ELEMENTOS DE ARITMÉTICA

Aula 04

Potências

Karla Lima

Sumário

Potências

O Rei e o Xadrez

Certa vez um homem ensinou um rei a jogar xadrez. O rei ficou tão fascinado com o jogo que ofereceu ao homem o que quisesse do seu reino. O homem pegou um tabuleiro de xadrez e disse: Eu quero a seguinte quantidade de grãos de trigo, um grão na primeira casa, dois grãos na segunda casa, quatro grãos na terceira casa e assim sucessivamente até a casa 64...o total de grãos é o que quero. O rei falou: - me ensinaste este esporte tão fascinante e tudo que me pede são estes punhados de trigo! Então o rei chamou um servo e ordenou para que fizesse o cálculo e desse ao homem o que lhe pedira. Após algum tempo o servo voltou e disse ao rei: -Majestade, o senhor poderia ordenar a todos homens do seu reino para trabalharem pelo resto de suas vidas no trigo e ainda assim não poderia satisfazer ao pedido deste homem. Você saberia dizer quantos grãos de trigo o homem pediu?

Potências

Definição 1

Dados dois números naturais a e n quaisquer, definimos a operação de potenciação como segue [1]*:*

a) $a^1 = a$, se $n = 1$;

b) $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fatores}}$, se $1 < n$.

[1] Lembrem-se, não estamos considerando o número 0 como um número natural.

Potências

Sejam a, b e c números naturais. Convença-se de que a potenciação possui as seguintes propriedades:

a) $1^n = 1$;

b) $a^n a^m = a^{m+n}$;

c) $(a^n)^m = a^{mn}$;

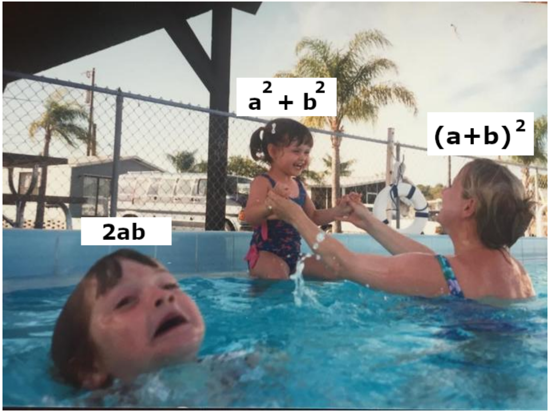
d) $a^n b^n = (ab)^n$.

O Quadrado de uma Soma

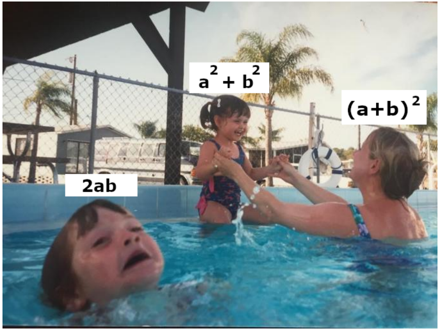
Qual é a fórmula para a potência de uma soma, do tipo $(a+b)^2$?

O Quadrado de uma Soma

Qual é a fórmula para a potência de uma soma, do tipo $(a+b)^2$?



O Quadrado de uma Soma



É muito comum as pessoas responderem que $(a+b)^2 = a^2 + b^2$, onde um simples cálculo pode derrubar tal equívoco.

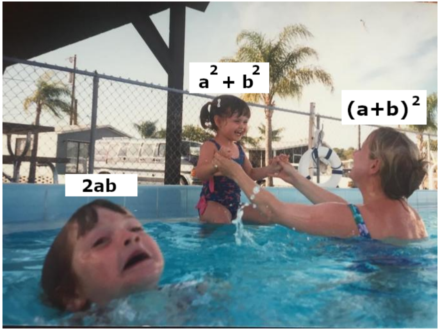
O Quadrado de uma Soma

Temos:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 =& (a+b)(a+b) && \text{(prop. distributiva)}\\
&= a(a+b) + b(a+b) && \text{(prop. distributiva)}\\
&= a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot a && \text{(prop. comutativa)}\\
&= a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2 && \text{(prop. distributiva/ evidência)}\\
&= a^2 + a \cdot b(1+1) + b^2 \\
&= a^2 + 2ab + b^2.
\end{aligned}
$$

O Quadrado de uma Soma

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



O Cubo de uma Soma

Analogamente, está correta a afirmação abaixo?

