2010-2011 学年第二学期高等数学期中测试及数学竞赛试卷（2010 级）

（参加竞赛的同学全做，其他同学只做一、二大题）

一、填空题（10×6 分）

1. 设 $\vec{a}=(2,1,-2)$，$\vec{b}=(1,-1,-1)$，则 $(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})=$ $\underline{3}$，$(3\vec{a}-5\vec{b})\times(5\vec{a}-8\vec{b})=$ $\underline{(-3,0,-3)}$。
(13级—1)

2. 已知平面 π 过直线 $l_1: x=1, y=1+t, z=2+t$，且平面 π 平行另一直线 $l_2: x=y=z$，则平面 π 的方程为 $\underline{y-z+1=0}$。

3. 设曲面为 xOy 坐标面上曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 绕 y 轴一周所得，则曲面名称是 <u>旋转单叶双曲面</u>，曲面的方程是 $\underline{\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1}$。

4. 直线 $L:\begin{cases}2x-y+z-1=0\\x+y-z+1=0\end{cases}$ 在平面 $\pi: x+2y-z=0$ 上的投影直线 L_0 的方程为 $\begin{cases}3x-y+z-1=0\\x+2y-z=0\end{cases}$。
(11级—3)

5. 设 $z=(1+xy)^y$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=$ $\underline{1}$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}=$ $\underline{2\ln 2+1}$。(13级—5)

6. 曲线 $x=1, z=\sqrt{1+x^2+y^2}$ 在点 $(1,1,\sqrt{3})$ 处的切线方程为 $\begin{cases}x=1\\y-\sqrt{3}z+2=0\end{cases}$。(11级—5)

7. 设 F 可微，$z=z(x,y)$ 由方程 $F(x-z,y-z)=0$ 所确定，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ $\underline{1}$。

8. f 连续且 $f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$，$D: y=0, y=x^2, x=1$ 所围，则 $f(x,y)=$ $\underline{xy+\frac{1}{8}}$。

9. 交换积分次序 $\int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y)\,dx=$ $\underline{\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)\,dy}$。

10. $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy\int_0^y e^{-(x^2+y^2)}\,dx+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx=$ $\underline{\frac{\pi}{8}\left(1-\frac{1}{e}\right)}$。(11级=4)

二、计算题（4×10 分）

1. 设 $z=f(xy,g(x))$，f 具<u>二阶连续偏导</u>，$g(x)$ 可导，且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$。

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot y+f_2'\cdot g'(x)=y f_1'(xy,g(x))+g'(x)f_2'(xy,g(x))$$

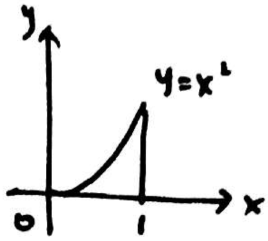
法一，令 $x=1$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}=y f_1'(y,1)$　$(g(1)=1,\ g'(1)=0)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'(y,1)+y\cdot f_{11}''(y,1)\Big|_{y=1}=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1).$$

法二：$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'(xy,g(x))+y\cdot\left[f_{11}''(xy,g(x))\cdot x+f_{12}''(xy,g(x))\cdot 0\right]+g'(x)\cdot\left[f_{21}''(xy,g(x))\cdot x+f_{22}''(xy,g(x))\cdot 0\right]$

$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)$

一.8. $f(x,y) = xy + \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$



设 $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = a$

则 $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D (xy+a)\,dx\,dy = a$

从而 $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} (xy+a)\,dy = a$

$\Rightarrow \frac{1}{12} + \frac{a}{3} = a \Rightarrow a = \frac{1}{8}$

$\therefore f(x,y) = xy + \frac{1}{8}$

2. 求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值。（13级二4）

3. 计算二重积分 $\iint\limits_D (x+y)^3 dxdy$，其中 D 由曲线 $x=\sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x+\sqrt{2}y=0$ 及 $x-\sqrt{2}y=0$ 围成。

（11级二3）

4. 设 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的下侧 $(R>0)$，求 $\iint\limits_\Sigma y^2z^2dydz+zdxdy$。ch10

添 Σ_1：$z=0$，$x^2+y^2\le R^2$，上侧

由Gauss公式，$\iint\limits_{\Sigma\cup\Sigma_1} y^2z^2dydz+zdxdy=\iiint\limits_\Omega dV=\frac{2}{3}\pi R^3$

又 $\iint\limits_{\Sigma_1} y^2z^2dydz+zdxdy=0$

∴ 原式 $=\frac{2}{3}\pi R^3-0=\frac{2}{3}\pi R^3$.

