

# Informações

Prof<sup>a</sup> Karla Lima

FACET: sala 15

e-mail: [karlalima@ufgd.edu.br](mailto:karlalima@ufgd.edu.br)

site: <http://karlalima.github.io>

Atendimento às quartas: 7:20 às 9:00 e 15:30 às 17:00. (Fora deste horário mandar e-mail para agendar)

# Funções de Várias Variáveis

Nas disciplinas de Cálculo anteriores trabalhamos com funções que associavam um número real à outro número real:

$$\begin{array}{ccc} f : D \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) \end{array}$$

# Funções de Várias Variáveis

Neste curso, começaremos estudando funções que associam um vetor a um número real:

# Funções de Várias Variáveis

Neste curso, começaremos estudando funções que associam um vetor a um número real:

$$\begin{array}{ccc} f : D \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longrightarrow & f(x, y) \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{ccc} f : D \subseteq \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longrightarrow & f(x, y, z) \end{array}$$

# Funções de Várias Variáveis

Neste curso, começaremos estudando funções que associam um vetor a um número real:

$$\begin{array}{ccc} f : D \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longrightarrow & f(x, y) \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{ccc} f : D \subseteq \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longrightarrow & f(x, y, z) \end{array}$$

Exemplos:

- 1 A função que dá a área de um retângulo depende de duas variáveis: comprimento ( $x$ ) e largura ( $y$ );

# Funções de Várias Variáveis

Neste curso, começaremos estudando funções que associam um vetor a um número real:

$$\begin{array}{ccc} f : D \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longrightarrow & f(x, y) \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{ccc} f : D \subseteq \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longrightarrow & f(x, y, z) \end{array}$$

Exemplos:

- 1 A função que dá a área de um retângulo depende de duas variáveis: comprimento ( $x$ ) e largura ( $y$ );
- 2 A temperatura em um determinado ponto da terra depende da latitude ( $x$ ), da longitude ( $y$ ) e da altitude ( $z$ ).

# Funções de 2 Variáveis

$$\begin{array}{ccc} f : D \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longrightarrow & f(x, y) \end{array}$$

# Funções de 2 Variáveis

$$\begin{array}{ccc} f : D \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longrightarrow & f(x, y) \end{array}$$

- O conjunto  $D$  é chamado de domínio da  $f$ .



# Funções de 2 Variáveis

$$\begin{array}{ccc} f : D \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longrightarrow & f(x, y) \end{array}$$

- O conjunto  $D$  é chamado de domínio da  $f$ .  
Quando não for mencionado explicitamente, subentendemos que o domínio da  $f$  é o maior subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  para o qual a regra definida por  $f$  vale.

# Funções de 2 Variáveis

$$\begin{array}{ccc} f : D \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longrightarrow & f(x, y) \end{array}$$

- O conjunto  $D$  é chamado de domínio da  $f$ .  
Quando não for mencionado explicitamente, subentendemos que o domínio da  $f$  é o maior subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  para o qual a regra definida por  $f$  vale.
- A imagem da  $f$  é o conjunto  $\{f(x, y) / (x, y) \in D\} \subset \mathbb{R}$ .

# Funções de 2 Variáveis

$$\begin{array}{ccc} f : D \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longrightarrow & f(x, y) \end{array}$$

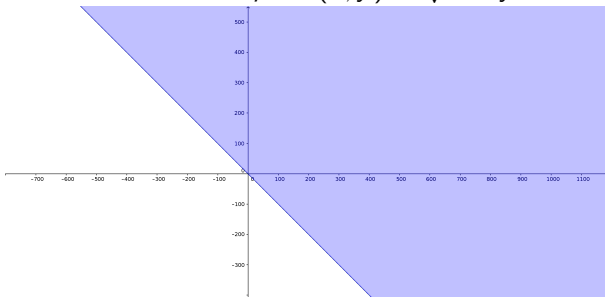
- O conjunto  $D$  é chamado de domínio da  $f$ .  
Quando não for mencionado explicitamente, subentendemos que o domínio da  $f$  é o maior subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  para o qual a regra definida por  $f$  vale.
- A imagem da  $f$  é o conjunto  $\{f(x, y) / (x, y) \in D\} \subset \mathbb{R}$ .
- O gráfico da  $f$  é o conjunto  $\{(x, y, f(x, y)) / (x, y) \in D\} \subset \mathbb{R}^3$

