

## Aula 08

### Quadriláteros

Karla Lima

03/03/2023

# Sumário



1. Definição e Nomenclaturas
2. Propriedades dos Paralelogramos
3. Propriedades do Retângulo
4. Propriedades do Losango
5. O Trapézio
6. Formulário Avaliativo

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the upper-left portion, while a light gray shape occupies the lower-left portion. The rest of the slide is white. The text is centered in the white area.

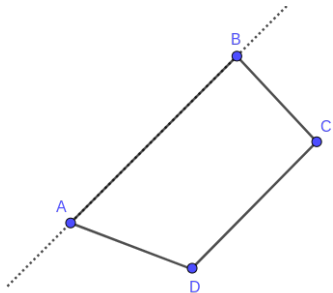
# Definição e Nomenclaturas

# Definição

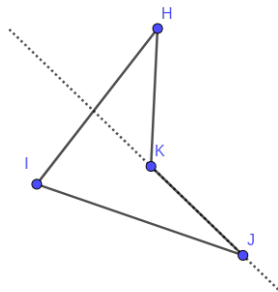


## Definição 1

Denominamos de **quadrilátero** ao polígono de quatro lados.



Quadrilátero Convexo



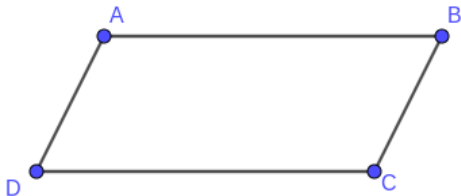
Quadrilátero Não Convexo

# Quadriláteros Notáveis



## Definição 2

*O quadrilátero cujos lados opostos (que não possuem vértices em comum) são paralelos é denominado **paralelogramo**.*

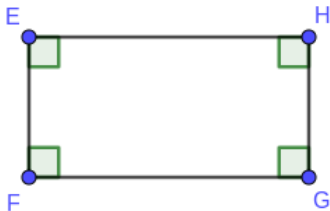


# Quadriláteros Notáveis



## Definição 3

Um paralelogramo cujos ângulos são retos é denominado **retângulo**.

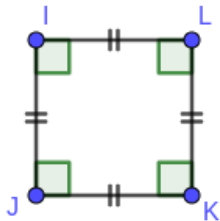


# Quadriláteros Notáveis



## Definição 4

*Um retângulo cujos lados são congruentes é dito um **quadrado**.*

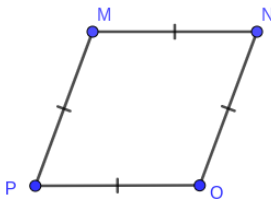


# Quadriláteros Notáveis



## Definição 5

Um paralelogramo cujos lados são congruentes é denominado **losango**.





The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the upper-left portion, while a light gray shape occupies the lower-left portion. The rest of the slide is white. The title text is centered in the white area.

# Propriedades dos Paralelogramos

# Teorema



## Teorema 1

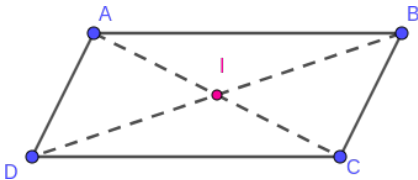
*Em todo paralelogramo:*

- a) *os lados opostos são congruentes;*
- b) *os ângulos opostos são congruentes;*
- c) *as diagonais se bissecam.*

# Demonstração: Teorema 1



- a) Qual teorema de paralelas garante a veracidade deste item?
- b) Usando o item a), trace uma diagonal e use semelhança de triângulos para demonstrar esse item.
- c) De fato, na figura abaixo



mostre que  $\hat{B}IC = \hat{A}ID$  e  $\hat{IBC} = \hat{IDA}$ . Conclua que  $\triangle BIC = \triangle AID$  (LAA).

- Com isso, teremos  $BI = ID$  e  $CI = IA$  (Por quê?)

