8

2016－2017 学年第一学期《线性代数 B》课内考试卷（A 卷）

授课班号 660050401-02 年级专业 机电学院 15 级 学号 ____________ 姓名 ____________

题号	一	二	三	四	五	六	总分	审核
题分	24	32	12	12	12	8		
得分								

得分	评阅人

一、填空（共 24 分，每空格 3 分）

1. 已知四阶行列式 D 中第 3 列元素依次为 a,b,c,d，它们对应的余子式依次为 1，2，3，4，则该行列式 D= $a-2b+3c-4d$。

2. 已知矩阵 $A=[\vec{\alpha}_1,\ \vec{\alpha}_2,\ \vec{\alpha}_3]$，$|A|=2$，则 $|\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2,\ \vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3,\ \vec{\alpha}_3+\vec{\alpha}_1|=$ 4 。

3. 设矩阵 A 与 B 为三阶方阵，且 $|A|=5$，$|B|=-4$，则 $|2AB^{-1}|=$ -10 。

4. $$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{2015}\begin{bmatrix}x&1&a\\y&1&b\\z&1&c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^{2016}=\begin{bmatrix}z&1&c+2016\\y&1&b+2016\\x&1&a+2016\end{bmatrix}$$ 。

$r_1\leftrightarrow r_3$ $\qquad$ c_3+c_2

5. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}a&2&-1&1\\-1&1&0&1\\-5&0&1&1\end{bmatrix}$ 的秩为 2，则 $a=$ 3 。 重复

6. 设向量组 $\vec{\alpha}_1=\begin{bmatrix}a\\1\\c\end{bmatrix}\vec{\alpha}_2=\begin{bmatrix}b\\c\\1\end{bmatrix}\vec{\alpha}_3=\begin{bmatrix}0\\a\\b\end{bmatrix}$ 线性相关，则 a,b,c 必满足关系式 $a^2+b^2-2abc=0$ 。

7. 已知 $\vec{\alpha},\ \vec{\beta},\ \vec{\gamma}$ 是线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的三个解向量，$R(A)=3$，$\vec{\alpha}=[1,\ 2,\ 3,\ 6]^T$，$\vec{\beta}+\vec{\gamma}=[2,\ 0,\ 1,\ 6]^T$，则 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的通解 $\vec{x}=$ $c\begin{bmatrix}0\\4\\5\\6\end{bmatrix}$ $A\vec{x}=\vec{b}$ 的通解 $\vec{x}=$ $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\6\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\4\\5\\6\end{bmatrix}$

8. 设向量 $\vec{\alpha}=[1,\ 1,\ -1]^T$ 与向量 $\vec{\beta}=[4,\ 2,\ 3k]^T$ 正交，则 $k=$ 2 。

得分	评阅人

二、计算（共 32 分，每小题 8 分）

1\. 计算 $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

$$D \xlongequal{c_1+c_2+c_3+c_4} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4+c_1]{\substack{c_2+c_1 \\ c_3+c_1\cdot(-1)}} x\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= x^4$$

2\. 设 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$, 求 AB, BA, A^2.

$$AB=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix} 10 & 5 \\ -20 & -10 \end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3\. 设矩阵 X 满足 $X=AX+B$，其中 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$，求矩阵 X.

$$(E-A)X=B \Rightarrow X=(E-A)^{-1}B$$

$$(E-A,B)=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \therefore X=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

4\. 设三阶矩阵 A 的特征值分别为1,2,3，求 1）A^2-A+2E 的特征值;

2）$|A^2-A+2E|$。

1) 设 A 有特征值 λ. 则 A^2-A+2E 有特征值 $\lambda^2-\lambda+2$.

将 $\lambda=1,2,3$ 代入，得：2, 4, 8

2) $|A^2-A+2E| = 2\times4\times8 = 64$.