# Exemplos

1) Encontre o domínio da função  $f(x, y) = \sqrt{x + y}$

# Exemplos

1) Encontre o domínio da função  $f(x, y) = \sqrt{x + y}$



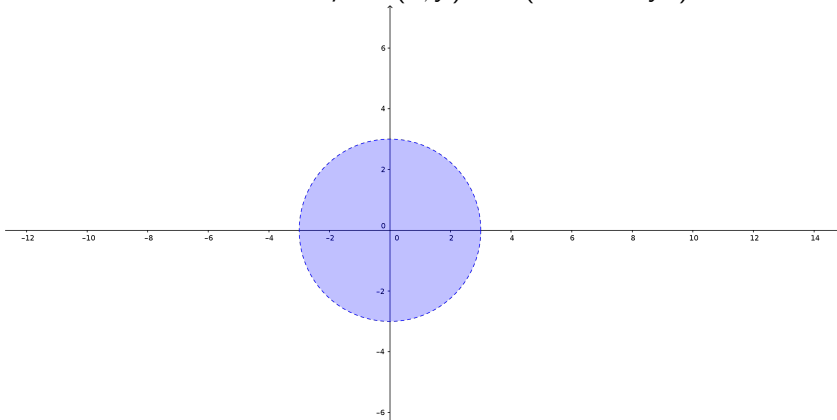
Obs: Equação geral da reta:  $ax + by + c = 0$

# Exemplos

2) Encontre o domínio da função  $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - y^2)$

# Exemplos

2) Encontre o domínio da função  $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - y^2)$



Obs: Equação geral de um círculo:  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

# Exemplos

3) Encontre o domínio da função  $f(x, y) = \frac{1}{e^x + e^y}$

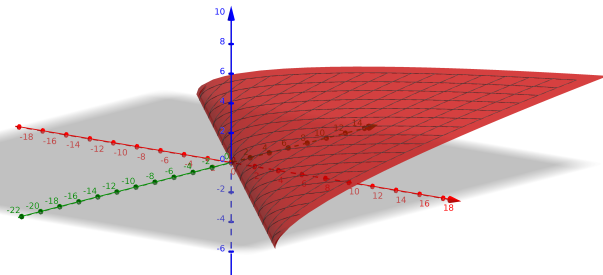


# Exemplos

- 3) Encontre o domínio da função  $f(x, y) = \frac{1}{e^x + e^y}$
- 4) Para mais exemplos, ver [1], seção 5.1.

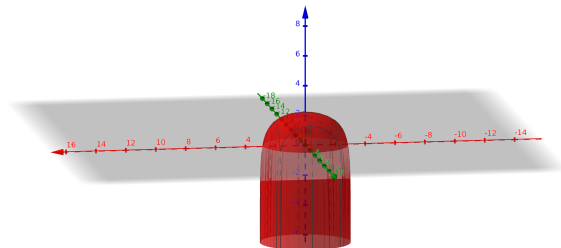
# Gráficos

1) Gráfico da função  $f(x, y) = \sqrt{x + y}$



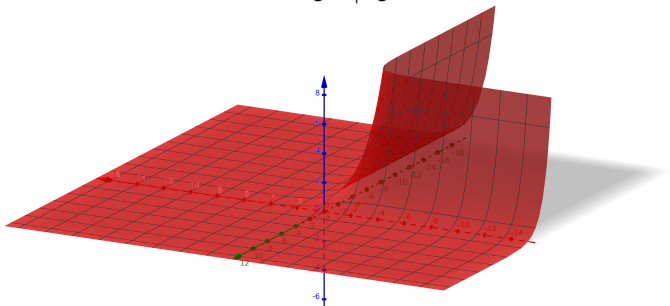
# Gráficos

2) Gráfico da função  $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - y^2)$



# Gráficos

3) Gráfico da função  $f(x, y) = \frac{1}{e^x + e^y}$



# Funções de 3 Variáveis

$$\begin{array}{ccc} f : D \subseteq \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longrightarrow & f(x, y, z) \end{array}$$

# Funções de 3 Variáveis

$$\begin{array}{ccc} f : D \subseteq \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longrightarrow & f(x, y, z) \end{array}$$

- O conjunto  $D$  é chamado de domínio da  $f$ .  
Quando não for mencionado explicitamente, subentendemos que o domínio da  $f$  é o maior subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  para o qual a regra definida por  $f$  vale.

