GEOMETRIA PLANA

Aula 12

Circunferência

Karla Lima

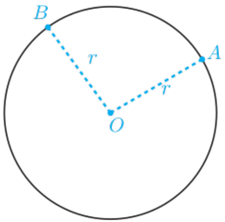
Sumário

Definições e Conceitos Básicos

Definição

Definição 1

Sejam r um número real positivo e O um ponto do plano. O lugar geométrico de todos os pontos do plano que estão à distância r de O é a ***circunferência*** *de raio r e centro O.*

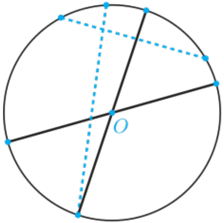


- Denotaremos esta circunferência por $\mathcal{C}(O, r)$.
- O segmento que une o centro O a qualquer ponto da circunferência é denominado **raio** da mesma.

Definição

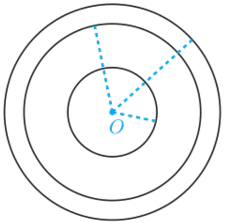
Definição 2

- *O segmento cujos extremos pertencem à circunferência é denominado **corda**.*
- *A corda que passa pelo centro é denominada **diâmetro**.*



Conceitos Básicos

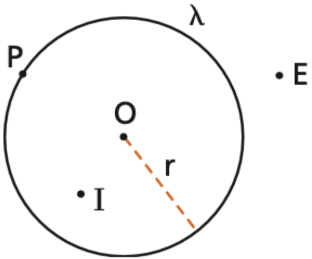
- Circunferências que possuem o mesmo centro são chamadas **concêntricas**.
- Circunferências que possuem mesmo raio são chamadas **congruentes**.



Posição de ponto e circunferência

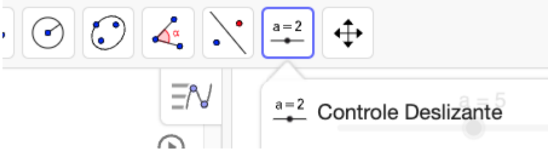
Dado um ponto X e uma circunferência $\mathcal{C}(O, r)$, temos que:

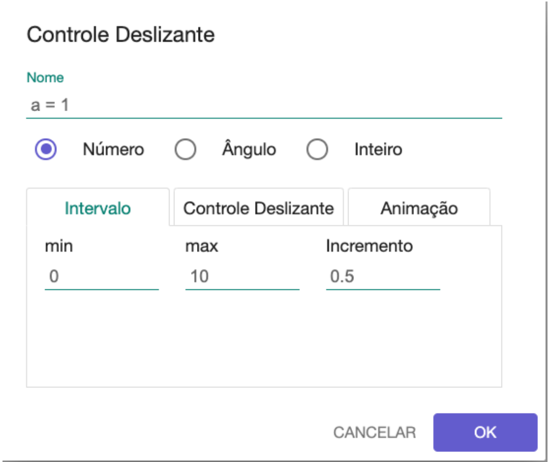
- X é interno a $\mathcal{C}(O, r) \Leftrightarrow d(X, O) < r$;
- X pertence a $\mathcal{C}(O, r) \Leftrightarrow d(X, O) = r$;
- X é externo a $\mathcal{C}(O, r) \Leftrightarrow d(X, O) > r$.



Geogebra

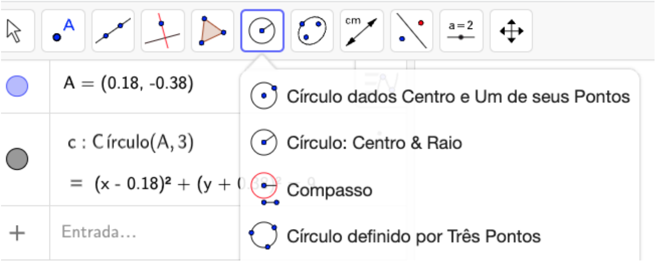
- Acesse o https://www.geogebra.org/classic.
- Use o "controle deslizante", com intervalo de 0 à 10, com incremento de 0.5:





Geogebra

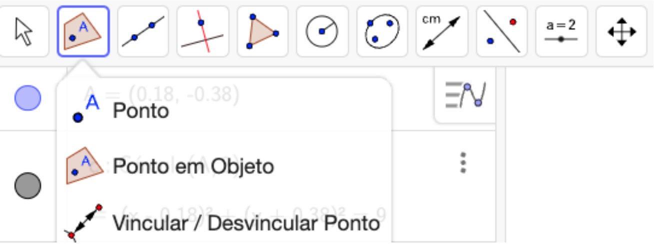
- Construa uma circunferência de raio *a* (o controle deslizante):



- Trace um segmento que passe pelo centro da circunferência (diâmetro) e meça seu comprimento.
- Altere o valor de *a* e compare os resultados.

Geogebra

- Use a ferramenta "ponto em um objeto", marque dois pontos na circunferência e construa um ângulo com vértice no centro da mesma.



- Usando os mesmos pontos sobre a circunferência, marque mais um ponto sobre a circunferência e construa um ângulo com vértice no novo ponto.
- Compare os dois ângulos construídos.
- Ao alterar o valor de *a*, os ângulos são alterados? A relação entre eles se mantêm?

Geogebra

- Escolha um ponto da circunferência e trace uma reta tangente à mesma, no ponto escolhido.
- Por esse mesmo ponto, trace o raio da circunferência.
- Tome um ponto da reta tangente e calcule o ângulo entre os pontos citados, com vértice no centro da circunferência.

Geogebra

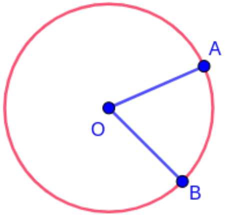
- Marque um diâmetro na circunferência e um outro ponto da circunferência, que não pertença ao diâmetro. Com esse ponto e o diâmetro, construa um triângulo.
- Calcule o ângulo formado pelos lados do triângulo que não são o diâmetro.
- Mude o valor de a. O valor do ângulo se altera?

Correspondência entre arcos e ângulos

Ângulo Central

Definição 3

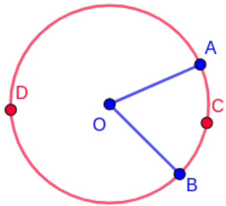
*Chama-se **ângulo central** ao ângulo cujo vértice é o centro da circunferência.*



- A parte da circunferência limitada pelos ponto A e B é denominada **arco da circunferência** e o denotamos por $\overset{\frown}{AB}$.
- Os pontos A e B são os extremos do arco AB.

Ângulo Central

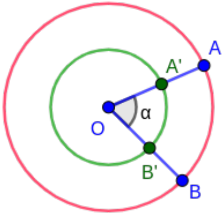
- Há uma ambiguidade na notação para arcos, uma vez que não nos permite distinguir se estamos nos referindo ao arco menor ou ao arco maior.
- Para evitar tal ambiguidade, considera-se outro ponto do arco.
- Na figura abaixo, o arco AB menor é denotado por $\overset{\frown}{ACB}$, enquanto que o maior é denotado por $\overset{\frown}{ADB}$.



- Quando não houver dúvidas quanto ao arco que estamos nos referindo, podemos escrever simplesmente $\overset{\frown}{AB}$.

Ângulo Central e Arcos

- Pode-se estabelecer uma correspondência entre ângulos centrais e arcos de circunferência, de tal modo que a medida de um arco, em graus ou radianos, não dependa do raio da circunferência.
- Na figura abaixo, os extremos dos arcos AB e $A'B'$, das duas circunferências concêntricas, correspondem a mesma abertura dos lados do ângulo central α.



Ângulo Central e Arcos

O fato anterior motiva a seguinte definição:

Definição 4

A medida, em graus ou radianos, de um arco é a medida do ângulo central correspondente.

