Aula 10: Conjuntos

Karla Lima

Álgebra Elementar: 08/02/24

FACET/UFGD

Conjuntos

Onde a matemática começa

- A partir da noção de conjuntos, todos os conceitos matemáticos podem ser expressos.
- Vai além dos números. Podemos pensar em matemática com "coisas".

O que são conjuntos?

Um conjunto é uma coleção de objetos que têm algo em comum ou seguem uma regra. Por exemplo:

1. Os itens do seu guarda-roupa formam o conjunto das peças que você veste.
2. Conjunto de todos os livros de ficção científica.
3. Conjunto de comidas típicas brasileiras.

Notação

- Um conjunto é formado por **elementos**.
- O símbolo $\{\cdots\}$ significa o conjunto cujos elementos estão descritos no interior das chaves.

Relação de Pertinência

Dado um conjunto A e um objeto x, a pergunta que cabe é: x é ou não um elemento de A?

- Se a resposta é sim, escrevemos $x \in A$ (x pertence ao conjunto A);
- Se a resposta é não, escrevemos $x \notin A$ (x não pertence ao conjunto A).

Exemplo

Exemplo 1

Vamos considerar o conjunto dos itens do meu guarda-roupa:

$$A = \{\textit{itens do guarda-roupa da Karla}\}.$$

Dados os objetos: camisa de algodão, casaco de pele e calça jeans, temos a seguinte relação entre eles e o conjunto A:

- *camisa de algodão* $\in A$;
- *casaco de pele* $\notin A$;
- *calça jeans* $\in A$.

Exercício

Exercício 1

Qual a relação destes mesmos elementos com o conjunto dos itens do seu guarda-roupa?

Exemplo

Exemplo 2

Agora, temos o conjunto de todos os livros de ficção científica:

$$F = \{\textit{livros de ficção científica}\}.$$

Dados os objetos: O apanhador de sonhos (Stephen King) , A menina que roubava livros (Markus Zusak) e Fundação (Isaac Asimov), qual a relação entre cada um deles e o conjunto F?

Exemplo

- O apanhador de sonhos $\in F$. É um livro de terror, mas também possui a ficção científica como tema;
- A menina que roubava livros $\notin F$, pois é um livro de ficção ambientado na 2ª guerra mundial e que não envolve conceitos de ciência e tecnologia;
- Fundação $\in F$. É considerado um dos melhores livros de ficção científica de todos os tempos!

Exercício

Exercício 2

Considere o conjunto

$$C = \{\textit{comidas típicas brasileiras}\}$$

e os objetos: canjica, strudel, macarron e feijoada. Descreva a relação entre esses objetos e o conjunto C.

Relação de Inclusão

Dados dois conjuntos A e B, escrevemos

$$A \subset B \text{ (}A\text{ está contido em }B\text{)}$$

se todo elemento do conjunto A é também um elemento do conjunto B.

Exemplo

Exemplo 3

Sejam $A = \{\textit{comidas típicas do nordeste brasileiro}\}$ *e* $B = \{\textit{comidas típicas brasileiras}\}$.

Toda comida típica do nordeste brasileiro é, naturalmente, uma comida típica do Brasil, temos que $A \subset B$.

Por outro lado, nem toda comida típica brasileira é uma comida típica do nordeste brasileiro. Tome como exemplo o ***tereré****, típico da região Centro-Oeste (e, portanto, é uma comida típica brasileira) mas que não é comum na região Nordeste. Logo, tem-se*

$$B \not\subset A \text{ (}B\text{ não está contido em }A\text{).}$$

Exercício

Exercício 3

Considere os conjuntos

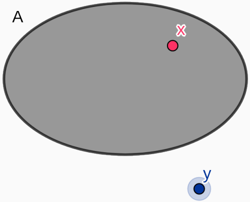
$$A = \{\textit{países da América do Sul}\} \;\; e \;\; B = \{\textit{países da América}\}$$

1. *Qual a relação entre A e B?*
2. *E qual a relação entre B e A?*

Diagramas

Diagramas de Euler [1]

- Por volta de 1770, o matemático Leonhard Euler recorreu a certos diagramas para representar as premissas e a conclusão.



