



# Elementos de Aritmética

Lista de Aprofundamento

2ª Avaliação

Prof<sup>ª</sup> Karla Lima

2024.1

## Sumário

<b>1</b>	<b>Os Números Inteiros</b>	<b>4</b>
1.1	Múltiplos de Números Inteiros . . . . .	4
1.2	Divisores de um Número Inteiro . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Os Números Racionais</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Os Números Reais</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Equações</b>	<b>8</b>

## Resumo

"A Arte de Resolver Problemas (1945)" é um livro clássico escrito por George Pólya, que oferece uma abordagem sistemática e prática para resolver problemas matemáticos e, por extensão, problemas em diversas áreas da vida.

Ele destaca estratégias heurísticas, como divisão em subproblemas, analogia, tentativa e erro, e trabalhar de trás para frente.

Além disso, o autor enfatiza a importância de persistência, criatividade e flexibilidade mental na resolução de problemas.

Abaixo, segue o esquema introduzido por Pólya para a resolução de problemas. Use-o para ajudar no processo de aprendizado.





# 1 Os Números Inteiros

## 1.1 Múltiplos de Números Inteiros

### Exercício 1

*O Problema 3.7 de [1] (Hefez, A.) pede para mostrar as seguintes propriedades, para um elemento  $a \in \mathbb{Z}$ :*

- i) 0 é múltiplo de  $a$ .*
- ii) Se  $m$  é um múltiplo de  $a$ , então  $-m$  é um múltiplo de  $a$ .*
- iii) Um múltiplo de um múltiplo de  $a$  é um múltiplo de  $a$ .*
- iv) Se  $m$  e  $m'$  são múltiplos de  $a$ , então  $m + m'$  e  $m - m'$  são também múltiplos de  $a$ .*
- v) Se  $m$  e  $m'$  são múltiplos de  $a$ , então  $e \cdot m + f \cdot m'$  é múltiplo de  $a$ , quaisquer que sejam os inteiros  $e$  e  $f$ .*
- vi) Se  $m + m'$  ou  $m - m'$  é múltiplo de  $a$  e  $m$  é múltiplo de  $a$ , então  $m'$  também é múltiplo de  $a$ .*

*Resolva os itens a seguir.*

- a) Para cada item, faça um caso particular, escolhendo valores adequados para  $a$ ,  $m$ ,  $m'$ ,  $e$  e  $f$ .*
- b) Demonstre, formalmente, cada um dos itens de (i) até (vi).*

**Exercício 2** *Faça o mesmo para o Problema 3.8 de [1] (Hefez, A.) .*

## 1.2 Divisores de um Número Inteiro

**Exercício 3** *Mostre que se  $a$  é um inteiro não nulo, os divisores de  $a$  são em número finito.*

**Exercício 4** *Mostre que se  $a$  e  $b$  são números naturais não nulos, então  $a|b$  e  $b|a$  se, e somente se,  $a = b$ .*

**Exercício 5** *Em cada item, escolha casos particulares adequados de  $a$ ,  $b$  e  $d$  e verifique as propriedades. Depois, demonstre-as formalmente.*

a) *Se  $d|a$  e  $d|b$ , então  $d|b+a$  e  $d|(b-a)$ .*

b) *Se  $d|b+a$  ou  $d|(b-a)$  e  $d|a$ , então  $d|b$ .*

**Exercício 6** *O que é o **máximo divisor comum** de dois números inteiros  $a$  e  $b$ ?*

**Exercício 7** *Mostre que:*

a) *O  $\text{mdc}(0,0)$  não existe.*

b) *Se  $b \neq 0$ , então*

$$\text{mdc}(0, b) = \begin{cases} b, & \text{se } b > 0, \\ -b, & \text{se } b < 0. \end{cases}$$

c) *Mostre que se  $a \neq 0$  ou  $b \neq 0$ , então*

$$\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(-a, b) = \text{mdc}(a, -b) = \text{mdc}(-a, -b).$$

**Exercício 8** *Um número  $d$  é divisor comum de  $a$  e  $b$ , ambos não nulos, se, e somente se, ele é um divisor comum de  $a$  e  $b - a$ .*

