Introdução ao Cálculo

Aula 11: Composição de Funções. Equações e Inequações.

Karla Lima

22/03/2023

Sumário

Bibliografia

Bibliografia da Aula 05

- Fundamentos da Matemática Elementar: 1 (Click para baixar)
- Fundamentos da Matemática Elementar: 2 (Click para baixar)

Composição de Funções

Compostas

Definição

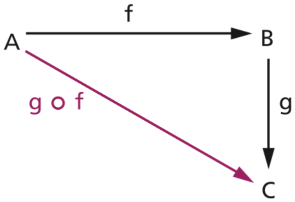
Definição 1

Dadas duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$, de modo que o domínio de g coincide com o contra-domínio de f, definimos a função ***composta*** *de g e f por*

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& C
\end{tikzcd}$$

Definição



- Como $f(a) \in B$, podemos calcular $g(f(a))$.
- Se tivéssemos $f(a) \notin B$, então $f(a)$ não estaria no domínio de g e não faria sentido calcular a função nesse ponto.

Exemplo

Exemplo 1

a) *Podemos fazer a composição $f \circ g$, onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = x^3$ e a função $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ é dada por $g(x) = \ln x$, pois a imagem de g é o conjunto $\mathbb{R}$ que é o domínio de f.*

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\ln x) = [\ln(x)]^3.$$

b) *Por outro lado, NÃO PODEMOS fazer a composição $g \circ f$, pois a imagem de f é o conjunto $\mathbb{R}$, que não está contido no domínio de g, o conjunto $(0, \infty)$.*
Basta tomar $x = -2$ e teremos $g \circ f(-2) = \ln(-8)$, que não está definido como um número real.

Exemplo

Exemplo 2

Seja $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, *dada por* $f(x) = x^2$, *e* $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$, *dada por* $g(x) = \sqrt{x}$. *Como o domínio de* g *é igual ao contra-domínio de* f, *podemos calcular a composta* $g \circ f$.

De fato, temos que $f(x) = x^2 \geq 0$ e, portanto, $f(x) \in [0, \infty) = D_g$.

Logo,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^2) \\ &= \sqrt{x^2} \\ &= |x|.\end{aligned}$$

Observação

Lembre-se: A raiz quadrada de um número é sempre positiva e a **função modular** $|x|$ está aqui para representar isso. Ela é definida por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

É INCORRETO concluir que $\sqrt{x^2} = x$. Se x é negativo, por exemplo igual a -3, temos:

$$x^2 = (-3)^2 = 9 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{9} = 3.$$

e não $\sqrt{(-3)^2} = -3$. Nenhuma raiz de ordem par pode gerar um número negativo! Por isso, sempre usamos a função modular, que somente gera números positivos.

Funções Injetoras, Sobrejetoras e Bijetoras: Reconhecimento através do Gráfico

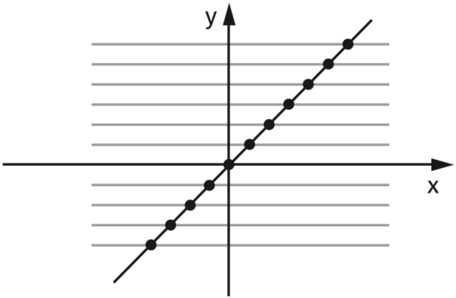
Método

Basta analisar o número de pontos de interseção das retas paralelas ao eixo x, conduzidas por cada ponto $(0, y)$ em que $y \in B$ (contradomínio de f).

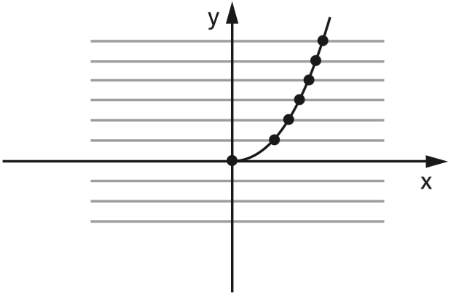
Gráficos de Funções Injetoras

Se cada uma dessas retas cortar o gráfico em um só ponto ou não cortar o gráfico, então a função é **injetora**.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = x$



b) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$

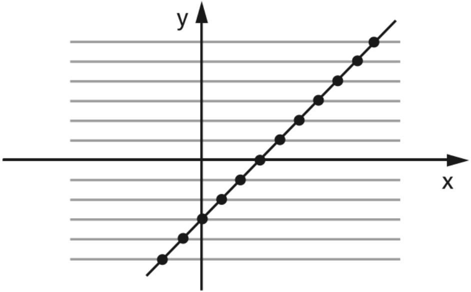


Gráficos de Funções Sobrejetoras

Se cada uma das retas cortar o gráfico em um ou mais pontos, então a função é **sobrejetora**.

