17′ 2017-2018 学年第一学期《概率统计》试卷（A）

授课班号__________年级专业 15机械 学号__________姓名__________

题型	填空题	计算题	综合题	总分	审　核
得分					

一、填空题(每小题 5 分，共 25 分)

1. 设 $P(A)=P(B)=\frac{1}{4}, P(C)=\frac{1}{2}, P(AB)=0, P(AC)=P(BC)=\frac{1}{8}$，则 A,B,C 三者都不发生的概率 $P(\overline{ABC})=$ $\frac{1}{4}$.

2. 设某批电子元件的正品率为4/5，次品率为1/5，现对这批元件进行测试，只要测得一个正品就停止测试工作，则测试次数 ξ 的概率分布为 $P(\xi=k)=$ $\frac{4}{5^k}$，$k=1,2,\cdots$

3. 抛一枚硬币三次，ξ 和 η 分别表示出现正面次数和出现反面次数，则 $P\{\xi>\eta\}=$ $\frac{1}{2}$.

4. 已知随机变量 ξ_1,ξ_2,ξ_3 的协方差

$$\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_3)=2,\ \operatorname{cov}(\xi_2,\xi_3)=1,$$

则 $\operatorname{cov}(\xi_1+\xi_2,3\xi_3)=$ 9.

5. 随机变量 X 的数学期望 $E(X)=100$，方差 $D(X)=10$，则由切比雪夫不等式 $P\{80<X<120\}\geq$ $\frac{39}{40}$.

二、计算题(每小题 6 分，共 36 分)

1. 某人从甲地到乙地，乘火车、轮船和飞机来的概率分别为0.2, 0.4和0.4，乘火车来迟到的概率为0.5，乘轮船来迟到的概率为0.2，乘飞机来不会迟到. 问他迟到的概率是多少？又如果他迟到乙地，问他乘轮船来的概率是多少？

14通信 往年题　　0.18 ； $\frac{4}{9}$

2. 设连续型随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} Ax^2e^{-kx}, & x\ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases} \quad (k\text{ 为已知常数}).$$

求：(1) 常数 A； (2) $P\left\{0\le X\le \frac{1}{k}\right\}$.

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^{+\infty} Ax^2e^{-kx}dx \overset{\text{令}kx=t}{=\!=\!=} \frac{A}{k^3}\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt = \frac{2A}{k^3} = 1$

$\therefore A = \frac{k^3}{2}$

(2) $P\{0\le X\le \frac{1}{k}\} = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{k^3}{2}x^2e^{-kx}dx \overset{\text{令}kx=t}{=\!=\!=} \int_0^1 \frac{t^2}{2}e^{-t}dt = 1-\frac{5}{2}e^{-1}$

3. 已知随机变量 (ξ,η) 的联合分布律为

ξ	$\eta=1$	$\eta=2$	$\eta=3$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{A}$	$\frac{1}{B}$

问 A,B 为何值时，ξ 与 η 相互独立？并写出相互独立时 (ξ,η) 的联合分布律以及关于 ξ 和 η 的边缘分布律.

$\xi \backslash \eta$	1	2	3	$p_{i\cdot}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{3}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$A=\frac{9}{2}$，$B=9$.

4. 设随机变量 ξ 服从拉普拉斯分布，其概率密度为

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}e^{-|x-\mu|} \quad (-\infty<x<+\infty),$$

求 $E(\xi),D(\xi)$.

(1) $E(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{2}e^{-|x-\mu|}dx \overset{\text{令}x-\mu=t}{=\!=\!=} \int_{-\infty}^{+\infty}(t+\mu)\cdot\frac{1}{2}e^{-|t|}dt$

$= \int_0^{+\infty}\mu e^{-t}dt = \mu$

(2) $D(\xi) = E(\xi^2)-[E(\xi)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot\frac{1}{2}e^{-|x-\mu|}dx-\mu^2$

$\overset{\text{令}x-\mu=t}{=\!=\!=} \int_{-\infty}^{+\infty}(t+\mu)^2\cdot\frac{1}{2}e^{-|t|}dt-\mu^2 = \int_0^{+\infty}t^2e^{-t}dt+\int_0^{+\infty}\mu^2e^{-t}dt-\mu^2$

$= 2+\mu^2-\mu^2 = 2$.