# Funções de 3 Variáveis

$$\begin{array}{ccc} f : D \subseteq \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longrightarrow & f(x, y, z) \end{array}$$

- O conjunto  $D$  é chamado de domínio da  $f$ .  
Quando não for mencionado explicitamente, subentendemos que o domínio da  $f$  é o maior subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  para o qual a regra definida por  $f$  vale.
- A imagem da  $f$  é o conjunto  $\{f(x, y, z)/(x, y, z) \in D\} \subset \mathbb{R}$ .

# Funções de 3 Variáveis

$$\begin{array}{ccc} f : D \subseteq \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longrightarrow & f(x, y, z) \end{array}$$

- O conjunto  $D$  é chamado de domínio da  $f$ .  
Quando não for mencionado explicitamente, subentendemos que o domínio da  $f$  é o maior subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  para o qual a regra definida por  $f$  vale.
- A imagem da  $f$  é o conjunto  $\{f(x, y, z)/(x, y, z) \in D\} \subset \mathbb{R}$ .
- O gráfico da  $f$  é o conjunto  $\{(x, y, z, f(x, y, z))/(x, y, z) \in D\} \subset \mathbb{R}^4$

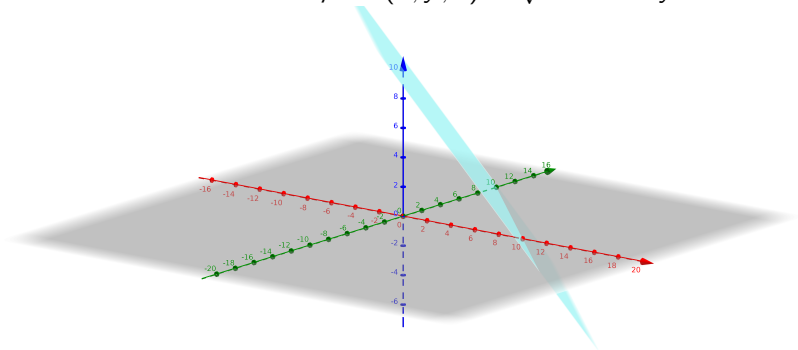


# Exemplos

5) Encontre o domínio da função  $f(x, y, z) = \sqrt{10 - x - y - z}$

## Exemplos

5) Encontre o domínio da função  $f(x, y, z) = \sqrt{10 - x - y - z}$



O domínio é toda região do  $\mathbb{R}^3$  que está no plano ilustrado acima ou abaixo dele.

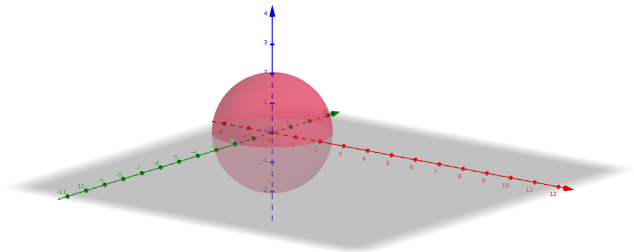
**Obs:** Equação geral do plano:  $ax + by + cz + d = 0$

# Exemplos

6) Encontre o domínio da função  $f(x, y, z) = \ln(4 - x^2 - y^2 - z^2)$

# Exemplos

6) Encontre o domínio da função  $f(x, y, z) = \ln(4 - x^2 - y^2 - z^2)$



O domínio é toda região do  $\mathbb{R}^3$  que está dentro da esfera ilustrada acima. Veja que os pontos da esfera não estão no domínio!

**Obs:** Equação geral da esfera:  $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$

# Exemplos

5) Encontre o domínio da função  $f(x, y, z) = \cos(x^2 + y - z)$ .

# Exemplos

- 5) Encontre o domínio da função  $f(x, y, z) = \cos(x^2 + y - z)$ .  
Como o domínio da função  $\cos(x)$  não tem restrição, assim como o polinômio  $p(x, y, z) = x^2 + y - z$ , o domínio da função  $f$  é todo o espaço  $\mathbb{R}^3$ .



Bianchini, Waldecir. Aprendendo Cálculo de várias variáveis:  
<http://www.im.ufrj.br/waldecir/calculo2/calculo2.pdf>



Lima, Paulo. Cálculo de várias variáveis:  
[http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/Calculo\\_de\\_varias\\_variaveis.pdf](http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/Calculo_de_varias_variaveis.pdf)



Plotar gráficos e regiões:  
<https://www.wolframalpha.com/examples/PlottingAndGraphics.html>  
Software para computador: Geogebra



Stewart, James. Cálculo, Volume II



Anton, Howard. Cálculo, Volume II