CÁLCULO II

Integração

Aplicações

Karla Lima

Sumário

Equações Diferenciais Ordinárias Separáveis

Equações Diferenciais Ordinárias

- No trabalho 1, foi definido que uma equação diferencial ordinária (EDO) é uma equação que envolve uma função desconhecida $y = y(x)$, suas derivadas e a sua variável independente x.
- Além disso, vimos que uma função f é uma **solução** de uma equação diferencial se a equação é satisfeita quando $y = f(x)$ e suas derivadas são substituídas na equação.

EDO's Separáveis

Definição 1

Uma ***equação separável*** *é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem na qual a expressão para* $\frac{dy}{dx}$ *pode ser fatorada como uma função de* x *multiplicada por uma função de* y*:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{f(y)} \tag{1}$$

Leia sobre no arquivo **Equações Separáveis, J. Stewart**

Solução

- Sendo as funções $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ e $g : (a, b) \to R$ contínuas em seus domínios, com $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$, as soluções de equações separáveis não estão necessariamente definidas nesses domínios.
- Isso acontece com as equações diferenciais chamadas **não lineares**. As chamadas equações diferenciais **lineares** possuem um melhor comportamento com relação à soluções.
- Entretanto, podemos encontrar soluções de uma equação diferencial ordinária separável através da integração da equação 1, usando o método de substituição.

Solução

- Neste método, tomamos as soluções nas quais $f(y) \neq 0$.
- Seja F uma primitiva da função **contínua** f. Logo, $F' = f$.
- Com isso,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}F(y(x)) &= F'(y(x)) \cdot y'(x) \\ &= f(y) \cdot \frac{g(x)}{f(y)}. \end{aligned}$$

- Como $f(y) \neq 0$, obtemos

$$\frac{d}{dx}F(y(x)) = g(x).$$

Solução

- Portanto, $(F \circ y)(x) = G(x) + c$, onde G é uma primitiva desta função em algum subintervalo de (a, b).
- Temos que $F(y(x)) - G(x) = C$, para todo x e, em particular, para algum x_0 no intervalo de definição:

$$F(y(x)) - G(x) = F(y(x_0)) - G(x_0).$$

Solução

- Logo,

$$
\begin{aligned}
& F(y(x)) - G(x) = F(y(x_0)) - G(x_0) \\
\Rightarrow & F(y(x)) - F(y(x_0)) = G(x) - G(x_0) \\
\Rightarrow & \int_{x_0}^{x} [F(y(s))]' \, ds = \int_{x_0}^{x} G'(s) \, ds \\
\Rightarrow & \int_{x_0}^{x} F'(y) \cdot y' \, ds = \int_{x_0}^{x} G'(s) \, ds \\
\Rightarrow & \int_{y(x_0)}^{y(x)} f(y) \, dy = \int_{x_0}^{x} g(s) \, ds
\end{aligned}
$$

Solução de uma EDO Separável

- O que garante a existência de um intervalo de definição da solução é o chamado **Teorema da Função Implícita**, visto nos cursos de Análise.
- Com isso, para encontrar uma solução de uma EDO separável, devemos reescrevê-la na forma

$$f(y)\,dy = g(x)\,dx$$

e fazer a integração $\displaystyle\int f(y)\,dy = \int g(s)\,dx.$

Exemplos [1]

Exemplo 1

Resolva a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2}.$$

Depois, encontre a solução dessa equação que satisfaça a condição inicial $y(0) = 2$.

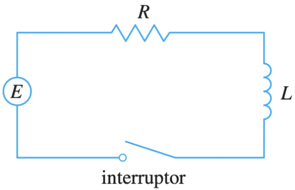
Exemplos

Exemplo 2

Resolva a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = x^2 y.$$

Circuito Elétrico



- O circuito elétrico simples, mostrado na figura acima, contém uma força eletromotriz (geralmente uma pilha ou gerador) que produz uma voltagem de $E(t)$ volts (V) e uma corrente de $I(t)$ amperes (A) em um instante t. O circuito também possui um resistor com resistência de R ohms (Ω) e um indutor com indutância de L henrys (H).

Circuito Elétrico

A Lei de Ohm diz que a queda na voltagem por causa do resistor é RI. A queda de voltagem por causa do indutor é$L(dI/dt)$. Uma das Leis de Kirchhoff diz que a soma das quedas de voltagem é igual à voltagem fornecida $E(t)$. Então temos

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t),$$

que é uma equação diferencial de primeira ordem que modela a corrente I no instante t.

Circuito Elétrico

Encontre uma expressão para a corrente em um circuito onde a resistência é 12Ω, a indutância é $4H$, a pilha fornece uma voltagem constante de $60V$ e o interruptor é ligado quando $t = 0$. Qual o valor-limite da corrente?

Referencias I

J. Stewart.
Calculo: volume 1.
Pioneira Thomson Learning, 2006.