

Introdução ao Cálculo

Lista de Exercícios: P2

- 1 - Funções Exponenciais
 - 2 - Funções Logarítmicas
 - 3 - Funções Trigonométricas
 - 4 - Compostas e Inversas
 - 5 - O Limite de uma Função
-

1 Função Exponencial

1.1 Potências e Raízes

1. Calcule o valor de $A = (-1)^{2023} - (-1)^{2022} + (-1)^{3567} - (-1)^{1235}$.
2. Classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das sentenças abaixo:

(a) $5^3 \cdot 5^2 = 5^6$

(b) $3^6 : 3^2 = 3^3$

(c) $2^3 \cdot 3 = 6^3$

(d) $(2 + 3)^4 = 2^4 + 3^4$

(e) $(5^3)^2 = 5^6$

(f) $(-2)^6 = 2^6$

(g) $\frac{2^7}{2^5} = (-2)^2$

(h) $5^2 - 4^2 = 3^2$

3. Simplifique as expressões:

(a) $a^{2n+1} \cdot a^{1-n} \cdot a^{3-n}$

(b) $\frac{a^{2n+3} \cdot a^{n-1}}{a^{2(n-1)}}$

(c) $(a^{-1} + b^{-1}) \cdot (a + b)^{-1}$

(d) $\frac{2^{n+4} - 2 \cdot 2^n}{2 \cdot 2^{n+3}}$

4. Escreva cada potência abaixo como uma raiz:

(a) $9^{\frac{3}{2}}$

(b) $8^{\frac{4}{3}}$

(c) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$

(d) $64^{-\frac{2}{3}}$

Gabarito Seção 1.1

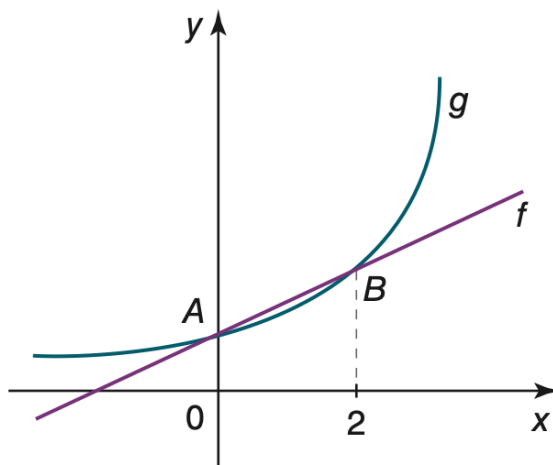
1. $A = -2$
2. (a) F
(b) F
(c) F

- (d) F
 - (e) V
 - (f) V
 - (g) V
 - (h) V
3. (a) a^5
- (b) a^{n+4}
- (c) $a^{-1} \cdot b^{-1}$
- (d) $\frac{7}{8}$
4. (a) $9^{\frac{3}{2}} = \sqrt{9^3}$
- (b) $8^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{8^4}$
- (c) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{4}$
- (d) $64^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{64^2}}$

1.2 Funções Exponenciais

1. Um capital inicial de R\$5.000 foi aplicado a juro composto, durante 7 meses, à taxa de 2% ao mês. Dado $(1,02)^7 \approx 1,15$, calcular:
 - (a) o montante acumulado ao fim dos 7 meses de aplicação.
 - (b) o juro produzido durante o período que durou a aplicação.
2. Um automóvel novo que foi comprado por R\$40.000,00 sofreu, em cada ano, desvalorização de 10%. Calcular seu valor, em real, depois de 3 anos de uso.
3. Um corretor de uma bolsa de valores previu que, durante certo dia, o preço de cada ação de uma empresa poderia ser determinado pela função $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ em que y é o preço, em real, e x é o tempo, em hora, decorrido a partir da abertura do pregão.
 - (a) Esboce o gráfico da função $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, considerando que o pregão teve exatamente 5 horas de duração.
 - (b) Observando o gráfico que você construiu, classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das afirmações:
 - i. $f(4) > f(3)$
 - ii. $f(2) < f(1)$
 - iii. Se x_1 e x_2 são elementos do domínio de f , com $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$.

4. Um capital de R\$ 1.000,00 foi aplicado à taxa de juro composto de 10% ao ano.
- (a) Escreva uma equação que expresse o montante acumulado em função do tempo t , em ano.
- (b) Durante quanto tempo o montante acumulado será inferior a R\$ 1.331,00?
5. Estude o sinal das funções abaixo:
- (a) $f(x) = e^x(x - 1)$
- (b) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x (x^2 - 1)$
- (c) $h(x) = 2^x x^2 + 2^x$
6. Na figura abaixo, os pontos A e B são as intersecções dos gráficos das funções f e g .



