UFGD MATEMÁTICA
Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologias

Elementos de Aritmética

Lista de Aprofundamento

2ª Avaliação

Profª Karla Lima

2024.1

Sumário

Resumo

"A Arte de Resolver Problemas (1945)" é um livro clássico escrito por George Pólya, que oferece uma abordagem sistemática e prática para resolver problemas matemáticos e, por extensão, problemas em diversas áreas da vida.

Ele destaca estratégias heurísticas, como divisão em subproblemas, analogia, tentativa e erro, e trabalhar de trás para frente.

Além disso, o autor enfatiza a importância de persistência, criatividade e flexibilidade mental na resolução de problemas.

Abaixo, segue o esquema introduzido por Pólya para a resolução de problemas. Use-o para ajudar no processo de aprendizado.

Elabore um PLANO

01. Conexões

Encontre a conexão entre os dados e a incógnita.
É possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não puder encontrar uma conexão imediata.

02. Questione

Já viu este problema antes? Ou o mesmo problema apresentado ligeiramente diferente?

02. Questione

Conhece um problema correlato ou que poderia ser útil?

03. Relacione

Procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.

04. Entenda

Entenda as soluções de problemas resolvidos. São eles que vão te dar a bagagem necessária para se aventurar nos exercícios propostos.

Execute o PLANO

01. Mão na Massa

Em geral, você só precisa de cuidado e paciência, desde que tenha as habilidades necessárias.
Persista com o plano que você escolheu e execute.

02. Descarte

Se continuar sem funcionar, descarte-o e escolha outro. Não se deixe enganar, é assim que a matemática é feita, mesmo por profissionais.

03. Verfique

É possível verificar claramente que os passo está correto?
É possível demonstrar que ele está correto?

04. Retropecto

Examine a solução obtida.
Reserve um tempo para refletir e olhar para trás, para o que você fez, o que funcionou e o que não funcionou.

04. Retrospecto

Isso permitirá que você preveja qual estratégia usar para resolver problemas futuros.

1 Os Números Inteiros

1.1 Múltiplos de Números Inteiros

Exercício 1

O Problema 3.7 *de* [1] (Hefez, A.) *pede para mostrar as seguintes propriedades, para um elemento* $a \in \mathbb{Z}$*:*

i) 0 *é múltiplo de* a.

ii) Se m *é um múltiplo de* a*, então* $-m$ *é um múltiplo de* a.

iii) Um múltiplo de um múltiplo de a *é um múltiplo de* a.

iv) Se m *e* m' *são múltiplos de* a*, então* $m + m'$ *e* $m - m'$ *são também múltiplos de* a.

v) Se m *e* m' *são múltiplos de* a*, então* $e \cdot m + f \cdot m'$ *é múltiplo de* a*, quaisquer que sejam os inteiros* e *e* f.

vi) Se $m + m'$ *ou* $m - m'$ *é múltiplo de* a *e* m *é múltiplo de* a*, então* m' *também é múltiplo de* a.

Resolva os itens a seguir.

a) *Para cada item, faça um caso particular, escolhendo valores adequados para* a, m, m', e *e* f.

b) *Demonstre, formalmente, cada um dos itens de (i) até (vi).*

Exercício 2 *Faça o mesmo para o Problema* 3.8 *de* [1] (Hefez, A.) .

1.2 Divisores de um Número Inteiro

Exercício 3 *Mostre que se a é um inteiro não nulo, os divisores de a são em número finito.*

Exercício 4 *Mostre que se a e b são números naturais não nulos, então $a \mid b$ e $b \mid a$ se, e somente se, $a = b$.*

Exercício 5 *Em cada item, escolha casos particulares adequados de a, b e d e verifique as propriedades. Depois, demonstre-as formalmente.*

a) *Se $d \mid a$ e $d \mid b$, então $d \mid b + a$ e $d \mid (b - a)$.*

b) *Se $d \mid b + a$ ou $d \mid (b - a)$ e $d \mid a$, então $d \mid b$.*

Exercício 6 *O que é o **máximo divisor comum** de dois números inteiros a e b?*

Exercício 7 *Mostre que:*

a) *O $mdc(0, 0)$ não existe.*

b) *Se $b \neq 0$, então*

$$mdc(0, b) = \begin{cases} b, & se\ b > 0, \\ -b, & se\ b < 0. \end{cases}$$

c) *Mostre que se $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, então*

$$mdc(a, b) = mdc(-a, b) = mdc(a, -b) = mdc(-a, -b).$$

Exercício 8 *Um número d é divisor comum de a e b, ambos não nulos, se, e somente se, ele é um divisor comum de a e $b - a$.*

