Universidade Federal da Grande Dourados

Cálculo II

Lista de Exercícios: P1

1 - Técnicas de Integração

1.1 - Revisão de Integrais.

1.2 - O Método de Substituição.

1.3 - Integração por partes.

1.4 - Integração por Frações Parciais.

1.5 - Integrais impróprias.

1.6 - Aplicações de integrais.

2 - EDO's de 1ª ordem

2.1 - Definição e Motivação.

2.2 - Resolução de EDO's de 1ª ordem: Equações Separáveis.

2.3 - Resolução de EDO's de 1ª ordem: Método do Fator Integrante.

Profa. Karla Katerine Barboza de Lima
FACET/UFGD

1 Técnicas de Integração

Tabela Básica

- $\displaystyle\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$
- $\displaystyle\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$
- $\displaystyle\int e^u\, du = e^u + C$
- $\displaystyle\int a^u\, du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
- $\displaystyle\int \operatorname{sen}(u)\, du = -\cos(u) + C$
- $\displaystyle\int \cos(u)\, du = \operatorname{sen}(u) + C$

1.1 Revisão de Integração

Exercício 1 *Calcule as integrais:*

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^{100} dx$

b) $\displaystyle\int_{0}^{1} 1 + \frac{1}{2}u^4 - \frac{2}{5}u^9 du$

c) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{v^5 + 3v^6}{v^4} dv$

d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{u+1} du$

e) $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)dx$, *onde:*

$$f(x) = \begin{cases} 2 & se \quad -2 \leq x \leq 0, \\ 4 - x^2 & se \quad 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

f) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{4}{x^3} dx$

Gabarito

1. a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^{100} dx = \frac{2}{101}$

   b) $\displaystyle\int_{0}^{1} 1 + \frac{1}{2}u^4 - \frac{2}{5}u^9 du = \frac{53}{50}$

   c) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{v^5 + 3v^6}{v^4} dv = \frac{17}{2}$

d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{u+1}du = e^2 - 1$

e) $\dfrac{28}{3}$

f) Indeterminado, pois f possui um descontinuidade infinita no intervalo de integração.

1.2 O Método de Substituição

Exercício 2 *Calcule a integral fazendo a substituição dada.*

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$, $u = 3-5x$.

b) $\displaystyle\int_0^\pi \cos(3x)\,dx$, $u = 3x$.

c) $\displaystyle\int_0^1 x(4+x^2)^{10}\,dx$, $u = 4+x^2$.

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3\theta sen\,\theta\,d\theta$, $u = \cos\theta$.

e) $\displaystyle\int_0^1 (x^2-1)^4x^5\,dx$, $u = x^2-1$.

Exercício 3 *Avalie a integral definida.*

a) $\displaystyle\int_0^1 \cos(\pi t/2)\,dt$.

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$.

c) $\displaystyle\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$.

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^z+1}{e^z+z}\,dz$.

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Exercício 4 *Um tanque de armazenamento de petróleo sofre uma ruptura em $t = 0$ e o petróleo vaza do tanque a uma taxa de $r(t) = 100e^{-0,01t}$ litros por minuto. Quanto petróleo vazou na primeira hora?*

Exercício 5 *A respiração é cíclica e o ciclo completo respiratório desde o início da inalação até o fim da expiração demora cerca de 5 s. A taxa máxima de fluxo de ar nos pulmões é de cerca de $0,5\,L/s$. Isso explica, em partes, porque a função $f(t) = \frac{1}{2}sen(2\pi t/5)$ tem sido frequentemente utilizada para modelar a taxa de fluxo de ar nos pulmões. Use esse modelo para encontrar o volume de ar inalado nos pulmões no instante t .*

Exercício 6 *Se f for contínua e $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx = 10$, calcule $\displaystyle\int_0^2 f(2x)\,dx$.*

Gabarito

2. a) $\dfrac{1}{14}$

b) 0

c) $\dfrac{5^{11} - 4^{11}}{22}$

d) $\dfrac{1}{4}$

e) $\dfrac{1}{210}$

3. a) $\dfrac{2}{\pi}$

   b) $e - \sqrt{e}$

   c) 2

   d) $\ln(e + 1)$

   e) $2 - 2\ln 2$

4. Aproximadamente 4512 litros.

5. $\dfrac{5}{4\pi}\left(1 - \cos\left(\dfrac{2\pi t}{5}\right)\right)$ litros.

