Álgebra Elementar

Lista de Exercícios: P1

0 - Revisão sobre a Teoria.
1 - Introdução à lógica Aristotélica.
2 - O Cálculo Proposicional - Parte 1.
3 - O Cálculo Proposicional - Partes 2 e 3.
4 - Técnicas de Demonstração - Prova Direta.

Profa. Karla Lima
FACET/UFGD

Revisão sobre a Teoria

1. Sobre conectivos:

   (a) Quais dos 6 conectivos listados na Aula 02 são binários? E unários? Justifique a sua resposta.

   (b) Quais os nomes dados às proposições que compõem uma proposição condicional? Pesquise sobre os termos 'condição necessária' e 'condição suficiente' e associe com as proposições de uma condicional.

   (c) Qual a diferença entre uma proposição conjuntiva e uma disjuntiva?

2. Qual a vantagem em usar a linguagem simbólica ao analisarmos o valor de cada proposição?

3. Em termos de dependência de proposições, qual a diferença entre 'p implica q' e 'p é equivalente a q'?

4. Sobre equivalência de proposições:

   (a) Duas proposições equivalentes p e q são dependentes?

   (b) Mostre que $\neg(p \wedge q)$ é equivalente a $\neg p \vee \neg q$. Ou seja, para negar uma conjunção, devemos negar pelo menos umas das proposições.

   (c) Mostre que $\neg(p \vee q)$ é equivalente a $\neg p \wedge \neg q$. Ou seja, para negar uma disjunção, devemos negar cada uma das proposições.

   (d) Mostre que $\neg(p \to q)$ é equivalente a $p \to \neg q$. Ou seja, para negar uma condicional, devemos negar a proposição *consequente*.

   (e) Mostre que $\neg(p \to q)$ é equivalente a $p \wedge \neg q$. Ou seja, para negar uma condicional, devemos manter a proposição *antecedente* e negar a proposição *consequente*.

   (f) Mostre que $\neg(p \leftrightarrow q)$ é equivalente a $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$.

   (g) Mostre que a negativa de uma disjunção exclusiva é uma bicondicional. Ou seja, $\neg(p \veebar q)$ é equivalente a $p \leftrightarrow q$.

   (h) Mostre, também, que a negativa da disjunção exclusiva é equivalente às proposições $\neg p \veebar q$ e $p \veebar \neg q$.

Para mais detalhes, ver a apostila: "Apostila_Logica".

1 Introdução à lógica Aristotélica

Sofisma (ou Falácia): argumento ou raciocínio concebido com o objetivo de produzir a ilusão da verdade, que, embora simule um acordo com as regras da lógica, apresenta, na realidade, uma estrutura interna inconsistente, incorreta e deliberadamente enganosa.

Por exemplo:

Existem cubanos que são europeus.

Existem mexicanos que são cubanos.

Logo, existem mexicanos que são europeus.

A argumentação não é válida (verifique!), mas causa uma ilusão de verdade.

Também podemos partir de premissas falsas, usar um sofisma e chegar a uma conclusão verdadeira:

Existem cubanos que falam espanhol.

Existem mexicanos que são cubanos.

Logo, existem mexicanos que falam espanhol.

Aqui, a premissa "Existem mexicanos que são cubanos." é falsa, mas a conclusão é verdeira. Além disso, o argumento não é válido.

Exercícios

1. Dado um argumento, é sempre possível garantir a verdade da conclusão, argumentando-se de modo válido?

2. Dadas premissas verdadeiras, a conclusão sempre pode ser garantida?

3. Classifique os argumentos abaixo em válidos ou não válidos (Sofismo ou Falácia):

A_1: Todos os alemães são europeus.
Nietzsche era alemão.
Logo, Nietzsche era europeu.

A_2: Todos os alemães são europeus.
O príncipe Charles não é alemão.
Logo, príncipe Charles não é europeu.

A_3: Todos os escritores são alfabetizados.
Logo, todos os alfabetizados são escritores.

A_4: Alguns brasileiros são pobres.
Alguns pobres são mendigos.
Logo, todos os brasileiros são mendigos.

A_5: Algumas casas têm relógio e alguns relógios têm campainha.
Logo, todas as casas têm campainha.

A_6: Todos os apinagés são índios e não existem índios carecas.
Logo, nenhum apinagé é careca.

A_7: Todo mineiro é brasileiro e todo tricordiano é mineiro.
Logo, todo tricordiano é brasileiro.

4. Nos argumentos a seguir, todas as conclusões são falsas. Identifique se isto ocorre de premissas falsas, se o argumento não é válido ou se ambos os fatores influem:

A_8: Todos os mamíferos são aves.
Todas as aves têm pena.
Logo, todos os mamíferos têm penas.

A_9: Alguns espanhóis são interessantes.
Alguns livros são interessantes.
Logo, alguns espanhóis são livros.

A_{10}: Todos os professores são alfabetizados.
Logo, todos os alfabetizados são professores.

