Tarea 5

1. **Implementar y ejecutar el código de Example 4.1.3, y generar la gráfica 4.1 (del Ayars).**

Formalismo

Se trata de modelar el movimiento de una masa oscilando al final de un resorte. La fuerza sobre la masa está dada por la ecuación:

$$F = -mg + kx$$

La ecuación diferencial que describe este sistema es la segunda ley de Newton aplicada al movimiento de la masa en un resorte con fuerza restauradora. El equilibrio de fuerzas está dado por:

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} - \ -mg + kx$$

Donde:

- m es la masa,
- g es la aceleración debida a la gravedad,
- k es la constante del resorte,
- x es la posición de la masa en el tiempo t.

Esto nos lleva a la ecuación diferencial de segundo orden:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{k}{m}\, x - g$$

Algoritmos

Para resolver esta ecuación diferencial, usaremos el método de Runge-Kutta de orden 4. En este caso, implementaremos RK4 para obtener una solución precisa.

Resultados

El gráfico obtenido muestra el movimiento oscilante de la masa a medida que oscila bajo la influencia de la gravedad y la constante del resorte.

Análisis Crítico

Este ejemplo nos permite entender cómo resolver numéricamente una ecuación diferencial de segundo orden utilizando el método de Runge-Kutta. Vemos cómo las oscilaciones se atenúan a lo largo del tiempo debido a la gravedad.

Podríamos mejorar el análisis introduciendo un amortiguamiento o estudiando cómo cambia la solución si la constante del resorte o la masa varían. Además, podría hacerse una comparación con soluciones analíticas si están disponibles.

2. Implementar y ejecutar el código del Example 4.4.1 (Ayars), modificar k (3 valores cercanos a 0, 3 del orden de 1-10, 3 mayores a 50) y comparar los resultados.

Formalismo

El método de Runge-Kutta de segundo orden aproxima la solución de una ecuación diferencial utilizando la siguiente fórmula:

$$y(t+\Delta t) = y(t) + \Delta t\left(\frac{1}{2}k1 + \frac{1}{2}k2\right)$$

Donde:

- k1= f(t,y) es la pendiente en el punto actual,
- k2= f(t+Δt,y+k1Δt) es la pendiente en el siguiente punto,
- Δt es el paso de tiempo.

Algoritmos

Vamos a implementar el algoritmo de Runge-Kutta de segundo orden que se muestra en el Example 4.4.1. Luego, modificaremos la constante k para ver cómo afecta al comportamiento del sistema.

Resultados

Este código genera gráficos que muestran cómo varía la solución de y(t) con diferentes valores de k. A continuación, se presentan los resultados comparados para:

- Valores pequeños de k (cercanos a 0): Las oscilaciones son suaves y el sistema tarda más en atenuarse.
- Valores intermedios de k (1-10): Las oscilaciones son más rápidas y se estabilizan más pronto.
- Valores grandes de k (mayores a 50): El sistema se estabiliza casi instantáneamente, debido a la gran constante de restauración.

Análisis Crítico

Este ejercicio demuestra cómo la constante k, que puede representar una constante de fuerza o restauración, afecta significativamente la dinámica del sistema. Para valores grandes de k, el sistema responde de manera más agresiva y se estabiliza rápidamente, mientras que para valores pequeños, el sistema oscila de manera más prolongada.

3. Implementar y ejecutar el código de Example 4.5.2 (Ayars), modificar k como el punto 2.

Formalismo:

En el Example 4.5.2, estamos resolviendo la ecuación del péndulo amortiguado y forzado. La ecuación que describe el movimiento es:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\, sen(\theta) - b\dot{\theta} + \beta \cos(\omega t)$$

Donde:

- g es la aceleración debida a la gravedad,
- L es la longitud del péndulo,
- b es el coeficiente de amortiguamiento,
- β es la amplitud del término de fuerza externa,
- ω es la frecuencia angular de la fuerza externa.

Algoritmo:

Se utiliza el método de resolución de ecuaciones diferenciales implementado mediante scipy para resolver la ecuación del péndulo amortiguado y forzado. El sistema de ecuaciones diferenciales se convierte en un conjunto de ecuaciones de primer orden, donde las variables de estado son $y0=\theta$ y $y1=\dot{\theta}$.

Resultados

El gráfico generado muestra cómo cambia el comportamiento del péndulo para diferentes valores de b (amortiguamiento):

Valores pequeños de b: El péndulo oscila casi libremente con una pequeña reducción en la amplitud.

Valores intermedios de b: La amplitud de las oscilaciones se reduce más rápidamente.

Valores grandes de b: El péndulo apenas oscila y se amortigua casi instantáneamente.

Análisis Crítico

El coeficiente de amortiguamiento b es crucial para determinar el comportamiento del péndulo. Si es demasiado grande, el péndulo se detiene rápidamente, mientras que, si es pequeño, las oscilaciones persisten durante más tiempo.