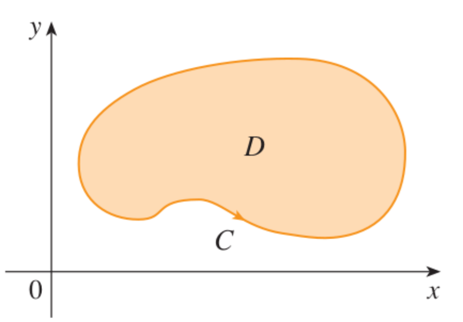
O Teorema de Green

Motivação

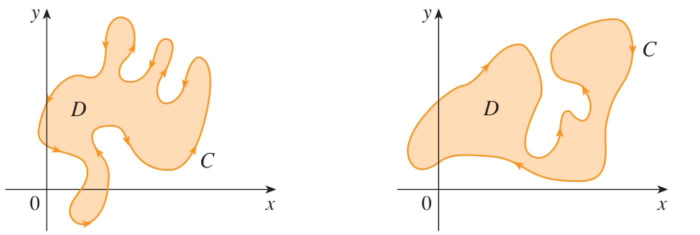
O **Teorema de Green** fornece uma relação entre uma integral de linha ao redor de uma curva fechada C e uma integral dupla sobre a região do plano delimitada por C.



Condições para a curva

Sobre a curva C, devemos impor as seguintes condições:

- C é uma curva fechada: $r(a) = r(b)$; ou seja, seu ponto inicial coincide com seu ponto final;
- C é simples, isto é, não possui autointerseção;
- C é contínua por partes;
- C é orientada positivamente: ao percorrer de $t = a$ à $t = b$, estamos andando na curva no sentido anti-horário.



(a) Orientação positiva (b) Orientação negativa

Outra maneira de escrever a integral de linha

Seja $\overrightarrow{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ e C parametrizada por $r(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$. Temos que

$$\int_C F \cdot dr = \int_a^b (P(r(t))x'(t) + Q(r(t))y'(t))dt$$

e reescrevemos

$$\int_C F \cdot dr = \int_C Pdx + Qdy$$

onde $P = P(r(t))$, $Q = Q(r(t))$, $dx = x'(t)dt$ e $dy = y'(t)dt$.

O Teorema de Green

Teorema de Green Seja C uma curva plana simples, fechada, contínua por partes, orientada positivamente, e seja D a região delimitada por C. Se P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha D, então

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Exemplos

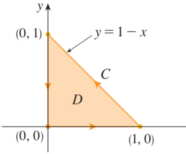
EXEMPLO 1 Calcule $\int_C x^4\,dx + xy\,dy$, onde C é a curva triangular constituída pelos segmentos de reta de $(0, 0)$ a $(1, 0)$, de $(1, 0)$ a $(0, 1)$, e de $(0, 1)$ a $(0, 0)$.

SOLUÇÃO Apesar desta integral poder ser calculada pelos métodos usuais da Seção 16.2, isto envolveria o cálculo de três integrais separadas sobre os três lados do triângulo. Em vez disso, vamos usar o Teorema de Green. Observe que a região D englobada por C é simples e que C tem orientação positiva (veja a Figura 4). Se tomarmos $P(x, y) = x^4$ e $Q(x, y) = xy$, então teremos

$$\int_C x^4\,dx + xy\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} (y - 0)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \tfrac{1}{2}\int_0^1 (1 - x)^2\,dx$$

$$= -\tfrac{1}{6}(1 - x)^3\Big]_0^1 = \tfrac{1}{6}$$



Exemplos

- Use uma integral de linha, aplicando o Teorema de Green, para encontrar a área delimitada pela elipse $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1.$
  A parametrização da curva é dada por

$$r(t) = (2\cos t, 3\text{sen}t), 0 \leq t \leq 2\pi$$

e a área de uma região D pode ser calculada pela integral

$$A = \int\int_D 1dA$$

Teorema de Green Seja C uma curva plana simples, fechada, contínua por partes, orientada positivamente, e seja D a região delimitada por C. Se P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha D, então

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

- Para usar o teorema de Green, devemos verificar se as derivadas parciais das funções P e Q são contínuas na região D.
- Por exemplo, para $\overrightarrow{F} = (\sqrt{y}, x)$ as derivadas parciais são dadas por:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0;\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}};\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 1;\ \frac{\partial Q}{\partial y} = 0.$$

  Não podemos usar o teorema de Green em regiões que tenham $y = 0$, ou seja, o eixo x. Isso porque $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ é descontínua para esses pontos. Se a região não tiver pontos com $y = 0$, o teorema pode ser usado.

Trabalho 3

1. Seja $\overrightarrow{F}(x, y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$. Calcule $\oint_C F \cdot dr$ para cada uma das curvas dadas abaixo:

   a) C é o círculo $x^2 + y^2 = 25$, no sentido anti-horário.
   b) C é o triângulo com vértices $(1, 1)$, $(1, 2)$ e $(2, 1)$, no sentido anti-horário.