Exercício 9 *O que são números primos entre si?*

2 Os Números Racionais

Exercício 10 *Simplifique as frações abaixo até obter uma fração irredutível.*

a) $\dfrac{20}{30}$

b) $\dfrac{12}{20}$

c) $\dfrac{15}{25}$

d) $\dfrac{200}{75}$

e) $\dfrac{28}{21}$

Exercício 11 *Resolva as seguintes operações fracionárias, simplificando o resultado até obter uma fração irredutível, quando possível.*

a) $\dfrac{11}{12} - \dfrac{5}{12}$

b) $\dfrac{1}{4} + \dfrac{5}{4} - \dfrac{3}{4}$

c) $\dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{2}{7}$

d) $\dfrac{2}{11} \cdot \dfrac{5}{4}$

e) $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3}{4}$

Exercício 12 *Qual a fração equivalente a* $\dfrac{2}{9}$, *cujo denominador é* 27*?*

Exercício 13 *Encontre uma fração equivalente a* $\dfrac{2}{5}$, *sabendo que a soma do numerador com o denominador é* 28.

Exercício 14 *Alberto e Beto estão comendo uma pizza. Se Alberto já comeu* $\frac{1}{8}$ *e Beto* $\frac{3}{8}$*, qual a fração que sobrou desta pizza?*

Exercício 15 *A rodovia que liga duas cidades, Campina da Lagoa e Juranda, está sendo reformada. Se* $\frac{1}{3}$ *já foi reformada e ainda faltam* $20\,km$*, qual o comprimento desta rodovia?*

Exercício 16 *Luísa tomou* $\frac{1}{5}$ *de um refrigerante de* 1500 *mililitros. Seu irmão, Luiz, tomou* $\frac{2}{3}$ *do que havia sobrado. Qual a quantidade de refrigerante que ainda resta na garrafa?*

Exercício 17 *João fez uma viagem de ida e volta entre Pirajuba e Quixajuba em seu carro, que pode rodar com álcool e com gasolina. Na ida, apenas com álcool no tanque, seu carro fez* $12\,km$ *por litro e na volta, apenas com gasolina no tanque, fez* $15\,km$ *por litro. No total, João gastou* 18 *litros de combustível nessa viagem. Qual é a distância entre Pirajuba e Quixajuba?*

Exercício 18 *Um ônibus transporta* 31 *estudantes, baianos e mineiros, para um encontro de participantes da OBMEP. Entre os baianos,* $\frac{2}{5}$ *são homens e, entre os mineiros,* $\frac{3}{7}$ *são mulheres. Entre todos os estudantes quantas são as mulheres?*

3 Os Números Reais

Exercício 19 *Leia as páginas de* 35 *a* 46 *do livro Paiva, M., Matemática 1, Moderna Plus, 2011, resolvendo os exercícios propostos nesse intervalo.*

Exercício 20 *Resolva os exercícios das páginas* 48 *e* 49 *do livro Paiva, M., Matemática 1, Moderna Plus, 2011.*

Exercício 21 *Descreva as operações abaixo em forma de intervalos:*

a) $(1,\, 2] \cup [2,\, 3)$

b) $(\sqrt{2},\, 5] \cup [e,\, 10]$

c) $[0,\, \pi] \cup [-2,\, 127)$

d) $(1,\, 2] \cap [2,\, 3)$

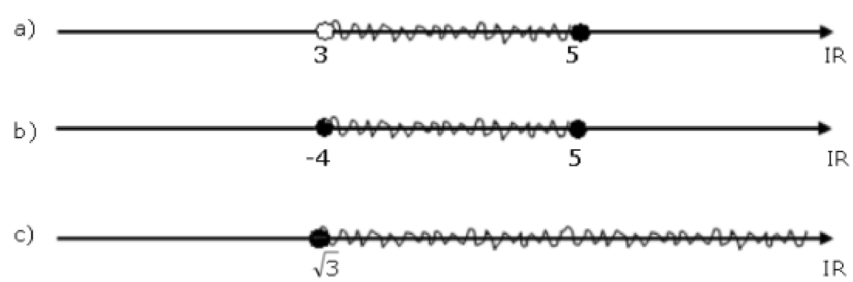
e) $(\sqrt{2},\, 5] \cap [e,\, 10]$

f) $[0,\, \pi] \cap [-2,\, 127)$

g) $(-\infty,\, 2\sqrt{3}] \cup [1,\, 10)$

h) $(-\infty,\, 2\sqrt{3}] \cap [1,\, 10)$

Exercício 22 *Escrever a notação para os seguintes intervalos, representados na reta real:*



