UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Profª. Karla Lima

EDO 09 de Fevereiro de 2018

(1) Verifique se as funções indicadas são soluções particulares das equações diferenciais dadas. No caso positivo, dê o intervalo de definição I para cada solução.

a) $xy' = 2y$; $y = 0$ e $y = 2x$.

b) $y'' + 9y = 18$; $y = 2$ e $y = 2x^2$.

c) $xy'' - y' = 0$; $y = 2x^2$ e $y = 2x$.

d) $x^2y'' + xy' + y = 0$; $y = \operatorname{sen}(\ln x)$.

(2) Dado que $y = x - \dfrac{2}{x}$ é uma solução da equação diferencial $xy' + y = 2x$, encontre x_0 e o maior intervalo para o qual $y(x)$ é uma solução do PVI de 1ª ordem

$$xy' + y = 2x$$
$$y(x_0) = 1$$

(3) Sabendo que $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-x} - 2x$ é uma família de soluções da equação diferencial de 2ª ordem $y'' - 2y - 3y = 6x + 4$, encontre uma solução para o PVI com as condições iniciais abaixo:

a) $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

b) $y(1) = 4$ e $y'(1) = -2$.

(4) Resolva as equações diferenciais.

a) $\dfrac{dy}{dx} = xy^2$

b) $\dfrac{dy}{dx} = xe^{-y}$

c) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t}{ye^{y+t^2}}$

(5) Uma esfera com raio 1 m está a uma temperatura de 15℃. Ela está dentro de uma esfera concêntrica com raio de 2 m e temperatura de 25 ℃. A temperatura $T(r)$ a uma distância r do centro comum das duas esferas satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr} = 0$$

Se fizermos $S(r) = \dfrac{dT}{dr}$, então S satisfaz uma equação diferencial de primeira onrdem. Encontre uma expressão para $T(r)$ entre as duas esferas.

(6) Dada a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

a) Encontre a solução geral da equação.

b) Encontre a solução explícita para o problema com valor inicial $y(0) = -2$ e seu intervalo de definição.

(7) O modelo de Malthus para o crescimento de uma população, basea-se na suposição de que a população cresce (ou decresce) a uma taxa proporcional ao tamanho da população:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

a) Resolva a equação com condição inicial $P(0) = P_0$.
b) Se a constante de proporcionalidade k for positiva o que acontece com a população? E se for negativa?
c) O que acontece com a população quando o tempo t tende ao infinito?

(8) Uma população com frequência cresce exponencialmente em seus estágios iniciais, seguindo o modelo de Malthus, mas em dado momento se estabiliza e se aproxima de sua capacidade de suporte por causa dos recursos limitados. Para refletir que a taxa de crescimento diminui quando a população P aumenta e torna-se negativa quando P ultrapassa sua **capacidade de suporte** K, a expressão mais simples é dada por

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right).$$

Este modelo é conhecido Modelo Logístico.

a) Dada a condição inicial $P(0) = P_0$, resolva o PVI.

b) O que acontece com a população quando o tempo t tende ao infinito?

(9) Determine se a equação diferencial é linear.

a) $y' + e^x y = x^2 y^2$

b) $y + \text{sen}x = x^3 y'$

c) $xy' + \ln x - x^2 y = 0.$

(10) Resolva as equações diferenciais.
a) $y' + y = 1$

b) $xy' + y = \sqrt{x}$

c) $\text{sen}x \frac{dy}{dx} + (\cos x)y = \text{sen}(x^2)$

d) $xy' = y + x^2\text{sen}x$, com $y(\pi) = 0$

(11) A lei de resfriamento/ aquecimento de Newton foi uma das aplicações de EDO dadas em sala de aula; No exemplo do bolo, encontramos que a função que dá a temperatura dele t minutos

após sua retirada do forno:

$$T(t) = 20 + 130\left(\frac{15}{26}\right)^{t/3}.$$

a) Mostre que essa solução não fornece uma solução finita para a pergunta feita no exemplo: quanto tempo demoraria para a temperatura do bolo chegar à temperatura ambiente?

b) Intuitivamente esperamos que o bolo atinja a temperatura ambiente após um período finito de tempo. Plote o gráfico da função $T(t)$ e diga em quantos minutos, aproximadamente, o bolo atingirá a temperatura desejada.

