

Sumário

- 1. Paralelismo
- 2. Transversal a Várias Paralelas
- 3. Os Postulados de Euclides
- 4. Geometrias Não-Euclidianas

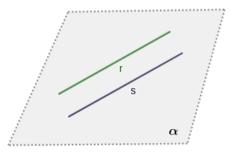
Paralelismo

Retas Paralelas

Definição 1

Duas retas são ditas paralelas, se

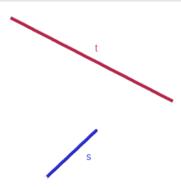
- i) são coincidentes;
- ii) são coplanares e não se interceptam.



Retas Reversas

Definição 2

Duas retas que não estão num mesmo plano chamam-se retas reversas.



Vá visualizar no Geogebra (Click para baixar)

Exercício



Exercício 1

Demonstre o seguinte teorema:

Duas retas paralelas estão contidas em um único plano.

Exercício

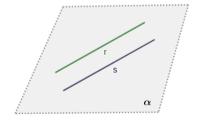


Exercício 1

Demonstre o seguinte teorema:

Duas retas paralelas estão contidas em um único plano.

- ► Hipótese: r e s são paralelas.
- ▶ **Tese:** Existe um único plano α contendo r e s.



Transversal a Várias Paralelas

Reta Transversal

Definição 3

Uma **transversal** a duas retas coplanares é uma reta que as intercepta em dois pontos distintos.

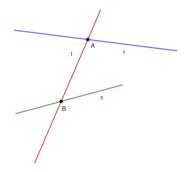


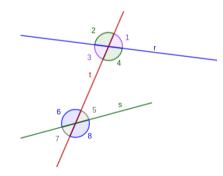
Figura 1: *t* é transversal às retas *r* e *s*, nos pontos *A* e *B*

Reta transversal



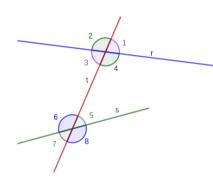
Sejam r e s retas coplanares e t uma transversal às mesmas. Usaremos a seguinte nomenclatura:

- São denominados alternos internos os pares de ângulos:
 - ▶ 3e5
 - ▶ 4 e 6
- II. São denominados **alternos externos** os pares de ângulos:
 - ▶ 1e7
 - ▶ 2 e 8



Reta transversal

- III. São denominados **correspondentes** os pares de ângulos:
 - ► 1e5
 - ▶ 4e8
 - ▶ 2e6
 - ▶ 3e7
- IV. São denominados **colaterais internos** os pares de ângulos:
 - ▶ 4e5
 - ▶ 3e6
- V. São denominados colaterais externos os pares de ângulos:
 - ▶ 1e8
 - ▶ 2e7



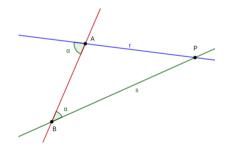
Existência da Paralela



Sejam r e s retas coplanares cortadas por uma transversal s. Se dois ângulos alternos são congruentes, então as retas r e s são paralelas.

Demonstração:

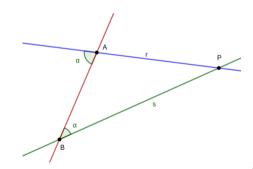
- Suponha, por absurdo, que as retas não são paralelas.
- Como são coplanares, as retas devem se interceptar num ponto P, formando um triângulo ABP.



Existência da Paralela



Com isso, $\triangle ABP$ teria um ângulo externo com medida igual ao ângulo interno α , contrariando o teorema do ângulo externo.





Este teorema ainda é verdadeiro se substituirmos a expressão 'alternos internos' por:

- alternos externos
- correspondentes
- colaterais internos
- colaterais externos



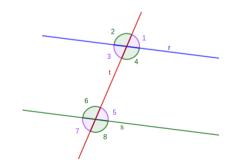
Teorema 2

Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os quatro ângulos agudos formados são congruentes, bem como os quatro ângulos obtusos.

