

Aula 12

Trigonometria

Karla Lima

29/03/2023

Sumário



1. A Trigonometria no Triângulo Retângulo
2. O Ciclo Trigonométrico
3. Funções Trigonométricas
4. Outras Funções Trigonométricas

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the upper-left portion, while a light gray shape occupies the lower-left portion. The right side of the slide is a solid white background.

A Trigonometria no Triângulo Retângulo

Triângulos

Definição 1

Sejam A , B e C três pontos não colineares.

Denominamos de **triângulo** ABC a união dos segmentos \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} e o denotaremos por $\triangle ABC$.

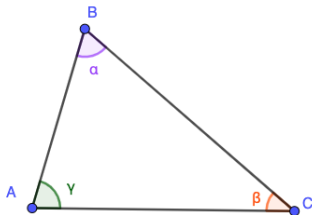


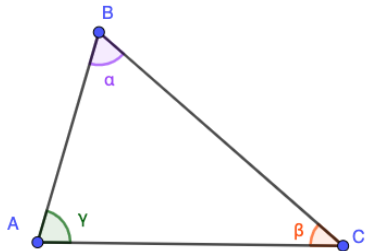
Figura 1: Triângulo ABC

Triângulos



- ▶ Os ângulos formados por dois lados de um triângulo são chamados **ângulos internos** do triângulo.
- ▶ É possível mostrar que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre 180° :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$



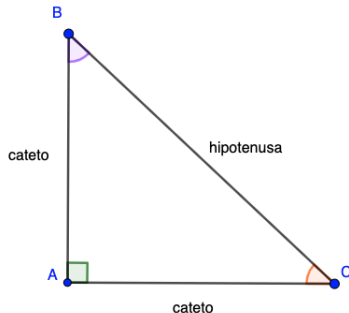
Triângulo Retângulo



Definição 2

Um triângulo que possui um ângulo reto é denominado **triângulo retângulo**.

- ▶ O lado oposto ao ângulo reto é chamado **hipotenusa**.
- ▶ Os outros lados são denominados **catetos** do triângulo.

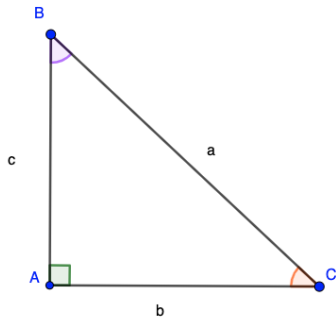


Relações Trigonômétricas

- ▶ Seja a o comprimento da hipotenusa, e b e c os comprimentos dos catetos.
- ▶ O seno de um ângulo agudo ($< 90^\circ$) num triângulo retângulo é definido pela razão entre o cateto oposto à ele e a hipotenusa:

$$\text{sen}(\hat{B}) = \frac{b}{a}$$

$$\text{sen}(\hat{C}) = \frac{c}{a}$$



Relações Trigonômétricas

- ▶ Já o cosseno de um ângulo α foi definido como o seno do seu complementar:

$$\cos(\hat{B}) = \sin(90^\circ - \hat{B}) = \sin(\hat{C}) = \frac{c}{a}$$

$$\cos(\hat{C}) = \sin(90^\circ - \hat{C}) = \sin(\hat{B}) = \frac{b}{a}$$

- ▶ Assim, a relação para obter o cosseno de um ângulo agudo é dada pela razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa.

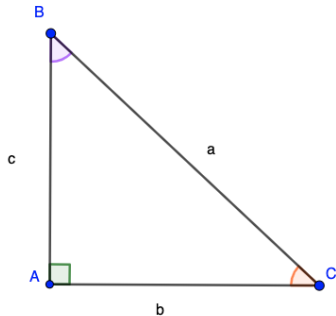


Figura 2: $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$

Independência do Tamanho do Triângulo



- ▶ As relações para seno e cosseno num triângulo retângulo dadas por

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \quad \text{e} \quad \cos(\alpha) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

independem do comprimento dos lados do triângulo.

