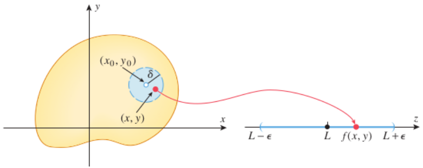
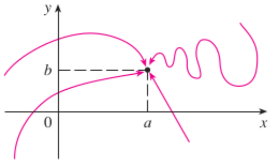
Limite

Seja (x_0, y_0) um vetor, não necessariamente no domínio de f. Escrevemos,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L,$$

se pudermos tornar os valores $f(x,y)$ próximos de L, tanto quanto quisermos, tomando (x,y) próximo, mas não igual, do ponto (x_0, y_0).





Continuidade

Definição

Uma função $f(x, y)$ *é dita contínua no ponto* (x_0, y_0) *se*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Derivadas Parciais

Se $z = f(x, y)$, então podemos perguntar como o valor z muda se umas das variáveis é mantida fixa e a outra variando.

Por exemplo:

A lei do gases diz que em condições apropriadas a pressão P exercida por um gás é uma função do volume V do gás e da sua temperatura T: $P = f(V, T)$

Assim, um físico estudando gases poderia estar interessado na taxa de mudança de pressão se o volume for mantido fixo e a temperatura variar; ou o contrário, fixada a temperatura como varia a pressão se o volume é variado.

Como calcular essas variações

Veja o seguinte exemplo:
Seja $f(x,y) = xy + x^2 + y^3$. Fixe $y = 3$ e continue variando x nos números reais. Obtemos a seguinte função:

$$g(x) = 3x + x^2 + 27$$

A nova função só depende de uma variável (x) e sua taxa de variação é dada pela derivada $g'(x) = 3 + 2x$.
De modo mais geral, fixado qualquer valor de $y = y_0$ a função torna-se

$$g(x) = y_0 x + x^2 + y_0^3$$

uma função de uma variável com taxa de variação $g'(x) = y_0 + 2x$.

Derivadas Parciais

Definição

*A **Derivada Parcial de f em relação a x** em um ponto (x_0, y_0) é definida como sendo:*

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

se o limite existir.

Exemplos

1. Calcule $f_x(x,y)$ para $f(x,y) = 2x^3y^2 + 2y + 4x$. Calcule em $(1,3)$.
2. Calcule $f_x(x,y)$ para $f(x,y) = x^4\text{sen}(xy^3)$. Calcule em $(\pi,1)$.
3. Calcule $f_x(x,y)$ para $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 3xy^2}$. Calcule em $(1,0)$.

Derivadas Parciais

Voltemos ao nosso exemplo:
Seja $f(x, y) = xy + x^2 + y^3$. Agora, fixe $x = -1$ e continue variando y nos números reais. Obtemos a seguinte função:

$$h(y) = -y + 1 + y^3.$$

A nova função só depende de uma variável (y) e sua taxa de variação é dada pela derivada $h'(y) = -1 + 3y^2$.
De modo mais geral, fixado qualquer valor de $x = x_0$ a função torna-se

$$h(y) = x_0 y + x_0^2 + y^3$$

uma função de uma variável com taxa de variação $g'(x) = x_0 + 3y^2$.

Derivadas Parciais

Definição

*A **Derivada Parcial de f em relação a y** em um ponto* (x_0, y_0) *é definida como sendo:*

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

se o limite existir.

Exemplos

1. Calcule $f_y(x,y)$ para $f(x,y) = 2x^3y^2 + 2y + 4x$. Calcule em $(1,3)$.
2. Calcule $f_y(x,y)$ para $f(x,y) = x^4\text{sen}(xy^3)$. Calcule em $(\pi,1)$.
3. Calcule $f_y(x,y)$ para $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 3xy^2}$. Calcule em $(1,0)$.

- Bianchini, Waldecir. Aprendendo Cálculo de várias variáveis: http://www.im.ufrj.br/waldecir/calculo2/calculo2.pdf
- Lima, Paulo. Cálculo de várias variáveis: http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/Calculo_de_varias_variaveis.pdf
- Plotar gráficos e regiões: https://www.wolframalpha.com/examples/PlottingAndGraphics.html
  Software para computador: Geogebra
- Stewart, James. Cálculo, Volume II
- Anton, Howard. Cálculo, Volume II