

Modelos matemáticos para calcular movimiento de telas en gráficas computacionales: Estado del Arte

Karla Fabiola Ramirez Martinez

Instituto tecnológico y de estudios superiores de Monterrey

Gráficas computacionales

a01746769@itesm.mx

Resumen-Este artículo va enfocado a explicar las diferentes técnicas para calcular el movimiento de telas ,discutiendo cual de estas se utilizará en un proyecto de simulación de telas en gráficas computacionales.

Introducción

Gracias a las gráficas computacionales se ha logrado grandes avances en una multitud de áreas gracias a el extenso uso que estas tienen, en este caso nos enfocaremos en la simulación de telas teniendo la primera instancia de esto en 1986 por J.Weil el cual logró la primera simulación de telas a partir de una técnica geométrica

Hoy en día la simulación de telas se puede observar en ámbitos como la moda para modelos digitales y dentro del cine donde se busca el resultado más realista posible respetando sus colisiones y cualidades físicas.

Motivación

Se busca que la simulación de telas sea lo más realista posible enfocándose en las propiedades del material, así como efectos de fuerzas externas, como la gravedad o el viento.



Figura 1 - Personaje estático

Figura 2 - Personaje saltando

Figura 3 - Personaje saltando al vacío

Capturas del videojuego "Genshin Impact"

Un ejemplo de cómo afectan estas fuerzas externas se puede observar en la Figura 1, donde un personaje se encuentra inmóvil por lo que la tela no tiene ningún movimiento, mientras que en la Figura 2 realiza un salto en el mismo sitio, se aprecia como la falda se mueve con esta, para finalizar en la Figura 3 el personaje cae de una altura más alta por lo que se aprecia como reacciona la falda a la gravedad.



Figura 5- Comparación tela normal y al ser mojada por la lluvia

Como se muestra en ambos ejemplos se logra que la tela se comporte conforme las físicas y su entorno.

Cuando este proceso está enfocado a gráficas computacionales no se busca un alto grado de exactitud a la realidad, por lo que dependiendo del proyecto permite considerar diferentes técnicas matemáticas para calcular el movimiento.

Definición del problema

Al crear una simulación de telas necesitas comprender las reacciones que tendrá nuestro objeto dependiendo de las colisiones y efectos como lluvia o viento, para poder calcular esto necesitamos designar nuestra figura de una forma que facilite estos, por ejemplo, este vestido tela que está conformado por triángulos.



Figura 6- Vestido con la referencia de triángulos que tiene

A partir de diferentes modelos matemáticos se busca calcular las físicas involucradas dentro de una simulación de telas teniendo en cuenta las propiedades físicas y su entorno de los objetos involucrados.

Representación de la geometría

Una forma de tratar la geometría de una tela es a través de polígonos en este caso como un conjunto de triángulos, esta representación es utilizada por sus cualidades de tener 3 vértices y pueden ser unidas fácilmente por sus esquinas.

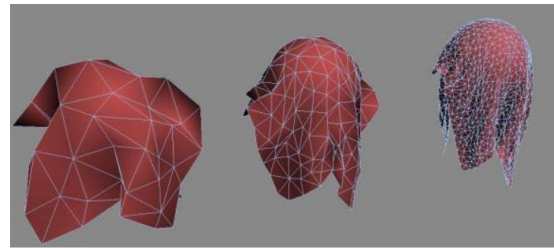


Figura 7- Tela representada con triángulos, van aumentando se izquierda a derecha mejorando la calidad.

Como se puede observar en la Figura 7, se tienen 3 ejemplos donde la tela está conformada por triángulos, mientras la cantidad de estos va aumentando se nota una mejora en la calidad y realismo.

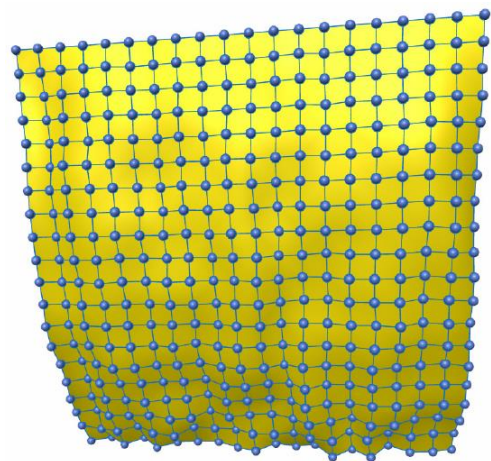


Figura 8- Tela representada con partículas

Otra forma de representarlo es a través de partículas donde se divide la figura en partículas, considerando las coordenadas en x,y y z de cada una, donde se establece una distancia entre

ellas(mientras mas corta mas particulas y exactitud tendra) esta facilita la agrupación de todo el objeto.

