13′

2016-2017 学年第一学期《概率统计》试卷（A）

授课班号__________ 年级专业 15自动化 学号__________ 姓名__________

题型	填空题	计算题	综合题	总分	审　核
得分					

一、填空题(每小题 5 分，共 25 分)

得分	阅卷人

1. 设 A,B 是两个相互独立的随机事件，且

$$P(A)=\frac{1}{4},\ P(B)=\frac{1}{3},$$

则 $P(A-B)=$ $\frac{1}{6}$.

2. 设 ξ 服从标准正态分布 $N(0,1)$，则 $\eta=a\xi+b$ 的分布密度

$$\varphi_\eta(y)= \frac{1}{\sqrt{2\pi}|a|}\cdot e^{-\frac{(y-b)^2}{2a^2}}.$$

3. 设随机变量 X 服从二项分布 $B(4,0.8)$，Y 服从泊松分布 $P(4)$，已知 $D(X+Y)=3.6$，则 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=$ -0.325.

4. 设随机变量 X 满足：$E(X)=\mu,D(X)=\sigma^2$，则由切比雪夫不等式，有 $P\{|X-\mu|\geq 4\sigma\}$ $\leq\frac{1}{16}$.

5. 设离散随机向量 (X,Y) 的分布律为

$$p_{ij}=P\{X=i,Y=j\}=cij.\quad i=1,2,3;\quad j=1,2,3.$$

则 $c=$ $\frac{1}{36}$.

二、计算题(每小题 6 分，共 36 分)

得分	阅卷人

1. 某校射击队共有 20 名射手，其中一级射手 4 人，二级射手 8 人，三级射手 7 人，四级射手 1 人，一，二，三，四级射手能通过预选赛进入正式比赛的概率分别为 0.9，0.7，0.5，0.2，求任选一名射手能进入正式比赛的概率。

$A=$“射手进入正赛”

$B_i=$“所选射手为 i 级”，$i=1,2,3,4$

$P(A)=\sum_{i=1}^{4}P(B_i)P(A|B_i)$ (2′)

$=\frac{4}{20}\times0.9+\frac{8}{20}\times0.7+\frac{7}{20}\times0.5+\frac{1}{20}\times0.2$ (2′)

$=0.645$ (2′)

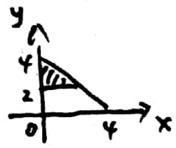
2. 设二维随机向量的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(6-x-y), & 0\le x\le 2,\ 2\le y\le 4,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求 $P\{X+Y\le 4\}$.

$$P\{X+Y\le 4\}=\int_0^2 dx\int_2^{4-x}\frac{1}{8}(6-x-y)\,dy=\int_0^2\frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{2}-4x+6\right)dx=\frac{2}{3}$$

$$\text{或}\ \int_2^4 dy\int_0^{4-y}\frac{1}{8}(6-x-y)\,dx=\int_2^4\frac{1}{8}\left(\frac{y^2}{2}-6y+16\right)dy=\frac{2}{3}$$



(3′) (3′)

3. 已知随机变量 ξ 与 η 相互独立，且都服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$(\sigma>0)$ 令 $X=\alpha\xi+\beta\eta$, $Y=\alpha\xi-\beta\eta$，其中 α,β 为非零实数. 求 X 与 Y 的相关系数，并问当 α 与 β 满足什么条件时 X 与 Y 不相关.

由题, $X\sim N((\alpha+\beta)\mu,(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2)$, $Y\sim N((\alpha+\beta)\mu,(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2)$, $D(X)=D(Y)=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2$,

$Cov(X,Y)=\alpha^2Cov(\xi,\xi)-\alpha\beta Cov(\xi,\eta)+\alpha\beta Cov(\eta,\xi)-\beta^2Cov(\eta,\eta)=\alpha^2D(\xi)-\beta^2D(\eta)$
$=(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2}{(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\quad(4')$$

$\rho_{XY}=0$, 即 $\alpha^2-\beta^2=0$ 时, X 与 Y 不相关 (2′)

4. 某天开工时，需检验自动包装机工作是否正常. 根据以往的经验，其包装的质量在正常情况下服从正态分布 $N(100,1.5^2)$（单位: kg). 现抽测了9包，其质量为:

99.3, 98.7, 100.5, 101.2, 98.3, 99.7, 99.5, 102.0, 100.5

问这天包装机工作是否正常？（$z_{0.025}=1.96$）

将这一问题化为假设检验问题. 写出假设检验的步骤 $(\alpha=0.05)$.

