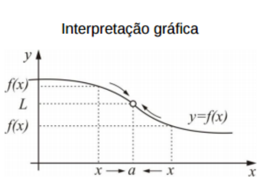
Definição Informal de Limite

Definição

Se os valores de uma função $f(x)$ podem ser tão próximos de um número L, tanto quanto se queira, ao tormarmos valores de x suficientemente perto de a (mas não igual ao número a), então escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Obs: *Se não existe um número L com essa propriedade diz-se que não existe $\lim_{x \to a} f(x)$*



Definição Informal de Limite

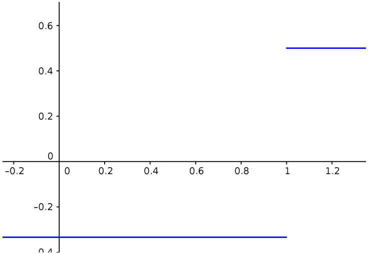
Exemplos:

1) Seja $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, $x \neq 1$. Estimar $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.
Obs: Embora $x = 1$ não pertença ao domínio da função, podemos investigar o comportamento dessa função próximo deste ponto, uma vez que ela está definida para todos os pontos em torno do $x = 1$.

Limites Laterais

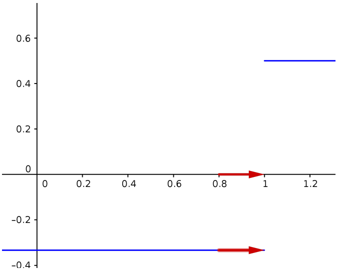
Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 1/2, & \text{se} \quad x > 1; \\ -1/3, & \text{se} \quad x \leq 1. \end{cases}$$



Limites Laterais

Note que
a medida que nos aproximamos
de $a = 1$ com números
x menores que 1 (pela esquerda),
temos que $f(x) = -1/3$.
Então, ao nos aproximarmos
de $a = 1$ pela esquerda, os valores
de $f(x)$ estão próximos (iguais,
neste exemplo) à $L = -1/3$.



Definição Informal: Limites pela Esquerda

Definição

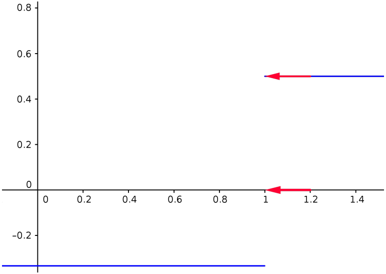
Se os valores de $f(x)$ puderem ser tomados tão próximos de um número L, tanto quanto se queira, desde que tomemos os valores de x suficientemente próximos de a - mas ***menores*** *do que a - então escrevemos:*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Assim, no exemplo anterior: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -1/3$

Limites Laterais

Agora, note que a medida que nos aproximamos de $a = 1$ com números x maiores que 1 (pela direita), temos que $f(x) = 1/2$. Então, ao nos aproximarmos de $a = 1$ pela direita, os valores de $f(x)$ estão próximos (iguais, neste exemplo) à $L = 1/2$.



Definição Informal: Limites pela Esquerda

Definição

*Se os valores de $f(x)$ puderem ser tomados tão próximos de um número L, tanto quanto se queira, desde que tomemos os valores de x suficientemente próximos de a - mas **maiores** do que a - então escrevemos:*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Assim, no exemplo anterior: $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1/2$

Limite Bilateral

Definição

O limite bilateral de uma função f existe em um ponto a se, e somente se, existirem os limites laterais naquele ponto e tiverem o mesmo valor; isto é

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

Assim, no exemplo anterior:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1/2 \neq -1/3 = \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

e, portanto,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \nexists.$$

Limite Infinito

Definição

As expressões

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$$

*significam que $f(x)$ cresce indefinidamente quando x tende a **a** pela esquerda ou pela direita, respectivamente. Se ambas são verdadeiras, escrevemos:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

Limite Infinito

Definição

As expressões

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

significam que $f(x)$ decresce indefinidamente quando x tende a ***a*** *pela esquerda ou pela direita, respectivamente. Se ambas são verdadeiras, escrevemos:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Calculando Limites

Teorema

Sejam $\boldsymbol{a}$ *e* $\boldsymbol{k}$ *números reais.*

$$a)\lim_{x\to a} k = k \qquad b)\lim_{x\to a} x = a$$

$$c)\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad d)\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Propriedades de Limites

Teorema

Sejam $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{k}$ *números real e suponha que* $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ *e* $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$*. Então:*

1. $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L_1 + L_2$;
2. $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = L_1 - L_2$;
3. $\lim_{x \to a} [kf(x)] = k \lim_{x \to a} f(x) = kL_1$;
4. $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = L_1 L_2$;
5. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$, *desde que* $L_2 \neq 0$;
6. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$, *desde que* $L_1 \geq 0$, *se* n *for positivo.*

- Gimenez, Carmem S. Comitre Introdução ao Cálculo / Carmem Suzane Comitre Gimenez, Rubens Starke,2. ed. – Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CFM,2010. http://mtm.grad.ufsc.br/files/2014/04/Introdução-ao-Cálculo.pdf
- Safier, Fred. Pré-Calculo: Coleção Schaum. Bookman Editora, 2009.
- Stewart, James. Cálculo, Volume I
- Anton, Howard. Cálculo, Volume I