2006-2007 学年第二学期《高等数学》期末试卷

一、填空题（每小题 3 分，共 24 分）

1. 设 $\vec{a}=(1,2,1)$，$\vec{b}=(1,2,-1)$，则 $(-\vec{a})\times(2\vec{b})=$ $(8,-4,0)$。

2. 曲线 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴一周的旋转面的方程是 $\dfrac{x^2}{4}+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$。

3. 已知 $f_x(0,0)=3$，$f_y(0,0)=1$，则曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=0\end{cases}$ 在 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $(1,0,3)$。

4. $z=z(x,y)$ 由方程 $z=e^{2x-3z}+2y$ 所确定，则 $3\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ 2。

5. 交换积分次序 $\int_0^1 dx\int_{x-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy=$ $\int_{-1}^{0}dy\int_0^{y+1}f(x,y)\,dx+\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,dx$。

6. 已知 Σ 为 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$ 在第一卦限的部分，则 $\iint\limits_{\Sigma}(2x+\dfrac{4}{3}y+z)\,dS=$ $4\sqrt{61}$。

7. 设 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $(-\pi,\pi]$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0\\ 1+x^2, & 0<x\le\pi\end{cases}$，$S(x)$ 为 $f(x)$ 的傅立叶级数的和函数，则 $S(2007\pi)=$ $\dfrac{\pi^2}{2}$。

8. 微分方程 $y''=\dfrac{3x^2y'}{1+x^3}$ 的通解为 $y=C_1(x+\dfrac{x^4}{4})+C_2$。

二、计算题（每小题 6 分，共 36 分）

1. 一平面通过原点和点 $M(0,1,-1)$，且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，求此平面的方程。

法向量 $\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & -1\\ 4 & -1 & 2\end{vmatrix}=(1,-4,-4)$

$\therefore$ 平面方程为 $x-4y-4z=0$

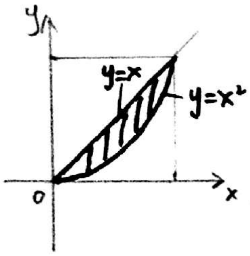
2. 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$z=f\,(2xy,\dfrac{x}{y})$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot 2y+f_2'\cdot\frac{1}{y}=2yf_1'+\frac{1}{y}f_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2f_1'+2y\left[f_{11}''\cdot 2x+f_{12}''\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}\left[f_{21}''\cdot 2x+f_{22}''\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]$$

$$=2f_1'-\frac{1}{y^2}f_2'+4xyf_{11}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''$$

3. 将 $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}dy$ 化为极坐标形式，并计算积分值。



$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}(r^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot r\,dr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{d\cos\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1}{\cos\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\sqrt{2}-1$$

4. $\iiint\limits_{\Omega}xyz\,dxdydz$，其中 Ω：$x^2+y^2+z^2\le a^2\ (a>0)$ 在第一卦限的部分。

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a}r\sin\varphi\cos\theta\cdot r\sin\varphi\sin\theta\cdot r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,dr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\cos\varphi\,d\varphi\int_0^{a}r^5\,dr$$

$$=\frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{4}\sin^4\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{6}r^6\Big|_0^{a}$$

$$=\frac{a^6}{48}$$

5. 判定级数$\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\cdots$是否收敛，如果收敛，请指明绝对收敛还是条件收敛。

1) 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(1+n)}$，$\because \left\{\frac{1}{\ln(1+n)}\right\}\downarrow$ 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(1+n)}=0$

$\therefore$ 由Leibniz判别法，级数收敛。

2) $\because \frac{1}{\ln(1+n)}>\frac{1}{n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散 $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(1+n)}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(1+n)}$ 发散.

$\therefore$ 条件收敛.

6. 设$\varphi(x)$具一阶连续导数，$\varphi(0)=0$，$\int_c xy^2dx+y\varphi(x)\,dy$与路径无关，求微分方程

$xy^2dx+y\varphi(x)\,dy=0$的通解。

由题: $\begin{cases}2xy=y\varphi'(x)\\ \varphi(0)=0\end{cases}$，$\therefore \varphi(x)=x^2$

又 $xy^2dx+y\varphi(x)dy=xy^2dx+yx^2dy=d\frac{x^2y^2}{2}$

$\therefore$ 通解为 $x^2y^2=C$.

