2012-2013 学年第二学期《高等数学 AⅡ》期末试卷

一、填空题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与柱面 $z^2=2x$ 所围立体在 xOy 面上的投影曲线的方程为 $\begin{cases} x^2+y^2=2x \\ z=0 \end{cases}$ 。

2. 设 $u=\ln\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}$，则 $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right|_{(1,1,1)}=$ $\frac{3}{4}$ 。

3. 交换积分次序 $\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x,y)\,dx=$ $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)\,dy$ 。

4. 设平面曲线 L 为下半圆周 $y=-\sqrt{1-x^2}$，则曲线积分 $\int_L (x^2+y^2)\,ds=$ π 。

5. 设 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，已知 $f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\le x<0 \\ 1-x, & 0\le x<3\end{cases}$，
又设 $f(x)$ 的傅立叶级数展开式的和函数为 $S(x)$，则 $S(\pi)=$ $\pi-3$ 。

6. 若方程 $y''+py'+qy=0$（p,q 均为实常数）有特解 $y_1=\sin 2x$，$y_2=\cos 2x$，则 p 等于 0 ，q 等于 4 。

二、计算题（每小题 6 分，共 36 分）

1. 设 $f(x,y)=xe^{-y}+\sin\sqrt[3]{y}\cdot\tan\sqrt[3]{x}$，试讨论在点 $(0,0)$ 处的两个偏导数 $f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$ 是否存在？如存在求出导数值。

法一：$f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-0}{x}=1$

$f_y(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{0-0}{y}=0$

∴ 两个偏导数存在，且 $f_x(0,0)=1$，$f_y(0,0)=0$

法二：$f(x,0)=x \Rightarrow f_x(x,0)=1 \Rightarrow f_x(0,0)=1$

$f(0,y)=0 \Rightarrow f_y(0,y)=0 \Rightarrow f_y(0,0)=0$

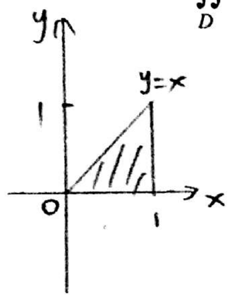
2. 设$u = x^2yz^3$，其中$z = z(x,y)$是由方程$x^2+y^2+z^2-3xyz=0$所确定的可微函数，

且$z(1,1)=1$，求$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$。

$$2y+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}-3xz-3xy\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3xz-2y}{2z-3xy}$$

从而 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = \left.x^2z^3+x^2y\cdot 3z^2\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = 1+3\cdot(-1)=-2$

3. 计算二重积分$\iint\limits_D \dfrac{\sin x}{x}dxdy$，其中$D$是由$y=x$，$y=0$，$x=1$所围成的区域。



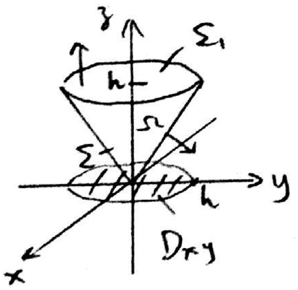
$$\text{原式} = \int_0^1 dx\int_0^x \frac{\sin x}{x}dy$$

$$= \int_0^1 \sin x\, dx$$

$$= 1-\cos 1$$

4. 计算$\iint\limits_\Sigma (x-y^2)\,dydz+(y-z^2)\,dzdx+(z-x^2)\,dxdy$，其中$\Sigma$是圆锥面$z^2=x^2+y^2$

在区域$0\le z\le h$中的部分曲面的下侧，h是正数。



添 Σ_1：$z=h\ (x^2+y^2\le h^2)$，上侧，由Gauss公式，

$$\text{原式} = \iiint\limits_\Omega 3\,dxdydz - \iint\limits_{\Sigma_1}(x-y^2)dydz+(y-z^2)dzdx+(z-x^2)dxdy$$

$$=3\times\frac{1}{3}\pi h^2\cdot h - \iint\limits_{\Sigma_1}(h-x^2)dxdy$$

$$=\pi h^3 - \iint\limits_{D_{xy}}(h-x^2)dxdy$$

$$=\pi h^3 - \iint\limits_{D_{xy}} h\,dxdy + \iint\limits_{D_{xy}} x^2\,dxdy$$

$$=\pi h^3 - h\cdot\pi h^2 + \frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h r^3dr$$

$$=\frac{\pi}{4}h^4$$

5. 求级数$1+3x+5x^2+7x^3+\cdots$在$(-1,1)$内的和函数。

设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$，$-1<x<1$ $\left(\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n+3}{2n+1}\right|=1，\therefore R=1\right)$

则 $S(x)=2x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}x^n$

$=2x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'+\frac{1}{1-x}$

$=2x\left(\frac{1}{1-x}-1\right)'+\frac{1}{1-x}$

$=2x\cdot\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}$

$=\frac{1+x}{(1-x)^2}$，$-1<x<1$.

