

Aula 06

Retas Paralelas - Parte 1

Karla Lima

Sumário



1. Definições
2. Os Postulados de Euclides
3. Secantes a Várias Paralelas

The background of the slide is composed of three geometric sections. A teal-colored triangle is in the top-left corner. A light gray triangle is in the bottom-left corner. The remaining area is a white trapezoid. The word "Definições" is centered in the white area.

Definições

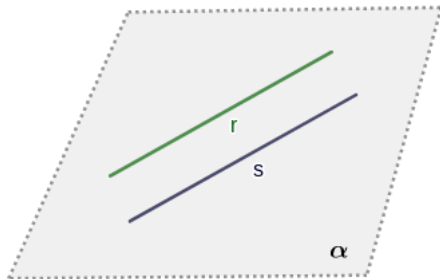
Retas Paralelas



Definição 1

Duas retas são ditas **paralelas**, se

- i) estão em um mesmo plano;
- ii) não se interceptam.

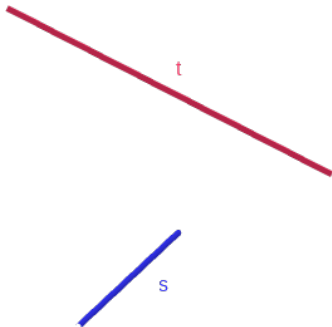


Retas Reversas



Definição 2

*Duas retas que não estão num mesmo plano chamam-se **retas reversas**.*



Teorema

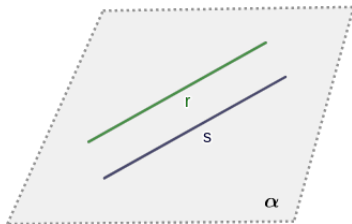


Teorema 1

Duas retas paralelas estão contidas em um único plano.

Demonstração:

- ▶ **Hipótese:** r e s são paralelas.
- ▶ **Tese:** Existe um único plano α contendo r e s .

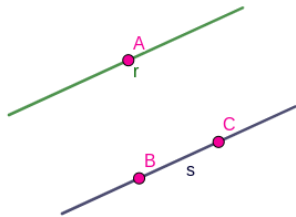


Demonstração: Teorema 1



Como as retas são paralelas, elas não se interceptam e estão contida num plano α . Vamos mostrar que α é único.

- ▶ Tome um ponto A na reta r e dois pontos, B e C , na reta s .
- ▶ Os três pontos acima são não colineares, logo existe um único plano que os contém.
- ▶ Como α contém as duas retas, este plano também contém os pontos A, B e C .
- ▶ Como vimos acima, só existe um plano que contém os três pontos, logo esse plano é o α que contém as duas retas.



Teorema

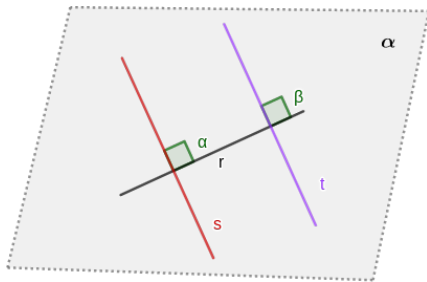


Teorema 2

Num mesmo plano, duas retas distintas perpendiculares a uma terceira, são paralelas entre si.

Demonstração:

- ▶ **Hipótese:**
 $r, s, t \in \alpha, r \perp s$
 $e r \perp t.$
- ▶ **Tese:** s e t são paralelas.



Demonstração: Teorema 2



- ▶ Suponha, por absurdo, que as retas se interceptam em um ponto P .
- ▶ Pelo Corolário 2 do Teorema 7 (Triângulos), por esse ponto P passa uma única reta perpendicular a reta r . Com isso, teríamos $r = s$, contrariando a nossa hipótese.
- ▶ Portanto, $s \cap t = \emptyset$, de onde segue que as retas estão num mesmo plano (hipótese) e não se interceptam, sendo paralelas.

The background of the slide is composed of large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the top-left corner, while a light gray shape covers the bottom-left portion. The remaining area is white.

