2 2014-2015 学年第一学期《概率统计》试卷（A）

授课班号________ 年级专业 12机械 ________ 学号________ 姓名________

题型	填空题	计算题	综合题	总分	审　　核
得分					

一、填空题(每小题 5 分，共 25 分)

得分	阅卷人

1. 设 A, B 为随机事件，$P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.3$，则

$P(\overline{A}\cup\overline{B})=$ 0.6 .

2. 某射手每次射击击中目标的概率为0.8，连续射击，直到第一次击中目标为止. 设 X 是直至射中时的射击次数，则

几何分布

$P\{X=i\}=\frac{4}{5}$, $i=1,2,\cdots$.　$(0.2)^{i-1}\cdot 0.8$

3. 设 ξ,η 互相独立，并服从区间 $[0,a]$ $(a>0)$ 上的均匀分布，则 (ξ,η) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{a^2}, & 0\le x\le a,\ 0\le y\le a\\ 0, & 其他\end{cases}$.　(不分段扣2-3分)

4. 设随机变量 X 与 Y 的相关系数为 0.2，$D(X)=25$，$D(Y)=9$，则

$D(X-2Y)=$ 49 .

5. 设随机变量 X 满足：$E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$，则由切比雪夫不等式，有　$P\{|X-\mu|\ge 4\sigma\}\le\frac{1}{16}$.　(缺"≤"扣2分)

二、计算题(每小题 6 分，共 36 分)

得分	阅卷人

1. 某仓库有同样规格的产品六箱，其中三箱是甲厂生产的，二箱是乙厂生产的，另一箱是丙厂生产的，且它们的次品率依次为 $\frac{1}{10},\frac{1}{15},\frac{1}{20}$，现从中任取一件产品，试求取得的一件产品是正品的概率.

A="任取一件为正品"

B_1=" ……为甲厂"

B_2=" …… 乙 ……"

B_3=" …… 丙 ……"

$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)[1-P(\overline{A}|B_i)]$　(3')

$=\frac{3}{6}\times(1-\frac{1}{10})+\frac{2}{6}\times(1-\frac{1}{15})+\frac{1}{6}\times(1-\frac{1}{20})$　(2')

$=\frac{331}{360}$　(1')

(0.919)

后边全对，不写试扣2'

法二：计算任取一件为次品的概率. $\frac{3}{6}\times\frac{1}{10}+\frac{2}{6}\times\frac{1}{15}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{20}=\frac{29}{360}$

$1-\frac{29}{360}=\frac{331}{360}$

往年试卷原题.

2. 设所生产的某种零件的长度与规定长度的偏差 X (单位: mm)服从正态分布 $N(0, 2^2)$. 若偏差的绝对值不超过 2.4(mm), 则属于合格品, 现独立生产 5 个零件, 问至少有 4 个合格品的概率是多少?

附表:

z	0.75	1.00	1.20	1.75
$\Phi(z)$	0.773	0.841	0.885	0.960

$$P\{|X|\le 2.4\} = P\{-2.4 \le X \le 2.4\} = P\left\{\frac{-2.4-0}{2} \le \frac{X-0}{2} \le \frac{2.4-0}{2}\right\}$$

$$= \Phi(1.2) - \Phi(-1.2) = \Phi(1.2) - [1-\Phi(1.2)] = 2\Phi(1.2) - 1 = 2\times 0.885 - 1 = 0.77 \quad (3')$$

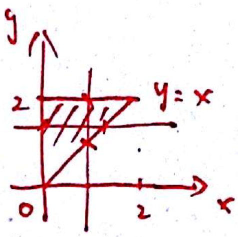
设 Y 为5个零件中合格品数. $Y \sim b(5, 0.77)$

$$P\{Y\ge 4\} = P\{Y=4\} + P\{Y=5\} = C_5^4 \times (0.77)^4 \times (1-0.77) + (0.77)^5 \approx 0.675 \quad (3')$$

3. 设二维随机变量 (ξ, η) 的联合概率密度为

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}xy, & 0 \le x \le y \le 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

试判断 ξ 与 η 是否相互独立?



$X \sim \frac{1}{4}x^3$

$$\varphi_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y)\,dy = \begin{cases} \int_x^2 \frac{1}{2}xy\,dy = \frac{1}{4}x(4-x^2), & 0\le x\le 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (2')$$

$$\varphi_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y)\,dx = \begin{cases} \int_0^y \frac{1}{2}xy\,dx = \frac{1}{4}y^3, & 0\le y\le 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (2')$$

易见 $\varphi(x,y) \ne \varphi_\xi(x)\varphi_\eta(y)$ $\therefore$ ξ 与 η 不相互独立 (2')

4. 设 (ξ, η) 的概率密度

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} x+y, & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

求 $E(\xi\eta)$.

$$E(\xi\eta) = \iint_{\mathbb{R}^2} xy\,\varphi(x,y)\,dxdy \quad (2')$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 xy(x+y)\,dy$$

$$= 2\int_0^1 dx \int_0^1 x^2 y\,dy \quad (\text{轮换对称})$$

$$= \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} \quad (4')$$

5. 根据以往的经验，某种电器元件的寿命服从均值为 100 小时的指数分布，现随机地取 16 只，设它们的寿命是相互独立的，求这 16 只元件的寿命的总和大于 1920 小时的概率.（$\Phi(0.8)=0.7881$）

$X_i \sim E(\lambda)$. $E(X_i)=100$, $D(X_i)=100^2$, $i=1,2,\cdots,16$.

