1	
2	
3	
4	
5	
Total	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Profª. Karla Lima
Fundamentos da Matemática II — Avaliação P1

Matemática 02 de Setembro de 2022

Aluno(a):..

Obs: Respostas sem justificativa não serão consideradas.

(1) Classifique as afirmações abaixo como Verdadeira (V) ou Falsa (F).
Obs: Pode-se justificar brevemente, sem muitos cálculos. Porém, um item errado anula a pontuação de um correto.

(a) $\operatorname{sen}(18985658) > 1,0001$ (Não justificar usando a calculadora!)
(b) As funções cosseno e tangente são positivas no 4º quadrante.
(c) A função $f(x) = \dfrac{2}{1+\cos(x)}$ possui valor mínimo $y = 1$.
(d) A função tangente possui imagem no conjunto $[-1, 1]$.
(e) As funções seno e cosseno são periódicas.
(f) A $g(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ possui um máximo $y = 1$.

(2) Determine a imagem e o período da função $f(x) = 1 + 2\operatorname{sen}(2x - \pi/3)$ e esboce o seu gráfico.

(3) Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.

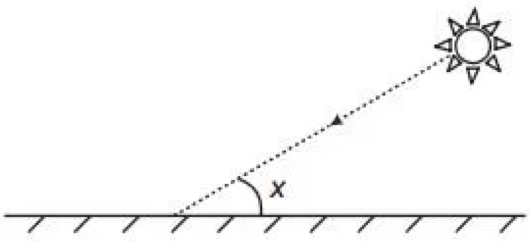
A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de certo produto sazonal pode ser descrito pela função

$$P(x) = 8 + 3\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$$

onde x representa o mês do ano, sendo $x = 1$ associado ao mês de janeiro, $x = 2$ ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até $x = 12$ associado ao mês de dezembro.

Na safra, qual o mês de produção máxima desse produto?

(4) Raios de luz solar estão atingindo a superfície de um lago formando um ângulo x com a sua superfície, conforme indica a figura. Em determinadas condições, pode-se supor que a intensidade



luminosa desses raios, na superfície do lago, seja dada aproximadamente por $I(x) = k\text{sen}\,(x)$, sendo k uma constante, e supondo-se que x está entre $0\,rad$ e $\dfrac{\pi}{2}\,rad$.

Quando $x = \dfrac{\pi}{6}$, a intensidade luminosa se reduz à qual percentual de seu valor máximo?

Dica: A redução do percentual é dada pela expressão $100\% - \dfrac{\text{valor dado}}{\text{valor máximo}} \times 100\%$.

(5) Resolva as inequações trigonométricas abaixo, em $\mathbb{R}$.

(a) $-\dfrac{1}{2} \leq \operatorname{sen} x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(b) $4\cos^2 x < 3$.

(c) $|\operatorname{tg} x| \geq \sqrt{3}$.

Lembretes

Arcos Especiais

$\operatorname{sen} 0° = 0$ e $\cos 0° = 1$

$\operatorname{sen} 30° = 1/2$ e $\cos 30° = \sqrt{3}/2$

$\operatorname{sen} 45° = \sqrt{2}/2$ e $\cos 45° = \sqrt{2}/2$

$\operatorname{sen} 60° = \sqrt{3}/2$ e $\cos 60° = 1/2$

$\operatorname{sen} 90° = 1$ e $\cos 90° = 0$

$\operatorname{sen} 180° = 0$ e $\cos 180° = -1$

P2 - Fundamentos I

27/10/22

01

a) $\operatorname{sen}(18985658) > 1{,}0001$ FALSA

A função seno tem como valor máximo $y = 1$. Portanto, o seno de qualquer número real é sempre menor ou igual a 1.

b) $\cos x > 0$ e $\operatorname{tg} x > 0$ no 4º quadrante FALSO

Embora $\cos x > 0$ no 4º quadrante, temos que $\operatorname{sen} x < 0$ neste mesmo quadrante. Portanto, $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x^{\,<0}}{\cos x_{\,>0}} < 0$ no 4º quadrante.

c) $f(x) = \dfrac{2}{1+\cos x} \geq 1$ VERDADEIRO

Com efeito, a função $\dfrac{2}{1+\cos x}$ atinge seu menor valor quando o denominador for máximo; ou seja, quando $\cos x = 1$. Assim,

$$\frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1 .$$

d) $tg\,x$ possui imagem em $[-1,1]$ FALSO

A tangente não possui imagem limitada, tendo valores em todo os reais.

e) seno e cosseno com período 2π. VERDADEIRO

Como

$$\cos(x+2\pi) = \cos x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen} x,$$

tais funções são periódicas.

