CÁLCULO II

Semana 01

Técnicas de Integração: A Substituição

Karla Lima

Sumário

Revisão de Integrais

Definição

Definição 1

*Uma função F é denominada uma **primitiva** de f no intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para todo x em I.*

Definição

Definição 1

*Uma função F é denominada uma **primitiva** de f no intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para todo x em I.*

Teorema 1

Se F for uma primitiva de f em um intervalo I, então a primitiva mais geral de f em I é

$$F(x) + C$$

em que C é uma constante arbitrária.

Funções Exponenciais e Logarítmicas

Seja C uma constante qualquer.

Função	Primitiva (Geral)	Justificativa
e^x	$e^x + C$	$\frac{d}{dx}(e^x + C) = e^x$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\| + C$	$\frac{d}{dx}(\ln\|x\| + C) = \frac{1}{x}$
$a^x \ln a$	$a^x + C$	$\frac{d}{dx}(a^x + C) = a^x \ln a$
$\frac{1}{x \ln a}$	$\log_a x + C$	$\frac{d}{dx}(\log_a x + C) = \frac{1}{x \ln a}$

Algumas Funções Trigonométricas

Seja C uma constante qualquer.

Função	Primitiva (Geral)	Justificativa
$\cos x$	$\operatorname{sen} x + C$	$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x + C) = \cos x$
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x + C$	$\frac{d}{dx}(-\cos x + C) = \operatorname{sen} x$
$\sec^2 x$	$\tan x + C$	$\frac{d}{dx}(\tan x + C) = \sec^2 x$

Algumas Funções Trigonométricas Inversas

Seja C uma constante qualquer.

Função	Primitiva (Geral)	Justificativa
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{sen}^{-1} x + C$	$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} x + C) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\cos^{-1} x + C$	$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x + C) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\tan^{-1} x + C$	$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x + C) = \dfrac{1}{1+x^2}$

O Teorema Fundamental do Cálculo

Teorema 2

Se f for contínua em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\mathbf{d}x = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer primitiva de f.

Integral Indefinida

Para identificar a primitiva da função f, usamos a notação

$$F(x) = \int f(x)\mathbf{d}x.$$

Ela é chamada **integral indefinida**.

$$F(x) = \int f(x)\mathbf{d}x \quad \text{significa} \quad F'(x) = f(x)$$

Tabela de Integrais

Do que já vimos até aqui, podemos preencher a seguinte tabela de integrais:

$$\int e^x \mathbf{d}x = \_\_\_\_\_\_$$

$$\int \frac{1}{x} \mathbf{d}x = \_\_\_\_\_\_$$

$$\int a^x \ln a \mathbf{d}x = \_\_\_\_\_\_$$

$$\int \frac{1}{x \ln a} \mathbf{d}x = \_\_\_\_\_\_$$

$$\int \cos x \mathbf{d}x = \_\_\_\_\_\_$$

$$\int \operatorname{sen} x \mathbf{d}x = \_\_\_\_\_\_$$

$$\int \sec^2 x \mathbf{d}x = \_\_\_\_\_\_$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathbf{d}x = \_\_\_\_\_\_$$

$$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathbf{d}x = \_\_\_\_\_\_$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \mathbf{d}x = \_\_\_\_\_\_$$

Exercício: Tabela de Integrais

As funções hiperbólicas estão relacionadas com hipérboles, assim como as funções trigonométricas estão relacionadas com o círculo. Elas são definidas através de exponenciais:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{e} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

As demais funções hiperbólicas seguem a lógica das funções trigonométricas. Por exemplo,

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}.$$

.

Exercício: Tabela de Integrais

Use a tabela de derivadas a seguir para calcular as integrais pedidas.

Função	Derivada
$\operatorname{senh} x$	$\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x$
$\cosh x$	$\frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x$
$\operatorname{sech} x$	$\frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$

a) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \cosh x \,\mathbf{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} (\operatorname{senh} x - \operatorname{sech} x \tanh x)\,\mathbf{d}x$

Substituição: Integrais Indefinidas

Quando usá-la?

Observe as seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx;$

b) $\displaystyle\int 4x^3\cos\left(x^4+2\right)dx.$

Você consegue encontrar alguma primitiva para cada uma das integrais (de memória ou usando tabelas de integrais ou derivadas)?

Quando usá-la?

- As nossas fórmulas de primitivação não mostram como calcular integrais desse tipo.
- Aqui, usamos a estratégia de resolução de problemas de **introduzir alguma coisa extra**: um nova variável.

Quando usá-la?

- Usamos o método de substituição quando uma integral **contém uma função composta e a derivada da função interna**.
- Esse método desfaz a regra da cadeia.

Como aplicar o método?

Vamos retornar ao nosso primeiro exemplo:

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx.$$

No integrando $2x\sqrt{1+x^2}$, você consegue identificar uma multiplicação envolvendo a derivada de alguma função conhecida?

Como aplicar o método?

- O produto é formado por $2x$ e a raiz $\sqrt{x^2+1}$. Devemos sempre começar pelo que parece ser mais fácil. Nesse caso, o $2x$.
- Sabemos que $2x$ é a derivada de qualquer função da forma $x^2 + C$.
- E olha só: temos dentro da raiz uma função desse tipo!
- Fazemos a seguinte mudança de variável:
  - denotamos $u = x^2 + 1$;
  - relacionamos a sua diferencial du com a diferencial dx

$$u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x\,dx;$$

  - substituímos $x^2 + 1$ por u e $2x\,dx$ por du, e resolvemos a integral em u.
  - Após resolver a integral em u, retorne à variável x, usando novamente que $u = x^2 + 1$.

