2017-2018 学年第一学期《高等数学 AI》试卷（A）

授课班号__________年级专业__________学号__________姓名__________

题型	选择题	填空题	计算题	综合题	总分	审　核
得分						

一、填空题(每小题 4 分，共 32 分)

得分	阅卷人

1. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=9$，则 $a=$ __ $\ln 3$ __.

2. 已知当 $x\to0$ 时，$1-\sqrt{1+ax^2}$ 与 x^2 是等价无穷小，则 $a=$ __ -2 __.

3. 曲线 $\begin{cases}x=1+t^2\\ y=t^3\end{cases}$ 在 $t=2$ 处的切线方程为 __ $y=3x-7$ __.

4. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{x+y}-\cos(xy)=0$ 确定，则

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}= \underline{\quad -1 \quad}.$$

5. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{e^{\frac{k}{n}}}{n+ne^{\frac{2k}{n}}}=$ __ $\arctan e-\frac{\pi}{4}$ __.

6. 设 $f'(\ln x)=x$，其中 $1<x<+\infty$，及 $f(0)=0$，则 $f(x)=$
__ $e^x-1 \quad (x\geqslant 0)$ __.

7. 设 $f(x)$ 连续，且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)\,dt$，则 $f(x)$ 的非积分表达式是 $f(x)=$ __ $x-1$ __.

8. 由曲线 $y=\dfrac{x^2}{2}$ 和直线 $x=1$，$x=2$，$y=-1$ 所围成的图形绕直线 $y=-1$ 旋转所得旋转体的定积分表达式是 __ $\int_1^2 \pi\left(\frac{x^2}{2}+1\right)^2dx$ __.

二、计算题(每小题 7 分，共 35 分)

得分	阅卷人

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-a^{\sin x}}{x\sin^2 x}$ $(a>0)$.

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{a^{\sin x}(a^{x-\sin x}-1)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(x-\sin x)\ln a}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{3!}\ln a}{x^3}$$

$$=\frac{\ln a}{6}$$

由 扫描全能王 扫描创建

2. 求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)\ (n\geq 3)$.

$$f^{(n)}(x)=x^2\left(\ln(1+x)\right)^{(n)}+C_n^1\cdot 2x\cdot\left(\ln(1+x)\right)^{(n-1)}+C_n^2\cdot 2\cdot\left(\ln(1+x)\right)^{(n-2)}$$

$$\therefore f^{(n)}(0)=n(n-1)\cdot\left(\ln(1+x)\right)^{(n-2)}\Big|_{x=0}$$

$$=n(n-1)\cdot\frac{(-1)^{n-3}\cdot(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}\Bigg|_{x=0}$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}\cdot n!}{n-2}\qquad(n\geqslant 3)$$

3. $\int\frac{1-x^7}{x(1+x^7)}\,dx$.

$$\text{原式}=\int\frac{(1+x^7)-2x^7}{x(1+x^7)}\,dx$$

$$=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{2x^6}{1+x^7}\,dx$$

$$=\ln|x|-\frac{2}{7}\ln|1+x^7|+C$$

4. 计算不定积分 $\int\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}\,dx$.

令 $\sqrt{x+1}=t$， $x=t^2-1$

$$\text{原式}=\int\frac{\ln t^2}{t}\cdot 2t\,dt$$

$$=4\int\ln t\,dt=4t\ln t-4\int t\,d\ln t$$

$$=4t\ln t-4t+C$$

$$=4\sqrt{x+1}\ln\sqrt{x+1}-4\sqrt{x+1}+C$$

$$=2\sqrt{x+1}\ln(x+1)-4\sqrt{x+1}+C$$

由 扫描全能王 扫描创建

5. 求 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}(x^2-t)f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(t)$ 为已知的连续函数．

原式 $= \left(x^2\int_0^{x^2} f(t)\,dt - \int_0^{x^2} t f(t)\,dt \right)'$

$= 2x\int_0^{x^2} f(t)\,dt + x^2\cdot f(x^2)\cdot 2x - x^2 f(x^2)\cdot 2x$

$= 2x\int_0^{x^2} f(t)\,dt$

三、综合题(满分 33 分)

得分	阅卷人

1. (11 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数，

$f(a)=f(b)=0$，又 $F(x)=(x-a)^2f(x)$，

证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $F''(\xi)=0$．

由题，$F(a)=F(b)=0 \Rightarrow \exists c\in(a,b)$，

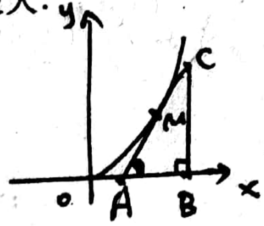
s.t. $F'(c)=0$．

又 $F'(x)=2(x-a)f(x)+(x-a)^2f'(x) \Rightarrow F'(a)=0$

$\therefore \exists \xi\in(a,c)\subset(a,b)$，s.t. $F''(\xi)=0$．

由 扫描全能王 扫描创建

2. (11 分)　试在曲线段 $y=x^2(0<x<8)$ 上求一点 M 的坐标，使得由曲线在 M 点切线与直线 $x=8$, $y=0$ 所围成的三角形面积最大.



设 $M(a, a^2)$.

切线：$y=2a(x-a)+a^2$

$S=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC \quad \left(A(\frac{a}{2},0), B(8,0), C(8,16a-a^2)\right)$

$=\frac{1}{2}\cdot(8-\frac{a}{2})\cdot(16a-a^2)$

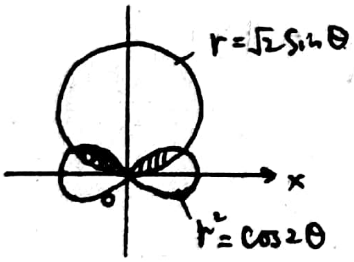
$=\frac{a}{4}(16-a)^2$, $0<a<8$.

令 $S'=\frac{1}{4}(16-a)(16-3a)=0$

得唯一驻点 $a=\frac{16}{3}$

$\therefore M\left(\frac{16}{3}, \frac{256}{9}\right)$.

3. (11 分)　求由不等式 $r\le\sqrt{2}\sin\theta$ 及 $r^2\le\cos 2\theta$ 确定的公共部分的面积.



第一象限交点处 $\theta=\frac{\pi}{6}$.

$A=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}(\sqrt{2}\sin\theta)^2 d\theta+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\cos2\theta\, d\theta\right]$

$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos2\theta)d\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\sin2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}$

$=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由 扫描全能王 扫描创建