2006-2007 学年第一学期线性代数试卷 B

（机电学院）

班级__________ 学号__________ 姓名__________ 得分__________

一、填空（30 分）

1. 矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&3&2\\2&2&3\\3&1&5\end{bmatrix}$，$A_{ij}$ 为 A 的 a_{ij} 元的代数余子式，则 $\sum_{j=1}^{3}A_{1j}=$ 2 .

2. 已知方阵 A 的行列式 $|A|=5$，$|5(A^*)^{-1}|=$ 5 .

3. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$，则 $A^5=$ $\begin{bmatrix}1&10\\0&1\end{bmatrix}$.

4. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&6&1\\2&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}$ 则 $AB=$ $\begin{bmatrix}3&6&1\\2&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$.

5. 方阵 A 满足 $R(A)=2$，$|B|=5$，则 $R(BA)=$ 2 .

6. $A=\begin{bmatrix}1&1\\2&-1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3&1\\1&2\end{bmatrix}$，则 $AB-BA=$ $\begin{bmatrix}7&1\\12&3\end{bmatrix}$ $\begin{pmatrix}-1&1\\0&1\end{pmatrix}$.

$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta]\to[E\cdot f]$

7. 已知向量 $\alpha_1=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt3}{3}\\-\frac{\sqrt3}{3}\\\frac{\sqrt3}{3}\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}\\0\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt6}{6}\\\frac{\sqrt6}{6}\\\frac{\sqrt6}{3}\end{bmatrix}$ 两两正交，向量 $\beta=\begin{bmatrix}3\\6\\15\end{bmatrix}$ 可由向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，则表出时向量 α_1 前的系数为 $15\sqrt3-\frac{11}{6}\sqrt2$ $2\sqrt3$.

8. 向量 α_1,α_2 为线性方程组 $Ax=b$ 的两个解，且 $Ax=0$ 的解空间为一维，则 $Ax=b$ 的通解为 $\alpha_1+C_1(\alpha_2-\alpha_1)$（C为任意常数）

9. 已知 $\alpha=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 是 $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&0&2\\-1&3&2\end{bmatrix}$ 的属于特征值 λ 的特征向量，则 $\lambda=$ 4 。

10. 设 3 阶方阵 A 有 3 个特征值 2，3，λ，若|A|=36，则 λ= 6

二、计算（24 分）

1．求 $\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ a & 1 & a & a \\ a & a & 1 & a \\ a & a & a & 1 \end{vmatrix}$．

解：$D=(3a+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & a & a \\ a & a & 1 & a \\ a & a & a & 1 \end{vmatrix}=(3a+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a \end{vmatrix}=(3a+1)(1-a)^3$.

2．已知方阵 $A_{r\times r}$、$B_{s\times s}$ 均可逆，求 $\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1}$

解：$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}$

3．$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$，矩阵 X 满足 $AX+B=2X$，求 X．

解：$AX+B=2X$

$AX-2X+B=0$

$(A-2E)X=-B$

$X=(A-2E)^{-1}(-B)$

$(A-2E\ \ -B)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}\xrightarrow{r_1+r_3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\ \therefore X=\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

4．已知 $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & x & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} y & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，且矩阵 A 与 B 相似，求参数 x 和 y

解：$\begin{cases} 2+x+2=y+1+2 \\ 2(2x+1)=2y \end{cases}$

$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & x & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & x \end{vmatrix}=2\times(2x+1)=4x+2$

$\therefore\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

$|B|=\begin{vmatrix} y & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=y\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2y$

三、（10 分）已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$：

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}2\\1\\4\\3\end{bmatrix},\quad \alpha_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\-6\\6\end{bmatrix},\quad \alpha_3=\begin{bmatrix}-1\\-2\\2\\-9\end{bmatrix},\quad \alpha_4=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\\7\end{bmatrix},\quad \alpha_5=\begin{bmatrix}2\\4\\4\\9\end{bmatrix}$$

