1	
2	
3	
4	
5	
Total	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Profª. Karla Lima
Fundamentos da Matemática II — Avaliação P1

Matemática 02 de Setembro de 2022

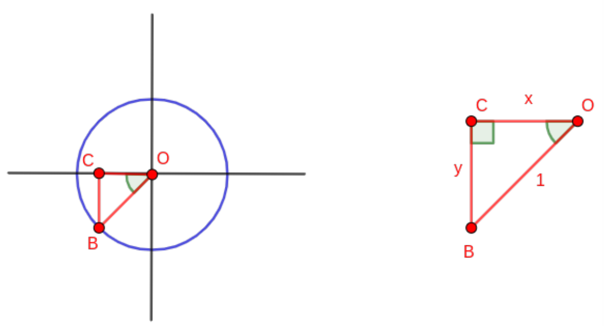
Aluno(a):. . . . .

Obs: Respostas sem justificativa não serão consideradas.

(1) Um ângulo central de uma circunferência de raio $18\,cm$ intercepta um arco de $2\pi\,cm$. Calcule o valor do ângulo central α que o arco acima determina na circunferência, em radianos e em graus.

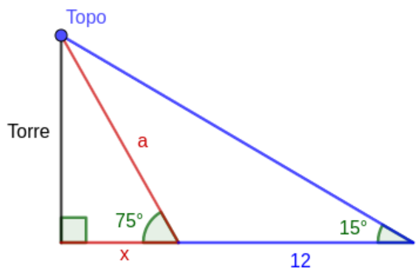
(2) Seja x um ângulo tal que $\operatorname{sen} x = m + 2$ e $\cos x = m + 1$.
 a) Calcule o valor de m.
 b) Para cada valor de m encontrado no item a), determine a expressão geral, em radianos, do ângulo x.

(3) Considere, no ciclo trigonométrico, o arco de $-750°$.
 a) Encontre a sua primeira determinação positiva e localize-a no ciclo trigonométrico.
 b) Ao localizar o ângulo de $-750°$ no ciclo trigonométrico, é possível calcular os valores $\operatorname{sen}(-750°)$ e $\cos(-750°)$, através das relações no triângulo retângulo.



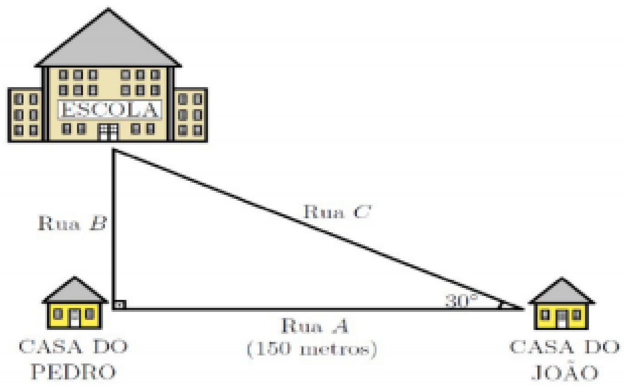
Determine esses valores, dessa forma.

(4) Para medir a altura de uma torre, um observador, distante da base da torre, vê o seu topo sob um ângulo de $75°$. Afastando-se mais $12\,m$ da torre, passa a ver o topo sob um ângulo de $15°$.



a) Calcule o $\operatorname{sen}(75°)$ e $\cos(15°)$.
b) Determine a altura da torre.

(5) João e Pedro são dois amigos que costumam ir juntos à escola. Geralmente, João se desloca até a casa do Pedro, passando pela rua A, para então se deslocarem juntos até a escola utilizando a rua B, conforme a figura abaixo.



Certo dia, Pedro não pôde ir à aula, e João decidiu se deslocar até a escola utilizando a rua C. Sabendo que as ruas A e B são perpendiculares, que as ruas A e C formam um ângulo de $30°$, e que a distância entre as casas de João e Pedro é de 150 metros, determine:
a) Qual a distância percorrida diariamente por João, passando pela casa de Pedro?
b) No dia em que João utilizou a rua C para ir até a escola, qual foi a distância percorrida?

