Álgebra Linear - Aula 04

Combinação Linear. Base de um Espaço Vetorial.

Profª Dra. Karla Lima

Sumário

1. Combinação Linear
2. Conjunto de Geradores
3. Base de um Espaço Vetorial
4. Exercícios

Combinação Linear

Formar um vetor novo a partir de outros vetores, usando multiplicações por escalar e somas de vetores.

Combinação Linear

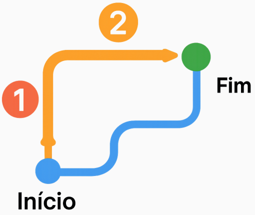
- **Receita de cozinha:** Imagine que cada vetor é um ingrediente (farinha, leite, ovo).
- A combinação linear é como escolher quanto de cada ingrediente você coloca e depois misturar.
- O prato final (bolo, pão, panqueca) é o novo vetor que surge da combinação.

Combinação Linear

- **Música:** Cada nota musical é um vetor.
- Você pode tocar uma nota mais forte (multiplicar por um número) ou mais fraca.
- Quando junta as notas, surge uma melodia: o vetor novo formado pela combinação linear.

Combinação Linear

- **Caminhos num mapa:** Cada vetor é um caminho básico (ir para o norte, ir para o leste, ir para o sul, ir para o oeste).
- Se você anda 2 passos para o norte e 3 passos para o leste, você formou um novo caminho.
- Esse novo caminho é a combinação linear dos movimentos básicos.



Definição

Dizemos que um vetor $\mathbf{w}$ *num espaço vetorial* V *é uma* ***combinação linear*** *dos vetores* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n$ *em* V *se* $\mathbf{w}$ *puder ser expresso na forma*

$$w = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$$

em que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *são escalares. Esses escalares são denominados* ***coeficientes*** *da combinação linear.*

Exemplo

a) *Mostre que qualquer vetor de* $\mathbb{R}^2$ *pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores* $e_1 = (1, 0)$ *e* $e_2 = (0, 1)$.

b) *Mostre que o vetor* $\mathbf{w} = (9, 2, 7)$ *é uma combinação linear de* $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$ *e* $\mathbf{v} = (6, 4, 2)$.

c) *Mostre que* $\mathbf{z} = (4, -1, 8)$ *não é uma combinação linear de* $\mathbf{u}$) *e* $\mathbf{v}$ *dados no item b).*

Independência Linear

Um conjunto de vetores é linearmente independente quando nenhum deles pode ser construído a partir de combinações dos outros usando multiplicações por números e somas de vetores.

Independência Linear

Cores primárias:

- **Vermelho**, **Azul** e **Amarelo** são cores primárias.
- Nenhuma pode ser criada a partir das outras duas.
- Portanto, são **linearmente independentes**.

Dependência Linear

Exemplo de dependência:

- A cor **Roxo** pode ser criada misturando Vermelho e Azul.
- Logo, o conjunto {Vermelho, Azul, Amarelo, Roxo} é **linearmente dependente**.

Exemplo de dependência:

- A cor **Roxo** pode ser criada misturando Vermelho e Azul.
- Logo, o conjunto {Vermelho, Azul, Amarelo, Roxo} é **linearmente dependente**.

Definição

Um conjunto de vetores é linearmente dependente quando pelo menos um deles pode ser obtido combinando os outros, por meio de multiplicações por números e somas de vetores.

Definição

Se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_r\}$ for um conjunto não vazio de vetores num espaço vetorial V, então a equação vetorial

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r = 0$$

tem uma solução, pelo menos, a saber,

$$k_1 = 0,\ k_2 = 0,\ \ldots,\ k_r = 0.$$

*Dizemos que essa é a **solução trivial**.*

1. *Se essa for a única solução, dizemos que S é um **conjunto linearmente independente**.*
2. *Se existem outras soluções além da trivial, dizemos que S é um **conjunto linearmente dependente**.*

Exemplo 2

Exemplo

Vamos verificar a independência linear dos conjuntos abaixo.

1. $S = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$
2. $S = \{(1,-2),(0,1),(3,2)\}$
3. $S = \{1, x, x^2, x^3\}$

Conjunto de Geradores

Será que todo vetor pode ser construído a partir de outros?

Definição

Se $S = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n\}$ *é um conjunto não vazio, denotamos por*

$$ger\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n\} \quad ou \quad ger(S)$$

o conjunto gerado por todas as combinações lineares possíveis dos elementos de S.

Exemplo 3

Exemplo

a) *O conjunto dos vetores canônicos* $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ *gera o espaço* $\mathbb{R}^3$.

b) *O conjunto dos vetores* $\{(2,1,0),(-1,0,0),(2,0,0)\}$ *NÃO gera o espaço* $\mathbb{R}^3$.

Exemplo

a) *O conjunto dos vetores canônicos* $\{(1,0),(0,1)\}$ *gera o espaço* $\mathbb{R}^2$.

b) *O conjunto de vetores* $\{(2,1),(-1,0),(0,0)\}$ *gera o espaço* $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 6

Exemplo

O conjunto dos vetores $\{1, x, x^2, x^3\}$ *gera o espaço* P_3*, dos polinômios de grau menor ou igual a 3.*

Base de um Espaço Vetorial

É como um conjunto mínimo de peças de Lego: com elas, podemos construir qualquer elemento do espaço apenas combinando-as de diferentes formas.

Definição

Se V for um espaço vetorial qualquer e $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *for um conjunto finito de vetores em V, dizemos que S é uma* ***base*** *de V e valerem as duas condições a seguir.*

a) *S é linearmente independente.*

b) *S gera V*

Exemplo 6

Exemplo

Quais das afirmações abaixo são verdadeiras?

a) *O conjunto dos vetores canônicos* $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ *é uma base para o espaço* $\mathbb{R}^3$.

b) *O conjunto dos vetores* $\{(2,1,0),(-1,0,0),(2,0,0)\}$ *é uma base para o espaço* $\mathbb{R}^3$.

c) *O conjunto de vetores* $\{(2,1),(-1,0),(0,0)\}$ *é uma base para o espaço* $\mathbb{R}^2$.

d) *O conjunto de vetores* $\{(2,1),(-1,0)\}$ *é uma base para o espaço* $\mathbb{R}^2$.

e) *O conjunto dos vetores* $\{1,x,x^2,x^3\}$ *é uma base para o espaço* P_3, *dos polinômios de grau menor ou igual a 3.*

Exercícios

1. Faça os exercícios da seção 4.2 do livro Álgebra Linear com Aplicações, de Howard Anton and Chris Rorres: 11 ao 13 e do 16 ao 18 e 20.

Referências I

[1] Howard Anton and Chris Rorres.
***Álgebra Linear com Aplicações*.**
Bookman, Porto Alegre, 10 edition, 2012.
Tradução técnica: Claus Ivo Doering. Editado também como livro impresso em 2012.
Recurso eletrônico.