Universidade Federal da Grande Dourados

Modelagem Matemática no Ensino

Aula 01

Profa. Karla Katerine Barboza de Lima

1 Introdução [Bas02]

A **modelagem matemática** consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real. No ensino, o gosto dos alunos pela matemática se desenvolve com mais facilidade quando é movido por interesses e estímulos externos à Matemática, vindos do 'mundo real'. Nesse sentido, a matemática aplicada é o caminho.

A ciência como conhecimento acumulado, depende de codificações e símbolos associados às representações orais ou visuais de **comunicações** (ação comum para entender, explicar e manejar a realidade), dando origem à linguagem e representação gráfica.

2 Números Naturais

Caracterização de sucessor: Intuitivamente, quando a e b pertencem aos números naturais, dizer que b é o **sucessor** de a significa que b vem logo depois de a, não havendo outros números naturais entre eles.

Regras (Axiomas de Peano):

1. Todo número natural tem um único sucessor.

2. Números naturais diferentes têm sucessores diferentes.

3. Existe um único número natural, chamado **um** e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro.

   Obs: nesse caso, o número 0 não é considerado um número natural. No caso em que isso é considerado, tal definição é a mesma, apenas trocando o número 1 pelo número 0.

4. **Axioma da Indução:** Seja X um conjunto de números naturais ($X \subset \mathbb{N}$). Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.

Representamos o sucessor de um número a como sendo $a + 1$.

Definição 1 *A **soma** $n+p$ é o número natural que se obtém a partir de n aplicando-se p vezes seguidas a operação de tomar o sucessor.*

Algumas Propriedades da Adição de Números Naturais

- **Fechamento:** Se m e n são números naturais, então $m+n$ também é um número natural.

- **Associatividade:** $m + (n + p) = (m + n) + p$.

- **Comutatividade:** $m + n = n + m$.

Definição 2 *A **multiplicação** $n * p$ é o número natural que se obtém a partir da soma de p parcelas iguais de n.*

Algumas Propriedades da Multiplicação de Números Naturais

- **Fechamento:** Se m e n são números naturais, então $m*n$ também é um número natural.
- **Associatividade:** $m*(n*p) = (m*n)+p$.
- **Comutatividade:** $m*n = n*m$.
- **Distributividade:** $m*(n+p) = m*n + m*p$.

2.1 Resolvendo Problemas com Números Naturais [SM08]

2.1.1 Adivinhar 3 dias consecutivos

Pede-se que alguém escolha três dias consecutivos de um calendário.

Dom	Seg	Ter	Qua	Qui	Sex	Sab
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30			

Em seguida, pede-se que a pessoa diga a soma desses números. Sabendo a soma, podemos revelar quais foram os números escolhidos.

Solução:

Precisamos de 3 números consecutivos. Se a é o primeiro deles, o segundo é o seu sucessor $a+1$. Por fim, o terceiro é o sucessor de $a+1$, que é $(a+1)+1$.

Suponha que a escolha dos dias foram: 13, 14 e 15.

Dom	Seg	Ter	Qua	Qui	Sex	Sab
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30			

Assim, a soma dada será

$$13 + 14 + 15 = 42.$$

Usando a notação anterior, temos que

$$
\begin{aligned}
& a+(a+1)+[(a+1)+1]=42 \\
\Rightarrow\ & (a+a+a)+(1+2)=42 \\
\Rightarrow\ & 3*a+3*1=42 \\
\Rightarrow\ & 3(a+1)=42 \\
\Rightarrow\ & a+1=\frac{42}{3} \\
\Rightarrow\ & a+1=14.
\end{aligned}
$$

Ou seja, o $a+1=14$, então seu antecessor é $a=13$ e o seu sucessor é $(a+1)+1=15$.

Modelando o Problema

Veja que a soma de 3 números consecutivos sempre é divisível por 3:

$$a+(a+1)+(a+2)=(a+a+a)+(1+1+1)=3*a+3*1=3(a+1).$$

Assim, ao dividir a soma por 3, obtemos o segundo número da nossa lista (a+1), sendo fácil encontrar os outros 2.

2.1.2 Adivinhar Dias da Semana

Pede-se que alguém escolha um dia da semana e três números consecutivos dessa coluna em um calendário. Pergunte qual a soma S desses números, para descobrir cada um deles.