- ▶ Estes valores dependem exclusivamente do ângulo α .
- ▶ Isto porque quaisquer dois triângulos que possuem os 3 ângulos com mesma medida, são semelhantes.

Semelhança de Triângulos



- De forma grosseira, dizemos que duas figuras são **semelhantes** se uma delas é uma ampliação ou redução da outra, sem mudar sua forma original.

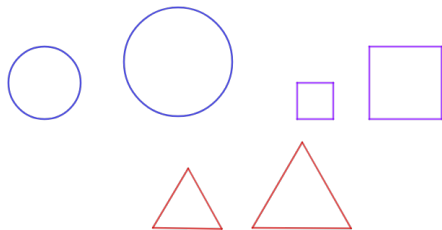


Figura 3: São semelhantes: duas circunferências quaisquer, dois quadrados quaisquer e dois triângulos equiláteros quaisquer.

Semelhança

Definição 3

Dois triângulos são ditos **semelhantes** se for possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam congruentes e lados correspondentes sejam proporcionais.

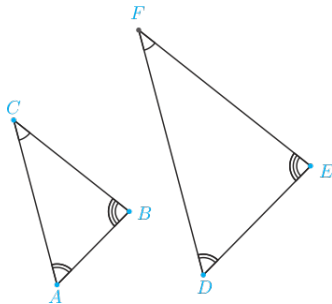
► $\hat{A} = \hat{D}$

► $\hat{B} = \hat{E}$

► $\hat{C} = \hat{F}$

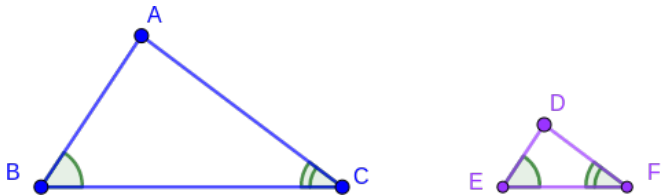
► $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$

Notação: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$



1º Caso de Semelhança: AA

1º Caso de Semelhança: Se dois triângulos têm dois pares de ângulos respectivamente congruentes, então os triângulos são semelhantes.



- Ou seja, além de ângulos com a mesma medida, os lados dos triângulos possuem a seguinte relação:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}.$$

Independência do Tamanho do Triângulo

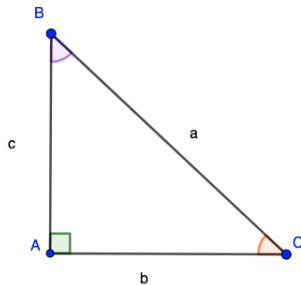
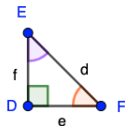


- ▶ Como dois triângulos retângulos que possuem ângulos de mesma medida são semelhantes, temos $\hat{B} = \hat{E} = \alpha$ e:

$$\frac{b}{e} = \frac{a}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{e}{d} = \text{sen}(\alpha)$$

$$\frac{c}{f} = \frac{a}{d} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{f}{d} = \text{cos}(\alpha)$$

- ▶ O mesmo se verifica para os outros ângulos.



Teorema de Pitágoras e a Relação Fundamental



- Uma das relações mais importantes da Trigonometria é dada pelo Teorema de Pitágoras, que diz que os quadrados dos comprimentos dos lados de um triângulo retângulo estão relacionados como a seguir:

$$\begin{aligned}(\text{hipotenusa})^2 &= (\text{cateto } b)^2 + (\text{cateto } c)^2 \\ a^2 &= b^2 + c^2\end{aligned}$$

- Assim,

$$[\sin(\hat{B})]^2 + [\cos(\hat{B})]^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

- Escrevemos também como $\sin^2(\hat{B}) + \cos^2(\hat{B}) = 1$.

