2013-2014 学年第二学期《高等数学 AⅡ》试卷

一、填空题（每小题 3 分，共 24 分）

1. 设 $\vec{a}=\sqrt{3}(1,-1,2)$，$\vec{b}=(2,-1,3)$，则 $\left|(4\vec{a}-3\vec{b})\times(8\vec{a}-5\vec{b})\right|=$ 12。

2. xOy 平面上曲线 $x^2-4y^2=9$ 绕 y 轴旋转一周所得旋转曲面方程为 $x^2-4y^2+z^2=9$。

3. 函数 $z=x^y$ 在点 $(1,2)$ 沿 $\vec{a}=(1,1)$ 方向的方向导数是 $\sqrt{2}$。

4. 交换积分次序 $\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x,y)\,dx=$ $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)\,dy$。

5. 设 C 为 $x^2+y^2=a^2$ 在第一象限内的部分，则 $\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds=$ $\frac{\pi}{2}ae^a$。

6. 设 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=a^2$，则 $\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\,dS=$ $4\pi a^4$。

7. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n+1}}{n^{\alpha}}$ 收敛的充要条件是 α 满足不等式 $\alpha>\frac{3}{2}$。

8. 若方程 $y''+py'+qy=0$（p,q 均为实常数）有特解 $y_1=e^x$，$y_2=e^{-x}$，则 p 等于 0，q 等于 -1。

二、计算题（每小题 8 分，共 32 分）

1. 求过直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{2}$，且垂直于平面 $x+2y-z-5=0$ 的平面方程。

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -3 & 2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=(-1,4,7)=-(1,-4,-7)$$

且平面过点 $(1,-2,2)$.

$\therefore$ 平面方程为：$x-1-4(y+2)-7(z-2)=0$

即：$x-4y-7z+5=0$

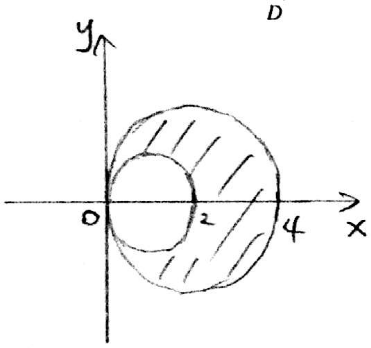
由 扫描全能王 扫描创建

2. 设 $f(x,y)$ 具有连续的一阶偏导数，$f(1,1)=1$，$f_1(1,1)=a$，$f_2(1,1)=b$，

又 $\varphi(x)=f\{x,f[x,f(x,x)]\}$，求 $\varphi(1)$，$\varphi'(1)$。

10 级

3. 计算二重积分 $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy$，其中 D：$x^2+y^2\ge 2x$，$x^2+y^2\le 4x$ 。



$$\text{原式} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} r^3\,dr$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 60\cos^4\theta\, d\theta$$

$$= 120 \times \frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{45}{2}\pi$$

4. 试将函数 $f(x)=\dfrac{12-5x}{6-5x-x^2}$ 展开成 x 的幂级数。

$$f(x) = \frac{12-5x}{(6+x)(1-x)} = \frac{6}{6+x} + \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{x}{6}} + \frac{1}{1-x}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{6}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \,,\quad -1<-\frac{x}{6}<1 \text{ 且 } -1<x<1$$

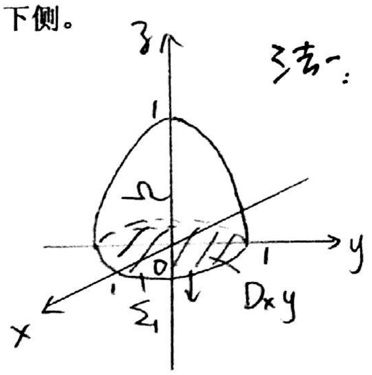
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(-\frac{1}{6}\right)^n + 1\right] x^n \,,\quad -1<x<1$$

三、综合题（每小题 11 分，共 44 分）

1. 沿厂房的后墙修建一座容积为 V 形状为长方体的仓库，已知仓库的屋顶和墙壁每单位面积的造价分别为地面每单位面积造价的 2 倍和 1.5 倍，厂房后墙的长和高足够，因而这一面墙壁的造价不计，问如何设计，方能使仓库的造价最低？

11级

2. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx+(z+1)\,dxdy$，其中 Σ 是曲面 $z=1-x^2-y^2$ 在 $z\ge 0$ 部分的下侧。



法一: $I=\iint\limits_{D_{xy}}(x,y,1-x^2-y^2+1)\cdot(-2x,-2y,-1)\,dxdy$

$=\iint\limits_{D_{xy}}-(2+x^2+y^2)\,dxdy$

$=-2\iint\limits_{D_{xy}}dxdy-\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\,dxdy$

$=-2\pi-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3\,dr$

$=-2\pi-\frac{\pi}{2}$

$=-\frac{5\pi}{2}$.

法二: 添 $\Sigma_1: z=0\ (x^2+y^2\le 1)$, 下侧

则 $\iint\limits_{-\Sigma\cup\Sigma_1} xdydz+ydzdx+(z+1)dxdy=-I+\iint\limits_{\Sigma_1}xdydz+ydzdx+(z+1)dxdy$

$=-I+\iint\limits_{\Sigma_1}dxdy=-I-\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=-I-\pi=\iiint\limits_{\Omega}3\,dxdydz$ (Gauss公式)

$=\int_0^1 dz\iint\limits_{D(z)}3\,dxdy=\int_0^1 3\pi(1-z)\,dz=\frac{3\pi}{2}$

$\therefore I=-\pi-\frac{3\pi}{2}=-\frac{5\pi}{2}$.

3. 试求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^n$的和函数，并计算$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$的和。

1) $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{2n+1}{2n-1}\right|=1 \quad \therefore R=1$

又∵ $x=\pm1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}(2n-1)x^n\neq0 \quad \therefore x=\pm1$为发散点，收敛域为$(-1,1)$

令$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^n$，$-1<x<1$

则$S(x)=2x\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=2x\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\right)'-\frac{x}{1-x}$

$=2x\left(\frac{1}{1-x}-1\right)'-\frac{x}{1-x}=2x\cdot\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{x}{1-x}=\frac{x(1+x)}{(1-x)^2}$，$-1<x<1$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=S(\frac{1}{2})=3$

4. 设$f(x)$二阶连续可微，且$f(0)=0$，$f'(0)=1$，试确定$f(x)$，使

方程$[f(x)+1]ydx-[f'(x)+x]dy=0$是全微分方程。

09级