第三章：图像变换

中国科学技术大学
电子工程与信息科学系

主讲教师：李厚强 (lihq@ustc.edu.cn)
周文罡 (zhwg@ustc.edu.cn)
李　礼 (lil1@ustc.edu.cn)
胡　洋 (eeyhu@ustc.edu.cn)

图像变换

- 图像变换
  - ✓ 可分离和正交图象变换
  - ✓ 离散傅立叶变换（DFT）
  - ✓ 离散余弦变换（DCT）
  - ✓ 沃尔什/哈达玛变换
  - ✓ Karhunen-Loeve变换（KLT）
  - ✓ 小波变换（DWT）

可分离和正交图象变换

- 1-D变换
  - 正变换

正向变换核

$$T(u)=\sum_{x=0}^{N-1} f(x)h(x,u) \qquad u=0,1,\cdots,N-1$$

  - 反变换

反向变换核

$$f(x)=\sum_{u=0}^{N-1} T(u)k(x,u) \qquad x=0,1,\cdots,N-1$$

可分离和正交图象变换

- 2-D变换

$$T(u,v)=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)h(x,y,u,v) \quad (1)$$

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}T(u,v)k(x,y,u,v) \quad (2)$$

正向变换核

变换核与
原始函数及
变换后函数无关

反向变换核

可分离和正交图象变换

可分离

$$h(x,y,u,v)=h_1(x,u)h_2(y,v)$$

1个2-D变换分成2个1-D变换

$$T(x,v)=\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)h_2(y,v) \qquad T(u,v)=\sum_{x=0}^{N-1} T(x,v)h_1(x,u)$$

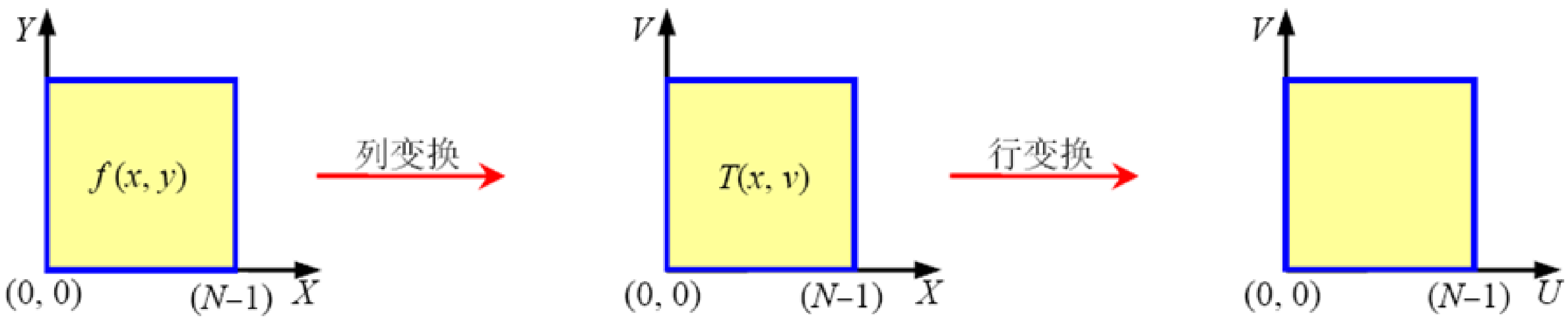
对称

$$h(x,y,u,v)=h_1(x,u)h_1(y,v)$$

(h_1与h_2的函数形式一样)

可分离和正交图象变换

- 具有可分离变换核的2-D变换可以分成两个步骤计算，每个步骤用一个1-D变换



由 2 步 1-D 变换计算 2-D 变换

可分离和正交图象变换

- 可分离且对称

对称变换矩阵

变换结果

$$T = AFA$$

图象矩阵

$$\mathrm{BTB} = \mathrm{BAFAB}$$

反变换矩阵

$$F = BTB \qquad B = A^{-1}$$

$$\hat{F} = BAFAB \qquad B \neq A^{-1}$$

可分离和正交图象变换

□ 正交

考虑变换矩阵：$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$　$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{BTB}$

酉矩阵（*代表共轭）：$A^{-1}=A^{*T}$

如果A为实矩阵，且：$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

则A为正交矩阵，构成正交变换对

离散傅立叶变换（DFT）

二维离散傅立叶变换式

- 对于N×N的二维矩阵（方阵），二维离散傅立叶变换对为：

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\exp\left\{\frac{-2\pi j(ux+vy)}{N}\right\}$$

$$f(x,y)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)\exp\left\{\frac{+2\pi j(ux+vy)}{N}\right\}$$

二维DFT的性质

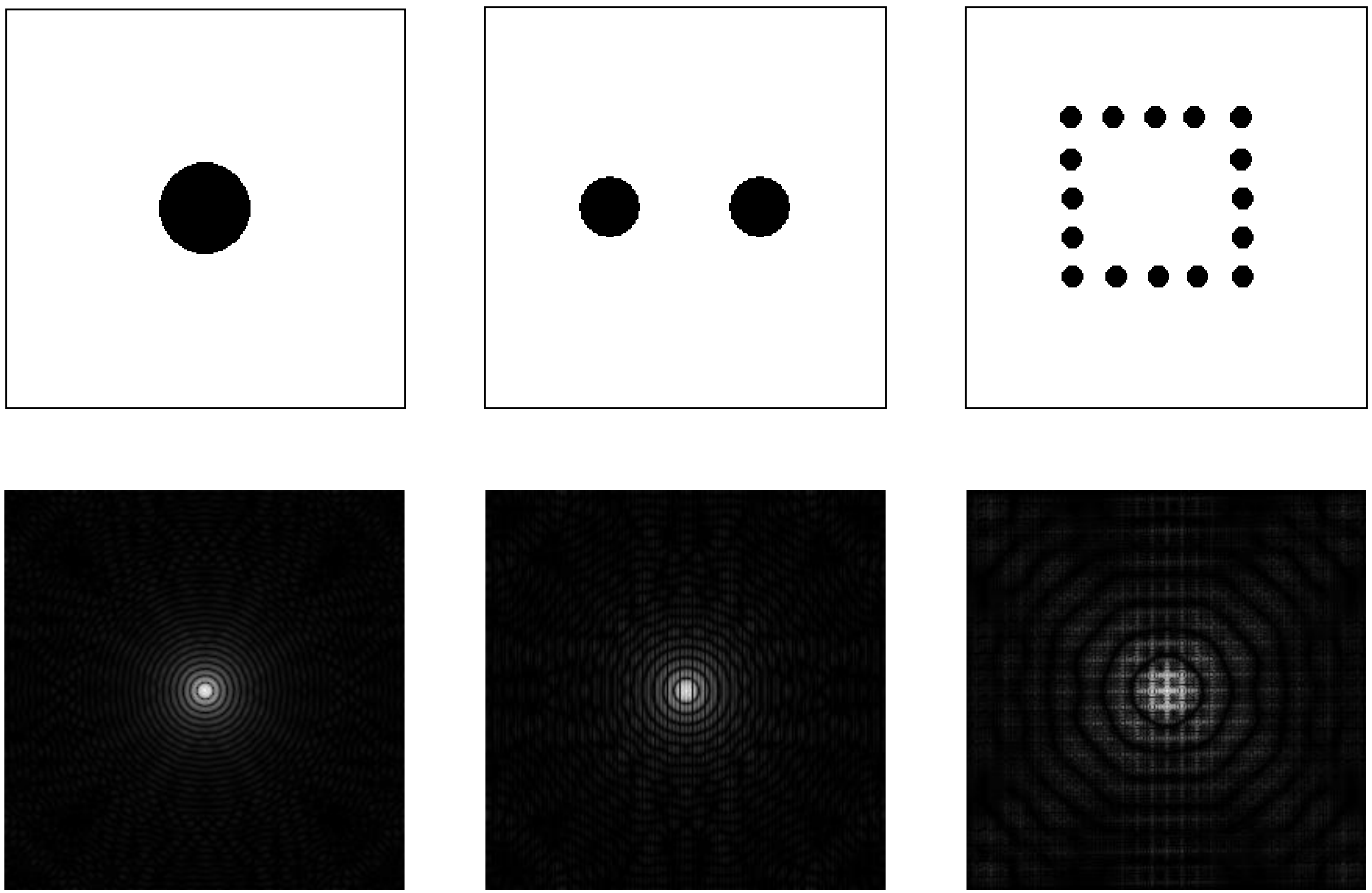
□ 线性	$f_1(x,y)+f_2(x,y)$	$F_1(u,v)+F_2(u,v)$
□ 比例	$f\ (ax,by)$	$\frac{1}{ab}F(\frac{u}{a},\frac{v}{b})$
□ 平移	$f(x-a,y-b)$	$e^{-j2\pi(au+bv)}F(u,v)$
	$e^{j2\pi(cx+dy)}f(x,y)$	$F(u-c,v-d)$
□ 卷积	$f_1(x,y)*f_2(x,y)$	$F_1(u,v)F_2(u,v)$
	$f_1(x,y)f_2(x,y)$	$F_1(u,v)*F_2(u,v)$

