GEOMETRIA PLANA

Aula 10

Semelhança

Karla Lima

Sumário

Semelhança de Triângulos

Semelhança

- De forma grosseira, dizemos que duas figuras são **semelhantes** se uma delas é uma ampliação ou redução da outra, sem mudar sua forma original.

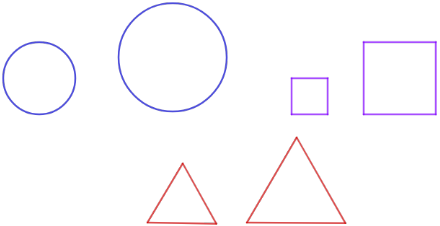


Figura 1: São semelhantes: duas circunferências quaisquer, dois quadrados quaisquer e dois triângulos equiláteros quaisquer.

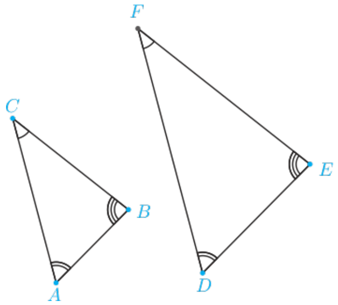
Semelhança

Definição 1

Dois triângulos são ditos ***semelhantes*** *se for possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam congruentes e lados correspondentes sejam proporcionais.*

- $\hat{A} = \hat{D}$
- $\hat{B} = \hat{E}$
- $\hat{C} = \hat{F}$
- $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$

Notação: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

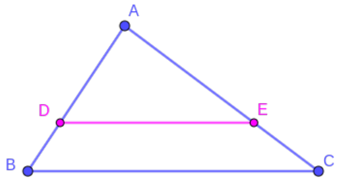


O Teorema Fundamental da Proporcionalidade

Teorema 1

Sejam $\triangle ABC$ *um triângulo e* $D \in \overline{AB}$, $E \in \overline{AC}$ *pontos tais que* $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. *Então,*

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

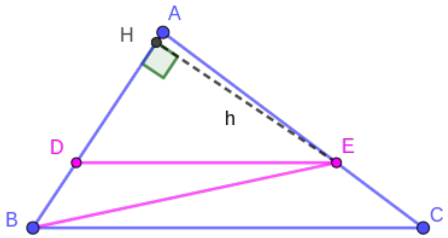


Demonstração: Teorema 1

Demonstração:

- Considere os triângulos ADE e BDE.
- A altura $\overline{EH}$ relativa aos lados $\overline{AD}$ e $\overline{DB}$ é a mesma para os dois triângulos.
- Logo:

$$\frac{\mathcal{A}(\triangle ADE)}{\mathcal{A}(\triangle BDE)} = \frac{AD}{DB}. \qquad (1)$$

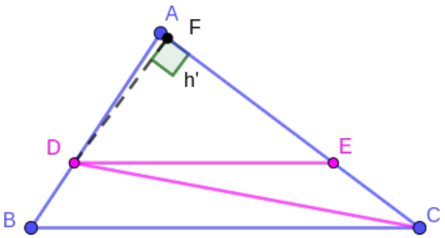


Demonstração: Teorema 1

Analogamente:

- Considere os triângulos ADE e CDE.
- A altura $\overline{DF}$ relativa aos lados $\overline{AE}$ e $\overline{CE}$ é a mesma para os dois triângulos.
- Logo:

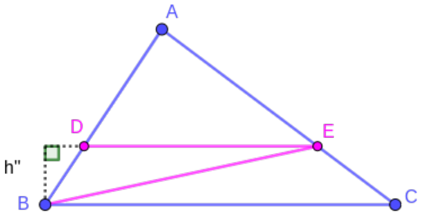
$$\frac{\mathcal{A}(\triangle ADE)}{\mathcal{A}(\triangle CDE)} = \frac{AE}{EC}. \qquad (2)$$



Demonstração: Teorema 1

Vamos mostrar que as áreas dos triângulos BDE e CDE são iguais.