Os Postulados de Euclides

Elementos de Euclides



- ▶ No início do curso, falamos um pouco (bem pouco), sobre a obra 'Elementos' de Euclides.
- ▶ Esse livro faz uma apresentação da Geometria muito bem organizada na roupagem da lógica.
- ▶ Cada resultado é demonstrado com base no antecedente, de modo que, para o processo tenha começo, é preciso formular algumas proposições que ficam sem demonstração (chamados axiomas ou postulados).

Os Postulados de Euclides



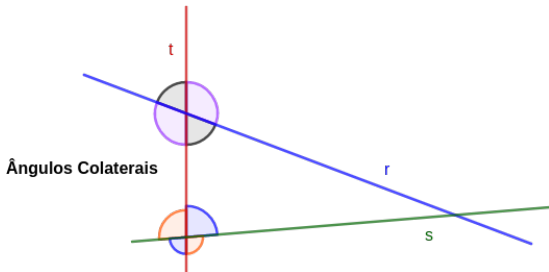
Euclides formulou 5 postulados que, traduzidos e interpretados em nossa linguagem, são enunciados a seguir:

1. Por dois pontos passa uma reta e somente uma.
2. A partir de qualquer ponto de uma reta dada é possível marcar um segmento de comprimento dado sobre a reta.
3. É possível descrever um círculo de centro e raios dados.
4. Todos os ângulos retos são iguais (Euclides define 'ângulo reto' como sendo igual ao ângulo formado por duas retas que se cortam de maneira a formar quatro ângulos iguais.)
5. Se uma reta t corta duas outras r e s (todas num mesmo plano) de modo que um dos pares dos ângulos colaterais internos tem soma inferior a dois ângulos retos, então r e s , quando prolongadas suficientemente, se cortam do lado de t em que se encontram os referidos ângulos colaterais internos.

O 5º Postulado de Euclides

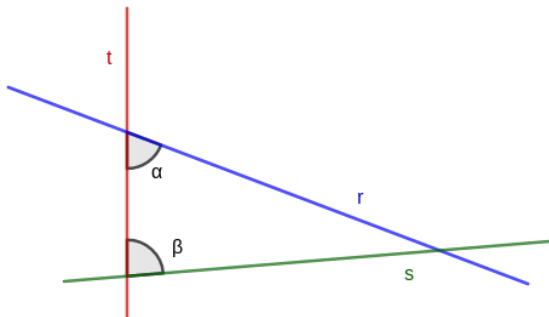


O enunciado fica mais claro quando acompanhado da observação da figura abaixo:



- ▶ Num mesmo plano, t corta as retas r e s .
- ▶ Tome pares (α, β) , onde α é um ângulo formado pela interseção de t e r e β formado pela interseção de t e s (ângulos colaterais). Acima, temos apenas um exemplo. Cada interseção gera 4 ângulos.

O 5º Postulado de Euclides

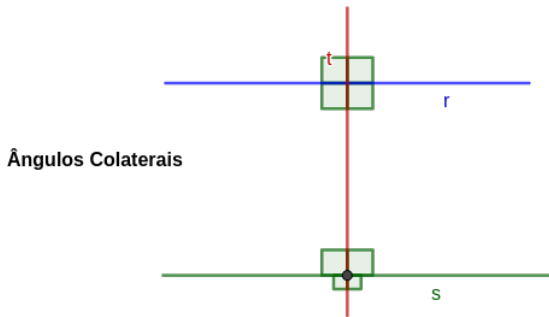


- Se existir um par no qual a sua soma é menor que 180, as retas r e s se cortam. Além disso, se cortam no semiplano gerado por t , em que os ângulos colaterais referidos estão (nesse exemplo, do lado direito de t).

O 5º Postulado de Euclides



No caso em que não há um par (α, β) tal que $\alpha + \beta < 180$, temos então, obrigatoriamente (por quê?) $\alpha = \beta = 90^\circ$, em todos os pares. Assim, teremos:

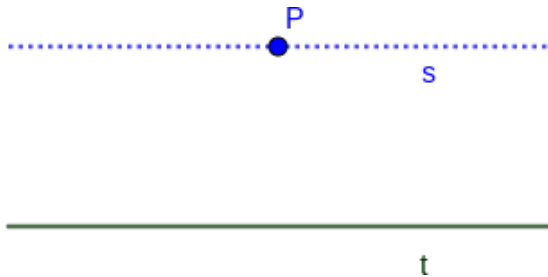


- As retas não r e s não se cruzam.

