GEOMETRIA PLANA

Aula 04

Triângulos

Karla Lima

Sumário

1. Congruência LLL

2. O Teorema do Ângulo Externo

3. Congruência LAA

4. Caso Especial: Triângulos Retângulos

5. Problemas

Congruência LLL

3° caso: LLL

Teorema 1

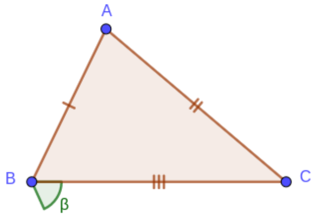
Se dois triângulos têm três lados respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.

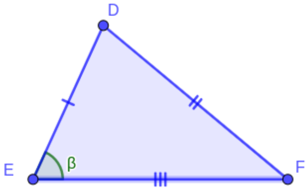
Figura 1: $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

Teorema 1: Demonstração

Hipótese: $\begin{cases} AB = DE \\ AC = DF \\ BC = EF \end{cases}$ Tese: $\triangle ABC = \triangle DEF$

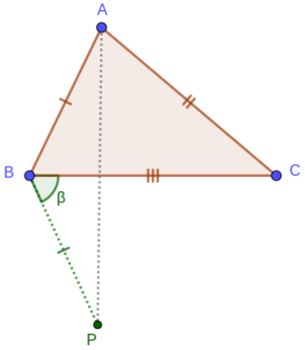
- Na semirreta $\overrightarrow{BC}$, e no semiplano que não contém o ponto A, tracemos um ângulo congruente a $\hat{E}$, com vértice em B.

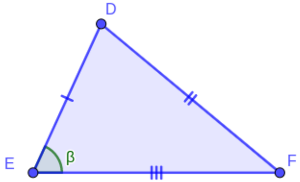




Teorema 1: Demonstração

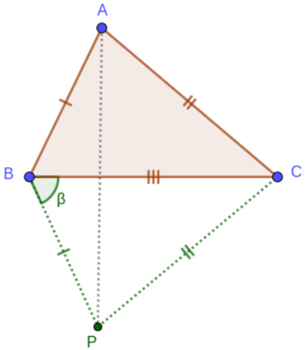
- No outro lado desse ângulo, marquemos um ponto P de modo que $BP = DE$.

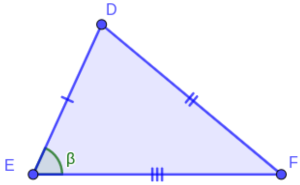




Teorema 1: Demonstração

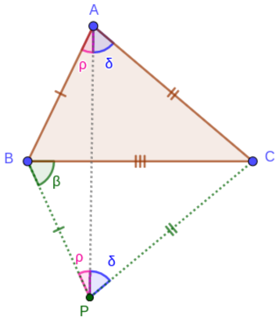
- Ligando P a C, obtemos o triângulo PBC congruente ao triângulo DEF (LAL: $BC = EF$, $P\hat{B}C = D\hat{E}F$ e $BP = ED$). Com isso, $PC = DF$.

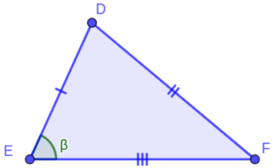




Teorema 1: Demonstração

- Traçando o segmento $\overline{AP}$, os triângulos PAB e PCA são isósceles.
- Com isso, $B\hat{A}P = B\hat{P}A$ e $P\hat{A}C = A\hat{P}C$.
- $\hat{D} = \hat{P} = B\hat{P}A + P\hat{A}C = B\hat{A}P + P\hat{A}C = \hat{A}$





Teorema 1: Demonstração

Assim, temos

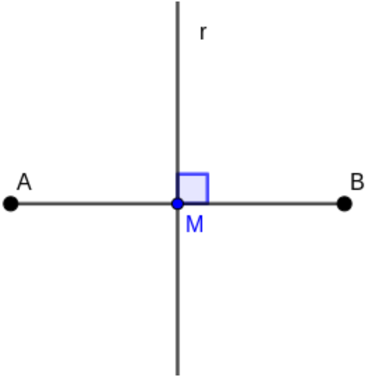
- $AB = ED$ (hipótese);
- $\hat{D} = \hat{A}$ (demonstrado acima);
- $AC = DE$ (hipótese).

