UFGD

Universidade Federal
da Grande Dourados

Construções Geométricas

Notas sobre Geometria Plana

Profa. Karla Katerine Barboza de Lima
FACET/UFGD

Sumário

Introdução

As construções com régua e compasso já apareceram desde o séc. V a.C., na época dos pitagóricos na antiga Grécia. Tais construções tiveram grande importância no desenvolvimento da matemática grega. Nessa época, a palavra *número* era usada só para os inteiros e uma *fração* era considerada apenas uma razão entre números, causando dificuldade nas medidas das grandezas.

Por volta do ano de 300 a.C., com Euclides, as grandezas passaram a ser associadas a segmentos de retas e, então, eram 'construídas', no lugar de serem calculadas ou medidas [1]. Nesse período nasce uma nova álgebra, completamente geométrica, onde a palavra *resolver* era sinônimo de *construir*.

Por exemplo, resolver a equação $ax = b$ não tinha significado porque o lado esquerdo era associado à área de um retângulo e o lado direito a um segmento de reta, não podendo as grandezas serem comparadas. Em contrapartida, resolver a equação $ax = bc$ significava encontrar a altura x de um retângulo de base a que tivesse a mesma área de um retângulo de dimensões a e b.

Exemplo 1 *Vamos resolver a equação $3x = 16$, como na Grécia antiga.*
Solução: *Ver em [2].*

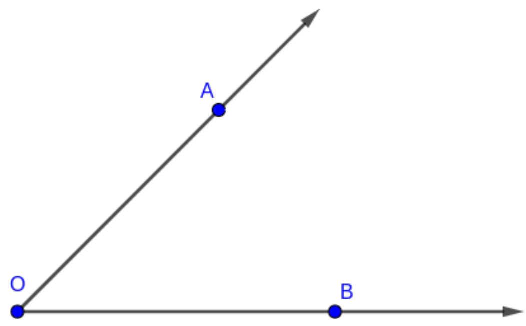
Usando a régua e o compasso (físicos ou através do Geogebra), nos será permitido, de início, executar uma série de **operações elementares** como:

- Marcar dois pontos sobre uma reta ou sobre uma circunferência.
- Dados dois pontos A e B, traçar, com auxílio da régua: a reta AB, o segmento de reta AB e as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$.
- Dados três pontos A, B e C não colineares traçar, com o auxílio da régua:
  a) o Ângulo $A\hat{B}C$ de vértice B e lados $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$;
  b) o triângulo ABC, de vértices A, B e C.
- Dados dois pontos O e A traçar, com o auxílio do compasso, a circunferência $\mathcal{C}(O, \overline{OA})$.
- Transportar, através do traçado de uma circunferência $\mathcal{C}(O, \overline{AB})$, a medida AB a partir de um ponto O dado.
- Determinar interseções de duas retas, de uma reta e uma circunferência, e de duas circunferências.

Nas próximas páginas, a teoria de Geometria Plana que embasará as nossas construções será descrita. As demonstrações dos teoremas serão omitidas, pois as mesmas serão abordadas na disciplina de mesmo nome.

1 Ângulos

Definição 1 *Chamamos de* ***ângulo*** *a figura formada por duas semirretas que têm a mesma origem.*



As semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são chamados **lados** do ângulo e a origem comum O é o seu vértice.

Definição 2 *Seja P um ponto interior do ângulo $A\hat{O}B$. A* ***bissetriz*** *do ângulo $A\hat{O}B$, é a semirreta $\overrightarrow{OP}$, tal que $A\hat{O}P = P\hat{O}B$.*

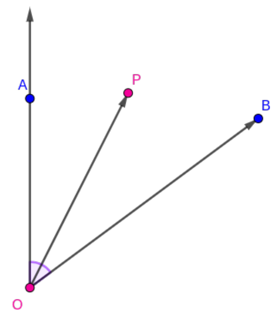
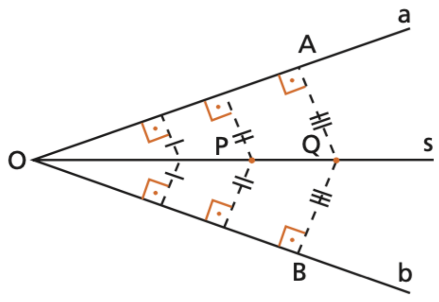


Figura 1: Os ângulos $A\hat{O}P$ e $P\hat{O}B$ possuem a mesma medida.