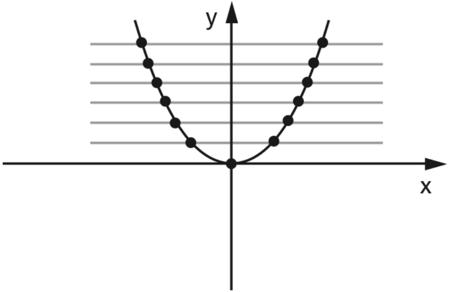
a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x - 1$



b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$

$f(x) = x^2$

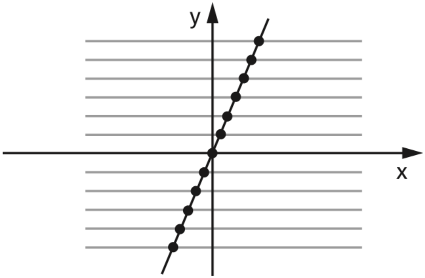


Gráficos de Funções Bijetoras

Se cada uma dessas retas cortar o gráfico em um só ponto, então a função é **bijetora**.

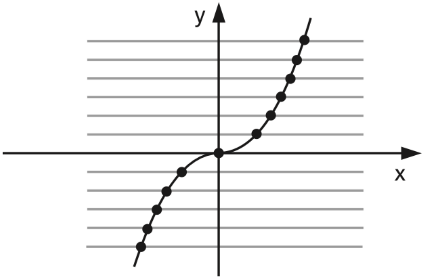
a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = 2x$



b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x \cdot |x|$



Funções Inversas

Codificação

Imagine que você tenha que enviar, de forma cifrada, a seguinte mensagem “Criptografar é uma arte”. Inicialmente é preciso pensar na pré-codificação, a qual requer a substituição de letras por números. Com o propósito de exemplificar esse processo, o primeiro passo consiste em converter uma mensagem que se deseja criptografar em uma sequência de números. Para tanto, veja as informações constantes na tabela a seguir.

Correspondência entre cada letra do alfabeto e um número maior ou igual a 10

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z						
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35						

Para evitar ambiguidades (11 é o número ou uma sequência de dois números 1?), optou-se por corresponder cada letra a um número maior ou igual a 10.

Codificação

Nesse contexto, a frase “Criptografar é uma arte”, é convertida em:

$$1227182529241627101510279914993022109910272914$$

Na codificação da mensagem, devemos quebrar em blocos a sequência de números produzidos na pré-codificação. Assim, a sequência de números pode ser quebrada nos seguintes blocos, o que não é uma condição sine qua non.

$$12 - 2 - 71 - 8 - 25 - 29 - 2 - 41 - 62 - 7 - 10 - 15 - 10 - 27 - 9 -$$
$$9 - 14 - 9 - 9 - 30 - 22 - 10 - 9 - 9 - 10 - 2 - 72 - 9 - 14$$

Cada bloco deve ser codificado separadamente. Depois disso, não poderão mais ser unidos sob o risco de tornar impossível decodificação da mensagem.

Decodificação

- De modo geral, para codificar a mensagem precisamos de uma função f, tal que possamos encontrar os valores de x que codificou aquele bloco.
- Tomemos, por exemplo, a função $f(x) = 3x - 4$ como chave de codificação.
- Desse modo, o primeiro bloco 12 é codificado por $f(12) = 3 * 12 - 4 = 32$.
- O segundo bloco é codificado por $f(2) = 3 * 2 - 4 = 2$.
- Os demais blocos também são codificados de maneira análoga. Com isso obtemos a mensagem criptografada:

$$32 - 2 - 209 - 20 - 71 - 83 - 2 - 119 - 182 - 17 - 26 - 41 - 26 - 77$$
$$- 23 - 23 - 38 - 23 - 23 - 86 - 62 - 26 - 23 - 23 - 26 - 2 - 212 - 23 - 38$$

Relação Inversa de uma Função

Para decodificar a mensagem criptografada, precisamos da relação inversa da função $f(x) = 3x - 4$.