Dom	Seg	Ter	Qua	Qui	Sex	Sab
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30			

Modelando o Problema

Se o primeiro número é a, o seguinte deve satisfazer $a+7$; o último número deve satisfazer a mesma relação, agora a partir do número $a+7$. Assim,

$$a+(a+7)+[(a+7)+7]=(a+a+a)+(7+7+7)=3*a+3*7=3(a+7).$$

Como $a+7$ é um número natural, $S=3(a+7)$ é um múltiplo de 3, de onde concluímos que

$$S=3(a+7)\Rightarrow\frac{S}{3}=a+7.$$

Com isso, descobrimos o número central $a + 7$, de onde podemos encontrar os outros dois números.

3 Números Inteiros

Obtemos o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$, adicionando ao conjunto dos números naturais elementos que satisfaçam as propriedades da soma e multiplicação de números naturais, além de satisfazer às seguintes propriedades para a soma:

- Existe um elemento em $\mathbb{Z}$ chamado **zero**, representado pelo símbolo 0, tal que

$$a + 0 = a, \text{ para todo } a \in \mathbb{Z}.$$

- Para todo $a \in \mathbb{Z}$, existe um elemento simétrico a ele, também inteiro e denotado por $-a$, tal que

$$a + (-a) = 0.$$

  A operação $a - b = a + (-b)$ é denominada **subtração**.

3.1 Resolvendo Problemas com Números Inteiros

3.1.1 Descobrir a soma de 5 números

No calendário abaixo, escolha um dia de cada semana e faça a soma desses números. Diga o valor da soma e quantos domingos escolheu, quantas segundas, quantas terças e assim por diante.

Dom	Seg	Ter	Qua	Qui	Sex	Sab
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30			

Com os números escolhidos acima, a soma dá $2 + 11 + 14 + 20 + 28 = 75$.

Fixe a quarta-feira como o centro da semana. Ao escolher todos os números na quarta-feira, sua soma é $2 + 9 + 16 + 23 + 30 = 80$.

1. Na soma acima, acertamos o dia escolhido da primeira semana, então essa parcela se mantém.

2. Na segunda semana, o dia escolhido foi a sexta-feira. Logo, na parcela 9 ficam faltando 2 unidades, pois a sexta-feira é dois dias após a quarta-feira.

3. Na terceira semana, o dia escolhido foi a segunda-feira. Logo, na parcela 16 ficam sobrando 2 unidades, pois a segunda-feira é dois dias antes da quarta-feira.

4. Na quarta semana, o dia escolhido foi a domingo. Logo, na parcela 23 ficam sobrando 3 unidades, pois o domingo é três dias antes da quarta-feira.

5. Por fim, na quinta semana, o dia escolhido foi a segunda-feira. Logo, na parcela 30 ficam sobrando 2 unidades, pois a segunda-feira é dois dias antes da quarta-feira.

Então da nossa soma $2 + 9 + 16 + 23 + 30 = 80$, devemos fazer as seguintes modificações, de acordo com os itens acima:

$$(2 + 0) + (9 + 2) + (16 - 2) + (23 - 3) + (30 - 2) = 80 + 0 + 2 - 2 - 3 - 2 = 75.$$

Modelando o Problema

Use a soma da coluna da quarta-feira, que resulta em 80.

-3	-2	-1	0	1	2	3
Dom	**Seg**	**Ter**	**Qua**	**Qui**	**Sex**	**Sab**
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30			

- Para cada domingo escolhido, subtraia 3.
- Para cada segunda escolhida, subtraia 2.
- Para cada terça escolhida, subtraia 1.
- Para cada quarta escolhida, não faça nada.
- Para cada quinta escolhida, adicione 1.
- Para cada sexta escolhida, adicione 2.
- Para cada sábado escolhido, adicione 3.

4 Indução Matemática [Ger04]

Imagine que você está subindo em uma escada sem fim. Como você pode saber se será capaz de alcançar um degrau arbitrariamente alto? Suponha que você faça as seguintes afirmações sobre as suas habilidades de subir escadas:

- Você pode alcançar o primeiro degrau.
- Se você alcançar um degrau, você pode sempre passar ao degrau seguinte. (Note que esta asserção é uma implicação.)

O processo se dá da seguinte forma:

1. Tanto a sentença 1 como a implicação na sentença 2 são verdadeiras.
2. Pela sentença 1 você pode chegar ao primeiro degrau e pela sentença 2 você pode chegar ao segundo.
3. Novamente pela sentença 2, você pode chegar ao terceiro degrau;
4. Novamente pela sentença 2, você pode chegar ao quarto degrau;
5. Sucessivamente, você vai alcançando cada um dos degraus da escada, um de cada vez, subindo tão alto quanto você queira.

Suponha que os degraus da escada são numerados com os números inteiros positivos: 1,2,3,...

