



UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS

Prof^a. Karla Lima
Cálculo II — Avaliação P2

Engenharia de Computação

24 de Outubro de 2022

1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Aluno(a):

Obs: Respostas sem justificativa não serão consideradas.

(1) Resolva os problemas abaixo:

a) $y'' + 16y = 0$, com $y(0) = 3$ e $y'(0) = \frac{2}{3}$

b) $4y'' + 12y' + 9y = 0$, com $y(0) = -2$ e $y(1) = e^{-3/2}$

(2) Dadas as sequências abaixo, encontre os seus 4 primeiros termos e verifique sua convergência.

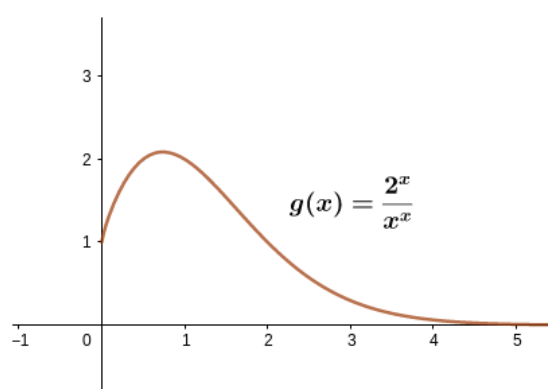
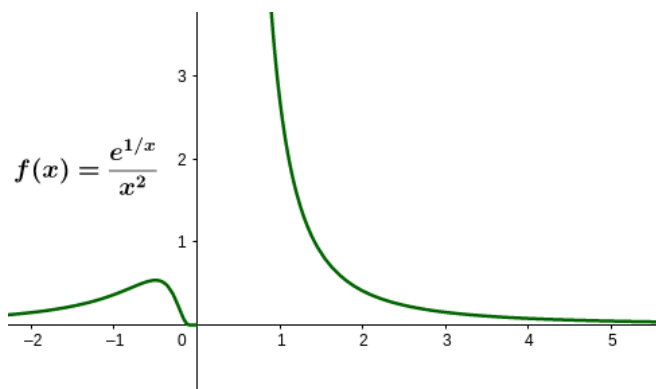
a) $\left\{ \frac{n^3}{n+1} \right\}$

b) $\{(-1)^n e^{2/n}\}$

(3) Verifique se as séries abaixo são convergentes ou divergentes.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$



(4) Para quais valores de x a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 x^n}{2^n}$ converge?

- (5) Dada a função $f(x) = e^{x^3}$, aproxime-a por um polinômio de Taylor com grau 3 no número 0. Qual o erro cometido ao usar a aproximação para calcular $f(0.1)$?

Lembretes

EDO

raízes reais e distintas: $y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$

raízes reais e iguais: $y(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$

raízes complexas: $\alpha + i\beta$: $y(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x))$

Teste da Razão / Raiz

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \text{ ou } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1: \text{ converge} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1 \text{ ou } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1: \text{ inconclusivo} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \text{ ou } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1: \text{ diverge} \end{aligned}$$

Teste da Integral

$$f(n) = a_n$$

f é contínua em $x \geq 1$

f é positiva em $x \geq 1$

f é decrescente em $x \geq 1$

Se $\int_1^\infty f(x) dx$ converge, a série $\sum_{n=1}^\infty a_n$ é convergente.

P2 - Engenharia de Computação

01

a) $y'' + 16y = 0$, com $y(0) = 3$ e $y'(0) = \frac{2}{3}$

$$y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x)$$

$$\Rightarrow y'(x) = -4c_1 \sin(4x) + 4c_2 \cos(4x)$$

logo,

$$3 = y(0) = c_1 \Rightarrow \boxed{c_1 = 3}$$

$$\frac{2}{3} = y'(0) = 4c_2 \Rightarrow \boxed{c_2 = \frac{1}{6}}$$

Solução: $y(x) = 3 \cos(4x) + \frac{1}{6} \sin(4x)$.

b) $4y'' + 12y' + 9y = 0$, com $y(0) = -2$ e $y(1) = e^{-3/2}$.

$$y = c_1 e^{-\frac{3}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{3}{2}x}$$

logo,

$$-2 = y(0) = c_1 \Rightarrow c_1 = -2$$

$$e^{-3/2} = y(1) = c_1 e^{-3/2} + c_2 e^{-3/2} \Rightarrow e^{-3/2} = e^{-3/2} (-2 + c_2)$$

$$\Rightarrow c_2 - 2 = 1 \Rightarrow c_2 = 3$$

Solução: $y = -2 e^{-3/2 x} + 3 x e^{-3/2 x}$.