Definição 2

Dada uma função $f : A \to B$, a relação inversa de f é denotada por

$$f^{-1} = \{(y, x) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \in f\}.$$

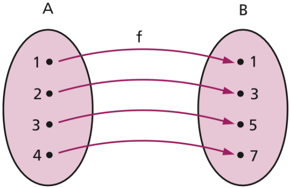
Antes de prosseguirmos com a função de decodificação, vejamos alguns exemplos.

Exemplo

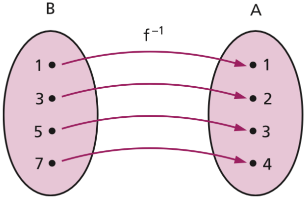
Exemplo 3

Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *e* $B = \{1, 3, 5, 7\}$.

- Dada a função $f : A \to B$, definida por $f(x) = 2x - 1$, a relação f é dada ao lado.

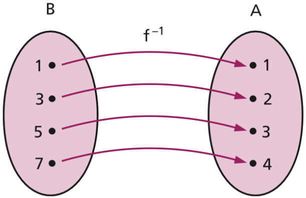


- Sua relação inversa f^{-1} é dada a seguir:



Exemplos

- Note que a relação inversa f^{-1} é uma função de B em A:



- Assim, $f^{-1} : B \to A$, tal que $f^{-1}(y) = x$, com $y = 2x - 1$.
- Podemos então concluir que

$$\begin{aligned} y = 2x - 1 &\Leftrightarrow 2x - 1 + 1 = y + 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(2x) = \frac{1}{2}(y+1) \\ &\Leftrightarrow f^{-1}(y) = x = \frac{y+1}{2}. \end{aligned}$$

Exemplo

Exemplo 4

Considere a função $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, definida por $f(x) = x^2$. A relação f^{-1} que associa elementos de $[0, \infty)$ com elementos de $\mathbb{R}$ não é uma função.

- Com efeito, o elemento $y = 4 \in [0, \infty)$ está relacionado, através de f, com dois elementos de $\mathbb{R}$: $x = 2$ e $x = -2$.
- Portanto, $(4, -2) \in f^{-1}$ e $(4, 2) \in f^{-1}$, que resulta em um mesmo elemento do domínio de f^{-1} estar associado a dois elementos distintos do seu contra-domínio.
- Logo, f^-1 não é uma função de $[0, \infty)$ em $\mathbb{R}$.

Exemplo

Exemplo 5

Entretanto, restringindo o domínio de f para $A = [0, \infty)$*, temos* $\bar{f} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *e a relação* $\bar{f}^{-1}$ *é uma função de* $[0, \infty)$ *em* $[0, \infty)$*.*

- Com efeito, para cada número real não negativo x existe um único número real não negativo y tal que $x = y^2$. Com isso,

$$\begin{aligned} x = y^2 \Leftrightarrow \sqrt{x} &= (\sqrt{y^2}) = |y| \\ &\Leftrightarrow y = \sqrt{x}, \quad (|y| = y, \ \text{pois } y \geq 0), \end{aligned}$$

de onde segue que $\bar{f}^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$, dada por $\bar{f}^{-1} = \sqrt{x}$, é uma função.

Teorema 1

Teorema 1

Seja $f : A \to B$. A relação f^{-1} é uma função de B em A se, e somente se, f é bijetora.

Demonstração:

$(\Rightarrow)$ Se f^{-1} é uma função de B em A, então f é bijetora.

- De fato, como é função, para cada $y \in B$ existe um único $x \in A$ tal que $f^{-1}(y) = x$.
- Isto é, $(y, x) \in f^{-1}$ e, assim, para cada $y \in B$, tem-se $(x, y) \in f$.
- Assim, f é sobrejetora.
- Por outro lado, se $f(x_1) = y = f(x_2)$ então $x_1 = x_2$, caso contrário

  $$(y, x_1) \in f^{-1} \quad \text{e} \quad (y, x_2) \in f^{-1},$$

  e f^{-1} não seria função.
- Logo, f é injetora.

