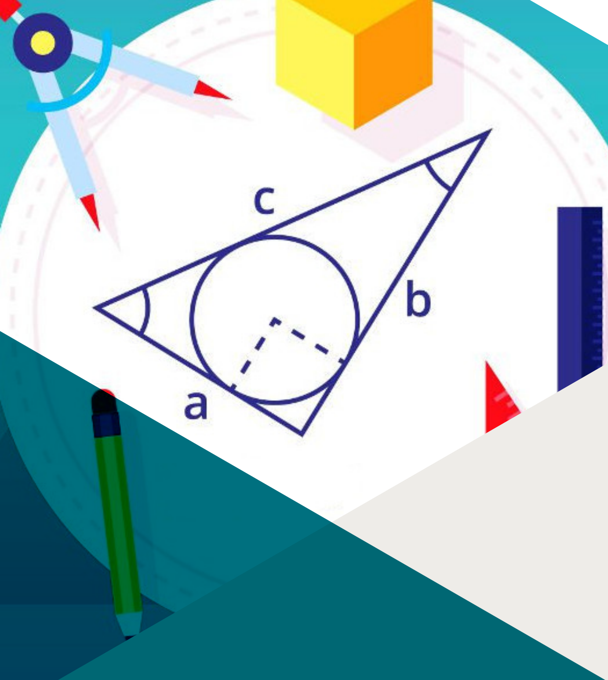


ELEMENTOS DE ARITMÉTICA

Aula 09

Os Irracionais. Os Números Reais.

Karla Lima

Sumário

Os Números Irracionais

Os Conjuntos Numéricos

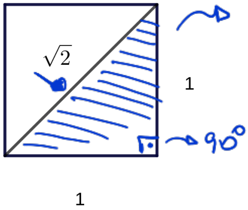
Até agora, fomos introduzindo conjuntos formados através de um conjunto anterior: dos naturais partimos para o inteiros e dos inteiros para os racionais. Ou seja, todo número natural é um número inteiro e todo número inteiro é um número racional:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Os Conjuntos Numéricos

Porém, existem medidas que conhecemos que não podem ser escritas como uma fração entre dois inteiros. Tome por exemplo, o comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1.

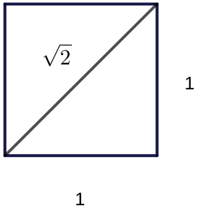
$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{Z}$$



TRIÂNGULO RETÂNGULO

$$d^2 = 1^2 + 1^2$$
$$= 2$$
$$\Rightarrow d = \sqrt{2}$$

Os Números Irracionais



Pelo Teorema de Pitágoras, temos que a medida da diagonal é $\sqrt{2}$, que não pode ser representada por uma fração $\frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$.

Demonstração

$(a.b)^2 = a^2 \cdot b^2$

- Primeiro, vamos mostrar a seguinte proposição:

  Seja $m \in \mathbb{N}$. Se m^2 é par então m também é par.

PELO T.F.A.

$$m = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdots p_n^{r_m}$$

p_i É PRIMO!

LOGO

$$m^2 = \left(p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdots p_n^{r_m}\right)^2 = \left(p_1^{r_1}\right)^2 \left(p_2^{r_2}\right)^2 \cdots \left(p_m^{r_m}\right)^2$$

$$= p_1^{2r_1} p_2^{2r_2} \cdots p_m^{2r_m}$$

Demonstração

$$m^2 = \underbrace{P_1^{2r_1}}\ \underbrace{P_2^{2r_2}} \cdots \underbrace{P_n^{2r_n}} \text{ é par.}$$

Logo, algum $P_i = 2$. Seja, sem perda de generalidade $P_1 = 2$.

Assim,

$$m = 2^{r_1} \cdot P_2^{r_2} \cdots P_n^{r_n}$$

e m é par.

Demonstração

SUPONHA, POR ABSURDO
QUE $\sqrt{2}$ É RACIONAL.
LOGO EXISTEM $p, q \in \mathbb{Z}$,
TAL QUE

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

GERA O
ABSURDO!

E p, q PRIMOS ENTRE
SI $MDC(p,q) = 1$. *

↳ FORMA
IRREDUTÍVEL DA FRAÇÃO

$$p = \sqrt{2}\cdot q \Rightarrow p^2 = (\sqrt{2}\cdot q)^2$$

$$\Rightarrow p^2 = (\sqrt{2})^2 \cdot q^2 = 2 \cdot q^2$$

$$\Rightarrow p^2 \text{ é par} \Rightarrow p \text{ é par}$$

$$\Rightarrow p = 2 \cdot a \Rightarrow p^2 = (2a)^2$$

$$\Rightarrow p^2 = 4a^2.$$

$$* \quad \cancel{4}^{2} a^2 = p^2 = 2 \cdot q^2 \quad (\div 2)$$

$$\Rightarrow q^2 = 2a^2 \Rightarrow q^2 \text{ é par}$$

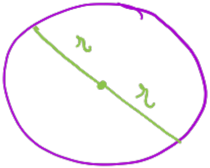
$$\Rightarrow q \text{ é par}$$

⇒ 2 É DIVISOR COMUM ENTRE p e q. ABSURDO!

