GEOMETRIA PLANA

Aula 11: Pontos Notáveis do Triângulo.

Karla Lima

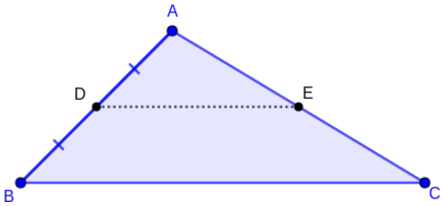
Sumário

Um retorno às retas paralelas

Teorema

Teorema 1

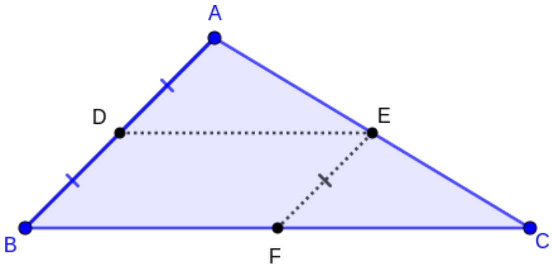
Se do ponto médio do lado de um triângulo, traçarmos uma paralela a um dos lados, esta passará pelo ponto médio do terceiro lado.



- **Hipótese:** $AD = DB$ e $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.
- **Tese:** $AE = EC$.

Demonstração: Teorema 1

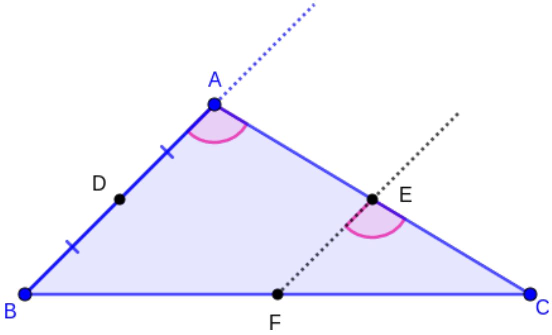
- Pelo ponto E, que a paralela ao lado $\overline{BC}$ corta o lado $\overline{AC}$, trace um segmento paralelo ao lado $\overline{AB}$, cortando o lado $\overline{BC}$.



i) Qual teorema garante que $BD = FE$?

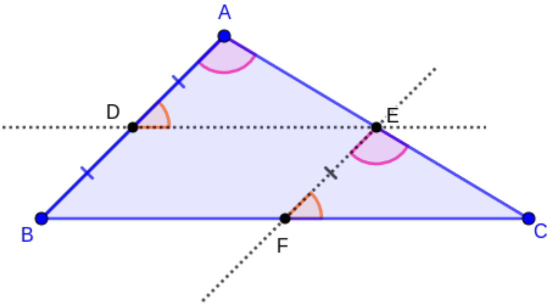
Demonstração: Teorema 1

ii) Sendo $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$, cortadas pela transversal $\overline{AC}$, como podemos relacionar os ângulos $A\hat{D}E$ e $E\hat{F}C$?



Demonstração: Teorema 1

iii) Como $\overline{DA} \parallel \overline{FE}$ e $\overline{DE} \parallel \overline{FC}$, como podemos relacionar os ângulos $A\hat{D}E$ e $E\hat{F}C$?



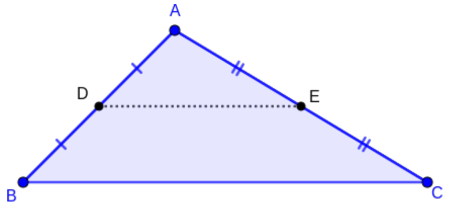
iv) Dos itens anteriores, o que garante a congruência dos triângulos DAE e FEC?

- Da congruência acima, o que garante que $AE = EC$?

Teorema

Teorema 2

O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado.



