$$\text{驻点: } x = \frac{1}{3} \cdots 2', \quad \left. \frac{d^2 V}{dx^2} \right|_{\frac{1}{3}} = -\frac{2\pi}{3} (3x+1) \Big|_{\frac{1}{3}} < 0, V_{\max} = V\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{8}\pi, \text{ 高: } \frac{4}{3} \cdots 3'$$

$$\text{五、 } f(x) = \frac{\tan x}{x}, 0 < x < \frac{\pi}{2}, f'(x) = \frac{x \sec^2 x - \tan x}{x^2} = \sec^2 x \frac{x - \sin x \cos x}{x^2}$$

$$x - \sin x \cos x > x - \sin x > 0, f'(x) > 0, \therefore f(x) \text{ 增} \therefore \frac{\tan x_2}{\tan x_1} > \frac{x_2}{x_1}$$

六、  $f(x), g(x) = x^2$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导,

$$g'(x) = (x^2)' = 2x \neq 0 \cdots 2' \text{ 由 Cauchy 中值定理:}$$

$$\exists \xi \in (a, b), \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdots 2', \quad \frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2} = \frac{f'(\xi)}{2\xi},$$

$$2\xi [f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2) f'(\xi) \cdots 2'$$

$$\text{七、 } S_1(x) = \int_a^x [f(x) - f(t)] dt, S_2(x) = \int_x^b [f(t) - f(x)] dt;$$

$$F(x) = S_1(x) - 2010 S_2(x) \cdots 2' \quad F(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上连续, } F(a) < 0, F(b) > 0,$$

$$\text{由介值定理, } \exists \xi \in (a, b), \text{ 使得 } F(\xi) = 0 \Rightarrow \frac{S_1(\xi)}{S_2(\xi)} = 2010 \quad S_1'(x) = f'(x)(x-a) > 0$$

$$S_2'(x) = -f'(x)(b-x) < 0 \Rightarrow F'(x) = S_1'(x) - 2010 S_2'(x) > 0, F(x) \text{ 单增}$$

$\Rightarrow F(x)$  的零点唯一。

$$\text{附加题、 } F(e) + F(e^{-1}) = \int_1^e \frac{\ln t}{1+t} dt + \int_1^{e^{-1}} \frac{\ln t}{1+t} dt = \int_1^e \frac{\ln t}{1+t} dt = \int_1^e \frac{\ln \frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$= \int_1^e \frac{\ln x}{x^2 + x} dx = \int_1^e \frac{\ln t}{t(t+1)} dt \quad F(e) + F(e^{-1}) = \int_1^e \frac{\ln t}{t} dt = \frac{1}{2} (\ln t) \Big|_1^e = \frac{1}{2}.$$

$$F(e) + F(e^{-1}) = \int_1^e \frac{\ln t}{t} dt = \frac{1}{2} (\ln t) \Big|_1^e = \frac{1}{2}.$$