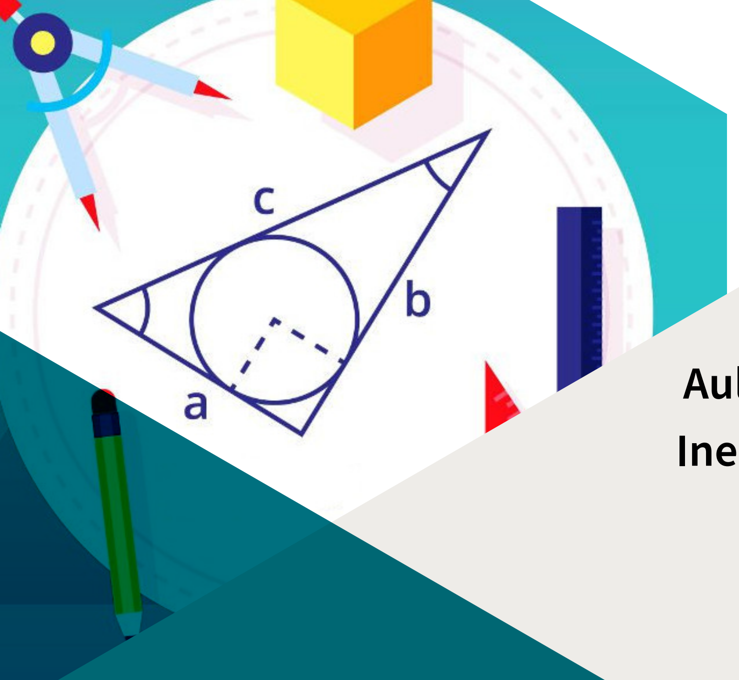



Introdução ao Cálculo

# Aula 04: Equações e Inequações Lineares

Karla Lima

14/12/2022

# Sumário

# Bibliografia

# Bibliografia da Aula 02

- Livro texto: Fundamentos da Matemática Elementar: 1 (Click para baixar)

# Mais um Pouco da Função Afim

# Coeficiente Linear

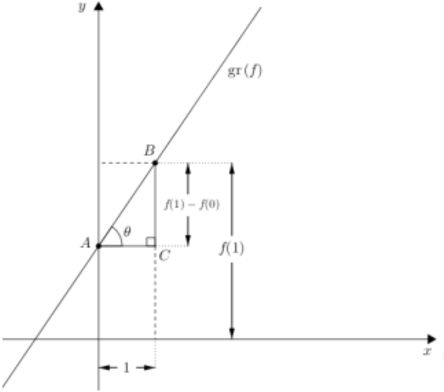
- Como $f(0) = a \cdot 0 + b = b$, o coeficiente $b$ é igual à ordenada do ponto $(0, f(0))$, onde o gráfico de $f$ intersecta o eixo $y$. Por essa razão, chamamos $b$ de **coeficiente linear** do gráfico de $f$.

# Coeficiente Angular

Consideremos, agora, sobre o $gr(f)$, os pontos

$$A = (0, f(0)) \quad \text{e} \quad B = (1, f(1)).$$

O ângulo que o gráfico de $f$ forma com uma reta horizontal (paralela ao eixo x) é ângulo interno do triângulo retângulo $ABC$, como veremos na figura ao lado.



# Coeficiente Angular

- A tangente desse ângulo é, por definição,

$$tg\,\theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - f(0) = a + b - b = a.$$

- Dessa forma, o coeficiente $a$ é igual à tangente do ângulo que a reta $gr(f)$ forma com a horizontal. Por isso chamamos $a$ de **coeficiente angular** do gráfico de $f$.