- **Hipótese:** $AD = DB$ e $AE = EC$.
- **Tese:** $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

Demonstração: Teorema 2

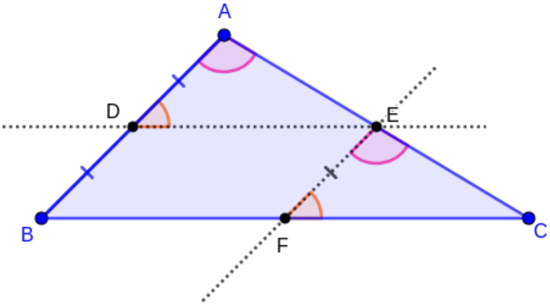
1. Pelo ponto médio de $\overline{AB}$, D, traçamos uma reta paralela ao lado $\overline{BC}$.
2. Pelo Teorema 1, essa reta corta o lado $\overline{AC}$ no seu ponto médio, E.
3. Como pelos pontos distintos D e E passa uma única reta, o segmento $\overline{DE}$ deve estar contido na reta traçada, o que implica em - também - ser paralelo ao lado $\overline{BC}$.

Corolário

Corolário 1

No triângulo anterior, tem-se $DE = \dfrac{BC}{2}$.

Dica: Basta considerar a paralela $\overline{EF}$ ao segmento $\overline{DB}$ e usar os teoremas anteriores.



O Baricentro

Baricentro - Medianas

Teorema 3

As três medianas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que divide cada mediana em duas partes tais que a parte que contém o vértice é o dobro da outra.

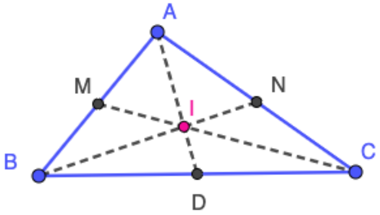
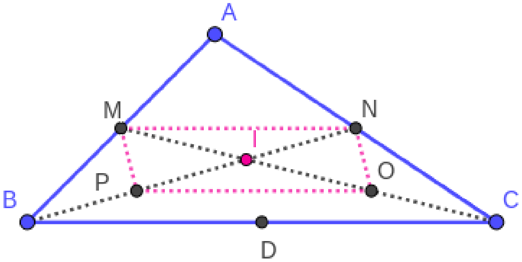


Figura 1: $\overline{AI} = \frac{2}{3}\overline{AD}$, $\overline{BI} = \frac{2}{3}\overline{BN}$ e $\overline{CI} = \frac{2}{3}\overline{CM}$

Demonstração: Teorema 3

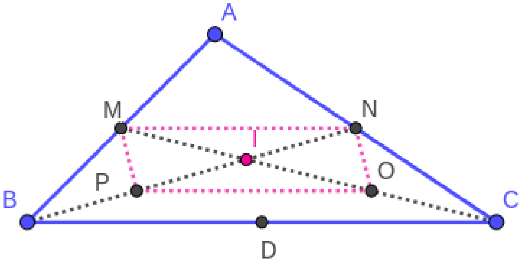
- Pelos pontos médios M e N trace um segmento de reta que, pelo Teorema 2, é paralelo ao lado $\overline{BC}$. Além disso, pelo corolário do mesmo teorema, $\overline{MN} = \frac{\overline{BC}}{2}$.



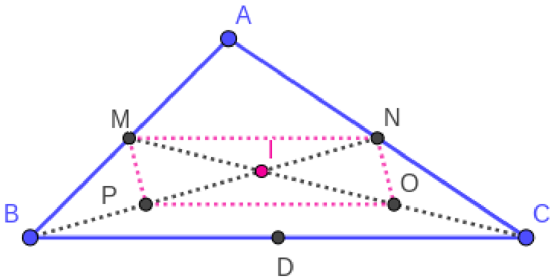
- Pelos pontos médios de $\overline{BI}$ e $\overline{CI}$, trace um segmento $\overline{PO}$. Por que esse segmento também é paralelo ao lado $\overline{BC}$?

Demonstração: Teorema 3

- Considerando o triângulo ACI, o segmento que une os pontos médios dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{CI}$ é paralelo ao lado $\overline{AI}$ (Teorema 2).
- Analogamente, considerando o triângulo ABI, o segmento que une os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BI}$ é paralelo ao lado $\overline{AI}$, pelo mesmo teorema.
- Como $\overline{MP} \parallel \overline{AI}$ e $\overline{NO} \parallel \overline{AI}$, segue que $\overline{MP}$ e $\overline{NO}$ são paralelas.



