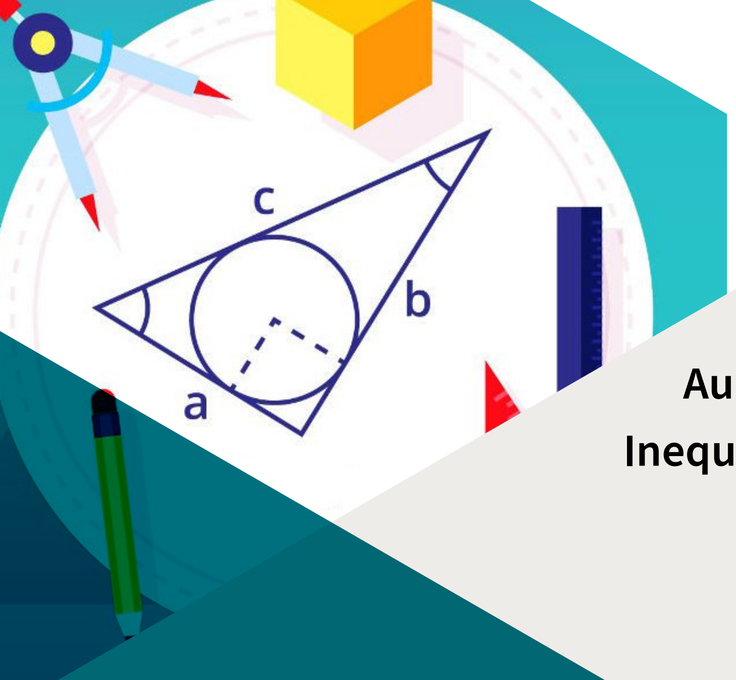
Introdução ao Cálculo



Aula 09: Equações e Inequações Exponenciais.

Karla Lima

08/03/2023

Sumário

Bibliografia

Bibliografia da Aula 09

- Fundamentos da Matemática Elementar: 2 (Click para baixar)
- Pré-Cálculo, Schafier. (Click para baixar)

Equações Exponenciais

Equações

- Vamos relembrar o que é uma equação: ’Toda equação é uma declaração de que duas expressões são iguais.’
- Uma equação contendo variáveis, em geral, não é verdadeira nem falsa; a questão de ser verdadeira depende do(s) valor(es) da(s) variável(eis).
- Cada um dos valores da(s) variável(eis) que tornam a equação verdadeira é dito solução da equação.
- O conjunto de todas as soluções é chamado de conjunto solução da equação.

Método da redução a uma base comum

- É o método aplicado quando ambos os lados da equação forem redutíveis a potências de mesma base a.
- Como a função exponencial $f(x) = a^x$ é INJETORA ($f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$), podemos concluir que

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y \, (0 < a \neq 1).$$

Exemplo

Exemplo 1

Resolva a equação exponencial $2^x = 64$.

Exemplo

Exemplo 1

Resolva a equação exponencial $2^x = 64$.

Para verificarmos se 64 pode ser escrito numa potência inteira de 2 podemos ir multiplicando potências de 2 até chegar ou passar o número 64:

$$2^1 = 2;\ 2^2 = 4;\ 2^3 = 8;\ 2^4 = 16;\ 2^5 = 32;\ 2^6 = 64.$$

Ou podemos dividir o número 64 sucessivamente por 2 até obter o resultado igual a 1 (se possível):

$$64/2 = 32;\ 32/2 = 16;\ 16/2 = 8;\ 8/2 = 4;\ 4/2 = 2;\ 2/2 = 1.$$

Pudemos dividir o número 64 por 2, 6 vezes. Logo, $64/2^6 = 1$, de onde segue que

$$64 = 2^6.$$

Exemplo

Portanto, pela injetividade da função $f(x) = 2^x$,

$$2^x = 2^6 \Leftrightarrow x = 6,$$

e $S = \{6\}$ é o conjunto solução do problema dado.

Exemplo

Exemplo 2

Resolva a equação exponencial $8^x = \dfrac{1}{32}$.

Exemplo

Exemplo 2

Resolva a equação exponencial $8^x = \dfrac{1}{32}$.

