Introdução ao Cálculo

Aula 07: Funções de Várias Sentenças.

Karla Lima

08/02/2022

Sumário

Bibliografia

Bibliografia da Aula 07

- Fundamentos da Matemática Elementar: 1 (Click para baixar)

Funções de Várias Sentenças

Apresentação

Seja $f : [-2, 5] \to \mathbb{R}$, dada por:

- $f(x) = x^2$, se $-2 \leq x < 0$;
- $f(x) = x$, se $0 \leq x < 2$;
- $f(x) = 2$, se $2 \leq x < 4$;
- $f(x) = -2x + 10$, se $4 \leq x \leq 5$.

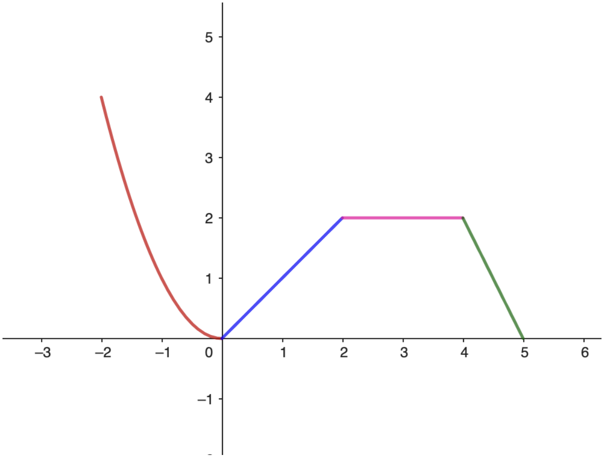


Figura 1: Gráfico da Função f

Apresentação

Esta é uma **função de várias sentenças**. Para calcular $f(x)$, deve-se identificar em qual intervalo a variável x se encontra e aplicar a regra que a função possui nesse intervalo:

- $f(-1) = (-1)^2 = 1$, pois $-1 \in [-2, 0)$;
- $f(0.5) = 0.5$, pois $0.5 \in [0, 2)$;
- $f(2) = 2$, pois $2 \in [2, 4)$;
- $f(\pi + 1) = -2(\pi + 1) + 10 = -2\pi + 8$, pois $\pi + 1 \in [4, 5]$.

Imposto de Renda

Exemplo 1

A função que calcula o imposto de renda anual devido, é uma função de várias sentenças.

A tabela abaixo é utilizada para descrever a função imposto devido I em função da renda anual r:

Valor	Alíquota (%)	Parcela a deduzir do IRPF (R$)
Até R$ 22.847,76	Isento	R$ 0,00
De R$ 22.847,77 até R$ 33.919,80	7,5%	R$ 1.713,58
De R$ 33.919,81 até R$ 45.012,60	15%	R$ 4.257,57
De R$ 45.012,61 até R$55.976,16	22,5%	R$ 7.633,51
Acima de R$ 55.976,16	27,5%	R$ 10.432,32

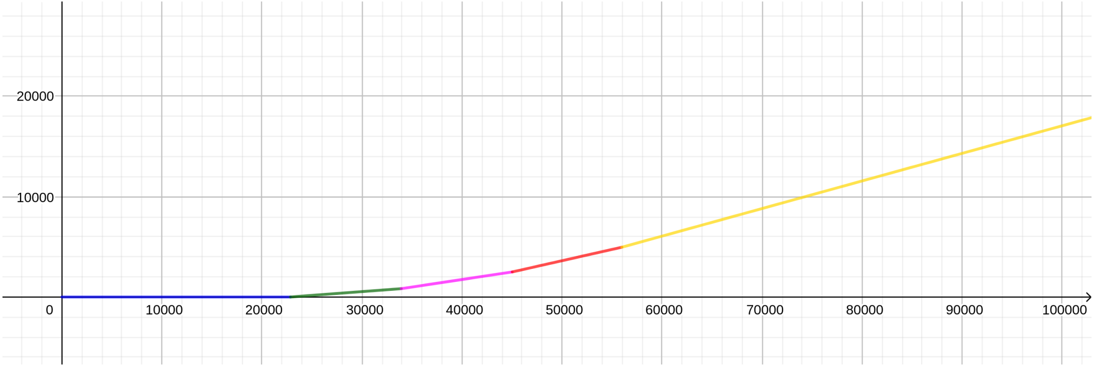
Imposto de Renda

A partir dessa tabela, obtemos a função de várias sentenças $I(r)$:

$$I(r) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq r \leq 22847.76 \\ 0.075r - 1713.58, & \text{se } 22847.77 \leq r \leq 33919.80 \\ 0.15r - 4257.57, & \text{se } 33919.81 \leq r \leq 45012.60 \\ 0.225r - 7633.51, & \text{se } 45012.61 \leq r \leq 55976.16 \\ 0.275r - 10432.32, & \text{se } 55976.17 \leq r. \end{cases}$$

