ELEMENTOS DE ARITMÉTICA

Aula 08

Conjunto dos Números Racionais

Karla Lima

Sumário

Conjunto dos Números Racionais

Frações

O conjunto de todos os números que podem ser escritos como quocientes $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$ e a, b números inteiros, é denominado **conjunto dos números racionais**. É representado por

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} | \, a, b \in \mathbb{Z} \text{ com } b \neq 0 \right\}.$$

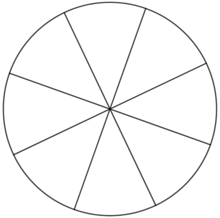
Na representação acima, dizemos que o número a é o **numerador** da fração e o número b o seu **denominador**.

Observação: Todo número inteiro x é um número racional, uma vez que podemos escrevê-lo da forma $\frac{x}{1}$.

Frações

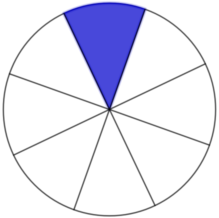
As frações determinam a divisão de **partes iguais**, sendo que cada parte é uma fração do inteiro.

Vejamos o exemplo da pizza, que é, geralmente, dividida em 8 partes iguais:



Frações

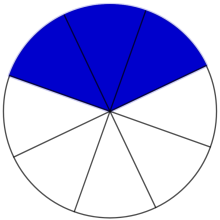
Se você come 1 fatia da pizza, come 1 parte de um total de 8. Escrevemos $\frac{1}{8}$ para representar a parte da pizza pintada em azul.



Da mesma forma, restaram 7 partes de um total de oito. Escrevemos $\frac{7}{8}$ para representar a parte da pizza que não está pintada.

Frações

Se você come 3 fatias da pizza, come 3 partes de um total de 8. Escrevemos $\frac{3}{8}$ para representar a parte da pizza pintada em azul.

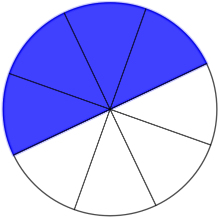


Da mesma forma, restaram 5 partes de um total de oito. Escrevemos $\frac{5}{8}$ para representar a parte da pizza que não está pintada.

Exercício

Exercício 1

Dada a figura abaixo, escreva as frações que correspondem à parte pintada em azul e à parte branca.



Operações: Multiplicação

Operações: multiplicação

A multiplicação entre frações é bem simples: basta multiplicar os numeradores e dividir pela multiplicação dos denominadores

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Operações: multiplicação

Exemplo 1

Vamos calcular o produto $\frac{12}{11} \cdot \frac{1}{3}$.

Pela definição, basta calcular

$$\frac{12}{11} \cdot \frac{1}{3} = \frac{12 \cdot 1}{11 \cdot 3},$$

de onde obtemos que

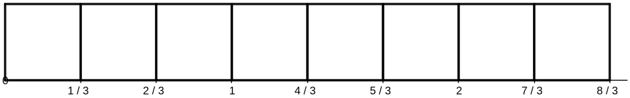
$$\frac{12}{11} \cdot \frac{1}{3} = \frac{12}{33}.$$

Operações: Divisão

Operações: divisão

Quando você divide por um número, você está essencialmente perguntando "quantas vezes esse número cabe no outro?".

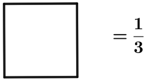
Digamos que queremos efetuar a divisão da fração $\frac{8}{3}$ pela fração $\frac{1}{3}$. Para melhor visualização, dividimos um bloco de $\frac{8}{3}$ em blocos de $\frac{1}{3}$:

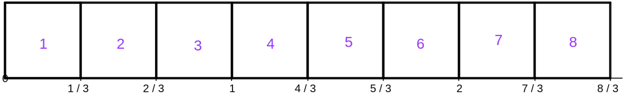


Quantos blocos de $\frac{1}{3}$ cabem no bloco grande de $\frac{8}{3}$?

