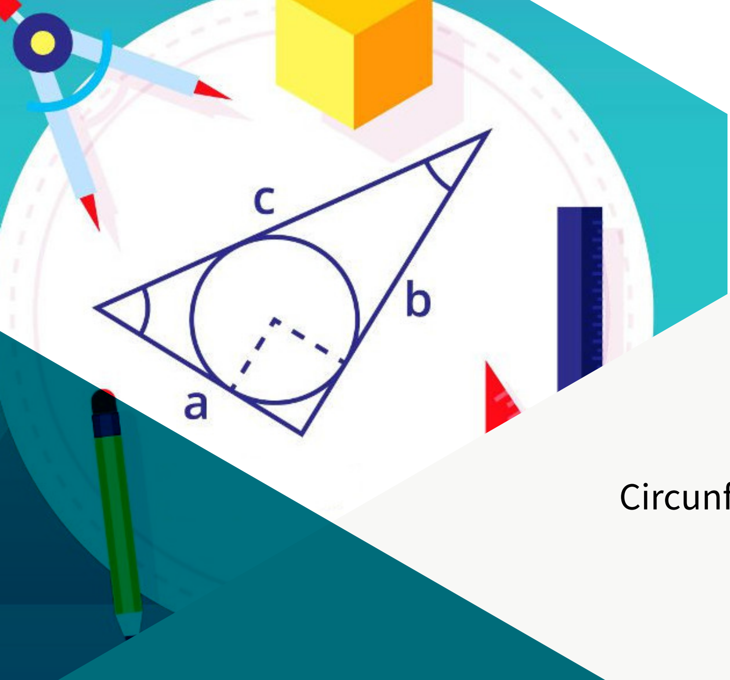


CÁLCULO II

Aula 12

Circunferências: Arcos e Ângulos

Karla Lima

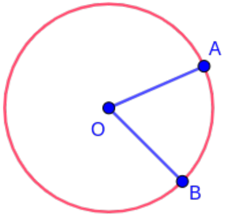
Sumário

Correspondência entre arcos e ângulos

Ângulo Central

Definição 1

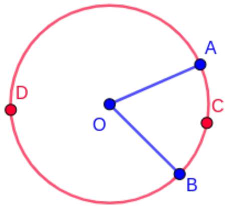
*Chama-se **ângulo central** ao ângulo cujo vértice é o centro da circunferência.*



- A parte da circunferência limitada pelos ponto A e B é denominada **arco da circunferência** e o denotamos por $\widehat{AB}$.
- Os pontos A e B são os extremos do arco AB.

Ângulo Central

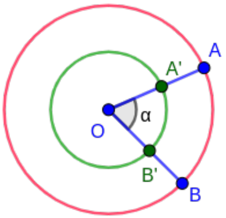
- Há uma ambiguidade na notação para arcos, uma vez que não nos permite distinguir se estamos nos referindo ao arco menor ou ao arco menor.
- Para evitar tal ambiguidade, considera-se outro ponto do arco.
- Na figura abaixo, o arco AB menor é denotado por $\overset{\frown}{ACB}$, enquanto que o maior é denotado por $\overset{\frown}{ADB}$.



- Quando não houver dúvidas quanto ao arco que estamos nos referindo, podemos escrever simplesmente $\overset{\frown}{AB}$.

Ângulo Central e Arcos

- Pode-se estabelecer uma correspondência entre ângulos centrais e arcos de circunferência, de tal modo que a medida de um arco, em graus, não dependa do raio da circunferência.
- Na figura abaixo, os extremos dos arcos AB e $A'B'$, das duas circunferências concêntricas, correspondem a mesma abertura dos lados do ângulo central α.



Ângulo Central e Arcos

O fato anterior motiva a seguinte definição:

Definição 2

A medida, em graus, de um arco é a medida do ângulo central correspondente.

Notação: $\widehat{AB} = \alpha$.

