ELEMENTOS DE ARITMÉTICA

Aula 09

Os Irracionais. Os Números Reais.

Karla Lima

Sumário

Os Números Irracionais

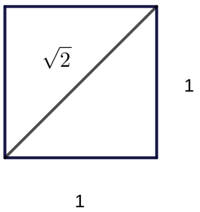
Os Conjuntos Numéricos

Até agora, fomos introduzindo conjuntos formados através de um conjunto anterior: dos naturais partimos para o inteiros e dos inteiros para os racionais. Ou seja, todo número natural é um número inteiro e todo número inteiro é um número racional:

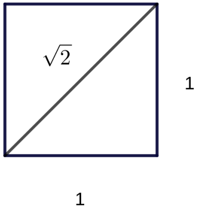
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Os Conjuntos Numéricos

Porém, existem medidas que conhecemos que não podem ser escritas como uma fração entre dois inteiros. Tome por exemplo, o comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1.



Os Números Irracionais



Pelo Teorema de Pitágoras, temos que a medida da diagonal é $\sqrt{2}$, que não pode ser representada por uma fração $\frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$.

Os Números Irracionais

- Outro exemplo é número π.
  Ele é obtido ao se tomar a razão entre o perímetro de um círculo de raio r e seu diâmetro $(2 \cdot r)$:

$$\frac{\text{perímetro}}{2r} = \pi.$$

Os Números Irracionais

Não importa o tamanho do raio, a razão dá sempre o mesmo número: π. Esta medida também não pode ser representada por uma fração $\frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{\text{perímetro}}{2r} = \pi \notin \mathbb{Q}.$$

Os Números Irracionais

Definição 1

*Denominamos por **números irracionais** aqueles que não podem ser representados por uma fração* $\frac{a}{b}$*, com* $a, b \in \mathbb{Z}$*.*

Denotamos este conjunto por $\mathbb{I}$.

Os Números Irracionais

Exemplo 1

São elementos do conjunto dos números irracionais todo número da forma $\sqrt{p}$, onde p é um número primo: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{23}$, etc.

Os Números Irracionais

Exemplo 2

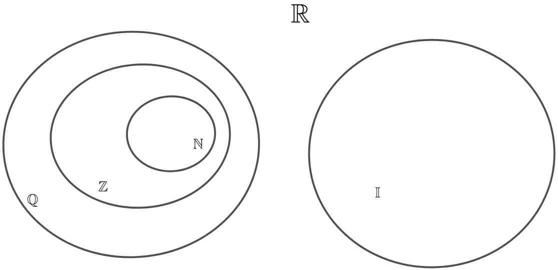
O número e *(o número de Euler) também é um número irracional.*

Os Números Reais

Definição

Definição 2

*Chama-se conjunto dos **números reais**, denotado por $\mathbb{R}$, aquele formado por todos os números racionais e irracionais.*



Operações

Definimos as seguintes operações básicas no conjunto dos números reais:

1. Adição $(+)$;
2. Multiplicação $(\cdot$ ou $\times)$.

Operações

Estas operações possuem as seguintes propriedades:

1. **Comutatividade:** Dados dois números reais a e b, tem-se que
   i) a soma $a + b$ é ainda um número real;
   ii) o produto $a \cdot b$ também é um número real.

Operações

2. **Associatividade:** Dados três números reais a, b e c:
   i) O agrupamento é irrelevante em adições repetidas:
   $$(a+b)+c = a+(b+c);$$
   ii) O agrupamento é irrelevante em multiplicações repetidas:
   $$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Operações

3. **Distributividade:** Dados três números reais a, b e c, a multiplicação é distributiva em relação à adição:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Operações

4. **Leis de identidade:** Dado um número real a:
   i) Existe um único elemento 0 com a propriedade: $0 + a = a + 0 = a$;
   i) Existe um único elemento 1 com a propriedade: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Operações

5. **Leis de inverso:** Dado um número real a:
   i) Existe um número $-a$, tal que
   $$a + (-a) = (-a) + a = 0;$$
   ii) Se $a \neq 0$, então existe um número a^{-1}, tal que
   $$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

Exemplo

Exemplo 3

Usando as leis associativa e comutativa, simplifique $(3 + x) + 5$.

