Álgebra Linear - Aula 03

Subespaços Vetoriais / Combinação Linear

Profª Dra. Karla Lima

Sumário

Da definição [2]

- A noção de espaço vetorial é o terreno onde se desenvolve toda a Álgebra Linear.
- Um **espaço vetorial** E é um conjunto cujos elementos são chamados *vetores*, no qual estão definidas duas operações:

Essas operações devem satisfazer, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u, v, w \in E$, as condições abaixo, chamadas *axiomas de espaço vetorial*:

Axiomas dos Espaços Vetoriais

OPERAÇÕES

OPERAÇÃO 1: ADIÇÃO

COMUTATIVIDADE

$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

ASSOCIATIVIDADE

$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

VETOR NULO

Existe em E um vetor 0 tal que

$0 + \mathbf{u} = \mathbf{u}$

VETOR SIMÉTRICO

Existe em E um vetor -u tal que

$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = 0$

OPERAÇÃO 2: MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

ASSOCIATIVIDADE

$(\alpha\beta)\mathbf{u} = \alpha(\beta\mathbf{u})$

MULTIPLICAÇÃO POR 1

$1\,\mathbf{v} = \mathbf{v}$

DISTRIBUTIVIDADE

$(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$

$\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$

Exemplo 1

Exemplo

De modo geral, o conjunto $(\mathbb{M}_{m\times n}, +, \cdot)$ *de todas as matrizes de ordem* $m \times n$ *é um espaço vetorial com as operações usuais de matrizes.*

Exemplo 2

Exemplo

Seja $\mathcal{F}(-\infty, \infty) = \{\boldsymbol{f} \,|\, \boldsymbol{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ *o conjunto de todas as funções definidas no intervalo* $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$*. Definimos as operações de adição e multiplicação por escalar por*

$$(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})(x) = f(x) + g(x)$$
$$(a \cdot \boldsymbol{f})(x) = a\, f(x),$$

e, com essas operações, o espaço $(\mathcal{F}(-\infty, \infty), +, *)$ *é um espaço vetorial.*

Exemplo 3

Exemplo

Seja $V = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$ *e defina as operações de* V *por*

$$u + v = uv$$

$$a * u = u^a.$$

O conjunto $V = (V, +, *)$ *é um espaço vetorial!*

Exemplo 4

Exemplo

Seja $V = \mathbb{R}^2$ *com as operações definidas por:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \\ a * \boldsymbol{u} &= (au_1, 0). \end{aligned}$$

Com essas operações, $V = (\mathbb{R}^2, +, *)$ *não é um espaço vetorial.*

Teorema

Sejam V um espaço vetorial, $\boldsymbol{u}$ um vetor em V e a um escalar. Então

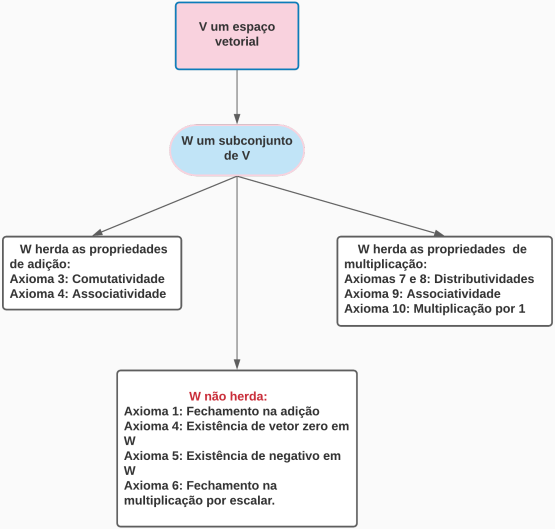
a) $0 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$
b) $(-1) \cdot \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$
c) $a \cdot \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$
d) *Se* $a \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$*, então* $a = 0$ *ou* $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.

Subespaços Vetoriais

Definição

Um subconjunto W de um espaço vetorial V é denominado ***subespaço*** *de V se W for um espaço vetorial por si só com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas em V.*

Definição


V um espaço vetorial
W um subconjunto de V
W herda as propriedades de adição:
Axioma 3: Comutatividade
Axioma 4: Associatividade
W herda as propriedades de multiplicação:
Axiomas 7 e 8: Distributividades
Axioma 9: Associatividade
Axioma 10: Multiplicação por 1
W não herda:
Axioma 1: Fechamento na adição
Axioma 4: Existência de vetor zero em W
Axioma 5: Existência de negativo em W
Axioma 6: Fechamento na multiplicação por escalar.