Notação: $\widehat{AB} = \alpha$.

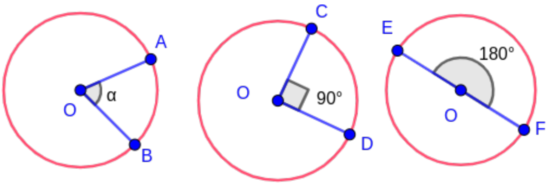


Figura 1: $\widehat{AB} = \alpha$, $\widehat{CD} = 90°$ e $\widehat{EF} = 180°$

Unidade de Medida

- Se A e B são as extremidades de um diâmetro, os dois arcos congruentes determinados são denominados **semicircunferências** e sua medida, em graus, é 180°.
- Do exposto, um arco que mede 1° equivale a $\dfrac{1}{360}$ da circunferência.
- Para medir arco menores que um grau, utilizamos **minuto** e **segundo**, definidos por

$$\textbf{Minuto: } 1' = \tfrac{1}{60} \text{ do grau;}$$
$$\textbf{Segundo: } 1'' = \frac{1}{60} \text{ do minuto.}$$

Teorema

Teorema 1

Na mesma circunferência, ou em circunferências congruentes, se duas cordas são congruentes então são congruentes os arcos por elas subentendidos.

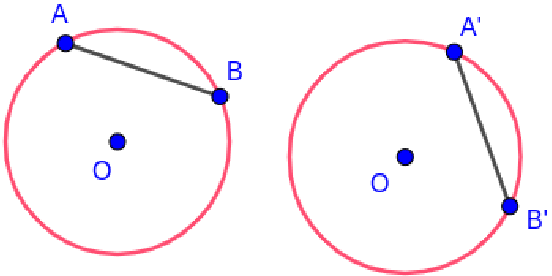
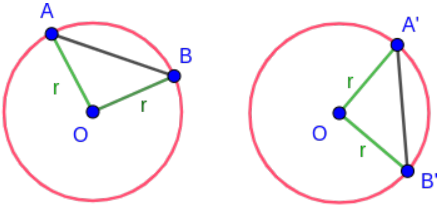


Figura 2: $AB = A'B'$

Demonstração

- Construa os triângulo AOB e $A'O'B'$, onde O e O' são os centros das circunferências congruentes.



- Como
  - $AB = A'B'$ (hipótese)
  - $AO = A'O' = r$ e $BO = B'O' = r$ (as circunferências possuem o mesmo raio)

  os triângulos AOB e $A'O'B'$ são congruentes (LLL).
- Logo, $\widehat{AOB} = \alpha = \widehat{A'O'B'}$ (ângulo oposto aos lados congruentes $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$), como queríamos demonstrar.

Teorema

Teorema 2

Teorema Recíproco: *Na mesma circunferência ou em circunferências congruentes, se dois arcos são congruentes então são congruentes as cordas correspondentes.*

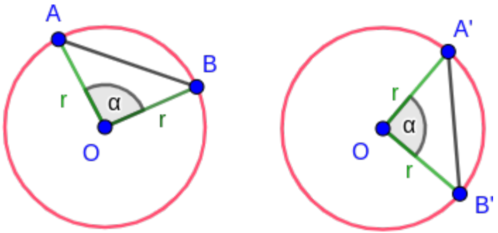


Figura 3: $A\hat{O}B = A'\hat{O}B'$

Demonstração: Exercício.

Retas Secantes e Tangentes

Secantes

Definição 5

- *Uma reta que corta uma circunferência em mais de uma ponto é uma reta* ***secante*** *à circunferência.*
- *Duas circunferências distintas que se cortam em mais de um ponto são chamadas* ***secantes****.*

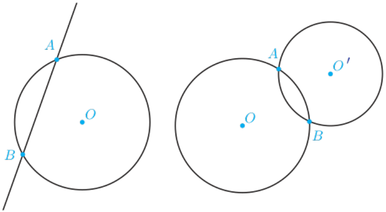


Figura 4: $\overleftrightarrow{AB}$ reta secante à circunferência. Circunferências secantes.

