

Aula 05

Diferença. Técnicas de
Demonstração. Infinito.

Karla Lima

Sumário



1. Subtração entre Números Naturais
2. Um pouco sobre Técnicas de Demonstração
3. Conjuntos Infinitos

Subtração entre Números Naturais

Definição



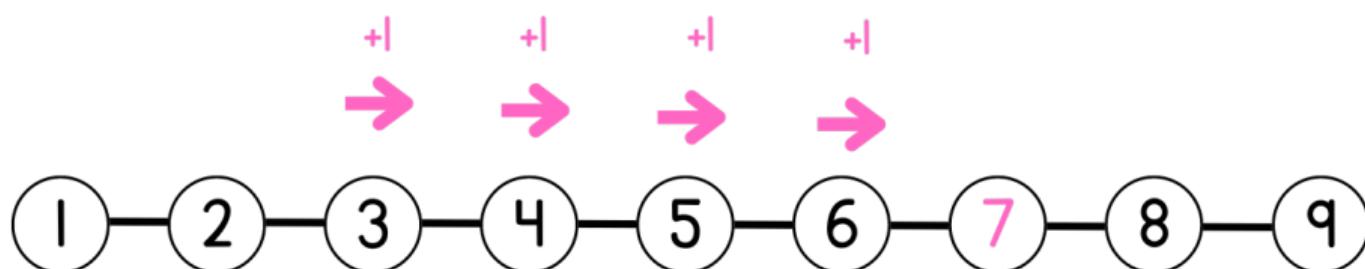
Definição 1

Dados dois números naturais a e b tais que $a < b$, o número de deslocamentos para a direita partindo de a para atingir b será representado por $b - a$ e será chamado de diferença entre b e a .

Diferença



Desloca-se o número 3 para a direita de 4 posições
para alcançar o número 7.



Logo, $7 - 3 = 4$.

Diferença



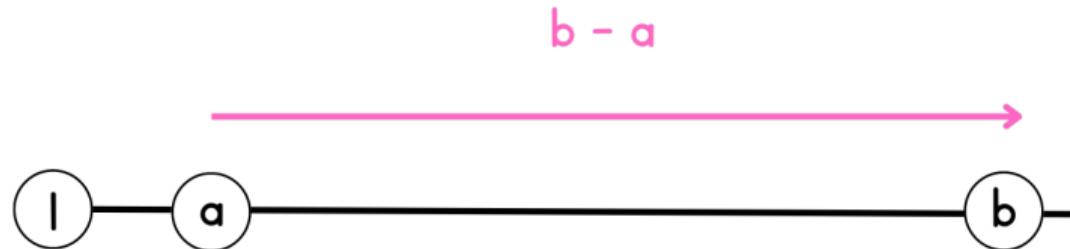
- ▶ A operação $3 - 7$ é uma operação no conjuntos dos números naturais? O resultado é um número natural?
- ▶ Você consegue entender por que, na definição da operação diferença de $b - a$, exigimos que $a < b$?

Diferença



Pela definição de $b - a$, temos que

$$a + (b-a) = b.$$



O número $b - a$ pode ser interpretado como
o quanto falta a a para atingir b.

Diferença



Portanto, se tivermos uma igualdade entre números
naturais do tipo

$$a + c = b,$$

então

$$c = b - a.$$

Exemplos



1. Tenho 200 reais, mas uma bicicleta custa 800 reais, quanto falta para eu poder comprar a bicicleta?

Um pouco sobre Técnicas de Demonstração

Condicional



Definição 2

*Duas proposições formam uma **condicional** quando for possível colocá-las na seguinte forma:*

Se (proposição 1), então (proposição 2).

Condicional



Definição 2

*Duas proposições formam uma **condicional** quando for possível colocá-las na seguinte forma:*

Se (proposição 1), então (proposição 2).

- ▶ a proposição 1 é chamada de antecedente, e a proposição 2 de consequente;

Condicional



Definição 2

*Duas proposições formam uma **condicional** quando for possível colocá-las na seguinte forma:*

Se (proposição 1), então (proposição 2).

- ▶ a proposição 1 é chamada de antecedente, e a proposição 2 de consequente;
- ▶ o símbolo utilizado para ligar as duas proposições de uma condicional é \Rightarrow , em matemática.

Exemplo



Exemplo 1

Se estudarmos para a prova, então teremos uma chance maior de tirar uma boa nota.

Neste exemplo, a proposição condicional afirma que se a condição "estudarmos para a prova" for verdadeira, então a conclusão "teremos uma chance maior de tirar uma boa nota" também será verdadeira.