三、在锥面$z^2=x^2+y^2$上找一点，使它到$(1,\sqrt{2},3\sqrt{3})$的距离最短，并求最短距离。(10分)

设所求点为(x,y,z)，它到$(1,\sqrt{2},3\sqrt{3})$距离为

$d=\sqrt{(x-1)^2+(y-\sqrt{2})^2+(z-3\sqrt{3})^2}$

令 $L(x,y,z,\lambda)=(x-1)^2+(y-\sqrt{2})^2+(z-3\sqrt{3})^2+\lambda(x^2+y^2-z^2)$

由 $\begin{cases}L_x=2(x-1)+2\lambda x=0\\ L_y=2(y-\sqrt{2})+2\lambda y=0\\ L_z=2(z-3\sqrt{3})-2\lambda z=0\\ L_\lambda=x^2+y^2-z^2=0\end{cases}$ 解得驻点 $(2,2\sqrt{2},2\sqrt{3})$ 及 $(-1,-\sqrt{2},\sqrt{3})$

由 $d(2,2\sqrt{2},2\sqrt{3})=\sqrt{6}$，$d(-1,-\sqrt{2},\sqrt{3})=\sqrt{24}$ 可知，

所求点为 $(2,2\sqrt{2},2\sqrt{3})$，$d_{min}=\sqrt{6}$.

四、设Σ是上半球面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\ (a>0)$的上侧，计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy$。（10分）

法一：$\vec{v}=(x,y,z)$，$\vec{n}=\frac{1}{a}(x,y,z)$

原式$=\iint\limits_{\Sigma}\vec{v}\cdot\vec{n}\,dS=\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{a}(x^2+y^2+z^2)dS=\iint\limits_{\Sigma}a\,dS=a\iint\limits_{\Sigma}dS$

$=a\cdot 2\pi a^2=2\pi a^3$.

法二：添Σ_1: $z=0\ (x^2+y^2\le a^2)$下侧，

原式$=\iint\limits_{\Sigma\cup\Sigma_1} xdydz+ydzdx+zdxdy-\iint\limits_{\Sigma_1} xdydz+ydzdx+zdxdy$

$=\iiint\limits_{\Omega}3\,dxdydz-0=3\times\frac{4}{3}\pi a^3\cdot\frac{1}{2}=2\pi a^3$.

五、求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$的收敛域及和函数，并由此计算数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n3^n}$的和。（10分）

1) $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right|=1$，$R=1$

$x=1$时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，$x=-1$时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$收敛（Leibniz判别法）

$\therefore$收敛域$[-1,1)$

2) 设$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，$-1\le x<1$.

$S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$，$-1<x<1$，$S(x)=S(0)+\int_0^x S'(t)dt=0+\int_0^x\frac{dt}{1-t}$

$=-\ln(1-x)$，$-1<x<1$. 又$\because S(x)$在$[-1,1)$上连续，$\therefore S(x)=-\ln(1-x)$，$-1\le x<1$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n3^n}=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{3})^n}{n}=-S(-\frac{1}{3})=\ln\frac{4}{3}$.

六、求微分方程$y''-5y'+6y=xe^{2x}$的通解。（10分）

$r^2-5r+6=0\Rightarrow r_1=2,\ r_2=3$.

设方程有特解$y_0=x(ax+b)e^{2x}=(ax^2+bx)e^{2x}$

$y_0'=(2ax^2+2ax+2bx+b)e^{2x}$，$y_0''=(4ax^2+8ax+4bx+2a+4b)e^{2x}$

代入方程可得：$-2ax+2a-b=x$，$\therefore a=-\frac{1}{2}$，$b=-1$.

$\therefore y_0=(-\frac{x^2}{2}-x)e^{2x}=-\frac{x}{2}(x+2)e^{2x}$.

通解为$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}-\frac{x}{2}(x+2)e^{2x}$.