10

2015-2016 学年第二学期《概率统计》试卷（A）

授课班号________年级专业 14材料 12设 学号________姓名________

题型	选择题	填空题	计算题	综合题	总分	审 核
得分						

一、填空题(每小题 5 分，共 25 分)

得分	阅卷人

1. 设 A 表示事件“防空兵击中飞机”，B 表示事件“防空兵击落飞机”，则 A 与 B 的关系是 $A \supset B$ 或 $B \subset A$.

2. 若 ξ 服从二项分布 $\xi \sim B(4,p)$，且知 $P\{\xi \geq 1\} = \frac{65}{81}$，则 $p =$ $\frac{1}{3}$.

3. 设随机变量 X 服从指数分布，$P\{X>10\}=e^{-1}$，则 $E(X)=$ 10，$D(X)=$ 100.

4. 抛一枚硬币三次，ξ 和 η 分别表示出现正面次数和出现反面次数，则 $P\{\xi>\eta\}=$ $\frac{1}{2}$.

5. 已知 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B|A)=\frac{3}{5}$，$P(A\cup B)=\frac{3}{4}$，则 $P(A|B)=$ $\frac{12}{37}$.

得分	阅卷人

二、计算题(每小题 6 分，共 36 分)

1. 甲，乙两个盒子里各装有 10 只螺钉，每个盒子的螺钉中各有一只是次品，其余均为正品，现从甲盒中任取二只螺钉放入乙盒中，再从乙盒中取出两只，问从乙盒中取出的恰好是一只正品，一只次品的概率是多少？

设 A="从乙盒中取出一只正品一只次品"

B_1="从甲盒……两只正品"

B_2="从甲盒……一只正品一只次品"

$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)$ (2')

$= \frac{C_9^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_{11}^1}{C_{12}^2} + \frac{C_9^1}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_{10}^1\cdot C_2^1}{C_{12}^2}$

$= \frac{4}{5}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{5}\times\frac{10}{33} = \frac{32}{165}$ (4')

2. 设随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，求随机变量 $\eta=|\xi|$ 的概率密度．

$F_\eta(y)=P\{\eta\le y\}=P\{|\xi|\le y\},\ -\infty<y<+\infty$ (2')

1) $y\le 0$ 时, $F_\eta(y)=0$, $f_\eta(y)=0$ (1')

2) $y>0$ 时, $F_\eta(y)=P\{-y\le\xi\le y\}=F_\xi(y)-F_\xi(-y)$,

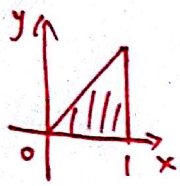
$$f_\eta(y)=F'_\eta(y)=f_\xi(y)-f_\xi(-y)\cdot(-1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(-y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (3')$$

从而 $$f_\eta(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left[e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}+e^{-\frac{(y+\mu)^2}{2\sigma^2}}\right], & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

3. 设二维连续随机向量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}4.8y(2-x), & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\\ 0, & \text{其它}\end{cases}.$$

求边缘分布密度函数。



$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=\begin{cases}\int_0^x 4.8y(2-x)\,dy, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}2.4x^2(2-x), & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$ (3')

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx=\begin{cases}\int_y^1 4.8y(2-x)\,dx, & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}2.4y(3-4y+y^2), & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$ (3')

4. 设随机变量 ξ 与 η 相互独立，均服从 $N(0,1)$ 分布，令

$$u=\xi,\ v=a\xi-\eta\ (0<a<1),$$

求 u 与 v 的相关系数．

$$Cov(U,V)=Cov(\xi,a\xi-\eta)=a\,Cov(\xi,\xi)-Cov(\xi,\eta)$$

$$=aD(\xi)-Cov(\xi,\eta)$$

∵ ξ,η 独立且服从 $N(0,1)$ 分布 ∴ $Cov(\xi,\eta)=0$, $D(\xi)=D(\eta)=1$

从而 $Cov(U,V)=a$ (3')

