GEOMETRIA PLANA

Aula 07

Paralelismo e Perpendicularidade

Karla Lima

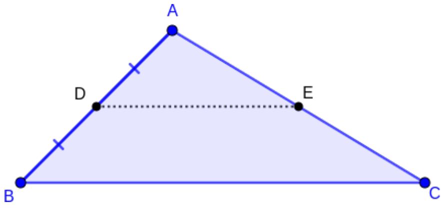
Sumário

Paralelismo

Teorema

Teorema 1

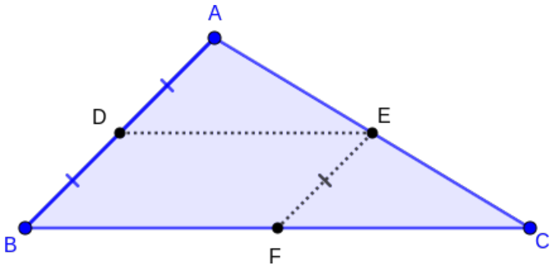
Se do ponto médio do lado de um triângulo, traçarmos uma paralela a um dos lados, esta passará pelo ponto médio do terceiro lado.



- **Hipótese:** $AD = DB$ e $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.
- **Tese:** $AE = EC$.

Demonstração: Teorema 5

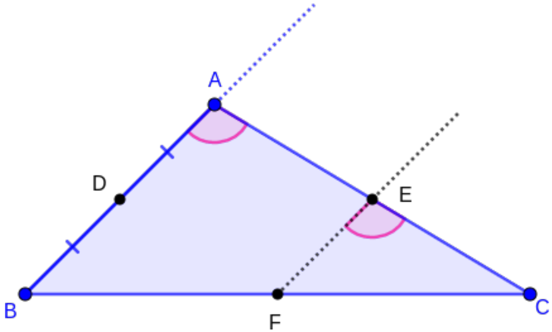
- Pelo ponto E, que a paralela ao lado $\overline{BC}$ corta o lado $\overline{AC}$, trace um segmento paralelo ao lado $\overline{AB}$, cortando o lado $\overline{BC}$.



i) Qual teorema garante que $BD = FE$?

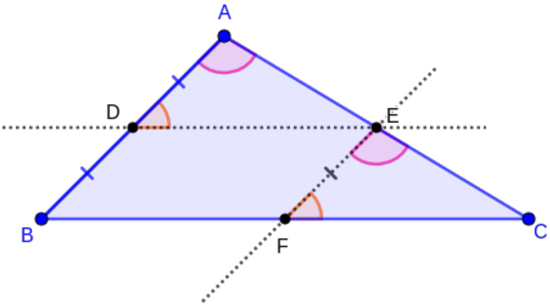
Demonstração: Teorema 5

ii) Sendo $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$, cortadas pela transversal $\overline{AC}$, como podemos relacionar os ângulos $A\hat{D}E$ e $E\hat{F}C$?



Demonstração: Teorema 5

iii) Como $\overline{DA} \parallel \overline{FE}$ e $\overline{DE} \parallel \overline{FC}$, como podemos relacionar os ângulos $A\hat{D}E$ e $E\hat{F}C$?



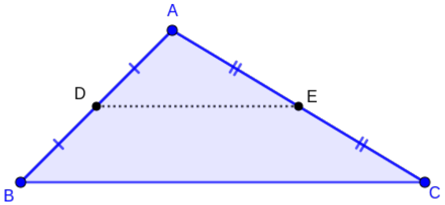
iv) Dos itens anteriores, o que garante a congruência dos triângulos DAE e FEC?

- Da congruência acima, o que garante que $AE = EC$?

Teorema

Teorema 2

O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado.



- **Hipótese:** $AD = DB$ e $AE = EC$.
- **Tese:** $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

Demonstração: Teorema 6

1. Pelo ponto médio de $\overline{AB}$, D, traçamos uma reta paralela ao lado $\overline{BC}$.
2. Pelo Teorema 5, essa reta corta o lado $\overline{AC}$ no seu ponto médio, E.
3. Como pelos pontos distintos D e E passa uma única reta, o segmento $\overline{DE}$ deve estar contido na reta traçada, o que implica em - também - ser paralelo ao lado $\overline{BC}$.

Exercício

Exercício 1

Demonstre o seguinte corolário do Teorema 2:

Corolário 1

No triângulo anterior, tem-se $DE = \dfrac{BC}{2}$.

