

Introdução ao Cálculo

Lista de Exercícios: P2

- 1 - Funções Exponenciais.
 - 2 - Funções Logarítmicas.
 - 3 - Funções Compostas. Equações e Inequações Exponenciais e Logarítmicas.
 - 4 - Funções Trigonométricas.
 - 5 - Limites.
-

1 Funções Exponenciais

1.1 Exercícios propostos em aula

1. A meia-vida de certa substância radioativa é igual a 14 dias. Existem 6,6 gramas presentes inicialmente.
 - a) Expresse a quantidade da substância remanescente como uma função do tempo t , em dias.
 - b) Quando existirá menos de 1 grama?
2. O número de bactérias em uma cultura é contado como 400 no começo de um experimento. Se o número de bactérias dobrar a cada 3 horas, determine:
 - a) A fórmula que descreve o número de bactérias em função do tempo t , dado em horas.
 - b) O número de bactérias presentes na cultura após 24 horas.
3. Seja a função exponencial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, definida por $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
 - (a) A função f é crescente ou decrescente?
 - (b) Para que valores de x tem-se $\frac{1}{128} < f(x)$?
 - (c) Para qual valor de x tem-se $f(x) = 32$?
4. Uma certa quantia de dinheiro P_0 é investida a uma taxa anual de juros de 8,0%, capitalizados bimestralmente (a cada 2 meses).
 - (a) Quantos anos (com aproximação na ordem de décimos de ano) levaria para o montante inicial quadruplicar?
 - (b) Se $P_0 = 10.000,00$ reais, quanto haverá, aproximadamente, na conta bancária após 1 ano e 6 meses?
5. Resolva a equação exponencial $(\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{81}$.
6. Resolva a equação exponencial $125^x = 0,04$.
7. Resolva a equação exponencial $5^{2x^2+3x-2} = 1$.
8. Resolva a equação exponencial $4^x - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$.

9. O número de bactérias em uma cultura é contado como 400 no começo de um experimento. Se o número de bactérias dobrar a cada 3 horas, o número de indivíduos pode ser expresso pela fórmula $N(t) = 400(2)^{t/3}$. Determine o número de bactérias presentes na cultura após 30 horas.
10. Se um país tem uma população de 22 milhões em 2000 e mantém uma taxa de crescimento populacional de 1% ao ano, então sua população, em milhões de habitantes, após um tempo, assumindo que $t = 0$ em 2000, pode ser modelada como $N(t) = 22e^{0,01t}$. Estime a população em 2033.
11. Um certo isótopo radioativo decai de acordo com a fórmula $Q(t) = Q_0e^{-0,034t}$, sendo que t é o tempo em anos e Q_0 é o número de gramas presentes inicialmente.
Se 20 gramas estão inicialmente presentes, em quantos anos restarão $\frac{20}{e^{0,34}}$ gramas ($\approx 14,2g$)?
12. A meia-vida de certa substância radioativa é igual a 14 dias. Existem 6,6 gramas presentes inicialmente.
 - a) Expresse a quantidade da substância remanescente como uma função do tempo t , em dias.
 - b) Resolvendo uma equação exponencial, determine quando existirá 0,4125 gramas?
13. Resolva a seguinte inequação exponencial: $4^x \geq 8$.
14. Resolva a seguinte inequação exponencial: $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-1} \leq 32^{1-x}$.

1.2 Exercícios de Revisão

2 Funções Logarítmicas

2.1 Exercícios propostos em aula

1.
 - a) Calcule o nível decibel do menor som audível, $I_0 = 10^{-12}$ watts por metro quadrado.
 - b) Calcule o nível decibel de um concerto de rock com uma intensidade de 10^{-1} watts por metro quadrado.
 - c) Calcule a intensidade de um som com nível de 85 decibéis.
2. Há mais de uma escala logarítmica, conhecida como escala Richter, empregada para medir o poder destrutivo de um terremoto. Uma escala Richter comumente usada é definida como:

$$R = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0},$$

sendo que R é a chamada magnitude (Richter) do terremoto, E é a energia liberada pelo terremoto (medida em joules) e E_0 é a energia liberada por um terremoto muito fraco.

- a) Encontre a magnitude na escala Richter de um terremoto que libera energia de $1000E_0$.
- b) Encontre a energia liberada por um terremoto que mede 5,0 na escala Richter, sendo $E_0 = 10^{4,40}$ joules.
- c) Qual é a razão entre a energia liberada por um terremoto que mede 8,1 na escala Richter e um tremor medindo 5,4 na mesma escala?

2.2 Exercícios de Revisão

3 Funções Compostas. Equações e Inequações Exponenciais e Logarítmicas.

3.1 Exercícios propostos em aula

1. Resolva a equação exponencial $5^{2x-3} = 3$.
2. O crescimento de certa cultura de bactérias obedece à função $X(t) = Ce^{kt}$, em que $X(t)$ é o número de bactérias no tempo $t = 0$; C e k são constantes positivas (e é a base do logaritmo neperiano). Verificando que o número inicial de bactérias $X(0)$ duplica em 4 horas, quantas delas se pode esperar no fim de 6 horas?
3. Uma substância radioativa está em processo de decaimento, de modo que no instante t a quantidade não decaída é $A(t) = A(0) \cdot e^{-3t}$, em que $A(0)$ indica a quantidade da substância no instante $t = 0$. Calcule o tempo necessário para que a metade da quantidade inicial se decaia.
4. Um rebanho de cervos é introduzido em uma ilha. A população inicial é de 500 indivíduos e estima-se que a população que se manterá constante a longo prazo será de 2.000 indivíduos. Se o tamanho da população é dado pela função de crescimento logístico

$$N(t) = \frac{2000}{1 + 3e^{-0,05t}},$$

após quantos anos o número de cervos será aproximadamente 950 indivíduos?

