Tarea 6: Solución del sistema de Lorentz

Formalismo

El sistema de Lorenz es un conjunto de tres ecuaciones diferenciales no lineales que modelan el comportamiento caótico en sistemas de convección térmica en la atmósfera. Fue propuesto por Edward Lorenz en 1963 y es uno de los sistemas de referencia en la teoría del caos. Las ecuaciones son:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

donde x, y, y z representan las coordenadas del sistema, y σ, ρ, y β son parámetros que determinan el comportamiento del sistema. Estos parámetros suelen tener los valores σ=10, ρ=28, y β=8/3 para inducir el comportamiento caótico que caracteriza al atractor de Lorenz. Este sistema es conocido por su sensibilidad a las condiciones iniciales, lo cual implica que pequeñas diferencias en el punto de inicio pueden llevar a resultados radicalmente diferentes.

Algoritmo

Para resolver el sistema de Lorenz, se utilizó el método numérico de integración odeint, disponible en la biblioteca scipy de Python. Este método aplica un algoritmo de integración de Runge-Kutta de orden 4 para aproximar las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE). Dado que el sistema de Lorenz es de primer orden y no lineal, odeint resulta adecuado para obtener soluciones precisas en intervalos temporales relativamente largos, lo cual es crucial para capturar el comportamiento caótico.

Pasos del algoritmo:

1. Definir las ecuaciones diferenciales en una función que calcule las derivadas $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ y $\frac{dz}{dt}$.
2. Asignar condiciones iniciales al sistema (x=1, y=1,z=1).
3. Generar una secuencia de valores temporales en el intervalo deseado.
4. Usar odeint para integrar las ecuaciones y obtener las trayectorias en el espacio de estados.
5. Graficar las soluciones en 3D para visualizar el atractor.

Resultados

Las simulaciones del sistema de Lorenz muestran el famoso atractor de Lorenz, una estructura en forma de mariposa que caracteriza el comportamiento caótico de estos sistemas. La figura muestra las trayectorias en el espacio tridimensional para diferentes valores de ρ. El atractor revela cómo, a pesar de ser caótico y sensible a las condiciones iniciales, el sistema tiende a confinar sus trayectorias en un espacio finito, creando un patrón reconocible.

Las gráficas obtenidas al variar ρ permiten observar cómo el sistema de Lorenz responde de manera diferente, exhibiendo patrones caóticos más complejos o más simples según el valor de este parámetro.

Análisis Crítico

Este ejercicio permitió comprender de manera práctica los principios de la teoría del caos y la sensibilidad a condiciones iniciales en sistemas no lineales. El uso de odeint facilitó la resolución de las ecuaciones diferenciales de manera eficiente. Sin embargo, el método también presenta limitaciones en la precisión para intervalos de tiempo más largos, ya que el caos inherente al sistema amplifica pequeños errores numéricos.

Mejoras Posibles

1. Implementar métodos de integración de orden superior, como Runge-Kutta de orden 5 o adaptativos, para mejorar la precisión a intervalos más largos.
2. Explorar otros valores de los parámetros y condiciones iniciales para analizar el comportamiento en diferentes escenarios.
3. Utilizar técnicas de visualización avanzadas o mapas de calor para explorar mejor las relaciones entre parámetros y la forma del atractor.