Imposto de Renda

Seu gráfico é representado a seguir:



Imposto de Renda

Cada cor representa a reta que é o gráfico da função nos intervalos determinados acima.

a) Quem recebe mensalmente R$1045.00, tem um rendimento anual de R$13585.00 (incluindo o 13 salário). Logo, seu rendimento está no intervalo $[0, 22847.76]$, não tendo imposto a pagar.

Imposto de Renda

Cada cor representa a reta que é o gráfico da função nos intervalos determinados acima.

a) Quem recebe mensalmente R$1045.00, tem um rendimento anual de R$13585.00 (incluindo o 13 salário). Logo, seu rendimento está no intervalo $[0, 22847.76]$, não tendo imposto a pagar.

b) Agora, quem recebe mensalmente R$3000.00, tem um rendimento anual de R$39000.00, ficando no intervalo $[33919.81, 45012.60]$. O imposto devido é

$$\begin{aligned} I(39000) &= 0.15(39000) - 4257.57 \\ &= 1592.43, \end{aligned}$$

ou seja, R$1592.43.

Um problema de velocidade

Exemplo 2

Toda manhã, David tem o habito de praticar corrida. Em certa manhã, David parte de sua casa caminhando em direção ao calçadão da praia das Margaridas, com a sua velocidade constante. Ao chegar à praia, começa a correr durante um tempo, mantendo a variação de sua velocidade constante. Inicia sua corrida em ritmo constante durante um tempo, até perceber que começou a ficar sem fôlego, diminuindo seu ritmo gradativamente até parar em uma barraca para beber água de coco e recuperar suas energias. Como você esboçaria o gráfico da velocidade de David em função do tempo no trajeto desta manhã?

A Função Modular

O **módulo** de um número real

Definição 1

*Sendo $x \in \mathbb{R}$, o **módulo** ou **valor absoluto** de x é definido por meio da relação:*

$$|x| = x, \ se\, x \geq 0;$$
$$|x| = -x, \ se\, x < 0.$$

- Logo, o módulo de qualquer número real é SEMPRE um número não negativo ($|x| \geq 0$).
- É interessante associar o conceito de valor absoluto com distância: $|x|$ pode ser visto como a distância do número x até a origem da reta.

Exemplo

Exemplo 3

Considere os números reais $-2, -\dfrac{\pi}{2}, 1$ *e* e*. Calcule os seus valores absolutos.*

a) Como $-2 < 0$, temos que $|-2| = -(-2) = 2$;

Exemplo

Exemplo 3

Considere os números reais $-2, -\dfrac{\pi}{2}, 1$ *e* e*. Calcule os seus valores absolutos.*

a) Como $-2 < 0$, temos que $|-2| = -(-2) = 2$;

b) Como $-\dfrac{\pi}{2} < 0$, temos que $\left|-\dfrac{\pi}{2}\right| = -\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$;

Exemplo

Exemplo 3

Considere os números reais $-2, -\frac{\pi}{2}, 1$ *e* e. *Calcule os seus valores absolutos.*

a) Como $-2 < 0$, temos que $|-2| = -(-2) = 2$;

b) Como $-\frac{\pi}{2} < 0$, temos que $\left|-\frac{\pi}{2}\right| = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$;

c) Como $1 > 0$, temos que $|1| = 1$;

Exemplo

Exemplo 3

Considere os números reais $-2, -\frac{\pi}{2}, 1$ *e* e. *Calcule os seus valores absolutos.*

a) Como $-2 < 0$, temos que $|-2| = -(-2) = 2$;

b) Como $-\frac{\pi}{2} < 0$, temos que $\left|-\frac{\pi}{2}\right| = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$;

c) Como $1 > 0$, temos que $|1| = 1$;

d) Como $e > 0$, temos que $|e| = e$.

Propriedades: Igualdades

1. $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $|x| \cdot |y| = |x \cdot y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$
4. $|x|\hat{}2 = x\hat{}2, \forall x \in \mathbb{R}$

Propriedades: Desigualdades

5. $x \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$
6. $|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$
7. $|x - y| \geq |x| - |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$
8. $|x| \leq a$ e $a > 0 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
9. $|x| \geq a$ e $a > 0 \Leftrightarrow x \leq -a$ ou $x \geq a$.