6. 5

1.3 Integração por Partes

Exercício 7 *Calcule a integral usando a integração por partes com as escolhas de u e dv dadas.*

a) $\displaystyle\int x^2 \ln x \, dx,\ u = \ln x \ \text{e}\ dv = x^2 dx.$

b) $\displaystyle\int \theta \cos(\theta) \, d\theta,\ u = \theta \ \text{e}\ dv = \cos\theta \, d\theta.$

Exercício 8 *Calcule a integral.*

a) $\displaystyle\int x e^{-x} \, dx.$

b) $\displaystyle\int p^5 \ln p \, dp.$

c) $\displaystyle\int (\ln x)^2 \, dx.$

d) $\displaystyle\int_0^1 (x^2+1) e^{-x} \, dx.$

e) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} \, dx.$

f) $\displaystyle\int e^{2x} sen\,(3x) \, dx.$

Exercício 9 *Primeiro faça uma substituição e então use integração por partes para calcular a integral.*

a) $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \cos(\sqrt{x}) \, dx.$

b) $\displaystyle\int_0^1 t^3 e^{-t^2} \, dt.$

c) $\displaystyle\int_0^1 x \ln(1+x) \, dx.$

Exercício 10 *Uma partícula que se move ao longo de uma reta tem velocidade igual à $v(t) = t^2 e^{-t}$ metros por segundo, após t segundos. Qual a distância que essa partícula percorrerá durante os primeiros 5 segundos?*

Exercício 11 *Suponha que $f(1) = 2$, $f(4) = 7$, $f'(1) = 5$, $f'(4) = 3$ e f'' seja contínua. Encontre o valor de* $\displaystyle\int_1^4 x f''(x) \, dx.$

Gabarito

7. a) $\dfrac{x^3 \ln x}{3} - \dfrac{x^3}{9} + c.$

   b) $\theta \operatorname{sen} \theta + \cos \theta + c.$

8. a) $-xe^{-x} - e^{-x} + c.$

   b) $\dfrac{p^6 \ln p}{6} - \dfrac{p^6}{36} + c.$

   c) $x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + c.$

   d) $3 - \dfrac{6}{e}.$

   e) $\dfrac{1 - \ln 2}{2}.$

   f) $\dfrac{1}{13} e^{2x}(2\operatorname{sen}(3x) - 3\cos(3x)) + c.$

9. a) $-4.$

   b) $\dfrac{-2e^{-1} + 1}{2}.$

   c) $\dfrac{1}{4}.$

10. $2 - 37e^{-5}$ metros.

11. 2.

1.4 Integração por Frações Parciais

Exercício 12 *Calcule as integrais abaixo.*

a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+1}dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x-9}{x-2}\,dx$

c) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\,dx$

d) $\displaystyle\int_3^4 \frac{x^3-2x^2-4}{x^3+2x^2}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+5)^2(x-1)}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{x^3+4}{x^2+4}\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}\,dx$

h) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$

Exercício 13 *Um método de retardar o crescimento de uma população de insetos sem usar pesticidas é introduzir na população um número de machos estéreis que cruzam com fêmeas férteis, mas não produzem filhotes. Se P representar o número de fêmeas na população de insetos, S, o número de machos estéreis introduzidos a cada geração e r, a taxa de crescimento populacional natural, então a população de fêmeas está relacionada com o instante t através de*

$$t = \int \frac{P+S}{P[(r-1)P-S]}\,dP.$$

Suponha que uma população de insetos com 10000 *fêmeas cresça a uma taxa de $r = 0,10$ e que* 900 *machos estéreis sejam adicionados. Calcule a integral para dar uma equação relacionando a população de fêmeas com o tempo. (Observe que a equação resultante não pode ser resolvida explicitamente para P.)*

Exercício 14 *Se f for uma função quadrática tal que $f(0) = 1$ e*

$$\int \frac{f(x)}{x^2(x+1)^3}\,dx$$

for uma função racional, encontre o valor de $f'(0)$.