Os Números Irracionais

- Outro exemplo é número π.
  Ele é obtido ao se tomar a razão entre o perímetro de um círculo de raio r e seu diâmetro $(2 \cdot r)$:

$$\frac{\text{perímetro}}{2r} = \pi.$$



Os Números Irracionais

Não importa o tamanho do raio, a razão dá sempre o mesmo número: π. Esta medida também não pode ser representada por uma fração $\frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{\text{perímetro}}{2r} = \pi \notin \mathbb{Q}.$$

Os Números Irracionais

Definição 1

*Denominamos por **números irracionais** aqueles que não podem ser representados por uma fração* $\frac{a}{b}$*, com* $a, b \in \mathbb{Z}$.

Denotamos este conjunto por $\mathbb{I}$.

Os Números Irracionais

Exemplo 1

São elementos do conjunto dos números irracionais todo número da forma $\sqrt{p}$*, onde p é um número primo:* $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{23}$*, etc.*

Demonstração

- Primeiro, vamos mostrar a seguinte proposição:

  Seja $m \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{N}$ um número primo. Se m^2 é múltiplo de p, então m também é múltiplo de p.

DE FATO, PELO TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA, PODEMOS ESCREVER

$$m = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdots p_m^{n_m},$$

ONDE p_i É UM NÚMERO PRIMO PARA TODO $i = 1, \ldots, m$.

ASSIM,

$$m^2 = p_1^{2n_1} \, p_2^{2n_2} \cdots p_m^{2n_m}.$$

SE p É UM NÚMERO PRIMO QUE DIVIDE m^2, ENTÃO p É ALGUM DOS PRIMOS p_i. LOGO,

$$p = p_i \Rightarrow m = p_1^{n_1} \cdots p_{i-1}^{n_{i-1}} \, p_i^{n_i} \, p_i^{n_{i+1}} \cdots p_m^{n_m}$$

E p TAMBÉM DIVIDE m, SENDO m UM MÚLTIPLO DE p.

Demonstração

Com isso, podemos mostrar que $\sqrt{p}$ é irracional, sempre que p for primo.

Com efeito, suponha, por absurdo, que $\sqrt{p}$ seja racional. Logo, existem $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\sqrt{p} = \frac{a}{b}, \text{ na forma irredutível,}$$

com $\operatorname{mdc}(a,b) = 1$.

Assim:

$$a = \sqrt{p}\, b \Rightarrow a^2 = (\sqrt{p})^2 \cdot b^2 = p \cdot b^2$$

$\Rightarrow$ p divide a^2 $\Rightarrow$ p divide a

$\Rightarrow$ $a = p \cdot q$, para algum $q \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow a^2 = p^2 \cdot q^2 \Rightarrow \frac{1}{p} \cdot p^2 \cdot q^2 = p \cdot b^2 \cdot \frac{1}{p}$$

$\Rightarrow$ $b^2 = p \cdot q^2$ $\Rightarrow$ p divide b^2

$\Rightarrow$ p divide b $\Rightarrow$ p é divisor comum entre a e b e $p > 1$. Absurdo!

Portanto, $\sqrt{p}$ não é racional e, sim, irracional.

Demonstração

Os Números Irracionais

Exemplo 2

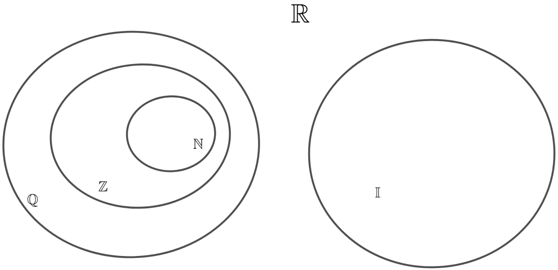
O número e (o número de Euler) também é um número irracional.

Os Números Reais

Definição

Definição 2

Chama-se conjunto dos ***números reais****, denotado por* $\mathbb{R}$*, aquele formado por todos os números racionais e irracionais.*



Operações

Definimos as seguintes operações básicas no conjunto dos números reais:

1. Adição $(+)$;
2. Multiplicação $(\cdot$ ou $\times)$.

Operações

Estas operações possuem as seguintes propriedades:

1. **Comutatividade:** Dados dois números reais a e b, tem-se que
   i) a soma $a + b$ é ainda um número real;
   ii) o produto $a \cdot b$ também é um número real.