三、数学竞赛加题（5×20 分）

1. 1）求极限：$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$；

令 $y=\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$

$$\lim_{x\to0}\ln y=\lim_{x\to0}\frac{\ln|\ln(1+x)|-\ln|x|}{e^x-1}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln|\ln(1+x)|-\ln|x|}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}\cdot\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x(1+x)\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\ln(1+x)-1}{2x}$$

$=-\frac{1}{2}$. ∴ 原式 $=e^{-\frac{1}{2}}$

2）求导：$\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=\int_0^{t^2}\ln(1+u)\,du\end{cases}$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\ln(1+t^2)\cdot 2t}{\frac{2t}{1+t^2}}=(1+t^2)\ln(1+t^2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t\ln(1+t^2)+(1+t^2)\cdot\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}$$

$$=(1+t^2)\left[\ln(1+t^2)+1\right]$$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 具二阶连续导数，且 $g(0)=1$，$g'(0)=-1$，$g''(0)=3$，

1）求 $f'(x)$；2）讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续性。

1) $x\neq0$ 时, $f'(x)=\dfrac{(g'(x)+e^{-x})\cdot x-(g(x)-e^{-x})}{x^2}=\dfrac{xg'(x)+(x+1)e^{-x}-g(x)}{x^2}$

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-e^{-x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{g'(x)+e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{g''(x)-e^{-x}}{2}$$

$$=\frac{g''(0)-1}{2}=1$$

$$\therefore f'(x)=\begin{cases}\dfrac{xg'(x)+(x+1)e^{-x}-g(x)}{x^2}, & x\neq0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

2) $$\lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}\frac{xg'(x)+(x+1)e^{-x}-g(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{g'(x)+xg''(x)+e^{-x}-(x+1)e^{-x}-g'(x)}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{g''(x)-e^{-x}}{2}=f'(0)$$

∴ $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，从而 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

3. 计算 1）设 $\int xf(x)\,dx = \arcsin x + C$，求 $\int \frac{1}{f(x)}\,dx$；2）$\int_0^{\pi^2} \sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,dx$。

1) $xf(x) = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

∴ $\int \frac{dx}{f(x)} = \int x\sqrt{1-x^2}\,dx$

$= -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

2) 令 $\sqrt{x} = t$

原式 $= \int_0^{\pi} 2t^2\cos t\,dt$

$= \int_0^{\pi} 2t^2\,d\sin t$

$= [2t^2\sin t]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 4t\sin t\,dt$

$= \int_0^{\pi} 4t\,d\cos t$

$= [4t\cos t]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 4\cos t\,dt$

$= -4\pi$

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有连续导数，且 $f(0)=0$，$f(1)=\frac{1}{3}$，证明：存在 $\xi \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$，$\eta \in \left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$。（14级 三 4）

令 $F(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3$

则 $F(0) = F(1) = 0$，$F'(x) = f'(x) - x^2$

由 Lagrange 中值定理，

$\exists\, \xi \in (0,\frac{1}{2})$ s.t. $F(\frac{1}{2}) - F(0) = F'(\xi)\cdot\frac{1}{2}$ ①

$\exists\, \eta \in (\frac{1}{2},1)$ s.t. $F(1) - F(\frac{1}{2}) = F'(\eta)\cdot\frac{1}{2}$ ②

①+②：$0 = \frac{1}{2}[F'(\xi) + F'(\eta)]$

$= \frac{1}{2}[f'(\xi) - \xi^2 + f'(\eta) - \eta^2]$

∴ $f'(\xi) + f'(\eta) = \xi^2 + \eta^2$.

结论成立.

5. 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $0 < f'(x) < 1$，$f(0)=0$，求证：$\left[\int_0^1 f(x)\,dx\right]^2 > \int_0^1 [f(x)]^3\,dx$。

设 $F(x) = \left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2 - \int_0^x f^3(t)\,dt$

则 $F'(x) = 2\int_0^x f(t)\,dt \cdot f(x) - f^3(x) = f(x)\left[2\int_0^x f(t)\,dt - f^2(x)\right]$.

设 $G(x) = 2\int_0^x f(t)\,dt - f^2(x)$

则 $G'(x) = 2f(x) - 2f(x)\cdot f'(x)$，由 $0 < f'(x) < 1$ 得 $f(x)\nearrow$，$f(x) > f(0) = 0$，$x > 0$ ①

从而 $G'(x) > 0$，$x > 0$　∴ $G(x)\nearrow$，$G(x) > G(0) = 0$，$x > 0$. ②

由 ①. ②，$F'(x) > 0$，$x > 0$.　∴ $F(x)\nearrow$，$F(1) = \left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)^2 - \int_0^1 f^3(t)\,dt > F(0) = 0$

从而 $\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)^2 > \int_0^1 f^3(t)\,dt$. 结论成立.