Gabarito

12. a) $\frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1| + C$

    b) $x - 7\ln|x-2| + C$

    c) $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

    d) $\frac{7}{6} + \ln\frac{2}{3}$

    e) $-\frac{1}{36}\ln|x+5| + \frac{1}{6}\frac{1}{x+5} + \frac{1}{36}\ln|x-1| + C$

    f) $\frac{1}{2}x^2 - 2\ln(x^2+4) + 2\tan^{-1}(x/2) + C$

    g) $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$

    h) $\ln\left[\frac{(e^x+2)^2}{e^x+1}\right] + C$

13. $-\ln P - \frac{1}{9}\ln(0,9\,P + 900) + C$, onde $C \approx 10,23$.

14. $f'(0) = 3$.

Referências

[1] STEWART J., *Cálculo*, Volume I, Editora Thomson.

[2] Anton H., *Cálculo*, Volume I, Editora Bookman.

1.5 Integrais Impróprias

Exercício 15 *Explique por que cada uma das seguintes integrais é imprópria:*

a) $\displaystyle\int_1^{\infty} x^4 e^{-x^4}\,dx$

b) $\displaystyle\int_1^{\pi/2} \sec x$

Exercício 16 *Determine se cada integral é convergente ou divergente. Calcule aquelas que são convergentes.*

a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{(3x+1)^2}\,dx$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} e^{-2t}\,dt$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$

d) $\displaystyle\int_{2\pi}^{\infty} sen\,\theta\,d\theta$

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{6} re^{r/3}\,dr$

f) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{3}{x^5}\,dx$

g) $\displaystyle\int_{-2}^{14} \frac{1}{\sqrt[4]{x+2}}\,dx$

h) $\displaystyle\int_0^{2} z^2 \ln z\,dz$

Gabarito

8. a) Intervalo é infinito.

   b) A função possui uma descontinuidade no intervalo de integração.

9. a) Converge: $\frac{1}{12}$

b) Diverge

c) Converge: 0

d) Diverge

e) Converge: $9e^2$

f) Diverge

g) Converge: $\dfrac{32}{3}$

h) Converge: $\dfrac{8}{3}\ln 2 - \dfrac{8}{9}$

2 EDO's de 1ª ordem

2.1 Definição e Motivação

Exercício 17 *Verifique se as funções indicadas são soluções particulares das equações diferenciais dadas.*

a) $xy' = 2y$; $y = 0$ *e* $y = 2x$.

b) $y'' + 9y = 18$; $y = 2$ *e* $y = 2x^2$.

c) $xy'' - y' = 0$; $y = 2x^2$ *e* $y = 2x$.

d) $x^2y'' + xy' + y = 0$; $y = sen\,(\ln x)$.

Exercício 18 *Confirme que* $y = 3e^{x^3}$ *é uma solução do problema de valor inicial* $y' = 3x^2y$, *com* $y(0) = 3$.

Exercício 19 *Uma população é modelada pela equação diferencial*

$$\frac{dP}{dt} = 1,2\,P\left(1 - \frac{P}{4200}\right).$$

Usando uma ferramenta de calcular gráficos (Geogebra, Wolframalpha, etc...), analise o gráfico da derivada acima e responda:

a) Para quais valores de P *a população está aumentando?*

b) Para quais valores de P *a população está diminuindo?*

c) Quais são as soluções de equilíbrio?

Gabarito

10. a) $y = 0$ é solução.
    b) $y = 2$ é solução.
    c) $y = 2x^2$ é solução.
    d) $y = \text{sen}\,(\ln x)$ é solução.

12. (a) $0 < P < 4200$
    (b) $P > 4200$
    (c) $P = 0$, $P = 4200$

2.2 Resolução de EDO's de 1ª ordem: Equações Separáveis

Exercício 20 *Resolva as equações diferenciais.*

a) $\dfrac{dy}{dx} = xy^2$

b) $\dfrac{dy}{dx} = xe^{-y}$

c) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t}{ye^{y+t^2}}$

Exercício 21 *Uma esfera com raio* 1 *m está a uma temperatura de* 15 ℃*. Ela está dentro de uma esfera concêntrica com raio de* 2 *m e temperatura de* 25 ℃*. A temperatura* $T(r)$ *a uma distância* r *do centro comum das duas esferas satisfaz a equação diferencial*

