



Elementos de Aritmética

Lista de Aprofundamento

2ª Avaliação

Prof^ª Karla Lima

2024.1

Sumário

1	Os Números Inteiros	4
1.1	Múltiplos de Números Inteiros	4
1.2	Divisores de um Número Inteiro	5
2	Os Números Racionais	6
3	Os Números Reais	7

Resumo

"A Arte de Resolver Problemas (1945)" é um livro clássico escrito por George Pólya, que oferece uma abordagem sistemática e prática para resolver problemas matemáticos e, por extensão, problemas em diversas áreas da vida.

Ele destaca estratégias heurísticas, como divisão em subproblemas, analogia, tentativa e erro, e trabalhar de trás para frente.

Além disso, o autor enfatiza a importância de persistência, criatividade e flexibilidade mental na resolução de problemas.

Abaixo, segue o esquema introduzido por Pólya para a resolução de problemas. Use-o para ajudar no processo de aprendizado.





1 Os Números Inteiros

1.1 Múltiplos de Números Inteiros

Exercício 1

O Problema 3.7 de [1] (Hefez, A.) pede para mostrar as seguintes propriedades, para um elemento $a \in \mathbb{Z}$:

- i) 0 é múltiplo de a .
- ii) Se m é um múltiplo de a , então $-m$ é um múltiplo de a .
- iii) Um múltiplo de um múltiplo de a é um múltiplo de a .
- iv) Se m e m' são múltiplos de a , então $m + m'$ e $m - m'$ são também múltiplos de a .
- v) Se m e m' são múltiplos de a , então $e \cdot m + f \cdot m'$ é múltiplo de a , quaisquer que sejam os inteiros e e f .
- vi) Se $m + m'$ ou $m - m'$ é múltiplo de a e m é múltiplo de a , então m' também é múltiplo de a .

Resolva os itens a seguir.

- a) Para cada item, faça um caso particular, escolhendo valores adequados para a , m , m' , e e f .
- b) Demonstre, formalmente, cada um dos itens de (i) até (vi).

Exercício 2 Faça o mesmo para o Problema 3.8 de [1] (Hefez, A.) .

1.2 Divisores de um Número Inteiro

Exercício 3 *Mostre que se a é um inteiro não nulo, os divisores de a são em número finito.*

Exercício 4 *Mostre que se a e b são números naturais não nulos, então $a|b$ e $b|a$ se, e somente se, $a = b$.*

Exercício 5 *Em cada item, escolha casos particulares adequados de a , b e d e verifique as propriedades. Depois, demonstre-as formalmente.*

a) *Se $d|a$ e $d|b$, então $d|b+a$ e $d|(b-a)$.*

b) *Se $d|b+a$ ou $d|(b-a)$ e $d|a$, então $d|b$.*

Exercício 6 *O que é o **máximo divisor comum** de dois números inteiros a e b ?*

Exercício 7 *Mostre que:*

a) *O $\text{mdc}(0,0)$ não existe.*

b) *Se $b \neq 0$, então*

$$\text{mdc}(0, b) = \begin{cases} b, & \text{se } b > 0, \\ -b, & \text{se } b < 0. \end{cases}$$

c) *Mostre que se $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, então*

$$\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(-a, b) = \text{mdc}(a, -b) = \text{mdc}(-a, -b).$$

Exercício 8 *Um número d é divisor comum de a e b , ambos não nulos, se, e somente se, ele é um divisor comum de a e $b - a$.*

Exercício 9 *O que são números primos entre si?*

2 Os Números Racionais

Exercício 10 *Simplifique as frações abaixo até obter uma fração irredutível.*

a) $\frac{20}{30}$

b) $\frac{12}{20}$

c) $\frac{15}{25}$

d) $\frac{200}{75}$

e) $\frac{28}{21}$

Exercício 11 *Resolva as seguintes operações fracionárias, simplificando o resultado até obter uma fração irredutível, quando possível.*

a) $\frac{11}{12} - \frac{5}{12}$

b) $\frac{1}{4} + \frac{5}{4} - \frac{3}{4}$

c) $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7}$

d) $\frac{2}{11} \cdot \frac{5}{4}$

e) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$

Exercício 12 *Qual a fração equivalente a $\frac{2}{9}$, cujo denominador é 27?*

Exercício 13 *Encontre uma fração equivalente a $\frac{2}{5}$, sabendo que a soma do numerador com o denominador é 28.*

