CÁLCULO II

Integrais

Introdução

Karla Lima

Sumário

Contexto Histórico

O Desenvolvimento do Cálculo

- Foi um dos avanços mais significativos da história da matemática.
- Com derivadas, podemos mostrar como:
  - a posição de um veículo muda com o tempo;
  - o brilho de uma fonte de luz diminui quando ela se afasta;
  - a posição dos olhos de uma pessoa se altera conforme seguem um objeto em movimento.
- Além disso, podemos determinar onde fenômenos alcançam o valor máximo ou mínimo e a que taxa passam de um a outro.

O Desenvolvimento do Cálculo

- Além das taxas de mudanças, outro aspecto importante do cálculo é o somatório, que evoluiu da necessidade de calcular áreas.
- O estudo de áreas e volumes foi formalizado no que se tornou conhecido como integração.
- O conceito de integral extrapolou o cálculo dessas duas grandezas, sendo aplicado em diversos tipos de problemas.

O Desenvolvimento do Cálculo

- Segundo a concepção de Arquimedes, o círculo tinha um número infinito de lados.
- Ele obteve uma área aproximada do círculo colocando-o dentro de polígonos de lados infinitesimalmente pequenos.
- Pensava-se que o resultado convergiria por fim para a área verdade.
- Esse método, chamado **método da exaustão**, foi adotado por Arquimedes (em 225 a.C.) para obter uma área aproximada do círculo.
- Ver o arquivo do Geogebra: area_circulo.ggb.

O Método da Exaustão

- A ideia do cálculo da área do círculo foi estendida ao cálculo de área de outras formas.
- Por exemplo, se uma região é delimitada pelo gráfico de uma função não negativa (≥ 0) e o eixo x, podemos usar a área de retângulos para aproximar (e calcular!) a área dada.
- Ver o arquivo do Geogebra: area_sob_grafico.ggb.
- Mas nem sempre o resultado de uma integral é uma área. Veja o exemplo de uma integral de uma função que toma valores negativos no intervalo dado: integral.ggb.

A Definição de Integral

Definição 1

*Se f é uma função **CONTÍNUA** definida em $a \leq x \leq b$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais*

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

*Sejam $x_0 = a, x_1, \cdots, x_n = b$ as extremidades desses subintervalos, escolhemos **pontos amostrais** $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$ de modo que $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Então a **integral definida de** f **de** a **até** b é*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x,$$

desde que esse limite exista.

Quando podemos garantir a existência?

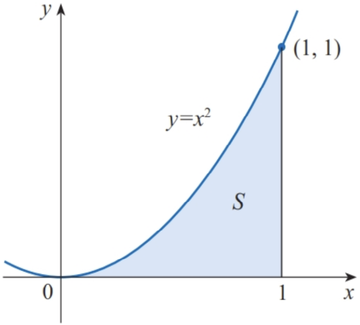
Teorema 1

Se f for contínua em $[a, b]$, ou tiver apenas um número finito de descontinuidades do tipo salto, então f é integrável em $[a, b]$; ou seja, $\int_a^b f(x)dx$ existe.

Aplicação da Definição

Exemplo 1

Use retângulos para calcular a área sob a parábola $y = x^2$ *de* 0 *até* 1.



O Desenvolvimento do Cálculo

- **Funções Elementares:** são, intuitivamente, aquelas que podem ser escritas como fórmulas explícitas, envolvendo apenas as operações elementares (soma, subtração, multiplicação, divisão e raiz) e um conjunto limitado de funções elementares, normalmente as funções polinomiais, trigonométricas, a exponencial e o logaritmo.
- A função

$$\cos(e^{x^3+1}) + \frac{\tan(ln(x^2+4))}{e^x}$$

  é uma função elementar.
- Já função erro

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

  não é uma função elementar.

O Desenvolvimento do Cálculo

- Embora estudemos o conceito de derivadas antes do de integrais, historicamente as integrais apareceram primeiro.
- A razão para essa inversão, deve-se ao fato de que calcular derivadas é muito mais simples do que calcular integrais.
- Com as regras de derivação e a regra da cadeia, podemos derivar qualquer função que envolva funções elementares na sua composição.
- Por exemplo, podemos derivar a função elementar $f(x) = e^{-x^2}$, obtendo outra função elementar:

$$f'(x) = e^{-x^2} * (-2x) = -2xe^{-2x}.$$

O Desenvolvimento do Cálculo

- Por outro lado, integrar $f(x) = e^{-x^2}$ com as técnicas básicas de integração e resultar em uma função novamente elementar é **IMPOSSÍVEL!**
- O resultado de uma integral definida envolvendo f resulta numa função não elementar (envolve a função erro).
- Já a integral Gaussiana, usada em estatística, tem seu valor conhecido:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

- Para resolver a integral acima, usa-se integração em mais de uma variável.