5. Uma certa quantia de dinheiro P é investida a uma taxa anual de juros de 4,5%. Quantos anos (com aproximação na ordem de décimos de ano) levaria para o montante inicial dobrar, assumindo que a capitalização dos juros seja trimestral? **Obs:** Use a fórmula $A(t) = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$.

3.2 Exercícios de Revisão

4 Funções Trigonométricas

4.1 Exercícios propostos em aula

- Atividades no Geogebra.

4.2 Exercícios de Revisão

5 Limites

1. Se

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4}, & \text{se } x > 4 \\ 8-2x, & \text{se } x \leq 4 \end{cases}$$

calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x);$

b) $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x);$

c) O $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ existe? Justifique sua resposta.

2. Seja $F(x) = \frac{x}{|x|}$.

a) Qual o domínio da função F ?

b) Sabemos que $|x|$ é uma função definida por partes:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Usando a regra de $|x|$, descreva $F(x)$ como uma função definida por partes.

c) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. O $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existe? Justifique sua resposta.

3. Calcule o limite, se existir.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 6}{x - 2}$

g) $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2 + t} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

h) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3}$

c) $\lim_{t \rightarrow -3} \frac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x + 3}$

d) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4 + h)^2 - 16}{h}$

j) $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t^2 + 2}{t^3 + t^2 - 1}$

e) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + h} - 1}{h}$

k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2}{\sqrt{9x^2 + 1}}$

f) $\lim_{t \rightarrow 9} \frac{9 - t}{3 - \sqrt{t}}$

4. **(Crescimento Populacional Logístico)** Se uma população consistindo inicialmente de N_0 indivíduos é modelada como crescente e com população limite (devido a recursos limitados) de P indivíduos, a população $N(t)$, em qualquer instante t posterior, é dada pela fórmula:

$$N(t) = \frac{N_0 P}{N_0 + (P - N_0)e^{-kt}}.$$

Se a população de trutas em um lago é dada pela fórmula

$$N(t) = \frac{9000}{8 + 10e^{-0,05t}}$$

- a) Qual a população atual?
- b) Qual será a população daqui a 10 anos, aproximadamente?
- c) De acordo com o modelo, qual é o número máximo de trutas possível de modo que os recursos necessários para a sobrevivência sejam suficientes? (Ou seja, determine a população limite, $t \rightarrow \infty$.)

5. Definimos a **velocidade instantânea** como o limite das velocidades médias:

$$v(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

De maneira análoga, a **aceleração instantânea** é dada como o limite das acelerações médias:

$$a(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h}.$$

Se uma partícula move-se sobre o eixo y de modo que, no instante x , a posição y é dada por $y = x^2$, $x \geq 0$, onde x é dado em segundos e y é dado em metros.

a) Qual a velocidade da partícula no instante x ? E em $x = 2$?

b) Qual a aceleração da partícula no instante x ? E em $x = 2$?

6. Escreva as funções abaixo como a composta de duas funções:

a) $h(x) = (3x^4 + 5)^3$

b) $h(x) = \sqrt{x^2 + 5x - 6}$

c) $h(x) = \sqrt{1 + \cos^2 x}$

d) $h(x) = \sin(2x - \pi/3)$

e) $h(x) = e^{3 \tan x}$

7. Usando a continuidade das funções, determine os limites abaixo:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (3x^4 + 5)^3$

b) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \sqrt{x^2 + 5x - 6}$

c) $\lim_{x \rightarrow \pi} \sqrt{1 + \cos^2 x}$

d) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin(2x - \pi/3)$

e) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} e^{3 \tan x}$

Gabarito

1. a) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 0;$

b) $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 0;$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0$, pois os limites laterais existem e são iguais.

2. a) $D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\}$

b) $F(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

Portanto, temos que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \nexists$, pois os limites laterais apesar de existirem, não são iguais.

3. a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 6}{x - 2} = \#$

g) $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2 + t} \right) = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 5$

h) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3} = 108$

c) $\lim_{t \rightarrow -3} \frac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3} = \frac{6}{5}$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x + 3} = 0$

d) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4 + h)^2 - 16}{h} = 8$

j) $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t^2 + 2}{t^3 + t^2 - 1} = 0$

e) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + h} - 1}{h} = \frac{1}{2}$

k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2}{\sqrt{9x^2 + 1}} = \frac{1}{3}$

f) $\lim_{t \rightarrow 9} \frac{9 - t}{3 - \sqrt{t}} = 6$

4. a) $N(0) = 500$

b) $N(10) \approx 639$

c) $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 1125$

5. a) $v(x) = 2x$; $v(2) = 4 \text{ m/s}$

b) $a(x) = 2$; $a(2) = 2 \text{ m/s}^2$

6. a) $f(x) = x^3$ e $g(x) = 3x^4 + 5$

b) $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 + 5x - 6$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 1 + \cos^2 x$

d) $f(x) = \sin x$ e $g(x) = 2x - \pi/3$

e) $f(x) = e^x$ e $g(x) = 3 \tan x$

7. a) $\lim_{x \rightarrow 0} (3x^4 + 5)^3 = 125$

b) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \sqrt{x^2 + 5x - 6} = \sqrt{5\sqrt{2} - 4}$

c) $\lim_{x \rightarrow \pi} \sqrt{1 + \cos^2 x} = \sqrt{2}$

d) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin(2x - \pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} e^{3 \tan x} = e^3$