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the top-left corner, while a light gray shape occupies the bottom-left corner. The rest of the slide is white.

O Ciclo Trigonométrico

Ângulos em Circunferências



- ▶ Até agora, vimos como calcular as relações seno e cosseno em triângulos retângulos.
- ▶ Como a soma dos seus ângulos internos é 180° , e um dos seus ângulos é reto, a soma dos outros dois é $\alpha + \beta = 90^\circ$.
- ▶ Assim, por termos $\alpha, \beta \geq 0$, concluímos que

$$\alpha < \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \alpha < 90^\circ$$

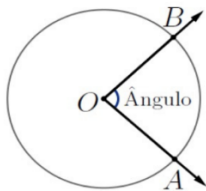
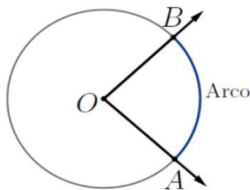
$$\beta < \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \beta < 90^\circ$$

- ▶ Portanto, até agora, só conseguimos calcular seno e cossenos de ângulos positivos e menores que 90° .

Ângulos em Circunferências



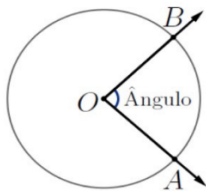
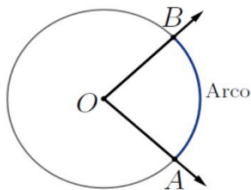
- ▶ Podemos estender o conceito de ângulos para circunferências.
- ▶ Dada uma circunferência de centro O , quaisquer dois pontos A e B sobre esta circunferência determinam um arco e um ângulo central, ambos considerados de A para B , no sentido anti-horário.



Ângulos em Circunferências



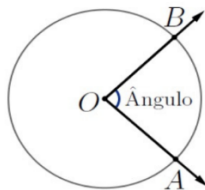
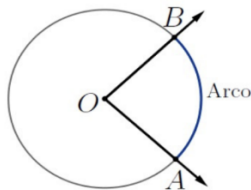
- ▶ Fixada uma circunferência, todo arco está associado a um ângulo e vice-versa.
- ▶ Quando os pontos A e B coincidem, tem-se um arco nulo, ou arco de uma volta; e, quando os pontos A e B são diametralmente opostos, tem-se um arco de meia volta.



Ângulos em Circunferências



- ▶ O comprimento do arco é a medida linear do arco considerado.
- ▶ O comprimento de um arco depende, portanto, do raio da circunferência que o contém e as unidades utilizadas são as usuais, tais como: centímetro, metro, etc.



Arco de Circunferência



Definição 4

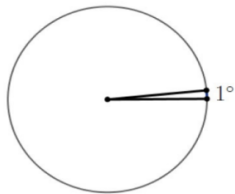
A medida de um arco de circunferência é a medida do ângulo central associado a este arco, independentemente do raio da circunferência.

- ▶ As unidades mais utilizadas para medir ângulos são o **grau** e o **radiano**.

Ângulos em Circunferências



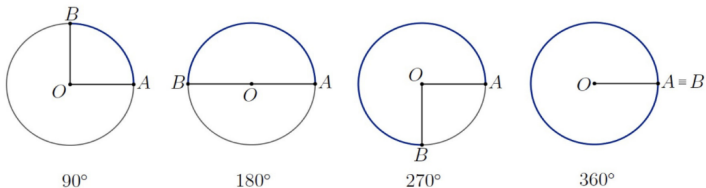
- **Definição:** Um grau (símbolo: 1°) corresponde à medida de um arco cujo comprimento é igual a $\frac{1}{360}$ do comprimento da circunferência que está sendo considerada.
- Em particular, o arco de uma volta mede 360° , o arco de meia volta mede 180° , e assim por diante.



