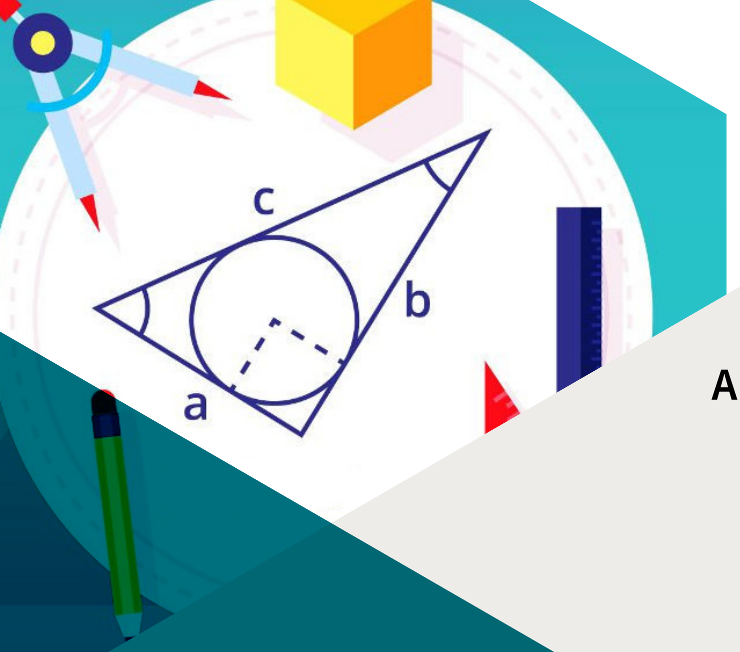


Introdução ao Cálculo

Aula 08: Funções Exponenciais.

Karla Lima

01/03/2023

Sumário

Bibliografia

Bibliografia da Aula 08

- Fundamentos da Matemática Elementar: 2 (Click para baixar)

Motivação e Propriedades

Meia-vida

- **Meia-vida** é o tempo necessário para desintegrar a metade da massa de um composto químico.
- Por exemplo, se tivermos 100 kg de um material, cuja meia-vida é de 100 anos, depois desses 100 anos, teremos 50 kg deste material. Mais 100 anos e teremos 25 kg, mais 100 anos e teremos 12,5 kg, mais 100 anos 6,25 kg, mais 100 anos 3,125 kg, mais 100 anos 1,5625 kg, mais 100 anos 0,78125 kg e assim sucessivamente.
- No caso do carbono-14 a meia-vida é de 5.730 anos, ou seja, este é o tempo necessário para uma determinada massa deste isótopo instável decair para a metade da sua massa, transformando-se em nitrogênio-14 pela emissão de uma partícula beta.
- Esta medida é utilizada para a datação de fósseis e elementos químicos radioativos.

Meia-vida

Exemplo 1

A concentração de alguns medicamentos no organismo está relacionada com a meia-vida. Ou seja, o tempo necessário para que a quantidade inicial do medicamento no organismo seja reduzida pela metade. A meia-vida do antibiótico amoxicilina é de 1 hora. Sabendo que um paciente ingeriu 1000mg desse medicamento às 7 horas, qual é, aproximadamente, a concentração desse medicamento no organismo desse paciente, às 16 horas do mesmo dia?

Meia-vida

Às 8 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\dfrac{1000}{2} = 500\text{mg}$:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	0	0	0	0	0	0	0	0

Meia-vida

Às 8 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\frac{1000}{2} = 500\text{mg}$:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	0	0	0	0	0	0	0	0

Às 9 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\frac{\frac{1000}{2}}{2} = 250\text{mg}$:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	250	0	0	0	0	0	0	0

Meia-vida

Às 10 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\frac{\frac{1000}{2^2}}{2} = 125$mg:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	250	125	0	0	0	0	0	0

Meia-vida

Às 10 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\dfrac{\frac{1000}{2^2}}{2} = 125\text{mg}$:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	250	125	0	0	0	0	0	0

