CÁLCULO II

Aula 10

Semelhança

Karla Lima

Sumário

O Teorema Fundamental da Proporcionalidade

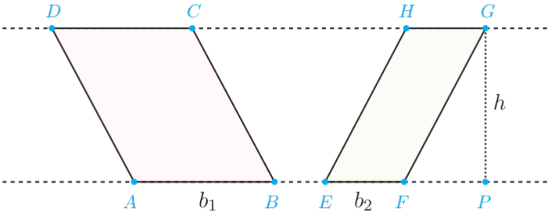
Proposição 1

Proposição 1

As áreas de dois paralelogramos com uma mesma altura são proporcionais às suas bases relativas à esta altura.

Demonstração: Sendo h_1 a altura relativa ao lado $\overline{AB}$ do primeiro paralelogramo e h_2 a altura relativa ao lado $\overline{EF}$ do segundo:

- **Hipótese:** $h_1 = h_2$
- **Tese:** $\dfrac{\mathcal{A}(ABCD)}{\mathcal{A}(EFGH)} = \dfrac{AB}{EF}$



Demonstração: Proposição 1

- Com efeito,

$$\mathcal{A}(ABCD) = (AB) * h \quad \text{e} \quad \mathcal{A}(EFGH) = (EF) * h.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{A}(ABCD)}{\mathcal{A}(EFGH)} &= \frac{(AB) * h}{(EF) * h} \\ &= \frac{AB}{EF}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Proposição 2

Proposição 2

Prove que as áreas de dois triângulos com uma mesma altura são proporcionais às bases relativas a esta altura.

Demonstração: Exercício

Semelhança de Triângulos

Semelhança

- De forma grosseira, dizemos que duas figuras são **semelhantes** se uma delas é uma ampliação ou redução da outra, sem mudar sua forma original.

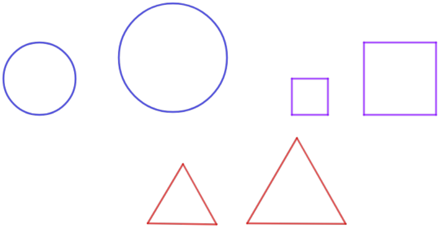


Figura 1: São semelhantes: duas circunferências quaisquer, dois quadrados quaisquer e dois triângulos equiláteros quaisquer.

Semelhança

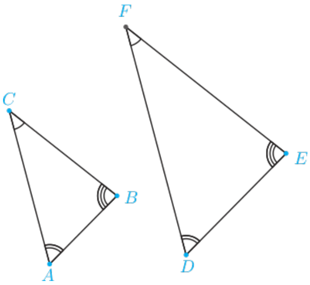
Definição 1

Dois triângulos são ditos ***semelhantes*** *se for possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam congruentes e lados correspondentes sejam proporcionais.*

- $\hat{A} = \hat{D}$
- $\hat{B} = \hat{E}$
- $\hat{C} = \hat{F}$
- $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$

Notação:

$\triangle ABS \sim \triangle DEF$

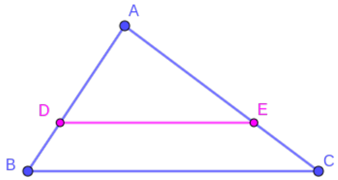


O Teorema Fundamental da Proporcionalidade

Teorema 1

Sejam $\triangle ABC$ um triângulo e $D \in \overline{AB}$, $E \in \overline{AC}$ pontos tais que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. Então,

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

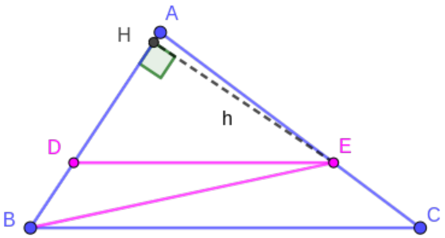


Demonstração: Teorema 1

Demonstração:

- Considere os triângulos ADE e BDE.
- A altura $\overline{EH}$ relativa aos lados $\overline{AD}$ e $\overline{DE}$ é a mesma para os dois triângulos.
- Logo, pela Proposição 2:

$$\frac{\mathcal{A}(\triangle ADE)}{\mathcal{A}(\triangle BDE)} = \frac{AD}{DB}. \qquad (1)$$

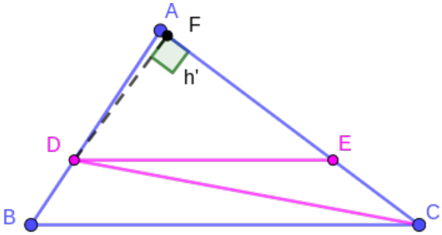


Demonstração: Teorema 1

Analogamente:

