

## Aula 03

### Triângulos

Karla Lima

# Sumário



1. Definição

2. Classificação

3. Congruência de Triângulos

4. Verificação de Aprendizagem

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the top-left corner, while a light beige shape occupies the bottom-left corner. The rest of the slide is white. The word 'Definição' is centered in the white area.

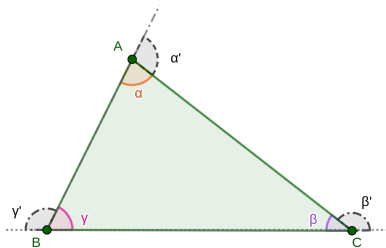
# Definição

# Definição

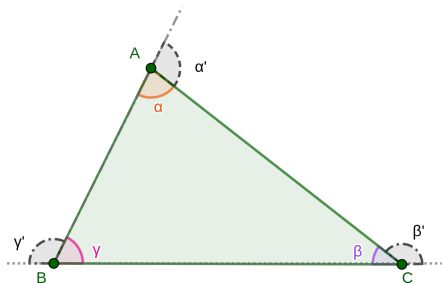
## Definição 1

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  três pontos não colineares.

Denominamos de **triângulo**  $ABC$  a união dos segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  e o denotaremos por  $\triangle ABC$ .



# Definição



- ▶ Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  são os **vértices** e os segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  são os **lados** do triângulo.
- ▶ Os ângulos  $\widehat{BAC} = \alpha$ ,  $\widehat{ABC} = \gamma$  e  $\widehat{ACB} = \beta$  são os **ângulos internos** do triângulo. Seus suplementos  $\alpha'$ ,  $\gamma'$  e  $\beta'$  são os **ângulos externos** do triângulo.

The background consists of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape is in the upper-left corner, and a light beige shape is in the lower-left corner. The rest of the background is white.

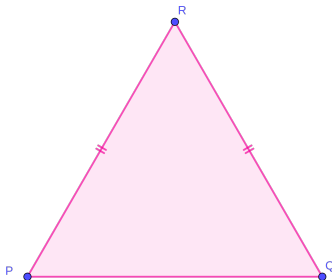
# Classificação

# Isósceles



## Definição 2

Um triângulo que tem dois lados congruentes é denominado **isósceles**.



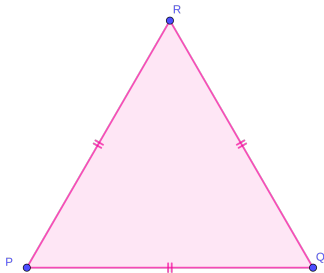
O outro lado é chamado **base** e o ângulo oposto à base é o **ângulo do vértice**.

# Equilátero



## Definição 3

Um triângulo cujos lados são congruentes chama-se **equilátero**.



**Obs:** Todo triângulo equilátero possui dois lados congruentes, logo ele também será isósceles.

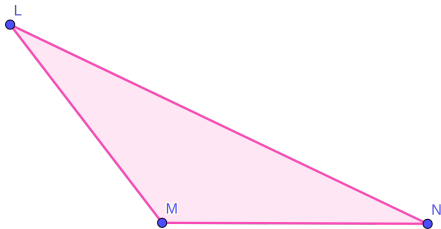


# Escaleno



## Definição 4

Um triângulo no qual dois lados quaisquer não são congruentes, chama-se **escaleno**.



# Exercício



## Exercício 1

*Usando o Geogebra, construa:*

1. *Um triângulo equilátero.*
2. *Um triângulo isósceles, não equilátero.*
3. *Um triângulo escaleno.*

Usaremos as seguintes ferramentas:

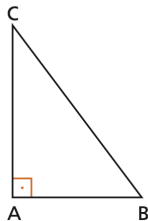
- ▶ Segmento com comprimento fixo;
- ▶ Polígono Regular.

# Classificação: Ângulos

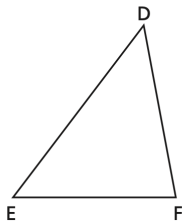


Quanto aos ângulos, os triângulos se classificam em:

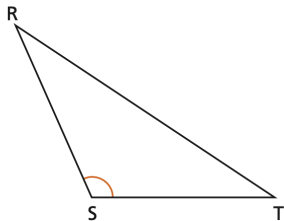
- ▶ retângulos se, e somente se, têm um ângulo reto;
- ▶ acutângulos se, e somente se, têm os três ângulos agudos;
- ▶ obtusângulos se, e somente se, têm um ângulo obtuso.



$\triangle ABC$  é retângulo em A.



$\triangle DEF$  é acutângulo.



$\triangle RST$  é obtusângulo em S.

