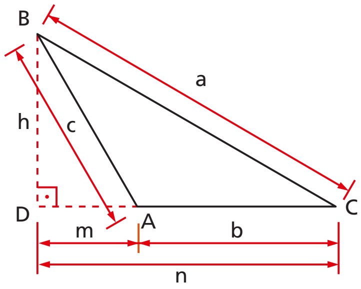
2º) Seja ABC um triângulo com $90° < \hat{A} < 180°$.



No $\triangle BCD$, que é retângulo:

$a^2 = n^2 + h^2 \quad (1)$

No $\triangle BAD$, que é retângulo:

$h^2 = c^2 - m^2 \quad (2)$

Temos também:

$n = b + m \quad (3)$

Levando (3) e (2) em (1):

$a^2 = (b + m)^2 + c^2 - m^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2bm$

Mas, no $\triangle BAD$: $m = c \cdot \cos(180° - \hat{A}) \Rightarrow m = -c \cdot \cos \hat{A}$.

Logo: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}}$

3º) Analogamente, podemos provar que:

$$\boxed{\begin{array}{l} b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C} \end{array}}$$

EXERCÍCIOS

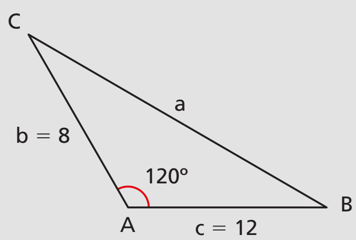
460. Dois lados de um triângulo medem 8 m e 12 m e formam entre si um ângulo de 120°. Calcule o terceiro lado.

Solução

Adotando a notação da figura ao lado e aplicando a lei dos cossenos, temos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} =$
$= 8^2 + 12^2 - 2 \cdot 8 \cdot 12 \cdot \cos 120° =$
$= 64 + 144 + 96 = 304$

então $a = \sqrt{304} = 4\sqrt{19}$ m.

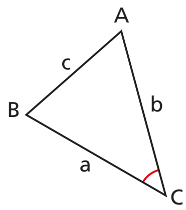


461. Calcule *c*, sabendo que:

$a = 4$

$b = 3\sqrt{2}$

$\hat{C} = 45°$



462. Dois lados consecutivos de um paralelogramo medem 8 m e 12 m e formam um ângulo de 60°. Calcule as diagonais.

463. Calcule os três ângulos internos de um triângulo ABC, sabendo que $a = 2$, $b = \sqrt{6}$ e $c = \sqrt{3} + 1$.

464. Demonstre que, se os lados de um triângulo têm medidas expressas por números racionais, então os cossenos dos ângulos internos também são números racionais.

465. Os lados de um triângulo são dados pelas expressões:

$$a = x^2 + x + 1, \quad b = 2x + 1 \quad \text{e} \quad c = x^2 - 1.$$

Demonstre que um dos ângulos do triângulo mede 120°.

466. Calcule o lado *c* de um triângulo ABC sendo dados $\hat{A} = 120°$, $b = 1$ e $\dfrac{a}{c} = 2$.

467. Qual é a relação entre os lados *a*, *b* e *c* de um triânguo ABC para que se tenha:

a) ABC retângulo?

b) ABC acutângulo?

c) ABC obtusângulo?

Solução

Admitamos que *a* seja o maior lado do triângulo ABC, isto é, $a \geqslant b$ e $a \geqslant c$. Sabemos da Geometria que ao maior lado opõe-se o maior ângulo do triângulo, portanto, $\hat{A} \geqslant \hat{B}$ e $\hat{A} \geqslant \hat{C}$. Assim, temos:

$\triangle ABC$ é retângulo $\Leftrightarrow \hat{A} = 90°$

$\triangle ABC$ é acutângulo $\Leftrightarrow 0° < \hat{A} < 90°$

$\triangle ABC$ é obtusângulo $\Leftrightarrow 90° < \hat{A} < 180°$

Por outro lado, da lei dos cossenos, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Então, vem:

a) $\hat{A} = 90° \Leftrightarrow \cos \hat{A} = 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$

b) $0° < \hat{A} < 90° \Leftrightarrow \cos \hat{A} > 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$

c) $90° < \hat{A} < 180° \Leftrightarrow \cos \hat{A} < 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 < 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$

Conclusão: um triângulo ABC é respectivamente retângulo, acutângulo ou obtusângulo, conforme o quadrado de seu maior lado seja igual, menor ou maior que a soma dos quadrados dos outros lados.

