



- (1) Resolva as equações diferenciais.

a) $\frac{dy}{dx} = xy^2$

b) $\frac{dy}{dx} = xe^{-y}$

c) $\frac{dy}{dt} = \frac{t}{ye^{y+t^2}}$

- (2) Uma esfera com raio 1 m está a uma temperatura de 15°C. Ela está dentro de uma esfera concêntrica com raio de 2 m e temperatura de 25 °C. A temperatura $T(r)$ a uma distância r do centro comum das duas esferas satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} = 0$$

Se fizermos $S(r) = \frac{dT}{dr}$, então S satisfaz uma equação diferencial de primeira ordem. Encontre uma expressão para $T(r)$ entre as duas esferas.

- (3) Dada a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

- a) Encontre a solução geral da equação.
- b) Encontre a solução explícita para o problema com valor inicial $y(0) = -2$ e seu intervalo de definição.
- (4) O modelo de Malthus para o crescimento de uma população, basea-se na suposição de que a população cresce (ou decresce) a uma taxa proporcional ao tamanho da população:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

- a) Resolva a equação com condição inicial $P(0) = P_0$.
- b) Se a constante de proporcionalidade k for positiva o que acontece com a população? E se for negativa?
- c) O que acontece com a população quando o tempo t tende ao infinito?
- (5) Uma população com frequência cresce exponencialmente em seus estágios iniciais, seguindo o modelo de Malthus, mas em dado momento se estabiliza e se aproxima de sua capacidade de suporte por causa dos recursos limitados. Para refletir que a taxa de crescimento diminui quando a população P aumenta e torna-se negativa quando P ultrapassa sua **capacidade de suporte** K , a expressão mais simples é dada por

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{K} \right).$$

Este modelo é conhecido Modelo Logístico.

- a) Dada a condição inicial $P(0) = P_0$, resolva o PVI.
 b) O que acontece com a população quando o tempo t tende ao infinito?

Gabarito

- (1) a) $y(x) = \frac{2}{k - x^2}$, $y(x) = 0$.
 b) $y(x) = \ln \left| \frac{x^2}{2} + c \right|$
 c) $e^y(y - 1) = c - \frac{1}{2e^{t^2}}$
- (2) $T(r) = -\frac{20}{r} + 35$
- (3) a) Solução implícita: $y^2 + x^2 = C$.
 b) $y(x) = -\sqrt{4 - x^2}$, $I = [-2, 2]$.
- (4) a) $P(t) = P_0 e^{kt}$.
 b) Se for positiva a taxa de variação é positiva e, assim, a população está crescendo; no caso de ser negativa, ela está decrescendo.
 c) Ela tende ao infinito também. Significa que a população continuará crescendo indefinidamente.
- (5) a) $P(t) = \frac{k}{1 + Ae^{-kt}}$, onde $A = \frac{K - P_0}{P_0}$.
 b) Atinge sua população máxima K .