Operações

2. **Associatividade:** Dados três números reais a, b e c:
   i) O agrupamento é irrelevante em adições repetidas:
   $$(a+b)+c = a+(b+c);$$
   ii) O agrupamento é irrelevante em multiplicações repetidas:
   $$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Operações

3. **Distributividade:** Dados três números reais a, b e c, a multiplicação é distributiva em relação à adição:
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Operações

4. **Leis de identidade:** Dado um número real a:
   i) Existe um único elemento 0 com a propriedade: $0 + a = a + 0 = a$;
   i) Existe um único elemento 1 com a propriedade: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Operações

5. **Leis de inverso:** Dado um número real a:
   i) Existe um número $-a$, tal que
   $$a + (-a) = (-a) + a = 0;$$
   ii) Se $a \neq 0$, então existe um número a^{-1}, tal que
   $$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

Exemplo

Exemplo 3

Usando as leis associativa e comutativa, simplifique $(3 + x) + 5$.

Exemplo

Exemplo 3

Usando as leis associativa e comutativa, simplifique $(3 + x) + 5$.

Com efeito, usando a lei comutativa, obtemos

$$(3 + x) + 5 = (x + 3) + 5.$$

Usando a lei associativa, concluímos que

$$\begin{aligned}(3 + x) + 5 &= (x + 3) + 5 \\ &= x + (3 + 5) \\ &= x + 8.\end{aligned}$$

Exemplo

Exemplo 4

Usando a lei de distributividade, mostre que $(a+b)\cdot(c+d) = a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d$.

Exemplo

Exemplo 4

Usando a lei de distributividade, mostre que $(a+b)\cdot(c+d) = a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d$.

De fato, aplicando a lei distributiva, obtemos

$$(a+b)\cdot(c+d) = (a+b)\cdot c + (a+b)\cdot d.$$

Aplicando novamente em cada parcela da soma à direita, concluímos que

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot(c+d) &= (a+b)\cdot c + (a+b)\cdot d \\ &= a\cdot c + b\cdot c + a\cdot d + b\cdot d \\ &= a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d,\end{aligned}$$

e a última igualdade é obtida ao se aplicar a lei da comutatividade.

Outras Operações

Vimos que dado um número real b, existe um número $-b$, tal que

$$a + (-b) = (-b) + a = 0.$$

Devido à esta propriedade, podemos definir em $\mathbb{R}$ a operação de **subtração**, estabelecendo que

$$a - b = a + (-b), \quad \text{para todo } a, b \in \mathbb{R}.$$

Outras Operações

Também vimos que se $b \neq 0$, então existe um número b^{-1}, tal que

$$b \cdot b^{-1} = b^{-1} \cdot b = 1.$$

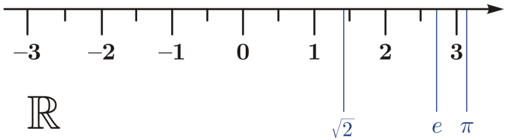
Assim, podemos definir em $\mathbb{R}$ a operação de **divisão**, estabelecendo que

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}, \quad \text{para todo } a, b \in \mathbb{R}, \text{ com } b \neq 0.$$

Relação de Ordem no Conjunto dos Números Reais

Definição

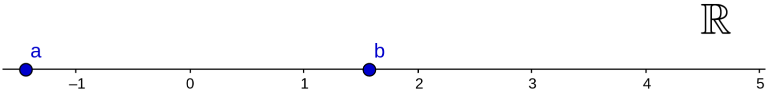
O conjunto dos números reais pode ser representado numa reta, chamada de **reta real**, onde os pontos da reta representam os números reais x cuja medida da origem 0 até este ponto mede exatamente x (livre de sinal). Se x é positivo, coloca-se o número à direita da origem; se é negativo, coloca-se à esquerda.



Definição

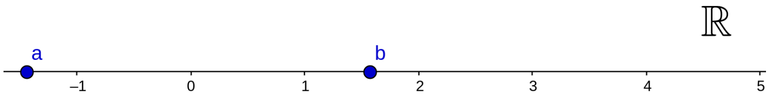
Sobre as relação de ordem entre os números reais, temos:

1. Um número real a é **menor que** um número real b ($a < b$), se a estiver à esquerda de b sobre a reta real.



$$a < b$$

Definição



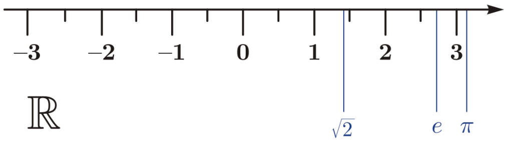
$$a < b$$

1. É equivalente a dizer que a diferença $b - a$ é positiva ($b - a > 0$).
2. Um número real a é **menor que ou igual a** um número real b ($a \leq b$), se $a < b$ ou se $a = b$.

