2015--2016 学年第二学期高等数学期中测试及数学竞赛试卷（2015 级）

________学院　授课班号__________学号____________姓名____________

试题	一	二 1	二 2	二 3	二 4	三 1	三 2	三 3	三 4	三 5	总计
得分											

（参加竞赛的同学做一、二、三大题，其他同学做一、二大题）

一、　填空题 (8×5 分)

1. 设$|\vec a|=1, |\vec b|=2$，$\vec p=3\vec a-2\vec b, \vec q=4\vec a+\vec b$，$\vec p\perp\vec q$，则$|\vec p\times\vec q|=$ $\frac{22}{5}\sqrt{21}$。

2. 直线$l:\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$在平面$\pi: x-y+z-2=0$上的投影直线方程为 $\begin{cases} x-z-1=0 \\ x-y+z-2=0 \end{cases}$。 $(\vec s=(1,2,1)$ 过点 $(1,-1,0))$

3. 直线$l_1:\frac{x}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-1}{1}$与$l_2:\frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{-1}$间的距离为 $\frac{\sqrt5}{5}$。

4. 设$f(x,y)=\arctan\frac{x}{y}$，$f(x,y)$在点$(1,1)$处的梯度等于 $\left(\frac12,-\frac12\right)$。

5. 曲面$x^2+2y^2+3z^2=21$的平行于平面$x+4y+6z=0$的切平面为 $x+4y+6z\pm21=0$。
2个解

6. 设$u=x^2yz^3$，其中$z=z(x,y)$由方程$x^2+y^2+z^2-3xyz=0$确定，$z(1,1)=1$则$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=$ -2。

7. 交换积分次序$\int_{-1}^0 dx\int_2^{1-x} f(x,y)dy=$ $-\int_1^2 dy\int_{1-y}^0 f(x,y)dx$ 或 $\int_1^2 dy\int_0^{1-y} f(x,y)dx$。

8. $\int_0^{\frac{1}{\sqrt2}}dy\int_0^y e^{-(x^2+y^2)}dx+\int_{\frac{1}{\sqrt2}}^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}} e^{-(x^2+y^2)}dx=$ $\frac{\pi}{8}(1-e^{-1})$。

二、计算题(4×15 分)

1. 已知函数f具二阶导数，g具二阶连续偏导数，$z=e^x f(xy)+g(2x-y,x+3y)$，求dz及$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^x f(xy)+ye^x f'+2g_1'+g_2'$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=xe^x f'-g_1'+3g_2'$$

$$\therefore dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=[e^x f(xy)+ye^x f'+2g_1'+g_2']dx+(xe^x f'-g_1'+3g_2')dy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^x f'\cdot x+e^x f'+ye^x f''\cdot x+2[g_{11}''\cdot(-1)+g_{12}''\cdot 3]+g_{21}''\cdot(-1)+g_{22}''\cdot 3$$

$$=(x+1)e^x f'+xye^x f''-2g_{11}''+5g_{12}''+3g_{22}''$$

2. 求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极大值与极小值。

$$f_x=(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$f_y=-xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

由 $\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases}$ 解得驻点 $(1,0),(-1,0)$

$$A=f_{xx}=x(x^2-3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$B=f_{xy}=y(x^2-1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$C=f_{yy}=x(y^2-1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$(1,0)$ 点： $AC-B^2=2e^{-\frac{1}{2}}>0$

$A=-2e^{-\frac{1}{2}}<0$

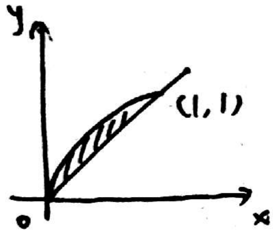
$(-1,0)$ 点， $AC-B^2=2e^{-\frac{1}{2}}>0$

$A=2e^{-\frac{1}{2}}>0$

$\therefore$ 极大值 $f(1,0)=e^{-\frac{1}{2}}$.

极小值 $f(-1,0)=-e^{-\frac{1}{2}}$.