□ 旋转

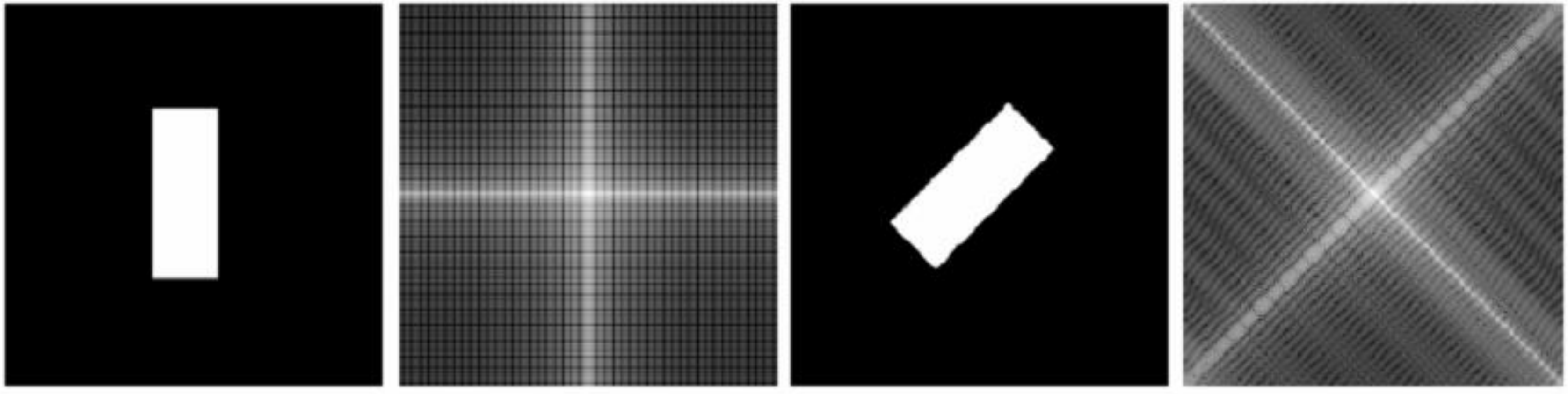
$$f(x\cos\theta+y\sin\theta,-x\sin\theta+ycon\theta)$$

$$F(u\cos\theta+v\sin\theta,-u\sin\theta+vcon\theta)$$

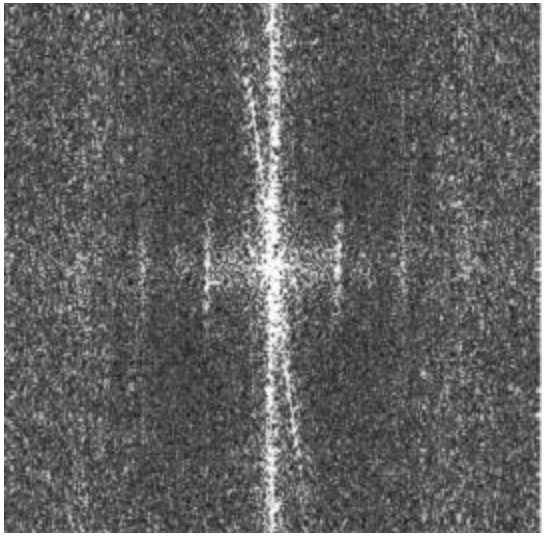
线性叠加及尺度变化



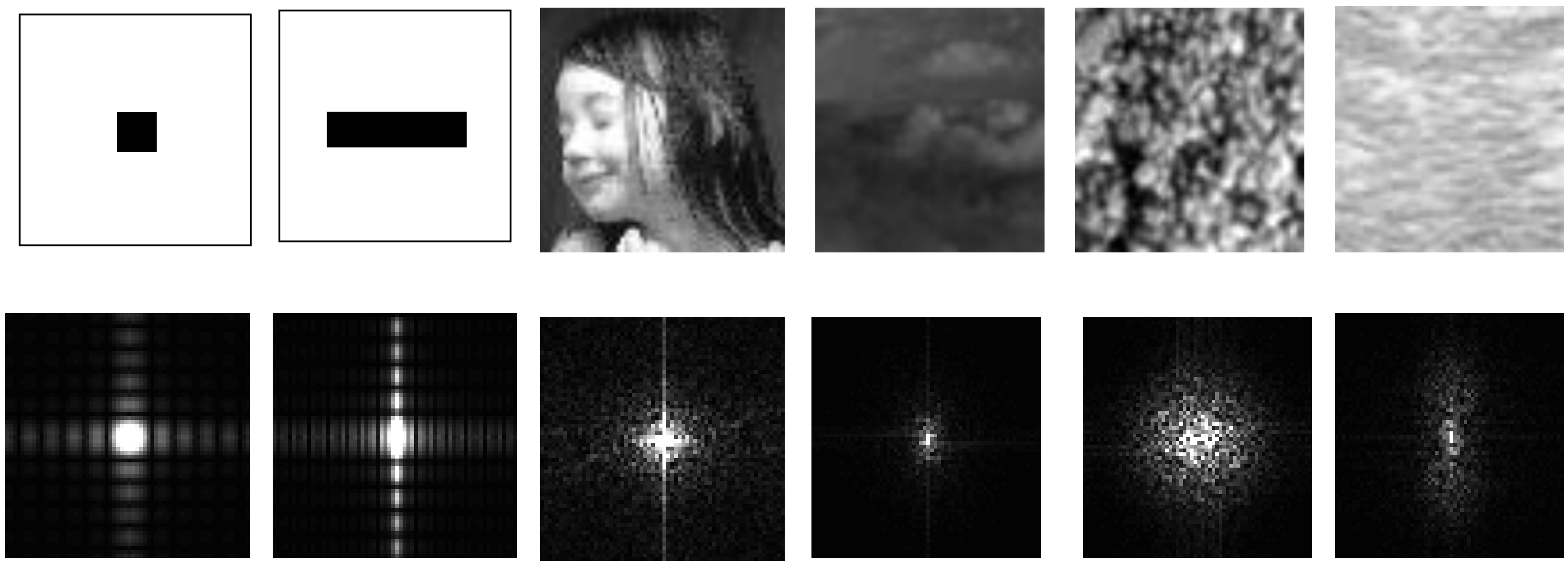
旋转性



实例



典型图象的频谱



离散余弦变换（DCT）

- 一种可分离、正交、对称的变换
- 1-D离散余弦变换

$$C(u)=a(u)\sum_{x=0}^{N-1}f(x)\cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right] \qquad u=0,1,\cdots,N-1$$

$$f(x)=\sum_{u=0}^{N-1}a(u)C(u)\cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right] \qquad x=0,1,\cdots,N-1$$

$$a(u)=\begin{cases}\sqrt{1/N} & \text{当}\quad u=0\\ \sqrt{2/N} & \text{当}\quad u=1,2,\cdots,N-1\end{cases}$$

