2011-2012 学年第二学期高等数学期中测试及数学竞赛试卷（2011 级）

（参加竞赛的同学全做，其他同学只做一、二大题）

一、填空题（8×6 分）

1. 设 $\vec{a}=(2,1,-2)$，$\vec{b}=(1,-1,-1)$，则 $(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})=$ $\underline{-3}$，$(\vec{a}-2\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})=$ $\underline{(-12,0,-12)}$。

2. 过直线 $L_1: x=2t-1, y=3t+2, z=2t-3$ 和 $L_2: x=2t+3, y=3t-1, z=2t+1$ 的平面方程为 $\underline{x-z-2=0}$。

3. 直线 $L:\begin{cases}2x-y+z-1=0\\x+y-z+1=0\end{cases}$ 在平面 $\pi: x+2y-z=0$ 上的投影直线 L_0 的方程为 $\begin{cases}3x-y+z-1=0\\x+2y-z=0\end{cases}$。

4. 在点 $(4,2,1)$ 处，$U=z\sqrt{x^2-y^2}$ 沿方向 $\vec{l}=(2,1,-1)$ 的方向导数 $\left.\dfrac{\partial U}{\partial l}\right|_{(4,2,1)}=$ $\underline{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$。

5. 曲线 $x=1, z=\sqrt{1+x^2+y^2}$ 在点 $(1,1,\sqrt{3})$ 处的切线方程为 $\begin{cases}x=1\\y-\sqrt{3}z+2=0\end{cases}$。

6. 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定（F 为任意可微函数），则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ $\underline{z}$。

7. 交换积分次序 $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{3-x} f(x,y)\,dy=$ $\underline{\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx+\int_1^2 dy\int_0^1 f(x,y)\,dx+\int_2^3 dy\int_0^{3-y} f(x,y)\,dx}$。
(145页-7)

8. $\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x^2+y^2)\,dy$ 的极坐标形式为 $\underline{\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2\cos\theta} f(r^2)\cdot r\,dr}$。

二、计算题（4×13 分）

1. 设 g 具二阶导数，f 具二阶偏导，$z=g(x+y)+f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

$$\frac{\partial z}{\partial x}=g'+yf_1'+\frac{1}{y}f_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=g''+f_1'+y\left[f_{11}''\cdot x+f_{12}''\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}\left[f_{21}''\cdot x+f_{22}''\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]$$

$$=g''+f_1'-\frac{1}{y^2}f_2'+xyf_{11}''-\frac{x}{y}f_{12}''+\frac{x}{y}f_{21}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''$$

2. 将长为a的线段分为三段，分别围成圆、正方形和等边三角形，问怎样分使它们的面积之和最小，并求出最小值。

设圆半径为x，正方形边长为y，等边三角形边长为z.

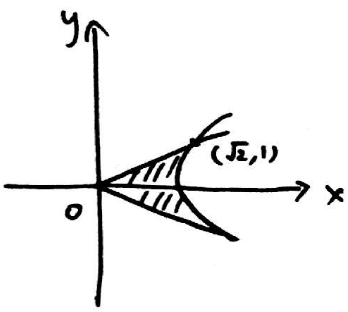
则 $S=\pi x^2+y^2+\frac{\sqrt{3}}{4}z^2$，$2\pi x+4y+3z=a$.

设 $L(x,y,z,\lambda)=\pi x^2+y^2+\frac{\sqrt{3}}{4}z^2+\lambda(2\pi x+4y+3z-a)$

由 $\begin{cases} L_x=2\pi x+2\pi\lambda=0 \\ L_y=2y+4\lambda=0 \\ L_z=\frac{\sqrt{3}}{2}z+3\lambda=0 \\ L_\lambda=2\pi x+4y+3z-a=0 \end{cases}$ 解得驻点处 $\begin{cases} x=\frac{a}{2\pi+8+6\sqrt{3}} \\ y=2x \\ z=2\sqrt{3}x \end{cases}$

从而圆、正方形、等边三角形周长依次为 $\frac{\pi a}{\pi+4+3\sqrt{3}}$，$\frac{4a}{\pi+4+3\sqrt{3}}$，$\frac{3\sqrt{3}a}{\pi+4+3\sqrt{3}}$ 时，面积之和最小. $S_{min}=\frac{a^2}{4(\pi+4+3\sqrt{3})}$.