Exercício 14 *Alberto e Beto estão comendo uma pizza. Se Alberto já comeu $\frac{1}{8}$ e Beto $\frac{3}{8}$, qual a fração que sobrou desta pizza?*

Exercício 15 *A rodovia que liga duas cidades, Campina da Lagoa e Juranda, está sendo reformada. Se $\frac{1}{3}$ já foi reformada e ainda faltam 20 km, qual o comprimento desta rodovia?*

Exercício 16 *Luísa tomou $\frac{1}{5}$ de um refrigerante de 1500 mililitros. Seu irmão, Luiz, tomou $\frac{2}{3}$ do que havia sobrado. Qual a quantidade de refrigerante que ainda resta na garrafa?*

Exercício 17 *João fez uma viagem de ida e volta entre Pirajuba e Quixajuba em seu carro, que pode rodar com álcool e com gasolina. Na ida, apenas com álcool no tanque, seu carro fez 12 km por litro e na volta, apenas com gasolina no tanque, fez 15 km por litro. No total, João gastou 18 litros de combustível nessa viagem. Qual é a distância entre Pirajuba e Quixajuba?*

Exercício 18 *Um ônibus transporta 31 estudantes, baianos e mineiros, para um encontro de participantes da OBMEP. Entre os baianos, $\frac{2}{5}$ são homens e, entre os mineiros, $\frac{3}{7}$ são mulheres. Entre todos os estudantes quantas são as mulheres?*

3 Os Números Reais

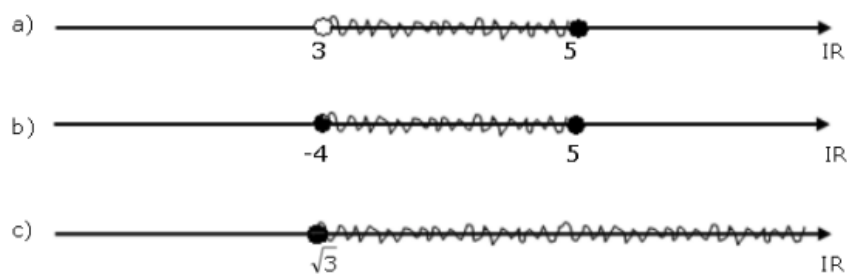
Exercício 19 *Leia as páginas de 35 a 46 do livro Paiva, M., Matemática 1, Moderna Plus, 2011, resolvendo os exercícios propostos nesse intervalo.*

Exercício 20 *Resolva os exercícios das páginas 48 e 49 do livro Paiva, M., Matemática 1, Moderna Plus, 2011.*

Exercício 21 *Descreva as operações abaixo em forma de intervalos:*

- a) $(1, 2] \cup [2, 3)$
- b) $(\sqrt{2}, 5] \cup [e, 10]$
- c) $[0, \pi] \cup [-2, 127)$
- d) $(1, 2] \cap [2, 3)$
- e) $(\sqrt{2}, 5] \cap [e, 10]$
- f) $[0, \pi] \cap [-2, 127)$
- g) $(-\infty, 2\sqrt{3}] \cup [1, 10)$
- h) $(-\infty, 2\sqrt{3}] \cap [1, 10)$

Exercício 22 Escrever a notação para os seguintes intervalos, representados na reta real:



Referências

- [1] A. Hefez. *Iniciação à Aritmética*. IMPA, 2015.

Referências

- [1] A. Hefez. *Iniciação à Aritmética*. IMPA, 2015.