468. Classifique segundo as medidas dos ângulos internos os triângulos cujos lados são:

a) 17, 15, 8 b) 5, 10, 6 c) 6, 7, 8

469. Os lados de um triângulo obtusângulo estão em progressão geométrica crescente. Determine a razão da progressão.

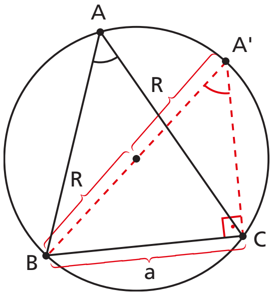
II. Lei dos senos

Em qualquer triângulo, o quociente entre cada lado e o seno do ângulo oposto é constante e igual à medida do diâmetro da circunferência circunscrita.

Demonstração:

Seja ABC um triângulo qualquer, inscrito numa circunferência de raio R. Por um dos vértices do triângulo (B), tracemos o diâmetro correspondente $\overline{BA'}$ e liguemos A' com C.

Sabemos que $\hat{A} = \hat{A}'$ por determinarem na circunferência a mesma corda $\overline{BC}$. O triângulo A'BC é retângulo em C por estar inscrito numa semicircunferência.



Temos, então:

$$a = 2R \cdot \text{sen } \hat{A}' \Rightarrow a = 2R \cdot \text{sen } \hat{A} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = 2R$$

Analogamente: $\dfrac{b}{\text{sen } \hat{B}} = 2R$ e $\dfrac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R$.

Donde concluímos a tese:

$$\boxed{\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R}$$

EXERCÍCIOS

470. Calcule o raio da circunferência circunscrita a um triângulo ABC em que $a = 15$ cm e $\hat{A} = 30°$.

Solução

Da lei dos senos, temos:

$$2R = \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{15}{\text{sen } 30°} = \frac{15}{\frac{1}{2}} = 30 \text{ cm}$$

então $R = 15$ cm.

471. Calcule os lados *b* e *c* de um triângulo ABC no qual $a = 10$, $\hat{B} = 30°$ e $\hat{C} = 45°$.

Dado: $\text{sen } 105° = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

Solução

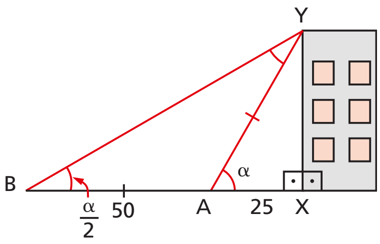
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \Rightarrow \hat{A} = 180° - 30° - 45° = 105°$$

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} \Rightarrow b = \frac{a \cdot \text{sen } \hat{B}}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{10 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = \frac{20}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

472. Quais são os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ de um triângulo ABC para o qual $\hat{A} = 15°$, $\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{\sqrt{2}}{2}$?

473. Um observador colocado a 25 m de um prédio vê o edifício sob certo ângulo. Afastando-se em linha reta mais 50 m, ele nota que o ângulo de visualização é metade do anterior. Qual é a altura do edifício?



184. Teorema

Em qualquer triângulo, valem as relações seguintes:

$$\boxed{\begin{aligned} a &= b \cdot \cos\hat{C} + c \cdot \cos\hat{B} \\ b &= a \cdot \cos\hat{C} + c \cdot \cos\hat{A} \\ c &= b \cdot \cos\hat{A} + a \cdot \cos\hat{B} \end{aligned}}$$

Demonstração:

Vamos provar só a primeira delas:

1º) Seja ABC um triângulo com $\hat{B} < 90°$ e $\hat{C} < 90°$.