# 河海大学 2016—2017 学年第一学期

# 《高等数学 BI》期末试卷（A）

考试对象：2016 级工科各专业

考试时间：2017 年 1 月 12 日

专业________ 学号________ 姓名________ 成绩________

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 | 成绩 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | | | | |

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 两个无穷小比较的结果是（ D ）。

（A）同阶　（B）高阶　（C）低阶　（D）不确定

2. 函数 $f(x)=x\sin x$（ A ）。

（A）在$(-\infty,+\infty)$内无界　（B）在$(-\infty,+\infty)$内有界

（C）当 $x\to\infty$ 时为无穷大　（D）当 $x\to\infty$ 时极限存在

3. 下列结论中不正确的是（ C ）。

（A）若 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)=0$，则不能确定点 $x=x_0$ 是否为函数的极值点

（B）若 $x=x_0$ 是函数 $f(x)$ 的极值点，则 $f'(x_0)=0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在

（C）函数 $f(x)$ 在区间$(a,b)$内的极大值一定大于极小值

（D）$f'(x_0)=0$ 及 $f'(x_0)$ 不存在的点 $x_0$ 都可能是 $f(x)$ 的极值点

4. 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，则下列说法中正确的是（ D ）。

（A）对 $\forall M>0,\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)|>M$ 成立

（B）对 $\forall M>0,\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，恒有 $f(x)<-M$ 成立

（C）对 $\forall M>0,\exists X>0$，当 $x>X$ 时，恒有 $f(x)>M$ 成立

（D）对 $\forall M>0,\exists X>0$，当 $x>X$ 时，恒有 $f(x)<-M$ 成立

5. 下列广义积分收敛的是（ A ）。

（A）$\int_{-\infty}^{0}e^{x}dx$　（B）$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$　（C）$\int_{-\infty}^{0}e^{-x}dx$　（D）$\int_{-\infty}^{0}\cos x\,dx$

| 得 分 | |
|---|---|

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 已知 $y=\ln(1+3^x)$，则 $dy=$ $\frac{3^x\ln 3}{1+3^x}dx$ 。

2. 曲线 $y=x+\frac{x}{x^2-1}$ 的斜渐近线为 $y=x$ 。

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-(\frac{2}{n})^2}+\cdots+\sqrt{1-(\frac{n}{n})^2}]=$ $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}$

4. 请叙述牛顿一莱布尼茨（Newton-Leibniz）公式的条件和结论 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

5. $\int_{-1}^{1}x^4(1+\frac{\sin x}{1+x^2})dx=$ $\frac{2}{5}$ 。

| 得 分 | |
|---|---|

三、试解下列各题（每小题 6 分，共 30 分）

1. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-x^2-e^{-x^2}}{\sin^4 x}$。

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2x+e^{-x^2}\cdot 2x}{4x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2x(1-e^{-x^2})}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-1}{2x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{2x^2}=-\frac{1}{2}$$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}e^x+1, & x>0\\ ax+b, & x\le 0\end{cases}$，问 $a$，$b$ 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导。

解：由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续可得 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，即 $b=2$.

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导得 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x+1-2}{x}=1=f'_+(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{ax+2-2}{x}=a=f'_-(0)$

所以 $a=1$.

3．计算 $\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$。

解：令 $t=\sqrt{1+\sqrt{x}}$，则 $x=(t^2-1)^2$，$dx=4t(t^2-1)dt$

原式 $=\int 4t^2(t^2-1)dt = 4\int t^4 dt - 4\int t^2 dt = \frac{4}{5}t^5 - \frac{4}{3}t^3 + C$

$= \frac{4}{5}(\sqrt{1+\sqrt{x}})^5 - \frac{4}{3}(\sqrt{1+\sqrt{x}})^3 + C.$

书P41. 4．设 $\begin{cases} x=\int_2^{t^2}\frac{\cos u}{u}du \\ y=\int_{t^3}^{2}\frac{\sin u}{u}du \end{cases}$，求 $\frac{dy}{dx}$。

解：$\frac{dx}{dt} = \frac{\cos t^2}{t^2}\cdot 2t = \frac{2\cos t^2}{t}$

$\frac{dy}{dt} = -\frac{\sin t^3}{t^3}\cdot 3t^2 = -\frac{3\sin t^3}{t}.$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dt}\Big/\frac{dy}{dt} = \frac{-\frac{3\sin t^3}{t}}{\frac{2\cos t^2}{t}} = -\frac{3\sin t^3}{2\cos t^2}$

5．设方程 $y=1+xe^y$ 确定 $y$ 是 $x$ 的函数，求 $y'(0)$，$y''(0)$。

解：$y' = e^y + xe^y\cdot y'$，得 $y' = \frac{e^y}{1-xe^y}$

$y'' = \frac{e^y\cdot y'(1-xe^y) + e^y(e^y + xe^y y')}{(1-xe^y)^2}$

$= \frac{e^y\cdot\frac{e^y}{1-xe^y}\cdot(1-xe^y) + e^y(e^y + xe^y\cdot\frac{e^y}{1-xe^y})}{(1-xe^y)^3}$

