CAPÍTULO XII
Inequações

I. Inequações fundamentais

162. Sejam *f* e *g* duas funções trigonométricas da variável real *x*. Resolver a inequação $f(x) < g(x)$ significa obter o conjunto *S*, denominado conjunto solução ou conjunto verdade, dos números *r* para os quais $f(r) < g(r)$ é uma sentença verdadeira.

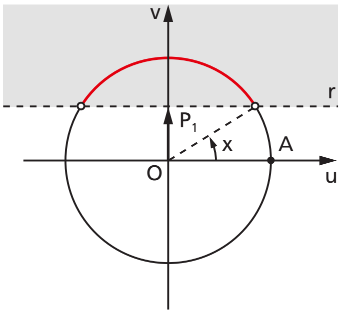
Quase todas as inequações trigonométricas podem ser reduzidas a inequações de um dos seguintes seis tipos:

1ª) $\operatorname{sen} x > m$
2ª) $\operatorname{sen} x < m$
3ª) $\cos x > m$
4ª) $\cos x < m$
5ª) $\operatorname{tg} x > m$
6ª) $\operatorname{tg} x < m$

em que *m* é um número real dado. Por esse motivo, essas seis são denominadas **inequações fundamentais**. Assim, é necessário saber resolver as inequações fundamentais para poder resolver outras inequações trigonométricas.

II. Resolução de sen x > m

163. Marcamos sobre o eixo dos senos o ponto P_1 tal que $OP_1 = m$. Traçamos por P_1 a reta *r* perpendicular ao eixo. As imagens dos reais *x* tais que $\text{sen } x > m$ estão na interseção do ciclo com o semiplano situado acima de *r*.



Finalmente, descrevemos os intervalos aos quais *x* pode pertencer, tomando o cuidado de partir de A e percorrer o ciclo no sentido anti-horário até completar uma volta.

164. Exemplo de inequação sen x > m

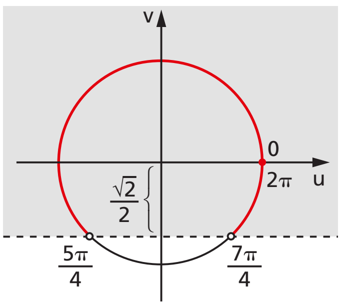
Resolver a inequação $\text{sen } x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$, em $\mathbb{R}$.

Procedendo conforme foi indicado, temos:

$$0 + 2k\pi \leqslant x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

ou

$$\frac{7\pi}{4} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$$



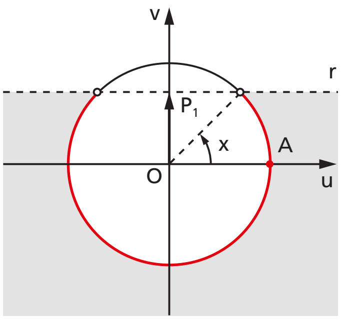
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 + 2k\pi \leqslant x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } \frac{7\pi}{4} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi\right\}$$

Notemos que escrever $\frac{7\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ estaria errado pois, como $\frac{7\pi}{4} > \frac{5\pi}{4}$, não existe *x* algum neste intervalo.

III. Resolução de sen x < m

165. Marcamos sobre o eixo dos senos o ponto P_1 tal que $OP_1 = m$. Traçamos por P_1 a reta *r* perpendicular ao eixo. As imagens dos reais *x* tais que sen x < m estão na interseção do ciclo com o semiplano situado abaixo de *r*.

Finalmente, partindo de A e percorrendo o ciclo no sentido anti-horário até completar uma volta, descrevemos os intervalos que convêm ao problema.



166. Exemplo de inequação sen x < m

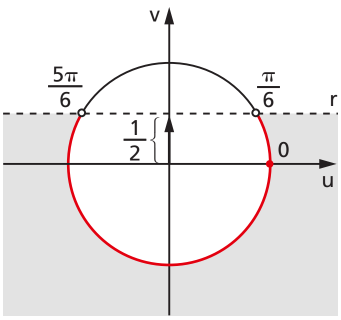
Resolver a inequação $\text{sen } x < \dfrac{1}{2}$, em $\mathbb{R}$.

