2009-2010 学年第二学期《高等数学》期末试卷

一、填空题（每小题 4 分，共 32 分）

1. 设$\vec{a}=\left(2,-1,2\right)$，向量$\vec{x}$与$\vec{a}$平行，且$\vec{a}\cdot\vec{x}=-18$，则$\vec{x}=$__________________。

2. 曲线$\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=2-x^2 \end{cases}$在$xOy$平面上的投影曲线为__________________________。

3. 设$f(x,y)=\begin{cases} \ln(1-x^2-y^2), & x^2+y^2<\dfrac{1}{2} \\ A, & x^2+y^2\geq\dfrac{1}{2} \end{cases}$，要使$f(x,y)$处处连续，则$A=$_____________。

4. 曲线$x=t^2, y=2t, z=\dfrac{1}{3}t^3$在点$\left(1,2,\dfrac{1}{3}\right)$处的切线方程是___________________________。

5. 二次积分$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$在极坐标系下先对$r$积分的二次积分为____________________。

6. 设Σ：$x^2+y^2+z^2=R^2$，则$\oiint\limits_{\Sigma} z^2 dS=$____________________。

7. 设$f(x)=\begin{cases} x, & 0\leq x<\dfrac{1}{2} \\ 0, & \dfrac{1}{2}\leq x\leq 1 \end{cases}$，已知$S(x)$是$f(x)$的以 2 为周期的正弦级数展开式的和函数，则

   $S\left(\dfrac{7}{4}\right)=$____________。

8. 若某个二阶常系数线性齐次微分方程的通解为$y=C_1 e^x+C_2$，其中C_1,C_2为独立的任意常数，则该方程为______________________________。

二、计算题（每小题 6 分，共 30 分）

1. 设$z=x^2 f(x+y,x-y)$，其中$f(u,v)$有连续二阶偏导数，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

2. 设Ω是由$x^2+y^2\le z$及$1\le z\le 4$所确定的有界闭区域。试计算$I=\iiint\limits_{\Omega} zdv$。

3. 计算曲线积分$\int_L -ydx+xdy$，式中L是由点$A(a,b)$沿直线段到$O(0,0)$再沿直线段至$B(b,a)$（$ab\ne 0$）。

4. 判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n2^n}$是否收敛？若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

5. 求方程$y^2-x=2xyy'$的通解。

三、综合题（满分 38 分）

1. （8 分）设 $f(x)$ 二阶连续可微，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$， 试确定 $f(x)$，使方程 $[\,f(x)+1\,]ydx-[\,f'(x)+x\,]dy=0$ 是全微分方程。

2. （10 分）修建一座形状为长方体的仓库，已知仓库顶每平方米造价为 300 元，墙壁每平方米造价为 200 元，地面每平方米造价为 100 元，其它的固定费为 2 万元，现投资 14 万元，问如何设计方能使仓库的容积最大？

3. （10 分）计算$\oiint\limits_{\Sigma} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$，其中$\Sigma$是由曲面$z=0$，$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$及$x^2+y^2\le b^2$所围的含$Oz$轴的那部分立体的表面外侧，$a$和$b$都是正数且$a>b$。

4. （10 分）求幂级数$1+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{9}x^9+\cdots$的和。