# Coeficiente Angular

- No caso **Afim**, a tangente é dada pela **variação média** de $f$ no intervalo $[0, 1]$, ou em qualquer intervalo $[c, d]$:

$$
\begin{aligned}
tg\,\theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} &= \frac{f(d) - f(c)}{d - c} \\
&= \frac{ad + b - (ac + b)}{d - c} \\
&= \frac{ad - ac + b - b}{d - c} \\
&= \frac{a * (d - c)}{1 * (d - c)} \\
&= \frac{a}{1} * \left(\frac{d - c}{d - c}\right) \\
&= a.
\end{aligned}
$$

# Coeficiente Angular

- Se $a > 0$, então $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e a inclinação é positiva. Neste caso, a **variação média** é **positiva** e a função é **crescente**.
- Se $a < 0$, então $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ e a inclinação é negativa. Neste caso, a **variação média** é **negativa** e a função é **decrescente**.
- Quando $a = 0$, a reta $gr(f)$ é paralela ao eixo $x$. Neste caso, a **variação média** é **nula** e a função é **constante**.

# Restrição de Domínio

- No caso em que o domínio de uma função afim é um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$, o gráfico de $f$ é um subconjunto da reta que é o gráfico de $f$, com o domínio estendido a todos os reais.
- Isto é, os pontos do gráfico de $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax + b$, estão sobre a reta que representa o gráfico de $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada pela mesma expressão.

# Exemplo

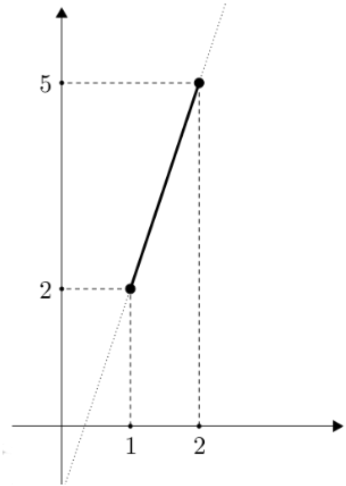
**Exemplo 1**

*O gráfico da função* $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$*, dada por* $f(x) = 3x - 1$ *é o segmento de reta que liga os pontos* $(1, f(1)) = (1, 2)$ *a* $(2, f(2)) = (2, 5)$.

- Isto ocorre pois uma reta (ou um segmento de reta) está completamente determinada por dois de seus pontos (Postulado de Geometria Plana).

# Exemplo

Este segmento de reta está contido na reta $r = gr(F)$, onde $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $F(x) = 3x - 1$, estende o domínio da função $f$ a todos os números reais.



# Retornando aos Problemas Iniciais

**Exemplo 2**

*Usando o Geogebra, esboce o gráfico das funções obtidas nos Problemas de 1 à 4.*

# Equações Lineares

# Os Zeros da Função Afim

**Definição 1**

*O **zero de uma função** é todo elemento do domínio cuja imagem é nula:*

$$x \in D_f \quad \textit{tal que} \quad f(x) = 0.$$

Assim, para determinarmos o zero da função afim, basta resolver a equação de $1^{\circ}$ grau:

$$ax + b = 0, \quad a \neq 0.$$

# Resolver uma Equação

- O processo de **resolver uma equação** consiste em transformá-la em uma equação equivalente cuja solução é óbvia. Operações de transformação de uma equação em uma equação equivalente incluem:
  1. **Adicionar o mesmo número** a ambos os lados. Assim, as equações $a = b$ e $a + c = b + c$ são equivalentes.
  2. **Multiplicar o mesmo número não nulo** de ambos os lados. Logo, as equações $a = b$ e $ac = bc$, $c \neq 0$, são equivalentes.
  3. **Simplificar** expressões em um dos lados de uma equação.

# O Zero da Função Afim

Resolvendo a equação de 1° grau:

$$
\begin{aligned}
ax + b = 0 &\Rightarrow ax + b - b = 0 - b \\
&\Rightarrow ax = -b \\
&\Rightarrow \frac{1}{a} * ax = \frac{1}{a} * \frac{(-b)}{1} \\
&\Rightarrow x = -\frac{b}{a}.
\end{aligned}
$$

# O Zero da Função Afim

**Exemplo 3**

*O zero da função* $f(x) = 3x - 1$ *é* $x = \frac{1}{3}$*:*

$$\begin{aligned} 3x - 1 = 0 &\Rightarrow 3x - 1 - (-1) = 0 - (-1) \\ &\Rightarrow 3x = 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{3} * 3x = \frac{1}{3} * \frac{1}{1} \\ &\Rightarrow x = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ou seja, $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$.