# Exercício

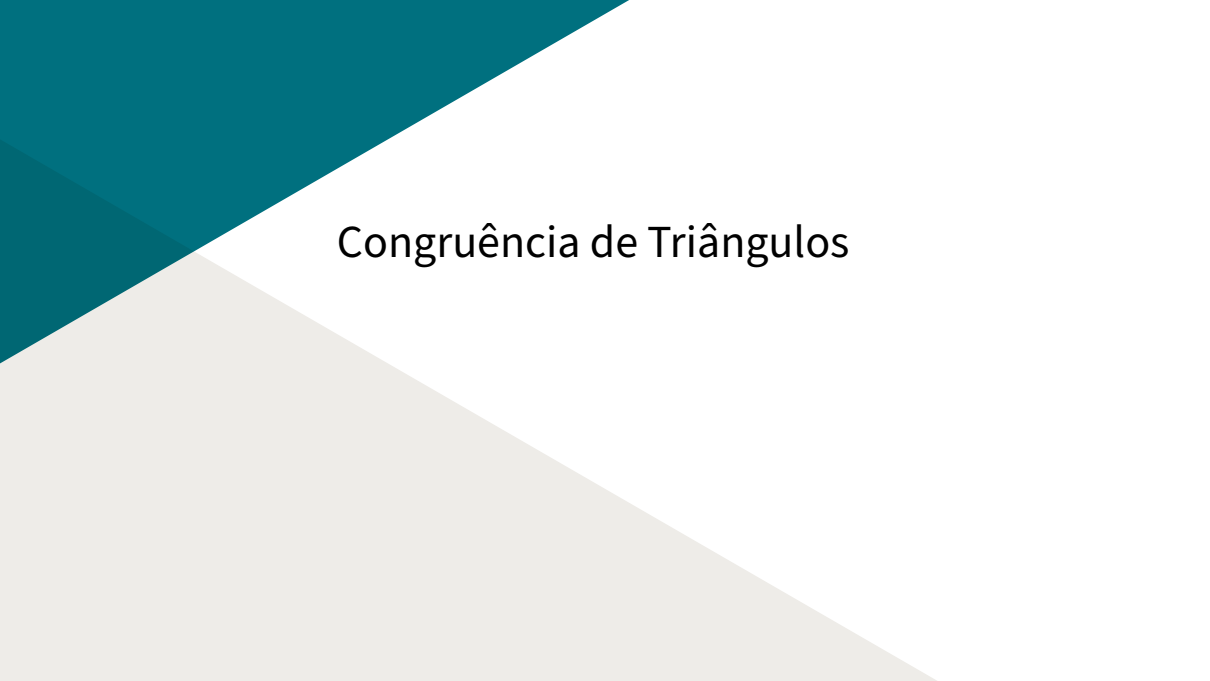


## Exercício 2

*Usando o Geogebra, e os triângulos obtidos no exercício 1, classifique-os com relação aos seus ângulos.*

Usaremos a seguintes ferramenta:

- ▶ Ângulo.

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape, consisting of two triangles meeting at a diagonal line, occupies the upper-left portion of the frame. The remaining area is a light gray shape, also composed of triangles, which fills the lower-left and extends towards the bottom right. The overall effect is a modern, minimalist design.

# Congruência de Triângulos

# Definição de Congruência



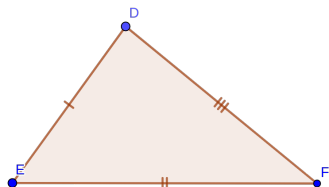
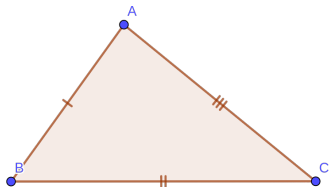
## Definição 5

*Um triângulo é congruente (símbolo  $\equiv$ ) a outro se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que:*

- ▶ *seus lados são ordenadamente congruentes aos lados do outro;*
- ▶ *seus ângulos são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro.*

Em linguagem popular, dizemos que duas figuras planas são congruentes se elas coincidem por superposição.

# Definição de Congruência



►  $\overline{AB} \equiv \overline{DE}, \overline{AC} \equiv \overline{DF}$  e  $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ ;

►  $\hat{A} \equiv \hat{D}, \hat{B} \equiv \hat{E}$  e  $\hat{C} \equiv \hat{F}$ .

