UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Profª. Karla Lima

Tópicos de Análise I — 21 de outubro de 2017

Entregar os exercícios 1b), 2, 3 e 4 até sexta-feira 27/10, às 11 hs.

(1) Demonstre o Teorema de Cantor e seu corolário (ver Curso de Análise, v.1).

a) **Teorema de Cantor:** Sejam X um conjunto arbitrário e Y um conjunto contendo pelo menos dois elementos. Nenhuma função $\phi : X \to \mathcal{F}(X;Y)$ é sobrejetiva.

b) **Corolário:** Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ conjuntos infinitos enumeráveis. O produto cartesiano $\prod_{i=1}^{n} X_i$ não é enumerável.

(2) a) Um número real x é dito ser **algébrico** (sobre os racionais) se satisfaz alguma equação polinomial de grau positivo $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, com coeficientes racionais a_i. Pelo teorema fundamental da álgebra, cada equaçaõ polinomial possui finitas raizes. Mostre que o conjunto dos números algébricos é enumerável.

b) Um número real x é dito ser **transcendental** se ele não é algébrico. Mostre que o conjunto de números transcendentais é não enumerável.

(3) Use o fato de que o trinômio de segundo grau $f(\lambda) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \lambda y_i)^2$ é ≥ 0 para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ para provar a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

Prove ainda que vale a igualdade se, e somente se, existe λ tal que $x_i = \lambda y_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$ ou $y_1 = \cdots = y_n = 0$.

(4) Dadas as funções $f, g : X \to \mathbb{R}^+$ limitadas superiormente, prove que o produto $f \cdot g : X \to \mathbb{R}^+$ é uma função limitada (superior e inferiormente) com $\sup(f \cdot g) \leq \sup f \cdot \sup g$ e $\inf(f \cdot g) \geq \inf f \cdot \inf g$. Dê exemplos onde se tenha $<$ e não $=$.

(5) Prove que $\dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = 1 + x + \cdots + x^n$.

(6) Para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$, prove que $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$.

(7) Dados $x, y \in \mathbb{R}$, se $x^2 + y^2 = 0$, prove que $x = y = 0$.