UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS

FACET

Cálculo III

P1: Lista de revisão Parte 1 — 23 de Fevereiro de 2016

(1) Mostre que cada uma das seguintes funções é uma solução da equação da onda: $u_{tt} = a^2 u_{xx}$:

a) $u(t,x) = sen(x)sen(at)$

b) $u(t,x) = sen(x-at) + \ln(x+at)$

(2) A temperatura em um ponto (x,y) de uma chapa de metal é dada por $T(x,y) = \dfrac{60}{1+x^2+y^2}$, onde T é medido em °C e x e y em metros. Determine a taxa de variação da temperatura no ponto $(2,1)$:

a) na direção x;

b) na direção y.

(3) A energia cinética de um corpo com massa m e velocidade v é $K(m,v) = \dfrac{mv^2}{2}$. Mostre que

$$\frac{\partial K}{\partial m}(m,v) \cdot \frac{\partial^2 K}{\partial v^2}(m,v) = K(m,v)$$

(4) Um ponto move-se ao longo da interseção do parabolóide elíptico $z = x^2 + 3y^2$ e do plano $y = 1$. Qual a taxa de variação de z em relação a x quando o ponto estiver em $(2,7,1)$?

(5) O volume de um cone circular reto de raio r e altura h é $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$. Mostre que se a altura permanecer constante enquanto que o raio varia então o volume satisfaz

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2V}{r}$$

(6) A energia consumida em um resistor elétrico é dada por $P = \dfrac{V^2}{R}$. Se $V = 120$ volts e $R = 12$ ohms, calcular um valor aproximado para a variação da energia quando V decrescce de $0,001$ volt e R aumenta de $o,02$ ohm.

(7) O período T de um pêndulo simples com pequenas oscilações é calculado pela fórmula $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, onde L é o comprimento do pêndulo e g é a aceleração devida à gravidade. Suponha que os valores L e g tenham erros de, no máximo, $0,5\%$ e $0,1\%$, respectivamente. Use diferenciais para aproximar o erro percentual máximo no valor calculado de T.

(8) Duas rodovias intersectam em um angulo reto. O carro A, movendo-se sobre uma das rodovias, aproxima-se da interseção a 25km/h, e o carro B, movendo-se sobre a outra rodovia, aproxima-se da interseção a 30km/h. Com que taxa está variando a distância entre os carros quando A está a $0,3$km da interseção e B está a $0,4$ da interseção?

(9) Suponha que $z = f(x, y)$ com $x = rcos\theta$ e $y = rsen\theta$. Escreva a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

na sua fórmula polar. Ou seja, em função de r e θ, como no exercício feito em sala de aula.

(10) A produção de trigo W em um determinado ano depende da temperatura média T e do volume anual de chuvas R. Cientistas estimam que a temperatura média anual está crescendo à taxa de $0,15$°C/ano e a quantidade anual de chuva está decrescendo à taxa de $0,1$cm/ano. Eles também estimam que, no atual nível de produção, $\frac{\partial W}{\partial T} = -2$ e $\frac{\partial W}{\partial R} = 8$.

a) Qual o significado do sinal dessas derivadas?

b) Estime a taxa de variação corrente da produção de trigo $\frac{dW}{dt}$.

(11) **Teorema de Schwartz:** Se as derivadas parciais mistas f_{xy} e f_{yx} são contínuas, então

$$f_{xy} = f_{yx}.$$

Com a ajuda do teorema acima e da regra da cadeia, mostre que qualquer função da forma

$$z = f(x + at) + g(x - at),$$

com f e g possuindo derivadas parciais de segunda ordem contínuas, é uma solução da equação da onda $z_{tt} = a^2 z_{xx}$.

(**Dica:** faça $u(t, x) = x + at$ e $v(t, x) = x - at$)

(12) Determine o limite, se existir, ou mostre que o limite não existe.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \frac{ysenx}{xy + 2x}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} (1 + x)^{\frac{1+xy}{x}}$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy} - 1}{xy}$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ (Ver em Flemming, D. - Cálculo B)

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^3 + y^2}$

(13) Determine o maior conjunto no qual a função é contínua:

a)
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+xy+y^2} & \text{se}(x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se}(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Observação: Para achar os valores de (x,y) que anulam o denominador, tente completar quadrados: $x^2 + yx = (x + \frac{y}{2})^2 - (\frac{y}{2})^2$.

b) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$.

Fórmulas úteis:

- Limites fundamentais:

$$\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

Bons estudos!

Bibliografia:

Stewart, J. - Cálculo Vol II

Flemming, D. - Cálculo B

Howard, A. - Cálculo Vol II

Guidorizzi, H. - Um curso de cálculo Vol 3.