Prova substitutiva: P1

01

a) $f(x,y) = (2x+3y)^{10}$ (1 ponto)

$f_x(x,y) = 10(2x+3y)^9 \cdot 2 = 20(2x+3y)^9$

$f_y(x,y) = 10(2x+3y) \cdot 3 = 30(2x+3y)^9$

b) $f(x,y,z) = x \operatorname{sen}(yz)$ (1 ponto)

$f_x(x,y,z) = \operatorname{sen}(yz)$

$f_y(x,y,z) = x \cdot \cos(yz) \cdot z$

$f_z(x,y,z) = x \cos(yz) \cdot y$

02 $T(x,y,z) = e^{-x^2-3y^2-9z^2}$

a) $D_u(2,-1,2)$, $\vec{u} = (3,4,0)$ (1.5)

Por definição, $D_uT(2,-1,2) = \nabla T(2,-1,2) \cdot \frac{u}{\|u\|}$. Assim:

i) $\nabla T(x,y,z) = \left(-2x\, e^{-x^2-3y^2-9z^2}, -6y\, e^{-x^2-3y^2-9z^2}, -18z\, e^{-x^2-3y^2-9z^2}\right)$

$\Rightarrow \nabla T(2,-1,2) = \left(-4e^{-43}, 6e^{-43}, -36e^{-43}\right)$.

ii) $\|u\| = \sqrt{9+16+0} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow \frac{u}{\|u\|} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$.

De i) e ii) concluímos que

$$D_uT(2,-1,2) = \left(-4e^{-43}, 6e^{-43}, -36e^{-43}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right) = -\frac{12}{5}e^{-43} + \frac{24}{5}e^{-43}$$

$$= \frac{12}{5}e^{-43}.$$

b) Direção $\vec{u}$ de maior crescimento: tal direção é dada pelo vetor gradiente de T em $(2,-1,2)$. (1.0)

c) $D_uT(2,-1,2)$, $\vec{u} = \nabla T(2,-1,2)$. (1.5)

$$D_uT(2,-1,2) = \nabla T(2,-1,2) \cdot \frac{\nabla T(2,-1,2)}{\|\nabla T(2,-1,2)\|} = \frac{\|\nabla T(2,-1,2)\|^2}{\|\nabla T(2,-1,2)\|}$$

$$= \|\nabla T(2,-1,2)\| = \sqrt{16e^{-86} + 36e^{-86} + 1296e^{-86}} = e^{-43}\sqrt{1348}.$$

03 $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4x - 4y$

a) Classificar os pontos críticos (2.0)

Devemos encontrar (x,y) tal que $\nabla f(x,y) = (0,0)$; ou seja,

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x + 4 = 0 \\ f_y(x,y) = 2y - 4 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \quad x = -2 \quad e \quad y = 2.$$

Logo, o único ponto crítico da função f é $(-2,2)$.

Para classificá-lo, usamos o teste da 2ª derivada:

$f_{xx} = 2$, $f_{xy} = 0$, $f_{yx} = 0$ e $f_{yy} = 2$.

e, assim,

$$D(-2,2) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \quad e \quad f_{xx}(-2,2) = 2 > 0 \Longrightarrow f(-2,2) \text{ é}$$

um mínimo local.

b) Máximos e mínimos em $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \leq 9$. (2.0)

Devemos verificar se existem pontos críticos em $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} < 9$ e usar a técnica dos multiplicadores de Lagrange para encontrar os candidatos a ponto extremo no contorno $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 9$.

i) Pelo item a), verificamos que o único ponto crítico de f é em $(-2,2)$. Como $\frac{(-2)^2}{2} + \frac{2^2}{2} = 4 < 9$, tal ponto crítico encontra-se na região $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} < 9$ e, portanto, $\boxed{f(-2,2) = -8}$ é um candidato a extremo absoluto.

ii) Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda g(x,y) \\ g(x,y) = 9 \end{cases}, \quad \text{onde } g(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

Logo,

$$\begin{cases} 2x + 4 = \lambda x & (I) \quad \times y \\ 2y - 4 = \lambda y & (II) \quad \times x \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 9 & (III) \end{cases}$$

Multiplicando (I) por y, (II) por x e fazendo (I) - (II), obtemos

$2xy + 4y - (2yx - 4x) = 0 \Rightarrow 4y + 4x = 0 \Rightarrow y = -x$. Substituindo este resultado em (III), obtemos que

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = -3.$$

* Se $x = 3$ então $y = -3$. Verificando o valor de λ:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 4 = \lambda x \Rightarrow 6 + 4 = 3\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{10}{3} \\ 2y - 4 = \lambda y \Rightarrow -6 - 4 = -3\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{10}{3} \end{array}\right\} \text{São iguais para o par } (3,-3).$$

Portanto, $(x, y, \lambda) = (3, -3, 10/3)$ é uma solução do sistema. Calculando $f(3,-3)$:

$$\boxed{f(3,-3) = 42}$$

* Se $x = -3$ então $y = 3$. Verificando o valor de λ:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 4 = \lambda x \Rightarrow -6 + 4 = -3\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3} \\ 2y - 4 = \lambda y \Rightarrow 6 - 4 = 3\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3} \end{array}\right\} \text{são iguais para o par } (-3,3).$$

Portanto, $(x, y, \lambda) = (-3, 3, 2/3)$ é uma solução do sistema. Calculando $f(-3,3)$:

$$\boxed{f(-3,3) = -6}$$

Assim, o menor valor da função f na região $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \leq 9$ é $f(-2,2) = -8$ e o maior é $f(3,-3) = 42$.