Procedendo conforme foi indicado, temos:

$$0 + 2k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

ou

$$\frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$$



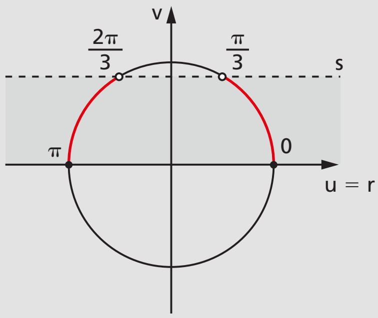
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 + 2k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \text{ ou } \ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi\right\}$$

EXERCÍCIOS

334. Resolva a inequação $0 \leqslant \text{sen } x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, para $x \in \mathbb{R}$.

Solução

A imagem de *x* deve ficar na interseção do ciclo com a faixa do plano compreendida entre *r* e s. Temos, então:



$$0 + 2k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

ou

$$\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x \leqslant \pi + 2k\pi$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 + 2k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x \leqslant \pi + 2k\pi\right\}$$

335. Resolva a inequação sen x $\geqslant$ 0, sendo $x \in \mathbb{R}$.

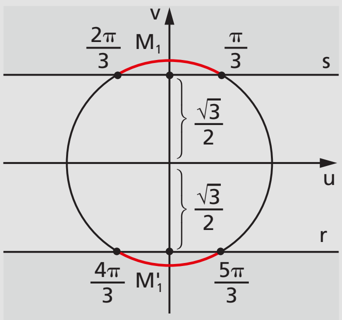
336. Resolva a inequação sen x $\leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$, em $\mathbb{R}$.

337. Resolva a inequação $-\frac{1}{2} \leqslant$ sen x $< \frac{\sqrt{2}}{2}$, para $x \in \mathbb{R}$.

338. Resolva a inequação $|\text{sen } x| \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$, em $\mathbb{R}$.

Solução

$$|\text{sen } x| \geqslant \frac{+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{ou} \\ \text{sen } x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$



A imagem de *x* deve ficar na interseção do ciclo com o semiplano situado abaixo de *r* ou com o semiplano situado acima de s.

Assim, temos:

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right\}$$

339. Resolva a inequação $|\text{sen } x| \leqslant \dfrac{1}{2}$, em $\mathbb{R}$.

340. Resolva a inequação $|\text{sen } x| > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, para $x \in \mathbb{R}$.

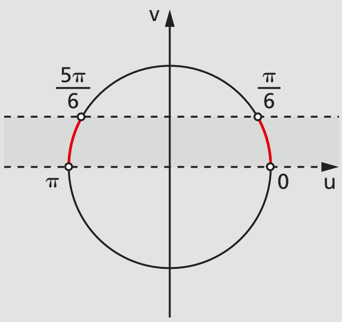
341. Resolva a inequação $2 \text{ sen}^2 x < \text{sen } x$, para $x \in \mathbb{R}$.

Solução

$2 \text{ sen}^2 x < \text{sen } x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \text{ sen}^2 x - \text{sen } x < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 < \text{sen } x < \dfrac{1}{2}$



Examinando o ciclo trigonométrico, obtemos:

$2k\pi < x < \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$

ou

$\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi < x < \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi\right\}$

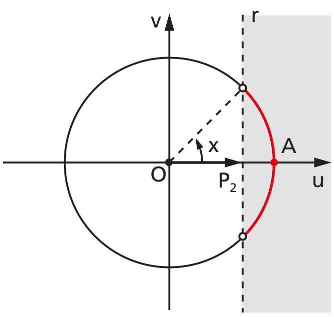
342. a) Para quais valores de *x* existe $\log_2 (2 \text{ sen } x - 1)$?

b) Resolva a equação, em $\mathbb{R}$:

$\log_2 (2 \text{ sen } x - 1) = \log_4 (3 \text{ sen}^2 x - 4 \text{ sen } x + 2)$

IV. Resolução de cos x > m

167. Marcamos sobre o eixo dos cossenos o ponto P_2 tal que $OP_2 = m$. Traçamos por P_2 a reta *r* perpendicular ao eixo. As imagens dos reais *x* tais que $\cos x > m$ estão na interseção do ciclo com o semiplano situado à direita de *r*.



Para completar, descrevemos os intervalos que convêm ao problema.

