GEOMETRIA PLANA

Aula 03

Triângulos

Karla Lima

Sumário

Introdução

Um pouco de História

- Os triângulos têm uma longa história que remonta a algumas das civilizações mais antigas do mundo.
- Desde os primórdios da geometria, eles têm sido objetos de estudo e fascínio.

Civilizações Antigas

- Egito Antigo (3000 a.C. - 332 a.C.): Os antigos egípcios demonstraram conhecimento básico de geometria ao construir suas pirâmides. Embora não tenham desenvolvido teoremas formais sobre triângulos, suas construções revelam uma compreensão prática dos princípios geométricos.

Civilizações Antigas

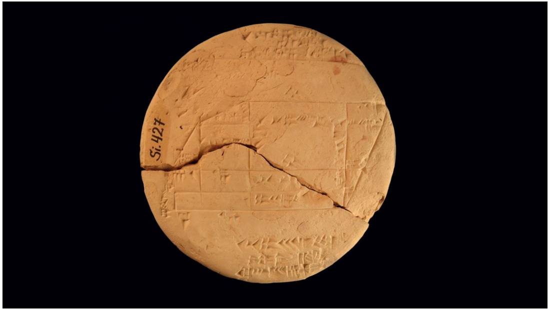


Figura 1: placa circular de argila com pelo menos 3.600 anos de idade produzida na Babilônia Antiga

- Mesopotâmia (4000 a.C. - 539 a.C.): Os sumérios e babilônios, que habitavam a região da Mesopotâmia, hoje parte do Iraque, também contribuíram para o desenvolvimento da geometria. Eles possuíam conhecimentos matemáticos avançados, incluindo o uso de triângulos em medições de terras e construções.

Civilizações Antigas

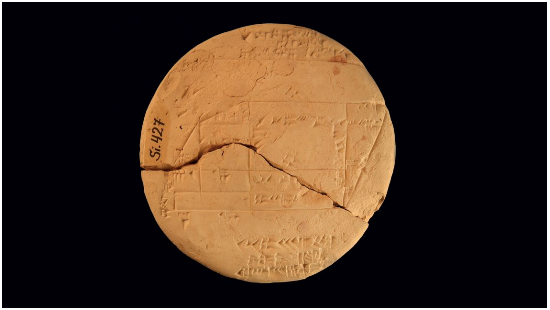


Figura 2: placa circular de argila com pelo menos 3.600 anos de idade produzida na Babilônia Antiga

- Parece ser o registro mais antigo já identificado de geometria aplicada, propõe o matemático Daniel Mansfield, da Universidade de Nova Gales do Sul, na Austrália.
- Segundo o matemático, esse é o único documento cadastral daquele período e representa um mapa usado por agrimensores para definir os limites de um terreno.

Civilizações Antigas

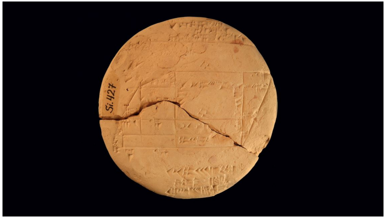


Figura 3: placa circular de argila com pelo menos 3.600 anos de idade produzida na Babilônia Antiga

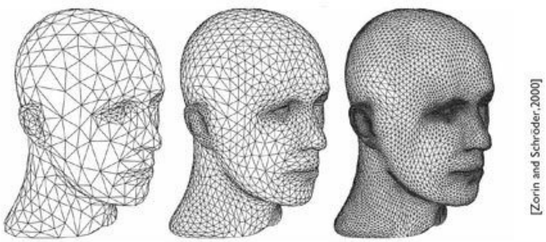
- "Ela nos dá detalhes jurídicos e geométricos de um campo que foi dividido após parte dele ter sido vendida".
- Nela, o agrimensor traça ângulos retos usando sequências de três números que formam triângulos retângulos, hoje conhecidas como trios pitagóricos [a], estabelecidos com base no famoso teorema de Pitágoras, matemático e filósofo grego que só nasceria mais de mil anos depois.

[a] é formado por três números naturais a, b e c tais que $a^2 = b^2 + c^2$.

Civilizações Antigas

- Geometria Grega: Pré-socráticos (séculos VII a VI a.C.)
  Os filósofos pré-socráticos, como Tales de Mileto, Pitágoras e outros, foram alguns dos primeiros a estudar formalmente os triângulos e suas propriedades. Pitágoras, em particular, é conhecido por seu famoso teorema sobre triângulos retângulos.
- Euclides (século III a.C.): Euclides, sistematizou o conhecimento matemático da época em sua obra "Os Elementos". Neste trabalho, ele dedica um livro inteiro à geometria, incluindo a teoria dos triângulos e muitos dos teoremas fundamentais ainda estudados hoje.

