

Aula 04: Equações e Inequações

Karla Lima

14/12/2022

Sumário



1. Bibliografia
2. Mais um Pouco da Função Afim
3. Equações Lineares
4. Inequações
5. O Sinal de uma Função
6. Soluções de Alguns Exercícios



Bibliografia

Bibliografia da Aula 02



- ▶ Livro texto: Fundamentos da Matemática Elementar: 1 (Click para baixar)

Mais um Pouco da Função Afim

Coeficiente Linear



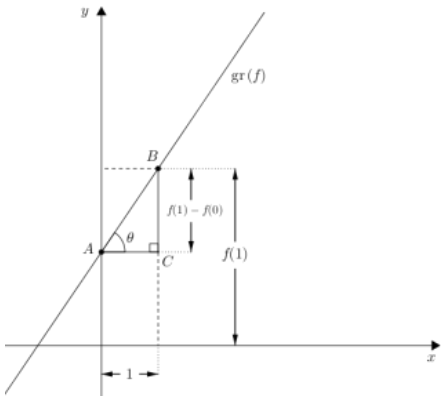
- ▶ Como $f(0) = a \cdot 0 + b = b$, o coeficiente b é igual à ordenada do ponto $(0, f(0))$, onde o gráfico de f intersecta o eixo y . Por essa razão, chamamos b de **coeficiente linear** do gráfico de f .

Coeficiente Angular

Consideremos, agora, sobre o $\text{gr}(f)$, os pontos

$$A = (0, f(0)) \quad \text{e} \quad B = (1, f(1)).$$

O ângulo que o gráfico de f forma com uma reta horizontal (paralela ao eixo x) é ângulo interno do triângulo retângulo ABC , como veremos na figura ao lado.



Coeficiente Angular



- A tangente desse ângulo é, por definição,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - f(0) = a + b - b = a.$$

- Dessa forma, o coeficiente a é igual à tangente do ângulo que a reta $gr(f)$ forma com a horizontal. Por isso chamamos a de **coeficiente angular** do gráfico de f .

Coeficiente Angular



- No caso **Afim**, a tangente é dada pela **variação média** de f no intervalo $[0, 1]$, ou em qualquer intervalo $[c, d]$:

$$\begin{aligned}tg \theta &= \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{f(d) - f(c)}{d - c} \\&= \frac{ad + b - (ac + b)}{d - c} \\&= \frac{ad - ac + b - b}{d - c} \\&= \frac{a * (d - c)}{1 * (d - c)} \\&= \frac{a}{1} * \left(\frac{d - c}{d - c} \right) \\&= a.\end{aligned}$$

Coeficiente Angular



- ▶ Se $a > 0$, então $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ e a inclinação é positiva. Neste caso, a **variação média é positiva** e a função é **crescente**.
- ▶ Se $a < 0$, então $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ e a inclinação é negativa. Neste caso, a **variação média é negativa** e a função é **decrecente**.
- ▶ Quando $a = 0$, a reta $gr(f)$ é paralela ao eixo x . Neste caso, a **variação média é nula** e a função é **constante**.

Restrição de Domínio



- ▶ No caso em que o domínio de uma função afim é um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$, o gráfico de f é um subconjunto da reta que é o gráfico de f , com o domínio estendido a todos os reais.
- ▶ Isto é, os pontos do gráfico de $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax + b$, estão sobre a reta que representa o gráfico de $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada pela mesma expressão.

Exemplo



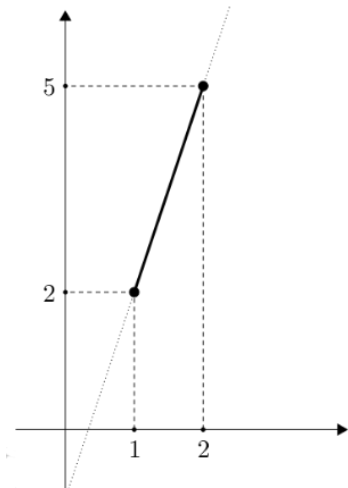
Exemplo 1

O gráfico da função $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 3x - 1$ é o segmento de reta que liga os pontos $(1, f(1)) = (1, 2)$ a $(2, f(2)) = (2, 5)$.

- Isto ocorre pois uma reta (ou um segmento de reta) está completamente determinada por dois de seus pontos (Postulado de Geometria Plana).

Exemplo

Este segmento de reta está contido na reta $r = gr(F)$, onde $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $F(x) = 3x - 1$, estende o domínio da função f a todos os números reais.