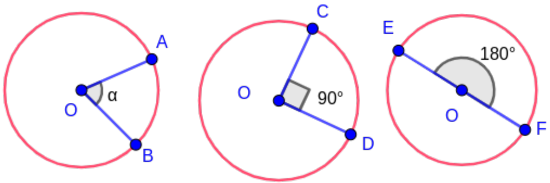


Figura 1: $\widehat{AB} = \alpha$, $\widehat{CD} = 90°$ e $\widehat{EF} = 180°$

Unidade de Medida

- Se A e B são as extremidades de um diâmetro, os dois arcos congruentes determinados são denominados **semicircunferências** e sua medida, em graus, é 180°.
- Do exposto, um arco que mede 1° equivale a $\dfrac{1}{360}$ da circunferência.
- Para medir arco menores que um grau, utilizamos **minuto** e **segundo**, definidos por

$$\textbf{Minuto: } 1' = \tfrac{1}{60} \text{ do grau;}$$
$$\textbf{Segundo: } 1'' = \frac{1}{60} \text{ do minuto.}$$

Teorema 1

Teorema 1

Na mesma circunferência, ou em circunferências congruentes, se duas cordas são congruentes então são congruentes os arcos por elas subentendidos.

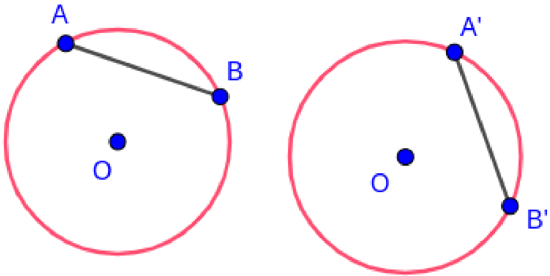
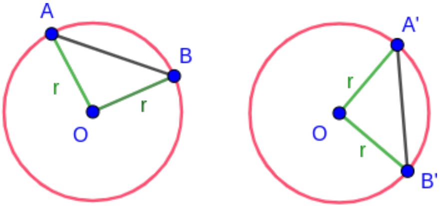


Figura 2: $AB = A'B'$

Demonstração: Teorema 1

- Construa os triângulo AOB e $A'O'B'$, onde O e O' são os centros das circunferências congruentes.



- Como
  - $AB = A'B'$ (hipótese)
  - $AO = A'O' = r$ e $BO = B'O' = r$ (as circunferências possuem o mesmo raio)

  os triângulos AOB e $A'O'B'$ são congruentes (LLL).
- Logo, $\widehat{AOB} = \alpha = \widehat{A'O'B'}$ (ângulo oposto aos lados congruentes $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$), como queríamos demonstrar.

Teorema 2

Teorema 2

Teorema Recíproco: *Na mesma circunferência ou em circunferências congruentes, se dois arcos são congruentes então são congruentes as cordas correspondentes.*

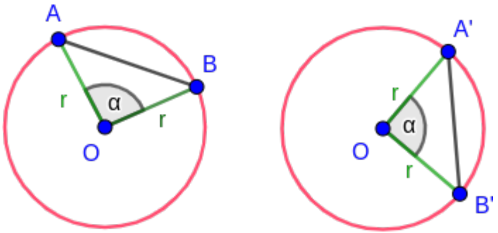


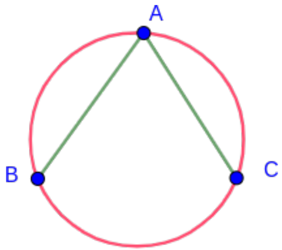
Figura 3: $A\hat{O}B = A'\hat{O}B'$

Demonstração: Exercício.

Ângulo Inscrito

Definição 3

Diz-se que um ângulo está ***inscrito*** *numa circunferência se seu vértice pertence à circunferência e seus lados intersectam a mesma em dois pontos distintos do vértice.*



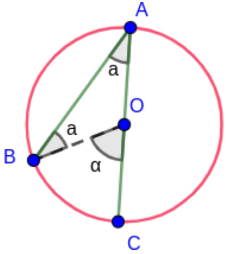
Teorema 3

Teorema 3

O ângulo inscrito tem por medida a metade da medida do arco compreendido entre seus lados.

