2016-2017 学年第一学期《高等数学 AI》试卷（A）

授课班号________ 学院________ 学号________ 姓名________

题型	填空题	计算题	综合题	总分	审　核
得分					

一、填空题(每小题 4 分，共 32 分)

得分	阅卷人

1. 当 $x\to-1$ 时，ax^2-x+b 相对 $x+1$ 为等价无穷小，则

$a=$ -1 ；$b=$ 0 .

2. $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$ e^6 .

3. 设 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)=g(x)$, $\varphi(x)=x^3$, 则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f[\varphi(x)]=$ $3x^2g(x^3)$.

4. 设 $y=y(x)$ 由方程 $x=y^y$ 确定，则 $\mathrm{d}y=$ $\frac{dx}{x(\ln y+1)}$ 或 $\frac{dx}{y^y(\ln y+1)}$

5. 设曲线 $y=ax^3+bx^2$ 以点 $(1,3)$ 为拐点，则数组 $(a,b)=$ $(-\frac{3}{2},\frac{9}{2})$

6. 设 $f(x)$ 有原函数 $x\ln x$，则

$\int xf'(x)\mathrm{d}x=$ $x+C$.

7. 函数 $f(x)$ 具有连续的导数，则 $\frac{d}{dx}\int_0^x(x-t)f'(t)\,dt=$ $f(x)-f(0)$

8. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(x^3+1)\sin^2x\mathrm{d}x=$ $\frac{\pi}{2}$.

二、计算题(每小题 6 分，共 36 分)

得分	阅卷人

1. 已知曲线 $\begin{cases}x=f(t)-1\\y=f(e^{2t}-1)\end{cases}$，其中 f 可导，且 $f(0)=2$, $f'(0)\neq0$, 求 $t=0$ 处曲线的切线方程.

$t=0$ 对应点 $(1,2)$.　(1')

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\left.\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right|_{t=0}=\left.\frac{f'(e^{2t}-1)\cdot2e^{2t}}{f'(t)}\right|_{t=0}=\frac{2f'(0)}{f'(0)}=2.$$ (4')

$\therefore$ 切线：$y=2x$.　(1')

2.

设 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=0$，$f'(0)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^2}$.

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{1}{2}f'(0)=1.$$

(3') (3')

注：不可写 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{2}=\dfrac{f'(0)}{2}$.

代入求值需要 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，

题目无此条件.

3. 设函数 $y=y(x)$，由方程 $y=f(x^2+y^2)+f(x+y)$ 所确定，且 $y(0)=2$，其中 $f(x)$ 是可导函数，$f'(2)=\dfrac{1}{2}$，$f'(4)=1$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$ 的值.

$$y'=f'(x^2+y^2)\cdot(2x+2yy')+f'(x+y)\cdot(1+y') \quad (3')$$

令 $x=0$，上式化为：

$$y'(0)=f'(4)\cdot 4y'(0)+f'(2)\cdot(1+y'(0))$$

$$=4y'(0)+\frac{1}{2}(1+y'(0))$$

$$\therefore\ y'(0)=-\frac{1}{7}. \quad (3')$$

4. 设 $f(x)=\int_1^{x^2}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，求 $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$.

$$f'(x)=\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot 2x=\frac{2\sin x^2}{x} \quad (2')$$

$$\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 f(x)\,d\frac{x^2}{2}=\left[\frac{x^2}{2}f(x)\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}f'(x)dx \quad (2')$$

$$=0-\int_0^1 x\sin x^2dx=\left[\frac{1}{2}\cos x^2\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 1-1) \quad (2')$$

5. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, & x\ge 0\\ \dfrac{1}{1+e^{x}}, & x<0\end{cases}$，求 $\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x$.

令 $x-1=t$，

$\int_0^2 f(x-1)\,dx=\int_{-1}^{1}f(t)\,dt=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$

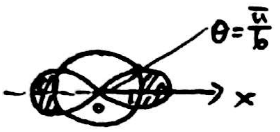
$=\int_{-1}^{0}\dfrac{dx}{1+e^x}+\int_0^1\dfrac{dx}{1+x}$ (2')

$=\int_{-1}^{0}\left(1-\dfrac{e^x}{1+e^x}\right)dx+\left[\ln(1+x)\right]_0^1$

$=\left[x-\ln(1+e^x)\right]_{-1}^{0}+\ln 2$

$=\ln(e+1)$ (4')

6. 求由不等式 $r^2\le 2\cos 2\theta$ 和 $r\ge 1$ 确定的平面图形的面积.



