

Sumário



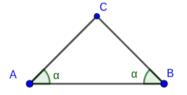
1. Congruência - continuação

Congruência - continuação

Teorema 3

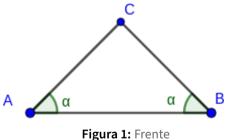


Se dois ângulos de um triângulo são congruentes, então o triângulo é isósceles.





As figuras abaixo são cópias do mesmo triângulo: uma de frente e outra de verso.



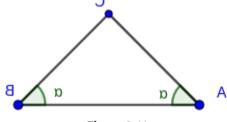
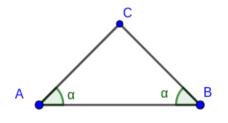
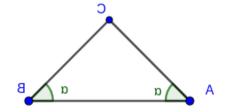


Figura 2: Verso



Olhe agora para os triângulos ABC e ACB:





- ▶ O ângulo \hat{A} do 1° triângulo é congruente ao ângulo \hat{B} do 2;
- ► O ângulo \hat{B} do 1° triângulo é congruente ao ângulo \hat{A} do 2;
- ightharpoonup AB = BA



Pelo teorema 2 (LAL), segue-se que

$$\triangle ABC = \triangle ACB$$
.

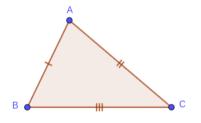
lacktriangle O comprimento do lado oposto ao ângulo lpha é igual nos dois triângulos. Portanto,

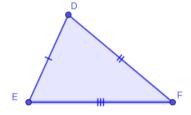
$$AC = BC$$

e o triângulo é isósceles.

Teorema 4 (Caso LLL)

Se dois triângulos têm três lados respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.



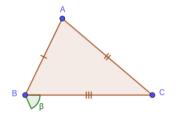


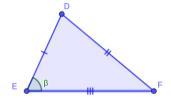


Hipótese:
$$\begin{cases} AB = DE \\ AC = DF \\ BC = EF \end{cases}$$

Tese: $\triangle ABC = \triangle DEF$

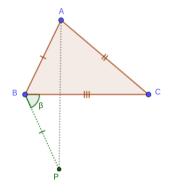
Na semirreta \overrightarrow{BC} , e no semiplano que não contém o ponto A, tracemos um ângulo congruente a \hat{E} , com vértice em B.

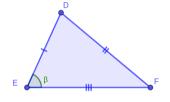






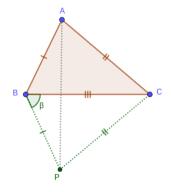
No outro lado desse ângulo, marquemos um ponto P de modo que BP = DE.

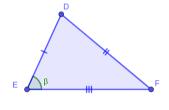






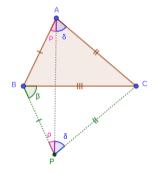
Ligando P a C, obtemos o triângulo PBC congruente ao triângulo DEF (LAL: BC = EF, $P\hat{B}C = D\hat{E}F \in BP = ED$). Com isso, PC = DF.

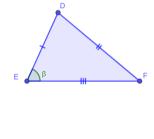






- Traçando o segmento \overline{AP} , os triângulos PAB e PCA são isósceles.
- Com isso, $B\hat{A}P = B\hat{P}A = P\hat{A}C = A\hat{P}C$. $\hat{D} = \hat{P} = B\hat{P}A + P\hat{A}C = B\hat{A}P + P\hat{A}C = \hat{A}$







Assim, temos

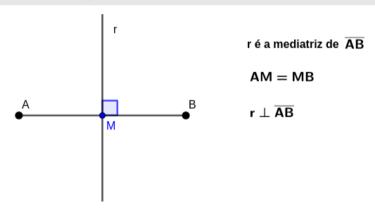
- ightharpoonup AB = ED (hipótese);
- $ightharpoonup \hat{D} = \hat{A}$ (demonstrado acima);
- ightharpoonup AC = DE (hipótese).

Usando a congruência LAL, concluímos que $\triangle DEF = \triangle ABC$.