Exemplo

Exemplo 4

Considere, novamente, os números reais $-2, -\frac{\pi}{2}, 1$ *e* e*.*

a) Temos $|-2+1| = |-1| = 1 \leq 3 = |2| + |1|$.
Além disso, $|-2-1| = |-3| = 3 \geq 1 = |-2| - |1|$.

Exemplo

Exemplo 4

Considere, novamente, os números reais $-2, -\dfrac{\pi}{2}, 1$ *e* e.

a) Temos $|-2+1| = |-1| = 1 \leq 3 = |2| + |1|$.
Além disso, $|-2-1| = |-3| = 3 \geq 1 = |-2| - |1|$.

b) Temos que $\left|-\dfrac{\pi}{2}\right| \leq e$, pois $-e \leq -\dfrac{\pi}{2} \leq e$

A Função Modular

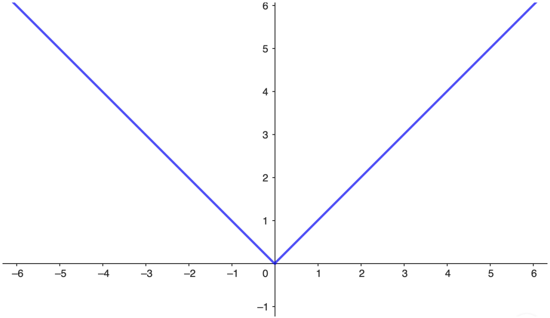
Definição 2

*A **função modular** é a função que associa o número real x ao seu módulo $|x|$. É uma função de várias sentenças, dada por:*

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & \text{se } x < 0 \\ x, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

O Gráfico

O **gráfico da função modular** é igual ao da função $f(x) = -x$, quando $x < 0$, e igual ao da função $f(x) = x$, quando $x \geq 0$:



O gráfico está todo acima do eixo x, uma vez que essa função não atinge valores negativos.

Exercícios

Composição com Funções Modulares

Exercício 1

Construa o gráfico da função real definida por $f(x) = |2x - 1|$.

- O gráfico de $g(x) = 2x - 1$ é uma reta crescente, que tem valores negativos em $x \in (-\infty, 0.5)$.
- Ao tomar o módulo dos números reais $2x - 1$, estes tornam-se positivos no intervalo citado, na forma $-2x + 1$ (reta decrescente).
- Para obter o gráfico da função f, basta manter onde a função é positiva ou nula e 'rebater' os valores negativos, como numa rotação de 180°.

Composição com Funções Modulares

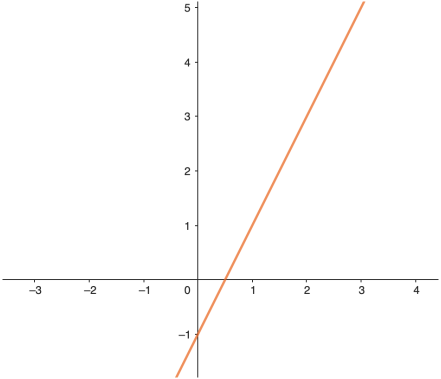


Figura 2: Gráfico de $g(x) = 2x - 1$

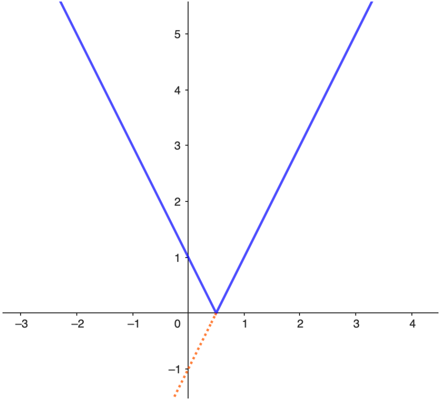


Figura 3: Gráfico de $f(x) = |2x - 1|$

Composição com Funções Modulares

Exercício 2

Construa o gráfico da função real definida por $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$.

- O gráfico de $g(x) = x^2 - 3x + 2$ é uma parábola com concavidade voltada para cima, que tem valores negativos em $x \in (1, 2)$.
- Ao tomar o módulo dos números reais $x^2 - 3x + 2$, estes tornam-se positivos no intervalo citado e são da forma $-x^2 + 3x - 2$ (concavidade voltada para baixo).
- Para obter o gráfico da função f, basta manter onde a função é positiva ou nula e 'rebater' os valores negativos, como numa rotação de 180°.