又 $D(U)=D(\xi)=1$, $D(V)=D(a\xi-\eta)=a^2D(\xi)+D(\eta)=a^2+1$

$$\therefore \rho_{UV}=\frac{Cov(U,V)}{\sqrt{D(U)}\cdot\sqrt{D(V)}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \quad (3')$$

5. 假设 $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 是来自总体 $X \sim N(0, 2^2)$ 的简单随机样本，求系数 a, b, c，使

$$Q=a(X_1+X_2)^2+b(X_3+X_4+X_5)^2+c(X_6+X_7+X_8+X_9)^2$$

服从 χ^2 分布，并求其自由度.

由题，$X_1+X_2 \sim N(0,8)$，$X_3+X_4+X_5 \sim N(0,12)$，$X_6+X_7+X_8+X_9 \sim N(0,16)$

且独立.　(3′)

从而 $\frac{X_1+X_2}{\sqrt{8}}$，$\frac{X_3+X_4+X_5}{\sqrt{12}}$，$\frac{X_6+X_7+X_8+X_9}{\sqrt{16}} \sim N(0,1)$ 且独立.　(1′)

由 χ^2 分布定义：$\left(\frac{X_1+X_2}{\sqrt{8}}\right)^2+\left(\frac{X_3+X_4+X_5}{\sqrt{12}}\right)^2+\left(\frac{X_6+X_7+X_8+X_9}{\sqrt{16}}\right)^2 \sim \chi^2(3)$　(1′)

$\therefore a=\frac{1}{8}$，$b=\frac{1}{12}$，$c=\frac{1}{16}$，自由度为 3.　(1′)

6. 设总体 X 的密度为

$$p(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1 \\ 0, & 其它\end{cases},$$

其中 $\theta>-1$ 是未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的一个容量为 n 的简单随机样本，试分别用矩法及最大似然法估计 θ.

① 矩估计：

$\mu_1=E(X)=\int_0^1 x\cdot(\theta+1)x^{\theta}dx$

$=\frac{\theta+1}{\theta+2} \Rightarrow \theta=\frac{1-2\mu_1}{\mu_1-1}$

$\therefore \hat{\theta}=\frac{1-2\bar{X}}{\bar{X}-1}$.

(3′)

② 最大似然估计：

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为样本值.

$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\left[(\theta+1)x_i^{\theta}\right]$

$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\left[\ln(\theta+1)+\theta\ln x_i\right]=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

$\frac{L'(\theta)}{L(\theta)}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$，令 $L'(\theta)=0$ 得 $\hat{\theta}=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$.

$\therefore \hat{\theta}=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$.

(3′)

三、综合题(满分 39 分)

得分	阅卷人

1. (10 分)　设总体 X 的期望 $E(X)$，方差 $D(X)$ 均存在. x_1, x_2 是 X 的一个样本，试证明统计量

(1) $\varphi_1(x_1,x_2)=\frac{1}{4}x_1+\frac{3}{4}x_2$，　(2) $\varphi_2(x_1,x_2)=\frac{3}{8}x_1+\frac{5}{8}x_2$.

都是 $E(X)$ 的无偏估计量，并说明那个较为有效？

由题，$E(X_1)=E(X_2)=E(X)$，$D(X_1)=D(X_2)=D(X)$

且 X_1, X_2 独立.　(2′)

(1) 从而 $E(\varphi_1(X_1,X_2))=\frac{1}{4}E(X_1)+\frac{3}{4}E(X_2)=E(X)$.

$E(\varphi_2(X_1,X_2))=\frac{3}{8}E(X_1)+\frac{5}{8}E(X_2)=E(X)$.

