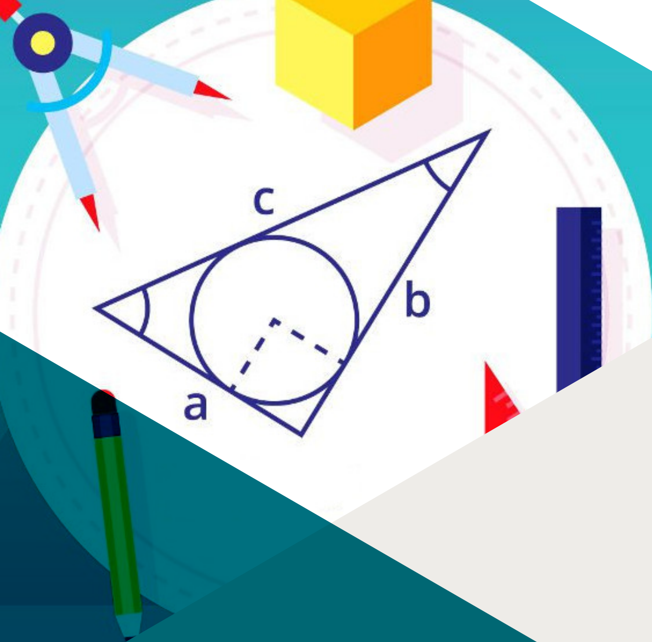
Introdução ao Cálculo



Aula 01

Conjuntos Numéricos

Karla Lima

Sumário

Atividades com o Geogebra

A Reta Real

Vamos encontrar a posição de alguns números reais na reta real, usando o software Geogebra.

Obs: Como estamos usando uma calculadora 2D, os pontos serão descritos em 2 coordenadas: (a,0). A segunda coordenada igual a zero garante que o ponto estará na reta horizontal.

A Reta Real

1. Os números inteiros são marcados na reta para demarcar posições importantes.
2. Localize os números racionais: $-\frac{33}{13}, \frac{29}{7}$ e 5.
   - Use a barra "/" para escrever frações.
3. Localize os números irracionais: -2π, e, $-\sqrt{2}$ e π.
   - Use o texto "pi" para denotar o número π e o texto "e" para denotar o número de Euler e.
   - Para escrever raiz quadrada, use o texto "sqrt" antes do número desejado.

A Reta Real

1. Vá em "Ferramentas" e clique em "Ponto em Objeto".
2. Clique na reta real, obtendo um novo ponto na mesma.
3. Vá em "Ferramentas" e clique em "Mover".
4. Arraste o ponto obtido e observe os valores de sua coordenada na reta.

Ordenação na Reta Real

1. Baixe o arquivo Intervalos na Reta Real.
2. Represente os pontos pedidos.
3. Vá em "Ferramentas" e clique em "Mover".
4. Arraste os pontos extremos ao longo da reta para representar os intervalos pedidos.

Propriedades Básicas da Álgebra

Operações Fundamentais

Definimos as seguintes operações básicas no conjunto dos números reais:

- Adição $(+)$;
- Multiplicação $(\cdot$ ou $\times)$.

A seguir, vamos apresentar suas propriedades.

Leis de fechamento

Dados dois números reais a e b:

- A soma $a + b$ é ainda um número real;
  - $3 + 1 = 4 \in \mathbb{R}$;
  - $-2 + \pi \in \mathbb{R}$.
- O produto $a \cdot b$ também é um número real.
  - $3 \times 1 = 3 \in \mathbb{R}$;
  - $-2 \times \pi = -2\pi \in \mathbb{R}$.

Leis de comutatividade

Dados dois números reais a e b:

- A ordem é irrelevante na adição: $a + b = b + a$;
  - $3 + 1 = 1 + 3$;
  - $-2 + \pi = \pi + (-2)$.
- A ordem é irrelevante na multiplicação:$a \cdot b = b \cdot a$.
  - $3 \times 1 = 1 \times 3$;
  - $-2 \times \pi = \pi \times (-2)$.

Leis associativas

Dados três números reais a, b e c:

- O agrupamento é irrelevante em adições repetidas: $(a + b) + c = a + (b + c)$;
  - $(3 + 1) + 5 = 3 + (1 + 5)$;
- O agrupamento é irrelevante em multiplicações repetidas:$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
  - $(3 \times 1) \times 5 = 3 \times (1 \times 5)$.

Leis distributivas

Um panda morre cada vez que você usa errado. Por isso eles estão em extinção!

Dados três números reais a, b e c:

- A multiplicação é distributiva em relação à adição: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
  - $3 \times (7 + 5) = 3 \times 7 + 3 \times 5$ (o 3 multiplica os **DOIS** termos da soma, não apenas o que está próximo a ele!);
  - $(2 + 7) \times (-3) = 2 \times (-3) + 7 \times (-3)$.

