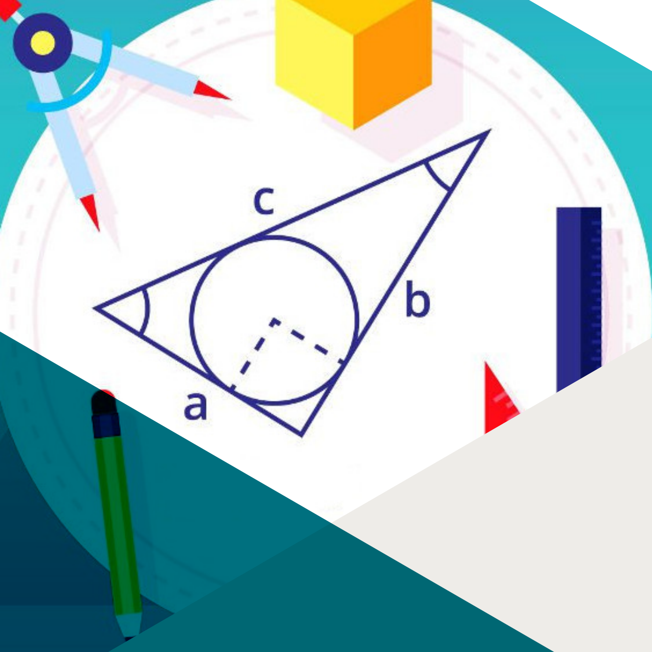
Introdução ao Cálculo



Aula 04: Equações e Inequações

Karla Lima

Sumário

Bibliografia

Bibliografia

- Livro texto: Fundamentos da Matemática Elementar: 1 (Click para baixar)

Inequações

Definição

Definição 1

Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$. Chamamos ***inequação*** *na incógnita x a qualquer uma das sentenças abertas abaixo:*

- $f(x) > g(x)$
- $f(x) < g(x)$
- $f(x) \geq g(x)$
- $f(x) \leq g(x)$

Domínio de Validade e Solução

Definição 2

Chamamos de ***domínio de validade*** *da inequação o conjunto dos valores* $x \in D_f \cap D_g$ *que satisfazem à inequação dada.*

Definição 3

O número x_0 *para o qual a inequação é verdadeira é chamado de* ***solução*** *da mesma.*

Definição 4

O conjunto S *de todos os números reais* x *tais que a inequação é verdadeira é chamado de* ***conjunto solução*** *da inequação.*

Resolver uma Inequação

- O processo de **resolver uma inequação** consiste em transformá-la em uma equação equivalente cuja solução é óbvia. Operações de transformação de uma equação em uma equação equivalente incluem:
    1. **Adicionar o mesmo número** a ambos os lados. Assim, as inequações $a < b$ e $a + c < b + c$ são equivalentes.
    2. **Multiplicar o mesmo número positivo** de ambos os lados. Logo, as inequações $a < b$ e $ac < bc$, $c > 0$, são equivalentes.
    3. **Multiplicar o mesmo número negativo** de ambos os lados. Logo, as inequações $a < b$ e $ac > bc$, $c < 0$, são equivalentes.
    4. **Simplificar** expressões em um dos lados de uma equação.

Observação: sinais em desigualdades

Observação: Sejam a, b dois números reais tais que $a < b$.

- Se $c > 0$ então $c * a < c * b$ (mantém os sinais originais: mantém a desigualdade).

  Por exemplo, $-3 < 1$ e $2 * (-3) = -6$ gera um número que é menor do que $2 * 1 = 2$.

- Se $c < 0$ então $c * a > c * b$ (troca os sinais originais: inverte a desigualdade).

  Por exemplo, $-3 < 1$ e $(-2) * (-3) = 6$ gera um número que é maior do que $(-2) * 1 = -2$.

Exemplo

Exemplo 1

Considere a inequação $2x + 1 > x + 3$. *Determine:*

a) 0 *é solução da inequação?*

b) $-\sqrt{2}$ *é solução?*

c) *O conjunto solução.*

Exemplo

Exemplo 2

Considere a inequação $x + 1 \geq x + 2$. *Determine:*

a) 0 *é solução da inequação?*

b) $-\sqrt{2}$ *é solução?*

c) *O conjunto solução.*

Inequações Simultâneas

Definição 5

A dupla desigualdade $f(x) < g(x) < h(x)$ se decompõe em duas inequações simultâneas, isto é, equivale a um sistema de duas equações em x, separadas pelo conectivo e:

$$f(x) < g(x)\ (\mathbf{1}) \quad e \quad g(x) < h(x)\ (\mathbf{2})$$

Indicando com S_1 o conjunto solução de $(\mathbf{1})$ e S_2 o conjunto solução de $(\mathbf{2})$, o conjunto solução da dupla desigualdade é $S = S_1 \cap S_2$.

Exemplo

Exemplo 3

Resolver $3x + 2 < -x + 3 \leq x + 4$.