**Exercício 9** *O que são números primos entre si?*

## 2 Os Números Racionais

**Exercício 10** *Simplifique as frações abaixo até obter uma fração irredutível.*

a)  $\frac{20}{30}$

b)  $\frac{12}{20}$

c)  $\frac{15}{25}$

d)  $\frac{200}{75}$

e)  $\frac{28}{21}$

**Exercício 11** *Resolva as seguintes operações fracionárias, simplificando o resultado até obter uma fração irredutível, quando possível.*

a)  $\frac{11}{12} - \frac{5}{12}$

b)  $\frac{1}{4} + \frac{5}{4} - \frac{3}{4}$

c)  $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7}$

d)  $\frac{2}{11} \cdot \frac{5}{4}$

e)  $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$

**Exercício 12** *Qual a fração equivalente a  $\frac{2}{9}$ , cujo denominador é 27?*

**Exercício 13** *Encontre uma fração equivalente a  $\frac{2}{5}$ , sabendo que a soma do numerador com o denominador é 28.*

**Exercício 14** *Alberto e Beto estão comendo uma pizza. Se Alberto já comeu  $\frac{1}{8}$  e Beto  $\frac{3}{8}$ , qual a fração que sobrou desta pizza?*

**Exercício 15** *A rodovia que liga duas cidades, Campina da Lagoa e Juranda, está sendo reformada. Se  $\frac{1}{3}$  já foi reformada e ainda faltam 20 km, qual o comprimento desta rodovia?*

**Exercício 16** *Luísa tomou  $\frac{1}{5}$  de um refrigerante de 1500 mililitros. Seu irmão, Luiz, tomou  $\frac{2}{3}$  do que havia sobrado. Qual a quantidade de refrigerante que ainda resta na garrafa?*

**Exercício 17** *João fez uma viagem de ida e volta entre Pirajuba e Quixajuba em seu carro, que pode rodar com álcool e com gasolina. Na ida, apenas com álcool no tanque, seu carro fez 12 km por litro e na volta, apenas com gasolina no tanque, fez 15 km por litro. No total, João gastou 18 litros de combustível nessa viagem. Qual é a distância entre Pirajuba e Quixajuba?*

**Exercício 18** *Um ônibus transporta 31 estudantes, baianos e mineiros, para um encontro de participantes da OBMEP. Entre os baianos,  $\frac{2}{5}$  são homens e, entre os mineiros,  $\frac{3}{7}$  são mulheres. Entre todos os estudantes quantas são as mulheres?*

### 3 Os Números Reais

**Exercício 19** *Leia as páginas de 35 a 46 do livro Paiva, M., Matemática 1, Moderna Plus, 2011, resolvendo os exercícios propostos nesse intervalo.*

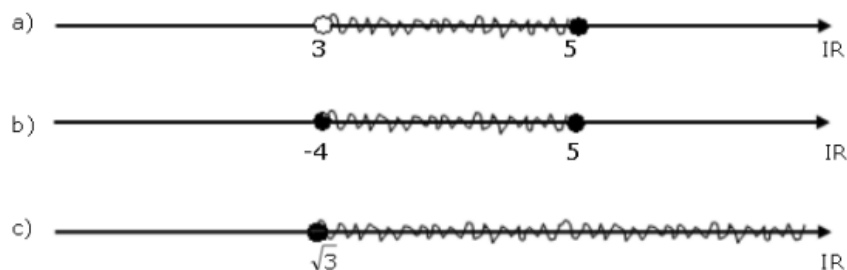
**Exercício 20** *Resolva os exercícios das páginas 48 e 49 do livro Paiva, M., Matemática 1, Moderna Plus, 2011.*

**Exercício 21** *Descreva as operações abaixo em forma de intervalos:*



- a)  $(1, 2] \cup [2, 3)$
- b)  $(\sqrt{2}, 5] \cup [e, 10]$
- c)  $[0, \pi] \cup [-2, 127)$
- d)  $(1, 2] \cap [2, 3)$
- e)  $(\sqrt{2}, 5] \cap [e, 10]$
- f)  $[0, \pi] \cap [-2, 127)$
- g)  $(-\infty, 2\sqrt{3}] \cup [1, 10)$
- h)  $(-\infty, 2\sqrt{3}] \cap [1, 10)$

