Aula 09: Técnicas de Demonstração

Karla Lima

Álgebra Elementar: 31/01/24

FACET/UFGD

Indução Matemática

Funções Proposicionais

Quantificadores

Indução Matemática

Ilustração do Método [1]

- A prova por indução se aplica a determinadas situações.

Ilustração do Método [1]

- A prova por indução se aplica a determinadas situações.
- Imagine que você está subindo em uma escada sem fim. Como você pode saber se será capaz de alcançar um degrau arbitrariamente alto?

Ilustração do Método [1]

- A prova por indução se aplica a determinadas situações.
- Imagine que você está subindo em uma escada sem fim. Como você pode saber se será capaz de alcançar um degrau arbitrariamente alto?
- Suponha que você faça as seguintes afirmações sobre as suas habilidades de subir escadas:
  - Você pode alcançar o primeiro degrau.
  - Se você alcançar um degrau, você pode sempre passar ao degrau seguinte. (Note que esta asserção é uma implicação.)

Ilustração do Método

1. Tanto a sentença 1 como a implicação na sentença 2 são verdadeiras.

Ilustração do Método

1. Tanto a sentença 1 como a implicação na sentença 2 são verdadeiras.
2. Pela sentença 1 você pode chegar ao primeiro degrau e pela sentença 2 você pode chegar ao segundo.

Ilustração do Método

1. Tanto a sentença 1 como a implicação na sentença 2 são verdadeiras.
2. Pela sentença 1 você pode chegar ao primeiro degrau e pela sentença 2 você pode chegar ao segundo.
3. Novamente pela sentença 2, você pode chegar ao terceiro degrau;

Ilustração do Método

1. Tanto a sentença 1 como a implicação na sentença 2 são verdadeiras.
2. Pela sentença 1 você pode chegar ao primeiro degrau e pela sentença 2 você pode chegar ao segundo.
3. Novamente pela sentença 2, você pode chegar ao terceiro degrau;
4. Novamente pela sentença 2, você pode chegar ao quarto degrau;

Ilustração do Método

1. Tanto a sentença 1 como a implicação na sentença 2 são verdadeiras.
2. Pela sentença 1 você pode chegar ao primeiro degrau e pela sentença 2 você pode chegar ao segundo.
3. Novamente pela sentença 2, você pode chegar ao terceiro degrau;
4. Novamente pela sentença 2, você pode chegar ao quarto degrau;
5. Sucessivamente, você vai alcançando cada um dos degraus da escada, um de cada vez, subindo tão alto quanto você queira.

Ilustração do Método

- Suponha que os degraus da escada são numerados com os números inteiros positivos: 1,2,3,...
- Considere uma propriedade específica que um número pode ter.
- Ao invés de "alcançarmos um degrau arbitrário" podemos mencionar que um inteiro positivo arbitrário tem essa propriedade.
- Usaremos a notação simplificada P(n) para denotar que o inteiro positivo n tem a propriedade P.

Ilustração do Método

- Suponha que os degraus da escada são numerados com os números inteiros positivos: 1,2,3,...
- Considere uma propriedade específica que um número pode ter.
- Ao invés de "alcançarmos um degrau arbitrário" podemos mencionar que um inteiro positivo arbitrário tem essa propriedade.
- Usaremos a notação simplificada P(n) para denotar que o inteiro positivo n tem a propriedade P.

Como podemos usar a técnica de subir escadas para provar que, para todos inteiros positivos n, tem-se $P(n)$?

O Princípio de Indução Matemática

Precisamos demonstrar duas afirmações:

1. $P(1)$ (A propriedade vale para $n = 1$.)
2. Para qualquer inteiro positivo k,

$$P(k) \rightarrow P(k+1)$$

(Se um número tem a propriedade P, então seu sucessor também a tem.)

O Princípio de Indução Matemática

Definição 1

Dada uma propriedade P de números inteiros positivos, se

1. $P(1)$ *é verdadeira;*
2. *Para qualquer inteiro positivo k, tem-se*

$$P(k) \text{ verdadeira } \rightarrow P(k+1) \text{ verdadeira },$$

então $P(n)$ é verdadeira para todo número inteiro positivo n.

O Princípio de Indução Matemática

Definição 1

Dada uma propriedade P de números inteiros positivos, se

1. $P(1)$ *é verdadeira;*
2. *Para qualquer inteiro positivo* k, *tem-se*

$$P(k) \text{ verdadeira } \rightarrow P(k+1) \text{ verdadeira },$$

então $P(n)$ *é verdadeira para todo número inteiro positivo* n.

Obs: Sempre que desejamos demonstrar que alguma propriedade é válida para todo inteiro positivo n, uma tentativa é o uso da indução matemática como técnica de demonstração.

Exemplos

Exemplo 1

Prove que a equação

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

Exemplos

Exemplo 2

Prove que a equação

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

é verdadeira para qualquer inteiro $n \geq 1$.

Exemplos

Exemplo 3

Demonstre que, para qualquer inteiro positivo n, tem-se $2^n > n$.

Funções Proposicionais

Função Proposicional

Decida se as frases abaixo são verdadeiras ou falsas:

a) Ele é um campeão de Fórmula 1.

b) $x^2 - 2x + 1 = 0$.

c) Ele e ela são alunos do Curso de Matemática.

d) $x + y = 10$.

