2017-2018 学年第二学期《高等数学 AII》试卷（A）

授课班号________年级专业________学号________姓名________

题型	填空题	计算题	综合题	总分	审 核
得分					

一、填空题(每小题 4 分，共 20 分)

1. 直线 $\begin{cases} x=3z-5 \\ y=2z-8 \end{cases}$ 的对称式方程为 $\underline{\frac{x+5}{3}=\frac{y+8}{2}=\frac{z-0}{1}}$.

2. 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微, 则点 (x_0,y_0) 是函数 z 的极值点的必要条件为 $\underline{f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0}$.

3. 设 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，已知

$$f(x)=\begin{cases} 1+x, & -1\le x<0 \\ 1-x, & 0\le x<3 \end{cases},$$

又设 $f(x)$ 的傅立叶级数展开式的和函数为 $S(x)$, 则 $S(\pi)=\underline{\pi-3}$.

4. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，其部分和为 S_n，$v_n=\frac{1}{S_n}$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\underline{+\infty}$.

5. 若方程 $y''+py'+qy=0$ (p,q 均为实常数) 有特解

$$y_1=e^x\cos x,\ y_2=e^x\sin x,$$

则 p 等于 $\underline{-2}$, q 等于 $\underline{2}$.

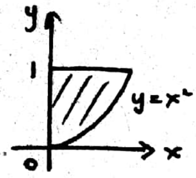
二、计算题(每小题 7 分，共 35 分)

1. 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $\frac{x}{z}=\varphi\left(\frac{y}{z}\right)$ 所确定，其中 φ 二阶可微，且 $x-y\varphi'\neq 0$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

$$\frac{z-x\cdot z_x}{z^2}=\varphi'\cdot\left(-\frac{y}{z^2}\right)\cdot z_x \Longrightarrow z_x=\frac{z}{x-y\varphi'} \quad (*)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{z_x\cdot(x-y\varphi')-z\cdot\left[1-y\varphi''\cdot\left(-\frac{y}{z^2}\right)\cdot z_x\right]}{(x-y\varphi')^2} \xlongequal[\text{代入}]{\text{将}(*)} -\frac{y^2\varphi''}{(x-y\varphi')^3}$$

2. 计算二次积分 $\int_0^1 dx \int_{x^2}^1 \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}} dy$.



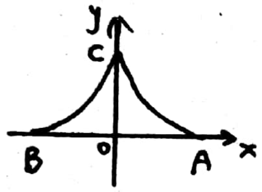
原式 $= \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}} dx$

$= \int_0^1 \frac{y^2}{2\sqrt{1+y^3}} dy$

$= \frac{1}{3}\sqrt{1+y^3}\Big|_0^1$

$= \frac{\sqrt{2}-1}{3}$

3. 计算 $\int_L x ds$, 其中 L 是星形线 $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$ 经点 $A(2,0)$, $C(0,2)$, $B(-2,0)$ 的 ACB 弧段.



∵ L 关于 y 轴对称

$f(x,y) = x$ 关于 x 为奇函数

∴ $\int_L x ds = 0$

4. 试判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ 的敛散性，对收敛情况说明是绝对收敛还是条件收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

1) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \right\} \downarrow$ 且 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$

∴ 由 Leibniz 判别法，级数收敛.

2) $n\to\infty$, $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ 发散

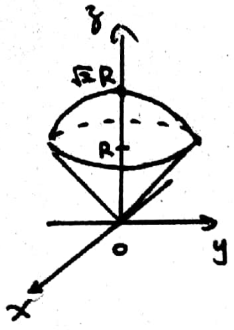
∴ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ 发散

综上：级数收敛且为条件收敛.

5. 计算 $\oiint\limits_{\Sigma} 2xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x - x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中曲面 Σ 是

$$z=\sqrt{x^2+y^2} \text{ 与 } z=\sqrt{2R^2-x^2-y^2}$$

所围成的立体 Ω 的表面外侧.



由Gauss公式，

$$\text{原式} = \iiint\limits_{\Omega} 3z\,dv$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}R} 3r\cos\varphi \cdot r^2 \sin\varphi\, dr$$

$$= \frac{3}{2}\pi R^4$$

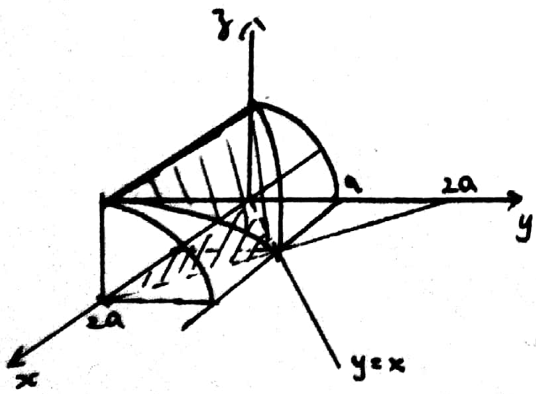
三、综合题(满分 45 分)

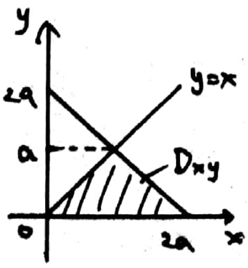
1. (12 分)　在曲面 $(x^2y+y^2z+z^2x)^2+(x-y+z)=0$ 上的点 $(0,0,0)$ 处的切平面 π 内求一点 p，使 p 到点 $A(2,1,2)$ 的距离的平方最小.

2015级考题

2. (9 分)　求圆柱面 $y^2+z^2=a^2$ 在第一卦限中位于 $x+y\le 2a$，x [redacted] y 部分的面积 $(a>0)$.

≥





$$z=\sqrt{a^2-y^2}$$

$$S=\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1+0^2+\left(-\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}\right)^2}\,dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}} \frac{a}{\sqrt{a^2-y^2}}\,dxdy$$

$$=\int_0^a dy \int_y^{2a-y} \frac{a}{\sqrt{a^2-y^2}}\,dx = \int_0^a \frac{2a^2-2ay}{\sqrt{a^2-y^2}}\,dy$$

$$=\left[2a^2\arcsin\frac{y}{a}+2a\sqrt{a^2-y^2}\right]_0^a = (\pi-2)a^2$$

3. (12 分)

试求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$ 的和函数并计算级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}$ 的和.

2014级考题

4. (12 分)

设满足积分 $\oint_L[\ln x-f'(x)]\frac{y}{x}\mathrm{d}x+f'(x)\mathrm{d}y=0$，其中 $f(x)$ 存在二阶连续导数，$f(1)=f'(1)=0$，L 是半平面 $x>0$ 内任意光滑闭曲线. 试求 $f(x)$.

由题，积分与路径无关，$\therefore [\ln x-f'(x)]\cdot\frac{1}{x}=f''(x)$.

即 $f''(x)+\frac{1}{x}f'(x)=\frac{\ln x}{x}$

用 $\mu=x$ 乘以两边，可得：$(xf'(x))'=\ln x$

从而 $xf'(x)=\int\ln x\,dx=x\ln x-x+C_1$

由 $f'(1)=0$，得 $C_1=1$；$\therefore f'(x)=\ln x-1+\frac{1}{x}$

从而 $f(x)=x\ln x-2x+\ln x+C_2$

又 $f(1)=0$，$\therefore C_2=2$.

综上，$f(x)=(x+1)\ln x-2x+2$.