2'

2014－2015 学年第二学期《线性代数》课内考试卷（A 卷）

授课班号 660050403-06 年级专业 企管学院 14 级 学号＿＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿＿

题号	一	二	三	四	五	六	总分	审核
题分	24	32	12	12	12	8		
得分								

得分	评阅人

一、填空（共 24 分，每空格 3 分）

1. 已知 $A=[\vec{\alpha}_1,\ \vec{\alpha}_2,\ \vec{\alpha}_3]$，$|A|=2$，则 $|\vec{\alpha}_3-2\vec{\alpha}_1,\ 3\vec{\alpha}_2,\ \vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_3|=$ ＿-18＿.

2. 设 3 阶方阵 A 的行列式 $|A|=\dfrac{1}{2}$，则 $|(2A)^{-1}-2A^*|=$ ＿$-\frac{1}{4}$＿.

3. 设 A,B,C 为方阵，E 为单位矩阵，且 $B=E-AB, C=A-CA$，$|E+A|\neq 0$，

   则 $B+C=$ ＿E＿.

4. $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{2015}\begin{bmatrix}1&a&x\\1&b&y\\1&c&z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{2015}=$ ＿$\begin{bmatrix}1&c&z+2015\\1&b&y+2015\\1&a&x+2015\end{bmatrix}$＿.

   $r_1\leftrightarrow r_3$ $\qquad$ c_3+c_1

5. 已知 $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{bmatrix}$，则 A 的秩为＿2＿.

6. 已知 $\vec{\beta}_1=\vec{\alpha}_1-2\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3$，$\vec{\beta}_2=\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2-2\vec{\alpha}_3$，$\vec{\beta}_3=-2\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3$，且向量组 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$ 线性无关，则向量组 $\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\vec{\beta}_3$ 线性＿相关＿. $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&1&-2\\-2&1&1\\1&-2&1\end{bmatrix}$ $r=2$

7. 已知 $\vec{\eta}_1=[2\ \ 0\ \ 1\ \ 6]^T$，$\vec{\eta}_2=[2\ \ 0\ \ 1\ \ 5]^T$，$\vec{\eta}_3=[2\ \ 0\ \ 1\ \ 4]^T$ 是四元线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的三个解向量，且 $R(A)=3$，则线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的通解

   $\vec{x}=$ ＿$(2,0,1,6)^T+c(0,0,0,1)^T$＿.

8. 已知 $\vec{\alpha}=\begin{bmatrix}3k\\1\\5\end{bmatrix}$，$\vec{\beta}=\begin{bmatrix}2\\-k\\1\end{bmatrix}$，则 $k=$ ＿-1＿时，$\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 正交.

得分	评阅人

二、计算（共 32 分，每小题 8 分）

1. $D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ 化上三角

$$D \xlongequal{c_1+(c_2+c_3+c_4+c_5)} \begin{vmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$= 240$

2. 设 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$，求 AB 及 BA.

$AB=0$，$BA=\begin{bmatrix} 10 & 5 \\ -20 & -10 \end{bmatrix}$

3. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 4 \end{bmatrix}$，$AX=B+3X$，求矩阵 X.

$(A-3E)X=B \Rightarrow X=(A-3E)^{-1}B$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & -1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore X=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

4. 设三阶矩阵 A 的特征值分别为 1,2,3，求（1）A^3-5A^2+8A 的特征值;

（2）$|A^3-5A^2+8A|$.

(1) A 有特征值 λ，则 A^3-5A^2+8A 有特征值 $\lambda^3-5\lambda^2+8\lambda$

将 1,2,3 代入，得：4，4，6.

