2011-2012 学年第二学期高等数学期中测试及数学竞赛试卷（2011 级）

（参加竞赛的同学全做，其他同学只做一、二大题）

一、填空题（8×6 分）

1. 设 $\vec{a}=(2,1,-2)$，$\vec{b}=(1,-1,-1)$，则 $(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})=$______，$(\vec{a}-2\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})=$____________。

2. 过直线 $L_1: x=2t-1, y=3t+2, z=2t-3$ 和 $L_2: x=2t+3, y=3t-1, z=2t+1$ 的平面方程为________________________。

3. 直线 $L:\begin{cases}2x-y+z-1=0\\x+y-z+1=0\end{cases}$ 在平面 $\pi: x+2y-z=0$ 上的投影直线 L_0 的方程为________________。

4. 在点 $(4,2,1)$ 处，$U=z\sqrt{x^2-y^2}$ 沿方向 $\vec{l}=(2,1,-1)$ 的方向导数 $\left.\dfrac{\partial U}{\partial l}\right|_{(4,2,1)}=$____________。

5. 曲线 $x=1, z=\sqrt{1+x^2+y^2}$ 在点 $(1,1,\sqrt{3})$ 处的切线方程为______________________。

6. 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定（F 为任意可微函数），则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________。

7. 交换积分次序 $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{3-x} f(x,y)\,dy=$____。

8. $\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x^2+y^2)\,dy$ 的极坐标形式为__________________________。

二、计算题（4×13 分）

1. 设 g 具二阶导数，f 具二阶偏导，$z=g(x+y)+f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

2. 将长为a的线段分为三段，分别围成圆、正方形和等边三角形，问怎样分使它们的面积之和最小，并求出最小值。

3. 计算二重积分$\iint\limits_{D}(x+y)^{3}dxdy$，其中$D$由曲线$x=\sqrt{1+y^{2}}$与直线$x+\sqrt{2}y=0$及$x-\sqrt{2}y=0$围成。

4. 计算二重积分$\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}dy\int_{0}^{y}e^{-\left(x^{2}+y^{2}\right)}dx+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}dy\int_{0}^{\sqrt{1-y^{2}}}e^{-\left(x^{2}+y^{2}\right)}dx$。

三、数学竞赛加题（5×20 分）

1. 1）求极限：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-x}{\ln x-x+1}$；　2）求导：$y=y(x)$由方程组$\begin{cases}x+t(1-t)=0\\ te^y+y+1=0\end{cases}$确定，求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$。

2. 设$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x tf(t)\,dt}{x^2}, & x\neq 0\\ c, & x=0\end{cases}$，其中$f(x)$具有连续导数且$f(0)=0$，$f'(0)=a$，1）试确定$c$使$F(x)$连续；2）在 1）的结果下问$F'(x)$是否连续（要求过程）。

3. 积分 1）$\int \sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,dx$； 2）$\int_0^{\pi}\frac{\pi+\cos x}{x^2-\pi x+2012}dx$。

4. 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，$\int_a^b f(x)dx=0$，求证：

1）在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f'(\xi)=f(\xi)$；2）在 (a,b) 内至少有一点 η，$\eta\neq\xi$，使得 $f''(\eta)=f(\eta)$。

5. 已知 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$，求证：$\frac{1}{2(n+1)}<I_n<\frac{1}{2(n-1)}$，$n\geq 2$。

参考答案

一、

1. 第一空 -3 ；第二空 $(-12,0,-12)$

2. $x-z-2=0$

3. $\begin{cases}3x-y+z-1=0\\ x+2y-z=0\end{cases}$

4. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

5. $\begin{cases}x=1\\ y-\sqrt{3}z+2=0\end{cases}$

6. z

7. $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx+\int_1^2 dy\int_0^1 f(x,y)\,dx+\int_2^3 dy\int_0^{3-y} f(x,y)\,dx$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2\cos\theta} f\left(r^2\right)\cdot r\,dr$

二、

1. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=g'+yf_1'+\dfrac{1}{y}f_2'$， $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=g''+f_1'-\dfrac{1}{y^2}f_2'+xyf_{11}''-\dfrac{x}{y}f_{12}''+\dfrac{x}{y}f_{21}''-\dfrac{x}{y^3}f_{22}''$

2. 圆、正方形、等边三角形的周长依次为：$\dfrac{\pi a}{\pi+4+3\sqrt{3}}$， $\dfrac{4a}{\pi+4+3\sqrt{3}}$， $\dfrac{3\sqrt{3}a}{\pi+4+3\sqrt{3}}$；

   面积之和最小值为$\dfrac{a^2}{4\left(\pi+4+3\sqrt{3}\right)}$

3. $\dfrac{14}{15}$

4. $\dfrac{\pi}{8}\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$

三、

1. 1）-2　2）$\frac{2}{e^2}(1-e)$

2. 1）$c=0$

2）$F'(x)=\begin{cases}\frac{x^2f(x)-2\int_0^x tf(t)\,dt}{x^3}, & x\neq 0\\ \frac{a}{3}, & x=0\end{cases}$ 连续（求 $F'(x)$ 的表达式并讨论其在点 $x=0$ 处的连续性）

3. 1）$2x\sin\sqrt{x}+4\sqrt{x}\cos\sqrt{x}-4\sin\sqrt{x}+C$

2）$\frac{2\pi}{\sqrt{2012-\frac{\pi^2}{4}}}\arctan\frac{\pi}{2\sqrt{2012-\frac{\pi^2}{4}}}$

4. 提示：罗尔定理

1）考虑 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$， $G(x)=e^{-x}f(x)$

2）考虑 $\varphi(x)=e^x[f'(x)-f(x)]$

5. 提示：令 $\tan x=t$