Operações: divisão

Facilmente, vemos que cabem 8 blocos de $\frac{1}{3}$:



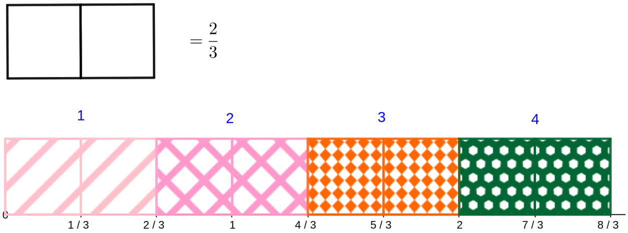


Isso está de acordo com a regra que aprendemos sobre a divisão de frações:

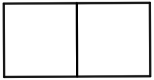
$$\frac{\frac{8}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{1} = 8.$$

Operações: divisão

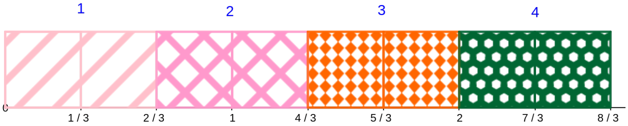
Agora, se queremos efetuar a divisão da fração $\frac{8}{3}$ pela fração $\frac{2}{3}$, quantos blocos de $\frac{2}{3}$ cabem no bloco grande de $\frac{8}{3}$?



Operações: divisão



$$= \frac{2}{3}$$

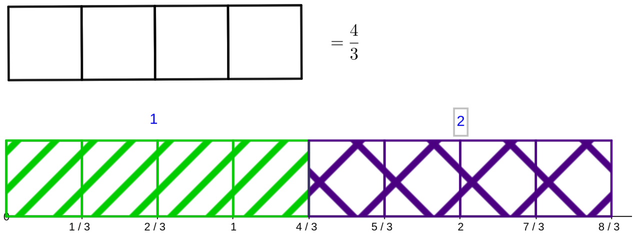


A resposta é dada por

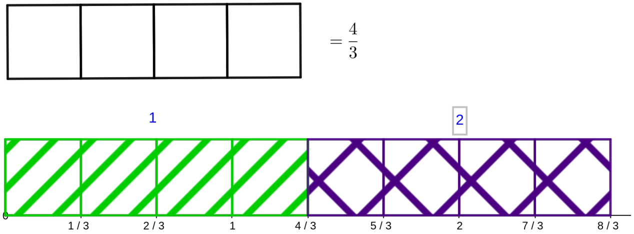
$$\frac{\frac{8}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{2} = 4.$$

Operações: divisão

Da mesma forma, se queremos efetuar a divisão da fração $\frac{8}{3}$ pela fração $\frac{4}{3}$, quantos blocos de $\frac{4}{3}$ cabem no bloco grande de $\frac{8}{3}$?



Operações: divisão



A resposta é dada por

$$\frac{\frac{8}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{4} = 2.$$

Operações: divisão

Assim, para efetuar a divisão entre duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}(\neq 0)$, basta fazer:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1}.$$

Inverso Multiplicativo

Definição 1

Dados o número não nulo a, o número a^{-1} é chamado ***inverso multiplicativo*** *de a. Isso quer dizer que*

$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

Inverso Multiplicativo

Definição 1

Dados o número não nulo a, o número a^{-1} é chamado ***inverso multiplicativo*** *de a. Isso quer dizer que*

$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

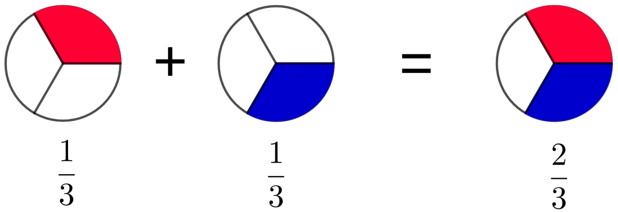
Exemplo 2

Verfique que $\left(\frac{c}{d}\right)^{-1}$ é o inverso multiplicativo de $\frac{c}{d}$.

Operações: Adição

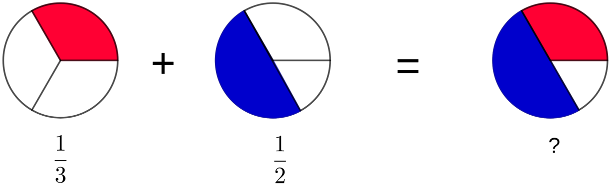
Operações: adição

Ao definir as frações, dissemos que estas determinam a divisão de **partes iguais** de um todo. Abaixo temos duas pizzas: uma dividida em 3 partes e outra em duas. Se você come $\frac{1}{3}$ da pizza e depois come mais $\frac{1}{3}$ dela, a fração que representa a porção consumida da pizza é $\frac{2}{3}$.



Operações: adição

Mas se você come $\frac{1}{3}$ da pizza e depois come mais $\frac{1}{2}$ dela, qual a fração que representa a porção consumida da pizza?