离散余弦变换（DCT）

- 2-D离散余弦变换

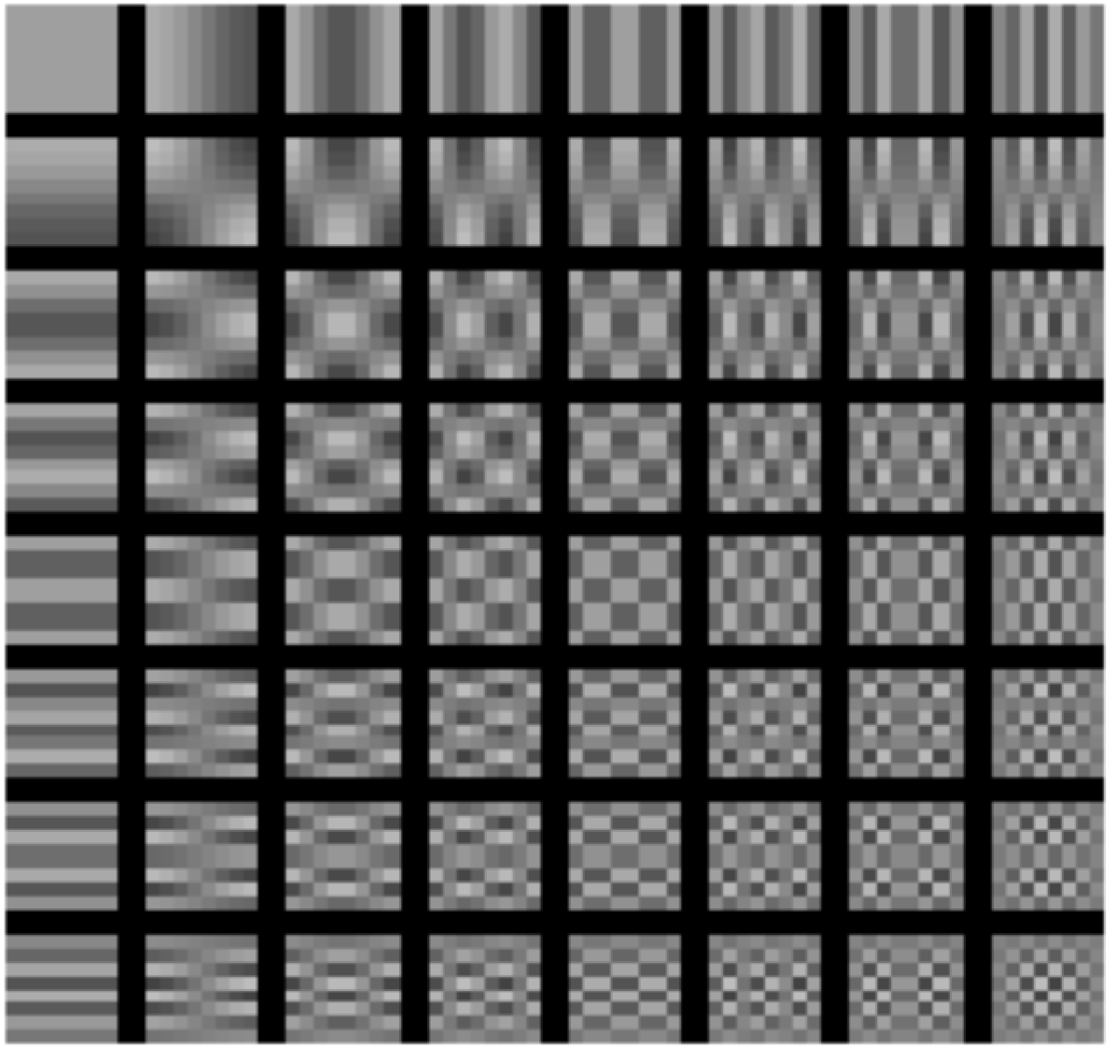
$$C(u,v)=a(u)a(v)\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right]\cos\left[\frac{(2y+1)v\pi}{2N}\right]$$

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}a(u)a(v)C(u,v)\cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right]\cos\left[\frac{(2y+1)v\pi}{2N}\right]$$