3. 已知 D 由 $y^2=x$ 与 $y=x$ 所围，计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{\sin y}{y}dxdy$

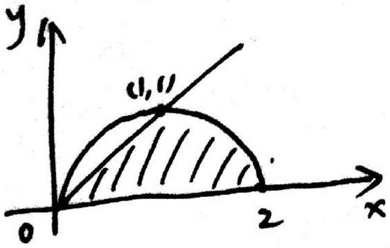


$$\text{原式}=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{y}\frac{\sin y}{y}dx$$

$$=\int_0^1(1-y)\sin y\,dy$$

$$=1-\sin 1$$

4. 已知 $D=\{(x,y)|0\le y\le x, x^2+y^2\le 2x\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy$。



$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2dr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{8}{3}\cos^3\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{8}{3}(1-\sin^2\theta)\,d\sin\theta$$

$$=\frac{10}{9}\sqrt{2}$$

三、数学竞赛加题(5×20 分)

1. 设数列$\{x_n\}$满足$0<x_1<\pi$，$x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$ 06级考题

① 由题，$x_{n+1}=\sin x_n\le x_n$，$\{x_n\}\downarrow$ 有下界。

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在。

② $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$ (*)

$\because \lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x-x}}\right]^{\frac{\sin x-x}{x^3}}=e^{-\frac{1}{6}}$

$\therefore$ (*) $=e^{-\frac{1}{6}}$.

2. 设$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0);\end{cases}$，讨论$f(x,y)$在点$(0,0)$处的可微性与一阶偏导函数连续性。

① $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x^2}}{x}=0$

由对称性，$f_y(0,0)=0$.

$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\frac{f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\cdot\Delta x-f_y(0,0)\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$

$=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=0$

$\therefore f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y+o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$，$\Delta x\to0,\Delta y\to0$.

$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微.

② $f_x(x,y)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$\because \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}}f_x(x,y)=\lim\limits_{x\to0}\left(2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}\right)\nexists$

$\therefore \lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}f_x(x,y)\nexists$. 从而 $f_x(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点间断.

由对称性，$f_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点间断.

3. 1) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}dx$；01级校题　　2) 计算 $\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$，其中 $f(x)=\int_1^x\frac{\ln(1+t)}{t}dt$。13级考题

令 $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}dx$

令 $x=-t$. $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 t}{1+e^{t}}dt=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{1+e^{x}}dx$

$\therefore I=\frac{1}{2}\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}dx+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{1+e^{x}}dx\right)$

$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$

原式 $=\int_0^1 f(x)\,d(2\sqrt{x})=\left[2\sqrt{x}f(x)\right]_0^1-\int_0^1 2\sqrt{x}f'(x)dx$

$=2f(1)-\int_0^1 2\sqrt{x}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}dx$

$=0-\int_0^1 4\ln(1+x)\,d\sqrt{x}$

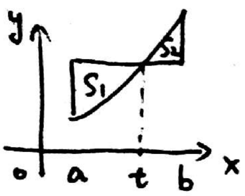
$=-4\left[\sqrt{x}\ln(1+x)\right]_0^1+4\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$

（令 $\sqrt{x}=t$）

$=-4\ln 2+4\int_0^1\frac{t}{1+t^2}\cdot 2t\,dt$

$=-4\ln 2+8\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=-4\ln 2+8-2\pi$

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f'(x)>0$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使 $y=f(x)$，$y=f(\xi)$，$x=a$ 所围面积 S_1 是 $y=f(x)$，$y=f(\xi)$，$x=b$ 所围面积 S_2 的 3 倍，且 ξ 惟一。88年数学一



① 存在性：由题，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单增.

设 $F(t)=\int_a^t[f(t)-f(x)]dx-3\int_t^b[f(x)-f(t)]dx$

易知 $F(t)\in C[a,b]$ 且有：

$F(a)=-3\int_a^b[f(x)-f(a)]dx<0$，$F(b)=\int_a^b[f(b)-f(x)]dx>0$.

∴由零点Th. $\exists\xi\in(a,b)$ s.t. $F(\xi)=0$. 此时 $S_1-3S_2=0$.

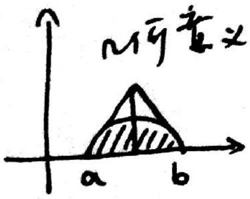
② 唯一性：$F(t)=f(t)(t-a)-\int_a^t f(x)dx-3\int_t^b f(x)dx+3f(t)(b-t)$

$F'(t)=f'(t)[(t-a)+3(b-t)]>0$，$t\in(a,b)$.

∴ $F(t)\nearrow$，零点存在且唯一.

5. 已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具一阶连续导数，且 $|f'(x)|\le M, f(a)=f(b)=0$，证明：$\int_a^b|f(x)|dx\le\frac{M(b-a)^2}{4}$。

几何意义.



由题，$f(x)=f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)$

$\Rightarrow |f(x)|\le M(x-a)$，$\forall x\in[a,b]$.

同理，$|f(x)|\le M(b-x)$，$\forall x\in[a,b]$.

从而 $\int_a^b|f(x)|dx\le\int_a^{\frac{a+b}{2}}M(x-a)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b-x)dx$

$=\frac{M(b-a)^2}{4}$.