# Exercício

**Exercício 1**

*Encontre os zeros das funções afim a seguir:*

a) $f(x) = 3x + 2;$
b) $g(x) = -\sqrt{2}x + 1;$
c) $h(x) = \pi x.$

# Exercício

**Exercício 2**

*Uma pequena empresa fabrica bonecas e semanalmente arca com um custo fixo de* $R\$350,00$. *Se o custo para o material é de* $R\$4,70$ *por boneca e seu custo total na semana é uma média de* $R\$500,00$, *quantas bonecas essa pequena empresa produz por semana?*

# Exercício

**Exercício 3**

*Um pequeno avião a jato gasta sete horas a menos do que um avião a hélice para ir de São Paulo até Boa Vista. O avião a jato voa a uma velocidade média de 660 km/h, enquanto o avião a hélice voa em média a 275 km/h. Qual é a distância entre São Paulo e Boa Vista?*

# Inequações

# Definição

**Definição 2**

*Sejam* $f : D_f \to \mathbb{R}$ *e* $g : D_g \to \mathbb{R}$*. Chamamos* ***inequação*** *na incógnita* $x$ *a qualquer uma das sentenças abertas abaixo:*

- $f(x) > g(x)$
- $f(x) < g(x)$
- $f(x) \geq g(x)$
- $f(x) \leq g(x)$

# Domínio de Validade e Solução

**Definição 3**

*Chamamos de **domínio de validade** da inequação o conjunto dos valores $x \in D_f \cap D_g$ que satisfazem à inequação dada.*

**Definição 4**

*O número $x_0$ para o qual a inequação é verdadeira é chamado de **solução** da mesma.*

**Definição 5**

*O conjunto S de todos os números reais x tais que a inequação é verdadeira é chamado de **conjunto solução** da inequação.*

# Resolver uma Inequação

- O processo de **resolver uma inequação** consiste em transformá-la em uma equação equivalente cuja solução é óbvia. Operações de transformação de uma equação em uma equação equivalente incluem:
  1. **Adicionar o mesmo número** a ambos os lados. Assim, as inequações $a < b$ e $a + c < b + c$ são equivalentes.
  2. **Multiplicar o mesmo número positivo** de ambos os lados. Logo, as inequações $a < b$ e $ac < bc$, $c > 0$, são equivalentes.
  3. **Multiplicar o mesmo número negativo** de ambos os lados. Logo, as inequações $a < b$ e $ac > bc$, $c < 0$, são equivalentes.
  4. **Simplificar** expressões em um dos lados de uma equação.

# Observação: sinais em desigualdades

**Observação:** Sejam $a, b$ dois números reais tais que $a < b$.

- Se $c > 0$ então $c * a < c * b$ (mantém os sinais originais: mantém a desigualdade).

  Por exemplo, $-3 < 1$ e $2 * (-3) = -6$ gera um número que é menor do que $2 * 1 = 2$.

- Se $c < 0$ então $c * a > c * b$ (troca os sinais originais: inverte a desigualdade).

  Por exemplo, $-3 < 1$ e $(-2) * (-3) = 6$ gera um número que é maior do que $(-2) * 1 = -2$.

# Exemplo

**Exemplo 4**

*Considere a inequação* $2x + 1 > x + 3$. *Determine:*

a) 0 *é solução da inequação?*

b) $-\sqrt{2}$ *é solução?*

c) *O conjunto solução.*

# Exemplo

**Exemplo 5**

*Considere a inequação* $x + 1 \geq x + 2$. *Determine:*

a) 0 *é solução da inequação?*

b) $-\sqrt{2}$ *é solução?*

c) *O conjunto solução.*

# Inequações Simultâneas

**Definição 6**

*A dupla desigualdade $f(x) < g(x) < h(x)$ se decompõe em duas inequações simultâneas, isto é, equivale a um sistema de duas equações em $x$, separadas pelo conectivo e:*

$$f(x) < g(x)\ (\mathbf{1}) \quad e \quad g(x) < h(x)\ (\mathbf{2})$$

Indicando com $S_1$ o conjunto solução de $(\mathbf{1})$ e $S_2$ o conjunto solução de $(\mathbf{2})$, o conjunto solução da dupla desigualdade é $S = S_1 \cap S_2$.