Exemplos



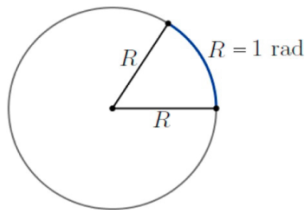
- Note que esta unidade de medida independe do comprimento do raio da circunferência.



Ângulos em Circunferências



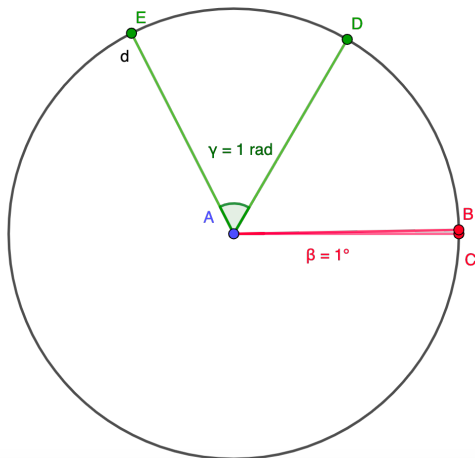
- ▶ **Definição:** Um radiano (símbolo: $1\ rad$) corresponde à medida de um arco que tem o mesmo comprimento do raio da circunferência que está sendo considerada.
- ▶ O comprimento de uma circunferência é dada pela relação $C = 2\pi R$, onde R é o seu raio.
- ▶ Em particular, o arco de uma volta completa equivale a $2\pi\ rad$, o arco de meia volta equivale a $\pi\ rad$, e assim por diante.



Comparação entre Graus e Radianos



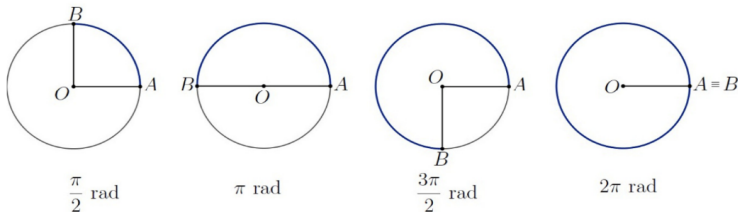
- O modo de medir é diferente: o arco de 1° não tem a mesma abertura de um arco de 1 rad :



Exemplos

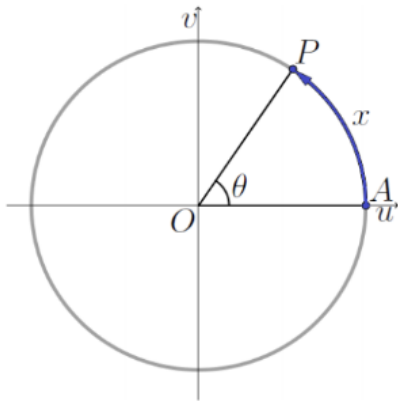


- Note que esta unidade de medida também independe do comprimento do raio da circunferência.



O Ciclo Trigonométrico

- O **ciclo trigonométrico** é a circunferência orientada de raio unitário, centrada na origem do sistema de coordenadas cartesianas, na qual o sentido positivo é o anti-horário.



Relação entre graus e radianos



- ▶ Assim como com temperaturas, medidas de comprimento e etc, podemos relacionar duas unidades de medidas de ângulos.
- ▶ Por exemplo, medir 1°C (graus Celsius) é equivalente a medir a temperatura de 33.8°F (Fahrenheit).
- ▶ Já medir 1 km é equivalente a medir a distância de, aproximadamente, 0, 62 milhas.