Composição com Funções Modulares

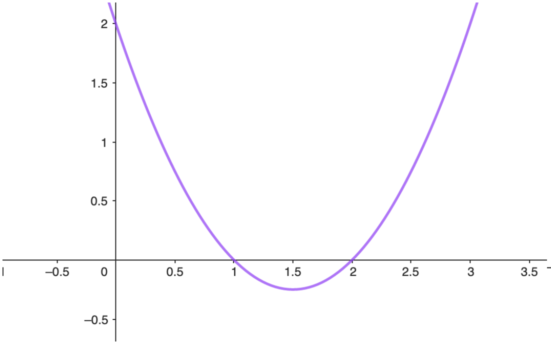


Figura 4: Gráfico de $g(x) = x^2 - 3x + 2$

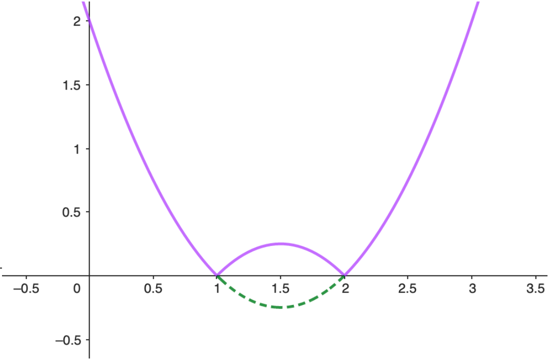


Figura 5: Gráfico de $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$

Equações e Inequações Modulares

Equações Modulares

- Lembre-se que, para $a > 0$, tem-se

$$|x| = a \Leftrightarrow x = k \text{ ou } x = -a.$$

- Assim, para resolver uma equação modular, resolveremos DUAS equações auxiliares.

Resolvendo uma equação modular

Exemplo 5

Vamos determinar os valores de $x \in \mathbb{R}$ *que satisfazem a equação modular* $|2x - 1| = 3$.

- Como visto anteriormente, como $a = 3 > 0$, temos duas possibilidades:
  - $2x - 1 = 3$
  - $2x - 1 = -3$

Resolvendo uma equação modular

- Se $2x - 1 = 3$, então

$$\begin{aligned} 2x - 1 + 1 = 3 + 1 &\Leftrightarrow 2x = 4 \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{2}x = \frac{4}{2} \\ &\Leftrightarrow x = 2. \end{aligned}$$

Resolvendo uma equação modular

- Por outro lado, se $2x - 1 = -3$, então

$$\begin{aligned} 2x - 1 + 1 = -3 + 1 &\Leftrightarrow 2x = -2 \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{2}x = \frac{-2}{2} \\ &\Leftrightarrow x = -1. \end{aligned}$$

- Assim, o conjunto de valores reais que satisfazem $|2x - 1| = 3$ é $\mathcal{S} = \{-1, 2\}$.

Exemplo

Exemplo 6

Vamos resolver a equação $|x^2 - 4x + 5| = 2.$

- Como visto anteriormente, como $a = 2 > 0$, temos duas possibilidades:
  - $x^2 - 4x + 5 = 2$
  - $x^2 - 4x + 5 = -2$

Exemplo

- Se $x^2 - 4x + 5 = 2$, então

$$x^2 - 4x + 5 - 2 = 2 - 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Como a soma das raízes é 4 e o seu produto é 3, temos que

$$x^2 - 4x + 5 - 2 = 2 - 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 3.$$

Exemplo

- Por outro lado, se $x^2 - 4x + 5 = -2$, então

$$x^2 - 4x + 5 + 2 = -2 + 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 7 = 0.$$

Como $\Delta = (-4)^2 - 4 * (1) * (7) = -12 < 0$, não há soluções reais para a equação $x^2 - 4x + 5 = -2$.

$$x^2 - 4x + 5 - 2 = 2 - 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 3.$$

- Portanto, o conjunto de valores reais que satisfazem $|x^2 - 4x + 5| = 2$ é $\mathcal{S} = \{1, 3\}$.

Inequações Modulares

- Lembre-se que, para $a > 0$, tem-se

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$
$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ ou } x \geq a.$$

- Assim, para resolver uma inequação modular, resolveremos DUAS inequações auxiliares.

Resolvendo uma inequação modular

Exemplo 7

Vamos determinar os valores de $x \in \mathbb{R}$ *que satisfazem a inequação modular* $|2x + 1| < 3$.

