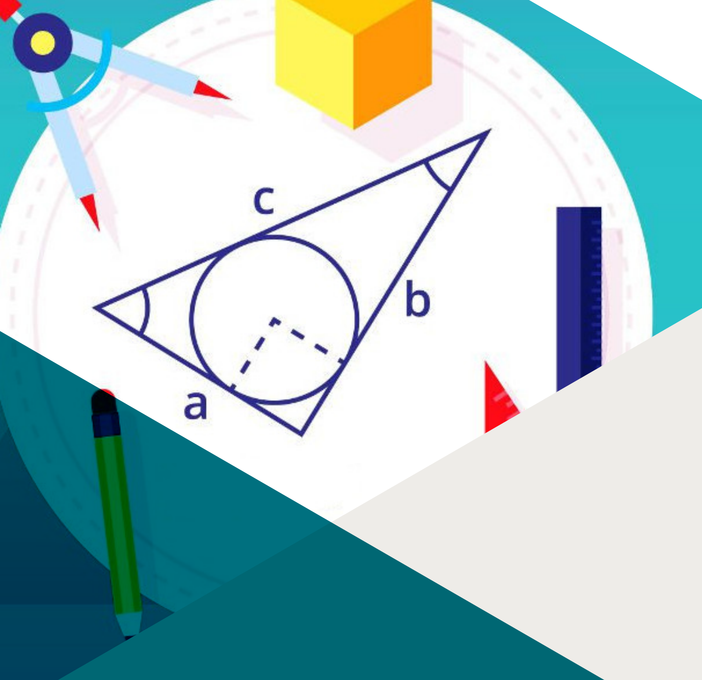


Introdução ao Cálculo

Aula 14

Limite e Continuidade

Karla Lima

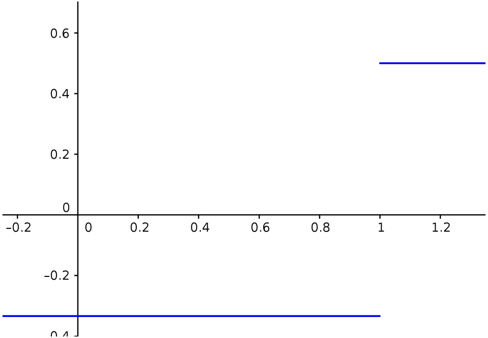
12/04/2023

Sumário

Limites Laterais

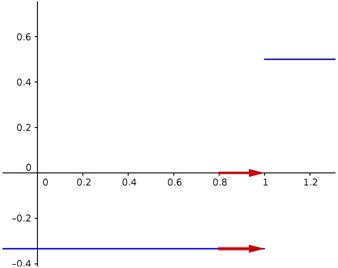
Limites Laterais

Considere a função $f(x) = \begin{cases} 1/2, & \text{se} \quad x > 1; \\ -1/3, & \text{se} \quad x \leq 1. \end{cases}$



Limites Laterais

Note que a medida que
nos aproximamos de $a = 1$ com números x menores que 1 (pela esquerda), temos que $f(x) = -1/3$. Então, ao nos aproximarmos de $a = 1$ pela esquerda, os valores de $f(x)$ estão próximos (iguais, neste exemplo) à $L = -1/3$.



Definição Informal: Limites pela Esquerda

Definição 1

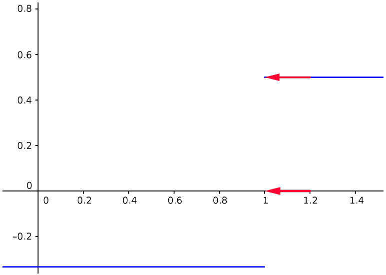
Se os valores de $f(x)$ puderem ser tomados tão próximos de um número L, tanto quanto se queira, desde que tomemos os valores de x suficientemente próximos de a - mas ***menores*** *do que a - então escrevemos:*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Assim, no exemplo anterior: $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -1/3$

Limites Laterais

Agora, note que a medida que nos aproximamos de $a = 1$ com números x maiores que 1 (pela direita), temos que $f(x) = 1/2$. Então, ao nos aproximarmos de $a = 1$ pela direita, os valores de $f(x)$ estão próximos (iguais, neste exemplo) à $L = 1/2$.