Sobre a bissetriz, temos o seguinte teorema:

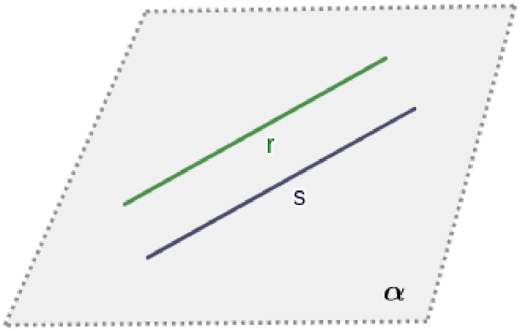
Teorema 1 *Todo ponto da bissetriz de um ângulo equidista dos lados do mesmo.*



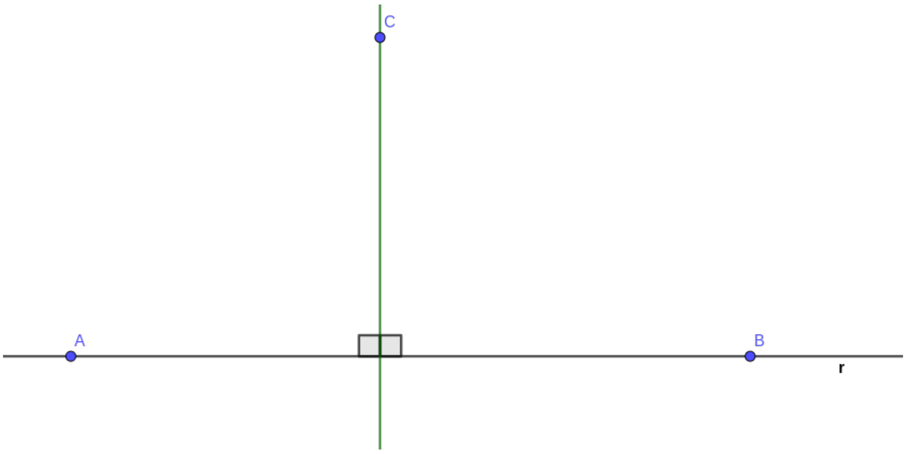
Definição 3 *Duas retas são ditas **paralelas**, se*

i) estão em um mesmo plano;

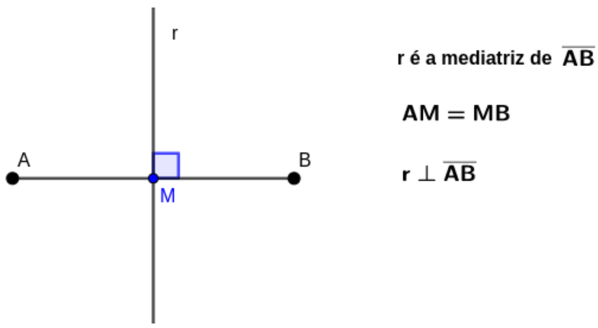
ii) não se interceptam.



Euclides define 'ângulo reto' como sendo igual ao ângulo formado por duas retas que se cortam de maneira a formar quatro ângulos iguais. Tais retas são ditas **perpendiculares**.

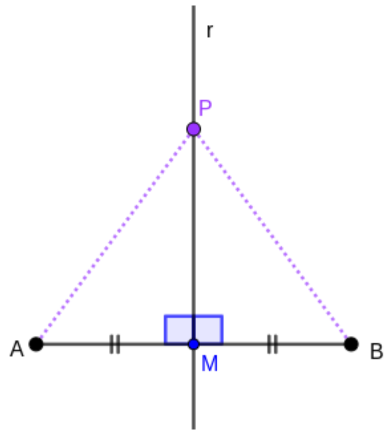


Definição 4 *Chama-se **mediatriz** de um segmento a reta perpendicular ao mesmo em seu ponto médio.*



Sobre a mediatriz, temos o seguinte teorema:

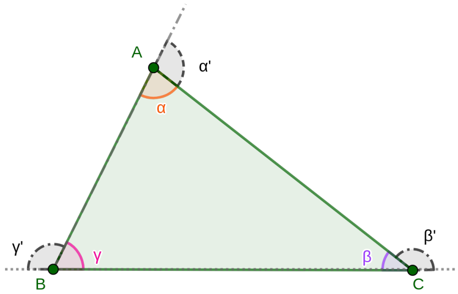
Teorema 2 *Todo ponto da mediatriz de um segmento é equidistante dos extremos desse segmento.*



2 Triângulos

Definição 5 *Sejam A, B e C três pontos não colineares.*

*Denominamos de **triângulo** ABC a união dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ e o denotaremos por $\triangle ABC$.*

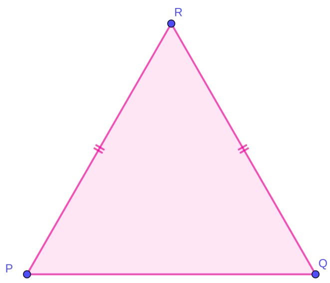


- Os pontos A, B e C são os **vértices** e os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são os **lados** do triângulo.

- Os ângulos $B\hat{A}C = \alpha$, $A\hat{B}C = \gamma$ e $A\hat{C}B = \beta$ são os **ângulos internos** do triângulo. Seus suplementos α', γ' e β' são os **ângulos externos** do triângulo.

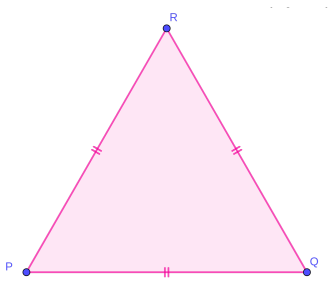
2.1 Classificação

Definição 6 *Um triângulo que tem dois lados congruentes é denominado **isósceles**.*



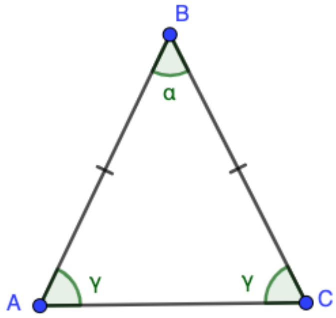
O outro lado é chamado **base** e o ângulo oposto à base é o **ângulo do vértice**.

