河海大学常州校区 2001-2002 学年数学竞赛

一、计算题（6×5 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{x^2}^{x}\frac{\sin xt}{t}dt}{x^2}$；

令 $xt=u$，$\int_{x^2}^{x}\frac{\sin xt}{t}dt=\int_{x^3}^{x^2}\frac{\sin u}{\frac{u}{x}}\cdot\frac{1}{x}du=\int_{x^3}^{x^2}\frac{\sin u}{u}du$

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot 2x-\frac{\sin x^3}{x^3}\cdot 3x^2}{2x}=1$

2. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$；

令 $y=(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$

$\lim\limits_{x\to 1}\ln y=\lim\limits_{x\to 1}\tan\frac{\pi x}{2}\ln(2-x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2-x)}{\cot\frac{\pi x}{2}}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{-1}{2-x}}{-\csc^2\frac{\pi x}{2}\cdot\frac{\pi}{2}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin^2\frac{\pi x}{2}}{(2-x)\cdot\frac{\pi}{2}}=\dfrac{2}{\pi}$

$\therefore$ 原式 $=e^{\frac{2}{\pi}}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1^2}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$；

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n^2}{n^2+1^2}+\frac{n^2}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^2+n^2}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}$

$=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$

$=[\arctan x]_0^1$

$=\frac{\pi}{4}$

4. $\int \frac{dx}{(1+\sin x)\cos x}$;

$$原式 = \int \frac{\cos x\, dx}{(1+\sin x)\cos^2 x} \xlongequal{令\sin x = t} \int \frac{dt}{(1+t)(1-t^2)}$$

$$= \int \left[\frac{\frac{1}{4}}{1-t} + \frac{\frac{1}{4}}{1+t} + \frac{\frac{1}{2}}{(1+t)^2} \right] dt$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| - \frac{1}{2(1+t)} + C$$

$$= \frac{1}{4} \ln \frac{1+\sin x}{1-\sin x} - \frac{1}{2(1+\sin x)} + C$$

5. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}} dx$;

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}} dx \xlongequal{令 -x = t} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 t}{1+e^{t}} dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{x}} dx$$

$$\therefore 2I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}} + \frac{\cos^2 x}{1+e^{x}} \right) dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\, dx$$

$$从而\ I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$

6. $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x \geq 0 \\ 2^x, & x < 0 \end{cases}$，求 $\int_0^2 f(x-1)\, dx$。

令 $x-1=t$

$$原式 = \int_{-1}^{1} f(t)\, dt = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{0} 2^x dx + \int_0^1 (1+x)\, dx$$

$$= \left. \frac{2^x}{\ln 2} \right|_{-1}^{0} + \left. \frac{1}{2}(1+x)^2 \right|_0^1$$

$$= \frac{1}{2\ln 2} + \frac{3}{2}$$

二、证明下列各题（5×6 分）

1. $\frac{2}{2x+1}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)(x>0)$。

设 $f(x)=\frac{2}{2x+1}-\ln(1+\frac{1}{x})$，$x>0$

$f'(x)=\frac{1}{(2x+1)^2(x^2+x)}>0 \Rightarrow f(x)\nearrow$，$x>0$

又 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$　∴ $f(x)<0$，$x>0$，从而结论成立.

2. $\sin 1=\cos\xi$。

$\sin 1=\sin 1-\sin 0=\cos\xi\cdot(1-0)=\cos\xi$，$\xi\in(0,1)$

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a\le x_1<x_2<\cdots<x_n\le b$，则存在 $\xi\in[x_1,x_n]$，使 $f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$。

记 $m=\min\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)\}$

$M=\max\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)\}$

易知 $m\le\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\le M$.

由介值 Th，$\exists\,\xi\in[x_1,x_n]$ s.t. $f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

4. 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)>g(a)$，$f(b)<g(b)$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=g(\xi)$。

设 $\varphi(x)=f(x)-g(x)$

则 $\varphi(a)\cdot\varphi(b)<0$

由零点 Th，$\exists\,\xi$ s.t. $\varphi(\xi)=0$，即 $f(\xi)=g(\xi)$.

5. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且在 (a,b) 内 $f'(x)<0$，则 $F(x)=\dfrac{\int_a^x f(t)\,dt}{x-a}$ 在 (a,b) 内是单调递减函数。

$$F'(x) = \frac{f(x)\cdot(x-a)-\int_a^x f(t)\,dt}{(x-a)^2} = \frac{\int_a^x [f(x)-f(t)]\,dt}{(x-a)^2}$$

$\because f'(x)<0 \quad \therefore f(x)\searrow \quad \therefore f(x)-f(t)\le 0$ 且 $f(x)-f(t)\not\equiv 0$

从而 $\int_a^x [f(x)-f(t)]\,dt<0$

$\therefore F'(x)<0$，$F(x)\searrow$.

三、设可导函数 $f(x)$ 对任何 x_1,x_2 恒有 $f(x_1+x_2)=e^{x_2}f(x_1)+e^{x_1}f(x_2)$，且 $f'(0)=2$，求 $f'(x)$ 与 $f(x)$ 的关系式。（10 分）

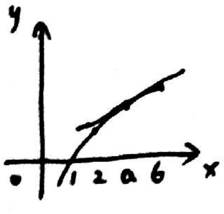
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^h f(x)+e^x f(h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{e^h-1}{h}f(x)+\frac{f(h)-f(0)}{h}\cdot e^x\right]$$ （由已知易得 $f(0)=0$）

$$=f(x)+f'(0)e^x$$

$$=f(x)+2e^x.$$

四、求曲线 $y=\ln x$ 在区间 $(2,6)$ 内的一条切线，使得该切线与 $x=2$，$x=6$ 和曲线 $y=\ln x$ 所围图形的面积最小。（10 分）



设切点 $(a,\ln a)$. 切线: $y-\ln a=\frac{1}{a}(x-a)$，即 $y=\frac{x}{a}-1+\ln a$

$S=\int_2^6 \left(\frac{x}{a}-1+\ln a-\ln x\right)dx$.

只需考虑 $f(a)=\int_2^6\left(\frac{x}{a}+\ln a\right)dx$ 最小值.

$f(a)=\frac{16}{a}+4\ln a$. $f'(a)=-\frac{16}{a^2}+\frac{4}{a}=0\Rightarrow a=4$.

$f''(a)=\frac{32}{a^3}-\frac{4}{a^2}\Rightarrow f''(4)=\frac{1}{4}>0$

$\therefore a=4$ 时 $f(a)$ 取最小值.

所求切线为: $y=\frac{x}{4}-1+\ln 4$ 即 $y=\frac{x}{4}-1+2\ln 2$.

五、已知函数 $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$，求：函数的增减区间及极值；函数图形的凹凸区间及拐点；函数图形的渐近线。（10 分）

① $y'=\dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	$+$	0	$+$	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	非极值	$\nearrow$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

∴ 单调增区间：$(-\infty,1)$，$[3,+\infty)$

〃 减 〃 ：$(1,3]$

极小值 $y(3)=\dfrac{27}{4}$.

② $y''=\dfrac{6x}{(x-1)^4}$

∴ 凹区间：$[0,1)$，$(1,+\infty)$

凸 〃 ：$(-\infty,0]$.

拐点：$(0,0)$.

③ $\lim\limits_{x\to\infty}y=\infty$ ∴ 无水平渐近线.

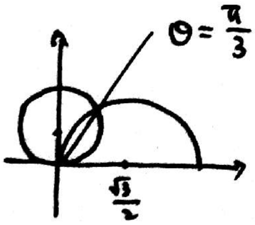
$\lim\limits_{x\to1}y=\infty$ ∴ 铅直渐近线 $x=1$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^3}{(x-1)^2}-x\right]=2$.

∴ 斜渐近线 $y=x+2$.

六、求 $r=\sqrt{3}\cos\theta$，$r=\sin\theta$ 所围公共部分的面积。（10 分）



$$A=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}\sin^2\theta\,d\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos\theta)^2\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos2\theta}{4}\,d\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{3(1+\cos2\theta)}{4}\,d\theta$$

$$=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{8}\sin2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+\frac{3}{4}\times\frac{\pi}{6}+\frac{1}{8}\sin2\theta\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{5\pi}{24}-\frac{\sqrt{3}}{4}.$$