# 2007-2008 学年第二学期高等数学期中测试及数学竞赛试卷（2007 级）

（参加竞赛的同学全做，其他同学只做一、二大题）

**一、填空题**（10×6 分）

1. 设 $\vec{a}=(2,-3,1)$，$\vec{b}=(1,-1,3)$，则 $(-2\vec{a})\cdot(3\vec{b})=$__________，$\vec{a}\times(2\vec{b})=$__________。

2. 设 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为单位向量，且满足 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=$__________。

3. $xOy$ 坐标面上曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 绕 $y$ 轴一周的旋转面名称是________________，旋转面的方程是________________。

4. 过直线 $L_1: x=2t-1, y=3t+2, z=2t-3$ 和 $L_2: x=2t+3, y=3t-1, z=2t+1$ 的平面方程为________________。

5. 直线 $\begin{cases}2x-4y+z=0\\3x-y-2z-9=0\end{cases}$ 在平面 $4x-y+z-1=0$ 上的投影直线方程为________________。

6. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{3(x^2+y^2)^2e^{x^2y^2}}=$__________。

7. 设 $z=\arctan(xy^2+1)$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$__________，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________。

8. $z=z(x,y)$ 由 $F(x^2-y^2, y^2-z^2)=0$ 所确定，$F(u,v)$ 可微，则 $yz\dfrac{\partial z}{\partial x}+xz\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________。

9. 曲线 $x=t^2-1, y=t+1, z=t^3$ 在点 $(0,2,1)$ 处的切线方程为________________。

10. 设 $U=\ln(x^2+y^2+z^2)$，则 $gradU\big|_{(1,1,1)}=$__________。

**二、计算题**（2×20 分）

1. 设 $g$ 具二阶导数，$f$ 具二阶偏导，$z=g(x+y)+f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

2. 在曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$上找一点，使它到点$\left(1,\sqrt{2},3\sqrt{3}\right)$的距离最短，并求最短距离。

**三、数学竞赛加题**（5×20 分）

1. 求极限：1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{\sqrt[n]{a}-1}{2}\right)^n$ $(a>0)$； 2）

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+4}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+16}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+4n^2}}\right)$。

2. 设$\varphi(x)$具二阶连续导数，$\varphi(0)=1$，$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0 \\ a, & x=0\end{cases}$，

1）确定$a$使$f(x)$在$x=0$处连续；2）求$f'(x)$并证明$f'(x)$在$x=0$处连续。

3. 设一质点在平面内运动，它的坐标为$x=t^3-t, y=t^4+t\ (-\infty<t<+\infty)$，证明质点运动曲线在$t=0$处有一拐点，且运动速度在$t=0$处有一极大值。

4. 1）计算：$\int \frac{2\ln x+1}{x^3(\ln x)^2}dx$；　　2）设 $f(x)$ 连续，$\int_0^x tf(x-t)dt=1-\cos x$，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$。

5. 1）设 $f(x)$ 可导，$f(1)=0$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $f(\xi)=-\xi f'(\xi)$。

2）比较 $e^\pi$ 与 $\pi^e$ 大小，并说明理由。

参考答案

一、

1. 第一空 $-48$ ；第二空 $(-16,-10,2)$

2. $-\dfrac{3}{2}$

3. 第一空 旋转单叶双曲面；第二空 $\dfrac{x^2+z^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$

4. $x-z-2=0$

5. $\begin{cases}17x+31y-37z-117=0\\4x-y+z-1=0\end{cases}$

6. $\dfrac{1}{6}$

7. 第一空 $\dfrac{y^2}{1+(xy^2+1)^2}$ ；第二空 $\dfrac{2xy}{1+(xy^2+1)^2}$

8. $xy$

9. $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{3}$

10. $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$

二、

1. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=g'+yf_1'+\dfrac{1}{y}f_2'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=g''+f_1'-\frac{1}{y^2}f_2'+xyf_{11}''-\frac{x}{y}f_{12}''+\frac{x}{y}f_{21}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''$$

2. 所求点为$(2,2\sqrt{2},2\sqrt{3})$ ；最短距离为$\sqrt{6}$

三、

1. 1）$\sqrt{a}$ 提示：用重要极限及等价无穷小代换，或函数极限与数列极限的关系计算

2）$\dfrac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})$ 提示：定积分定义

2. 1）$a=\varphi'(0)$

2） $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{x\varphi'(x)+x\sin x-\varphi(x)+\cos x}{x^2}, & x\neq 0 \\ \dfrac{1}{2}\ \varphi''(0)+\dfrac{1}{2}, & x=0 \end{cases}$

3. 提示：1）用 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=0$，$\left.\dfrac{d^3y}{dx^3}\right|_{t=0}\neq 0$ 说明拐点；

2） $v(t)=\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$，用 $v'(0)=0$，$v''(0)<0$ 说明取极大值

4. 1） $-\dfrac{1}{x^2\ln x}+C$　　提示：考虑 $\displaystyle\int\frac{2x\ln x+x}{\left(x^2\ln x\right)^2}dx$

2） 1　　提示：令 $x-t=u$

5. 1）罗尔定理

2） $e^{\pi}>\pi^{e}$