Às 11 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\dfrac{\frac{1000}{2^3}}{2} = 62,5\text{mg}$:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	250	125	62, 5	0	0	0	0	

Meia-vida

Às 12 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\frac{\frac{1000}{2^4}}{2} = 31,25$mg:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	250	125	$62,5$	$31,25$	0	0	0	0

Meia-vida

Às 12 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\dfrac{\frac{1000}{2^4}}{2} = 31,25\text{mg}$:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	250	125	62, 5	31, 25	0	0	0	0

Às 13 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\dfrac{\frac{1000}{2^5}}{2} = 15,625\text{mg}$:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	250	125	62, 5	31, 25	15, 625	0	0	0

Meia-vida

Às 14 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\dfrac{\frac{1000}{2^6}}{2} = 7,8125\text{mg}$:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	250	125	62, 5	31, 25	15, 625	7, 8125	0	0

Meia-vida

Às 14 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\dfrac{\frac{1000}{2^6}}{2} = 7,8125$mg:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	250	125	62, 5	31, 25	15, 625	7, 8125	0	0

Às 15 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\dfrac{\frac{1000}{2^7}}{2} = 3,90625$mg:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	250	125	62, 5	31, 25	15, 625	7, 8125	3, 90625	0

Meia-vida

Às 16 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\dfrac{\frac{1000}{2^8}}{2} = 1,953125\text{mg}$:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	250	125	$62,5$	$31,25$	$15,625$	$7,8125$	$3,90625$	$1,953125$

Portanto, às 16 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de aproximadamente $1,95\text{mg}$.

Meia-vida

Observe que:

- A diminuição inicial é bem significativa;
- A medida que a quantidade se aproxima de zero, a diminuição é mais lenta.

Meia-vida

Ainda,

- Após a primeira hora a quantidade é dada pela expressão $\dfrac{1000}{2}$;
- Após a segunda hora a quantidade é dada pela expressão $\dfrac{1000}{2^2}$;
- Após a terceira hora a quantidade é dada pela expressão $\dfrac{1000}{2^3}$;
- Assim por diante, até que, após 9 horas, a quantidade é dada pela expressão $\dfrac{1000}{2^9}$.
- No geral, após t horas, a quantidade é dada pela expressão $\dfrac{1000}{2^t} = 1000 * 2^{-t}$.

Meia-vida

Assim, se quisermos saber a quantidade de medicamento no organismo após 24 horas, basta calcular

$$1000 * 2^{-24} = \frac{1000}{16777216} \approx 0,00006\text{mg}.$$

Exercício

Exercício 1

A meia-vida de certa substância radioativa é igual a 14 dias. Existem 6,6 gramas presentes inicialmente.

a) *Expresse a quantidade da substância remanescente como uma função do tempo t, em dias.*
b) *Quando existirá menos de 1 grama?*

A Lenda do Xadrez [1]

- O primeiro registro do problema do trigo num tabuleiro de xadrez é de 1256, do historiador muçulmano Ibn Khallikan, mas é provável que reconte uma versão anterior do século V.
- Segundo a história, a invenção do xadrez é creditada a um brâmane de uma corte indiana, que, atendendo a um pedido do rei, inventou o jogo para demonstrar o valor da inteligência. O rei, encantado com o invento, ofereceu ao brâmane a escolha de uma recompensa. De acordo com essa lenda, o inventor do jogo de xadrez pediu ao rei que a recompensa fosse paga em grãos de arroz da seguinte maneira: 1 grão para a casa 1 do tabuleiro, 2 grãos para a casa 2, 4 para a casa 3, 8 para a casa 4 e assim sucessivamente. Ou seja, a quantidade de grãos para cada casa do tabuleiro correspondia ao dobro da quantidade da casa imediatamente anterior.

A Lenda do Xadrez [1]

- Perplexo ante o que parecia ser uma magra recompensa, o rei ordenou que os grãos fossem contados.
- Vamos fazer alguns cálculos:
  - Quantos grãos contém o oitavo quadrado?

