O Teorema Fundamental

- Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

  onde F' é contínua em $[a, b]$. Ou seja, a integral de uma taxa de variação é a variação total.

- Considerando o vetor gradiente ∇f de f como uma espécie de derivada de f, temos o Teorema Fundamental do Cálculo para as integrais de linha:

> Seja C uma curva suave dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Seja f uma função diferenciável de duas ou três variáveis cujo vetor gradiente ∇f é contínuo em C. Então
>
> $$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

Seja C uma curva suave dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Seja f uma função diferenciável de duas ou três variáveis cujo vetor gradiente ∇f é contínuo em C. Então

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

- O teorema acima diz que se $F = \nabla f$ é um campo conservativo contínuo, então podemos avaliar a integral de linha de F sobre a curva Csimplesmente sabendo o valor de f nos pontos extremos de C.
- Isso quer dizer que o trabalho independe do caminho tomado pela partícula para sair do ponto P ao ponto Q.

Exemplos:

1) Seja $\overrightarrow{F} = (3 + 2xy, x^2 - 3y^2)$. Calcule a integral de linha $\displaystyle\int_C F \cdot dr$, onde C é a curva dada por

$$\overrightarrow{r}(t) = (e^t \mathrm{sen}\, t, e^t \cos t), \qquad 0 \leq t \leq \pi.$$

- Pela definição, teríamos que calcular a seguinte integral: $\displaystyle\int_0^{\pi} (5e^{3t}\mathrm{sen}\, t \cos^2 t + 3e^{3t}\mathrm{sen}^2 t \cos t + 3e^t \mathrm{sen}\, t + 3e^t \cos t - 3e^{3t}\cos^3 t - e^{3t}\mathrm{sen}^3 t)\, dt$
- Um trabalho nada agradável!

Exemplos:

Podemos usar o Teorema Fundamental do Cálculo para as integrais de linha?

- Precisamos verificar se existe uma função f tal que $F = \nabla f$ e o campo será conservativo.

$$\boxed{7} \qquad f_x(x, y) = 3 + 2xy$$

$$\boxed{8} \qquad f_y(x, y) = x^2 - 3y^2$$

Integrando $\boxed{7}$ com relação a x, obtemos

$$\boxed{9} \qquad f(x, y) = 3x + x^2y + g(y)$$

Exemplos:

Observe que a constante de integração é uma constante em relação a x, ou seja, uma função de y, que chamamos $g(y)$. Em seguida, derivamos ambos os lados de $\boxed{9}$ em relação a y:

$$\boxed{10} \qquad f_y(x, y) = x^2 + g'(y)$$

Comparando $\boxed{8}$ e $\boxed{10}$, vemos que

$$g'(y) = -3y^2$$

Integrando com relação a y, obtemos

$$g(y) = -y^3 + K$$

onde K é uma constante. Substituindo em $\boxed{9}$, temos

$$f(x, y) = 3x + x^2y - y^3 + K$$

como a função potencial desejada.

Exemplos:

- Com isso, mostramos que o campo é conservativo e sua integral independe do caminho tomado.
- Calculamos $r(0)$, o ponto inicial da curva, e $r(\pi)$, o ponto final:

$$\overrightarrow{r(0)} = (0, 1) \qquad \overrightarrow{r(\pi)} = (0, -e^{\pi})$$

- Com $f(x, y) = 3x + x^2y - y^3$, calcula-se a integral:

$$\int_C F \cdot dr = \int_C \nabla f \cdot dr = f(r(\pi)) - f(r(0)) = f(0, -e^{\pi}) - f(0, 1)$$

$$\Rightarrow \int_C F \cdot dr = e^{3\pi} - (-1) = e^{3\pi} + 1.$$