Introdução ao Cálculo

Aula 15

Trigonometria

Karla Lima

Sumário

A Trigonometria no Triângulo Retângulo

Triângulos

Definição 1

Sejam A, B e C três pontos não colineares.

*Denominamos de **triângulo** ABC a união dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ e o denotaremos por $\triangle ABC$.*

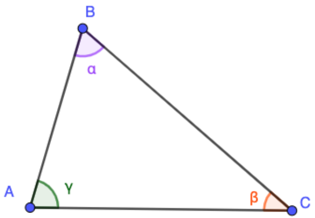
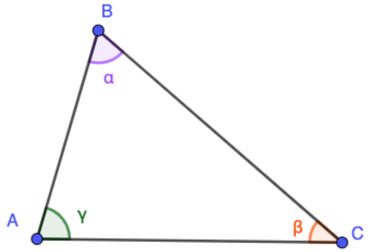


Figura 1: Triângulo ABC

Triângulos

- Os ângulos formados por dois lados de um triângulo são chamados **ângulos internos** do triângulo.
- É possível mostrar que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre 180°:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

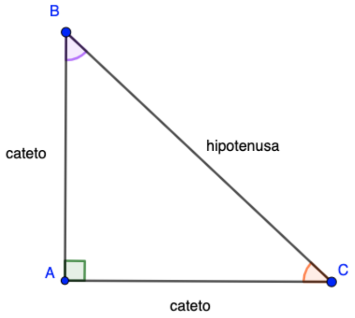


Triângulo Retângulo

Definição 2

*Um triângulo que possui um ângulo reto é denominado **triângulo retângulo**.*

- O lado oposto ao ângulo reto é chamado **hipotenusa**.
- Os outros lados são denominados **catetos** do triângulo.

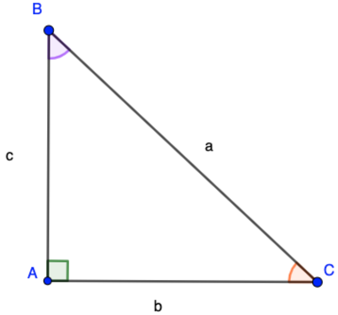


Relações Trigonométricas

- Seja a o comprimento da hipotenusa, e b e c os comprimentos dos catetos.
- O seno de um ângulo agudo ($< 90^\circ$) num triângulo retângulo é definido pela razão entre o cateto oposto à ele e a hipotenusa:

$$\text{sen}\,(\hat{B}) = \frac{b}{a}$$

$$\text{sen}\,(\hat{C}) = \frac{c}{a}$$



Relações Trigonométricas

- Já o cosseno de um ângulo α foi definido como o seno do seu complementar:

$$\cos(\hat{B}) = \text{sen}\,(90^\circ - \hat{B}) = \text{sen}\,(\hat{C}) = \frac{c}{a}$$

$$\cos(\hat{C}) = \text{sen}\,(90^\circ - \hat{C}) = \text{sen}\,(\hat{B}) = \frac{b}{a}$$

- Assim, a relação para obter o cosseno de um ângulo agudo é dada pela razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa.

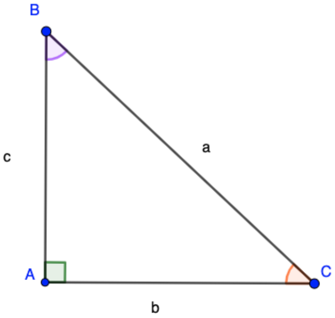


Figura 2: $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$

Independência do Tamanho do Triângulo

- As relações para seno e cosseno num triângulo retângulo dadas por

$$\text{sen}\,(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\textit{hipotenusa}} \qquad \text{e} \qquad \cos(\alpha) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\textit{hipotenusa}}$$

  independem do comprimento dos lados do triângulo.
- Estes valores dependem exclusivamente do ângulo α.
- Isto porque quaisquer dois triângulos que possuem os 3 ângulos com mesma medida, são semelhantes.

Semelhança de Triângulos

- De forma grosseira, dizemos que duas figuras são **semelhantes** se uma delas é uma ampliação ou redução da outra, sem mudar sua forma original.