Definição Informal: Limites pela Direita

Definição 2

*Se os valores de $f(x)$ puderem ser tomados tão próximos de um número L, tanto quanto se queira, desde que tomemos os valores de x suficientemente próximos de a - mas **maiores** do que a - então escrevemos:*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Assim, no exemplo anterior: $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1/2$

Limite Bilateral

Definição 3

O limite bilateral de uma função f existe em um ponto a se, e somente se, existirem os limites laterais naquele ponto e tiverem o mesmo valor; isto é

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

Assim, no exemplo anterior:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1/2 \neq -1/3 = \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

e, portanto,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \nexists.$$

Limites Infinitos

Limite Infinito

Definição 4

Seja f uma função definida em ambos os lados de a, exceto possivelmente em a. Então

1) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ *significa que podemos fazer os valores de* $f(x)$ *ficarem arbitrariamente grandes tomando x suficientemente próximo de a, mas não igual a a.*
2) $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ *significa que podemos fazer os valores de* $f(x)$ *ficarem arbitrariamente grandes, porém negativos, tomando x suficientemente próximo de a, mas não igual a a.*

Limite Infinito

Exemplo 1

Vamos analisar o que acontece com a função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ *quando* x *se aproxima de* 0.

- A medida que x se aproxima de 0, x^2 também se aproxima de zero, tornando-se um número muito pequeno.
- Assim, ao efetuarmos a divisão $\dfrac{1}{x^2}$, obtemos um número grande, como podemos ver na tabela ao lado:

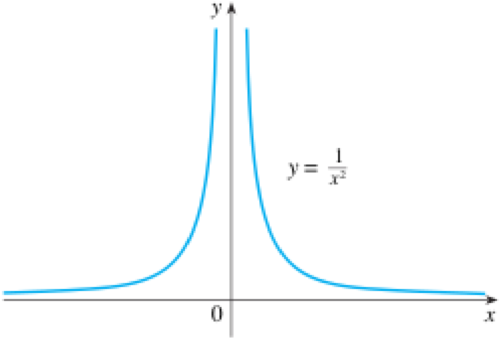
x	$\dfrac{1}{x^2}$
± 1	1
$\pm 0{,}5$	4
$\pm 0{,}2$	25
$\pm 0{,}1$	100
$\pm 0{,}05$	400
$\pm 0{,}01$	10 000
$\pm 0{,}001$	1 000 000

Limite Infinito

- Assim, os valores de $f(x)$ não tendem a um número, e não existe $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$.
- Para indicar o comportamento exibido nesse exemplo, usamos a notação

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

- Lê-se: $f(x) = \frac{1}{x^2}$ tende ao infinito, quando x tende a 0.



Limite Infinito

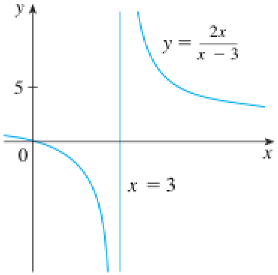
Exemplo 2

Na figura abaixo, podemos ver que a medida que x se aproxima de 3 pela esquerda, os valores de $f(x)$ se tornam arbitrariamente grandes, negativos. Já a medida que se aproxima de 3 pela direita, os valores de $f(x)$ se tornam arbitrariamente grandes, mas positivos.

- Escrevemos

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{x-3} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3} = \infty$$

para indicar esses limites laterais (que não existem, é apenas uma notação!).

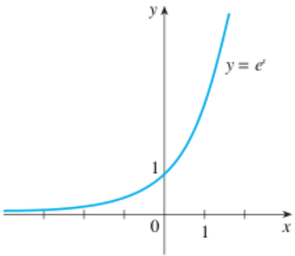


Limites no Infinito

Agora vamos analisar os limites de uma função $f(x)$, quando os valores de x tornam-se arbitrariamente grandes, tanto positivos quanto negativos.

Exemplo 3

Observe o gráfico da função $f(x) = e^x$ e uma tabela com alguns valores para x.



x	e^x
0	1,00000
−1	0,36788
−2	0,13534
−3	0,04979
−5	0,00674
−8	0,00034
−10	0,00005

Limites no Infinito

- A medida que x torna-se grande, porém negativo, a função e^x torna-se pequena, próxima de 0.
- Escrevemos
$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0,$$
para dizer que o limite de e^x, quando x tende a $-\infty$, é igual a 0.
- Porém, a medida que x torna-se grande, positivo, a função e^x torna-se arbitrariamente grande,e, portanto, o limite
$$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$
não existe.

