10

2015—2016 学年第一学期《线性代数》课内考试卷（A 卷）

授课班号 660050401-03 年级专业 机电学院 14 级 学号________ 姓名________

题号	一	二	三	四	五	六	总分	审核
题分	24	32	12	12	12	8		
得分								

得分	评阅人

一、填空（共 24 分，每空格 3 分）

1. 排列 3142576 的逆序数为 4 。
2. 已已知四阶行列式 D 中第 3 列元素依次为-1，2，0，1，它们的余子式依次为 5，3，-7，4，则行列式 $D=$ -15 。
3. 设 3 阶方阵 A 的行列式 $|A|=4$，则 $\left|(2A)^{-1}-A^{*}\right|=$ $-\frac{343}{32}$ 。
4. 设 $A=\begin{bmatrix}-4 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$，其伴随矩阵 A^{*}，则 $(A^{*})^{-1}=$ $\begin{bmatrix}2 & -\frac{3}{2}\\ -1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ 。

$r_1 \leftrightarrow r_3$ c_3+c_2

5. $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{2015}\begin{bmatrix}1 & a & x\\ 1 & b & y\\ 1 & c & z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{2016}=$ $\begin{bmatrix}1 & c & z+2016c\\ 1 & b & y+2016b\\ 1 & a & x+2016a\end{bmatrix}$ 。

6. 已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 6 & -4\\ 3 & -2 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 0\end{bmatrix}$，则 A 的秩为 2 。

7. 已知 $\vec{\beta}_1=\vec{\alpha}_1,\vec{\beta}_2=\vec{\alpha}_1+2\vec{\alpha}_2,\vec{\beta}_3=\vec{\alpha}_1+2\vec{\alpha}_2+3\vec{\alpha}_3$，且向量组 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$ 线性无关，则向量组 $\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\vec{\beta}_3$ 必线性 无关 。 重复

8. 已知 $\vec{\eta}_1=\begin{bmatrix}4\\3\\2\\1\end{bmatrix},\vec{\eta}_2=\begin{bmatrix}1\\3\\5\\1\end{bmatrix},\vec{\eta}_3=\begin{bmatrix}-2\\6\\3\\2\end{bmatrix}$ 是四元线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的三个解向量，且 $R(A)=2$，则线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的通解 $\vec{x}=$ $\begin{bmatrix}4\\3\\2\\1\end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix}3\\0\\-3\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}3\\-3\\2\\-1\end{bmatrix}$ 。

得分	评阅人

二、计算（共 32 分，每小题 8 分）

1. $D=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 15 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$$D=(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 10 & 15 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=2\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=12$$

2. $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$ 化上三角

$$D_n \xlongequal[\substack{r_3+r_1\cdot(-1) \\ \vdots \\ r_n+r_1\cdot(-1)}]{r_2+r_1\cdot(-1)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}\cdot n!$$

3. 设 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$，求AB及BA.

$$AB=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 21 & -7 \end{bmatrix},\quad BA=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -6 & -10 \end{bmatrix}$$

4. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$，矩阵 X 满足 $AX+B=2X$，求 X.

重复

10′

得分	评阅人

三、（本题 12 分）

求下列向量组的秩和它的一个极大线性无关组，并用该极大线性无关组表示其余向量。

$$\vec{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\1\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_3=\begin{bmatrix}2\\1\\3\\0\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_4=\begin{bmatrix}2\\5\\-1\\4\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_5=\begin{bmatrix}1\\-1\\3\\-1\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_6=\begin{bmatrix}3\\4\\2\\3\end{bmatrix}.$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6)=\begin{bmatrix}1&1&2&2&1&3\\0&2&1&5&-1&4\\2&0&3&-1&3&2\\1&1&0&4&-1&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&2&2&1&3\\0&2&1&5&-1&4\\0&-2&-1&-5&1&-4\\0&0&-2&2&-2&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&2&2&1&3\\0&2&1&5&-1&4\\0&0&-1&1&-1&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&0&4&-1&3\\0&2&0&6&-2&4\\0&0&1&-1&1&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&1\\0&1&0&3&-1&2\\0&0&1&-1&1&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\therefore r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6)=3.$

一个极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

$\alpha_4=\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3$

$\alpha_5=0\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$

$\alpha_6=\alpha_1+2\alpha_2+0\alpha_3$

得分	评阅人

四、（本题 12 分）当 λ 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases}(\lambda+1)x_1+x_2+x_3=\lambda^2+2\lambda\\x_1+(\lambda+1)x_2+x_3=\lambda^3+2\lambda^2\\x_1+x_2+(\lambda+1)x_3=\lambda^4+2\lambda^3\end{cases}$$

有惟一解、无解、有无穷多解，在线性方程组有无穷多解时，求出其通解。

1) $|A|=\begin{vmatrix}\lambda+1&1&1\\1&\lambda+1&1\\1&1&\lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda+3)\neq0$，即 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq-3$ 时，

有惟一解

2) $\lambda=-3$ 时. $\begin{bmatrix}-2&1&1&3\\1&-2&1&-9\\1&1&-2&27\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&1&-9\\0&-3&3&-15\\0&3&-3&36\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&1&-9\\0&-3&3&-15\\0&0&0&21\end{bmatrix}$

无解

3) $\lambda=0$ 时. $\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&0\\1&1&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，$x_1=-x_2-x_3$，有无穷多解.

通解为 $c_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$.

得分	评阅人

五、（本题 12 分）

1）设方阵 A 满足 $A^2+A-8E=O$，求 $A+3E$ 与 $A-2E$ 的逆矩阵；

2）对满足 1）中条件的 A，设矩阵 X 与之具有关系

$AX+2(A+3E)^{-1}A=2X+2E$ 求矩阵 X。

1) $A^2+A-8E=0 \Rightarrow (A+3E)(A-2E)-2E=0 \Rightarrow (A+3E)(A-2E)=2E$

$\Rightarrow (A+3E)^{-1}=\frac{1}{2}(A-2E)$，$(A-2E)^{-1}=\frac{1}{2}(A+3E)$.

2) $AX+(A-2E)A=2X+2E$，

$(A-2E)X+(A-2E)A=2E$，

$(A-2E)(X+A)=2E$，

$\therefore X+A=(A-2E)^{-1}\cdot 2E=\frac{1}{2}(A+3E)\cdot 2E=A+3E$

$\therefore X=3E$.

得分	评阅人

六、证明（本题 8 分）

设 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_n$ 为 n 维向量，证明它们线性无关的充分必要条件是：任一 n 维向量都可由它们线性表示。

1) 必要性，若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{R}^n$ 线性无关，则 $\forall\beta\in\mathbb{R}^n$，有 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta)=n$. 从而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$ 线性相关，β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示.

2) 充分性，若 $\forall\beta\in\mathbb{R}^n$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，则自然基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，从而

$n=r(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\le r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\le n \Rightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=n$.

$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.