Era Moderna



- Nos tempos modernos, os triângulos continuam a ser uma parte essencial do currículo matemático, estudados desde as séries iniciais até níveis mais avançados de educação matemática.
- Suas propriedades geométricas e aplicações são amplamente exploradas em diversas áreas, desde a física e a engenharia até a computação e a arte.

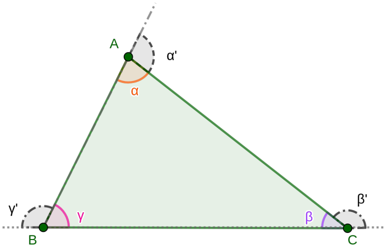
Triângulos

Definição

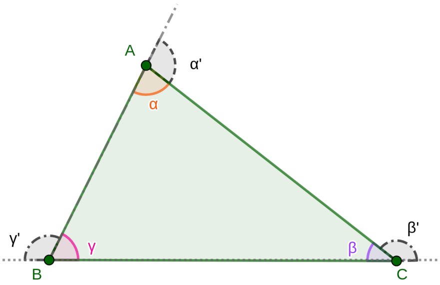
Definição 1

Sejam A, B e C três pontos não colineares.

Denominamos de ***triângulo*** *ABC a união dos segmentos* $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ *e* $\overline{BC}$ *e o denotaremos por* $\triangle ABC$.



Definição

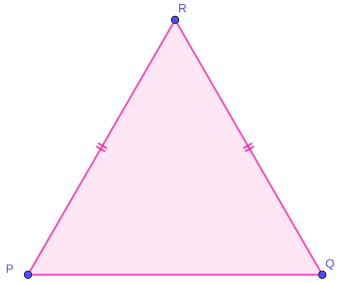


- Os pontos A, B e C são os **vértices** e os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são os **lados** do triângulo.
- Os ângulos $B\hat{A}C = \alpha$, $A\hat{B}C = \gamma$ e $A\hat{C}B = \beta$ são os **ângulos internos** do triângulo. Seus suplementos α', γ' e β' são os **ângulos externos** do triângulo.

Isósceles

Definição 2

*Um triângulo que tem dois lados congruentes é denominado **isósceles**.*

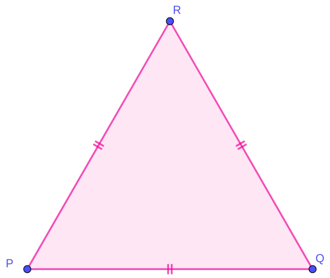


O outro lado é chamado **base** e o ângulo oposto à base é o **ângulo do vértice**.

Equilátero

Definição 3

Um triângulo cujos lados são congruentes chama-se ***equilátero****.*

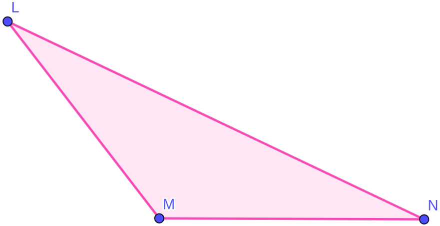


Obs: Todo triângulo equilátero possui dois lados congruentes, logo ele também será isósceles.

Escaleno

Definição 4

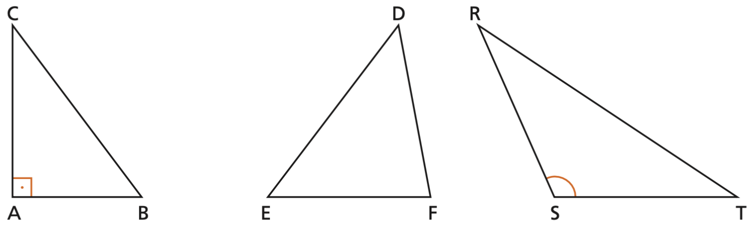
*Um triângulo no qual dois lados quaisquer não são congruentes, chama-se **escaleno**.*



Classificação: Ângulos

Quanto aos ângulos, os triângulos se classificam em:

- retângulos se, e somente se, têm um ângulo reto;
- acutângulos se, e somente se, têm os três ângulos agudos;
- obtusângulos se, e somente se, têm um ângulo obtuso.



$\triangle ABC$ é retângulo em A. $\triangle DEF$ é acutângulo. $\triangle RST$ é obtusângulo em S.