**Exercício 22** Escrever a notação para os seguintes intervalos, representados na reta real:



## 4 Equações

**Exercício 23** (FGV). Uma fábrica de camisas tem um custo mensal de operação dado por  $C = 5000 + 15x$ , onde  $x$  é o número de camisas produzidas por mês. Cada camisa é vendida por R\$25,00 e, atualmente, o lucro mensal da fábrica é de R\$ 2000,00. Para dobrar esse lucro, a fábrica deverá produzir e vender mensalmente:

- a) o dobro do que produz e vende hoje.
- b) 100 unidades a mais do que produz e vende hoje.
- c) 200 unidades a mais do que produz e vende hoje.
- d) 300 unidades a mais do que produz e vende hoje.

**Exercício 24** (ENEM 2013). Na aferição de um novo semáforo, os tempos são ajustados de modo que, em cada ciclo completo (verde-amarelo-vermelho), a luz amarela permaneça acesa por 5 segundos, e o tempo em que a luz verde permaneça acesa seja igual a  $\frac{2}{3}$  do tempo em que a luz vermelha fique acesa. Sabe-se que cada ciclo dura  $Y$  segundos e, nele, a luz verde fica acesa durante  $X$  segundos.

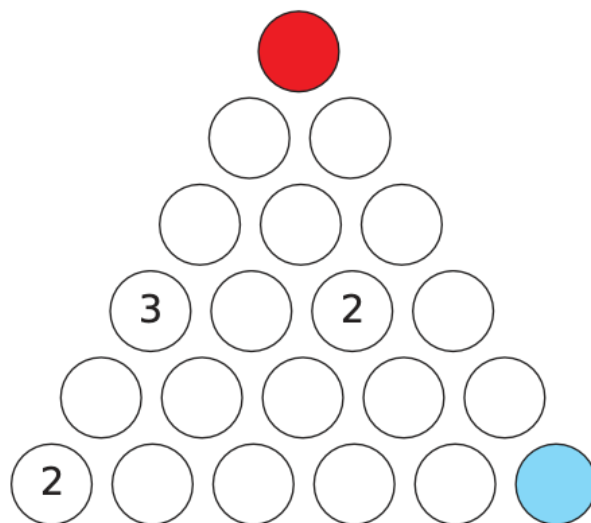
Qual das expressões a seguir representa a relação entre  $X$  e  $Y$ ?

- a)  $5X - 3Y + 15 = 0$ .
- b)  $5X - 2Y + 10 = 0$ .
- c)  $3X - 3Y + 15 = 0$ .
- d)  $3X - 2Y + 15 = 0$ .
- e)  $3X - 2Y + 10 = 0$ .

**Exercício 25** (UFG - 2010). Uma agência de turismo vende pacotes familiares de passeios turísticos, cobrando para crianças o equivalente a  $\frac{2}{3}$  do valor para adultos.

Uma família de cinco pessoas, sendo três adultos e duas crianças, comprou um pacote turístico e pagou o valor total de R\$ 8125,00. Com base nessas informações, calcule o valor que a agência cobrou de um adulto e de uma criança para realizar esse passeio.

**Exercício 26** (OBMEP 2018). *Números naturais devem ser escritos dentro de cada círculo vazio da figura a seguir, de modo que a soma dos números escritos em três círculos alinhados e consecutivos seja sempre a mesma.*



- a) Qual número deverá ser escrito no círculo vermelho?
- b) Mostre que a soma de todos os números escritos é um múltiplo de 7.
- c) Para que a soma de todos os números escritos seja 63, qual número deverá ser escrito no círculo azul?

**Exercício 27** Qual o valor de  $m$  para que  $-3$  seja raiz da equação  $-mx^2 - 4mx + 21 = 0$ .

**Exercício 28** Um grupo de jovens aluga, por 342 reais, uma van para um passeio, sendo que três deles saíram sem pagar. Por isso, os outros tiveram que completar o total pagando, cada um deles, 19 reais a mais. Qual o número inicial de jovens no grupo?

### Gabarito

23. c)

24. b)

25. 1250

26. a) 3. c) 4.

27.  $m = 1$

28. 9

## Referências

- [1] A. Hefez. *Iniciação à Aritmética*. IMPA, 2015.

## Referências

- [1] A. Hefez. *Iniciação à Aritmética*. IMPA, 2015.