P1: 29/03/22

01

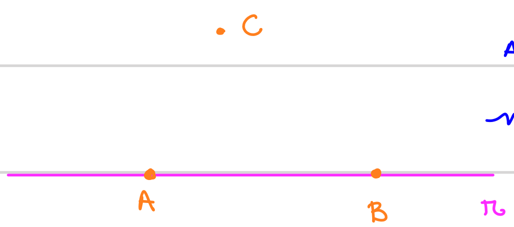
a) Se os pontos forem não colineares, existe um único plano que os contém. Logo, os planos são coplanares.

Se os pontos forem colineares, digamos numa reta r, podemos escolher um ponto P fora dela, de modo a gerar um plano α.

Como $r \subset \alpha$, os três pontos colineares iniciais pertencem ao plano e são coplanares.

b) A afirmação é falsa.

Pelo Postulado 2, dada uma reta, existem pontos que não pertencem à mesma. Assim, dados dois pontos colineares, podemos tomar um ponto fora da reta gerada pelos mesmos, de modo que os 3 pontos sejam não colineares:



A, B e C pontos não colineares.

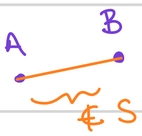
c) De fato, dados dois pontos A e B, eles determinam uma reta r. Fora de r, existe um ponto C tal que A, B e C são não colineares e, portanto, geram um plano α. Assim, A e B pertencem a um plano

α e são coplanares.

d) Falso.

Dados dois pontos distintos, o segmento de reta que os une contém infinitos pontos distintos dos pontos dados que, portanto, não pertencem ao conjunto inicial.

$S = \{A, B\}$



e) Com efeito, duas retas são distintas se possuem pontos que não são comuns às duas, podendo ter:

i) nenhum ponto em comum;

ii) alguns pontos em comum, apenas.

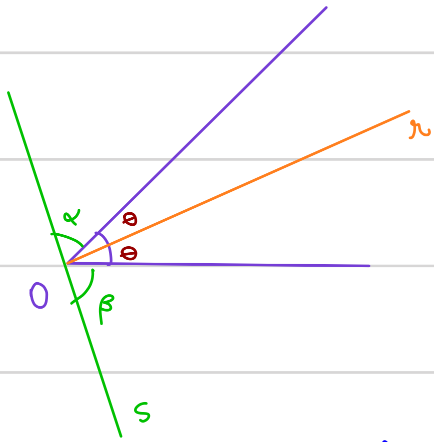
No caso i) não temos nada a acrescentar. No caso ii), mostraremos que tal interseção é única.

Suponha, por absurdo, que as retas distintas r e s possuem mais de um ponto em comum. Sendo A e B dois deles, existe uma única reta que os contém. Como $A, B \in r$ e $A, B \in s$, teríamos

$$r = s,$$

um absurdo. Portanto, a interseção deve ser única.

02



Hipótese: r é bissetriz de $\hat{O}$

$r \perp s$

Tese: $\alpha = \beta$.

Solução: Como $r \perp s$, temos que

$$\alpha + \theta = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 90^\circ - \theta$$

$$\beta + \theta = 90^\circ \Rightarrow \beta = 90^\circ - \theta.$$

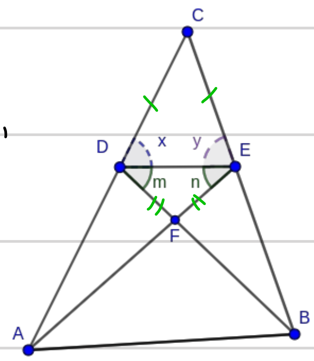
Portanto,

$$\alpha = 90^\circ - \theta = \beta \Rightarrow \alpha = \beta,$$

como queríamos demonstrar.

03

i) $x=y$ e $m=n \Rightarrow AC = BC$



Se $x=y$, então o triângulo DCE é isósceles, com $DC = CE$. (I)

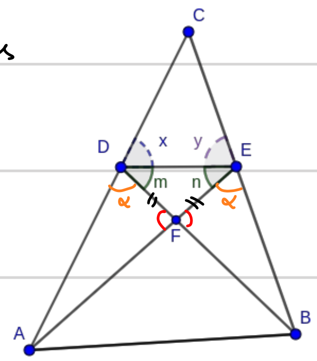
Além disso, se $m=n$, então DEF também é isósceles, com $DF=FE$.

