2016—2017 学年第一学期《高等数学》期中试卷 （2016 级）

年级专业________ 学号________ 姓名________ 成绩________

一、填空题 (6×4 分)

1. $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t^2+2t\sin t}{(1+3t)(1+t)}=$ $\frac{1}{3}$。

2. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\frac{f(x)}{x}}-1}{x^2}=2$，当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 与 ax^b 等价，则 $(a,b)=$ $(4,3)$。

3. 设 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$，则 $f(x)$ 的第一类间断点是 $x=0,\pm1$，$f(x)$ 的第二类间断点是 $x=k,\ k\in Z$ 且 $k\neq 0,\pm1$。

4. 设 $f(x)$ 在 $x=e$ 具有连续的一阶导数，且 $f'(e)=3$，则 $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{d}{dx}\left(f(e^{\cos\sqrt{x}})\right)=$ $-\frac{3e}{2}$。

5. 已知 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\arcsin 2x-\arctan\dfrac{x}{2}$，则 $f'(0)=$ $\frac{5}{2}$。

6. 曲线 $y=x^x+\sqrt{5-x^2}$ 在点 (1,3) 处的切线方程 $y=\frac{1}{2}(x+5)$。

二、计算（6×6 分）

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right]$

令 $x_n=\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}$

则 $\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}\le x_n\le\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+2n}=\frac{1}{2}$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}=\frac{1}{2}$，

∴ 由夹逼准则可得：

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$.

2、$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left[e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}\right]^{\frac{1}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-x}{x^2}}$

$=e^{-\frac{1}{2}}$.

3、已知$f(0)=0, f'(0)=A$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f(x)-2f(x^3)}{x^3}$。

$$原式=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}-2\cdot\frac{f(x^3)-f(0)}{x^3}\right]$$

$$=f'(0)-2f'(0)$$

$$=-f'(0)$$

$$=-A.$$

4、$\begin{cases}x=e^t\sin t\\ y=e^t\cos t\end{cases}$，求$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t\cos t-e^t\sin t}{e^t\sin t+e^t\cos t}$$

$$=\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{-2}{(\sin t+\cos t)^2}}{e^t(\sin t+\cos t)}$$

$$=\frac{-2}{e^t(\sin t+\cos t)^3}.$$

5、设$f(\frac{x}{2})=\sin x$，求$f'(f(x)),[f(f(x))]'$。

令$\frac{x}{2}=t$，$f(t)=\sin 2t$

$\therefore f(x)=\sin 2x$，$f'(x)=2\cos 2x$

从而

$$f'(f(x))=2\cos(2\sin 2x)$$

$$(f(f(x)))'=\left(\sin(2\sin 2x)\right)'$$

$$=\cos(2\sin 2x)\cdot 2\cos 2x\cdot 2$$

$$=4\cos 2x\cos(2\sin 2x).$$

6、$y=x\ln x$，求$y^{(2016)}$。

$y'=\ln x+1$，

$y''=\frac{1}{x}$，$y'''=-\frac{1}{x^2}$，$y^{(4)}=\frac{(-1)\cdot(-2)}{x^3}$，

归纳可得：

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-2}\cdot(n-2)!}{x^{n-1}}$$

$$\therefore y^{(2016)}=\frac{2014!}{x^{2015}}.$$

三、确定常数a,b使函数$f(x)=\begin{cases}e^{2x}+b, x\le 0,\\ \sin ax, x>0,\end{cases}$处处可导，并求$f'(x)$。（8分）

由题，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \Rightarrow 0=1+b \Rightarrow b=-1$.

$f'_-(0)=f'_+(0) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{2x}+b-(1+b)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin ax-(1+b)}{x}$

$\Rightarrow a=2$.