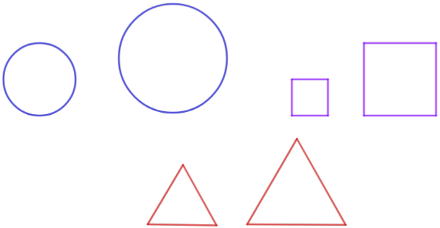


Figura 3: São semelhantes: duas circunferências quaisquer, dois quadrados quaisquer e dois triângulos equiláteros quaisquer.

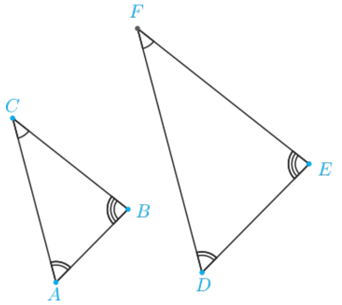
Semelhança

Definição 3

Dois triângulos são ditos ***semelhantes*** *se for possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam congruentes e lados correspondentes sejam proporcionais.*

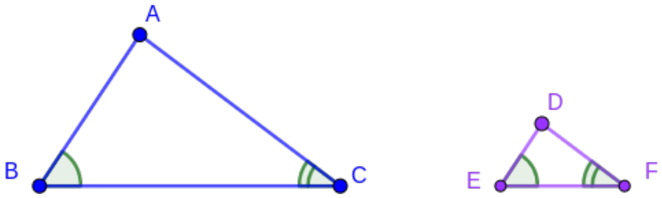
- $\hat{A} = \hat{D}$
- $\hat{B} = \hat{E}$
- $\hat{C} = \hat{F}$
- $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$

Notação: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$



1º Caso de Semelhança: AA

1° Caso de Semelhança: Se dois triângulos têm dois pares de ângulos respectivamente congruentes, então os triângulos são semelhantes.



- Ou seja, além de ângulos com a mesma medida, os lados dos triângulos possuem a seguinte relação:

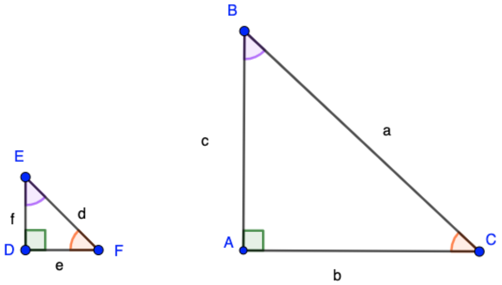
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}.$$

Independência do Tamanho do Triângulo

- Como dois triângulos retângulos que possuem ângulos de mesma medida são semelhantes, temos $\hat{B} = \hat{E} = \alpha$ e:

$$\frac{b}{e} = \frac{a}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{e}{d} = \text{sen}\,(\alpha)$$
$$\frac{c}{f} = \frac{a}{d} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{f}{d} = \cos(\alpha)$$

- O mesmo se verifica para os outros ângulos.



Teorema de Pitágoras e a Relação Fundamental

- Uma das relações mais importantes da Trigonometria é dada pelo Teorema de Pitágoras, que diz que os quadrados dos comprimentos dos lados de um triângulo retângulo estão relacionados como a seguir:

$$(\text{hipotenusa})^2 = (\text{cateto b})^2 + (\text{cateto c})^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

- Assim,

$$[\text{sen}\,(\hat{B})]^2 + [\cos(\hat{B})]^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

- Escrevemos também como $\text{sen}^2(\hat{B}) + \cos^2(\hat{B}) = 1$.

O Ciclo Trigonométrico

Ângulos em Circunferências

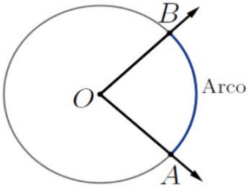
- Até agora, vimos como calcular as relações seno e cosseno em triângulos retângulos.
- Como a soma dos seus ângulos internos é 180°, e um dos seus ângulos é reto, a soma dos outros dois é $\alpha + \beta = 90^\circ$.
- Assim, por termos $\alpha, \beta \geq 0$, concluímos que

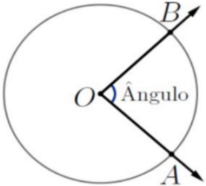
$$\alpha < \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \alpha < 90^\circ$$
$$\beta < \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \beta < 90^\circ$$

- Portanto, até agora, só conseguimos calcular seno e cossenos de ângulos positivos e menores que 90°.

