Extremos absolutos em conjuntos $\underbrace{\text{fechados e limitados}}_{\text{possuem fronteira}}$

Ex: Considerando a produção de feijão (kg/ha) como função da adição de nitrogênio x (kg/ha) e da lâmina de água y (mm):

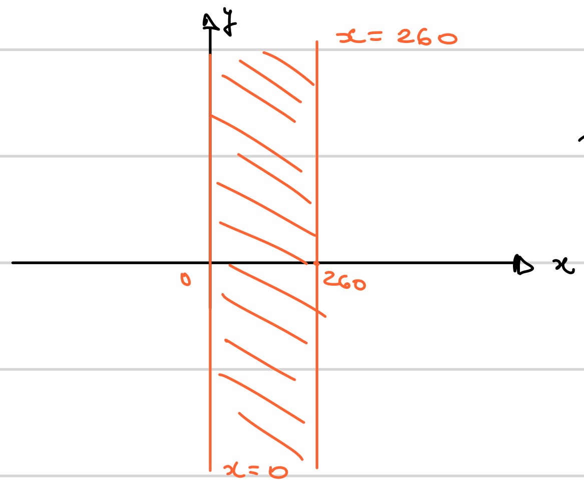
$$P(x,y) = 759.29 + 12.771x + 7.96y + 0.0152xy - 0.0913x^2 - 0.00854y^2,$$

cujo domínio é dado por

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 260,\ 105 \leq y \leq 621\},$$

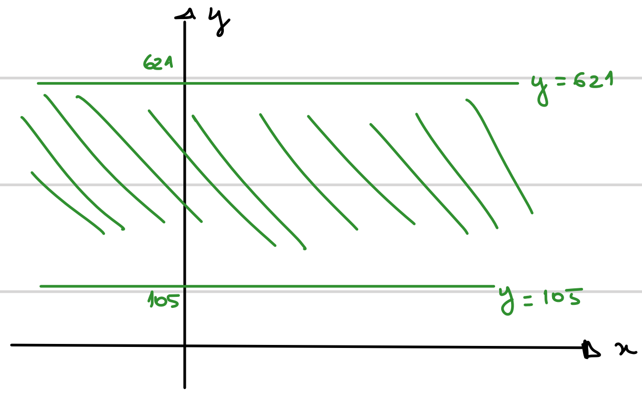
encontre os pontos críticos dessa função e classifique-os, utilizando o teste da 2ª derivada.

Solução: O domínio é o conjunto do $\mathbb{R}^2$ tal que a coordenada x é limitada por 0 e 260, podendo x ser tomado nesses valores.