Exemplo

Exemplo 3

Usando as leis associativa e comutativa, simplifique $(3 + x) + 5$.

Com efeito, usando a lei comutativa, obtemos

$$(3 + x) + 5 = (x + 3) + 5.$$

Usando a lei associativa, concluímos que

$$\begin{aligned}(3 + x) + 5 &= (x + 3) + 5 \\ &= x + (3 + 5) \\ &= x + 8.\end{aligned}$$

Exemplo

Exemplo 4

Usando a lei de distributividade, mostre que $(a+b)\cdot(c+d) = a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d$.

Exemplo

Exemplo 4

Usando a lei de distributividade, mostre que $(a+b)\cdot(c+d) = a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d$.

De fato, aplicando a lei distributiva, obtemos

$$(a+b)\cdot(c+d) = (a+b)\cdot c + (a+b)\cdot d.$$

Aplicando novamente em cada parcela da soma à direita, concluímos que

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot(c+d) &= (a+b)\cdot c + (a+b)\cdot d \\ &= a\cdot c + b\cdot c + a\cdot d + b\cdot d \\ &= a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d,\end{aligned}$$

e a última igualdade é obtida ao se aplicar a lei da comutatividade.

Outras Operações

Vimos que dado um número real b, existe um número $-b$, tal que

$$b + (-b) = (-b) + a = 0.$$

Devido à esta propriedade, podemos definir em $\mathbb{R}$ a operação de **subtração**, estabelecendo que

$$a - b = a + (-b), \quad \text{para todo } a, b \in \mathbb{R}.$$

Outras Operações

Também vimos que se $b \neq 0$, então existe um número b^{-1}, tal que

$$b \cdot b^{-1} = b^{-1} \cdot b = 1.$$

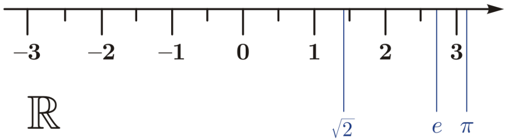
Assim, podemos definir em $\mathbb{R}$ a operação de **divisão**, estabelecendo que

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}, \quad \text{para todo } a, b \in \mathbb{R}, \text{ com } b \neq 0.$$

Relação de Ordem no Conjunto dos Números Reais

Definição

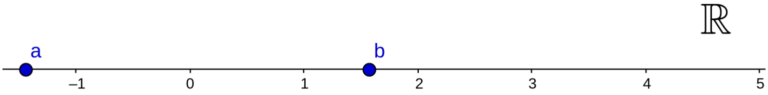
O conjunto dos números reais pode ser representado numa reta, chamada de **reta real**, onde os pontos da reta representam os números reais *x* cuja medida da origem 0 até este ponto mede exatamente *x* (livre de sinal). Se *x* é positivo, coloca-se o número à direita da origem; se é negativo, coloca-se à esquerda.



Definição

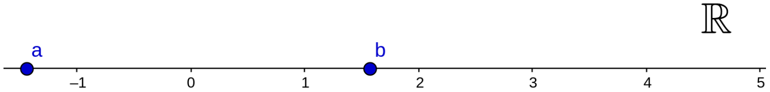
Sobre as relação de ordem entre os números reais, temos:

1. Um número real a é **menor que** um número real b ($a < b$), se a estiver à esquerda de b sobre a reta real.



$$a < b$$

Definição



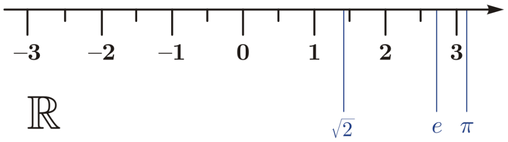
$$a < b$$

1. É equivalente a dizer que a diferença $b - a$ é positiva ($b - a > 0$).
2. Um número real a é **menor que ou igual a** um número real b ($a \leq b$), se $a < b$ ou se $a = b$.