- ► **Hipótese:** *r* e *s* são paralelas; *t* é transversal às duas.
- ► Tese:São congruentes os ângulos:

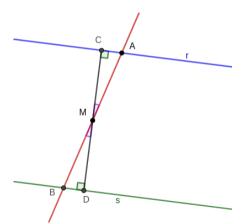
$$1 = 3 = 5 = 7$$

$$ightharpoonup 2 = 4 = 6 = 8$$



Demonstração:

- ➤ Sejam A e B os pontos de interseções da transversal com as retas r e s.
- ► Seja M o ponto médio do segmento \overline{AB} .
- Pelo ponto *M*, tracemos um segmento perpendicular às retas *r* e s.
- Os triângulos retângulos CMA e DMB são congruentes (Caso LAA).

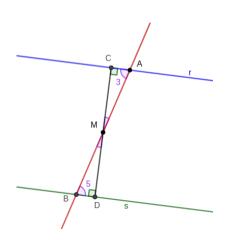


Demonstração:

- ► Com isso, são congruentes os ângulos 3 e 5.
- ► Como 1 = 3 e 5 = 7, por serem ângulos opostos pelo vértice, segue que

$$1 = 3 = 5 = 7$$
.

Por outro lado, 2 = 4 = 6 = 8 por serem suplementos de ângulos congruentes.

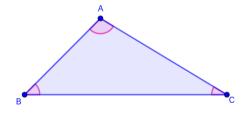


Soma dos ângulos de um triângulo



Teorema 3

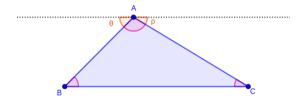
Em todo triângulo, a soma dos seus ângulos internos é igual à 180°.



- ► **Hipótese:** *ABC* é um triângulo.
- ► Tese: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^{\circ}$.



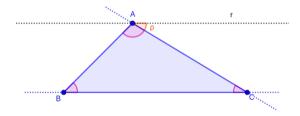
Pelo vértice A, trace uma reta r paralela ao lado \overline{BC} .



i) Temos que $\theta + \hat{A} + \rho = 180^{\circ}$.



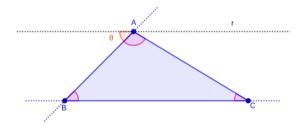
Observando as paralelas \overline{BC} e r cortadas pela transversal \overline{AC} , obtemos que os ângulos \hat{C} e ρ são alternos internos.



ii) Portanto, $\rho = \hat{C}$.



Por fim, observando as paralelas \overline{BC} e r cortadas pela transversal \overline{AB} , obtemos que os ângulos \hat{B} e θ são alternos internos.



iii) Portanto, $\theta = \hat{B}$.



De i), ii) e iii), concluímos que

$$180^{\circ} = \hat{A} + \theta + \rho = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}.$$

Exercício



Prove o seguinte corolário do Teorema 3:

Corolário 1

Em todo triângulo, a medida de qualquer ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes.

Elementos de Euclides



- No início do curso, citamos a obra 'Elementos' de Euclides.
- Esse livro faz uma apresentação da Geometria muito bem organizada na roupagem da lógica.
- Cada resultado é demonstrado com base no antecedente, de modo que, para o processo tenha começo, é preciso formular algumas proposições que ficam sem demonstração (chamados axiomas ou postulados).



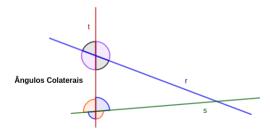
Euclides formulou 5 postulados que, traduzidos e interpretados em nossa linguagem, são enunciados a seguir:

- 1. Por dois pontos passa uma reta e somente uma.
- 2. A partir de qualquer ponto de uma reta dada é possível marcar um segmento de comprimento dado sobre a reta.
- 3. É possível descrever um círculo de centro e raios dados.
- 4. Todos os ângulos retos são iguais (Euclides define 'ângulo reto' como sendo igual ao ângulo formado por duas retas que se cortam de maneira a formar quatro ângulos iguais.)

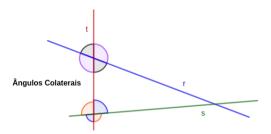


5. Se uma reta t corta duas outras r e s (todas num mesmo plano) de modo que um dos pares dos ângulos colaterais internos tem soma inferior a dois ângulos retos, então r e s, quando prolongadas suficientemente, se cortam do lado de t em que se encontram os referidos ângulos colaterais internos.