168. Exemplo de inequação cos x > m

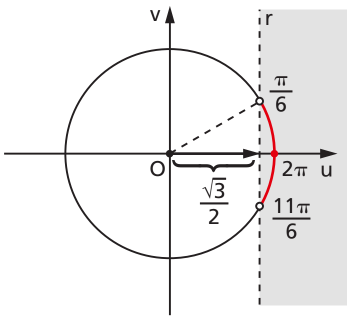
Resolver a inequação $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$, para $x \in \mathbb{R}$.

Procedendo conforme foi indicado, temos:

$$2k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

ou

$$\frac{11\pi}{6} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$$

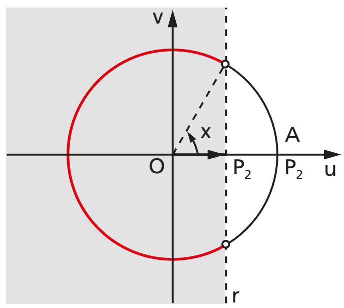


$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \frac{11\pi}{6} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi\right\}$$

V. Resolução de cos x < m

169. Marcamos sobre o eixo dos cossenos o ponto P_2 tal que $OP_2 = m$. Traçamos por P_2 a reta r perpendicular ao eixo. As imagens dos reais x tais que $\cos x < m$ estão na interseção do ciclo com o semiplano situado à esquerda de r.

Completamos o problema descrevendo os intervalos que convêm.



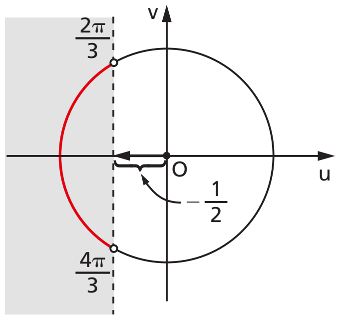
170. Exemplo de inequação cos x < m

Resolver a inequação $\cos x < -\frac{1}{2}$.

Procedendo conforme foi indicado, temos:

$$\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi.$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right\}$$



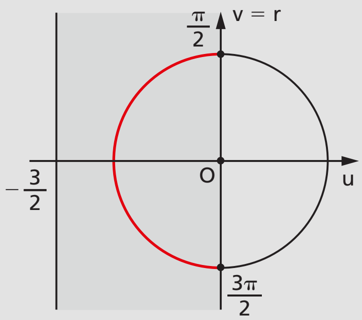
EXERCÍCIOS

343. Resolva a inequação $-\frac{3}{2} \leqslant \cos x \leqslant 0$, para $x \in \mathbb{R}$.

Solução

A imagem de *x* deve ficar na interseção do ciclo com a faixa do plano compreendida entre *r* e s. Temos, então:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right\}$$



344. Resolva a inequação $\cos x \geqslant -\frac{1}{2}$, em $\mathbb{R}$.

345. Resolva a inequação $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$, para $x \in \mathbb{R}$.

346. Resolva a inequação $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \cos x \leqslant \frac{1}{2}$, para $x \in \mathbb{R}$.

347. Resolva a inequação $|\cos x| < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, em $\mathbb{R}$.

348. Resolva a inequação $|\cos x| > \dfrac{5}{3}$, em $\mathbb{R}$.

349. Resolva a inequação $\cos 2x + \cos x \leqslant -1$, para $x \in \mathbb{R}$.

Solução

$\cos 2x + \cos x \leqslant -1 \iff (2\cos^2 x - 1) + \cos x \leqslant -1 \iff$

$\iff 2\cos^2 x + \cos x \leqslant 0 \iff -\dfrac{1}{2} \leqslant \cos x \leqslant 0$

Examinando o ciclo trigonométrico, obtemos:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right\}$$

350. Resolva a inequação $4\cos^2 x < 3$, em $\mathbb{R}$.

351. Resolva a inequação $\cos 2x \geqslant \cos x$, para $x \in \mathbb{R}$.

352. Resolva a inequação $\operatorname{sen} x + \cos x \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, para $x \in \mathbb{R}$.