$X=\sum_{i=1}^{16}X_i$. 则 $E(X)=16\times100$, $D(X)=16\times100^2$

$X^*=\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}=\frac{X-1600}{400}\overset{\cdot}{\sim}N(0,1)$ (中心极限Th). (3')

从而 $P\{X>1920\}=P\{X^*>\frac{1920-1600}{400}\}=P\{X^*>0.8\}\approx1-\Phi(0.8)$

$=1-0.7881=0.2119$. (3') △不写近似扣一分

6. 设总体的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases},\ (\theta>0),$$

试用来自总体的样本 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 求未知参数 θ 的矩估计和极大似然估计.

(1) $\mu_1=E(X)=\int_0^1 x\theta x^{\theta-1}=\frac{\theta}{\theta+1}\Rightarrow\theta=\frac{\mu_1}{1-\mu_1}\Rightarrow$ 矩估计量 $\hat\theta=\frac{\bar X}{1-\bar X}$ (1')

(1') (1') 矩估计值 $\hat\theta=\frac{\bar x}{1-\bar x}$

设样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$

(2) $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}(\theta x_i^{\theta-1})$, $\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}[\ln\theta+(\theta-1)\ln x_i]=n\ln\theta+\theta\cdot\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$.

$\frac{L'(\theta)}{L(\theta)}=\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$. 令 $L'(\theta)=0$ 得 $\hat\theta=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$ (2')

∴ 最大似然估计量 $\hat\theta=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$ (1') △写出估计量(大写)才给分

三、综合题(满分 39 分)

1. (9 分) 设随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布，证明

$$Y=1-e^{-2X}$$

在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布.

得分	阅卷人

$f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ (2')

△方法.公式占4'

$y=1-e^{-2x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内↑, 采用公式法求 $f_Y(y)$

$x>0$ 时, $y=1-e^{-2x}\in(0,1)$

反函数 $x=-\frac{1}{2}\ln(1-y)$

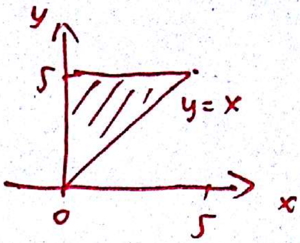
∴ $0<y<1$ 时, $f_Y(y)=2e^{-2[-\frac{1}{2}\ln(1-y)]}\cdot\left|\left(-\frac{1}{2}\ln(1-y)\right)'\right|$

$=2e^{\ln(1-y)}\cdot\frac{1}{2(1-y)}=1$ (6')

从而 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$, $Y\sim U(0,1)$ (1')

2.（10 分） 某旅客到达火车站的时间 X 均匀分布在早上 7:55~8:00，而火车这段时间开出的时间 Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2(5-y)}{25}, & 0\le y\le 5\\ 0, & 其它\end{cases},$$



求此人能及时上火车的概率.

$X\sim U[0,5]$，$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}, & 0\le x\le 5\\ 0, & 其他\end{cases}$ (2′)

由已知，X, Y 独立. ∴ $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2(5-y)}{125}, & 0\le x\le 5,\ 0\le y\le 5\\ 0, & 其他\end{cases}$ (2′)

$P\{X\le Y\}=\iint\limits_{G:x\le y} f(x,y)\,dx\,dy$ (2′) $=\int_0^5 dy\int_0^y \frac{2(5-y)}{125}\,dx$ △ 因被积函数仅含y，后积y易算

$=\int_0^5 \frac{10y-2y^2}{125}\,dy=\frac{1}{25}y^2-\frac{2}{125\times 3}y^3\Big|_0^5=\frac{1}{3}$ (4′)

3.（10 分） 为确定某种溶液中甲醛的浓度，取样得 9 个独立测定值的平均值 $\bar{x}=7.34\%$，样本标准离差 $S=0.04\%$，并设被测总体近似地服从正态分布，求总体均值 μ 的90%的置信区间.

（注：$t_{(0.9)}(8)=1.3968$，$t_{0.95}(8)=1.8595$，$t_{0.95}(9)=1.8331$）.

0.05

$(\bar{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$，$\alpha=0.1$ (4′)

即 $(7.34\%\pm\frac{0.04\%}{\sqrt{9}}\times 1.8595)$ (4′)

计算得：(7.315%，7.365%) (2′)

④（10 分） 往年试卷原题.

设某市青少年犯罪的年龄构成服从正态分布，今随机抽取 9 名罪犯，其年龄如下：

22，17，19，25，25，18，16，23，24

试以 95％的概率判断犯罪青少年的年龄是否为18 岁. $(t_{0.025}(8)=2.3060)$

由题意需检验假设 $H_0:\mu=\mu_0=18$；$H_1:\mu\ne\mu_0$ $(\alpha=0.05)$ 3′

取检验统计量 $t=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ 1′，拒绝域：$|t|>t_{0.025}(8)=2.3060$ 1′

本题：$\bar{x}=\frac{1}{9}(22+17+\cdots+24)=21$.

$S^2=\frac{1}{8}[(22-21)^2+(17-21)^2+\cdots+(24-21)^2]=12.5$，$S=\sqrt{12.5}$

$t=\frac{21-18}{\sqrt{12.5}/\sqrt{9}}\approx 2.55$ 在拒绝域内 (3′)

从而拒绝 H_0，接受 H_1；认为不是18岁. (2′)