Outras Funções

1. Abra o Geogebra e conjecture sobre os seguintes limites:
   a) $\lim\limits_{x \to \infty} \cos(x)$
   b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \text{sen}\,(x)$
   c) $\lim\limits_{x \to \infty} \ln(x)$
   d) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x)$
   e) $\lim\limits_{x \to 3\pi/2^-} \text{tg}\,(x)$

Cálculo de Limites

Calculando Limites

Sejam **a** e **k** números reais. Segue uma lista de limites fundamentais:

1. **O limite de uma Função Constante (inclusive nos infinitos):**

$$\lim_{x \to a} k = k$$

2. **O limite de uma Função Afim Linear:**

$$\lim_{x \to a} x = a$$

3. **Os limites nos infinitos de uma Função Afim Linear:**

$$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

Calculando Limites

4. **Os limites infinitos de $\frac{1}{x}$:**

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

5. **Os limites <u>nos</u> infinitos de $\frac{1}{x}$:**

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Definição Precisa de Limite

Definição 5

Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número a, exceto possivelmente no próprio a. Então dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é L, e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se para todo número $\epsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \qquad |x - a| < \delta \qquad \text{então} \qquad |f(x) - L| < \epsilon.$$

- **Todo** número ϵ tem que possuir **algum** número δ que faça ser verdade a afirmação acima.

Alguns Exemplos com a Definição Precisa

Exemplo 4

Vamos mostrar que, fixado o número real a o limite da função constante é

$$\lim_{x \to a} k = k.$$

Alguns Exemplos com a Definição Precisa

Exemplo 4

Vamos mostrar que, fixado o número real a o limite da função constante é

$$\lim_{x \to a} k = k.$$

Antes de demonstrar o caso geral: caso particular $\lim_{x \to -2} \pi = \pi$**.** Com efeito, dado qualquer valor real $\epsilon > 0$, teremos

$$|f(x) - L| = |f(x) - \pi| = |\pi - \pi| = 0 < \epsilon,$$

qualquer que seja o valor de $\delta > 0$ e $|x - (-2)| < \delta$.

Nesse caso, qualquer valor real positivo pode ser usado para δ.

Exemplo 4

Demonstração:

Dado qualquer $\epsilon > 0$, temos que

$$|f(x) - k| = |k - k| = 0 < \epsilon,$$

qualquer que seja o valor de $\delta > 0$ e $|x - a| < \delta$.

Alguns Exemplos com a Definição Precisa

Exemplo 5

Vamos mostrar que, fixado o número real a o limite da função afim linear é

$$\lim_{x \to a} x = a.$$

Exemplo 5

Antes de demonstrar o caso geral: caso particular $\lim_{x \to 1/2} x = 1/2$.

Com efeito, dado qualquer valor real $\epsilon > 0$, queremos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| = |f(x) - 1/2| = |x - 1/2| = 0 < \epsilon,$$

sempre que $|x - 1/2| < \delta$.

- Qual valor de δ podemos escolher?
- Escolha um valor para ϵ. Qual valor de δ pode ser tomado?

Exemplo 5

Antes de demonstrar o caso geral: caso particular $\lim_{x \to 1/2} x = 1/2$.

Com efeito, dado qualquer valor real $\epsilon > 0$, queremos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| = |f(x) - 1/2| = |x - 1/2| = 0 < \epsilon,$$

sempre que $|x - 1/2| < \delta$.

- Qual valor de δ podemos escolher?
- Escolha um valor para ϵ. Qual valor de δ pode ser tomado?

Resposta: Qualquer valor de δ tal que $0 < \delta \leq \epsilon$.

Exemplo 5

Demonstração:

Dado qualquer $\epsilon > 0$, temos que

$$|f(x) - k| = |k - k| = 0 < \epsilon,$$

qualquer que seja o valor de $\delta > 0$ e $|x - a| < \delta$.

Alguns Exemplos com a Definição Precisa

Exemplo 6

Vamos verificar, no Geogebra, que

$$\lim_{x \to a} x^2 = a^2.$$

Para isso, baixe o arquivo Limite_Def_Precisa (Click aqui!) e abra-o no Geogebra .

Propriedades de Limites

Sejam **a** e **k** números reais.

Teorema 1

Suponha que $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$. *Então:*

1. $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L_1 + L_2;$
2. $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = L_1 - L_2;$
3. $\lim_{x \to a} [kf(x)] = k * \lim_{x \to a} f(x) = k * L_1;$
4. $\lim_{x \to a} [f(x) * g(x)] = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = L_1 * L_2;$

Propriedades de Limites

5. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, desde que $L_2 \neq 0$;

6. $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$, desde que $L_1 \geq 0$, se n for par.

