Elementos de Álgebra

Aula 05: Matriz Transposta. Matrizes Simétricas.

Profª Dra. Karla Lima

Sumário

Matriz Transposta.

Igualdade de Matrizes

Definição 1: Duas matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ são iguais se:

i. A ordem de A é igual à ordem de B; ou seja, A e B possuem o mesmo número de linhas e o mesmo número de colunas;

ii. $a_{ij} = b_{ij}$, para todo i e todo j.

Exemplo 1: Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 4 & z & 1 \end{pmatrix}$, então $A = B$ se

$$x = 3, \quad y = 2 \quad \text{e} \quad z = 5,$$

pois todas as outras entradas já são iguais.

Exemplo 2: Agora, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & x & y \\ 4 & z & -3 \end{pmatrix}$, então $A \neq B$, não importa os valores de x, y e z, pois

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 \neq 2 = b_{11} \\ a_{23} &= 1 \neq -3 = b_{23}. \end{aligned}$$

Matriz Transposta

Definição 2: Dada a matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, com m linhas e n colunas, chama-se **transposta de A** a matriz $A^t = [b_{ij}]_{n \times m}$, com n linhas e m colunas, na qual:

- A 1ª coluna de A^t é formada pela 1ª linha de A;
- A 2ª coluna de A^t é formada pela 2ª linha de A;
- No geral, a j-ésima coluna de A^t é formada pela j-ésima linha de A e seus elementos são assim identificados:

$$b_{ij} = a_{ji}.$$

Exemplo 1:

a) Se $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ então $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) Se $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ então $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) Se $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ então $C^t = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Teorema 1:

a) Sejam A e B duas matrizes de ordem $m \times n$ e k um número real.

1. $(A^t)^t = A$;
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$;
3. $(kA)^t = kA^t$;

b) Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{n \times p}$, então

$$(AB)^t = B^t A^t.$$

Teorema 1: Demonstração

1. Se $A = (a_{ij})$, então $A^t = (b_{ij})$, de modo que
$$b_{ij} = a_{ji}.$$
Por sua vez, $(A^t)^t = (c_{ij})$, logo
$$\begin{aligned} c_{ij} &= b_{ji} \\ &= a_{ij}. \end{aligned}$$
Como $a_{ij} = c_{ij}$, para todo $i = 1, \ldots, m$ e todo $j = 1, \ldots, n$, temos que
$$(A^t)^t = A,$$
como queríamos demonstrar.

Teorema 1: Demonstração

2. Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, então $A + B = (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$.
   Assim, $(A + B)^t = d_{ij}$, de modo que

   $$d_{ij} = c_{ji} = a_{ji} + b_{ji}.$$

   Por sua vez, $A^t = (a_{ji})$ e $B^t = (b_{ji})$, logo $A^t + B^t = (a_{ji} + b_{ji})$ e, como $d_{ij} = a_{ji} + b_{ji}$, para todo $i = 1, \ldots, m$ e todo $j = 1, \ldots, n$, temos que

   $$(A + B)^t = A^t + B^t,$$

   como queríamos demonstrar.

Teorema 1: Demonstração

3. É de fácil demonstração, fica a cargo do leitor.

4. Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times p}$, então $AB = (c_{ij})$.
   Temos que
   $$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$
   Assim, $(AB)^t = d_{ij}$, de modo que
   $$d_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki}.$$
   Como $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times p}$, o produto AB é possível.
   Temos que $A^t = (a_{ji})_{n\times m}$ e $B^t = (b_{ji})_{p\times n}$ e, a menos que $p = m$, só podemos efetuar o produto $B^tA^t = (d_{ij})_{p\times m}$, obtendo:
   $$e_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki} = d_{ij},$$
   para todo $i = 1, \ldots, m$ e todo $j = 1, \ldots, n$.
   Portanto,
   $$(AB)^t = B^tA^t,$$
   como queríamos demonstrar.

Matrizes Simétricas

Definição 3: Chama-se **matriz simétrica** toda matriz **quadrada**, de ordem n, tal que:

$$A^t = A.$$

Decorre da definição que se A é simétrica, então $a_{ij} = a_{ji}$, para todo i e todo j.

Exemplo 2: São simétricas as seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{bmatrix}$$

Definição 4: Chama-se **matriz antissimétrica** toda matriz **quadrada**, de ordem n, tal que:

$$A^t = -A.$$

Decorre da definição que se A é simétrica, então $a_{ij} = -a_{ji}$, para todo i e todo j.

Exemplo 3: São antissimétricas as seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & -0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{bmatrix}$$

Bibliografia

Clique no texto para ter acesso aos arquivos PDFs:

- Livro texto: IEZZI, Gelson. Fundamentos de matemática elementar: sequências, matrizes, determinantes e sistemas. São Paulo,SP: Atual, 2004. 232 p.,
- José Roberto Bonjorno et. al., Prisma matemática : sistemas, matemática financeira e grandezas.