由题意需检验假设 $H_0:\mu=\mu_0=100$; $H_1:\mu\ne\mu_0$ (1′)

取检验统计量 $Z=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ (1′)

拒绝域: $|z|\ge z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$ (1′)

本题, $\bar{x}=\frac{1}{9}(99.3+98.7+\cdots+100.5)=99.97$, $z=-0.06$ 不在拒绝域内 (1′)

∴ 接受 H_0, 拒绝 H_1 (1′)

认为包装机工作正常. (1′)

5. 设某机器生产的零件长度(单位: cm) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 今抽取容量为16的样本, 测得样本均值 $\bar{x}=10$, 样本方差 $s^2=0.16$. 求 μ 的置信度为0.95的置信区间; 附表

$t_{0.05}(16)=1.746$, $t_{0.05}(15)=1.753$, $t_{0.025}(15)=2.132$,

$\chi^2_{0.05}(16)=26.296$, $\chi^2_{0.05}(15)=24.996$, $\chi^2_{0.025}(15)=27.488$.

$(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$, $(10 \pm \frac{0.4}{4} \times 2.132)$

3'

即 $(9.7868, 10.2132)$ (3')

6. 设随机变量 ξ 服从正态分布 $N(1, 2^2)$, 求

$$\eta = \sqrt[3]{(\xi-1)/2}$$

的概率密度.

$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 2} e^{-\frac{(x-1)^2}{2\times 2^2}}$, $y=\sqrt[3]{\frac{x-1}{2}} \Rightarrow x=h(y)=2y^3+1$

$f_\eta(y) = f_\xi(h(y))\cdot|h'(y)| = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(2y^3)^2}{8}}\cdot 6y^2 = \frac{3y^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^6}{2}}$.

3' (3')

或 $F_\eta(y)=P\{\eta\le y\}=P\{\sqrt[3]{\frac{\xi-1}{2}}\le y\}=P\{\xi\le 2y^3+1\}=F_\xi(2y^3+1)$, $-\infty<y<+\infty$

$f_\eta(y)=F'_\eta(y)=f_\xi(2y^3+1)\cdot 6y^2=\cdots$

三、综合题(满分 39 分)

得分	阅卷人

1. (10 分) 设随机事件 A, B, C 满足 $P(BC)>0$, $0<P(C)<1$, 则等式

$$P(AB|C)=P(A|C)P(B|C)$$

成立的充要条件为 $P(A|BC)=P(A|C)$.

必要性: $P(AB|C)=P(A|C)P(B|C)$

$\Rightarrow \frac{P(ABC)}{P(C)} = \frac{P(AC)}{P(C)}\cdot\frac{P(BC)}{P(C)} \Rightarrow \frac{P(ABC)}{P(BC)} = \frac{P(AC)}{P(C)}$

$\Rightarrow P(A|BC)=P(A|C)$ (5')

充分性: 以上过程逆 "$\Leftarrow$" (10')

△本题多种证法.

2. (9 分)　设连续型随机变量(X,Y)的两个分量X和Y相互独立，且服从同一分布，试证：$P\{X\le Y\}=1/2$.

设X概率密度为$f(x)$，由题，

$$P\{X\le Y\}=\iint\limits_{D_1:\,x\le y} f(x)f(y)\,dx\,dy=\iint\limits_{D_2:\,y\le x} f(y)f(x)\,dx\,dy \quad (\text{轮换对称性})$$

(5')

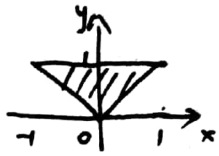
$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_1\cup D_2} f(x)f(y)\,dx\,dy=\frac{1}{2}\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x)f(y)\,dx\,dy=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$$

(4')

°本题多种证法.

3. (10 分)　已知随机变量(ξ,η)的联合概率密度是

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{2}y, & |x|<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases},$$



求出关于ξ及关于η的边缘分布密度.

$$\varphi_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\,dy=\begin{cases}\int_{|x|}^{1}\frac{3}{2}y\,dy=\frac{3}{4}(1-x^2), & |x|<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(5')

$$\varphi_\eta(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\,dx=\begin{cases}\int_{-y}^{y}\frac{3}{2}y\,dx=3y^2, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(5')

4. (10 分)　设总体X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{\theta\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{\theta^2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases},$$

其中$\theta>0$是未知参数，$X_1,\cdots,X_n$是总体X的样本. 试求：

(1) θ的矩估计量；　　(2) θ的极大似然估计量.

(1) $\mu_1=E(X)=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{2}{\theta\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{\theta^2}}dx=\frac{\theta}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow \theta=\sqrt{\pi}\mu_1 \Rightarrow \hat{\theta}=\sqrt{\pi}A_1=\sqrt{\pi}\overline{X}$.　(5')

(2) $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{\theta\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x_i^2}{\theta^2}}\right)$，$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{2}{\theta\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x_i^2}{\theta^2}}\right)=n\ln\frac{2}{\sqrt{\pi}}-n\ln\theta-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{\theta^2}$.

$\frac{L'(\theta)}{L(\theta)}=-\frac{n}{\theta}+\frac{2}{\theta^3}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2$，令$L'(\theta)=0$，$\hat{\theta}=\sqrt{\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$ (唯一驻点).

$\therefore\ \hat{\theta}=\sqrt{\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$.　(5')