6

2017—2018 学年第一学期《线性代数 B》课内考试卷（A 卷）

授课班号________ 年级专业 机电 学号________ 姓名________

题号	一	二	三	四	五	六	总分	审核
得分								

得分	评阅人

一、填空（共 30 分，每空各 3 分）

1．已知二阶方阵 A 的行列式 $|A|=3$，$|6(A^*)^{-1}|=$ 12.

2．已知 $A=[\vec{\alpha}_1,\ \vec{\alpha}_2,\ \vec{\alpha}_3]$，$|A|=2$，则 $|\vec{\alpha}_3-2\vec{\alpha}_1,\ 3\vec{\alpha}_2,\ \vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_3|=$ -18. 重复

3．设 $A=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$，则 $|(2A)^{-1}-A^*|=$ $\frac{25}{12}$.

4．已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&6&1\\2&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{bmatrix}$，则 $BAB=$ $\begin{bmatrix}0&9&1\\2&1&0\\7&3&0\end{bmatrix}$

5．方阵 A 满足 $R(A)=5$，$|B|=2$，则 $R(AB)=$ 5.

6．已知 $A=\begin{bmatrix}4&b&0\\0&a&1\\0&1&3\end{bmatrix}$，且其特征值为 2，4，4，则 $tr(A)=$ 10.

7．向量 α_1,α_2 为线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的两个解，且 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的解空间为一维，则 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的通解为 $\alpha_1+c(\alpha_2-\alpha_1)$

8．已知非零向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 两两正交，向量 β 可由向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出，则其表出方式有 1 种，若 $\beta=\sum_{i=1}^{r}k_i\alpha_i$，则 $k_1=$ $\frac{(\alpha_1,\beta)}{(\alpha_1,\alpha_1)}$.

9．设 $\vec{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},\vec{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ 分别是 A 的对应于特征值 2 与 3 的特征向量，则 $A(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2)=$ $\begin{bmatrix}5\\4\\3\end{bmatrix}$

得分	评阅人

二、计算（共 24 分，每小题 6 分。）

1. 求 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$.

原式 $\xlongequal[C_4+C_3\cdot 2]{C_2+C_3\cdot 2} \begin{vmatrix} 2 & -9 & -5 & -9 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -10 & -7 & -8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -9 & -9 \\ 1 & -3 & -6 \\ 1 & -10 & -8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & -6 \\ 0 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 27$

2. 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$，求 $3A-2B$ 及 AB^T

$3A-2B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 5 & 7 & -11 \\ 3 & -13 & 1 \end{bmatrix}$ ， $AB^T=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & 4 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

3. 已知 $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$，求解矩阵方程 $AX=BX+C$.

$(A-B)X=C \Rightarrow X=(A-B)^{-1}C$

$(A-B, C)=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\therefore X=\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. 已知三阶矩阵 A 的特征值为 1，-1，2，求行列式 $|A^*+3A-E|$ 。

设 A 有特征值 λ，则 $A^*+3A-E=|A|A^{-1}+3A-E=-2A^{-1}+3A-E$

有特征值 $\frac{-2}{\lambda}+3\lambda-1$，即：0，-2，4.

$\therefore |A^*+3A-E|=0$.

6

得分	评阅人
6	

三、(8分)已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$:

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix},\ \alpha_2=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\1\end{bmatrix},\ \alpha_3=\begin{bmatrix}2\\5\\-1\\4\end{bmatrix},\ \alpha_4=\begin{bmatrix}2\\1\\3\\0\end{bmatrix},$$

求该向量组的秩和一个极大无关组。

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{bmatrix}1&1&2&2\\2&0&5&1\\0&2&-1&3\\1&1&4&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&2&2\\0&-2&1&-3\\0&2&-1&3\\0&0&2&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&2&2\\0&-2&1&-3\\0&0&2&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\therefore r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$, 一个极大无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

得分	评阅人

四、(13分)讨论a为何值时,线性方程组$\begin{cases}2x_1+(2+a)x_2-x_3=1\\x_1+\qquad ax_2-2x_3=0\\2x_1+3x_2+(a+2)x_3=3\end{cases}$,有唯一解、无解、有无穷多解;有无穷多解时,求出通解。

1) $|A|=\begin{vmatrix}2&2+a&-1\\1&a&-2\\2&3&a+2\end{vmatrix}=(a-3)(a+1)\neq0$, 即$a\neq-1$且$a\neq3$时, 有唯一解.

2) $a=-1$时, $\begin{bmatrix}2&1&-1&1\\1&-1&-2&0\\2&3&1&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-2&0\\0&3&3&1\\0&5&5&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-2&0\\0&1&1&\frac{1}{3}\\0&0&0&\frac{4}{3}\end{bmatrix}$, 无解

3) $a=3$时, $\begin{bmatrix}2&5&-1&1\\1&3&-2&0\\2&3&5&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&-2&0\\0&-1&3&1\\0&-3&9&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&7&3\\0&1&-3&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$, 有无穷多解

$\begin{cases}x_1=-7x_3+3\\x_2=3x_3-1\end{cases}$, 通解 $\begin{bmatrix}3\\-1\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}-7\\3\\1\end{bmatrix}$.

得分	评阅人

五、（10 分）设 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是 R^3 的一组基，已知 $\alpha_1=\xi_1+2\xi_2+3\xi_3$，$\alpha_2=2\xi_1+2\xi_2+4\xi_3$，$\alpha_3=3\xi_1+\xi_2+3\xi_3$，证明：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 R^3 的一组基。

$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{bmatrix}$，$\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-2&-5\\0&-2&-6\end{vmatrix}\neq0$

$\therefore(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{bmatrix}^{-1}$ 从而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与基 ξ_1,ξ_2,ξ_3 等价.

$\therefore\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基.

得分	评阅人

六、（15 分）已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{bmatrix}$，

求（1）可逆矩阵 P 及对角阵 Λ，使 $P^{-1}AP=\Lambda$。重复

（2）A^n。

(1) $P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{bmatrix}$ s.t. $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}4&&\\&4&\\&&2\end{bmatrix}$

(2) $A^n=(P\Lambda P^{-1})^n=P\Lambda^nP^{-1}$

$(P,E)=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&0&2&0&-1&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&\frac12&\frac12\\0&0&1&0&-\frac12&\frac12\end{array}\right]$

$\Rightarrow P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac12&\frac12\\0&-\frac12&\frac12\end{bmatrix}$

$\therefore A^n=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4^n&0&0\\0&4^n&0\\0&0&2^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac12&\frac12\\0&-\frac12&\frac12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4^n&0&0\\0&\frac{4^n+2^n}{2}&\frac{4^n-2^n}{2}\\0&\frac{4^n-2^n}{2}&\frac{4^n+2^n}{2}\end{bmatrix}$