Solução

$\operatorname{sen} x + \cos x \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2} \iff \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2} \iff$

$\iff 2 \cdot \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4} \cdot \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2} \iff \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \geqslant \dfrac{1}{2}$

Fazendo $x - \dfrac{\pi}{4} = y$, temos a inequação $\cos y \geqslant \dfrac{1}{2}$. Examinando o ciclo, vem:

$2k\pi \leqslant y < \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$

ou

$\dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi \leqslant y < 2\pi + 2k\pi$

como $x = y + \frac{\pi}{4}$, vem:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \ \text{ ou } \ \frac{23\pi}{12} + 2k\pi \leqslant x < \frac{9\pi}{4} + 2k\pi\right\}$$

353. Resolva a inequação $\operatorname{sen} x + \cos x < 1$, em $\mathbb{R}$.

354. Determine o domínio da função real *f* dada por $f(x) = \sqrt{\dfrac{\cos 2x}{\cos x}}$, em $\mathbb{R}$.

Solução

I) Devemos ter $\dfrac{\cos 2x}{\cos x} \geqslant 0$.

II) Fazendo $\cos x = y$, temos:

$$\frac{\cos 2x}{\cos x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{2y^2 - 1}{y} \geqslant 0$$

III) Fazendo o quadro de sinais:

y		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$2y^2 - 1$	$+$		$-$		$-$		$+$
y	$-$		$-$		$+$		$+$
$\frac{2y^2 - 1}{y}$	$-$		$+$		$-$		$+$

concluímos que o quociente é positivo para:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant y < 0 \ \text{ ou } \ y \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$$

IV) Examinando o ciclo trigonométrico, temos:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \cos x < 0 \iff \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x \leqslant \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi \leqslant x < \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \begin{cases} 2k\pi \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi \leqslant x \leqslant 2\pi + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \Big\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x \leqslant \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \leqslant x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \leqslant x \leqslant 2\pi + 2k\pi\Big\}$$

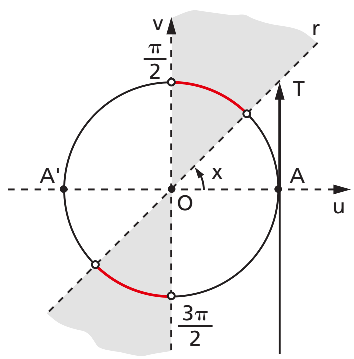
355. Resolva o sistema abaixo:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x > \dfrac{1}{2} \\ \cos x \geqslant \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

VI. Resolução de tg x > m

171. Marcamos sobre o eixo das tangentes o ponto T tal que AT = m. Traçamos a reta r = $\overleftrightarrow{OT}$. As imagens dos reais *x* tais que tg x > m estão na interseção do ciclo com o ângulo $r\hat{O}V$.

Para completar, descrevemos os intervalos que convêm ao problema.



172. Exemplo de inequação tg x > m

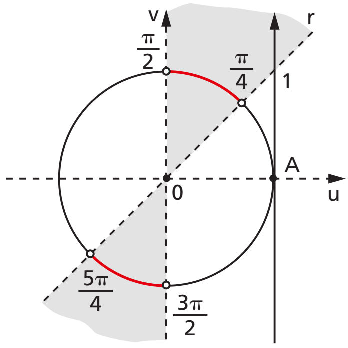
Resolver a inequação tg x > 1, em $\mathbb{R}$.

Procedendo conforme foi indicado, temos:

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

ou

$$\frac{5\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$



que podem ser resumidos em:

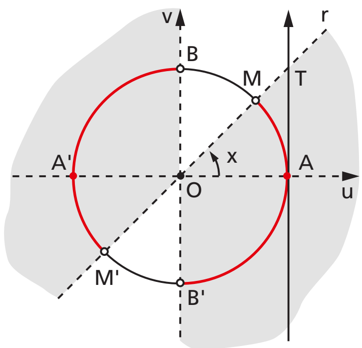
$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$$

VII. Resolução de tg x < m

173. Marcamos sobre o eixo das tangentes o ponto T tal que AT = m. Traçamos a reta $r = \overleftrightarrow{OT}$. As imagens dos reais *x* tais que tg x < m estão na interseção do ciclo com o ângulo vÔr.

Para completar, descrevemos os intervalos que convêm ao problema.



174. Exemplo de inequação tg x < m

Resolver a inequação tg x < $\sqrt{3}$, em $\mathbb{R}$.