Demonstração: Teorema 3

- **1º Caso:** Um dos lados do ângulo contém um diâmetro.



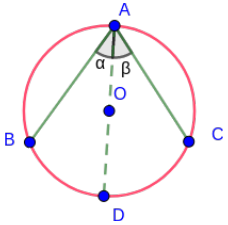
  - O ângulo $\hat{\alpha}$ é externo do triângulo isósceles AOB, assim

$$\hat{\alpha} = 2\hat{a} \quad \Rightarrow \quad \hat{a} = \frac{\hat{\alpha}}{2} = \frac{\widehat{BC}}{2},$$

como queríamos demonstrar.

Demonstração: Teorema 3

- **2º Caso:** O centro do círculo fica no interior do ângulo.



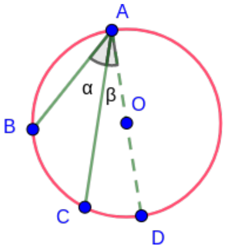
- Temos que

$$B\hat{A}C = \alpha + \beta = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} + \frac{\overset{\frown}{DC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BD + DC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2},$$

pois os arcos $\overset{\frown}{BD}$ e $\overset{\frown}{DC}$ contém um diâmetro num dos seus lados.

Demonstração: Teorema 3

- **3º Caso:** O centro do círculo fica no exterior do ângulo.



  - Temos que

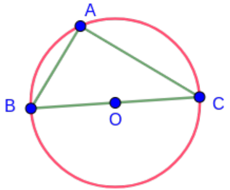
$$B\hat{A}C = B\hat{A}D - C\hat{A}D = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} - \frac{\overset{\frown}{DC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2},$$

pois os arcos $\overset{\frown}{BD}$ e $\overset{\frown}{DC}$ contém um diâmetro num dos seus lados.

Corolário

Corolário 1

O triângulo cujos vértices pertencem a uma circunferência e um dos lados é o diâmetro, é retângulo.

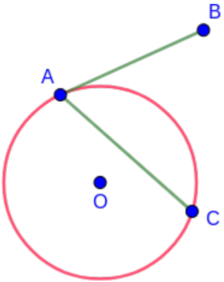


Demonstração: Exercício.

Ângulo de Segmento

Definição 4

*Um ângulo é dito de **segmento** se seu vértice pertence à circunferência, um lado é secante e o outro tangente à mesma.*



Teorema 4

Teorema 4

O ângulo de segmento tem por medida a metade da medida do arco compreendido entre seus lados.

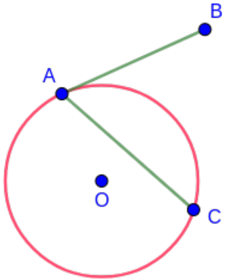
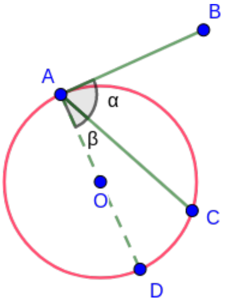


Figura 4: $C\hat{A}B = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$

Demonstração: Teorema 4

- A tangente $\overline{AB}$ é perpendicular ao diâmetro $\overline{AD}$.



- Logo, $\alpha + \beta = 90^\circ$, de onde segue que:

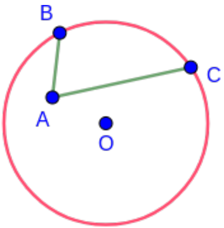
$$B\hat{A}C = 90^\circ - C\hat{A}D = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} - \frac{\overset{\frown}{DC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{DC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}.$$

Exercício: Justifique as igualdades.

Ângulo Excêntrico Interno

Definição 5

*Um **ângulo excêntrico interno** é aquele cujo vértice é interior a circunferência.*



Teorema 5

Teorema 5

O ângulo excêntrico interno tem por medida a metade da soma das medidas do arco compreendido entre seus lados e do arco compreendido entra as semirretas opostas aos lados do mesmo.

