



Cálculo II

Lista de Exercícios: P1

1 - Técnicas de Integração

- 1.1 - Revisão de Integrais.
- 1.2 - O Método de Substituição.
- 1.3 - Integração por partes.
- 1.4 - Integração por Frações Parciais.
- 1.5 - Integrais impróprias.
- 1.6 - Aplicações de integrais.

2 - EDO's de 1ª ordem

- 2.1 - Definição e Motivação.
- 2.2 - Resolução de EDO's de 1ª ordem: Equações Separáveis.
- 2.3 - Resolução de EDO's de 1ª ordem: Método do Fator Integrante.

Profa. Karla Katerine Barboza de Lima
FACET/UFGD

1 Técnicas de Integração

Tabela Básica

- $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$
- $\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$
- $\int e^u du = e^u + C$
- $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
- $\int \sin(u) du = -\cos(u) + C$
- $\int \cos(u) du = \sin(u) + C$

1.1 Revisão de Integração

Exercício 1 Calcule as integrais:

a) $\int_{-1}^1 x^{100} dx$

b) $\int_0^1 1 + \frac{1}{2}u^4 - \frac{2}{5}u^9 du$

c) $\int_1^2 \frac{v^5 + 3v^6}{v^4} dv$

d) $\int_{-1}^1 e^{u+1} du$

e) $\int_{-2}^2 f(x) dx$, onde:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } -2 \leq x \leq 0, \\ 4 - x^2 & \text{se } 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

f) $\int_{-1}^2 \frac{4}{x^3} dx$

Gabarito

- a) $\int_{-1}^1 x^{100} dx = \frac{2}{101}$
- b) $\int_0^1 1 + \frac{1}{2}u^4 - \frac{2}{5}u^9 du = \frac{53}{50}$
- c) $\int_1^2 \frac{v^5 + 3v^6}{v^4} dv = \frac{17}{2}$

d) $\int_{-1}^1 e^{u+1} du = e^2 - 1$

e) $\frac{28}{3}$

f) Indeterminado, pois f possui uma descontinuidade infinita no intervalo de integração.

1.2 O Método de Substituição

Exercício 2 Calcule a integral fazendo a substituição dada.

a) $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}, u = 3-5x.$

b) $\int_0^\pi \cos(3x) dx, u = 3x.$

c) $\int_0^1 x(4+x^2)^{10} dx, u = 4+x^2.$

d) $\int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \operatorname{sen} \theta d\theta, u = \cos \theta.$

e) $\int_0^1 (x^2-1)^4 x^5 dx, u = x^2-1.$

Exercício 3 Avalie a integral definida.

a) $\int_0^1 \cos(\pi t/2) dt.$

b) $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx.$

c) $\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} dx.$

d) $\int_0^1 \frac{e^z + 1}{e^z + z} dz.$

e) $\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$

Exercício 4 Um tanque de armazenamento de petróleo sofre uma ruptura em $t = 0$ e o petróleo vaza do tanque a uma taxa de $r(t) = 100e^{-0,01t}$ litros por minuto. Quanto petróleo vazou na primeira hora?

Exercício 5 A respiração é cíclica e o ciclo completo respiratório desde o início da inalação até o fim da expiração demora cerca de 5 s. A taxa máxima de fluxo de ar nos pulmões é de cerca de 0,5 L/s. Isso explica, em partes, porque a função $f(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\pi t/5)$ tem sido frequentemente utilizada para modelar a taxa de fluxo de ar nos pulmões. Use esse modelo para encontrar o volume de ar inalado nos pulmões no instante t .

Exercício 6 Se f for contínua e $\int_0^4 f(x) dx = 10$, calcule $\int_0^2 f(2x) dx$.

Gabarito

2. a) $\frac{1}{14}$

b) 0

c) $\frac{5^{11} - 4^{11}}{22}$

d) $\frac{1}{4}$

e) $\frac{1}{210}$

3. a) $\frac{2}{\pi}$

b) $e - \sqrt{e}$

c) 2

d) $\ln(e + 1)$

e) $2 - 2 \ln 2$

4. Aproximadamente 4512 litros.

5. $\frac{5}{4\pi} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi t}{5} \right) \right)$ litros.

6. 5

1.3 Integração por Partes

Exercício 7 Calcule a integral usando a integração por partes com as escolhas de u e dv dadas.

a) $\int x^2 \ln x \, dx$, $u = \ln x$ e $dv = x^2 dx$.

b) $\int \theta \cos(\theta) \, d\theta$, $u = \theta$ e $dv = \cos \theta \, d\theta$.