Se $g(x) = (\sqrt{2})^x$ e f é uma função afim, então $f(10)$ é igual a

- a) 3 b) 4 c) 6 d) 7 e) 9

Gabarito Seção 1.2

1. (a) $M \approx \text{R\$}5750,00$.
 (b) $J \approx \text{R\$}750,00$.
2. 29.160,00.
3. (a) i. V
 ii. F
 iii. V
4. (a) $M = 1000 \cdot 1,1^t$.

- (b) $t < 3$.
5. (a) $f(x) < 0$ se $x < 1$; $f(x) > 0$ se $x > 1$ e $f(x) = 0$ se $x = 1$.
 (b) $g(x) < 0$ se $-1 < x < 1$; $g(x) > 0$ se $x < -1$ ou $x > 1$ e $g(x) = 0$ se $x = -1$ ou $x = 1$.
 (c) $h(x) > 0$ para todo número real x .
6. c) 6

2 Funções Logarítmicas

1. Cada uma das figuras abaixo usa emojis para representar algumas propriedades dos logaritmos. Identifique cada uma das propriedades ilustradas.

$$\log(\text{👁️👁️}) = \log(\text{👁️}) + \log(\text{👁️})$$

(a)

$$\log(\text{🏃🐎}) = \log(\text{🏃}) - \log(\text{🐎})$$

(b)

$$\log(\text{😬}) = \text{💧} \log(\text{😄})$$

(c)

$$\log(\text{😬}) = -\log(\text{😄})$$

(d)

2. Determine o valor das incógnitas a , b e c em:

- (a) $\log_2 a = 2$
 (b) $\log_{25} 5^b = b + 1$
 (c) $c \cdot \log_9 3 = 2c + 1$

3. O pH de uma solução aquosa é definido pela expressão $pH = -\log[H^+]$, em que $[H^+]$ indica a concentração, em mol/L , de íons de hidrogênio na solução e \log , o logaritmo na base 10. Ao analisar determinada solução, um pesquisador verificou que, nela, a concentração de íons de hidrogênio era $[H^+] = 5,4 \cdot 10^{-8} mol/L$. Então, o valor aproximado que o pesquisador obteve para o pH dessa solução foi:

a) 7,26

b) 7,32

c) 7,58

d) 7,74

4. A desintegração nuclear é regida pela equação exponencial $N = N_0 e^{-\lambda t}$, em que λ é uma constante, N_0 é a quantidade inicial e N é a quantidade após um tempo t . A equação que fornece o tempo, em qualquer instante, é:

a) $t = -\lambda(N - N_0) \ln e$ b) $t = \left(\frac{N}{N_0}e\right)^{-\lambda}$ c) $t = \sqrt{\frac{N}{N_0}}e$ d) $t = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln\left(\frac{N}{N_0}\right)$

5. Para quais valores de x podemos calcular as funções a seguir:

(a) $f(x) = \log_4(2x - 12)$

(b) $f(x) = \log_{x-5}(x^2 - 4x)$

6. Classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) as afirmações seguintes, sendo $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

(a) $\log_3 x = \log_3 5 \Leftrightarrow x = 5$

(b) $\log_3 a > \log_3 10 \Leftrightarrow a > 10$

(c) $\log_{\frac{1}{3}} b > \log_{\frac{1}{3}} 10 \Leftrightarrow b > 10$

7. A inversa da função $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x}$ é:

(a) $y = \ln(x - 1)$

(b) $y = \ln(2x - 2)$

(c) $y = 2 \ln(x + 1)$

(d) $y = \ln(\sqrt{x - 1})$

(e) $y = \ln\left(\frac{1}{x - 1}\right)$

8. Estude o sinal das funções abaixo:

(a) $f(x) = (2x - 3) \log(x)$

(b) $g(x) = x^2 \ln(x - 1)$

(c) $h(x) = (x^2 - 2x) \ln(x - 1)$

Gabarito Seção 2

- 1.
2. (a) $a = 4$
(b) $b = -2$
(c) $c = -\frac{2}{3}$
3. a)
4. d)
5. (a) $x > 6$.
(b) $x > 5$ e $x \neq 6$.
6. (a) V
(b) V
(c) F
7. e)
8. (a) $f(x) < 0$ se $1 < x < \frac{3}{2}$; $f(x) > 0$ se $0 < x < 1$ ou $x > \frac{3}{2}$ e $f(x) = 0$ se $x = \frac{3}{2}$.
(b) $g(x) < 0$ se $1 < x < 2$ e $g(x) > 0$ se $x > 2$. Não há zeros para $g(x)$, no domínio $x > 1$.
(c) $h(x) > 0$ se $1 < x < 2$ ou $x > 2$ e $h(x) = 0$, para $x = 2$. Não há valores de h negativos, no domínio $x > 1$.

