Multiplicadores de Lagrange

↳ Maximiza ou minimiza uma função $f(x,y)$ $[f(x,y,z)]$ sujeita a uma restrição da forma $g(x,y)=k$ $[g(x,y,z)=k]$.

Estes valores extremos ocorrem nos pontos em que o gradiente da função f e o gradiente da função g possuem a mesma direção (são paralelos) (Olhe os argumentos geométricos no livro texto).

Assim, $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$.

MÉTODO: Para determinar os valores máximo e mínimo de $f(x,y)$ sujeitos à restrição $g(x,y)=k$, supondo que esses valores extremos existam e que $\nabla g(x,y) \neq 0$ sobre a superfície $g(x,y)=k$:

a) Determine todos os valores de x, y e λ tais que

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = k \end{cases}$$

b) Calcule f em todos os pontos (x,y) que resultaram do passo a). O maior desses valores será o valor máximo de f e o menor será o valor mínimo de f.

Ex1: Encontre os valores extremos da função $f(x,y) = x^2+2y^2$ no círculo $x^2+y^2=1$.

Temos que: $\nabla f(x,y) = (2x, 4y)$

$\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$, $g(x,y) = x^2+y^2$

Logo, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \lambda 2x & (I) \\ 4y = \lambda 2y & (II) \\ x^2+y^2=1 & (III) \end{cases}$$

(I) $2x - \lambda 2x = 0 \Rightarrow 2x(1-\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{ou} \\ \lambda = 1 \end{cases}$

Se $x=0$ então (III) $\Rightarrow 0^2+y^2=1 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=-1$ ou $y=1$.

Sendo $y=-1$, obtemos de (II): $4(-1) = \lambda \cdot 2 \cdot (-1) \Rightarrow \lambda = 2$. Portanto,

$x=0$, $y=-1$ e $\lambda=2$ é uma solução do sistema.

Analogamente para $y=1$, obtemos $\lambda=2$, de onde segue que

$x=0$, $y=1$ e $\lambda=2$ é uma solução do sistema.

Agora, se $\lambda=1$ então, de II:

$$4y = 2y \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y=0 \overset{(III)}{\Rightarrow} x^2=1 \Rightarrow x=1 \text{ ou } x=-1,$$

de onde segue que

$x=-1$, $y=0$ e $\lambda=1$ é uma solução do sistema, assim como

$x=1$, $y=0$ e $\lambda=1$ também é.

$$(II)\quad 4y - \lambda 2 \cdot y = 0 \Rightarrow 2y(2-\lambda)=0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \text{ou} \\ \lambda=2 \end{cases}$$

Se $y=0$, já verificamos que $x=1$, $y=0$ e $\lambda=1$ é uma solução, assim como $x=-1$, $y=0$ e $\lambda=1$. Agora, se $\lambda=2$ então, de (I):

$$2x = 4x \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0.$$

Já verificamos que para $x=0$, $x=0$, $y=-1$ e $\lambda=2$ é uma solução, assim como $x=0$, $y=1$ e $\lambda=2$.

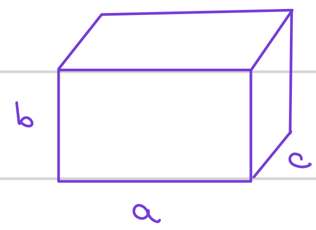
Portanto os extremos dessa função devem estar entre os pontos

$(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$.

$f(0,1) = f(0,-1) = 2$ valor máximo de f

$f(-1,0) = f(1,0) = 1$ valor mínimo de f

Ex2: Uma caixa retângular com um volume de $16\ cm^3$ é feita de dois materiais. O topo e a base são feitos de um material que custa 10 centavos o cm^2 e os lados de um material que custa 5 centavos por cm^2. Determine as dimensões da caixa, de modo que o custo dos materiais seja minimizado.



Restrição: $V(a,b,c) = a.bc = 16$

Função custo: $C(a,b,c) = 20ac + 10ab + 10bc$

custo das laterais: $2 \times 5 \times ab + 2 \times 5 \times bc$

custo da base e do fundo: $2 \times 10 \times ac$

Temos que

$$\nabla C(a,b,c) = (20c + 10b,\ 10a + 10c,\ 20a + 10b)$$

$$\nabla V(a,b,c) = (bc,\ ac,\ ab),$$

e devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} 20c + 10b = \lambda bc \quad (I) \\ 10a + 10c = \lambda ac \quad (II) \\ 20a + 10b = \lambda ab \quad (III) \\ a.b.c = 16 \quad (IV) \end{cases}$$

Fazendo $a \times (I) - b \times (II)$, obtemos:

$$\begin{array}{rl} 20ac + \cancel{10ab} = & \cancel{\lambda abc} \\ -(\cancel{10ab} + 10bc) = & -\cancel{\lambda abc} \\ \hline 20ac - 10bc = 0 & \end{array} \Rightarrow 10c(2a-b)=0 \Rightarrow \cancel{c=0} \text{ ou } b = 2a$$

↳ não satisfaz (IV)

* Se $b = 2a$ então

(III) → $20a + 10(2a) = \lambda a(2a) \Rightarrow 40a = 2\lambda a^2 \Rightarrow 2\lambda a^2 - 40a = 0 \Rightarrow 2a(\lambda a - 20) = 0$

$\Rightarrow \cancel{a=0}$ ou $\lambda = \frac{20}{a}$.

↳ não satisfaz (IV)

(IV) → $a.2.a.c = 16 \Rightarrow c = \frac{8}{a^2}$, pois $a \neq 0$.

Substituindo $b = 2a$, $c = \frac{8}{a^2}$ e $\lambda = \frac{20}{a}$ em (II), obtemos

$$10a + \frac{80}{a^2} = \frac{20}{\cancel{a}} \cdot \cancel{a} \cdot \frac{8}{a^2} \Rightarrow \frac{10a^3 + 80 - 160}{a^2} = 0$$

$$\Rightarrow 10a^3 - 80 = 0 \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow \boxed{a = 2}.$$

Logo,

$$\boxed{b = 4,\quad c = 2 \quad e \quad \lambda = 10}$$

e $(x,y,z) = (2,4,2)$ e $\lambda = 10$ é a solução do sistema. Por ser única, $C(2,4,2) = 240$ é um extremo de f em $abc = 16$, que pode ser valor máximo ou mínimo. Como $(1,1,16)$ também satisfaz a restrição e $C(2,4,2) = 240 < 490 = C(1,1,16)$, $C(2,4,6)$ é o valor mínimo, como queríamos.