Teorema 1

$(\Leftarrow)$ Se f é bijetora, então f^{-1} é uma função de B em A.

- De fato, como f é sobrejetora, para cada $y \in B$ existe um $x \in A$ tal que $f(x) = y$.
- Portanto, para cada $y \in B$ existe um $x \in A$ tal que $(y, x) \in f^{-1}$.
- Se $y \in B$, com $(y, x_1) \in f^{-1}$ e $(y, x_2) \in f^{-1}$, então

  $$(x_1, y) \in f \quad \text{e} \quad (x_2, y) \in f.$$

  Pela injetividade de f, $x_1 = x_2$.
- Portanto, f^{-1} é uma função de B em A.

Definição

Definição 3

Se f é uma função bijetora de A em B, a relação inversa de f é uma função de B em A que denominamos ***função inversa*** *de f e indicamos por f^{-1}.*

Determinando Inversas

Regra Prática: Dada a função bijetora f de A em B, definida pela sentença $y = f(x)$, para obtermos a sentença aberta que define f^{-1}, procedemos do seguinte modo:

- A partir de $y = f(x)$, isolamos a variável x e escrevemos uma sentença da forma $x = f^{-1}(y)$.

Voltando à Função de Decodificação

1. A função $f(x) = 3x - 4$ é bijetora em $\mathbb{R}$ e, em particular, em qualquer domínio contido em $\mathbb{R}$.
   - Com efeito, f é injetora pois dados quaisquer x_1 e x_2 em $\mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow 3x_1 - 4 = 3x_2 - 4 \\ &\Leftrightarrow 3x_1 - 4 + 4 = 3x_2 - 4 + 4 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot 3x_1 = \frac{1}{3} \cdot 3x_2 \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Voltando à Função de Decodificação

- f é sobrejetora, pois dado qualquer $y \in \mathbb{R}$, temos que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = 3x - 4$. Basta resolver

$$\begin{aligned} y = 3x - 4 &\Leftrightarrow 3x = y + 4 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y+4}{3}. \end{aligned}$$

- Assim, $f\left(\frac{y+4}{3}\right) = y$ e $Im_f = \mathbb{R}$.

Voltando à Função de Decodificação

- Portanto, a inversa da função f, bijetora em $\mathbb{R}$, dada por $f(x) = 3x - 4$ é $f^{-1}(y) = \dfrac{y+4}{3}$.
- Com ela, podemos decodificar os blocos codificados.
  - $f^{-1}(32) = \dfrac{32+4}{3} = 12$.
  - $f^{-1}(2) = \dfrac{2+4}{3} = 2$.
  - Até obter a sequência original:

$$122718252924162710151027991499302210991027 2914$$

Voltando à Função de Decodificação

- Com a sequência e a tabela, obtemos a mensagem dada: ’Criptografar é uma arte’.

1227182529241627101510279914993022109910272914

Correspondência entre cada letra do alfabeto e um número maior ou igual a 10

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z						
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35						

Para se aprofundar mais, leia ’CRIPTOGRAFIA: UMA POSSIBILIDADE PARA O ENSINO DE FUNÇÃO INVERSA’ (Click para baixar)

Compostas e Inversas

Teorema 2

Teorema 2

Seja f uma função bijetora de A em B. Se f^{-1} é a função inversa de f, então para todo $x \in A$ e todo $y \in B$:

$$f^{-1} \circ f(x) = x \quad e \quad f \circ f^{-1}(y) = y.$$

Demonstração:

- De fato, seja $(x, y) \in f$. Então $y = f(x)$ e $x = f^{-1}(y)$.
- Com isso,

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x, \\ f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Recíproca do Teorema 2

Teorema 3

Seja f uma função bijetora de A em B. Se g é uma função de B em A, tal que para todo $x \in A$ e todo $y \in B$ tem-se

$$g \circ f(x) = x \quad e \quad f \circ g(y) = y,$$

então $g = f^{-1}$.

Demonstração:

- As funções g e f^{-1} possuem o mesmo domínio e o mesmo contra-domínio.
- Além disso, para todo $y \in B$, como $f(x) = y$, temos que

$$g(y) = g(f(x)) = x = f^{-1}(y).$$

- Logo, $g = f^{-1}$.

