河海大学2024—2025学年第一学期

《高等数学BI》期末试卷（A卷）

考试对象：2024级全校工科各专业本科生

考试日期：2025年1月16日

专业__________学号__________姓名__________成绩__________

任课教师（金坛重修学生填写）____________________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	成绩
得分									

得 分	

一、单选题（每小题3分，共15分）

1．当$x\to 0^+$时，下列与x等价无穷小的是（　　）．

A．$e^{-\sin x}-1$　　B．$\sqrt{1+\arctan x}-1$　　C．$1-\cos\sqrt{2x}$　　D．$1-\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

2．设$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$，$ab\neq 0$且$a\neq b$，则在a、b之间使得$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$成立的点ξ（　　）．

A．不存在　　B．只有一点　　C．有两个点　　D．是否存在与a、b之值有关

3．设$f(x)=|x^3-1|\varphi(x)$，其中$\varphi(x)$在$x=1$处连续，则$\varphi(1)=0$是$f(x)$在$x=1$处可导的（　　）．

A．充分必要条件　　B．必要但非充分条件

C．充分但非必要条件　　D．既非充分也非必要条件

4．若$\int f'(x^2)\mathrm{d}x=x^4+C\ \ (x>0)$，则$f(x)=$（　　）．

A．x^2+C　　B．$\dfrac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$　　C．x^4+C　　D．$\dfrac{8}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$

5．函数$f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$的麦克劳林公式为（　　）．

A．$-2\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x^{2k}}{2k}+o(x^{2n})$　　B．$-2\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x^{2k-1}}{2k-1}+o(x^{2n-1})$

C. $2\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x^{2k}}{2k}+o(x^{2n})$　　　　D. $-2\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+o(x^{2n-1})$

得 分	

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 不定积分 $\int\dfrac{x+5}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x=$ ____________________.

2. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $\sqrt[x]{y}=\sqrt[y]{x}(x>0,y>0)$ 所确定，则 $\mathrm{d}y=$ ____________________.

3. 极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}\left(\sqrt[3]{1+t^2}-1\right)\mathrm{d}t}{x^3(e^{-x^3}-1)}=$ ____________________.

4. 曲线 $y=\dfrac{\ln x}{x}-2x$ 的渐近线方程为 ____________________.

5. 反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}\mathrm{d}x=$ ____________________.

得 分	

三、解答下列各题（每小题 6 分，共 30 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

2. 求曲线 $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$ $(a>0)$ 在 $t=\dfrac{\pi}{6}$ 处的曲率.

3．已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\dfrac{(\arcsin x)^2}{x}$，求 $\int x f'(x)\mathrm{d}x$.

4. 计算定积分 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$.

5. 设 $f(x)=3x^2+Ax^{-3}$，问正数 A 至少为何值时，可使得对任意 $x\in(0,+\infty)$，都有 $f(x)\geq 20$？

得 分	

四、(8 分) 求 $f(x)=xe^x$ 的 n 阶分别具有拉格朗日型余项和皮亚诺型余项的麦克劳林公式.

得 分	

五、(8 分) 过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，该切线与曲线 $y=\ln x$ 以及 x 轴所围成的平面图形记为 D.

(1) 求 D 的面积 A；

(2) 求 D 绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积 V.

得 分	

六、(8 分) 设函数 $f(x)$ 连续.

(1) 证明 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$；

(2) 计算 $\int_0^2 \frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{4-x}+\sqrt{x+2}}\mathrm{d}x$.

得 分	

七、(8 分) (1) 计算不定积分 $\int e^x \sin x\mathrm{d}x$；

(2) 求 $I_n = \int e^x \sin^n x\mathrm{d}x$ 的递推公式, 其中 n 为大于 1 的整数.

得 分	

八、(8 分) 设 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处三阶可导，且 $f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)\neq 0$.（1）证明 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点；（2）试问 $x=x_0$ 是否是函数 $y=f(x)$ 的极值点？为什么？