O Teorema Fundamental do Cálculo

- Calcular integrais através da definição formal, mostrou-se difícil e bastante trabalhoso.
- Lembra que derivar é algo mais simples?
- O **Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)**, que associa as operações de derivação e integração, é um dos resultados mais importantes da história da matemática, impactando a ciência com um todo.

O Teorema Fundamental do Cálculo

- Newton (1643 - 1727) e Leibniz (1646 - 1716) são considerados os ’pais’ do Cálculo, não por ter inventado a teoria e sim entendido a importância da relação entre derivada e integral (de ser quase que inversas).
- Eles usaram esta relação desenvolver o cálculo como um método sistemático.
- A partir do **TFC**, calcular integrais tornou-se muito mais simples, fazendo com que o cálculo se difundisse na ciência, permitindo avanços impossíveis até então.

Primitivas

Primitivas [1]

Definição 2

Uma função F é denominada uma ***primitiva*** *de f no intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para todo x em I.*

Primitivas [1]

Definição 2

*Uma função F é denominada uma **primitiva** de f no intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para todo x em I.*

Teorema 2

Se F for uma primitiva de f em um intervalo I, então a primitiva mais geral de f em I é

$$F(x) + C$$

em que C é uma constante arbitrária.

Obs: Você consegue entender porque não podemos dizer que a derivada e a integral são funções inversas, matematicamente?

Exercícios

Os exercícios deste texto estão disponíveis em Cálculo Volume I, J. Stewart. Faremos apenas os ímpares.

1-4 Determine uma primitiva da função.

1. (a) $f(x) = 6$ (b) $g(t) = 3t^2$

2. (a) $f(x) = 2x$ (b) $g(x) = -1/x^2$

3. (a) $h(q) = \cos q$ (b) $f(x) = e^x$

4. (a) $g(t) = 1/t$ (b) $r(\theta) = \sec^2\theta$

Exercícios

5. $f(x) = 4x + 7$

6. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

7. $f(x) = 2x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 5x$

8. $f(x) = 6x^5 - 8x^4 - 9x^2$

9. $f(x) = x(12x + 8)$

10. $f(x) = (x - 5)^2$

11. $g(x) = 4x^{-2/3} - 2x^{5/3}$

12. $h(z) = 3z^{0,8} + z^{-2,5}$

13. $f(x) = 3\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}$

14. $g(x) = \sqrt{x}\,(2 - x + 6x^2)$

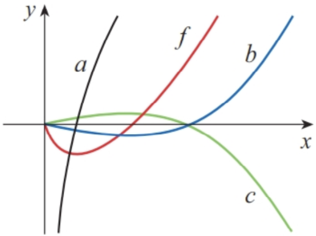
15. $f(t) = \dfrac{2t - 4 + 3\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$

16. $f(x) = \sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{x}$

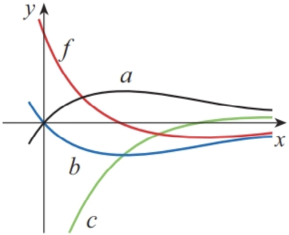
Exercícios

57-58 O gráfico de uma função f é dado. Qual gráfico é uma primitiva de f e por quê?

57.



58.



Exercícios

81. Qual aceleração constante é necessária para aumentar a velocidade de um carro a 50 km/h para 80 km/h em 5 segundos?

O Teorema Fundamental do Cálculo

Parte 1

Teorema 3

O Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 1: *Se f for* ***CONTÍNUA*** *em $[a, b]$, então a função g definida por*

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad a \leq x \leq b$$

é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) e $g'(x) = f(x)$.

Exercícios

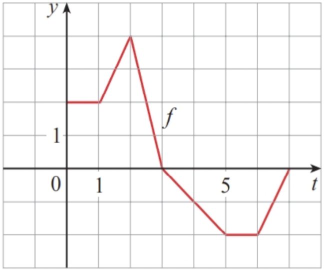
3. Seja $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, onde f é a função cujo gráfico é mostrado.