$\varphi_1(X_1,X_2)$ 与 $\varphi_2(X_1,X_2)$ 为 $E(X)$ 无偏估计量.　(4′)

(2) $D(\varphi_1(X_1,X_2))=\left(\frac{1}{4}\right)^2D(X_1)+\left(\frac{3}{4}\right)^2D(X_2)=\frac{5}{8}D(X)$

$D(\varphi_2(X_1,X_2))=\left(\frac{3}{8}\right)^2D(X_1)+\left(\frac{5}{8}\right)^2D(X_2)=\frac{17}{32}D(X)<D(\varphi_1(X_1,X_2))$.　(4′)

$\therefore \varphi_2(X_1,X_2)$ 较有效.

2. (9 分) 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots$ 相互独立，且都服从参数为 $\lambda=0.1$ 的泊松分布，试计算 $P\left\{110 < \sum_{k=1}^{1000} \xi_k < 130\right\}$. 已知标准正态分布函数 $F_{0,1}(x)$ 的值：

$F_{0,1}(0.3)=0.6179$, $F_{0,1}(3)=0.9987$, $F_{0,1}(1)=0.8413$, $F_{0,1}(0.1)=0.5398$.

$E(\sum_{k=1}^{1000} \xi_k) = 1000 \times 0.1 = 100$, $D(\sum_{k=1}^{1000} \xi_k) = 1000 \times 0.1 = 100$.

由中心极限定理：$(\sum_{k=1}^{1000} \xi_k)^* = \dfrac{\sum_{k=1}^{1000} \xi_k - 100}{10} \sim N(0,1)$ (5')

$P\{110 < \sum_{k=1}^{1000} \xi_k < 130\} = P\{1 < (\sum_{k=1}^{1000} \xi_k)^* < 3\}$ (2')

$\approx \Phi(3) - \Phi(1) = 0.9987 - 0.8413 = 0.1574$. (2')

3. (10 分) 设随机变量 $X \sim N(\mu, 2.8^2)$，现有 X 的10个观察值 $x_1, \cdots, x_{10}$，已知 $\bar{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = 1500$. 求：

(1) μ 的置信度为0.95的置信区间. ($Z_{0.025}=1.96$)

(2) 要想使 0.95 的置信区间长度小于 1，观察值个数 n 最少应取多少？

(1) $(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}) \Rightarrow (1500 \pm \frac{2.8}{\sqrt{10}} \times 1.96)$

(3') $\Rightarrow (1498.26, 1501.74)$ (2')

(2) $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} < 1 \Rightarrow \frac{2\times 2.8}{\sqrt{n}} \times 1.96 < 1 \Rightarrow n > 120.47$

(3')

$\therefore n_{min} = 121$. (2')

4. (10 分) 某工厂生产的金属丝，质量较为稳定，折断力方差 $\sigma_0^2 = 64$，今从一批产品中抽出10根作折断力试验，结果(单位：kg)为：

570，578，572，570，568，572，570，572，596，583

问可否相信这批金属的折断力方差仍是 64 ($\alpha = 0.05$)，假定该金属丝的折断力 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

(已知 $\chi^2_{0.975}(9)=19.02$, $\chi^2_{0.025}(9)=2.7$).

由题意需检验假设 H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 64$；$H_1$: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ (3')

取检验统计量 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ (1') 拒绝域：$\chi^2 \le \chi^2_{0.975}(9)$ 或 $\chi^2 \ge \chi^2_{0.025}(9)$

即 $\chi^2 \le 2.7$ 或 $\chi^2 \ge 19.02$. (1')

本题：$\bar{x} = \frac{1}{10}(570 + \cdots + 583) = 575.1$

$9S^2 = (570-575.1)^2 + \cdots + (583-575.1)^2 = 664.9$

$\chi^2 = \frac{9S^2}{64} \approx 10.39$ 不在拒绝域内 (3') $\therefore$ 接受 H_0，拒绝 H_1. (1')

可以相信方差仍是64. (1')

$\bar{x}$ 取575 also
$9S^2 = 665$
$\chi^2 \approx 10.4$