Perpendicularidade

Definição

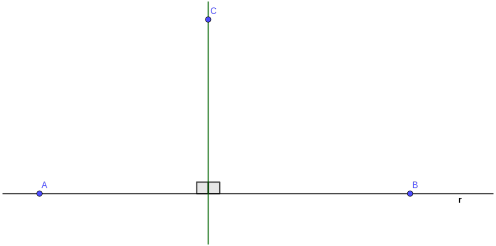
- Como vimos, Euclides define ’ângulo reto’ como sendo igual ao ângulo formado por duas retas que se cortam de maneira a formar quatro ângulos iguais.
- Essas duas retas são ditas **perpendiculares** (símbolo: $\perp$).
- O resultado a seguir é um corolário do Teorema do Triângulo Externo.

Corolário

Corolário 2

Por um ponto não pertencente a uma reta, passa uma única reta perpendicular a reta dada.

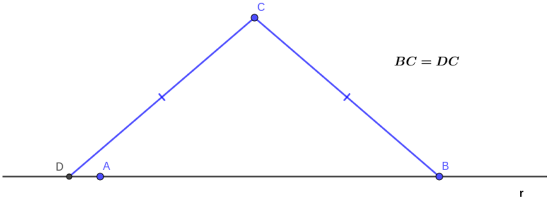
- **Hipótese:** $C \notin r$.
- **Tese:** Existe uma única reta que passa por C e é perpendicular a reta r.



Demonstração Corolário 2

Existência:

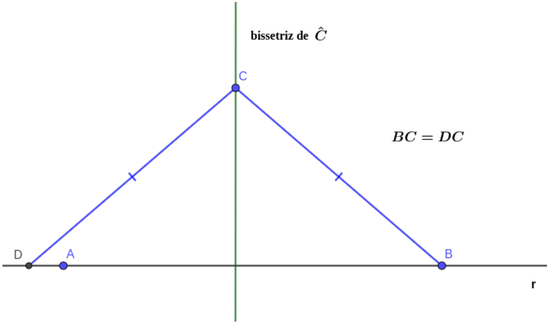
- Seja r uma reta e C um ponto fora dela.
- Trace na reta r um ponto D tal que $CD = CB$.



Demonstração Corolário 2

Existência:

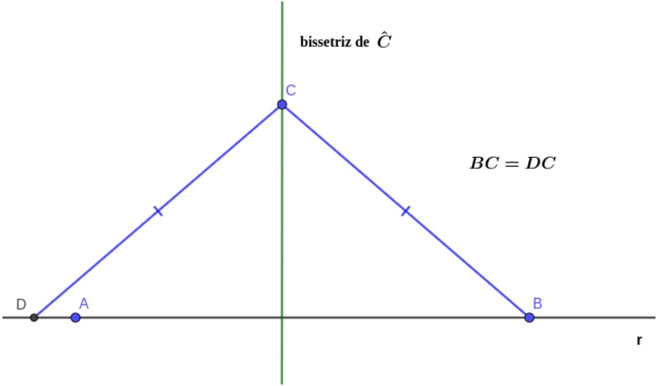
- O triângulo *DCB* é isósceles, logo sua bissetriz é também sua mediana e sua altura (Teorema 2).



Demonstração Corolário 2

Existência:

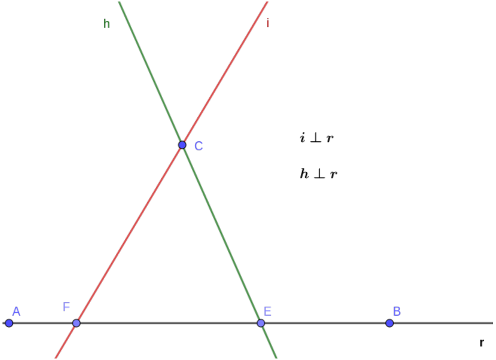
- Assim, a bissetriz de $\hat{C}$ é uma reta perpendicular à reta r que passa por C.



Demonstração Corolário 2

Unicidade:

- Suponha, por absurdo, que existam duas retas perpendiculares à reta *r*, que passam por *C*.



