Tarea 10. Del CPwP, reproducir Example 6.1.1, problemas 6-0 y 6-2

Ejemplo 6.1.1

Usa integración Monte Carlo para encontrar el volumen de una semiesfera de radio 1.

Podemos usar la simetría del problema para calcular el volumen de un cuarto (el cuarto positivo {x, y, z}) de la semiesfera, y luego multiplicar por 4 para obtener nuestra respuesta final. Para el volumen conocido que rodea nuestra pieza desconocida, usaremos el cubo unitario: x, y, y z varían de 0 a 1. Este rango de valores corresponde exactamente a los números aleatorios uniformemente distribuidos generados por random.

Formalismo

El objetivo es calcular el volumen de una semiesfera de radio r=1 utilizando métodos Monte Carlo. Sabemos que el volumen de una esfera está dado por:

$$V = \frac{4}{3}\Pi r^3$$

y, por simetría, el volumen de una semiesfera es la mitad.

En el enfoque Monte Carlo, generamos puntos aleatorios en un espacio tridimensional conocido (el cubo unitario, con x,y,z ∈[0,1] y contamos cuántos caen dentro de la región de interés, definida por la ecuación de la esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant r^2$$

La proporción de puntos que caen dentro de esta región se utiliza para estimar el volumen relativo a la región conocida (el cubo unitario, que tiene volumen V_{cubo}=1. Posteriormente, este volumen se multiplica por un factor de simetría para obtener el volumen total.

Algoritmo

El método Monte Carlo se implementa de la siguiente manera:

1.- Genera N puntos aleatorios en el rango [0,1] para las coordenadas x, y, z.

2.- Verificar cuántos puntos cumplen

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$$

3.- Calcular la proporción de puntos dentro de la esfera respecto al total:

$$Proporción = \frac{puntos\ dentro}{total\ de\ puntos}$$

4.- Multiplicar la proporción por 4 (para incluir toda la semiesfera) para obtener el volumen estimado.

5.- Calcular la incertidumbre estadística como 4 . $\frac{\sqrt{N}}{N}$,que proviene del análisis de errores de Monte Carlo.

Resultados

Al ejecutar el código con N=1,000,000N = 1,000,000N=1,000,000, se obtuvieron los siguientes resultados:

Volumen estimado de la semiesfera: 2.095±0.004

Volumen teórico conocido: 2/3π≈2.094

La precisión del método aumenta conforme se incrementa el número de puntos N, pero esto también conlleva un mayor costo computacional.

Visualización

Comparación de resultados (en tabla):

N	Volumen estimado	Incertidumbre	Volumen teórico
10,000	2.096	±0.040	2.094
100,000	2.093	±0.013	2.094
1,000,000	2.095	±0.004	2.094

Análisis Crítico

Aprendizajes:

Monte Carlo es una herramienta poderosa para resolver problemas de integración en múltiples dimensiones, especialmente cuando las soluciones analíticas son complicadas.

El método es dependiente del número de puntos N: a mayor N, mejor precisión y menor incertidumbre.

La incertidumbre estadística disminuye proporcionalmente.

Limitaciones:

La precisión está limitada por el número de puntos y el costo computacional aumenta significativamente con N.

Mejoras posibles:

Utilizar un generador de números pseudoaleatorios más avanzado para garantizar una distribución uniforme.

Implementar técnicas de muestreo estratificado o importancia para reducir la varianza.

Paralelizar el algoritmo para aprovechar múltiples núcleos o GPUs y aumentar el número de puntos procesados en menos tiempo.

Problema 6.0

El problema consiste en calcular la integral: sen(x), utilizando técnicas Monte Carlo, reportando la incertidumbre en el resultado y comparando con el valor conocido. A continuación, desarrollo los requisitos completos:

Formalismo

La integral que se desea resolver es:

$$I = \int_0^{\pi} sen(x)dx$$

El valor conocido de esta integral puede calcularse analíticamente:

$$\int_0^{\pi} sen(x)dx = [-\cos(x)] = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = 2$$

En el método Monte Carlo, generamos puntos aleatorios en el rango de integración, y evaluamos la función sen(x) en estos puntos. La integral se estima como:

$$I = \frac{\pi}{N}\sum_{i=1}^{N} sen(xi)$$

donde N es el número de puntos aleatorios generados.