# Teorema



## Teorema 2

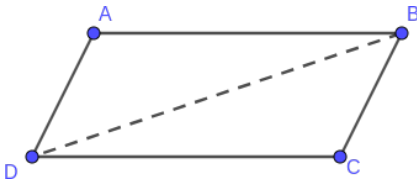
*Reciprocamente, um quadrilátero convexo:*

- a) *cujos lados opostos são congruentes é um paralelogramo;*
- b) *cujos ângulos opostos são congruentes é um paralelogramo;*
- c) *cujas diagonais se bissecam é um paralelogramo.*

## Demonstração: Teorema 2



- a) Trace uma das diagonais do quadrilátero, dividindo-o em dois triângulos:  $\triangle ABD$  e  $\triangle BCD$ . Mostre que eles são congruentes.



- Conclua que  $\hat{C}BD = \hat{B}DA$  e mostre que os segmentos  $\overline{BC}$  e  $\overline{AD}$  são paralelos.

## Demonstração: Teorema 2

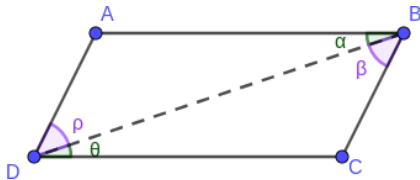


- ▶ Do mesmo modo, conclua que  $\hat{A}BD = \hat{B}DC$  e mostre que os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{DC}$  são paralelos.

## Demonstração: Teorema 2



b) Trace uma das diagonais do quadrilátero.



- ▶ Por hipótese,  $\hat{A} = \hat{C}$  e  $\hat{ABD} = \hat{ADC}$ .
- ▶ Na figura acima, temos que  $\alpha + \beta = \rho + \theta$  (por hipótese).
- ▶ Além disso, pela Lei Angular de Tales:

$$\beta + \theta = \alpha + \rho \quad (\text{confira!})$$

## Demonstração: Teorema 2



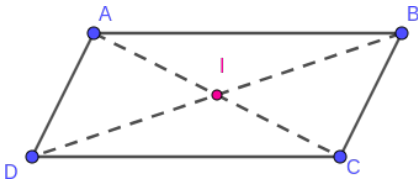
- ▶ Some estas equações, membro a membro, e conclua que  $\alpha = \theta$ .
- ▶ Mostre que, por isso, os segmentos  $\overline{BC}$  e  $\overline{AD}$  são paralelos.
- ▶ Analogamente, conclua que  $\beta = \rho$  e, com isso, mostre que os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{DC}$  são paralelos.
- ▶ Portanto,  $ABDC$  é um paralelogramo.



## Demonstração: Teorema 2



c) Trace as diagonais do quadrilátero.

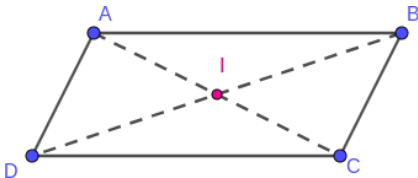


- Qual caso de congruência garante que  $\triangle BIC = \triangle AID$ ?
- Dessa congruência, como podemos relacionar os ângulos  $\widehat{CBD}$  e  $\widehat{BDA}$ ?
- Conclua que  $\overline{BC} = \overline{AD}$ .

## Demonstração: Teorema 2



- Analogamente, conclua a congruência dos triângulos  $AIB$  e  $DIC$ .



- Dessa congruência, relacione os ângulos  $\hat{A}BD$  e  $\hat{B}DC$ .
- Conclua que  $\overline{AB} = \overline{DC}$ .

Do exposto acima, conclui-se que  $ABCD$  é um paralelogramo.

# Teorema



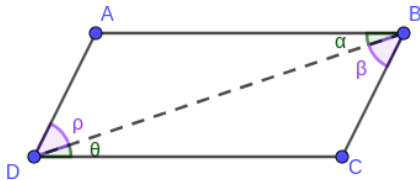
## Teorema 3

*O quadrilátero que tem dois lados paralelos e congruentes é um paralelogramo.*

## Demonstração: Teorema 3



- Trace uma das diagonais do quadrilátero.