Definição 7 *Um triângulo cujos lados são congruentes chama-se **equilátero**.*



Obs: Todo triângulo equilátero possui dois lados congruentes, logo ele também será isósceles.

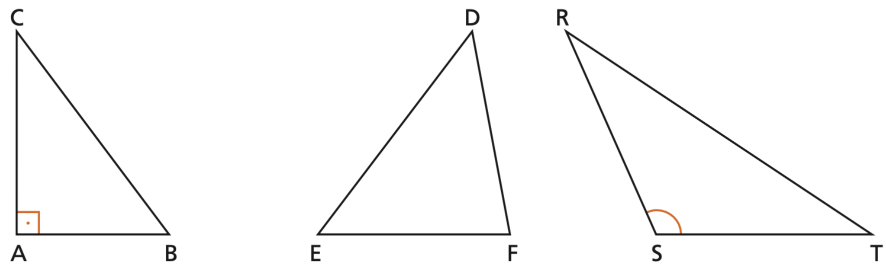
Teorema 3 *Em todo triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.*



Definição 8 *Um triângulo no qual dois lados quaisquer não são congruentes, chama-se* ***escaleno****.*

Quanto aos ângulos, os triângulos se classificam em:

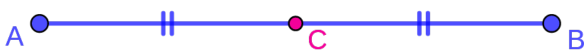
- retângulos se, e somente se, têm um ângulo reto;
- acutângulos se, e somente se, têm os três ângulos agudos;
- obtusângulos se, e somente se, têm um ângulo obtuso.



△ABC é retângulo em A. △DEF é acutângulo. △RST é obtusângulo em S.

Definição 9 *Um ponto C chama-se* ***ponto médio*** *do segmento $\overline{AB}$, se:*

1. *C pertence ao segmento $\overline{AB}$ ($C \in \overline{AB}$);*
2. *O comprimento do segmento $\overline{AC}$ é igual ao do segmento $\overline{CB}$ ($AC = CB$).*



Ponto Médio (segmento)

Definição 10 *Chama-se* ***mediana*** *de um triângulo ao segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto a ele.*

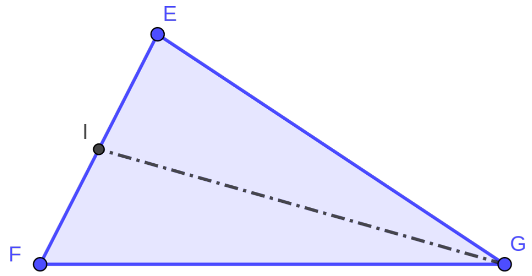
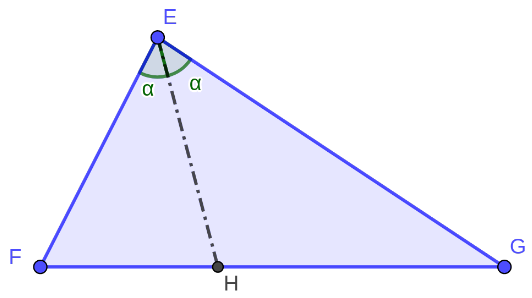


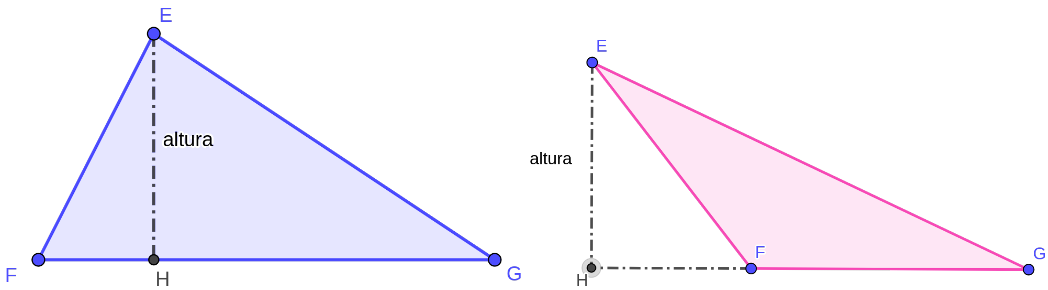
Figura 2: Na figura acima, $\overline{GI}$ é a mediana relativa ao lado EF

Definição 11 *Sejam EFG um triângulo e H um ponto da reta que contém o lado FG.*

a) se a semirreta $\overrightarrow{EH}$ é bissetriz do ângulo $\hat{E}$, o segmento $\overline{EH}$ chama-se a ***bissetriz interna*** *do triângulo, relativa ao lado $\overline{FG}$.*