$\therefore a=2, b=-1, f'(0)=2$,

$$f'(x)=\begin{cases}2e^{2x}, & x\le 0\\ 2\cos 2x, & x>0\end{cases}.$$

四、求$y=\dfrac{4x}{x^2+1}$的单调区间、凹凸区间、极值、曲线的拐点（列表）及其渐近线。（12分）

① $y'=\dfrac{4(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$,

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	极小值	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

$\therefore$ 单调减区间：$(-\infty,-1]$，$[1,+\infty)$

单调增区间：$[-1,1]$.

极小值 $y(-1)=-2$，极大值 $y(1)=2$.

② $y''=\dfrac{8x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$,

x	$(-\infty,-\sqrt3)$	$-\sqrt3$	$(-\sqrt3,0)$	0	$(0,\sqrt3)$	$\sqrt3$	$(\sqrt3,+\infty)$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\frown$	$-\sqrt3$	$\smile$	0	$\frown$	$\sqrt3$	$\smile$

$\therefore$ 凹区间：$[-\sqrt3,0]$，$[\sqrt3,+\infty)$

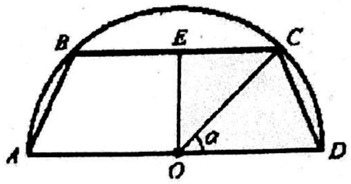
凸区间：$(-\infty,-\sqrt3]$，$[0,\sqrt3]$.

③ 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x}{x^2+1}=0$ $\therefore$ 有水平渐近线 $y=0$

2) y在$(-\infty,+\infty)$内连续，$\therefore$ 无铅直渐近线

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{4x}{x^2+1}}{x}=0$ $\therefore$ 无斜渐近线.

五、在半径为 R 的半圆内作平行于直径 AD 的弦 BC，BC 为何值时梯形 $ABCD$ 的面积最大。（8 分）



设 $BC=2x$.

则面积为 $S(x)=(x+R)\sqrt{R^2-x^2}$ $(0<x<R)$

由 $S'(x)=\dfrac{-(x+R)(2x-R)}{\sqrt{R^2-x^2}}$，列得：

x	$(0,\frac{R}{2})$	$\frac{R}{2}$	$(\frac{R}{2},R)$
S'	$+$	0	$-$
S	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

$\therefore$ $x=\frac{R}{2}$ 为最大值点.

从而 $BC=R$ 时，面积最大.

六、证明题（12 分）：

（1）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f(1)$，$f'(1)=1$，则存在 $c\in(0,1)$ 使 $f''(c)=2$。

法一：由 Taylor 公式.

$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-1)^2$，

$x<\xi<1$，$0\le x<1$.

取 $x=0$，则有，

$f(0)=f(1)+f'(1)\cdot(0-1)+\dfrac{f''(c)}{2!}\cdot(0-1)^2$.

$0<c<1$.

又 $f(0)=f(1)$，$f'(1)=1$

$\therefore$ $f''(c)=2$. 结论成立.

法二：令 $F(x)=f(x)-x^2$. （$f''(c)-2=0\to f''(x)-2 \xrightarrow[2次]{积分} f(x)-x^2$ 构造）

则 $F'(x)=f'(x)-2x$，$F''(x)=f''(x)-2$.

由 Lagrange 中值 th，$F(1)-F(0)=F'(\xi)\cdot(1-0)$，$0<\xi<1$

即有：$[f(1)-1]-[f(0)-0]=-1=F'(\xi)$，$0<\xi<1$.

又 $F'(1)=f'(1)-2=-1=F'(\xi)$.

$\therefore$ 由 Rolle th，$\exists\, c\in(\xi,1)$ s.t. $F''(c)=0$. 从而 $f''(c)=2$，结论成立.

（2）当 $x>1$ 时，$(1+x)\ln x\ge x-1$。

令 $f(x)=(1+x)\ln x-x+1$，$x\ge1$.

$f'(x)=\ln x+\frac{1}{x}>0$，$x>1$

$\therefore$ $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上 $\nearrow$.

从而 $f(x)>f(1)=0$，$x>1$

即 $(1+x)\ln x-x+1>0$，$x>1$

$\therefore$ $(1+x)\ln x>x-1$，$x>1$.