



# Elementos de Aritmética

Lista de Aprofundamento

2ª Avaliação

Prof<sup>a</sup> Karla Lima

2024.1

## Sumário

<b>1</b>	<b>Os Números Inteiros</b>	<b>4</b>
1.1	Múltiplos de Números Inteiros . . . . .	4
1.2	Divisores de um Número Inteiro . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Os Números Racionais</b>	<b>6</b>

## Resumo

"A Arte de Resolver Problemas (1945)" é um livro clássico escrito por George Pólya, que oferece uma abordagem sistemática e prática para resolver problemas matemáticos e, por extensão, problemas em diversas áreas da vida.

Ele destaca estratégias heurísticas, como divisão em subproblemas, analogia, tentativa e erro, e trabalhar de trás para frente.

Além disso, o autor enfatiza a importância de persistência, criatividade e flexibilidade mental na resolução de problemas.

Abaixo, segue o esquema introduzido por Pólya para a resolução de problemas. Use-o para ajudar no processo de aprendizado.





# 1 Os Números Inteiros

## 1.1 Múltiplos de Números Inteiros

### Exercício 1

*O Problema 3.7 de [1] (Hefez, A.) pede para mostrar as seguintes propriedades, para um elemento  $a \in \mathbb{Z}$ :*

- i) 0 é múltiplo de  $a$ .*
- ii) Se  $m$  é um múltiplo de  $a$ , então  $-m$  é um múltiplo de  $a$ .*
- iii) Um múltiplo de um múltiplo de  $a$  é um múltiplo de  $a$ .*
- iv) Se  $m$  e  $m'$  são múltiplos de  $a$ , então  $m + m'$  e  $m - m'$  são também múltiplos de  $a$ .*
- v) Se  $m$  e  $m'$  são múltiplos de  $a$ , então  $e \cdot m + f \cdot m'$  é múltiplo de  $a$ , quaisquer que sejam os inteiros  $e$  e  $f$ .*
- vi) Se  $m + m'$  ou  $m - m'$  é múltiplo de  $a$  e  $m$  é múltiplo de  $a$ , então  $m'$  também é múltiplo de  $a$ .*

*Resolva os itens a seguir.*

- a) Para cada item, faça um caso particular, escolhendo valores adequados para  $a$ ,  $m$ ,  $m'$ ,  $e$  e  $f$ .*
- b) Demonstre, formalmente, cada um dos itens de (i) até (vi).*

**Exercício 2** *Faça o mesmo para o Problema 3.8 de [1] (Hefez, A.) .*

## 1.2 Divisores de um Número Inteiro

**Exercício 3** *Mostre que se  $a$  é um inteiro não nulo, os divisores de  $a$  são em número finito.*

**Exercício 4** *Mostre que se  $a$  e  $b$  são números naturais não nulos, então  $a|b$  e  $b|a$  se, e somente se,  $a = b$ .*

**Exercício 5** *Em cada item, escolha casos particulares adequados de  $a$ ,  $b$  e  $d$  e verifique as propriedades. Depois, demonstre-as formalmente.*

a) *Se  $d|a$  e  $d|b$ , então  $d|b+a$  e  $d|(b-a)$ .*

b) *Se  $d|b+a$  ou  $d|(b-a)$  e  $d|a$ , então  $d|b$ .*

**Exercício 6** *O que é o **máximo divisor comum** de dois números inteiros  $a$  e  $b$ ?*

**Exercício 7** *Mostre que:*

a) *O  $\text{mdc}(0,0)$  não existe.*

b) *Se  $b \neq 0$ , então*

$$\text{mdc}(0, b) = \begin{cases} b, & \text{se } b > 0, \\ -b, & \text{se } b < 0. \end{cases}$$

c) *Mostre que se  $a \neq 0$  ou  $b \neq 0$ , então*

$$\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(-a, b) = \text{mdc}(a, -b) = \text{mdc}(-a, -b).$$

**Exercício 8** *Um número  $d$  é divisor comum de  $a$  e  $b$ , ambos não nulos, se, e somente se, ele é um divisor comum de  $a$  e  $b - a$ .*

**Exercício 9** *O que são números primos entre si?*

## 2 Os Números Racionais

**Exercício 10** *Simplifique as frações abaixo até obter uma fração irredutível.*

a)  $\frac{20}{30}$

b)  $\frac{12}{20}$

c)  $\frac{15}{25}$

d)  $\frac{200}{75}$

e)  $\frac{28}{21}$

**Exercício 11** *Resolva as seguintes operações fracionárias, simplificando o resultado até obter uma fração irredutível, quando possível.*

a)  $\frac{11}{12} - \frac{5}{12}$

b)  $\frac{1}{4} + \frac{5}{4} - \frac{3}{4}$

c)  $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7}$

d)  $\frac{2}{11} \cdot \frac{5}{4}$

e)  $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$

**Exercício 12** *Qual a fração equivalente a  $\frac{2}{9}$ , cujo denominador é 27?*

**Exercício 13** *Encontre uma fração equivalente a  $\frac{2}{5}$ , sabendo que a soma do numerador com o denominador é 28.*

**Exercício 14** *Alberto e Beto estão comendo uma pizza. Se Alberto já comeu  $\frac{1}{8}$  e Beto  $\frac{3}{8}$ , qual a fração que sobrou desta pizza?*

**Exercício 15** *A rodovia que liga duas cidades, Campina da Lagoa e Juranda, está sendo reformada. Se  $\frac{1}{3}$  já foi reformada e ainda faltam 20 km, qual o comprimento desta rodovia?*

**Exercício 16** *Luísa tomou  $\frac{1}{5}$  de um refrigerante de 1500 mililitros. Seu irmão, Luiz, tomou  $\frac{2}{3}$  do que havia sobrado. Qual a quantidade de refrigerante que ainda resta na garrafa?*

**Exercício 17** *João fez uma viagem de ida e volta entre Pirajuba e Quixajuba em seu carro, que pode rodar com álcool e com gasolina. Na ida, apenas com álcool no tanque, seu carro fez 12 km por litro e na volta, apenas com gasolina no tanque, fez 15 km por litro. No total, João gastou 18 litros de combustível nessa viagem. Qual é a distância entre Pirajuba e Quixajuba?*

**Exercício 18** *Um ônibus transporta 31 estudantes, baianos e mineiros, para um encontro de participantes da OBMEP. Entre os baianos,  $\frac{2}{5}$  são homens e, entre os mineiros,  $\frac{3}{7}$  são mulheres. Entre todos os estudantes quantas são as mulheres?*



## Referências

- [1] A. Hefez. *Iniciação à Aritmética*. IMPA, 2015.

## Referências

- [1] A. Hefez. *Iniciação à Aritmética*. IMPA, 2015.