Técnicas

Hay que considerar que el objetivo de cada una de estas técnicas es calcular la posición y forma del objeto durante todo el tiempo que esté dentro de la escena enfocándose en proceso de colisión .

Nos centraremos en las técnicas geométricas, física y de partículas, es importante considerar desde el inicio cual se tomará ya que cada una de estas considera al objeto de diferente manera (triángulos o partículas) para los cálculos correspondientes.

Como consideración a todos los ejemplos y técnicas que se realizarán serán conforme a una tela cuadrangular .

Técnicas físicas

El enfoque físico se enfoca en ser lo más apegado a físicas y movimientos reales, si bien no hay un solo método para esta técnica, explicaremos cómo se usa la integración explícita para calcular la posición de la tela. En este caso el objeto es considerado como un conjunto de partículas conectadas entre sí, lo cual facilita los dobleces.

Primero comenzaremos planteando cómo podemos utilizar la integración para crear una fórmula que calcula la posición de cada partícula.

Estas son las variables y términos que usaremos:

i= Estado de la partícula
j= Estado siguiente partícula
a=Aceleración de la partícula
aix =Aceleración de la partícula en x
aiy =Aceleración de la partícula en y
aiz =Aceleración de la partícula en z
xi = Posición de la partícula
xix = Posición de la partícula en x
xiy = Posición de la partícula en y
xiz = Posición de la partícula en z
vi =Velocidad de la partícula
vix =Velocidad de la partícula en x
viy =Velocidad de la partícula en y
viz =Velocidad de la partícula en z

t = Tiempo

h= Lapso

M= Matriz(Contiene todas las partículas)

M-1= Matriz inversa

R= Números reales

ω = Número complejo independiente del tiempo

α = Constante

[kg*ms2]= Newtons

[ms2]= Metros sobre segundo cuadrado

∂ = Derivada

k=Fuerzas externas

d= Fuerza de amortiguación

g= Gravedad

Necesitamos tener en cuenta que cada partícula tendrá sus coordenadas x , y y z.

$$a_i = [a_{ix}, a_{iy}, a_{iz}] [ms^2] \in R \quad (1)$$

Se usará la notación de vector para las partículas, todas las partículas serán guardados como tratados como un solo objeto:

$$x = \begin{bmatrix} x_{0x} \\ x_{0y} \\ x_{0z} \\ \vdots \\ x_{N-1x} \\ x_{N-1y} \\ x_{N-1z} \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \\ v_{0z} \\ \vdots \\ v_{N-1x} \\ v_{N-1y} \\ v_{N-1z} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Utilizándolo en una ecuación matemática puede ser expresado como:

$$\begin{aligned} \partial x(t) / \partial t &= v(t) \\ \partial v(t) / \partial t &= a(t) \end{aligned} \quad (3)$$

Aproximamos la ecuación a infinito dejándonos como resultado esta ecuación:

$$\begin{aligned} x(t+h) - x(t) &\approx v(t) \Rightarrow x(t+h) \approx x(t) + hv(t) \\ v(t+h) - v(t) &\approx a(t) \Rightarrow v(t+h) \approx v(t) + ha(t) \end{aligned} \quad (4)$$

Gracias a la ley de movimiento de newton sabemos que $f \in R^3$ puede ser utilizada como aceleración del sistema.

$$f(x, v, t) = Ma(t) \quad (5)$$

Ahora que tenemos la fórmula para calcularlo, necesitamos entender qué variables pueden afectar el estado de nuestra tela por lo que las dividiremos en dos secciones, fuerzas internas y externas.

Las fuerzas internas se ocasionan en base a las propiedades de la tela (Tipo de tela, peso, elasticidad), estas fuerzas reaccionan a las deformaciones que puede sufrir.

Las fuerzas externas (gravedad, colisiones o viento) no se originan del material, si no del ambiente donde se encuentra.

Utilizando las ecuaciones (4) y (5) obtenemos

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h v_n \\ v_{n+1} &= v_n + h M^{-1} f_n \end{aligned} \quad (6)$$

Donde n representa el paso actual y $n+1$ el siguiente, esta fórmula considera que la velocidad es constante.

