



## Aula 02

### Ângulos

Karla Lima

# Sumário



## 1. Definição e Propriedades

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the top-left corner, while a light gray shape occupies the bottom-left corner. The rest of the slide is white. The text is centered in the white area.

# Definição e Propriedades

# AVISO



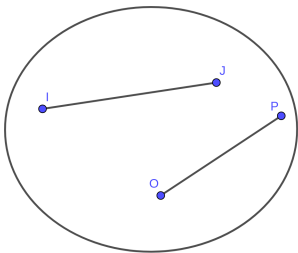
Nesta aula, todas os entes geométricos estão situados num mesmo plano  $\alpha$ .

# Conjuntos Convexos

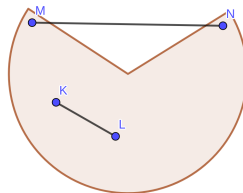


## Definição 1

Um conjunto  $A$  chama-se **convexo**, se para cada dois pontos  $X$  e  $Y$  de  $A$ , o segmento  $\overline{XY}$  está contido em  $A$ .



Conjunto Convexo



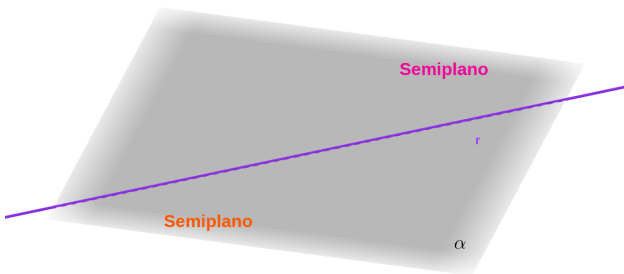
Conjunto Não-Convexo

# Postulado da Separação dos Pontos de um Plano



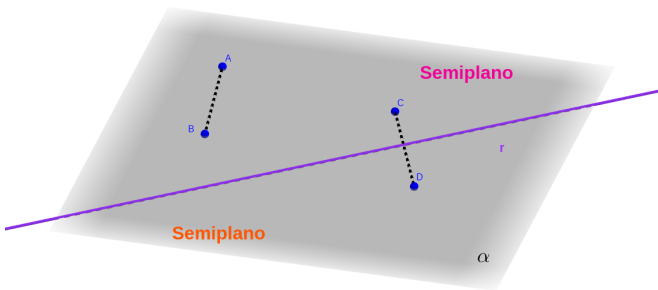
## Postulado da Separação dos Pontos de um Plano

Toda reta de um plano divide-o em dois conjuntos, os quais são convexos, denominados **semiplanos**.



A reta  $r$  chama-se **aresta** de cada semiplano de  $\alpha$ .

# Postulado da Separação dos Pontos de um Plano



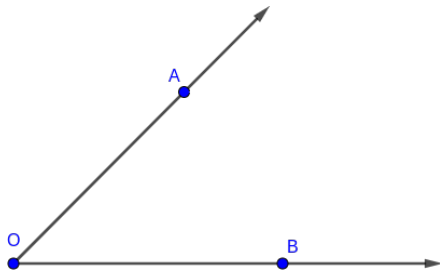
- ▶ Se  $A$  e  $B$  pertencem a um mesmo semiplano, o segmento  $\overline{AB}$  está contido no mesmo semiplano e não intercepta a reta  $r$ .
- ▶ Se os pontos  $C$  e  $D$  pertencem a semiplanos distintos, o segmento  $\overline{CD}$  intercepta a reta  $r$ .

# Ângulos



## Definição 2

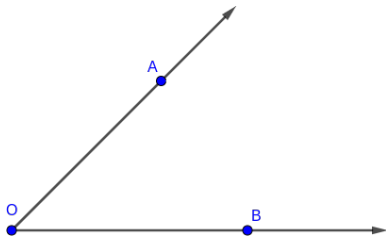
Chamamos de **ângulo** a figura formada por duas semirretas que têm a mesma origem.



As semirretas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$  são chamados **lados** do ângulo e a origem comum  $O$  é o seu vértice.