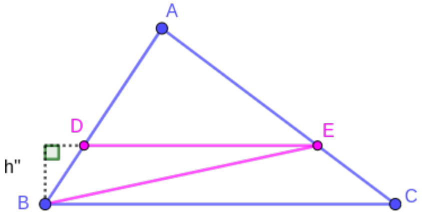
- Considere os triângulos ADE e CDE.
- A altura $\overline{DF}$ relativa aos lados $\overline{AE}$ e $\overline{CE}$ é a mesma para os dois triângulos.
- Logo, pela Proposição 2:

$$\frac{\mathcal{A}(\triangle ADE)}{\mathcal{A}(\triangle CDE)} = \frac{AE}{EC}. \qquad (2)$$



Demonstração: Teorema 1

- Para o triângulo BDE, considere o lado $\overline{DE}$ como base:

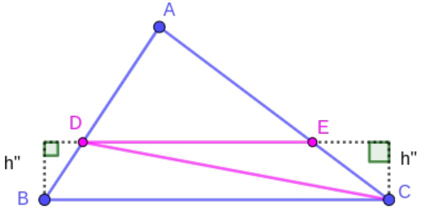


- Sua área é dada por

$$\mathcal{A}(\triangle BDE) = \frac{DE * h''}{2}.$$

Demonstração: Teorema 1

- Para o triângulo CDE, consideramos o mesmo lado $\overline{DE}$ como base:



- Como $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, os segmentos as alturas dos dois triângulos são congruentes, já que também são paralelas.
- Sua área é dada por

$$\mathcal{A}(\triangle CDE) = \frac{DE * h''}{2}.$$

Demonstração: Teorema 1

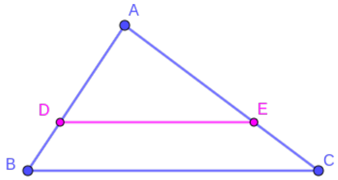
- Portanto,

$$\mathcal{A}(\triangle BDE) = \mathcal{A}(\triangle CDE) \tag{3}$$

- De (1), (2) e (3), concluímos

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

Demonstração: Teorema 1



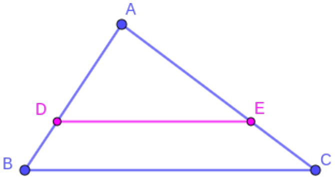
Observação: Como

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE},$$

podemos concluir que

$$1 + \frac{DB}{AD} = 1 + \frac{EC}{AE} \Rightarrow \frac{AD}{AD} + \frac{DB}{AD} = \frac{AE}{AE} + \frac{EC}{AE}.$$

Demonstração: Teorema 1



Assim,

$$\frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE} \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

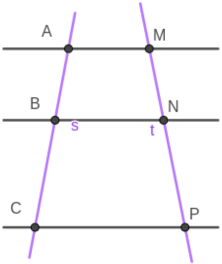
O Teorema de Tales

Teorema 2

Quando três ou mais retas paralelas são cortadas por duas transversais, os segmentos das transversais, determinados pelas paralelas, são proporcionais.

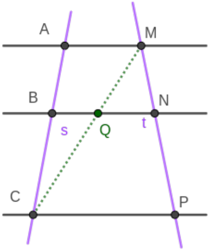
Demonstração:

- **Hipótese:** $\overline{AM} \parallel \overline{BN} \parallel \overline{CP}$
  s e t são transversais às paralelas.
- **Tese:** $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{MN}{NP}$



Demonstração: Teorema 2

- No $\triangle MAC$, $\overline{BQ}$ é paralelo à $\overline{AM}$.

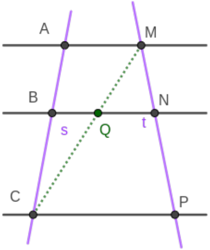


- Pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{MQ}{QC}. \tag{4}$$

Demonstração: Teorema 2

- No $\triangle MCP$, $\overline{NQ}$ é paralelo à $\overline{CP}$.



- Novamente, pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade,

$$\frac{MN}{NP} = \frac{MQ}{QC}. \tag{5}$$

Demonstração: Teorema 2

- De (4) e (5), obtemos

$$\frac{MN}{NP} = \frac{MQ}{QC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{MN}{NP} = \frac{AB}{BC},$$

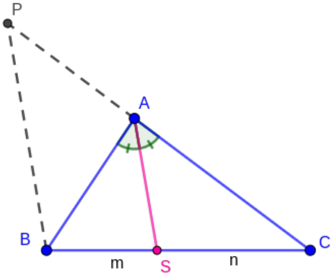
como queríamos demonstrar.