Para verificarmos se 32 pode ser escrito numa potência de 8 podemos ir multiplicando potências de 8 até chegar ou passar o número 64:

$$8^1 = 8;\ 8^2 = 64 > 32.$$

Portanto não podemos escrever $32 = 8^b$, com b um número inteiro. Mas observe que, do exemplo anterior, $32 = 2^5$ e $8 = 2^3$. Logo, podemos escrever os dois lados da equação como uma potência do mesmo número.

Exemplo

Para resolver a equação exponencial $8^x = \frac{1}{32}$, a reescrevemos como $\left(2^3\right)^x = \left(2^5\right)^{-1}$, de onde obtemos que

$$\begin{aligned} 2^{3x} = 2^{-5} &\Leftrightarrow 3x = -5 \\ &\Leftrightarrow \frac{3x}{3} = \frac{-5}{3} \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Exercícios

Exercício 1

Resolva a equação exponencial $(\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{81}$.

Exercício 2

Resolva a equação exponencial $125^x = 0,04$.

Exercício 3

Resolva a equação exponencial $5^{2x^2+3x-2} = 1$.

Exercício 4

Resolva a equação exponencial $4^x - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$.

Problemas

Bactérias

Exercício 5

O número de bactérias em uma cultura é contado como 400 no começo de um experimento. Se o número de bactérias dobrar a cada 3 horas, o número de indivíduos pode ser expresso pela fórmula $N(t) = 400(2)^{t/3}$*. Determine o número de bactérias presentes na cultura após 24 horas.*

Bactérias

Exercício 5

O número de bactérias em uma cultura é contado como 400 no começo de um experimento. Se o número de bactérias dobrar a cada 3 horas, o número de indivíduos pode ser expresso pela fórmula $N(t) = 400(2)^{t/3}$. *Determine o número de bactérias presentes na cultura após 24 horas.*

Resposta: 102.400 indivíduos.

População - Modelo Malthusiano

O modelo de Malthus para o crescimento de uma população, baseia-se na suposição de que a população cresce (ou decresce) a uma taxa proporcional ao tamanho da população. Populações humanas podem ser modeladas sobre curtos períodos por funções de crescimento exponencial ilimitado (Modelo de Malthus).

Exercício 6

Se um país tem uma população de 22 milhões em 2000 e mantém uma taxa de crescimento populacional de 1% ao ano, então sua população, em milhões de habitantes, após um tempo, assumindo que $t = 0$ *em* 2023*, pode ser modelada como* $N(t) = 22e^{0,01t}$.

Estime a população em 2033.

População - Modelo Malthusiano

O modelo de Malthus para o crescimento de uma população, baseia-se na suposição de que a população cresce (ou decresce) a uma taxa proporcional ao tamanho da população. Populações humanas podem ser modeladas sobre curtos períodos por funções de crescimento exponencial ilimitado (Modelo de Malthus).

Exercício 6

Se um país tem uma população de 22 milhões em 2000 e mantém uma taxa de crescimento populacional de 1% ao ano, então sua população, em milhões de habitantes, após um tempo, assumindo que $t = 0$ *em* 2023*, pode ser modelada como* $N(t) = 22e^{0,01t}$. *Estime a população em* 2033.

Resposta: Aproximadamente $24,3$ milhões.

Decaimento Radioativo

Exercício 7

Um certo isótopo radioativo decai de acordo com a fórmula $Q(t) = Q_0 e^{-0{,}034t}$*, sendo que* t *é o tempo em anos e* Q_0 *é o número de gramas presentes inicialmente.*

Se 20 *gramas estão inicialmente presentes, em quantos anos restarão* $\dfrac{20}{e^{0{,}34}}$ *gramas (aproximadamente* $14,2g$*)?*

Decaimento Radioativo

Exercício 7

Um certo isótopo radioativo decai de acordo com a fórmula $Q(t) = Q_0 e^{-0,034t}$, *sendo que* t *é o tempo em anos e* Q_0 *é o número de gramas presentes inicialmente.*

Se 20 *gramas estão inicialmente presentes, em quantos anos restarão* $\dfrac{20}{e^{0,34}}$ *gramas (aproximadamente* $14,2g$*)?*

Resposta: Em 10 anos.