O Sinal de uma Função

Sinal de uma Função

- Dada uma função $f : A \to B$, definida por $y = f(x)$, vamos resolver o seguinte problema:

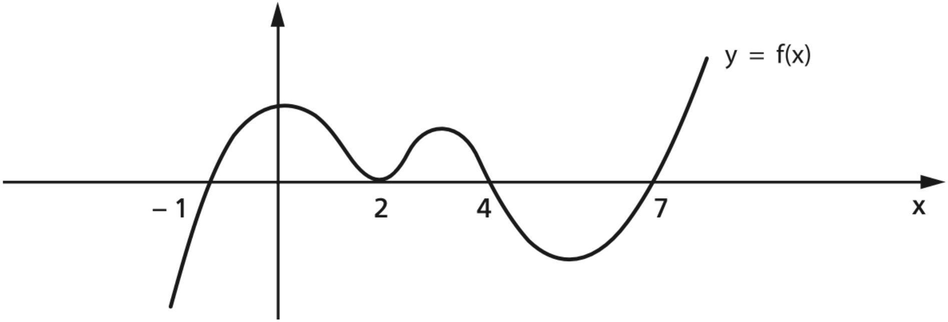
  'Para quais valores de x tem-se $f(x) > 0$ e para quais tem-se $f(x) < 0$?'

- Graficamente, $f(x) > 0$ quando o ponto $(x, f(x))$ está acima do eixo x.
- Analogamente, $f(x) < 0$ quando o ponto $(x, f(x))$ está abaixo do eixo x.

Sinal de uma Função

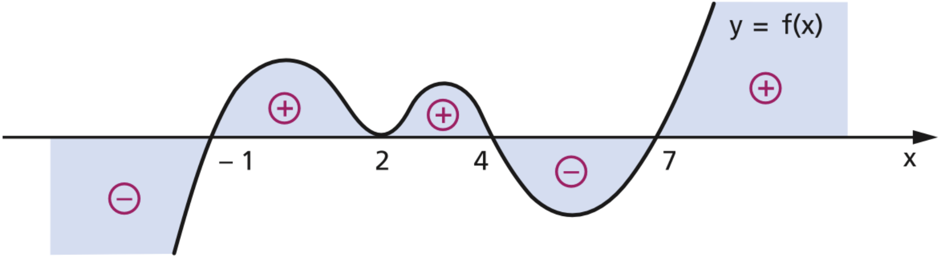
Exemplo 4

Vamos estudar o sinal da função $y = f(x)$, cujo gráfico está representado abaixo:



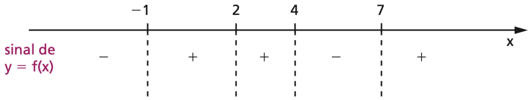
Sinal de uma Função

Basta observar os valores de *x* para os quais o gráfico está acima do eixo *x* e abaixo do mesmo eixo:



Sinal de uma Função

Costumamos usar uma reta para identificar o sinal da função dada:

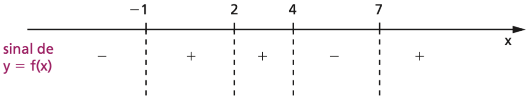


Com isso, concluímos:

- $f(x) = 0$ onde o gráfico corta o eixo x (os pontos nesse eixo são da forma $(x, 0)$).
  Assim, $f(x) = 0$ em $x = -1, x = 2, x = 4$ e $x = 7$.
- $f(x) > 0$ em $-1 < x < 2$ ou $2 < x < 4$ ou $x > 7$.
- $f(x) < 0$ em $x < -1$ ou $4 < x < 7$.

Sinal de uma Função

Dado o estudo do sinal de f, responda:



a) $f(-\pi)$ é negativo?

b) $f(e)$ é negativo?

c) $f(100.98)$ é positivo?

d) $f(2.01)$ é zero?

Sinal da Função Afim

Para determinarmos o sinal da função afim, basta resolver as inequações de 1° grau:

$$ax + b < 0$$

$$ax + b > 0.$$

Sinal da Função Afim: 1° caso

- 1° caso: $a > 0$

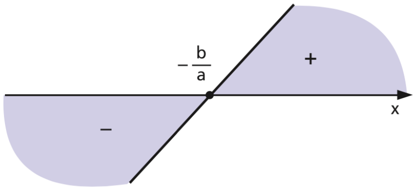
$$
\begin{aligned}
& ax + b > 0 \\
\Rightarrow & ax + b - b > 0 - b \\
\Rightarrow & ax > -b \\
\Rightarrow & \frac{1}{a} * \frac{ax}{1} > \frac{1}{a} * \frac{-b}{1}, \quad \left(\frac{1}{a}\right) > 0 \\
\Rightarrow & x > \frac{-b}{a}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& ax + b < 0 \\
\Rightarrow & ax + b - b < 0 - b \\
\Rightarrow & ax < -b \\
\Rightarrow & \frac{1}{a} * \frac{ax}{1} < \frac{1}{a} * \frac{-b}{1}, \quad \left(\frac{1}{a}\right) > 0 \\
\Rightarrow & x < \frac{-b}{a}.
\end{aligned}
$$

Sinal da Função Afim: 1° caso

Na reta de estudo do sinal, esboçamos uma reta crescente, identificando o seu zero (**chamado ponto crítico**):

- $f(x) = 0 \text{ em } x = -\dfrac{b}{a}$.
- $f(x) > 0 \text{ em } x > -\dfrac{b}{a}$.
- $f(x) < 0 \text{ em } x < -\dfrac{b}{a}$.