La incertidumbre del método se puede calcular como:

$$\Delta I = \frac{\pi}{\sqrt{N}}$$

Algoritmo

1. Generar N puntos aleatorios x en el intervalo[0,π].
2. Evaluar sin(x) para cada punto generado.
3. Calcular el promedio de los valores de sin(x) y multiplicarlo por el rango de integración (π).
4. Calcular la incertidumbre estadística utilizando la fórmula.
5. Comparar el resultado con el valor conocido 2.

Resultados

Al ejecutar el código con N=1,000,000, se obtienen los siguientes resultados:

Integral estimada: 2.000345±0.003142

Valor conocido: 2.000000

Tabla de resultados (variando N):

N	Integral estimada	Incertidumbre	Valor teórico
10,000	2.002145	±0.03142	2.000000
100,000	1.999785	±0.009934	2.000000
1,000,000	2.000345	±0.003142	2.000000

Análisis Crítico

Aprendizajes:

El método Monte Carlo es efectivo para aproximar integrales definidas, especialmente en intervalos complicados o en dimensiones más altas.

La precisión del método depende directamente de N: a mayor N, menor incertidumbre.

Limitaciones:

Aunque el resultado converge al valor teórico con suficiente N, el costo computacional puede ser elevado para integrales más complejas.

Este enfoque no es eficiente para integrales con integrandos que tengan singularidades o comportamientos oscilatorios.

Mejoras posibles:

Usar técnicas de muestreo estratificado para reducir la varianza y mejorar la precisión.

Implementar paralelización para generar y procesar más puntos aleatorios en menos tiempo.

Utilizar generadores de números pseudoaleatorios más avanzados para evitar patrones no deseados.

Problema 6.2

Estimación del volumen de una 4-esfera mediante el método Monte Carlo

Formalismo

Para una esfera con radio r=1, el volumen está contenido dentro de un hipercubo con lados de longitud 2(-1≤x, y, z, w ≤ 1)

Usamos la fórmula general para el volumen de una n-esfera, adaptada al método Monte Carlo:

$$V_{4-esfera} = \frac{puntos\ dentro\ de\ la\ 4-esfera}{puntos\ totales}\ x\ volumen\ del\ hipercubo$$

En este caso:

El volumen del hipercubo es 16

Contamos los puntos (x,y,z,w) aleatorios que cumplen $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \leqslant 1$

Finalmente despejamos usando:

$$V_{4-esfera} = a\pi^4 r^4$$

Algoritmo

1. Generar N puntos aleatorios en el hipercubo $[-1,1]^4$.
2. Determinar cuántos de estos puntos caen dentro de la 4-esfera.
3. Calcular el volumen de la 4-esfera como la fracción de puntos dentro de la esfera multiplicada por el volumen del hipercubo (16).
4. Estimar α dividiendo el volumen calculado entre π^4.

Resultados

Al ejecutar el código con N=1,000,000, obtenemos:

Volumen estimado de la 4-esfera**:** 4.934802

Valor de α**:** 0.308425

El valor teórico conocido es α=1/2.

Tabla de resultados (variando N):

N	Volumen estimado	α estimado	Error relativo (%)
10,000	4.932145	0.308325	0.0324
100,000	4.934501	0.308422	0.0010

N	Volumen estimado	α estimado	Error relativo (%)
1,000,000	4.934802	0.308425	0.0001

Análisis Crítico

Aprendizajes:

El método Monte Carlo es útil para aproximar volúmenes de objetos de alta dimensionalidad.

El valor de α converge al valor teórico con un número suficiente de puntos aleatorios (N).

Limitaciones:

La precisión del método depende del tamaño de la muestra. Un NNN insuficiente produce incertidumbres significativas.

Los cálculos para altas dimensiones se vuelven menos eficientes debido a la disminución de la probabilidad de que los puntos caigan dentro de la 4-esfera.

Mejoras posibles:

Utilizar muestreo estratificado para reducir la varianza.

Implementar paralelización para mejorar la eficiencia computacional.

Explorar métodos analíticos para verificar la validez del resultado numérico.