$= \frac{e^{2y}(2-xe^y)}{(1-xe^y)^3}$

当 $x=0$ 时，$y=1$，$y'(0)=e$，$y''(0)=2e^2$.

| 得 分 | |
|---|---|

四、(7 分) 设 $f(x)=\begin{cases}\sin 2x, & x\le 0\\ \ln(1+2x), & x>0\end{cases}$，求 $\int f(x)dx$。

解：当 $x\le 0$ 时，$\int f(x)dx=\int \sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}\cos 2x+C_1$，

当 $x>0$ 时，$\int f(x)dx=\int \ln(1+2x)\,dx=x\ln(1+2x)-\int\frac{2x}{1+2x}dx$

$=x\ln(1+2x)-\int(1-\frac{1}{1+2x})dx$

$=x\ln(1+2x)-x+\frac{1}{2}\ln(1+2x)+C_2$.

由原函数可导知原函数连续，因此原函数在 $x=0$ 处连续，

则有 $-\frac{1}{2}+C_1=C_2$. 故 $\int f(x)dx=\begin{cases}-\frac{1}{2}\cos 2x+C, & x\le 0\\ x\ln(1+2x)-x+\frac{1}{2}\ln(1+2x)-\frac{1}{2}+C, & x>0\end{cases}$

| 得 分 | |
|---|---|

五、(6 分) 计算 $\int_0^1\sqrt{(1-x^2)^3}\,dx$。

解：令 $x=\sin\theta$，$\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$. $dx=d\sin\theta=\cos\theta\,d\theta$

原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\cdot\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)\,d\theta$

$=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)d\theta=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{16}\pi$.

| 得 分 | |
|---|---|

六、（7 分）讨论方程 $2x^3-9x^2+12x-a=0$ 的实根情况。

解：令 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-a$.

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)=0$，得 $x_1=1, x_2=2$.

| $x$ | $(-\infty,1)$ | 1 | $(1,2)$ | 2 | $(2,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | $5-a$ | ↘ | $4-a$ | ↗ |

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty<0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty>0$

①. 当 $f(1)>0, f(2)>0$ 时，即 $a<4$，方程有1个实根.

②. 当 $f(1)>0, f(2)<0$ 时，即 $4<a<5$，方程有3个实根.

③. 当 $f(1)<0, f(2)<0$ 时，即 $a>5$，方程有1个实根.

| 得 分 | |
|---|---|

七、（7 分）设曲线方程为 $y=4x-x^2$，

（1）问曲线上哪一点处切线平行 $x$ 轴，写出该切线方程。

（2）求曲线与该切线及 $y$ 轴所围成的平面面积。

（3）该平面图形绕 $y$ 轴旋转一周所得旋转体体积。

解：(1) 在点 $(2,4)$ 处，切线为 $y=4$.

(2). $S=\int_0^2[4-(4x-x^2)]\,dx=\frac{8}{3}$

(3). $V=\pi\int_0^4 x^2\,dy=\pi\int_0^2 x^2(4-2x)\,dx=\frac{8}{3}\pi$

| 得 分 | |
|---|---|

八、（7 分）已知 $f(x)$ 连续，$\int_0^x t f(x-t)\mathrm{d}t = 1-\cos x$，求 $\int_0^{\pi/4} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x$ 的值。

解：令 $u=x-t$，则 $t=x-u$，$dt=-du$. $t=0$ $u=x$；$t=x$ $u=0$

原式 $= \int_0^x (x-u) f(u)\,du = x\int_0^x f(u)\,du - \int_0^x u f(u)\,du = 1-\cos x$

两边同时对变量 $x$ 求导得 $\int_0^x f(u)\,du = \sin x$.

所以 $f(x)=\cos x$.

因此 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \sin x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\,dx$

$= -\frac{1}{4}\cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}$.

| 得 分 | |
|---|---|

九、（6 分）设 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上具有二阶连续导数，$f(0)=0$，证明至少存在一点 $\eta \in [-2, 2]$，使得 $f''(\eta) = \frac{3}{8}\int_{-2}^{2} f(x)dx$。

证：由 $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2$，$\xi$ 介于 $0$ 与 $x$ 之间. 泰勒

故 $\int_{-2}^{2} f(x)dx = \underline{\int_{-2}^{2} f'(0)x\,dx} + \int_{-2}^{2}\frac{1}{2}f''(\xi)x^2\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x^2 f''(\xi)\,dx$

因为 $f''(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上连续，所以有最小值 $m$ 和最大值 $M$. 最大与最小值

则 $\frac{8}{3}m = \frac{m}{2}\int_{-2}^{2} x^2\,dx \le \int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x^2 f''(\xi)\,dx \le \frac{M}{2}\int_{-2}^{2} x^2\,dx = \frac{8}{3}M$.

即 $\frac{8}{3}m \le \int_{-2}^{2} f(x)\,dx \le \frac{8}{3}M \Rightarrow m \le \frac{3}{8}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx \le M$.

由 $f''(x)$ 连续和介值定理存在一点 $\eta \in [-2,2]$，使得 $f''(\eta) = \frac{3}{8}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$

#.