Revisão de Funções

Fundamentos da Matemática II

Karla Lima

Sumário

Caracterização

Caracterização

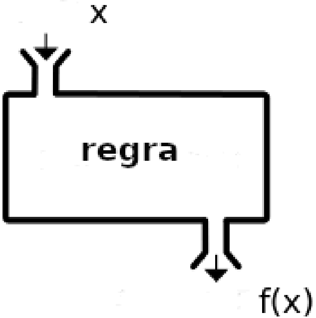
- Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma **função** f de A em B é uma correspondência entre elementos de A e elementos de B, denotada por $f : A \to B$, que associa a cada elemento $a \in A$ um único elemento $b \in B$.

Caracterização

- Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma **função** f de A em B é uma correspondência entre elementos de A e elementos de B, denotada por $f : A \to B$, que associa a cada elemento $a \in A$ um único elemento $b \in B$.
- Nas notações da definição acima:
  1. O conjunto A é chamado de **domínio** da função f. O conjunto B é chamado **contra-domínio** de f.
  2. Se $a \in A$, o elemento $b = f(a) \in B$ é chamado **imagem de** a pela função f.
  3. Nenhum elemento de A pode ficar sem imagem e cada $a \in A$ só pode ter uma única imagem.

Caracterização

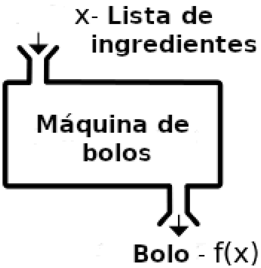
- Uma ideia intuitiva sobre função é pensar nela como uma máquina, na elementos x do domínio são colocadas dentro dela, produzindo elementos y da imagem:



- No domínio só pode haver elementos que possam ser usados na "máquina" (função). Vejamos alguns exemplos.

Exemplo

- Vamos considerar f a função que toma elementos no conjunto A de listas de ingredientes e leva, através da função f, no conjunto B de bolos. Basicamente, nossa função é uma máquina que faz bolos:



Exemplo

i) Se $x \in A$ é a lista que contém

- leite
- manteiga
- ovo
- chocolate
- farinha de trigo
- açúcar
- fermento em pó

então a função f leva x em $f(x) =$ bolo de chocolate.

Exemplo

ii) Se $z \in A$ é a lista que contém

- iogurte
- manteiga
- ovo
- raspas de limão
- farinha de trigo
- açúcar
- fermento em pó

então a função f leva z em $f(z) =$ bolo de iogurte com limão.

Exemplo

ii) Se $z \in A$ é a lista que contém

- iogurte
- manteiga
- ovo
- raspas de limão
- farinha de trigo
- açúcar
- fermento em pó

então a função f leva z em $f(z) =$ bolo de iogurte com limão.

iii) Veja que a lista w, que contém

- picanha
- sal grosso

não pode produzir um bolo. Logo, w não pertence ao domínio A ($w \notin A$) e $f(w)$ não está definido.

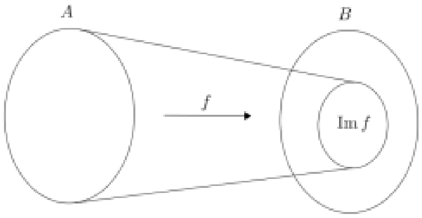
Exemplo

Portanto, o conjunto A é formado por todas as listas de ingredientes que podem produzir um bolo.

Conjunto Imagem

Para uma função $f : A \to B$, o conjunto de todos os elementos do contra-domínio B que corresponde a alguma elemento do domínio A é um subconjunto de B chamado de **imagem** da função f, e é denotado por Imf. Escrevemos

$$Imf = \{b \in B |\ b = f(a),\ \text{para algum } a \in A\}$$



Exemplo

Seja A um conjunto de cartas e seja B um conjunto de casas. Podemos pensar no conjunto A como a bolsa de um carteiro e B como o conjunto de casas dentre as quais estão aquelas que serão visitadas pelo carteiro. Vamos considerar a correspondência $f : A \to B$ que associa a uma carta $a \in A$ a casa $f(a) \in B$ para qual esta carta foi endereçada.