讨论可分离性和对称性

$$h(x,y,u,v)=h_1(x,u)h_2(y,v) \quad h(x,y,u,v)=h_1(x,u)h_1(y,v)$$

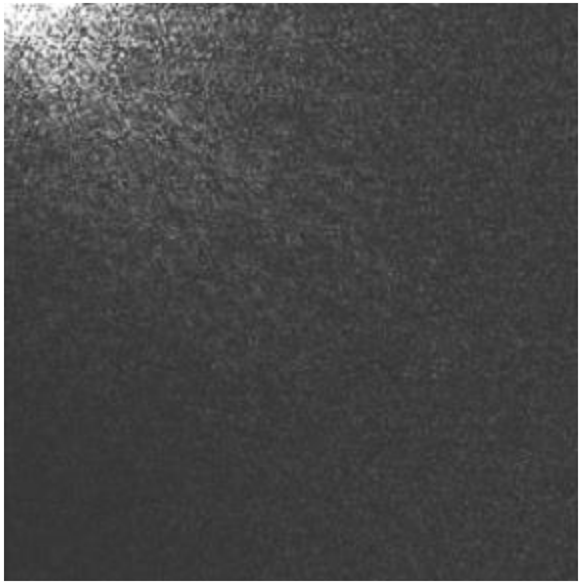
DCT基函数



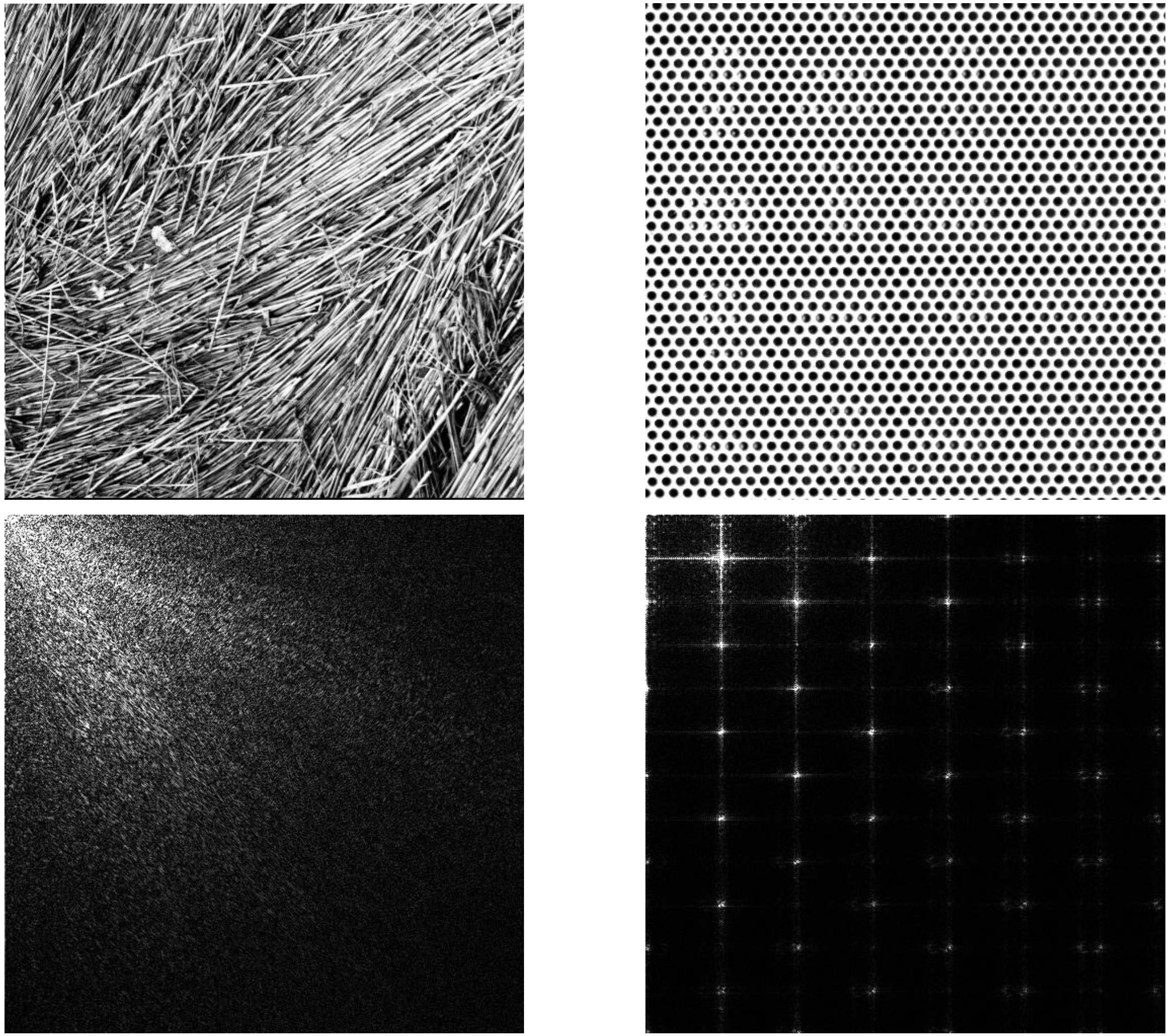
DCT的性质

- 实规范正交基
  - 基向量模长为1
- 与DFT的关系
  - DCT对应实偶函数的DFT
- 有快速算法
  - 比如类似FFT的算法
- 能量压缩
  - 应用于JPEG压缩编码

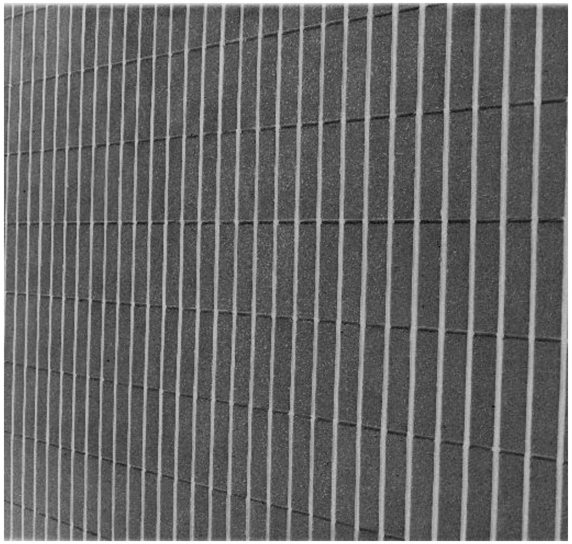
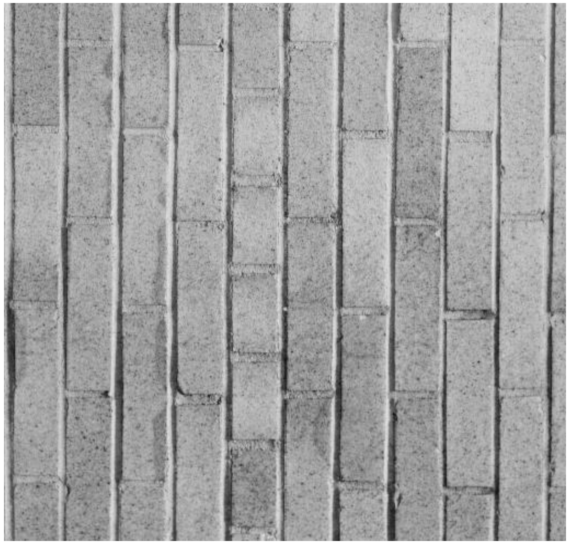
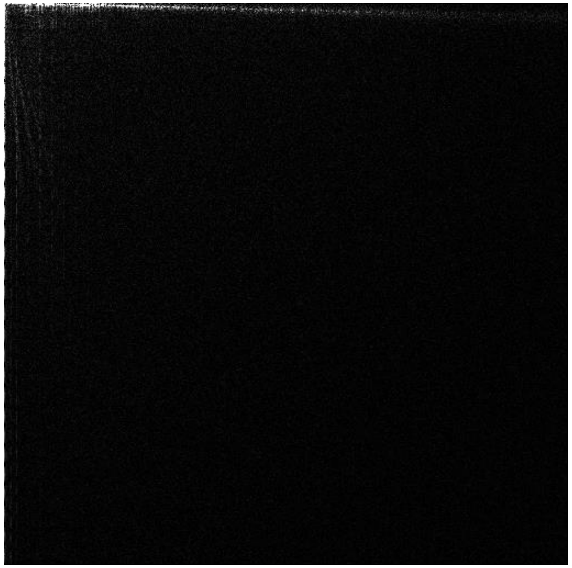
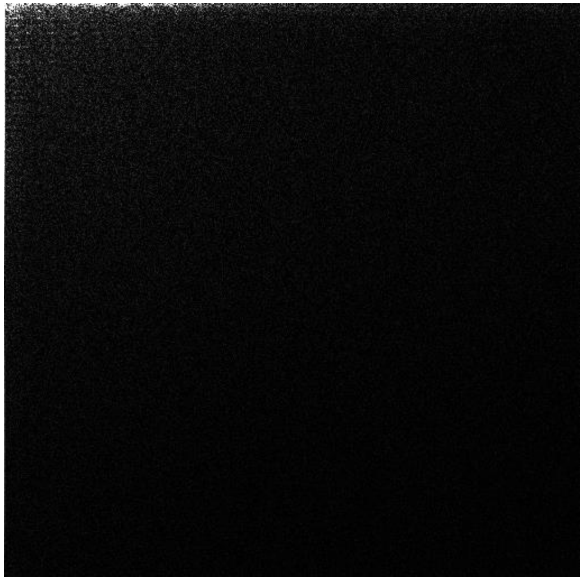
DCT变换结果示例



DCT变换结果示例



DCT变换结果示例

沃尔什/哈达玛变换

- 沃尔什（Walsh）/哈达玛变换,其基函数与DFT和DCT不同，不是正弦形的，而是方波的各种变形
- 在这类变换中，哈达玛（Hadamard）变换在图象处理中应用比较广泛
- 运算简单，只需加减运算
- 缺乏明确物理意义和较直观的解释