5. 某批产品的次品率是0.005，试求作意抽取10000件产品中次品数不多于70件的概率．已知

$F_{0.1}(2)=0.9772$； $F_{0.1}(2.84)=0.9977$； $F_{0.1}(x)=1$，$x>4$．

次品数 $X \sim b(10000, 0.005)$，$E(X)=50$，$D(X)=50\times 0.995$

$$P\{0\le X\le 70\} = P\left\{\frac{0-50}{\sqrt{50\times 0.995}} \le \frac{X-50}{\sqrt{50\times 0.995}} \le \frac{70-50}{\sqrt{50\times 0.995}}\right\}$$

$$\approx \Phi(2.84)-\Phi(-7.1) = \Phi(2.84)-[1-\Phi(7.1)]$$

$$= 0.9977-(1-1) = 0.9977.$$

6. 已知总体 ξ 的密度为

$2e^{-2(x-\theta)}$

$$\varphi(x)=\begin{cases} 2e^{-2(x-\theta)}, & x\ge\theta \\ 0, & x<\theta \end{cases},$$

其中 θ 是未知参数，设 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为总体的样本，试求

(1) θ 的矩法估计； (2) θ 的极大似然估计．

(1) $\mu_1 = E(X) = \int_\theta^{+\infty} x\cdot 2e^{-2(x-\theta)}dx = \theta+\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \mu_1-\frac{1}{2}$

$\therefore \hat{\theta} = \hat{\mu}_1-\frac{1}{2} = A_1-\frac{1}{2} = \overline{X}-\frac{1}{2}$

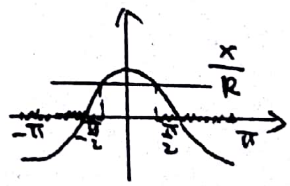
(2) $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n}\left[2e^{-2(x_i-\theta)}\right] = 2^n\cdot e^{-2\sum_{i=1}^{n}x_i+2n\theta}$

$\ln L(\theta) = n\ln 2-2\sum_{i=1}^{n}x_i+2n\theta$，$\frac{L'(\theta)}{L(\theta)} = 2n>0 \Rightarrow L(\theta)$ 无驻点

又 $\because L(\theta)\nearrow$ $\therefore \hat{\theta} = \theta_{max} = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$.

三、综合题(满分39分)

1. (9分) 平面上随机点坐标 (ξ, η) 满足关系 $\xi^2+\eta^2=R^2 (R>0)$，且知该随机点的极角 α 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上服从均匀分布，求随机变量 ξ 的概率密度．



$\alpha \sim U[-\pi, \pi]$，$\xi = R\cos\alpha$.

区间长度比

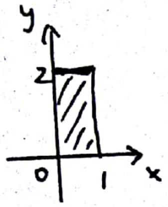
$$F_\xi(x) = P\{\xi\le x\} = \begin{cases} 0, & x\le -R \\ 1, & x\ge R \\ P\left\{\cos\alpha\le\frac{x}{R}\right\} = \frac{2\left(\pi-\arccos\frac{x}{R}\right)}{2\pi}, & -R<x<R \end{cases}$$

$$\therefore f_\xi(x) = F'_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{R^2-x^2}}, & |x|<R \\ 0, & |x|\ge R \end{cases}$$

2. (10 分)　设二维连续随机向量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+\dfrac{xy}{3}, & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求关于 X, Y 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$.



$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\begin{cases} \int_0^2 \left(x^2+\dfrac{xy}{3}\right)dy = 2x^2+\dfrac{2x}{3}, & 0\le x\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\begin{cases} \int_0^1 \left(x^2+\dfrac{xy}{3}\right)dx = \dfrac{1}{3}+\dfrac{y}{6}, & 0\le y\le 2 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

3. (10 分)　人的身高服从正态分布，从初一女生中随机抽取 6 名，测得身高如下 (单位: cm):

149　158.5　152.5　165　157　142

求初一女生平均身高的置信区间 ($\alpha=0.05$). $(t_{0.025}(5)=2.5706)$

$$\left(\bar{X}\pm \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$$

$$\bar{x}=\frac{1}{6}(149+\cdots+142)=154$$

$$S^2=\frac{1}{5}\left[(149-154)^2+\cdots+(142-154)^2\right]=64.3$$

$$\left(154\pm\sqrt{\frac{64.3}{6}}\times 2.5706\right) \Rightarrow (145.585, 162.415)$$

4. (10 分)　已知维尼纶纤度在正常条件下服从正态分布 $N(M, 0.048^2)$ 某日抽取五根纤维测得其纤度为 1.32, 1.55, 1.36, 1.40, 1.44，问这一天的纤度总体标准差是否正常?

$\alpha=0.05$, M 未知; 已知 $\chi^2_{0.025}(4)=11.143$　$\chi^2_{0.975}(4)=0.484$

H_0: $\sigma^2=\sigma_0^2=0.048^2$; H_1: $\sigma^2\ne\sigma_0^2$

$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$，拒绝域: $\chi^2\le 0.484$ 或 $\chi^2\ge 11.143$.

又 $\bar{x}=\frac{1}{5}(1.32+\cdots+1.44)=1.41$

$\chi^2=\dfrac{4S^2}{0.048^2}=\dfrac{1}{0.048^2}\left[(1.32-1.41)^2+\cdots+(1.44-1.41)^2\right]=13.54$ 在拒绝域内

∴ 拒绝 H_0, 接受 H_1. 认为不正常