02

$$a) \left\{ \frac{n^3}{n+1} \right\}$$

$$a_1 = \frac{1^3}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{3^3}{3+1} = \frac{27}{4}$$

$$a_2 = \frac{2^3}{2+1} = \frac{8}{3}$$

$$a_4 = \frac{4^3}{4+1} = \frac{64}{5}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^3}{n}}{\frac{n+1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{1 + \frac{1}{n}} = \infty \quad (\text{A seq. diverge})$$

$\nearrow \infty$
 $\nwarrow 1 + \searrow 0 = 1$

$$b) \left\{ (-1)^n e^{2/n} \right\}$$

$$a_1 = (-1)^1 e^{2/1} = -e^2$$

$$a_3 = (-1)^3 e^{2/3} = -e^{2/3}$$

$$a_2 = (-1)^2 e^{2/2} = e$$

$$a_4 = (-1)^4 e^{2/4} = e^{1/2}$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| (-1)^n e^{2/n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{2}{n}} = e^0 = 1 \neq 0,$$

$\nearrow 0$
 $\nwarrow \frac{2}{n}$

a sequência alternada diverge.

03

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$

Como $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$: contínua em $x \geq 1$, decrescente em $x \geq 1$, positiva em $x \geq 1$, podemos usar o

teste da integral.

Logo,

$$\int_1^t \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \int_1^t e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} dx$$

$$u = \frac{1}{x} \Rightarrow du = -\frac{1}{x^2} dx$$

$$u(1) = 1$$

$$u(t) = \frac{1}{t}$$

$$\begin{aligned} &= - \int_1^{1/t} e^u du = -e^u \Big|_1^{1/t} = -(e^{1/t} - e^1) \\ &= e - e^{1/t}, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{1/x}}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} (e - e^{1/t}) = e - e^0 = e - 1.$$

Como a integral converge, também converge a série dada.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$

Pelo teste da raiz,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{2^n}{n^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{2}{n} \right)^n \right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0 < 1$$

de onde segue que a série converge.

04)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{2^n}$$

Vamos usar o teste da razão:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{(n+1)^2 |x|^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{n^2 |x|^n}{2^n}} = \frac{(n+1)^2 \cancel{|x|^n} |x|}{\cancel{2^n} \cdot 2} \cdot \frac{\cancel{2^n}}{n^2 \cancel{|x|^n}} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \cdot \frac{|x|}{2} = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 \frac{|x|}{2}.$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\overset{2}{1} + \overset{0}{\frac{1}{n}} \right)^2 \frac{|x|}{2} = 1^2 \cdot \frac{|x|}{2},$$

e a série será convergente se

$$\frac{|x|}{2} < 1 \Rightarrow |x| < 2.$$

O teste é inconclusivo em $x = -2$ e $x = 2$, onde o limite é igual a 1.

$$x = -2: \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 \cancel{(-1)^n} \cancel{2^n}}{\cancel{2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n} n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2.$$

Pelo teste da divergência, como $n^2 \rightarrow \infty$, a série diverge.

$$x = 2: \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 \cancel{2^n}}{\cancel{2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2.$$

Esta é uma série alternada, com $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty \neq 0$. Logo,

diverge.

05 $f(x) = e^{x^3}$

Temos que

$$T_3(x) = \sum_{i=0}^3 \frac{f^{(i)}(0)}{i!} (x-0)^i$$

$$= f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3.$$

Como

$$f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(0) = 3x^2 e^{x^3} \Big|_{x=0} = 0$$

$$f''(0) = 6x e^{x^3} + (3x^2)^2 e^{x^3} \Big|_{x=0} = 0$$

$$\begin{aligned} f'''(0) &= 6e^{x^3} + (6x) \cdot 3x^2 \cdot e^{x^3} + 2(3x^2) \cdot 6x \cdot e^{x^3} + (3x^2)^3 e^{x^3} \Big|_{x=0} \\ &= 6, \end{aligned}$$

concluimos que

$$T_3(x) = 1 + \frac{6}{3!} x^3 = 1 + x^3.$$

Para calcular o erro cometido, fazemos

$$|f(0.1) - T_3(0.1)| = |e^{0.1^3} - (1 + (0.1)^3)| \approx 5 \times 10^{-7}.$$