哈达玛变换的递推式

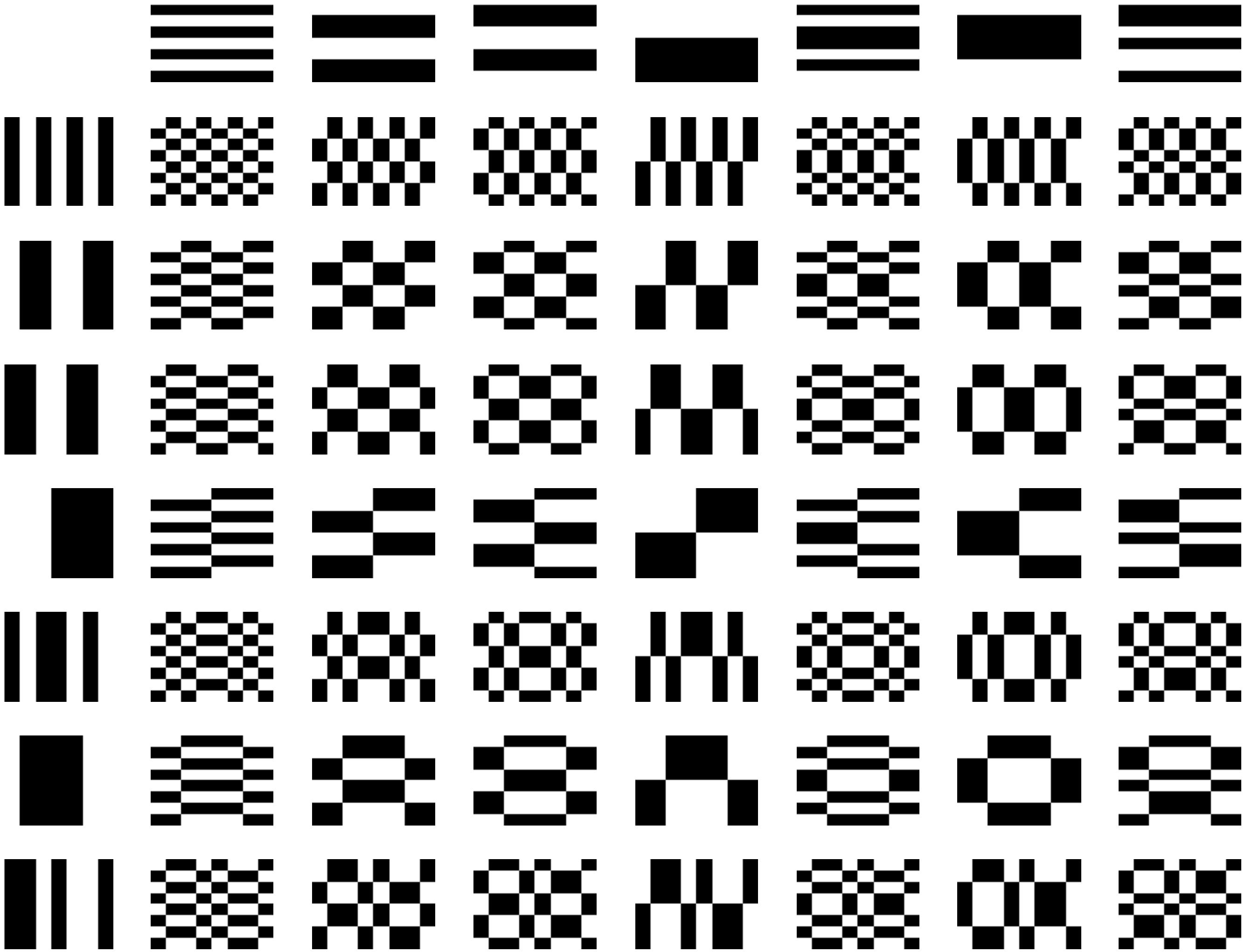
- $2^K \times 2^K$哈达玛递推式：

$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H_{2N} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} H_N & H_N \\ H_N & -H_N \end{bmatrix}$$

沃尔什/哈达玛变换

基图象



Karhunen-Loeve变换（PCA）

Principle Component Analysis

- 对于零均值的 f(x, y)，对其自相关函数R_{ff}，可以找到一组正交变换基ϕ_{mn}，ϕ_{mn}满足积分方程：

$$\iint R_{ff}(x, y, u, v)\phi_{mn}(u, v)dudv = \gamma_{mn}\phi_{mn}(x, y)$$

其中$R_{ff}(x, y, u, v) = \mathrm{cov}(f(x, y), \mathrm{f}(u, v))$

  - 用这样的正交基系列进行变换，可使变换后完全去相关
  - 该变换的变换核要根据原信号的统计性质求出

- KL变换是建立在统计特性基础上的一种变换
  - 一种特征提取方法
  - 最小均方误差意义下的最优正交变换
  - 在消除模式特征之间的相关性、突出差异性方面有最优的效果

协方差矩阵及优化目标

- 我们希望原始数据的新的表达在每个维度上不存在（线性）相关性，因为相关性意味着数据的不同维度间不完全独立，就必然存在重复表示的信息。即：数据的不同维度的协方差为0

我们希望由新的基所得到的数据表达的协方差矩阵中，除对角线上的方差元素外，其余所有的协方差元素全部为0（矩阵对角化）。

协方差矩阵及优化目标

- 设原始数据为M个N维向量，首先将数据每个维度减去各自维度的均值，使每个维度的均值都变为0，记为矩阵X（每一列对应一个样本向量）
- 基变换矩阵记为矩阵P，则基变换后的数据可以记为：

$$Y = PX$$

- 显然，Y每个维度的均值也为0。因此Y的协方差矩阵为：

$$\begin{aligned} D_Y &= \frac{1}{M} Y Y^T \\ &= \frac{1}{M} (PX)(PX)^T \\ &= \frac{1}{M} P X X^T P^T \\ &= P \left(\frac{1}{M} X X^T \right) P^T \\ &= P D_X P^T \end{aligned}$$

目标变换矩阵P：能让原始数据协方差矩阵对角化

协方差矩阵及优化目标

- 我们知道：
  - 协方差矩阵D_X是一个实对称矩阵
  - 实对称矩阵不同特征值对应的特征向量必然正交

- P是协方差矩阵D_X的特征向量单位化后按行排列出的矩阵，其中每一行都是D_X的一个特征向量

- 如果P按照特征值从大到小，将特征向量从上到下排列，则用P的前k行组成的矩阵乘以原始数据矩阵X，就得到了我们需要的降维后的数据矩阵Y

算法步骤

原始数据为M个N维向量：

1. 将原始数据按列组成N行M列的矩阵X；
2. 将X的每一行（每个维度）进行零均值化；
3. 求出协方差矩阵$D_X = \frac{1}{M}XX^T$；
4. 求出D_X的特征值及对应的特征向量；
5. 将特征向量按对应特征值大小从上到下按行排列成矩阵，取前k行组成矩阵P；
6. $Y = PX$即为降维到k维后的数据。

K-L变换一例(1)

图象点序列：

（1，1），（1，2），

（2，1），（2，2），（2，3），

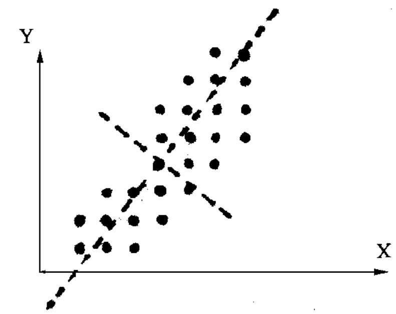
（3，1），（3，2），（3，3),

(4，2), (4，3), (4，4), (4，5),（4，6），

（5，3），（5，4），（5，5），（5，6），（5，7），

（6，4），（6，5），（6，6），（6，7），（6，8），

（7，5），（7，6），（7，7），（7，8）



均值 $\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = E\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.4 \\ 4.3 \end{bmatrix}$