Teorema 2

Teorema

Se W for um conjunto não vazio em um espaço vetorial $V = (V, +, *)$, *então W é um subespaço de V se, e somente se, as condições seguintes forem válidas.*

a) *Se **u** e **v** forem vetores em W, então **u + v** está em W.*

b) *Se a for um escalar qualquer e **u** um vetor de W, então* $a * \mathbf{u}$ *está em W.*

Exemplo 5

Exemplo

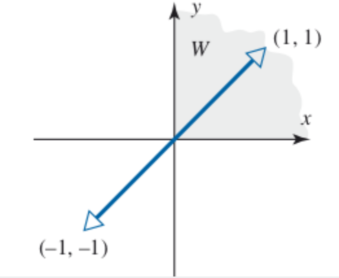
a) *Uma reta que passa pela origem tem equação geral* $y - kx = 0$*, onde* k *é uma constante. Tais retas são subespaços vetoriais em* $\mathbb{R}^2$*.*

Exemplo 5

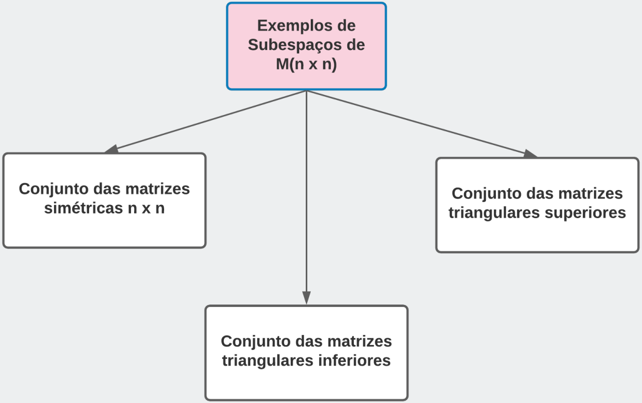
Exemplo

a) *Uma reta que passa pela origem tem equação geral* $y - kx = 0$*, onde* k *é uma constante. Tais retas são subespaços vetoriais em* $\mathbb{R}^2$.

b) *O conjunto de todos os pontos de* $\mathbb{R}^2$ *tais que* $x \geq 0$ e $y \geq 0$*, não é um espaço vetorial.*



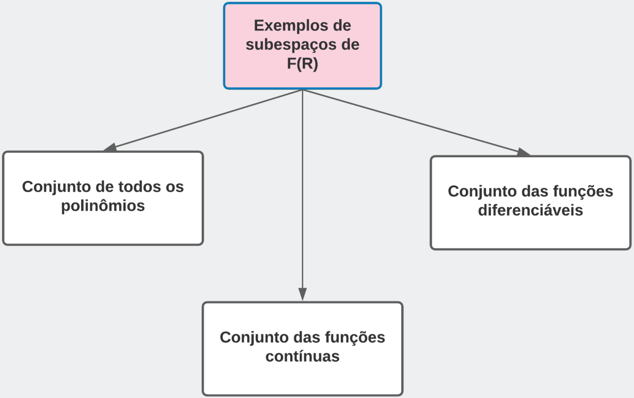
Exemplo



Exemplos de Subespaços de M(n x n)
Conjunto das matrizes simétricas n x n
Conjunto das matrizes triangulares superiores
Conjunto das matrizes triangulares inferiores

Exemplo 7: Subespaços em $\mathcal{F}(-\infty, \infty)$

Exemplo



Combinação Linear

Combinação Linear [1]

Definição

Dizemos que um vetor $\boldsymbol{w}$ *num espaço vetorial* V *é uma* ***combinação linear*** *dos vetores* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_n$ *em* V *se* $\boldsymbol{w}$ *puder ser expresso na forma*

$$w = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n$$

em que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *são escalares. Esses escalares são denominados* ***coeficientes*** *da combinação linear.*

Exemplo

a) *Mostre que qualquer vetor de* $\mathbb{R}^2$ *pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores* $e_1 = (1, 0)$ *e* $e_2 = (0, 1)$.

b) *Mostre que o vetor* $\mathbf{w} = (9, 2, 7)$ *é uma combinação linear de* $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$ *e* $\mathbf{v} = (6, 4, 2)$.

c) *Mostre que* $\mathbf{z} = (4, -1, 8)$ *não é uma combinação linear de* $\mathbf{u}$) *e* $\mathbf{v}$ *dados no item b).*

Referências I

[1] Howard Anton and Chris Rorres.
***Álgebra Linear com Aplicações*.**
Bookman, Porto Alegre, 10 edition, 2012.
Tradução técnica: Claus Ivo Doering. Editado também como livro impresso em 2012.
Recurso eletrônico.

[2] Elon Lages Lima.
***Álgebra Linear*.**
Coleção Matemática Universitária. IMPA, Rio de Janeiro, 1 edition, 2014.
Inclui bibliografia.