Lembretes

Lei dos Senos

$$\frac{\text{comprimento do lado oposto à } \alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\text{comprimento do lado oposto à } \beta}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{\text{comprimento do lado oposto à } \gamma}{\operatorname{sen}\gamma}$$

Lei dos cossenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos a$$

Soma de arcos

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a\cos b + \operatorname{sen} b\cos a$$
$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

Arcos Especiais

$$\operatorname{sen} 0° = 0 \text{ e } \cos 0° = 1$$

$$\operatorname{sen} 30° = 1/2 \text{ e } \cos 30° = \sqrt{3}/2$$

$$\operatorname{sen} 45° = \sqrt{2}/2 \text{ e } \cos 45° = \sqrt{2}/2$$

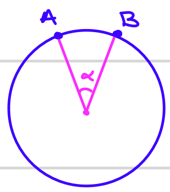
$$\operatorname{sen} 60° = \sqrt{3}/2 \text{ e } \cos 60° = 1/2$$

$$\operatorname{sen} 90° = 1 \text{ e } \cos 90° = 0$$

P1 - Fundamentos II

01/09/22

01



Como α é um ângulo central, sua medida é igual a medida do arco $\widehat{AB}$. Esta, por sua vez, pode ser obtido através da seguinte relação, entre seu comprimento e o raio:

$$\widehat{AB} = \frac{\ell}{r} = \frac{2\pi}{18} = \frac{\pi}{9} \text{ rad}.$$

Logo, $\alpha = \widehat{AB} = \frac{\pi}{9}$ rad.

Além disso, π rad equivale a um ângulo de $180°$, de onde segue que

$$\alpha = \frac{1}{9} \cdot \pi \text{ rad} = \frac{1}{9} 180° = 20°.$$

02 $\operatorname{sen} x = m+2$ e $\cos x = m+1$

a) Da relação trigonométrica fundamental

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1,$$

concluímos que

$$(m+2)^2 + (m+1)^2 = 1$$

Logo,

$$\underbrace{m^2+4m+4}_{(m+2)^2} + \underbrace{m^2+2m+1}_{(m+1)^2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad 2m^2+6m+5 = 1$$

$$\Rightarrow \quad 2m^2+6m+5-1 = 1-1$$

$$\Rightarrow \quad 2m^2+6m+4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2m^2}{2}+\frac{6m}{2}+\frac{4}{2} = \frac{0}{2}$$

$$\Rightarrow \quad m^2+3m+2 = 0 .$$

Resolvendo essa equação do 2º grau, obtemos os valores de m, tais que $\operatorname{sen} x = m+2$ e $\cos x = m+1$. Como

$$\Delta = b^2-4ac = 9-4.1.2 = 9-8 = 1 ,$$

as raízes são dadas por

$$m_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{1}}{2.1} = \frac{-3+1}{2} = -1$$

e

$$m_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{1}}{2.1} = \frac{-3-1}{2} = -2 .$$

b) Para $m=-1$, temos:

$$\operatorname{sen} x = -1+2 = 1 \quad \text{e} \quad \cos x = -1+1 = 0 .$$

Como $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$ e $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, x pode ser qualquer ângulo da forma

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi , \quad k \in \mathbb{Z}.$$

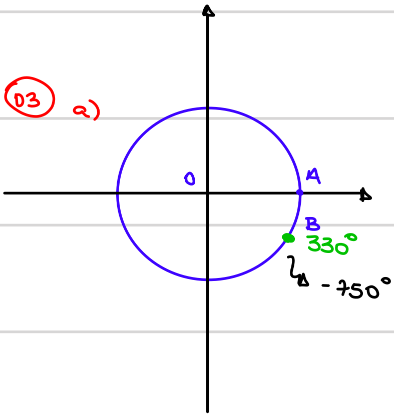
Agora, para $m = -2$, temos

$$\operatorname{sen} x = -2+2 = 0 \quad e \quad \cos x = -2+1 = -1.$$

Assim, por $\operatorname{sen} \pi = 0$ e $\cos \pi = -1$, concluímos que x pode ser expresso por

$$x = \pi + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

03 a)

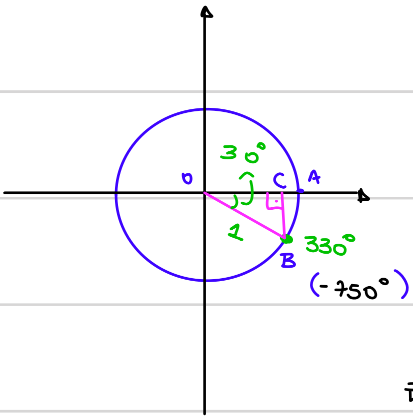


Como

$$-750° = (-3).360° + 330°,$$

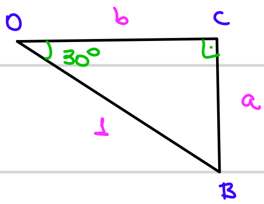
os arcos $-750°$ e $330°$ são côngruos.

b)



O arco $\widehat{AB}$ tem medida igual a $30°$.