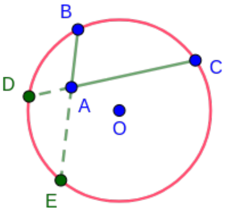
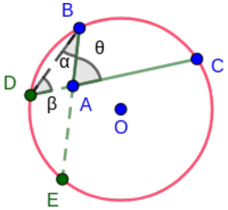


Figura 5: $\hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{ED} + \overset{\frown}{BC}}{2}$

Demonstração: Teorema 5

- O ângulo $\theta = B\hat{A}C$ é externo do triângulo ADB.



- Logo,

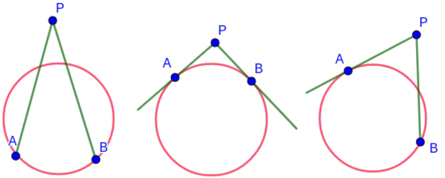
$$B\hat{A}C = \alpha + \beta = \frac{\overset{\frown}{ED}}{2} + \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{ED} + \overset{\frown}{BC}}{2},$$

pois α e β são ângulos inscritos na circunferência dada.

Ângulo Excêntrico Externo

Definição 6

*Um **ângulo excêntrico externo** é aquele cujo vértice é exterior a circunferência e seus lados são secantes, ou tangentes, ou uma secante e uma tangente à mesma.*



- Quando os lados desse ângulo são tangentes, o mesmo é denominado **circunscrito** à circunferência.

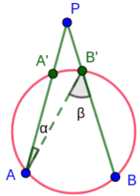
Teorema 6

Teorema 6

O ângulo excêntrico externo tem por medida a metade da diferença das medidas dos arcos compreendidos entre seus lados.

Demonstração: Teorema 6

- **Caso 1:** Os dois lados são secantes.



  - O ângulo $\beta = A\hat{B'}B$ é externo do triângulo $PB'A$.
  - Logo,

$$\beta = \alpha + \hat{P} = \frac{\widehat{A'B'}}{2} + \hat{P}$$

de onde segue que

$$\hat{P} = \beta - \frac{\widehat{A'B'}}{2} = \frac{\widehat{AB}}{2} - \frac{\widehat{A'B'}}{2} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{A'B'}}{2} \quad \text{(Justifique as igualdades).}$$

Demonstração: Teorema 6

- **Caso 2:** Os dois lados são tangentes.
- **Caso 3:** Um lado é secante e o outro é tangente.

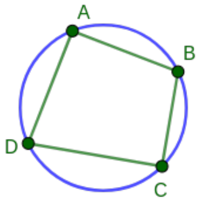
Demonstração: Exercício.

Polígonos Inscritíveis e Circunscritíveis

Polígono Inscrito

Definição 7

Diz-se que um polígono está ***inscrito*** *numa circunferência quando todos os seus vértices pertencem à mesma.*



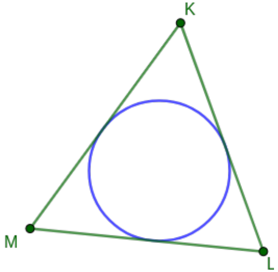
Quadrilátero Inscrito

Neste caso, diz-se que a circunferência está circunscrita ao polígono.

Polígono Circunscrito

Definição 8

Diz-se que um polígono está ***circunscrito*** *a uma circunferência quando todos os seus lados são tangentes à mesma.*



Triângulo Circunscrito

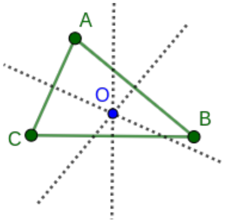
Quando isso ocorre, diz-se que a circunferência está inscrita no polígono.

Teorema 7

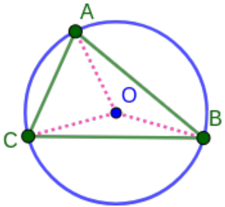
Teorema 7

Todo triângulo é inscritível.