Do desenho, podemos inferir que:

$$x+m+A\hat{D}F = 180^\circ \text{ e } y+n+B\hat{E}F = 180^\circ \Rightarrow x+m+A\hat{D}F = y+n+B\hat{E}F.$$

Como $x=y$ e $m=n$, obtemos:

$$x-y-n+m+A\hat{D}F = y+n-y-n+B\hat{E}F \Rightarrow A\hat{D}F = B\hat{E}F = \alpha$$



Sobre os triângulos ADF e BEF, podemos afirmar que:

$A\hat{D}F = B\hat{E}F$ (provamos acima)

$DF = FE$ (ΔDFE é isósceles)

$D\hat{F}A = E\hat{F}A$ (ângulos opostos pelo vértice)

Pelo caso ALA, concluímos que

$$\Delta ADF = \Delta BEF$$

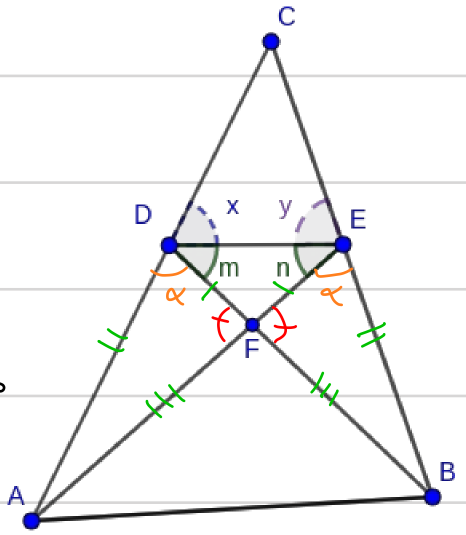
e, os lados opostos aos ângulos $D\hat{F}A$ e $E\hat{F}A$ são congruentes:

$$AD = BE. \quad \text{(II)}$$

De (I) e (II), obtemos

$$AC = AD + DC = BE + EC = BC,$$

como queríamos demonstrar.



ii) $DF = EF$ e $x = y \Rightarrow \Delta AFB$ é isósceles.

Com efeito, se $DF = EF$ então o triângulo DFE é isósceles. Assim, os ângulos da base são congruentes: $m = n$.

Temos, portanto, que $x = y$ e $m = n$ e, pelo item i),

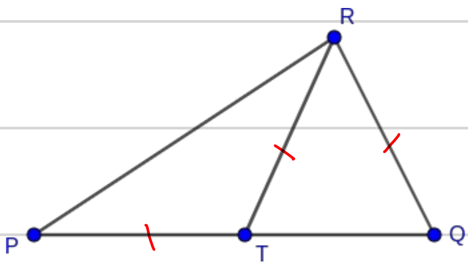
$$\Delta DFA = \Delta EFB,$$

com os lados opostos aos ângulos $A\hat{D}F$ e $B\hat{E}F$ congruentes:

$$AF = BF.$$

Portanto, ΔAFB é isósceles.

(04) $PT = TR = RQ \Rightarrow PR > RQ$.

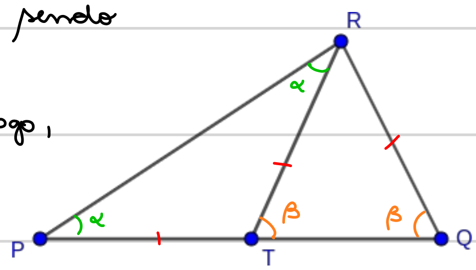


Da hipótese, podemos concluir que os triângulos PTR e TRQ são isósceles.

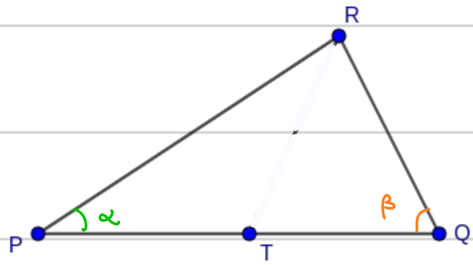
Com isso, obtemos a congruência:

$$T\hat{P}R = T\hat{R}P \quad e \quad R\hat{T}Q = R\hat{Q}T.$$

O ângulo β é tal que $\beta + P\hat{T}R = 180°$, sendo um ângulo externo a PTR em $P\hat{T}R$. Logo, β é maior que os ângulos internos de PTR não adjacentes a ele: $\beta > \alpha$.



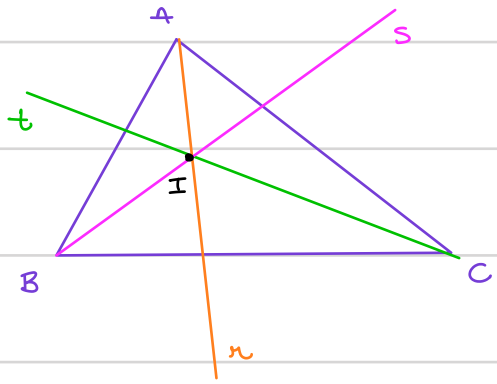
Olhando agora o Δ PRQ, temos



com $\alpha < \beta$. Assim, oposto ao maior ângulo deste triângulo temos o maior lado do mesmo, de onde segue que

$$PR > RQ.$$

05



Hipótese: r é bissetriz de $\hat{A}$

s é bissetriz de $\hat{B}$

t é bissetriz de $\hat{C}$

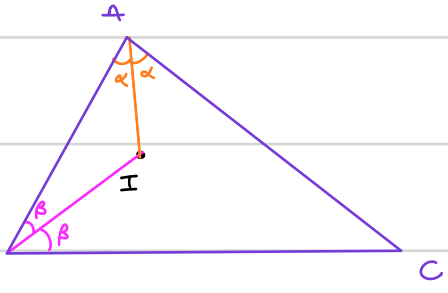
Tese: $r \cap s \cap t = \{I\}$.