Tangentes

Definição 6

A reta que intersecta a circunferência em apenas um ponto é denominada ***tangente****. Este ponto é denominado* ***ponto de tangência****.*

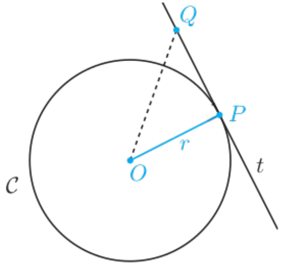
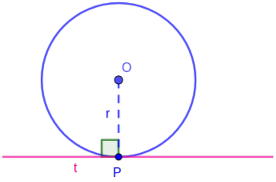


Figura 5: $\overleftrightarrow{QP}$ reta tangente à circunferência em P.

Teorema

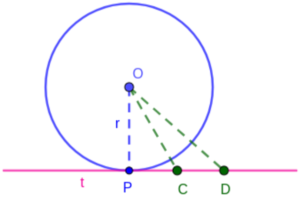
Teorema 3

A reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio traçado pelo ponto de tangência.



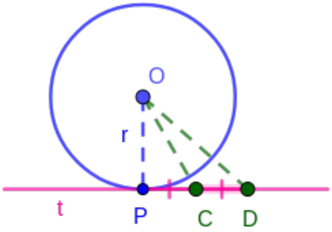
Demonstração

- Suponha, por absurdo, que o raio $\overline{OP}$ não seja perpendicular à tangente t



- Então, seja C o ponto da tangente t tal que $\overline{OC} \perp t$.
- Seja, também, D um ponto de t, tal que $PC = CD$.

Demonstração



- Desta forma, $\triangle OCP = \triangle OCD$:
  - OC é um lado em comum (L);
  - $P\hat{C}O = D\hat{C}O = 90^\circ$ (A);
  - $PC = CD$ (L).
- Portanto, $OP = OD$ (lados opostos ao ângulo reto), de onde segue que

$$r = OD.$$

Demonstração: Teorema

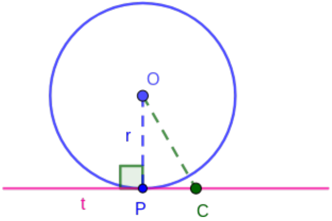
- Isso significa que D pertence à circunferência e, assim, a reta t teria dois pontos em comum com a mesma, contrariando a hipótese de t ser tangente.

Teorema

Teorema 4

Recíproca: *Uma reta perpendicular ao raio em seu ponto extremo é tangente à circunferência.*

Demonstração



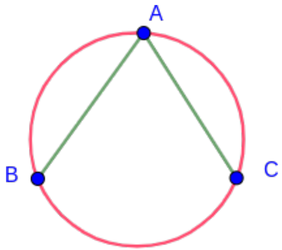
- Sejam P o ponto de tangência e C outro ponto de t.
- Como $\overline{OP} \perp t$, segue que $OC > OP = r$ ($\overline{OC}$ é a hipotenusa do $\triangle OPC$).
- Logo, C não pertence à circunferência, de onde segue que P é o único ponto de t em comum com a mesma.

Ângulos

Ângulo Inscrito

Definição 7

Diz-se que um ângulo está ***inscrito*** *numa circunferência se seu vértice pertence à circunferência e seus lados intersectam a mesma em dois pontos distintos do vértice.*



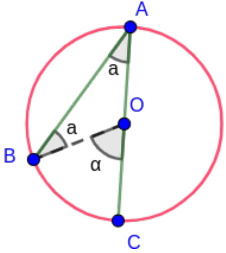
Teorema

Teorema 5

O ângulo inscrito tem por medida a metade da medida do arco compreendido entre seus lados.

Demonstração

- **1º Caso:** Um dos lados do ângulo contém um diâmetro.