Demonstração: As mediatrizes dos lados de um triângulo se interceptam em um único ponto O (circuncentro), equidistante dos vértices.



Demonstração: Teorema 7



- Logo, se $AO = BO = CO = r$, tomando a circunferência de centro em O e raio r, inscrevemos o triângulo dado.

Teorema 8

Teorema 8

Todo triângulo é circunscritível.

Demonstração: Exercício.

Teorema 9

Teorema 9

Em todo quadrilátero inscrito numa circunferência, os ângulos opostos são suplementares.

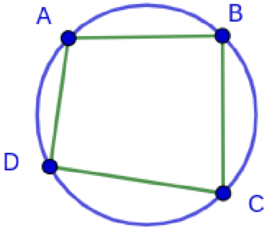
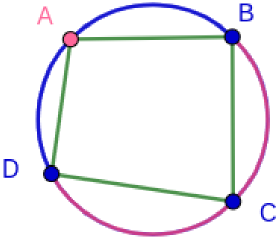


Figura 6: $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$ e $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$

Demonstração: Teorema 9



- Observe que: $\hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{BCD}}{2}$ e $\hat{C} = \dfrac{\overset{\frown}{DAB}}{2}$.
- Assim,

$$\begin{aligned} \hat{A} + \hat{C} &= \frac{\overset{\frown}{BCD}}{2} + \frac{\overset{\frown}{DAB}}{2} \\ &= \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ. \end{aligned}$$

Teorema 10

Teorema 10

Em todo quadrilátero circunscrito, a soma de dois lados opostos é igual à soma dos outros dois.

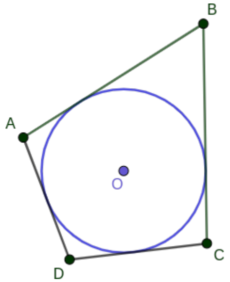
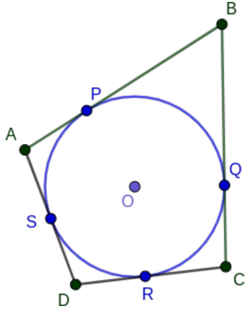


Figura 7: $AB + DC = AD + BC$

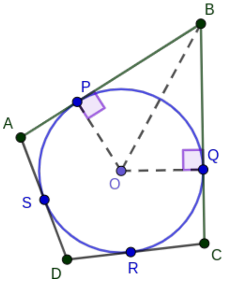
Demonstração: Teorema 10



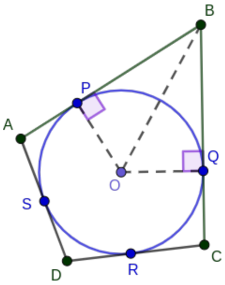
- Como os lados do quadrilátero são tangentes à circunferência, teremos:
  - $BP = BQ$;
  - $AP = AS$;
  - $DS = DR$;
  - $CR = CQ$.

Demonstração: Teorema 10

- De fato, seja O o centro da circunferência. Tome os segmentos $\overline{BO}$, $\overline{OP}$ e $\overline{OQ}$.
- Como P e Q são os pontos de tangência, $O\hat{P}B = O\hat{Q}B = 90^{\circ}$.



Demonstração: Teorema 10



- Os triângulos retângulos OPB e OQB possuem um cateto congruente ($OP = OQ = r$) e a hipotenusa em comum, ambos são congruentes.
- Portanto, os lados retantes BP e BQ são congruentes.
- A demonstração das outras igualdades segue de modo análogo.

Demonstração: Teorema 10

- Somando-se os membros das desigualdades, obtemos:

$$\begin{aligned}(AP + PB) + (DR + RC) &= (AS + BQ) + (DS + CQ) \\ &= (AS + SD) + (BQ + QC)\end{aligned}$$

de onde segue que

$$AB + DC = AD + BC,$$

como queríamos demonstrar.