Exemplo

a) Cada carta está associada a uma casa e uma carta não pode ir para duas casas ao mesmo tempo. Logo, f é uma função.

b) A bolsa do carteiro é o domínio da função.

c) A imagem de f é o conjunto de casas que receberam pelo menos uma carta. Note que pode haver casas que não receberam cartas, logo, a imagem não precisa ser igual ao contra-domínio.

Função Real de Variável Real

Par Ordenado

- Dados $a \in A$ e $b \in B$, o par (a, b) é chamado **par ordenado**.
- Em um par ordenado, a ordem em que os elementos aparecem é relevante: $(a, b) \neq (b, a)$. O primeiro elemento a é chamado **abcissa** e o segundo b é chamado **ordenada**.
- Dois pares ordenados (a, b) e (c, d) são iguais se, e somente se,

$$a = c \quad \text{e} \quad b = d.$$

Produto Cartesiano

- O **produto cartesiano** $A \times B$ é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b), tais que $a \in A$ e $b \in B$; ou seja,

$$A \times B = \{(a, b) | \, a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Exemplo 1

Se $A = \{2, \pi\}$ *e* $B = \{-1.5, 0, e\}$, *então*

$$A \times B = \{(2, -1.5), (2, 0), (2, e), (\pi, -1.5), (\pi, 0), (\pi, e)\}.$$

Exemplo

Exemplo 2

Se $A = [1, 2]$ e $B = [0, 1]$, não conseguimos listar todos os pares ordenados do conjunto $A \times B$, pois intervalos possuem infinitos elementos. Neste caso, representamos o conjunto da seguinte forma:

$$A \times B = \{(a, b) |\, 1 \leq x \leq 2 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}.$$

Plano Cartesiano

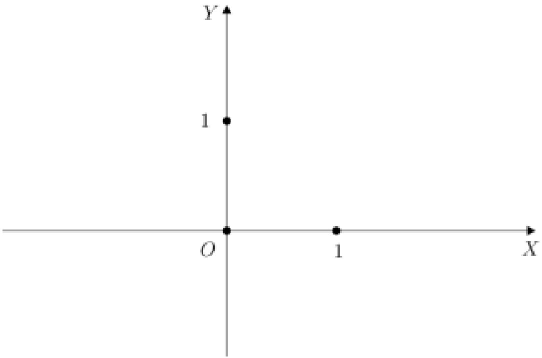
Neste curso, usaremos o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, o **plano cartesiano**. Ele pode ser identificado através da seguinte construção:

i) Uma cópia da reta real, na horizontal, onde é feita a escolha de um ponto para representar o número 0, e os números positivos são colocados à direita, enquanto os negativos à esquerda do 0. Geralmente, denotamos esta reta por **eixo** x.

ii) Uma cópia da reta real, na vertical, onde é feita a escolha de um ponto para representar o número 0, e os números positivos são colocados acima, enquanto os negativos abaixo do 0. Geralmente, denotamos esta reta por **eixo** y.

iii) Intersecta as duas retas, fazendo os pontos 0 das duas se encontrarem, de modo que as duas sejam perpendiculares entre si.

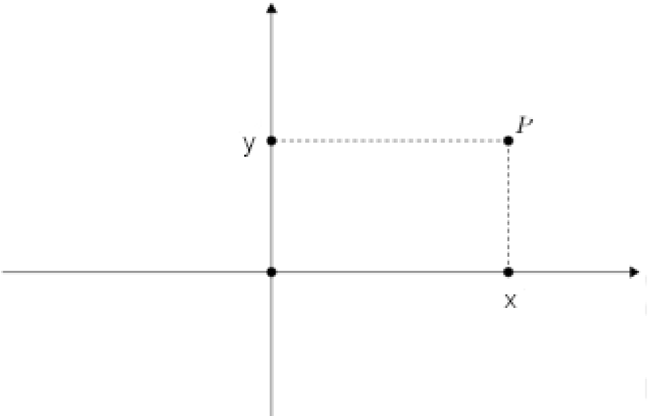
Plano Cartesiano



Chama-se **origem** do plano cartesiano, o ponto $O = (0, 0)$.