Meia-vida

Exercício 8

A meia-vida de certa substância radioativa é igual a 14 *dias. Existem* $6,6$ *gramas presentes inicialmente.*

a) *Expresse a quantidade da substância remanescente como uma função do tempo t, em dias.*
b) *Resolvendo uma equação exponencial, determine quando existirá* $0,4125$ *gramas?*

Meia-vida

Exercício 8

A meia-vida de certa substância radioativa é igual a 14 *dias. Existem* $6,6$ *gramas presentes inicialmente.*

a) *Expresse a quantidade da substância remanescente como uma função do tempo t, em dias.*

b) *Resolvendo uma equação exponencial, determine quando existirá* $0,4125$ *gramas?*

Resposta: a) $Q(t) = 6,6 \cdot 2^{-t/14}$; b) 56 dias.

Inequações Exponenciais

Método da redução a uma base comum

- Este método será aplicado quando ambos os membros da inequação puderem ser representados como potências de mesma base a $(0 < a \neq 1)$;
- Para $a > 1$, a função $f(x) = a^x$ é CRESCENTE ($f(x) < f(y) \Leftrightarrow x < y$):

$$a^x < a^y \Leftrightarrow x < y.$$

- Para $0 < a < 1$, a função $f(x) = a^x$ é DECRESCENTE ($f(x) < f(y) \Leftrightarrow x > y$):

$$a^x < a^y \Leftrightarrow x > y.$$

Exemplo

Exemplo 3

Classifique em verdadeira ou falsa as seguintes sentenças:

a) $3^{2,7} > 1$

b) $(0,5)^{1,3} > (0,5)^{1,4}$

c) $8^{1,2} > 4^{1,5}$

d) $(\sqrt[3]{3})^{-0,5} < 27^{-0,1}$

Exemplo

Exemplo 4

Resolva a seguinte inequação exponencial: $4^x \geq 8$.

Exemplo

Exemplo 4

Resolva a seguinte inequação exponencial: $4^x \geq 8$.

Solução: Primeiro colocamos os dois lados da inequação na mesma base:

$$4^x = (2^2)^x = 2^{2x} \text{ e } 8 = 2^3.$$

Assim, queremos encontrar para quais valores reais x a inequação abaixo é verdadeira:

$$2^{2x} \geq 2^3 \Leftrightarrow 2x \geq 3,$$

pois a base $a = 2$ é maior que 1 e, portanto, representa uma função exponencial crescente. Como

$$2x \geq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2x \geq \frac{1}{2} \cdot 3 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2},$$

de onde segue que a solução é dada por $S = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 3/2\}$.

Exemplo

Exemplo 5

Resolva a seguinte inequação exponencial: $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-1} \leq 32^{1-x}$.

Exemplo

Exemplo 5

Resolva a seguinte inequação exponencial: $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-1} \leq 32^{1-x}$.

Solução: Primeiro colocamos os dois lados da inequação na mesma base:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-1} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\right)^{x^2-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2-2} \text{ e } 32^{x-1} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}\right)^{1-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{5x-5}.$$

Exemplo

Assim, queremos encontrar os valores reais para os quais a inequação abaixo é verdadeira é dado por:

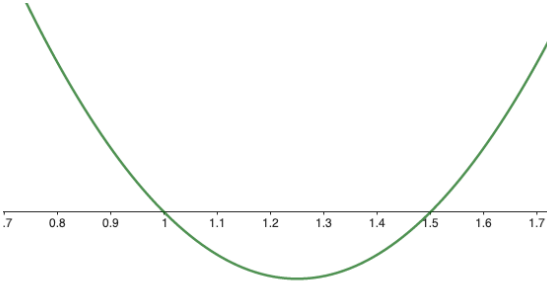
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2-2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{5x-5} \Leftrightarrow 2x^2 - 2 \geq 5x - 5,$$

pois a base $a = \frac{1}{2}$ é menor que 1 e, portanto, representa uma função exponencial decrescente. A desigualdade a ser resolvida é

$$2x^2 - 2 \geq 5x - 5 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 \geq 0.$$

Exemplo

O gráfico de $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ é dado a seguir.



Portanto, a solução é dada por $S = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 1 \text{ ou } x \geq 3/2\}$.