Exemplos

Exemplo 7

Como $\lim_{x \to 0} x = 1$ e $\lim_{x \to 0} 2 = 2$, segue que

$$\lim_{x \to 0} (x + 2) = 1 + 2 = 3.$$

Exemplos

Exemplo 7

Como $\lim_{x\to 0} x = 1$ e $\lim_{x\to 0} 2 = 2$, segue que

$$\lim_{x\to 0}(x+2) = 1 + 2 = 3.$$

Por outro lado, não podemos escrever

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} + x\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} + \lim_{x\to 0} x,$$

pois $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ não existe.

Exemplos

Exemplo 8

Sendo $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ e $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, segue que

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x} - e^x\right) = 0 - 0 = 0.$$

Exemplos

Exemplo 8

Sendo $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, segue que

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}-e^x\right)=0-0=0.$$

Por outro lado, não podemos escrever

$$\lim_{x\to\infty}(e^x-x)=\lim_{x\to\infty}e^x-\lim_{x\to\infty}x,$$

pois os limites $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$ não existem.

Exemplos

Exemplo 9

Como $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, segue que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi}{x} = \pi \cdot 0 = 0.$$

Exemplos

Exemplo 9

Como $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, segue que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi}{x} = \pi \cdot 0 = 0.$$

Por outro lado, não podemos escrever

$$\lim_{x\to\infty} (e^x \cdot 0) = \lim_{x\to\infty} e^x \cdot \lim_{x\to\infty} 0,$$

pois o limite $\lim_{x\to\infty} e^x = +\infty$ não existe.

Exemplos

Exemplo 10

Temos $\lim_{x \to \sqrt{2}} x = \sqrt{2}$, logo

$$\lim_{x \to \sqrt{2}} x^2 = \lim_{x \to \sqrt{2}} x \cdot x = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2.$$

Exemplos

Exemplo 10

Temos $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} x = \sqrt{2}$, logo

$$\lim_{x \to \sqrt{2}} x^2 = \lim_{x \to \sqrt{2}} x \cdot x = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2.$$

Por outro lado, não podemos escrever

$$\lim_{x \to \infty} \left(e^x \cdot \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \to \infty} e^x \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x},$$

pois o limite $\lim\limits_{x \to \infty} e^x = +\infty$ não existe.

Exemplos

Exemplo 11

Como $\lim_{x\to -3} x+1 = -2$ e $\lim_{x\to -3} x+2 = -1$, temos

$$\lim_{x\to -3} \frac{x+1}{x+2} = \frac{\lim_{x\to -3} x+1}{\lim_{x\to -3} x+2} = \frac{-2}{-1} = 2.$$

Exemplos

Exemplo 11

Como $\lim_{x \to -3} x + 1 = -2$ e $\lim_{x \to -3} x + 2 = -1$, temos

$$\lim_{x \to -3} \frac{x+1}{x+2} = \frac{\lim_{x \to -3} x + 1}{\lim_{x \to -3} x + 2} = \frac{-2}{-1} = 2.$$

Por outro lado, não podemos escrever

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} = \frac{\lim_{x \to \infty} e^x}{\lim_{x \to \infty} x},$$

pois os limites $\lim_{x \to \infty} e^x = +\infty$ e $\lim_{x \to \infty} x = +\infty$ não existem.

Exemplos

Exemplo 12

Como $\lim_{x \to -3} x = -3$, temos

$$\lim_{x \to -3} \sqrt[5]{x} = \sqrt[5]{-3},$$

pois a raiz não é par e não precisamos nos preocupar com o sinal dentro dela.

Exemplos

Exemplo 12

Como $\lim_{x \to -3} x = -3$, temos

$$\lim_{x \to -3} \sqrt[5]{x} = \sqrt[5]{-3},$$

pois a raiz não é par e não precisamos nos preocupar com o sinal dentro dela.

Por outro lado, não podemos escrever

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x-2} = \sqrt{\lim_{x \to 0} (x-2)},$$

pois o limite $\lim_{x \to 0} (x-2) = -2$ é negativo e a raiz é par.

Exercício

Exercício 1

Seja $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, *com* $x \neq 1$. *Calcule* $\lim_{x \to 1} f(x)$.

Obs: Embora $x = 1$ não pertença ao domínio da função, podemos investigar o comportamento dessa função próximo deste ponto, uma vez que ela está definida para todos os pontos em torno do $x = 1$.