8

得分	评阅人

三、（本题 12 分）

求下列向量组的秩和它的一个极大线性无关组，并用该极大线性无关组表示其余向量。

$$\vec{\alpha}_1=\begin{bmatrix}2\\1\\4\\3\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\-6\\6\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-1\\-2\\2\\-9\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_4=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\\7\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_5=\begin{bmatrix}2\\4\\4\\9\end{bmatrix}.$$

重复

得分	评阅人

四、（本题 12 分）讨论λ为何值时，线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+\lambda x_2-x_3=1\\ \lambda x_1-x_2+x_3=2\\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1\end{cases}$$

有惟一解、无解、有无穷多解，在线性方程组有无穷多解时，求出其通解。

1) $|A|=\begin{vmatrix}2&\lambda&-1\\ \lambda&-1&1\\ 4&5&-5\end{vmatrix}=5(\lambda+\frac{4}{5})(\lambda-1)\neq 0$ 时，有惟一解。

此时 $\lambda\neq-\frac{4}{5}$ 且 $\lambda\neq 1$

2) $\lambda=-\frac{4}{5}$ 时，$\begin{bmatrix}2&-\frac{4}{5}&-1&1\\ -\frac{4}{5}&-1&1&2\\ 4&5&-5&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&-\frac{4}{5}&-1&1\\ -4&-5&5&10\\ 4&5&-5&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&-\frac{4}{5}&-1&1\\ -4&-5&5&10\\ 0&0&0&9\end{bmatrix}$

无解。

3) $\lambda=1$ 时，$\begin{bmatrix}2&1&-1&1\\ 1&-1&1&2\\ 4&5&-5&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&1&2\\ 0&3&-3&-3\\ 0&9&-9&-9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&1&2\\ 0&1&-1&-1\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}$

$\to\begin{bmatrix}1&0&0&1\\ 0&1&-1&-1\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}$，$\begin{cases}x_1=1\\ x_2=x_3-1\end{cases}$，有无穷多解，通解：$\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$

得分	评阅人

五、（本题 12 分）

1）求矩阵A的全部特征值与其特征向量；

2）求可逆矩阵 P 及对角矩阵 Λ，使 $P^{-1}AP=\Lambda$，其中矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$。

1) ① $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda+1)^2=0$

$\Rightarrow \lambda_1=5,\ \lambda_2=\lambda_3=-1.$

② $(\lambda_1E-A)X=0$: $\begin{bmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&6&-6\\0&-6&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$,

$\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=x_3\end{cases}$ $\therefore k_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}(k_1\neq0)$ 为对应于 $\lambda_1=5$ 的特征向量.

$(\lambda_2E-A)X=0$: $\begin{bmatrix}-2&-2&-2\\-2&-2&-2\\-2&-2&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, $x_1=-x_2-x_3$,

$\therefore k_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ (k_2,k_3 不全为0) 为对应于 $\lambda_2=\lambda_3=-1$ 的特征向量.

2) $P=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ s.t. $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}5&&\\&-1&\\&&-1\end{bmatrix}$.

得分	评阅人

六、证明（本题 8 分）

试证明：n 维向量组 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_t$（其中 $\vec{\alpha}_1\neq\vec{0}$）线性相关的充分必要条件是存在一个向量 $\vec{\alpha}_i(1<i\le t)$ 使得 $\vec{\alpha}_i$ 可由 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_{i-1}$ 线性表示。

证：1) 充分性：若 α_i 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1}$ 线性表示，则

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_i$ 线性相关，

$\because \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_i$ 为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 的部分组

$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 也线性相关.

2) 必要性：由 $\alpha_1\neq0$，可知部分组 α_1 线性无关.

若 α_2 不能由 α_1 线性表示，则 α_1,α_2 线性无关.

若 α_3 不能由 α_1,α_2 线性表示，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

依此类推，若 $\forall\alpha_i(1<i\le t)$ 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1}$ 线性表示，

则有 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 线性无关，与已知"$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 线性相关"矛盾

$\therefore \exists\alpha_i(1<i\le t)$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1}$ 线性表示.