# Exemplo

**Exemplo 6**

*Resolver* $3x + 2 < -x + 3 \leq x + 4$.

# O Sinal de uma Função

# Sinal de uma Função

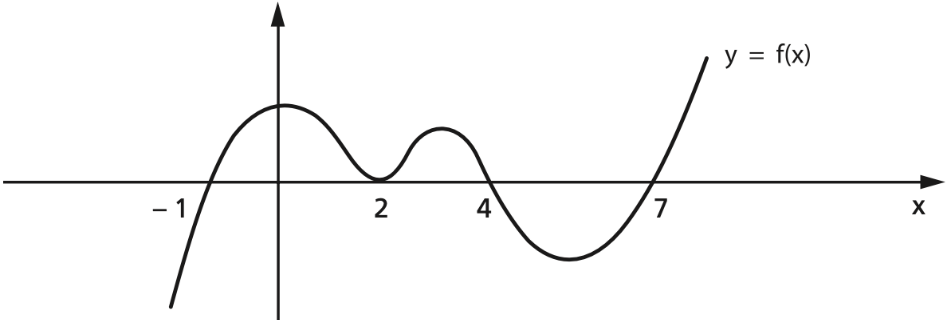
- Dada uma função $f : A \to B$, definida por $y = f(x)$, vamos resolver o seguinte problema:

  'Para quais valores de $x$ tem-se $f(x) > 0$ e para quais tem-se $f(x) < 0$?'
- Graficamente, $f(x) > 0$ quando o ponto $(x, f(x))$ está acima do eixo $x$.
- Analogamente, $f(x) < 0$ quando o ponto $(x, f(x))$ está abaixo do eixo $x$.

# Sinal de uma Função

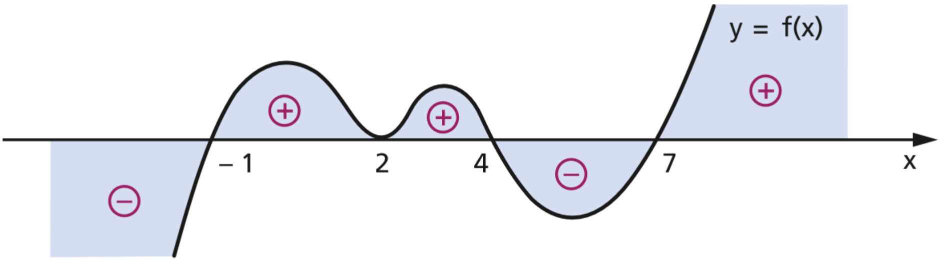
**Exemplo 7**

*Vamos estudar o sinal da função $y = f(x)$, cujo gráfico está representado abaixo:*



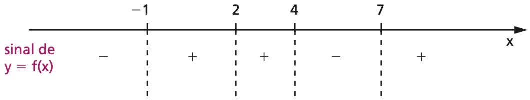
# Sinal de uma Função

Basta observar os valores de *x* para os quais o gráfico está acima do eixo *x* e abaixo do mesmo eixo:



# Sinal de uma Função

Costumamos usar uma reta para identificar o sinal da função dada:

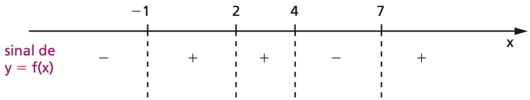



Com isso, concluímos:

- $f(x) = 0$ onde o gráfico corta o eixo $x$ (os pontos nesse eixo são da forma $(x, 0)$). Assim, $f(x) = 0$ em $x = -1$, $x = 2$, $x = 4$ e $x = 7$.
- $f(x) > 0$ em $-1 < x < 2$ ou $2 < x < 4$ ou $x > 7$.
- $f(x) < 0$ em $x < -1$ ou $4 < x < 7$.

# Sinal de uma Função

Dado o estudo do sinal de $f$, responda:




a) $f(-\pi)$ é negativo?

b) $f(e)$ é negativo?

c) $f(100.98)$ é positivo?

d) $f(2.01)$ é zero?

