
UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS

FACET

Cálculo III

P1: Lista de revisão Parte 1

23 de Fevereiro de 2016

- (1) Mostre que cada uma das seguintes funções é uma solução da equação da onda: $u_{tt} = a^2 u_{xx}$:

a) $u(t, x) = \text{sen}(x)\text{sen}(at)$

b) $u(t, x) = \text{sen}(x - at) + \ln(x + at)$

- (2) A temperatura em um ponto (x, y) de uma chapa de metal é dada por $T(x, y) = \frac{60}{1 + x^2 + y^2}$, onde T é medido em °C e x e y em metros. Determine a taxa de variação da temperatura no ponto $(2, 1)$:

a) na direção x ;

b) na direção y .

- (3) A energia cinética de um corpo com massa m e velocidade v é $K(m, v) = \frac{mv^2}{2}$. Mostre que

$$\frac{\partial K}{\partial m}(m, v) \cdot \frac{\partial K}{\partial v}(m, v) = K(m, v)$$

- (4) Um ponto move-se ao longo da interseção do parabolóide elíptico $z = x^2 + 3y^2$ e do plano $y = 1$.

Qual a taxa de variação de z em relação a x quando o ponto estiver em $(2, 7, 1)$?

- (5) O volume de um cone circular reto de raio r e altura h é $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$. Mostre que se a altura permanecer constante enquanto que o raio varia então o volume satisfaz

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2V}{r}$$

- (6) A energia consumida em um resistor elétrico é dada por $P = \frac{V^2}{R}$. Se $V = 120$ volts e $R = 12$ ohms, calcular um valor aproximado para a variação da energia quando V decresce de 0,001 volt e R aumenta de 0,02 ohm.

- (7) O período T de um pêndulo simples com pequenas oscilações é calculado pela fórmula $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, onde L é o comprimento do pêndulo e g é a aceleração devida à gravidade. Suponha que os valores L e g tenham erros de, no máximo, 0,5% e 0,1%, respectivamente. Use diferenciais para aproximar o erro percentual máximo no valor calculado de T .

- (8) Duas rodovias intersectam em um angulo reto. O carro A, movendo-se sobre uma das rodovias, aproxima-se da interseção a 25km/h, e o carro B, movendo-se sobre a outra rodovia, aproxima-se da interseção a 30km/h. Com que taxa está variando a distância entre os carros quando A está a 0,3km da interseção e B está a 0,4 da interseção?

- (9) Suponha que $z = f(x, y)$ com $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$. Escreva a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

na sua fórmula polar. Ou seja, em função de r e θ , como no exercício feito em sala de aula.

- (10) A produção de trigo W em um determinado ano depende da temperatura média T e do volume anual de chuvas R . Cientistas estimam que a temperatura média anual está crescendo à taxa de $0,15^\circ\text{C}/\text{ano}$ e a quantidade anual de chuva está decrescendo à taxa de $0,1\text{cm}/\text{ano}$. Eles também estimam que, no atual nível de produção, $\frac{\partial W}{\partial T} = -2$ e $\frac{\partial W}{\partial R} = 8$.

a) Qual o significado do sinal dessas derivadas?

b) Estime a taxa de variação corrente da produção de trigo $\frac{dW}{dt}$.

- (11) **Teorema de Schwartz:** Se as derivadas parciais mistas f_{xy} e f_{yx} são contínuas, então

$$f_{xy} = f_{yx}.$$

Com a ajuda do teorema acima e da regra da cadeia, mostre que qualquer função da forma

$$z = f(x + at) + g(x - at),$$

com f e g possuindo derivadas parciais de segunda ordem contínuas, é uma solução da equação da onda $z_{tt} = a^2 z_{xx}$.

(Dica: faça $u(t, x) = x + at$ e $v(t, x) = x - at$)

- (12) Determine o limite, se existir, ou mostre que o limite não existe.

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{y \sin x}{xy + 2x}$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} (1+x) \frac{1+xy}{x}$

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy} - 1}{xy}$

d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ (Ver em Flemming, D. - Cálculo B)

e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^3 + y^2}$

- (13) Determine o maior conjunto no qual a função é contínua:

a)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + xy + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Observação: Para achar os valores de (x, y) que anulam o denominador, tente completar quadrados: $x^2 + yx = (x + \frac{y}{2})^2 - (\frac{y}{2})^2$.

b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$.

Fórmulas úteis:

- Limites fundamentais:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= e \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \ln a \end{aligned}$$

Bons estudos!

Bibliografia:

Stewart, J. - Cálculo Vol II

Flemming, D. - Cálculo B

Howard, A. - Cálculo Vol II

Guidorizzi, H. - Um curso de cálculo Vol 3.