Introdução ao Cálculo

Aula 05: Funções Quadráticas.

Karla Lima

25/01/2022

Sumário

Bibliografia

Bibliografia da Aula 05

- Fundamentos da Matemática Elementar: 1 (Click para baixar)

Definição e Propriedades das Funções Quadráticas

Definição

Definição 1

*Uma **função quadrática** (ou **função do 2º grau**) é uma função **polinomial**, dada pela forma*

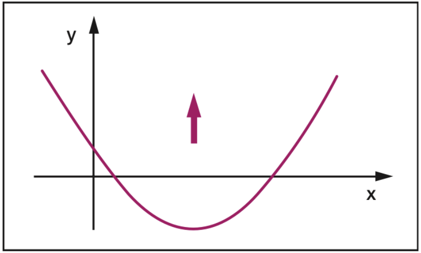
$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

onde a, b e c são constantes reais e $a \neq 0$.

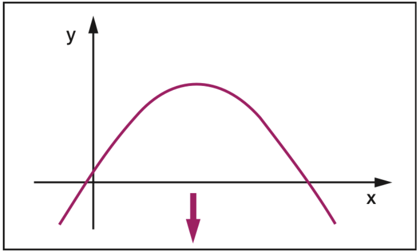
Propriedades

- O gráfico de toda função quadrática, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, é uma parábola.
- Se o gráfico possui concavidade para cima, isso significa que a função possui um valor mínimo. A função não tem um valor máximo.
- Já se o gráfico possui concavidade para baixo, isso significa que a função possui um valor máximo. A função não tem um valor mínimo.
- O ponto do gráfico no qual $(x, f(x))$ representa esse valor mínimo ou máximo é chamado de **vértice da parábola**.

Propriedades



(a) Concavidade para cima: mínimo



(b) Concavidade para baixo: máximo

Forma Canônica

Algumas observações sobre quadrados:

- Sabemos que $m^2 + 2mp + p^2 = (m+p)^2$.
- $m^2 > 0$, se $m \neq 0$.
  - O produto por um número positivo mantém o sinal. Logo, $m * m$ mantém o mesmo sinal do número m.
  - O produto de m por um número negativo, resulta em um simétrico. Como m é negativo, $m * m$ gera um número positivo, pois o simétrico de um número negativo é um número positivo.
- $m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$ (pois o produto de dois números reais é zero se, e somente se, um deles é zero).

Forma Canônica

a) Seja a função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$.
   - Como $x^2 = x * x \geq 0$, a função quadrática $f(x) = x^2$ possui um valor mínimo em $x = 0$.

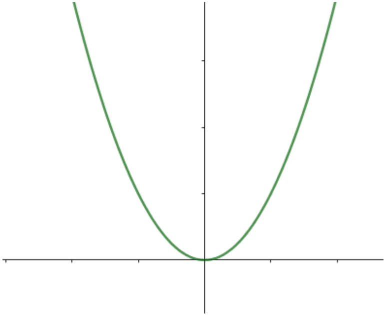


Figura 2: A parábola deve ter concavidade para cima.

Forma Canônica

b) Agora, considere a função quadrática $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = -x^2$.

- Como $x^2 = x * x \geq 0$, a função quadrática $f(x) = -x^2$ possui um valor máximo em $x = 0$:

$$x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (-1) * x^2 \leq (-1) * 0 \Leftrightarrow -x^2 \leq 0.$$

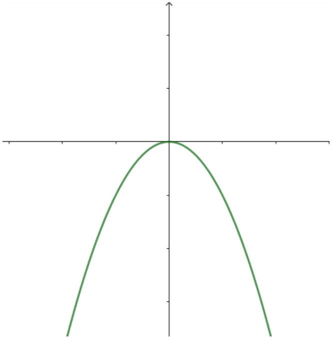


Figura 3: A parábola deve ter concavidade para baixo.

Forma Canônica

c) Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $h(x) = x^2 + 3$.

- Como $x^2 = x * x \geq 0$, a função quadrática $f(x) = x^2 + 3$ possui um valor mínimo $y = 3$:

$$\begin{aligned} x^2 \geq 0 &\Leftrightarrow x^2 + 3 \geq 0 + 3 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 3 \geq 3. \end{aligned}$$

- O valor mínimo ocorre quando $x^2 = 0$; ou seja, quando $x = 0$.

Forma Canônica

- O esboço do gráfico é o seguinte:

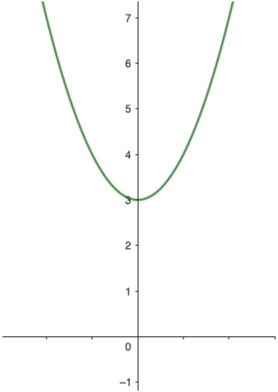


Figura 4: A parábola deve ter concavidade para cima.

