2006-2007 学年第二学期《高等数学》期末试卷

一、填空题（每小题 3 分，共 24 分）

1. 设 $\vec{a}=(1,2,1)$，$\vec{b}=(1,2,-1)$，则 $(-\vec{a})\times(2\vec{b})=$________________。

2. 曲线 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴一周的旋转面的方程是__________________________。

3. 已知 $f_x(0,0)=3$，$f_y(0,0)=1$，则曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=0\end{cases}$ 在 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为______________。

4. $z=z(x,y)$ 由方程 $z=e^{2x-3z}+2y$ 所确定，则 $3\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________________。

5. 交换积分次序 $\int_0^1 dx\int_{x-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy=$____。

6. 已知 Σ 为 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$ 在第一卦限的部分，则 $\iint\limits_{\Sigma}(2x+\dfrac{4}{3}y+z)\,dS=$_________________。

7. 设 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $(-\pi,\pi]$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0\\ 1+x^2, & 0<x\le\pi\end{cases}$，$S(x)$ 为 $f(x)$ 的傅立叶级数的和函数，则 $S(2007\pi)=$_______________。

8. 微分方程 $y''=\dfrac{3x^2y'}{1+x^3}$ 的通解为__________________________________。

二、计算题（每小题 6 分，共 36 分）

1. 一平面通过原点和点 $M(0,1,-1)$，且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，求此平面的方程。

2. 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$z = f\left(2xy, \frac{x}{y} \right)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

3. 将 $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} dy$ 化为极坐标形式，并计算积分值。

4. $\iiint\limits_{\Omega} xyzdxdydz$，其中 Ω： $x^2+y^2+z^2 \le a^2\ (a>0)$ 在第一卦限的部分。

5. 判定级数$\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\cdots$是否收敛，如果收敛，请指明绝对收敛还是条件收敛。

6. 设$\varphi(x)$具一阶连续导数，$\varphi(0)=0$，$\int_C xy^2dx+y\varphi(x)\,dy$与路径无关，求微分方程

$xy^2dx+y\varphi(x)\,dy=0$的通解。

三、在锥面$z^2=x^2+y^2$上找一点，使它到$(1,\sqrt{2},3\sqrt{3})$的距离最短，并求最短距离。（10 分）

四、设Σ是上半球面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ $(a>0)$的上侧，计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy$。（10 分）

五、求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的收敛域及和函数，并由此计算数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\,3^n}$的和。（10 分）

六、求微分方程$y''-5y'+6y=xe^{2x}$的通解。（10 分）