O Teorema da Bissetriz Interna

Exercício 1

Prove o Teorema da Bissetriz Interna: a bissetriz de um ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos dois outros lados.

Dica: Pelo ponto B, trace um segmento $\overline{CP}$ paralelo à bissetriz $\overline{AS}$, com $P \in \overrightarrow{CA}$. Use o Teorema Fundamental da Proporcionalidade.



Casos de Semelhança de Triângulos

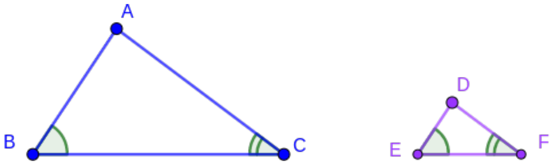
1º Caso: AA

Teorema 3

Se dois triângulos têm dois pares de ângulos respectivamente congruentes, então os triângulos são semelhantes.

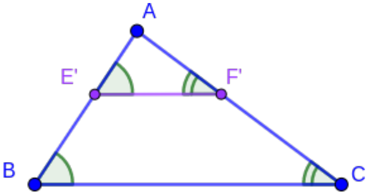
Demonstração:

- **Hipótese:** $\hat{B} = \hat{E}$ e $\hat{C} = \hat{F}$
- **Tese:**
  - $\hat{A} = \hat{D}$
  - $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$



Demonstração: Teorema 3

- Seja E' um ponto sobre $\overline{AB}$ tal que $AE' = DE$.
- Neste ponto, trace um segmento paralelo ao lado $\overline{BC}$, que encontra o lado $\overline{AC}$ no ponto F'.

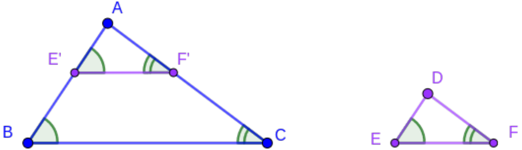


- Como são correspondentes, obtemos:

$$A\hat{E}'F' = \hat{B} \quad \text{e} \quad A\hat{F}'E' = \hat{C}. \tag{6}$$

Demonstração: Teorema 3

- Como $AE' = DE$, os triângulos $AE'F'$ e DEF são congruentes (LAA).



- Assim, $\hat{A} = \hat{D}$ e

$$AE' = DE \quad \text{e} \quad AF' = DF. \tag{7}$$

- Pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, obtemos

$$\frac{E'B}{AE'} = \frac{F'C}{AF'} \Rightarrow \frac{AE' + E'B}{AE'} = \frac{AF' + F'C}{AF'} \tag{8}$$

Demonstração: Teorema 3

- De (7) e (8), concluímos que

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}.$$

- Resta-nos mostrar que $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$.
    - Repita esse raciocínio, considerando agora um ponto D' sobre $\overline{CA}$ tal que $CD' = FD$. **(Exercício)**

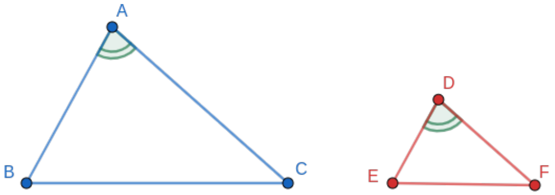
2º Caso: LAL

Teorema 4

Se dois triângulos têm um par de ângulos respectivamente congruentes e os lados que os formam proporcionais, então os triângulos são semelhantes.

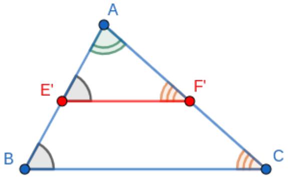
Demonstração:

- **Hipótese:**
  - $\hat{A} = \hat{D}$
  - $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$
- **Tese:**
  - $\hat{B} = \hat{E}$
  - $\hat{C} = \hat{F}$
  - $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$



Demonstração: Teorema 4

- Seja E' um ponto sobre $\overline{AB}$ tal que $AE' = DE$.
- Neste ponto, trace um segmento paralelo ao lado $\overline{BC}$, que encontra o lado $\overline{AC}$ no ponto F'.



- Como são correspondentes, temos que

$$A\hat{E}'F' = \hat{B} \tag{9}$$

$$A\hat{F}'E' = \hat{C} \tag{10}$$

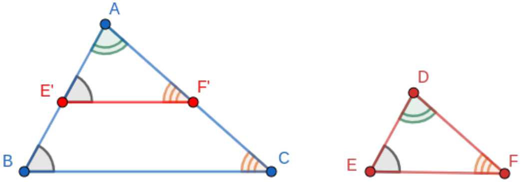
- Assim, os triângulos $AE'F'$ e ABC possuem dois pares de ângulos respectivamente congruentes e, pelo 1º caso (AA), esses triângulos são semelhantes.