Exemplo

Exemplo 5

Olhando a reta real abaixo, vemos que



i) $-2 < \sqrt{2}$

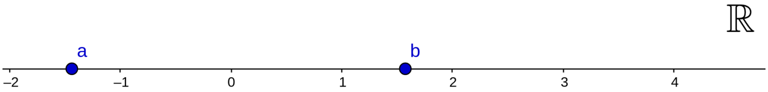
ii) $1 \leq 2$

iii) $e < \pi$

iv) $-1 \leq -1$

Ordem

- Um número b é **maior que** a ($b > a$), se b estiver à direita de a sobre a reta real. Então $b > a$ significa o mesmo que $a < b$.



$$b > a$$

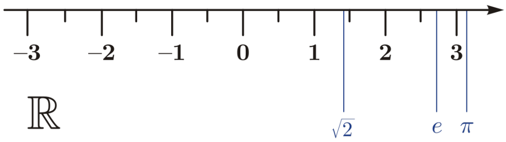
Ordem

- Um número a é **maior que ou igual a** um número b ($a \geq b$), se $a > b$ ou se $a = b$.

Ordem

Exemplo 6

Olhando novamente a reta real



vemos que:

i) $\sqrt{2} > -2$

ii) $2 \geq 1$

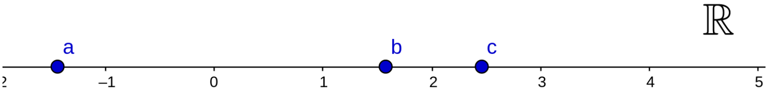
iii) $\pi > e$

iv) $-1 \geq -1$

Propriedades

A relação de ordem dada acima, possui as seguintes propriedades

- **Transitividade:** Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$.



$$a < b \text{ e } b < c$$

Exemplo

Exemplo 7

Temos que $-2 < \sqrt{2}$ *e que* $\sqrt{2} < e$. *Então* $-2 < e$.

Propriedades

- **Inversos aditivos e desigualdades:** Se $a < b$, então $-a > -b$.
- **Multiplicação de uma desigualdade:** Suponha $a < b$.
  1. Se $c > 0$, então $ac < bc$ **(a desigualdade é mantida)**.
  2. Se $c < 0$, então $ac > bc$ **(a desigualdade é invertida)**.

Exemplo

Exemplo 8

Temos que $a = -2 < -1 = b$. *Se:*

i) $c = 3$, *temos que* $ac = (-2)(3) = -6$ *e que* $(-1)(3) = -3$. *Com isso, temos que* $ac = 6 < 3 = bc$.

ii) $c = -3$, *temos que* $ac = (-2)(-3) = 6$ *e que* $(-1)(-3) = 3$. *Com isso, temos que* $ac = 6 > 3 = bc$.

Propriedades

- **Inversos multiplicativos e desigualdades:** Suponhamos $a < b$.
  1. Se a e b forem ambos positivos ou ambos negativos, então $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.
     Isto decorre do fato de que
     $$a, b > 0 \Rightarrow ab > 0 \quad \text{e} \quad a, b < 0 \Rightarrow ab > 0.$$
     Portanto, $\frac{1}{ab} > 0$ e, assim,
     $$\begin{aligned} a < b &\Rightarrow a \cdot \frac{1}{ab} < b \cdot \frac{1}{ab} \\ &\Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

Propriedades

2. Se $a < 0 < b$, então $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.
   Isto decorre do fato de que

$$a < 0 < b \Rightarrow ab < 0.$$

   Portanto, $\frac{1}{ab} < 0$ e, assim,

$$\begin{aligned} a < b &\Rightarrow a \cdot \frac{1}{ab} > b \cdot \frac{1}{ab} \\ &\Rightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{a}. \end{aligned}$$