CÁLCULO II

Técnicas de Integração

Frações Parciais

Karla Lima

Sumário

Integração de Funções Racionais

Introdução

Levando as frações $\frac{2}{x-1}$ e $\frac{1}{x+2}$ a um denominador comum, obtemos

$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{2(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+5}{x^2+x-2}$$

Revertendo o procedimento, veremos como integrar a função no lado direito dessa equação, usando o método da substituição:

$$\begin{aligned}\int \frac{2(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)}\,dx &= \int \frac{2}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x+2}\,dx \\ &= 2\ln|x-1| - \ln|x+2| + C\end{aligned}$$

Quando funciona?

É possível expressar uma função racional $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ como uma soma de frações mais simples, desde que o grau de P seja menor que o grau de Q.

Etapa Preliminar

Se o grau de P for maior que o de Q, devemos fazer uma etapa preliminar dividindo P por Q, até o resto $R(x)$ ser obtido, com grau menor que o de Q:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

onde S e R também são polinômios.

Exemplo[1]

Exemplo 1

Encontre $\displaystyle\int \frac{x^3 + x}{x - 1}\, dx.$

Caso I: fatores lineares distintos

Caso I

Suponha que o denominador $Q(x)$ pode ser escrito como um produto de **fatores lineares distintos**:

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\cdots(a_1k + b_k).$$

Nesse caso, existem constantes $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tais que

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}.$$

Essas constantes podem ser determinadas como nos exemplos a seguir.

Exemplo [2, 1]

Exemplo 2

Calcule $\displaystyle\int \frac{2x+4}{x^2-2x}\,dx.$

Exemplo 3

Calcule $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x-2}\,dx.$

Exemplo 4

Calcule $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\,dx.$

Caso II: fatores lineares, alguns repetidos

Caso II

Suponha que o fator linear $(a_1x + b_1)$ seja repetido r vezes:

$$Q(x) = (a_1x + b_1)^r(a_2x + b_2)\cdots(a_1k + b_k).$$

Em vez de um único termo $\frac{A_1}{a_1x+b_1}$, usamos

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{a_1x + b_1} + \frac{A_{12}}{(a_1x + b_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1r}}{(a_1x + b_1)^r} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}.$$

Exemplo [2, 1]

Exemplo 5

Calcule $\displaystyle\int \frac{2x+4}{x^3-2x^2}\,dx.$

Exemplo 6

Calcule $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+2)^3}\,dx.$

Exemplo 7

Calcule $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}\,dx.$

Caso III: fatores quadráticos irredutíveis

Caso III

Se $Q(x)$ tem o fator $(ax^2 + bx + c)^m$, onde $b^2 - 4ac < 0$, o termo não linear terá a forma

$$\frac{A_1 x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2 x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots \frac{A_m x + B_m}{(ax^2 + bx + c)^m}.$$

Exemplo [2, 1]

Exemplo 8

Calcule $\displaystyle\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx.$

Exemplo 9

Calcule $\displaystyle\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3}\,dx.$

Exemplo 10

Calcule $\displaystyle\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2}\,dx.$

Referencias I

J. Stewart.
Calculo: volume 1.
Pioneira Thomson Learning, 2006.

H. Anton, I. Bivens, and S. Davis.
Cálculo - Volume I - 10.ed.
Bookman Editora, 2014.