UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Prof$^{\text{a}}$. Karla Lima

Análise I 12 de Abril de 2018

(1) Mostre que:

(a) Para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $-|x| \leq x \leq |x|$.

(b) **Desigualdade triangular:** Se $x, y \in \mathbb{R}$, então $|x+y| \leq |x| + |y|$.

(c) $|xy| = |x||y|$.

(2) Prove que se a desigualdade $|a| - |b| \leq |a - b|$ é válida quaisquer que sejam a e b, o mesmo é verdade de $|a+b| \leq |a| + |b|$.

Definição: Seja $X \subset \mathbb{R}$ não-vazio e limitado superiormente. O número $b \in \mathbb{R}$ é chamado o *supremo* de X se b é a menor das cotas superiores de X. O supremo de um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ satisfaz às seguintes propriedades:

- $\forall x \in X$, tem-se $x \leq b$.
- Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $x \leq c$, $\forall x \in X$ então $b \leq c$.
- Se $c < b$ então existe $x \in X$ com $c < x$.
  Escrevemos $b = \sup X$.

(3) Seja $A = [-5, 12)$. Mostre que:

(a) A é limitado superiormente;

(b) 12 é o supremo de A.

(4) Prove que se $0 < a < 1$ então a é o supremo do conjunto X=$\{a, a^2, \ldots, a^n, \ldots\}$, com $n \in \mathbf{N}$.

Definição: Seja $X \subset \mathbb{R}$ não-vazio e limitado inferiormente. O número $a \in \mathbb{R}$ é chamado o *ínfimo* de X se a é a maior das cotas inferiores de X. O ínfimo de um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ satisfaz às seguintes propriedades:

- $\forall x \in X$, tem-se $a \leq x$.
- Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $c \leq x$, $\forall x \in X$ então $c \leq a$.
- Se $a < c$ então existe $x \in X$ com $x < c$.
  Escrevemos $a = \inf X$.

(5) Seja $A = [-5, 12)$. Mostre que:

(a) A é limitado inferiormente;

(b) -5 é o ínfimo de A.

(6) Prove que se $a > 1$ então a é o ínfimo do conjunto X$=\{a, a^2, \ldots, a^n, \ldots\}$, com $n \in \mathbf{N}$.

(7) Seja o conjunto infinito e enumerável $A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\right\}$. Mostre que:

(a) A está escrito na ordem crescente de seus termos; ou seja

$$a_n = \frac{n}{n+1} < a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(b) A é limitado inferior e superiormente;

(c) 1 é o supremo e $\frac{1}{2}$ é o ínfimo de A.