Limites Laterais

Função de Heaviside

- Em matemática e estatística, a função de **Heaviside** (ou função degrau), desenvolvida pelo matemático e engenheiro eletricista Oliver Heaviside, é uma função singular e descontínua (?) com valor zero quando o seu argumento é negativo e valor unitário quando o argumento é positivo.
- Quando o argumento é zero a função não precisa estar definida (ou pode-se definir qualquer valor, dependendo do contexto, por exemplo $1/2$ - a média dos limites laterias da função (pela esquerda e pela direita)).

Função de Heaviside

- Costuma-se defini-la como

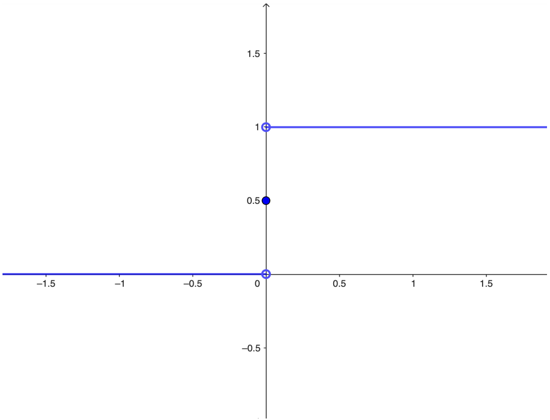
$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

- No caso em que ela está com um valor definido para o zero, podemos escrever, por exemplo:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/2, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

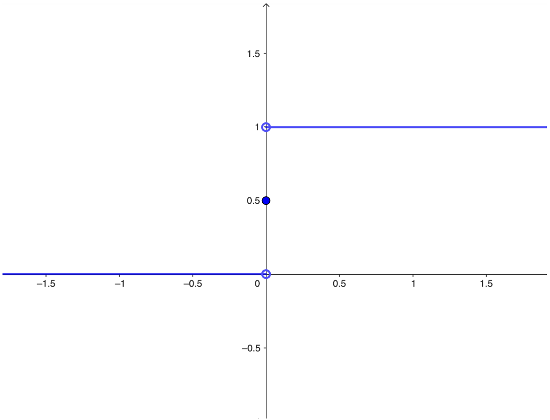
Função de Heaviside

- No segundo caso, seu gráfico é dado ao lado:



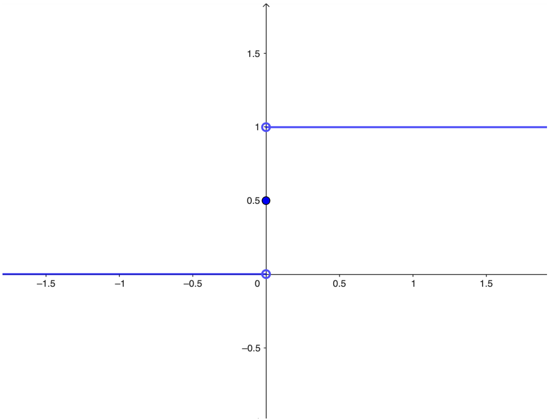
Função de Heaviside

- que você pode afirmar sobre os seguintes limites:
  a) $\lim_{x \to -0.5} H(x)$.
  b) $\lim_{x \to \pi/2} H(x)$.
  c) $\lim_{x \to 0} H(x)$.



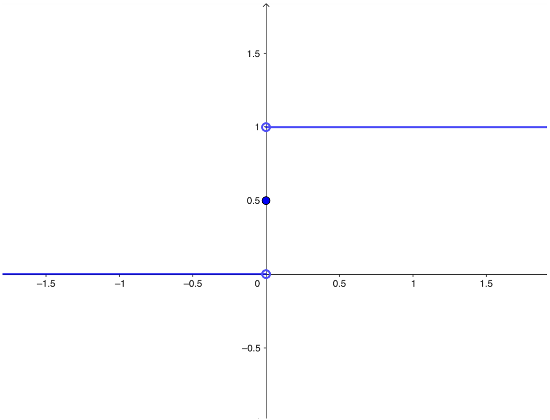
Função de Heaviside

- Se $a < 0$, então em torno desse valor (x arbitrariamente próximo de a) a função assume o valor constante $H(x) = 0$.
  - Logo, $\lim_{x \to a} H(x)$
- Se $a > 0$, então em torno desse valor (x arbitrariamente próximo de a) a função assume o valor constante $H(x) = 1$.
  - Logo, $\lim_{x \to a} H(x) = 1$.