A: conjunto dos possuidores da propriedade **<u>a</u>**
x: possui a propriedade **<u>a</u>** (logo, $x \in A$)
y: não possui a propriedade **<u>a</u>** (logo, $y \notin A$)

Diagramas de Euler

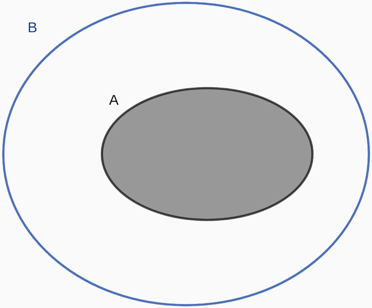


Figura 1: Todo **a** é **b**

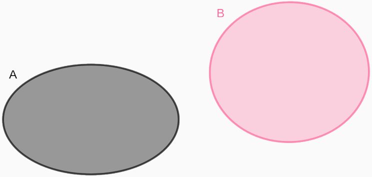


Figura 2: Nenhum **a** é **b**

Exemplo 4

A: *Conjunto dos números pares.*

B: *Conjunto dos números inteiros.*

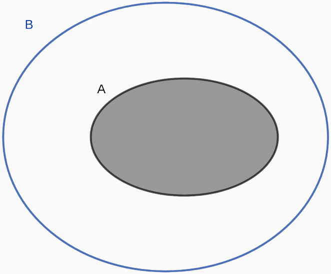


Figura 3: *Todo número par é um número inteiro.*

Diagramas de Euler

Exemplo 5

A: Conjunto dos números pares.

B: Conjunto dos números ímpares.

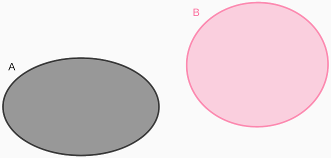
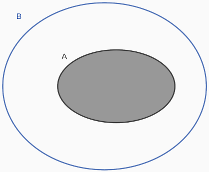


Figura 4: *Nenhum número par é também um número ímpar.*

Exercício 4

Considerando verdadeira a proposição:

"Todo número par é um número inteiro."



determine a validade das proposições a seguir.

Exercício 4

1. Nenhum número par é inteiro.
2. Se um número não é par, então não é um número inteiro.
3. Se um número não é inteiro, então ele não é par.
4. Alguns números pares não são inteiros.

Diagramas de Euler

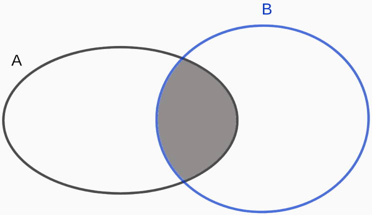


Figura 5: Existe **a** que é **b**

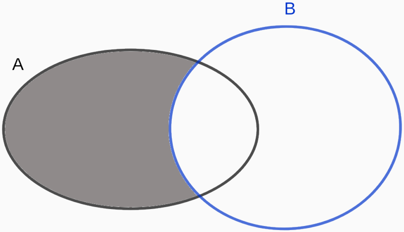


Figura 6: Existe **a** que não é **b**

Exemplo 6

A: Conjunto dos números pares.

B: Conjunto dos números múltiplos de 3.

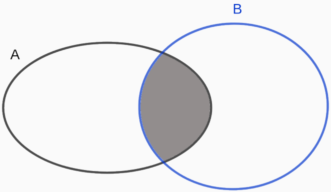


Figura 7: *Existem números pares que também são múltiplos de 3.*

Diagramas de Euler

Exemplo 7

A: Conjunto dos números pares.

B: Conjunto dos números múltiplos de 3.

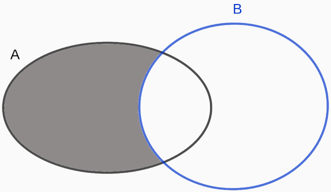
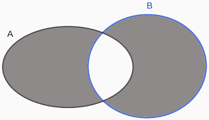


Figura 8: *Existem números pares que não são múltiplos de 3.*

Exercício 5

Considerando A o conjunto dos números pares e B o conjunto dos números múltiplos de 3, temos como verdadeiras as seguintes proposições:

> *"Existem múltiplos de 3 que não são múltiplos de 2 ."*
>
> *"Existem números pares que não são múltiplos de 3."*



Determine a validade das proposições a seguir.