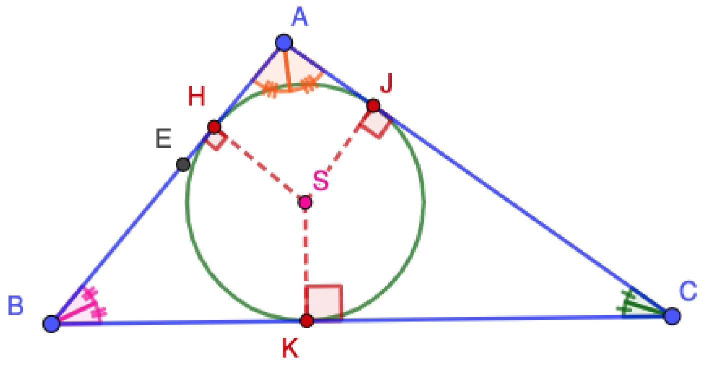


b) se $\overrightarrow{EH}$ for perpendicular à reta que contém o lado $\overline{FG}$, o segmento $\overline{EH}$ chama-se **altura** do triângulo, relativa ao lado $\overline{FG}$.

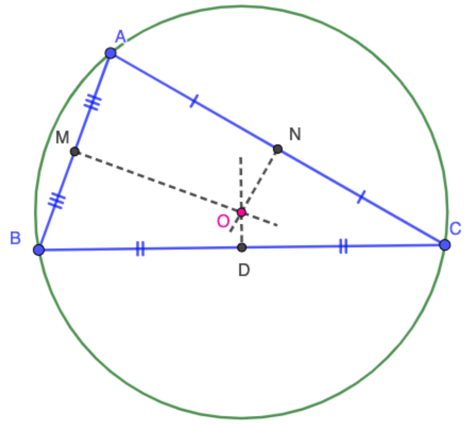


2.2 Pontos Notáveis no Triângulo

- O ponto de interseção das três bissetrizes internas de um triângulo é o **incentro** do triângulo. O incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo.



- O ponto de interseção (ou ponto de encontro ou ponto de concurso) das mediatrizes dos lados de um triângulo é o **circuncentro** do triângulo. O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.



- O ponto de interseção das alturas relativas aos lados de um triângulo é o **ortocentro** do triângulo.

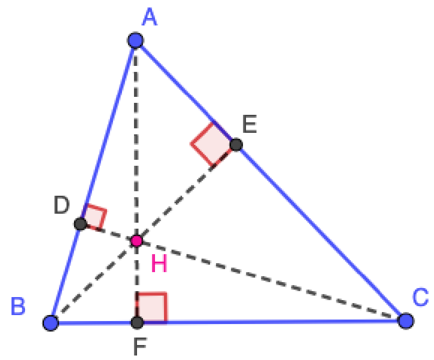


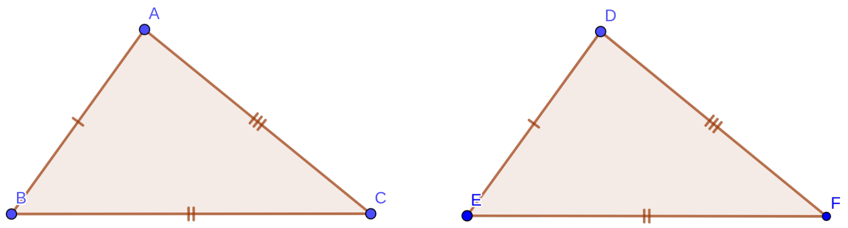
Figura 3: $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$

2.3 Congruência de Triângulos

Definição 12 *Um triângulo é congruente (símbolo $\equiv$) a outro se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que:*

- *seus lados são ordenadamente congruentes aos lados do outro;*
- *seus ângulos são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro.*

Em linguagem popular, dizemos que duas figuras planas são congruentes se elas coincidem por superposição.



- $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$;
- $\hat{A} \equiv \hat{D}$, $\hat{B} \equiv \hat{E}$ e $\hat{C} \equiv \hat{F}$.

Exemplo 2 *Suponhamos que os triângulos abaixo coincidem por superposição. Quais os pares de vértices que devem ser sobrepostos?*