Leis distributivas

- A forma **expandida** de $(a+2)x$ é
$$a \times x + 2 \times x = ax + 2x.$$
- A forma **fatorada** de $3y - by$ é
$$(3-b) \times y = (3-b)y.$$

Leis de identidade

Dado um número real a:

- Existe um único elemento 0 com a propriedade: $0 + a = a + 0 = a$;
- Existe um único elemento 1 com a propriedade: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Leis de inverso

Dado um número real a:

- Existe um número $-a$, tal que

$$a + (-a) = (-a) + a = 0;$$

  - O **oposto** de $\sqrt{2}$ é $-\sqrt{2}$;
  - O **oposto** de $-\pi$ é π.

Leis de inverso

Dado um número real a:

- Se $a \neq 0$, então existe um número a^{-1}, tal que

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

  - A **recíproca** de $\sqrt{2}$ é $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$;
  - A **recíproca** de $-\pi$ é $\dfrac{1}{-\pi}$.

Subtração

Vimos que dado um número real b, existe um número $-b$, tal que

$$b + (-b) = (-b) + a = 0.$$

Devido à esta propriedade, podemos definir em $\mathbb{R}$ a operação de **subtração**, estabelecendo que

$$a - b = a + (-b), \quad \text{para todos } a, b \in \mathbb{R}.$$

Ou seja, **subtrair** dois números nada mais é do que **somar** um deles com o oposto do outro.

Divisão

Vimos também que se $b \neq 0$, então existe um número b^{-1}, tal que

$$b \cdot b^{-1} = b^{-1} \cdot b = 1.$$

Devido à esta propriedade, podemos definir em $\mathbb{R}$ a operação de **divisão**, estabelecendo que

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}, \quad \text{para todos } a, b \in \mathbb{R}, \text{ com } b \neq 0.$$

Ou seja, **dividir** dois números nada mais é do que **multiplicar** um deles com a recíproca do outro.

Operações com Frações

Soma de Frações

- Para **somar** duas frações com denominadores iguais, basta somar seus numeradores:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

Soma de Frações

- Se os denominadores são diferentes, devemos dividir o todo por um múltiplo comum entre os denominadores.
- A forma mais reduzida é encontrada ao se tomar o mínimo múltiplo comum (mmc), porém é bem mais rápido tomar o múltiplo obtido pelo produto dos denominadores.

Soma de Frações

Dada a soma $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$, devemos reescrever cada fração para representar a quantidade de partes de $b \cdot d$ que elas representam:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d} \\ &= \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} \frac{c}{d} &= \frac{c}{d} \cdot 1 = \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{b} \\ &= \frac{c \cdot b}{b \cdot d} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{b \cdot d} \\ &= \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}. \end{aligned}$$

Soma de Frações: Exemplos

Exemplo 1

$$\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{1+4}{3} = \frac{5}{3}.$$

Soma de Frações: Exemplos

Exemplo 1

$$\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{1+4}{3} = \frac{5}{3}.$$

Exemplo 2

$$\frac{1}{\pi} + \frac{7}{2} = \frac{1 \cdot 2}{\pi \cdot 2} + \frac{7 \cdot \pi}{2 \cdot \pi} == \frac{2 + 7\pi}{2\pi}.$$

Multiplicação de Frações

A multiplicação entre frações é bem simples: basta multiplicar os numeradores e dividir pela multiplicação dos denominadores

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Multiplicação de Frações: Exemplo

Exemplo 3

Vamos calcular o produto $\frac{12}{11} \cdot \frac{1}{3}$. *Pela definição anterior, basta calcular*

$$\frac{12}{11} \cdot \frac{1}{3} = \frac{12 \cdot 1}{11 \cdot 3},$$

de onde obtemos que

$$\frac{12}{11} \cdot \frac{1}{3} = \frac{12}{33}.$$

Divisão de Frações

Digamos que queremos efetuar a divisão da fração $\frac{8}{3}$ pela fração $\frac{1}{5}$. Pela definição de divisão, sabemos que

$$\frac{\frac{8}{3}}{\frac{1}{5}} = \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-1},$$

onde $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$ é o inverso multiplicativo de $\frac{1}{5}$.

Divisão de Frações

Tal inverso é único e satisfaz

$$\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 1.$$

Como

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{1} = 1,$$

podemos afirmar que

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{1}.$$

Divisão de Frações

Em geral, se $\frac{a}{b} \neq 0$, temos que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}.$$

Portanto, para efetuar a divisão entre duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ $(\neq 0)$, basta fazer:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Divisão de Frações: Exemplo

Exemplo 4

Vamos calcular a divisão $\frac{\frac{12}{11}}{\frac{1}{3}}$. *Pela definição anterior, basta calcular*

$$\frac{12}{11} \cdot \frac{3}{1} = \frac{12 \cdot 3}{11 \cdot 1},$$

de onde obtemos que

$$\frac{\frac{12}{11}}{\frac{1}{3}} = \frac{36}{11}.$$

Divisão de Frações: Exemplo

Exemplo 5

Vamos calcular a divisão $\frac{\frac{4}{7}}{5}$.

Pela definição anterior, basta calcular

$$\frac{12}{11} \cdot \frac{3}{1} = \frac{12 \cdot 3}{11 \cdot 1},$$

de onde obtemos que

$$\frac{\frac{12}{11}}{\frac{1}{3}} = \frac{36}{11}.$$

Exercícios de Aprofundamento

Arquivo

Baixe o arquivo Numeros.pdf e resolva os exercícios propostos.