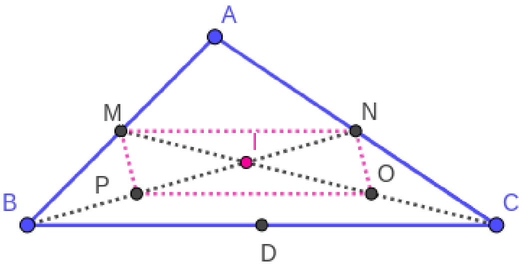
Demonstração: Teorema 3



- Conclua que os lados paralelos são congruentes.
- O quadrilátero *MNOP* é um paralelogramo.

Demonstração: Teorema 3

- Se é um paralelogramo, suas diagonais se bissecam, então $\overline{MI} = \overline{IO}$ e $\overline{NI} = \overline{IP}$.



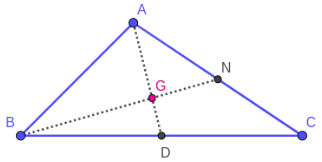
- Como $\overline{IP} = \overline{BP}$, $\overline{BN} = \overline{BP} + \overline{IP} + \overline{IN} = \overline{IP} + \overline{IP} + \overline{IP} = 3\overline{IP}$, segue que

$$\overline{IP} = \frac{\overline{BN}}{3} \Rightarrow \overline{BI} = \overline{BP} + \overline{IP} = 2\overline{IP} = \frac{2}{3}\overline{BN}.$$

Demonstração: Teorema 3

- Por outro lado, se G é o ponto de interseção entre as medianas $\overline{BN}$ e $\overline{AD}$, então

$$\overline{BG} = \frac{2}{3}\overline{BN} = \overline{BI}.$$



- Como $\overline{BI}$ e $\overline{BG}$ estão sobre o mesmo segmento ($\overline{BN}$), com a mesma distância ao ponto inicial B , podemos concluir que

$$\overline{BI} = \overline{BG},$$

ou seja, os pontos I e G coincidem e as três medianas concorrem num mesmo ponto.

Aplicações

- O ponto de interseção (ou ponto de encontro, ou ponto de concurso) das três medianas de um triângulo é o **baricentro** do triângulo.
- Ele também pode ser chamado de **centróide**, **centro de massa** ou **centro de gravidade**, porque é o ponto de equilíbrio.
- Isso significa que, se colocar o dedo embaixo de uma figura plana triangular com a ponta bem no baricentro, a figura não cai.
- Por ele ser o ponto onde a força da gravidade atua em um corpo, é nele que podemos equilibrar as forças de atração. Graças a esse conceito, é que as construções de diversos formatos se mantêm em pé, foram criados foguetes e trajes espaciais, máquinas, etc.

O Incentro

Incentro - Bissetrizes

Teorema 4

As três bissetrizes internas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que está a igual distância dos lados do triângulo.

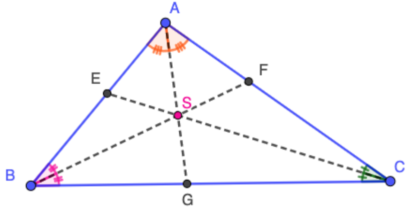


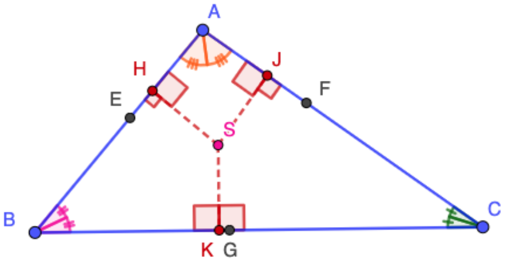
Figura 2: $d(S, \overline{AC}) = d(S, \overline{AB}) = d(S, \overline{BC})$

Demonstração Teorema 4

Novamente, queremos demonstrar duas afirmações:

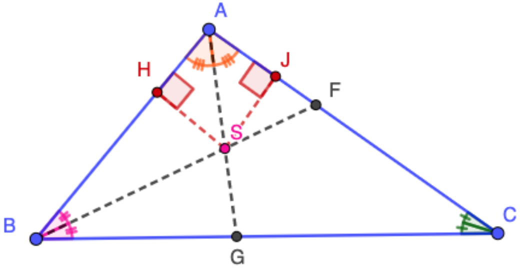
- As bissetrizes $\overline{AG}$, $\overline{BF}$ e $\overline{CE}$ concorrem num mesmo pontos S.
- As distâncias de S aos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ possuem a mesma medida:

$$\overline{SH} = \overline{SK} = \overline{SJ}.$$

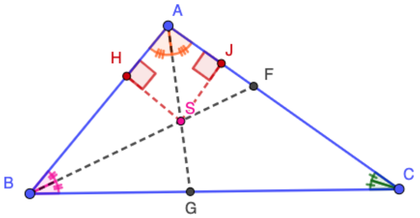


Demonstração Teorema 4

- Considera as bissetrizes $\overline{AG}$ e $\overline{BF}$ dos ângulos A e B, respectivamente.
- Os dois segmentos se interceptam num ponto S. A distância desse ponto aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são dados pelos comprimentos $\overline{SH}$ e $\overline{SJ}$.



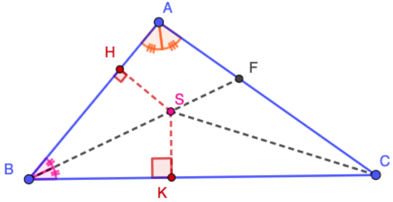
Demonstração Teorema 4



- Os triângulos SHA e SJA são congruentes ((L) $\overline{AS}$ lado em comum, (A) $S\hat{A}H = S\hat{A}J$ e (A) $A\hat{H}S = A\hat{J}S$).
- Com isso, os lados opostos aos ângulos congruentes $S\hat{A}H$ e $S\hat{A}J$ são congruentes, de onde segue que

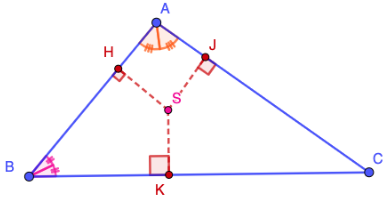
$$\overline{SH} = \overline{SJ}. \tag{1}$$

Demonstração Teorema 4



- Considerando o segmento $\overline{SK}$, perpendicular ao lado $\overline{BC}$, obtemos que a distância de S ao lado $\overline{BC}$ é dado pelo comprimento de $\overline{SK}$.
- Os triângulos SHB e SKB são congruentes ((L) $\overline{SB}$ lado em comum, (A) $S\hat{B}H = S\hat{B}K$ e (A) $B\hat{K}S = B\hat{H}S$).

Demonstração Teorema 4



- Com isso, os lados opostos aos ângulos congruentes $S\hat{B}H$ e $S\hat{A}K$ são congruentes, de onde segue que

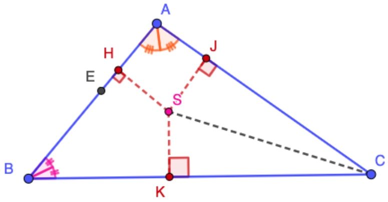
$$\overline{SH} = \overline{SK}. \tag{2}$$

- Portanto,de (1) e de (2), segue que $\overline{SJ} = \overline{SH} = \overline{SK}$, como queríamos.

Demonstração Teorema 4

Por fim, queremos mostrar que a bissetriz $\overline{CE}$ também passa pelo ponto S.

- Tome o segmento $\overline{CS}$. Vamos mostrar que $J\hat{C}S = K\hat{C}S$.



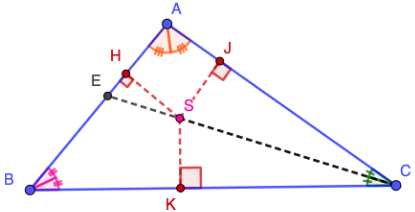
- Com efeito, os triângulos SJC e SKC são congruentes, pelo caso particular do triângulo retângulo ((H) $\overline{SC}$ hipotenusa em comum e (C) $\overline{SJ} = \overline{SK}$ cateto em comum).

Demonstração Teorema 4

- Com isso, os ângulos opostos aos lados congruentes $\overline{SJ}$ e $\overline{SK}$, são congruentes:

$$J\hat{C}S = K\hat{C}S. \tag{3}$$

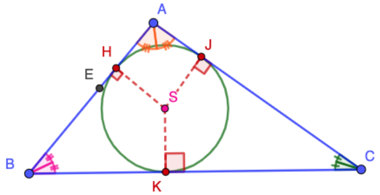
- Logo, o segmento $\overline{CS}$ está contido na bissetriz $\overline{CE}$.



