Fundamentos da Matemática II

Exercícios Complementares - Gelson Iezzi

1. Ângulos e Arcos

Profa. Karla Katerine Barboza de Lima
FACET/UFGD

1 Ângulos e Arcos

EXERCÍCIOS

C.1 Exprimir 225° em radianos.

Solução

Estabelecemos a seguinte regra de três simples:

$$\begin{array}{lcl} 180^\circ & \longleftrightarrow & \pi \text{ rad} \\ 225^\circ & \longleftrightarrow & x \end{array} \qquad \text{logo} \quad x = \frac{225 \cdot \pi}{180} = \frac{5\pi}{4} \text{ rad}$$

C.2 Exprimir em radianos:

a) 210° b) 240°
c) 270° d) 300°
e) 315° f) 330°

C.3 Exprimir $\frac{11\pi}{6}$ rad em graus.

Solução

Temos:

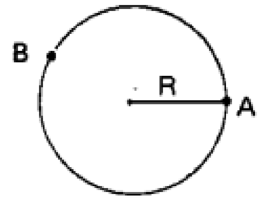
$$\begin{array}{lcl} \pi \text{ rad} & \longleftrightarrow & 180^\circ \\ \frac{11\pi}{6} \text{ rad} & \longleftrightarrow & x \end{array} \qquad \text{logo} \quad x = \frac{\frac{11\pi}{6} \cdot 180}{\pi} = 330^\circ$$

C.4 Exprimir em graus:

a) $\frac{\pi}{6}$ rad b) $\frac{\pi}{4}$ rad c) $\frac{\pi}{3}$ rad

d) $\frac{2\pi}{3}$ rad e) $\frac{3\pi}{4}$ rad f) $\frac{5\pi}{6}$ rad

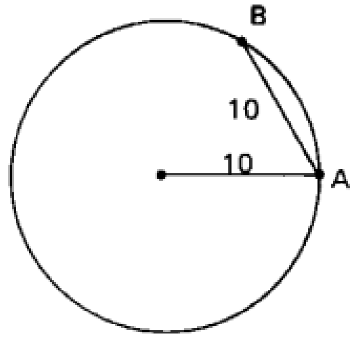
C.5 Um arco de circunferência mede 30 cm e o raio da circunferência mede 10 cm. Calcular a medida do arco em radianos.



Solução

$$\left[\text{medida de } \overset{\frown}{AB} \text{ em rad}\right] = \frac{\text{comprimento do arco } \overset{\frown}{AB}}{\text{comprimento do raio}} = \frac{30 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = 3 \text{ rad}$$

C.6 Sobre uma circunferência de raio 10 cm marca-se um arco $\overset{\frown}{AB}$ tal que a corda AB mede 10 cm. Calcular a medida do arco em radianos.



Solução

O segmento AB é lado do **hexágono** regular inscrito na circunferência, logo, o menor arco AB é $\frac{1}{6}$ da circunferência, isto é, mede:

$$\frac{1}{6} \times 2\pi \text{ rad} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

C.7 Um grau se divide em 60′ (60 minutos) e um minuto se divide em 60″ (60 segundos) Por exemplo, um arco de medida 30′ é um arco de 0,5°. Pede-se converter a radianos os seguintes arcos:

a) $22°30'$ b) $31°15'45''$

Solução

a) $22°30' = 22 \times 60' + 30' = 1350'$
$180° = 180 \times 60' = 10800'$

então:

$$\begin{aligned} 10800' &\longleftrightarrow \pi \text{ rad} \\ 1350' &\longleftrightarrow x \end{aligned}$$

logo $x = \frac{1350 \cdot \pi}{10800} = \frac{\pi}{8}$ rad

b) $31°15'45'' = 31 \times 3600'' + 15 \times 60'' + 45'' = 112\,545''$
$180° = 180 \times 3600'' = 648\,000''$

então:

$$\begin{aligned} 648\,000'' &\longleftrightarrow \pi \text{ rad} \\ 112\,545'' &\longleftrightarrow x \end{aligned}$$

logo $x = \frac{112\,545 \cdot \pi}{648\,000} = \frac{112\,545 \cdot 3{,}1416}{648\,000} = 0{,}54563$ rad

C.8 Converter a graus o arco 1 rad.