Postulado 12



Postulado de Playfair: Por um ponto não pertencente a uma reta, passa um única reta paralela à reta dada.



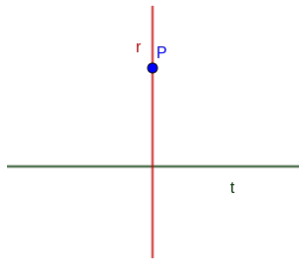
Esse postulado é equivalente ao 5º Postulado de Euclides. Leia mais em [1, 2, 3].

Postulado 12



Obs: O resultado acima é um postulado por causa da unicidade da paralela e não por causa da sua existência. Essa pode ser provada facilmente:

- Pelo Corolário 2 do Teorema 7 (Triângulos), passando por P , existe uma única reta perpendicular à reta t .

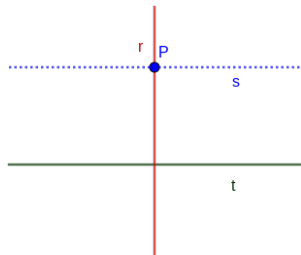


Postulado 12



O mesmo pode ser feito com a nova reta r .

- ▶ Pelo Corolário 2 do Teorema 7 (Triângulos), passando por P , existe uma única reta perpendicular à reta r , no mesmo plano α em que r e t estão.
- ▶ Pelo Teorema 2 (Retas Paralelas), como t e s são perpendiculares à r , num mesmo plano α , t e s são paralelas entre si, como queríamos demonstrar.



Teorema



Teorema 3

Duas retas paralelas a uma terceira são paralelas entre si.

Demonstração:

- ▶ **Hipótese:**
 r e s são paralelas;
 t e s são paralelas.
- ▶ **Tese:** r e t são paralelas.



r

r e s são paralelas



s

s e t são paralelas



t

Demonstração: Teorema 3



- ▶ Suponha, por absurdo, que r e t são concorrentes.
- ▶ Assim, existe um ponto P que é a interseção entre as duas retas.
- ▶ Ou seja, pelo ponto P , podemos traçar duas retas distintas, r e t , paralelas à reta s .
- ▶ Isso contraria o Postulado das Paralelas e, portanto, as retas r e t não podem ser concorrentes e, sim, paralelas, c.q.d.

Teorema

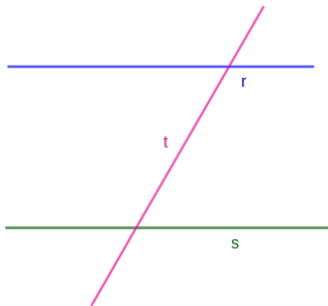


Teorema 4

Num mesmo plano, se duas retas são paralelas, então toda reta que intercepta uma delas, também interceptará a outra.

Demonstração:

- ▶ **Hipótese:** r e s são paralelas;
 t e r são concorrentes.
- ▶ **Tese:** s e t são concorrentes.



Demonstração: Teorema 4



- ▶ Suponha, por absurdo, que s e t não se interceptam.
- ▶ Então, s e t são retas paralelas entre si.
- ▶ Como s é paralela à r , concluímos, pelo Teorema 3, que r e t também são paralelas, contrariando a hipótese.
- ▶ Portanto, deve-se ter s e t concorrentes.

Teorema

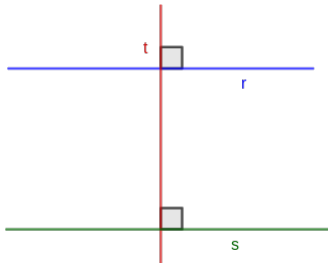


Teorema 5

Num mesmo plano, se duas retas são paralelas, então toda reta perpendicular a uma delas será perpendicular a outra.

Demonstração:

- ▶ **Hipótese:** r e s são paralelas;
 $t \perp r$.
- ▶ **Tese:** $s \perp t$.