Sinal da Função Afim: 2° caso

- 2° caso: $a < 0$

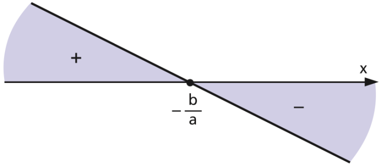
$$
\begin{aligned}
& ax + b > 0 \\
\Rightarrow & ax + b - b > 0 - b \\
\Rightarrow & ax > -b \\
\Rightarrow & \frac{1}{a} * \frac{ax}{1} < \frac{1}{a} * \frac{-b}{1}, \quad \left(\frac{1}{a}\right) < 0 \\
\Rightarrow & x < \frac{-b}{a}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& ax + b < 0 \\
\Rightarrow & ax + b - b < 0 - b \\
\Rightarrow & ax < -b \\
\Rightarrow & \frac{1}{a} * \frac{ax}{1} > \frac{1}{a} * \frac{-b}{1}, \quad \left(\frac{1}{a}\right) < 0 \\
\Rightarrow & x > \frac{-b}{a}.
\end{aligned}
$$

Sinal da Função Afim: 2° caso

Na reta de estudo do sinal, esboçamos uma reta decrescente, identificando o seu ponto crítico:

- $f(x) = 0$ em $x = -\dfrac{b}{a}$.
- $f(x) > 0$ em $x < -\dfrac{b}{a}$.
- $f(x) < 0$ em $x > -\dfrac{b}{a}$.



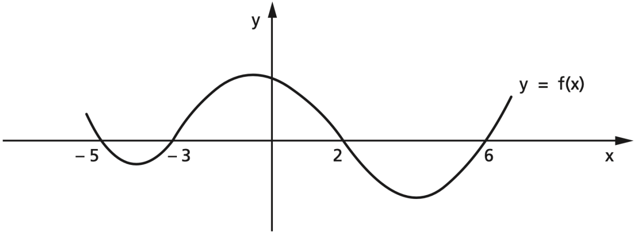
Exercícios

Exercícios

Exercício 1

Estude o sinal da função cujo gráfico está representado abaixo.

a)

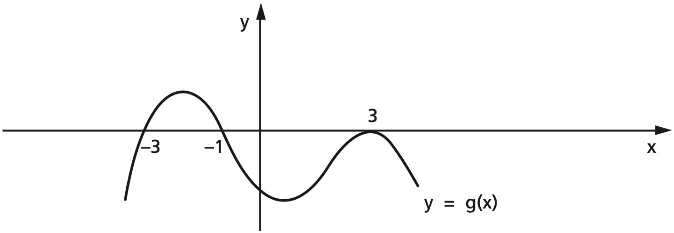


Exercícios

Exercício 2

Estude o sinal da função cujo gráfico está representado abaixo.

b)

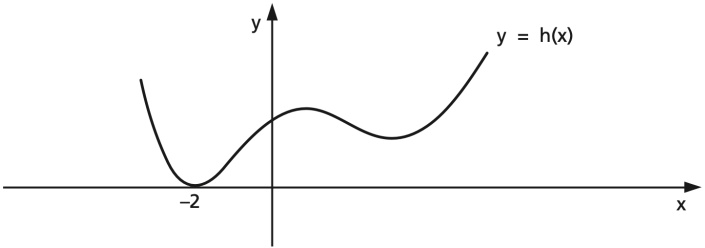


Exercícios

Exercício 3

Estude o sinal da função cujo gráfico está representado abaixo.

c)



Exercícios

Exercício 4

Numa escola é adotado o seguinte critério: a nota da primeira prova é multiplicada por 1, a nota da segunda prova é multiplicada por 2 e a da última prova é multiplicada por 3. Os resultados, após ser adicionados, são divididos por 6. Se a média obtida por esse critério for maior ou igual a 6.5, o aluno é dispensado das atividades de recuperação. Suponha que um aluno teria tirado 6.3 na primeira prova e 4.5 na segunda. Quanto precisará tirar na terceira para ser dispensado da recuperação?

Exercícios

Exercício 5

Uma solução química é mantida entre $-30^\circ\mathrm{C}$ *e* $-22^\circ\mathrm{C}$*. Isso corresponde a qual intervalo em graus Fahrenheit? Use a relação entre Celsius e Fahrenheit dada por* $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.

Arquivo com as Soluções

Baixe aqui o arquivo com as soluções dos problemas das últimas aulas.