UFGD
Universidade Federal
da Grande Dourados

Cálculo II

Lista de Exercícios: P1

1 - Técnicas de Integração

1.1 - Revisão de Integrais.

1.2 - O Método de Substituição.

1.3 - Integração por partes.

1.4 - Integração por Frações Parciais.

1.5 - Integrais impróprias.

1.6 - Aplicações de integrais.

2 - EDO's de 1ª ordem

2.1 - Definição e Motivação.

2.2 - Resolução de EDO's de 1ª ordem: Equações Separáveis.

2.3 - Resolução de EDO's de 1ª ordem: Método do Fator Integrante.

Profa. Karla Katerine Barboza de Lima
FACET/UFGD

1 Técnicas de Integração

Tabela Básica

- $\displaystyle\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$
- $\displaystyle\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$
- $\displaystyle\int e^u\,du = e^u + C$
- $\displaystyle\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
- $\displaystyle\int \operatorname{sen}(u)\,du = -\cos(u) + C$
- $\displaystyle\int \cos(u)\,du = \operatorname{sen}(u) + C$

1.1 Revisão de Integração

Exercício 1 *Calcule as integrais:*

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^{100}dx$

b) $\displaystyle\int_{0}^{1} 1 + \frac{1}{2}u^4 - \frac{2}{5}u^9 du$

c) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{v^5 + 3v^6}{v^4} dv$

d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{u+1} du$

e) $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)dx$, *onde:*

$$f(x) = \begin{cases} 2 & se \quad -2 \leq x \leq 0, \\ 4 - x^2 & se \quad 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

f) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{4}{x^3} dx$

Gabarito

1. a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^{100}dx = \frac{2}{101}$

   b) $\displaystyle\int_{0}^{1} 1 + \frac{1}{2}u^4 - \frac{2}{5}u^9 du = \frac{53}{50}$

   c) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{v^5 + 3v^6}{v^4} dv = \frac{17}{2}$

d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{u+1} du = e^2 - 1$

e) $\dfrac{28}{3}$

f) Indeterminado, pois f possui um descontinuidade infinita no intervalo de integração.

1.2 O Método de Substituição

Exercício 2 *Calcule a integral fazendo a substituição dada.*

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$, $u = 3-5x$.

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(3x)\,dx$, $u = 3x$.

c) $\displaystyle\int_0^1 x(4+x^2)^{10}\,dx$, $u = 4+x^2$.

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3\theta sen\,\theta\,d\theta$, $u = \cos\theta$.

e) $\displaystyle\int_0^1 (x^2-1)^4 x^5\,dx$, $u = x^2-1$.

Exercício 3 *Avalie a integral definida.*

a) $\displaystyle\int_0^1 \cos(\pi t/2)\,dt$.

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$.

c) $\displaystyle\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$.

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^z+1}{e^z+z}\,dz$.

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Exercício 4 *Um tanque de armazenamento de petróleo sofre uma ruptura em* $t = 0$ *e o petróleo vaza do tanque a uma taxa de* $r(t) = 100e^{-0{,}01t}$ *litros por minuto. Quanto petróleo vazou na primeira hora?*

Exercício 5 *A respiração é cíclica e o ciclo completo respiratório desde o início da inalação até o fim da expiração demora cerca de 5 s. A taxa máxima de fluxo de ar nos pulmões é de cerca de* $0,5\,L/s$. *Isso explica, em partes, porque a função* $f(t) = \frac{1}{2}sen(2\pi t/5)$ *tem sido frequentemente utilizada para modelar a taxa de fluxo de ar nos pulmões. Use esse modelo para encontrar o volume de ar inalado nos pulmões no instante* t.

Exercício 6 *Se* f *for contínua e* $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx = 10$, *calcule* $\displaystyle\int_0^2 f(2x)\,dx$.

Gabarito

2. a) $\dfrac{1}{14}$

b) 0

c) $\dfrac{5^{11}-4^{11}}{22}$

d) $\dfrac{1}{4}$

e) $\dfrac{1}{210}$

3. a) $\dfrac{2}{\pi}$

   b) $e-\sqrt{e}$

   c) 2

   d) $\ln(e+1)$

   e) $2-2\ln 2$

4. Aproximadamente 4512 litros.

5. $\dfrac{5}{4\pi}\left(1-\cos\left(\dfrac{2\pi t}{5}\right)\right)$ litros.