Procedendo conforme foi indicado, temos:

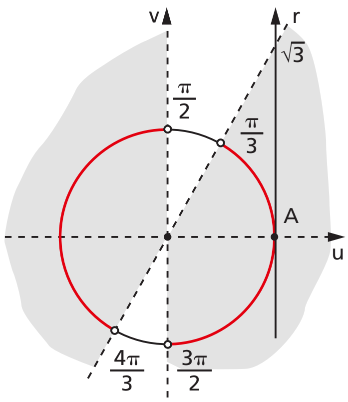
$$0 + 2k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

ou

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

ou

$$\frac{3\pi}{2} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$$



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \frac{3\pi}{2} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi\right\}$$

EXERCÍCIOS

356. Resolva a inequação $|\text{tg } x| \leqslant 1$, para $x \in \mathbb{R}$.

Solução

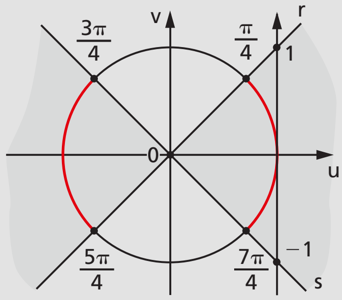
$|\text{tg } x| \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant \text{tg } x \leqslant 1$

A imagem de *x* deve ficar na interseção do ciclo com ângulo rÔs. Temos, então:

$$0 + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

ou

$$\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \leqslant x < 2\pi + 2k\pi$$



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \leqslant x < 2\pi + 2k\pi\right\}$$

357. Resolva a inequação $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$, em $\mathbb{R}$.

358. Resolva a inequação $\operatorname{tg} x \leqslant 0$, para $x \in \mathbb{R}$.

359. Resolva a inequação $-\sqrt{3} < \operatorname{tg} x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$, para $x \in \mathbb{R}$.

360. Resolva a inequação $|\operatorname{tg} x| \geqslant \sqrt{3}$, em $\mathbb{R}$.

361. Seja $y = a^{\log \operatorname{tg} x}$ com $0 < a < 1$, em que $\log u$ indica o logaritmo neperiano de u. Determine x para que $\log y \geqslant 0$.

LEITURA

Euler e a incorporação da trigonometria à análise

Hygino H. Domingues

Dentre as contribuições da Índia à matemática, merece lugar de relevo a introdução da ideia de seno. O responsável por essa inovação foi o matemático Aryabhata (476-?), ao substituir as cordas gregas (ver págs. 36 a 38) por semicordas — para as quais calculou tábuas de 0° a 90°, em intervalos de 3°45′ cada um.

Os árabes, posteriormente, não se limitaram a apenas divulgar a obra de gregos e hindus: também deram contribuições significativas próprias à matemática, em particular à trigonometria. Neste campo, em que adotaram a noção de seno dos hindus, introduziram os conceitos de tangente, cotangente, secante e cossecante, mas também como medidas de segmentos convenientes em relação a unidades pré-escolhidas. E o primeiro texto sistemático de trigonometria, desvinculado da astronomia, é de um autor árabe: Nasir Eddin (1201-1274).

No Renascimento talvez o ponto alto da trigonometria seja o início de sua abordagem analítica, em que pontificou Viète. Mesmo com sua notação pouco funcional, Viète estabeleceu relações trigonométricas importantes, como as fórmulas para sen $(n\theta)$ e cos $(n\theta)$ em função de sen θ e cos θ.

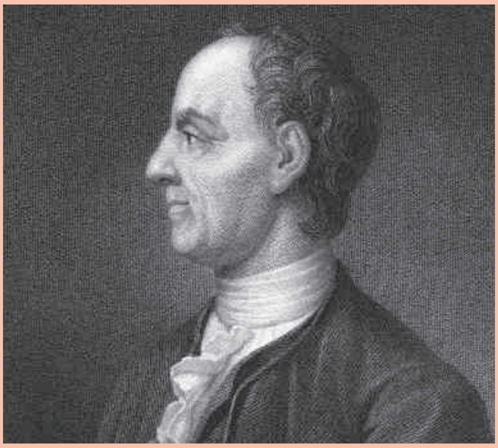
Um grande avanço no sentido de levar a trigonometria para os domínios da análise foi dado por Newton, no século XVII, ao expressar as funções circulares na forma de séries inteiras (por exemplo:

sen $x = x - \frac{x_3}{3!} + \frac{x_5}{5!} - ...$).