f) $g(x) = \operatorname{sen} x + \cos x \leq 1$ FALSO

Basta tomar $x = \frac{\pi}{4}$:

$$g(\pi/4) = \operatorname{sen}\pi/4 + \cos\pi/4 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} > 1.$$

02 $f(x) = 1 + 2\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

Imagem: Temos que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$-1 \leq \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1.$$

Assim, multiplicando a desigualdade acima por $2(>0)$, obtemos

$$-2 \leq 2\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 2$$

Somando 1 à desigualdade anterior, obtemos

$$1-2 \leq 1+2\,\text{sen}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) \leq 2+1$$

$$\Rightarrow \quad -1 \leq f(x) \leq 3.$$

Portanto, a imagem de f é o intervalo $[-1, 3]$.

Período: O período da função é dado pelo argumento da função seno: $2x - \frac{\pi}{3}$. Temos que:

i) $2 \cdot x$ faz a compressão horizontal da função, alterando o seu período. Como $\text{sen}\, x$ possui um período de 2π, a função $\text{sen}(2x)$ faz esse período cair à metade:

$2x = 2\pi \Rightarrow x = \pi$ (para andar 2π rad, basta tomar $x = \pi$ rad).

Logo, o período de $f(x)$ é π rad.

Já o $-\frac{\pi}{3}$ em $\text{sen}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$, desloca o gráfico desta função horizontalmente, para à esquerda, em $\frac{\pi}{3}$ unidades.

Gráfico: Com as informações dadas, podemos esboçar o gráfico de f. Vamos determinar os ângulos x em que $2x - \frac{\pi}{3}$ é um dos arcos especiais:

* $2x - \frac{\pi}{3} = 0 \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 0 + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

* $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{5\pi}{6} \cdot \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{5\pi}{12}$

* $2x - \frac{\pi}{3} = \pi \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$

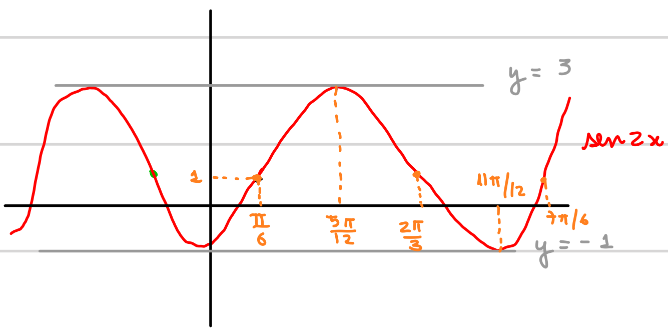
* $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{11\pi}{6} \cdot \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{11\pi}{12}$

$2x - \frac{\pi}{3} = 2\pi \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{7\pi}{3} \cdot \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}$

iv) $1 + 2 \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$



$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$

$f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 3$

$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1$

$f\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -1$

$f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 1$

03 $P(x) = 8 + 3\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$

A produção é máxima no mês com o preço mais baixo.

Dada a função $P(x)$, seu menor valor é obtido quando

$\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right) = -1$. Ou seja,

$$\frac{\pi x - \pi}{6} = \pi$$

$$\Rightarrow \frac{\pi x - \pi}{6} \times 6 = \pi \times 6$$

$$\Rightarrow \pi x - \pi = 6\pi$$

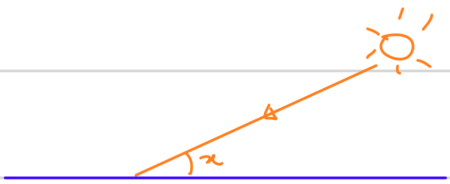
$$\Rightarrow \pi x - \pi + \pi = 6\pi + \pi$$

$$\Rightarrow \pi x = 7\pi$$

$$\Rightarrow \frac{\pi x}{7} = \frac{7\pi}{7} \Rightarrow x = 7.$$

Logo, o mês de produção máxima é Julho.

04



$I(x) = K\,\text{sen}(x)$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Quando $x = \frac{\pi}{6}$, temos

$$I(\pi/6) = K\,\text{sen}(\pi/6) = K \cdot \frac{1}{2} = \frac{K}{2}.$$

Como o valor máximo é atingido quando $x = \frac{\pi}{2}$ ($\text{sen}\,\pi/2 = 1$),

temos que:

$$\frac{I(\pi/6)}{I(\pi/2)} = \frac{\frac{k}{2}}{k} = \frac{k}{2} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{2}$$

e a intensidade luminosa se reduz à

$$100\% - \frac{1}{2} \cdot 100\% = 50\%$$

do seu valor máximo.