Exercício 5

1. Todos os números pares são múltiplos de 3.
2. Quem não é múltiplo de 3 não é múltiplo de 2.
3. Nem todo múltiplo de 3 é múltiplo de 2.
4. Nem todo múltiplo de 2 é um múltiplo de 3.

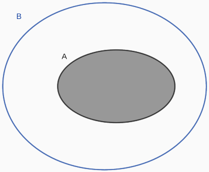
Condicional

Muitas vezes, proposições condicionais traduzem uma inclusão de conjuntos.

Exemplo 8

"Se alguém é atleta, então é saudável"

traduz a inclusão do conjunto $A = \{atletas\}$ *no conjunto* $B = \{pessoas\ saudáveis\}$ $(A \subset B)$



Conjuntos Iguais [2]

Definição 1

Dois conjuntos A e B são iguais quando todo elemento de A pertence a B e, reciprocamente, todo elemento de B pertence a A.

Bicondicional

As proposições bicondicionais traduzem uma igualdade de conjuntos.

Exemplo 9

"Alguém é atleta se, e somente se, for saudável"

traduz a inclusão do conjunto $A = \{atletas\}$ *no conjunto* $B = \{pessoas\ saudáveis\}$ *(*$A \subset B$*); traz, também, a inclusão oposta, do conjunto* $B = \{pessoas\ saudáveis\}$ *no conjunto* $A = \{atletas\}$ *(*$B \subset A$*).*

Logo, $A = B$.

Exemplo

Exemplo 10

Verifique se os pares de conjuntos abaixo são iguais:

a) $A = \{x \in \mathbb{R};\ 2x + 1 = 5\}$, $B = \{2\}$.

b) $C = \{x \in \mathbb{R};\ x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $D = \{2, 3, 4\}$.

Tipos de Conjuntos

1. **Conjunto Finito:** possui uma quantidade finita de elementos.
   a) $A = \{x \in \mathbb{R}; x \text{ é divisor inteiro de } 3\}$
   b) $B = \{x \in \mathbb{R};\ 2x + 1 = 5\}$
   c) $C = \{x \in \mathbb{R};\ x \text{ é inteiro e } 0 \leq x \leq 500\}$

Tipos de Conjuntos

Em particular, se o conjunto possui apenas um elemento, é chamado **conjunto unitário**.

Tipos de Conjuntos

Em particular, se o conjunto possui apenas um elemento, é chamado **conjunto unitário**.

O conjunto

$$B = \{x \in \mathbb{R};\ 2x + 1 = 5\} = \{2\}$$

é unitário.

Tipos de Conjuntos

2. **Conjunto Infinito:** possui infinitos elementos.
   a) $A = \{x \in \mathbb{Z}; x \text{ é um múltiplo de } 3\}$
   b) $B = \{x;\ x \in \mathbb{R}\}$

Tipos de Conjuntos

3. **Conjunto Vazio:** não possui elemento algum. É obtido quando descrevemos um conjunto através de uma propriedade P logicamente falsa.
    a) $\{x;\, x \neq x\} = \emptyset$.
    b) $\{x \in \mathbb{R}; x \text{ é ímpar e múltiplo de } 2\} = \emptyset$.
    c) $\{x \in \mathbb{R}; x > 0 \text{ e } x < 0\} = \emptyset$.

Tipos de Conjuntos

3. **Conjunto Vazio:** não possui elemento algum. É obtido quando descrevemos um conjunto através de uma propriedade P logicamente falsa.
   a) $\{x; x \neq x\} = \emptyset$.
   b) $\{x \in \mathbb{R}; x \text{ é ímpar e múltiplo de } 2\} = \emptyset$.
   c) $\{x \in \mathbb{R}; x > 0 \text{ e } x < 0\} = \emptyset$.

Obs: Para qualquer que seja x, tem-se $x \notin \emptyset$.