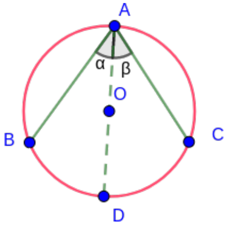
- O ângulo $\hat{\alpha}$ é externo do triângulo isósceles AOB, assim

$$\hat{\alpha} = 2\hat{a} \quad \Rightarrow \quad \hat{a} = \frac{\hat{\alpha}}{2} = \frac{\widehat{BC}}{2},$$

como queríamos demonstrar.

Demonstração

- **2º Caso:** O centro do círculo fica no interior do ângulo.



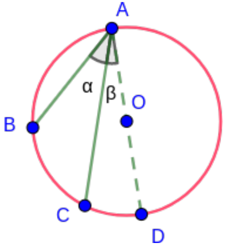
  - Temos que

$$B\hat{A}C = \alpha + \beta = \frac{\widehat{BD}}{2} + \frac{\widehat{DC}}{2} = \frac{\widehat{BD + DC}}{2} = \frac{\widehat{BC}}{2},$$

pois os arcos $\widehat{BD}$ e $\widehat{DC}$ contém um diâmetro num dos seus lados.

Demonstração

- **3º Caso:** O centro do círculo fica no exterior do ângulo.



- Temos que

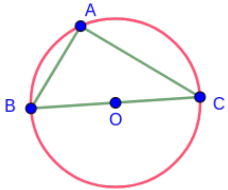
$$B\hat{A}C = B\hat{A}D - C\hat{A}D = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} - \frac{\overset{\frown}{DC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2},$$

pois os arcos $\overset{\frown}{BD}$ e $\overset{\frown}{DC}$ contém um diâmetro num dos seus lados.

Corolário

Corolário 1

O triângulo cujos vértices pertencem a uma circunferência e um dos lados é o diâmetro, é retângulo.

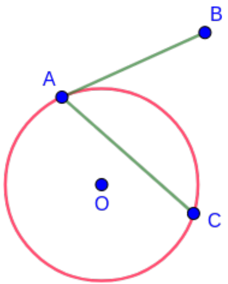


Demonstração: Exercício.

Ângulo de Segmento

Definição 8

*Um ângulo é dito de **segmento** se seu vértice pertence à circunferência, um lado é secante e o outro tangente à mesma.*



Teorema

Teorema 6

O ângulo de segmento tem por medida a metade da medida do arco compreendido entre seus lados.

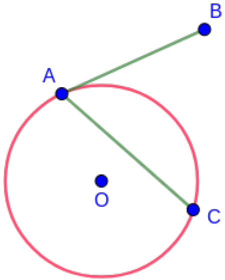
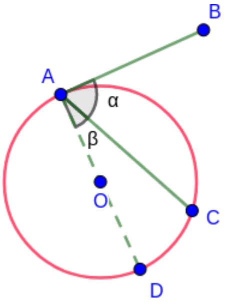


Figura 6: $C\hat{A}B = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$

Demonstração

- A tangente $\overline{AB}$ é perpendicular ao diâmetro $\overline{AD}$.



- Logo, $\alpha + \beta = 90°$, de onde segue que:

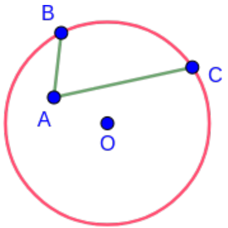
$$B\hat{A}C = 90° - C\hat{A}D = \frac{\overparen{AD}}{2} - \frac{\overparen{DC}}{2} = \frac{\overparen{AD} - \overparen{DC}}{2} = \frac{\overparen{AC}}{2}.$$

Exercício: Justifique as igualdades.

Ângulo Excêntrico Interno

Definição 9

*Um **ângulo excêntrico interno** é aquele cujo vértice é interior a circunferência.*



Teorema

Teorema 7

O ângulo excêntrico interno tem por medida a metade da soma das medidas do arco compreendido entre seus lados e do arco compreendido entra as semirretas opostas aos lados do mesmo.

