

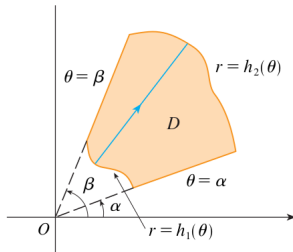
As regiões polares também podem ser escritas de forma mais geral:

3 Se f é contínua em uma região polar da forma

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

então

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$



Exemplo:

Como $\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r \sin \theta}{\sqrt{r^2}} = \sin \theta$, temos

$$\begin{aligned}
 \iint_R \sin \theta \, dA &= \int_0^{\pi/2} \int_2^{2(1+\cos \theta)} (\sin \theta) r \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{2} r^2 \sin \theta \right]_{r=2}^{2(1+\cos \theta)} d\theta \\
 &= 2 \int_0^{\pi/2} [(1 + \cos \theta)^2 \sin \theta - \sin \theta] d\theta \\
 &= 2 \left[-\frac{1}{3} (1 + \cos \theta)^3 + \cos \theta \right]_0^{\pi/2} \\
 &= 2 \left[-\frac{1}{3} - \left(-\frac{5}{3} \right) \right] = \frac{8}{3} \quad \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

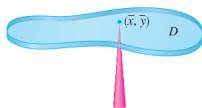
Aplicações:

5 As coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) do centro de massa de uma lâmina ocupando a região D e tendo função densidade $\rho(x, y)$ são

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x, y) dA \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x, y) dA$$

onde a massa m é dada por

$$m = \iint_D \rho(x, y) dA$$



O significado físico disso é que a lâmina se comporta como se toda sua massa estivesse concentrada em seu centro de massa. Assim, a lâmina permanece horizontal quando equilibrada em seu centro de massa (veja a Figura 4).

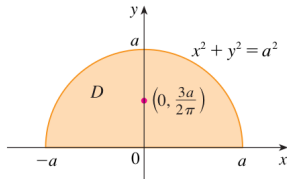
Exemplo:

- A densidade em qualquer ponto de uma lâmina semicircular é proporcional à distância ao centro do círculo. Determine o centro de massa da lâmina.
 - 1 Dados dois pontos no plano (x, y) e (w, z) , a distância entre eles é dada por $d = \sqrt{(x - w)^2 + (y - z)^2}$;
 - 2 Se o centro do círculo está na origem, a distância entre um ponto da lâmina e este centro é dada por $d = \sqrt{x^2 + y^2}$;
 - 3 Se a função densidade é proporcional à distância ao centro do círculo, então existe uma constante K tal que

$$\rho(x, y) = K\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Exemplo:

Assim, para uma lâmina de raio a



a massa da lâmina é dada por

$$\begin{aligned}
 m &= \iint_D \rho(x, y) \, dA = \iint_D K \sqrt{x^2 + y^2} \, dA \\
 &= \int_0^\pi \int_0^a (Kr) \, r \, dr \, d\theta = K \int_0^\pi d\theta \int_0^a r^2 \, dr \\
 &= K\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^a = \frac{K\pi a^3}{3}
 \end{aligned}$$

Exemplo:

E a coordenada x do seu centro de massa é dado por:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{m} \int \int_D x \rho(x, y) dA = \frac{1}{m} \int \int_D x K \sqrt{x^2 + y^2} dA \\ &= \frac{K}{m} \int_0^a \int_0^\pi r \cos \theta r r d\theta dr = \frac{K}{m} \int_0^a r^3 \int_0^\pi \cos \theta dr d\theta \\ &= \frac{K}{m} \int_0^a r^3 (\sin \theta \big|_0^\pi) dr = \frac{K}{m} \int_0^a r^3 0 dr = 0\end{aligned}$$

Sua coordenada y é dada por:

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x, y) dA = \frac{3}{K\pi a^3} \int_0^\pi \int_0^a r \sin \theta (Kr) r dr d\theta \\ &= \frac{3}{\pi a^3} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^a r^3 dr = \frac{3}{\pi a^3} [-\cos \theta]_0^\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a \\ &= \frac{3}{\pi a^3} \frac{2a^4}{4} = \frac{3a}{2\pi}\end{aligned}$$

Portanto, o centro de massa está localizado no ponto $(0, 3a/(2\pi))$.

Aplicações:

A **função densidade conjunta** de X e Y é uma função f de duas variáveis tais que a probabilidade de que (X, Y) esteja em uma região D seja

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y) dA$$

Como probabilidades não podem ser negativas e são medidas na escala de 0 a 1, a função densidade conjunta tem as seguintes propriedades:

$$f(x, y) \geq 0 \quad \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dA = 1$$

Exemplo:



Se a função densidade conjunta de X e Y for dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x + 2y) & \text{se } 0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 10 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

determine o valor da constante C . Então, calcule $P(X \leq 7, Y \geq 2)$.

SOLUÇÃO Determinamos o valor de C garantindo que a integral dupla de f seja igual a 1. Como $f(x, y) = 0$ está fora do retângulo $[0, 10] \times [0, 10]$, temos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, dy \, dx &= \int_0^{10} \int_0^{10} C(x + 2y) \, dy \, dx = C \int_0^{10} [xy + y^2]_{y=0}^{y=10} \, dx \\ &= C \int_0^{10} (10x + 100) \, dx = 1\,500C\end{aligned}$$

Portanto, $1\,500C$ e, assim, $C = \frac{1}{1\,500}$.

Agora, podemos calcular a probabilidade de X ser no máximo 7 e de Y ser no mínimo 2:

$$\begin{aligned}P(X \leq 7, Y \geq 2) &= \int_{-\infty}^7 \int_2^{\infty} f(x, y) \, dy \, dx = \int_0^7 \int_2^{10} \frac{1}{1\,500} (x + 2y) \, dy \, dx \\ &= \frac{1}{1\,500} \int_0^7 [xy + y^2]_{y=2}^{y=10} \, dx = \frac{1}{1\,500} \int_0^7 (8x + 96) \, dx \\ &= \frac{868}{1\,500} \approx 0,5787\end{aligned}$$