Gabarito P2

01 a) Uma equação linear nas incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ são constantes reais dadas.

Sua solução é a sequência $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ que torna a proposição

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n = b$$

verdadeira.

b) Se $(1, -3, m)$ é solução da equação dada, então temos que

$$3 \cdot 1 - 2 \cdot (-3) + m = 1$$

$$\Rightarrow 3 + 6 + m = 1$$

$$\Rightarrow 9 + m = 1$$

$$\Rightarrow m + 9 - 9 = 1 - 9$$

$$\Rightarrow \boxed{m = -8}$$

c) Dada a equação linear $2x-y=7$ e os pares ordenados $(2,-3)$, $(2,7)$ e $(5,3)$, temos:

$x=2$ e $y=-3$	$x=2$ e $y=7$	$x=5$ e $y=3$
$2\cdot 2-(-3)=4+3=7$	$2\cdot 2-7=4-7=-3\neq 7$	$2.5-3=7$
sendo solução da equação.	não sendo solução da equação	sendo solução da equação.

02 a) Considere as seguintes incógnitas para o problema:

i = quantidade de ingressos vendidos por R\$ 20,00.

m = quantidade de ingressos vendidos por R\$ 10,00.

Logo, se foram vendidos 216 ingressos, temos que

$$i+m=216.$$

Além disso, sabemos que foram arrecadados R\$ 3780,00 na referida sessão.

Como

$20i$ = arrecadação com ingresso inteira

$10m$ = arrecadação com ingresso meia-entrada,

temos nossa segunda equação dada por

$$20i+10m=3780.$$

Portanto, o sistema que modela este problema é

$$\begin{cases} i+m = 216 \\ 20i + 10m = 3780 \end{cases}.$$

b) Incógnitas para o problema:

x = quantidade de garrafas de 5 litros vendidas

y = quantidade de garrafas de 1 litro vendidas

Se foram vendidas 66 garrafas, então temos que

$$x+y = 66.$$

Além disso,

$5,60 . x$ = arrecadação com a venda de garrafas de 5 litros

$1,40\, y$ = arrecadação com a venda de garrafas de 1 litro.

Portanto, como a arrecadação total foi de R$ 302,40, obtemos:

$$5,60x + 1,40y = 302,40.$$

O sistema que modela este problema é:

$$\begin{cases} x+y = 66 \\ 5,6x + 1,40y = 302,40 \end{cases}.$$

c) Incógnitas do problema:

H: quantidade de homens que participaram da corrida

M: quantidade de mulheres que participaram da corrida.

Como participaram 515 atletas, temos que

$$H + M = 515.$$

Por outro lado, sabemos que o nº de homens foi 45 a mais que o de mulheres. Logo,

$$H = M + 45 \Rightarrow H - M = M - M + 45 = 45$$

Portanto, o sistema que modela este problema é:

$$\begin{cases} H + M = 515 \\ H - M = 45 \end{cases}$$

03 a) $\begin{cases} i + m = 216 & (I) \\ 20i + 10m = 3780 & (II) \end{cases}$

Isolando i em (I), obtemos:

$$i + m - m = 216 - m \Rightarrow \boxed{i = 216 - m}$$

Substituindo o valor de i em (II), obtemos:

$$20(216 - m) + 10m = 3780$$

$$\begin{cases} x + y = 66 \\ 5{,}6x + 1{,}40y = 302{,}40. \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4320 - 20m + 10m = 3780$$

$$\Rightarrow 4320 - 4320 - 10m = 3780 - 4320$$

$$\Rightarrow -10m = -540$$

$$\Rightarrow \frac{-10m}{-10} = -\frac{540}{-10} \Rightarrow \boxed{m = 54}$$

Logo, como $i = 216 - m$, obtemos:

$$i = 216 - 54 \Rightarrow \boxed{i = 162}$$

Foram vendidos 162 ingressos do tipo inteira e 54 do tipo meia-entrada.

$$* \begin{cases} x + y = 66 & (\text{I}) \\ 5{,}6x + 1{,}40y = 302{,}40 & (\text{II}) \end{cases}$$

Isolando y em (I), obtemos:

$$x - x + y = 66 - x \Rightarrow \boxed{y = 66 - x}$$

Substituindo o valor de y acima em (II):

$$5{,}6x + 1{,}4(66 - x) = 302{,}40$$

$$\Rightarrow 5{,}6x + 92{,}4 - 1{,}4x = 302{,}40$$

$$\Rightarrow 4{,}2x + 92{,}4 - 92{,}4 = 302{,}40 - 92{,}4$$

$\Rightarrow 4{,}2x = 210$

$\Rightarrow \dfrac{4{,}2x}{4{,}2} = \dfrac{210}{4{,}2} \Rightarrow \boxed{x = 50}$

Logo, como $x+y=66$, temos que:

$50 - 50 + y = 66 - 50 \Rightarrow \boxed{y = 16}$.

