Observemos que, como o domínio da função seno é $\mathbb{R}$, a senoide continua para a direita de 2π e para a esquerda de 0. No retângulo em destaque está representado apenas um período da função. Notemos ainda que as dimensões desse retângulo são $2\pi \times 2$, isto é, aproximadamente $6{,}28 \times 2$ e, em escala, $10{,}5 \times 3{,}2$.

EXERCÍCIOS

Determine o período e a imagem e faça o gráfico de um período completo das funções dadas nos exercícios 128 a 147.

128. f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -\text{sen } x$.

Solução

Vamos contruir uma tabela em três etapas:

1ª) atribuímos valores a *x*;

2ª) associamos a cada *x* o valor de sen x;

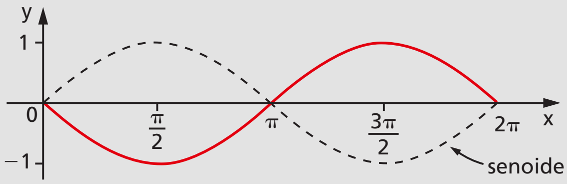
3ª) multiplicamos sen x por −1.

x	sen x	y		x	sen x	y		x	sen x	y
0				0	0			0	0	0
$\frac{\pi}{2}$				$\frac{\pi}{2}$	1			$\frac{\pi}{2}$	1	−1
π				π	0			π	0	0
$\frac{3\pi}{2}$				$\frac{3\pi}{2}$	−1			$\frac{3\pi}{2}$	−1	1
2π				2π	0			2π	0	0

Com essa tabela podemos obter 5 pontos do gráfico, que é simétrico da senoide em relação ao eixo dos *x*.

É imediato que:

$Im(f) = [-1, 1]$
$p(f) = 2\pi$



129. f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2 \cdot \text{sen } x$.

Solução

Vamos construir uma tabela em três etapas:

1ª) atribuímos valores a *x*;

2ª) associamos a cada *x* o valor de sen x;

3ª) multiplicamos sen x por 2.

x	sen x	y
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		

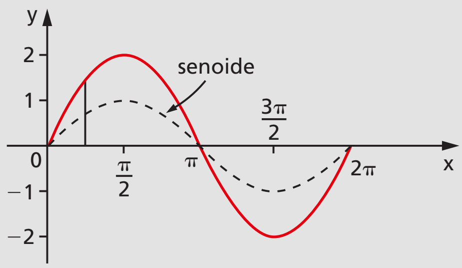
x	sen x	y
0	0	
$\frac{\pi}{2}$	1	
π	0	
$\frac{3\pi}{2}$	-1	
2π	0	

x	sen x	y
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	1	2
π	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	-2
2π	0	0

Com essa tabela podemos obter 5 pontos do gráfico, que deve apresentar para cada *x* uma ordenada *y* que é o dobro da ordenada correspondente da senoide.

É imediato que:

$Im(f) = [-2, 2]$
$p(f) = 2\pi$



130. f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -2 \cdot \text{sen } x$.

131. f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |\text{sen } x|$.

Solução

Recordemos inicialmente que, para um dado número real *a*, temos:

$a \geqslant 0 \Rightarrow |a| = a$

$a < 0 \Rightarrow |a| = -a$

Aplicando essa definição, temos:

$\text{sen } x \geqslant 0 \Rightarrow |\text{sen } x| = \text{sen } x$

(quando $\text{sen } x \geqslant 0$, os gráficos $y = |\text{sen } x|$ e $y = \text{sen } x$ coincidem)

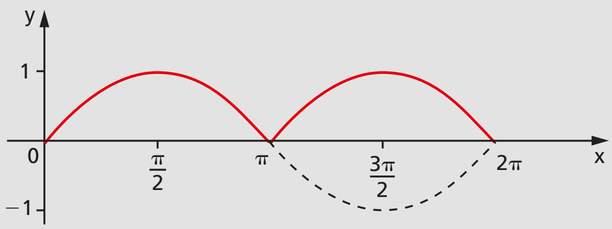
$\text{sen } x < 0 \Rightarrow |\text{sen } x| = -\text{sen } x$

(quando $\text{sen } x < 0$, os gráficos $y = |\text{sen } x|$ e $y = \text{sen } x$ são simétricos em relação ao eixo dos *x*).

É imediato que:

$\text{Im}(f) = [0, 1]$

$p(f) = \pi$



132. f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |3 \cdot \text{sen } x|$.

133. f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \text{sen } 2x$.