A Lenda do Xadrez [1]

- Perplexo ante o que parecia ser uma magra recompensa, o rei ordenou que os grãos fossem contados.
- Vamos fazer alguns cálculos:
  - Quantos grãos contém o oitavo quadrado?R:128.

A Lenda do Xadrez [1]

- Perplexo ante o que parecia ser uma magra recompensa, o rei ordenou que os grãos fossem contados.
- Vamos fazer alguns cálculos:
  - Quantos grãos contém o oitavo quadrado?R:128.
  - E no trigésimo segundo, na primeira metade do tabuleiro? E no trigésimo terceiro?

A Lenda do Xadrez [1]

- Perplexo ante o que parecia ser uma magra recompensa, o rei ordenou que os grãos fossem contados.
- Vamos fazer alguns cálculos:
  - Quantos grãos contém o oitavo quadrado?R:128.
  - E no trigésimo segundo, na primeira metade do tabuleiro? E no trigésimo terceiro?R: Aproximadamente 2 bilhões e 4 bilhões, respectivamente.

A Lenda do Xadrez [1]

- Perplexo ante o que parecia ser uma magra recompensa, o rei ordenou que os grãos fossem contados.
- Vamos fazer alguns cálculos:
  - Quantos grãos contém o oitavo quadrado?R:128.
  - E no trigésimo segundo, na primeira metade do tabuleiro? E no trigésimo terceiro?R: Aproximadamente 2 bilhões e 4 bilhões, respectivamente.
  - Como podemos calcular o total de grãos?

A Lenda do Xadrez [1]

- Perplexo ante o que parecia ser uma magra recompensa, o rei ordenou que os grãos fossem contados.
- Vamos fazer alguns cálculos:
  - Quantos grãos contém o oitavo quadrado?R:128.
  - E no trigésimo segundo, na primeira metade do tabuleiro? E no trigésimo terceiro?R: Aproximadamente 2 bilhões e 4 bilhões, respectivamente.
  - Como podemos calcular o total de grãos? R: Para cada n-ésimo quadrado, tem-se 2^n grãos. No Total, seriam $1 + 2 + \cdots + 2^{64} \approx 18 * 10^{18}$ grãos .

A Lenda do Xadrez [1]

- Perplexo ante o que parecia ser uma magra recompensa, o rei ordenou que os grãos fossem contados.
- Vamos fazer alguns cálculos:
  - Quantos grãos contém o oitavo quadrado?R:128.
  - E no trigésimo segundo, na primeira metade do tabuleiro? E no trigésimo terceiro?R: Aproximadamente 2 bilhões e 4 bilhões, respectivamente.
  - Como podemos calcular o total de grãos? R: Para cada n-ésimo quadrado, tem-se 2^n grãos. No Total, seriam $1 + 2 + \cdots + 2^{64} \approx 18 * 10^{18}$ grãos .
- A história tem dois finais alternativos: num, o rei torna o brâmane seu conselheiro-mor; no outro, ele é executado por fazer o rei parecer tolo.

Tabela com os valores

72 quatrilhões	144 quatrilhões	288 quatrilhões	600 quatrilhões	1,2 quintilhão	2,3 quintilhões	4,6 quintilhões	9,2 quintilhões
281 trilhões	562 trilhões	1,1 quatrilhão	2,3 quatrilhões	4,5 quatrilhões	9 quatrilhões	18 quatrilhões	36 quatrilhões
1 trilhão	2 trilhões	4 trilhões	8 trilhões	17 trilhões	35 trilhões	70 trilhões	140 trilhões
4 bilhões	8 bilhões	16 bilhões	33 bilhões	66 bilhões	131 bilhões	262 bilhões	524 bilhões
16 milhões	32 milhões	64 milhões	128 milhões	256 milhões	512 milhões	1 bilhão	2 bilhão
65.536	131.072	262.144	524.288	1 milhão	2 milhões	4 milhões	8 milhões
256	512	1.024	2.048	4.096	8.192	16.384	32.768
1	2	4	8	16	32	64	128

A Segunda Metade do Tabuleiro de Xadrez [1]

- Pensadores recentes usaram o problema do tabuleiro de xadrez como metáfora da taxa de mudança em tecnologia nos últimos anos.
- Previu-se que, como o trigo na segunda metade do tabuleiro, a taxa de desenvolvimento tecnológico logo aumentaria de modo descontrolado, seguindo o modelo de duplicação do crescimento anterior a cada passo adiante.
- Essa taxa de crescimento levaria por fim à singularidade, que marca o ponto em que a habilidade cognitiva da inteligência artificial ultrapassará a dos seres humanos!

