P1 - Gabarito

01

a) $f(x,y) = e^y \cos x$

$f_x(x,y) = -e^y \operatorname{sen} x$ e $f_y(x,y) = e^y \cos x$

b) $f(x,y,z) = \ln(x+y^2+z^3)$

f é a composta entre as funções $g(u) = \ln u$ e $h(x,y,z) = x+y^2+z^3$:

$$f(x,y,z) = g \circ h(x,y,z).$$

Como $g'(u) = \dfrac{1}{u}$ e $h_x = 1$, $h_y = 2y$ e $h_z = 3z^2$, temos:

$$f_x = \frac{1}{x+y^2+z^3} \cdot 1$$

$$f_z = \frac{1}{x+y^2+z^3} \cdot 3z^2.$$

$$f_y = \frac{1}{x+y^2+z^3} \cdot 2y$$

c) $f(x,y,z) = e^{2xz} \operatorname{sen}(yx)$.

não depende de y!

não depende de z!

é determinada por produto e composta de funções.

$$f_x = e^{2xz}(2z) \cdot \operatorname{sen}(yx) + e^{2xz} \cdot \cos(yx) \cdot y$$

$$f_y = e^{2xz} \cos(yx) \cdot x$$

$$f_z = e^{2xz} \cdot 2x \cdot \operatorname{sen}(yx)$$

* $q(r, A) = r(1 - e^{-0.7A})$

a) $\vec{v} = (0.5, 0.2)$

$D_v q(1,2) = ?$

Calculando as derivadas parciais:

$q_r(r, A) = 1 - e^{-0.7A} \implies q_r(1,2) = 1 - e^{-1.4}$

$q_A(r, A) = 0.7 r e^{-0.7A} \implies q_A(1,2) = 0.7 e^{-1.4}$

O vetor unitário u na mesma direção e sentido de v:

$$u = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{(0.5)^2 + (0.2)^2}}(0.5, 0.2) = \left(\frac{0.5}{\sqrt{0.29}}, \frac{0.2}{\sqrt{0.29}}\right).$$

Portanto,

$$D_v q(1,2) = \left(1 - e^{-1.4}, 0.7 e^{-1.4}\right) \cdot \left(\frac{0.5}{\sqrt{0.29}}, \frac{0.2}{\sqrt{0.29}}\right) = \frac{0.5 - 0.5 e^{-1.4} + 0.14 e^{-1.4}}{\sqrt{0.29}}$$

$$= \frac{0.5 - 0.36 e^{-1.4}}{\sqrt{0.29}} \approx 0.763$$

e q cresce nessa direção, a partir de $(1,2)$.

b) A direção e sentido que fornece a taxa de variação máxima em $(1,2)$ é dado pelo vetor gradiente de q em $(1,2)$:

$$v = \nabla q(1,2) = \left(1 - e^{-1.4}, 0.7 e^{-1.4}\right).$$

c) Para encontrar os pontos críticos de q, que possui derivadas parciais em todo $\mathbb{R}^2$, basta resolver o sistema:

$$\begin{cases} q_r(r, A) = 1 - e^{-0.7A} = 0 & \text{(I)} \\ q_A(r, A) = 0.7 r e^{-0.7A} = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I), obtemos que

$$1 = e^{-0.7A} \implies e^{0} = e^{-0.7A} \implies 0 = -0.7A \implies \boxed{A = 0}$$

De (II), obtemos que

$$0.7 r e^{-0.7A} = 0 \implies \boxed{r = 0}, \text{ pois } 0.7 e^{-0.7A} \neq 0 \ \forall A \in \mathbb{R}.$$

Portanto $(0,0)$ é o único ponto crítico dessa função.

Para classificá-lo, vamos usar o teste da 2ª derivada:

$$D(r,A) = \begin{vmatrix} 0 & 0.7e^{-0.7A} \\ 0.7e^{-0.7A} & -0.49re^{-0.7A} \end{vmatrix} \Rightarrow D(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 0.7 \\ 0.7 & 0 \end{vmatrix} = -0.49 < 0.$$

Assim, $(0,0)$ é um ponto de sela.

③ $T(x,y) = x^2 - x + 2y^2$

$x^2 + y^2 \leq 1$

* $x^2 + y^2 < 1$

Vamos encontrar os pontos críticos de T em $x^2+y^2<1$. Temos que

$$T_x(x,y) = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2};$$

$$T_y(x,y) = 4y = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Como $x^2+y^2 = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4} < 1$, segue que $(1/4, 0)$ é um ponto crítico na região pedida.

Tem-se $\boxed{T(1/2, 0) = -\frac{1}{4}°C = -0{,}25°C}$

Agora encontraremos os candidatos a máximo e mínimo de T restrita à $x^2+y^2=1$. Devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} \nabla T(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 2\lambda x & (\text{I}) \\ 4y = 2\lambda y & (\text{II}) \\ x^2 + y^2 = 1 & (\text{III}) \end{cases}.$$

De (II), obtemos que

$$4y - 2\lambda y = 0 \Rightarrow 2y(2-\lambda) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ou } \lambda = 2.$$

* Se $y = 0$

$$x^2 + 0^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1.$$

Teremos os pares $(1,0)$ e $(-1,0)$. Para eles, teremos os seguintes λ's:

(I) $2 - 1 = 2\lambda \cdot 1 \Rightarrow 1 = 2\lambda \Rightarrow \lambda = 1/2$. A solução é $(x,y,\lambda) = (1,0,1/2)$

(I) $2(-1) - 1 = 2\lambda(-1) \Rightarrow -3 = -2\lambda \Rightarrow \lambda = 3/2$. A solução é $(x,y,\lambda) = (-1,0,3/2)$.

* Se $\lambda = 2$

(I) $2x - 1 = 2 \cdot 2 \cdot x \implies 2x - 1 = 4x \implies 2x = -1 \implies x = -1/2$.

Se $x = -1/2$ então $\frac{1}{4} + y^2 = 1 \implies y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Logo, também são soluções : $(x, y, \lambda) = (-1/2, \sqrt{3}/2, 2)$

$(x, y, \lambda) = (-1/2, -\sqrt{3}/2, 2)$.

Calculando T nos pontos encontrados:

$\boxed{T(1/2, 0) = -0.25\ °C}$ → no ponto crítico em $x^2 + y^2 < 1$.

$\boxed{T(1,0) = 0\,°C}$ $\boxed{T(-1/2, \sqrt{3}/2) = \frac{9}{4}\ °C = 2.25\ °C}$

→ na restrição $x^2 + y^2 = 1$.

$\boxed{T(-1,0) = 2\,°C}$ $\boxed{T(-1/2, -\sqrt{3}/2) = \frac{9}{4}\ °C = 2.25\ °C}$

Assim, T possui valor mínimo $T(1/2, 0) = -0.25\,°C$ e valor máximo $T(-1/2, \sqrt{3}/2) = T(-1/2, -\sqrt{3}/2) = 2.25\,°C$.