A_{11}: Todos os produtos importados são baratos.
O petróleo é importado.
Logo, o petróleo é barato.

Gabarito

1. Não. Argumentar de forma coerente quer dizer que o argumento é válido. Porém, premissas falsas podem levar à uma conclusão igualmente falsa.

2. Novamente, não. Pode ser que as premissas sozinhas não sejam suficientes para garantir a conclusão, tornando o argumento inválido.

3. Os argumentos A_1, A_6 e A_7 são válidos (use a técnica das setas!)

4. A_8: premissas falsas (a 1). Argumento inválido.

   A_9: Sofisma.

   A_{10}: Sofisma.

   A_{11}: Premissas falsas. Argumento inválido.

2 O Cálculo Proposicional - Parte 1

Observação

Para mais exemplos, veja [1], p. 49–57. Lembre-se que este livro está disponível na Biblioteca Online da UFGD.

Exercícios

1. Para cada proposição abaixo:

   i) Separe as proposições simples e use letras maiúsculas para abreviá-las;

   ii) Traduza para a linguagem simbólica.

   Proposições:

   (a) Se Alfredo escrever para Maria, ela não irá para outra cidade.

   (b) Alfredo não escreveu para Maria e ela irá para outra cidade.

   (c) Alfredo escreverá para Maria se, e somente se, ela for para outra cidade.

   (d) Se Alfredo escrever para Maria e João for ao encontro dela, então Maria não irá para outra cidade.

(e) Se Alfredo for ao encontro de Maria ou João for ao encontro de Maria, ela não ficará mais na cidade.

(f) Se João ama Maria e Maria ama Paulo, então João não terá chance com Maria.

(g) Todos acertaram todas as questões, mas isso não significa que não devam estudar mais.

(h) Ou Eduardo apresentará uma queixa, ou, se Fernando investigar, então Geraldo será desclassificado.

2. Sejam as proposições: A = Carlos é argentino e B = João é brasileiro. Traduza para a linguagem natural as seguintes proposições simbólicas:

   (a) $A \wedge B$

   (b) $\neg A \wedge B$

   (c) $A \rightarrow \neg B$

   (d) $\neg A \leftrightarrow B$

Gabarito

1. (a) A: Alfredo escreve para Maria.
   M: Maria irá para outra cidade.
   $\mathrm{A} \rightarrow \neg \mathrm{M}$

   (b) A: Alfredo escreveu para Maria.
   M: Maria irá para outra cidade.
   $\neg \mathrm{A} \wedge \mathrm{M}$

   (c) A: Alfredo escreve para Maria.
   M: Maria irá para outra cidade.
   $\mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{M}$

(d) A: Alfredo escrever para Maria.

J: João for ao encontro dela (Maria).

M: Maria irá para outra cidade.

$A \wedge J \rightarrow \neg M$

(e) A: Alfredo for ao encontro de Maria.

J: João for ao encontro de Maria.

M: Ela (Maria) ficará na cidade.

$A \vee J \rightarrow \neg M$

(f) J: João ama Maria.

P: Maria ama Paulo.

M: João terá chance com Maria.

$J \wedge P \rightarrow \neg M$

(g) A: Todos acertaram todas as questões.

E: Isso significa que não devam estudar mais.

$A \wedge \neg E$

(h) E: Eduardo apresentará uma queixa.

F: Fernando investigar.

G: Geraldo será classificado.

$E \vee (F \rightarrow G)$

2. (a) Carlos é argentino e João é brasileiro.$A \wedge B$

   (b) Carlos não é argentino e João é brasileiro.

   (c) Se Carlos é argentino, João não é brasileiro.

   (d) Carlos não é argentino se, e somente se, João é brasileiro.

3 O Cálculo Proposicional - Partes 2 e 3

1. Para cada uma das proposições a seguir, responda os itens abaixo:

(a) Separe as proposições simples e atribua um valor lógico de acordo com o contexto atual.

(b) Traduza a proposição composta para a linguagem simbólica.

(c) Justificando a sua resposta, conclua qual o valor lógico da proposição composta.

(d) Escreva a negativa da proposição dada e determine o seu valor lógico.

i. O azul é uma das cores da bandeira brasileira, e a bandeira de Portugal tem as cores verde e vermelho.

ii. A inflação é praticamente nula, e o desemprego não para de crescer.

iii. Se a Alemanha perdeu a Segunda Guerra Mundial e o Japão era seu aliado, então o Japão também perdeu a Segunda Guerra Mundial.

iv. Se o Brasil já teve várias moedas, é provável que o real seja a última.

2. Para cada proposição, escreva a sua negativa lógica correspondente. Justifique sua resposta.

(a) Pedro distribuiu amor e Pedro colheu felicidade.

(b) João é rico, ou Maria é pobre.

(c) Se o beneficiário estiver acima do peso, ele é sedentário.

3. Considere o argumento constituído pelas seguintes premissas:

Todo engenheiro químico é bom na área de exatas.

