UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Profª. Karla Lima

Cálculo II 12 de Novembro de 2017

(1) Resolva as equações diferenciais.

a) $\dfrac{dy}{dx} = xy^2$

b) $\dfrac{dy}{dx} = xe^{-y}$

c) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t}{ye^{y+t^2}}$

(2) Uma esfera com raio 1 m está a uma temperatura de 15℃. Ela está dentro de uma esfera concêntrica com raio de 2 m e temperatura de 25 ℃. A temperatura $T(r)$ a uma distância r do centro comum das duas esferas satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr} = 0$$

Se fizermos $S(r) = \dfrac{dT}{dr}$, então S satisfaz uma equação diferencial de primeira onrdem. Encontre uma expressão para $T(r)$ entre as duas esferas.

(3) Dada a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

a) Encontre a solução geral da equação.

b) Encontre a solução explícita para o problema com valor inicial $y(0) = -2$ e seu intervalo de definição.

(4) O modelo de Malthus para o crescimento de uma população, basea-se na suposição de que a população cresce (ou decresce) a uma taxa proporcional ao tamanho da população:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

a) Resolva a equação com condição inicial $P(0) = P_0$.

b) Se a constante de proporcionalidade k for positiva o que acontece com a população? E se for negativa?

c) O que acontece com a população quando o tempo t tende ao infinito?

(5) Uma população com frequência cresce exponencialmente em seus estágios iniciais, seguindo o modelo de Malthus, mas em dado momento se estabiliza e se aproxima de sua capacidade de suporte por causa dos recursos limitados. Para refletir que a taxa de crescimento diminui quando a população P aumenta e torna-se negativa quando P ultrapassa sua **capacidade de suporte** K, a expressão mais simples é dada por

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right).$$

Este modelo é conhecido Modelo Logístico.

a) Dada a condição inicial $P(0) = P_0$, resolva o PVI.

b) O que acontece com a população quando o tempo t tende ao infinito?

Gabarito

(1) a) $y(x) = \dfrac{2}{k - x^2}$, $y(x) = 0$.

b) $y(x) = \ln \left| \dfrac{x^2}{2} + c \right|$

c) $e^y(y-1) = c - \dfrac{1}{2e^{t^2}}$

(2) $T(r) = -\dfrac{20}{r} + 35$

(3) a) Solução implícita: $y^2 + x^2 = C$.

b) $y(x) = -\sqrt{4 - x^2}$, $I = [-2, 2]$.

(4) a) $P(t) = P_0 e^{kt}$.

b) Se for positiva a taxa de variação é positiva e, assim, a população está crescendo; no caso de ser negativa, ela está decrescendo.

c) Ela tende ao infinito também. Significa que a população continuará crescendo indefinidamente.

(5) a) $P(t) = \dfrac{k}{1 + Ae^{-kt}}$, onde $A = \dfrac{K - P_0}{P_0}$.

b) Atinge sua população máxima K.