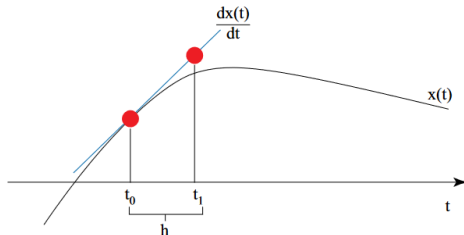


Figura 9- Aproximación de un intervalo de tiempo h que empieza t_0 a t_1 , conocida como Integración explícita o Integración de Euler

Para facilitar esta aproximación considerando que la velocidad y fuerzas externas serán constantes se utilizará la prueba de Dahlquist que consiste en predecir lógicamente el comportamiento del sistema considerando que la variable λ será constante

$$dy(t)dt = \lambda y(t) \quad (7)$$

$$\lambda = \alpha + i\beta \Rightarrow y(t) = y_0 e^{\lambda t} \quad (8)$$

Combinando la ecuación 7 y 8 obtenemos el diferencial de la ecuación

$$|y(t)| = |y_0| * |e^{(\alpha + i\beta)t}| \quad (9)$$

La solución de esta aproximación solo se mantiene estable cuando el valor de λ sea negativo, considerando que sea un objeto cayendo que está destinado a llegar a 0.

Ya que tenemos la aproximación teórica ahora utilizando el análisis de euler tendremos que:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + hf(t_k, y_k) \\ &= y_k + h \lambda y_k \\ &= (1 + h \lambda) y_k \end{aligned} \quad (10)$$

Gracias a la inducción podemos encontrar $y_k = (1 + h \lambda)^k y_0$ ya que y_0

$$y_k = (1 + h \lambda)^k y_0 \quad (11)$$

Ya que dentro de este ejemplo las fuerzas externas y velocidad serán constantes, estarán ligados al tiempo que se acerque al infinito.

$$|1 + h \lambda| < 1 \quad (12)$$

Por lo que la posición de las partículas podrá ser representado por esta ecuación:

$$S = \{h \lambda \in \mathbb{C} : |1 + h \lambda| < 1\} \quad (13)$$

El valor de λ es determinado por la ecuación por lo que el valor de h debe ser pequeño para que sea estable, en este caso -2 a 0 .

Este es uno de los modelos más básicos para simulación de telas por lo que hoy en día al ser muy poco realista en cuanto a físicas y fuerzas externas.

Para calcular las fuerzas externas se visualizará la tela de la siguiente manera:

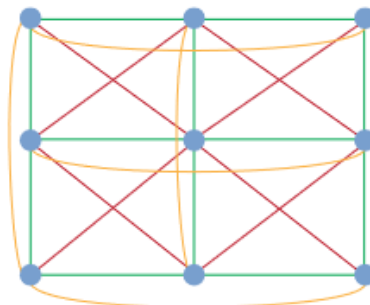


Figura 12 - Tela representada en partículas donde se muestra que tipo de movimiento es cada línea

Donde las líneas rojas se refieren a los cortes, las líneas verdes al estiramiento y las líneas amarillas a los dobleces.

Se intenta minimizar la energía utilizada para llegar fácilmente a un equilibrio (estado de reposo), por lo que utilizaremos la segunda ley de la termodinámica.

$$f(x) = -\partial E(x) \partial s \quad (13)$$

Para la siguiente ecuación es necesario recordar esta ley de Newton $f=Ma$, con la ecuación anterior podemos deducir que

$$f_i(x) = -\partial E_g(x) \partial x_i \Rightarrow [\partial E_g \partial x_i, \partial E_g \partial x_j, \partial E_g \partial x_k] \Rightarrow -[0, 0, mig] \quad (14)$$

Para conectar las partículas utilizaremos la ley de elasticidad de Hooke's, la cual nos ayudará a determinar que tanto se deformará la tela, conectando el estado de la tela i con j

$$E_{ij}(x) = 12k(|x_i - x_j| - L)^2 \quad (15)$$

Siendo $||.||$ la distancia Ecludiana (distancia ordinaria entre dos puntos), la ecuación 14 será nuestra función de energía por lo que solo falta calcular las fuerzas sobre la partícula.

Esta será la ecuación de las fuerzas sobre i y j (Estado de la partícula):

$$\begin{aligned} f_i(x) &= -\partial E_{ij}(x) \partial x_i \Rightarrow -k(|x_i - x_j| - L)(x_i - x_j) |x_i - x_j| \quad (15) \\ f_j(x) &= -\partial E_{ij}(x) \partial x_j \Rightarrow k(|x_i - x_j| - L)(x_i - x_j) |x_i - x_j| \quad (16) \end{aligned}$$

Si bien observamos que son similares podemos deducir que $f_i = -f_j$ lo cual significa que eso implica que las partículas se acercan o alejan a direcciones opuestas sobre los mismos vértices.