Exponenciais e Logaritmos

Exemplo 6

As funções exponenciais e logarítmicas de ***mesma base*** *são inversas uma da outra.*

Exponenciais e Logaritmos

Exemplo 6

As funções exponenciais e logarítmicas de ***mesma base*** *são inversas uma da outra.*

- De fato, sejam $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ e $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, dadas por $f(x) = \log_a x$ e $g(x) = a^x$.
- Temos que

$$f \circ g(x) = \log_a a^x = x \log_a a = x * 1 = x,$$
$$g \circ f(x) = a^{\log_a x} = x.$$

- Pelo Teorema 2, $g = f^{-1}$ e $f = g^{-1}$.

Equações e Inequações

Equações Exponenciais

Sabendo que as funções exponenciais e logarítmicas de **mesma base** são inversas uma da outra, podemos resolver equações exponenciais sem que os dois lados da equação seja escrito na mesma base.

Exemplo 7

Para resolver a equação $2^x = 3$*, basta calcular o logaritmo de base* 2 *dos dois lados da equação:*

$$\begin{aligned} 2^x = 3 &\Leftrightarrow log_2 2^x = \log_2 3 \\ &\Leftrightarrow x * \log_2 2 = \log_2 3 \\ &\Leftrightarrow x = log_2 3. \end{aligned}$$

Exercício

Exercício 1

Resolva a equação exponencial $5^{2x-3} = 3$.

Equações Logarítmicas

Exemplo 8

Resolva a equação $\log_3(2x - 3) = \log_3(4x - 5)$.

Equações Logarítmicas

Exemplo 8

Resolva a equação $\log_3(2x-3) = \log_3(4x-5)$.

Como a função $\log_3 x$ é injetiva e seu domínio é o conjunto $(0, \infty)$,

$$\begin{aligned} \log_3(2x-3) = \log_3(4x-5) &\Leftrightarrow 2x - 3 = 4x - 5 > 0 \\ &\Leftrightarrow 4x - 2x = 5 - 3 \\ &\Leftrightarrow 2x = 2 \\ &\Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Para $x = 1$, temos $2 * 1 - 3 = 4 * 1 - 5 = -1 < 0$, logo a solução encontrada não é solução da equação proposta.

Equações Logarítmicas

Exemplo 9

Resolva a equação $\log_2(3x + 1) = 4$.

Equações Logarítmicas

Exemplo 9

Resolva a equação $\log_2(3x+1) = 4$.

Pela definição,

$$\begin{aligned} \log_2(3x+1) = 4 &\Leftrightarrow 2^4 = 3x+1 \\ &\Leftrightarrow 3x = 16 - 1 \\ &\Leftrightarrow 3x = 15 \\ &\Leftrightarrow x = 5. \end{aligned}$$

Inequações Exponenciais

Exemplo 10

Resolva a inequação $3^{2-3x} < \dfrac{1}{4}$.

Inequações Exponenciais

Exemplo 10

Resolva a inequação $3^{2-3x} < \dfrac{1}{4}$.

Como $a = 3 > 1$, a função $\log_3 x$ é crescente. Assim,

$$\begin{aligned} 3^{2-3x} < \frac{1}{4} = 4^{-1} &\Leftrightarrow \log_3\left(3^{2-3x}\right) < \log_3 4^{-1} \\ &\Leftrightarrow 2 - 3x < -\log_3 4 \\ &\Leftrightarrow 3x > 2 + \log_3 2^2 \\ &\Leftrightarrow x > \frac{2 + 2\log_3 2}{3}. \end{aligned}$$

Obs: Há outro jeito de resolver, veja na bibliografia indicada.

Inequações Logarítmicas

Exemplo 11

Resolva a inequação $\log_{1/2}(2x-1) < \log_{1/2} 6$.

Inequações Logarítmicas

Exemplo 11

Resolva a inequação $\log_{1/2}(2x - 1) < \log_{1/2} 6$.