Prova Substitutiva: P2

(1)

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \cos(x^2+y^2)\, dy\, dx$

Mudando para coordenadas polares, temos que

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad e \quad 0 \leq r \leq 1 .$$

Assim,

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \cos(x^2+y^2)\, dy\, dx = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \cos(r^2)\, r\, dr\, d\theta$$

$u = r^2 \Rightarrow du = 2r\,dr$

$u(0) = 0$ e $u(1) = 1$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \cos(u)\, du\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} u \Big|_0^1 d\theta = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 1 \cdot \theta \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \operatorname{sen} 1 \cdot \frac{\pi}{4} .$$

b) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 e^{\frac{x}{y}}\, dy\, dx$

Como não podemos integrar $e^{\frac{x}{y}}$ com relação a y, mas conseguimos com relação a x, mudamos a ordem de integração:

$$\int_0^1 \int_x^1 e^{\frac{x}{y}}\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^y e^{\frac{x}{y}}\, dx\, dy$$

$u = \frac{x}{y} \Rightarrow du = \frac{dx}{y}$

$u(0) = 0$ e $u(y) = 1$

$$= \int_0^1 \int_0^1 e^u\, y\, du\, dy$$

$$= \int_0^1 y\, e^u \Big|_0^1 dy = (e-1) \int_0^1 y\, dy$$

$$= (e-1) \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{e-1}{2} .$$

c) $\iiint_E z\,dV$, E : $z = x^2+y^2$ e $z = 9$, $x^2+y^2 \leq 9$ ↝ coordenadas polares

por baixo ↙ ↳ por cima

$$\iiint_E z\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{3}\int_{r^2}^{9} z\, r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r\,\frac{z^2}{2}\Big|_{r^2}^{9} dr$$

$$= \theta\Big|_0^{2\pi} \int_0^3 r\cdot\left(\frac{81 - r^4}{2}\right) dr$$

$$= 2\pi \int_0^3 \left(\frac{81}{2}r - \frac{r^5}{2}\right) dr$$

$$= 2\pi\left(\frac{81\,r^2}{4} - \frac{r^6}{12}\right)\Big|_0^3 = 2\pi\left(\frac{2.187 - 729}{12}\right)$$

$$= 243\,\pi$$

d) $V(E) = \iiint_E 1\,dV$; E: $x^2+y^2+y^2=1$, $x^2+y^2+z^2=4$

Como são duas semiesferas, usaremos coordenadas esféricas:

$0 \leq \theta \leq 2\pi$; $\pi/2 \leq \phi \leq \pi$; $1 \leq \rho \leq 2$.

Assim,

$$\iiint_E 1\,dV = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\int_1^2 1.\,\rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/2}^{\pi} \cos\phi\,d\phi \int_1^2 \rho^2\,d\rho$$

$$= \theta\Big|_0^{2\pi}\ \operatorname{sen}\phi\Big|_{\pi/2}^{\pi}\ \frac{\rho^3}{3}\Big|_1^2 = 2\pi\,.\,(-1)\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= -\frac{14\pi}{3}.$$

e) $\iiint_E x e^y \, dV$, $E = \{ (x,y,z) \mid 1 \leq x \leq 3 ,\ 0 \leq y \leq \ln z ,\ x \leq z \leq x^2 \}$.

Como x está entre duas constantes, mas y e z não, devemos dar prioridade para as integrais com relação a essas variáveis. Como a variação de y depende de z, devemos integrar primeiro com relação a y.

Assim,

$$\iiint_E x e^y \, dV = \int_1^3 \int_x^{x^2} \int_0^{\ln z} x e^y \, dy \, dz \, dx$$

$$= \int_1^3 \int_x^{x^2} x e^y \Big|_0^{\ln z} dz \, dx = \int_1^3 \int_x^{x^2} x \left(e^{\ln z} - e^0 \right) dz \, dx$$

$$= \int_1^3 x \int_x^{x^2} (z - 1) \, dz \, dx = \int_1^3 x \left(\frac{z^2}{2} - z \right) \Big|_x^{x^2} dx$$

$$= \int_1^3 x \left(\frac{x^4}{2} - x^2 - \frac{x^2}{2} + x \right) dx$$

$$= \int_1^3 \left(\frac{x^5}{2} - \frac{3x^3}{2} + x^2 \right) dx = \frac{x^6}{12} - \frac{3x^4}{8} + \frac{x^3}{3} \Big|_1^3$$

$$= \frac{729}{12} - \frac{243}{8} + \frac{27}{3} - \frac{1}{12} + \frac{3}{8} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{728}{12} - \frac{240}{8} + \frac{26}{3} = \frac{182}{3} - 30 + \frac{26}{3} = \frac{208 - 90}{3}$$

$$= \frac{118}{3} .$$