

Álgebra Linear - Aula

Título

Profª Dra. Karla Lima

1 **Combinação Linear**

2 **Conjunto de Geradores**

3 **Base de um Espaço Vetorial**

4 **Exercícios**

Combinação Linear

Formar um vetor novo a partir de outros vetores, usando multiplicações por escalar e somas de vetores.

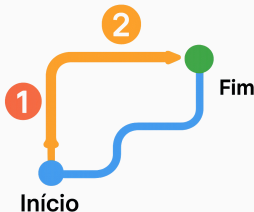
Combinação Linear

- **Receita de cozinha:** Imagine que cada vetor é um ingrediente (farinha, leite, ovo).
- A combinação linear é como escolher quanto de cada ingrediente você coloca e depois misturar.
- O prato final (bolo, pão, panqueca) é o novo vetor que surge da combinação.

- **Música:** Cada nota musical é um vetor.
- Você pode tocar uma nota mais forte (multiplicar por um número) ou mais fraca.
- Quando junta as notas, surge uma melodia: o vetor novo formado pela combinação linear.

Combinação Linear

- **Caminhos num mapa:** Cada vetor é um caminho básico (ir para o norte, ir para o leste, ir para o sul, ir para o oeste).
- Se você anda 2 passos para o norte e 3 passos para o leste, você formou um novo caminho.
- Esse novo caminho é a combinação linear dos movimentos básicos.



Definição

Dizemos que um vetor w num espaço vetorial V é uma **combinação linear** dos vetores v_1, v_2, \dots, v_n em V se w puder ser expresso na forma

$$w = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

em que a_1, a_2, \dots, a_n são escalares. Esses escalares são denominados **coeficientes** da combinação linear.

Combinação Linear - Exemplos

Exemplo

- a) *Mostre que qualquer vetor de \mathbb{R}^2 pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ e $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$.*
- b) *Mostre que o vetor $\mathbf{w} = (9, 2, 7)$ é uma combinação linear de $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$ e $\mathbf{v} = (6, 4, 2)$.*
- c) *Mostre que $\mathbf{z} = (4, -1, 8)$ não é uma combinação linear de \mathbf{u} e \mathbf{v} dados no item b).*

Independência Linear

Um conjunto de vetores é linearmente independente quando nenhum deles pode ser construído a partir de combinações dos outros usando multiplicações por números e somas de vetores.

Cores primárias:

- **Vermelho**, **Azul** e **Amarelo** são cores primárias.
- Nenhuma pode ser criada a partir das outras duas.
- Portanto, são **linearmente independentes**.

Exemplo de dependência:

- A cor **Roxo** pode ser criada misturando **Vermelho** e **Azul**.
- Logo, o conjunto {Vermelho, Azul, Amarelo, Roxo} é **linearmente dependente**.

Exemplo de dependência:

- A cor **Roxo** pode ser criada misturando **Vermelho** e **Azul**.
- Logo, o conjunto {Vermelho, Azul, Amarelo, Roxo} é **linearmente dependente**.

Definição

Um conjunto de vetores é linearmente dependente quando pelo menos um deles pode ser obtido combinando os outros, por meio de multiplicações por números e somas de vetores.

Definição

Se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ for um conjunto não vazio de vetores num espaço vetorial V , então a equação vetorial

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

tem uma solução, pelo menos, a saber,

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_r = 0.$$

Dizemos que essa é a **solução trivial**.

1. Se essa for a única solução, dizemos que S é um **conjunto linearmente independente**.
2. Se existem outras soluções além da trivial, dizemos que S é um **conjunto linearmente dependente**.

Exemplo

Vamos verificar a independência linear dos conjuntos abaixo.

1. $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$
2. $S = \{(1, -2), (0, 1), (3, 2)\}$
3. $S = \{1, x, x^2, x^3\}$

Conjunto de Geradores

Será que todo vetor pode ser construído a partir de outros?

Definição

Se $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n\}$ é um conjunto não vazio, denotamos por

$$\text{ger}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n\} \quad \text{ou} \quad \text{ger}(S)$$

o conjunto gerado por todas as combinações lineares possíveis dos elementos de S .

Exemplo

- a) *O conjunto dos vetores canônicos $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ gera o espaço \mathbb{R}^3 .*
- b) *O conjunto dos vetores $\{(2, 1, 0), (-1, 0, 0), (2, 0, 0)\}$ NÃO gera o espaço \mathbb{R}^3 .*

Exemplo

- a) *O conjunto dos vetores canônicos $\{(1, 0), (0, 1)\}$ gera o espaço \mathbb{R}^2 .*
- b) *O conjunto de vetores $\{(2, 1), (-1, 0), (0, 0)\}$ gera o espaço \mathbb{R}^2 .*

Exemplo

O conjunto dos vetores $\{1, x, x^2, x^3\}$ gera o espaço P_3 , dos polinômios de grau menor ou igual a 3.

Base de um Espaço Vetorial

É como um conjunto mínimo de peças de Lego: com elas, podemos construir qualquer elemento do espaço apenas combinando-as de diferentes formas.

Definição

Se V for um espaço vetorial qualquer e $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ for um conjunto finito de vetores em V , dizemos que S é uma **base** de V e valerem as duas condições a seguir.

- a) S é linearmente independente.
- b) S gera V

Exemplo

Quais das afirmações abaixo são verdadeiras?

- a) *O conjunto dos vetores canônicos $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base para o espaço \mathbb{R}^3 .*
- b) *O conjunto dos vetores $\{(2, 1, 0), (-1, 0, 0), (2, 0, 0)\}$ é uma base para o espaço \mathbb{R}^3 .*
- c) *O conjunto de vetores $\{(2, 1), (-1, 0), (0, 0)\}$ é uma base para o espaço \mathbb{R}^2 .*
- d) *O conjunto de vetores $\{(2, 1), (-1, 0)\}$ é uma base para o espaço \mathbb{R}^2 .*
- e) *O conjunto dos vetores $\{1, x, x^2, x^3\}$ é uma base para o espaço P_3 , dos polinômios de grau menor ou igual a 3.*

1. Faça os exercícios da seção 4.2 do livro Álgebra Linear com Aplicações, de Howard Anton and Chris Rorres: 11 ao 13 e do 16 ao 18 e 20.

- [1] Howard Anton and Chris Rorres.
Álgebra Linear com Aplicações.
Bookman, Porto Alegre, 10 edition, 2012.
Tradução técnica: Claus Ivo Doering. Editado também como livro impresso em 2012.
Recurso eletrônico.