(1) De um pedaço retangular de cartolina de dimensões $8cm \times 15cm$, quatro quadrados iguais, de lado x, devem ser cortados, um em cada canto. A parte cortada remanescente é então dobrada formando uma caixa aberta.

a) Determine a função que dá o volume em função de x. Exiba o domínio dessa função.
b) Qual o comprimento do lado desses quadrados que maximizam o volume da caixa?

(2) Uma cartolina, retangular, branca tem uma área de 900 cm^2. Queremos imprimir um texto sobre ela, deixando margens de 3 cm na base inferior e nas laterais e uma margem de 5 cm na base superior.
a) Determine a função que dá a área impressa em função de um dos lados da cartolina. Exiba o domínio dessa função.
b) Quais as dimensões da cartolina que darão a maior área impressa?

Teste da 1ª Derivada para Valores Extremos Absolutos: Suponha que c seja um número crítico de uma função contínua f definida em um certo intervalo.
a) Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então $f(c)$ é o valor máximo absoluto de f.

b) Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então $f(c)$ é o valor mínimo absoluto de f.

Usando o teste acima, resolva os problemas a seguir:

(3) Um fazendeiro deseja cercar um lote retangular de 1800 m^2. Deseja também construir duas cercas divisórias internas, paralelas a dois dos lados da cerca externa.

a) Determine a função que dá o comprimento em função de um dos lados da cerca. Exiba o domínio dessa função.
b) Qual é o comprimento total mínimo da cerca que o projeto exige?

(4) Um conteiner para estocagem retangular com uma tampa aberta deve ter um volume de 10 m^3. O comprimento de sua base é o dobro da largura. O material para a base custa $R\$10$ por metro quadrado. O material para os lados custa $R\$6$ por metro quadrado.

a) Determine a função que dá o custo dos materiais em função de um dos lados da base ou da altura do conteiner. Exiba o domínio dessa função.
b) Encontre o custo dos materiais para o mais barato desses conteiners.

Gabarito

(1) a) A base da caixa terá dimensões $8-2x$ cm e $15-2x$ cm; sua altura será de x cm. Como todas essas variáveis são comprimentos, elas devem ser positivas; ou seja:

$$\begin{aligned} 8-2x \geq 0 &\Rightarrow x \leq 4 \\ 15-2x \geq 0 &\Rightarrow x \leq 7,5 \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Para que as três sejam satisfeitas, devemos ter $0 \leq x \leq 4$, e este é o domínio da função que dá o volume:

$$V(x) = (8-2x)(15-2x)x = 4x^3 - 46x^2 + 120x.$$

b) O ponto crítico dessa função no intervalo $[0, 4]$ é $x = \frac{5}{3}$. Como

$$V(0) = 0, \quad V(4) = 0 \quad \text{e} \quad V(5/3) = 90.74,$$

o maior volume vai ser obtido quando o lado do quadrado for $x = \frac{5}{3}$ cm.

(2) a) Se x cm é o comprimento da base da folha e y cm o da altura da folha, temos que a parte impressa tem medidas $(x-6)$ cm e $(y-8)$ cm. Além disso, $xy = 900\ cm^2$, de onde concluímos que $y = \frac{900}{x}$, com $x > 0$. Como $(x-6)$ e $(y-8)$ são comprimentos, eles devem ser positivos:

$$\begin{aligned} x-6 \geq 0 &\Rightarrow 6 \leq x \\ y-8 = \frac{900}{x} - 8 \geq 0 &\Rightarrow x \leq 112.5. \end{aligned}$$

Para que as duas sejam satisfeitas, devemos ter $6 \leq x \leq 112.5$, e este é o domínio da função que dá a área impressa:

$$A(x) = (x-6)\left(\frac{900}{x} - 8\right) = 948 - 8x - \frac{5400}{x}.$$

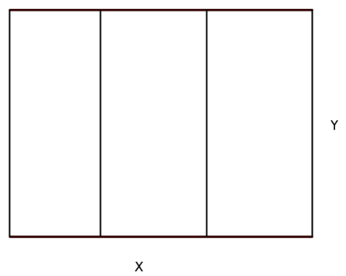
b) O ponto crítico dessa função no intervalo $[6, 112.5]$ é $x = 15\sqrt{3}$. Como

$$A(6) = 0, \quad A(112.5) = 0 \quad \text{e} \quad A(15\sqrt{3}) \approx 532.31,$$

as dimensões da cartolina que darão a maior área impressa serão:

$$x = 15\sqrt{3}\text{cm e } y = \frac{60}{\sqrt{3}} = 20\sqrt{3}\text{cm}.$$

(3) Sejam x e y as dimensões desse lote e que sua divisão seja como a seguir:



a) O comprimento da cerca é dado por $C = 2x + 4y$. Como a área cercada deve ter $1800m^2$, temos que $xy = 1800$, de onde segue que

$$y = \frac{1800}{x}, \quad x > 0.$$

Portanto, a função que dá o comprimento em função do lado x da cerca e seu domínio é

$$C(x) = 2x + \frac{7200}{x}, \quad x \in (0, +\infty).$$

b) O ponto crítico da função no intervalo $(0, +\infty)$ é $x = 60$. Estudando o sinal da primeira derivada, temos que

$$C'(x) < 0, \text{ para todo } x < 60 \text{ e } C'(x) > 0, \text{ para todo } x > 60.$$

Pelo teste da 1ª derivada para valores extremos absolutos, $f(60) = 240$m é o comprimento mínimo necessário para cercar a área pedida.

(4) a) Se as dimensões da base da caixa são x e $2x$ e a altura y, temos que $2x^2y = 10$ e, portanto,

$$y = \frac{10}{2x^2} = \frac{5}{x^2}, \quad x > 0.$$

Para obter o custo total, basta somar os seguintes custos:
Base: $10(2x^2)$ reais
Lados com dimensões $x \times y$: $2 \times 6(xy)$ reais
Lados com dimensões $2x \times y$: $2 \times 6(2xy)$ reais
Portanto, a função que dá o custo dos materiais em função do lado x da base e seu domínio é dado por

$$C(x) = 20x^2 + \frac{180}{x}, \quad x > 0.$$

b) O ponto crítico da função no intervalo $(0, +\infty)$ é $x = \sqrt[3]{4.5}$. Estudando o sinal da primeira derivada, temos que

$$C'(x) < 0, \text{ para todo } x < \sqrt[3]{4.5} \text{ e } C'(x) > 0, \text{ para todo } x > \sqrt[3]{4.5}.$$

Pelo teste da 1ª derivada para valores extremos absolutos, $f(\sqrt[3]{4.5}) \approx 163.54$ reais é o custo mínimo dos materiais para um desses conteiners.