Exemplo



Exemplo 2

Se você regar as plantas regularmente, então elas vão crescer saudáveis.

Neste caso, a condição é "regar as plantas regularmente", e a conclusão é "elas vão crescer saudáveis". Isso significa que se a condição for cumprida (regar as plantas regularmente), então a conclusão será verdadeira (as plantas crescerão saudáveis).

Bicondicional



Quando temos uma afirmação do tipo

'(proposição 1) se, e somente se,
(proposição 2)'

devemos provar duas coisas:

1. Se (proposição 1) acontece, então (proposição 2) acontece.
2. Se (proposição 2) acontece, então (proposição 1) acontece.

► **Você vai à festa se e somente se seus amigos também forem.**

1. Se você for à festa, então seus amigos também irão.
2. Se seus amigos forem à festa, então você também irá.

Portanto, a presença na festa está condicionada à presença dos seus amigos, e vice-versa.

Bicondicional



- Vamos nos encontrar no restaurante se e somente se ambos estivermos livres na sexta-feira.

Bicondicional



- Vamos nos encontrar no restaurante se e somente se ambos estivermos livres na sexta-feira.
 1. Se ambos estiverem livres na sexta-feira, então eles se encontrarão no restaurante.

Bicondicional



- Vamos nos encontrar no restaurante se e somente se ambos estivermos livres na sexta-feira.
 1. Se ambos estiverem livres na sexta-feira, então eles se encontrarão no restaurante.
 2. Se decidirem se encontrar no restaurante, então ambos estarão livres na sexta-feira.

Bicondicional



- Vamos nos encontrar no restaurante se e somente se ambos estivermos livres na sexta-feira.
 1. Se ambos estiverem livres na sexta-feira, então eles se encontrarão no restaurante.
 2. Se decidirem se encontrar no restaurante, então ambos estarão livres na sexta-feira.

Assim, o encontro no restaurante está condicionado à disponibilidade de ambos na sexta-feira, e vice-versa. Se ambas as condições forem atendidas, o encontro ocorrerá; caso contrário, não acontecerá.

Prova por Redução ao Absurdo



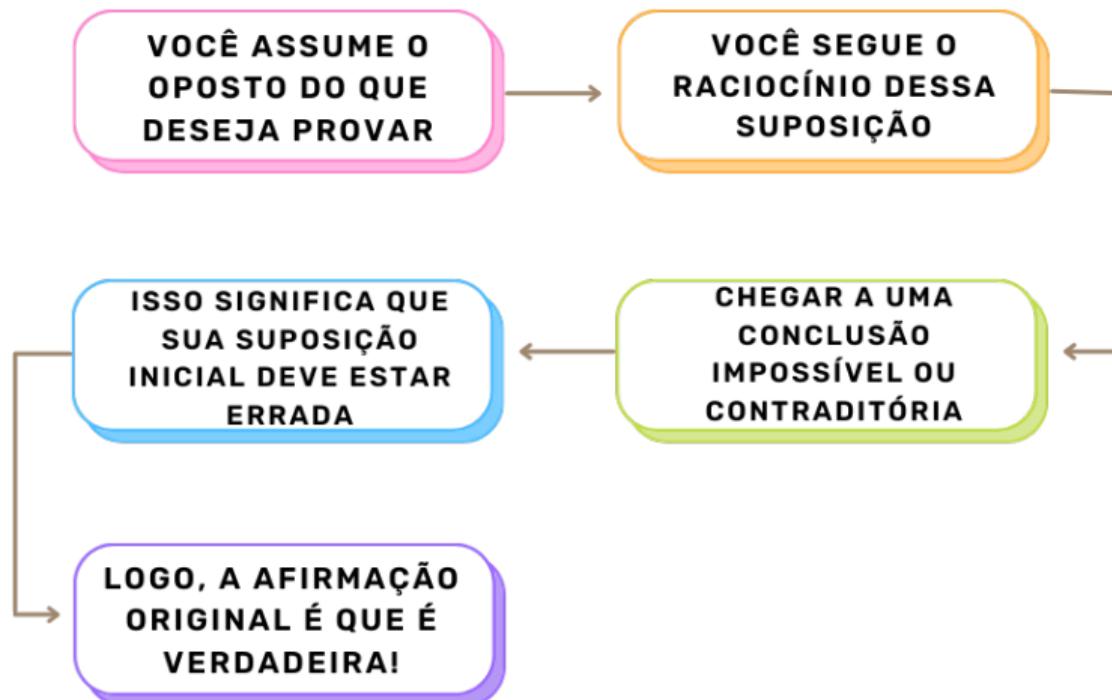
- ▶ Dada uma proposição só há duas formas de classificá-la: ou a afirmação é verdadeira ou a afirmação é falsa. Nunca as duas coisas ao mesmo tempo.
- ▶ Quando uma afirmação é verdadeira, sua negativa é falsa.
- ▶ Quando uma afirmação é falsa, sua negativa é verdadeira.

