

Aula de Exercícios 01: Espaços e Subespaços Vetoriais, Combinação Linear e Independência Linear

5 de setembro de 2025

1. Mostre que os seguintes conjuntos de funções são subespaços de $\mathcal{F}(-\infty, \infty)$:

- (a) Todas as funções contínuas em $(-\infty, \infty)$.
- (b) Todas as funções deriváveis em $(-\infty, \infty)$.
- (c) Todas as funções deriváveis em $(-\infty, \infty)$ que satisfazem $f' + 2f = 0$.

2. Mostre que a matriz $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 16 \end{bmatrix}$ pode ser escrita como combinação linear das matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

3. Quais dos seguintes conjuntos de vetores são linearmente independentes:

- (a) $\{(-3, 0, 4), (5, -1, 2), (1, 1, 3)\}$
- (b) $\{6 - x^2, 1 + x + 4x^2\}$
- (c) $\{3 + x + x^2, 2 - x + 5x^2, 4 - 3x^2\}$
- (d) $\left\{ \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

4. Seja $S = \{(2, 2, 2), (0, 0, 3), (0, 1, 1)\}$.

- (a) O vetor de \mathbb{R}^3 $(2, 12, 19)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores de S ?
- (b) O espaço \mathbb{R}^3 é gerado pelo conjunto S ?

5. Seja M_{22} o espaço vetorial das matrizes de ordem 2×2 , com a adição entre matrizes e multiplicação por um escalar padrão.

- (a) Escreva o vetor nulo deste espaço.

- (b) Se um subespaço de M_{22} possui os vetores $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, ele deve conter a matriz identidade?
- (c) Descreva o subespaço de M_{22} gerado por A e B .
- (d) O subconjunto das matrizes 2×2 invertíveis é um subespaço vetorial de M_{22} ?