Exercício 8 Calcule a integral.

a) $\int x e^{-x} \, dx$.

b) $\int p^5 \ln p \, dp$.

c) $\int (\ln x)^2 \, dx$.

d) $\int_0^1 (x^2 + 1) e^{-x} \, dx$.

e) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} \, dx$.

f) $\int e^{2x} \operatorname{sen}(3x) \, dx$.

Exercício 9 Primeiro faça uma substituição e então use integração por partes para calcular a integral.

a) $\int_0^{\pi^2} \cos(\sqrt{x}) \, dx$.

b) $\int_0^1 t^3 e^{-t^2} \, dt$.

c) $\int_0^1 x \ln(1+x) \, dx$.

Exercício 10 Uma partícula que se move ao longo de uma reta tem velocidade igual à $v(t) = t^2 e^{-t}$ metros por segundo, após t segundos. Qual a distância que essa partícula percorrerá durante os primeiros 5 segundos?

Exercício 11 Suponha que $f(1) = 2$, $f(4) = 7$, $f'(1) = 5$, $f'(4) = 3$ e f'' seja contínua. Encontre o valor de $\int_1^4 x f''(x) \, dx$.

Gabarito

7. a) $\frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + c.$
b) $\theta \operatorname{sen} \theta + \cos \theta + c.$
8. a) $-xe^{-x} - e^{-x} + c.$
b) $\frac{p^6 \ln p}{6} - \frac{p^6}{36} + c.$
c) $x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + c.$
d) $3 - \frac{6}{e}.$
e) $\frac{1 - \ln 2}{2}.$
f) $\frac{1}{13}e^{2x}(2\operatorname{sen}(3x) - 3\cos(3x)) + c.$
9. a) $-4.$
b) $\frac{-2e^{-1} + 1}{2}.$
c) $\frac{1}{4}.$
10. $2 - 37e^{-5}$ metros.
11. 2.

1.4 Integração por Frações Parciais

Exercício 12 Calcule as integrais abaixo.

a) $\int \frac{x^2}{x+1} dx$

b) $\int \frac{x-9}{x-2} dx$

c) $\int_2^3 \frac{1}{x^2-1} dx$

d) $\int_3^4 \frac{x^3 - 2x^2 - 4}{x^3 + 2x^2} dx$

e) $\int \frac{1}{(x+5)^2(x-1)} dx$

f) $\int \frac{x^3 + 4}{x^2 + 4} dx$

g) $\int \frac{x+4}{x^2 + 2x + 5} dx$

h) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3e^x + 2} dx$

Exercício 13 Um método de retardar o crescimento de uma população de insetos sem usar pesticidas é introduzir na população um número de machos estéreis que cruzam com fêmeas férteis, mas não produzem filhotes. Se P representar o número de fêmeas na população de insetos, S , o número de machos estéreis introduzidos a cada geração e r , a taxa de crescimento populacional natural, então a população de fêmeas está relacionada com o instante t através de

$$t = \int \frac{P+S}{P[(r-1)P-S]} dP.$$

Suponha que uma população de insetos com 10000 fêmeas cresça a uma taxa de $r = 0,10$ e que 900 machos estéreis sejam adicionados. Calcule a integral para dar uma equação relacionando a população de fêmeas com o tempo. (Observe que a equação resultante não pode ser resolvida explicitamente para P .)

Exercício 14 Se f for uma função quadrática tal que $f(0) = 1$ e

$$\int \frac{f(x)}{x^2(x+1)^3} dx$$

for uma função racional, encontre o valor de $f'(0)$.

Gabarito

12. a) $\frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1| + C$
b) $x - 7\ln|x-2| + C$
c) $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$
d) $\frac{5}{6} + \ln 4 - \ln 3 - 5\ln 6 - 5\ln 5$
e) $-\frac{1}{36}\ln|x+5| + \frac{1}{6}\frac{1}{x+5} + \frac{1}{36}\ln|x-1| + C$
f) $\frac{1}{2}x^2 - 2\ln(x^2+4) + 2\tan^{-1}(x/2) + C$
g) $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$
h) $\ln\left[\frac{(e^x+2)^2}{e^{x+1}}\right] + C$
13. $-\ln P - \frac{1}{9}\ln(0,9P+900) + C$, onde $C \approx 10,23$.
14. $f'(0) = 3$.

1.5 Integrais Impróprias

Exercício 15 Explique por que cada uma das seguintes integrais é imprópria:

a) $\int_1^{\infty} x^4 e^{-x^4} dx$

b) $\int_1^{\pi/2} \sec x$

Exercício 16 Determine se cada integral é convergente ou divergente. Calcule aquelas que são convergentes.

a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{(3x+1)^2} dx$

b) $\int_{-\infty}^{-1} e^{-2t} dt$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx$

d) $\int_{2\pi}^{\infty} \sin \theta d\theta$

e) $\int_{-\infty}^6 r e^{r/3} dr$

f) $\int_0^1 \frac{3}{x^5} dx$

g) $\int_{-2}^{14} \frac{1}{\sqrt[4]{x+2}} dx$

h) $\int_0^2 z^2 \ln z dz$

Gabarito

8. a) Intervalo é infinito.

b) A função possui uma descontinuidade no intervalo de integração.