# Notações



Para denotar este ângulo, escrevemos:

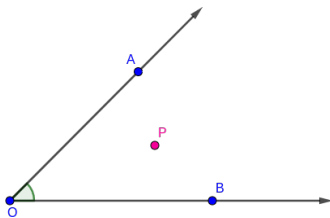
- ▶  $\hat{O}$
- ▶  $\hat{AOB}$
- ▶  $\hat{BOA}$
- ▶ uma letra grega:  $\alpha, \beta, \gamma, \eta, \dots$

# Interior

## Definição 3

Diz-se que um ponto  $P$  pertence ao **interior** de um ângulo  $\widehat{AOB}$ , se

- ▶  $P$  e  $A$  estão num mesmo semiplano definido pela reta  $\overleftrightarrow{OB}$ ;
- ▶  $P$  e  $B$  estão num mesmo semiplano definido pela reta  $\overleftrightarrow{OA}$ .



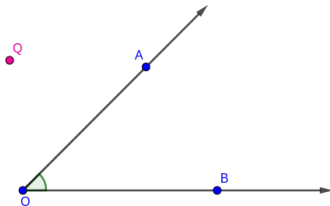
**Figura 1:**  $P$  pertence ao interior do ângulo  $\widehat{AOB}$

# Exterior

## Definição 4

O **exterior** de um ângulo  $A\hat{O}B$  é o conjunto de todos os pontos do plano que o contém, tais que:

- ▶ não pertencem aos lados do ângulo;
- ▶ não pertencem ao interior do ângulo dado.

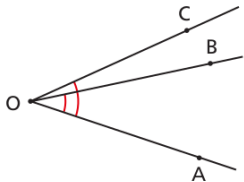


**Figura 2:**  $Q$  pertence ao exterior do ângulo  $A\hat{O}B$

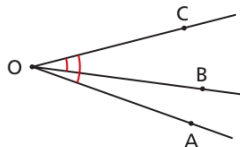
# Ângulos Consecutivos

## Definição 5

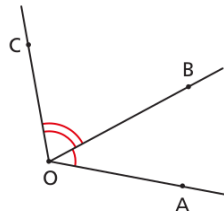
Dois ângulos são ditos **consecutivos** se têm o mesmo vértice e um lado em comum.



$\widehat{AOB}$  e  $\widehat{AOC}$  são  
consecutivos  
( $\overrightarrow{OA}$  é o lado comum)



$\widehat{AOC}$  e  $\widehat{BOC}$  são  
consecutivos  
( $\overrightarrow{OC}$  é o lado comum)

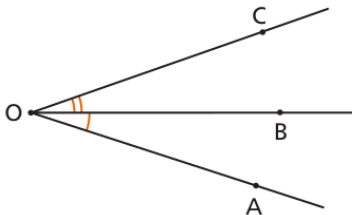


$\widehat{AOB}$  e  $\widehat{BOC}$  são  
consecutivos  
( $\overrightarrow{OB}$  é o lado comum)

# Ângulos Adjacentes

## Definição 6

Dois ângulos consecutivos que não possuem pontos internos em comum, são denominados **adjacentes**.



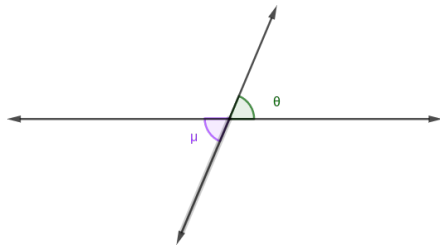
**Figura 3:** Os ângulos  $\widehat{AOB}$  e  $\widehat{BOC}$  são adjacentes.

# Ângulos Opostos pelo Vértice



## Definição 7

Dois ângulos são ditos **opostos pelo vértice**, se os lados de um deles são as semirretas opostas dos lados do outro.



**Figura 4:** Os ângulos  $\mu$  e  $\theta$  são opostos pelo vértice.

# Trabalho



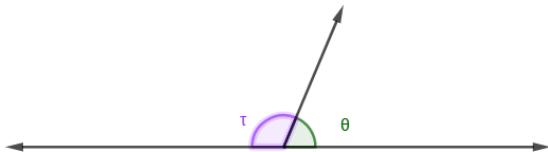
Responda ao questionário: Aula 02: Ângulos Parte 1.

# Ângulos Suplementares



## Definição 8

Dois ângulos adjacentes, cujos lados não comuns são semirretas opostas, são denominados **suplementares**.