Demonstração: Teorema 4

- Por hipótese, temos que
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \tag{11}$$
e acabamos de mostrar que
$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}. \tag{12}$$
- De (11) e (12), concluímos que
$$\frac{DE}{DF} = \frac{AB}{AC} = \frac{AE'}{AF'} \Rightarrow \frac{DE}{DF} = \frac{AE'}{AF'}.$$
- Como $DE = AE'$, segue que
$$\frac{DE}{DF} = \frac{AE'}{AF'} \Rightarrow \frac{AE'}{DF} = \frac{AE'}{AF'} \Rightarrow DF = AF'. \tag{13}$$

Demonstração: Teorema 4

- Portanto, os triângulos $AE'F'$ e DEF são congruentes (LAL).



- Usando a congruência acima, mostramos que

$$\hat{A} = \hat{D} \tag{14}$$

$$\hat{B} = \hat{E} \tag{15}$$

$$\hat{C} = \hat{F}. \tag{16}$$

Demonstração: Teorema 4

- Além disso, como $\triangle AE'F' \sim \triangle ABC$ e $\triangle AE'F' = \triangle DEF$, tem-se:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'} = \frac{AC}{DF}$$
$$\frac{AC}{DF} = \frac{AC}{AF'} = \frac{BC}{E'F'} = \frac{BC}{EF},$$

de onde segue que

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}. \tag{17}$$

- De (14)–(17), concluímos que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

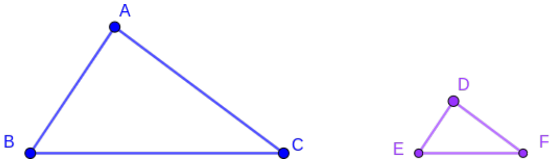
3º Caso: LLL

Teorema 5

Se os lados correspondentes de dois triângulos são proporcionais, então os triângulos são semelhantes.

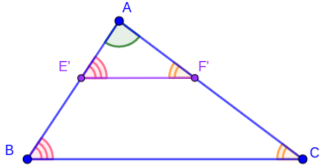
Demonstração:

- **Hipótese:**
  - $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$
- **Tese:**
  - $\hat{A} = \hat{D}$
  - $\hat{B} = \hat{E}$
  - $\hat{C} = \hat{F}$



Demonstração: Teorema 5

- Seja E' um ponto sobre $\overline{AB}$ tal que $AE' = DE$.
- Neste ponto, trace um segmento paralelo ao lado $\overline{BC}$, que encontra o lado $\overline{AC}$ no ponto F'.



- Como são correspondentes, temos que

$$A\hat{E}'F' = \hat{B} \tag{18}$$

$$A\hat{F}'E' = \hat{C}. \tag{19}$$

Demonstração: Teorema 5

- Assim, os triângulos $AE'F'$ e ABC possuem dois pares de ângulos respectivamente congruentes e, pelo 1º caso (AA), esses triângulos são semelhantes.
- Assim,

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'} = \frac{BC}{E'F'}. \tag{20}$$

Demonstração: Teorema 5

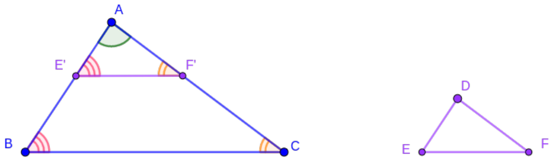
- Como $AE' = DE$, de (20) temos

$$\begin{aligned} \frac{AC}{DF} &= \frac{AB}{DE} = \frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'} \\ \Rightarrow \frac{AC}{DF} &= \frac{AC}{AF'} \\ \Rightarrow DF &= AF' \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{BC}{EF} &= \frac{AB}{DE} = \frac{AB}{AE'} = \frac{BC}{E'F'} \\ \Rightarrow \frac{BC}{EF} &= \frac{BC}{E'F'} \\ \Rightarrow EF &= E'F'. \end{aligned}$$

Demonstração: Teorema 5



- Com isso, $\triangle DEF = \triangle AE'F'$ (LLL).
- Pela congruência acima, usando os ângulos opostos à lados congruentes, obtemos que
  - $\hat{A} = \hat{D}$;
  - $\hat{B} = A\hat{E}'F' = \hat{E}$;
  - $\hat{C} = A\hat{F}'E' = \hat{F}$;

  de onde segue que, junto à hipótese de que $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Referencias I