

Integrais

Introdução

Karla Lima


Sumário



1. Contexto Histórico

2. Primitivas

3. O Teorema Fundamental do Cálculo

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the top-left corner, while a light gray shape occupies the bottom-left corner. The rest of the slide is white. The text 'Contexto Histórico' is centered in the white area.

Contexto Histórico

O Desenvolvimento do Cálculo



- ▶ Foi um dos avanços mais significativos da história da matemática.
- ▶ Com derivadas, podemos mostrar como:
 - ▶ a posição de um veículo muda com o tempo;
 - ▶ o brilho de uma fonte de luz diminui quando ela se afasta;
 - ▶ a posição dos olhos de uma pessoa se altera conforme seguem um objeto em movimento.
- ▶ Além disso, podemos determinar onde fenômenos alcançam o valor máximo ou mínimo e a que taxa passam de um a outro.

O Desenvolvimento do Cálculo



- ▶ Além das taxas de mudanças, outro aspecto importante do cálculo é o somatório, que evoluiu da necessidade de calcular áreas.
- ▶ O estudo de áreas e volumes foi formalizado no que se tornou conhecido como integração.
- ▶ O conceito de integral extrapolou o cálculo dessas duas grandezas, sendo aplicado em diversos tipos de problemas.

O Desenvolvimento do Cálculo



- ▶ Segundo a concepção de Arquimedes, o círculo tinha um número infinito de lados.
- ▶ Ele obteve uma área aproximada do círculo colocando-o dentro de polígonos de lados infinitesimalmente pequenos.
- ▶ Pensava-se que o resultado convergiria por fim para a área verdade.
- ▶ Esse método, chamado **método da exaustão**, foi adotado por Arquimedes (em 225 a.C.) para obter uma área aproximada do círculo.
- ▶ Ver o arquivo do Geogebra: `area_circulo.ggb`.

O Método da Exaustão



- ▶ A ideia do cálculo da área do círculo foi estendida ao cálculo de área de outras formas.
- ▶ Por exemplo, se uma região é delimitada pelo gráfico de uma função não negativa (≥ 0) e o eixo x , podemos usar a área de retângulos para aproximar (e calcular!) a área dada.
- ▶ Ver o arquivo do Geogebra: `area_sob_grafico.ggb`.
- ▶ Mas nem sempre o resultado de uma integral é uma área. Veja o exemplo de uma integral de uma função que toma valores negativos no intervalo dado: `integral.ggb`.

A Definição de Integral



Definição 1

Se f é uma função **CONTÍNUA** definida em $a \leq x \leq b$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}.$$

Sejam $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ as extremidades desses subintervalos, escolhamos **pontos amostrais** $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ de modo que $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$. Então a **integral definida de f de a até b** é

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x,$$

desde que esse limite exista.

Quando podemos garantir a existência?



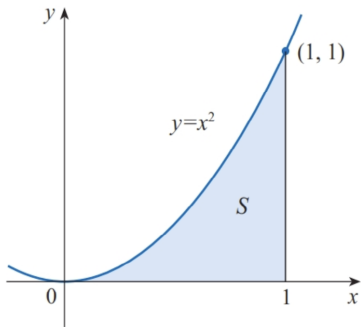
Teorema 1

Se f for contínua em $[a, b]$, ou tiver apenas um número finito de descontinuidades do tipo salto, então f é integrável em $[a, b]$; ou seja, $\int_a^b f(x)dx$ existe.

Aplicação da Definição

Exemplo 1

Use retângulos para calcular a área sob a parábola $y = x^2$ de 0 até 1.



O Desenvolvimento do Cálculo



- ▶ **Funções Elementares:** são, intuitivamente, aquelas que podem ser escritas como fórmulas explícitas, envolvendo apenas as operações elementares (soma, subtração, multiplicação, divisão e raiz) e um conjunto limitado de funções elementares, normalmente as funções polinomiais, trigonométricas, a exponencial e o logaritmo.
- ▶ A função

$$\cos(e^{x^3+1}) + \frac{\tan(\ln(x^2 + 4))}{e^x}$$

é uma função elementar.

- ▶ Já função erro

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

não é uma função elementar.