Como $a\dfrac{1}{2} < 1$, a função $\log_{1/2} x$ é decrescente. Assim,

$$\begin{aligned} \log_{1/2}(2x - 1) < \log_{1/2} 6 &\Leftrightarrow 2x - 1 > 6 \\ &\Leftrightarrow 2x > 7 \\ &\Leftrightarrow x > \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Aplicações

Crescimento de Bactérias - Modelo Malthusiano

Exercício 2

O crescimento de certa cultura de bactérias obedece à função $X(t) = Ce^{kt}$*, em que* $X(t)$ *é o número de bactérias no tempo* $t = 0$*; C e k são constantes positivas (e é a base do logaritmo neperiano). Verificando que o número inicial de bactérias* $X(0)$ *duplica em* 4 *horas, quantas delas se pode esperar no fim de* 6 *horas?*

Crescimento de Bactérias - Modelo Malthusiano

Exercício 2

O crescimento de certa cultura de bactérias obedece à função $X(t) = Ce^{kt}$*, em que* $X(t)$ *é o número de bactérias no tempo* $t = 0$*;* C *e* k *são constantes positivas (e é a base do logaritmo neperiano). Verificando que o número inicial de bactérias* $X(0)$ *duplica em* 4 *horas, quantas delas se pode esperar no fim de* 6 *horas?*

Resposta: O número de bactérias é $2\sqrt{2}$ vezes o valos inicial.

Decaimento Radioativo

Exercício 3

Uma substância radioativa está em processo de decaimento, de modo que no instante t a quantidade não decaída é $A(t) = A(0) \cdot e^{-3t}$*, em que* $A(0)$ *indica a quantidade da substância no instante* $t = 0$*. Calcule o tempo necessário para que a metade da quantidade inicial se decaia.*

Decaimento Radioativo

Exercício 3

Uma substância radioativa está em processo de decaimento, de modo que no instante t a quantidade não decaída é $A(t) = A(0) \cdot e^{-3t}$, *em que* $A(0)$ *indica a quantidade da substância no instante* $t = 0$. *Calcule o tempo necessário para que a metade da quantidade inicial se decaia.*

Resposta: O tempo necessário é de $\ln(\sqrt[3]{2})$ u.m. (unidades de medida)

População - Modelo Logístico

Uma população com frequência cresce exponencialmente em seus estágios iniciais, seguindo o modelo de Malthus, mas em dado momento se estabiliza e se aproxima de sua capacidade de suporte por causa dos recursos limitados. Para refletir que a taxa de crescimento diminui quando a população P aumenta e torna-se negativa quando P ultrapassa sua **capacidade de suporte** K, a expressão mais simples é dada pelo modelo conhecido como Modelo Logístico

$$P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-kt}},$$

onde $A = \dfrac{K - P_0}{P_0}$, P_0 é a população inicial e k é a taxa de crescimento.

População - Modelo Logístico

Exercício 4

Um rebanho de cervos é introduzido em uma ilha. A população inicial é de 500 indivíduos e estima-se que a população que se manterá constante a longo prazo será de 2.000 indivíduos. Se o tamanho da população é dado pela função de crescimento logístico

$$N(t) = \frac{2000}{1 + 3e^{-0{,}05t}},$$

após quantos anos o número de cervos será aproximadamente 950 indivíduos?

População - Modelo Logístico

Exercício 4

Um rebanho de cervos é introduzido em uma ilha. A população inicial é de 500 indivíduos e estima-se que a população que se manterá constante a longo prazo será de 2.000 indivíduos. Se o tamanho da população é dado pela função de crescimento logístico

$$N(t) = \frac{2000}{1 + 3e^{-0{,}05t}},$$

após quantos anos o número de cervos será aproximadamente 950 indivíduos? **Resposta:** Em aproximadamente 20 anos.

Juros Compostos

Exercício 5

Uma certa quantia de dinheiro P é investida a uma taxa anual de juros de 4,5%. Quantos anos (com aproximação na ordem de décimos de ano) levaria para o montante inicial dobrar, assumindo que a capitalização dos juros seja trimestral?

Obs: Use a fórmula $A(t) = P\left(1 = \frac{r}{n}\right)^{nt}$.

Juros Compostos

Exercício 5

Uma certa quantia de dinheiro P é investida a uma taxa anual de juros de 4,5%. Quantos anos (com aproximação na ordem de décimos de ano) levaria para o montante inicial dobrar, assumindo que a capitalização dos juros seja trimestral?

Obs: Use a fórmula $A(t) = P\left(1 = \frac{r}{n}\right)^{nt}$.

Resposta: Levaria aproximadamente $15,5$ anos.