Relação entre graus e radianos



- ▶ No caso dos ângulos, temos:
 - ▶ A circunferência completa possui 360° , já que a dividimos em 360 partes iguais para determinar o ângulo de 1° . Portanto, meia circunferência possui 180° .
 - ▶ Já em radianos, a circunferência completa possui 2π radianos. Logo, meia circunferência possui $\pi \text{ rad}$.
 - ▶ Assim, o ângulo de 180° representa a mesma abertura que o ângulo de $\pi \text{ rad}$:

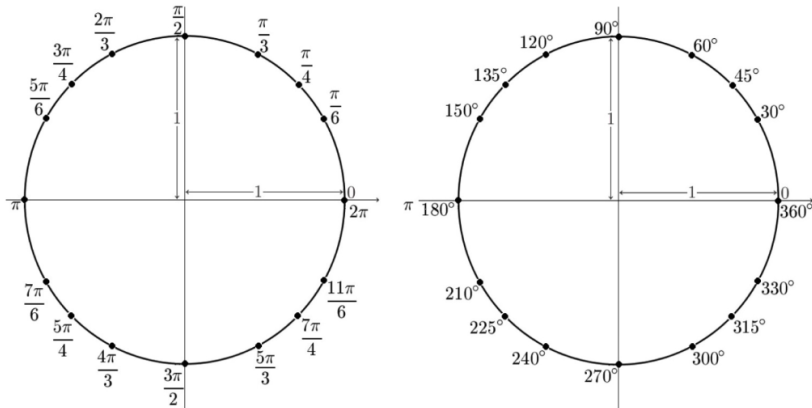
$$180^\circ \leftrightarrow \pi \text{ rad}$$

- ▶ Com a relação de proporcionalidade gerada acima, podemos converter ângulos de graus para radianos e vice-versa.

Arcos no Ciclo Trigonométrico



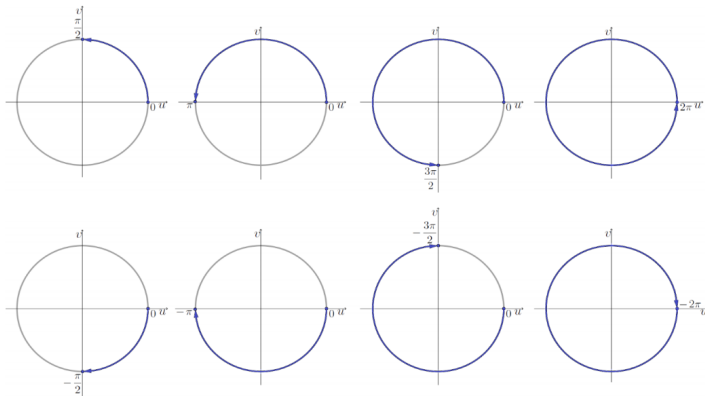
- A figura a seguir destaca a correspondência entre os principais arcos que serão utilizados, com as respectivas representações em radianos e graus.



Outros Valores de Ângulos



- Para valores negativos, basta percorrer o ciclo trigonométrico no sentido horário, a partir do ponto cartesiano $(1, 0)$.



Outros Valores de Ângulos



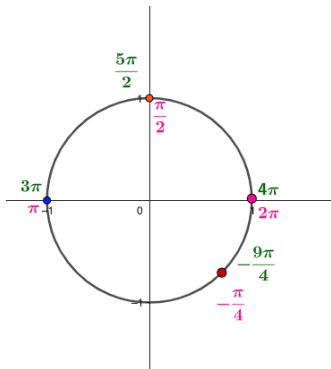
- ▶ Para valores de ângulos maiores que $2\pi \text{ rad}$ (ou 360°) e menores que $-2\pi \text{ rad}$ (ou -360°), percorremos mais de uma vez o círculo trigonométrico e verificamos em qual posição a contagem para.
- ▶ Associamos esse ângulo ao ângulo no intervalo de $[0, 2\pi]$, em radianos, quando percorrido no sentido horário e no intervalo de $[-2\pi, 0]$, em radianos, quando percorrido no sentido anti-horário.