# Exemplo

## Exemplo 1

*Suponhamos que os triângulos abaixo coincidem por superposição. Quais os pares de vértices que devem ser sobrepostos?*

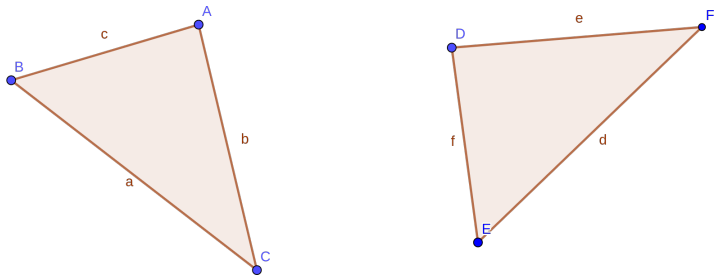


Figura 1:  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$



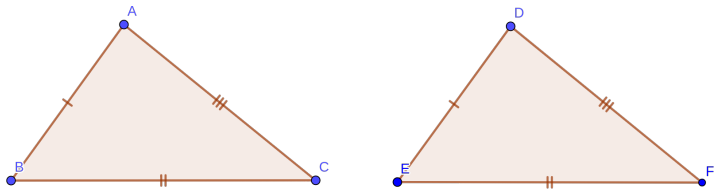
# Nomenclatura



- ▶ Os **vértices** que coincidem na superposição são denominados **correspondentes**.
- ▶ Os **lados** que unem vértices correspondentes são também chamados **correspondentes**.
- ▶ Analogamente, os **ângulos** cujos vértices estão em correspondência, são **correspondentes**.

# Observação

Observe que em triângulos correspondentes, a ângulos congruentes opõem-se lados congruentes e vice-versa.



**Notação:** Para indicar que dois triângulos são congruentes, escrevemos:

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF.$$

A ordem em que as letras aparecem, indicam as correspondências entre os vértices.

# Exercício



Baixe o arquivo LAL\_1.ggb e abra no Geogebra.

1. Construa outro triângulo com dois lados congruentes aos lados  $\overline{A'B}$  e  $\overline{BC}$ , com o ângulo formado por estes lados congruente ao ângulo  $\hat{B}$ .
2. Compare o comprimento do terceiro lado obtido e a medida dos outros dois ângulos com os correspondentes do triângulo original.

# Exercício



Baixe o arquivo LAL\_2.ggb e abra no Geogebra.

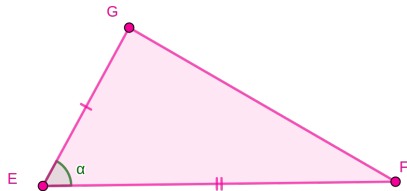
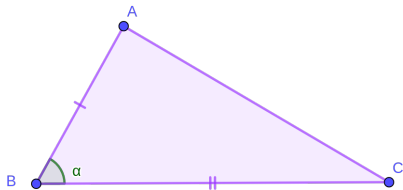
1. Construa outro triângulo com dois lados congruentes aos lados  $\overline{A'B}$  e  $\overline{BC}$ , com o ângulo formado por estes lados congruente ao ângulo  $\hat{B}$ .
2. Compare o comprimento do terceiro lado obtido e a medida dos outros dois ângulos com os correspondentes do triângulo original.

# 1º caso: LAL



## Postulado: Caso LAL

Se dois triângulos têm dois lados congruentes e os ângulos compreendidos entre eles são respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.

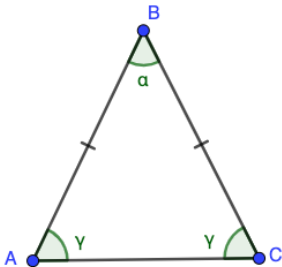


# Teorema do Triângulo Isósceles



## Teorema 1

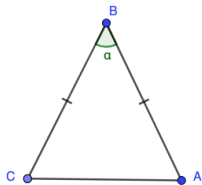
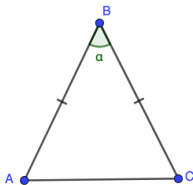
*Em todo triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.*



# Demonstração: Teorema do Triângulo Isósceles



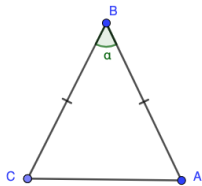
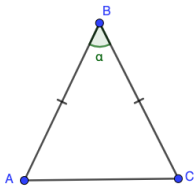
- ▶ A partir do triângulo  $ABC$ , obtemos o triângulo  $CBA$  ao espelhar-mos o triângulo inicial.
- ▶ Pelo caso LAL, os triângulos  $ABC$  e  $CBA$  são congruentes.



# Demonstração: Teorema do Triângulo Isósceles



- Como ângulos opostos a lados congruentes são congruentes, e  $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$ , concluimos que  $\hat{A} \equiv \hat{C}$ .





# Exercício



Baixe o arquivo ALA\_1.ggb e abra no Geogebra.