- Para o triângulo BDE, considere o lado $\overline{DE}$ como base e h'' a altura relativa a essa base:

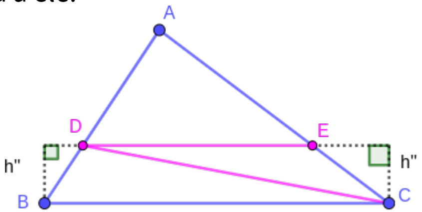


- Sua área é dada por

$$\mathcal{A}(\triangle BDE) = \frac{\overline{DE} * h''}{2}.$$

Demonstração: Teorema 1

- Analogamente, para o triângulo CDE, consideramos o mesmo lado $\overline{DE}$ como base e tomamos a altura relativa a ele:



- Como $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, as alturas dos dois triângulos são congruentes, já que também são paralelas (e estão entre segmentos paralelos).
- Sua área é dada por

$$\mathcal{A}(\triangle CDE) = \frac{\overline{DE} * h''}{2}.$$

Demonstração: Teorema 1

- Portanto,

$$\mathcal{A}(\triangle BDE) = \frac{\overline{DE} * h''}{2} = \mathcal{A}(\triangle CDE). \tag{3}$$

- De (1), (2) e (3), concluímos que

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

Observação

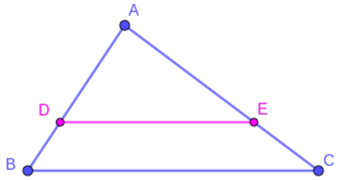
Observação: Como

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE},$$

podemos concluir que

$$1 + \frac{DB}{AD} = 1 + \frac{EC}{AE} \Rightarrow \frac{AD}{AD} + \frac{DB}{AD} = \frac{AE}{AE} + \frac{EC}{AE}.$$

Observação



Assim,

$$\frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE} \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

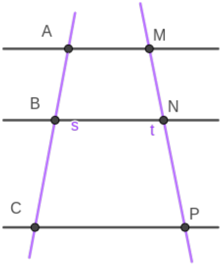
O Teorema de Tales

Teorema 2

Quando três ou mais retas paralelas são cortadas por duas transversais, os segmentos das transversais, determinados pelas paralelas, são proporcionais.

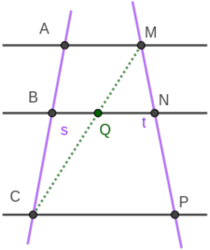
Demonstração:

- **Hipótese:** $\overline{AM} \parallel \overline{BN} \parallel \overline{CP}$
  s e t são transversais às paralelas.
- **Tese:** $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{MN}{NP}$



Demonstração: Teorema 2

- No $\triangle MAC$, $\overline{BQ}$ é paralelo à $\overline{AM}$.

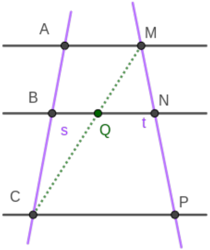


- Pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{MQ}{QC}. \tag{4}$$

Demonstração: Teorema 2

- No $\triangle MCP$, $\overline{NQ}$ é paralelo à $\overline{CP}$.



- Novamente, pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade,

$$\frac{MN}{NP} = \frac{MQ}{QC}. \tag{5}$$

Demonstração: Teorema 2

- De (4) e (5), obtemos

$$\frac{MN}{NP} = \frac{MQ}{QC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{MN}{NP} = \frac{AB}{BC},$$

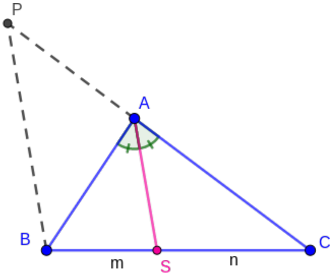
como queríamos demonstrar.

O Teorema da Bissetriz Interna

Exercício 1

Prove o Teorema da Bissetriz Interna: a bissetriz de um ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos dois outros lados.

Dica: Pelo ponto B, trace um segmento $\overline{BP}$ paralelo à bissetriz $\overline{AS}$, com $P \in \overrightarrow{CA}$. Use o Teorema Fundamental da Proporcionalidade.



Casos de Semelhança de Triângulos

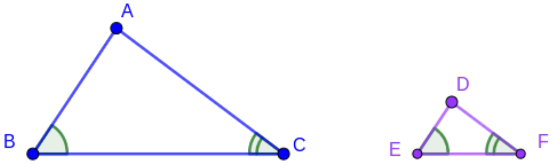
1º Caso: AA

Teorema 3

Se dois triângulos têm dois pares de ângulos respectivamente congruentes, então os triângulos são semelhantes.

