# 河海大学 2006~2007 学年第一学期

# 《高等数学》（上）期末试卷

考试对象：2006 级

**一、选择题，每小题三分，共 15 分**

1.设 $y=\cos\dfrac{\arcsin x}{2}$，则 $y'(\dfrac{\sqrt{3}}{2})=$（　　　　）。

A. $-\dfrac{1}{2}$　　B. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2.函数 $y=6x+\dfrac{3}{x}-x^3$ 在 $x=1$ 处有（　　　　）。

A.极小值　　B.极大值　　C.拐点　　D.既无极值又无拐点

3.下列四项中正确的是（　　　　）。

A. $((\int f(x)dx)')=f(x)+c$　　B. $\int f'(x)dx=f(x)+c$

C. $\int f(x)dx=f(x)+c$　　D. $\int f'(x)dx=f(x+c)$

4.下列广义积分收敛的是（　　　　）。

A. $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$　　B. $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x}dx$　　C. $\int_1^{\infty}\dfrac{1}{x^2}dx$　　D. $\int_1^{\infty}\sqrt{x}dx$

5.设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处取得极值，则下述结论正确的是（　　　　）。

A. $f'(x_0)$ 必定存在且 $f'(x_0)=0$　　B. $f'(x_0)$ 不存在或 $f'(x_0)=0$

C. $f'(x_0)$ 必定不存在　　D. $f'(x_0)$ 必定存在，不一定为零

**二. 填空题（每小题三分，共 15 分）**

1.设 $y=y(x)$ 由方程 $x\sin y+ye^x=0$ 所确定，则 $y'(0)=$____________。

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x^2+2)^3}{(2x^3+3)^2}=$____________。　3. $\dfrac{d}{dx}\int_a^b\dfrac{\arctan x}{1+x^2}dx=$____________。

4. $\int \frac{dx}{x^2+2x-3} =$ ________。 5. $\int_{-1}^{1}(x^2+x\sqrt{4-x^2})dx =$ ________。

**三．试解下列各题（每小题 7 分，共 28 分）**

1.设 $y=f(\frac{1}{x})$, 其中 $f$ 的各阶导数均存在，求 $y'$ 及 $y''$。

2.求 $y=x^3-3x^2-9x+14$ 的单点区间、凹凸区间及拐点。

3.计算 $I=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\int_0^x u\cos u^2 du)^2}{\int_0^x \sin u^2 du}$。

4. 计算 $I=\int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx$。

**四．（8 分）** 证明:对于任意实数 $x$ 有 $2x\arctan x \ge \ln(1+x^2)$。

**五．（9 分）** 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数，证明对于任意的实数 a,有

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a [f(x)+f(-x)]dx$$ 。

六．（9分）求曲线$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C$ 和它在$x=\frac{\pi}{2}$处的切线及$x=\pi$ 所围成图形的面积，并求此图形绕$x$轴旋转所得旋转体的体积。

七．（8分）A、B两厂在直河岸的同侧，A沿河岸，B离岸4公里，A与B相距5公里。今在河岸边建一水厂C，从水厂到B厂的每公里水管材料费是A厂的$\sqrt{5}$倍。问水厂C设在离A厂多远才使两厂所耗总的水管材料费为最省？

八、（8分）设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，

$f(0)=f(1)=0, f\left(\frac{1}{2}\right)=1$。试证（1）存在$\eta\in\left(\frac{1}{2}\right)$，使$f(\eta)=\eta$；（2）必存在$\xi\in(0,\eta)$，使得$f'(\xi)-f(\xi)+\xi=1$。

# 2006级高等数学（上）期末试卷参考答案

一、A　C　B　C　B　二、1. 0　　2. $\frac{27}{4}$　3.　0　4. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C$　　5. $\frac{2}{3}$

三、 1、$y'=-\frac{1}{x^2}f'(\frac{1}{x})$　　2. $y''=\frac{2}{x^3}f'(\frac{1}{x})+\frac{1}{x^4}f''(\frac{1}{x})$.