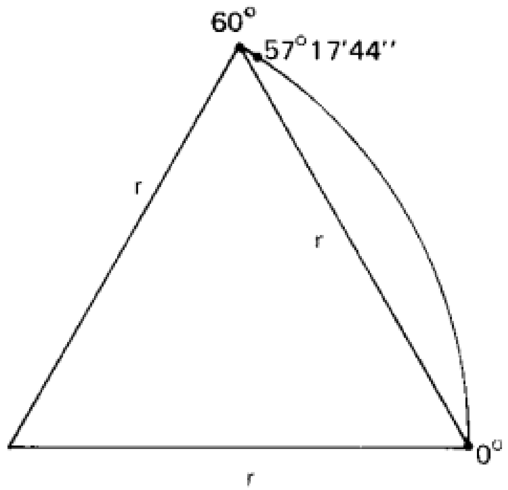
Solução

$3{,}1416 \text{ rad} \longleftrightarrow 180^\circ$

$1 \text{ rad} \longleftrightarrow x$

logo $x = \dfrac{180^\circ}{3{,}1416}$

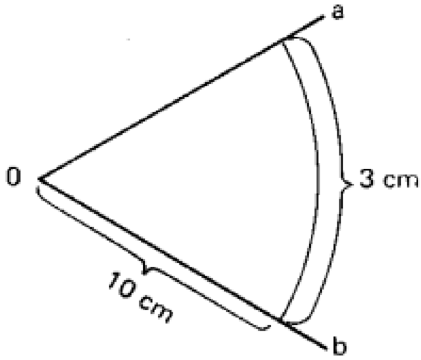
$$
\begin{array}{r|l}
1\,800\,000 & 31\,416 \\ \cline{2-2}
229\,200 & 57^\circ 17' 44'' \\
09\,288 & \\
\times 60 & \\ \hline
557\,280 & \\
243\,120 & \\
23\,208 & \\
\times 60 & \\ \hline
1\,392\,480 & \\
135\,840 & \\
10\,176 &
\end{array}
$$



C.9 Exprimir em radianos as medidas dos arcos a e b tais que $a - b = 15^\circ$ e $a + b = \dfrac{7\pi}{4}$ rad.

C.10 Exprimir em graus as medidas dos arcos a, b e c tais que $a + b + c = 13^\circ$, $a + b + 2c = \dfrac{\pi}{12}$ rad e $a + 2b + c = \dfrac{\pi}{9}$ rad.

C.11 Calcular, em graus, a medida do ângulo $a\widehat{0}b$ da figura.



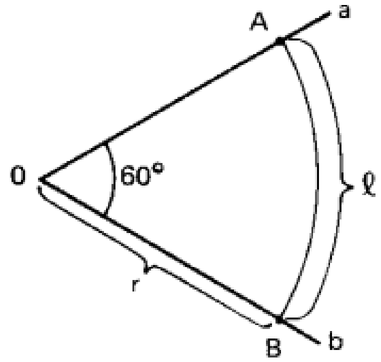
Solução

$\alpha = \dfrac{\ell}{r} = \dfrac{3}{10}$ rad. Convertendo a graus:

$$\begin{cases} \pi \text{ rad} \longrightarrow 180° \\ \dfrac{3}{10} \text{ rad} \longrightarrow x \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x = \frac{\frac{3}{10} \times 180°}{\pi} = \frac{54}{3{,}1416} = 17°11'19''.$$

C.12 Calcular o comprimento ℓ do arco $\widehat{AB}$ definido numa circunferência de raio $r = 10$ cm, por um ângulo central de 60°.



Solução

Convertido a radianos, o ângulo central $a\widehat{0}b$ tem medida $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ rad, então:

$$\alpha = \frac{\ell}{r} \Longrightarrow \ell = \alpha \cdot r = \frac{\pi}{3} \cdot 10$$

portanto:

$$\ell = \frac{31{,}416}{3} = 10{,}472 \text{ cm}.$$

C.13 Calcular a medida do ângulo central $a\widehat{0}b$ que determina em uma circunferência de raio r um arco de comprimento $\dfrac{2\pi r}{3}$.

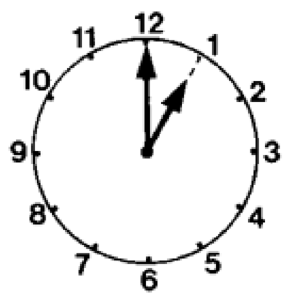
C.14 Calcular o comprimento ℓ do arco $\widehat{AB}$ definido em uma circunferência de raio 7 cm por um ângulo central de 4,5 rad.

C.15 Calcular o menor dos ângulos formados pelos ponteiros de um relógio que está assinalando:

a) 1 h; b) 1 h 15 min; c) 1 h 40 min.

Solução

a) Notemos que os números do mostrador de um relógio estão colocados em pontos que dividem a circunferência em 12 partes iguais, cada uma das quais mede 30°. Assim, à 1 h os ponteiros do relógio formam um ângulo convexo de 30°.



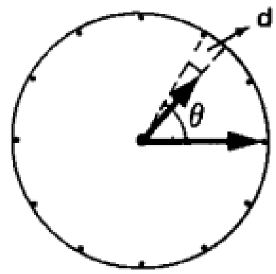
b) Sabemos que em 60 minutos o ponteiro pequeno percorre um ângulo de 30°, então em 15 minutos ele percorre um ângulo α tal que:

$$\frac{\alpha}{15} = \frac{30^\circ}{60}$$

portanto $\alpha = 7{,}5^\circ = 7^\circ 30'$.

Assim, temos:

$\theta = 60^\circ - \alpha = 60^\circ - 7^\circ 30' = 52^\circ 30'$.



c) Notemos que em 40 minutos o ponteiro pequeno percorre o ângulo β tal que:

$$\frac{\beta}{40} = \frac{30^\circ}{60}$$

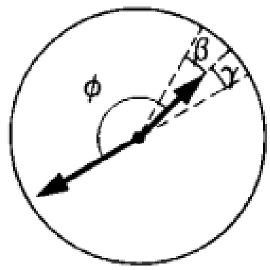
portanto $\beta = 20^\circ$.

Assim, temos:

$\phi = 150^\circ + \beta = 150^\circ + 20^\circ = 170^\circ$

ou ainda

$\phi = 180^\circ - \gamma = 180^\circ - 10^\circ = 170^\circ$.



C.16 Calcular o menor dos ângulos formados pelos ponteiros de um relógio que marca:

a) 2 h 40 min; b) 5 h 55 min; c) 6 h 30 min.