Congruência de Triângulos

Introdução

- Ao longo da história, a congruência de triângulos tornou-se uma parte fundamental da geometria, com muitos matemáticos contribuindo para seu estudo e desenvolvimento.
- A compreensão das propriedades que tornam dois triângulos congruentes é essencial em diversas áreas, desde a construção civil até a ciência da computação.
- A congruência de triângulos permanece como um dos pilares fundamentais da geometria.

Introdução

- A congruência de triângulos é um dos conceitos centrais da geometria. Ela nos permite entender e descrever as relações entre diferentes triângulos com base em suas propriedades geométricas.
- Isso é essencial para o desenvolvimento de teoremas e métodos de resolução de problemas geométricos.

Aplicações

- Na engenharia civil e na arquitetura, a congruência de triângulos é essencial para projetar estruturas sólidas e estáveis.
- Os princípios da congruência são aplicados no desenho de edifícios, pontes, estradas e outras estruturas.
- A congruência de triângulos está intimamente relacionada com a trigonometria, especialmente quando se trata de resolver problemas envolvendo ângulos e medidas de lados em triângulos.
- As relações trigonométricas são usadas para determinar a congruência de triângulos em muitos casos.

Definição de Congruência

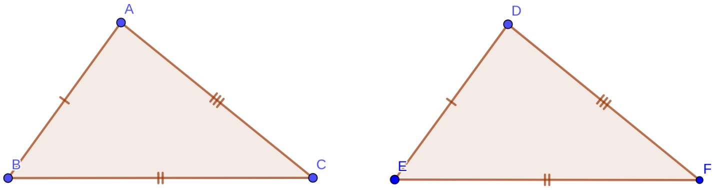
Definição 5

Um triângulo é congruente (símbolo $\equiv$) a outro se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que:

- *seus lados são ordenadamente congruentes aos lados do outro;*
- *seus ângulos são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro.*

Em linguagem popular, dizemos que duas figuras planas são congruentes se elas coincidem por superposição.

Definição de Congruência



- $\overline{AB} \equiv \overline{DE}, \overline{AC} \equiv \overline{DF}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$;
- $\hat{A} \equiv \hat{D}, \hat{B} \equiv \hat{E}$ e $\hat{C} \equiv \hat{F}$.

Exemplo

Exemplo 1

Suponhamos que os triângulos abaixo coincidem por superposição. Quais os pares de vértices que devem ser sobrepostos?

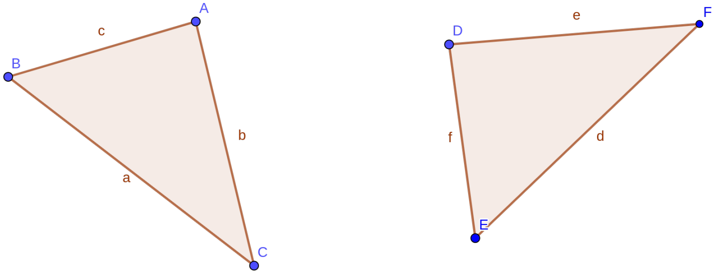


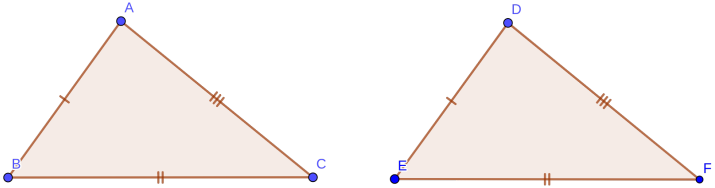
Figura 4: $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

Nomenclatura

- Os **vértices** que coincidem na superposição são denominados **correspondentes**.
- Os **lados** que unem vértices correspondentes são também chamados **correspondentes**.
- Analogamente, os **ângulos** cujos vértices estão em correspondência, são **correspondentes**.

Observação

Observe que em triângulos correspondentes, a ângulos congruentes opõem-se lados congruentes e vice-versa.



Notação: Para indicar que dois triângulos são congruentes, escrevemos:

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF.$$

A ordem em que as letras aparecem, indicam as correspondências entre os vértices.

Exercício

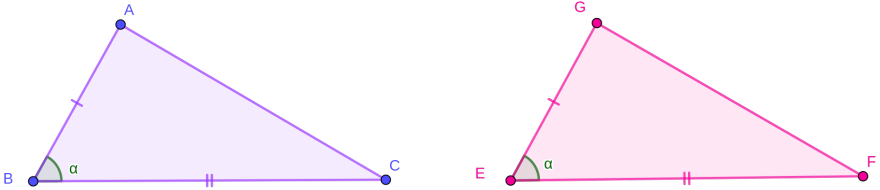
Baixe o arquivo LAL_1.ggb e abra no Geogebra.