Porém, não seria exagero nenhum afirmar que o verdadeiro fundador da trigonometria moderna foi Leonhard Euler (1707-1783), o maior matemático do século XVIII.

Euler era filho de um pastor luterano de uma localidade da Suíça próxima da cidade de Basileia. Pela vontade do pai seguiria também o sacerdócio; mas, na Universidade da Basileia, para onde fora com essa finalidade, conheceu Jean Bernoulli e seus filhos Nicolau e Daniel, o que acabou pesando fortemente em sua opção pela matemática. Pouco depois de formado foi convidado a integrar a Academia de S. Petersburgo, na Rússia, onde já estavam Nicolau e Daniel (que o haviam recomendado). Depois de alguns vaivéns, em 1730 ingressou naquela instituição como físico. E, três anos depois, com a volta de Daniel à Suíça, foi-lhe confiado o posto máximo de matemática da Academia. Nessa posição ficou até 1741 quando aceitou se transferir para a Academia de Berlim, a convite de Frederico, o Grande. Depois de 25 anos na Alemanha retorna enfim a S. Petersburgo, onde terminaria seus dias.

DESIGN PICS-HISTORICAL/KEN WELSH/DIOMEDIA



Leonhard Euler (1707-1783).

Euler, com seus cerca de 700 trabalhos, entre livros e artigos, é sem dúvida o mais prolífico e versátil matemático de todos os tempos. Os originais que deixou com a Academia de S. Petersburgo ao morrer eram tantos que sua publicação só foi concluída 47 anos depois. E diga-se que Euler perdeu a visão em 1766, o que o obrigou, a partir de então, a ditar suas ideias a algum filho ou a secretários.

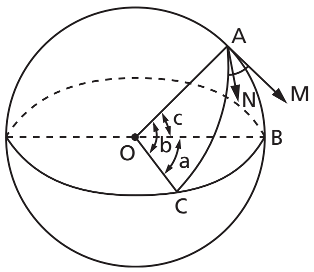
Euler foi também um grande criador de notações. Dentre os símbolos mais importantes devidos a ele estão: *e* para base do sistema para logaritmos naturais (talvez extraído da inicial da palavra “exponencial”); *i* para a unidade imaginária $\left(i = \sqrt{-1}\right)$; π para a razão entre a circunferência e seu diâmetro (na verdade, neste caso, foi apenas o divulgador dessa notação, posto já ter sido ela usada anteriormente); *lx* para o logaritmo de *x*; Σ para somatórios e f(x) para uma função de *x*.

Quanto à trigonometria, seu papel renovador surge já nos conceitos básicos. O seno, por exemplo, não é mais um segmento de reta a ser expresso em relação a alguma unidade, mas a abscissa de um ponto do círculo unitário de centro na origem e, portanto, é um número puro. Caracteriza-se dessa forma (vale o mesmo para as demais linhas trigonométricas) a ideia de relação funcional entre arcos e números reais.

Euler dedicou duas memórias à trigonometria esférica, nas quais partiu do fato de que, sobre a superfície de uma esfera, as geodésicas (arcos de menor comprimento ligando dois pontos) são arcos de círculos máximos. Assim, um triângulo esférico é determinado por três círculos máximos, como na figura. Entre outros resultados obteve, por máximos e mínimos, a lei dos senos da trigonometria esférica (já conhecida):

$$\frac{\text{sen } \hat{A}}{\text{sen a}} = \frac{\text{sen } \hat{B}}{\text{sen b}} = \frac{\text{sen } \hat{C}}{\text{sen c}}$$

- O ângulo $\hat{A}$ do triângulo esférico ABC é o ângulo formado pelas tangentes $\overrightarrow{MA}$ e $\overrightarrow{NA}$ aos arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{AC}$, em A, respectivamente.
- Analogamente se definem os ângulos B e C.
- Prova-se que vale a relação $180° < \text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{C}) < 540°$



A famosa **identidade de Euler**, ligando a trigonometria à função exponencial ($e^{ix} = \cos x + i \text{ sen } x$) na verdade já aparecera antes sob a forma logarítmica (Roger Cotes — 1714). Dela decorre a notável igualdade:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Para julgar um gênio, só outro gênio. E Laplace dizia a seus alunos: “Leiam, leiam Euler, ele é o nosso mestre em tudo”.