2、定义域为：$(-\infty,+\infty)$, $y'=3x^2-6x-9$, 由 $y'=0\Rightarrow x_1=-1,x_2=3$, 故当$x<-1$

时， $y'>0$, 当$-1<x<3$时， $y'<0$, 当$x>3$时， $y'>0$, 则单增区间为：

$(-\infty,-1),(3,+\infty)$, 单减区间为：$(-1,3)$, 又 $y''=6x-6$, 由 $y''=0\Rightarrow x=1$，当$x<1$

时， $y''<0$, 当$x>1$时 $y''>0$, 则凹区间为：$(1,+\infty)$,， 凸区间为：$(-\infty,1)$，拐点坐标为：(1,3)。

3、$I=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\int_0^x u\cos u^2du \cdot x\cos x^2}{\sin x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\int_0^x u\cos u^2}{x}\cdot\frac{x^2}{\sin x^2}\cdot\cos x^2$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x\cos x^2}{1}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{\sin x^2}\cdot\lim\limits_{x\to0}\cos x^2=0\times1\times1=0$

4、$I=-\int_0^{\ln2}xde^{-x}=-xe^{-x}\Big|_0^{\ln2}+\int_0^{\ln2}e^{-x}dx=-\frac{\ln2}{2}-e^{-x}\Big|_0^{\ln2}=\frac{1}{2}-\frac{\ln2}{2}$

四、令 $f(x)=2x\arctan x-\ln(1+x^2)$, $f'(x)=2\arctan x$, 当$x>0$时，$f'(x)>0$, 故

$f'(x)$单增，$\Rightarrow f(x)>f(0)=0$；当$x<0$时， $f'(x)<0$，故$f(x)$单减，

$\Rightarrow f(x)>f(0)=0$ 。

故当$x\neq0$时， $f(x)>f(0)=0$ ，故对$\forall x$有： $2x\arctan x\geq\ln\left(1+x^2\right)$.

五、

$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_0^a f(x)dx$, 令 $u=-x$, 则 $\int_{-a}^{0}f(x)dx=\int_0^a f(-u)d(-u)=\int_0^a f(-x)dx$

故$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a \left[ f(x) + f(-x) \right]dx.$

六、 $A=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1-\sin x)dx = \frac{\pi}{2}-1$，

$V = \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(1-\sin^2 x\right)dx = \frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1+\cos 2x)dx = \frac{\pi^2}{4}$。

七、设C长为$x$公里$0 \le x \le 3$，水厂到A厂每公里水管材料费为$k$元，则总的水管材料费为：$S = kx + \sqrt{5}k\sqrt{16+(3-x)^2}, 0 \le x \le 3$。则

$S' = \frac{k\left[\sqrt{16+(3-x)^2} - \sqrt{5}(3-x)\right]}{\sqrt{16+(3-x)^2}}$，由$S'=0 \Rightarrow$ 唯一驻点$x=1$，又

$S'' = \frac{16\sqrt{5}k}{\left[16+(3-x)^2\right]^{\frac{3}{2}}} > 0$，故当$x=1$公里时，总的水管材料费S最小。

八、(1) 令$\varphi(x) = f(x) - x$，则$\varphi(x)$在$[0,1]$上连续，又

$\varphi(1)=-1<0, \varphi\left(\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{2}>0$，

由介值定理存在$\eta \in \left(\frac{1}{2},1\right)$，使$\varphi(\eta)=0$，即$f(\eta)=\eta$。

**(2) 令$g(x)=e^{-x}\left[f(x)-x\right]$，则$g(x)$在$[0,\eta]$上连续，在$(0,\eta)$内可导，**

$g(0)=g(\eta)=0$，由Rolle定理，在$(0,\eta)$内至少存在一点$\zeta$，使

$g'(\zeta)=e^{-\zeta}\left[f'(\zeta)-f(\zeta)+\zeta-1\right]=0$，即$f'(\zeta)-f(\zeta)+\zeta=1$。