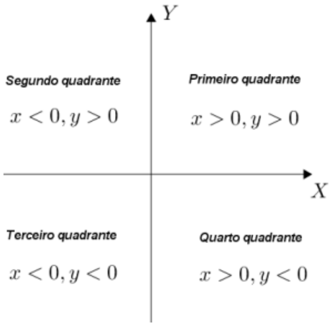
Plano Cartesiano

Dado um par $P = (x, y)$ no plano cartesiano, para representá-lo no plano, traçamos pelo ponto P uma reta paralela ao eixo y e uma paralela ao eixo x, como abaixo:



Plano Cartesiano

Os eixos *x* e *y* dividem o plano em quatro regiões, chamadas quadrantes:



Plano Cartesiano

Os pontos da forma $(0, y)$ estão sobre o eixo y; já os pontos da forma $(x, 0)$ estão sobre o eixo x. Por exemplo, o ponto $A = (0, 1)$ está sobre o eixo y, enquanto que o ponto $B = (-2, 0)$ está sobre o eixo x.

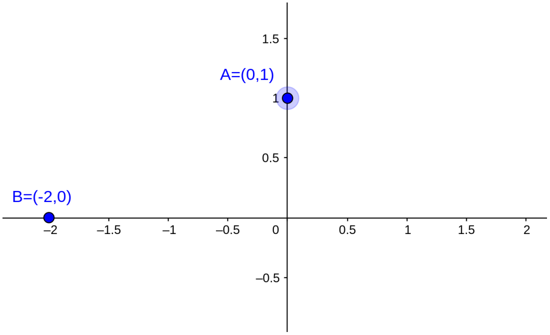


Gráfico de uma Função

Definição 1

*Dada uma função $f : A \to B$, o conjunto de todos os pares ordenados da forma $(a, f(a)) \in A \times B$ é chamado **gráfico** da função f:*

$$gr(f) = \{(a, f(a)) |\, a \in A \text{ e } f(a) \in B\}.$$

Gráfico de uma Função

Se $f : A \to B$ é tal que $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$, então podemos representar o gráfico da função f geometricamente, como um subconjunto do plano cartesiano: $gr(f) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

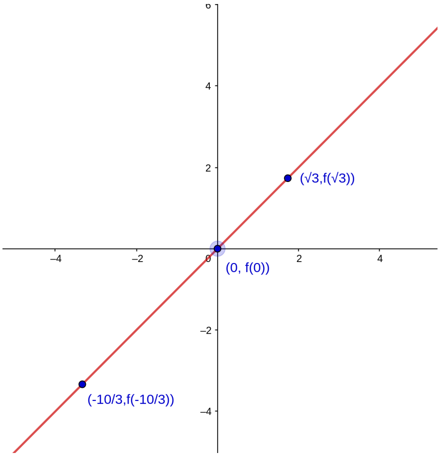
Gráfico de uma Função

Se $f : A \to B$ é tal que $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$, então podemos representar o gráfico da função f geometricamente, como um subconjunto do plano cartesiano: $gr(f) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Por exemplo, o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x$, é o conjunto de pontos em que a abcissa é igual à ordenada:

$$gr(f) = \{(x, x) | x \in \mathbb{R}\}.$$

Exemplo: Gráfico de uma Função

Geometricamente, é representado pela reta que passa pelos pontos da forma (x, x):



Exemplo: Gráfico de uma Função

Aqui, destacamos 3 dos infinitos pontos desta reta. São eles:

- $(-\frac{10}{3}, f(-\frac{10}{3})) = (-\frac{10}{3}, -\frac{10}{3})$;
- $(0, f(0)) = (0, 0)$;
- $(\sqrt{3}, f(\sqrt{3})) = (\sqrt{3}, \sqrt{3})$.