- Dizemos que  $\tau$  é um **ângulo suplementar adjacente** de  $\theta$  (e vice-versa).



# Tipos de Ângulos



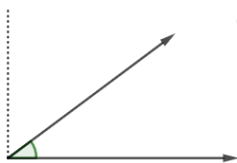
## Definição 9

Um ângulo  $A\hat{O}B$  é dito:

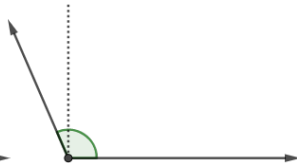
- ▶ **reto**, se é congruente a seu suplementar adjacente;
- ▶ **agudo**, se é um ângulo menor que um ângulo reto;
- ▶ **obtuso**, se é um ângulo maior que um ângulo reto.



Ângulo reto



Ângulo agudo

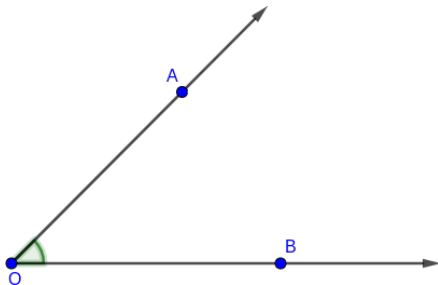


Ângulo obtuso

# Medida de Ângulos



- As unidades mais utilizadas para medir ângulos (sua amplitude) são o **grau** e **radiano**.

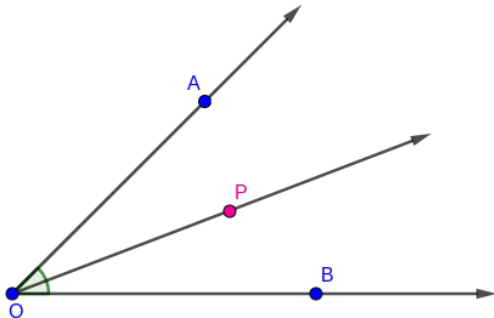


**Figura 5:** A área em verde representa o ângulo  $A\hat{O}B$

# Adição de Ângulos



- **Postulado Da adição de Ângulos:** Se  $P$  é um ponto de interior de um ângulo  $A\hat{O}B$ , então  $A\hat{O}B = A\hat{O}P + P\hat{O}B$ .



# Medida de Ângulos



- ▶ O **ângulo de um grau** ( $1^\circ$ ) é o ângulo obtido ao dividirmos o ângulo reto em 90 ângulos iguais. Com isso, um ângulo reto possui  $90^\circ$ .
- ▶ O **ângulo de um minuto** ( $1'$ ) é o ângulo obtido ao dividirmos o ângulo de  $1^\circ$  em 60 partes iguais:

$$1' = \frac{1^\circ}{60}.$$

- ▶ O **ângulo de um segundo** ( $1''$ ) é o ângulo obtido ao dividirmos o ângulo de  $1'$  em 60 partes iguais:

$$1'' = \frac{1'}{60} = \frac{1^\circ}{360}.$$

# Ângulos Congruentes



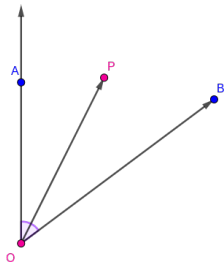
## Definição 10

*Dois ângulos são ditos **congruentes** se têm a mesma medida.*

# Bissetriz

## Definição 11

Seja  $P$  um ponto interior do ângulo  $\hat{A}OB$ . A **bissetriz** do ângulo  $\hat{A}OB$ , é a semirreta  $\overrightarrow{OP}$ , tal que  $\hat{A}OP = \hat{POB}$ .



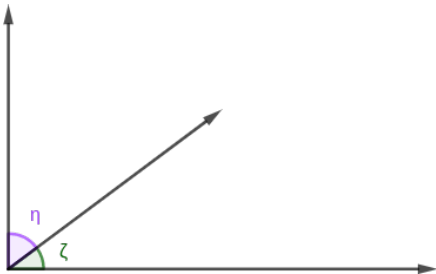
**Figura 6:** Os ângulos  $\hat{A}OP$  e  $\hat{POB}$  possuem a mesma medida.