Ângulos em Circunferências

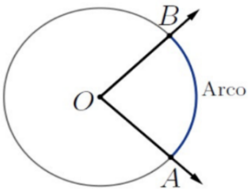
- Podemos estender o conceito de ângulos para circunferências.
- Dada uma circunferência de centro O, quaisquer dois pontos *A* e *B* sobre esta circunferência determinam um arco e um ângulo central, ambos considerados de *A* para *B*, no sentido anti-horário.

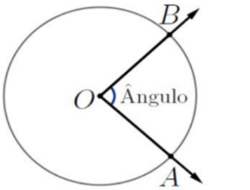




Ângulos em Circunferências

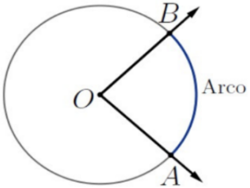
- Fixada uma circunferência, todo arco está associado a um ângulo e vice-versa.
- Quando os pontos A e B coincidem, tem-se um arco nulo, ou arco de uma volta; e, quando os pontos A e B são diametralmente opostos, tem-se um arco de meia volta.

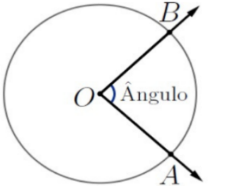




Ângulos em Circunferências

- O comprimento do arco é a medida linear do arco considerado.
- O comprimento de um arco depende, portanto, do raio da circunferência que o contém e as unidades utilizadas são as usuais, tais como: centímetro, metro, etc.





Arco de Circunferência

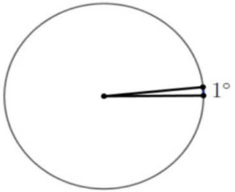
Definição 4

A medida de um arco de circunferência é a medida do ângulo central associado a este arco, independentemente do raio da circunferência.

- As unidades mais utilizadas para medir ângulos são o **grau** e o **radiano**.

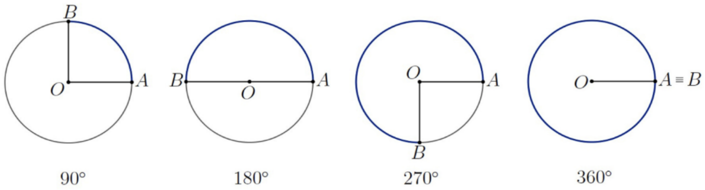
Ângulos em Circunferências

- **Definição:** Um grau (símbolo: 1°) corresponde à medida de um arco cujo comprimento é igual a $\frac{1}{360}$ do comprimento da circunferência que está sendo considerada.
- Em particular, o arco de uma volta mede 360°, o arco de meia volta mede 180°, e assim por diante.



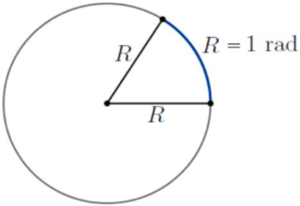
Exemplos

- Note que esta unidade de medida independe do comprimento do raio da circunferência.



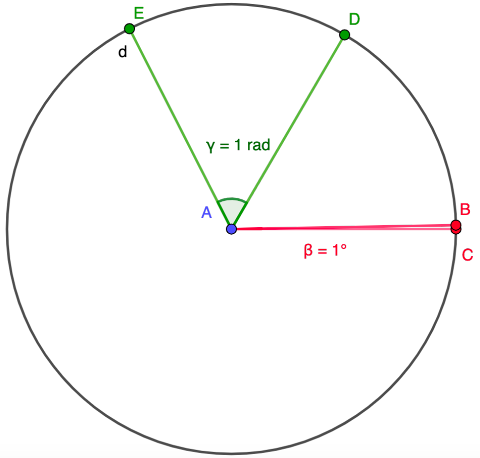
Ângulos em Circunferências

- **Definição:** Um radiano (símbolo: 1 *rad*) corresponde à medida de um arco que tem o mesmo comprimento do raio da circunferência que está sendo considerada.
- O comprimento de uma circunferência é dada pela relação $C = 2\pi R$, onde R é o seu raio.
- Em particular, o arco de uma volta completa equivale a 2π *rad*, o arco de meia volta equivale a π *rad*, e assim por diante.