Retornando aos Problemas Iniciais



Exemplo 2

Usando o Geogebra, esboce o gráfico das funções obtidas nos Problemas de 1 à 4.

Equações Lineares

Os Zeros da Função Afim



Definição 1

O zero de uma função é todo elemento do domínio cuja imagem é nula:

$$x \in D_f \quad \text{tal que} \quad f(x) = 0.$$

Assim, para determinarmos o zero da função afim, basta resolver a equação de 1º grau:

$$ax + b = 0, \quad a \neq 0.$$

Resolver uma Equação



- ▶ O processo de **resolver uma equação** consiste em transformá-la em uma equação equivalente cuja solução é óbvia. Operações de transformação de uma equação em uma equação equivalente incluem:
 1. **Adicionar o mesmo número** a ambos os lados. Assim, as equações $a = b$ e $a + c = b + c$ são equivalentes.
 2. **Multiplicar o mesmo número não nulo** de ambos os lados. Logo, as equações $a = b$ e $ac = bc, c \neq 0$, são equivalentes.
 3. **Simplificar** expressões em um dos lados de uma equação.

O Zero da Função Afim



Resolvendo a equação de 1º grau:

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax + b - b = 0 - b$$

$$\Rightarrow ax = -b$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} * ax = \frac{1}{a} * \frac{(-b)}{1}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

O Zero da Função Afim



Exemplo 3

O zero da função $f(x) = 3x - 1$ é $x = \frac{1}{3}$:

$$3x - 1 = 0 \Rightarrow 3x - 1 - (-1) = 0 - (-1)$$

$$\Rightarrow 3x = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} * 3x = \frac{1}{3} * \frac{1}{1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Ou seja, $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$.

Exercício



Exercício 1

Encontre os zeros das funções afim a seguir:

a) $f(x) = 3x + 2;$

b) $g(x) = -\sqrt{2}x + 1;$

c) $h(x) = \pi x.$

Exercício



Exercício 2


Uma pequena empresa fabrica bonecas e semanalmente arca com um custo fixo de R\$350,00. Se o custo para o material é de R\$4,70 por boneca e seu custo total na semana é uma média de R\$500,00, quantas bonecas essa pequena empresa produz por semana?

Exercício



Exercício 3

Um pequeno avião a jato gasta sete horas a menos do que um avião a hélice para ir de São Paulo até Boa Vista. O avião a jato voa a uma velocidade média de 660 km/h, enquanto o avião a hélice voa em média a 275 km/h. Qual é a distância entre São Paulo e Boa Vista?

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the top-left corner, while a light beige shape occupies the bottom-left corner. The rest of the slide is white. The word 'Inequações' is centered in the white area.

Inequações

Definição



Definição 2

Sejam $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$. Chamamos **inequação** na incógnita x a qualquer uma das sentenças abertas abaixo:

- ▶ $f(x) > g(x)$
- ▶ $f(x) < g(x)$
- ▶ $f(x) \geq g(x)$
- ▶ $f(x) \leq g(x)$

Domínio de Validade e Solução



Definição 3

Chamamos de **domínio de validade** da inequação o conjunto dos valores $x \in D_f \cap D_g$ que satisfazem à inequação dada.

Definição 4

O número x_0 para o qual a inequação é verdadeira é chamado de **solução** da mesma.

Definição 5

O conjunto S de todos os números reais x tais que a inequação é verdadeira é chamado de **conjunto solução** da inequação.

Resolver uma Inequação



- O processo de **resolver uma inequação** consiste em transformá-la em uma equação equivalente cuja solução é óbvia. Operações de transformação de uma equação em uma equação equivalente incluem:
1. **Adicionar o mesmo número** a ambos os lados. Assim, as inequações $a < b$ e $a + c < b + c$ são equivalentes.
 2. **Multiplicar o mesmo número positivo** de ambos os lados. Logo, as inequações $a < b$ e $ac < bc, c > 0$, são equivalentes.
 3. **Multiplicar o mesmo número negativo** de ambos os lados. Logo, as inequações $a < b$ e $ac > bc, c < 0$, são equivalentes.
 4. **Simplificar** expressões em um dos lados de uma equação.

Observação: sinais em desigualdades



Observação: Sejam a, b dois números reais tais que $a < b$.

- Se $c > 0$ então $c * a < c * b$ (mantém os sinais originais: mantém a desigualdade).

Por exemplo, $-3 < 1$ e $2 * (-3) = -6$ gera um número que é menor do que $2 * 1 = 2$.

- Se $c < 0$ então $c * a > c * b$ (troca os sinais originais: inverte a desigualdade).

Por exemplo, $-3 < 1$ e $(-2) * (-3) = 6$ gera um número que é maior do que $(-2) * 1 = -2$.