$d(I, \overline{AB}) = d(I, \overline{AC}) = d(I, \overline{BC})$

Como mostrado no exercício 1e), duas retas distintas que se interseptam o fazem num só ponto. Seja $I = r \cap s$. Queremos mostrar duas coisas:

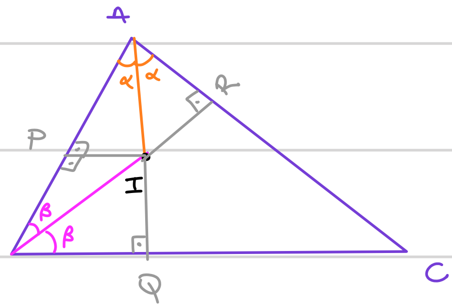
1. A distância de I aos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são iguais.

2. I pertence à bissetriz de $\hat{C}$.



Vamos demonstrar 1. Seja $\overline{AI}$ e $\overline{BI}$ segmentos das bissetrizes de $\hat{A}$ e $\hat{B}$, respectivamente.

Para calcular as distâncias pedidas, devemos traçar, a partir do ponto I, segmentos perpendiculares a cada um dos lados. Nosso objetivo é mostrar que $IP = IR = IQ$.



Com efeito, os triângulos IPA e IRA possuem as seguintes congruências:

AI lado em comum;

$P\hat{A}I = I\hat{A}R$ (ângulo adjacente ao lado comum);

$A\hat{P}I = A\hat{R}I$ (ângulo oposto ao lado comum).

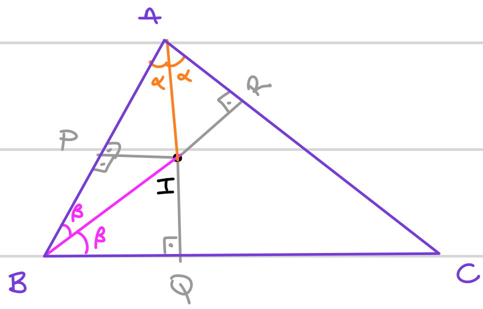
Portanto, pelo caso LAA, temos

$$\Delta IPA \equiv \Delta IRA,$$

com $IP = IR$, por serem lados opostos a ângulos congruentes.

Analogamente, os triângulos IQB e IPB são congruentes pelo

Caso LAA:



- BI lado em comum

- $P\hat{B}I = I\hat{B}Q$

- $I\hat{P}B = I\hat{Q}B$.

Portanto, os lados opostos ao ângulo β são congruentes:

$$IP = IQ.$$

Concluímos, assim, que

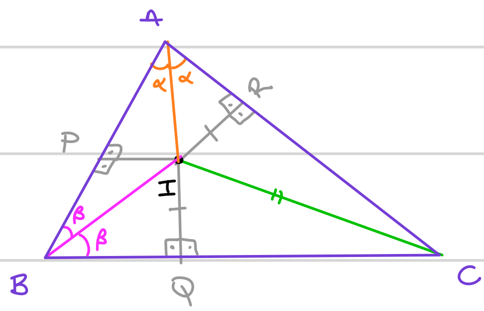
$$IR = IP = IQ,$$

como queríamos demonstrar.

Agora, resta-nos provar o item 2.

Considere o segmento $\overline{CI}$. Mostraremos que $\overrightarrow{CI} = t$ é a bissetriz do ângulo C; ou seja, que

$$A\hat{C}I = I\hat{C}B.$$



Considere os triângulos retângulos IRC e IQC. Eles possuem as seguintes congruências:

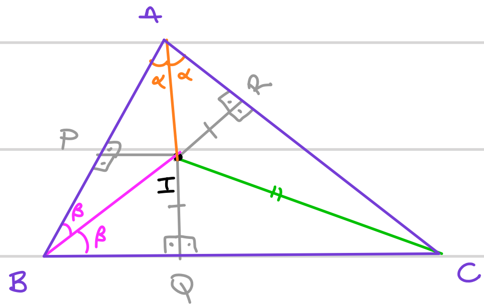
- $IR = IQ$ (demonstrada no item anterior);

- possuem a mesma hipotenusa $\overline{IC}$;

- $I\hat{Q}C = 90^\circ = I\hat{R}C$

Pelo caso de congruência em triângulos retângulos,

$$\Delta IQC = \Delta IRC,$$



de onde segue que os ângulos opostos aos lados congruentes $\overline{IQ}$ e $\overline{IR}$ são congruentes:

$$I\hat{C}R = I\hat{C}Q.$$

Portanto, o segmento $\overline{IC}$ bisseta $\hat{C}$, e I pertence à bissetriz desse ângulo, de onde segue que

$$r \cap s \cap t = \{I\}.$$