Os Quantificadores

Em relação ao conjunto $A = \{a, e, i, o, j\}$, podemos dizer que:

a) qualquer que seja o elemento de A, ela é uma letra do alfabeto da língua portuguesa (conjunto B)

$$(\forall x \in A \to x \in B) \Rightarrow A \subset B$$

b) existe elemento de A que é uma vogal

$$\exists x \in A \text{ tal que } x \text{ é uma vogal}$$

c) existe um único elemento de A que é uma consoante

$$\exists!\, x \in A \text{ tal que } x \text{ é uma consoante}$$

Propriedades de Conjuntos

Propriedades de Inclusão

Sejam A, B e C três conjuntos arbitrários. Valem as seguintes propriedades:

1. $\emptyset \subset A$
2. $A \subset A$ (reflexiva)
3. $(A \subset B \quad \text{e} \quad B \subset A) \Rightarrow A = B$ (anti-simétrica)
4. $(A \subset B \quad \text{e} \quad B \subset C) \Rightarrow A \subset C$ (transitiva)

Exercícios

Exercício 6

Quais das igualdades abaixo são verdadeiras?

a) $\{a, a, a, b, b\} = \{a, b\}$

b) $\{x;\ x^2 = 4\} = \{x;\ x^3 - 4x = 0\}$

c) $\{x;\ 2x + 7 = 11\} = \{2\}$

d) $\{x;\ x < 0\ e\ x > 0\} = \emptyset$

Exercício 7

Quais das sentenças abaixo são verdadeiras?

a) $0 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

b) $a \in \{a, b\}$

c) $\emptyset \in \{0\}$

d) $\{a\} \in \{\{a\}, b\}$

e) $\{a\} \subset \{\{a\}, b\}$

f) $\emptyset \in \{\emptyset, \{a\}\}$

g) $\emptyset \subset \{\emptyset, \{a\}\}$

Operações com Conjuntos

Conjunto das Partes [2]

Definição 2

Dado um conjunto A, chama-se conjunto das partes de A ($\mathcal{P}(A)$) aquele que é formado por todos os subconjuntos de A:

$$\mathcal{P}(A) = \{X;\, X \subset A\}$$

Exemplos

Exemplo 11

Determine o conjunto das partes $\mathcal{P}(A)$*, onde:*

a) $A = \{2\}$

b) $A = \{\pi, e\}$

União de Conjuntos

Definição 3

*Chama-se **união** de dois conjuntos A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A **ou** a B.*

$$A \cup B = \{x;\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

União de Conjuntos

Definição 3

*Chama-se **união** de dois conjuntos A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A **ou** a B.*

$$A \cup B = \{x;\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Obs: *x é um elemento de $A \cup B$ se ocorrer ao menos uma das condições seguintes:*

$$x \in A \text{ ou } x \in B.$$

União de Conjuntos

Quando um conjunto A é formado pelos elementos que gozam da propriedade P e B pelos que gozam da propriedade Q então a propriedade que define o conjunto $A \cup B$ é "P ou Q"(uma disjunção).

União de Conjuntos

Exemplo 12

Um número x tem a propriedade P quando valer a igualdade

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Esse número também possui a propriedade Q quando for

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

União de Conjuntos

Exemplo 12

Um número x tem a propriedade P quando valer a igualdade

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Esse número também possui a propriedade Q quando for

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

- *Possuem a propriedade P:* $A = \{1, 2\}$.
- *Possuem a propriedade Q:* $B = \{2, 3\}$.

União de Conjuntos

Exemplo 12

Um número x tem a propriedade P quando valer a igualdade

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Esse número também possui a propriedade Q quando for

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

- *Possuem a propriedade P: $A = \{1, 2\}$.*
- *Possuem a propriedade Q: $B = \{2, 3\}$.*
- *Assim, a afirmação "$x^2 - 3x + 2 = 0$ ou $x^2 - 5x + 6 = 0$" equivale a "$x \in \{1, 2, 3\}$".*

Interseção de Conjuntos

Definição 4

*Chama-se **interseção** de dois conjuntos A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A **e** a B.*

$$A \cap B = \{x;\, x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Interseção de Conjuntos

Definição 4

Chama-se ***interseção*** *de dois conjuntos A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A* ***e*** *a B.*

$$A \cap B = \{x;\, x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Obs: *x é um elemento de $A \cap B$ se ocorrer simultaneamente:*

$$x \in A \text{ e } x \in B.$$

Interseção de Conjuntos

Agora, quando um conjunto A é formado pelos elementos que gozam da propriedade P e B pelos que gozam da propriedade Q então a propriedade que define o conjunto $A \cap B$ é "P e Q"(uma conjunção).