4 Equações

Exercício 23 *(FGV). Uma fábrica de camisas tem um custo mensal de operação dado por* $C = 5000 + 15x$*, onde* x *é o número de camisas produzidas por mês. Cada camisa é vendida por R\$*$25,00$ *e, atualmente, o lucro mensal da fábrica é de R\$* $2000,00$*. Para dobrar esse lucro, a fábrica deverá produzir e vender mensalmente:*

a) o dobro do que produz e vende hoje.

b) 100 unidades a mais do que produz e vende hoje.

c) 200 unidades a mais do que produz e vende hoje.

d) 300 unidades a mais do que produz e vende hoje.

Exercício 24 *(ENEM 2013). Na aferição de um novo semáforo, os tempos são ajustados de modo que, em cada ciclo completo (verde-amarelo-vermelho), a luz amarela permaneça acesa por* 5 *segundos, e o tempo em que a luz verde permaneça acesa seja igual a* $\frac{2}{3}$ *do tempo em que a luz vermelha fique acesa. Sabe-se que cada ciclo dura* Y *segundos e, nele, a luz verde fica acesa durante* X *segundos.*

Qual das expressões a seguir representa a relação entre X *e* Y*?*

a) $5X - 3Y + 15 = 0$.

b) $5X - 2Y + 10 = 0$.

c) $3X - 3Y + 15 = 0$.

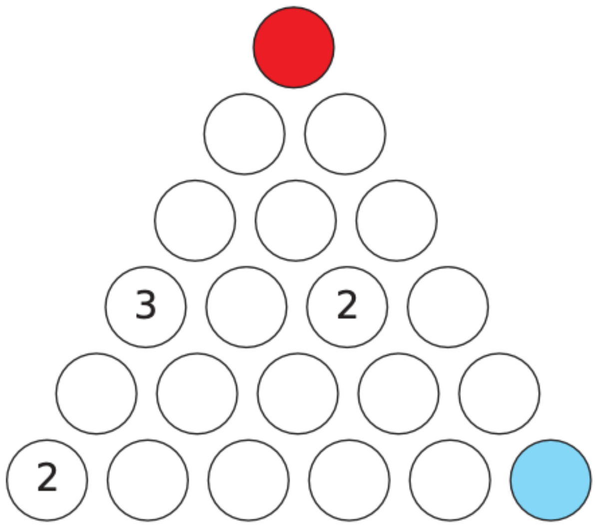
d) $3X - 2Y + 15 = 0$.

e) $3X - 2Y + 10 = 0$.

Exercício 25 *(UFG - 2010). Uma agência de turismo vende pacotes familiares de passeios turísticos, cobrando para crianças o equivalente a* $\frac{2}{3}$ *do valor para adultos.*

Uma família de cinco pessoas, sendo três adultos e duas crianças,comprou um pacote turístico e pagou o valor total de R\$ $8125,00$*. Com base nessas informações, calcule o valor que a agência cobrou de um adulto e de uma criança para realizar esse passeio.*

Exercício 26 *(OBMEP 2018). Números naturais devem ser escritos dentro de cada círculo vazio da figura a seguir, de modo que a soma dos números escritos em três círculos alinhados e consecutivos seja sempre a mesma.*



a) Qual número deverá ser escrito no círculo vermelho?

b) Mostre que a soma de todos os números escritos é um múltiplo de 7.

c) Para que a soma de todos os números escritos seja 63, qual número deverá ser escrito no círculo azul?

Exercício 27 *Qual o valor de m para que -3 seja raiz da equação $-mx^2 - 4mx + 21 = 0$.*

Exercício 28 *Um grupo de jovens aluga, por 342 reais, uma van para um passeio, sendo que três deles saíram sem pagar. Por isso, os outros tiveram que completar o total pagando, cada um deles, 19 reais a mais. Qual o número inicial de jovens no grupo?*

Gabarito

23. c)

24. b)

25. 1250

26. a) 3. c) 4.

27. $m = -7$

28. 9

Referências

[1] A. Hefez. *Iniciação à Aritmética*. IMPA, 2015.

Referências

[1] A. Hefez. *Iniciação à Aritmética*. IMPA, 2015.