- Temos  $\widehat{CBD} = \widehat{BDA}$  (justifique!) e, assim,

$$\triangle CBD = \triangle BDA \quad (\text{qual congruência?}).$$

- Dessa forma,  $AB = DC$  (por quê?).
- Pelo item a), do Teorema 2, segue-se que  $ABCD$  é um paralelogramo.

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the upper-left portion, while a light gray shape occupies the lower-left portion. The rest of the slide is white. The title is centered in the white area.

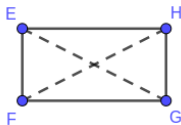
# Propriedades do Retângulo

# Teorema



## Teorema 4

*As diagonais de um retângulo são congruentes.*



**Figura 1:** Se  $EFGH$  é um retângulo, então  $EG = HF$ .

**Demonstração:** Exercício.

# Teorema



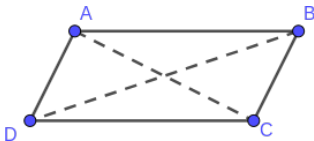
## Teorema 5

*Reciprocamente, o paralelogramo que tem as diagonais congruentes é um retângulo.*

## Demonstração: Teorema 5



- ▶ Trace as diagonais do paralelogramo:

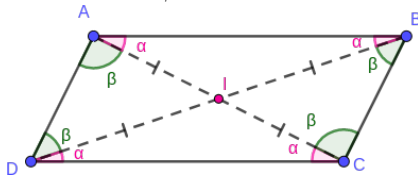


- ▶ Pelo Teorema 1, item c), as diagonais se bissecam.
- ▶ Como  $AC = BD$ , temos que  $\frac{AC}{2} = AI = BI = DI = CI = \frac{BD}{2}$ .
- ▶ Portanto, são isósceles os triângulos  $AID$ ,  $BIC$ ,  $AIB$  e  $DIC$ .
- ▶ Conclua que  $\triangle AID = \triangle BIC$  e  $\triangle AIB = \triangle DIC$ .

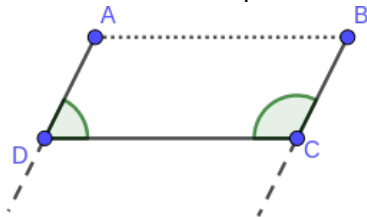


# Demonstração: Teorema 5

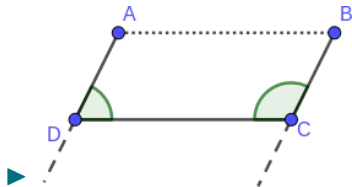
- Assim, teremos  $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = \alpha + \beta$ .



- Agora, considere as paralelas  $\overleftrightarrow{AD}$  e  $\overleftrightarrow{BC}$  cortadas pela transversal  $\overleftrightarrow{DC}$ .



## Demonstração: Teorema 5



- ▶ Os ângulos  $\hat{A}\hat{C}D$  e  $\hat{B}\hat{D}C$  são colaterais internos. Qual relação entre os dois podemos tirar dessa informação?
- ▶ Use a informação acima, junto ao fato de que  $\hat{D} = \hat{C}$  para concluir que  $\hat{D} = \hat{C} = 90^\circ$  e, consequentemente,  $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$ .

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape, consisting of two overlapping triangles, is located in the upper-left corner. The rest of the slide is a light gray color.