Interseção de Conjuntos

Exemplo 13

Retornando ao exemplo anterior, um número x tem a propriedade P quando valer a igualdade

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

e possui a propriedade Q quando for

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Exemplo 13

Retornando ao exemplo anterior, um número x tem a propriedade P quando valer a igualdade

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

e possui a propriedade Q quando for

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

- *Possuem a propriedade P:* $A = \{1, 2\}$.
- *Possuem a propriedade Q:* $B = \{2, 3\}$.

Interseção de Conjuntos

Exemplo 13

Retornando ao exemplo anterior, um número x tem a propriedade P quando valer a igualdade

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

e possui a propriedade Q quando for

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

- *Possuem a propriedade P: $A = \{1, 2\}$.*
- *Possuem a propriedade Q: $B = \{2, 3\}$.*
- *Assim, a afirmação "$x^2 - 3x + 2 = 0$ e $x^2 - 5x + 6 = 0$" equivale a "$x \in \{2\}$". Ou seja, equivale a "$x = 2$".*

Diferença de Conjuntos

Definição 5

Chama-se ***diferença*** *de dois conjuntos A e B o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B.*

$$A - B = \{x;\, x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Exemplo 14

Dadas as propriedades P e Q do exemplos anteriores, temos que:

Diferença de Conjuntos

Exemplo 14

Dadas as propriedades P e Q do exemplos anteriores, temos que:

- *possuem a propriedade P:* $A = \{1, 2\}$;
- *possuem a propriedade Q:* $B = \{2, 3\}$.

Diferença de Conjuntos

Exemplo 14

Dadas as propriedades P e Q do exemplos anteriores, temos que:

- *possuem a propriedade P:* $A = \{1, 2\}$;
- *possuem a propriedade Q:* $B = \{2, 3\}$.
- *Assim, a afirmação "$P \wedge \neg Q$: $x^2 - 3x + 2 = 0$ e $x^2 - 5x + 6 \neq 0$" equivale a "$x \in \{1\}$". Ou seja, equivale a "$x = 1$".*

Complementar de B em A

Definição 6

*Dados dois conjuntos A e B, com $B \subset A$, chama-se **complementar** de B com relação a A o conjunto $A - B$, formado pelos elementos de A que não pertencem a B.*

$$\complement_A^B = \{x;\ x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Complementar de B em A

Exemplo 15

Dadas as propriedades P e Q do exemplos anteriores, não podemos calcular $\complement_A^B$, uma vez que

Complementar de B em A

Exemplo 15

Dadas as propriedades P e Q do exemplos anteriores, não podemos calcular $\complement_A^B$, uma vez que

- *possuem a propriedade P: $A = \{1, 2\}$;*
- *possuem a propriedade Q: $B = \{2, 3\}$.*

Complementar de B em A

Exemplo 15

Dadas as propriedades P e Q do exemplos anteriores, não podemos calcular $\complement_A^B$, uma vez que

- *possuem a propriedade P: $A = \{1, 2\}$;*
- *possuem a propriedade Q: $B = \{2, 3\}$.*
- *Assim, $B \not\subset A$.*

Exemplo 16

Agora, se um número x tem a propriedade P quando valer a igualdade

$$x^2 - 4 = 0,$$

e possui a propriedade Q quando for

$$x^3 - 4x = 0,$$

então

- *possuem a propriedade P: $A = \{-2, 2\}$;*
- *possuem a propriedade Q: $B = \{-2, 0, 2\}$;*
- *tem-se $A \subset B$.*

Complementar de B em A

Exemplo 16

Agora, se um número x tem a propriedade P quando valer a igualdade

$$x^2 - 4 = 0,$$

e possui a propriedade Q quando for

$$x^3 - 4x = 0,$$

então

- *possuem a propriedade P: $A = \{-2, 2\}$;*
- *possuem a propriedade Q: $B = \{-2, 0, 2\}$;*
- *tem-se $A \subset B$.*
- *Assim, $\complement_B^A = \{0\}$.*

Referências

M.O. da Cunha and N.J. Machado.
***Lógica e linguagem cotidiana: Verdade, coerência, comunicação, argumentação*.**
Autêntica Editora, 2013.

G. Iezzi and C. Murakami.
***Fundamentos de matemática elementar, 1: conjuntos e funções*.**
Atual.