05

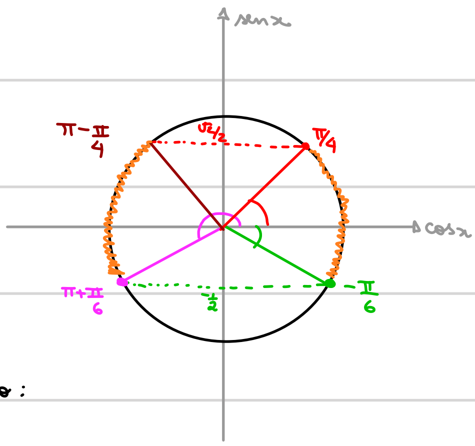
a) $-\frac{1}{2} \leq \operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Temos que $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$ quando:

$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

ou

$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$.



Por outro lado, $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ quando:

$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

ou

$x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

Assim, para que $-\frac{1}{2} \leq \operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{2}}{2}$, devemos ter

$$x \in S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} + 2k\pi < x \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

b) $4\cos^2 x < 3$

Devemos ter

$$4\cos^2 x - 3 < 0 \overset{y=\cos x}{\Longrightarrow} 4y^2 - 3 < 0 .$$

As raízes do polinômio $4y^2-3$ são

$$4y^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 4y^2 - 3 + 3 = 0 + 3$$

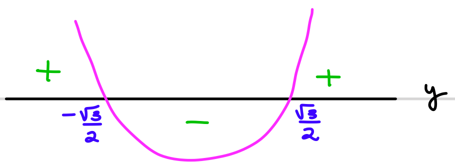
$$\Leftrightarrow \frac{4y^2}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sqrt{y^2} = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\Leftrightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow y_1 = \sqrt{3}/2, \quad y_2 = -\sqrt{3}/2$$

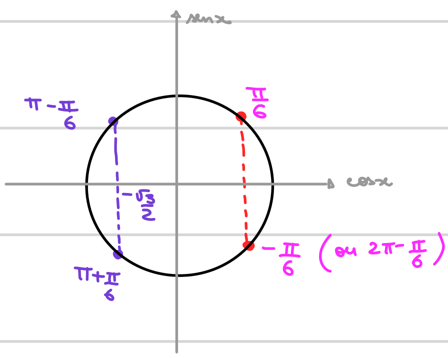
Estudando o sinal do polinômio $4y^2 - 3$, obtemos:

$a > 0$



Assim, $4y^2 - 3 < 0$ se $-\frac{\sqrt{3}}{2} < y < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Como $y = \cos x$, devemos ter

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2} .$$



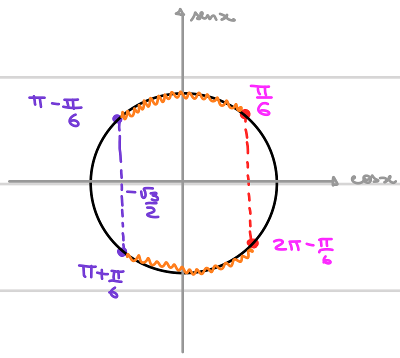
Temos que $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ quando

$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$.

Para $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, devemos ter $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$.

Portanto, para que $-\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$,

devemos ter



$$x \in S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \frac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{11\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

c) $|\operatorname{tg} x| \geq \sqrt{3}$

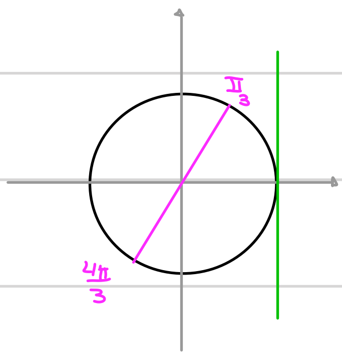
Devemos ter

$$\operatorname{tg} x \geq \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} x \leq -\sqrt{3}.$$

Como $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$, então

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \iff x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

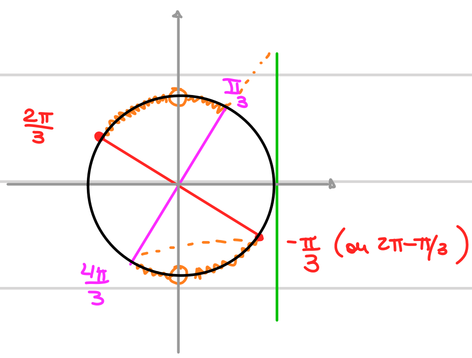
$$\text{ou } x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$



Por outro lado,

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3},$$

logo



$$\operatorname{tg}(x) = -\sqrt{3} \iff x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi =$$

$$\text{ou } x = \pi + \left(-\frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

Portanto, para que $|tg\,x| \geq \sqrt{3}$, devemos ter

$x \in S = \{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

ou $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi \leq x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ ou $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi < x \leq \frac{5\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \}$.