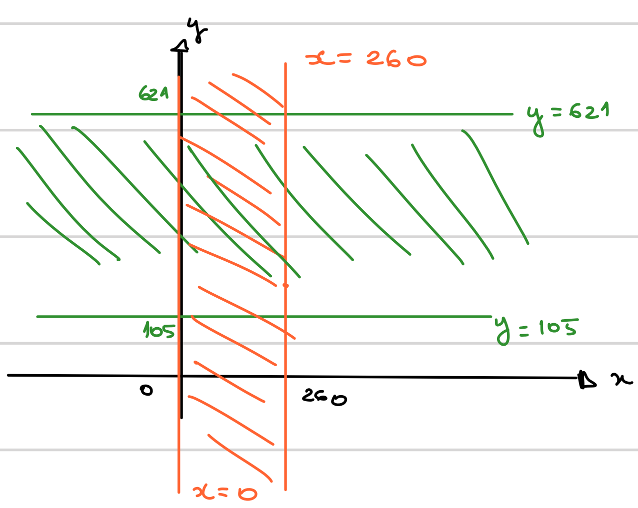


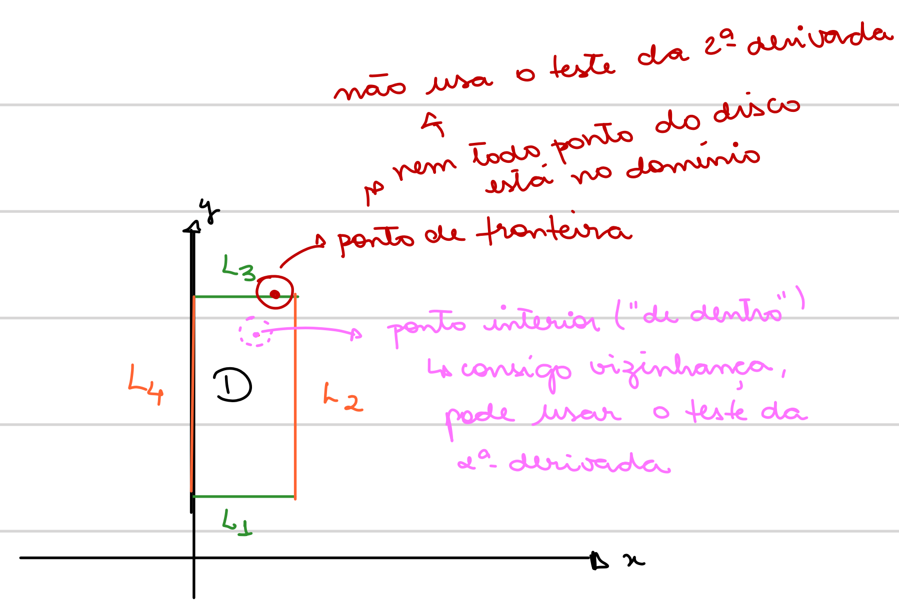
Logo, os pontos de D devem estar na faixa laranja.

Por outro lado, os valores de y estão entre 105 e 621, incluindo esses valores:



Assim, os pontos de D também devem estar na faixa verde.





Então D é a região limitada pelo retângulo acima, determinado pelos 4 lados da seguinte forma:

$L_1 = \{(x, 105),\ 0 \leq x \leq 260\}$ $\qquad$ $L_3 = \{(x, 621),\ 0 \leq x \leq 260\}$

$L_2 = \{(260, y),\ 105 \leq y \leq 621\}$ $\qquad$ $L_4 = \{(0, y),\ 105 \leq y \leq 621\}$.

Usamos o teste da 2ª derivada nos pontos do interior do retângulo D. Para isso, calculamos seus pontos críticos:

$$\begin{cases} P_x = 12.771 + 0.0152y - 0.1826x = 0 \\ P_y = 7.96 + 0.0152x - 0.01708 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.1826x - 0.0152y = 12.771 \\ -0.0152x + 0.01708y = 7.96 \end{cases}$$

do qual se obtém $y = 570.55$ e $x = 117.43$. O ponto $(117.43, 570.55)$ pertence ao domínio D, logo é um ponto crítico para P.

Calculando as segundas derivadas, temos

$P_{xx} = -0.1826$ $\qquad$ $P_{xy} = 0.0152$

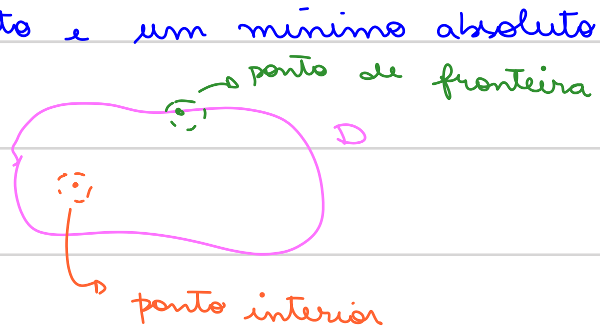
$P_{yx} = 0.0152$ $\qquad$ $P_{yy} = -0.01708$

e, portanto,

$$D(117.43, 570.55) = \begin{vmatrix} -0.1826 & 0.0152 \\ 0.0152 & -0.01708 \end{vmatrix} = 0.00288 > 0.$$

Como $P_{xx}(117.43, 570.55) < 0$, segue que $P(117.43, 570.55)$ é um valor de máximo local. Isso significa que, para uma quantidade de 117.43 (kg/ha) de nitrogênio e uma quantidade de 550 mm de lâmina de água, a produção de feijão será máxima, de $P(117.43, 570.55) = 3779.9$ (kg/ha).

Teorema: Se f é uma função contínua, de duas ou mais variáveis, em um conjunto fechado e limitado, então f possui um máximo absoluto e um mínimo absoluto em D.