Função Proposicional

Decida se as frases abaixo são verdadeiras ou falsas:

a) Ele é um campeão de Fórmula 1.

b) $x^2 - 2x + 1 = 0$.

c) Ele e ela são alunos do Curso de Matemática.

d) $x + y = 10$.

Existem frases declarativas que não são possíveis de serem classificadas como Verdadeiras ou Falsas, como as acima.

Função Proposicional

- Observe que ' Ele', 'Ela', 'x', e 'y' são variáveis que podem ser substituídas por um elemento arbitrário, tornando a frase verdadeira ou falsa.
- No item a), se o 'Ele' for trocado por 'Ayrton Senna', a frase é verdadeira.
- No caso de ser trocado por 'Rubinho Barrichello', a frase é falsa.
- No item b), se trocarmos 'x' por '1', a frase é verdadeira.
- Se trocarmos por '0', é falsa.

Função Proposicional

- Sendo assim, estas frases tornam-se proposições somente depois de atribuirmos valores as suas variáveis.
- Estas frases declarativas são denominadas de **Funções Proposicionais** ou **Proposições Abertas**.

Função Proposicional [1]

O valor-verdade da função proposicional

$$\text{“}x > 0\text{”}$$

depende do domínio dos objetos sob os quais estamos "interpretando" esta expressão.

Neste caso, **Px** é verdadeira se $x \in \Omega = \mathbb{R}_{+}^{*}$.

Função Proposicional [1]

O valor-verdade da função proposicional

$$``x > 0"$$

depende do domínio dos objetos sob os quais estamos "interpretando" esta expressão.

Neste caso, **Px** é verdadeira se $x \in \Omega = \mathbb{R}_+^*$.

Neste caso, **Px** é falsa se $x \in \Omega = \mathbb{R}$.

Função Proposicional [1]

O valor-verdade da função proposicional

$$\text{“}x > 0\text{”}$$

depende do domínio dos objetos sob os quais estamos "interpretando" esta expressão.

Neste caso, **Px** é verdadeira se $x \in \Omega = \mathbb{R}_+^*$.

Neste caso, **Px** é falsa se $x \in \Omega = \mathbb{R}$.

No caso em que x é um vetor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega = \mathbb{R}^n$, tal afirmação não faz sentido e é falsa.

Função Proposicional $\times$ Proposição

Nas funções proposicionais, os termos são variáveis, enquanto nas proposições, são constantes.

Exemplos

Exemplo 4

Em cada um dos itens abaixo, temos uma proposição ou uma função proposicional?

a) $x - 7 > 3$;

b) $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Quantificadores

Quantificadores

Na matemática é comum a utilização do quantificador existencial: ' existe', do quantificador universal: 'para todo' , 'para qualquer' ou 'qualquer que seja' para transformar uma proposição aberta em uma proposição. Por exemplo:

Quantificadores

Na matemática é comum a utilização do quantificador existencial: ' existe', do quantificador universal: 'para todo' , 'para qualquer' ou 'qualquer que seja' para transformar uma proposição aberta em uma proposição. Por exemplo:

a) Existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $x + 1 = 0$.
b) Para todo $x \in \mathbb{N}$ temos que $x + 1 \neq 0$.
c) Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 - 1 = 0$.
d) Para qualquer $x \in \mathbb{R}$ temos que $x^2 + 1 \neq 0$.

Definição

Definição 2

Quantificadores *são operadores lógicos que restringem as funções proposicionais, de forma que elas se refiram a todo o conjunto* Ω *ou a uma parte dele.*

Tipos de Quantificadores

Há dois quantificadores:

1. $\forall$: **quantificador universal** (para todo, qualquer que seja, para cada, etc.)
2. $\exists$: **quantificador existêncial** (existe, há, alguns, para pelo menos um, etc.)

Classificação

1. Existe $x \in A$ tal que $p(x)$.

Classificação

1. Existe $x \in A$ tal que $p(x)$.
    - A proposição será verdadeira se existe pelo menos um elemento x do conjunto A que satisfaz a condição $p(x)$.

Classificação

1. Existe $x \in A$ tal que $p(x)$.
    - A proposição será verdadeira se existe pelo menos um elemento x do conjunto A que satisfaz a condição $p(x)$.
    - A proposição será falsa se, para todo $x \in A$ a condição $p(x)$ não é satisfeita.

Classificação

2. Para todo $x \in A$ temos que $p(x)$.

Classificação

2. Para todo $x \in A$ temos que $p(x)$.
    - A proposição será verdadeira se $p(x)$ é satisfeita para todo $x \in A$.

Classificação

2. Para todo $x \in A$ temos que $p(x)$.
    - A proposição será verdadeira se $p(x)$ é satisfeita para todo $x \in A$.
    - A proposição será falsa se existe pelo menos um $x \in A$ tal que a condição $p(x)$ não é satisfeita.

Exemplo 5

Classifique as proposições abaixo em V ou F.

a) *Para todo* $x \in \mathbb{R}$ *temos que* $x^2 > 0$.

b) *Existe* $x \in \mathbb{N}$ *tal que* $x - = 0$.

c) *Para todo* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $x^2 + 1 \neq 0$.

Referências

J.L. Gersting.
***Fundamentos matemáticos para a ciência da computação: um tratamento moderno de matemática discreta*.**
Livros Técnicos e Científicos, 2004.