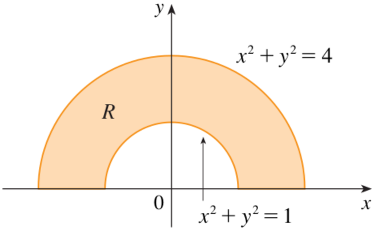
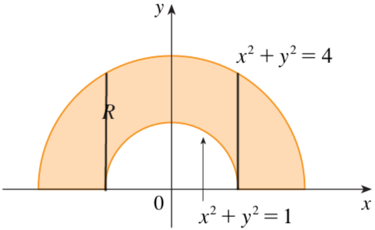
1. Vamos calcular a integral $\int\int_R (3x+4y^2)\,dA$, onde R é a região no semiplano superior limitada pelos círculos $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4$.

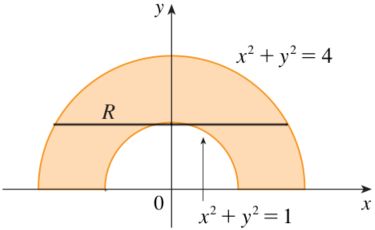


Não conseguimos descrever esta região como do tipo I, mas sim como a união de 3 regiões desse tipo:



1. $R_1 = \left\{(x,y); -2 \leq x \leq -1 \text{ e } 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\right\}$
2. $R_2 = \left\{(x,y); -1 \leq x \leq 1 \text{ e } \sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\right\}$
3. $R_3 = \left\{(x,y); 1 \leq x \leq 2 \text{ e } 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\right\}$

Também não conseguimos descrever esta região como do tipo II, mas sim como a união de 3 regiões desse tipo:



1. $R_1 = \left\{(x, y); -\sqrt{4 - y^2} \leq x \leq -\sqrt{1 - y^2} \text{ e } 0 \leq y \leq 1\right\}$
2. $R_2 = \left\{(x, y); -\sqrt{4 - y^2} \leq x \leq \sqrt{4 - y^2} \text{ e } 1 \leq y \leq 2\right\}$
3. $R_3 = \left\{(x, y); \sqrt{1 - y^2} \leq x \leq \sqrt{4 - y^2} \text{ e } 0 \leq y \leq 1\right\}$

Em qualquer um dos casos, teríamos que resolver 3 integrais para obter a integral pedida:

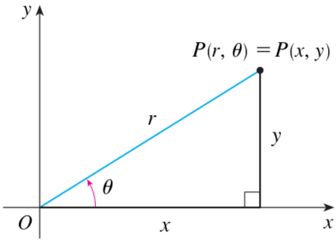
$$\int\int_{R_1}(3x+4y^2)\,dA+\int\int_{R_2}(3x+4y^2)\,dA+\int\int_{R_3}(3x+4y^2)\,dA$$
$$=\int\int_{R}(3x+4y^2)\,dA$$

Integração sobre regiões circulares

- Quando integramos sobre regiões circulares e a descrição de R é complicada em regiões retângulares, podemos usar as **Coordenadas Polares**.
- Em vez de usar a distância no eixo x para a primeira coordenada e a distância no eixo y para a segunda, descrevemos o ponto do cartesiano $A = (x, y)$ em um círculo.

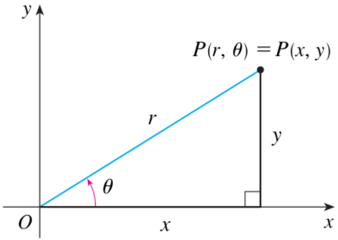
Integração sobre regiões circulares

- O círculo é definido pelo seu raio (dado pelo comprimento do vetor $\overrightarrow{A} = (x, y)$) e a posição do ponto no círculo é definido pelo ângulo que o vetor $\overrightarrow{A}$ faz com o eixo positivo x.



Integração sobre regiões circulares

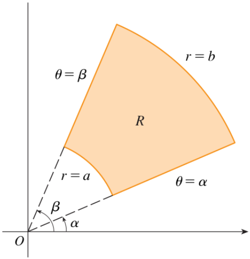
- Aplicando as relações trigonométricas em um triângulo retângulo, obtemos

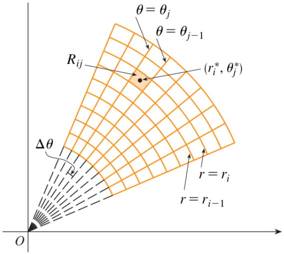


$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad x = r\cos\theta \qquad y = r \operatorname{sen}\theta$$

Integração sobre regiões circulares

- A idéia é a mesma. Dividimos a região em "retângulos"polares.