Exercício

Exercício 2

O número de bactérias em uma cultura é contado como 400 no começo de um experimento. Se o número de bactérias dobrar a cada 3 horas, determine:

a) *A fórmula que descreve o número de bactérias em função do tempo t, dado em horas.*

b) *O número de bactérias presentes na cultura após 24 horas.*

A Função Exponencial

Propriedades dos Expoentes [2]

Antes de definirmos uma função exponencial, vamos recordar algumas propriedades das potências a^x, onde a é a base da potência e x é o seu expoente.

Teorema 1

Sejam a e b números reais positivos $(a, b > 0)$. Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\text{i) } a^x a^y = a^{x+y} \qquad \text{iv) } a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$\text{ii) } (a^x)^y = a^{xy} \qquad \text{v) } \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\text{iii) } a^x b^x = (ab)^x \qquad \text{vi) } \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

Propriedades dos Expoentes

Obs: Como estamos enunciando propriedades que valem para quaisquer números reais x, y, devemos tomar a base positiva, para que a operação a^x seja sempre possível. Por exemplo, para números x negativos, 0^x não está definido. Então tais propriedades não valem nesse caso. Do mesmo modo, se $x = \frac{1}{2n}$, com $n \in \mathbb{N}^*$, a operação a^x não está definida quando $a < 0$, pois não há raiz par de números negativos.

Exemplo

Exemplo 2

Calcule $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[5]{128}.$

Não podemos efetuar o produto diretamente, pois as raízes são diferentes. ao realizar o produto de duas potências devemos ter a mesma base ou o mesmo expoente. Neste caso, não temos os mesmos expoentes, então devemos tentar escrever as potências de modo que possuam a mesma base.

Exemplo

Lembrando que $\sqrt[3]{16} = 16^{\frac{1}{3}}$ e $\sqrt[5]{128} = 128^{\frac{1}{5}}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{16} &= 16^{\frac{1}{3}} \\ &= (2^4)^{\frac{1}{3}} \\ &= 2^{4\frac{1}{3}} \\ &= 2^{\frac{4}{3}} \quad \leftarrow ii) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \sqrt[5]{128} &= 128^{\frac{1}{5}} \\ &= (2^7)^{\frac{1}{5}} \\ &= 2^{7\frac{1}{5}} \\ &= 2^{\frac{7}{5}} \quad \leftarrow ii) \end{aligned}$$

onde a última igualdade das duas equações são obtidas através da propriedade ii).

Exemplo

Assim,

$$
\begin{aligned}
\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[5]{128} &= 2^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{\frac{7}{5}} \\
&= 2^{\frac{4}{3}+\frac{7}{5}} \qquad {\color{red}\leftarrow i)} \\
&= 2^{\frac{20+21}{15}} \\
&= 2^{\frac{41}{15}} \\
&= \sqrt[15]{2^{41}}.
\end{aligned}
$$

Definição

Definição 1

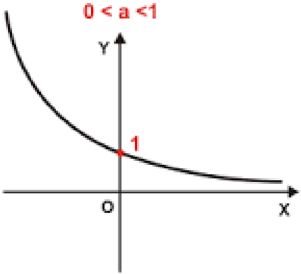
*Seja a um número real positivo, com $a \neq 1$. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, dada por $f(x) = a^x$, é chamada **função exponencial** de base a.*

Se $a = 1$, temos que $f(x) = 1^x = 1$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Portanto, f é uma função constante e não uma função exponencial.

