# 2010—2011 学年第一学期《高等数学》期末考试试卷（A）

授课班号________ 年级专业 机电、信息 学号__________ 姓名__________

| 题型 | 选择题 | 填空题 | 计算题 | 综合题 | 总分 | 审　核 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | |

## 一. 填空题（满分 30 分）

| 阅卷人 | 得分 |
|---|---|
| | |

1. （本题 ~~5~~ 3 分）

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{2x}-1}{4x}$ 的值等于 $\frac{1}{2}\ln a$.

$\frac{2x\ln a}{4x}$

2. （本题 5 分）

设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3nx}{1-nx}$，则其连续区间是 $(-\infty,0),(0,+\infty)$.

$\begin{cases}0, & x=0\\ -3, & x\neq 0\end{cases}$

3. （本题 5 分）

曲线 $\begin{cases}x=1+t^2\\ y=t^3\end{cases}$ 在 $t=2$ 处的切线方程为 $y=3x-7$.

$\frac{3t^2}{2t}=\frac{3}{2}t\Big|_{t=2}=3$. $(5,8)$

$y-8=3(x-5)$

4. （本题 5 分）

函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的单调区间为 $(-\infty,+\infty)$.

$y'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0$

5. （本题 5 分）

设 $\int f(x)\,dx=e^{-x^2}+C$，则 $f'(x)$ 为 $(4x^2-2)e^{-x^2}$.

$f(x)=-2xe^{-x^2}$, $f'(x)=-2e^{-x^2}-2x\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x)$

6. （本题 5 分）

$\int_0^{\pi/4}\cos^5 2x\,dx=\frac{4}{15}$.

令 $2x=t$　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 t\cdot\frac{1}{2}\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{4!!}{5!!}=\frac{4\times 2}{2\times 5\times 3}$

7. （本题 ~~5~~ 2 分）

$p$ 为 $p<1$ 时，$\int_0^1\dfrac{1}{x^p}\,dx$ 收敛.

$p\neq 1$　$\frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_{0^+}^{1}$

$p=1$　$\ln|x|\Big|_{0^+}^{1}$ 发散

## 二. 计算题（满分 36 分）

1. （本题 6 分）

| 阅卷人 | 得分 |
| --- | --- |
| | |

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan(1+x)-\arctan(1-x)}{x}$.

$$原式 = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{1+(1+x)^2}-\frac{-1}{1+(1-x)^2}\right] = 1$$

(4′) (2′)

2. （本题 6 分）

求函数 $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ 的 $n$ 阶导数.

$$y=\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$$

$$y^{(n)}=(-1)^n\cdot n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$$

3. （本题 6 分）

求由方程 $y\sin x-\cos(x+y)=0$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数 $y'$.

$$y'\sin x+y\cos x+\sin(x+y)\cdot(1+y')=0$$

$$\therefore y'=-\frac{y\cos x+\sin(x+y)}{\sin x+\sin(x+y)}$$

4. （本题 6 分）

求函数 $y=x^3-5x^2+3x+5$ 的图形的拐点及凹凸区间.

$y'=3x^2-10x+3$, $y''=6x-10$

拐点: $\left(\frac{5}{3}, \frac{20}{27}\right)$

凹区间: $\left[\frac{5}{3}, +\infty\right)$

凸区间: $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$

5. （本题 6 分）

求 $\int \ln^2 x\,dx$.

令 $\ln x = t$，原式 $= \int t^2 e^t dt = \int t^2 de^t = t^2e^t - \int 2t\,\underbrace{e^t dt}_{de^t}$

$= t^2e^t - 2te^t + \int 2e^t dt = (t^2-2t+2)e^t + C$

$= (\ln^2 x - 2\ln x + 2)\cdot x + C$

或 原式 $= x\ln^2 x - \int x\cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x}\,dx$

$= x\ln^2 x - 2x\ln x + \int 2\,dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$

6. （本题 6 分）

计算 $\int_1^4 |x^2-3x+2|\,dx$.

原式 $= \int_1^4 |(x-1)(x-2)|\,dx = \int_1^2 [-(x^2-3x+2)]dx + \int_2^4 (x^2-3x+2)dx$

$= \left[-(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x)\right]_1^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_2^4$

$= \frac{1}{6} + \frac{14}{3} = \frac{29}{6}$

三. 综合题（满分 34 分）

| 阅卷人 | 得分 |
|---|---|
| | |

1. （本题 6 分）

讨论 $f(x) = |x-\pi|\sin x$ 在 $x=\pi$ 处的可导性.

$\lim\limits_{x\to\pi^+} \frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} = \lim\limits_{x\to\pi^+} \frac{x-\pi}{x-\pi}\cdot\sin x = 0$

$\lim\limits_{x\to\pi^-} \frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} = \lim\limits_{x\to\pi^-} \frac{(\pi-x)}{x-\pi}\cdot\sin x = 0$　　$\therefore f'(\pi) = 0$.

2. （本题 7 分）

设 $f(x)$ 定义在 $[0,c]$, $f'(x)$ 存在且单调减少, $f(0)=0$, 应用拉格朗日中值定理证明: 对于 $0\le a<b\le a+b<c$，恒有

$$f(a+b)\le f(a)+f(b).$$

$f(a) = f(a) - f(0) = f'(\xi_1)\cdot a$ ，$0<\xi_1<a$　①

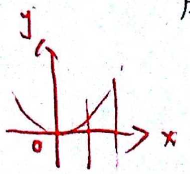
$f(a+b) - f(b) = f'(\xi_2)\cdot[(a+b)-b] = f'(\xi_2)\cdot a$ ，$b<\xi_2<a+b$　②

由已知 $\xi_1<\xi_2$ . $\therefore f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$　　$\therefore f(a) \ge f(a+b) - f(b)$

即 $f(a+b) \le f(a)+f(b)$ .

3. (本题 7 分)

当 $a$ 为何值时，抛物线 $y=x^2$ 与三直线 $x=a$，$x=a+1$，$y=0$ 所围成的图形面积最小．



$A = \int_a^{a+1} x^2\,dx = \frac{1}{3}[(a+1)^3 - a^3] = a^2+a+\frac{1}{3} =: f(a)$ (3′)

$f'(a) = 2a+1$ 令其=0 得驻点 $a=-\frac{1}{2}$ (2′)

当 $f'(a)>0$，$a>-\frac{1}{2}$ 当 $f'(a)<0$，$a<-\frac{1}{2}$． $a=-\frac{1}{2}$ 为极小值点 也是最小值点

(2′)

4. (本题 7 分)

求不定积分 $\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$．

原式 $= \int \left[\frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{2}{x+2} + \frac{-\frac{3}{2}}{x+3}\right] dx$ (4′)

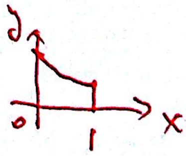
$= -\frac{1}{2}\ln|x+1| + 2\ln|x+2| - \frac{3}{2}\ln|x+3| + C$ (3′)

5. (本题 7 分)

设由不等式 $0\le y\le \frac{1}{(1+x)^2}$，$0\le x\le 1$ 确定一个平面图形，

(1) 求这个图形的面积；

(2) 求该图形绕 $x$ 轴旋转所得的立体的体积；



(1) $A = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2} = -\frac{1}{1+x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$ (3′)

(2) $V = \int_0^1 \pi\cdot\frac{1}{(1+x)^4}\,dx = \left(-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\frac{1}{(1+x)^3}\Big|_0^1 = \frac{7}{24}\pi$

(2′) (2′)