2015—2016 学年第一学期《高等数学》期中试卷 （2015 级）

年级专业__________ 学号__________ 姓名__________成绩__________

一、填空题（6×4 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n^3+1}}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n^3+2}}+\cdots+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n^3+n}}]=$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

2. $\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t+t^2\sin\frac{1}{t}}{(1+2\cos t)\ln(1+t)}=$ $\frac{1}{3}$ 。

3. 当$x\to0$时，$(1-\cos x)\ln(1+3x^2)$是比$x^n\arctan x$（n为正整数）高阶的无穷小，而$x^n\arctan x$又是比$e^{x^2}-1$高阶的无穷小，则$n=$ 2 。

4. 设$f(x)=\frac{2}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}$，则$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=$ 2 ，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=$ 0 。

5. 设$y=f(x)\cos\ln x+\arcsin(e^{-\sqrt{x}})$，$f(x)$可微，则

$dy=$ $\left[f'(x)\cos\ln x-\frac{f(x)}{x}\sin\ln x-\frac{1}{2\sqrt{x(e^{2\sqrt{x}}-1)}}\right]dx$ 。（少dx扣1分）

6. 若使直线$y=3x+b$为曲线$y=x^2+5x+4$的切线，则$b=$ 3 。

二、计算（6×6 分）

1、$\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x})$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sec^2x-1}{3x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan^2x}{3x^2}$

$=\frac{1}{3}$

2、$\lim\limits_{x\to0}[\frac{\ln(1+x)}{x}]^{\frac{1}{e^x-1}}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left\{[1+\frac{\ln(1+x)-x}{x}]^{\frac{x}{\ln(1+x)-x}}\right\}^{\frac{\ln(1+x)-x}{x(e^x-1)}}$

$\because \lim\limits_{x\to0}[1+\frac{\ln(1+x)-x}{x}]^{\frac{x}{\ln(1+x)-x}}=e$，

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-1}{2(1+x)}=-\frac{1}{2}$

$\therefore$ 原式 $=e^{-\frac{1}{2}}$

简化：原式 $=\lim\limits_{x\to0}[\frac{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x}]^{\frac{1}{e^x-1}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left\{[1-\frac{x}{2}+o(x)]^{\frac{1}{-\frac{x}{2}+o(x)}}\right\}^{\frac{-\frac{x}{2}+o(x)}{e^x-1}}$

$=e^{-\frac{1}{2}}$ <Taylor 最快>

3、已知 $\frac{d}{dx}f(\frac{1}{x^2})=\frac{1}{x}$，求 $f'(x)$，$f(x)$。

解: $\left(f(\frac{1}{x^2})\right)' = f'(\frac{1}{x^2})\cdot(\frac{-2}{x^3}) = \frac{1}{x}$

$\therefore f'(\frac{1}{x^2}) = -\frac{x^2}{2}$.

令 $\frac{1}{x^2}=t$，则 $f'(t) = -\frac{1}{2t}$ $(t>0)$ $(t>0)$

从而 $f'(x) = -\frac{1}{2x}$, $x>0$.

$f(x) = -\frac{1}{2}\ln x + C$.

(少C扣1分)

4、$\begin{cases} x=\sin t \\ y = t\sin t+\cos t \end{cases}$，求 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$。

解: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t + t\cos t - \sin t}{\cos t}$

$= t$.

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{\cos t} = \sec t$

5、 由 $y=e^{x+y}$ 确定 $y=y(x)$，求 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$。

解:

法一: $y' = e^{x+y}\cdot(1+y')$

$\Rightarrow y' = \frac{e^{x+y}}{1-e^{x+y}} = \frac{y}{1-y}$

$y'' = \frac{y'(1-y)-y\cdot(-y')}{(1-y)^2}$

$= \frac{y'}{(1-y)^2} = \frac{y}{(1-y)^3}$

法二: $\ln y = x+y$

$\Rightarrow \frac{y'}{y} = 1+y' \Rightarrow y' = y + yy'$ (*)

$\Rightarrow y' = \frac{y}{1-y}$

(*) 求导: $y'' = y' + (y')^2 + y\cdot y''$

$\Rightarrow y'' = \frac{y'(1+y')}{1-y} = \frac{\frac{y}{1-y}\cdot(1+\frac{y}{1-y})}{1-y}$

$= \frac{y}{(1-y)^3}$

6、$y=\ln\sqrt{x^2-3x+2}$，求 $y^{(2015)}$。

解: $y = \frac{1}{2}\ln(x-1)(x-2)$, $x<1$ 或 $x>2$

$= \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x-2|$

<加绝对值避免负区间讨论>

$y' = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x-2)}$

套用公式或归纳法可得:

$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{2(x-1)^n} + \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{2(x-2)^n}$

$n=2015$ 时,

$y^{(2015)} = \frac{2014!}{2}\left[\frac{1}{(x-1)^{2015}} + \frac{1}{(x-2)^{2015}}\right]$

三、设 $f(x)$ 具二阶连续导数，$f(0)=0$，$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ f'(0), & x=0,\end{cases}$，求 $g'(x)$，并讨论 $g'(x)$ 连续性。（10分）

解：① $x\neq 0$ 时，$g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f'(0)x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}f''(0)$$

$$\therefore g'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}, & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}f''(0), & x=0\end{cases}$$

② 显然 $g'(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 与 $(0,+\infty)$ 内连续.

且由 $\lim\limits_{x\to 0}g'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)+xf''(x)-f'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{2}=\dfrac{f''(0)}{2}=g'(0)$

可知 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续. $\therefore g'(x)\in C(-\infty,+\infty)$.

四、求 $y=xe^{-x}$ 的单调区间、凹凸区间、极值、曲线的拐点及渐近线，并作图。（10分）

解：① $y'=e^{-x}+x\cdot(-e^{-x})=(1-x)e^{-x}$

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	0	−
y	↗	极大值	↘

$\therefore$ 单调增区间，$(-\infty,1]$

减区间：$[1,+\infty)$

极大值 $y(1)=e^{-1}$.

② $y''=-e^{-x}+(1-x)\cdot(-e^{-x})=(x-2)e^{-x}$

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,+\infty)$
y''	−	0	+
y	∩		∪

$\therefore$ 凹区间：$[2,+\infty)$

凸区间：$(-\infty,2]$

拐点，$(2,2e^{-2})$

③ 渐近线，

1° $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x}}=0$ $\therefore$ 有水平渐近线 $y=0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{-x}=-\infty$

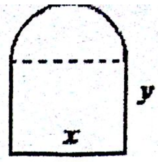
2° $\because y\in C(-\infty,+\infty)$ $\therefore$ 无垂直渐近线.

3° $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xe^{-x}}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{xe^{-x}}{x}=+\infty$ $\therefore$ 无斜渐近线.

④ 描点作图：略.

$y(0)=0$.

五、某地区防空洞的截面拟建成矩形加半圆（见图）。截面的面积为 $6m^2$。问底宽 x 为多少时才能使截面的周长最小，从而使建造时所用的材料最省？（8 分）



解：周长为 $x+2y+\pi\cdot\frac{x}{2}$，又 $xy+\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2=6 \Rightarrow y=\frac{6}{x}-\frac{\pi}{8}x$ $(y>0)$

∴周长为 $C(x)=\left(1+\frac{\pi}{4}\right)x+\frac{12}{x}$ $\left(0<x<\sqrt{\frac{48}{\pi}}\right)$

令 $C'(x)=1+\frac{\pi}{4}-\frac{12}{x^2}=\frac{(\pi+4)x^2-48}{4x^2}=0$ 得 $x=\sqrt{\frac{48}{\pi+4}}$（唯一驻点）

∴ $x=\sqrt{\frac{48}{\pi+4}}=\frac{4}{\pi+4}\sqrt{3(\pi+4)}$ 时，周长最小.

注：实际问题，唯一驻点，可省略单调、极值讨论.

六、证明题：（1）$x\in(0,1)$ 时，$(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$；（2）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$F(x)=xf(x)$，则存在 $c\in(0,1)$ 使 $F''(c)=0$。（12 分）

证：(1) 令 $f(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$.

则 $f'(x)=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x$

$f''(x)=2\ln(1+x)\cdot\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x}-2$

$=\frac{2}{1+x}[\ln(1+x)-x]<0$，$x>0$.

$\Rightarrow f'(x)\downarrow$，又 $f'(0)=0$

$\Rightarrow f'(x)<0$，$x>0$

$\Rightarrow f(x)\downarrow$，又 $f(0)=0$

$\Rightarrow f(x)<0$，$x>0$.

从而结论成立.

(2) 由已知，$F(x)\in D^{(2)}[0,1]$.

且 $F(0)=F(1)=0$

由 Rolle Th. $\exists\xi\in(0,1)$ s.t. $F'(\xi)=0$.

又∵ $F'(x)=f(x)+xf'(x)$

∴ $F'(0)=0$

从而再由 Rolle Th，

$\exists c\in(0,\xi)$ s.t. $F''(c)=0$.