Forma Canônica

d) Considere a função quadrática $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $i(x) = 3x^2 + 12x + 13$.
   - Diferente do que fizemos anteriormente, não conseguimos apontar, de forma direta, se esta função possui valor máximo ou mínimo, determinando a sua concavidade.
   - Entretanto, podemos fazer algumas manipulações algébricas, a fim de determinar a concavidade do gráfico desta função.

Completando Quadrado

Colocamos o coeficiente de x^2 em evidência:

$$3x^2 + 12x + 13 = 3 * (x^2 + 4x) + 13. \tag{1}$$

O monômio $x^2 + 4x$ pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} x^2 + 4x &= x^2 + 2 * 2 * x {\color{red}+ 2^2 - 2^2} && (2)\\ &= (x^2 + 2 * x * 2 + 2^2) - 4 && (3)\\ &= (x+2)^2 - 4. && (4) \end{aligned}$$

Completando Quadrado

Das equações (1) e (4), concluímos que

$$\begin{aligned}
3x^2 + 12x + 13 &= 3 * (x^2 + 4x) + 13 \\
&= 3 * [(x+2)^2 - 4] + 13 \\
&= 3 * (x+2)^2 - 12 + 13 \\
&= 3 * (x+2)^2 + 1.
\end{aligned}$$

Forma Canônica

- Para todo número real m, tem-se $m^2 \geq 0$. Assim,

$$\begin{aligned} (x+2)^2 \geq 0 &\Leftrightarrow 3*(x+2)^2 \geq 3*0 \\ &\Leftrightarrow 3*(x+2)^2+1 \geq 0+1 \\ &\Leftrightarrow 3*(x+2)^2+1 \geq 1 \end{aligned}$$

- Portanto, a parábola de $i(x) = 3*(x+2)^2+1$ possui um valor mínimo $y = 1$, que ocorre quando $3*(x+2)^2 = 0$ (ou seja, quando $(x+2)^2 = 0$):

$$\begin{aligned} (x+2)^2 = 0 &\Leftrightarrow (x+2)(x+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x+2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x+2-2 = 0-2 \\ &\Leftrightarrow x = -2. \end{aligned}$$

Forma Canônica

- Assim, um esboço da parábola de $i(x)$ é:

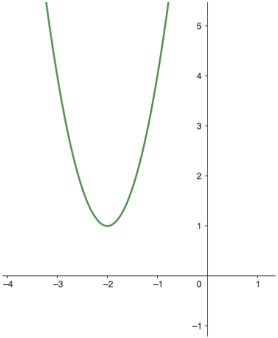


Figura 5: A parábola deve ter concavidade para cima.

Exercícios

Exercício 1

Dada a função $f(x) = -x^2 + 6$, *determine se a função quadrática possui um valor máximo ou um valor mínimo e esboce o seu gráfico.*

Exercício 2

Dada a função $f(x) = -3x^2 + 6x - 10$, *determine se a função quadrática possui um valor máximo ou um valor mínimo e esboce o seu gráfico.*

Proposição 1

Teorema 1

Toda função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ *pode ser escrita na forma canônica*

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Demonstração Teorema 1

Com efeito, como $a \neq 0$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{2}{2} * \frac{b}{a}x\right) + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{2}{2} * \frac{b}{a}x\right) + c \\
&= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c.
\end{aligned}$$

Demonstração Teorema 1

Assim,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c \\
&= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - a * \frac{b^2}{4a^2} \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac}{4a} - \frac{b^2}{4a} \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.
\end{aligned}
$$

Corolário do Teorema 1

Corolário 1

A partir da forma canônica dada no Teorema 1, podemos afirmar que:

i) *Se $a > 0$, o gráfico de f possui concavidade voltada para cima.*

ii) *Se $a < 0$, o gráfico de f possui concavidade voltada para cima.*

iii) *O vértice da parábola é o ponto* $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

Demonstração

Temos que $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$. Assim:

i) Se $a > 0$, então

$$a * \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq a * 0 \Rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \geq 0 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$\Rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \geq -\frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

e a função quadrática possui um valor mínimo. A concavidade do seu gráfico é voltada para cima.

Demonstração

ii) Se $a < 0$, então

$$a * \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq a * 0 \Rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \leq 0 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$\Rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \leq -\frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

e a função quadrática possui um valor máximo. A concavidade do seu gráfico é voltada para baixo.

Demonstração

iii) Os valores máximo ou mínimo são atingidos quando $a * \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$. Isso ocorre quando $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$. Ou seja, quando

$$\begin{aligned} x + \frac{b}{2a} = 0 &\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} - \frac{b}{2a} = 0 - \frac{b}{2a} \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}. \end{aligned}$$

Por sua vez,

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

de onde segue que o vértice é o ponto $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$.