3 Funções Trigonômicas

1. O ponteiro de um relógio de medição funciona acoplado a uma engrenagem de modo que, a cada volta completa da engrenagem, o ponteiro dá $\frac{1}{4}$ de volta em um mostrador graduado de 0° a 360° . No início da medição, o ponteiro encontra-se na posição 0° . Quantos graus indicará o ponteiro quando a engrenagem tiver completado 4.135 voltas?
2. Sendo a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 2 \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(2x) + \cos(3x),$$

calcule:

- (a) $f(\frac{\pi}{2})$
- (b) $f(\pi)$

(c) $\frac{f(0) + f(2\pi)}{f(\frac{3\pi}{2})}$

3. Sendo a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 3\text{sen}(x) + 1,$$

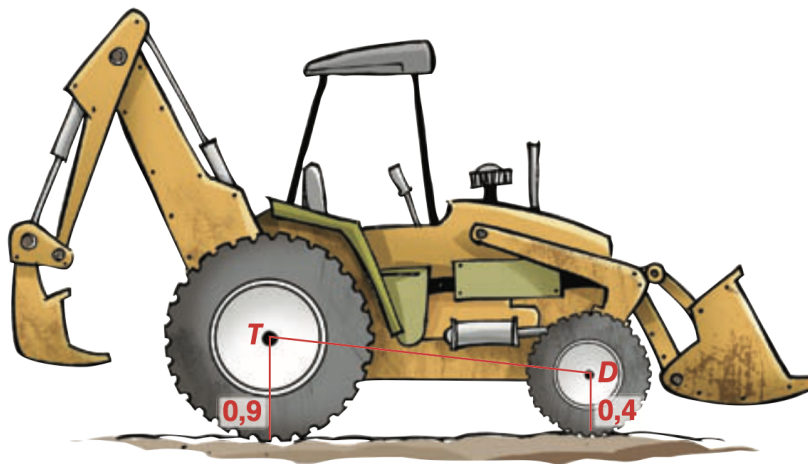
determine o valor máximo e o valor mínimo de f .

4. Determine os valores de $\text{sen}(x)$ e $\cos(x)$ sabendo que:

(a) $\text{sen}(x) = 3\cos(x)$ e que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$;

(b) $\text{sen}(x) = \frac{m}{6}$ e $\cos(x) = \frac{\sqrt{4m}}{3}$.

5. cada pneu traseiro de um trator tem raio de $0,9\text{ m}$ e cada pneu dianteiro tem raio de $0,4\text{ m}$. Calcule a distância entre os centros T e D de dois pneus de um mesmo lado do trator, sabendo que a reta \overleftrightarrow{TD} forma um ângulo obtuso (entre 0 e 90 graus) de medida α com o solo plano tal que $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$.



6. Resolva as inequações abaixo:

(a) $2\cos^2(x) - \cos(x) < 0$, para $0 \leq x \leq 2\pi$.

(b) $4\cos^2(x) - 1 \leq 0$, para $0 \leq x < 2\pi$.

Gabarito Seção 3

1. 270° .

2. a) $f(\frac{\pi}{2}) = 2$; b) $f(\pi) = -1$ e c) $\frac{f(0) + f(2\pi)}{f(\frac{3\pi}{2})} = -1$.

3. Valor máximo: 4. Valor mínimo: -2.

4. a) $\sin(x) = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$ e $\cos(x) = -\frac{\sqrt{10}}{10}$.
 b) $\sin(x) = \frac{1}{3}$ e $\cos(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.
5. 2,5 metros.
6. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R}; \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{3}\right\}$
 b) $S = \left\{x \in \mathbb{R}; \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}\right\}$

4 Compostas e Inversas

1. Dadas as funções $f(x) = 2x + 5$ e $g(x) = x^2 - 2$, determine:

- (a) $g \circ f(3)$
 (b) $f \circ g(3)$
 (c) $g \circ f(x)$
 (d) $f \circ g(x)$

2. Escreva as funções abaixo como a composta de duas funções:

- a) $h(x) = (3x^4 + 5)^3$
 b) $h(x) = \sqrt{x^2 + 5x - 6}$
 c) $h(x) = \sqrt{1 + \cos^2 x}$
 d) $h(x) = \sin(2x - \pi/3)$
 e) $h(x) = e^{3 \tan x}$

3. Nos itens abaixo, confirme se f e g são inversas, mostrando que $f(g(x)) = g(f(x)) = x$.

- (a) $f(x) = 3x - 2$ e $g(x) = \frac{x+2}{3}$
 (b) $f(x) = \frac{x+1}{4}$ e $g(x) = 4x - 3$
 (c) $f(x) = x^3 + 1$ e $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$
 (d) $f(x) = \frac{x+1}{x}$ e $\frac{1}{x-1}$
 (e) $f(x) = \ln(x-1)$ e $e^x + 1$.