Alguma pessoa boa na área de exatas trabalha no polo petroquímico.

Nenhum professor de química trabalha no polo petroquímico.

Algum engenheiro químico é professor de química.

É correto afirmar que a conclusão válida para esse argumento é:

(a) Toda pessoa boa na área de exatas é engenheiro químico.

(b) Algum engenheiro químico trabalha no polo petroquímico.

(c) Nenhum professor de química é bom na área de exatas.

(d) Algum professor de química não é bom na área de exatas.

(e) Alguma pessoa boa na área de exatas não trabalha no polo petroquímico.

Justifique sua resposta. Analise o que torna as outras alternativas incorretas.

4. Considere a seguinte proposição:

   "Se Júlia tem 20 anos, então Marcela é amiga de João."

   Pode-se concluir que:

   (a) se Marcela é amiga de João, então Júlia tem 20 anos.

   (b) se Júlia não tem 20 anos, então Marcela não é amiga de João.

   (c) se Marcela não é amiga de João, então Júlia não tem 20 anos.

   (d) se Júlia é amiga de Marcela, então Júlia é amiga de João.

   Justifique sua resposta. Analise o que torna as outras alternativas incorretas.

5. Verifique se as proposições dadas são equivalentes:

   (a) "Se Marcos estudou, então foi aprovado" e "Marcos não estudou e não foi aprovado".

   (b) " $\neg$P $\to$ Q " e "P $\vee Q$".

   (c) "Se tem OAB, então é advogado" e "Se não é advogado, então não tem OAB".

   (d) "Se comprei e paguei, então levei" e "Se comprei e não paguei, então não levei."

Gabarito

1. **Obs:** Aqui estão as soluções escritas de modo conciso. Verifique o arquivo "Exemplos de Soluções", para ver como as soluções devem ser apresentadas nas avaliações.

   (i) a) A = O azul é uma das cores da bandeira brasileira. (V)
   V = A bandeira de Portugal tem as cores verde e vermelho. (V)

   b) $A \wedge V$

   c) $A \wedge V$ (V)

   d) $\neg(A \wedge V) = \neg A \vee \neg V$ (F)

   (ii) a) I = A inflação é praticamente nula. (F)
   D = O desemprego para de crescer. (F) [Logo, $\neg$D (V)]

   b) $I \wedge \neg D$

   c) $I \wedge \neg D$ (F)

   d) $\neg(I \wedge \neg D) = \neg I \vee D$ (V)

   (iii) a) A = Alemanha perdeu a Segunda Guerra Mundial. (V)
   J = O Japão era seu aliado (Alemanha). (V)
   P = O Japão também perdeu a Segunda Guerra Mundial. (V)

   b) $A \wedge J \to P$

   c) $A \wedge J \to P$ (V)

d) $\neg(A \wedge J \rightarrow P\ ) = A \wedge J \rightarrow \neg P$ (F)

(iv) a) B = O Brasil já teve várias moedas. (V)
R = É provável que o real seja a última (moeda). (F)

b) $B \rightarrow R$

c) $B \rightarrow R$ (F)

d) $\neg(B \rightarrow R\ ) = B \rightarrow \neg R$ (V)

2. (a) Pedro não distribuiu amor ou Pedro não colheu felicidade.
   (b) João não é rico, e Maria não é pobre.
   (c) O beneficiário está acima do peso e ele não é sedentário.

3. Alternativa e)

4. Alternativa c)

5. (a) Não são equivalentes.
   (b) São equivalentes.
   (c) São equivalentes.
   (d) Não são equivalentes.

4 Técnicas de Demonstração: Prova Direta

1. Demonstre os teoremas a seguir usando prova direta. Separe todas as proposições usadas e descreva como elas estão relacionadas.

   (a) A soma de um inteiro com o seu quadrado é um número par.
   Dica: Em exemplos gerais, separe em casos. Pense em como podemos dividir os números inteiros em dois grupos.

   (b) Para qualquer inteiro n, o número
   $$3(n^2 + 2n + 3) - 2n^2$$
   é um quadrado perfeito. (Pesquise o que são quadrados perfeitos.)

   (c) A diferença entre dois cubos consecutivos é ímpar. (Cubos Consecutivos = a^3 e $(a+1)^3$)

   (d) O produto de três números consecutivos quaisquer é divisível por 3.

   (e) Se b e c são os catetos de um triângulo retângulo de hipotenusa a e altura h, mostre que $b + c < a + h$.

   (f) Se dois inteiros são ambos divisíveis por um inteiro n, então a sua soma é divisível por n.

   (g) Se $n \in \mathbb{Z}$, então $n^2 + n$ é par.

   (h) Sejam $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Se $x + y = x + z$ então $y = z$.

Referências

[1] M.O. da Cunha and N.J. Machado. *Lógica e linguagem cotidiana: Verdade, coerência, comunicação, argumentação*. Autêntica Editora, 2013.