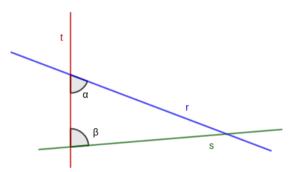
O enunciado fica mais claro quando acompanhado da observação da figura abaixo:







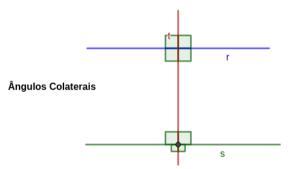
- ▶ Num mesmo plano, t corta as retas r e s.
- Tome pares (α, β) , onde α é um ângulo formado pela interseção de t e r e β formado pela interseção de t e s (ângulos colaterais). Acima, temos apenas um exemplo. Cada interseção gera 4 ângulos.



➤ Se existir um par no qual a sua soma é menor que 180, as retas *r* e *s* se cortam. Além disso, se cortam no semiplano gerado por *t*, em que os ângulos colaterais referidos estão (nesse exemplo, do lado direito de *t*).



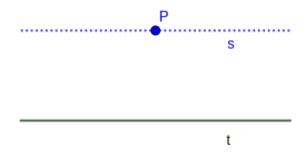
No caso em que não há um par (α, β) tal que $\alpha + \beta < 180$, temos então, obrigatoriamente (por quê?) $\alpha = \beta = 90^{\circ}$, em todos os pares. Assim, teremos:



As retas não r e s não se cruzam.

Postulado de Playfair

Postulado de Playfair: Por um ponto não pertencente a uma reta, passa um única reta paralela à reta dada.



Esse postulado é equivalente ao 5º Postulado de Euclides. Leia mais em [1, 2, 3].



- A geometria plana, também conhecida como Geometria Euclidiana funcionava muito bem em superfícies planas.
- Como podemos definir situações geométricas sobre uma superfície curva? Certamente a geometria Euclidiana não é satisfatória.
- Vimos que na geometria Euclidiana, a soma dos ângulos internos de um triângulo dá sempre o valor de 180°. Quando traçamos o mesmo ângulo sobre uma superfície curva isso já não é mais verdade.
- ► Era preciso então estabelecer uma nova geometria que pudesse resolver essas questões.



- ► Alguns poderão estar fazendo a seguinte pergunta: a Terra é uma (quase) esfera, a geometria de Euclides funciona na Terra, então porque a geometria de Euclides não pode explicar uma geometria curva?
- Ocorre que, localmente, podemos considerar que estamos trabalhando em um plano (alô cálculo diferencial!).
- Entretanto, quando precisamos considerar grandes distâncias sobre a superfície da Terra a geometria de Euclides também não funciona. Isso é visto em navegação de longo curso, onde a curvatura da Terra não pode ser desprezada.



- Matemáticos ilustres como Nikolai Lobachevski, János Bolyai, Carl Gauss e Bernhard Riemann dedicaram parte de sua vida a estabelecer uma geometria que ia contra o senso comum. Que tipo de argumento científico poderia ter chamado a atenção de tais matemáticos?
- Basicamente o que esses pesquisadores investigavam era o que ocorreria se eles desprezassem o quinto postulado de Euclides e considerassem exatamente o oposto ou seja, que através de um ponto C não situado sobre uma dada linha reta AB, pudéssemos traçar não uma mas duas, e consequentemente um número infinito, de linhas paralelas a AB.



- ► A tarefa agora passava a ser construir uma geometria baseada nesse novo axioma. A ideia subjacente a isso era que se o quinto postulado era realmente um teorema então, mais cedo ou mais tarde, a nova geometria conteria contradições lógicas, o que significaria que a suposição inicial estava errada e o quinto postulado estaria então provado.
- Mas após construir essa nova geometria os matemáticos não encontraram contradições. Mais ainda, eles descobriram que tinham uma nova e elegante geometria com várias características interessantes e únicas.
- ► Por exemplo, nessa nova geometria a soma dos ângulos internos de um triângulo era menor do que 180° e de fato dependia das dimensões lineares do triângulo.



Não deixe de ler sobre essa nova geometria em [3]!

Referencias I



Geraldo Ávila.

Legendre e o postulado das paralelas.

Revista da Olimpíada, 6:64-76, 2005.

Manfredo Perdigão do Carmo.

Geometrias não-Fuclidianas

Matemática Universitária, 6:25-48, 1987.

A geometria dos espaços curvos ou geometria não-euclidiana.

ON - Observatório Nacional.