- Como visto anteriormente, como $a = 3 > 0$, temos que ter ao mesmo tempo:
  - $2x + 1 < 3$
  - $-3 < 2x + 1$

Resolvendo uma inequação modular

- Se $2x + 1 < 3$, então

$$\begin{aligned} 2x + 1 - 1 < 3 - 1 &\Leftrightarrow 2x < 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{2}x = \frac{2}{2} \\ &\Leftrightarrow x < 1. \end{aligned}$$

Resolvendo uma inequação modular

- Por outro lado, se $-3 < 2x + 1$, então

$$\begin{aligned} -3 - 1 < 2x + 1 - 1 &\Leftrightarrow -4 < 2x \\ &\Leftrightarrow \frac{-4}{2} < \frac{2}{2}x, \text{ (pois } 2 > 0) \\ &\Leftrightarrow -2 < x. \end{aligned}$$

- Assim, o conjunto de valores reais que satisfazem $|2x - 1| = 3$ é $\mathcal{S} = \{-1, 2\}$.

Resolvendo uma inequação modular

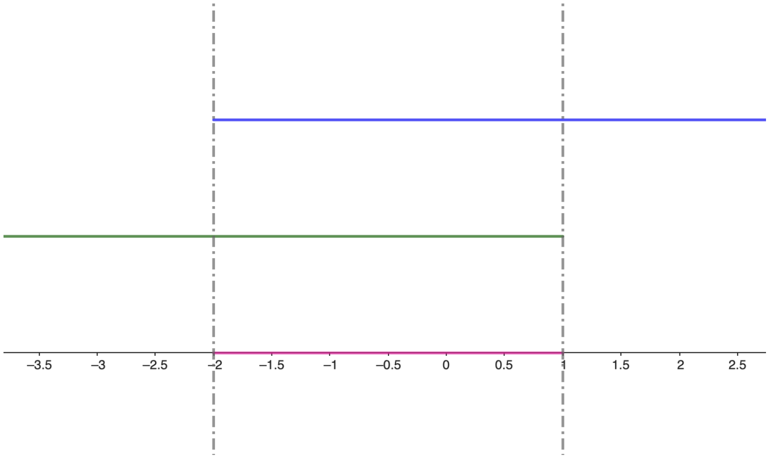
- Por outro lado, se $-3 < 2x + 1$, então

$$\begin{aligned} -3 - 1 < 2x + 1 - 1 &\Leftrightarrow -4 < 2x \\ &\Leftrightarrow \frac{-4}{2} < \frac{2}{2}x, \text{ (pois } 2 > 0) \\ &\Leftrightarrow -2 < x. \end{aligned}$$

- Assim, o conjunto de valores reais que satisfazem $|2x - 1| = 3$ é $\mathcal{S} = \{-1, 2\}$.

Resolvendo uma inequação modular

Devemos tomar os valores de x que são solução das duas inequações, simultaneamente:



Resolvendo uma inequação modular

- Assim, o conjunto de valores reais que satisfazem $|2x+1| < 3$ é

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\}.$$

Exercícios

Inequações Modulares

Exercício 3

Resolve, em $\mathbb{R}$, a inequação $|x^2 - x - 4| > 2$.

Exercício 4

Resolve, em $\mathbb{R}$, a inequação $|x^2 - 3x - 4| \leq 6$.

Inequações Modulares

Exercício 5

Resolve, em $\mathbb{R}$*, a inequação* $|x-2|+|x-4| \geq 6$.

Exercício 6

Resolve, em $\mathbb{R}$*, a inequação* $\dfrac{x+1}{|2x-1|} \leq 2$.

Aplicações

Equação Modular

Exercício 7

Dois carros, A e B, percorrem um trecho retilíneo, com velocidades constantes, sendo a velocidade de B o dobro da velocidade de A. Para o estudo do movimento desses carros, fixou-se um eixo real na trajetória, adotando-se o quilômetro como unidade. Em dado instante, o carro A estava no ponto de abscissa -13*, e B estava no ponto de abscissa* 7*. Sabendo que oito minutos depois os dois carros estavam à mesma distância da origem O do eixo real, determine a abscissa do ponto em que estava cada carro.*

Função Quadrática

Exercício 8

A modelagem matemática que relaciona o consumo de gasolina de um carro para percorrer 100 *km com velocidade de* x *km/h é dado por* $C(x) = 0,006x^2 - 0,6x + 25$. *Para qual velocidade este consumo é mínimo?*

Função Quadrática

Exercício 9

Um corpo lançado do solo verticalmente para cima tem posição em função do tempo dada pela função $h(t) = 40t - 5t^2$ onde a altura $h(t)$ é dada em metros e o tempo t é dado em segundos.

Calcule:

a) *O tempo necessário para o objeto atingir a altura máxima.*
b) *A altura máxima atingida pelo objeto.*