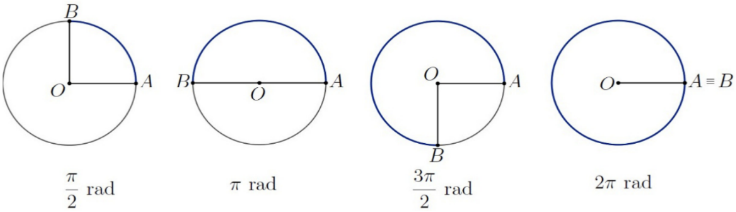
Comparação entre Graus e Radianos

- O modo de medir é diferente: o arco de 1° não tem a mesma abertura de um arco de 1 *rad*:



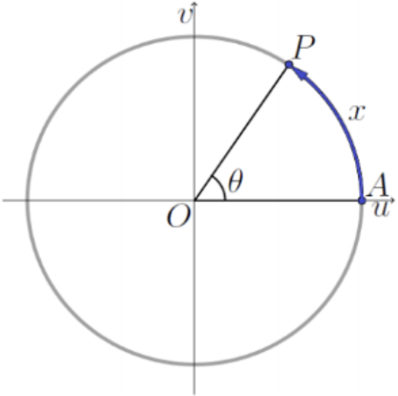
Exemplos

- Note que esta unidade de medida também independe do comprimento do raio da circunferência.



O Ciclo Trigonométrico

- O **ciclo trigonométrico** é a circunferência orientada de raio unitário, centrada na origem do sistema de coordenadas cartesianas, na qual o sentido positivo é o anti-horário.



Relação entre graus e radianos

- Assim como com temperaturas, medidas de comprimento e etc, podemos relacionar duas unidades de medidas de ângulos.
- Por exemplo, medir $1^{\circ}\mathrm{C}$ (graus Celsius) é equivalente a medir a temperatura de $33.8^{\circ}F$ (Fahrenheit).
- Já medir 1 km é equivalente a medir a distância de, aproximadamente, $0,62$ milhas.

Relação entre graus e radianos

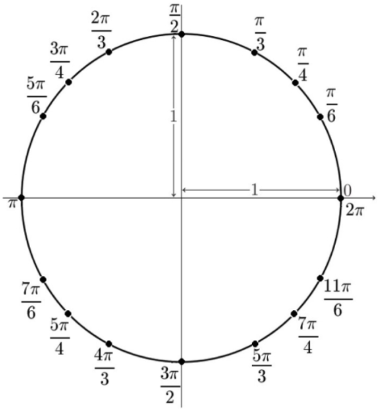
- No caso dos ângulos, temos:
  - A circunferência completa possui 360°, já que a dividimos em 360 partes iguais para determinar o ângulo de 1°. Portanto, meia circunferência possui 180°.
  - Já em radianos, a circunferência completa possui 2π radianos. Logo, meia circunferência possui π *rad*.
  - Assim, o ângulo de 180° representa a mesma abertura que o ângulo de π *rad*:

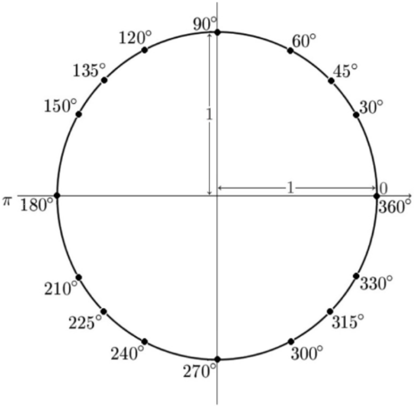
$$180^\circ \leftrightarrow \pi \, rad$$

- Com a relação de proporcionalidade gerada acima, podemos converter ângulos de graus para radianos e vice-versa.

Arcos no Ciclo Trigonométrico

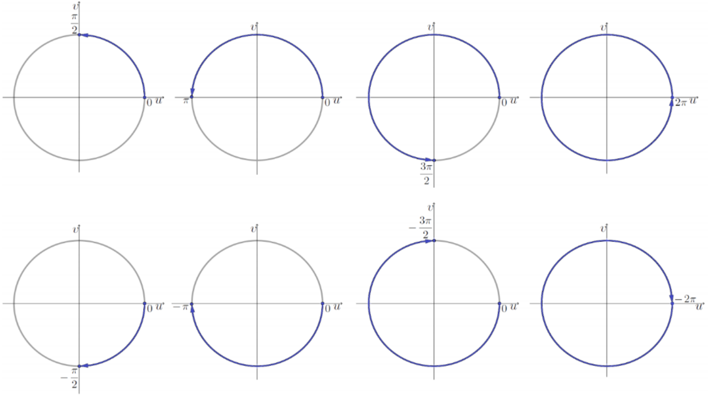
- A figura a seguir destaca a correspondência entre os principais arcos que serão utilizados, com as respectivas representações em radianos e graus.