Método para encontrar extremos absolutos:

Passo 1: Encontre os pontos críticos de f que estão no interior de D.

Passo 2: Encontre todos os pontos críticos de fronteira.

Passo 3: Calcule $f(x,y)$ nos pontos obtidos nos passos precedentes. O maior desses valores é o máximo absoluto e o menor o mínimo absoluto.

Ex: Vamos analisar o comportamento de $P(x,y)$ na fronteira $L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$, a fim de estabelecer pontos de máximo e mínimo sobre esta e compare-os com o ponto de máximo local $P(117.43, 570.55)$.

Teremos que separar em 4 casos, um para cada aresta.

a) $(x,y) \in L_4$

Os pontos são da forma $(0,y)$, com $y \in [105, 621]$. Assim,

$P(0,y) = 759.29 + 7.96y - 0.00854y^2 \Rightarrow P'(y) = 7.96 - 0.01708y$.

Seu ponto crítico é dado por $P'(y) = 0$, que nos dá $y = 466.04 \in [105, 621]$.

Então, neste segmento, devemos calcular $P(0, 466.04)$ e nos extremos $P(0,105)$ e $P(0,621)$. Tem-se

$P(0, 466.04) = 2614.1$

$P(0,105) = 1500.9$

$P(0,621) = 2409.1$

b) $(x,y) \in L_2$

Os pontos são da forma $(260, y)$, com $y \in [105, 621]$. Assim,

$P(260,y) = -2092.1 + 11.912y - 0.00854y^2 \Rightarrow P'(y) = 11.912 - 0.01708y$,

o que nos dá o ponto crítico $y = 697.42 \notin [105, 621]$. Logo, só contamos com os valores extremos:

$P(260,105) = -935.49$

$P(260,621) = 2011.9$

c) $(x,y) \in L_3$

Os pontos são da forma $(x, 621)$, com $x \in [0, 260]$. Assim,

$P(x,621) = 2409.07 + 22.21x - 0.0913x^2 \Rightarrow P'(x) = 22.21 - 0.1826x$

que nos dá o ponto crítico $x = 121.63 \in [0,260]$.

Calculando no ponto crítico e nos extremos:

$P(121.63, 621) = 3759.79$

$P(0,621) = 2409.1$

$P(260,621) = 2011.9$

d) $(x,y) \in L_1$

Os pontos são da forma $(x, 105)$, com $x \in [0,260]$. Assim,

$P(x,105) = 1500.936 + 14.367x - 0.0913x^2 \Rightarrow P'(x) = 14.367 - 0.1826x$,

que nos dá o ponto crítico $x = 78.68 \in [0,260]$.

Calculando no ponto crítico e nos extremos:

$P(78.68, 105) = 2066.13$

$P(0,105) = 1500.9$

$P(260,105) = -935.49$

Portanto, devemos procurar máximos e mínimos absolutos para P dentre os valores calculados:

$P(78.68, 105) = 2066.13$ (kg/ha)	$P(121.63, 621) = 3759.79$ (kg/ha)
$P(0,105) = 1500.9$ (kg/ha)	$P(0,621) = 2409.1$ (kg/ha)
menor valor ← $P(260,105) = -935.49$ (kg/ha)	$P(260,621) = 2011.9$ (kg/ha)
$P(0, 466.04) = 2614.1$ (kg/ha)	$P(117.43, 570.55) = 3779.9$ (kg/ha) ← maior valor

Concluímos, assim, que neste domínio D, a produção de feijão será máxima para uma quantidade de 117.43 (kg/ha) de nitrogênio e uma quantidade de 570.55 mm de lâmina de água; será mínima (e com perda) para uma quantidade de 260 (kg/ha) de nitrogênio e uma quantidade de 105 mm de lâmina de água.

Exercício: Considerando a função gasto com combustível $f(x,y) = xy$, cujo domínio é dado por $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 50 \text{ e } 0 \leq y \leq 60\}$, encontre os pontos em que há o gasto máximo e mínimo, respectivamente.

Exercício: Encontre os valores de máximo e mínimo absolutos da função $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x$ na região delimitada pelo triângulo de vértices $(2,0)$, $(0,2)$ e $(0,0)$.