9. a) Converte: $\frac{1}{12}$

b) Diverge

c) Converte: 0

d) Diverge

e) Converge: $9e^2$

f) Diverge

g) Converge: $\frac{32}{3}$

h) Converge: $\frac{8}{3} \ln 2 - \frac{8}{9}$

2 EDO's de 1ª ordem

2.1 Definição e Motivação

Exercício 17 Verifique se as funções indicadas são soluções particulares das equações diferenciais dadas.

a) $xy' = 2y$; $y = 0$ e $y = 2x$.

b) $y'' + 9y = 18$; $y = 2$ e $y = 2x^2$.

c) $xy'' - y' = 0$; $y = 2x^2$ e $y = 2x$.

d) $x^2y'' + xy' + y = 0$; $y = \sin(\ln x)$.

Exercício 18 Confirme que $y = 3e^{x^3}$ é uma solução do problema de valor inicial $y' = 3x^2y$, com $y(0) = 3$.

Exercício 19 Uma população é modelada pela equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = 1,2 P \left(1 - \frac{P}{4200} \right).$$

Usando uma ferramenta de calcular gráficos (Geogebra, Wolfram Alpha, etc...), analise o gráfico da derivada acima e responda:

a) Para quais valores de P a população está aumentando?

b) Para quais valores de P a população está diminuindo?

c) Quais são as soluções de equilíbrio?

Gabarito

10. a) $y = 0$ é solução.

b) $y = 2$ é solução.

c) $y = 2x^2$ é solução.

d) $y = \sin(\ln x)$ é solução.

12. (a) $0 < P < 4200$

(b) $P > 4200$

(c) $P = 0, P = 4200$

2.2 Resolução de EDO's de 1ª ordem: Método de Euler e Equações Separáveis

Exercício 20 a) Use o método de Euler com cada um dos passos dados para estimar o valor de $y(0.4)$, onde y é a solução do problema de valor inicial $y' = y$, com $y(0) = 1$.

i) $h = 0.4$

ii) $h = 0.2$

iii) $h = 0.1$

b) Usando o método de Separação de Variáveis, encontre a solução exata do problema inicial dado.

c) O erro no método de Euler é a diferença entre o valor exato e o valor aproximado. Calcule os erros feitos no item a) ao usar o método de Euler para estimar o valor de $y(0.4)$. O que acontece com o erro cada vez que o passo cai pela metade?

Exercício 21 Resolva as equações diferenciais.

a) $\frac{dy}{dx} = xy^2$

b) $\frac{dy}{dx} = xe^{-y}$

c) $\frac{dy}{dt} = \frac{t}{ye^{y+t^2}}$

Exercício 22 Dada a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

a) Encontre a solução geral da equação.

b) Encontre a solução explícita para o problema com valor inicial $y(0) = -2$ e seu intervalo de definição.

Exercício 23 O modelo de Malthus para o crescimento de uma população, baseia-se na suposição de que a população cresce (ou decresce) a uma taxa proporcional ao tamanho da população:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

a) Resolva a equação com condição inicial $P(0) = P_0$.

b) Se a constante de proporcionalidade k for positiva o que acontece com a população? E se for negativa?

Gabarito

- 20.
- | | | |
|-------------------|------------|--------------|
| a) i) 1.4 | ii) 1.44 | iii) 1.4641 |
| b) $y(x) = e^x$. | | |
| c) i) 0.0918 | ii) 0.0518 | iii) 0.0277. |

O erro cai, aproximadamente, pela metade também.

21. a) $y(x) = \frac{2}{k - x^2}$, $y(x) = 0$.

b) $y(x) = \ln \left| \frac{x^2}{2} + c \right|$

c) $e^y(y-1) = c - \frac{1}{2e^{t^2}}$

22. a) Solução implícita: $y^2 + x^2 = C$.

b) $y(x) = -\sqrt{4 - x^2}$, $I = [-2, 2]$.

23. a) $P(t) = P_0 e^{kt}$.

- b) Se for positiva a taxa de variação é positiva e, assim, a população está crescendo; no caso de ser negativa, ela está decrescendo.

Referências

- [1] STEWART J., *Cálculo*, Volume I, Editora Thomson.
- [2] STEWART J., *Cálculo*, Volume II, Editora Thomson.
- [3] Anton H., *Cálculo*, Volume I, Editora Bookman.
- [4] Anton H., *Cálculo*, Volume II, Editora Bookman.