1. Construa outro triângulo com dois lados congruentes aos lados $\overline{A'B}$ e $\overline{BC}$, com o ângulo formado por estes lados congruente ao ângulo $\hat{B}$.
2. Compare o comprimento do terceiro lado obtido e a medida dos outros dois ângulos com os correspondentes do triângulo original.

1° caso: LAL

Postulado: Caso LAL

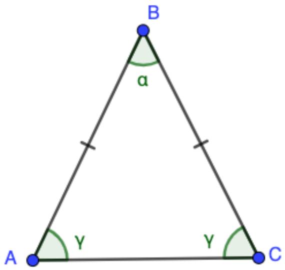
Se dois triângulos têm dois lados congruentes e os ângulos compreendidos entre eles são respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.



Teorema do Triângulo Isósceles

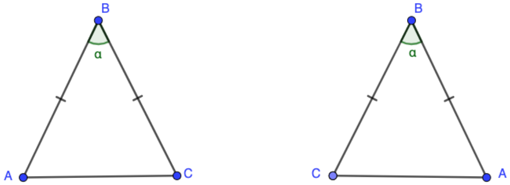
Teorema 1

Em todo triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.



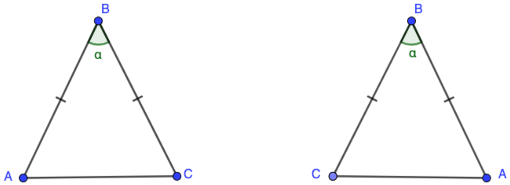
Demonstração: Teorema do Triângulo Isósceles

- A partir do triângulo *ABC*, obtemos os triângulo *CBA* ao espelharmos o triângulo inicial.
- Pelo caso LAL, os triângulos *ABC* e *CBA* são congruentes.



Demonstração: Teorema do Triângulo Isósceles

- Como ângulos opostos a lados congruentes são congruentes, e $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$, concluímos que $\hat{A} \equiv \hat{C}$.



Exercício

Baixe o arquivo ALA_1.ggb e abra no Geogebra.

1. Construa outro triângulo com lado congruente ao lado $\overline{A'B}$, com os ângulos adjacentes a este lado congruentes aos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$.
2. Compare o comprimento dos outros dois lados obtidos e a medida do outro ângulo com os correspondentes do triângulo original.

2° caso: ALA

Teorema 2

Se dois triângulos têm um lado congruente, compreendido entre dois ângulos respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.

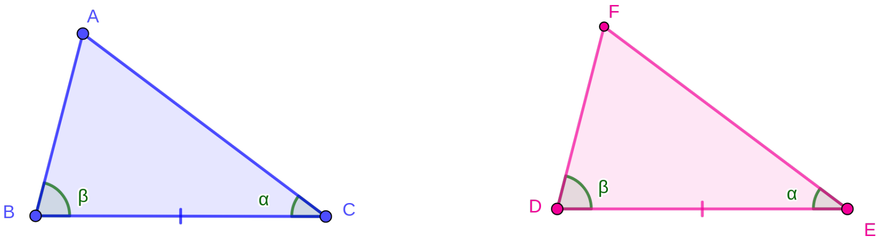


Figura 5: $\triangle ABC \equiv \triangle FDE$

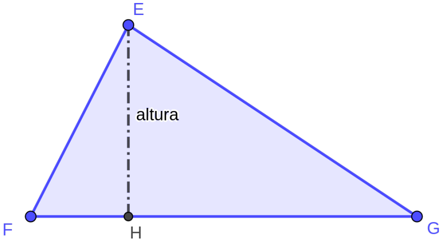
Lugares Geométricos no Triângulo

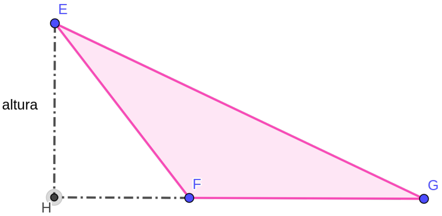
Perpendicularidade

- Como vimos, Euclides define ’ângulo reto’ como sendo igual ao ângulo formado por duas retas que se cortam de maneira a formar quatro ângulos iguais.
- Essas duas retas são ditas **perpendiculares** (símbolo: $\perp$).
- Dois segmentos são ditos perpendiculares quando ambos se intersectam formando um ângulo reto.