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr} = 0$$

Se fizermos $S(r) = \dfrac{dT}{dr}$*, então* S *satisfaz uma equação diferencial de primeira ordem. Encontre uma expressão para* $T(r)$ *entre as duas esferas.*

Exercício 22 *Dada a equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

a) Encontre a solução geral da equação.

b) Encontre a solução explícita para o problema com valor inicial $y(0) = -2$ *e seu intervalo de definição.*

Exercício 23 *O modelo de Malthus para o crescimento de uma população, basea-se na suposição de que a população cresce (ou decresce) a uma taxa proporcional ao tamanho da população:*

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

a) Resolva a equação com condição inicial $P(0) = P_0$*.*

b) Se a constante de proporcionalidade k *for positiva o que acontece com a população? E se for negativa?*

Exercício 24 *Uma população com frequência cresce exponencialmente em seus estágios iniciais, seguindo o modelo de Malthus, mas em dado momento se estabiliza e se aproxima de sua capacidade de suporte por causa dos recursos limitados. Para refletir que a taxa de crescimento diminui quando a população P aumenta e torna-se negativa quando P ultrapassa sua* ***capacidade de suporte*** *K, a expressão mais simples é dada por*

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right).$$

Este modelo é conhecido Modelo Logístico.

a) Dada a condição inicial $P(0) = P_0$, resolva o PVI.

b) O que acontece com a população quando o tempo t tende ao infinito?

Gabarito

13. a) $y(x) = \dfrac{2}{k - x^2}$, $y(x) = 0$.

    b) $y(x) = \ln\left|\dfrac{x^2}{2} + c\right|$

    c) $e^y(y-1) = c - \dfrac{1}{2e^{t^2}}$

14. $T(r) = -\dfrac{20}{r} + 35$

15. a) Solução implícita: $y^2 + x^2 = C$.

    b) $y(x) = -\sqrt{4 - x^2}$, $I = [-2, 2]$.

15. a) $P(t) = P_0 e^{kt}$.

    b) Se for positiva a taxa de variação é positiva e, assim, a população está crescendo; no caso de ser negativa, ela está decrescendo.

16. a) $P(t) = \dfrac{k}{1 + Ae^{-kt}}$, onde $A = \dfrac{K - P_0}{P_0}$.

    b) Atinge sua população máxima K.

2.3 Resolução de EDO's de 1ª ordem: Método do Fator Integrante

Exercício 25 *Determine se a equação diferencial é linear.*

a) $y' + e^x y = x^2 y^2$

b) $y + sen\, x = x^3 y'$

c) $xy' + \ln x - x^2 y = 0.$

Exercício 26 *Resolva as equações diferenciais.*

a) $y' + y = 1$

b) $xy' + y = \sqrt{x}$

c) $sen\, x \frac{dy}{dx} + (\cos x) y = sen\, (x^2)$

d) $xy' = y + x^2 sen\, x$, *com* $y(\pi) = 0$

Exercício 27 *Suponha que pouco antes do meio-dia o corpo de uma vítima de homicídio é encontrado numa sala com ar condicionado, mantida a uma temperatura constante de* 21°C *. Ao meio-dia a temperatura do corpo é de* 30°C *e uma hora mais tarde é de* 27°C*. Assumindo que a temperatura do corpo na hora da morte era* 36.5°C*, use a lei de resfriamento de Newton para dizer qual foi a hora da morte.*

Gabarito

17. a) Não é linear

    b) É linear

    c) É linear.

18. a) $y = 1 + ce^{-x}$

b) $y = \frac{2}{3}\sqrt{x} + \dfrac{c}{x}$

c) $y = \dfrac{\int \operatorname{sen}(x^2)dx + c}{\operatorname{sen} x}$

d) $y = -x\cos x - x$

19. Aproximadamente às 10:20 da manhã.

Referências

[1] STEWART J., *Cálculo*, Volume I, Editora Thomson.

[2] STEWART J., *Cálculo*, Volume II, Editora Thomson.

[3] Anton H., *Cálculo*, Volume I, Editora Bookman.

[4] Anton H., *Cálculo*, Volume II, Editora Bookman.