

Prova substitutiva : P1

01

a) $f(x,y) = (2x+3y)^{10}$ (1 ponto)

$$f_x(x,y) = 10(2x+3y)^9 \cdot 2 = 20(2x+3y)^9$$

$$f_y(x,y) = 10(2x+3y)^9 \cdot 3 = 30(2x+3y)^9$$

b) $f(x,y,z) = x \sin(yz)$ (1 ponto)

$$f_x(x,y,z) = \sin(yz)$$

$$f_y(x,y,z) = x \cdot \cos(yz) \cdot z$$

$$f_z(x,y,z) = x \cos(yz) \cdot y$$

02 $T(x,y,z) = e^{-x^2-3y^2-9z^2}$

a) $D_u T(2,-1,2)$, $\vec{u} = (3,4,0)$ (1.5)

Por definição, $D_u T(2,-1,2) = \nabla T(2,-1,2) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$. Assim:

i) $\nabla T(x,y,z) = \left(-2x e^{-x^2-3y^2-9z^2}, -6y e^{-x^2-3y^2-9z^2}, -18z e^{-x^2-3y^2-9z^2} \right)$

$$\Rightarrow \nabla T(2,-1,2) = \left(-4 e^{-43}, 6 e^{-43}, -36 e^{-43} \right).$$

ii) $\|\vec{u}\| = \sqrt{9+16+0} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0 \right).$

De i) e ii) concluímos que

$$\begin{aligned} D_u T(2,-1,2) &= \left(-4 e^{-43}, 6 e^{-43}, -36 e^{-43} \right) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0 \right) = -\frac{12}{5} e^{-43} + \frac{24}{5} e^{-43} \\ &= \frac{12}{5} e^{-43}. \end{aligned}$$

b) Direção \vec{u} de maior crescimento: tal direção é dada pelo vetor gradiente de T em $(2,-1,2)$. (1.0)

c) $D_u T(2,-1,2)$, $\vec{u} = \nabla T(2,-1,2)$. (1.5)

$$D_u T(2,-1,2) = \nabla T(2,-1,2) \cdot \frac{\nabla T(2,-1,2)}{\|\nabla T(2,-1,2)\|} = \frac{\|\nabla T(2,-1,2)\|^2}{\|\nabla T(2,-1,2)\|}$$

$$= \|\nabla T(2,-1,2)\| = \sqrt{16 e^{-86} + 36 e^{-86} + 1296 e^{-86}} = e^{-43} \sqrt{1348}.$$

03) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4x - 4y$

a) Classificar os pontos críticos (2.0)

Devemos encontrar (x,y) tal que $\nabla f(x,y) = (0,0)$; ou seja,

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x + 4 = 0 \\ f_y(x,y) = 2y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2 \text{ e } y = 2.$$

Logo, o único ponto crítico da função f é $(-2,2)$.

Para classificá-lo, usamos o teste da 2ª derivada:

$$f_{xx} = 2, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{yx} = 0 \text{ e } f_{yy} = 2.$$

e, assim,

$$D(-2,2) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \text{ e } f_{xx}(-2,2) = 2 > 0 \Rightarrow f(-2,2) \text{ é}$$

um mínimo local.

b) Máximos e mínimos em $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \leq 9$. (2.0)

Devemos verificar se existem pontos críticos em $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} < 9$ e usar a técnica dos multiplicadores de Lagrange para encontrar os candidatos a ponto extremo no contorno $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 9$.

i) Pelo item a), verificamos que o único ponto crítico de f é em $(-2,2)$.

Como $\frac{(-2)^2}{2} + \frac{2^2}{2} = 4 < 9$, tal ponto crítico encontra-se na região $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} < 9$

e, portanto, $f(-2,2) = -8$ é um candidato a extremo absoluto.

ii) Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, devemos resolver

o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 9 \end{cases}, \text{ onde } g(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

logo,

$$\begin{cases} 2x + 4 = \lambda x & \text{(I)} \quad \times y \\ 2y - 4 = \lambda y & \text{(II)} \quad \times x \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 9 & \text{(III)} \end{cases}$$

Multiplicando (I) por y , (II) por x e fazendo (I) - (II), obtemos

$$2xy + 4y - (2yx - 4x) = 0 \Rightarrow 4y + 4x = 0 \Rightarrow y = -x. \text{ Substituindo}$$

este resultado em (III), obtemos que

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = -3.$$

* Se $x = 3$ então $y = -3$. Verificando o valor de λ :

$$\begin{aligned} 2x + 4 = \lambda x &\Rightarrow 6 + 4 = 3\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{10}{3} \\ 2y - 4 = \lambda y &\Rightarrow -6 - 4 = -3\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{10}{3} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} 2x + 4 = \lambda x \\ 2y - 4 = \lambda y \end{aligned}} \right\} \text{ São iguais para o par } (3, -3).$$

Portanto, $(x, y, \lambda) = (3, -3, 10/3)$ é uma solução do sistema. Calculando

$f(3, -3)$:

$$f(3, -3) = 42$$

* Se $x = -3$ então $y = 3$. Verificando o valor de λ :

$$\begin{aligned} 2x + 4 = \lambda x &\Rightarrow -6 + 4 = -3\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3} \\ 2y - 4 = \lambda y &\Rightarrow 6 - 4 = 3\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} 2x + 4 = \lambda x \\ 2y - 4 = \lambda y \end{aligned}} \right\} \text{ São iguais para o par } (-3, 3).$$

Portanto, $(x, y, \lambda) = (-3, 3, 2/3)$ é uma solução do sistema. Calculando

$f(-3, 3)$:

$$f(-3, 3) = -6$$

Assim, o menor valor da função f na região $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \leq 9$ é

$f(-2, 2) = -8$ e o maior é $f(3, -3) = 42$.

