CÁLCULO II

Técnicas de Integração

Polinômios

Karla Lima

Sumário

Revisão de Polinômios

Definição[1]

Definição 1

Um ***polinômio em x*** *é qualquer expressão que pode ser escrita na forma*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

onde n é um número natural e os coeficientes a_i's $(i = 0, 1, \ldots, n)$ são números reais.

Exemplos

Exemplo 1

São polinômios as expressões abaixo:

1. $2x + 1$
2. $-\sqrt{5}x^3 + x^2 + 3$
3. $\pi x^{10} + 2$

Exemplo 2

Não são polinômios as expressões abaixo:

1. $\sqrt{x} + 2$: *raízes são potências da forma* $\frac{p}{q}$ *que não são números naturais.*
2. $5x^{-3} + x^2$: *a potência negativa não é um número natural.*

Operações com Polinômios

Adição e Subtração: agrupamos termos semelhantes (em que a variável possui a mesma potência) e então os combinamos, usando a propriedade distributiva.

Exemplo 3

Vamos somar os polinômios $2x^3 - 3x^2 + \sqrt{11}x - 1$ *e* $2x^2 - 5x + 3$*:*

- agrupamos os termos em que as potências de x coincidem:

$$2x^3 - 3x^2 + \sqrt{11}x - 1 + 2x^2 - 5x + 3 = 2x^3 + (-3x^2 + 2x^2) + (\sqrt{11}x - 5x) + (-1 + 3)$$

- aplicamos a propriedade distributiva e efetuamos as operações possíveis:

$$= 2x^3 + (-3 + 2)x^2 + (\sqrt{11} - 5)x + (-1 + 3) = 2x^3 - x^2 + (\sqrt{11} - 5)x + 2$$

Operações com Polinômios

Produto: basta aplicar a propriedade distributiva.

Exemplo 4

Vamos calcular o produto entre ps polinômios $3x + 2$ *e* $4x - 5$*:*

- como é um produto entre vários termos, é importante inserir parênteses para separar os polinômios. Aplica-se a distributiva:

$$\begin{aligned}(3x+2)(4x-5) &= 3x(4x-5) + 2(4x-5)\\ &= (3x)(4x) - (3x)\cdot 5 + 2(4x) - 2\cdot 5\\ &= 12x^2 - 15x + 8x - 10\end{aligned}$$

Produtos notáveis

- Quadrado de uma soma de dois termos (Quadrado Perfeito):

$$(u+v)^2 = (u+v)(u+v) = u^2 + 2uv + v^2$$

- Quadrado de uma diferença de dois termos (Quadrado Perfeito):

$$(u-v)^2 = (u-v)(u-v) = u^2 - 2uv + v^2$$

- Produto da soma pela diferença:

$$(u+v)(u-v) = u^2 - v^2$$

Fatoração e Divisão de Polinômios

Fatoração

Fatorar polinômios corresponde ao processo inverso das leis de distributividade da multiplicação, colocando os fatores comuns em evidência. Podemos também usar os produtos notáveis para fatorar um polinômio.

Exemplo

Exemplo 5

Vamos fatorar os polinômios a seguir:

1. $2x^3 + 2x^2 - 6x$

(2x está na fatoração de todos os termos)

$$\begin{aligned} 2x^3 + 2x^2 - 6x &= (2x)x^2 + (2x)x - 3(2x) \\ &= 2x(x^2 + x - 3) \end{aligned}$$

2. $3x^5 - 24x^4 + 12x^3$

(3x^3 está na fatoração de todos os termos)

$$\begin{aligned} 3x^5 - 24x^4 + 12x^3 &= (3x^3)x^2 - (3x^3)(8x) + 4(3x^3) \\ &= 3x^3(x^2 - 8x + 4) \end{aligned}$$