Demonstração:

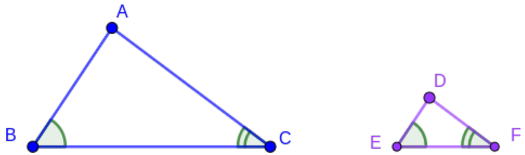
- **Hipótese:** $\hat{B} = \hat{E}$ e $\hat{C} = \hat{F}$
- **Tese:**
  - $\hat{A} = \hat{D}$
  - $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$



Demonstração: Teorema 3

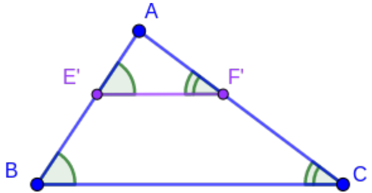
- Como $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ = \hat{D} + \hat{E} + \hat{F}$, com $\hat{B} = \hat{E}$ e $\hat{C} = \hat{F}$, segue que

$$\hat{A} = \hat{D}.$$



Demonstração: Teorema 3

- Seja E' um ponto sobre $\overline{AB}$ tal que $\overline{AE'} = \overline{DE}$.
- Neste ponto, trace um segmento paralelo ao lado $\overline{BC}$, que encontra o lado $\overline{AC}$ no ponto F'.

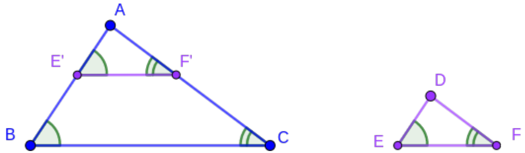


- Como são correspondentes, temos:

$$A\hat{E}'F' = \hat{B} \quad \text{e} \quad A\hat{F}'E' = \hat{C}. \tag{6}$$

Demonstração: Teorema 3

- Como $\overline{AE}' = \overline{DE}$, os triângulos $AE'F'$ e DEF são congruentes (LAA ou ALA).



- Assim,

$$\overline{AE'} = \overline{DE} \quad \text{e} \quad \overline{AF'} = \overline{DF}. \tag{7}$$

- Pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, obtemos

$$\frac{\overline{E'B}}{\overline{AE'}} = \frac{\overline{F'C}}{\overline{AF'}} \Rightarrow \frac{\overline{AE'} + \overline{E'B}}{\overline{AE'}} = \frac{\overline{AF'} + \overline{F'C}}{\overline{AF'}} \tag{8}$$

Demonstração: Teorema 3

- De (7) e (8), concluímos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}.$$

- Resta-nos mostrar que $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$.
  - Repita esse raciocínio, considerando agora um ponto D' sobre $\overline{CA}$ tal que $CD' = FD$. **(Exercício)**

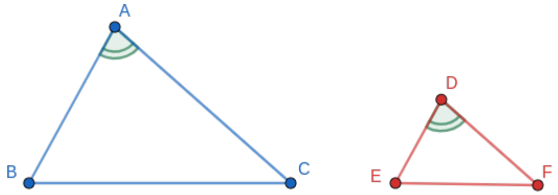
2^o Caso: LAL

Teorema 4

Se dois triângulos têm um par de ângulos respectivamente congruentes e os lados que os formam proporcionais, então os triângulos são semelhantes.

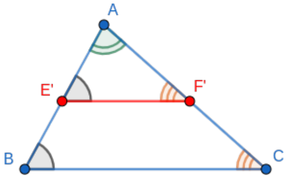
Demonstração:

- **Hipótese:**
  - $\hat{A} = \hat{D}$
  - $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$
- **Tese:**
  - $\hat{B} = \hat{E}$
  - $\hat{C} = \hat{F}$
  - $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$



Demonstração: Teorema 4

- Seja E' um ponto sobre $\overline{AB}$ tal que $AE' = DE$.
- Neste ponto, trace um segmento paralelo ao lado $\overline{BC}$, que encontra o lado $\overline{AC}$ no ponto F'.