Prova por Redução ao Absurdo



- ▶ A prova por redução ao absurdo é uma técnica usada na lógica e na matemática para provar que uma afirmação é verdadeira, mostrando que a suposição contrária leva a uma contradição.
- ▶ Como funciona?

Prova por Redução ao Absurdo



Prova por Redução ao Absurdo



É COMO SE VOCÊ DISSESSE:

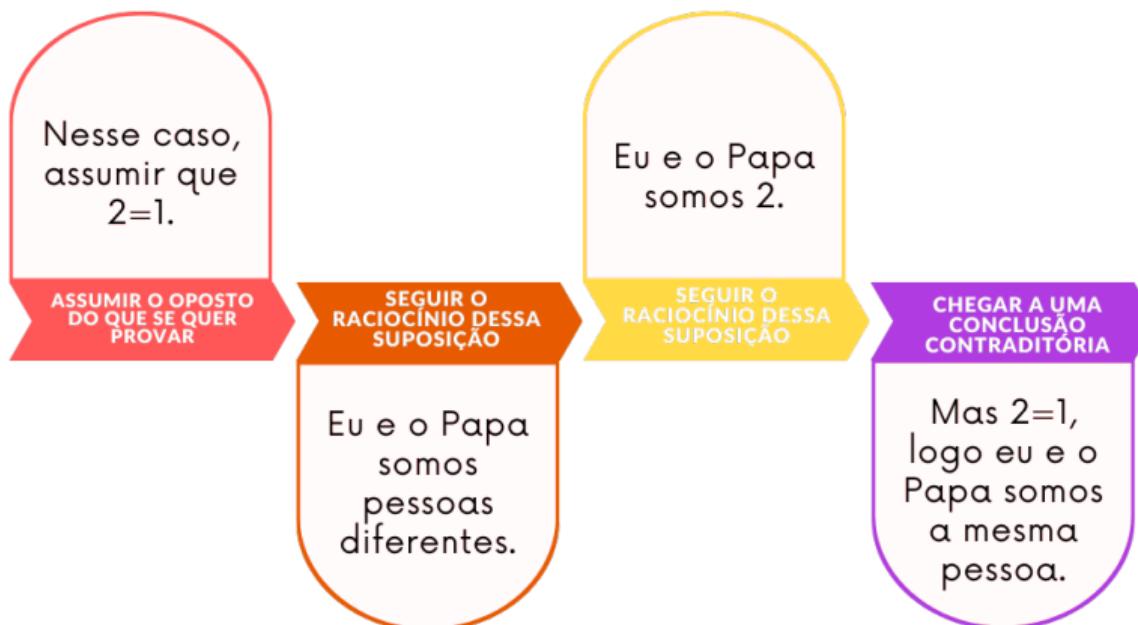
"VAMOS SUPOR QUE O CONTRÁRIO DO QUE QUERO PROVAR SEJA VERDADEIRO. SE ISSO FOSSE VERDADE, LEVARIA A UMA SITUAÇÃO ILÓGICA, ENTÃO MINHA SUPosiÇÃO INICIAL DEVE ESTAR ERRADA E, PORTANTO, O QUE EU QUERIA PROVAR É VERDADEIRO".

É UMA MANEIRA INTELIGENTE DE PROVAR COISAS!