Exemplo

3. $25x^2 - 36$

(Diferença de dois quadrados)

$$\begin{aligned} 25x^2 - 36 &= (5x)^2 - 6^2 \\ &= (5x+6)(5x-6) \end{aligned}$$

4. $4x^2 - (x^3+3)^2$

(Diferença de dois quadrados)

$$\begin{aligned} 4x^2 - (x^3+3)^2 &= (2x)^2 - (x^3+3)^2 \\ &= (2x + x^3 + 3)(2x - (x^3+3)) \\ &= (2x + x^3 + 3)(2x - x^3 - 3) \end{aligned}$$

Exemplo

5. $9x^2 + 6x + 1$

(Quadrado Perfeito)

$$\begin{aligned} 9x^2 + 6x + 1 &= (3x)^2 + 2(3x) \cdot 1 + 1^2 \\ &= (3x+1)^2 \end{aligned}$$

6. $4x^2 - 12x + 9$

(Quadrado Perfeito)

$$\begin{aligned} 4x^2 - 12x + 9 &= (2x)^2 - 2(2x) \cdot 3 + 3^2 \\ &= (2x-3)^2 \end{aligned}$$

Fatoração por Agrupamento

Considere o polinômio $3x^3 + x^2 - 6x - 2$.
Nenhuma das fatorações anteriores podem ser aplicadas nesse exemplo. Vamos fatorar por agrupamento.
Para tanto, procuramos termos que tenham algum fator em comum:

i) $3x^3$ e x^2 possuem o fator x^2 em comum e $-6x$ e -2 possuem o -2;
ii) $3x^3$ e $-6x$ possuem o fator $3x$ em comum, porém x^2 e -2 não possuem fator em comum;
iii) x^2 e $-6x$ possuem o fator x em comum, porém $3x^3$ e -2não possuem fator em comum.

Portanto, a única opção viável é o agrupamento em i).

Fatoração por Agrupamento

Portanto, fazemos

$$\begin{aligned}
3x^3 + x^2 - 6x - 2 &= (3x^3 + x^2) + (-6x - 2) \\
&= [x^2(3x) + x^2 \cdot 1] + [(-2)(3x) - (-2) \cdot 1] \\
&= x^2(3x + 1) - 2(3x + 1) \text{ (o fator } (3x + 1) \text{ é comum)} \\
&= (3x + 1)(x^2 - 2)
\end{aligned}$$

Exemplo

Exemplo 6

Usando a fatoração por agrupamento, fatore o polinômio $x^6 - 3x^4 + x^2 - 3$.

Solução: Analisando as possíveis combinações, vemos que podemos juntar os pares com fatores em comum x^6 com x^2 e $-3x^4$ com -3:

$$\begin{aligned} x^6 - 3x^4 + x^2 - 3 &= (x^6 + x^2) + (-3x^4 - 3) \\ &= (x^4 \cdot x^2 + x^2 \cdot 1) + [(-3)x^4 + (-3) \cdot 1] \\ &= x^2(x^4 + 1) - 3(x^4 + 1) \text{ (o fator } (x^4+1) \text{ é comum)} \\ &= (x^4 + 1)(x^2 - 3) \end{aligned}$$

Fatoração com as raízes do polinômio

Se um polinômio $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ tem n raízes reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$, podemos escrever

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n).$$

Exemplo

Exemplo 7

Escreva a fatoração dos polinômios abaixo:

1. $2x^3 + 3x^2 - 2x$

Divisão de Polinômios

É possível aplicar a técnica de divisão longa, para encontrar um quociente e resto da divisão entre dois polinômios. Arranje o dividendo e o divisor em potências decrescentes da variável. Insira termos com coeficientes zero e use o procedimento da divisão longa. Vamos dividir os polinômios $x^3 + x$ e $x - 1$ (o de maior grau pelo de menor):

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & & +x & & x-1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & & & x^2+x+2 \\ \cline{1-2}
 & x^2 & +x & & \\
 & -x^2 & +x & & \\ \cline{2-3}
 & & 2x & & \\
 & & -2x & +2 & \\ \cline{3-4}
 & & & 2 &
\end{array}
$$

Divisão de Polinômios

Assim como fazemos com os números, podemos reescrever o dividendo como sendo o produto do divisor pelo resultado do quociente, mais o resto:

$$x^3 + x = (x - 1)(x^2 + x + 2) + 2$$

Com isso, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{x^3 + x}{x - 1} &= \frac{(x - 1)(x^2 + x + 2) + 2}{x - 1} \\
&= \frac{(x - 1)}{x - 1}(x^2 + x + 2) + \frac{2}{x - 1} \\
&= x^2 + x + 2 + \frac{2}{x - 1}
\end{aligned}$$

Exemplos

Exemplo 8

Calcule as divisões polinomiais a seguir.