Obs: Mais adiante, veremos que a exponencial é definida por ter sua taxa de variação instantânea proporcional à própria função. A função constante não se encaixa nesse perfil.

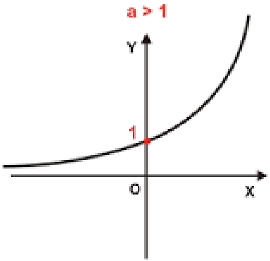
Propriedades das Funções Exponenciais

1. Como estamos calculando potências de um número real positivo a, $f(x)$ será sempre um número real positivo $(f(x) > 0)$. Logo, o gráfico de f está todo acima do eixo x, nunca o tocando.
2. Se a base a for tal que $0 < a < 1$, então f é decrescente. Seu gráfico é dado abaixo:



Propriedades das Funções Exponenciais

3. Se a base a for tal que $1 < a$, então f é crescente. Seu gráfico é dado abaixo:



Observe que o gráfico de f toca o eixo y quando $x = 0$ e, portanto, $y = f(0) = a^0 = 1$.

Propriedades das Funções Exponenciais

4. As funções exponenciais são **injetivas**. Portanto,

$$a^x = a^y \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

Como a imagem de uma função exponencial é o conjunto

$$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\},$$

temos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, tal que $f(x) = a^x$, é uma bijeção.

Exemplo

Exemplo 3

Identificando uma função exponencial:

a) $f(x) = 3^x$

Exemplo

Exemplo 3

Identificando uma função exponencial:

a) $f(x) = 3^x$ *é uma função exponencial, com base* $a = 3$.

Exemplo

Exemplo 3

Identificando uma função exponencial:

a) $f(x) = 3^x$ *é uma função exponencial, com base* $a = 3$.

b) $g(x) = x^4$

Exemplo

Exemplo 3

Identificando uma função exponencial:

a) $f(x) = 3^x$ *é uma função exponencial, com base* $a = 3$.

b) $g(x) = x^4$ *não é uma função exponencial, pois a variável está na base e não no expoente.*

Exemplo

Exemplo 3

Identificando uma função exponencial:

a) $f(x) = 3^x$ *é uma função exponencial, com base* $a = 3$.

b) $g(x) = x^4$ *não é uma função exponencial, pois a variável está na base e não no expoente.*

c) $h(x) = 6^\pi$

Exemplo

Exemplo 3

Identificando uma função exponencial:

a) $f(x) = 3^x$ *é uma função exponencial, com base* $a = 3$.
b) $g(x) = x^4$ *não é uma função exponencial, pois a variável está na base e não no expoente.*
c) $h(x) = 6^\pi$ *não é uma função exponencial, pois o expoente é uma constante.*

Exemplo

Exemplo 3

Identificando uma função exponencial:

a) $f(x) = 3^x$ *é uma função exponencial, com base* $a = 3$.

b) $g(x) = x^4$ *não é uma função exponencial, pois a variável está na base e não no expoente.*

c) $h(x) = 6^\pi$ *não é uma função exponencial, pois o expoente é uma constante.*

d) $i(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Exemplo

Exemplo 3

Identificando uma função exponencial:

a) $f(x) = 3^x$ *é uma função exponencial, com base* $a = 3$.

b) $g(x) = x^4$ *não é uma função exponencial, pois a variável está na base e não no expoente.*

c) $h(x) = 6^{\pi}$ *não é uma função exponencial, pois o expoente é uma constante.*

d) $i(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ *é uma função exponencial, com base* $a = \frac{1}{2}$.

O Número de Euler

Um Número Singular

- Lembre-se, uma **constante** matemática é um número significativo e **bem-definido.** Sua magnitude nunca varia.
- A constante e $(2,718\ldots)$ tem **propriedades especiais.**
- É irracional (não pode ser expresso pela razão entre dois inteiros) e transcendente (não é raiz de nenhuma equação polinomial, com coeficientes inteiros).

