(1) Obtenha uma parametrização das seguintes superfícies:

a) $x = z$

b) $x + y + z = 1$

c) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2$

(2) Calcule a integral de superfície $\int\int_S (z + x^2 y)dS$, onde S é a parte do cilindro $y^2 + z^2 = 1$ que está entre os planos $x = 0$ e $x = 3$ no primeiro octante.

(3) O helicóide é parametrizado por $\phi(u, v) = (u\cos v, u\sin v, v)$, $(u, v) \in \mathbb{R} \times [0, 2k\pi]$.

a) Mostre que o helicóide definido em $[0, 1] \times [0, 2\pi]$ é uma superfície regular.

b) Determine a área do helicóide dado em a).
Obs: use que $\int \sqrt{a^2 + u^2}du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 + u^2} + \frac{1}{2}\ln(u + \sqrt{a^2 + u^2}) + C$

c) Calcule $\int\int_S y dS$, onde S é o helicóide dado em a).

Integrais de Superfície de Campos Vetoriais; Fluxo

– Mais sobre Fluxo:
`https://youtu.be/aJ2ev_-T15g`
`https://youtu.be/ivg3dLTarbs`
Tente visualizar todas as superfícies usando algum software matemático (Geogebra, Mathematica, etc...) ou acesse o site
`https://www.wolframalpha.com/input/?i=plot+12-2x%5E2-y%5E2`

(4) Calcule a integral de superfície para o campo vetorial e a superfície orientada dada. Para superfícies fechadas, use a orientação positiva (normal apontando para fora).

a) $F(x, y, z) = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$, S é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ que está acima do quadrado $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, com orientação para cima.

b) $F(x, y, z) = x\vec{i} - z\vec{j} + y\vec{k}$, S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ no primeiro octante, com orientação na direção da origem.

c) $F(x, y, z) = y\vec{j} - z\vec{k}$, S consiste no parabolóide $y = x^2 + z^2$, $0 \leq y \leq 1$, e o disco $x^2 + z^2 \leq 1$ com $y = 1$.

(5) Determine o fluxo do campo elétrico

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{q}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}(x, y, z)$$

gerado por uma carga q que passa através da esfera de raio r, utilizando a normal exterior. O resultado encontrado é um caso particular da Lei de Gauss da Eletrostática.

Gabarito

(1) Lembrem-se que pode haver mais de uma solução.
  a) $\phi(x,y) = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + x\overrightarrow{k}$,com $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

  b) $\phi(x,y) = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + (1-x-y)\overrightarrow{k}$,com $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

  c) $r(\phi,\theta) = (x_0 + a\text{sen}\phi\cos\theta)\overrightarrow{i} + (y_0 + a\text{sen}\phi\text{sen}\theta)\overrightarrow{j} + (z_0 + a\cos\phi)\overrightarrow{k}$, com $(\phi,\theta) \in [0,\pi] \times [0,2\pi]$.

(2) 12

(3) a) Basta mostrar que existe plano tangente em todos os pontos do domínio da parametrização.

  b) $\left(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right)\pi$.

  c) 0

(4) a) $\dfrac{713}{180}$

  b) $-\dfrac{4}{3}\pi$

  c) 0

(5) $4\pi q$; não depende do raio da esfera.