河海大学常州校区 2004-2005 学年数学竞赛

一、填空题（16×4 分）

1. 当 $x\to 0$ 时，$3x-4\sin x+\sin x\cos x$ 与 x^n 为同阶无穷小，则 $n=$ $\underline{\ 5\ }$。

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a\ln x}{x-1}, & x>0,x\neq 1\\ b, & x=1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处可导，则 $f'(1)=$ $\underline{-\frac{a}{2}\quad (a=b)}$。

3. 设 $a>0$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a-x}{a+x}\right)^{\frac{2}{x}}=\int_{\frac{1}{a}}^{+\infty}xe^{-4x}dx$，则 $a=$ $\underline{\frac{4}{15}}$。

4. 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$z=f\left(2x-y,\dfrac{x}{y}\right)$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ $\underline{-2f''_{11}-\left(\frac{2x}{y^2}+\frac{1}{y}\right)f''_{12}-\frac{x}{y^3}f''_{22}-\frac{1}{y^2}f'_2}$。
(06试题-1)

✓5. 设三角形的三条边的边长分别为 a,b,c（其面积记为 S），则该三角形内一点到三边距离之乘积的最大值为 $\underline{\frac{8S^3}{27abc}}$。

条件极值 $L=xyz+\lambda\left(\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}by+\frac{1}{2}cz-S\right)$

6. 空间曲线 $\begin{cases}z=x^2+4y^2\\ y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 在点 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{7}{4}\right)$ 处的切线与 x 轴正向的夹角为 $\underline{\frac{\pi}{3}}$。

7. 已知平面过直线 $\begin{cases}x+y=0\\ x-y+z=2\end{cases}$ 且平行另一直线 $x=y=z$，则该平面方程为 $\underline{x-3y+2z-4=0}$。
(05/06试题-2)

Ch11 8. 将函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+2x}$ 展开为 $x+1$ 的幂级数，则其展开式为 $\underline{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3\cdot(-1)^n+1}{2}(x+1)^n,\ -2<x<0}$。

Ch11 9. 级数 $x-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{1}{7}x^7+\cdots$ 的和函数为 $\underline{S(x)=\arctan x,\ -1\le x\le 1}$。

10. 交换积分次序 $\int_0^1 dx\int_{x-1}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy=$ $\underline{\int_{-1}^{0}dy\int_0^{y+1}f(x,y)dx+\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx}$。 (05/06试题-6)

Ch10 11. 设 $f(x)$ 具有连续导数，$f(0)=0$，$\int_C xy^2dx+yf(x)dy$ 与路径无关，则 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2dx+yf(x)dy=$ $\underline{\frac{1}{2}}$。(06试题-10)

Ch10 12. 设 Σ 为 $x+2y+3z=1$ 在第一卦限的部分，则 $\iint\limits_{\Sigma}\left(\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{2}\right)dS=$ $\underline{\frac{\sqrt{14}}{72}}$。

Ch10 13. 设 Σ 为半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧，则 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{xdydz+zdxdy}{x^2+y^2+z^2}=$ $\underline{-\frac{4}{3}\pi a}$。

✓ Ch10 14. 设有向曲线 C 为 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x+z=a$ 的交线，从原点看去 C 的方向为顺时针，则 $\int_C ydx+zdy+xdz=$ $\underline{-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi a^2}$。

Stokes公式

Ch12

15. 微分方程$xy'+2y=x\ln x$满足$y(1)=-\frac{1}{9}$的解为 $y=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{x}{9}$ 。

Ch12

16. 设$y=e^x(C_1\sin x+C_2\cos x)$（$C_1,C_2$为任意常数）为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解，则该方程为 $y''-2y'+2y=0$ 。

✓二、设$f(x)$在$[-L,L]$上可微，且$f'(0)\neq 0$，1）试证：$\forall\, 0<x<L$，$\exists\, 0<\theta<1$，使 $\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x}f(t)dt=x\left[f(\theta x)-f(-\theta x)\right]$；2）求$\lim\limits_{x\to 0^+}\theta$。（9分） 01年考研题

设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x}f(t)dt$，$-L\leq x\leq L$

则 $F'(x)=f(x)-f(-x)$，$F''(x)=f'(x)+f'(-x)$.