Portanto, foram vendidas 50 garrafas de 5 litros e 16 de 1 litro, totalizando

$50 \cdot 5 + 16 \cdot 1 = 266$ litros vendidos.

b) Uma equação em duas variáveis $ax+by=c$, a,b e $c \in \mathbb{R}$, representa uma reta no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Assim, ao incluir duas equações no GeoGebra, obtemos duas retas no plano.

Se as retas se intersectam em um único ponto, dizemos que o sistema

$$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$$

possui uma única solução.

Se as retas são coincidentes, dizemos que o sistema possui infinitas soluções.

Por fim, se elas não se intersectam, o sistema não possui solução.

04 a) A matriz dos coeficientes do sistema dado é

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Vamos calcular o seu determinante. Para isso, usaremos a 3ª linha, que possui um zero.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ \boxed{3 \quad 0 \quad -2} \end{bmatrix}$$

$$\det A = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \cancel{- 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}_{0} + (-2) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3\,(3-1) - 2\,(2-(-1))$$

$$= 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0.$$

Como $\det A = 0$, o sistema não é possível e determinado.

b) A matriz de coeficientes do sistema é

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 1} \\ 2 \quad 1 \quad -1 \\ 3 \quad -1 \quad -2 \end{bmatrix}$$

Vamos calcular det A, usando a 1ª linha para calcular os cofatores:

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-2-1) - 2(-4+3) + 1\cdot(-2-3)$$

$$= 1\cdot(-3) - 2(-1) + 1\cdot(-5)$$

$$= -3 + 2 - 5 = -6 \neq 0,$$

logo o sistema é possível e determinado.

Vamos realizar o escalonamento para encontrar a solução.

Começamos com a matriz aumentada do sistema:

$$\begin{array}{cccc|c} & -2 & -4 & -2 & -18 \\ & & & & \\ \text{zerar} & & & & \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 & -4 \end{array}\right] \xleftrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 3 & -1 & -2 & -4 \end{array}\right]$$

$$\xleftrightarrow{L_2 = \frac{L_2}{-3}} \begin{array}{c} \\ \\ \text{zerar} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -3 & -6 & -3 & -27 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & -4 \end{array}\right] \end{array} \xleftrightarrow{L_3 = L_3 - 3L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ & 7 & 7 & 35 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -7 & -5 & -31 \end{array}\right]$$

zerar

$$\xleftrightarrow{L_3 = L_3 + 7L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

O sistema escalonado fica:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 & \text{(I)} \\ y + z = 5 & \text{(II)} \\ 2z = 4 & \text{(III)} \end{cases}$$

De (III), obtemos:

$$\frac{2z}{2} = \frac{4}{2} \Rightarrow \boxed{z = 2}$$

Substituindo o valor de z em (II):

$$y + 2 = 5 \Rightarrow y + 2 - 2 = 5 - 2 \Rightarrow \boxed{y = 3}$$

Por fim, substituindo os valores de y e z em (I), obtemos :

$$x+2.3+2=9 \Rightarrow x+8=9$$

$$\Rightarrow x+8-8=9-8 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

Portanto, $(1,3,2)$ é a solução única do sistema.

05 As incógnitas do problema serão:

A = quantidade de dinheiro que Ana possui;

B = quantidade de dinheiro que Beatriz possui;

C = quantidade de dinheiro que Carolina possui.

Como as três juntas possuem R\$ 340,00, então

$$A+B+C=340.$$

Se Ana gastar R\$, ela fica com $A-10$. Se isso é o dobro do que tem Beatriz, então

$$A-10=2B \Rightarrow A-2B+10-10=2B-2B+10 \Rightarrow A-2B=10.$$

Por fim, se Ana gastar 40% do que tem, ela fica com:

$$A-\frac{40}{100}A = A-0{,}4A = (1-0{,}4)A = 0{,}6A.$$

Se isso representa R\$ 9,00 a menos do que Carolina, então

$$0{,}6A = C - 9 \Rightarrow 0{,}6A - C = C - 9 - C \Rightarrow 0{,}6A - C = 9$$

Assim, o sistema é dado por:

$$\begin{cases} A + B + C = 340 & (I) \\ A - 2B = 10 & (II) \\ 0{,}6A - C = 9 & (III) \end{cases}$$

Embora possa ser resolvido por escalonamento, neste caso é muito mais simples resolver por substituição:

Em (II) e (III), isolamos B e C em função de A:

$$A - 2B = 10 \Rightarrow \frac{2B}{2} = \frac{A - 10}{2} \Rightarrow B = \frac{A}{2} - 5$$

$$0{,}6A - C = 9 \Rightarrow C = 0{,}6A - 9$$

Substituindo em (I), encontramos o valor de A:

$$A + \overbrace{\frac{A}{2} - 5}^{B} + \overbrace{0{,}6A - 9}^{C} = 340.$$

Depois é só substituir o valor encontrado para A nas equações (II) e (III), para encontrar B e C, respectivamente.