Diferencial de uma função

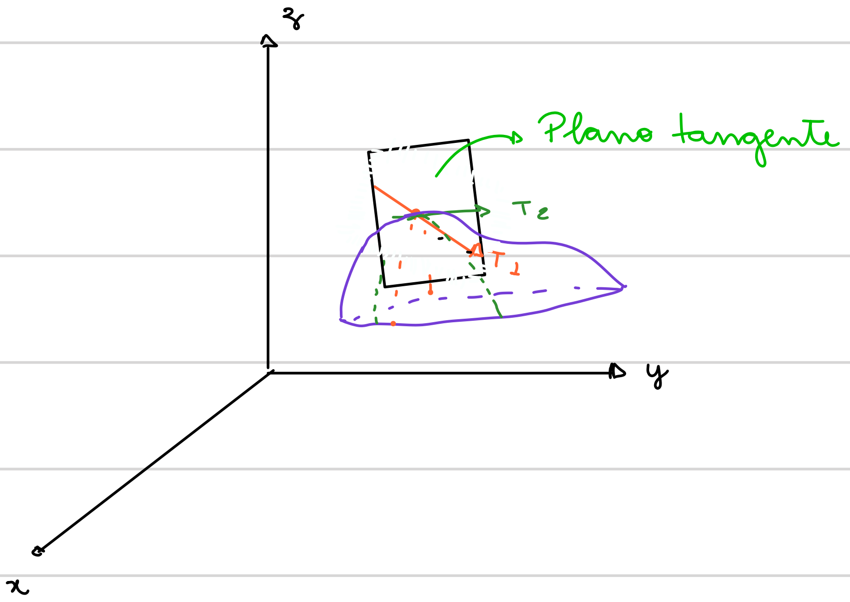
Vimos que a partir da derivada parcial é possível estimar o crescimento ou decrescimento da função, considerando uma ou outra variável constante. Agora, será avaliada a variação da função se forem dados acréscimos simultâneos a x e y.

Plano tangente

Seja S a superfície dada por $z = f(x,y)$. Suponha que $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ sejam contínuas e que $P(x_0, y_0, z_0) \in S$ (ou seja, $z_0 = f(x_0, y_0)$).

O plano tangente à S no ponto P é definido como o plano que contém as retas tangentes T_1 e T_2, onde:

- T_1 é tangente à curva obtida ao fixarmos a coordenada y no ponto (x_0, y_0) e fazemos x variar. Sua inclinação é dada por $m_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.
- T_2 é tangente à curva obtida ao fixarmos a coordenada x no ponto (x_0, y_0) e fazemos y variar. Sua inclinação é dada por $m_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

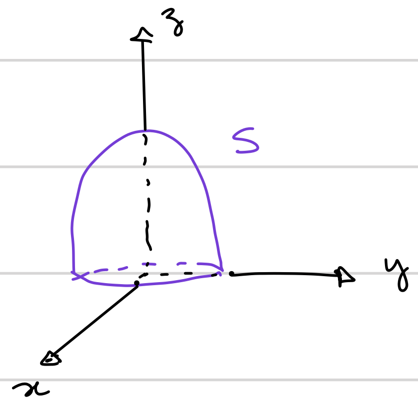


Definição: Suponha que f tenha derivadas parciais contínuas. Uma equação do plano tangente à superfície S no ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ é dada por

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Ou seja, o ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ está no plano tangente à superfície S se satisfaz a equação acima.

Exemplo:



$f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$

Calcule a equação do plano tangente à S nos pontos $P(0,0,9)$ e $Q(0,1,8)$.

Temos que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$, que são contínuas, por serem polinômios. Assim, a equação para a tangente no ponto $(0,0,9)$ é dada por:

$$\underset{z_0}{z-9} = f_x(0,0)(x-\underset{x_0}{0}) + f_y(0,0)(y-\underset{y_0}{0}) \Rightarrow z-9 = 0 \cdot x + 0 \cdot y \Rightarrow z = 9.$$

Assim, os pontos deste plano são da forma $(x,y,9)$.

Já no ponto $Q(0,1,8)$, temos

$$z-8 = f_x(0,1)(x-0) + f_y(0,1)(y-1) = 0 \cdot x - 2 \cdot 1(y-1) = -2y+2$$

$\Rightarrow z = -2y + 10.$

Assim, os pontos deste plano são da forma $(x,y,-2y+10)$.

A diferencial de uma função

A diferença total da função f denominada diferencial de f é definida por

$$dz = df(x,y) = f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy$$

em que dx é a notação considerando $\Delta x = x - x_0 \to 0$ e dy a notação considerando $\Delta y = y - y_0 \to 0$.

x próximo de x_0

y próximo de y_0

dz calcula, numericamente, a variação total ou estima o erro da função quando forem dados acréscimos Δx e Δy.

* f é diferenciável em (x_0,y_0) se o plano dado por

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y$$

fornece uma "boa aproximação" para $f(x,y)$ perto de $f(x_0,y_0)$.

Ou seja, quando o ponto $(x,y,f(x,y))$ está próximo do ponto (x,y,z) do plano tangente, com $z = z_0 + f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y$.

* Isso sempre ocorre se f_x e f_y forem contínuas em (x_0,y_0).

Exemplos: Considere as funções descritas na lista 02.

1 Calcule $df(3.6, 40)$, com $\Delta x = 0.01$ e $\Delta y = -0.12$, justificando seu significado.

Devemos calcular as derivadas parciais de f em $(3.6, 40)$. Temos

$f_x(x,y) = y \Rightarrow f_x(3.6, 40) = {}^{+}40$ ← positiva ↳ função crescente: aumento no preço ⇓ aumento no custo; diminuição no preço ⇓ diminuição no custo

↳ uma variação do preço próximo a R\$ 3,60 fará o custo crescer a uma taxa de 40

$f_y(x,y) = x \Rightarrow f_y(3.6, 40) = {}^{+}3.6$ positiva ↳ função crescente: aumento na quantidade ⇓ aumento no custo; diminuição na quantidade ⇓ diminuição no custo

↳ uma variação da quantidade próximo a 40 litros fará o custo crescer a uma taxa de 3.6

O gasto do combustível irá diferenciar

$$z - z_0 = df(3.6, 40) = f_x(3.6, 40)\Delta x + f_y(3.6,40)\Delta y$$

$$= 40 \cdot 0.01 + 3.6(-0.12) = -0.032.$$

Assim, o gasto que seria $f(3.6, 40) = 144$ reais passará a ser $144 - 0.032 = 143{,}968$.

Ver mais exemplos: Cálculo, vol 1 - J. Stewart

Matemática aplicada às ciências agrárias - R. S. Ferreira