Considere uma propriedade específica que um número pode ter. Ao invés de "alcançarmos um degrau arbitrário" podemos mencionar que um inteiro positivo arbitrário tem essa propriedade. Usaremos a notação simplificada $P(n)$ para denotar que o inteiro positivo n tem a propriedade P.

Como podemos usar a técnica de subir escadas para provar que, para todos inteiros positivos n, tem-se $P(n)$?

Precisamos demonstrar duas afirmações:

1. $P(1)$ (A propriedade vale para $n = 1$.)
2. Para qualquer inteiro positivo k,

$$P(k) \rightarrow P(k+1)$$

(Se um número tem a propriedade P, então seu sucessor também a tem.)

O Princípio da Indução Matemática

Definição 3 *Dada uma propriedade P de números inteiros positivos, se*

1. *$P(1)$ é verdadeira;*
2. *Para qualquer inteiro positivo k, tem-se*

$$P(k) \text{ verdadeira } \rightarrow P(k+1) \text{ verdadeira },$$

então $P(n)$ é verdadeira para todo número inteiro positivo n.

Obs: Sempre que desejamos demonstrar que alguma propriedade é válida para todo inteiro positivo n, uma tentativa é o uso da indução matemática como técnica de demonstração.

4.1 Descobrindo um número ímpar escolhido

Pede-se que alguém escolha um número ímpar e some todos os números ímpares de 1 até o escolhido.

Suponha que o número escolhido seja 13. Então, tem-se

$$1+3+5+7+9+11+13=49.$$

Com isso, toma-se a raiz quadrada de 49, que é 7, e obtemos o número escolhido ao dobrar o valor da raiz e subtrair 1:

$$2*7-1=13.$$

Modelando o Problema

O sucessor de todo número ímpar é um número par. Então, se x é ímpar, existe algum n natural tal que $2n$ é o sucessor de x. Assim,

$$x+1=2n \Rightarrow x+1-1=2n-1 \Rightarrow x=2n-1.$$

Podemos mostrar, por indução, que dado um número ímpar $2n-1$ a soma de todos os ímpares menores que o mesmo resulta em n^2:

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2. \tag{1}$$

Logo, ao obter o resultado da soma $1+3+5+\cdots+(2n-1)$, basta calcular a raiz de soma

$$\sqrt{n^2}=n \quad \text{(pois } n \text{ é positivo)},$$

obter o número n e substituir em $x=2n-1$.

4.2 Demonstração da igualdade (1)

Devemos verificar os passos a seguir:

1. $P(1)$ é verdadeira;

2. Para qualquer inteiro positivo k, tem-se

$$P(k) \text{ verdadeira } \rightarrow P(k+1) \text{ verdadeira },$$

De fato, se $n=1$, então temos apenas um número ímpar e sua soma é o próprio número 1. Como $1^1=1$, temos

$$1=1^2,$$

e a propriedade é verdadeira. Portanto, a condição 1 foi verificada.

Além disso, suponha que para algum natural k a propriedade seja válida. Então a igualdade abaixo é verdadeira:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2. \tag{2}$$

Para o item 2, devemos verificar se a propriedade também é válida para o sucessor de k, o número $k+1$. Devemos somar todos ímpares até $2(k+1)-1 = 2k+1$ e verificar se o resultado final é igual à $(k+1)^2$.

Com efeito, pela igualdade (2)

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) + (2k+1) &= [1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1)] + 2k + 1 \\ &= k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2, \end{aligned}$$

de onde segue que o item 2 também se verifica.

Pelo Princípio de Indução Infinita, a igualdade

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

é verdadeira para todo natural n.

5 Exercícios

Exercício 1 *No problema* 3.1.1*, o modelo do mesmo foi feito através da soma dos* 5 *números da quarta-feira. Pense e discuta a possibilidade de escolher os outros dias da semana e como o problema desse ser modelado através de cada um deles.*

Exercício 2 *Dado o calendário dado no material, modele o problema de descobrir* 3 *números dados em sequência na diagonal.*

Referências

[Bas02] R.C. Bassanezi. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. Contexto, 2002. ISBN: 9788572442077.

[Ger04] J.L. Gersting. *Fundamentos matemáticos para a ciência da computação: um tratamento moderno de matemática discreta*. Livros Técnicos e Científicos, 2004. ISBN: 9788521614227.

[SM08] J. C. V. Sampaio e P. L. A. Malagutti. *Mágicas, Matemática e Outros Mistérios*. Edufscar, 2008. ISBN: 9788576001256.