求该向量组的一个极大无关组。

解：令 $A=\begin{bmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4\\2&-1&-1&1&2\\3&6&-9&7&9\\4&-6&2&-2&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4\\0&-3&3&-1&-6\\0&3&-3&4&-3\\0&-10&10&-6&-12\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4\\0&0&0&3&-9\\0&3&-3&4&-3\\0&-5&5&-3&-6\end{bmatrix}$

$\to\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4\\0&0&0&1&-3\\0&1&-1&\frac{4}{3}&-1\\0&-1&1&-\frac{5}{3}&-\frac{5}{6}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4\\0&0&0&1&-3\\0&1&-1&\frac{4}{3}&-1\\0&0&0&-\frac{1}{3}&-\frac{4}{6}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-\frac{1}{3}&5\\0&1&-1&\frac{4}{3}&-1\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&-\frac{4}{6}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$

∴极大无关组为第1.2.55列。

四、（13 分）讨论 a 为何值时，线性方程组 $\begin{cases}x_1-ax_2-2x_3=-1\\x_1-x_2+ax_3=2\\5x_1-5x_2-4x_3=1\end{cases}$，有唯一解、无解、有无穷多解；有无穷多解时，求出通解。

解：$\begin{vmatrix}1&-a&-2\\1&-1&a\\5&-5&-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-a&-2\\0&-1+a&a+2\\0&5a-5&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-a&-2\\0&a-1&a+2\\0&0&-(5a+4)\end{vmatrix}=-(a-1)(5a+4)$

当 $a\neq1$ 且 $a\neq-\frac{4}{5}$，线性方程组有唯一解。

当 $a=1$ 时，$\begin{bmatrix}1&-1&-2&-1\\1&-1&1&2\\5&-5&-4&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-2&-1\\0&0&3&3\\0&0&6&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ $r=2$ $3-2=1$

∴ $\begin{cases}x_1=x_2+1\\x_3=1\end{cases}$ ∴基础解系为 $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$

通解为 $c\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$（$c$为任意常数）

当 $a=-\frac{4}{5}$ 时 $\begin{bmatrix}1&\frac{4}{5}&-2&-1\\1&-1&-\frac{4}{5}&2\\5&-5&-4&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&\frac{4}{5}&-2&-1\\0&-\frac{9}{5}&\frac{6}{5}&3\\0&-9&6&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&\frac{4}{5}&-2&-1\\0&-9&6&3\\0&0&0&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&\frac{4}{5}&-2&-1\\0&-3&2&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ 无解

五、（8分）已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是齐次线性方程组$A\bar{x}=\bar{0}$的一个基础解系，

$\beta,\beta,2\beta \quad 0 \quad 0, \alpha_2$

而向量β不是$A\bar{x}=\bar{0}$的解，证明：向量组$\beta,\beta+\alpha_1,2\beta+\alpha_2,\cdots,s\beta+\alpha_s$线性无关。

证明:

六、（15分）已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{bmatrix}$，

求（1）正交矩阵T及对角阵Λ，使矩阵A对角化。

（2）A^3

(2) $A^2=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16&0&0\\0&10&6\\0&6&10\end{bmatrix}$ $A^3=\begin{bmatrix}16&0&0\\0&10&6\\0&6&10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}64&0&0\\0&36&28\\0&28&36\end{bmatrix}$

(1) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&0&0\\0&\lambda-3&-1\\0&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-4)\begin{vmatrix}\lambda-3&-1\\-1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-4)[(\lambda-3)^2-1]=(\lambda-2)(\lambda-4)^2$. ∴所求正交矩阵 $T=\begin{bmatrix}0&0&1\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\end{bmatrix}$

∴得 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=4$.

当$\lambda_1=2$时，由$(2E-A)x=0$，解得基础解系 $p_1=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$；

$\Lambda=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{bmatrix}$

当$\lambda_2=\lambda_3=4$时，由$(4E-A)x=0$，解得基础解系 $p_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$，$p_3=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

∵$[p_2,p_3]=0$ ∴p_2,p_3正交.

p_3

∴p_1,p_2,p_3两两正交

将p_1,p_2,p_3单位化，得 $\eta_1=\begin{bmatrix}0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$，$\eta_2=\begin{bmatrix}0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$，$\eta_3=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$