Mediatriz

Definição 1

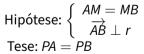
Chama-se **mediatriz** de um segmento a reta perpendicular ao mesmo em seu ponto médio.

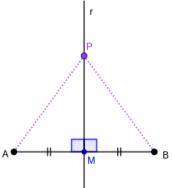


Teorema 5

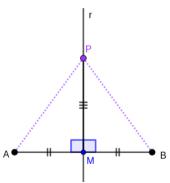


Todo ponto da mediatriz de um segmento é equidistante dos extremos desse segmento.

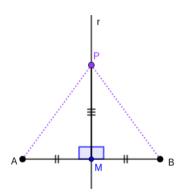




- ma 5. Demonstração
- Seja M o ponto médio de AB.
 Seja P um ponto qualquer da mediatriz de AB diferente de M.
- ► Trace os segmentos *PA* e *PB*.







- ► Concluímos que $\triangle PMA = \triangle PMB$ (LAL: \overline{PM} lado comum, $P\hat{M}A = 90^{\circ} = P\hat{M}B$ e AM = MB).
- ightharpoonup Portanto, PA = PB (lados opostos a ângulos congruentes).

Teorema 6

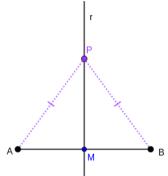


Se um ponto é equidistante dos extremos de um segmento, então ele pertence a mediatriz do segmento.

Hipótese: PA = PB

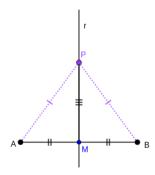
Tese: P pertence a mediatriz de

 \overline{AB} .



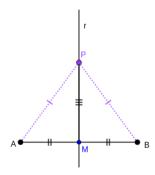


- ▶ Sejam *M* o ponto médio do segmento \overline{AB} e $P \neq M$ um ponto tal que PA = PB.
- ightharpoonup Tracemos o segmento \overline{PM} .
- ▶ Assim, $\triangle PMA = \triangle PMB$ (LLL).





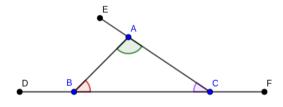
- ► Os ângulos AMP e BMP são congruentes (ângulos opostos a lados congruentes).
- $ightharpoonup A\hat{M}P + B\hat{M}P = 180^{\circ}.$
- ▶ Portanto, $A\hat{M}P = B\hat{M}P = 90^{\circ}$.



Ângulos Não-Adjacentes



No triângulo abaixo, os ângulos internos \hat{A} e \hat{B} são ditos **não-adjacentes** ao ângulo externo \hat{ACF} .



Teorema 7



Todo ângulo externo de um triângulo é maior que cada um dos ângulos internos que não lhes são adjacentes.

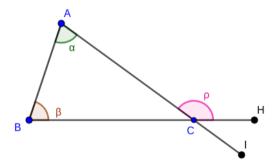
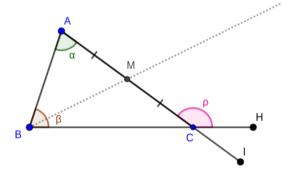


Figura 3: Por exemplo, temos $\rho > \alpha$ e $\rho > \beta$.



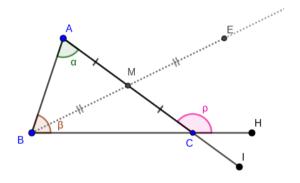
- ▶ **Hipótese:** $A\hat{C}H$ é um ângulo externo do $\triangle ABC$.
- ► Tese:
 - 1. $A\hat{C}H > A\hat{B}C$.
 - 2. $A\hat{C}H > B\hat{A}C$.

Seja M o ponto médio do lado \overline{AC} .

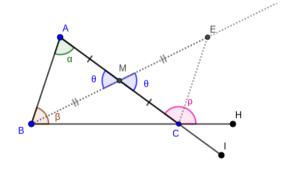




Na semirreta \overrightarrow{BM} , marquemos um ponto E tal que BM = ME.

