



(1) Se $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas em $x = a$, então:

(a) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = f(a) + g(a);$

(b) $\lim_{x \rightarrow a} [kf(x)] = kf(a), k \text{ constante};$

(c) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = f(a) \cdot g(a);$

(d) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}, \text{ se } g(a) \neq 0.$

(2) Mostre que a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x \text{ for racional} \\ 1, & \text{se } x \text{ for irracional} \end{cases}$$

é descontínua para todo $x \in \mathbb{R}$.

(3) Dê exemplo de uma função f que seja descontínua para todo x , enquanto $|f|$ seja sempre contínua.

(4) Use os seguintes resultados para mostrar que a função de Dirichlet, dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ for racional} \\ 0, & \text{se } x \text{ for irracional,} \end{cases}$$

não possui limite qualquer que seja $x_0 \in \mathbb{R}$:

(a) Dado qualquer irracional α existe uma sequência de racionais (x_n) tal que $\lim x_n = \alpha$.

(b) Dado qualquer racional β existe uma sequência de irracionais (y_n) tal que $\lim y_n = \beta$.