第一象限中

双纽线与圆交点 $(1,\frac{\pi}{6})$

利用对称性，可得：

$A=4\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}\cdot 2\cos 2\theta\, d\theta-\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\pi}{6}\right)$ (4')

$=4\left(\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}-\frac{\pi}{12}\right)$

$=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ (2')

三、综合题(满分 32 分)

1. (8 分) 在曲线 $y=1-x^2\,(x>0)$ 上求一点 P 的坐标，使曲线在该点处的切线与两坐标轴所围成的三角形面积最小.

得分	阅卷人

设切点 $P(a,1-a^2)\ (a>0)$

切线：$y-(1-a^2)=-2a(x-a)$

切线与坐标轴交点：$\left(\frac{a^2+1}{2a},0\right),\ (0,a^2+1)$

$\therefore S=\dfrac{(a^2+1)^2}{4a}$ (3')，$S'=\dfrac{(3a^2-1)(a^2+1)}{4a^2}$，$a>0$ (3')

从而唯一驻点 $a=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 处 S 取最小值. (1')

$\therefore P\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{2}{3}\right)$ (1')

2. (8 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=\frac{\pi}{4}$，试证明方程 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根。

法一，令 $F(x)=f(x)-\arctan x$ （3'）

则 $F(x)\in C[0,1], D(0,1)$，$F(0)=F(1)=0$

且 $F'(x)=f'(x)-\frac{1}{1+x^2}$

由 Rolle Th，$\exists\, \xi\in(0,1)$，s.t.

$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{1}{1+\xi^2}=0$. （5'）

即 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 在 $(0,1)$ 内有一个实根 $x=\xi$.

从而结论成立.

法二：令 $g(x)=\arctan x$，

由 Cauchy 中值 Th，$\exists\, \xi\in(0,1)$ s.t.

$$\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{1+\xi^2}}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)}=1$$

法三：积分中值 th，$\exists\, \xi\in(0,1)$ s.t.

$$f'(\xi)-\frac{1}{1+\xi^2}=\int_0^1\left[f'(x)-\frac{1}{1+x^2}\right]dx$$

$$=\left[f(x)-\arctan x\right]_0^1=0.$$

3. (8 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且严格单调增加，证明：

$$(a+b)\int_a^b f(x)\,dx<2\int_a^b xf(x)\,dx.$$

令 $F(x)=(a+x)\int_a^x f(t)\,dt-2\int_a^x tf(t)\,dt$，$x\in[a,b]$ （2'）

则 $F'(x)=\int_a^x f(t)\,dt+(a+x)f(x)-2xf(x)$

$=f(\xi)(x-a)-f(x)(x-a)$

$=[f(\xi)-f(x)]\cdot(x-a)$，$a<\xi<x\le b$.

或 $F'(x)=\int_a^x f(t)\,dt-\int_a^x f(x)\,dx=\int_a^x[f(t)-f(x)]\,dx<0$

注：无 $f(x)$ 可导条件，不可求 $F''(x)$.

由已知，$f(x)$ 严格单增 $\therefore f(\xi)<f(x)$，从而 $F'(x)<0$，$a<x\le b$.

$\therefore F(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单减，$F(b)<F(a)=0$

即 $(a+b)\int_a^b f(x)\,dx-2\int_a^b xf(x)\,dx<0$ （6'）

$\therefore$ 结论成立.

4. (8 分) 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^2\ln x, & x>0\end{cases}$，试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，其导函数在 $x=0$ 处是否连续？

1) $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=0$

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=0$ （4'）

2) $f'(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 2x\ln x+x, & x>0\end{cases}$ （2'）

$\because \lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x\ln x+x)=0=f'(0)$

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处连续 （2'）

注：也可用 P109 推论 3，必须写清理由才给分