

Técnicas de Integração

Polinômios

Karla Lima

Sumário



1. Revisão de Polinômios
2. Fatoração e Divisão de Polinômios

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the top-left corner, while a light gray shape occupies the bottom-left corner. The rest of the slide is white.

Revisão de Polinômios

Definição[1]



Definição 1

Um **polinômio em x** é qualquer expressão que pode ser escrita na forma

$$a_n^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

onde n é um número natural e os coeficientes a_i 's ($i = 0, 1, \dots, n$) são números reais.

Exemplos



Exemplo 1

São polinômios as expressões abaixo:

1. $2x + 1$
2. $-\sqrt{5}x^3 + x^2 + 3$
3. $\pi x^{10} + 2$

Exemplo 2

Não são polinômios as expressões abaixo:

1. $\sqrt{x} + 2$: raízes são potências da forma $\frac{p}{q}$ que não são números naturais.
2. $5x^{-3} + x^2$: a potência negativa não é um número natural.

Operações com Polinômios



Adição e Subtração: agrupamos termos semelhantes (em que a variável possui a mesma potência) e então os combinamos, usando a propriedade distributiva.

Exemplo 3

Vamos somar os polinômios $2x^3 - 3x^2 + \sqrt{11}x - 1$ e $2x^2 - 5x + 3$:

- ▶ agrupamos os termos em que as potências de x coincidem:

$$2x^3 - 3x^2 + \sqrt{11}x - 1 + 2x^2 - 5x + 3 = 2x^3 + (-3x^2 + 2x^2) + (\sqrt{11}x - 5x) + (-1 + 3)$$

- ▶ aplicamos a propriedade distributiva e efetuamos as operações possíveis:

$$= 2x^3 + (-3 + 2)x^2 + (\sqrt{11} - 5)x + (-1 + 3) = 2x^3 - x^2 + (\sqrt{11} - 5)x + 2$$

Operações com Polinômios



Produto: basta aplicar a propriedade distributiva.

Exemplo 4

Vamos calcular o produto entre os polinômios $3x + 2$ e $4x - 5$:

- ▶ como é um produto entre vários termos, é importante inserir parênteses para separar os polinômios. Aplica-se a distributiva:

$$\begin{aligned}(3x + 2)(4x - 5) &= 3x(4x - 5) + 2(4x - 5) \\ &= (3x)(4x) - (3x) \cdot 5 + 2(4x) - 2 \cdot 5 \\ &= 12x^2 - 15x + 8x - 10\end{aligned}$$

Produtos notáveis



- ▶ Quadrado de uma soma de dois termos (Quadrado Perfeito):

$$(u + v)^2 = (u + v)(u + v) = u^2 + 2uv + v^2$$

- ▶ Quadrado de uma diferença de dois termos (Quadrado Perfeito):

$$(u - v)^2 = (u - v)(u - v) = u^2 - 2uv + v^2$$

- ▶ Produto da soma pela diferença:

$$(u + v)(u - v) = u^2 - v^2$$

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. On the left, there is a teal-colored shape that tapers towards the bottom left corner. To its right is a light gray shape that also tapers towards the bottom left corner, creating a white triangular area in the center where the text is located.

Fatoração e Divisão de Polinômios

Fatoração



Fatorar polinômios corresponde ao processo inverso das leis de distributividade da multiplicação, colocando os fatores comuns em evidência. Podemos também usar os produtos notáveis para fatorar um polinômio.

Exemplo



Exemplo 5

Vamos fatorar os polinômios a seguir:

1. $2x^3 + 2x^2 - 6x$

($2x$ está na fatoração de todos os termos)

$$\begin{aligned} 2x^3 + 2x^2 - 6x &= (2x)x^2 + (2x)x - 3(2x) \\ &= 2x(x^2 + x - 3) \end{aligned}$$

2. $3x^5 - 24x^4 + 12x^3$

($3x^3$ está na fatoração de todos os termos)

$$\begin{aligned} 3x^5 - 24x^4 + 12x^3 &= (3x^3)x^2 - (3x^3)(8x) + 4(3x^3) \\ &= 3x^3(x^2 - 8x + 4) \end{aligned}$$

Exemplo



3. $25x^2 - 36$

(Diferença de dois quadrados)

$$\begin{aligned} 25x^2 - 36 &= (5x)^2 - 6^2 \\ &= (5x + 6)(5x - 6) \end{aligned}$$

4. $4x^2 - (x^3 + 3)^2$

(Diferença de dois quadrados)

$$\begin{aligned} 4x^2 - (x^3 + 3)^2 &= (2x)^2 - (x^3 + 3)^2 \\ &= (2x + x^3 + 3)(2x - (x^3 + 3)) \\ &= (2x + x^3 + 3)(2x - x^3 - 3) \end{aligned}$$

Exemplo



5. $9x^2 + 6x + 1$

(Quadrado Perfeito)

$$\begin{aligned} 9x^2 + 6x + 1 &= (3x)^2 + 2(3x) \cdot 1 + 1^2 \\ &= (3x + 1)^2 \end{aligned}$$

6. $4x^2 - 12x + 9$

(Quadrado Perfeito)

$$\begin{aligned} 4x^2 - 12x + 9 &= (2x)^2 - 2(2x) \cdot 3 + 3^2 \\ &= (2x - 3)^2 \end{aligned}$$

Fatoração por Agrupamento



Considere o polinômio $3x^3 + x^2 - 6x - 2$.

Nenhuma das fatorações anteriores podem ser aplicadas nesse exemplo. Vamos fatorar por agrupamento.

