Integrais de Linha

Karla Lima

12 de Maio de 2019

UFGD

Campos Conservativos

Definição

Um campo vetorial F é chamado campo vetorial **conservativo** se ele for o gradiente de alguma função escalar, ou seja, se existir uma função f tal que

$$F = \nabla f.$$

Nessa situação, f é denominada **função potencial** de F.

Exemplos

- O campo $\overrightarrow{F} = (2x, -1)$ é um campo conservativo.

Para demonstrar essa afirmação, precisamos encontrar $f(x, y)$ tal que

$$(f_x(x, y), f_y(x, y)) = \nabla f(x, y) = \overrightarrow{F}(x, y).$$

Exemplos

- O campo $\overrightarrow{F} = (2x, -1)$ é um campo conservativo.

Para demonstrar essa afirmação, precisamos encontrar $f(x, y)$ tal que

$$(f_x(x, y), f_y(x, y)) = \nabla f(x, y) = \overrightarrow{F}(x, y).$$

Ou seja, resolver o sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 2x \\ f_y(x, y) = -1 \end{cases}$$

Exemplos

- O campo $\overrightarrow{F} = (2x, -1)$ é um campo conservativo.

Para demonstrar essa afirmação, precisamos encontrar $f(x, y)$ tal que

$$(f_x(x, y), f_y(x, y)) = \nabla f(x, y) = \overrightarrow{F}(x, y).$$

Ou seja, resolver o sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 2x \\ f_y(x, y) = -1 \end{cases}$$

- Lembrete: se $F' = f$ então $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + c$, onde c é uma constante, com relação a x.

Exemplo

1) Escolhemos uma das igualdades para resolver uma integral indefinida.

$$\int f_x(x,y)\,dx = \int 2x\,dx \Rightarrow f(x,y) = x^2 + c(y)$$

ou

$$\int f_y(x,y)\,dy = \int (-1)\,dy \Rightarrow f(x,y) = c(x) - y.$$

Exemplo

2) Resolvida uma das igualdades, derivamos a função f encontrada no item anterior, com relação à variável restante. Por exemplo, escolhendo a 1ª, fazemos

$$f(x,y) = x^2 + c(y) \Rightarrow f_y(x,y) = c'(y)$$

e usamos a segunda igualdade:

$$f_y(x,y) = c'(y) = -1 \Rightarrow \int c'(y)dy = \int -1\,dy \Rightarrow c(y) = -y+k,$$

onde k é uma constante real. Neste último passo, como queremos apenas uma função potencial, tomamos $k = 0$.

Exemplo

Assim, $f(x, y) = x^2 - y$ é uma função potencial de F e, portanto, o campo é conservativo.

- Caso não seja possível resolver o sistema, o campo F não será conservativo.

Trabalho 1

Determine se F é um campo conservativo ou não. Em caso positivo, encontre uma função f tal que $F = \nabla f$.

a) $F(x, y) = (2x - 3y, -3x + 4y - 8)$

b) $F(x, y) = (e^x \cos y, e^x \text{sen} y)$

c) $F(x, y) = (ye^x + \text{sen} y, e^x + x \cos y)$