ELEMENTOS DE ARITMÉTICA

Aula 04

Potências

Karla Lima

Sumário

Potências

A Lenda do Xadrez [1]

- O primeiro registro do problema do trigo num tabuleiro de xadrez é de 1256, do historiador muçulmano Ibn Khallikan, mas é provável que reconte uma versão anterior do século V.
- Segundo a história, a invenção do xadrez é creditada a um brâmane de uma corte indiana, que, atendendo a um pedido do rei, inventou o jogo para demonstrar o valor da inteligência. O rei, encantado com o invento, ofereceu ao brâmane a escolha de uma recompensa. De acordo com essa lenda, o inventor do jogo de xadrez pediu ao rei que a recompensa fosse paga em grãos de arroz da seguinte maneira: 1 grão para a casa 1 do tabuleiro, 2 grãos para a casa 2, 4 para a casa 3, 8 para a casa 4 e assim sucessivamente. Ou seja, a quantidade de grãos para cada casa do tabuleiro correspondia ao dobro da quantidade da casa imediatamente anterior.

A Lenda do Xadrez [1]

- Perplexo ante o que parecia ser uma magra recompensa, o rei ordenou que os grãos fossem contados.
- Vamos fazer alguns cálculos:
  - Quantos grãos contém o oitavo quadrado?

A Lenda do Xadrez [1]

- Perplexo ante o que parecia ser uma magra recompensa, o rei ordenou que os grãos fossem contados.
- Vamos fazer alguns cálculos:
  - Quantos grãos contém o oitavo quadrado?R:128.

A Lenda do Xadrez [1]

- Perplexo ante o que parecia ser uma magra recompensa, o rei ordenou que os grãos fossem contados.
- Vamos fazer alguns cálculos:
  - Quantos grãos contém o oitavo quadrado?R:128.
  - E no trigésimo segundo, na primeira metade do tabuleiro? E no trigésimo terceiro?

A Lenda do Xadrez [1]

- Perplexo ante o que parecia ser uma magra recompensa, o rei ordenou que os grãos fossem contados.
- Vamos fazer alguns cálculos:
  - Quantos grãos contém o oitavo quadrado?R:128.
  - E no trigésimo segundo, na primeira metade do tabuleiro? E no trigésimo terceiro?R: Aproximadamente 2 bilhões e 4 bilhões, respectivamente.

A Lenda do Xadrez [1]

- Perplexo ante o que parecia ser uma magra recompensa, o rei ordenou que os grãos fossem contados.
- Vamos fazer alguns cálculos:
  - Quantos grãos contém o oitavo quadrado?R:128.
  - E no trigésimo segundo, na primeira metade do tabuleiro? E no trigésimo terceiro?R: Aproximadamente 2 bilhões e 4 bilhões, respectivamente.
  - Como podemos calcular o total de grãos?

A Lenda do Xadrez [1]

- Perplexo ante o que parecia ser uma magra recompensa, o rei ordenou que os grãos fossem contados.
- Vamos fazer alguns cálculos:
  - Quantos grãos contém o oitavo quadrado?R:128.
  - E no trigésimo segundo, na primeira metade do tabuleiro? E no trigésimo terceiro?R: Aproximadamente 2 bilhões e 4 bilhões, respectivamente.
  - Como podemos calcular o total de grãos? R: Para cada n-ésimo quadrado, tem-se 2^n grãos. No Total, seriam $1 + 2 + \cdots + 2^{63} \approx 18 * 10^{18}$ grãos .

A Lenda do Xadrez [1]

- Perplexo ante o que parecia ser uma magra recompensa, o rei ordenou que os grãos fossem contados.
- Vamos fazer alguns cálculos:
  - Quantos grãos contém o oitavo quadrado?R:128.
  - E no trigésimo segundo, na primeira metade do tabuleiro? E no trigésimo terceiro?R: Aproximadamente 2 bilhões e 4 bilhões, respectivamente.
  - Como podemos calcular o total de grãos? R: Para cada n-ésimo quadrado, tem-se 2^n grãos. No Total, seriam $1 + 2 + \cdots + 2^{63} \approx 18 * 10^{18}$ grãos .
- A história tem dois finais alternativos: num, o rei torna o brâmane seu conselheiro-mor; no outro, ele é executado por fazer o rei parecer tolo.