3. 计算二重积分$\iint\limits_D (x+y)^3dxdy$，其中$D$由曲线$x=\sqrt{1+y^2}$与直线$x+\sqrt{2}y=0$及$x-\sqrt{2}y=0$围成。



∵ D关于x轴对称

∴ 原式 $=\iint\limits_D(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)dxdy$

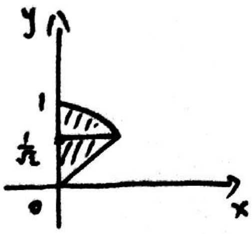
$=2\iint\limits_{D_上}(x^3+3xy^2)dxdy$

$=2\int_0^1 dy\int_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}}(x^3+3xy^2)dx$

$=2\int_0^1(-\frac{9}{4}y^4+2y^2+\frac{1}{4})dy$

$=\frac{14}{15}$

4. 计算二重积分$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}dy\int_0^y e^{-(x^2+y^2)}dx+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}e^{-(x^2+y^2)}dx$。



原式 $=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 e^{-r^2}\cdot r\,dr$

$=\frac{\pi}{4}\cdot\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^1$

$=\frac{\pi}{8}(1-\frac{1}{e})$

三、数学竞赛加题（5×20分）

1. 1)求极限：$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^x-x}{\ln x-x+1}$；　　2)求导：$y=y(x)$由方程组$\begin{cases}x+t(1-t)=0\\ te^y+y+1=0\end{cases}$确定，求$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$。

$(x^x)'=(e^{x\ln x})'=x^x(\ln x+1)$

$$原式=\lim_{x\to1}\frac{x^x(\ln x+1)-1}{\frac{1}{x}-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^x(\ln x+1)^2+x^x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=-2$$

① $x=t^2-t\Rightarrow\dfrac{dx}{dt}=2t-1$

$$e^y+t\cdot e^y\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{dy}{dt}=0\Longrightarrow\frac{dy}{dt}=-\frac{e^y}{te^y+1}=\frac{e^y}{y}$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^y}{y(2t-1)}$$

且 $t=0$ 时，$y=-1$，$\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0}=-\dfrac{1}{e}$　(*)

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=\left.\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}\right|_{t=0}=\left.\frac{e^y\cdot\frac{dy}{dt}\cdot y(2t-1)-e^y\cdot\left[\frac{dy}{dt}\cdot(2t-1)+2y\right]}{y^2\cdot(2t-1)^3}\right|_{t=0}$$

$$\overset{(*)}{=}\frac{2}{e^2}(1-e)$$

2. 设$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{x^2}, & x\neq0\\ c, & x=0\end{cases}$，其中$f(x)$具有连续导数且$f(0)=0$，$f'(0)=a$，1）试确定$c$使$F(x)$连续；2）在1）的结果下问$F'(x)$是否连续（要求过程）。

1) $$\lim_{x\to0}F(x)=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x tf(t)dt}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{xf(x)}{2x}=\frac{1}{2}f(0)=0$$

$\therefore$ $c=0$ 时，$F(x)$ 在 $x=0$ 处连续，从而处处连续．

2) $x\neq0$ 时，$$F'(x)=\frac{xf(x)\cdot x^2-\int_0^x tf(t)dt\cdot2x}{x^4}=\frac{x^2f(x)-2\int_0^x tf(t)dt}{x^3}$$

$$F'(0)=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x tf(t)dt}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{xf(x)}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{3}=\frac{f'(0)}{3}=\frac{a}{3}.$$

$$\lim_{x\to0}F'(x)=\lim_{x\to0}\frac{x^2f(x)-2\int_0^x tf(t)dt}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{2xf(x)+x^2f'(x)-2xf(x)}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{3}=\frac{f'(0)}{3}=\frac{a}{3}=F'(0)$$

从而 $F'(x)$ 在 $x=0$ 处连续．

$F'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处连续．

3. 积分 1) $\int\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,dx$；　　2) $\int_0^{\pi}\frac{\pi+\cos x}{x^2-\pi x+2012}dx$。