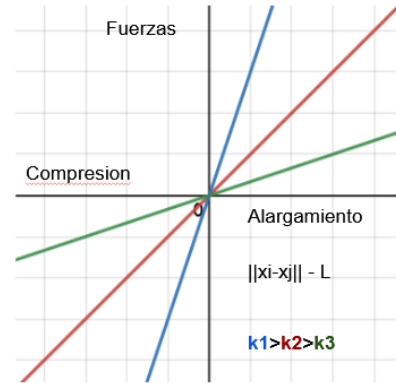


Figura 13 - Muestra de las fuerzas lineales

Se puede observar la relación que tienen estas fuerzas sobre la partícula en la figura 1, siendo estas fuerzas lineales.

La fuerza de amortiguación es un factor para considerar dentro de este cálculo ya que nos mostrará como reacciona, se modelará de la siguiente manera.

$$d_i(x) = -kd(v_i - v_j) = -d_j(x) \quad (17)$$

Ya que tenemos la fórmula que nos ayuda a calcular la posición de las partículas (10) junto con las ecuaciones que calculan las fuerzas (15-16) y (17) pondremos a prueba el ejemplo con un tiempo t_n , cada paso dentro del tiempo se denotará por h .

$$\Delta x = h v_n \quad Y \quad \Delta v = h(M^{-1} f(x_n, v_n)) \quad (18)$$

Considerando que $\Delta x = x_{n+1} - x_n$ y $\Delta v = v_{n+1} - v_n$ para cada partícula en el sistema, agregando las fuerzas dentro de un solo vector, las fuerzas internas serán consideradas como energía negativa mientras que las fuerzas externas se agregarán a las internas, con ello obtendremos la actualización de Δv , dándonos la posición y velocidad visto de la siguiente manera.

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x \quad Y \quad v_{n+1} = v_n + \Delta v \quad (19)$$

Con esto tenemos una aproximación muy poco exacta ya que no considera todas las fuerzas externas, internas y considera valores como la velocidad constante, por lo que si bien nos dará una aproximación muy lejana de la realidad.

Técnicas geométricas

La técnica geométrica se enfoca en registrar los polígonos con los que se considerara la tela como se puede observar en el ejemplo de la figura 7, se utilizará de polígonos triángulos por sus vértices ya que mientras más polígonos tenga más exacto será.

En este ejemplo se utilizará la deformación geométrica de Müller que consiste en los siguientes puntos :

- Como parámetros de entrada la función recibirá una malla de triángulos unidos por los vértices
- Continuará separando la malla en diferentes cuadrantes que contenga 3 vértices como se observa en la siguiente Figura 14.
- Se calcula la posición de la tela a través de integraciones que utilizan las fuerzas externas e internas que actúan durante un tiempo t .

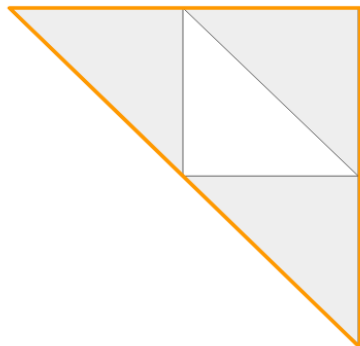


Figura 14 - Malla de triángulos

Para darle facilidad de movimiento y deformación se utilizarán grupos de la malla descompuestos en un parámetro m , cada sección m tendrá diferentes propiedades de movimiento para un mejor rotamiento de este, por ejemplo el centro de la malla no tendrá tanta facilidad al rotar a diferencia de las esquinas.

Si bien definir nuestra tela como una malla de triángulos nos ayuda con los aspectos de dobleces, contiene algunos problemas con la elasticidad,

para esto se utilizarán las esquinas de los triángulos como se muestra en la figura 15.

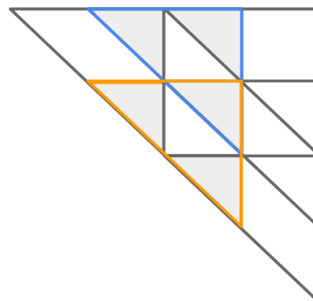


Figura 15 - Malla para elasticidad

Evaluar nuestra tela de esta manera nos ayudará a separarla en distintos grupos, de esta manera se podrán atribuir las propiedades como dobleces y elasticidad causados por fuerzas internas o externas.

Conclusión

Podemos observar que, si bien las técnicas utilizan diferentes formas de representar la tela para maniobrar en ella, al final ambas se enfocan en los puntos que estos definen y con ello tienen una mayor o menor exactitud.

Debido a la investigación realizada se ha determinado que para el uso que tendrá este proyecto es importante considerar que la exactitud conforme a la realidad no necesita ser tan precisa por lo que se usará la técnica Geométrica.

