UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS

Prof$^{\text{a}}$. Karla Lima

Cálculo III 19 de Maio de 2017

(1) Calcule $\dfrac{dz}{dt}$:

a) $z = x^2 + y^2 + xy$, $x = \text{sen}t$, $y = e^t$;

b) $z = \cos(x + 4y)$, $x = 5t^4$, $y = 1/t$;

c) $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, $x = \ln t$, $y = \cos t$.

(2) Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial r}$:

a) $z = x^2y^3$, $x = r\cos t$, $y = r\text{sen}t$;

b) $z = e^{x+2y}$, $x = r/t$, $y = t/r$.

(3) A superfície de um lago é representada por uma região D no plano xy e a sua profundidade em cada ponto (x, y) é dada pela função $f(x, y) = 300 - 2x^2 - 3y^2$ metros. Um menino está nadando no lago e, num certo instante, se encontra no ponto $P = (4, 9)$.

a) Em que direção e sentido ele deve nadar para ir para a parte mais rasa do lago?
b) Determine a taxa de variação da profundidade se o menino nadar na direção do vetor $v = (3, 4)$.
c) Em que direção ele deve se mover para que a profundidade permaneça a mesma?

(4) A temperatura em cada ponto de uma placa de metal é dada por

$$T(x, y) = \frac{16}{1 + x^2 + 2y^2}$$

a) Se uma formiga está no ponto $P = (1, 1)$, qual a direção e sentido ela deve andar de modo que a temperatura tenha a sua maior taxa de variação? Qual é esta taxa?
b) Se a formiga se mover na direção do vetor $v = (-3, 4)$, ela estará esquentando ou esfriando?
c) Se a formiga começa a se mover de modo que sua posição em cada instante seja dada por $r(t) = (\sqrt{1 + t}, 1 + 2t)$, qual a taxa de variação de temperatura em relação ao tempo que a formiga sofre 3 segundo depois?

(5) Suponha que uma pessoa em uma festa beba $x(t) = 0.8t$ litros de refrigerante e coma $y(t) = 0.2t$ quilogramas de bolo de chocolate após t horas. Com isso ele produz $E(x, y) = \frac{1}{2}x + 3y$ calorias de energia ao beber x litros de refrigerante e comer y quilogramas de bolo. Quanta energia ele produziu após 5 horas de festa? Qual a taxa de produção de energia em $t = 5$?

(6) A tensão V em um circuito elétrico simples está diminuindo lentamente à medida que a bateria se desgasta. A resistência R está aumentando lentamente à medida que o resistor aquece. Usando a Lei de Ohm, $V = IR$, encontre como a corrente I está mudando no momento em que $R = 400\Omega$, $I = 0,08A$, $dV/dt = -0.01\ V/s$ e $dR/dt = 0.03\ \Omega/s$.

Gabarito

(1) Calcule $\dfrac{dz}{dt}$:

a) $dz/dt = (2\text{sen}t + e^t)\cos t + (2e^t + \text{sen}t)e^t$;

b) $dz/dt = -20t^3\text{sen}(x+4y) + \dfrac{4\text{sen}(x+4y)}{t^2}$;

c) $dz/dt = \dfrac{\dfrac{\ln t}{t} - \cos t\text{sen}t}{\sqrt{1+(\ln t)^2+\cos^2 t}}$.

(2) Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial s}$:

a) $\dfrac{\partial z}{\partial t} = r^5(-2\cos t\text{sen}^4 t + 3\cos^3 t\text{sen}^2 t)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial r} = 5r^4\cos^2 t\text{sen}^3 t$;

b) $\dfrac{\partial z}{\partial t} = e^{\frac{r}{t}+2\frac{t}{r}}\left(-\dfrac{r}{t^2}+\dfrac{2}{r}\right)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial r} = e^{\frac{r}{t}+2\frac{t}{r}}\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{2t}{r^2}\right)$.

(3) a) Na direção do gradiente de f no ponto $(4,9)$, mas no sentido oposto: $-\nabla f(4,9) = (16,54)$.

b) $D_v f(4,9) = -\dfrac{264}{5}$.

c) Na direção do vetor $u = (-54,16)$.

(4) a) Na direção do vetor $\nabla T(1,1) = (-2,-4)$. A taxa é de $2\sqrt{5}$.

b) Como a variação da temperatura na direção do vetor v é $D_vT(1,1) = -2$ e é negativa, estará esfriando.

c) $\dfrac{dT}{dt}(2,7) = -\dfrac{912}{10609}$.

(5) $\dfrac{dE}{dt}(4,1) = 1$.

(6) $\dfrac{dI}{dt} = -31\times 10^{-6}\ A/s$.