协方差 $\Sigma_X = E\left\{\begin{bmatrix} x-\bar{x} \\ y-\bar{y} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-\bar{x} & y-\bar{y} \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} 3.286 & 3.099 \\ 3.099 & 4.579 \end{bmatrix}$

K-L变换一例(2)

- 在维数小时，由本征多项式为零求协方差矩阵的本征值：

$$\begin{bmatrix} 3.268-\lambda & 3.099 \\ 3.099 & 4.579-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 7.865\lambda + 5.443 = 0$$

$$\lambda_1 = 7.098 \qquad \lambda_2 = 0.768$$

- 再把本征值代入 $\sum_X \vec{\phi}_i = \lambda_i \vec{\phi}_i$ ，求出特征矢量：

$$\vec{\phi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.23 \end{bmatrix} \qquad \vec{\phi}_2 = \begin{bmatrix} -1.23 \\ 1 \end{bmatrix}$$

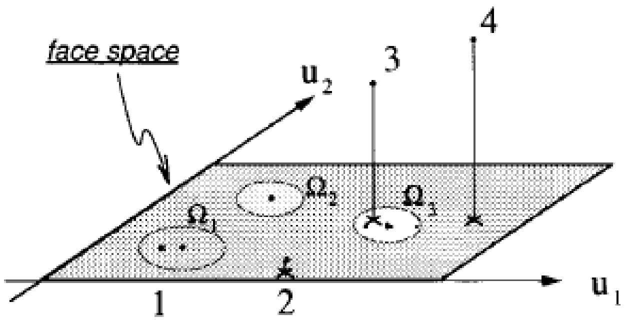
- 把相互垂直的二特征矢量作为新的坐标，新坐标的主轴方向为所变换数据方差最大的方向

K-L变换应用实例 —— 人脸识别

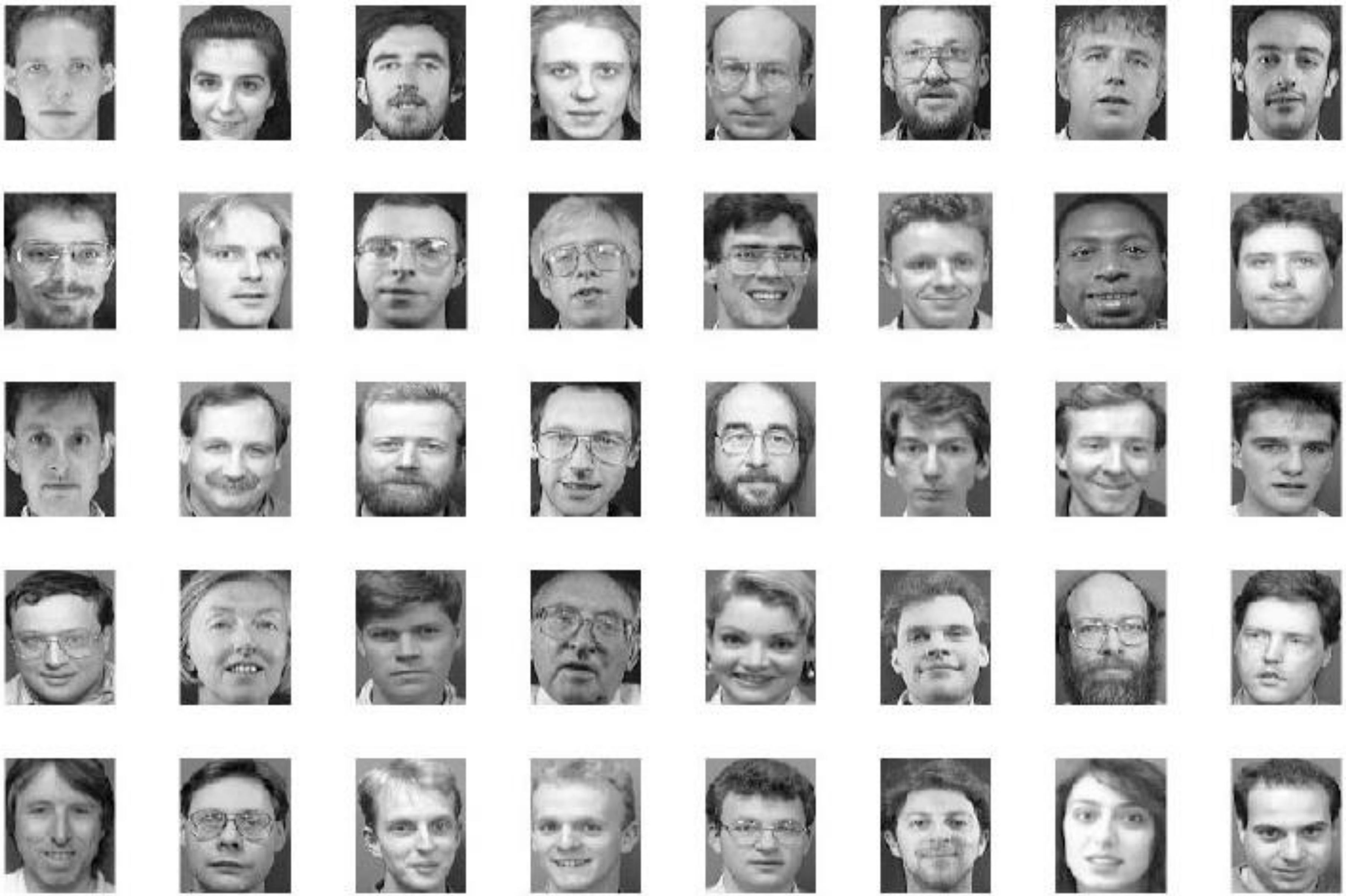
1. 把每一幅人脸列化，视为随机向量*F*的不同实现。
2. 估计*F*协方差矩阵*C*，并计算其特征值特征向量。

   (C是半正定矩阵，维数不大于图像数，对应不同特征值的特征向量正交，特征脸）
3. 选择对应少量最大特征值的特征向量组成特征脸空间
4. 每张脸映射为特征脸空间的点，以其坐标作为特征向量。
5. 采用模式识别方法，进行分类识别。