Referencias

Wikipedia. (2021). Ley de elasticidad de Hooke. 18/10/2021, de Wikipedia Sitio web: https://es.wikipedia.org/wiki/Ley_de_elasticidad_de_Hooke

Yujun Chen, N. Magnenat-Thalmann, Brian F. Allen. (2012). Physical simulation of wet clothing for virtual humans. [Figura 5] .20/10/2021, de Computer Science The Visual Computer Sitio web: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:7561000>

Metaforma. (2017). 3D Summer Dress. [Figura 6]. 18/10/2021, de TurboSquid Sitio web: <https://www.turbosquid.com/3d-models/3d-summer-dress/1124721>

Autodesk. (2019). Cloth and Garment Overview. [Figura 7]. 20/10/21, de Autodesk Sitio web: <https://knowledge.autodesk.com/support/3ds-max/learn-explore/caas/CloudHelp/cloudhelp/2020/ENU/3DSMax-Simulation-Effects/files/GUID-3C9D7D8B-FEEF-4F35-8F90-65C32605C1CA-htm.html>

Jan Bender. (2009). Dynamic Simulation of inextensible cloth . [Figura 8]. 20/10/21, de Researchgate Sitio web: https://www.researchgate.net/figure/Particle-model-with-distance-constraints-used-for-the-simulation-of-cloth_fig1_259572474

Wikipedia. (2021). Cloth modeling. 20/10/21, de Wikipedia Sitio web: https://en.wikipedia.org/wiki/Cloth_modeling

Bioprofe. (2019). Colisiones. 20/10/2021, de Bioprofe Sitio web: <https://bioprofe.com/colisiones/>

Robert M. Corless1, C. Yalcın Kaya2 and Robert H. C. Moir. (2012). Optimal Residuals and the Dahlquist Test Problem. 20/10/2021, de . Sitio web: https://publish.uwo.ca/~rcorless/Dahlquist/Optimal_Residuals_and_the_Dahlquist_Test_Problem.pdf

Física Práctica. (-). Fuerza de amortiguamiento. 20/10/21, de Fisica Practica Sitio web: <https://www.fisicapractica.com/fuerza-de-amortiguamiento.php>

Tarouco, Fabricio & Baldassarri, Sandra & Serón, Francisco & Cerezo, Eva. (2021). Técnicas de Modelado de Ropas Digitales. 20/10/21, de Researchgate Sitio web: https://www.researchgate.net/profile/Francisco-Seron/publication/242534767_Tecnicas_de_Mod

[elado de Ropas Digitales/links/00b49528bb3ba890ef000000/Tecnicas-de-Modelado-de-Ropas-Digitales.pdf">elado de Ropas Digitales/links/00b49528bb3ba890ef000000/Tecnicas-de-Modelado-de-Ropas-Digitales.pdf](#)

J. Gascón, M.A. Otaduy, J.M. Espadero, A. Rodríguez. (2008). Optimización del Cálculo de Colisiones para Mallas Deformables mediante Voxelización de Primitivas. 20/10/2021, de Universidad Rey Juan Carlos (URJC) Sitio web: <https://jgascon.net/papers/ceig08.pdf>

Wikipedia. (2020). Distancia Euclidiana. 20/10/2021, de Wikipedia Sitio web: https://es.wikipedia.org/wiki/Distancia_euclidiana

Thomas Stumpp. (2008). A Geometric Deformation Model for Stable Cloth Simulation. 20/10/21, de The Eurographics Association Sitio web: <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.162.3216&rep=rep1&type=pdf>

A PINZÓN FERNÁNDEZ. (-). SISTEMA DE SIMULACIÓN DE COLISIONES DEFORMABLES CON INTERACCIÓN MEDIANTE DISPOSITIVOS HÁPTICOS EN AMBIENTES DE REALIDAD AUMENTADA: ESTADO DEL ARTE. 20/10/21, de Universidad Nacional de Colombia Sitio web: https://sites.google.com/site/apinzonf/SurveyCollisionDetection_2.pdf

Tuur Stuyck. (2018). Cloth Simulation for Computer Graphics. Figura 9 y 12}. 20/10/21, de Morgan y Claypool publishers Sitio web: <https://www.amazon.com.mx/Cloth-Simulation-Computer-Graphics-Stuyck/dp/1681734117>

Udacity. (2012). MX Dahlquist's Test Equation - Differential Equations in Action. 20/10/21, de Youtube Sitio web: https://www.youtube.com/watch?v=r3zu85s8sE&ab_channel=Udacity