UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS

FACET

Cálculo IV e Vetorial

Lista 01 — 27 de Fevereiro de 2015

(1) A transformação $x = au$, $y = bv$ $(a, b > 0)$ pode ser reescrita como $x/a = u$, $y/b = v$ e, portanto, transforma a região circular

$$u^2 + v^2 \leq 1$$

na região elíptica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

Ao efetuar integrações em regiões elípticas, primeiro transformamos esta região em uma circular e depois aplicamos a transformada em coordenadas polares da seguinte maneira:

$$u = r\cos\theta \Rightarrow x/a = u = r\cos\theta \Rightarrow x = ra\cos\theta$$

$$v = r\sin\theta \Rightarrow y/b = v = r\sin\theta \Rightarrow y = rb\sin\theta.$$

Portanto, a mudança a coordenadas polares de uma região elíptica é dada por

$$(x, y) = (ar\cos\theta, br\sin\theta)$$

com $\theta \in [0, 2\pi)$ e $r \in [0, 1]$.

- Usando esta mudança, calcule a integral $\int\int_R \sqrt{16x^2 + 9y^2}dA$, onde R é a região envolvida pela elipse $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$.

(2) De modo análogo, a transformação $x = au$, $y = bv$, $z = cw$ $(a, b, c > 0)$ pode ser reescrita como $x/a = u$, $y/b = v$,$z/c = w$ e, portanto, transforma a região esférica

$$u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$$

na região elipsoidal

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Ao efetuar integrações em regiões elipsoidais, primeiro transformamos esta região em uma esférica e depois aplicamos a transformada em coordenadas esféricas da seguinte maneira:

$$u = \rho\cos\theta\sin\phi \Rightarrow x/a = u = \rho\cos\theta\sin\phi \Rightarrow x = a\rho\cos\theta\sin\phi$$

$$v = \rho\sin\theta\sin\phi \Rightarrow y/b = v = \rho\sin\theta\sin\phi \Rightarrow y = b\rho\cos\theta\sin\phi.$$

$$w = \rho\cos\phi \Rightarrow z/c = w = \rho\cos\phi \Rightarrow z = c\rho\cos\phi.$$

Portanto, a mudança a coordenadas esféricas de uma região elipsoidal é dada por

$$(x, y) = (a\rho \cos\theta \sin\phi, b\rho \cos\theta \sin\phi, c\rho \cos\phi)$$

com $\theta \in [0, 2\pi)$, $\phi \in [0, \pi]$ $r \in [0, 1]$.

- Usando esta mudança, calcule a integral $\int\int\int_G x^2 dV$, onde G é a região envolvida pelo elipsóide $9x^2 + 4y^2 + z = 36$.

(3) Calcule a integral de linha, onde C é a curva dada:

a) $\int_C xy^4 ds$, C é a metade direita do círculo $x^2 + y^2 = 16$.

b) $\int_C xe^{yz} ds$, C é o seguimento de reta de $(0, 0, 0)$ a $(1, 2, 3)$.

c) $\int_C zdx + xdy + ydz$, $C : x = t^2$, $y = t^3$, $z = t^2$, $0 \leq t \leq 1$.

(4) Se $\rho(x, y)$ representa a função densidade linear de um ponto (x, y) de um fio fino com a forma de uma curva C, então a **massa total** do fio é dada pela integral de linha

$$m = \int_C \rho(x, y) ds.$$

O **centro de massa** do fio com a função densidade $\rho(x, y)$ encontra-se no ponto $(\overline{x}, \overline{y})$, onde

$$\overline{x} = \frac{1}{m} \int_C x\rho(x, y) ds,$$

$$\overline{y} = \frac{1}{m} \int_C y\rho(x, y) ds.$$

Se um arame fino tem a forma da parte que está no primeiro quadrante da circunferência com centro na origem e raio a e a função densidade for $\rho(x, y) = kxy$, k constante, encontre:

a) A massa total do arame.

b) O centro de massa do arame.

(5) O campo de velocidade de um fluido em movimento é dado por $\overrightarrow{v} = (2x, 2y, -z)$. Calcular a circulação do fluido ao redor da curva fechada C, sendo C dada por $\overrightarrow{r} = \cos t\,\overrightarrow{i} + \text{sen} t\,\overrightarrow{j} + 2\,\overrightarrow{k}$, $t \in [0, 2\pi]$.

(6) Determine o trabalho realizado pelo campo de força $F(x, y) = x^2\,\overrightarrow{i} + ye^x\,\overrightarrow{j}$ em uma partícula que se move sobre a parábola $x = y^2 + 1$ de $(1, 0)$ a $(2, 1)$.

Bons estudos!

Bibliografia:

Stewart, J. - Cálculo Vol II

Flemming, D. - Cálculo B

Howard, A. - Cálculo Vol II

Guidorizzi, H. - Um curso de cálculo Vol 3.