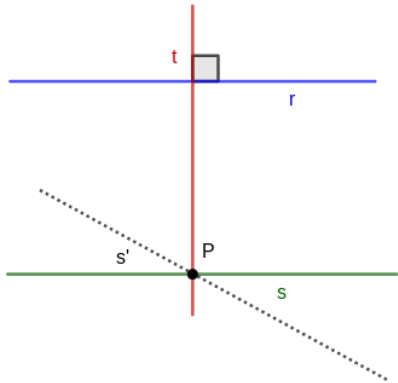


Demonstração: Teorema 5



Demonstração:

- Suponha que s e t não sejam perpendiculares.
- Seja P o ponto de interseção entre essas duas retas (garantido pelo Teorema 4).
- Por P , trace uma reta s' perpendicular à reta t (garantido pelo Corolário 2, Teorema 7 - Triângulos).

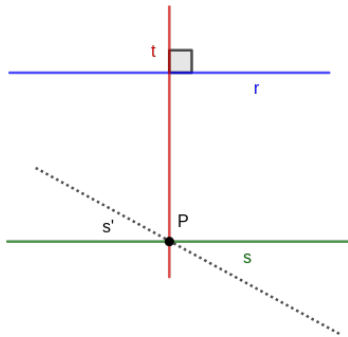


Demonstração: Teorema 5



Demonstração:

- ▶ Com isso, $r \perp t$ e $s' \perp t$.
- ▶ Pelo Teorema 2, temos que $r \parallel s'$.
- ▶ Portanto, pelo ponto P teríamos traçado duas retas, s e s' , paralelas à reta r , contrariando o Postulado das Paralelas.



The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the upper-left portion, while a light gray shape occupies the lower-left portion. The rest of the slide is white. The text is centered in the white area.

Secantes a Várias Paralelas

Reta Secante



Definição 3

*Uma **secante** a duas retas coplanares é uma reta que as intercepta em dois pontos distintos.*

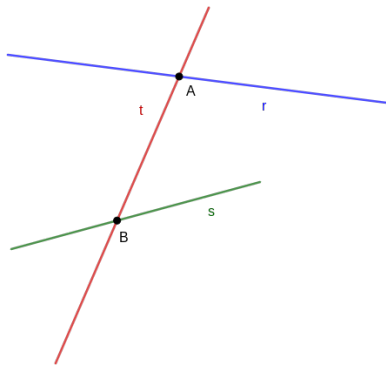


Figura 1: t é secante às retas r e s , nos pontos A e B

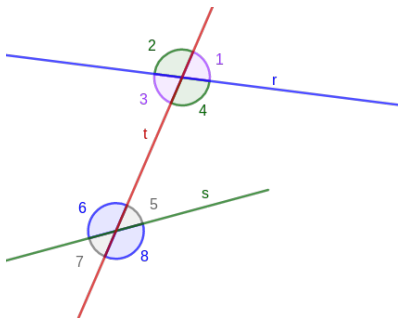
Reta Secante



Definição 4

Sejam r e s retas coplanares e t uma secante às mesmas. Usaremos a seguinte nomenclatura:

- I. São denominados **alternos internos** os pares de ângulos:
 - ▶ 3 e 5
 - ▶ 4 e 6
- II. São denominados **alternos externos** os pares de ângulos:
 - ▶ 1 e 7
 - ▶ 2 e 8



Reta Secante

. III. São denominados **correspondentes** os pares de ângulos:

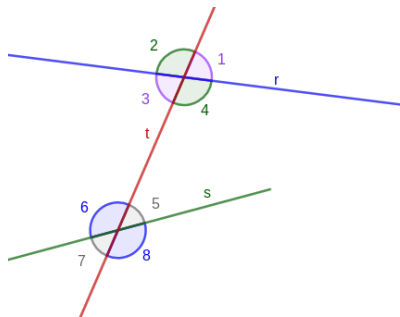
- ▶ 1 e 5
- ▶ 4 e 8
- ▶ 2 e 6
- ▶ 3 e 7

IV. São denominados **colaterais internos** os pares de ângulos:

- ▶ 4 e 5
- ▶ 3 e 6

IV. São denominados **colaterais externos** os pares de ângulos:

- ▶ 1 e 8
- ▶ 2 e 7



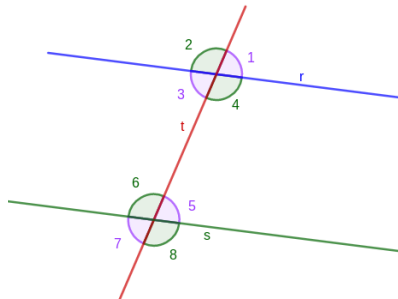
Teorema



Teorema 6

Se duas retas paralelas são cortadas por uma secante, então os quatro ângulos agudos formados são congruentes, bem como os quatro ângulos obtusos.