6. 求微分方程$y^2\cdot y''=y'$的通解。

令 $y'=p$，则 $y''=p\frac{dp}{dy}$，

原方程化为：$y^2\cdot p\frac{dp}{dy}=p$

$\therefore dp=\frac{dy}{y^2}\Rightarrow p=-\frac{1}{y}+C_1=\frac{C_1y-1}{y}$

即 $\frac{dy}{dx}=\frac{C_1y-1}{y}$，$\therefore\frac{y\,dy}{C_1y-1}=dx$，

$\frac{\frac{1}{C_1}(C_1y-1)+\frac{1}{C_1}}{C_1y-1}dy=dx$，通解为 $\frac{y}{C_1}+\frac{1}{C_1^2}\ln|C_1y-1|=x+C_2$

三、综合题（满分 34 分）

1. （10 分）若$u_n>0$，$v_n>0$（$n=1,2,\cdots$），且$\frac{u_{n+1}}{u_n}\le\frac{v_{n+1}}{v_n}$。证明：若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛。

由题：$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}\le\frac{u_n}{v_n}$

从而 $\frac{u_n}{v_n}\le\frac{u_{n-1}}{v_{n-1}}\le\cdots\le\frac{u_1}{v_1}$

$\Rightarrow u_n\le\frac{u_1}{v_1}\cdot v_n$

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛时，必有$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

2. （12分）当 $x>0$，$y>0$，$z>0$ 时，求函数 $u=\ln x+2\ln y+3\ln z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=6r^2$ 上的最大值，并证明对任意的正实数 a，b，c，不等式 $ab^2c^3\le 108\left(\dfrac{a+b+c}{6}\right)^6$ 均成立。

1) 令 $L(x,y,z,\lambda)=\ln x+2\ln y+3\ln z+\lambda(x^2+y^2+z^2-6r^2)$

由 $\begin{cases} L_x=\frac{1}{x}+2\lambda x=0 \\ L_y=\frac{2}{y}+2\lambda y=0 \\ L_z=\frac{3}{z}+2\lambda z=0 \\ L_\lambda=x^2+y^2+z^2-6r^2=0 \end{cases}$ 解得唯一驻点 $(r,\sqrt{2}r,\sqrt{3}r)$.

$\therefore u_{max}=\ln r+2\ln(\sqrt{2}r)+3\ln(\sqrt{3}r)=\ln(6\sqrt{3}r^6)$.

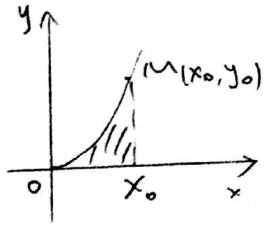
2) $\forall a,b,c>0$. 设 $a_1^2+b_1^2+c_1^2=6r^2$，$a_1=\sqrt{a}$，$b_1=\sqrt{b}$，$c_1=\sqrt{c}$

由1)，$a_1b_1^2c_1^3=e^{\ln a_1+2\ln b_1+3\ln c_1}\le e^{\ln(6\sqrt{3}r^6)}=6\sqrt{3}r^6$

$=6\sqrt{3}\cdot\left(\frac{a_1^2+b_1^2+c_1^2}{6}\right)^3$，又 $ab^2c^3=(a_1b_1^2c_1^3)^2$，$a_1^2=a$，$b_1^2=b$，$c_1^2=c$，

$\therefore abc^3\le\left[6\sqrt{3}\cdot\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^3\right]^2=108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6$.

3. （12分）已知上半平面内一曲线 $y=y(x)\ (x\ge 0)$ 过原点，且曲线上任一点 $M(x_0,y_0)$ 处切线斜率数值上等于该点横坐标减去此曲线与 x 轴，直线 $x=x_0$ 所围成的面积，求此曲线方程。



由题：$y'(x_0)=x_0-\int_0^{x_0}y(t)\,dt$

由 (x_0,y_0) 任意性，可得

$y'=x-\int_0^x y(t)\,dt$，求导：$y''=1-y$

从而只需求解 $\begin{cases} y''+y=1 & ① \\ y(0)=0,\ y'(0)=0 & ② \end{cases}$

由①：$r^2+1=0\Rightarrow r_{1,2}=\pm i$

且易见 $y_0=1$ 为一个特解. $\therefore y=C_1\cos x+C_2\sin x+1$

$y'=-C_1\sin x+C_2\cos x$.

又由②，$\begin{cases} C_1+1=0 \\ C_2=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} C_1=-1 \\ C_2=0 \end{cases}$，$\therefore$ 曲线为 $y=1-\cos x$ $(x\ge 0)$