Outros Valores de Ângulos

- Para valores negativos, basta percorrer o ciclo trigonométrico no sentido horário, a partir do ponto cartesiano $(1, 0)$.



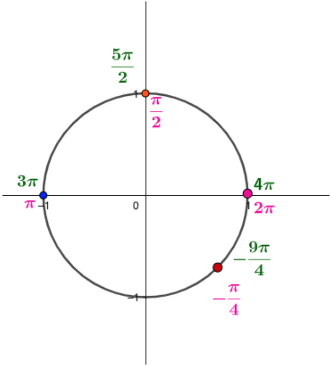
Outros Valores de Ângulos

- Para valores de ângulos maiores que 2π *rad* (ou 360°) e menores que -2π *rad* (ou -360°), percorremos mais de uma vez o circulo trigonométrico e verificamos em qual posição a contagem para.
- Associamos esse ângulo ao ângulo no intervalo de $[0, 2\pi]$, em radianos, quando percorrido no sentido horário e no intervalo de $[-2\pi, 0]$, em radianos, quando percorrido no sentido anti-horário.

Outros Valores de Ângulos

- Por exemplo, com um ângulo de 4π *rad*, podemos percorrer o ciclo trigonométrico (que tem comprimento $2\pi * R = 2\pi * 1 = 2\pi$) completamente 2 vezes. Logo, paramos exatamente no ponto onde o ângulo é representado por 2π *rad*.
- Já no caso do ângulo de 3π *rad*, podemos dar uma volta completa (2π *rad*) e sobra ainda meia volta (π *rad*). Com isso, paramos exatamente no ponto onde o ângulo é representado por π *rad*.

Outros Valores de Ângulos



- Assim, podemos representar um ângulo α associado a qualquer número real, em radianos, construindo uma função real.

Funções Trigonométricas

Funções Periódicas

- As funções seno e cosseno são ditas periódicas de período 2π.
- Isso quer dizer que os valores das suas imagens se repetem em períodos de 2π.
- Se $k \in \mathbb{Z}$, então valem:

$$\text{sen }(-4\pi) = \text{sen }(-2\pi) = \text{sen }(0) = \text{sen }(2\pi) = \text{sen }(4\pi) = \text{sen }(0 + k(2\pi))$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{11\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{15\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + k(2\pi)\right)$$

Atividade Geogebra

1. Baixe o arquivo Função Seno e abra no https://www.geogebra.org/classic.

Função Seno

Dado um número real x, seja $P = (a, b)$ sua imagem no ciclo. Denominamos seno de x (e indicamos $\text{sen}\, x$) a ordenada b do ponto P em relação ao sistema cartesiano dado.

Definição 5

Denominamos ***função seno*** *a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que associa a cada número real x a ordenada b da sua imagem no ciclo: $f(x) = \text{sen}\, x$.*

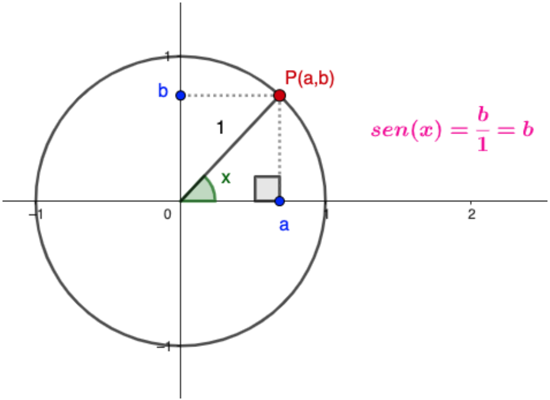
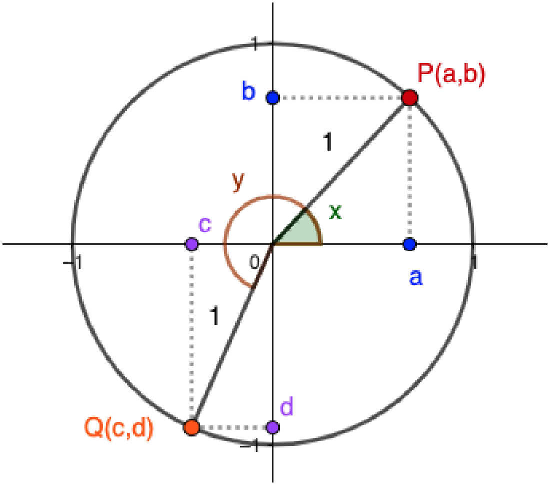