Então, temos o triângulo retângulo AOB



onde $a = -\operatorname{sen}(-750°)$ e $b = \cos(-750°)$.

Como $\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$ e $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, obtemos:

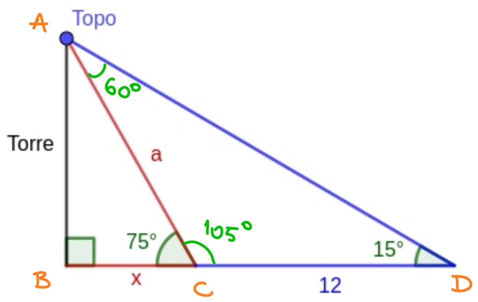
$$\frac{1}{2} = \frac{a}{1} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \quad e \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{b}{1} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

de onde concluímos que

$$\text{sen}(-750^\circ) = -\frac{1}{2} \quad e \quad \cos(-750^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

pois está no 4º quadrante.

04



Usando a lei dos senos no triângulo ACD, obtemos:

$$\frac{a}{\text{sen}15^\circ} = \frac{12}{\text{sen}60^\circ}.$$

Como $\text{sen}\,60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e

$$\text{sen}\,15^\circ = \text{sen}(45^\circ - 30^\circ) = \text{sen}\,45^\circ \cos 30^\circ - \text{sen}\,30^\circ \cos 45^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

concluímos que

$$\frac{a}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow a = 12 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$\Rightarrow a = \frac{24}{4} \cdot \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{\sqrt{3}} = \frac{6(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{\sqrt{3}}.$$

Como o triângulo ABC é retângulo, obtemos a seguinte relação:

$$\text{sen}\,75^\circ = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \cdot \text{sen}\,75^\circ.$$

Como

$$\operatorname{sen} 75^\circ = \operatorname{sen}(45^\circ + 30^\circ) = \operatorname{sen} 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \operatorname{sen} 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

concluímos que

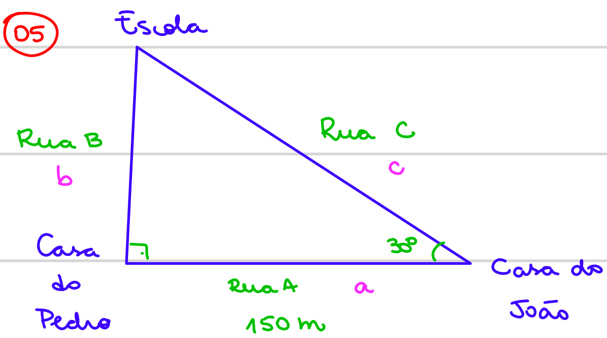
$$h = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4} \cdot 6 \cdot \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{\sqrt{3}} = \frac{6}{4\sqrt{3}} (\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

$$= \frac{6}{4\sqrt{3}} \left((\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2})^2 \right) = \frac{6\,(6-2)}{4\sqrt{3}} = \frac{6 \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot \sqrt{3}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

Portanto, $h = 2\sqrt{3}$ m.

05



a) Precisamos encontrar a distância entre a casa do Pedro e a escola e, para isso, usamos a tangente de 30°:

$$\frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{b}{a} = \frac{b}{150}.$$

Logo,

$$\frac{b}{150} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow b = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 150 = \frac{150}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{150}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{150\sqrt{3}}{3}$$

$$= 50\sqrt{3} \text{ m}.$$

Portanto, a distância percorrida é

$$a + b = (150 + 50\sqrt{3}) \text{ m}.$$

b) Para encontrar a distância entre a casa do João e a escola, usamos o cosseno de 30°:

$$\cos 30^\circ = \frac{a}{c} = \frac{150}{c} \Rightarrow c = \frac{150}{\cos 30^\circ} = \frac{150}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{150 \cdot 2}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{300}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{300\sqrt{3}}{3} = 100\sqrt{3} \text{ m}.$$