1. Construa outro triângulo com lado congruente ao lado  $\overline{A'B}$ , com os ângulos adjacentes a este lado congruentes aos ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ .
2. Compare o comprimento dos outros dois lados obtidos e a medida do outro ângulo com os correspondentes do triângulo original.

# Exercício



Baixe o arquivo ALA\_2.ggb e abra no Geogebra.

1. Construa outro triângulo com lado congruente ao lado  $\overline{A'B}$ , com os ângulos adjacentes a este lado congruentes aos ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ .
2. Compare o comprimento dos outros dois lados obtidos e a medida do outro ângulo com os correspondentes do triângulo original.

## 2º caso: ALA

### Postulado: Caso ALA

Se dois triângulos têm um lado congruente, compreendido entre dois ângulos respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.



Figura 2:  $\triangle ABC \cong \triangle FDE$

# Verificação de Aprendizagem

# Formulário



Responda ao formulário Aula 03: Triângulos.

# Exercícios



## Exercício 3

*Mostre que vale a recíproca do Teorema do Triângulo Isósceles: se dois ângulos de um triângulo são congruentes, então o triângulo é isósceles.*

# Ponto Médio

## Definição 6

Um ponto  $C$  chama-se **ponto médio** do segmento  $\overline{AB}$ , se:

1.  $C$  pertence ao segmento  $\overline{AB}$  ( $C \in \overline{AB}$ );
2. O comprimento do segmento  $\overline{AC}$  é igual ao do segmento  $\overline{CB}$  ( $AC = CB$ ).



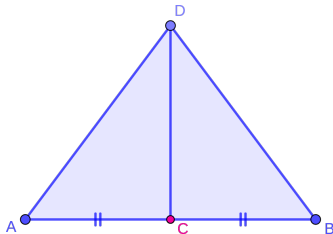
**Ponto Médio (segmento)**

# Exercício



## Exercício 4

Na figura abaixo,  $\overline{DC} \perp \overline{AB}$  e  $C$  é o ponto médio de  $\overline{AB}$ . Demonstre que os suplementos dos ângulos  $\hat{DAB}$  e  $\hat{DBA}$  são congruentes.

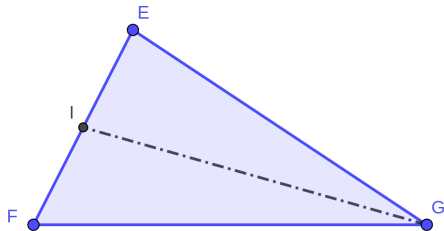




# Mediana

## Definição 7

Chama-se **mediana** de um triângulo ao segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto a ele.



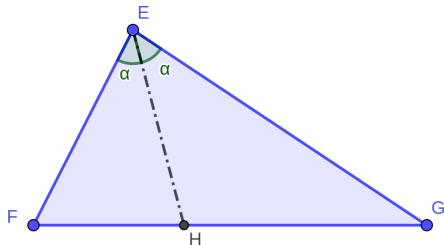
**Figura 3:** Na figura acima,  $\overline{GI}$  é a mediana relativa ao lado  $EF$

# Bissetriz

## Definição 8

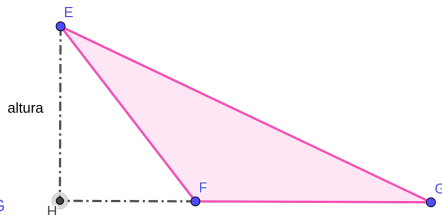
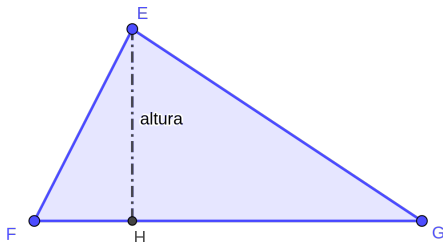
Sejam  $EFG$  um triângulo e  $H$  um ponto da reta que contém o lado  $FG$ .

- ▶ se a semirreta  $\overrightarrow{EH}$  é bissetriz do ângulo  $\hat{E}$ , o segmento  $\overline{EH}$  chama-se a **bissetriz interna** do triângulo, relativa ao lado  $\overline{FG}$ .



# Algumas Definições

- ▶ se  $\overrightarrow{EH}$  for perpendicular à reta que contém o lado  $\overline{FG}$ , o segmento  $\overline{EH}$  chama-se **altura** do triângulo, relativa ao lado  $\overline{FG}$ .



# Exercício



## Exercício 5

*Mostre que, num triângulo isósceles, a bissetriz do ângulo do vértice é também mediana e altura.*