- Como são correspondentes, temos que

$$A\hat{E}'F' = \hat{B} \tag{9}$$

$$A\hat{F}'E' = \hat{C} \tag{10}$$

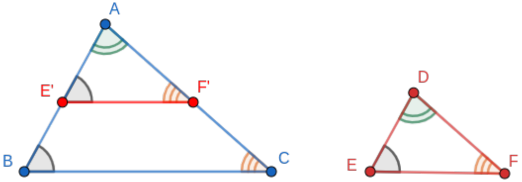
- Assim, os triângulos $AE'F'$ e ABC possuem dois pares de ângulos respectivamente congruentes e, pelo 1º caso (AA), esses triângulos são semelhantes.

Demonstração: Teorema 4

- Por hipótese, temos que
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \tag{11}$$
e acabamos de mostrar que
$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}. \tag{12}$$
- De (11) e (12), concluímos que
$$\frac{DE}{DF} = \frac{AB}{AC} = \frac{AE'}{AF'} \Rightarrow \frac{DE}{DF} = \frac{AE'}{AF'}.$$
- Como $DE = AE'$, segue que
$$\frac{DE}{DF} = \frac{AE'}{AF'} \Rightarrow \frac{AE'}{DF} = \frac{AE'}{AF'} \Rightarrow DF = AF'. \tag{13}$$

Demonstração: Teorema 4

- Portanto, os triângulos $AE'F'$ e DEF são congruentes (LAL).



- Usando a congruência acima, mostramos que

$$\hat{A} = \hat{D} \tag{14}$$

$$\hat{B} = \hat{E} \tag{15}$$

$$\hat{C} = \hat{F}. \tag{16}$$

Demonstração: Teorema 4

- Além disso, como $\triangle AE'F' \sim \triangle ABC$ e $\triangle AE'F' \equiv \triangle DEF$, tem-se:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'} = \frac{AC}{DF}$$
$$\frac{AC}{DF} = \frac{AC}{AF'} = \frac{BC}{E'F'} = \frac{BC}{EF},$$

de onde segue que

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}. \tag{17}$$

- De (14)–(17), concluímos que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

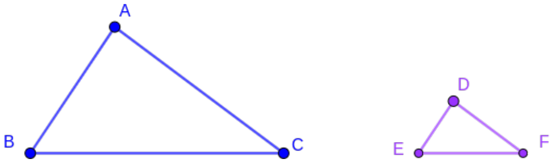
3º Caso: LLL

Teorema 5

Se os lados correspondentes de dois triângulos são proporcionais, então os triângulos são semelhantes.

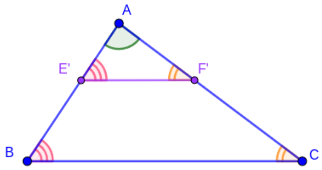
Demonstração:

- **Hipótese:**
  - $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$
- **Tese:**
  - $\hat{A} = \hat{D}$
  - $\hat{B} = \hat{E}$
  - $\hat{C} = \hat{F}$



Demonstração: Teorema 5

- Seja E' um ponto sobre $\overline{AB}$ tal que $AE' = DE$.
- Neste ponto, trace um segmento paralelo ao lado $\overline{BC}$, que encontra o lado $\overline{AC}$ no ponto F'.



- Como são correspondentes, temos que

$$A\hat{E}'F' = \hat{B} \tag{18}$$
$$A\hat{F}'E' = \hat{C}. \tag{19}$$

Demonstração: Teorema 5

- Assim, os triângulos $AE'F'$ e ABC possuem dois pares de ângulos respectivamente congruentes e, pelo 1º caso (AA), esses triângulos são semelhantes.
- Portanto,

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'} = \frac{BC}{E'F'}. \tag{20}$$

Demonstração: Teorema 5

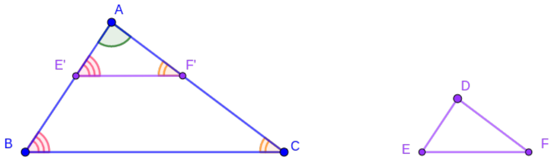
- Como $AE' = DE$, de (20) temos

$$
\begin{aligned}
\frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE} = \frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'} \\
\Rightarrow \frac{AC}{DF} = \frac{AC}{AF'} \\
\Rightarrow DF = AF'
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\frac{BC}{EF} = \frac{AB}{DE} = \frac{AB}{AE'} = \frac{BC}{E'F'} \\
\Rightarrow \frac{BC}{EF} = \frac{BC}{E'F'} \\
\Rightarrow EF = E'F'.
\end{aligned}
$$