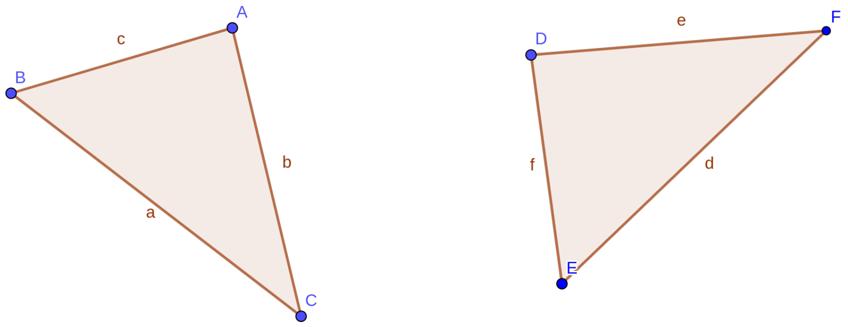


Figura 4: $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

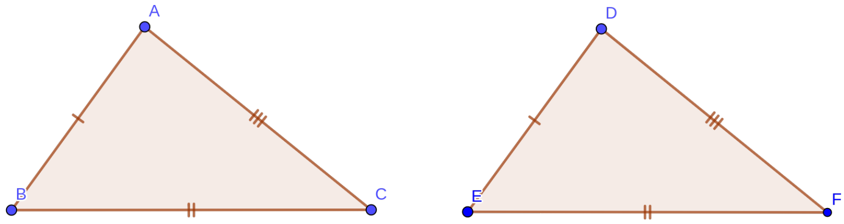
- Os **vértices** que coincidem na superposição são denominados **correspondentes**.
- Os **lados** que unem vértices correspondentes são também chamados **correspondentes**.
- Analogamente, os **ângulos** cujos vértices estão em correspondência, são **correspondentes**.

Observe que em triângulos correspondentes, a ângulos congruentes opõem-se lados congruentes e vice-versa.

Notação: Para indicar que dois triângulos são congruentes, escrevemos:

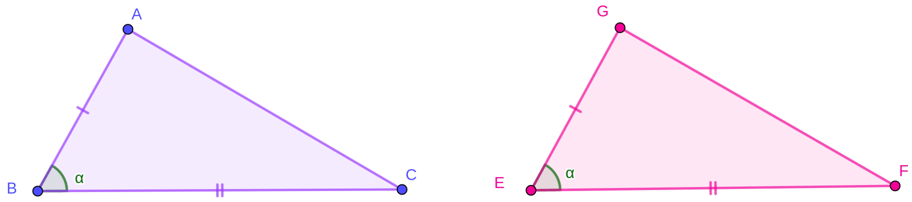
$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF.$$

A ordem em que as letras aparecem, indicam as correspondências entre os vértices.



2.4 Postulado: Caso LAL

Se dois triângulos têm dois lados congruentes e os ângulos compreendidos entre eles são respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.



2.5 Caso ALA

Teorema 4 *Se dois triângulos têm um lado congruente, compreendido entre dois ângulos respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.*

Figura 5: $\triangle ABC \equiv \triangle FDE$

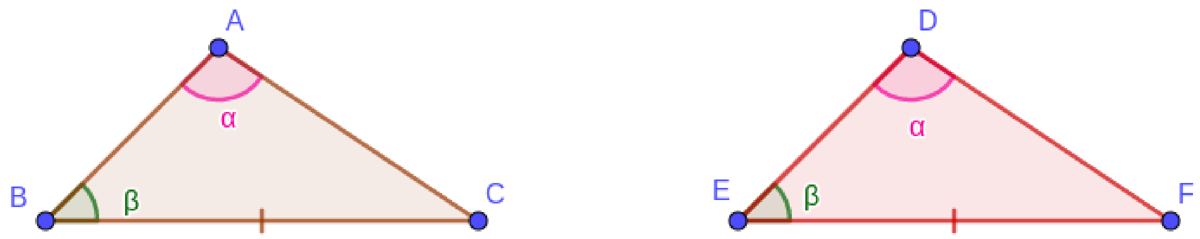
2.6 Caso LLL

Teorema 5 *Se dois triângulos têm três lados respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.*

Figura 6: $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

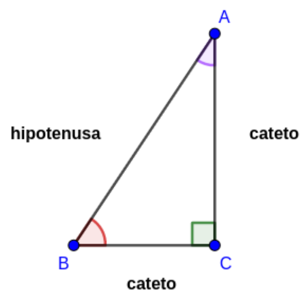
2.7 Caso LAA

Teorema 6 *Se dois triângulos têm um lado congruente, o ângulo oposto e um ângulo adjacente a este lado respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.*



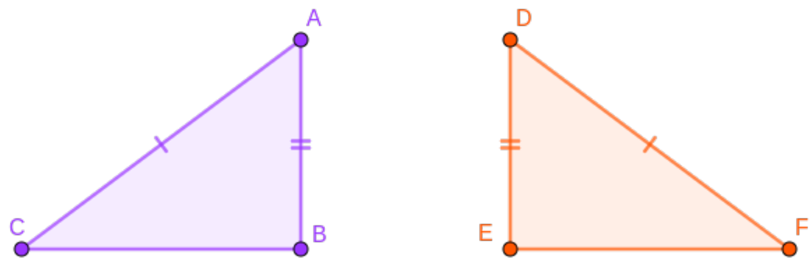
2.8 Caso Especial: Triângulos Retângulos

Definição 13 *Um triângulo que possui um ângulo reto é denominado **triângulo retângulo**.*



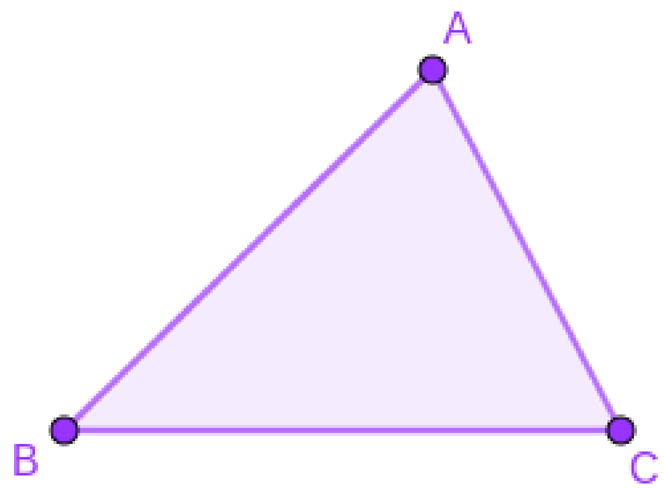
- O lado oposto ao ângulo reto é chamado **hipotenusa**.
- Os outros lados são denominados **catetos** do triângulo.