Demonstração Corolário 2

Unicidade:

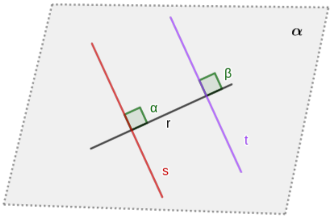
- O triângulo CFE possui dois ângulos retos ($C\hat{F}E$ e $C\hat{E}F$).
- Mas, por causa do TAE, se um ângulo for reto os outros devem ser agudos, contradizendo a afirmação acima.

Exercício

Exercício 2

Demonstre o seguinte teorema:

Num mesmo plano, duas retas distintas perpendiculares a uma terceira, são paralelas entre si.



- **Hipótese:** $r, s, t \in \alpha, r \perp s$, $r \perp t$ e $s \neq t$.
- **Tese:** s e t são paralelas.

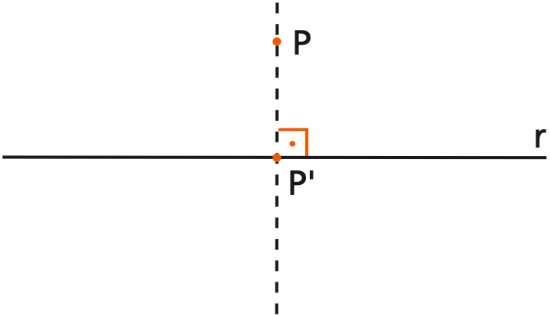
Projeções e Distâncias

Projeção Ortogonal

Definição 1

Chama-se ***projeção ortogonal*** *de um ponto sobre uma reta r ao ponto de interseção da reta com a perpendicular à ela que passa por aquele ponto.*

- $\overleftrightarrow{PP'} \perp r$ e $\overleftrightarrow{PP'} \cap r = \{P'\}$.
- Se $P \in r$, então $P' = P$.



Projeção de um segmento sobre uma reta

Definição 2

A ***projeção*** *de um segmento de reta* $\overline{AB}$ *não perpendicular a uma reta r sobre esta reta é o segmento* $\overline{A'B'}$ *em que*

- A' *é a projeção de A sobre r e*
- B' *é a projeção de B sobre r.*

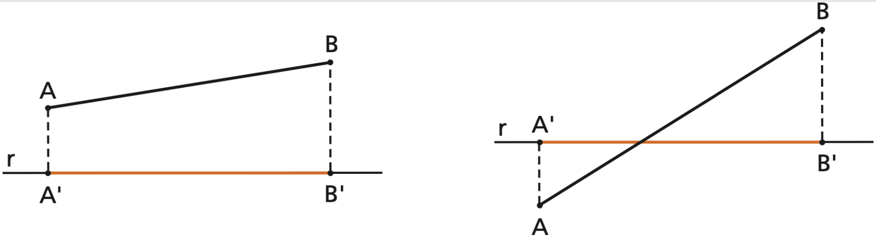
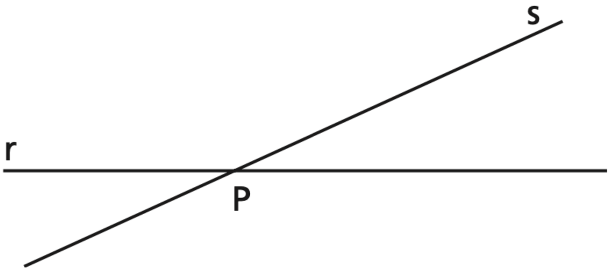


Figura 1: Exemplos da projeção

Retas Oblíquas

Definição 3

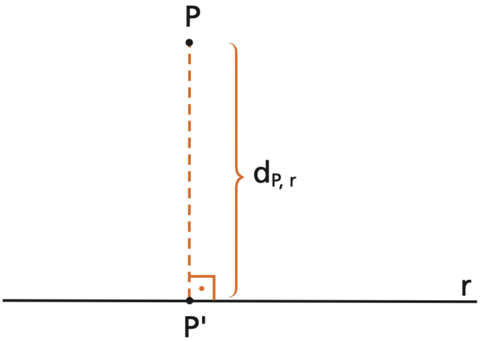
Se duas retas são concorrentes e não são perpendiculares, diz-se que essas retas são oblíquas.



Distâncias

Definição 4

A distância de um ponto a uma reta é a distância desse ponto à projeção dele sobre a reta.



Exercícios

Exercício 3

Mostre que todo ponto da bissetriz de um ângulo é equidistante dos lados do ângulo.