

Cálculo II

Lista de Exercícios: P1

1 - Técnicas de Integração

- 1.1 - Revisão de Integrais.
- 1.2 - O Método de Substituição.
- 1.3 - Integração por partes.
- 1.4 - Integração por Frações Parciais.
- 1.5 - Integrais impróprias.
- 1.6 - Aplicações de integrais.

2 - EDO's de 1ª ordem

- 2.1 - Definição e Motivação.
 - 2.2 - Resolução de EDO's de 1ª ordem: Método do Fator Integrante.
 - 2.3 - Aplicações de EDO's de 1ª ordem.
-

Profa. Karla Katerine Barboza de Lima
FACET/UFGD

1 Técnicas de Integração

1.1 Revisão de Integração

Exercício 1 Calcule as integrais:

a) $\int_{-1}^1 x^{100} dx$

b) $\int_0^1 1 + \frac{1}{2}u^4 - \frac{2}{5}u^9 du$

c) $\int_1^2 \frac{v^5 + 3v^6}{v^4} dv$

d) $\int_{-1}^1 e^{u+1} du$

e) $\int_{-2}^2 f(x) dx$, onde:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } -2 \leq x \leq 0, \\ 4 - x^2 & \text{se } 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

f) $\int_{-1}^2 \frac{4}{x^3} dx$

Gabarito

1. a) $\int_{-1}^1 x^{100} dx = \frac{2}{101}$

b) $\int_0^1 1 + \frac{1}{2}u^4 - \frac{2}{5}u^9 du = \frac{53}{50}$

c) $\int_1^2 \frac{v^5 + 3v^6}{v^4} dv = \frac{17}{2}$

d) $\int_{-1}^1 e^{u+1} du = e^2 - 1$

e) $\frac{28}{3}$

f) Não existe, pois f possui uma descontinuidade infinita no intervalo de integração

1.2 O Método de Substituição

Exercício 2 Calcule a integral fazendo a substituição dada.

a) $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}, u = 3-5x.$

b) $\int_0^\pi \cos(3x)dx, u = 3x.$

c) $\int_0^1 x(4+x^2)^{10}dx, u = 4+x^2.$

d) $\int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \operatorname{sen} \theta d\theta, u = \cos \theta.$

e) $\int_0^1 (x^2-1)^4 x^5 dx, u = x^2-1.$

Exercício 3 Avalie a integral definida.

a) $\int_0^1 \cos(\pi t/2)dt.$

b) $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx.$

c) $\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}dx.$

d) $\int_0^1 \frac{e^z+1}{e^z+z}dz.$

e) $\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$

Gabarito

2.
 - a) $\frac{1}{14}$
 - b) 0
 - c) $\frac{5^{11}-4^{11}}{22}$
 - d) $\frac{1}{4}$
 - e) $\frac{1}{210}$
3.
 - a) $\frac{2}{\pi}$
 - b) $e - \sqrt{e}$
 - c) 2
 - d) $\ln(e+1)$
 - e) $2 - 2\ln 2$

1.3 Integração por Partes

Exercício 4 Calcule a integral usando a integração por partes com as escolhas de u e dv dadas.

a) $\int x^2 \ln x \, dx$, $u = \ln x$ e $dv = x^2 dx$.

b) $\int \theta \cos(\theta) \, d\theta$, $u = \theta$ e $dv = \cos \theta \, d\theta$.

Exercício 5 Calcule a integral.

a) $\int x e^{-x} \, dx$.

b) $\int p^5 \ln p \, dp$.

c) $\int (\ln x)^2 \, dx$.

d) $\int_0^1 (x^2 + 1) e^{-x} \, dx$.

e) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} \, dx$.

Exercício 6 Primeiro faça uma substituição e então use integração por partes para calcular a integral.

a) $\int_0^{\pi^2} \cos(\sqrt{x}) \, dx$.

b) $\int_0^1 t^3 e^{-t^2} \, dt$.

c) $\int_0^1 x \ln(1+x) \, dx$.

Gabarito

4. a) $\frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + c$.

b) $\theta \sin \theta + \cos \theta + c$.

5. a) $-x e^{-x} - e^{-x} + c$.

b) $\frac{p^6 \ln p}{6} - \frac{p^6}{36} + c.$

c) $x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + c.$

d) $3 - \frac{6}{e}.$

e) $\frac{1 - \ln 2}{2}.$

6. a) $-4.$

b) $\frac{-2e^{-1} + 1}{2}.$

c) $\frac{1}{4}.$

1.4 Integração por Frações Parciais

Exercício 7 Calcule as integrais abaixo.

a) $\int \frac{x^2}{x+1} dx$

b) $\int \frac{x-9}{x-2} dx$

c) $\int_2^3 \frac{1}{x^2-1} dx$

d) $\int_3^4 \frac{x^3-2x^2-4}{x^3+2x^2} dx$

e) $\int \frac{1}{(x+5)^2(x-1)} dx$

f) $\int \frac{x^3+4}{x^2+4} dx$

g) $\int \frac{x+4}{x^2+2x+5} dx$

h) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2} dx$

Gabarito

7. a) $\frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1| + C$
b) $x - 7\ln|x-2| + C$
c) $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$
d) $\frac{7}{6} + \ln\frac{2}{3}$
e) $-\frac{1}{36}\ln|x+5| + \frac{1}{6}\frac{1}{x+5} + \frac{1}{36}\ln|x-1| + C$
f) $\frac{1}{2}x^2 - 2\ln(x^2+4) + 2\tan^{-1}(x/2) + C$
g) $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$
h) $\ln\left[\frac{(e^x+2)^2}{e^x+1}\right] + C$

1.5 Integrais Impróprias

Exercício 8 Explique por que cada uma das seguintes integrais é imprópria:

a) $\int_1^{\infty} x^4 e^{-x^4} dx$

b) $\int_1^{\pi/2} \sec x$

Exercício 9 Determine se cada integral é convergente ou divergente. Calcule aquelas que são convergentes.

a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{(3x+1)^2} dx$

b) $\int_{-\infty}^{-1} e^{-2t} dt$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx$

d) $\int_{2\pi}^{\infty} \sin \theta d\theta$

e) $\int_{-\infty}^6 r e^{r/3} dr$

f) $\int_0^1 \frac{3}{x^5} dx$

g) $\int_{-2}^{14} \frac{1}{\sqrt[4]{x+2}} dx$

h) $\int_0^2 z^2 \ln z dz$

Gabarito

8. a) Intervalo é infinito.

b) A função possui uma descontinuidade no intervalo de integração.

9. a) Converge: $\frac{1}{12}$

b) Diverge

c) Converge: 0

d) Diverge

e) Converge: $9e^2$

f) Diverge

g) Converge: $\frac{32}{3}$

h) Converge: $\frac{8}{3} \ln 2 - \frac{8}{9}$

Referências

- [1] STEWART J., *Cálculo*, Volume I, Editora Thomson.
- [2] STEWART J., *Cálculo*, Volume II, Editora Thomson.
- [3] Anton H., *Cálculo*, Volume I, Editora Bookman.
- [4] Anton H., *Cálculo*, Volume II, Editora Bookman.