Outros Valores de Ângulos



- ▶ Por exemplo, com um ângulo de $4\pi \text{ rad}$, podemos percorrer o ciclo trigonométrico (que tem comprimento $2\pi * R = 2\pi * 1 = 2\pi$) completamente 2 vezes. Logo, paramos exatamente no ponto onde o ângulo é representado por $2\pi \text{ rad}$.
- ▶ Já no caso do ângulo de $3\pi \text{ rad}$, podemos dar uma volta completa ($2\pi \text{ rad}$) e sobra ainda meia volta ($\pi \text{ rad}$). Com isso, paramos exatamente no ponto onde o ângulo é representado por $\pi \text{ rad}$.

Outros Valores de Ângulos



- Assim, podemos representar um ângulo α associado a qualquer número real, em radianos, construindo uma função real.

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the top-left portion, while a light gray shape occupies the bottom-left portion. The remaining area on the right is white. The title text is centered in the white area.

Funções Trigonométricas

Funções Periódicas



- ▶ As funções seno e cosseno são ditas periódicas de período 2π .
- ▶ Isso quer dizer que os valores das suas imagens se repetem em períodos de 2π .
- ▶ Se $k \in \mathbb{Z}$, então valem:

$$\sin(-4\pi) = \sin(-2\pi) = \sin(0) = \sin(2\pi) = \sin(4\pi) = \sin(0 + k(2\pi))$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{11\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{15\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + k(2\pi)\right)$$

Atividade Geogebra



1. Baixe o arquivo Função Seno e abra no Geogebra.

Função Seno

Dado um número real x , seja $P = (a, b)$ sua imagem no ciclo. Denominamos seno de x (e indicamos $\text{sen } x$) a ordenada b do ponto P em relação ao sistema cartesiano dado.

Definição 5

Denominamos **função seno** a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número real x a ordenada b da sua imagem no ciclo:
 $f(x) = \text{sen } x$.

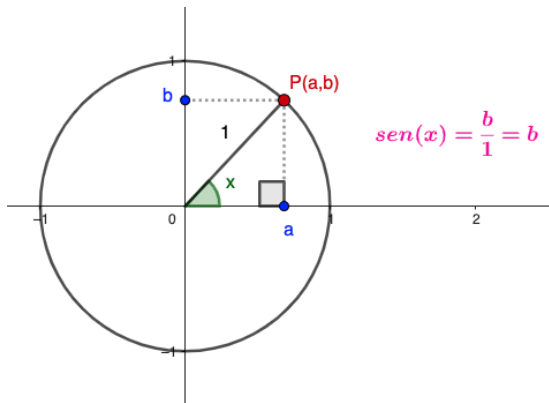
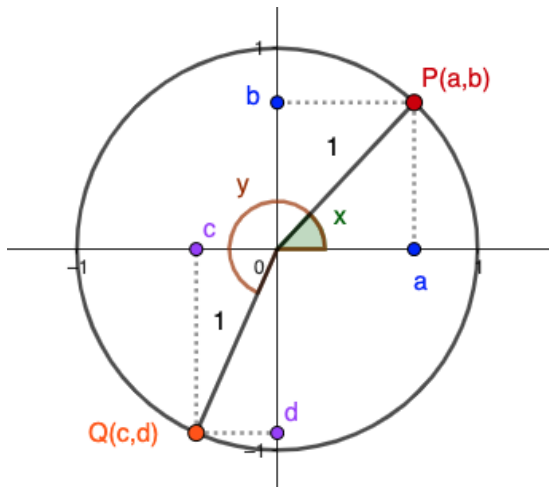