Altura

- se $\overrightarrow{EH}$ for perpendicular à reta que contém o lado $\overline{FG}$, o segmento $\overline{EH}$ chama-se **altura** do triângulo, relativa ao lado $\overline{FG}$.



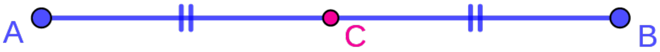


Ponto Médio

Definição 6

Um ponto C chama-se ***ponto médio*** *do segmento $\overline{AB}$, se:*

1. *C pertence ao segmento $\overline{AB}$ ($C \in \overline{AB}$);*
2. *O comprimento do segmento $\overline{AC}$ é igual ao do segmento $\overline{CB}$ ($AC = CB$).*



Ponto Médio (segmento)

Mediana

Definição 7

*Chama-se **mediana** de um triângulo ao segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto a ele.*

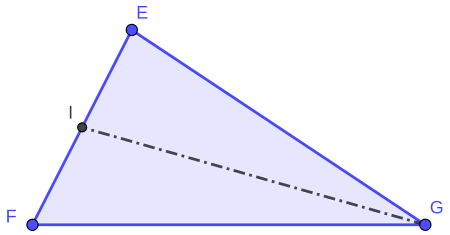


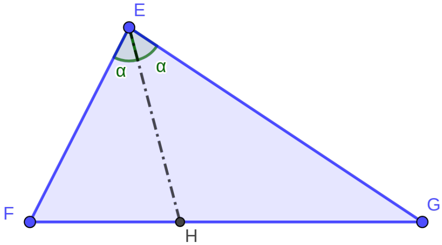
Figura 6: Na figura acima, $\overline{GI}$ é a mediana relativa ao lado EF

Bissetriz

Definição 8

Sejam EFG um triângulo e H um ponto da reta que contém o lado FG.

- *se a semirreta* $\overrightarrow{EH}$ *é bissetriz do ângulo* $\hat{E}$*, o segmento* $\overline{EH}$ *chama-se a* ***bissetriz interna*** *do triângulo, relativa ao lado* $\overline{FG}$*.*



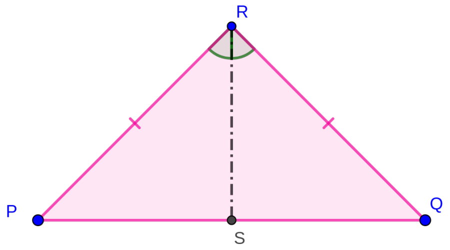
Bissetriz Interna

Problemas

Exercício

Exercício 1

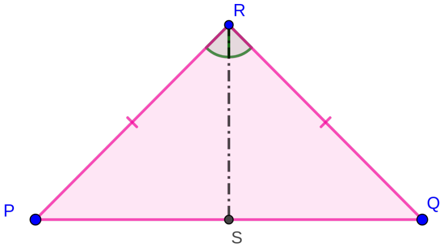
Mostre que, num triângulo isósceles, a bissetriz do ângulo do vértice é também mediana e altura.



Exercício

Exercício 2

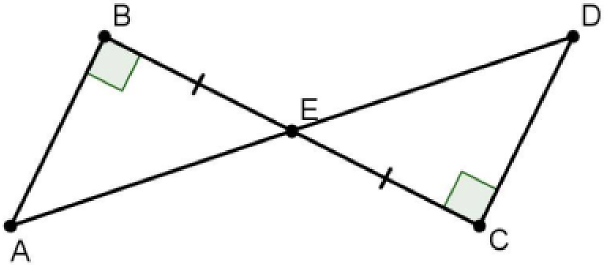
Mostre que, num triângulo isósceles, a altura relativa à base o divide em dois triângulos congruentes.



Exercício

Exercício 3

Na figura, temos $AB = 30$, $DE = 20$, $AE = 3x - 1$ *e* $CD = 2y + 8$. *Determine os valores de* x *e* y.



Exercício

Exercício 4

Num triângulo isósceles $\triangle ABC$*, de base* BC*, marcamos sobre o lado* BC *os pontos* D *e* E*, de maneira que* $BD \equiv EC$*. Mostre que* $\triangle ADB \equiv AEC$*.*

Exercício

Exercício 5

Na figura abaixo, $\overline{DC} \perp \overline{AB}$ e C é o ponto médio de $\overline{AB}$. Demonstre que os suplementos dos ângulos $D\hat{A}B$ e $D\hat{B}A$ são congruentes.