6′ # 2015-2016 学年第一学期《概率统计》试卷（A）

授课班号________ 学号 14国贸________ 姓名________

题型	填空题	计算题	综合题	总分	审核
得分					

一、填空题(每小题 5 分，共 25 分)

得分	阅卷人

1. 若随机试验E是:在六张卡片上分别 标有数字0,1,2,3,4,5,从中任意依次取出两张,取后不放回,组成一个二位数,则E的样本空间中基本事件个数是 25 .

2. 设某批电子元件的正品率为4/5，次品率为1/5，现对这批元件进行测试,只要测得一个正品就停止测试工作,则测试次数ξ的概率分布为$P(\xi=k)=$ $\left(\frac{1}{5}\right)^{k-1}\cdot\frac{4}{5}$，$k=1,2,\cdots$

(3′) (2′)

3. 设随机变量(ξ,η)在矩形域$a\le x\le b$, $c\le y\le d$内服从均匀分布,则(ξ,η)的联合概率密度$\varphi(x,y)=$ $\begin{cases}\frac{1}{(b-a)(d-c)}, & a\le x\le b, c\le y\le d \quad (3')\\ 0, & 其他 \quad (2')\end{cases}$

4. 设$X\sim B(n,p)$,且$E(X)=2$, $D(X)=\frac{2}{3}$,则$P(X=1)=$ $\frac{2}{9}$.

5. 设二维离散型随机变量(X,Y)的分布列为

(X,Y)	(1,0)	(1,1)	(2,0)	(2,1)
P	0.4	0.2	a	b

若$E(XY)=0.8$,则$\text{cov}(X,Y)=$ 0.1 .

二、计算题(每小题 6 分，共 36 分)

得分	阅卷人

1. 甲、乙、丙3台机床加工同一种零件,零件由各台机床加工的百分比依次是50%, 30%, 20%. 各机床加工的优质品率依次是80%, 85%, 90%, 将加工的零件混在一起,从中任取1个,求取得优质品的概率.

设 A="任取一个为优质品"

B_i="任取一个来自甲/乙/丙" $i=1,2,3$.

$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)$ (2′)

$=0.5\times0.8+0.3\times0.85+0.2\times0.9$ (2′)

$=0.835$ (2′)

2. 设 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases},$$

求 $Y=1-X$ 的密度函数.

$0<x<1$, $y=1-x\in(0,1)$ 且 $x=1-y$, $x'(y)=-1$ (2') 未加绝对值扣 2'

$$f_Y(y)=\begin{cases}3(1-y)^2\cdot|-1|, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}3(1-y)^2, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

(1')

(3')

3. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，下表列出了二维随机向量 (X,Y) 的联合分布律及关于 X 和 Y 边缘分布律中的某些数值

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}=p_i$
x_1	a	$\frac{1}{8}$	b	c
x_2	$\frac{1}{8}$	d	e	f
$P\{Y=y_j\}=p_j$	$\frac{1}{6}$	g	h	1

试将其余数值求出.

$$\begin{cases}a=\frac{c}{6}, \quad \frac{1}{8}=cg, \quad b=ch\\ \frac{1}{8}=\frac{f}{6}, \quad d=fg, \quad e=fh\\ c+f=1\\ \frac{1}{6}+g+h=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{24} & e=\frac{1}{4}\\ b=\frac{1}{12} & f=\frac{3}{4}\\ c=\frac{1}{4} & g=\frac{1}{2}\\ d=\frac{3}{8} & h=\frac{1}{3}\end{cases}$$

(4')　　(4')

4. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}1-|1-x|, & 0<x<2\\ 0, & 其它\end{cases},$$

求 $E(X)$.

$$E(X)=\int_0^2 x(1-|1-x|)dx \quad (3')$$

$$=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2 x(2-x)dx$$

$$=1. \quad (3')$$

5. 设总体 X 以等概率 $\frac{1}{\theta}$ 取值 $1, 2, \cdots, \theta$, 求未知参数 θ 的矩估计量.

$\mu_1 = E(X) = \frac{1}{\theta}(1+2+\cdots+\theta) = \frac{\theta+1}{2}$ (2')

$\Rightarrow \theta = 2\mu_1 - 1$ (2')

$\Rightarrow \hat{\theta} = 2\hat{\mu}_1 - 1$

$= 2A_1 - 1$

$= 2\bar{X} - 1$ (2')

6. 某门课程的考试成绩服从正态分布. 随机抽取36位考生的成绩, 算得成绩平均值 $\bar{x} = 71.5$ 分, 标准差 $S = 15$ 分, 问在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下, 是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩不足75分?