Exemplo

Exemplo 5

Olhando a reta real abaixo, vemos que



i) $-2 < \sqrt{2}$

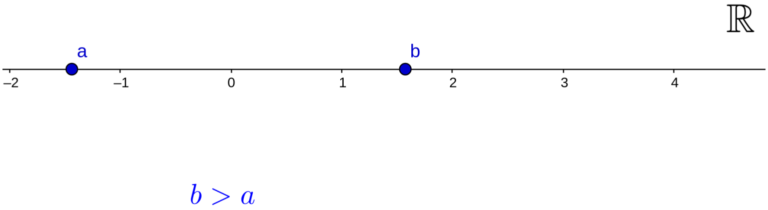
ii) $1 \leq 2$

iii) $e < \pi$

iv) $-1 \leq -1$

Ordem

- Um número b é **maior que** a ($b > a$), se b estiver à direita de a sobre a reta real. Então $b > a$ significa o mesmo que $a < b$.



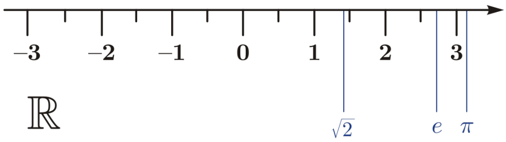
Ordem

- Um número a é **maior que ou igual a** um número b ($a \geq b$), se $a > b$ ou se $a = b$.

Ordem

Exemplo 6

Olhando novamente a reta real



vemos que:

i) $\sqrt{2} > -2$

ii) $2 \geq 1$

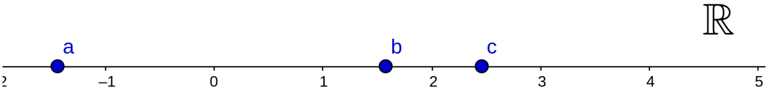
iii) $\pi > e$

iv) $-1 \geq -1$

Propriedades

A relação de ordem dada acima, possui as seguintes propriedades

- **Transitividade:** Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$.



$$a < b \text{ e } b < c$$

Exemplo

Exemplo 7

Temos que $-2 < \sqrt{2}$ *e que* $\sqrt{2} < e$. *Então* $-2 < e$.

Propriedades

- **Inversos aditivos e desigualdades:** Se $a < b$, então $-a > -b$.
- **Multiplicação de uma desigualdade:** Suponha $a < b$.
  1. Se $c > 0$, então $ac < bc$ **(a desigualdade é mantida)**.
  2. Se $c < 0$, então $ac > bc$ **(a desigualdade é invertida)**.

Exemplo

Exemplo 8

Temos que $a = -2 < -1 = b$. *Se:*

i) $c = 3$, *temos que* $ac = (-2)(3) = -6$ *e que* $(-1)(3) = -3$. *Com isso, temos que* $ac = 6 < 3 = bc$.

ii) $c = -3$, *temos que* $ac = (-2)(-3) = 6$ *e que* $(-1)(-3) = 3$. *Com isso, temos que* $ac = 6 > 3 = bc$.

Propriedades

- **Inversos multiplicativos e desigualdades:** Suponhamos $a < b$.
  1. Se a e b forem ambos positivos ou ambos negativos, então $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

Propriedades

- **Inversos multiplicativos e desigualdades:** Suponhamos $a < b$.
    1. Se a e b forem ambos positivos ou ambos negativos, então $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$. Isto decorre do fato de que

    $$a, b > 0 \Rightarrow ab > 0 \quad \text{e} \quad a, b < 0 \Rightarrow ab > 0.$$

    Portanto, $\frac{1}{ab} > 0$ e, assim,

    $$\begin{aligned} a < b \Rightarrow a \cdot \frac{1}{ab} &< b \cdot \frac{1}{ab} \\ \Rightarrow \frac{1}{b} &< \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

Propriedades

2. Se $a < 0 < b$, então $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Propriedades

2. Se $a < 0 < b$, então $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. Isto decorre do fato de que

$$a < 0 < b \Rightarrow ab < 0.$$

Portanto, $\frac{1}{ab} < 0$ e, assim,

$$\begin{aligned} a < b &\Rightarrow a \cdot \frac{1}{ab} > b \cdot \frac{1}{ab} \\ &\Rightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{a}. \end{aligned}$$