## Propriedades do Losango

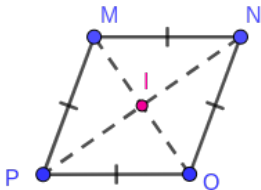
# Teorema



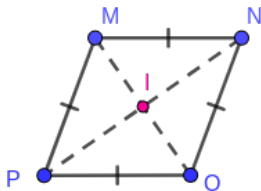
## Teorema 6

*Em todo losango:*

- a) *as diagonais são perpendiculares;*
- b) *as diagonais são bissetrizes dos ângulos do quadrilátero.*



## Demonstração: Teorema 6



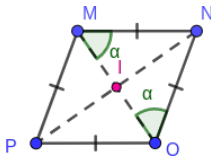
- ▶ Na figura acima,  $\triangle MIN = \triangle OIN$  (por quê?)
- ▶ Com isso, conclua que  $\hat{M}IN = \hat{N}IO$ .
- ▶ Qual a relação entre esses dois ângulos? Como podemos checar que  $\hat{M}IN = \hat{N}IO = 90^\circ$ ?
- ▶ Conclua a prova do item a).

# Demonstração: Teorema 6

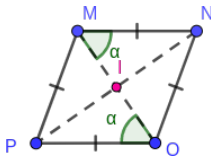


Para o item b), observe que:

- $\widehat{NMI} = \widehat{ION}$  (ângulos opostos a lados congruentes)

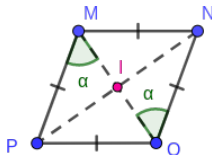


- $\widehat{IOP} = \widehat{NMI}$  (alternos internos)

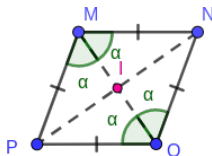


# Demonstração: Teorema 6

- $\widehat{PMI} = \widehat{ION}$  (por quê?)



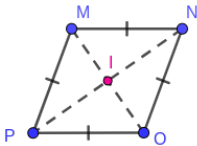
- Com isso,  $\overline{MN}$  é bissetriz dos ângulos  $\widehat{M}$  e  $\widehat{O}$ .



## Demonstração: Teorema 6



- Para concluir a demonstração do item b), mostre que  $\overline{NP}$  é bissetriz dos ângulos  $\hat{P}$  e  $\hat{N}$ .





# Teorema



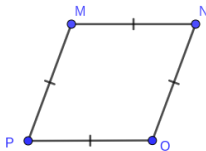
## Teorema 7

*Reciprocamente, se as diagonais de um quadrilátero se bisseçam e são perpendiculares, então o quadrilátero é um losango.*

## Demonstração: Teorema 7



- ▶ Pelo Teorema 2, se as diagonais de um quadrilátero se bissecam, então ele é um paralelogramo.
- ▶ Logo,  $MN = PO$  e  $MP = NO$  (por quê?).

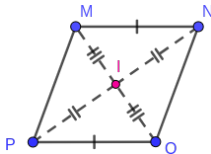


- ▶ Para concluir a demonstração, precisamos mostrar que os quatro lados são iguais.

# Demonstração: Teorema 7



- Verifique que  $\triangle PMI = \triangle MIN$



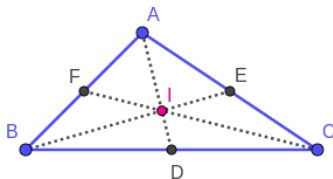
- Conclua que  $MP = MN$  e, portanto,  $MN = PO = MP = NO$ , c.q.d.

# Teorema



## Teorema 8

*As três medianas de um triângulo concorrem no mesmo ponto, situado a dois terços de cada uma delas a partir do vértice.*

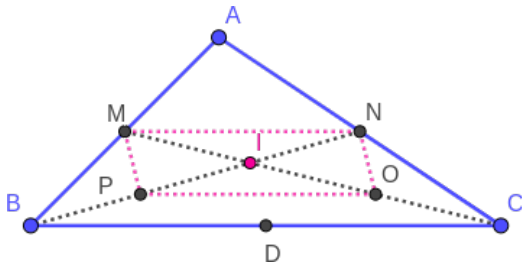


**Figura 2:**  $AI = BI = CI = \frac{2}{3}AD = \frac{2}{3}BE = \frac{2}{3}CF$

## Demonstração: Teorema 8



- Pelos pontos médios  $M$  e  $N$  trace um segmento de reta que, pelo Teorema 13 (Retas Paralelas), é paralelo ao lado  $\overline{BC}$ . Além disso,  $MN = \frac{BC}{2}$ .