Teorema 7 *Se dois triângulos retângulos possuem a hipotenusa e um cateto respectivamente congruentes então os triângulos são congruentes.*



2.9 Desigualdades em triângulos

Teorema 8 *Em todo triângulo, a soma dos comprimentos de dois lados quaisquer é maior que o comprimento do terceiro lado.*



Tem-se:

i) $BC < BA + AC$;

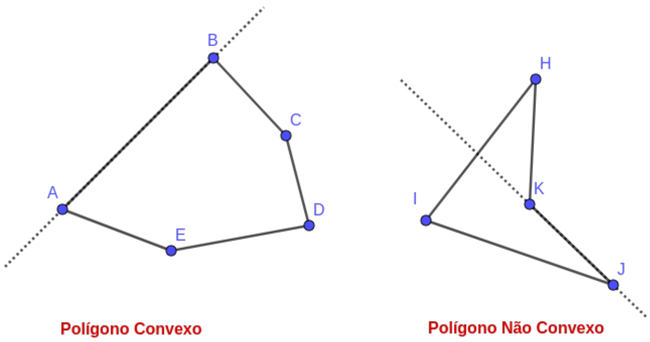
ii) $BA < AC + CB$;

iii) $AC < AB + BC$.

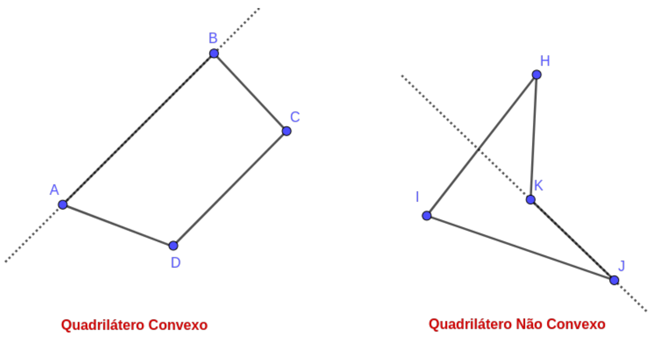
3 Paralelogramos

Resumidamente, um **polígono** é a união de segmentos de reta. Eles podem ser convexos e não convexos.

Definição 14 *Um polígono é dito* ***convexo*** *se o mesmo fica contido em um mesmo semiplano com respeito a reta que contém qualquer um dos seus lados.*

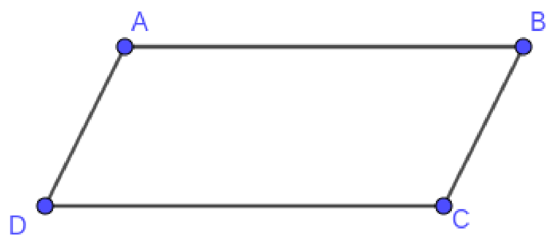


Já os polígonos de quatro lados, denominamos de **quadrilátero**.



Estamos interessados em um caso particular de quadrilátero: os paralelogramos.

Definição 15 *O quadrilátero cujos lados opostos (que não possuem vértices em comum) são paralelos é denominado* ***paralelogramo****.*



Os paralelogramos possuem as propriedades a seguir.

Teorema 9 *Em todo paralelogramo:*

a) os ângulos opostos são congruentes;

b) os lados opostos são congruentes;

c) as diagonais se bissecam.

Teorema 10 *Reciprocamente, um quadrilátero convexo:*

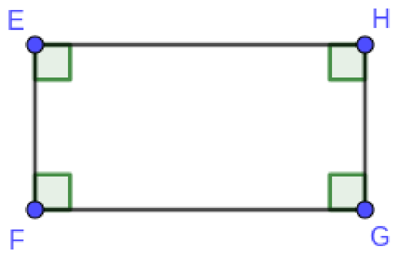
a) cujos lados opostos são congruentes é um paralelogramo;

b) cujos ângulos opostos são congruentes é um paralelogramo;

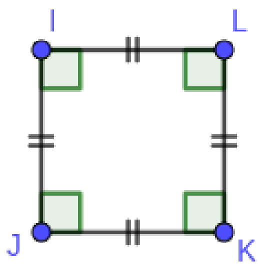
c) cujas diagonais se bissecam é um paralelogramo.

Dentre os paralelogramos, destacam-se:

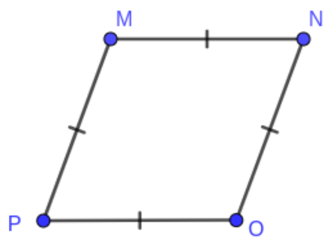
1. **Retângulo:** paralelogramo cujos ângulos são retos (90°).



