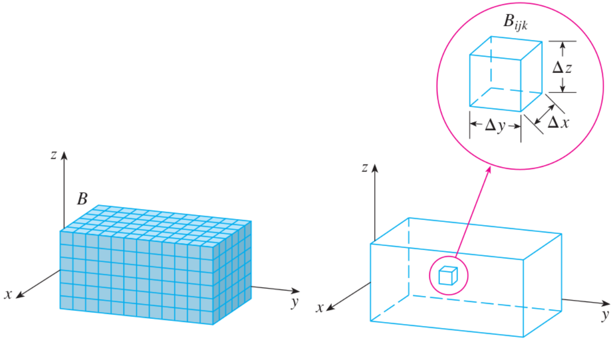
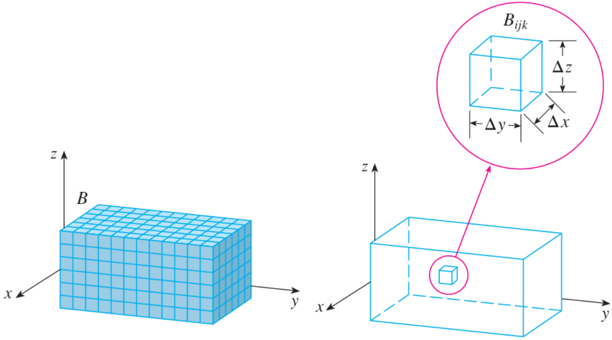
A integral no espaço $\mathbb{R}^3$

Se $f(x, y, z)$ está definida em uma caixa retangular

$$B = \{(x, y, z) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d,\ r \leqslant z \leqslant s\}$$

para calcular a integral de f sobre a caixa B, devemos dividi-la em pequenas subcaixas:





- Cada paralelepípedo tem volume:

$$\text{Área da base x Altura} = \Delta x \Delta y \times \Delta z.$$

- Definimos a soma tripla de Riemann por

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_i, y_j, z_k) \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Definição Formal

Se o limite existir, a integral da função $f(x, y, z)$ sobre a caixa $[a, b] \times [c, d] \times [r, s]$ é dada por

$$\int\int\int_B f(x, y)\, dV = \lim_{l,m,n \to \infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_i, y_j, z_k) \Delta x \Delta y \Delta z$$

Como resolver

- Novamente, usar a definição não é nada fácil.
- Usamos as propriedades e regras de funções conhecidas.
- Resolver uma integral tripla é semelhante à resolver uma derivada parcial; consideramos uma das variáveis como constante e integramos na outra variável.

Teorema de Fubini

Teorema de Fubini para as Integrais Triplas Se f é contínua em uma caixa retangular $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$, então

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Exemplo:

Calcule a integral tripla $\iiint_B xyz^2\, dV$, onde B é a caixa retangular dada por

$$B = \left\{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ -1 \leqslant y \leqslant 2,\ 0 \leqslant z \leqslant 3\right\}$$

Exemplo:

SOLUÇÃO Podemos usar qualquer uma das seis possíveis ordens de integração. Se escolhermos integrar primeiro em relação a x, depois em relação a y e então em relação a z, obteremos

$$\iiint_B xyz^2\,dV = \int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyz^2\,dx\,dy\,dz = \int_0^3 \int_{-1}^2 \left[\frac{x^2yz^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} dy\,dz$$

$$= \int_0^3 \int_{-1}^2 \frac{yz^2}{2}\,dy\,dz = \int_0^3 \left[\frac{y^2z^2}{4}\right]_{y=-1}^{y=2} dz$$

$$= \int_0^3 \frac{3z^2}{4}\,dz = \frac{z^3}{4}\bigg]_0^3 = \frac{27}{4}$$

Regiões Gerais E:

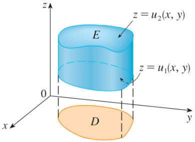


Figura: Tipo 1

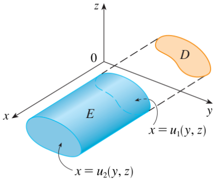


Figura: Tipo 2

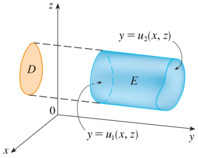
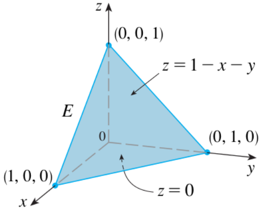


Figura: Tipo 3

Exemplo do Tipo 1:

Calcule $\iiint_E z\, dV$, onde E é o tetraedro sólido limitado pelos quatro planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$.

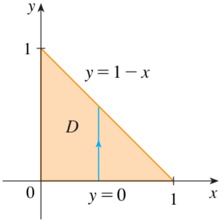
Podemos descrever esta região da seguinte forma:



- A variável z está entre os planos $z = 0$ e $z = 1 - x - y$;

Exemplo do Tipo 1:

- Para a variação do x e do y, projetamos E sobre o plano xy e obtemos



De onde podemos descrever tal região como do tipo 1:

$$D\{(x,y); 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1-x\}.$$

Podemos, também, descrevê-la como do tipo 2 (Faça!)

Exemplo do Tipo 1:

Portanto a região de integração é dada por:

$$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 - x,\ 0 \leqslant z \leqslant 1 - x - y\}$$

Essa descrição de E como região do tipo 1 nos permite calcular a integral como segue:

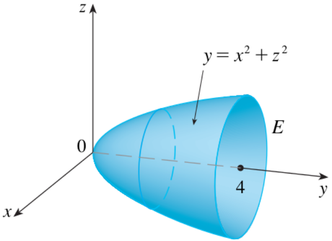
$$\iiint\limits_E z\, dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z\, dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)^2\, dy\, dx = \tfrac{1}{2} \int_0^1 \left[-\frac{(1 - x - y)^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1-x} dx$$

$$= \tfrac{1}{6} \int_0^1 (1 - x)^3\, dx = \frac{1}{6}\left[-\frac{(1 - x)^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{24}$$

Exemplo do Tipo 2:

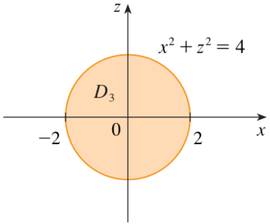
Calcule $\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV$, onde E é a região limitada pelo paraboloide $y = x^2 + z^2$ e pelo plano $y = 4$.



A variação de y já foi dada : $x^2 + z^2 \leq y \leq 4$.

Exemplo do Tipo 2:

Vamos as variações de x e z. Projetamos E no plano xz e obtemos um círculo de raio 2:



Como é uma região circular, faremos a mudança para coordenadas polares.

Exemplo do Tipo 2:

$$\iiint_E \sqrt{x^2+z^2}\,dV = \iint_{D_3}\left[\int_{x^2+z^2}^{4}\sqrt{x^2+z^2}\,dy\right]dA = \iint_{D_3}(4-x^2-z^2)\sqrt{x^2+z^2}\,dA$$

Apesar de essa integral poder ser escrita como

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(4-x^2-z^2)\sqrt{x^2+z^2}\,dz\,dx$$

fica mais simples convertê-la para coordenadas polares no plano xz: $x = r\cos\theta$, $z = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Isso fornece

$$\begin{aligned}\iiint_E \sqrt{x^2+z^2}\,dV &= \iint_{D_3}(4-x^2-z^2)\sqrt{x^2+z^2}\,dA\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2(4-r^2)r\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(4r^2-r^4)\,dr\\ &= 2\pi\left[\frac{4r^3}{3}-\frac{r^5}{5}\right]_0^2 = \frac{128\pi}{15}\end{aligned}$$