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3?$$

O Cubo de uma Soma

Analogamente, está correta a afirmação abaixo?

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3?$$

A resposta é não! Calcule usando as propriedades das operações $\cdot$ e $+$ dos números naturais.

Problemas

Problema 1

Exercício 1

Usando as propriedades da potenciação, escreva na forma de uma única potência:

a) $(4^3 \cdot 4^2)^2$;

b) $x^3 \cdot y^2 \cdot y^5 \cdot x \cdot x^3$.

Problema 2

Exercício 2

Sendo $a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 7$ *e* $b = 2^5 \cdot 3^6$*, discorra se* a *é ou não múltiplo de* b*.*

Problema 3

Exercício 3

Nos tempos antigos, não existiam as calculadoras eletrônicas e por isso eram ensinadas várias regras de cálculo mental. Uma delas era a seguinte:

Seja a um número natural cujo algarismo da unidade é 5, ou seja, $a = 10q + 5$, com q um número natural.

a) *Mostre que $a^2 = 100q(q+1) + 25$.*
b) *Com isto, ache uma regra para calcular mentalmente o quadrado de a.*
c) *Aplique a sua regra para calcular os quadrados dos números: 15, 45, 105 e 205.*

Critérios de Multiplicidade

Seja dado um número n escrito no sistema decimal como:

$$n = n_r 10^r + n_{r-1} 10^{r-1} + \cdots + n_1 10 + n_0.$$

Podemos então escrever

$$n = (n_{r-1} 10^r + n_{r-2} 10^{r-1} + \cdots + n_1) 10 + n_0.$$

onde n_0 é o algarismo das unidades de n.

Critérios de Multiplicidade de 2

Considere a tabela:

$$\begin{array}{lcl} 2 \times 0 = 0 & \qquad & 2 \times 5 = 10 = 10 + 0 \\ 2 \times 1 = 2 & & 2 \times 6 = 12 = 10 + 2 \\ 2 \times 2 = 4 & & 2 \times 7 = 14 = 10 + 4 \\ 2 \times 3 = 6 & & 2 \times 8 = 16 = 10 + 6 \\ 2 \times 4 = 8 & & 2 \times 9 = 18 = 10 + 8 \end{array}$$

Critérios de Multiplicidade de 2

Considere a tabela:

$$
\begin{array}{lcl}
2 \times 0 = 0 & \qquad & 2 \times 5 = 10 = 10 + 0 \\
2 \times 1 = 2 & & 2 \times 6 = 12 = 10 + 2 \\
2 \times 2 = 4 & & 2 \times 7 = 14 = 10 + 4 \\
2 \times 3 = 6 & & 2 \times 8 = 16 = 10 + 6 \\
2 \times 4 = 8 & & 2 \times 9 = 18 = 10 + 8
\end{array}
$$

Note que todo número acima é um múltiplo de 10 somado com um dos números: 0, 2, 4, 6, ou 8.

Critérios de Multiplicidade de 2

Teorema 1

Critério de Multiplicidade de 2:

i) *Se um número é múltiplo de 2, então o seu algarismo das unidades é par.*

ii) *Reciprocamente, se o algarismo da unidade de um número é par, então tal número também é par.*

Critérios de Multiplicidade de 2

Demonstração.

Feita em sala de aula e está disponível no livro texto da disciplina. □

Problema 4

Exercício 4

Mostre que:

i) *Se um número é múltiplo de* 5*, então o seu algarismo das unidades é* 0 *ou* 5*.*

ii) *Reciprocamente, se o algarismo da unidade de um número é* 0 *ou* 5*, então tal número é múltiplo de* 5*.*

Problema 5

Exercício 5

Mostre que:

i) *Se um número é múltiplo de* 10*, então o seu algarismo das unidades é* 0*.*

ii) *Reciprocamente, se o algarismo da unidade de um número é* 0*, então tal número é múltiplo de* 10*.*