2006-2007 学年第二学期高等数学期中测试及数学竞赛试卷（2006 级）

（参加竞赛的同学全做，其他同学只做一、二大题）

一、填空题（10×4 分）

1. 设 $\vec{a}=(1,1,1)$，$\vec{b}=(1,2,-1)$，则 $(-2\vec{a})\cdot(3\vec{b})=$____________，$\vec{a}\times(2\vec{b})=$______________。

2. 已知平面过直线 $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y+z=2 \end{cases}$ 且与另一直线 $x=y=z$ 平行，则该平面方程为____________________。

3. 曲线 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$ 绕 y 轴一周的旋转面的方程是_______________________。

4. 曲面 $2xy+z-e^z=3$ 在点 $M(1,2,0)$ 处的切平面方程为________________________。

5. 设 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微，且 $f(1,1)=1$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=3$，$\varphi(x)=f(x,f(x,x))$，则 $\left.\dfrac{d}{dx}\varphi^3(x)\right|_{x=1}=$______________。

6. 交换积分次序 $\int_0^1 dx\int_{x-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy=$____________________________________。

7. 积分 $\int_0^1 dx\int_0^x f(x^2+y^2)\,dy$ 的极坐标形式为____________________________________。

8. Ω 为 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围立体域，则 $\iiint\limits_{\Omega} x\,dv=$_______________。

9. 设 $L: x^2+y^2=2$，则 $\oint_L (x^2+y^2)\,ds=$________________。

10. 设 $f(0)=0$，$\int_C xy^2dx+yf(x)dy$ 与路径无关，则 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx+yf(x)dy=$________________。

二、计算题（4×15 分）

1. 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$z=f\left(2x-y,\dfrac{x}{y}\right)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

2. 求 $z=3axy-x^3-y^3$ 的极值（其中 $a\neq 0$ ）。

3. 一个高为 h 的雪堆，其侧面满足方程 $z=h-\dfrac{2\left(x^2+y^2\right)}{h}$，求雪堆的体积与侧面积之比。

4. 求 $\int_L\left(e^x\sin y-b(x+y)\right)dx+\left(e^x\cos y-ax\right)dy$，其中 a,b 为正的常数，L 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的弧。

三、数学竞赛加题（4×25 分）

1. 设 $0 < x_1 < \pi$，$x_{n+1} = \sin x_n \ (n = 1,2,\cdots)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n}}$。

2. 设 $f(x)$ 具二阶连续导数，$f(a) = 0$，$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x-a}, & x \neq a \\ f'(a), & x = a \end{cases}$，求 $g'(x)$，并证明 $g'(x)$ 在 $x = a$ 处连续。

3. 设 $f(x)$ 连续，证明 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]dx$，并求 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x}dx$。

4. 1）比较 π^e，e^π 大小，并说明理由；2）证明：$e^x = ax^2 + bx + c$ 的根不超过三个。

参考答案

一、

1. 第一空 -12 ；第二空 $(-6,4,2)$

2. $x-3y+2z-4=0$

3. $\dfrac{x^2+z^2}{4}+y^2=1$

4. $2x+y-4=0$

5. 51

6. $\int_{-1}^{0}dy\int_{0}^{y+1}f(x,y)\,dx+\int_{0}^{1}dy\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,dx$

7. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{0}^{\sec\theta}f(r^2)\cdot r\,dr$

8. 0

9. $4\sqrt{2}\pi$

10. $\dfrac{1}{2}$

二、

1. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2f_1'+\dfrac{1}{y}f_2'$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-f_1'-\dfrac{x}{y^2}f_2'$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2f_{11}''-\left(\dfrac{2x}{y^2}+\dfrac{1}{y}\right)f_{12}''-\dfrac{1}{y^2}f_2'-\dfrac{x}{y^3}f_{22}''$

2. 1）$a<0$时，有极小值$z(a,a)=a^3$；2）$a>0$时，有极大值$z(a,a)=a^3$

3. 体积$V=\dfrac{\pi}{4}h^3$，侧面积$S=\dfrac{13}{12}\pi h^2$，$\dfrac{V}{S}=\dfrac{3h}{13}$

4. $\dfrac{\pi}{2}(b-a)a^2+2a^2b$

三、

1. $\{x_n\}$单调有界，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$；$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n}}=1$ 提示：利用函数极限与数列极限的关系计算

2. $g'(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-a)f'(x)-f(x)}{(x-a)^2}, & x\neq a\\ \dfrac{f''(a)}{2}, & x=a\end{cases}$

3. 2

4. 1）$\pi^e<e^\pi$ 2）提示：罗尔定理