Um Número Singular

- Tornou-se conhecido no século XVII, quando os logaritmos foram inventados para ajudar a simplificar cálculos complexos.
- Logaritmos na base e foram chamados de **logaritmos naturais**, pois podem ser usados para descrever matematicamente processos da natureza.
- O matemático suíço Bernoulli usou o número $2,718\ldots$ para calcular juros compostos, mas foi Euler que primeiro o chamou de número e.

O Número de Euler

Definição 2

O número de Euler e também é chamado de ***base exponencial natural****. Ele é obtido ao fazermos n tender ao infinito na expressão* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. *Matematicamente, escrevemos*

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

O resultado é um número decimal com infinitas casas decimais, mas não periódicas. Logo, e é um número irracional com

$$e \approx 2,718281828459045...$$

Juros Compostos

Se juros são pagos de forma composta, n vezes por ano, a uma taxa de juros anual r, então, após t anos, uma quantia inicial P_0 aumenta para

$$P(t) = P_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt},$$

que é obtida a partir da função exponencial $\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$. As constantes P_0, r e n são dadas nos problemas propostos.

Juros Compostos

Exemplo 4

Considere uma conta bancária que inicie com $\mathrm{R}\$8000,00$ *e que receba* 5% *de juros anuais, compostos, doze vezes por ano. Quanto haverá, aproximadamente, na conta bancária após três anos?*

Nesse exemplo, temos $P = 8000$, $r = 0,05$ *e* $n = 12$. *Assim, após três anos, haverá*

$$\begin{aligned} P(3) &= 8000\left(1 + \frac{0,05}{12}\right)^{12\cdot 3} \\ &\approx 9291,8, \end{aligned}$$

ou seja, aproximadamente $\mathrm{R}\$9291,80$.

Juro Compostos: outro exemplo

Juros compostos rendem um valor total maior.

	1 ano, taxa de juros de 100%	6 meses, taxa de juros de 50%	3 meses, taxa de juros de 25%
Janeiro	**depósito principal de R$ 10**	**depósito principal de R$ 10**	**depósito principal de R$ 10**
Fevereiro			
Março			
Abril			R$ 10 × 0,25 = R$ 2,50 R$ 10 + R$ 2,50 = **R$ 12,50**
Maio			
Junho			
Julho		R$ 10 × 0,5 = R$ 5 R$ 10 + R$ 5 = **R$ 15**	R$ 12,50 × 0,25 = R$ 3,125 R$ 12,50 + R$ 3,125 = **R$ 15,625**
Agosto			
Setembro			
Outubro			R$ 15,625 × 0,25 = R$ 3,906 R$ 15,625 + R$ 3,906 = **R$ 19,531**
Novembro			
Dezembro			
Janeiro	R$ 10 × 1 = R$ 10 R$ 10 + R$ 10 = **R$ 20**	R$ 15 × 0,5 = R$ 7,50 R$ 15 + R$ 7,50 = **R$ 22,50**	R$ 19,531 × 0,25 = R$ 4,883 R$ 19,531 + R$ 4,883 = **R$ 24,41**

Exercícios

Exercício

Exercício 3

Seja a função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, *definida por* $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

1. *A função f é crescente ou decrescente?*
2. *Para que valores de x tem-se* $\frac{1}{128} < f(x)$?
3. *Para qual valor de x tem-se* $f(x) = 32$?

Exercício

Exercício 4

Uma certa quantia de dinheiro P_0 *é investida a uma taxa anual de juros de* $8,0\%$*, capitalizados bimestralmente (a cada 2 meses).*

1. *Quantos anos (com aproximação na ordem de décimos de ano) levaria para o montante inicial quadriplicar?*
2. *Se* $P_0 = 10.000,00$ *reais, quanto haverá, aproximadamente, na conta bancária após 1 ano e 6 meses?*

Referencias I

Vários.
O livro da matemática.
GLOBO LIVROS, 2020.

G. Iezzi, O. Dolce, and C. Murakami.
Fundamentos de matemática elementar, 2: logaritmos.
Atual, 2013.