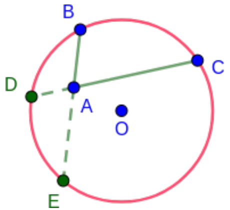
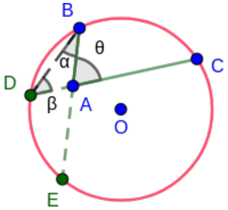


Figura 7: $\hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{ED} + \overset{\frown}{BC}}{2}$

Demonstração

- O ângulo $\theta = B\hat{A}C$ é externo do triângulo ADB.



- Logo,

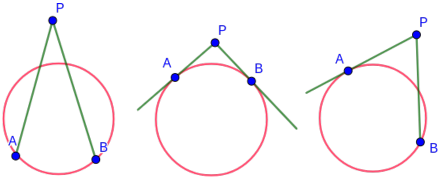
$$B\hat{A}C = \alpha + \beta = \frac{\overset{\frown}{ED}}{2} + \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{ED} + \overset{\frown}{BC}}{2},$$

pois α e β são ângulos inscritos na circunferência dada.

Ângulo Excêntrico Externo

Definição 10

*Um **ângulo excêntrico externo** é aquele cujo vértice é exterior a circunferência e seus lados são secantes, ou tangentes, ou uma secante e uma tangente à mesma.*



- Quando os lados desse ângulo são tangentes, o mesmo é denominado **circunscrito** à circunferência.

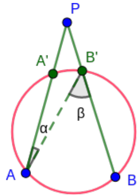
Teorema

Teorema 8

O ângulo excêntrico externo tem por medida a metade da diferença das medidas dos arcos compreendidos entre seus lados.

Demonstração

- **Caso 1:** Os dois lados são secantes.



  - O ângulo $\beta = A\hat{B'}B$ é externo do triângulo $PB'A$.
  - Logo,

$$\beta = \alpha + \hat{P} = \frac{\widehat{A'B'}}{2} + \hat{P}$$

de onde segue que

$$\hat{P} = \beta - \frac{\widehat{A'B'}}{2} = \frac{\widehat{AB}}{2} - \frac{\widehat{A'B'}}{2} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{A'B'}}{2} \quad \text{(Justifique as igualdades).}$$

Demonstração

- **Caso 2:** Os dois lados são tangentes.
- **Caso 3:** Um lado é secante e o outro é tangente.

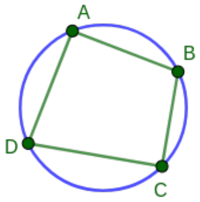
Demonstração: Exercício.

Polígonos Inscritíveis e Circunscritíveis

Polígono Inscrito

Definição 11

Diz-se que um polígono está ***inscrito*** *numa circunferência quando todos os seus vértices pertencem à mesma.*



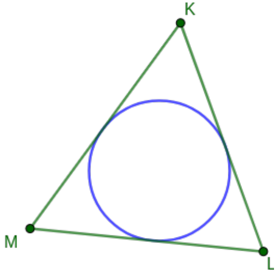
Quadrilátero Inscrito

Neste caso, diz-se que a circunferência está circunscrita ao polígono.

Polígono Circunscrito

Definição 12

*Diz-se que um polígono está **circunscrito** a uma circunferência quando todos os seus lados são tangentes à mesma.*



Triângulo Circunscrito

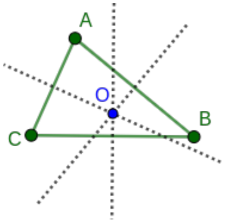
Quando isso ocorre, diz-se que a circunferência está inscrita no polígono.

Teorema

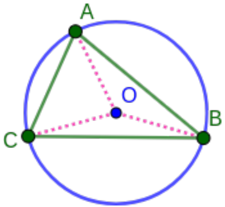
Teorema 9

Todo triângulo é inscritível.