# Sinal da Função Afim

Para determinarmos o sinal da função afim, basta resolver as inequações de $1^\circ$ grau:

$$ax + b < 0$$

$$ax + b > 0.$$

# Sinal da Função Afim: 1° caso

- 1° caso: $a > 0$

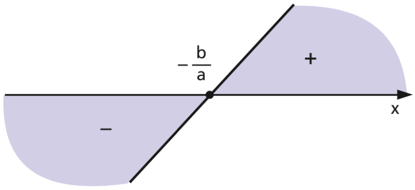
$$
\begin{aligned}
&ax + b > 0\\
\Rightarrow\, &ax + b - b > 0 - b\\
\Rightarrow\, &ax > -b\\
\Rightarrow\, &\frac{1}{a} * \frac{ax}{1} > \frac{1}{a} * \frac{-b}{1}, \qquad \left(\frac{1}{a}\right) > 0\\
\Rightarrow\, &x > \frac{-b}{a}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&ax + b < 0\\
\Rightarrow\, &ax + b - b < 0 - b\\
\Rightarrow\, &ax < -b\\
\Rightarrow\, &\frac{1}{a} * \frac{ax}{1} < \frac{1}{a} * \frac{-b}{1}, \qquad \left(\frac{1}{a}\right) > 0\\
\Rightarrow\, &x < \frac{-b}{a}.
\end{aligned}
$$

# Sinal da Função Afim: 1° caso

Na reta de estudo do sinal, esboçamos uma reta crescente, identificando o seu zero (**chamado ponto crítico**):

- $f(x) = 0 \text{ em } x = -\dfrac{b}{a}$.
- $f(x) > 0 \text{ em } x > -\dfrac{b}{a}$.
- $f(x) < 0 \text{ em } x < -\dfrac{b}{a}$.



# Sinal da Função Afim: 2° caso

- 2° caso: $a < 0$

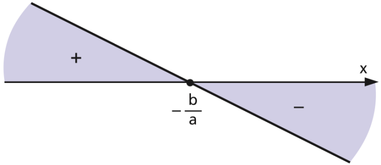
$$
\begin{aligned}
& ax + b > 0 \\
\Rightarrow & ax + b - b > 0 - b \\
\Rightarrow & ax > -b \\
\Rightarrow & \frac{1}{a} * \frac{ax}{1} < \frac{1}{a} * \frac{-b}{1}, \quad \left(\frac{1}{a}\right) < 0 \\
\Rightarrow & x < \frac{-b}{a}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& ax + b < 0 \\
\Rightarrow & ax + b - b < 0 - b \\
\Rightarrow & ax < -b \\
\Rightarrow & \frac{1}{a} * \frac{ax}{1} > \frac{1}{a} * \frac{-b}{1}, \quad \left(\frac{1}{a}\right) < 0 \\
\Rightarrow & x > \frac{-b}{a}.
\end{aligned}
$$

# Sinal da Função Afim: 2° caso

Na reta de estudo do sinal, esboçamos uma reta decrescente, identificando o seu ponto crítico:

- $f(x) = 0$ em $x = -\dfrac{b}{a}$.
- $f(x) > 0$ em $x < -\dfrac{b}{a}$.
- $f(x) < 0$ em $x > -\dfrac{b}{a}$.



# Exercícios

**Exercício 4**

*Numa escola é adotado o seguinte critério: a nota da primeira prova é multiplicada por 1, a nota da segunda prova é multiplicada por 2 e a da última prova é multiplicada por 3. Os resultados, após ser adicionados, são divididos por 6. Se a média obtida por esse critério for maior ou igual a 6,5, o aluno é dispensado das atividades de recuperação. Suponha que um aluno teria tirado 6,3 na primeira prova e 4,5 na segunda. Quanto precisará tirar na terceira para ser dispensado da recuperação?*

# Exercícios

**Exercício 5**

*Uma solução química é mantida entre* $-30^\circ\mathrm{C}$ *e* $-22^\circ\mathrm{C}$. *Isso corresponde a qual intervalo em graus Fahrenheit? Use a relação entre Celsius e Fahrenheit dada por* $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.

# Soluções de Alguns Exercícios

# Arquivo com as Soluções

Baixe aqui o arquivo com as soluções dos exercícios 2, 3, 5 e 6.