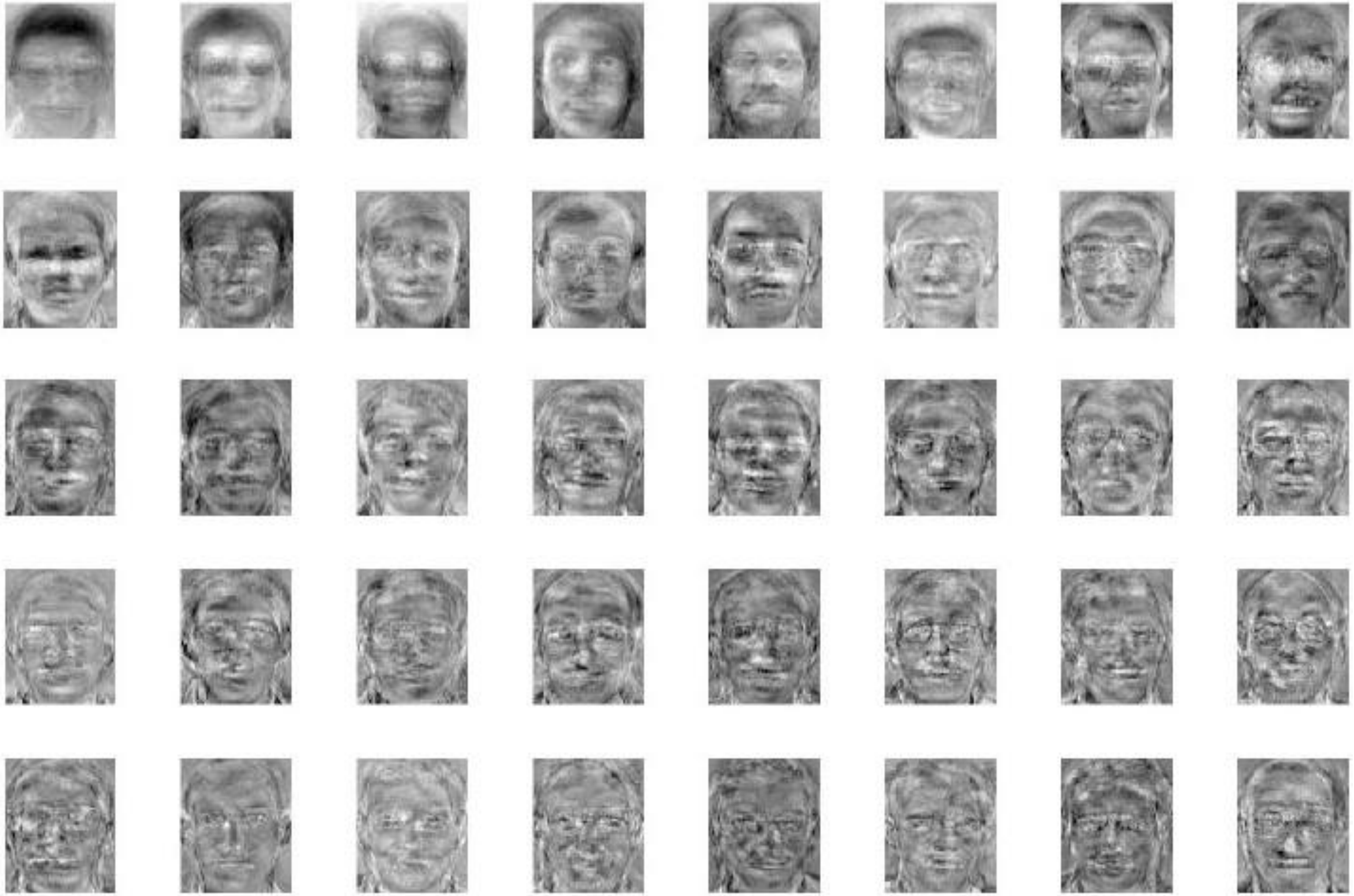
   （如欧式距离)



人脸库



特征脸

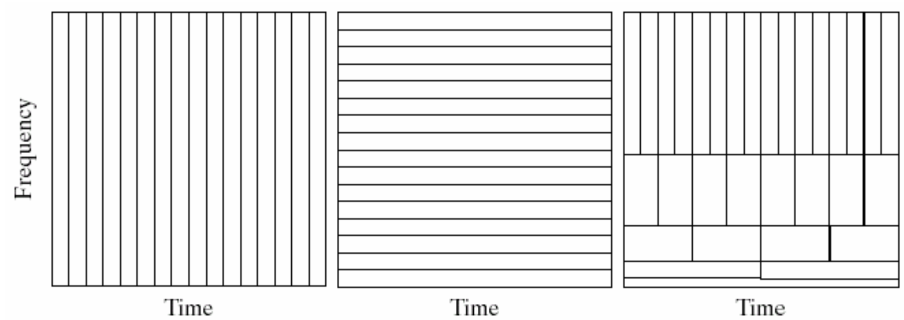


特征脸空间 （top 8）

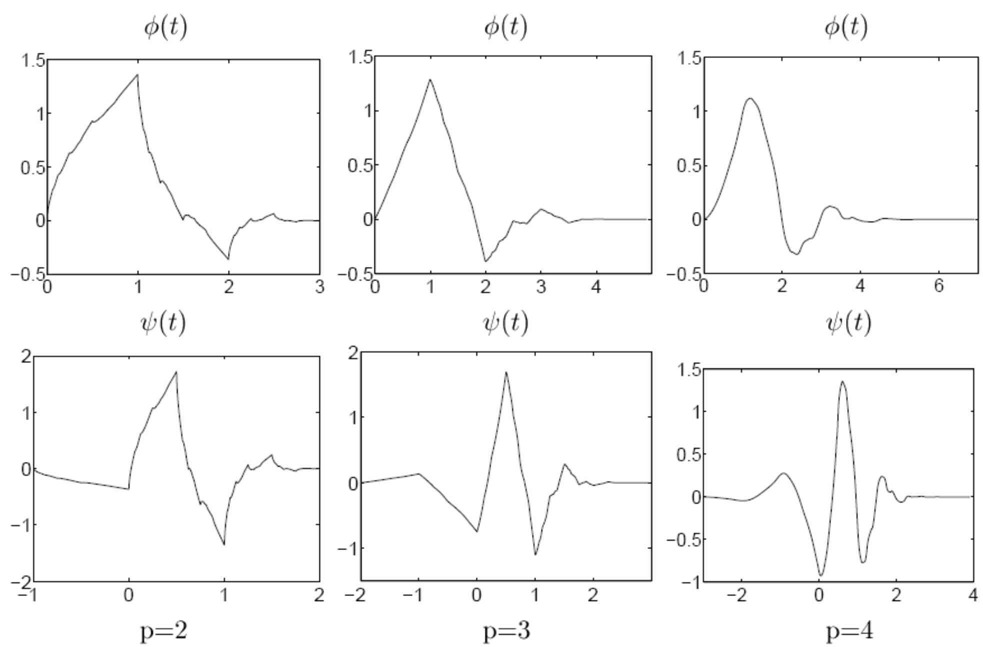
小波变换（DWT）

- 傅立叶变换
  - 变换之后丢掉了时域信息
  - 傅立叶变换在分析瞬态信号时仍有不足
    - ✓ 瞬态信号：持续时间短，有明显的开端和结束的信号
- 时频域分析
  - 小波变换在二维时频空间分析信号
- 变换
  - 理想的基本小波是过程很短的振荡函数
  - 如同傅立叶变换有连续、离散的变换，小波也有连续、离散的变换