Exemplo 1

Exemplo 1

Usando o método de substituição, calcule a integral $\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$.

Solução: Seja $u = x^2 + 1$. Então $du = 2x\,dx$ e a integral fica

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{1+x^2}\,2x\,dx = \int \sqrt{u}\,du = \int u^{1/2}\,du$$

$$= \frac{u^{1/2+1}}{1/2+1} + C = \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2u^{3/2}}{3} + C$$

$$= \frac{2(x^2+1)^{3/2}}{3} + C.$$

Regra da Substituição

Definição 2

Se $u = g(x)$ for uma função derivável cuja imagem é um intervalo I e f for contínua em I, então

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du.$$

Ou seja, queremos encontrar uma primitiva F de f, tal que

$$\frac{d}{dx}F(u) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Consegue reproduzir?

Agora é a sua vez.

Exemplo 2

Seja

$$\int 4x^3 \cos\left(x^4 + 2\right) dx.$$

a) *No integrando* $4x^3 \cos\left(x^4 + 2\right)$*, você consegue identificar uma multiplicação envolvendo a derivada de alguma função conhecida?*

b) *Resolva a integral usando o método da substituição.*

Exemplo

Às vezes, é necessário trabalhar algumas constantes para obter a forma desejada da substituição. Por exemplo, para resolver a integral

$$\int \sqrt{2x+1}\, dx,$$

devemos usar a substituição dentro da raiz, fazendo $u = 2x + 1$. Com isso, obtemos

$$du = 2\, dx.$$

Observe que na integral aparece apenas dx, e não $2\, dx$.

Exemplo

Porém, uma constante não atrapalha o cálculo da integral, então podemos reescrever $1 = \frac{1}{2} \cdot 2$:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x+1}\,dx &= \int \sqrt{2x+1}\left(\frac{1}{2}\cdot 2\right)\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int \sqrt{2x+1}\cdot\,2\,dx,\end{aligned}$$

ou $dx = \frac{1}{2}du$:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x+1}\,dx &= \int \sqrt{u}\,\frac{1}{2}\,du\\ &= \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du.\end{aligned}$$

Exemplo

Usando a segunda opção, concluímos:

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{2x+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du \\
&= \frac{1}{2}\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} + C \\
&= \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C.
\end{aligned}
$$

Exercícios

Integrais Indefinidas

Exercício 1

Encontre $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx.$

Exercício 2

Encontre $\displaystyle\int e^{5x}\,dx.$

Integrais Indefinidas

Exercício 3

Encontre $\displaystyle\int \tan(x)\,dx.$

Exercício 4

Encontre $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,x^5\,dx.$

Substituição: Integrais Definidas

Método 1

- Consiste em calcular primeiro a integral indefinida e então usar o Teorema Fundamental do Cálculo.

Por exemplo, seja $\int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$. Vimos que

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + C.$$

Método 1

Usando a primitiva $F(x) = \frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2}$ e o TFC, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = F(1) - F(0) &= \frac{2}{3}(1^2+1)^{3/2} - \frac{2}{3}(0^2+1)^{3/2}\\ &= \frac{2}{3}(2^{3/2}-1).\end{aligned}$$

Método 2

- É geralmente o método preferível, o qual consiste em alterar os limites de integração ao se mudar a variável.
- Trocamos o limitante inferior a por $u(a)$; já o limitante superior b é trocado por $u(b)$.

Método 2

No exemplo anterior, trocamos 0 por $u(0) = 1$ e 1 por $u(1) = 1 + 1^2 = 2$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}\,dx &= \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,2x\,dx = \int_{u(0)}^{u(1)} \sqrt{u}\,du = \int_1^2 u^{1/2}\,du \\ &= \left.\frac{u^{1/2+1}}{1/2+1}\right|_1^2 = \frac{2^{3/2}}{3/2} - \frac{1^{3/2}}{3/2} \\ &= \frac{2}{3}\left(2^{3/2} - 1\right).\end{aligned}$$

Método 2

Definição 3

Se g' for contínua em $[a, b]$ e f for contínua na imagem de $u = g(x)$, então

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Exercícios

Integrais Definidas

Usando o método 2 de substituição para as integrais definidas, resolva as integrais abaixo. Compare o resultado com o encontrado através do método 1, usando a seção anterior de exercícios.

Exercício 5

Encontre $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx.$

Exercício 6

Encontre $\displaystyle\int_{0}^{3} e^{5x}\,dx.$

Integrais Definidas

Exercício 7

Encontre $\int_0^{\pi/3} tan(x)\, dx.$

Exercício 8

Encontre $\int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\, x^5\, dx.$

Problemas

Exercício 9

Um modelo para a taxa de metabolismo basal, em kcal/h, de um homem jovem é $R(t) = 85 - 0,18\cos(\pi t/12)$, em que t é o tempo em horas medido a partir de 5 horas da manhã. Qual é o metabolismo basal total deste homem, $\int_0^{24} R(t)\,dt$, em um período de 24 horas?

Gabarito

Respostas

1. $\frac{1}{4}\sqrt{1+4x^2}+C$
2. $\frac{1}{5}e^{5x}+C$
3. $-\ln|\cos x|+C$
4. $\frac{1}{7}(1+x^2)^{7/2}-\frac{2}{5}(1+x^2)^{5/2}+\frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}+C$
5. 0
6. $\frac{1}{5}(e^{15}-1)$
7. $\ln(2)$
8. 0
9. $2040\,kcal$