Função de Heaviside

- Entretanto, se $a = 0$, então em torno desse valor (x arbitrariamente próximo de a) a função assume os dois valores, dependendo se estão à direita ou à esquerda de zero:
  - Logo, $\lim_{x \to 0} H(x) = \nexists$.



Limites Laterais - à direita

Definição 6

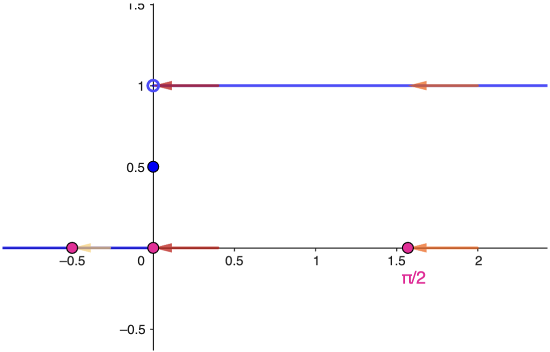
Limite à direita: *Se os valores assumidos por uma função f(x) arbitrariamente se aproximam de L, quando os valores de entrada x ficam cada vez mais próximos de a (mas sempre maiores), então L é chamado de limite de f(x) quando x se aproxima de a pela direita, o que se escreve como*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L.$$

Limites Laterais - à direita

Por exemplo, na função Heaviside, temos:

- $\lim_{x \to (\pi/2)^+} H(x) = 1.$
- $\lim_{x \to 0^+} H(x) = 1.$
- $\lim_{x \to -0.5^+} H(x) = 0.$



Limites Laterais - à esquerda

Definição 7

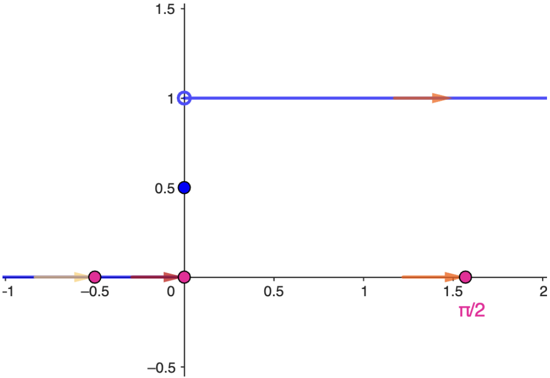
Limite à esquerda: *Se os valores assumidos por uma função f(x) arbitrariamente se aproximam de L, quando os valores de entrada x ficam cada vez mais próximos de a (mas sempre menores), então L é chamado de limite de f(x) quando x se aproxima de a pela esquerda, o que se escreve como*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L.$$

Limites Laterais - à esquerda

Por exemplo, na função Heaviside, temos:

- $\lim_{x \to (\pi/2)^-} H(x) = 1.$
- $\lim_{x \to 0^-} H(x) = 0.$
- $\lim_{x \to -0.5^-} H(x) = 0.$



Limites Laterais e a Definição de Limite

- É verdade que

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad \text{se, e somente se} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x).$$

  Com isso, temos que

  - $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} H(x) = 1 = \lim\limits_{x\to(\pi/2)^+} H(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pi/2} H(x) = 1;$
  - $\lim\limits_{x\to-0.5^-} H(x) = 0 = \lim\limits_{x\to-0.5^+} H(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to-0.5} H(x) = 0;$
  - $\lim\limits_{x\to 0^-} H(x) = 0 \neq 1 = \lim\limits_{x\to 0^+} H(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} H(x) = \nexists.$

- Todas a propriedades de limite são válidas para os limites laterais.

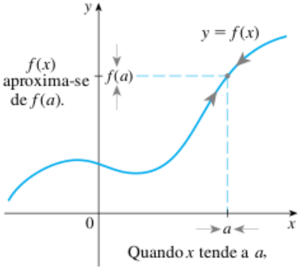
Continuidade

Definição

Definição 8

Uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é contínua em um ponto* $a \in A$ *se* $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

- Com isso, a função não tem interrupções ou mudanças abruptas no seu gráfico, dentro do seu domínio.
- Os fenômenos físicos são geralmente contínuos. Por exemplo, o deslocamento ou a velocidade de um veículo variam continuamente com o tempo, como a altura das pessoas. Mas descontinuidades ocorrem em situações tais como a corrente elétrica (modelada pela função de Heaviside).