1. $\dfrac{x^3 - 5x^2 + 7x - 9}{x - 4}$

Solução:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -5x^2 & +7x & -9 & x-4 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +4x^2 & & & x^2 - x + 3 \\ \cline{1-2}
 & -x^2 & +7x & & \\
 & x^2 & -4x & & \\ \cline{2-3}
 & & 3x & -9 & \\
 & & -3x & +12 & \\ \cline{3-4}
 & & & 3 &
\end{array}
$$

Exemplos

2. $\dfrac{2x^4 - x^2 - 2}{x^2 + 2x - 1}$

Solução:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & & -x^2 & & -2 & x^2 + 2x - 1 \\
\cline{6-6}
-2x^4 & -4x^3 & +2x^2 & & & 2x^2 - 4x + 9 \\
\cline{1-3}
 & -4x^3 & +x^2 & & & \\
 & 4x^3 & +8x^2 & -4x & & \\
\cline{2-4}
 & & 9x^2 & -4x & -2 & \\
 & & -9x^2 & -18x & +9 & \\
\cline{3-5}
 & & & -22x & +7 &
\end{array}
$$

Exemplos

3. $\dfrac{x^5+32}{x+2}$

Solução:

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & & & & & +32 & x+2 \\
\cline{7-7}
-x^5 & -2x^4 & & & & & x^4-2x^3+4x^2-8x+16 \\
\cline{1-2}
 & -2x^4 & & & & & \\
 & 2x^4 & +4x^3 & & & & \\
\cline{2-3}
 & & 4x^3 & & & & \\
 & & -4x^3 & -8x^2 & & & \\
\cline{3-4}
 & & & -8x^2 & & & \\
 & & & 8x^2 & +16x & & \\
\cline{4-5}
 & & & & 16x & +32 & \\
 & & & & -16x & -32 & \\
\cline{5-6}
 & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Exemplo

Podemos então escrever:

1.
$$\begin{aligned}\frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 9}{x - 4} &= \frac{(x-4)(x^2 - x + 3) + 3}{x - 4} \\ &= \frac{x-4}{x-4}(x^2 - x + 3) + \frac{3}{x-4} \\ &= x^2 - x + 3 + \frac{3}{x-4}\end{aligned}$$

Exemplo

2.

$$
\begin{aligned}
\frac{2x^4 - x^2 - 2}{x^2 + 2x - 1} &= \frac{(x^2 + 2x - 1)(2x^2 - 4x + 9) - 22x + 7}{x^2 + 2x - 1} \\
&= \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x - 1}(2x^2 - 4x + 9) + \frac{-22x + 7}{x^2 + 2x - 1} \\
&= 2x^2 - 4x + 9 - \frac{22x - 7}{x^2 + 2x - 1}
\end{aligned}
$$

Exemplo

3.

$$\begin{aligned}\frac{x^5+32}{x+2} &= \frac{(x+2)(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)}{x+2}\\ &= \frac{x+2}{x+2}(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)\\ &= x^4-2x^3+4x^2-8x+16\end{aligned}$$

Igualdade de Polinômios

Dois polinômios $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ e $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ são iguais se, e somente se,

- ambos possuem o mesmo grau ($m = n$);
- os coeficientes correspondentes são todos iguais:

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \ldots,\ a_n = b_n.$$

Referencias I

F. Safier.
Pré-Calculo: Coleção Schaum.
Coleção Schaum. Bookman, 2009.