

Sumário

- 1. Integração de Funções Racionais
- 2. Caso I: fatores lineares distintos
- 3. Caso II: fatores lineares, alguns repetidos
- 4. Caso III: fatores quadráticos irredutíveis

Integração de Funções Racionais

Introdução



Levando as frações $\frac{2}{x-1}$ e $\frac{1}{x+2}$ a um denominador comum, obtemos

$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{2(x+2) - (x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+5}{x^2 + x - 2}$$

Revertendo o procedimento, veremos como integrar a função no lado direito dessa equação, usando o método da substituição:

$$\int \frac{2(x+2) - (x-1)}{(x-1)(x+2)} dx = \int \frac{2}{x-1} dx - \int \frac{1}{x+2} dx$$
$$= 2 \ln|x-1| - \ln|x+2| + C$$

Quando funciona?



É possível expressar uma função racional $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ como uma soma de frações mais simples, desde que o grau de P seja menor que o grau de Q.

Etapa Preliminar



Se o grau de P for maior que o de Q, devemos fazer uma etapa preliminar dividindo P por Q, até o resto R(x) ser obtido, com grau menor que o de Q:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

onde S e R também são polinômios.

Exemplo[1]



Encontre
$$\int \frac{x^3 + x}{x - 1} dx$$
.

Caso I: fatores lineares distintos

Caso I



Suponha que o denominador Q(x) pode ser escrito como um produto de **fatores lineares distintos**:

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \cdots (a_1k + b_k).$$

Nesse caso, existem constantes $A_1, A_2, ..., A_k$ tais que

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}.$$

Essas constantes podem ser determinadas como nos exemplos a seguir.

Exemplo [2, 1]



Exemplo 2

Calcule
$$\int \frac{2x+4}{x^2-2x} dx.$$

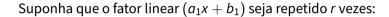
Exemplo 3

Calcule
$$\int \frac{1}{x^2 + x - 2} dx.$$

Calcule
$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx$$
.



Caso II



$$Q(x) = (a_1x + b_1)^r(a_2x + b_2)\cdots(a_1k + b_k).$$

Em vez de um único termo $\frac{A_1}{a_1x+b_1}$, usamos

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{a_1x + b_1} + \frac{A_{12}}{(a_1x + b_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1r}}{(a_1x + b_1)^r} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}.$$

Exemplo [2, 1]



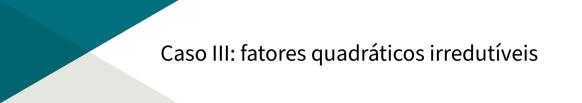
Exemplo 5

Calcule
$$\int \frac{2x+4}{x^3-2x^2} dx.$$

Exemplo 6

Calcule
$$\int \frac{x^2}{(x+2)^3} dx$$
.

Calcule
$$\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$$
.



Caso III



Se Q(x) tem o fator $(ax^2 + bx + c)^m$, onde $b^2 - 4ac < 0$, o termo não linear terá a forma

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_mx + B_m}{(ax^2 + bx + c)^m}.$$

Exemplo [2, 1]



Exemplo 8

Calcule
$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx.$$

Exemplo 9

Calcule
$$\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} dx$$
.

Calcule
$$\int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2} dx$$
.

Referencias I



J. Stewart.

Calculo: volume 1.

Pioneira Thomson Learning, 2006.

H. Anton, I. Bivens, and S. Davis. Cálculo - Volume I - 10.ed. Bookman Editora, 2014.