O Desenvolvimento do Cálculo



- ▶ Embora estudemos o conceito de derivadas antes do de integrais, historicamente as integrais apareceram primeiro.
- ▶ A razão para essa inversão, deve-se ao fato de que calcular derivadas é muito mais simples do que calcular integrais.
- ▶ Com as regras de derivação e a regra da cadeia, podemos derivar qualquer função que envolva funções elementares na sua composição.
- ▶ Por exemplo, podemos derivar a função elementar $f(x) = e^{-x^2}$, obtendo outra função elementar:

$$f'(x) = e^{-x^2} * (-2x) = -2xe^{-2x}.$$

O Desenvolvimento do Cálculo



- ▶ Por outro lado, integrar $f(x) = e^{-x^2}$ com as técnicas básicas de integração e resultar em uma função novamente elementar é **IMPOSSÍVEL!**
- ▶ O resultado de uma integral definida envolvendo f resulta numa função não elementar (envolve a função erro).
- ▶ Já a integral Gaussiana, usada em estatística, tem seu valor conhecido:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

- ▶ Para resolver a integral acima, usa-se integração em mais de uma variável.

O Teorema Fundamental do Cálculo



- ▶ Calcular integrais através da definição formal, mostrou-se difícil e bastante trabalhoso.
- ▶ Lembra que derivar é algo mais simples?
- ▶ O **Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)**, que associa as operações de derivação e integração, é um dos resultados mais importantes da história da matemática, impactando a ciência com um todo.

O Teorema Fundamental do Cálculo



- ▶ Newton (1643 - 1727) e Leibniz (1646 - 1716) são considerados os 'pais' do Cálculo, não por ter inventado a teoria e sim entendido a importância da relação entre derivada e integral (de ser quase que inversas).
- ▶ Eles usaram esta relação desenvolver o cálculo como um método sistemático.
- ▶ A partir do **TFC**, calcular integrais tornou-se muito mais simples, fazendo com que o cálculo se difundisse na ciência, permitindo avanços impossíveis até então.

The background of the slide is composed of large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the top-left corner, while a light gray shape covers the bottom-left corner. The remaining area is white.

Primitivas

Primitivas [1]



Definição 2

Uma função F é denominada uma **primitiva** de f no intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para todo x em I .

Primitivas [1]



Definição 2

Uma função F é denominada uma **primitiva** de f no intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para todo x em I .

Teorema 2

Se F for uma primitiva de f em um intervalo I , então a primitiva mais geral de f em I é

$$F(x) + C$$

em que C é uma constante arbitrária.

Obs: Você consegue entender porque não podemos dizer que a derivada e a integral são funções inversas, matematicamente?

Exercícios



Os exercícios deste texto estão disponíveis em Cálculo Volume I, J. Stewart. Faremos apenas os ímpares.

1-4 Determine uma primitiva da função.

1. (a) $f(x) = 6$

(b) $g(t) = 3t^2$

2. (a) $f(x) = 2x$

(b) $g(x) = -1/x^2$

3. (a) $h(q) = \cos q$

(b) $f(x) = e^x$

4. (a) $g(t) = 1/t$

(b) $r(\theta) = \sec^2 \theta$

Exercícios



5. $f(x) = 4x + 7$

7. $f(x) = 2x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 5x$

9. $f(x) = x(12x + 8)$

11. $g(x) = 4x^{-2/3} - 2x^{5/3}$

13. $f(x) = 3\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}$

15. $f(t) = \frac{2t - 4 + 3\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$

6. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

8. $f(x) = 6x^5 - 8x^4 - 9x^2$

10. $f(x) = (x - 5)^2$

12. $h(z) = 3z^{0,8} + z^{-2,5}$

14. $g(x) = \sqrt{x} (2 - x + 6x^2)$

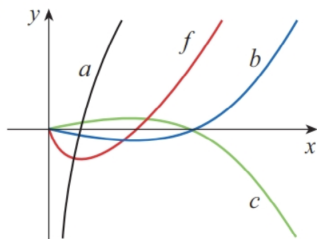
16. $f(x) = \sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{x}$

Exercícios

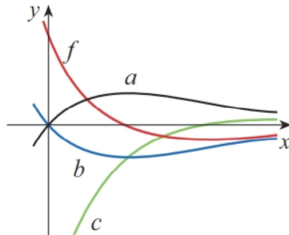


57-58 O gráfico de uma função f é dado. Qual gráfico é uma primitiva de f e por quê?

57.



58.



Exercícios



- 81.** Qual aceleração constante é necessária para aumentar a velocidade de um carro a 50 km/h para 80 km/h em 5 segundos?

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the top-left corner, while a light beige shape occupies the bottom-left corner. The rest of the slide is white. The title is centered in the white area.