1. (a) 119
 (b) 19
 (c) $g \circ f(x) = 4x^2 + 20x + 23$
 (d) $f \circ g(x) = 2x^2 + 1$
 2. a) $f(x) = x^3$ e $g(x) = 3x^4 + 5$
 b) $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 + 5x - 6$
 c) $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 1 + \cos^2 x$
 d) $f(x) = \sin x$ e $g(x) = 2x - \pi/3$
 e) $f(x) = e^x$ e $g(x) = 3 \tan x$
- (a) São inversas.
 (b) Não são inversas.
 (c) São inversas.
 (d) São inversas.
 (e) São inversas.

5 O Limite de uma Função

1. Calcule os limites justificando cada passagem com as propriedades dos limites que forem usadas.

$$a) \lim_{x \rightarrow 4} (5x^2 - 2x + 3) \qquad b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 2}{x^2 + 4x - 3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1 + 3x}{1 + 4x^2 + 3x^4} \right)^3 \qquad d) \lim_{t \rightarrow \sqrt{2}} t^4(t^2 + 1)$$

2. Usando a continuidade das funções, determine os limites abaixo:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} (3x^4 + 5)^3$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \sqrt{x^2 + 5x - 6}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \pi} \sqrt{1 + \cos^2 x}$$

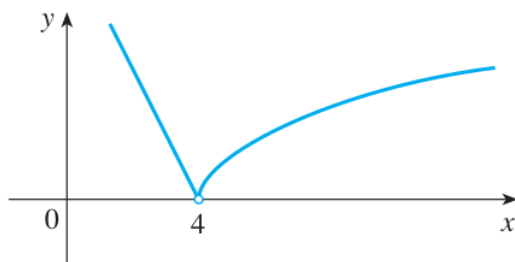
$$d) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin(2x - \pi/3)$$

e) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} e^{3 \tan x}$

3. Seja

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4}, & \text{se } x > 4 \\ 8-2x, & \text{se } x \leq 4, \end{cases}$$

sendo seu gráfico dado abaixo:



Calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x);$

a) $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x);$

a) O $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ existe? Justifique sua resposta.

4. Seja $F(x) = \frac{x}{|x|}$.

a) Qual o domínio da função F ?

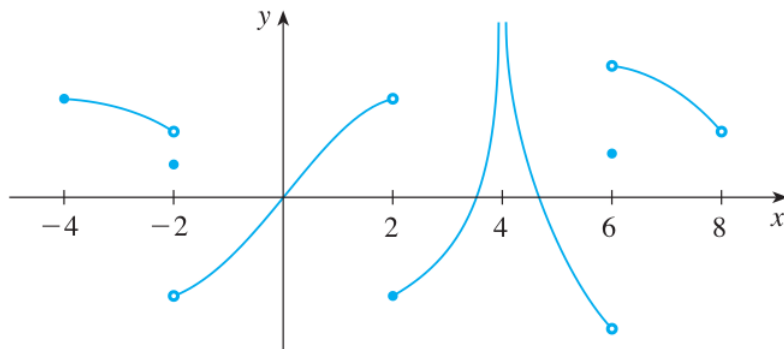
b) Sabemos que $|x|$ é uma função definida por partes:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Usando a regra de $|x|$, descreva $F(x)$ como uma função definida por partes.

c) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. O $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existe? Justifique sua resposta.

Do gráfico de g , identifique seus pontos de descontinuidades e classifique-os como um dos quatro tipos descritos na 19.



Gabarito Seção 5

1.

$$a) \lim_{x \rightarrow 4} (5x^2 - 2x + 3) = 75$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 2}{x^2 + 4x - 3} = \frac{1}{2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1 + 3x}{1 + 4x^2 + 3x^4} \right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} t^4(t^2 + 1) = 12$$

2. a) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 0;$

a) $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 0;$

a) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0$, pois os limites laterais existem e são iguais.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (3x^4 + 5)^3 = 125$

b) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \sqrt{x^2 + 5x - 6} = \sqrt{5\sqrt{2} - 4}$

c) $\lim_{x \rightarrow \pi} \sqrt{1 + \cos^2 x} = \sqrt{2}$

d) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin(2x - \pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} e^{3 \tan x} = e^3$

3. a) $D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\}$

$$\text{b) } F(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

Portanto, temos que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ não existe, pois os limites laterais apesar de existirem, não são iguais.