Figura 4: O seno de x no Ciclo Trigonométrico

Função Seno

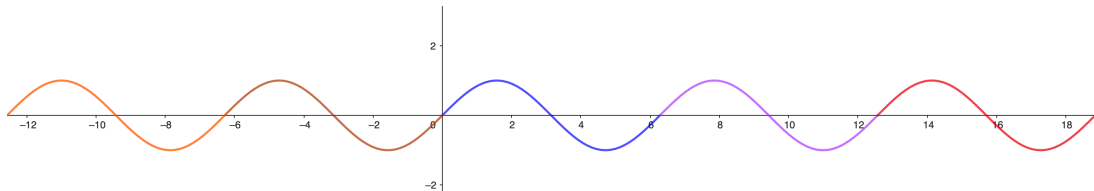
- ▶ Como podemos ver ao lado, dependendo do ângulo, o sinal da sua ordenada pode ser positivo ou negativo.
- ▶ No exemplo ao lado, $\text{sen } x > 0$ pois sua ordenada está acima do eixo horizontal.
- ▶ Por outro lado, $\text{sen } y < 0$ pois sua ordenada está abaixo do eixo horizontal.



O Gráfico da Função Seno



A cada período de comprimento 2π , a forma do gráfico se repete:



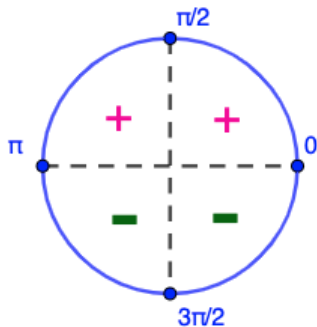
- Analise os zeros, o sinal, o crescimento e o decrescimento dessa função.

O Gráfico da Função Seno



Podemos usar o Ciclo Trigonométrico para estudar as propriedades pedidas:

Sinal na função seno



Ordenadas iguais a zero nos ângulos da forma:

$k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Atividade Geogebra



1. Abra novamente o Geogebra e compare os períodos dos gráficos das funções abaixo:

▶ $f(x) = \text{sen}(x)$

▶ $g(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$

▶ $h(x) = \text{sen}(3x)$

▶ $i(x) = 1 + \text{sen}(x)$

▶ $j(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Função Cosseno

Dado um número real x , seja $P = (a, b)$ sua imagem no ciclo. Denominamos cosseno de x (e indicamos $\cos x$) a abscissa a do ponto P em relação ao sistema cartesiano dado.

Definição 6

Denominamos **função cosseno** a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número real x a abscissa a da sua imagem no ciclo:
 $g(x) = \cos x$.

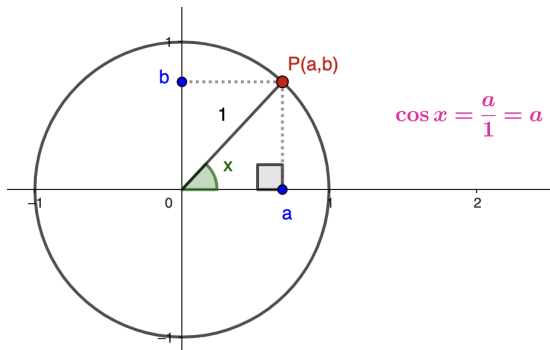
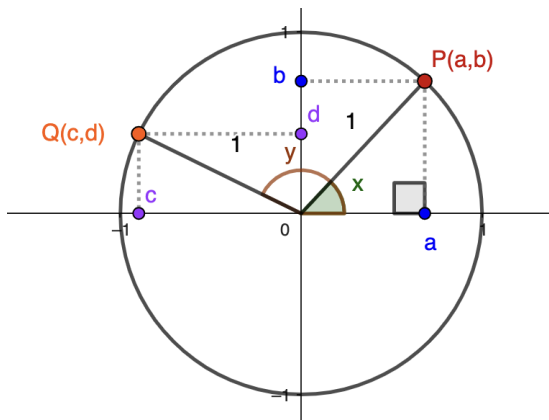