1维离散小波变换

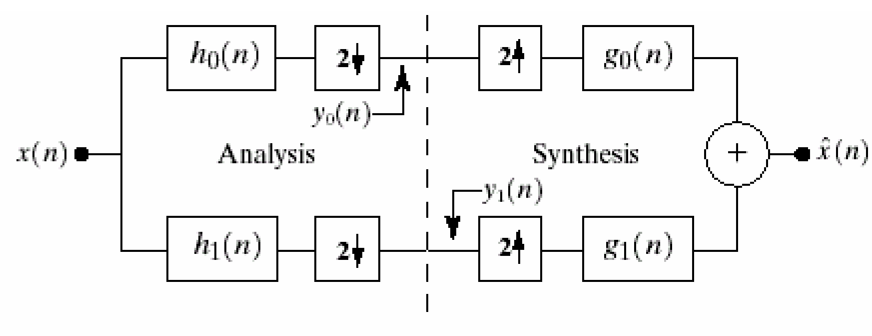


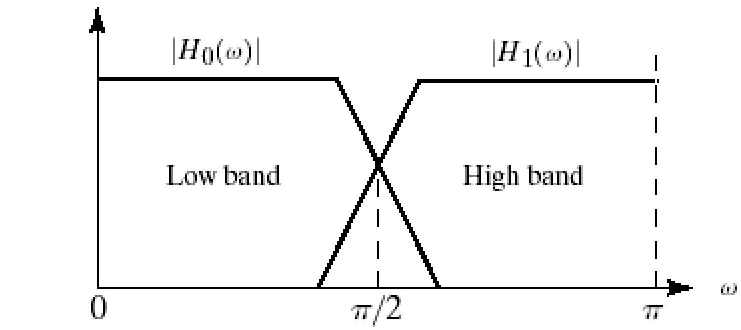
时频铺叠（从左到右：Dirac、Fourier、wavelet）

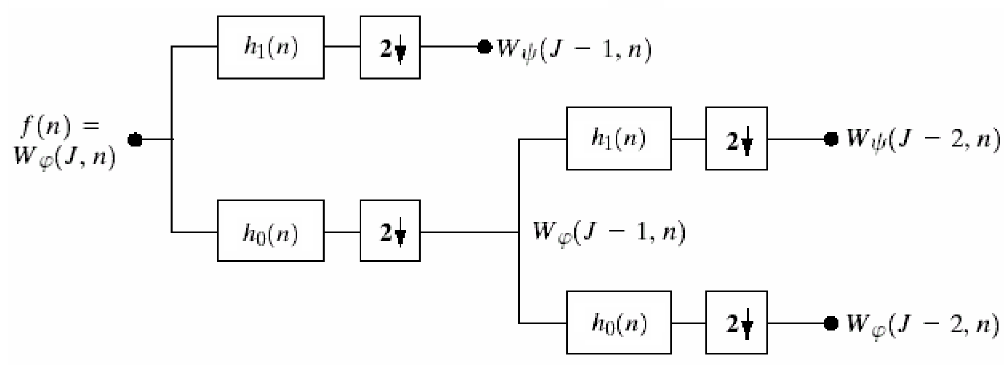


Daubechies 小波及尺度函数。（p为消失矩 Vanishing Moment）

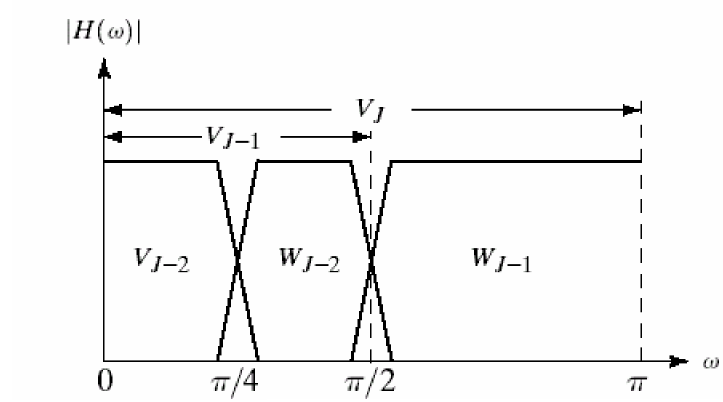
1维离散小波变换



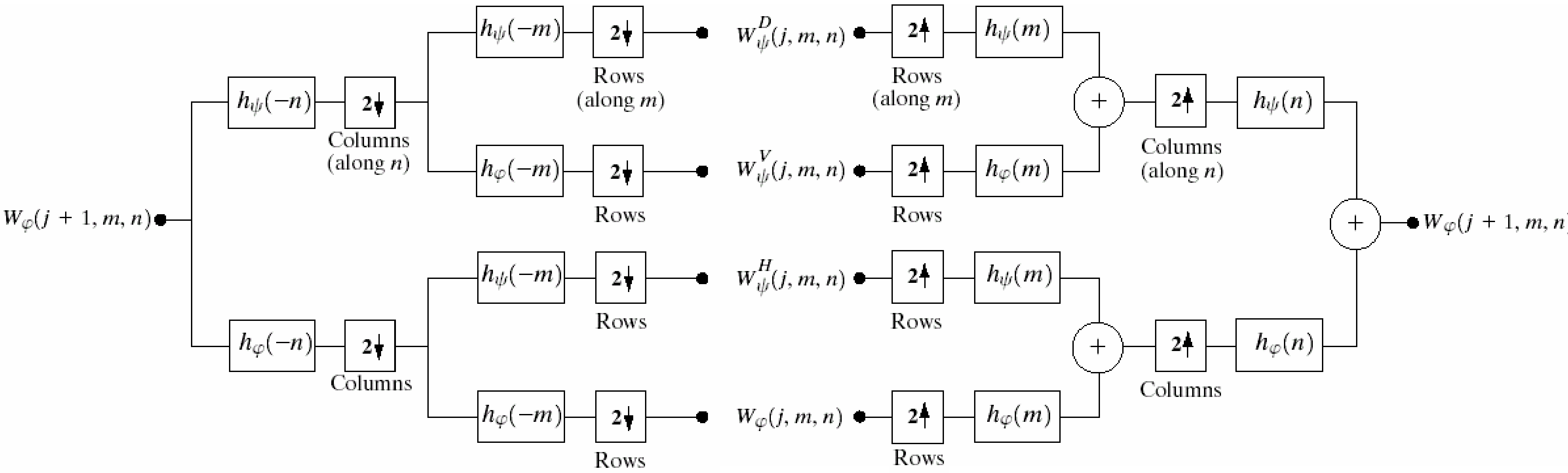




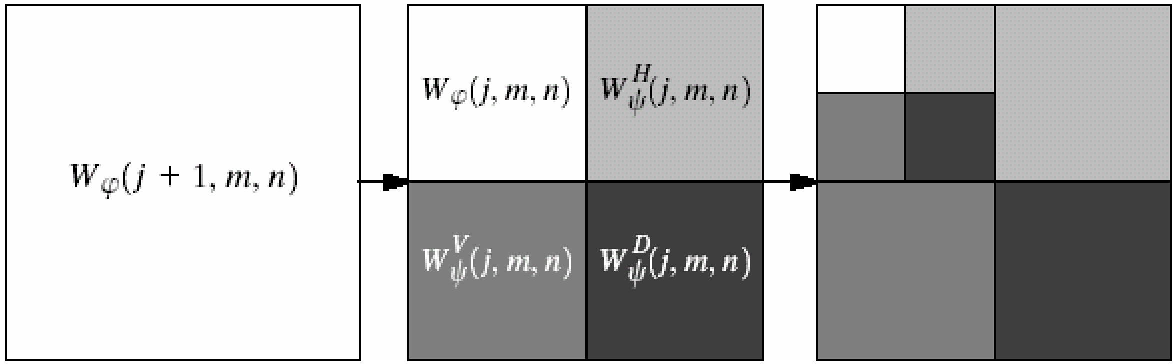
对低频进行
进一步分解



2维离散小波变换



$W_\varphi(j+1,m,n)$
$h_\psi(-n)$
$h_\varphi(-n)$
Columns (along n)
Columns
$h_\psi(-m)$
$h_\varphi(-m)$
Rows (along m)
Rows
$W_\psi^D(j,m,n)$
$W_\psi^V(j,m,n)$
$W_\psi^H(j,m,n)$
$W_\varphi(j,m,n)$
$h_\psi(m)$
$h_\varphi(m)$
$h_\psi(n)$
$h_\varphi(n)$
$W_\varphi(j+1,m,n)$



$W_\varphi(j+1,m,n)$
$W_\varphi(j,m,n)$
$W_\psi^H(j,m,n)$
$W_\psi^V(j,m,n)$
$W_\psi^D(j,m,n)$

实例