Prova Substitutiva: P2

a)

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \cos(x^2+y^2) dy dx$$

Mudando para coordenadas polares, temos que

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad 0 \leq r \leq 1.$$

Assim,

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \cos(x^2+y^2) dy dx = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \cos(r^2) r dr d\theta$$

$$u = r^2 \Rightarrow du = 2r dr$$

$$u(0) = 0 \quad \text{e} \quad u(1) = 1$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \cos(u) du d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin u \Big|_0^1 d\theta = \frac{1}{2} \sin 1 \cdot \theta \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \sin 1 \cdot \frac{\pi}{4}.$$

b) $\int_0^1 \int_x^1 e^{\frac{x}{y}} dy dx$

Como não podemos integrar $e^{\frac{x}{y}}$ com relação a y , mas conseguimos com

relação a x , mudamos a ordem de integração:

$$\int_0^1 \int_x^1 e^{\frac{x}{y}} dy dx = \int_0^1 \int_0^y e^{\frac{x}{y}} dx dy$$

$$u = \frac{x}{y} \Rightarrow du = \frac{dx}{y}$$

$$u(0) = 0 \quad \text{e} \quad u(y) = 1$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 e^u y du dy$$

$$= \int_0^1 y e^u \Big|_0^1 dy = (e-1) \int_0^1 y dy$$

$$= (e-1) \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}.$$

c) $\iiint_E z \, dV$, E : limitado por $z = x^2 + y^2$ e $z = 9$, $x^2 + y^2 \leq 9$ coordenadas polares

↙ la por cima
↘ por baixo

$$\iiint_E z \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_{n^2}^9 z \, n \, dz \, dn \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 n \left. \frac{z^2}{2} \right|_{n^2}^9 dn$$

$$= \theta \int_0^{2\pi} \int_0^3 n \cdot \left(\frac{81 - n^4}{2} \right) dn$$

$$= 2\pi \int_0^3 \left(\frac{81}{2} n - \frac{n^5}{2} \right) dn$$

$$= 2\pi \left(\frac{81 n^2}{4} - \frac{n^6}{12} \right) \Big|_0^3 = 2\pi \left(\frac{2 \cdot 187 - 729}{12} \right)$$

$$= 243\pi$$

d) $v(E) = \iiint_E 1 \, dV$; E : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

Como são duas semiesferas, usaremos coordenadas esféricas:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi; \quad \pi/2 \leq \phi \leq \pi; \quad 1 \leq \rho \leq 2.$$

Assim,

$$\iiint_E 1 \, dV = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \int_1^2 1 \cdot \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/2}^{\pi} \sin \phi \, d\phi \int_1^2 \rho^2 \, d\rho$$

$$= \theta \int_0^{2\pi} \cos \phi \Big|_{\pi/2}^{\pi} \left. \frac{\rho^3}{3} \right|_1^2 = 2\pi \cdot (-1) \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right)$$

$$= -\frac{14\pi}{3}.$$

$$e) \iiint_E x e^y dV, \quad E = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq \ln z, x \leq z \leq x^2\}.$$

Como x está entre duas constantes, mas y e z não, devemos dar prioridade para as integrais com relação a essas variáveis. Como a variação de y depende de z , devemos integrar primeiro com relação a y .

Assim,

$$\iiint_E x e^y dV = \int_1^3 \int_x^{x^2} \int_0^{\ln z} x e^y dy dz dx$$

$$= \int_1^3 \int_x^{x^2} x e^y \Big|_0^{\ln z} dz dx = \int_1^3 \int_x^{x^2} x (e^{\ln z} - e^0) dz dx$$

$$= \int_1^3 x \int_x^{x^2} (z - 1) dz dx = \int_1^3 x \left(\frac{z^2}{2} - z \right) \Big|_x^{x^2} dx$$

$$= \int_1^3 x \left(\frac{x^4}{2} - x^2 - \frac{x^2}{2} + x \right) dx$$

$$= \int_1^3 \left(\frac{x^5}{2} - \frac{3x^3}{2} + x^2 \right) dx = \frac{x^6}{12} - \frac{3x^4}{8} + \frac{x^3}{3} \Big|_1^3$$

$$= \frac{729}{12} - \frac{243}{8} + \frac{27}{3} - \frac{1}{12} + \frac{3}{8} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{728}{12} - \frac{240}{8} + \frac{26}{3} = \frac{182}{3} - 30 + \frac{26}{3} = \frac{208 - 90}{3}$$

$$= \frac{118}{3}.$$