Usando a congruência LAL, concluímos que $\triangle DEF = \triangle ABC$.

Mediatriz

Definição 1

*Chama-se **mediatriz** de um segmento a reta perpendicular ao mesmo em seu ponto médio.*



r é a mediatriz de $\overline{AB}$

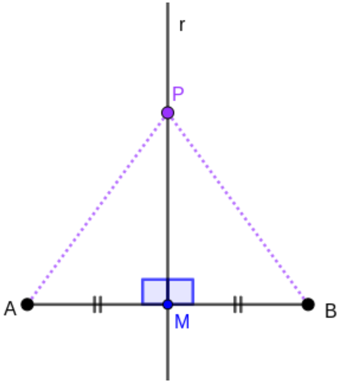
$$AM = MB$$

$$r \perp \overline{AB}$$

Teorema Mediatriz

Teorema 2

Todo ponto da mediatriz de um segmento é equidistante dos extremos desse segmento.

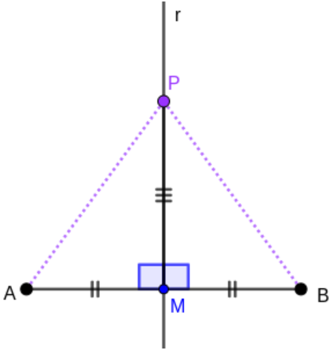


Hipótese: $\begin{cases} AM = MB \\ \overrightarrow{AB} \perp r \end{cases}$

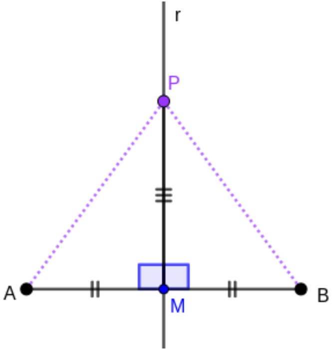
Tese: $PA = PB$

Teorema 2: Demonstração

- Seja M o ponto médio de $\overline{AB}$.
- Seja P um ponto qualquer da mediatriz de $\overline{AB}$ diferente de M.
- Trace os segmentos PA e PB.



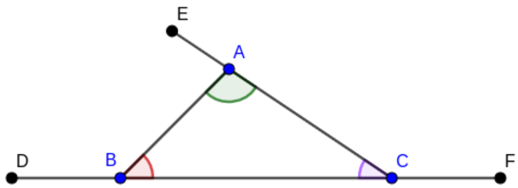
Teorema 2: Demonstração



- Concluímos que $\triangle PMA = \triangle PMB$ (LAL: $\overline{PM}$ lado comum, $P\hat{M}A = 90^\circ = P\hat{M}B$ e $AM = MB$).
- Portanto, $PA = PB$ (lados opostos a ângulos congruentes).

Ângulos Não-Adjacentes

No triângulo abaixo, os ângulos internos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são ditos **não-adjacentes** ao ângulo externo $A\hat{C}F$.

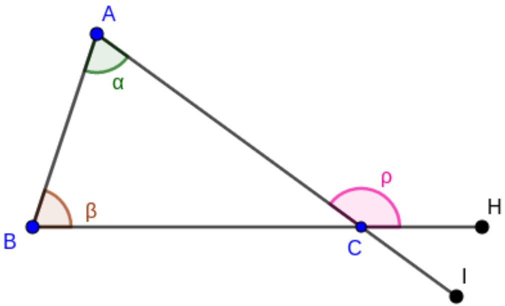


O Teorema do Ângulo Externo

Teorema do Ângulo Externo

Teorema 3

Todo ângulo externo de um triângulo é maior que cada um dos ângulos internos que não lhes são adjacentes.