Solução

Vamos construir uma tabela em três etapas:

1ª) atribuímos valores a $t = 2x$;

2ª) associamos a cada $2x$ o correspondente $\text{sen } 2x$;

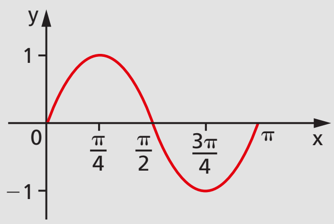
3ª) calculamos *x* $\left(x = \dfrac{t}{2}\right)$.

x	$t = 2x$	y
	0	
	$\frac{\pi}{2}$	
	π	
	$\frac{3\pi}{2}$	
	2π	

x	$t = 2x$	y
	0	0
	$\frac{\pi}{2}$	1
	π	0
	$\frac{3\pi}{2}$	-1
	2π	0

x	$t = 2x$	y
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{\pi}{2}$	π	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	-1
π	2π	0

Com base nessa tabela, podemos obter 5 pontos da curva. Notemos que o gráfico deve apresentar para cada *x* uma ordenada *y* que é o seno do dobro de *x*. Notemos ainda que para sen t completar um período é necessário que $t = 2x$ percorra o intervalo $[0, 2\pi]$, isto é, *x* percorra o intervalo $[0, \pi]$.



Assim, o período de *f* é:

$p(f) = \pi - 0 = \pi$

É imediato que: $Im(f) = [-1, 1]$

134. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \text{sen}\,\frac{x}{2}$.

Solução

x	$t = \frac{x}{2}$	y
	0	
	$\frac{\pi}{2}$	
	π	
	$\frac{3\pi}{2}$	
	2π	

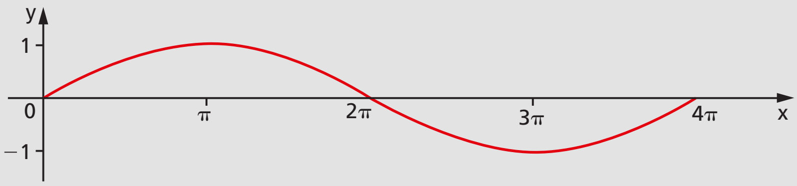
x	$t = \frac{x}{2}$	y
	0	0
	$\frac{\pi}{2}$	1
	π	0
	$\frac{3\pi}{2}$	-1
	2π	0

x	$t = \frac{x}{2}$	y
0	0	0
π	$\frac{\pi}{2}$	1
2π	π	0
3π	$\frac{3\pi}{2}$	-1
4π	2π	0

É imediato que:

Im(f) = [−1, 1]

p(f) = 4π



135. f: ℝ → ℝ dada por f(x) = sen 3x.

Solução

x	t = 3x	y
	0	
	$\frac{\pi}{2}$	
	π	
	$\frac{3\pi}{2}$	
	2π	

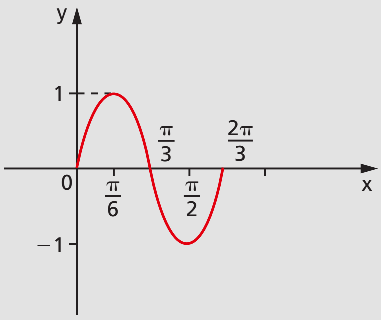
x	t = 3x	y
	0	0
	$\frac{\pi}{2}$	1
	π	0
	$\frac{3\pi}{2}$	−1
	2π	0

x	t = 3x	y
0	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	π	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	−1
$\frac{2\pi}{3}$	2π	0

É imediato que:

Im(f) = [−1, 1]

p(f) = $\frac{2\pi}{3}$



136. f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -\text{sen}\,\frac{x}{3}$.

137. f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3 \cdot \text{sen}\,4x$.

138. f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 + \text{sen}\,x$.

Solução

x	sen x	y
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		

x	sen x	y
0	0	
$\frac{\pi}{2}$	1	
π	0	
$\frac{3\pi}{2}$	-1	
2π	0	

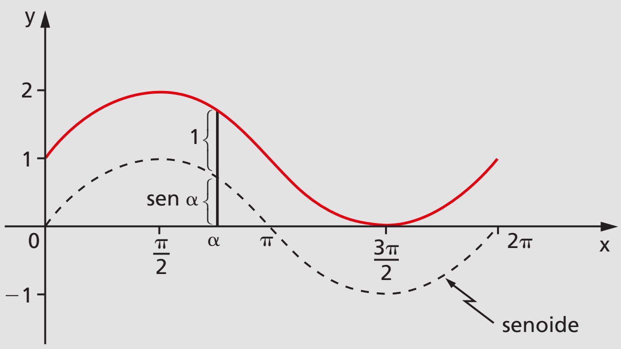
x	sen x	y
0	0	1
$\frac{\pi}{2}$	1	2
π	0	1
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
2π	0	1

Notemos que o gráfico deve apresentar para cada *x* uma ordenada *y* que é igual ao seno de *x* mais uma unidade. Se cada seno sofre um acréscimo de 1, então a senoide sofre uma translação de uma unidade "para cima".

É imediato que:

$\text{Im}(f) = [0, 2]$

$p(f) = 2\pi$



139. f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -2 + \text{sen}\,x$.

140. f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 + 2 \cdot \text{sen } x$.