Tabela com os valores

72 quatrilhões	144 quatrilhões	288 quatrilhões	600 quatrilhões	1,2 quintilhão	2,3 quintilhões	4,6 quintilhões	9,2 quintilhões
281 trilhões	562 trilhões	1,1 quatrilhão	2,3 quatrilhões	4,5 quatrilhões	9 quatrilhões	18 quatrilhões	36 quatrilhões
1 trilhão	2 trilhões	4 trilhões	8 trilhões	17 trilhões	35 trilhões	70 trilhões	140 trilhões
4 bilhões	8 bilhões	16 bilhões	33 bilhões	66 bilhões	131 bilhões	262 bilhões	524 bilhões
16 milhões	32 milhões	64 milhões	128 milhões	256 milhões	512 milhões	1 bilhão	2 bilhão
65.536	131.072	262.144	524.288	1 milhão	2 milhões	4 milhões	8 milhões
256	512	1.024	2.048	4.096	8.192	16.384	32.768
1	2	4	8	16	32	64	128

A Segunda Metade do Tabuleiro de Xadrez [1]

- Pensadores recentes usaram o problema do tabuleiro de xadrez como metáfora da taxa de mudança em tecnologia nos últimos anos.
- Previu-se que, como o trigo na segunda metade do tabuleiro, a taxa de desenvolvimento tecnológico logo aumentaria de modo descontrolado, seguindo o modelo de duplicação do crescimento anterior a cada passo adiante.
- Essa taxa de crescimento levaria por fim à singularidade, que marca o ponto em que a habilidade cognitiva da inteligência artificial ultrapassará a dos seres humanos!

Potências

Definição 1

Dados dois números naturais a e n quaisquer, definimos a operação de potenciação como segue [1]*:*

a) $a^1 = a$, se $n = 1$;

b) $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fatores}}$, se $1 < n$.

[1] Lembrem-se, não estamos considerando o número 0 como um número natural.

Potências

Sejam a, b e c números naturais. Convença-se de que a potenciação possui as seguintes propriedades:

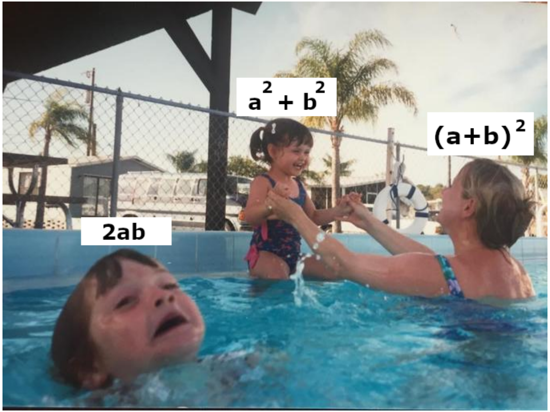
a) $1^n = 1$;
b) $a^n a^m = a^{m+n}$;
c) $(a^n)^m = a^{mn}$;
d) $a^n b^n = (ab)^n$.

O Quadrado de uma Soma

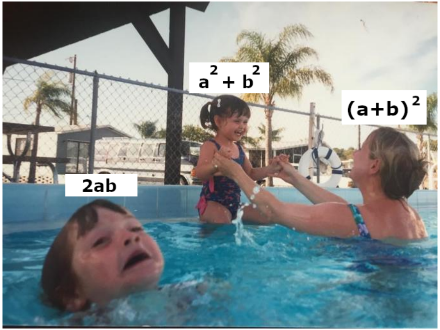
Qual é a fórmula para a potência de uma soma, do tipo $(a+b)^2$?

O Quadrado de uma Soma

Qual é a fórmula para a potência de uma soma, do tipo $(a+b)^2$?



O Quadrado de uma Soma



É muito comum as pessoas responderem que $(a+b)^2 = a^2 + b^2$, onde um simples cálculo pode derrubar tal equívoco.

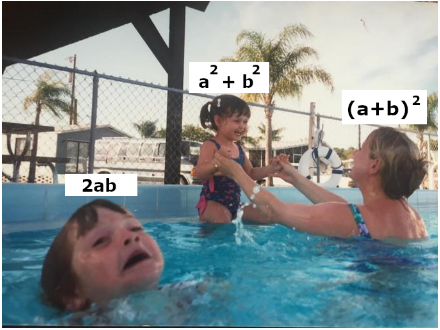
O Quadrado de uma Soma

Temos:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) && \text{(prop. distributiva)} \\
&= a(a+b) + b(a+b) && \text{(prop. distributiva)} \\
&= a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot a && \text{(prop. comutativa)} \\
&= a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2 && \text{(prop. distributiva/ evidência)} \\
&= a^2 + a \cdot b(1+1) + b^2 \\
&= a^2 + 2ab + b^2.
\end{aligned}
$$

O Quadrado de uma Soma

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



O Cubo de uma Soma

Analogamente, está correta a afirmação abaixo?