2. **Quadrado:** retângulo cujos lados são congruentes.



3. **Losango:** paralelogramo cujos lados são congruentes.



3.1 Propriedades do Retângulos

Teorema 11 *As diagonais de um retângulo são congruentes.*

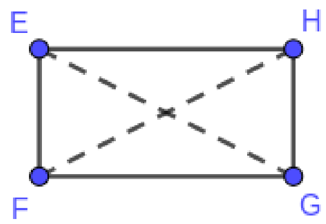


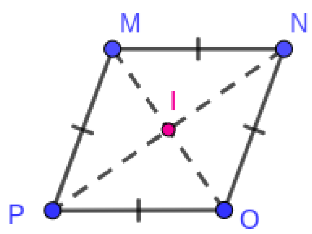
Figura 7: Se $EFGH$ é um retângulo, então $EG = HF$.

3.2 Propriedades do Losango

Teorema 12 *Em todo losango:*

a) as diagonais são perpendiculares;

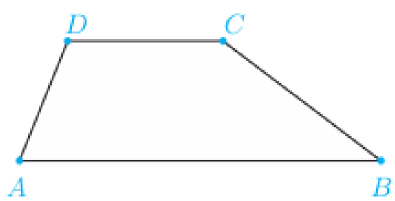
b) as diagonais são bissetrizes dos ângulos do quadrilátero.



Teorema 13 *Reciprocamente, se as diagonais de um quadrilátero se bissecam e são perpendiculares, então o quadrilátero é um losango.*

3.3 Trapézio: um quadrilátero que NÃO é um paralelogramo

Definição 16 *Um quadrilátero que tem apenas dois lados paralelos é denominado* ***trapézio****.*

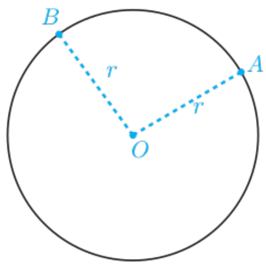


Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são as **bases** do trapézio.

4 Circunferências

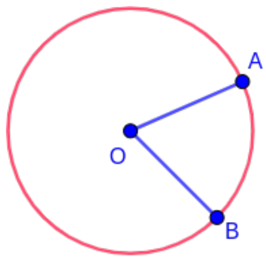
Definição 17 *Sejam r um número real positivo e O um ponto do plano. O lugar geométrico de todos os pontos do plano que estão à distância r de O é a* ***circunferência*** *de raio r e centro O.*

Duas circunferências são ditas **congruentes** se possuem o mesmo raio.



- Denotaremos esta circunferência por $\mathcal{C}(O, r)$.
- O segmento que une o centro O a qualquer ponto da circunferência é denominado **raio** da mesma.

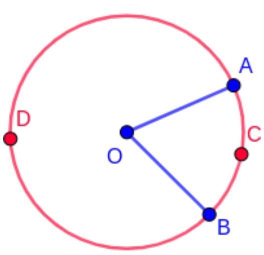
Definição 18 *Chama-se* ***ângulo central*** *ao ângulo cujo vértice é o centro da circunferência.*



A parte da circunferência limitada pelos ponto A e B é denominada **arco da circunferência** e o denotamos por $\widehat{AB}$. Os pontos A e B são os extremos do arco AB.

Há uma ambiguidade na notação para arcos, uma vez que não nos permite distinguir se estamos nos referindo ao arco menor ou ao arco maior. Para evitar tal ambiguidade, considera-se outro ponto do arco.

Na figura abaixo, o arco AB menor é denotado por $\widehat{ACB}$, enquanto que o maior é denotado por $\widehat{ADB}$.



Quando não houver dúvidas quanto ao arco que estamos nos referindo, podemos escrever simplesmente $\widehat{AB}$.

Definição 19 *A medida, em graus ou radianos, de um arco é a medida do ângulo central correspondente.*

Notação: $\widehat{AB} = \alpha$.

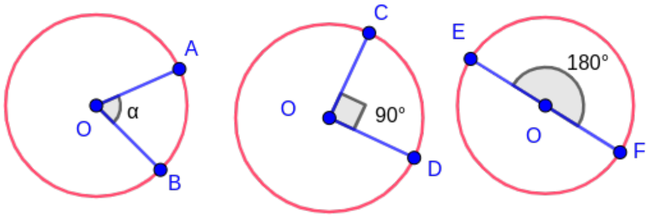


Figura 8: $\widehat{AB} = \alpha$, $\widehat{CD} = 90°$ e $\widehat{EF} = 180°$

4.1 Tangentes

Definição 20 *A reta que intersecta a circunferência em apenas um ponto é denominada **tangente**. Este ponto é denominado **ponto de tangência**.*

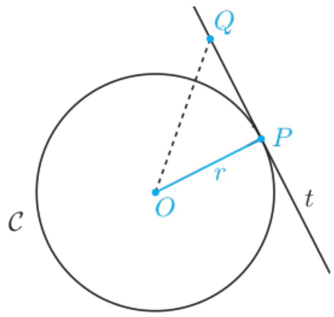
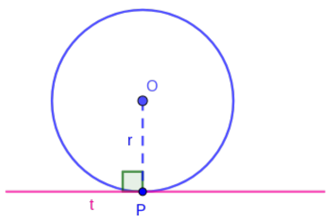


Figura 9: $\overleftrightarrow{QP}$ reta tangente à circunferência em P.

