

# 2014—2015 学年第二学期《线性代数》课内考试卷 (A 卷)

授课班号\_\_\_\_\_ 年级专业\_机电学院\_ 学号\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_

题号	一	二	三	四	五	总分	审核
题分							
得分							

得分	评阅人

## 一、填空 (共 30 分, 每空格 5 分)

1、行列式  $\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$

2、设  $A$  是  $4 \times 3$  矩阵, 且  $A$  的秩  $R(A) = 2$  且  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ , 则  $R(AB) = \underline{\hspace{2cm}}$

3、与向量  $(1, -2)$  正交的一个单位向量为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

4、设  $A$  是  $n$  阶方阵,  $A^*$  是  $A$  的伴随矩阵, 已知  $|A| = 5$ , 则  $AA^*$  的特征值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

5、设 4 元非齐次线性方程组  $Ax = b$  的两个解为  $\xi_1, \xi_2, (\xi_1 \neq \xi_2)$ ,  $A$  的秩为 3, 则

$Ax = b$  的通解  $\xi = \underline{\hspace{2cm}}$

6、设  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$  相似于对角阵  $\begin{pmatrix} 5 & & \\ & \alpha & \\ & & -4 \end{pmatrix}$ , 则  $\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$

得分	评阅人

## 二、计算题 (共 24 分, 每小题 6 分)

1、计算行列式 
$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

2、若三阶方阵  $A$  的伴随矩阵为  $A^*$ ，已知  $|A|=2$ ，求  $|(3A)^{-1} - 2A|$

3、设 3 阶矩阵  $X$  满足等式  $AX = B + 2X$ ，其中  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,

求矩阵  $X$ 。

4、已知  $AP = PB$ ，其中  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ，求  $A^5$ 。

得分	评阅人

### 三、求解题（共 36 分，每小题 12 分）

1、设  $\alpha_1 = (0, 4, 2), \alpha_2 = (1, 1, 0), \alpha_3 = (-2, 4, 3), \alpha_4 = (-1, 1, 1)$ ，求该向量组的秩和一个极大无关组，并把其余向量用极大无关组线性表示。

2、 $\lambda$  取何值时，线性方程组 
$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1 \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$$
 无解，有唯一解或有无穷多解？当有无穷多解时，求通解。

3、设  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ，求正交阵  $T$ ，使  $T^{-1}AT$  为对角阵。

得分	评阅人

#### 四、证明题（共 10 分，每小题 5 分）

1. 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  ( $m > 1$ ) 线性无关，且  $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$ ，证明：向量组  $\beta - \alpha_1, \beta - \alpha_2, \dots, \beta - \alpha_m$  也线性无关。

2. 设  $A^2 = A, A \neq E$ ，证明  $|A| = 0$