# Ângulos Complementares



## Definição 12

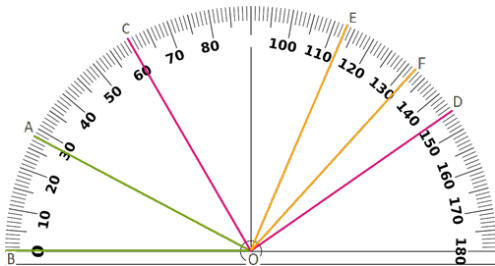
Dois ângulos são ditos **complementares**, se a soma de suas medidas é  $90^\circ$ . Cada um deles é denominado o **complemento** do outro.



**Figura 7:** Temos que  $\eta + \zeta = 90^\circ$ , logo são ângulos complementares.

# Medidas de um ângulo

- Todo ângulo tem sua medida, em graus, de 0 à 180. A medida de um ângulo é zero se, e somente se, seus lados são semirretas coincidentes. Se seus lados são semirretas opostas, sua medida é  $180^\circ$ .



**Figura 8:** Transferidor: a 'régua' para medir ângulos



# Ângulos



## Definição 13

*Denominamos de ângulo **raso** ao ângulo cujos lados são semirretas opostas (estão sobre a mesma reta, em sentidos opostos).*

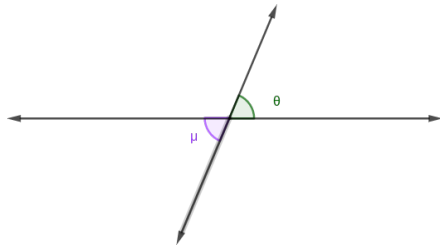


**Figura 9:**  $\hat{O}$  é um ângulo raso

# Teorema

## Teorema 1

*Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.*



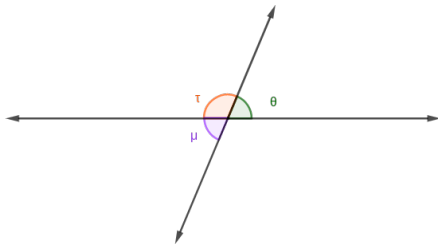
**Figura 10:** Os ângulos  $\mu$  e  $\theta$  são opostos pelo vértice.

# Demonstração do Teorema 1

- ▶ **Hipótese:**  $\mu$  e  $\theta$  são opostos pelo vértice.
- ▶ **Tese:**  $\mu = \theta$ .

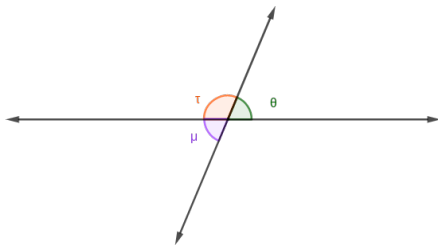
Usaremos a prova direta (partimos da hipótese).

Seja  $\tau$  o ângulo simultaneamente adjacente aos ângulos  $\mu$  e  $\theta$ .



**Figura 11:** Os ângulos  $\mu$  e  $\theta$  são adjacentes ao mesmo ângulo  $\tau$ .

# Demonstração do Teorema 1



Com isso,

$$\mu + \tau = 180^\circ \quad \text{e} \quad \theta + \tau = 180^\circ.$$

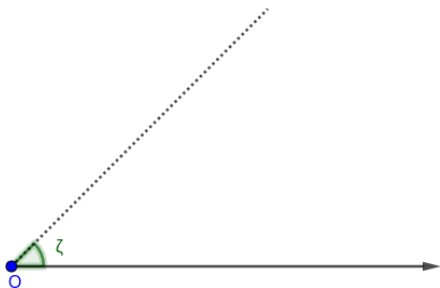
Daí, obtemos

$$\begin{aligned} \mu + \tau &= \theta + \tau \Rightarrow \mu + \tau - \tau = \theta + \tau - \tau \\ &\Rightarrow \mu = \theta. \end{aligned}$$

# Postulado



- **Postulado da Unicidade:** Qualquer que seja o número real  $\zeta$ , com  $0 < \zeta < 180$ , podemos construir um único ângulo de  $\zeta$  graus, a partir de uma semirreta dada num semiplano.



# Trabalho



Responda ao questionário: Aula 02: Ângulos Parte 2.