Teorema 14 *A reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio traçado pelo ponto de tangência.*

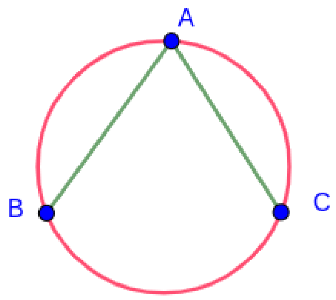


Também é verdadeira a recíproca deste teorema:

Teorema 15 *Uma reta perpendicular ao raio em seu ponto extremo é tangente à circunferência.*

Além do ângulo central, temos outras definições de ângulos em circunferências, dentre elas:

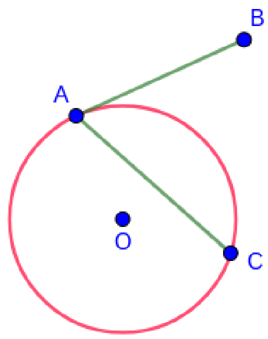
Definição 21 *Diz-se que um ângulo está **inscrito** numa circunferência se seu vértice pertence à circunferência e seus lados intersectam a mesma em dois pontos distintos do vértice.*



Sua relação com o ângulo central é dada pelo teorema a seguir:

Teorema 16 *O ângulo inscrito tem por medida a metade da medida do arco compreendido entre seus lados.*

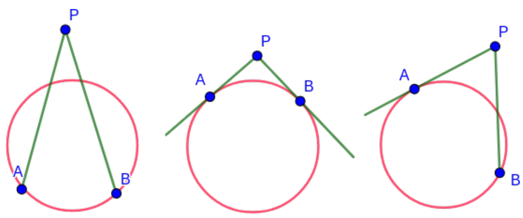
Definição 22 *Um ângulo é dito de **segmento** se seu vértice pertence à circunferência, um lado é secante e o outro tangente à mesma.*



Teorema 17 *O ângulo de segmento tem por medida a metade da medida do arco compreendido entre seus lados.*

Definição 23 *Um **ângulo excêntrico externo** é aquele cujo vértice é exterior a circunferência e seus lados são secantes, ou tangentes, ou uma secante e uma tangente à mesma.*

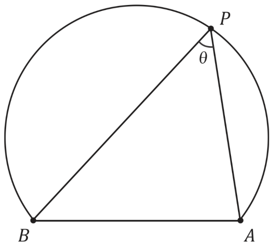
- Quando os lados desse ângulo são tangentes, o mesmo é denominado **circunscrito** à circunferência.



Teorema 18 *O ângulo excêntrico externo tem por medida a metade da diferença das medidas dos arcos compreendidos entre seus lados.*

4.2 O arco capaz

Definição 24 *Sejam A e B dois pontos sobre um círculo $\mathcal{C}$. Todos os ângulos $A\hat{P}B$, com P pertencente ao arco $\widehat{AB}$, têm a mesma medida (Teorema 16). Chamamos o arco $\widehat{AB}$ de arco capaz do ângulo θ sobre o segmento AB .*

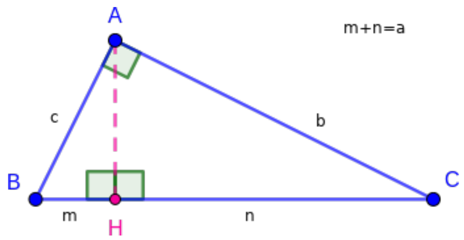


Um observador, portanto, que se mova sobre este arco, consegue ver o segmento $\overline{AB}$ sempre sob mesmo ângulo. Naturalmente que se um ponto N pertence ao outro arco, o ângulo $A\hat{N}B$ é também constante e igual a $180° - \theta$.

5 Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Através do conceito de **semelhança de triângulos**, é possível demonstrar as relações métricas a seguir.

Dada um triângulo retângulo



1. a altura relativa à hipotenusa é a média geométrica entre os segmentos que a mesma determina na hipotenusa

$$h = \sqrt{m * n} \Rightarrow h^2 = m * n.$$

2. cada cateto é a média geométrica entre a hipotenusa e o segmento desta adjacente ao cateto:

$$b^2 = a * n;$$
$$c^2 = a * m.$$

3. o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa à mesma:

$$b * c = a * h.$$

4. o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos:

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad \textbf{Teorema de Pitágoras}$$

Referências

[1] REZENDE, E. Q. F., *Geometria euclidiana plana e construções geométricas*, Ed. Unicamp, 2016. Baixe aqui. Obrigada, Lucas!

[2] WAGNER, E., *Construções geométricas.*, Rio de Janeiro, SBM, 2007. Baixe aqui.