1'

2015—2016 学年第二学期《线性代数》考试卷(A 卷)

授课班号________ 年级专业________ 学号________ 姓名________

题号	一	二	三	总分	审核
题分	27	28	45		
得分					

得分	评阅人

一、填空题（共 27 分，每题 3 分）

1. 六阶行列式中的项 $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$ 前面应取 负 (正, 负) 号.

2. 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中元素 4 的代数余子式为 -10.

3. 若 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $X =$ $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

4. 设方阵 A_3 可逆, $|A_3| = 3$, A^* 为 A_3 的伴随矩阵,则 $|A^*| =$ 9.

5. 设 $\underset{r_1 \leftrightarrow r_2}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} A \underset{c_3 + c_1}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$, 则 A= $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$.

6. 设 $R(A_{5\times4}) = 3$, 且 $\alpha_1 = (3,-4,1,2)^T$, $\alpha_2 = (4,6,8,0)^T$ 均为方程 $A_{5\times4}X = \vec{b}$ 的解向量,则该方程组的通解可表示为: $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$.

7、已知 3 阶方阵 A 的 3 个特征值为-1, 2, -3, 则 $|A| =$ 6.

8. 若 $\begin{pmatrix} 22 & 31 \\ -12 & \lambda \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 相似, 则 $\lambda =$ -17.

9. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 5x_4^2 + 2x_2x_3$ 的矩阵是 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$, 秩是 4.

由 扫描全能王 扫描创建

得分	评阅人

二、计算题（共 28 分，每小题 7 分）

1. 求 $D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\cdots & n\\ -1 & 0 & 3\cdots & n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -1 & -2 & -3\cdots & 0\end{vmatrix}$ 化上三角

$$D_n \xlongequal[r_n+r_1]{\substack{r_2+r_1\\ r_3+r_1\\ \vdots}} \begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 0 & 2 & 6 & \cdots & 2n\\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2n\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n\end{vmatrix}$$

$$=n!$$

2. 设 $A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ 且 $AX=A+X$，求矩阵 X.

$$(A-E)X=A \Rightarrow X=(A-E)^{-1}A$$

$$(A-E,A)=\begin{bmatrix}1&2&0&2&2&0\\2&0&3&2&1&3\\0&1&-1&0&1&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&0&2&2&0\\0&-4&3&-2&-3&3\\0&1&-1&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&0&2&2&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&0&-1&-2&1&3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&0&2&2&0\\0&1&0&2&0&-3\\0&0&1&2&-1&-3\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&-2&2&6\\0&1&0&2&0&-3\\0&0&1&2&-1&-3\end{bmatrix}\quad \therefore X=\begin{bmatrix}-2&2&6\\2&0&-3\\2&-1&-3\end{bmatrix}$$

3. 已知 n 阶矩阵 A,B 满足条件 $2A-B-AB=E$，$A^2=A$，其中 E 为单位阵，试证明 A-B 可逆，并求 $(A-B)^{-1}$.

$$2A-B-AB=(A-B)+(A-AB)=(A-B)+(A^2-AB)$$

$$=(A-B)+A(A-B)=(E+A)(A-B)=E$$

$$\Rightarrow (A-B)^{-1}=E+A.$$

4. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-4 & -10 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 3 & 6 & 1\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+4 & 10 & 0\\ -1 & \lambda-3 & 0\\ -3 & -6 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=-2.$$

$(\lambda_1 E-A)X=0$：$\begin{bmatrix}5&10&0\\-1&-2&0\\-3&-6&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，$x_1=-2x_2$，$x_3$ 任意，对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量为 $k_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ （k_1,k_2 不全为 0）.

$(\lambda_3 E-A)X=0$：$\begin{bmatrix}2&10&0\\-1&-5&0\\-3&-6&-3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&\frac{5}{3}\\0&1&-\frac{1}{3}\\0&0&0\end{bmatrix}$，$\begin{cases}x_1=-\frac{5}{3}x_3\\ x_2=\frac{1}{3}x_3\end{cases}$，对应于 $\lambda_3=-2$ 的特征向量为 $k_3\begin{bmatrix}-5\\1\\3\end{bmatrix}$ （$k_3\neq 0$）.