- A área de cada retângulo polar é dado pela diferença das áreas dos setores circulares que o geram:

$$\Delta A_i = \tfrac{1}{2}r_i^2\,\Delta\theta - \tfrac{1}{2}r_{i-1}^2\,\Delta\theta = \tfrac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\,\Delta\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})\,\Delta\theta = r_i^*\,\Delta r\,\Delta\theta$$

Mudança de variáveis

$\boxed{2}$ **Mudança para Coordenadas Polares em uma Integral Dupla** Se f é contínua no retângulo polar R dado por $0 \leqslant a \leqslant r \leqslant b$, $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, onde $0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant 2\pi$, então

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

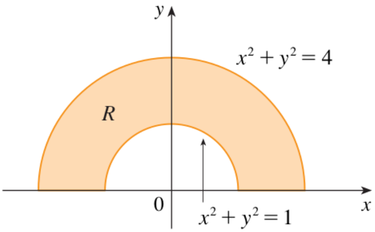
- Trocamos a variaçao do x e do y pela variação do raio e do ângulo;
- Trocamos na regra da função:

$$x \text{ por } r\cos\theta \text{ e } y \text{ por } r\mathrm{sen}\theta.$$

- Trocamos a variação dos retângulos cartesianos $dA = dx\,dy$ pela variação dos retângulos polares $r\,dr\,d\theta$.

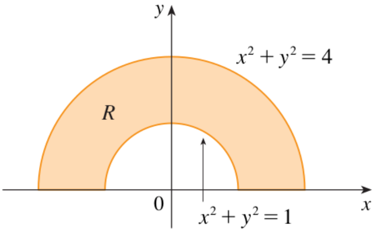
Voltando ao exemplo:

1. Vamos calcular a integral $\displaystyle\int\int_R (3x+4y^2)\, dA$, onde R é a região no semiplano superior limitada pelos círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.



Voltando ao exemplo:

- Devemos verificar qual o menor raio: menor comprimento de um vetor $\overrightarrow{A} = (x, y)$ na região: nesse exemplo, $1 \leq r \leq 2$;
- Devemos verificar a variação angular dos vetores na região, medidos em relação ao eixo positivo x: nesse exemplo, $0 \leq \theta \leq \pi$.



Voltando ao exemplo:

- Então podemos descrever a região R em coordenadas polares como
$$R = \{(r,\theta); 1 \leq r \leq 2 \text{ e } 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$
- A integral fica
$$\int\int_R (3x + 4y^2)\, dA = \int_0^{\pi}\int_1^2 \left[3(r\cos\theta) + 4(r\text{sen}\theta)^2\right]\, r\, dr\, d\theta$$
- Usa a relação: $\text{sen}^2\theta = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}$.

Voltando ao exemplo:

SOLUÇÃO A região R pode ser descrita como

$$R = \{(x, y) \mid y \geqslant 0,\ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$$

É a metade do anel mostrado na Figura 1(b), e em coordenadas polares é dado por $1 \leqslant r \leqslant 2$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Portanto, pela Fórmula 2,

$$\begin{aligned}
\iint_R (3x + 4y^2)\, dA &= \int_0^\pi \int_1^2 (3r \cos\theta + 4r^2 \operatorname{sen}^2\theta)\, r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^\pi \int_1^2 (3r^2 \cos\theta + 4r^3 \operatorname{sen}^2\theta)\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^\pi \left[r^3 \cos\theta + r^4 \operatorname{sen}^2\theta\right]_{r=1}^{r=2} d\theta = \int_0^\pi (7\cos\theta + 15 \operatorname{sen}^2\theta)\, d\theta \\
&= \int_0^\pi \left[7\cos\theta + \tfrac{15}{2}(1 - \cos 2\theta)\right] d\theta \\
&= 7 \operatorname{sen}\theta + \frac{15\theta}{2} - \frac{15}{4} \operatorname{sen} 2\theta \Big]_0^\pi = \frac{15\pi}{2}
\end{aligned}$$