(12) Suponha que pouco antes do meio-dia o corpo de uma vítima de homicídio é encontrado numa sala com ar condicionado, mantida a uma temperatura constante de 21℃ . Ao meio-dia a temperatura do corpo é de 30℃ e uma hora mais tarde é de 27℃. Assumindo que a temperatura do corpo na hora da morte era 36.5℃, use a lei de resfriamento de Newton para dizer qual foi a hora da morte.

(13) Resolva as equações diferenciais.

a) $y'' + 16y = 0$

b) $9y'' - 12y' + 4y = 0$

c) $y' = 2y''$

Busque a solução de uma integral em uma tabela de integrais sempre que os métodos conhecidos não ajudem na solução.

(14) Resolva as edo's lineares não homogêneas abaixo:

a) $y'' - 2y' + y = e^{2x}$

b) $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$

c) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^{x}}{1+x^2}$

Gabarito

(1) a) $y = 0$ é solução. $I = \mathbb{R}$.

b) $y = 2$ é solução. $I = \mathbb{R}$

c) $y = 2x^2$ é solução. $I = \mathbb{R}$

d) $y = \operatorname{sen}(\ln x)$ é solução. $I = (0, +\infty)$

(2) Para que a solução satisfaça $y(x_0) = 1$ devemos ter $x_0 = -1$ ou $x_0 = 2$. Se $x_0 = -1$ então $I = (-\infty, 0)$; se $x_0 = 2$ então $I = (0, +\infty)$.

(3) a) $y = \dfrac{e^{3x}}{2} - \dfrac{e^{-x}}{2} - 2x$.

b) $y = \dfrac{3}{2}e^{3x-3} + \dfrac{9}{2}e^{1-x} - 2x$.

(4) a) $y(x) = \dfrac{2}{k - x^2}$, $y(x) = 0$.

b) $y(x) = \ln\left|\dfrac{x^2}{2} + c\right|$

c) $e^y(y-1) = c - \dfrac{1}{2e^{t^2}}$

(5) $T(r) = -\dfrac{20}{r} + 35$

(6) a) Solução implícita: $y^2 + x^2 = C$.

b) $y(x) = -\sqrt{4 - x^2}$, $I = [-2, 2]$.

(7) a) $P(t) = P_0 e^{kt}$.
b) Se for positiva a taxa de variação é positiva e, assim, a população está crescendo; no caso de ser negativa, ela está decrescendo.
c) Ela tende ao infinito também. Significa que a população continuará crescendo indefinidamente.

(8) a) $P(t) = \dfrac{k}{1 + Ae^{-kt}}$, onde $A = \dfrac{K - P_0}{P_0}$.
b) Atinge sua população máxima K.

(9) a) Não é linear

b) É linear

c) É linear.

(10) a) $y = 1 + ce^{-x}$

b) $y = \frac{2}{3}\sqrt{x} + \dfrac{c}{x}$

c) $y = \dfrac{\int \operatorname{sen}(x^2)dx + c}{\operatorname{sen} x}$

d) $y = -x\cos x - x$

(11) a)
b) Aproximadamente 40 minutos.

(12) Aproximadamente às 10:20 da manhã.

(13) a) $y = c_1 \cos(4x) + c_2 \operatorname{sen}(4x)$

b) $y = c_1 e^{2x/3} + c_2 x e^{2x/3}$

c) $y = c_1 + c_2 e^{x/2}$

(14) Resolva as edo's lineares não homogêneas abaixo:

a) $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + e^{2x}$

b) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + (e^x + e^{2x})\ln(1 + e^{-x})$

c) $y = e^x[c_1 + c_2 x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + x\tan^{-1} x]$