由 扫描全能王 扫描创建

1′

得分	评阅人

三、简答题（共 45 分）

1. 讨论线性方程组 $\begin{cases}(\lambda+3)x_1+x_2+2x_3=\lambda\\ \lambda x_1+(\lambda-1)x_2+x_3=\lambda\\ 3(\lambda+1)x_1+\lambda x_2+(\lambda+3)x_3=3\end{cases}$ 当 λ 取何值时方程组无解？有唯一解？有无穷多解？在方程组有无穷多解的情况下，求出全部解。(12 分)

注：|A|可直接计算，再分解因式

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda+3 & 1 & 2\\ \lambda & \lambda-1 & 1\\ 3(\lambda+1) & \lambda & \lambda+3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 2-\lambda & 1\\ \lambda & \lambda-1 & 1\\ 2\lambda & \lambda-1 & \lambda+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 2-\lambda & 1\\ \lambda & \lambda-1 & 1\\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 3-\lambda & 1\\ \lambda & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-1)$$ [illegible]

1) $|A|\neq 0$，即 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq 1$ 时，方程组有唯一解.

2) $\lambda=0$ 时，$\begin{bmatrix}3&1&2&0\\0&-1&1&0\\3&0&3&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&1&2&0\\0&-1&1&0\\0&-1&1&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&1&2&0\\0&-1&1&0\\0&0&0&3\end{bmatrix}$，无解

3) $\lambda=1$ 时，$\begin{bmatrix}4&1&2&1\\1&0&1&1\\6&1&4&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&-2&-3\\0&1&-2&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&-2&-3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，$\begin{cases}x_1=-x_3+1\\ x_2=2x_3-3\end{cases}$

有无穷多解，通解为：$\begin{bmatrix}1\\-3\\0\end{bmatrix}+C\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}$.

2. 设实对称矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\end{bmatrix}$，试求正交矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵. (12 分)

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&0\\2&\lambda-2&2\\0&2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)=0\Rightarrow\lambda_1=-1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=5$$

$(\lambda_1E-A)X=0$：$\begin{bmatrix}-2&2&0\\2&-3&2\\0&2&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&-1&2\\0&1&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&-2\\0&0&0\end{bmatrix}$，$\begin{cases}x_1=2x_3\\ x_2=2x_3\end{cases}$，$p_1=\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}$，$\eta_1=\dfrac{p_1}{\|p_1\|}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}$

$(\lambda_2E-A)X=0$：$\begin{bmatrix}1&2&0\\2&0&2\\0&2&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0\\0&-4&2\\0&2&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{bmatrix}$，$\begin{cases}x_1=-x_3\\ x_2=\frac{1}{2}x_3\end{cases}$，$p_2=\begin{bmatrix}-2\\1\\2\end{bmatrix}$，$\eta_2=\dfrac{p_2}{\|p_2\|}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\end{bmatrix}$

$(\lambda_3E-A)X=0$：$\begin{bmatrix}4&2&0\\2&3&2\\0&2&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，$\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}x_3\\ x_2=-x_3\end{cases}$，$p_3=\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}$，$\eta_3=\dfrac{p_3}{\|p_3\|}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{bmatrix}$

$\therefore P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$ s.t. $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}-1&&\\&2&\\&&5\end{bmatrix}$.

由 扫描全能王 扫描创建

3. 求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\3\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\-4\\5\\-2\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}3\\-2\\7\\-1\end{pmatrix}$ 的秩和它的一个极大线性无关组. (10 分)

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{bmatrix}1&2&0&3\\2&0&-4&-2\\-1&3&5&7\\1&0&-2&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&3\\0&-4&-4&-8\\0&5&5&10\\0&-2&-2&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&3\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\therefore r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$.

一个极大无关组为 α_1,α_2.

4. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_{m-1}(m>3)$ 线性无关，而 $\alpha_2,\alpha_3\cdots\alpha_{m-1},\alpha_m$ 线性相关，证明：(1) α_m 可以由 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_{m-1}$ 线性表示. (2) α_1 不可以由 $\alpha_2,\alpha_3\cdots\alpha_{m-1},\alpha_m$ 线性表示. (11 分)

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性无关 $\Rightarrow$ 部分组 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性无关.

又 $\because \alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{m-1},\alpha_m$ 线性相关.

$\therefore \alpha_m$ 可由 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性表示，记作

$\alpha_m=k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+\cdots+k_{m-1}\alpha_{m-1}$ (*)

从而 $\alpha_m=0\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+\cdots+k_{m-1}\alpha_{m-1}$，即 α_m 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性表示.

(2) 若 α_1 可由 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{m-1},\alpha_m$ 线性表示，则可设

$\alpha_1=k_2'\alpha_2+k_3'\alpha_3+\cdots k_{m-1}'\alpha_{m-1}+k_m'\alpha_m$，再将(*)代入，

易见 α_1 可由 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性表示.

从而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性相关，与题设"$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性无关"矛盾. $\therefore \alpha_1$ 不可由 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{m-1},\alpha_m$ 线性表示.

由 扫描全能王 扫描创建