Exemplo



Exemplo 4

Considere a inequação $2x + 1 > x + 3$. Determine:

- a) 0 é solução da inequação?
- b) $-\sqrt{2}$ é solução?
- c) O conjunto solução.

Exemplo



Exemplo 5

Considere a inequação $x + 1 \geq x + 2$. Determine:

- a) 0 é solução da inequação?
- b) $-\sqrt{2}$ é solução?
- c) O conjunto solução.

Inequações Simultâneas



Definição 6

A dupla desigualdade $f(x) < g(x) < h(x)$ se decompõe em duas inequações simultâneas, isto é, equivale a um sistema de duas equações em x , separadas pelo conectivo e:

$$f(x) < g(x) \text{ (1)} \quad \text{e} \quad g(x) < h(x) \text{ (2)}$$


Indicando com S_1 o conjunto solução de **(1)** e S_2 o conjunto solução de **(2)**, o conjunto solução da dupla desigualdade é $S = S_1 \cap S_2$.

Exemplo



Exemplo 6

Resolver $3x + 2 < -x + 3 \leq x + 4$.

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the top-left corner, while a light gray shape occupies the bottom-left corner. The rest of the slide is white. The title is centered in the white area.

O Sinal de uma Função

Sinal de uma Função



- ▶ Dada uma função $f : A \rightarrow B$, definida por $y = f(x)$, vamos resolver o seguinte problema:

'Para quais valores de x tem-se $f(x) > 0$ e para quais tem-se $f(x) < 0$?'

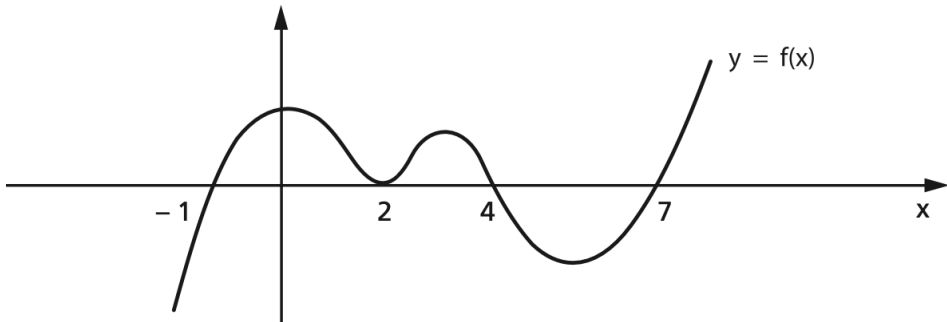
- ▶ Graficamente, $f(x) > 0$ quando o ponto $(x, f(x))$ está acima do eixo x .
- ▶ Analogamente, $f(x) < 0$ quando o ponto $(x, f(x))$ está abaixo do eixo x .

Sinal de uma Função



Exemplo 7

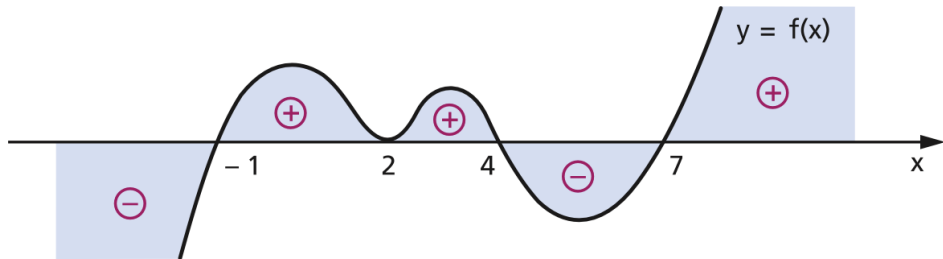
Vamos estudar o sinal da função $y = f(x)$, cujo gráfico está representado abaixo:



Sinal de uma Função



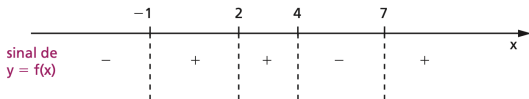
Basta observar os valores de x para os quais o gráfico está acima do eixo x e abaixo do mesmo eixo:



Sinal de uma Função



Costumamos usar uma reta para identificar o sinal da função dada:



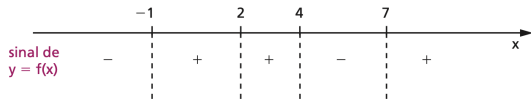
Com isso, concluímos:

- ▶ $f(x) = 0$ onde o gráfico corta o eixo x (os pontos nesse eixo são da forma $(x, 0)$). Assim, $f(x) = 0$ em $x = -1$, $x = 2$, $x = 4$ e $x = 7$.
- ▶ $f(x) > 0$ em $-1 < x < 2$ ou $2 < x < 4$ ou $x > 7$.
- ▶ $f(x) < 0$ em $x < -1$ ou $4 < x < 7$.

