

Técnicas de Integração

Frações Parciais

Karla Lima

Sumário



1. Integração de Funções Racionais
2. Caso I: fatores lineares distintos
3. Caso II: fatores lineares, alguns repetidos
4. Caso III: fatores quadráticos irreduzíveis

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the upper-left portion, while a light gray shape occupies the lower-left portion. The rest of the slide is white. The title is centered in the white area.

Integração de Funções Racionais

Introdução



Levando as frações $\frac{2}{x-1}$ e $\frac{1}{x+2}$ a um denominador comum, obtemos

$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{2(x+2) - (x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+5}{x^2+x-2}$$

Revertendo o procedimento, veremos como integrar a função no lado direito dessa equação, usando o método da substituição:

$$\begin{aligned} \int \frac{2(x+2) - (x-1)}{(x-1)(x+2)} dx &= \int \frac{2}{x-1} dx - \int \frac{1}{x+2} dx \\ &= 2 \ln |x-1| - \ln |x+2| + C \end{aligned}$$

Quando funciona?



É possível expressar uma função racional $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ como uma soma de frações mais simples, desde que o grau de P seja menor que o grau de Q .

Etapa Preliminar



Se o grau de P for maior que o de Q , devemos fazer uma etapa preliminar dividindo P por Q , até o resto $R(x)$ ser obtido, com grau menor que o de Q :

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

onde S e R também são polinômios.

Exemplo[1]



Exemplo 1

Encontre $\int \frac{x^3 + x}{x - 1} dx$.

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the upper-left portion, while a light gray shape occupies the lower-left portion. The rest of the slide is white.

Caso I: fatores lineares distintos

Caso I



Suponha que o denominador $Q(x)$ pode ser escrito como um produto de **fatores lineares distintos**:

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \cdots (a_kx + b_k).$$

Nesse caso, existem constantes A_1, A_2, \dots, A_k tais que

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}.$$

Essas constantes podem ser determinadas como nos exemplos a seguir.

Exemplo [2, 1]



Exemplo 2

Calcule $\int \frac{2x + 4}{x^2 - 2x} dx$.

Exemplo 3

Calcule $\int \frac{1}{x^2 + x - 2} dx$.

Exemplo 4

Calcule $\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx$.

Caso II: fatores lineares, alguns repetidos

Caso II



Suponha que o fator linear $(a_1x + b_1)$ seja repetido r vezes:

$$Q(x) = (a_1x + b_1)^r (a_2x + b_2) \cdots (a_kx + b_k).$$

Em vez de um único termo $\frac{A_1}{a_1x + b_1}$, usamos

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{a_1x + b_1} + \frac{A_{12}}{(a_1x + b_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1r}}{(a_1x + b_1)^r} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}.$$

Exemplo [2, 1]



Exemplo 5

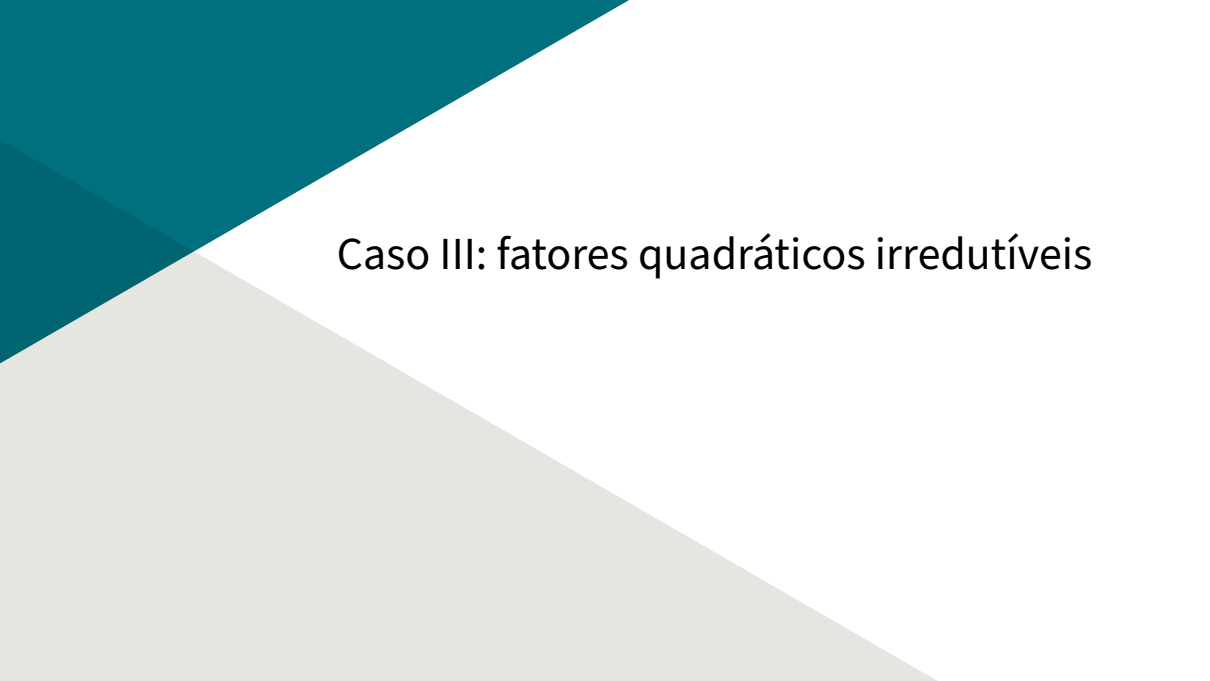
Calcule $\int \frac{2x + 4}{x^3 - 2x^2} dx$.

Exemplo 6

Calcule $\int \frac{x^2}{(x + 2)^3} dx$.

Exemplo 7

Calcule $\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$.

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the upper-left portion, while a light gray shape occupies the lower-left portion. The right side of the slide is a plain white background.

Caso III: fatores quadráticos irreduzíveis

Caso III



Se $Q(x)$ tem o fator $(ax^2 + bx + c)^m$, onde $b^2 - 4ac < 0$, o termo não linear terá a forma

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{ax^2 + bx + c} + \cdots + \frac{A_mx + B_m}{ax^2 + bx + c}.$$

Exemplo [2, 1]



Exemplo 8

Calcule $\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx$.

Exemplo 9

Calcule $\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} dx$.

Exemplo 10

Calcule $\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2} dx$.

Referencias I



J. Stewart.

Calculo: volume 1.

Pioneira Thomson Learning, 2006.



H. Anton, I. Bivens, and S. Davis.

Cálculo - Volume I - 10.ed.

Bookman Editora, 2014.