ELEMENTOS DE ARITMÉTICA

Aula 10

Números Reais

Karla Lima

Sumário

Intervalos da Reta

Intervalos Abertos. Intervalos Fechados.

Os **intervalos** são subconjuntos da reta, definidos pela relação de ordem dada na seção anterior.

1. O **intervalo aberto** (a, b) é o conjunto de todos os números reais que são maiores que a e menores que b:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}.$$

2. O **intervalo fechado** $[a, b]$ é o conjunto de todos os números reais que são maiores que ou iguais a a e menores que ou iguais a b:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}.$$

Intervalos

3. O **intervalo semiaberto** $[a, b)$ é o conjunto de todos os números reais que são maiores que ou iguais a a e menores que b:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}.$$

4. O **intervalo semiaberto** $(a, b]$ é o conjunto de todos os números reais que são maiores que a e menores que ou iguais a b:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}.$$

Exemplo

Exemplo 1

Abaixo, a representação na reta do intervalo semiaberto $[1, 4)$*:*

Exemplo

Exemplo 1

Abaixo, a representação na reta do intervalo semiaberto $[1, 4)$*:*

Responda: Os números 1, $\sqrt{2}$, e, $\dfrac{5}{2}$, π, 4, -2 e 4.7 pertencem ao intervalo $[1, 4)$?

Intervalos Infinitos

Usamos os símbolos ∞ e $-\infty$ para dizer que os conjuntos são ilimitados superior e inferiormente, respectivamente.

O intervalo aberto (a, ∞) é o conjunto de todos os números reais maiores que a:

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} |\, a < x\}.$$

Intervalos Infinitos

O intervalo aberto $(-\infty, b)$ é o conjunto de todos os números reais menores que b:

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} | x < b\}.$$

Intervalos Infinitos

O intervalo fechado $[a, \infty)$ é o conjunto de todos os números reais maiores que ou iguais a a:

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | \, a \leq x\}.$$

Intervalos Infinitos

O intervalo fechado $(-\infty, b]$ é o conjunto de todos os números reais menores que ou iguais a b:

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq b\}.$$

Exemplo

Exemplo 2

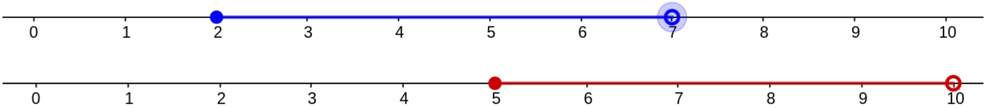
Dados os intervalos

$$[2,7) = \{x \in \mathbb{R} | 2 \leq x < 7\} \quad e \quad [5,10) = \{x \in \mathbb{R} | 5 \leq x < 10\},$$

vamos determinar os conjuntos $[2,7) \cup [5,10)$ *e* $[2,7) \cap [5,10)$.

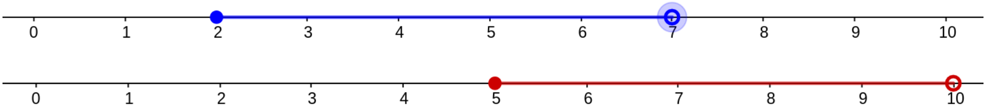
Exemplo

Vamos representar esses intervalos na reta, onde a bola aberta significa que o extremo não pertence ao intervalo e a bola fechada significa que o extremo pertence ao intervalo.



Exemplo

Vamos representar esses intervalos na reta, onde a bola aberta significa que o extremo não pertence ao intervalo e a bola fechada significa que o extremo pertence ao intervalo.



Exemplo

A união destes intervalos, $[2, 7) \cup [5, 10)$, é o conjunto de todos os números da reta pintados em azul ou vermelho:

Neste caso, podemos escrever esta união como sendo um único intervalo:

$$[2, 7) \cup [5, 10) = [2, 10) = \{x \in \mathbb{R} | 2 \leq x < 10\}.$$

Exemplo

Por outro lado, $[2, 7) \cap [5, 20)$ é o conjunto dos números da reta que estão, ao mesmo tempo, pintados em azul e vermelho.

Exemplo

Por outro lado, $[2,7) \cap [5,20)$ é o conjunto dos números da reta que estão, ao mesmo tempo, pintados em azul e vermelho.

Neste caso, podemos escrever esta interseção como sendo o intervalo

$$[2,7) \cap [5,20) = [5,7).$$

Exemplo

Exemplo 3

No exemplo anterior, o resultado das operações entre os dois intervalos continuou sendo um intervalo. Isso geralmente não acontece, como podemos ver ao tomar os seguintes intervalos:

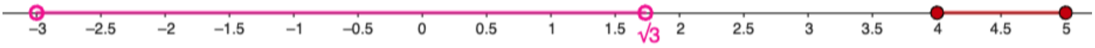
$$(-3, \sqrt{3}) = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x < \sqrt{3}\} \quad e \quad [4, 5] = \{x \in \mathbb{R} | 4 \leq x \leq 5\}.$$

Exemplo

Representando esses intervalos na reta, obtemos

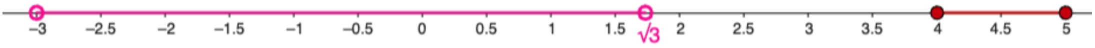
Exemplo

A união destes intervalos, $(-3, \sqrt{3}) \cup [4, 5]$, é o conjunto de todos os números da reta pintados em azul ou vermelho:



Exemplo

A união destes intervalos, $(-3, \sqrt{3}) \cup [4, 5]$, é o conjunto de todos os números da reta pintados em azul ou vermelho:

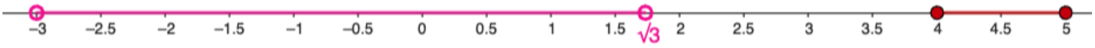


Neste caso, podemos escrever esta união como sendo um único intervalo:

$$(-3, \sqrt{3}) \cup [4, 5] = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x < \sqrt{3} \text{ ou } 4 \leq x \leq 5\}.$$

Exemplo

A união destes intervalos, $(-3, \sqrt{3}) \cup [4, 5]$, é o conjunto de todos os números da reta pintados em azul ou vermelho:



Neste caso, podemos escrever esta união como sendo um único intervalo:

$$(-3, \sqrt{3}) \cup [4, 5] = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x < \sqrt{3} \text{ ou } 4 \leq x \leq 5\}.$$

Como os números entre $\sqrt{3}$ e 4 não estão no intervalo vermelho ou no intervalo azul, não podemos escrever a união como um único intervalo.

Exemplo

Por outro lado, $(-3, \sqrt{3}) \cap [4, 5]$ é o conjunto dos números da reta que estão, ao mesmo tempo, pintados em azul e vermelho.

Exemplo

Por outro lado, $(-3, \sqrt{3}) \cap [4, 5]$ é o conjunto dos números da reta que estão, ao mesmo tempo, pintados em azul e vermelho.

Neste caso, não há número real que satisfaça esta condição. Quando um conjunto não possui elementos, denotamos por conjunto vazio e escrevemos:

$$(-3, \sqrt{3}) \cap [4, 5] = \varnothing.$$

Potenciação e Radiciação

Potências Inteiras

Definição 1

Potenciação é uma operação do tipo

$$a^b = c$$

*onde o número a é chamado de **base**, b de **expoente** e c de **potência**.*

Potências Inteiras

- Se a é um número real positivo ($a \in \mathbb{R}^+$) e b é um número inteiro positivo ($b \in \mathbb{Z}^+$), então podemos escrever

$$a^b = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{b \text{ fatores}}$$

Potências Inteiras

- Se a é um número real positivo ($a \in \mathbb{R}^+$) e b é um número inteiro negativo ($b \in \mathbb{Z}^-$), então $-b$ é um número inteiro positivo e podemos escrever

$$
\begin{aligned}
a^b = a^{-(-b)} &= (a^{-b})^{-1} \\
&= \frac{1}{a^{-b}} \\
&= \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{-b \text{ fatores}}}
\end{aligned}
$$

Potências Inteiras

- Você consegue demonstrar por que $a^0 = 1$, qualquer que seja o número real $a > 0$?

Potências Inteiras

- Por que não podemos usar a mesma ideia para concluir algo sobre 0^0?

Radiciação

Definição 2

Radiciação é uma operação do tipo

$$\sqrt[n]{c} = a \Leftrightarrow a^n = c$$

onde o número a é chamado de ***raiz n-ésima*** *de c, $c \geq 0$ de* ***radicando*** *e $n \in \mathbb{Z}$ de* ***índice da raiz.***

Exemplo

Exemplo 4

a) $\sqrt[3]{2} = 2^{1/3}$

b) $\sqrt{\pi} = \pi^{1/2}$ *(Não escrevemos o 2 nas raízes quadradas.)*

c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} = 2^{-1/3}$

Potências Racionais

- Se a é um número real positivo ($a \in \mathbb{R}^+$) e $b = \dfrac{n}{d}$ é um número racional positivo ($b \in \mathbb{Q}^+$), então podemos escrever

$$a^b = a^{\frac{n}{d}} = \sqrt[d]{a^n}$$

Potências Racionais

- Se a é um número real positivo ($a \in \mathbb{R}^+$) e $b = \dfrac{n}{d}$ é um número racional positivo ($b \in \mathbb{Q}^+$), então podemos escrever

$$a^b = a^{\frac{n}{d}} = \sqrt[d]{a^n}$$

- Ou seja, transforma-se a potenciação com números racionais em uma radiciação, e vice-versa.

Potências Irracionais

- Se a é um número real positivo ($a \in \mathbb{R}^+$) e b é um número irracional ($b \in \mathbb{I}$), então a^b é obtido através de limite de sequências de potências racionais (isso fica para o curso de Análise!).
- Basta usar a calculadora e ela te dará uma aproximação dos valores destas potências.

Base Real Negativa

- É preciso investigar o caso das potências com base real negativa.
- Já vimos que para bases positivas, racionais ou reais, a potência pode sempre ser definida, para qualquer expoente real não nulo.

Base Real Negativa

O que ocorre com a base negativa?

Base Real Negativa

O que ocorre com a base negativa?

- Não há problemas, se o expoente for inteiro: $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$.

Base Real Negativa

O que ocorre com a base negativa?

- Não há problemas, se o expoente for inteiro: $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$.
- Mas com expoente racional, é preciso atenção: $(-4)^{\frac{1}{2}}$ não é um número real!
    - O produto de um número real por ele mesmo é sempre um número positivo ou igual a zero:

Base Real Negativa

- Da definição,

$$(-4)^{\frac{1}{2}} = a \Leftrightarrow a^2 = -4.$$

- Não é possível encontrar número real a que seu quadrado seja negativo.

Base Real Negativa

- Da definição,

$$(-4)^{\frac{1}{2}} = a \Leftrightarrow a^2 = -4.$$

- Não é possível encontrar número real a que seu quadrado seja negativo.
- Isso acontece com TODAS as raízes PARES.

Propriedades

Sejam a, b, m e n números reais. A potenciação, quando possível, possui as seguintes propriedades:

i) $1^n = 1$;

ii) $a^n a^m = a^{m+n}$;

iii) $(a^n)^m = a^{mn}$;

iv) $a^n b^n = (ab)^n$;

v) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.