$z_{0.95} = 1.645$, $\quad t_{0.95}(35) = 1.690$, $\quad t_{0.95}(36) = 1.688$,

$z_{0.975} = 1.960$, $\quad t_{0.975}(35) = 2.030$, $\quad t_{0.975}(36) = 2.028$.

$H_0: \mu \geq \mu_0 = 75$; $H_1: \mu < 75$ (2')

取检验统计量 $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$ (1') 拒绝域 $t \leq -t_\alpha(n-1) = -t_{0.05}(35) = -1.690$ (1')

$t = \frac{71.5 - 75}{15/\sqrt{36}} = -1.4 > -1.690$ (1') ∴ 接受 H_0. 认为平均成绩在75分以上. (1')

三、综合题(满分 39 分)

1. (9 分) 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f_X(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)} \quad (0 < x < +\infty),$$

试证明随机变量 $Y = \frac{1}{X}$ 与 X 服从同一分布.

得分	阅卷人

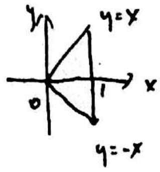
$x > 0$, $y = \frac{1}{x} \in (0, +\infty)$ 且 $x = \frac{1}{y}$, $x'(y) = -\frac{1}{y^2}$ (2')

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi(1+\frac{1}{y^2})} \cdot \left|-\frac{1}{y^2}\right|, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{\pi(1+y^2)}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$ (5') (1')

∴ 结论成立. (1')

未加绝对值扣4' 区间错扣2'

2. (10分) 设二维随机变量(ξ,η)的概率密度为



$$\varphi(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\bar{\in} D\end{cases}$$

其中D是由直线$y=x$, $y=-x$, $x=1$所围成的区域. 验证: ξ与η是不相关的, 但ξ与η不独立.

① $E(\xi\eta)=\iint_D xy\,dx\,dy=0$, $E(\eta)=\iint_D y\,dx\,dy=0$ (奇偶对称性)

$\therefore Cov(\xi,\eta)=E(\xi\eta)-E(\xi)\cdot E(\eta)=0$, $\rho_{\xi\eta}=\dfrac{Cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D(\xi)}\cdot\sqrt{D(\eta)}}=0$

从而ξ与η不相关. (5')

② $\varphi_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\,dy=\begin{cases}\int_{-x}^{x}1\,dy, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$

$\varphi_\eta(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\,dx=\begin{cases}\int_{|y|}^{1}1\,dx, & -1\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}1-|y|, & -1\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$ (3')

$\because \varphi(x,y)\ne\varphi_\xi(x)\varphi_\eta(y)$

$\therefore \xi,\eta$不独立. (2')

3. (10分) 设随机变量$X\sim N(\mu,2.8^2)$, 现有X的10个观察值$x_1,\cdots,x_{10}$, 已知$\bar{x}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i=1500$. 求:

(1) μ的置信度为0.95的置信区间. $z_{0.025}=1.96$

(2) 要想使0.95的置信区间长度小于1, 观察值个数n最少应取多少?

(1) $(\bar{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}})\Rightarrow(1500\pm\frac{2.8}{\sqrt{10}}\times1.96)\Rightarrow(1500\pm1.74)$

(4')

i.e. $(1498.26, 1501.74)$

(3')

(2) $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}<1\Rightarrow\frac{2\times2.8}{\sqrt{n}}\times1.96<1\Rightarrow n>120.47$.

$\therefore n$至少为121. (3')

4. (10分) 设$X_1,\cdots,X_n,X_{n+1}$是取自正态总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的样本,

$$\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad S_n^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}_n)^2,$$

试确定统计量$\sqrt{\frac{n}{n+1}}\cdot\frac{X_{n+1}-\bar{X}_n}{S_n}$的分布.

"正" 3'
"n卡" 2'
独立 2'
"利用t" 3'

由题, $\bar{X}_n\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$, $X_{n+1}\sim N(\mu,\sigma^2)$

且$\bar{X}_n$、X_{n+1}独立. $\therefore X_{n+1}-\bar{X}_n\sim N(0,\frac{n+1}{n}\sigma^2)$

从而 $\dfrac{X_{n+1}-\bar{X}_n}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}\sigma}\sim N(0,1)$. (3') 又$\because (n-1)S_n^2/\sigma^2\sim\chi^2(n-1)$ (2')

且 $\dfrac{X_{n+1}-\bar{X}_n}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}\sigma}$ 与 $(n-1)S^2/\sigma^2$ 独立 $\therefore$ 由t分布定义: $\dfrac{\frac{X_{n+1}-\bar{X}_n}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}\sigma}}{\sqrt{S_n^2/\sigma^2}}=\sqrt{\frac{n}{n+1}}\cdot\frac{X_{n+1}-\bar{X}_n}{S_n}$

$\sim t(n-1)$ (3')

(2')