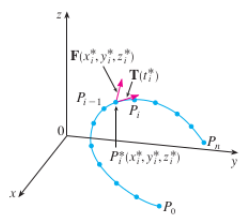
Integrais de linha

Motivação

- Seja o campo vetorial $\overrightarrow{F} = (P, Q, R)$ contínuo em $\mathbb{R}^3$ (campo gravitacional, campo força elétrica, por exemplo).
- Queremos calcular o trabalho exercido por essa força ao mover uma partícula ao longo de uma curva suave C.
- Uma curva C, parametrizada por uma função $r(t)$, é dita suave se
$$r'(t) \text{ é contínua e } r'(t) \neq 0.$$
- O trabalho feito por uma força constante F para mover um objeto de um ponto P para outro ponto Q do espaço é
$$W = F \cdot D,$$
onde $D = PQ$ é o vetor deslocamento.

Motivação



- Para calcular o trabalho feito por um campo vetorial não constante e ao longo de uma curva, não necessariamente uma reta:
  - Dividimos a curva em subarcos menores, bem pequenos. O movimento da partícula através do subarco ocorre, aproximadamente, na direção do vetor tangente unitário $T(t_i^*)$.
  - O trabalho feito pela força F para mover a partícula do ponto inicial ao ponto final do subarco é, aproximadamante,

$$\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot [\Delta s_i \mathbf{T}(t_i^*)] = [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(t_i^*)]\, \Delta s_i$$

Definição

- O trabalho total, ao longo da curva C é, aproximadamente,

$$\sum_{i=1}^{n} [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)] \, \Delta s_i$$

Seja $\mathbf{F}$ um campo vetorial contínuo definido sobre uma curva suave C dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Então, **a integral de linha de F ao longo de *C*** é

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$$

- Lembrete: $u \cdot v = (a, b, c) \cdot (d, e, f) = ad + be + cf$.

1) Determine o trabalho feito pelo campo de força

$$F(x, y) = x^2\,\mathbf{i} - xy\,\mathbf{j}$$

ao se mover uma partícula ao longo de um quarto de círculo

$$r(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j},\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Exemplos

1) Determine o trabalho feito pelo campo de força

$$F(x, y) = x^2\,\mathbf{i} - xy\,\mathbf{j}$$

ao se mover uma partícula ao longo de um quarto de círculo

$$r(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j},\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

SOLUÇÃO Uma vez que $x = \cos t$ e $y = \operatorname{sen} t$, temos

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \cos^2 t\,\mathbf{i} - \cos t \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$$

e

$$\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$$

Portanto, o trabalho realizado é

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} (-2\cos^2 t \operatorname{sen} t)\,dt$$

$$= 2\,\frac{\cos^3 t}{3}\Big]_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3}$$

Exemplos

2) Calcule $\int_C F \cdot dr$, onde

$$F(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + zx\,\mathbf{k}$$

e C é a cúbica retorcida dada por

$$x = t \qquad y = t^2 \qquad z = t^3 \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Exemplos

2) Calcule $\int_C F \cdot dr$, onde

$$F(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + zx\,\mathbf{k}$$

e C é a cúbica retorcida dada por

$$x = t \qquad y = t^2 \qquad z = t^3 \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

SOLUÇÃO Temos

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + 3t^2\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = t^3\,\mathbf{i} + t^5\,\mathbf{j} + t^4\,\mathbf{k}$$

Logo,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 (t^3 + 5t^6)\,dt = \frac{t^4}{4} + \frac{5t^7}{7}\Bigg]_0^1 = \frac{27}{28}$$

Exercícios

1. Calcule $\int_C F \cdot dr$, onde C é dada pela função vetorial $r(t)$.

    a) $F(x, y) = xy\,\mathbf{i} + 3y^2\,\mathbf{j}$ e $r(t) = 11t^4\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 1$.
    Resp:45

    b) $F(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$ e $r(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq \pi$.
    Resp:0