Exemplo

Exemplo 13

a) A função $f(x) = 1$ se $x \neq 3$ não é contínua em $x = 3$, uma vez que 3 não está no domínio de f. Já para qualquer outro valor de $a \in \mathbb{R}$, com $a \neq 3$, temos

$$\lim_{x \to a} f(x) = 1 = f(a),$$

sendo f contínua em qualquer número real diferente de 3.

b) A função $g(x) = -x^2$ é contínua em $x = 2$, pois

$$\lim_{x \to 2} g(x) = -4 = g(2).$$

Exemplo

c) A função $h(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 0 \\ -1, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$ não é contínua em $x = 0$, pois seus limites laterais são distintos e $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$ não existe.

Tipos de Descontinuidade

Definição 9

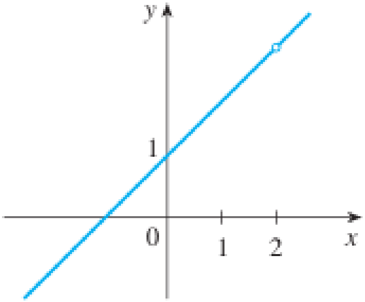
Uma função f é descontínua em $x = a$ se f não está definida em a ou se f não é contínua em a $\left(\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)\right)$.

A seguir, veremos os 4 tipos de descontinuidade:

Tipos de Descontinuidade: *a* fora do domínio

1. A função não está definida em a, logo não existe $f(a)$. Assim, f é descontínua em $x = a$.

- Na função ao lado, f não está definida em $x = 2$, sendo descontínua nesse ponto.

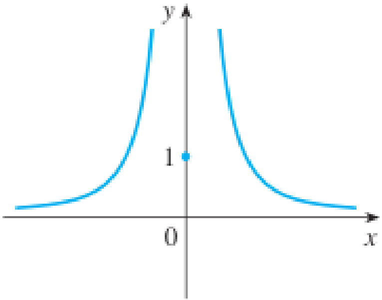


(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

Tipos de Descontinuidade: função explode

2. A função está definida em $x = a$, mas "explode" (tende a infinito ou a menos infinito), quando x tende a a.

- Na função ao lado, f tende ao infinito quando x tende a 0, sendo descontínua nesse ponto.

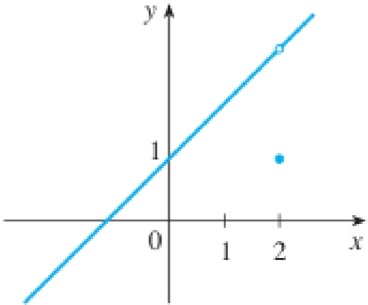


$$\text{(b) } f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Tipos de Descontinuidade: o limite não vai a $f(a)$

3. A função está definida em $x = a$, mas $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

- Na função ao lado, $\lim_{x \to 2} f(x) = 3 \neq 1 = f(2)$.

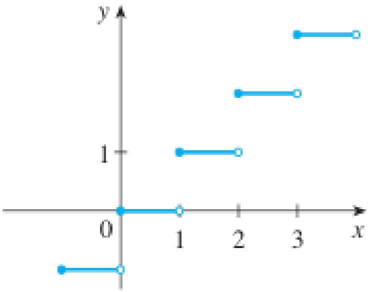


(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$

Tipos de Descontinuidade: tipo salto

4. Os limites laterais existem, mas são distintos. Portanto, $\lim_{x \to a} f(x)$ não existe.

- Na função ao lado, f possui saltos para valores de x no conjunto dos números inteiros.



(d) $f(x) = [\![x]\!]$

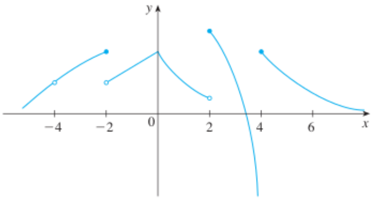
Exemplo

Exemplo 14

O gráfico de uma função f é dado abaixo.

a) Em $x = -4$, a função não está definida. Logo, f é descontínua em $x = -4$.

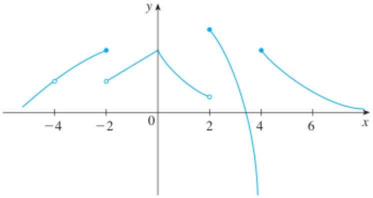
b) Em $x = -2$, a função está definida, porém seus limites laterais são diferentes. Assim, f é descontínua em $x = -2$.