141. f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2 - \text{sen } x$.

142. f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -1 + \text{sen } 2x$.

143. f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 + 3 \cdot \text{sen } \frac{x}{2}$.

144. f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Solução

x	$t = x - \frac{\pi}{4}$	y
	0	
	$\frac{\pi}{2}$	
	π	
	$\frac{3\pi}{2}$	
	2π	

x	$t = x - \frac{\pi}{4}$	y
	0	0
	$\frac{\pi}{2}$	1
	π	0
	$\frac{3\pi}{2}$	-1
	2π	0

x	$t = x - \frac{\pi}{4}$	y
$\frac{\pi}{4}$	0	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{5\pi}{4}$	π	0
$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	-1
$\frac{9\pi}{4}$	2π	0

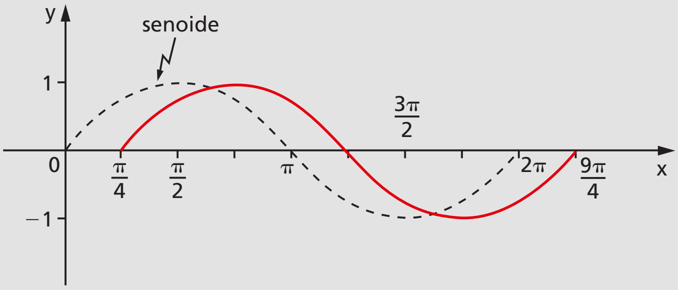
Notemos que o gráfico deve apresentar para cada *x* uma ordenada *y* que é o seno de $x - \frac{\pi}{4}$. Notemos que para sen t completar um período é necessário que $t = x - \frac{\pi}{4}$ percorra o intervalo $[0, 2\pi]$, isto é, *x* percorra o intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right]$.

Assim, o período de *f* é:

$$p(f) = \frac{9\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 2\pi$$

É imediato que:

$\text{Im}(f) = [-1, 1]$



145. f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

146. f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

147. f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$.

148. Sendo *a*, *b*, *c*, *d* números reais e positivos, determine imagem e período da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a + b \cdot \text{sen}\,(cx + d)$.

Solução

Façamos $cx + d = t$. Quando *x* percorre $\mathbb{R}$, *t* percorre $\mathbb{R}$ (pois a função afim $t = cx + d$ é sobrejetora) e, em consequência, sen t percorre o intervalo $[-1, 1]$, $b \cdot \text{sen}\, t$ percorre o intervalo $[-b, b]$ e $y = a + b \cdot \text{sen}\, t$ percorre o intervalo $[a - b, a + b]$, que é a imagem de *f*.

Para que *f* complete um período é necessário que *t* varie de 0 a 2π, então:

$$t = 0 \quad \Rightarrow cx + d = 0 \quad \Rightarrow x = -\frac{d}{c}$$

$$t = 2\pi \ \Rightarrow cx + d = 2\pi \Rightarrow x = \frac{2\pi}{c} - \frac{d}{c}$$

Portanto:

$$p = \Delta x = \left(\frac{2\pi}{c} - \frac{d}{c}\right) - \left(-\frac{d}{c}\right) = \frac{2\pi}{c}.$$

149. Determine o período da função dada por $y = 3 \text{ sen} \left(2\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$.

150. Construa o gráfico de um período da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = 1 - 2 \cdot \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$$

151. Para que valores de *m* existe *x* tal que sen x = 2m − 5?

Solução

Para que exista *x* satisfazendo a igualdade acima, devemos ter:

$$-1 \leqslant 2m - 5 \leqslant 1 \iff 4 \leqslant 2m \leqslant 6 \iff 2 \leqslant m \leqslant 3.$$

152. Em cada caso abaixo, para que valores de *m* existe *x* satisfazendo a igualdade:

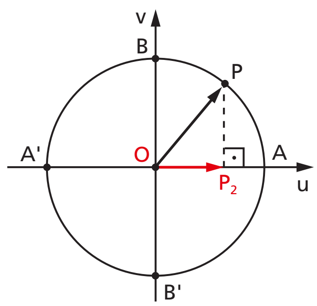
a) sen x = 2 − 5m;

b) $\text{sen } x = \dfrac{m - 1}{m - 2}$?

V. Função cosseno

111. Definição

Dado um número real *x*, seja P sua imagem no ciclo. Denominamos cosseno de *x* (e indicamos cos x) a abscissa $\overline{OP_2}$ do ponto P em relação ao sistema uOv. Denominamos **função cosseno** a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada real *x* o real OP_2 = cos x, isto é, f(x) = cos x.



112. Propriedades

As propriedades da razão trigonométrica cosseno, já vistas no capítulo IV, item 57, a saber: (a) se *x* é do primeiro ou do quarto quadrante, então cos x é positivo; (b) se *x* é do segundo ou do terceiro quadrante, então cos x é negativo; (c) se *x* percorre o