Figura 5: O cosseno de x no Ciclo Trigonométrico

Função Cosseno

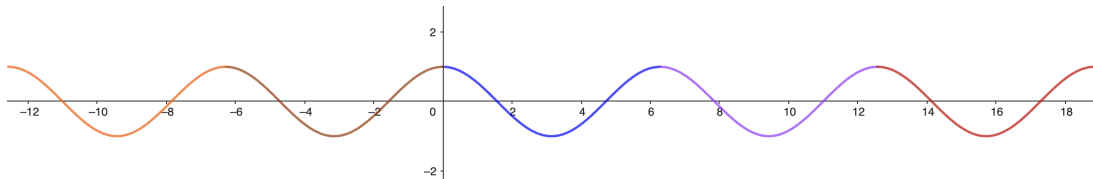
- ▶ Como podemos ver ao lado, dependendo do ângulo, o sinal da sua abscissa pode ser positivo ou negativo.
- ▶ No exemplo ao lado, $\cos x > 0$ pois sua abscissa está à direita do zero, no eixo horizontal.
- ▶ Por outro lado, $\cos y < 0$ pois sua abscissa está à esquerda do zero, no eixo horizontal.



O Gráfico da Função Cosseno



A cada período de comprimento 2π , a forma do gráfico se repete:

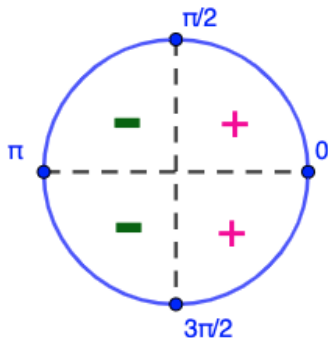


- Analise os zeros, o sinal, o crescimento e o decréscimo dessa função.

O Gráfico da Função Seno

Podemos usar o Ciclo Trigonométrico para estudar as propriedades pedidas:

Sinal na função cosseno



Abcissas iguais a zero nos ângulos da forma:

$$\frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Atividade Geogebra



1. Abra novamente o Geogebra e compare os períodos dos gráficos das funções abaixo:

▶ $f(x) = \cos(x)$

▶ $g(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

▶ $h(x) = \cos(3x)$

▶ $i(x) = 1 + \cos(x)$

▶ $j(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the upper-left portion, while a light gray shape occupies the lower-left portion. The rest of the slide is white. The title is centered in the white area.

Outras Funções Trigonométricas

Outras Funções Trigonométricas



A partir das funções seno e cosseno, podemos definir outras funções trigonométricas:

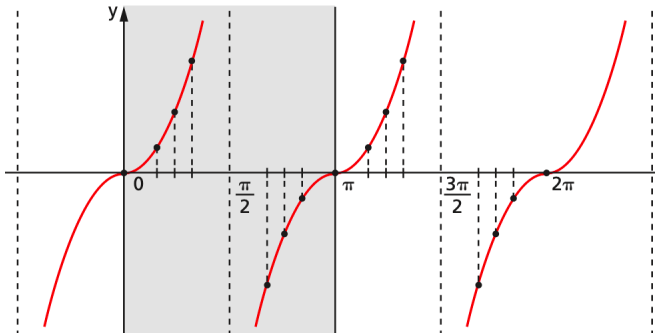
- ▶ **Função Tangente:** É a função determinada pelo quociente $\operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{cos}(x)}$.
- ▶ **Função Cotangente:** É a função determinada pelo quociente $\operatorname{cotg}(x) = \frac{\operatorname{cos}(x)}{\operatorname{sen}(x)}$.
- ▶ **Função Secante:** É a função determinada pelo quociente $\operatorname{sec}(x) = \frac{1}{\operatorname{cos}(x)}$.
- ▶ **Função Cossecante:** É a função determinada pelo quociente $\operatorname{csc}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$.

O domínio de cada função acima não é o conjunto dos números reais. Deve-se retirar dele o conjunto de pontos onde o denominador de cada quociente se anula.

Função Tangente

- Seu domínio é dado pelos números reais x tais que $\cos(x) \neq 0$. Logo,

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}.$$



Outras Funções Trigonométricas



- ▶ Para analisar as outras funções trigonométricas, consulte o livro texto.