令 $\sqrt{x}=t$

原式 $=\int 2t^2\cos t\,dt$

$=\int 2t^2\,d\sin t$

$=2t^2\sin t-\int 4t\sin t\,dt$

$=2t^2\sin t+\int 4t\,d\cos t$

$=2t^2\sin t+4t\cos t-\int 4\cos t\,dt$

$=2t^2\sin t+4t\cos t-4\sin t+C$

$=2x\sin\sqrt{x}+4\sqrt{x}\cos\sqrt{x}-4\sin\sqrt{x}+C$

法一：令 $x=\pi-t$

原式 $=\int_{\pi}^{0}\frac{\pi-\cos t}{(\pi-t)^2-\pi(\pi-t)+2012}\cdot(-1)\,dt$

$=\int_0^{\pi}\frac{\pi-\cos t}{t^2-\pi t+2012}dt=\int_0^{\pi}\frac{\pi-\cos x}{x^2-\pi x+2012}dx$

$\therefore$ 原式 $=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{2\pi}{x^2-\pi x+2012}dx$

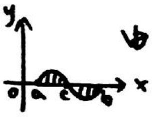
$=\pi\int_0^{\pi}\frac{d(x-\frac{\pi}{2})}{(x-\frac{\pi}{2})^2+2012-\frac{\pi^2}{4}}$

$=\frac{\pi}{\sqrt{2012-\frac{\pi^2}{4}}}\arctan\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2012-\frac{\pi^2}{4}}}\Bigg|_0^{\pi}=4\theta\arctan\theta$，$\theta=\frac{\pi}{2\sqrt{2012-\frac{\pi^2}{4}}}$

4. 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，$\int_a^b f(x)dx=0$，求证：1) 在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f'(\xi)=f(\xi)$；2) 在 (a,b) 内至少有一点 η，$\eta\neq\xi$，使得 $f''(\eta)=f(\eta)$。

① 若 $f(x)\equiv 0$，结论显然成立.

② 若 $f(x)\not\equiv 0$，令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$



由 $\int_a^b f(x)dx=0$ 可得 $F(b)=0$

又 $F(a)=0$　∴由 Rolle Th.

$\exists\, c\in(a,b)$ s.t. $F'(c)=f(c)=0$.

或者由 $f(x)\geq 0$，$f(x)\not\equiv 0\Rightarrow\int_a^b f(x)dx>0$

$f(x)\leq 0$，$f(x)\not\equiv 0\Rightarrow\int_a^b f(x)dx<0$

可得 $\int_a^b f(x)dx=0$ 时，$f(x)$ 在 (a,b) 内变号，由零点 Th，$\exists\, c\in(a,b)$ s.t. $f(c)=0$

令 $G(x)=e^{-x}f(x)$，则 $G(a)=G(c)=G(b)=0$

且 $G'(x)=e^{-x}[f'(x)-f(x)]$

由 Rolle Th，$\exists\,\xi_1\in(a,c)$，$\xi_2\in(c,b)$ s.t. $G'(\xi_1)=G'(\xi_2)=0$. 取 $\xi=\xi_1$ 或 ξ_2，结论1)成立.

令 $\varphi(x)=e^{x}[f'(x)-f(x)]$，

则 $\varphi(\xi_1)=\varphi(\xi_2)=0$ 且 $\varphi'(x)=e^{x}[f''(x)-f(x)]$

再由 Rolle Th，$\exists\,\eta\in(\xi_1,\xi_2)$ s.t. $\varphi'(\eta)=0$

从而 $f''(\eta)=f(\eta)$，结论2)成立.

5. 已知 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$，求证：$\frac{1}{2(n+1)}<I_n<\frac{1}{2(n-1)}$，$n\geq 2$。(12级 三.5)

3 2) 法二：令 $x-\frac{\pi}{2}=t$

原式 $=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi+\cos(t+\frac{\pi}{2})}{(t+\frac{\pi}{2})^2-\pi(t+\frac{\pi}{2})+2012}dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi-\sin t}{t^2+2012-\frac{\pi^2}{4}}dt$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{t^2+2012-\frac{\pi^2}{4}}dt$ (奇偶对称性) $=\frac{2\pi}{\sqrt{2012-\frac{\pi^2}{4}}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2012-\frac{\pi^2}{4}}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{2\pi}{\sqrt{2012-\frac{\pi^2}{4}}}\arctan\frac{\pi}{2\sqrt{2012-\frac{\pi^2}{4}}}$.