Sinal de uma Função



Dado o estudo do sinal de f , responda:



- a) $f(-\pi)$ é negativo?
- b) $f(e)$ é negativo?
- c) $f(100.98)$ é positivo?
- d) $f(2.01)$ é zero?

Sinal da Função Afim



Para determinarmos o sinal da função afim, basta resolver as inequações de 1º grau:

$$ax + b < 0$$

$$ax + b > 0.$$

Sinal da Função Afim: 1º caso



► 1º caso: $a > 0$

$$ax + b > 0$$

$$\Rightarrow ax + b - b > 0 - b$$

$$\Rightarrow ax > -b$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} * \frac{ax}{1} > \frac{1}{a} * \frac{-b}{1}, \quad \left(\frac{1}{a}\right) > 0$$

$$\Rightarrow x > \frac{-b}{a}.$$

$$ax + b < 0$$

$$\Rightarrow ax + b - b < 0 - b$$

$$\Rightarrow ax < -b$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} * \frac{ax}{1} < \frac{1}{a} * \frac{-b}{1}, \quad \left(\frac{1}{a}\right) > 0$$

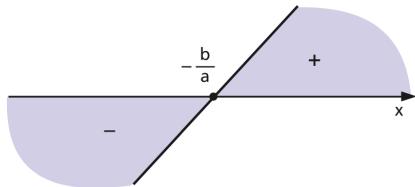
$$\Rightarrow x < \frac{-b}{a}.$$

Sinal da Função Afim: 1º caso



Na reta de estudo do sinal, esboçamos uma reta crescente, identificando o seu zero (**chamado ponto crítico**):

- ▶ $f(x) = 0$ em $x = -\frac{b}{a}$.
- ▶ $f(x) > 0$ em $x > -\frac{b}{a}$.
- ▶ $f(x) < 0$ em $x < -\frac{b}{a}$.



Sinal da Função Afim: 2º caso



► 2º caso: $a < 0$

$$ax + b > 0$$

$$\Rightarrow ax + b - b > 0 - b$$

$$\Rightarrow ax > -b$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} * \frac{ax}{1} < \frac{1}{a} * \frac{-b}{1}, \quad \left(\frac{1}{a}\right) < 0$$

$$\Rightarrow x < \frac{-b}{a}.$$

$$ax + b < 0$$

$$\Rightarrow ax + b - b < 0 - b$$

$$\Rightarrow ax < -b$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} * \frac{ax}{1} > \frac{1}{a} * \frac{-b}{1}, \quad \left(\frac{1}{a}\right) < 0$$

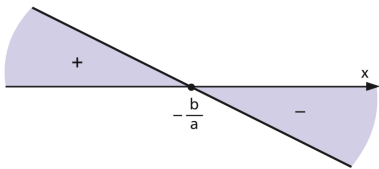
$$\Rightarrow x > \frac{-b}{a}.$$

Sinal da Função Afim: 2º caso



Na reta de estudo do sinal, esboçamos uma reta decrescente, identificando o seu ponto crítico:

- ▶ $f(x) = 0$ em $x = -\frac{b}{a}$.
- ▶ $f(x) > 0$ em $x < -\frac{b}{a}$.
- ▶ $f(x) < 0$ em $x > -\frac{b}{a}$.



Exercícios



Exercício 4

Numa escola é adotado o seguinte critério: a nota da primeira prova é multiplicada por 1, a nota da segunda prova é multiplicada por 2 e a da última prova é multiplicada por 3. Os resultados, após ser adicionados, são divididos por 6. Se a média obtida por esse critério for maior ou igual a 6,5, o aluno é dispensado das atividades de recuperação. Suponha que um aluno teria tirado 6,3 na primeira prova e 4,5 na segunda. Quanto precisará tirar na terceira para ser dispensado da recuperação?

Exercícios



Exercício 5

Uma solução química é mantida entre -30°C e -22°C . Isso corresponde a qual intervalo em graus Fahrenheit? Use a relação entre Celsius e Fahrenheit dada por $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the top-left portion, while a light gray shape occupies the bottom-left portion. The remaining area on the right is white.

Soluções de Alguns Exercícios

Arquivo com as Soluções



Baixe aqui o arquivo com as soluções dos exercícios 2, 3, 5 e 6.