Exemplo

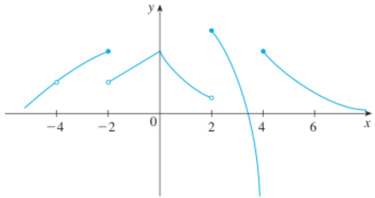
c) Em $x = 2$, a função está definida, porém seus limites laterais são diferentes. Assim, f é descontínua em $x = 2$.

d) Em $x = 4$, a função está definida, porém um dos seus limites laterais “explode”, a medida que os valores de x se aproximam de 4, pela esquerda.



Exemplo

e) Nos demais pontos, a função é contínua. Perceba que podemos desenhar o gráfico de modo contínuo, entre as descontinuidades listadas acima.



Funções Contínuas no seu Domínio

Algumas das funções que estudamos são contínuas em todos os pontos do seu domínio. São elas:

1.

Funções Contínuas no seu Domínio

1. As funções constantes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = c$, onde c é uma constante.
2. As funções polinomiais $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dadas por

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

   onde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são constantes.
3. As funções exponenciais $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, dadas por $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

Funções Contínuas no seu Domínio

4. As funções logarítmicas $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, dadas por $f(x) = \log_a(x)$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.
5. As funções do tipo potência: x^k, com $k \in \mathbb{R}$. Para cada potência, devemos observar o domínio particular (potências que são raízes pares devem tomar apenas números reais não negativos, por exemplo).

Funções Contínuas no seu Domínio

6. As funções trigonométricas clássicas:

$$\text{i)sen } : \mathbb{R} \to [-1, 1]$$
$$x \to \text{sen}\,(x)$$

$$\text{ii) cos } : \mathbb{R} \to [-1, 1]$$
$$x \to \cos(x)$$

$$\text{iii)tg } : \mathbb{R} - \{x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\} \to [-1, 1]$$
$$x \to \text{tg}\,(x),$$

onde $k \in \mathbb{Z}$.

Propriedades das Funções Contínuas

Teorema 2

Se as funções f e g são contínuas em $x = a$, então também são contínuas em $x = a$, as seguintes funções:

a) $f + g$, pois $\lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = f(a) + g(a)$.

b) $f - g$, pois $\lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = f(a) - g(a)$.

Propriedades das Funções Contínuas

c) cf, pois $c \lim_{x \to a} f(x) = cf(a)$, para qualquer constante $c \in \mathbb{R}$.

d) $f \cdot g$, pois $\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = f(a) \cdot g(a)$.

e) $\dfrac{f}{g}$, pois $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(a)}{g(a)}$, desde que $g(a) \neq 0$.

Exemplo

Exemplo 15

Temos que $f(x) = cos(x)$ *e* $g(x) = x^2$ *são funções contínuas em* $x = \dfrac{\pi}{2}$. *Como* $f(\frac{\pi}{2}) = 0$ *e* $g(\frac{\pi}{2}) = \dfrac{\pi^2}{4}$, *temos:*

a) $\lim\limits_{x \to \pi/2} [cos(x) + x^2] = 0 + \dfrac{\pi^2}{4} = \dfrac{\pi^2}{4}$.

b) *Não podemos aplicar nenhuma propriedade em* $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{x^2}{cos(x)}$, *pois* $cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Composição de Funções Contínuas

Teorema 3

Seja f contínua em b e $\lim_{x \to a} g(x) = b$, então $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$. Em outras palavras,

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x)).$$

Exemplo

Exemplo 16

Seja $f(x) = \sqrt{e^x + 1}$. *Vamos calcular* $\lim_{x \to 0} f(x)$.

Podemos reescrever f como sendo

$$\begin{aligned} f(x) &= (e^x + 1)^{1/2} \\ &= g(h(x)), \end{aligned}$$

onde $g(x) = x^{1/2}$ e $h(x) = e^x + 1$.

Exemplo

Como $h(x)$ é contínua em $x = 0$, por ser a soma de uma função exponencial com uma função constante, temos que

$$\lim_{x \to 0} h(x) = e^0 + 1 = 2 > 0.$$

Assim, como g é contínua no seu domínio $\mathbb{R}^+$, pois é uma função raiz, g é contínua em $x = 2$. Portanto, pelo Teorema 3,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} f(x) &= \lim_{x \to 0} g(h(x)) = g(\lim_{x \to 0} h(x)) \\ &= g(2) = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

A Derivada como um Limite

IMPORTANTE: Baixe o texto Derivada_Limite (Click aqui!) e leia um pouco sobre o conceito de Derivadas, através de limites.