Para tanto, procuramos termos que tenham algum fator em comum:

- i) $3x^3$ e x^2 possuem o fator x^2 em comum e $-6x$ e -2 possuem o -2 ;
- ii) $3x^3$ e $-6x$ possuem o fator $3x$ em comum, porém x^2 e -2 não possuem fator em comum;
- iii) x^2 e $-6x$ possuem o fator x em comum, porém $3x^3$ e -2 não possuem fator em comum.

Portanto, a única opção viável é o agrupamento em i).

Fatoração por Agrupamento



Portanto, fazemos

$$\begin{aligned} 3x^3 + x^2 - 6x - 2 &= (3x^3 + x^2) + (-6x - 2) \\ &= [x^2(3x) + x^2 \cdot 1] + [(-2)(3x) - (-2) \cdot 1] \\ &= x^2(3x + 1) - 2(3x + 1) \text{ (o fator } (3x + 1) \text{ é comum)} \\ &= (3x + 1)(x^2 - 2) \end{aligned}$$

Exemplo



Exemplo 6

Usando a fatoração por agrupamento, fatore o polinômio $x^6 - 3x^4 + x^2 - 3$.

Solução: Analisando as possíveis combinações, vemos que podemos juntar os pares com fatores em comum x^6 com x^2 e $-3x^4$ com -3 :

$$\begin{aligned}x^6 - 3x^4 + x^2 - 3 &= (x^6 + x^2) + (-3x^4 - 3) \\&= (x^4 \cdot x^2 + x^2 \cdot 1) + [(-3)x^4 + (-3) \cdot 1] \\&= x^2(x^4 + 1) - 3(x^4 + 1) \text{ (o fator } (x^4 + 1) \text{ é comum)} \\&= (x^4 + 1)(x^2 - 3)\end{aligned}$$

Divisão de Polinômios



É possível aplicar a técnica de divisão longa, para encontrar um quociente e resto da divisão entre dois polinômios. Arranje o dividendo e o divisor em potências decrescentes da variável. Insira termos com coeficientes zero e use o procedimento da divisão longa. Vamos dividir os polinômios $x^3 + x$ e $x - 1$ (o de maior grau pelo de menor):

$$\begin{array}{r|l} x^3 & + x \\ -x^3 + x^2 & \\ \hline x^2 & + x \\ -x^2 & + x \\ \hline 2x & \\ -2x + 2 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

Divisão de Polinômios



Assim como fazemos com os números, podemos reescrever o dividendo como sendo o produto do divisor pelo resultado do quociente, mais o resto:

$$x^3 + x = (x - 1)(x^2 + x + 2) + 2$$

Com isso, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{x^3 + x}{x - 1} &= \frac{(x - 1)(x^2 + x + 2) + 2}{x - 1} \\ &= \frac{(x - 1)}{x - 1}(x^2 + x + 2) + \frac{2}{x - 1} \\ &= x^2 + x + 2 + \frac{2}{x - 1}\end{aligned}$$

Exemplos



Exemplo 7

Calcule as divisões polinomiais a seguir.

1.
$$\frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 9}{x - 4}$$

Solução:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 5x^2 + 7x - 9 & x - 4 \\ -x^3 + 4x^2 & \\ \hline -x^2 + 7x & \\ x^2 - 4x & \\ \hline 3x - 9 & \\ -3x + 12 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

Exemplos



2. $\frac{2x^4 - x^2 - 2}{x^2 + 2x - 1}$

Solução:

$$\begin{array}{r} 2x^4 \qquad - x^2 \qquad - 2 \\ - 2x^4 - 4x^3 + 2x^2 \\ \hline - 4x^3 + x^2 \\ 4x^3 + 8x^2 - 4x \\ \hline 9x^2 - 4x - 2 \\ - 9x^2 - 18x + 9 \\ \hline - 22x + 7 \end{array}$$
$$- 2 \left| \begin{array}{l} x^2 + 2x - 1 \\ 2x^2 - 4x + 9 \end{array} \right.$$

Exemplos



3. $\frac{x^5 + 32}{x + 2}$

Solução:

$$\begin{array}{r} x^5 \\ - x^5 - 2x^4 \\ \hline - 2x^4 \\ 2x^4 + 4x^3 \\ \hline 4x^3 \\ - 4x^3 - 8x^2 \\ \hline - 8x^2 \\ 8x^2 + 16x \\ \hline 16x + 32 \\ - 16x - 32 \\ \hline 0 \end{array}$$
$$\begin{array}{r|l} + 32 & x + 2 \\ \hline & x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16 \end{array}$$

Exemplo



Podemos então escrever:

1.

$$\begin{aligned}\frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 9}{x - 4} &= \frac{(x - 4)(x^2 - x + 3) + 3}{x - 4} \\ &= \frac{x - 4}{x - 4}(x^2 - x + 3) + \frac{3}{x - 4} \\ &= x^2 - x + 3 + \frac{3}{x - 4}\end{aligned}$$

Exemplo



2.

$$\begin{aligned}\frac{2x^4 - x^2 - 2}{x^2 + 2x - 1} &= \frac{(x^2 + 2x - 1)(2x^2 - 4x + 9) - 22x + 7}{x^2 + 2x - 1} \\ &= \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x - 1}(2x^2 - 4x + 9) + \frac{-22x + 7}{x^2 + 2x - 1} \\ &= 2x^2 - 4x + 9 - \frac{22x - 7}{x^2 + 2x - 1}\end{aligned}$$

Exemplo



3.

$$\begin{aligned}\frac{x^5 + 32}{x + 2} &= \frac{(x + 2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)}{x + 2} \\ &= \frac{x + 2}{x + 2}(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16) \\ &= x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16\end{aligned}$$

Referencias I



F. Safier.

Pré-Calculo: Coleção Schaum.

Coleção Schaum. Bookman, 2009.