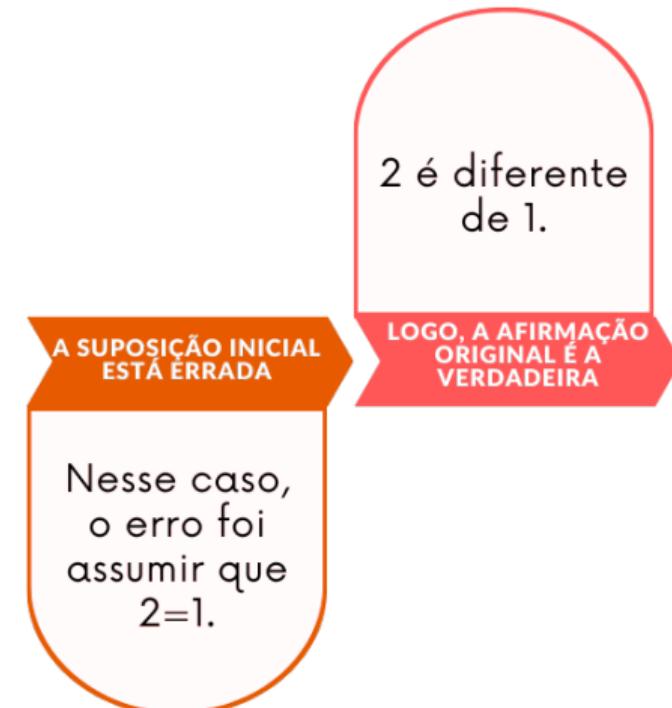
Aplicação



Vamos ver numa aplicação prática: suponha que queremos provar que $2 \neq 1$.



Aplicação



Aplicação em Matemática



Usando a propriedade de Tricotomia dos números naturais, mostre que:

Proposição 1

Dados três números naturais a , b e c , quaisquer,

se $a + c < b + c$ então $a < b$.

Aplicação em Matemática



Usando a propriedade de Tricotomia dos números naturais, mostre que:

Proposição 2

Dados três números naturais a , b e c , quaisquer,

se $a + c = b + c$ então $a = b$.

Aplicação em Matemática



Usando a propriedade de compatibilidade da adição¹ (o mesmo que a monotonicidade da ordenação²) entre a ordem e a transitividade da ordem, mostre que:

Proposição 3

Dados três números naturais a , b e c , quaisquer,

se $a < c$ e $b < d$ então $a + b < c + d$.

¹ver em [1].

²ver no arquivo da Aula 02

Aplicação em Matemática



Proposição 4

Dados três números naturais a , b e c , quaisquer,

se $ac < bc$, então $a < b$.

Aplicação em Matemática



Proposição 5

Mostre que se $c < a < b$, então $a - c < b - c$.

Aplicação em Matemática



Proposição 6

Sejam dados números naturais a , b e c tais que a é múltiplo de c . Mostre que

$a + b$ é múltiplo de c se, e somente se, b é múltiplo de c .

Proposição 6



Dados do problema:

- ▶ a, b e c são números naturais.
- ▶ a é múltiplo de c .

O que queremos provar:

1. Se $a + b$ é múltiplo de c , então b é múltiplo de c .
2. Se b é múltiplo de c , então $a + b$ é múltiplo de c .

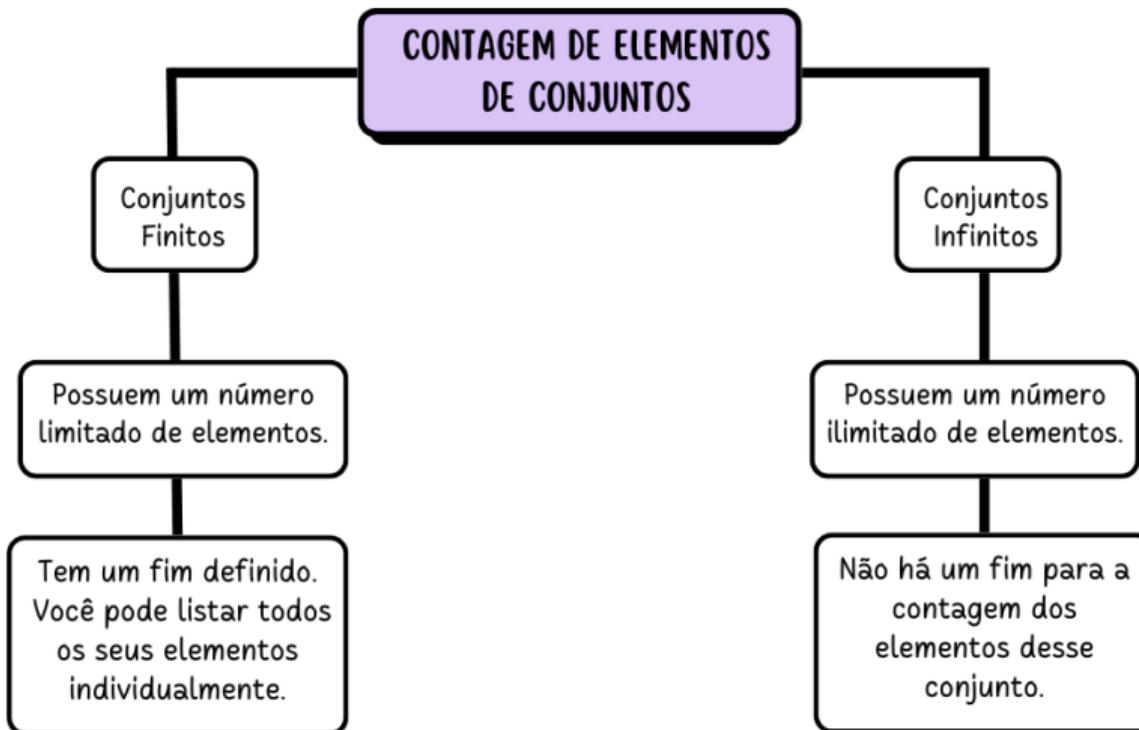
Proposição 6



Demonstração: Em aula.