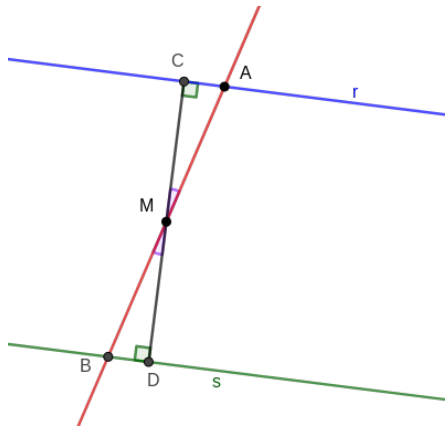
- ▶ **Hipótese:** r e s são paralelas;
 t é secante às duas.
- ▶ **Tese:** São congruentes os ângulos:
 - ▶ $1 = 3 = 5 = 7$
 - ▶ $2 = 4 = 6 = 8$



Demonstração: Teorema 6

Demonstração:

- ▶ Sejam A e B os pontos de interseções da secante com as retas r e s .
- ▶ Seja M o ponto médio do segmento \overline{AB} .
- ▶ Pelo ponto M , tracemos um segmento perpendicular às retas r e s .
- ▶ Os triângulos retângulos CMA e DMB são congruentes (Teorema 9 - Triângulos).



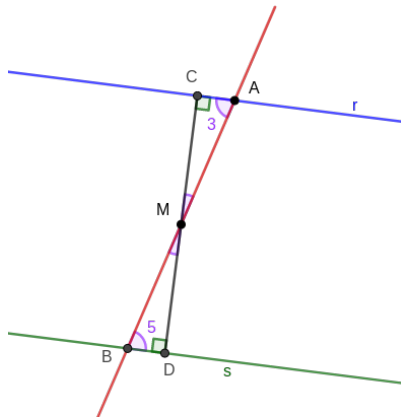
Demonstração: Teorema 6

Demonstração:

- ▶ Com isso, são congruentes os ângulos 3 e 5.
- ▶ Como $1 = 3$ e $5 = 7$, por serem ângulos opostos pelo vértice, segue que

$$1 = 3 = 5 = 7.$$

- ▶ Por outro lado, $2 = 4 = 6 = 8$ por serem suplementos de ângulos congruentes.



Teorema

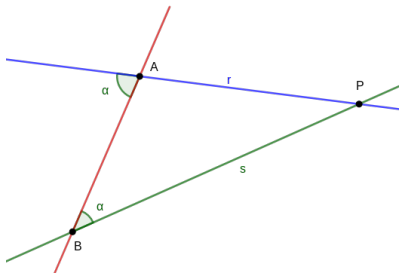


Teorema 7

Sejam r e s retas cortadas por uma secante s . Se dois ângulos alternos são congruentes, então as retas r e s são paralelas.

Demonstração:

- ▶ Suponha, por absurdo, que as retas não são paralelas.
- ▶ Então as retas se intersectam num ponto P , formando um triângulo ABP .
- ▶ Com isso, $\triangle ABP$ teria um ângulo externo com medida igual ao ângulo interno α , contrariando o teorema do ângulo externo.



Teorema 7






Este teorema ainda é verdadeiro se substituirmos a expressão 'alternos internos' por:

- ▶ alternos externos
- ▶ correspondentes
- ▶ colaterais internos
- ▶ colaterais externos

Referencias I



-  Geraldo Ávila.
Legendre e o postulado das paralelas.
Revista da Olimpíada, 6:64–76, 2005.
-  Manfredo Perdigão do Carmo.
Geometrias não-Euclidianas.
Matemática Universitária, 6:25–48, 1987.
-  A geometria dos espaços curvos ou geometria não-euclidiana.
ON - Observatório Nacional.