

# Elementos de Aritmética

Lista de Aprofundamento

 $2^{\underline{a}}$  Avaliação

Prof<sup>a</sup> Karla Lima 2024.1

$\mathbf{E}$	Elementos de Aritmética	2024.1		
K	Karla Lima	Mate	emá	ática
$\mathbf{S}$	Sumário			
1	1 Os Números Inteiros			4
	1.1 Múltiplos de Números Inteiros			4
	1.2 Divisores de um Número Inteiro			5
2	2 Os Números Racionais			6

### Resumo

"A Arte de Resolver Problemas (1945)" é um livro clássico escrito por George Pólya, que oferece uma abordagem sistemática e prática para resolver problemas matemáticos e, por extensão, problemas em diversas áreas da vida.

Ele destaca estratégias heurísticas, como divisão em subproblemas, analogia, tentativa e erro, e trabalhar de trás para frente.

Além disso, o autor enfatiza a importância de persistência, criatividade e flexibilidade mental na resolução de problemas.

Abaixo, segue o esquema introduzido por Pólya para a resolução de problemas. Use-o para ajudar no processo de aprendizado.





### 01. Conexões

Encontre a conexão entre os dados e a incógnita. É possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não puder encontrar uma conexão imediata.

# Elabore um



# **02. Questione**

Já viu este problema antes? Ou o mesmo problema apresentado ligeiramente diferente?

# **PLANO**



correlato ou que poderia ser útil?



### 04. Entenda

Entenda as soluções de problemas resolvidos. . São eles que vão te dar a bagagem necessária para se aventurar nos exercícios propostos.

# **02. Questione**

Conhece um problema

# 03. Relacione

Procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.



### 01. Mão na Massa

Em geral, você só precisa de cuidado e paciência, desde que tenha as habilidades necessárias.

Persista com o plano que você escolheu e execute.

# **Execute o PLANO**



## 02. Descarte

Se continuar sem funcionar, descarte-o e escolha outro. Não se deixe enganar, é assim que a matemática é feita, mesmo por profissionais.

# 03. Verfique

É possível verificar claramente que os passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?



## 04. Retropecto

Examine a solução obtida. Reserve um tempo para refletir e olhar para trás, para o que você fez, o que funcionou e o que não funcionou.



# 04. Retrospecto

Isso permitirá que você preveja qual estratégia usar para resolver problemas futuros.

# 1 Os Números Inteiros

# 1.1 Múltiplos de Números Inteiros

### Exercício 1

O Problema 3.7 de [1] (Hefez, A.) pede para mostrar as seguintes propriedades, para um elemento  $a \in \mathbb{Z}$ :

- i) 0 é múltiplo de a.
- ii) Se m é um múltiplo de a, então -m é um múltiplo de a.
- iii) Um múltiplo de um múltiplo de a é um múltiplo de a.
- iv) Se m e m' são múltiplos de a, então m + m' e m m' são também múltiplos de a.
- v) Se m e m' são múltiplos de a, então  $e \cdot m + f \cdot m'$  é múltiplo de a, quaisquer que sejam os inteiros e e f.
- vi) Se m + m' ou m m' é múltiplo de a e m é múltiplo de a, então m' também é múltiplo de a.

Resolva os itens a seguir.

- a) Para cada item, faça um caso particular, escolhendo valores adequados para a, m, m',
  e e f.
- b) Demonstre, formalmente, cada um dos itens de (i) até (vi).

Exercício 2 Faça o mesmo para o Problema 3.8 de [1] (Hefez, A.) .

## 1.2 Divisores de um Número Inteiro

Exercício 3 Mostre que se a é um inteiro não nulo, os divisores de a são em número finito.

Exercício 4 Mostre que se a e b são números naturais não nulos, então  $a \mid b$  e  $b \mid a$  se, e somente se, a = b.

Exercício 5 Em cada item, escolha casos particulares adequados de a, b e d e verifique as propriedades. Depois, demonstre-as formalmente.

- a) Se  $d \mid a \in d \mid b$ , então  $d \mid b + a \in d \mid (b a)$ .
- b) Se  $d \mid b + a$  ou  $d \mid (b a)$  e  $d \mid a$ , então  $d \mid b$ .

Exercício 6 O que é o máximo divisor comum de dois números inteiros a e b?

Exercício 7 Mostre que:

- a)  $O \ mdc(0,0)$  não existe.
- b) Se  $b \neq 0$ , então

$$mdc(0,b) = \begin{cases} b, & se \ b > 0, \\ -b, & se \ b < 0. \end{cases}$$

c) Mostre que se  $a \neq 0$  ou  $b \neq 0$ , então

$$mdc(a,b) = mdc(-a,b) = mdc(a,-b) = mdc(-a,-b).$$

Exercício 8 Um número d é divisor comum de a e b, ambos não nulos, se, e somente se, ele é um divisor comum de a e b-a.

Exercício 9 O que são números primos entre si?

# 2 Os Números Racionais

Exercício 10 Simplifique as frações abaixo até obter uma fração irredutível.

- a)  $\frac{20}{30}$
- b)  $\frac{12}{20}$
- c)  $\frac{15}{25}$
- d)  $\frac{200}{75}$
- e)  $\frac{28}{21}$

Exercício 11 Resolva as seguintes operações fracionárias, simplificando o resultado até obter uma fração irredutível, quando possível.

- a)  $\frac{11}{12} \frac{5}{12}$
- b)  $\frac{1}{4} + \frac{5}{4} \frac{3}{4}$
- c)  $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7}$
- d)  $\frac{2}{11} \cdot \frac{5}{4}$
- $e) \ \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$

**Exercício 12** Qual a fração equivalente a  $\frac{2}{9}$ , cujo denominador é 27?

**Exercício 13** Encontre uma fração equivalente a  $\frac{2}{5}$ , sabendo que a soma do numerador com o denominador é 28.

Exercício 14 Alberto e Beto estão comendo uma pizza. Se Alberto já comeu  $\frac{1}{8}$  e Beto  $\frac{3}{8}$ , qual a fração que sobrou desta pizza?

Exercício 15 A rodovia que liga duas cidades, Campina da Lagoa e Juranda, está sendo reformada. Se  $\frac{1}{3}$  já foi reformada e ainda faltam  $20 \, \mathrm{km}$ , qual o comprimento desta rodovia?

Exercício 16 Luísa tomou  $\frac{1}{5}$  de um refrigerante de 1500 mililitros. Seu irmão, Luiz, tomou  $\frac{2}{3}$  do que havia sobrado. Qual a quantidade de refrigerante que ainda resta na garrafa?

Exercício 17 João fez uma viagem de ida e volta entre Pirajuba e Quixajuba em seu carro, que pode rodar com álcool e com gasolina. Na ida, apenas com álcool no tanque, seu carro fez 12 km por litro e na volta, apenas com gasolina no tanque, fez 15 km por litro. No total, João gastou 18 litros de combustível nessa viagem. Qual é a distância entre Pirajuba e Quixajuba?

**Exercício 18** Um ônibus transporta 31 estudantes, baianos e mineiros, para um encontro de participantes da OBMEP. Entre os baianos,  $\frac{2}{5}$  são homens e, entre os mineiros,  $\frac{3}{7}$  são mulheres. Entre todos os estudantes quantas são as mulheres?

# Referências

[1] A. Hefez. *Iniciação à Aritmética*. IMPA, 2015.

# Referências

[1] A. Hefez. *Iniciação à Aritmética*. IMPA, 2015.