Demonstração: Teorema 5



- Com isso, $\triangle DEF = \triangle AE'F'$ (LLL).
- Pela congruência acima, usando os ângulos opostos à lados congruentes, obtemos que
  - $\hat{A} = \hat{D}$;
  - $\hat{B} = A\hat{E}'F' = \hat{E}$;
  - $\hat{C} = A\hat{F}'E' = \hat{F}$;

  de onde segue que, junto à hipótese de que $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Teorema 1

Teorema 6

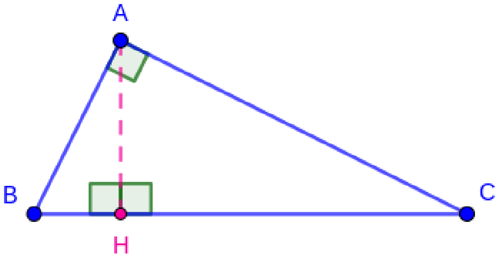
Em todo triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa divide-o em dois triângulos que são semelhantes entre si e semelhantes também ao triângulo dado.

Tese:

i) $\triangle ABH \sim \triangle AHC$

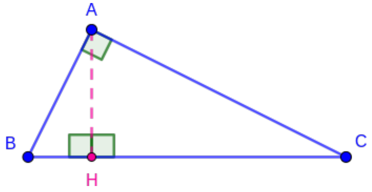
ii) $\triangle ABH \sim \triangle ABC$

iii) $\triangle AHC \sim \triangle ABC$



Demonstração: Teorema 1

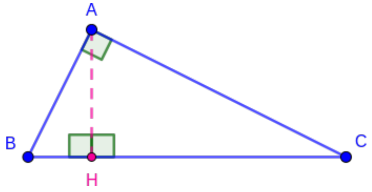
- Considere os triângulos retângulos ABH e ABC.



  - O ângulo B é comum aos dois triângulos e ambos possuem um ângulo de 90°.
  - Logo, $ABH \sim ABC$ (AA).

Demonstração: Teorema 1

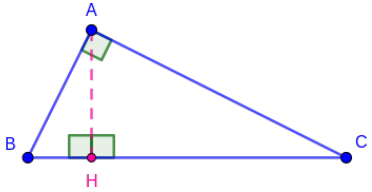
- Analogamente, considere os triângulos retângulos *AHC* e *ABC*.



  - O ângulo C é comum aos dois triângulos e ambos possuem um ângulo de 90°.
  - Logo, $AHC \sim ABC$ (AA).

Demonstração: Teorema 1

- Por fim, considere os triângulos retângulos AHC e ABH.

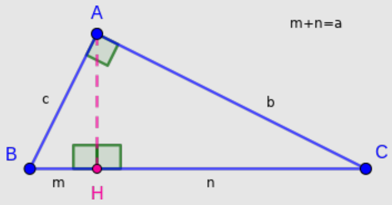


  - Como $B\hat{A}H = \hat{C}$ (já que $ABH \sim ABC$), e ambos possuem um ângulo de 90°, $AHC \sim ABH$ (AA).

Exercícios

Exercício 2

Dada um triângulo retângulo



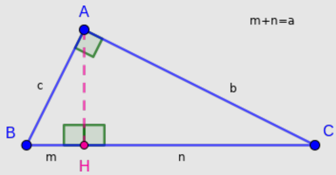
mostre que altura relativa à hipotenusa é a média geométrica entre os segmentos que a mesma determina na hipotenusa

$$h = \sqrt{m * n} \Rightarrow h^2 = m * n \qquad (21)$$

Exercícios

Exercício 3

Dada um triângulo retângulo



mostre que cada cateto é a média geométrica entre a hipotenusa e o segmento desta adjacente ao cateto:

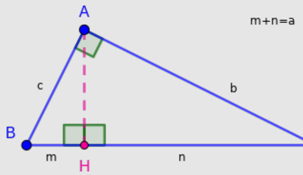
$$b^2 = a * n \tag{22}$$

$$c^2 = a * m \tag{23}$$

Exercícios

Exercício 4

Dada um triângulo retângulo



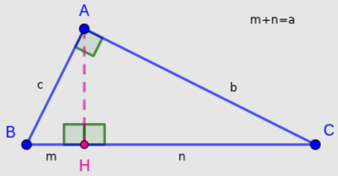
mostre que o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa à mesma:

$$b * c = a * h \tag{24}$$

Exercícios

Exercício 5

Dada um triângulo retângulo



mostre que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos:

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad \textbf{\textit{Teorema de Pitágoras}} \tag{25}$$

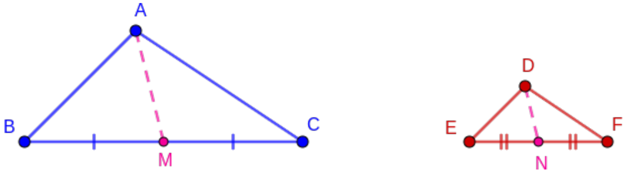
Teorema 2

Teorema 7

Se dois triângulos são semelhantes, então duas medianas quaisquer, ou duas alturas correspondentes quaisquer ou ainda duas bissetrizes internas correspondentes quaisquer, estão na mesma razão que os lados correspondentes.

Demonstração: Teorema 2

- Medianas



- Por hipótese:

$$\hat{B} = \hat{E}$$

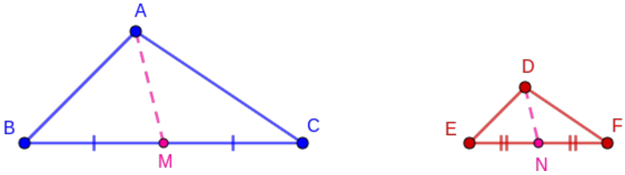
$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

Demonstração: Teorema 2

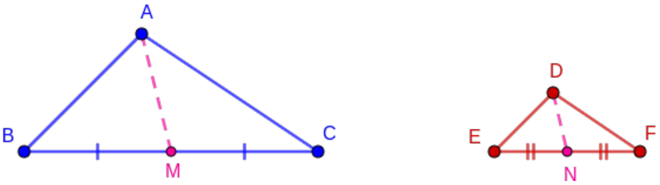
- Logo,

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BC/2}{EF/2} = \frac{BM}{EN}$$
$$\Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BM}{EN}$$

- Assim, os triângulos *ABM* e *DEN* possuem ângulos respectivamente congruentes, formados por lados proporcionais, sendo, portanto, semelhantes.



Demonstração: Teorema 2



- Da semelhança dos triângulos *ABM* e *DEN*, concluímos que

$$\frac{AM}{DN} = \frac{BM}{EN} \Rightarrow \frac{AM}{DN} = \frac{2BM}{2EN}$$
$$\Rightarrow \frac{AM}{DN} = \frac{BC}{EF},$$

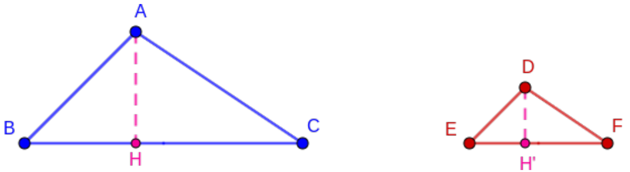
como queríamos demonstrar.

Demonstração: Teorema 2

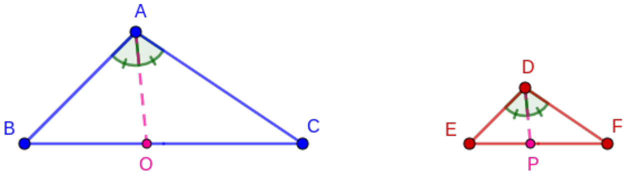
Exercício 6

Termine a demonstração do Teorema 2.

- Alturas



- Bissetrizes



Formulário Avaliativo

Formulário

Responda ao formulário: Aula 10: Semelhança.