Figura 4: O seno de x no Ciclo Trigonométrico

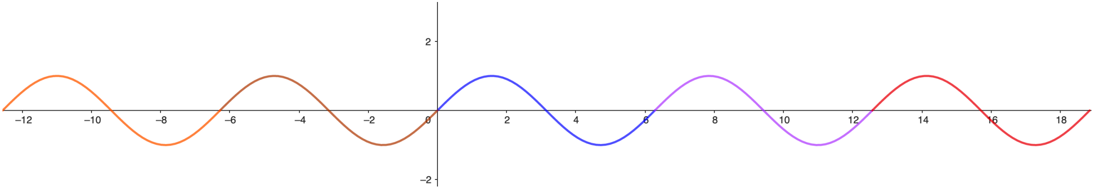
Função Seno

- Como podemos ver ao lado, dependendo do ângulo, o sinal da sua ordenada pode ser positivo ou negativo.
- No exemplo ao lado, sen $x > 0$ pois sua ordenada está acima do eixo horizontal.
- Por outro lado, sen $y < 0$ pois sua ordenada está abaixo do eixo horizontal.



O Gráfico da Função Seno

A cada período de comprimento 2π, a forma do gráfico se repete:

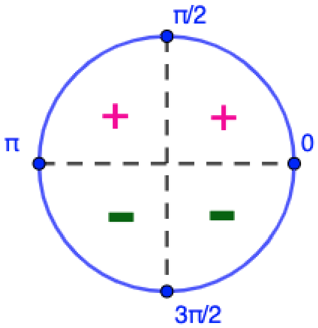


- Analise os zeros, o sinal, o crescimento e o decrescimento dessa função.

O Gráfico da Função Seno

Podemos usar o Ciclo Trigonométrico para estudar as propriedades pedidas:

Sinal na função seno



Ordenadas iguais a zero nos ângulos da forma:

$k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Atividade Geogebra

1. Abra novamente o Geogebra e compare os períodos dos gráficos das funções abaixo:
   - $f(x) = \text{sen}\,(x)$
   - $g(x) = \text{sen}\,\left(\frac{x}{2}\right)$
   - $h(x) = \text{sen}\,(3x)$
   - $i(x) = 1 + \text{sen}\,(x)$
   - $j(x) = \text{sen}\,\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Função Cosseno

Dado um número real x, seja $P = (a, b)$ sua imagem no ciclo. Denominamos cosseno de x (e indicamos $\cos x$) a abscissa a do ponto P em relação ao sistema cartesiano dado.

Definição 6

Denominamos ***função cosseno*** *a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que associa a cada número real x a abscissa a da sua imagem no ciclo: $g(x) = \cos x$.*

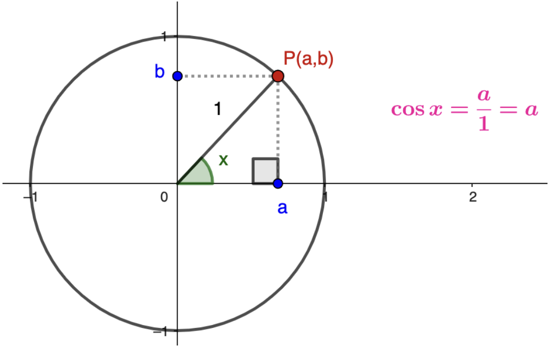
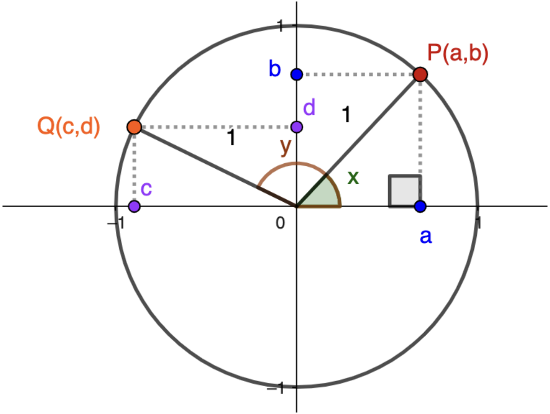