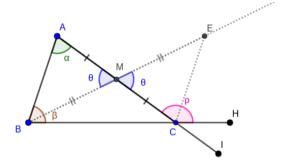


▶ Desta forma, $\triangle AMB = \triangle CME$ (LAL: AM = MC, $A\hat{M}B = C\hat{M}E$ - ângulos opostos pelo vértice - e BM = ME).





Consequentemente, $\hat{A} = M\hat{C}E$ (ângulos opostos a lados congruentes).



► Como $\hat{ACH} = \hat{ACE} + \hat{ECH} = \hat{A} + \hat{ECH}$, segue-se que $\hat{ACH} > \hat{A}$.



Exercício 1

Repita este argumento, em outra figura conveniente, para provar que ${\it A\^CH} > {\it A\^BC}$.

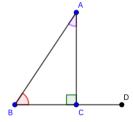
Corolário 1



Corolário 1

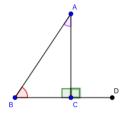
Se um triângulo tem um ângulo reto, então os demais ângulos são agudos.

- ► Hipótese: Ĉ = 90°.
 ► Tese: Â < 90° e B̂ < 90°.





▶ Se $\hat{C} = 90^{\circ}$, então seu ângulo externo é $\hat{\alpha} = 90^{\circ}$.



- Pelo Teorema 7, os ângulos não adjacentes \hat{A} e \hat{B} são menores que $\hat{\alpha}$.
- Portanto,

$$\hat{A} < 90^{\circ}$$
:

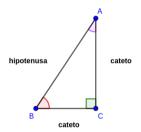
$$\hat{B} < 90^{\circ}$$
.

Triângulo Retângulo



Definição 2

Um triângulo que possui um ângulo reto é denominado triângulo retângulo.



- O lado oposto ao ângulo reto é chamado hipotenusa.
- Os outros lados são denominados catetos do triângulo.

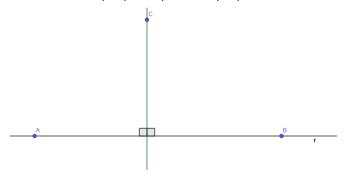
Corolário 2



Corolário 2

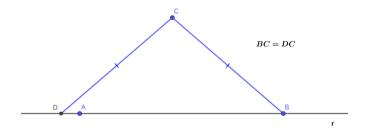
Por um ponto não pertencente a uma reta, passa uma única reta perpendicular a reta dada.

- ▶ Hipótese: $C \notin r$.
- ► **Tese:** Existe uma única reta que passa por *C* e é perpendicular a reta *r*.



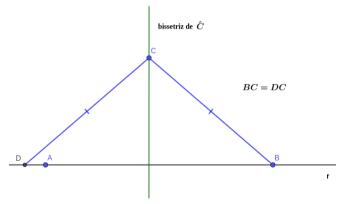
Existência:

- ➤ Seja *r* uma reta e *C* um ponto fora dela.
- Trace na reta r um ponto D tal que CD = CB.



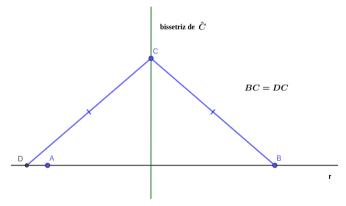
Existência:

O triângulo *DCB* é isósceles, logo sua bissetriz é também sua mediana e sua altura (Teorema 2).



Existência:

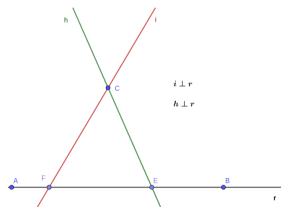
Assim, a bissetriz de \hat{C} é uma reta perpendicular à reta r que passa por C.





Unicidade:

Suponha, por absurdo, que existam duas retas perpendiculares à reta *r*, que passam por *C*.





Unicidade:

- O triângulo *CFE* possui dois ângulos retos (*CFE* e *CEF*).
- ► Mas, pelo Corolário 1, se um ângulo for reto os outros devem ser agudos, contradizendo a afirmação acima.