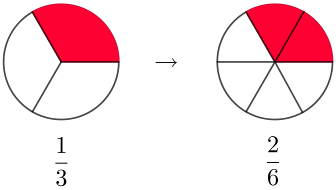


Ao definir as frações, dissemos que estas determinam a divisão de **partes iguais** de um todo. Como a pizza não está dividida em partes iguais, não conseguimos efetuar a soma diretamente.

Operações: adição

Então vamos dividi-la em partes iguais. Temos a pizza dividida em 3 e 2 partes. Façamos as seguintes divisões:

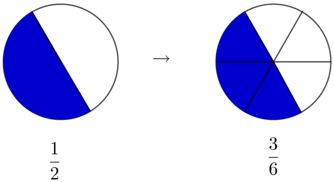
- Dividimos por 2 cada parte da pizza que já estava dividida em 3.



Assim, a parte pintada representa 3 partes de um total de 6, ou seja, $\frac{2}{6}$.

Operações: adição

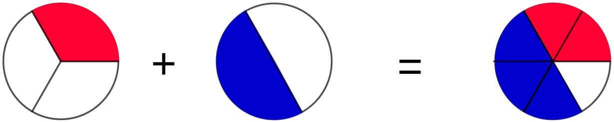
- Dividimos por 3 cada parte da pizza que já estava dividida em 2.



Assim, a parte pintada representa 3 partes de um total de 6, ou seja, $\frac{3}{6}$.

Operações: adição

Agora que estão divididas em 6 partes iguais, podemos representar a parte pintada como sendo a soma $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$.



$\frac{2}{6}$ $\qquad$ $\frac{3}{6}$ $\qquad$ $\boxed{\frac{5}{6}}$

Operações: adição

- Para **somar** duas frações com denominadores iguais, basta somar seus numeradores:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

Operações: adição

- Se os denominadores são diferentes, devemos dividir o todo por um múltiplo comum entre os denominadores.
- A forma mais reduzida é encontrada ao se tomar o mínimo múltiplo comum (mmc), porém é bem mais rápido tomar o múltiplo obtido pelo produto dos denominadores. Por exemplo, no caso anterior, as pizzas estavam, inicialmente, divididas em 2 e 3 partes. Depois, ficaram divididas em $6 = 2 \cdot 3$ partes, ou seja, um múltiplo de 2 e de 3.

Operações: adição

Assim, dada a soma $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$, devemos reescrever cada fração para representar a quantidade de partes de $b \cdot d$ que elas representam:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d} \\ &= \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} \frac{c}{d} &= \frac{c}{d} \cdot 1 = \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{b} \\ &= \frac{c \cdot b}{b \cdot d} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{b \cdot d} \\ &= \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}. \end{aligned}$$

Exemplo

Exemplo 3

Vamos calcular a soma $\frac{5}{7}+\frac{2}{5}$. *Como os denominadores são diferentes, vamos reescrever as frações para que cada uma represente a quantidade de partes de* $5\cdot 7=35$:

$$\begin{aligned}\frac{5}{7}&=\frac{5}{7}\cdot\frac{5}{5}\\&=\frac{25}{35}\end{aligned}\qquad e\qquad\begin{aligned}\frac{2}{5}&=\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{7}\\&=\frac{14}{35}.\end{aligned}$$

Agora, com os denominadores iguais, podemos efetuar a soma:

$$\frac{5}{7}+\frac{2}{5}=\frac{25}{35}+\frac{14}{35}=\frac{39}{35}.$$

Exemplo

Exemplo 4

Vamos calcular a soma $\frac{31}{2} + \frac{9}{14}$*. Novamente, os denominadores são diferentes. Vamos reescrever as frações para que cada uma represente a quantidade de partes de* $2 \cdot 14 = 28$*:*

$$\begin{aligned} \frac{31}{2} &= \frac{31}{2} \cdot \frac{14}{14} \\ &= \frac{434}{28} \end{aligned} \qquad e \qquad \begin{aligned} \frac{9}{14} &= \frac{9}{14} \cdot \frac{2}{2} \\ &= \frac{18}{28}. \end{aligned}$$

Agora, com os denominadores iguais, podemos efetuar a soma:

$$\frac{31}{2} + \frac{9}{14} = \frac{434}{28} + \frac{18}{28} = \frac{452}{28}.$$

Referencias I