Demonstração: As mediatrizes dos lados de um triângulo se interceptam em um único ponto O (circuncentro), equidistante dos vértices.



Demonstração



- Logo, se $AO = BO = CO = r$, tomando a circunferência de centro em O e raio r, inscrevemos o triângulo dado.

Teorema

Teorema 10

Todo triângulo é circunscritível.

Demonstração: Exercício.

Teorema

Teorema 11

Em todo quadrilátero inscrito numa circunferência, os ângulos opostos são suplementares.

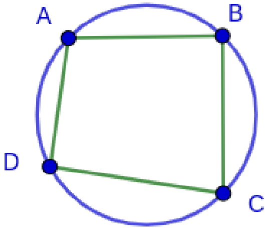
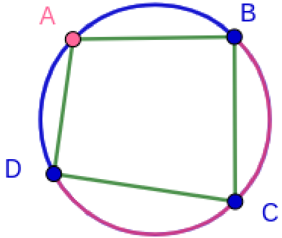


Figura 8: $\hat{A} + \hat{C} = 180°$ e $\hat{B} + \hat{D} = 180°$

Demonstração



- Observe que: $\hat{A} = \dfrac{\overparen{BCD}}{2}$ e $\hat{C} = \dfrac{\overparen{DAB}}{2}$.
- Assim,

$$\begin{aligned} \hat{A} + \hat{C} &= \frac{\overparen{BCD}}{2} + \frac{\overparen{DAB}}{2} \\ &= \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ. \end{aligned}$$

Teorema

Teorema 12

Em todo quadrilátero circunscrito, a soma de dois lados opostos é igual à soma dos outros dois.

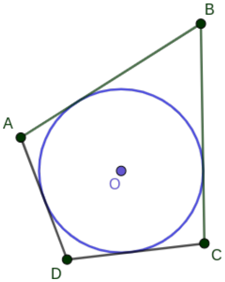
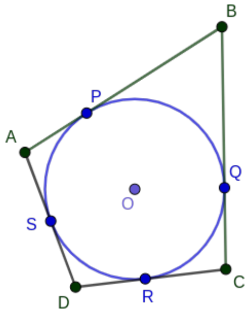


Figura 9: $AB + DC = AD + BC$

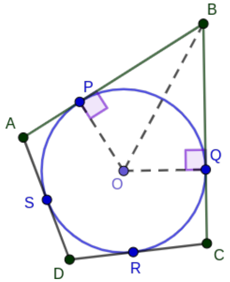
Demonstração



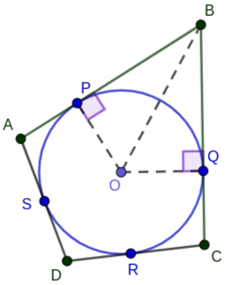
- Como os lados do quadrilátero são tangentes à circunferência, teremos:
  - $BP = BQ$;
  - $AP = AS$;
  - $DS = DR$;
  - $CR = CQ$.

Demonstração

- De fato, seja O o centro da circunferência. Tome os segmentos $\overline{BO}$, $\overline{OP}$ e $\overline{OQ}$.
- Como P e Q são os pontos de tangência, $O\hat{P}B = O\hat{Q}B = 90^\circ$.



Demonstração



- Os triângulos retângulos OPB e OQB possuem um cateto congruente ($OP = OQ = r$) e a hipotenusa em comum, ambos são congruentes.
- Portanto, os lados retantes BP e BQ são congruentes.
- A demonstração das outras igualdades segue de modo análogo.

Demonstração

- Somando-se os membros das desigualdades, obtemos:

$$\begin{aligned}(AP + PB) + (DR + RC) &= (AS + BQ) + (DS + CQ) \\ &= (AS + SD) + (BQ + QC)\end{aligned}$$

de onde segue que

$$AB + DC = AD + BC,$$

como queríamos demonstrar.