O Teorema Fundamental do Cálculo

Parte 1



Teorema 3

*O Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 1: Se f for **CONTÍNUA** em $[a, b]$, então a função g definida por*

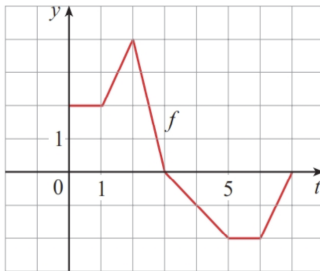
$$g(x) = \int_a^x f(t) dt \quad a \leq x \leq b$$

é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) e $g'(x) = f(x)$.

Exercícios



3. Seja $g(x) = \int_0^x f(t) dt$, onde f é a função cujo gráfico é mostrado.
- (a) Calcule $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$ e $g(6)$.
 - (b) Em que intervalos g está crescendo?
 - (c) Onde g tem um valor máximo?
 - (d) Faça um esboço do gráfico de g .



Exercícios



9-20 Use a Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo para encontrar a derivada da função.

9. $g(x) = \int_0^x \sqrt{t+t^3} \, dt$

10. $g(x) = \int_1^x \ln(1+t^2) \, dt$

Exercícios



$$11. g(w) = \int_0^w \operatorname{sen}(1+t^3) dt \quad 12. h(u) = \int_0^u \frac{\sqrt{t}}{t+1} dt$$

$$13. F(x) = \int_x^0 \sqrt{1+\sec t} dt$$

$\left[\text{Dica: } \int_x^0 \sqrt{1+\sec t} dt = -\int_0^x \sqrt{1+\sec t} dt \right]$

$$14. A(w) = \int_w^{-1} e^{t+t^2} dt$$

$$15. h(x) = \int_1^{e^x} \ln t dt$$

$$16. h(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{z^2}{z^4+1} dz$$

$$17. y = \int_1^{3x+2} \frac{t}{1+t^3} dt$$

$$18. y = \int_0^{\operatorname{tg} x} e^{-t^2} dt$$

$$19. y = \int_{\sqrt{x}}^{\pi/4} \theta \operatorname{tg} \theta d\theta$$

$$20. y = \int_{1/x}^4 \sqrt{1+\frac{1}{t}} dt$$

Parte 1



- ▶ Essa parte do **TFC** diz apenas que toda integral indefinida de f é uma primitiva dessa mesma função:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

- ▶ A pergunta que fica é: vale a recíproca? Toda primitiva de f é uma integral indefinida de f ?

Parte 1



- ▶ Essa parte do **TFC** diz apenas que toda integral indefinida de f é uma primitiva dessa mesma função:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

- ▶ A pergunta que fica é: vale a recíproca? Toda primitiva de f é uma integral indefinida de f ? Nesses termos, a resposta é não.

Parte 1



- Por exemplo, $F(x) = 1$ é uma primitiva de $f(x) = 0$. Porém,

$$\int_a^x F'(t) dt = \int_a^x 0 dt = 0 \neq 1 = F(x).$$

Parte 1



- ▶ Por exemplo, $F(x) = 1$ é uma primitiva de $f(x) = 0$. Porém,

$$\int_a^x F'(t) dt = \int_a^x 0 dt = 0 \neq 1 = F(x).$$

- ▶ Porém, há sim uma relação entre a primitiva de f e a função f , mas com uma integral definida. Essa é a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo.

Parte 2



Teorema 4

*O Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 2: Se f for **CONTÍNUA** em $[a, b]$, então a função g definida por*

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer primitiva de f , isto é, uma função tal que $F' = f$.

Parte 2



Teorema 4

*O Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 2: Se f for **CONTÍNUA** em $[a, b]$, então a função g definida por*

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer primitiva de f , isto é, uma função tal que $F' = f$.

Essa é a ferramenta que facilita enormemente o cálculo de integrais.

Exercícios



25-54 Calcule a integral.

25. $\int_1^3 (x^x + 2x - 4) dx$

26. $\int_{-1}^1 x^{100} dx$

27. $\int_0^2 \left(\frac{4}{5}t^3 - \frac{3}{4}t^2 + \frac{2}{5}t \right) dt$

28. $\int_0^1 (1 - 8v^3 + 16v^7) dv$

29. $\int_1^9 \sqrt{x} dx$

30. $\int_1^8 x^{-2/3} dx$

31. $\int_0^4 (t^2 + t^{3/2}) dt$

32. $\int_1^3 \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} \right) dz$

33. $\int_{\pi/2}^0 \cos \theta \, d\theta$

34. $\int_{-5}^5 e^x dx$

Exercícios



79. Se $f(1) = 12$, f' é contínua e $\int_1^4 f'(x) dx = 17$, qual é o valor de $f(4)$?

Referencias I



J. Stewart.

Calculo: volume 1.

Pioneira Thomson Learning, 2022.