2010-2011 学年第二学期《高等数学》期末试卷（A）

授课班号________ 年级专业 商学院 学号________ 姓名________

题型	选择题	填空题	计算题	综合题	总 分	审 核
得分						

一. 填空题（满分 30 分）

得分	阅卷人

1. 已知点 $A(1,4,-2)$, $B(5,2,0)$, $C(6,4,-3)$，则 ΔABC 的面积等于 $5\sqrt{3}$.

2. 过点 $M_1(3,-2,1)$, $M_2(-1,0,2)$ 的直线方程为 $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{-2}=\frac{z-2}{-1}$

3. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+y+z=e^{-(x^2+y^2+z^2)}$ 所确定，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ $-\frac{1+2x(x+y+z)}{1+2z(x+y+z)}$

4. 曲面 $3x^2+5y^2-2z=2$ 在点 $(1,1,3)$ 处的法线方程为 $\frac{x-1}{6}=\frac{y-1}{10}=\frac{z-3}{-2}$.

5. 二次积分 $\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$ 在极坐标系下先对 r 积分的二次 积分为 $\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,dr$

6. 设 $f(x,y)$ 是连续函数，则二次积分 $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)dx$ 交换积分次序后为 $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}f(x,y)dy$

7. 函数 $\cos x$ 的麦克劳林展开式为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$，$\cos^{(n)}(0)=$ $\cos\frac{n\pi}{2}$.

8. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n}{n}+\frac{3^n}{n^2}\right)x^n$ 的收敛域是 $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$

9. 一曲线过原点，其上任一点 (x,y) 处的切线斜率为 $2x+y$，则曲线 方程是 $y=2(e^x-x-1)$.

10 若某个二阶常系数线性齐次微分方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$，其中 C_1,C_2 为独立的任意常数，则该方程为 $y''-y=0$.

得分	阅卷人

二. 计算题（满分 36 分）

1. 设 $f(x,y)$ 具有连续的一阶偏导数，$f(1,1)=1$，$f_1(1,1)=a$，$f_2(1,1)=b$，又 $\phi(x)=f\{x,f[x,f(x,x)]\}$，求 $\phi(1)$，$\phi'(1)$.

$$\phi(1)=1.$$

$$\phi'(1)=a+ab+ab^2+b^3$$

2. 求函数 $z=y-e^x$ 在 $(1,e)$ 点沿曲线 $y=e^x$ 切线正向（x 增大方向）的方向导数.

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$$

$$=-\frac{e}{\sqrt{1+e^2}}+\frac{e}{\sqrt{1+e^2}}=0.$$

3. 试求由 $z=4-x^2-y^2$ 与 $z=4x+4$ 所围立体的体积.

$$V=\iint_D(4-x^2-y^2-4x-4)\,dxdy$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}d\theta\int_0^{-4\cos\theta}(-r^2-4r\cos\theta)\,r\,dr=8\pi.$$

4. 计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $y=x^2$，$y=0$，$x=1$ 所围成的区域.

$$\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\frac{\sin x}{x}\,dy$$

$$=\sin 1-\cos 1$$

5. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-x}$ 的敛散性，对收敛情况说明是绝对级数还是条件级数.

$x \le 0$ ~~条件~~发散

$0 < x \le 1$ 条件收敛

$x > 1$ 绝对收敛.

6. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + 3 + \frac{2}{x} - \frac{y}{x}$ 的通解.

$$y = \frac{1}{x}\left(C + \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x\right)$$

得分	阅卷人

三. 综合题（满分 34 分）

1. (8 分) 平面 $x+2y-3z=0$ 截椭圆抛物面 $Z=4-x^2-2y^2$ 成上、下两部分，试在上部分曲面上求一点，使它到此平面的距离为最大，并求最大距离.

$$L = \frac{(x+2y-3z)^2}{14} + \lambda(4-x^2-2y^2-z)$$

$$\begin{cases} L_x=0 \\ L_y=0 \\ L_z=0 \\ L_\lambda=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{6} \\ y=-\frac{1}{6} \\ z=\frac{47}{12} \end{cases}$$

$$d_{max} = \frac{7\sqrt{14}}{8}$$

2. (8 分)　求差分方程 $y_{x+2}-2y_{x+1}+4y_x=0$ 的通解

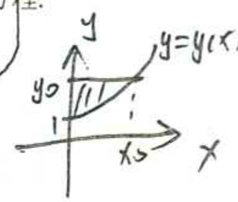
$$y_x = 2^x\left(C_1\cos\frac{\pi}{3}x + C_2\sin\frac{\pi}{3}x\right)$$

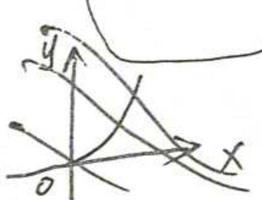
3. (9 分)　试求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n(n-1)}$ 的收敛域及和函数.

收敛域 $[-1,1]$.

$$S(x)=\begin{cases} x+(1-x)\ln(1-x). & x\in[-1,1). \\ 1. & x=1 \end{cases}$$

4. (9 分)　已知上半平面内一曲线 $y=y(x)$ 过点 $(0,1)$，曲线上任一点 $M(x_0,y_0)$ 处切线斜率在数值上等于由曲线，y 轴与直线 $y=y_0$ 所围成的面积，求此曲线方程.





$$y_0' = \int_0^{x_0}[y_0-y(t)]dt = x_0y_0 - \int_0^{x_0} y(t)dt$$

$\therefore y' = xy - \int_0^x y(t)dt$

$\therefore y'' = y + xy' - y = xy'$

令 $y'=p(x)$. $\therefore y''=p'(x)$

$\therefore p' = xp$

$\int\frac{dp}{p} = \int x\,dx$

$\ln|p| = \frac{x^2}{2}+C_1$

$\therefore p = C_1e^{\frac{x^2}{2}} = y'$

$\because y'(0)=0$. $\therefore C_1=0$

$\therefore y'=0$

$\therefore y=C_2$

$\because y(0)=1$

$\therefore y=1$.