Conjuntos Infinitos

Definição Informal



Definição Informal



O único conhecido,
por enquanto.

Conjuntos Infinitos



- ▶ O conjunto dos números naturais (1, 2, 3, 4, ...) é infinito, pois não importa o quanto você conte, sempre haverá mais números naturais a serem incluídos.
- ▶ Números infinitos não podem ser expressos ou representados em sua totalidade, pois sua contagem nunca termina.

Conjuntos Infinitos



- ▶ Na teoria dos conjuntos, há diferentes tamanhos de infinito, como o infinito contável (enumerável) e o infinito incontável (não enumerável), conforme descrito pela teoria dos números cardinais de Cantor.
- ▶ O conceito de infinito também levanta questões intrigantes e paradoxos, como o paradoxo do Hotel de Hilbert.

O Paradoxo do Hotel de Hilbert



- ▶ O Paradoxo do Hotel de Hilbert é um conceito imaginado pelo matemático alemão David Hilbert para ilustrar algumas propriedades surpreendentes e contra-intuitivas dos infinitos.
- ▶ Imagine um hotel com um número infinito de quartos, todos ocupados por um hóspede em cada quarto.

O Paradoxo do Hotel de Hilbert



- ▶ Agora, suponha que um novo hóspede chegue e peça um quarto. À primeira vista, parece que o hotel está cheio e não pode acomodar esse novo hóspede.

O Paradoxo do Hotel de Hilbert



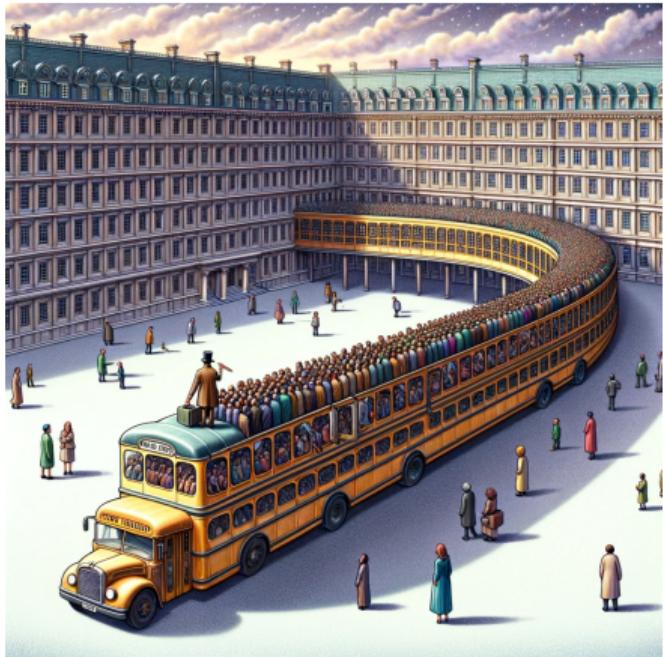
- ▶ No entanto, se o gerente do hotel mover o hóspede do quarto 1 para o quarto 2, o hóspede do quarto 2 para o quarto 3, e assim por diante (cada hóspede movendo-se do quarto n para o quarto $n + 1$), o quarto 1 ficará vazio e poderá acomodar o novo hóspede.

O Paradoxo do Hotel de Hilbert



- ▶ A situação se complica ainda mais se, por exemplo, um ônibus com um número infinito de novos hóspedes chegar ao hotel.
- ▶ Nesse caso, o gerente pode pedir a cada hóspede existente para se mudar do quarto n para o quarto $2n$ (dobrando o número do quarto).

O Paradoxo do Hotel de Hilbert



- ▶ Isso liberará todos os quartos ímpares, que são infinitos, e assim acomodar todos os novos hóspedes do ônibus.
- ▶ O paradoxo ilustra que, embora todos os quartos estejam ocupados, ainda é possível acomodar um número infinito de novos hóspedes sem precisar construir mais quartos, mostrando as estranhas propriedades do conceito matemático de "infinito"

Referencias I



A. Hefez.

Iniciação à Aritmética.

IMPA, 2015.