Os Zeros de uma Função Quadrática

A Raiz Quadrada

- Além das potências positivas de um número real (a^2, a^3, a^{100}, *etc*.), e das negativas (a^{-1}, a^{-34},etc., quando $a \neq 0$), podemos definir potências racionais.
- Porém, a depender do racional usado, nem todo número real gera um novo número real através de tal potência.
- Veremos mais na frente que o problema está nas potências com denominador par, a qual a raiz quadrada faz parte.

A Raiz Quadrada

- A raiz quadrada de um número a nada mais é do que elevar tal número à potência $\frac{1}{2}$:

$$\sqrt{a} = a^{1/2}.$$

Usando propriedades de potência de um número real, temos que

$$0 \leq \left(a^{1/2}\right)^2 = a^{1/2} * a^{1/2} = a^{1/2+1/2} = a.$$

Ou seja, para que esteja vem definida, devemos ter $a \geq 0$ ao calcularmos a raiz quadrada.

A Raiz Quadrada

- Se queremos que $\sqrt{a}$ seja um número real, devemos ter $a \geq 0$.
- Se $a < 0$, o resultado da operação $\sqrt{a}$ é um novo tipo de número: um **número imaginário**.
- Como o interesse deste curso são as funções que geram números reais, a raiz quadrada deve ser aplicada em reais não-negativos (≥ 0).

Zeros da Função Quadrática

Lembrem-se que o zero de uma função é o elemento x do domínio tal que $f(x) = 0$.

Exercício 3

Seja a forma canônica de uma função quadrática é dada por

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

a) *Qual a relação entre os coeficientes a, b e c garante a existência de soluções reais da equação $f(x) = 0$?*
b) *Quais as fórmulas para os zeros da função quadrática dada?*

Esboço do Gráfico de uma Função Quadrática

- Calcule o vértice da parábola.
- Verifique a concavidade.
- Calcule os zeros da função e marque os pontos $(x, 0)$ no plano cartesiano, onde o gráfico corta o eixo x.
- Se não houver zeros, o gráfico está todo acima $(a > 0)$ do eixo x ou todo abaixo $(a < 0)$ deste eixo.
- Verifique onde o gráfico intersecta o eixo y: $(0, f(0))$.

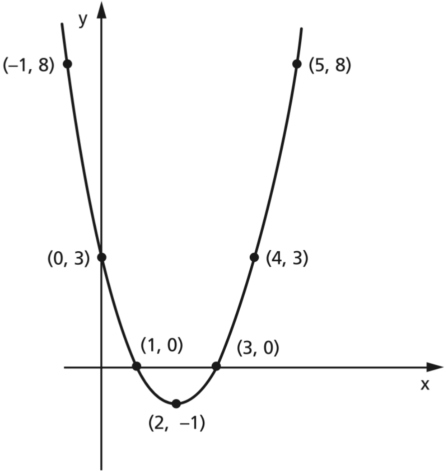
Exemplo

No gráfico da função

$$f(x) = x^2 - 4x + 3,$$

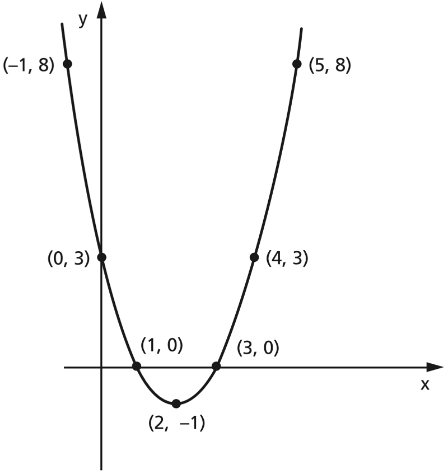
temos:

- $f(x) = (x-2)^2 - 1.$
- O vértice é o ponto $(2, -1)$.
- Como $a = 1 > 0$, a concavidade é voltada para cima.



Exemplo

- Há duas raízes reais: $x = 1$ e $x = 3$.
- Logo, o gráfico corta o eixo x em $(1, 0)$ e $(3, 0)$.
- O gráfico corta o eixo y em $(0, 3)$.



Exercícios

Exercícios

Exercício 4

Determine a forma canônica, os zeros e o vértice do gráfico das funções abaixo:

a) $f(x) = -x^2 + 7x - 12$

b) $f(x) = x^2 - 2x + 2$

c) $f(x) = x^2 - 2x - 1$

Exercícios

Exercício 5

Uma empresa produz e vende determinado tipo de produto. A quantidade que ela consegue vender varia conforme o preço, da seguinte forma: a um preço y ela consegue vender x unidades do produto, de acordo com a equação $y = 50 - 2x$. Sabendo que a receita (quantidade vendida vezes o preço de venda) obtida foi de R\$ $1250,00$, qual foi a quantidade vendida?

Exercícios

Exercício 6

Determine os valores de m para que a função quadrática $f(x) = (m+2)x^2 + (3-2m)x + (m-1)$ *tenha raízes reais.*