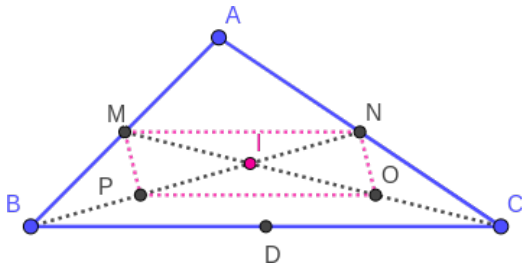


- Pelos pontos médios de  $BI$  e  $CI$ , trace um segmento  $\overline{PO}$ . Por que esse segmento também é paralelo ao lado  $\overline{BC}$ ?

## Demonstração: Teorema 8



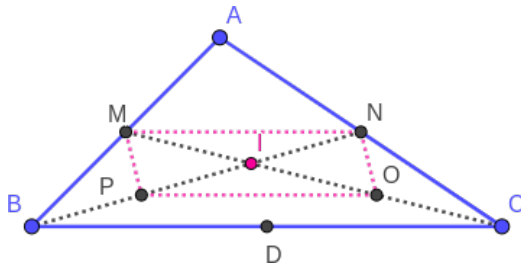
- Ainda pelos pontos médios  $P$  e  $O$ , trace as paralelas (por quê?)  $MP$  e  $NO$ .



- Conclua que os lados paralelos são congruentes.
- O quadrilátero  $MNOP$  é um paralelogramo (Teorema 3).

## Demonstração: Teorema 8

- Se é um paralelogramo, suas diagonais se bissecam, então  $MI = IO$  e  $NI = IP$ .



- Como  $IP = BP$ ,  $BN = BP + IP + IN = IP + IP + IP = 3IP$ , segue que

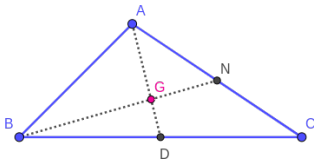
$$IP = \frac{BN}{3} \Rightarrow BI = BP + IP = 2IP = \frac{2}{3}BN$$

# Demonstração: Teorema 8



- ▶ Por outro lado, se  $G$  é o ponto de interseção entre as medianas  $\overline{BN}$  e  $\overline{AD}$ , então

$$BG = \frac{2}{3}BN = BI.$$



- ▶ Como  $BI$  e  $BG$  estão sobre o mesmo segmento, com o mesmo ponto inicial, podemos concluir que

$$BI = BG,$$

ou seja, os pontos  $I$  e  $G$  coincidem e as três medianas concorrem num mesmo ponto.





# O Trapézio

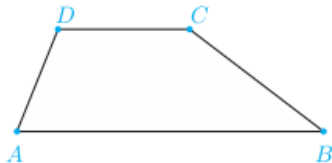


# Um quadrilátero que não é um paralelogramo



## Definição 6

*Um quadrilátero que tem apenas dois lados paralelos é denominado **trapézio**.*

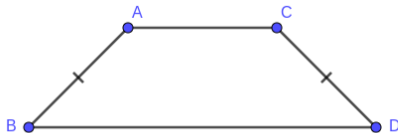


Os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são as **bases** do trapézio.

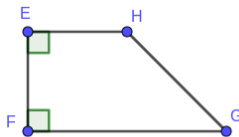
# Trapézios Especiais



- ▶ O trapézio cujos lados não paralelos são congruentes é dito **isósceles**.
- ▶ O trapézio que possui dois ângulos retos é dito **trapézio retângulo**.