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3?$$

O Cubo de uma Soma

Analogamente, está correta a afirmação abaixo?

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3?$$

A resposta é não! Calcule usando as propriedades das operações $\cdot$ e $+$ dos números naturais.

Problemas

Problema 1

Exercício 1

Usando as propriedades da potenciação, escreva na forma de uma única potência:

a) $(4^3 \cdot 4^2)^2$;

b) $x^3 \cdot y^2 \cdot y^5 \cdot x \cdot x^3$.

Problema 2

Exercício 2

Sendo $a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 7$ *e* $b = 2^5 \cdot 3^6$*, discorra se* a *é ou não múltiplo de* b*.*

Problema 3

Exercício 3

Nos tempos antigos, não existiam as calculadoras eletrônicas e por isso eram ensinadas várias regras de cálculo mental. Uma delas era a seguinte:

Seja a um número natural cujo algarismo da unidade é 5, ou seja, $a = 10q + 5$, com q um número natural.

a) *Mostre que* $a^2 = 100q(q+1) + 25$.

b) *Com isto, ache uma regra para calcular mentalmente o quadrado de a.*

c) *Aplique a sua regra para calcular os quadrados dos números: 15, 45, 105 e 205.*

Critérios de Multiplicidade

Seja dado um número n escrito no sistema decimal como:

$$n = n_r 10^r + n_{r-1} 10^{r-1} + \cdots + n_1 10 + n_0.$$

Podemos então escrever

$$n = (n_{r-1} 10^r + n_{r-2} 10^{r-1} + \cdots + n_1)10 + n_0.$$

onde n_0 é o algarismo das unidades de n.

Critérios de Multiplicidade de 2

Considere a tabela:

$$
\begin{array}{lcl}
2 \times 0 = 0 & \qquad & 2 \times 5 = 10 = 10 + 0 \\
2 \times 1 = 2 & & 2 \times 6 = 12 = 10 + 2 \\
2 \times 2 = 4 & & 2 \times 7 = 14 = 10 + 4 \\
2 \times 3 = 6 & & 2 \times 8 = 16 = 10 + 6 \\
2 \times 4 = 8 & & 2 \times 9 = 18 = 10 + 8
\end{array}
$$

Critérios de Multiplicidade de 2

Considere a tabela:

$$
\begin{array}{lll}
2 \times 0 = 0 & \qquad & 2 \times 5 = 10 = 10 + 0 \\
2 \times 1 = 2 & & 2 \times 6 = 12 = 10 + 2 \\
2 \times 2 = 4 & & 2 \times 7 = 14 = 10 + 4 \\
2 \times 3 = 6 & & 2 \times 8 = 16 = 10 + 6 \\
2 \times 4 = 8 & & 2 \times 9 = 18 = 10 + 8
\end{array}
$$

Note que todo número acima é um múltiplo de 10 somado com um dos números: 0, 2, 4, 6, ou 8.

Critérios de Multiplicidade de 2

Teorema 1

Critério de Multiplicidade de 2:

i) *Se um número é múltiplo de 2, então o seu algarismo das unidades é par.*

ii) *Reciprocamente, se o algarismo da unidade de um número é par, então tal número também é par.*

Critérios de Multiplicidade de 2

Demonstração.

Feita em sala de aula e está disponível no livro texto da disciplina. □

Problema 4

Exercício 4

Mostre que:

i) *Se um número é múltiplo de* 5*, então o seu algarismo das unidades é* 0 *ou* 5*.*

ii) *Reciprocamente, se o algarismo da unidade de um número é* 0 *ou* 5*, então tal número é múltiplo de* 5*.*

Problema 5

Exercício 5

Mostre que:

i) *Se um número é múltiplo de* 10*, então o seu algarismo das unidades é* 0*.*

ii) *Reciprocamente, se o algarismo da unidade de um número é* 0*, então tal número é múltiplo de* 10*.*

Referencias I

Vários.
O livro da matemática.
GLOBO LIVROS, 2020.