- Portanto, $\overline{AG} \cap \overline{BF} \cap \overline{CE} = \{S\}$, como queríamos demonstrar.

O Incentro

- Como veremos na próxima aula, a **circunferência** é o conjunto de pontos do plano que estão a uma mesma distância de um ponto dado, chamado de **centro da circunferência**.
- O ponto de interseção (ou ponto de encontro ou ponto de concurso) das três bissetrizes internas de um triângulo é o **incentro** do triângulo.
- O incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo.



O Circuncentro

Circuncentro - Mediatrizes

Teorema 5

As mediatrizes dos lados de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que está a igual distância dos vértices do triângulo.

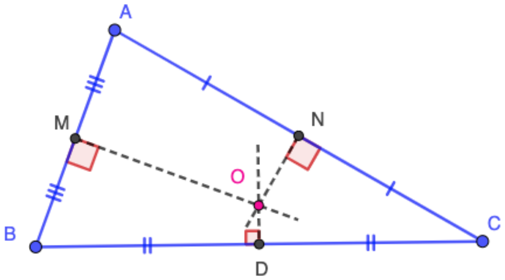
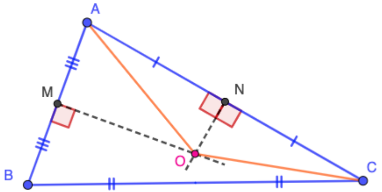


Figura 3: $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$

Demonstração Teorema 5

- Seja O o ponto de interseção entre as mediatrizes de $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$.



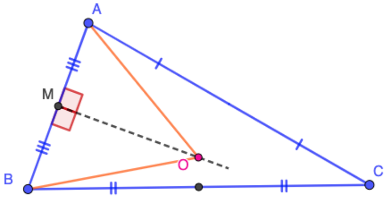
- Como os triângulos ANO e CNO são congruentes (LAL), temos que os lados opostos aos ângulos retos são congruentes e, portanto,

$$\overline{AO} = \overline{CO}.$$

Demonstração Teorema 5

- Analogamente, os triângulos *AOM* e *BOM* são congruentes (LAL). Assim, os lados opostos aos ângulos retos são congruentes e, portanto,

$$\overline{AO} = \overline{BO}.$$

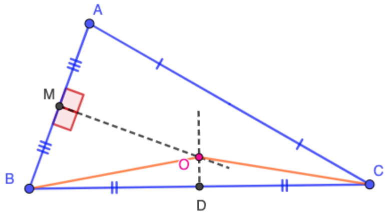


- Com isso, concluímos que

$$\overline{AO} = \overline{CO} = \overline{BO}.$$

Demonstração Teorema 5

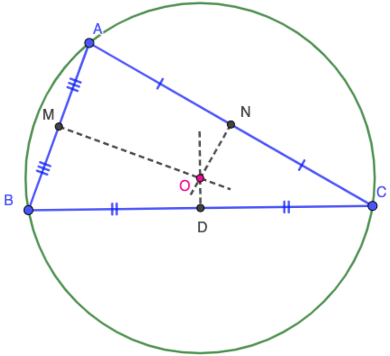
- Resta-nos mostrar que a mediatriz de $\overline{BC}$ também passa pelo ponto O.
- De fato, considere o segmento $\overline{OD}$.



- Como $\overline{CO} = \overline{BO}$, o triângulo BOC é isósceles. Como o segmento $\overline{OD}$ é a mediana relativa ao lado BC, é também a mediatriz desse segmento, como queríamos.

O Circuncentro

- O ponto de interseção (ou ponto de encontro ou ponto de concurso) das mediatrizes dos lados de um triângulo é o **circuncentro** do triângulo.
- O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.



O Ortocentro

Ortocentro - Alturas

Teorema 6

As três retas suportes das alturas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto.

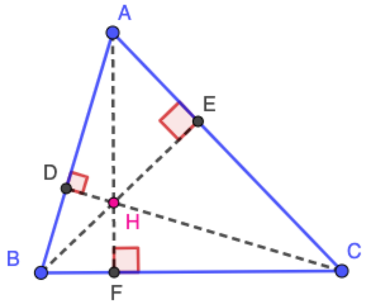


Figura 4: $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$

Demonstração Teorema 6

Veja na bibliografia: Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 9. (Click para baixar)