(a) Calcule $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$ e $g(6)$.

(b) Em que intervalos g está crescendo?

(c) Onde g tem um valor máximo?

(d) Faça um esboço do gráfico de g.



Exercícios

9-20 Use a Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo para encontrar a derivada da função.

9. $g(x) = \int_0^x \sqrt{t + t^3}\, dt$

10. $g(x) = \int_1^x \ln(1 + t^2)\, dt$

Exercícios

11. $g(w)=\int_0^w \operatorname{sen}(1+t^3)\,dt$

12. $h(u)=\int_0^u \dfrac{\sqrt{t}}{t+1}\,dt$

13. $F(x)=\int_x^0 \sqrt{1+\sec t}\,dt$

$\left[Dica: \int_x^0 \sqrt{1+\sec t}\,dt=-\int_0^x \sqrt{1+\sec t}\,dt\right]$

14. $A(w)=\int_w^{-1} e^{t+t^2}\,dt$

15. $h(x)=\int_1^{e^x} \ln t\,dt$

16. $h(x)=\int_1^{\sqrt{x}} \dfrac{z^2}{z^4+1}\,dz$

17. $y=\int_1^{3x+2} \dfrac{t}{1+t^3}\,dt$

18. $y=\int_0^{\operatorname{tg} x} e^{-t^2}\,dt$

19. $y=\int_{\sqrt{x}}^{\pi/4} \theta\ \operatorname{tg}\theta\ d\theta$

20. $y=\int_{1/x}^{4} \sqrt{1+\dfrac{1}{t}}\,dt$

Parte 1

- Essa parte do **TFC** diz apenas que toda integral indefinida de f é uma primitiva dessa mesma função:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

- A pergunta que fica é: vale a recíproca? Toda primitiva de f é uma integral indefinida de f?

Parte 1

- Essa parte do **TFC** diz apenas que toda integral indefinida de f é uma primitiva dessa mesma função:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

- A pergunta que fica é: vale a recíproca? Toda primitiva de f é uma integral indefinida de f? Nesses termos, a resposta é não.

Parte 1

- Por exemplo, $F(x) = 1$ é uma primitiva de $f(x) = 0$. Porém,

$$\int_a^x F'(t)\,dt = \int_a^x 0\,dt = 0 \neq 1 = F(x).$$

Parte 1

- Por exemplo, $F(x) = 1$ é uma primitiva de $f(x) = 0$. Porém,

$$\int_a^x F'(t)\,dt = \int_a^x 0\,dt = 0 \neq 1 = F(x).$$

- Porém, há sim uma relação entre a primitiva de f e a função f, mas com uma integral definida. Essa é a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo.

Parte 2

Teorema 4

O Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 2: *Se f for* ***CONTÍNUA*** *em $[a, b]$, então a função g definida por*

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer primitiva de f, isto é, uma função tal que $F' = f$.

Parte 2

Teorema 4

O Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 2: *Se f for* ***CONTÍNUA*** *em $[a, b]$, então a função g definida por*

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer primitiva de f, isto é, uma função tal que $F' = f$.

Essa é a ferramenta que facilita enormemente o cálculo de integrais.

Exercícios

25-54 Calcule a integral.

25. $\int_1^3 (x^x + 2x - 4)\,dx$

26. $\int_{-1}^1 x^{100}\,dx$

27. $\int_0^2 \left(\frac{4}{5}t^3 - \frac{3}{4}t^2 + \frac{2}{5}t\right)dt$

28. $\int_0^1 \left(1 - 8v^3 + 16v^7\right)dv$

29. $\int_1^9 \sqrt{x}\,dx$

30. $\int_1^8 x^{-2/3}\,dx$

31. $\int_0^4 (t^2 + t^{3/2})\,dt$

32. $\int_1^3 \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3}\right)dz$

33. $\int_{\pi/2}^0 \cos\theta\ d\theta$

34. $\int_{-5}^5 e\ dx$

Exercícios

79. Se $f(1) = 12$, f' é contínua e $\int_1^4 f'(x)\,dx = 17$, qual é o valor de $f(4)$?

Referencias I

J. Stewart.
Calculo: volume 1.
Pioneira Thomson Learning, 2022.