6. 5

1.3 Integração por Partes

Exercício 7 *Calcule a integral usando a integração por partes com as escolhas de u e dv dadas.*

a) $\displaystyle\int x^2 \ln x \, dx,\ u = \ln x \text{ e } dv = x^2 dx.$

b) $\displaystyle\int \theta \cos(\theta)\, d\theta,\ u = \theta \text{ e } dv = \cos\theta \, d\theta.$

Exercício 8 *Calcule a integral.*

a) $\displaystyle\int xe^{-x}\, dx.$

b) $\displaystyle\int p^5 \ln p \, dp.$

c) $\displaystyle\int (\ln x)^2 \, dx.$

d) $\displaystyle\int_0^1 (x^2+1)e^{-x}\, dx.$

e) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\, dx.$

f) $\displaystyle\int e^{2x} sen\,(3x)\, dx.$

Exercício 9 *Primeiro faça uma substituição e então use integração por partes para calcular a integral.*

a) $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \cos(\sqrt{x})\, dx.$

b) $\displaystyle\int_0^1 t^3 e^{-t^2}\, dt.$

c) $\displaystyle\int_0^1 x\ln(1+x)\, dx.$

Exercício 10 *Uma partícula que se move ao longo de uma reta tem velocidade igual à* $v(t) = t^2e^{-t}$ *metros por segundo, após t segundos. Qual a distância que essa partícula percorrerá durante os primeiros* 5 *segundos?*

Exercício 11 *Suponha que* $f(1) = 2$, $f(4) = 7$, $f'(1) = 5$, $f'(4) = 3$ *e* f'' *seja contínua. Encontre o valor de* $\displaystyle\int_1^4 xf''(x)\, dx.$

Gabarito

7. a) $\dfrac{x^3 \ln x}{3} - \dfrac{x^3}{9} + c.$

   b) $\theta \operatorname{sen} \theta + \cos\theta + c.$

8. a) $-xe^{-x} - e^{-x} + c.$

   b) $\dfrac{p^6 \ln p}{6} - \dfrac{p^6}{36} + c.$

   c) $x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + c.$

   d) $3 - \dfrac{6}{e}.$

   e) $\dfrac{1 - \ln 2}{2}.$

   f) $\dfrac{1}{13} e^{2x}(2\operatorname{sen}(3x) - 3\cos(3x)) + c.$

9. a) $-4.$

   b) $\dfrac{-2e^{-1} + 1}{2}.$

   c) $\dfrac{1}{4}.$

10. $2 - 37e^{-5}$ metros.

11. 2.

1.4 Integração por Frações Parciais

Exercício 12 *Calcule as integrais abaixo.*

a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+1}dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x-9}{x-2}\,dx$

c) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\,dx$

d) $\displaystyle\int_3^4 \frac{x^3-2x^2-4}{x^3+2x^2}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+5)^2(x-1)}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{x^3+4}{x^2+4}\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}\,dx$

h) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$

Exercício 13 *Um método de retardar o crescimento de uma população de insetos sem usar pesticidas é introduzir na população um número de machos estéreis que cruzam com fêmeas férteis, mas não produzem filhotes. Se P representar o número de fêmeas na população de insetos, S, o número de machos estéreis introduzidos a cada geração e r, a taxa de crescimento populacional natural, então a população de fêmeas está relacionada com o instante t através de*

$$t = \int \frac{P+S}{P[(r-1)P-S]}\,dP.$$

Suponha que uma população de insetos com 10000 *fêmeas cresça a uma taxa de $r = 0,10$ e que* 900 *machos estéreis sejam adicionados. Calcule a integral para dar uma equação relacionando a população de fêmeas com o tempo. (Observe que a equação resultante não pode ser resolvida explicitamente para P.)*

Exercício 14 *Se f for uma função quadrática tal que $f(0) = 1$ e*

$$\int \frac{f(x)}{x^2(x+1)^3}\,dx$$

for uma função racional, encontre o valor de $f'(0)$.

Gabarito

12. a) $\frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1| + C$

    b) $x - 7\ln|x-2| + C$

    c) $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

    d) $\frac{7}{6} + \ln\frac{2}{3}$

    e) $-\frac{1}{36}\ln|x+5| + \frac{1}{6}\frac{1}{x+5} + \frac{1}{36}\ln|x-1| + C$

    f) $\frac{1}{2}x^2 - 2\ln(x^2+4) + 2\tan^{-1}(x/2) + C$

    g) $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$

    h) $\ln\left[\frac{(e^x+2)^2}{e^x+1}\right] + C$

13. $-\ln P - \frac{1}{9}\ln(0,9\,P + 900) + C$, onde $C \approx 10,23$.

14. $f'(0) = 3$.

Referências

[1] STEWART J., *Cálculo*, Volume I, Editora Thomson.

[2] Anton H., *Cálculo*, Volume I, Editora Bookman.