河海大学常州校区 2002-2003 学年数学竞赛

一、填空题（12×3 分）

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)=$______________。

2. 当 $x\to 0$ 时，$3x-4\sin x+\sin x\cos x$ 与 x^n 为同阶无穷小，则 $n=$______________。

3. 在 $x=1$ 时有极大值 6，在 $x=3$ 时有极小值 2 的最低幂次多项式的表达式是____________________。

4. $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$，则 $f^{(100)}(0)=$_______________。

5. $\displaystyle\int\frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx=$____。

6. $\displaystyle\int_{-1}^{1}x\left(1+x^{2003}\right)\left(e^x-e^{-x}\right)dx=$___________________。

7. $f(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}dt$，则 $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=$_________________。

8. 设 $f(x)$ 连续，$F(t)=\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2}f\left(x^2+y^2\right)dxdy\ (t>0)$，则 $F'(t)=$________________________。

9. 已知平面过直线 $\begin{cases}x+y=0\\x-y+z=2\end{cases}$ 且平行另一直线 $x=y=z$，则该平面方程为____________________。

10. 函数 $f(x)=\ln\left(1+3x+2x^2\right)$ 关于 x 的幂级数展开式为______________________________________。

11. 设 Σ 为半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧，则 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+zdxdy}{x^2+y^2+z^2}=$_______________。

12. 设有向曲线 C 为 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x+z=a$ 的交线，从原点看去 C 的方向为顺时针，则 $\displaystyle\int_C ydx+zdy+xdz=$______________。

二、设一点先向正东移动 a 米，然后左拐弯垂直移动 aq 米（$0<q<1$），如此不断重复，使后一段移动距离为前一段的 q 倍，试问其极限位置与出发点相距多少米？（8 分）

三、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，且满足条件 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)\,dx$，试证：存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$。（8 分）

四、设 $f(x)$ 满足对任意 $x_1,x_2\in[a,b]$，恒有 $|\,f(x_1)-f(x_2)\,|\le|\,x_1-x_2\,|$，证明：

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-f(a)(b-a)\right|\le\frac{(b-a)^2}{2}$$

。（8 分）

五、设 $f(u,v)$ 具二阶连续偏导，且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=0$，令 $z=f(x^2-y^2,2xy)$，试证：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

。（8 分）

六、将长为a的线段分为三段，分别围成圆、正方形和等边三角形，问怎样分使它们的面积之和最小，并求出最小值。（8 分）

七、一个高为h的雪堆，其侧面满足方程$z = h - \frac{2(x^2 + y^2)}{h}$，求雪堆的体积与侧面积之比。（8 分）

八、设 $f(x)$ 具一阶连续导数，L 是上半平面（$y>0$）内有向光滑曲线，起点为 (a,b)，终点为 (c,d)，且 $ab=cd$，求 $I=\int_L \frac{1}{y}\left[1+y^2 f(xy)\right]dx+\frac{x}{y^2}\left[y^2 f(xy)-1\right]dy$ 。（8 分）

九、求 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$ 的和。（8 分）

参考答案

一、

1. -1
2. 5
3. x^3-6x^2+9x+2
4. $100!$
5. $-\frac{1}{2}e^{-2x}\arctan e^x-\frac{1}{2}e^{-x}-\frac{1}{2}\arctan e^x+C$
6. $\frac{4}{e}$　　提示：换元或利用奇偶性化简
7. $\frac{1}{2}\ln^2 x$
8. $2\pi tf\left(t^2\right)$
9. $x-3y+2z-4=0$
10. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(1+2^{n+1}\right)}{n+1}x^{n+1},-\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2}$
11. $-\frac{4}{3}\pi a$　　提示：高斯公式
12. $-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi a^2$　　提示：斯托克斯公式

二、设出发点为原点，则极限位置为$\left(\frac{a}{1+q^2},\frac{aq}{1+q^2}\right)$，与出发点相距$\frac{a}{\sqrt{1+q^2}}$米。

注：本题题目有歧义，也可解答极限位置为$\left(\frac{a}{1-q^2},\frac{aq}{1-q^2}\right)$，与出发点相距$\frac{a\sqrt{1+q^2}}{1-q^2}$米。

六、圆、正方形、等边三角形的周长依次为：$\frac{\pi a}{\pi+4+3\sqrt{3}}$，$\frac{4a}{\pi+4+3\sqrt{3}}$，$\frac{3\sqrt{3}a}{\pi+4+3\sqrt{3}}$；

面积之和最小值为$\frac{a^2}{4\left(\pi+4+3\sqrt{3}\right)}$

七、体积$V=\dfrac{\pi}{4}h^3$，侧面积$S=\dfrac{13}{12}\pi h^2$，$\dfrac{V}{S}=\dfrac{3h}{13}$

八、$\dfrac{c}{d}-\dfrac{a}{b}$　　提示：积分与路径无关

九、$\dfrac{\pi}{4}$　　提示：考虑$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$