Trapézio Isósceles



Trapézio Retângulo

# Propriedades do Trapézio

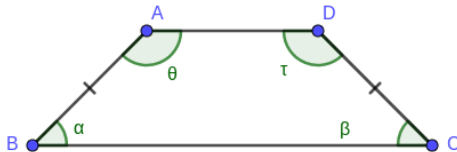


## Teorema 9

*No trapézio isósceles, os ângulos adjacentes à mesma base são congruentes.*

### Demonstração:

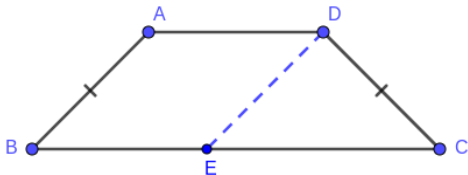
- ▶ **Hipótese:**  $AB = CD$
- ▶ **Tese:**  $\hat{A} = \hat{D}$  e  $\hat{B} = \hat{C}$



# Demonstração: Teorema 1



- ▶ Trace pelo vértice  $D$  o segmento  $\overline{DE}$  paralelo a  $\overline{AB}$  com  $E \in \overline{BC}$ .

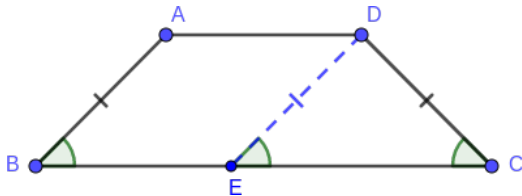


- ▶ O quadrilátero  $ABCD$  é um paralelogramo (pq?). Logo,
  - ▶  $AB = ED$
  - ▶  $AB = DE = DC$

# Demonstração: Teorema 1



- Como  $\hat{B} = \hat{DEC}$  e  $\hat{CED} = \hat{C}$  (pq?), então  $\hat{B} = \hat{C}$ .



- Por serem suplementos de ângulos congruentes, temos  $\hat{A} = \hat{D}$ .

# Propriedades do Trapézio

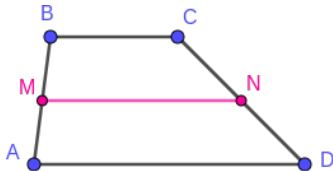


## Teorema 10

*O segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases e igual à sua semi-soma.*

### Demonstração:

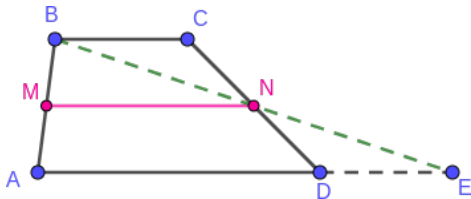
- ▶ **Hipótese:**  $MB = MA$  e  $NC = ND$ .
- ▶ **Tese:**  $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ ,  $\overline{MN} \parallel \overline{AD}$  e  $MN = \frac{BC+AD}{2}$



## Demonstração: Teorema 2



- ▶ Trace pelo vértice  $B$  o segmento  $\overline{BE}$ , que passa pelo ponto médio  $N$ , com  $E \in \overrightarrow{AD}$ .



- ▶ Os triângulos formados  $BCN$  e  $NDE$  formados são congruentes, pois
  - ▶  $NC = ND$  (hipótese)
  - ▶  $\hat{BNC} = \hat{DNE}$  (pq?)
  - ▶  $\hat{C} = \hat{NDE}$  (pq?)
- ▶ Assim,  $BC = DE$  e  $BN = NE$  (lados opostos à ângulos congruentes).



## Demonstração: Teorema 2



- ▶ Dessa forma,  $\overline{MN}$  une os pontos médios dos lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{BE}$  do  $\triangle ABE$ . Logo,

$$\overline{MN} \parallel \overline{AE}.$$

- ▶ Como  $\overline{AE} \parallel \overline{BC}$ , a primeira parte do teorema está demonstrada.
- ▶ Finalmente,

$$MN = \frac{AE}{2} = \frac{AD + DE}{2} = \frac{AD + BC}{2}.$$

O segmento  $\overline{MN}$  é denominado **base média** ou **mediana** do trapézio.

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the top-left corner, while a light gray shape occupies the bottom-left corner. The rest of the slide is white.

# Formulário Avaliativo

# Formulário



Responda ao formulário: Aula 08: Quadriláteros.