从而 $F(0)=0$，$F'(0)=0$，$F''(0)=2f'(0)\neq 0$.

1) 由Lagrange中值Th，$\forall\, 0<x<L$，$\exists\, 0<\theta<1$，s.t.

$F(x)=F(x)-F(0)=xF'(\theta x)=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$，结论成立.

2) 由 $F''(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{F'(\theta x)-F'(0)}{\theta x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{F(x)}{x}-F'(0)}{\theta x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{F(x)-F'(0)x}{\theta x^2}$ 可得 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta=\dfrac{1}{F''(0)}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{F(x)-F'(0)x}{x^2}$

$\because \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{F(x)-F'(0)x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{F'(x)-F'(0)}{2x}=\dfrac{1}{2}F''(0)$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0^+}\theta=\dfrac{1}{2}$.

三、设$f(x)$具二阶连续导数，且$f(a)=f(b)=0$，$|f''(x)|\leq 8$，证明：$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\leq(b-a)^2$。（9分）

$f(a)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})\cdot(a-\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\xi_1)}{2}(a-\frac{a+b}{2})^2$，$a<\xi_1<\frac{a+b}{2}$ ①

$f(b)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})\cdot(b-\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\xi_2)}{2}(b-\frac{a+b}{2})^2$，$\frac{a+b}{2}<\xi_2<b$ ②

$\because f(a)=f(b)=0$ $\therefore$ ①+②可得：$0=2f(\frac{a+b}{2})+\frac{(b-a)^2}{8}\cdot[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]$

从而 $\left|f(\frac{a+b}{2})\right|=\frac{(b-a)^2}{16}\left|f''(\xi_1)+f''(\xi_2)\right|\leq\frac{(b-a)^2}{16}(|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|)$

又 $\because |f''(x)|\leq 8$ $\therefore$ $\left|f(\frac{a+b}{2})\right|\leq(b-a)^2$.

四、一个高为h的雪堆，其侧面满足方程$z=h-\dfrac{2\left(x^2+y^2\right)}{h}$，求雪堆的体积与侧面积之比。（9 分）

(08级=3)

(06级=3)

五、设$f(x)$连续且恒大于零，$F(t)=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega} f\left(x^2+y^2+z^2\right)dv}{\iint\limits_{D} f\left(x^2+y^2\right)d\sigma}$，其中$\Omega=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2+z^2\le t^2\right\}$，$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\le t^2\right\}$，证明：$F(t)$在区间$(0,+\infty)$内单调增加。（9 分）

$$F(t)=\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^t f(r^2)\cdot r^2\sin\varphi\,dr}{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t f(r^2)\cdot r\,dr}=\frac{2\pi\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^t f(r^2)\cdot r^2\,dr}{2\pi\int_0^t f(r^2)\cdot r\,dr}$$

$$=\frac{2\int_0^t f(r^2)\cdot r^2\,dr}{\int_0^t f(r^2)\cdot r\,dr}$$

$$F'(t)=\frac{2}{\left(\int_0^t f(r^2)\cdot r\,dr\right)^2}\cdot\left[f(t^2)\cdot t^2\int_0^t f(r^2)\cdot r\,dr-f(t^2)\cdot t\int_0^t f(r^2)\cdot r^2\,dr\right]$$

$$=\frac{2t\,f(t^2)}{\left(\int_0^t f(r^2)\cdot r\,dr\right)^2}\left[t\int_0^t f(r^2)\cdot r\,dr-\int_0^t f(r^2)\cdot r^2\,dr\right]$$

$$=\frac{2t\,f(t^2)}{\left(\int_0^t f(r^2)\cdot r\,dr\right)^2}\cdot\int_0^t r(t-r)f(r^2)\,dr>0\qquad\therefore F(t)\nearrow.$$