
UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS

FACET

Cálculo IV e Vetorial

Lista 02

27 de Fevereiro de 2015

- (1) A transformação $x = au, y = bv$ ($a, b > 0$) pode ser reescrita como $x/a = u, y/b = v$ e, portanto, transforma a região circular

$$u^2 + v^2 \leq 1$$

na região elíptica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

Ao efetuar integrações em regiões elípticas, primeiro transformamos esta região em uma circular e depois aplicamos a transformada em coordenadas polares da seguinte maneira:

$$u = r \cos \theta \Rightarrow x/a = u = r \cos \theta \Rightarrow x = ra \cos \theta$$

$$v = r \sin \theta \Rightarrow y/b = v = r \sin \theta \Rightarrow y = rb \sin \theta.$$

Portanto, a mudança a coordenadas polares de uma região elíptica é dada por

$$(x, y) = (ar \cos \theta, br \sin \theta)$$

com $\theta \in [0, 2\pi)$ e $r \in [0, 1]$.

- Usando esta mudança, calcule a integral $\int \int_R \sqrt{16x^2 + 9y^2} dA$, onde R é a região envolvida pela elipse $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$.

- (2) De modo análogo, a transformação $x = au, y = bv, z = cw$ ($a, b, c > 0$) pode ser reescrita como $x/a = u, y/b = v, z/c = w$ e, portanto, transforma a região esférica

$$u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$$

na região elipsoidal

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Ao efetuar integrações em regiões elipsoidais, primeiro transformamos esta região em uma esférica e depois aplicamos a transformada em coordenadas esféricas da seguinte maneira:

$$u = \rho \cos \theta \sin \phi \Rightarrow x/a = u = \rho \cos \theta \sin \phi \Rightarrow x = a\rho \cos \theta \sin \phi$$

$$v = \rho \sin \theta \sin \phi \Rightarrow y/b = v = \rho \sin \theta \sin \phi \Rightarrow y = b\rho \sin \theta \sin \phi.$$

$$w = \rho \cos \phi \Rightarrow z/c = w = \rho \cos \phi \Rightarrow z = c\rho \cos \phi.$$

Portanto, a mudança a coordenadas esféricas de uma região elipsoidal é dada por

$$(x, y) = (a\rho \cos \theta \sin \phi, b\rho \cos \theta \sin \phi, c\rho \cos \phi)$$

com $\theta \in [0, 2\pi)$, $\phi \in [0, \pi]$ $r \in [0, 1]$.

- Usando esta mudança, calcule a integral $\int \int \int_G x^2 dV$, onde G é a região envolvida pelo elipsóide $9x^2 + 4y^2 + z = 36$.

(3) Calcule a integral de linha, onde C é a curva dada:

- $\int_C xy^4 ds$, C é a metade direita do círculo $x^2 + y^2 = 16$.
- $\int_C xe^{yz} ds$, C é o seguimento de reta de $(0, 0, 0)$ a $(1, 2, 3)$.
- $\int_C zdx + xdy + ydz$, $C : x = t^2, y = t^3, z = t^2, 0 \leq t \leq 1$.

(4) Se $\rho(x, y)$ representa a função densidade linear de um ponto (x, y) de um fio fino com a forma de uma curva C , então a **massa total** do fio é dada pela integral de linha

$$m = \int_C \rho(x, y) ds.$$

O **centro de massa** do fio com a função densidade $\rho(x, y)$ encontra-se no ponto (\bar{x}, \bar{y}) , onde

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \int_C x\rho(x, y) ds,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \int_C y\rho(x, y) ds.$$

Se um arame fino tem a forma da parte que está no primeiro quadrante da circunferência com centro na origem e raio a e a função densidade for $\rho(x, y) = kxy$, k constante, encontre:

- A massa total do arame.
- O centro de massa do arame.

(5) O campo de velocidade de um fluido em movimento é dado por $\vec{v} = (2x, 2y, -z)$. Calcular a circulação do fluido ao redor da curva fechada C , sendo C dada por $\vec{r} = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + 2 \vec{k}$, $t \in [0, 2\pi]$.

(6) Determine o trabalho realizado pelo campo de força $F(x, y) = x^2 \vec{i} + ye^x \vec{j}$ em uma partícula que se move sobre a parábola $x = y^2 + 1$ de $(1, 0)$ a $(2, 1)$.

Bons estudos!

Bibliografia:

Stewart, J. - Cálculo Vol II

Flemming, D. - Cálculo B

Howard, A. - Cálculo Vol II

Guidorizzi, H. - Um curso de cálculo Vol 3.