Figura 5: O cosseno de x no Ciclo Trigonométrico

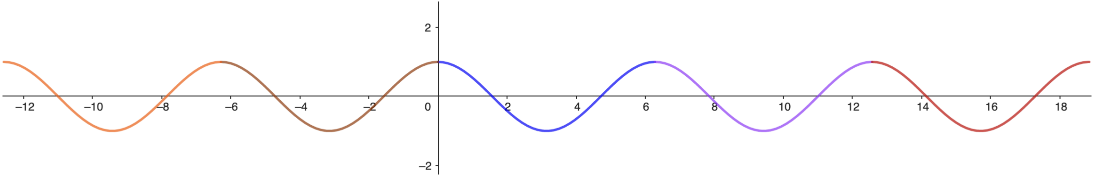
Função Cosseno

- Como podemos ver ao lado, dependendo do ângulo, o sinal da sua abscissa pode ser positivo ou negativo.
- No exemplo ao lado, $\cos x > 0$ pois sua abscissa está à direita do zero, no eixo horizontal.
- Por outro lado, $\cos y < 0$ pois sua abscissa está à esquerda do zero, no eixo horizontal.



O Gráfico da Função Cosseno

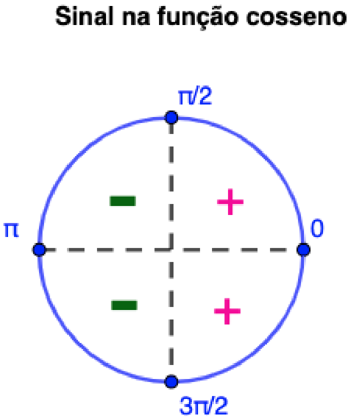
A cada período de comprimento 2π, a forma do gráfico se repete:



- Analise os zeros, o sinal, o crescimento e o decrescimento dessa função.

O Gráfico da Função Seno

Podemos usar o Ciclo Trigonométrico para estudar as propriedades pedidas:



Abscissas iguais a zero nos ângulos da forma:

$$\frac{\pi}{2} + k\pi \text{, com } k \in \mathbb{Z}\,.$$

Atividade Geogebra

1. Abra novamente o Geogebra e compare os períodos dos gráficos das funções abaixo:
    - $f(x) = \cos(x)$
    - $g(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$
    - $h(x) = \cos(3x)$
    - $i(x) = 1 + \cos(x)$
    - $j(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Outras Funções Trigonométricas

Outras Funções Trigonométricas

A partir das funções seno e cosseno, podemos definir outras funções trigonométricas:

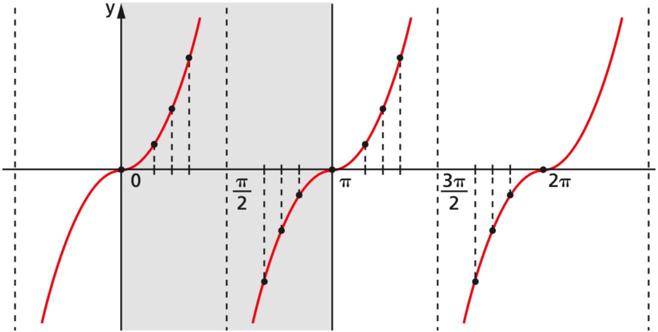
- **Função Tangente:** É a função determinada pelo quociente $\operatorname{tg}(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$.
- **Função Cotangente:** É a função determinada pelo quociente $\operatorname{cotg}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$.
- **Função Secante:** É a função determinada pelo quociente $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$.
- **Função Cossecante:** É a função determinada pelo quociente $\csc(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)}$.

O domínio de cada função acima não é o conjunto dos números reais. Deve-se retirar dele o conjunto de pontos onde o denominador de cada quociente se anula.

Função Tangente

- Seu domínio é dado pelos números reais x tais que $\cos(x) \neq 0$. Logo,

$$D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}.$$



Outras Funções Trigonométricas

- Para analisar as outras funções trigonométricas, consulte o livro texto.