(2) $|A^3-5A^2+8A| = 4\times4\times6=96$

2′

得分	评阅人

三、（本题 12 分）

求下列向量组的秩和它的一个极大线性无关组，并用该极大线性无关组表示其余向量。

$$\vec{\alpha}_1=\begin{bmatrix}2\\1\\4\\3\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\-6\\6\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-1\\-2\\2\\-9\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_4=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\\7\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_5=\begin{bmatrix}2\\4\\4\\9\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_6=\begin{bmatrix}3\\5\\2\\16\end{bmatrix}.$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6)=\begin{bmatrix}2&-1&-1&1&2&3\\1&1&-2&1&4&5\\4&-6&2&-2&4&2\\3&6&-9&7&9&16\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4&5\\2&-1&-1&1&2&3\\4&-6&2&-2&4&2\\3&6&-9&7&9&16\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4&5\\0&-3&3&-1&-6&-7\\0&-10&10&-6&-12&-18\\0&3&-3&4&-3&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4&5\\0&1&-1&\frac{1}{3}&2&\frac{7}{3}\\0&1&-1&\frac{3}{5}&\frac{6}{5}&\frac{9}{5}\\0&0&0&3&-9&-6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4&5\\0&1&-1&\frac{1}{3}&2&\frac{7}{3}\\0&0&0&\frac{4}{15}&-\frac{4}{5}&-\frac{8}{15}\\0&0&0&1&-3&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&0&7&7\\0&1&-1&0&3&3\\0&0&0&1&-3&-2\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&0&4&4\\0&1&-1&0&3&3\\0&0&0&1&-3&-2\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\therefore$ $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6)=3$，一个极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$；$\alpha_3=-\alpha_1-\alpha_2+0\alpha_4$，

$\alpha_5=4\alpha_1+3\alpha_2-3\alpha_4$，

$\alpha_6=4\alpha_1+3\alpha_2-2\alpha_4$.

得分	评阅人

四、（本题 12 分）当 λ 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda\\x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3\\(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$$

有惟一解、无解、有无穷多解，在线性方程组有无穷多解时，求出其通解。

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1+\lambda\\1&1+\lambda&1\\1+\lambda&1&1\end{vmatrix}=(\lambda+3)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1+\lambda&1\\1+\lambda&1&1\end{vmatrix}=(\lambda+3)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda&0\\\lambda&0&0\end{vmatrix}=-\lambda^2(\lambda+3)$$

1) $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq-3$ 时，$|A|\neq0$，有唯一解.

2) $\lambda=0$ 时，显然无解

3) $\lambda=-3$ 时，$\begin{bmatrix}1&1&-2&-3\\1&-2&1&3\\-2&1&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&-3\\0&-3&3&6\\0&3&-3&-6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&-3\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

$\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，$\begin{cases}x_1=x_3-1\\x_2=x_3-2\end{cases}$，通解：$\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.

有无穷多解.

得分	评阅人

五、（本题 12 分）

1）求矩阵 A 的特征值与特征向量；2）求可逆矩阵 P 及对角矩阵 Λ，使 $P^{-1}AP=\Lambda$，其中矩阵

$$A=\begin{bmatrix}-4 & -10 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 3 & 6 & 1\end{bmatrix}。$$

1) 重复

2) $P=\begin{bmatrix}-2 & 0 & -5\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$，$\Lambda=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -2\end{bmatrix}$

得分	评阅人

六、证明（本题 8 分）

设 n 维向量组 $\vec{\alpha}_1$，$\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_m$ 及 $\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\cdots,\vec{\beta}_l$ 线性无关，试证明：向量组 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_m$，$\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\cdots,\vec{\beta}_l$ 线性相关的充分必要条件是存在 n 维非零向量 $\vec{\xi}$，它既可以由 $\vec{\alpha}_1$，$\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_m$ 线性表示，又可以由 $\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\cdots,\vec{\beta}_l$ 线性表示。

证：1) 必要性：

若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_t$ 线性相关，则至少有一向量可由其余向量线性表示，不妨设 $\beta_t=k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m+\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_{t-1}\beta_{t-1}$

令 $\xi=\beta_t-\lambda_1\beta_1-\cdots-\lambda_{t-1}\beta_{t-1}$，∵ $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 线性无关，且系数不全为0，

∴ $\xi\neq0$ 且 ξ 可由 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 线性表示.

又∵ $\xi=k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m$. ∴ ξ 也可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性表示.

2) 充分性，若 $\exists\,\xi\neq0$ 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 以 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 线性表示.

则 $\exists\,k_1,\cdots,k_m$ 不全为0，s.t. $\xi=k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m$.

$\exists\,\lambda_1,\cdots,\lambda_t$ 不全为0，s.t. $\xi=\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_t\beta_t$

从而 $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m-\lambda_1\beta_1-\cdots-\lambda_t\beta_t=0$，系数不全为0.

（线性无关的向量组只有系数全为0的线性组合等于0）

∴ $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_t$ 线性相关.