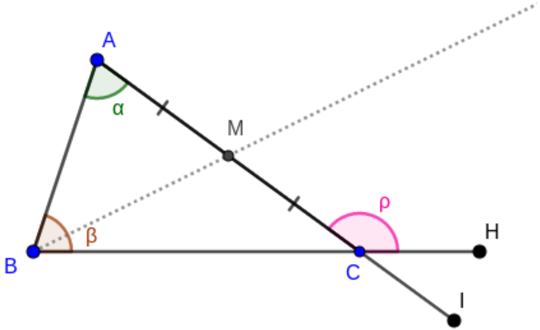


Teorema 3: Demonstração

- **Hipótese:** $A\hat{C}H$ é um ângulo externo do $\triangle ABC$.
- **Tese:**
  1. $A\hat{C}H > A\hat{B}C$.
  2. $A\hat{C}H > B\hat{A}C$.

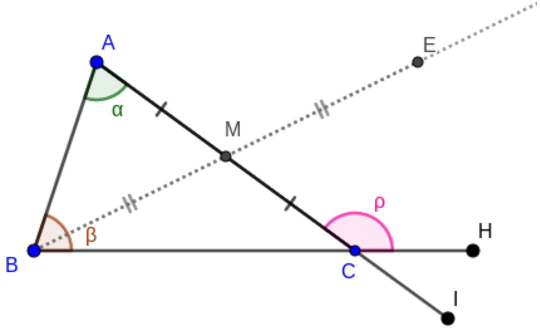
Teorema 3: Demonstração

- Seja M o ponto médio do lado $\overline{AC}$.



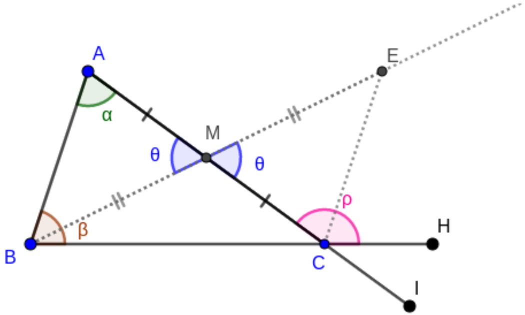
Teorema 3: Demonstração

- Na semirreta $\overrightarrow{BM}$, marquemos um ponto E tal que $BM = ME$.



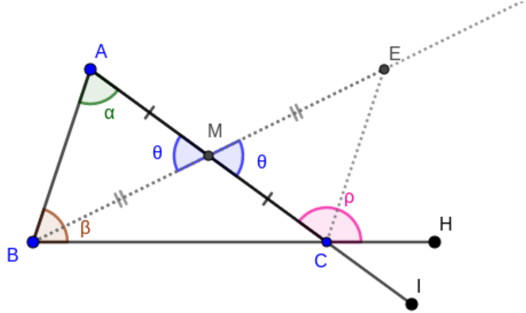
Teorema 3: Demonstração

- Desta forma, $\triangle AMB = \triangle CME$ (LAL: $AM = MC$, $A\hat{M}B = C\hat{M}E$ - ângulos opostos pelo vértice - e $BM = ME$).



Teorema 3: Demonstração

- Consequentemente, $\hat{A} = M\hat{C}E$ (ângulos opostos a lados congruentes).



- Como $A\hat{C}H = A\hat{C}E + E\hat{C}H = \hat{A} + E\hat{C}H$, segue-se que $A\hat{C}H > \hat{A}$.

Teorema 3: Demonstração

Exercício 1

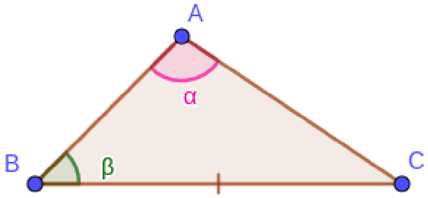
Repita este argumento, em outra figura conveniente, para provar que $A\hat{C}H > A\hat{B}C$.

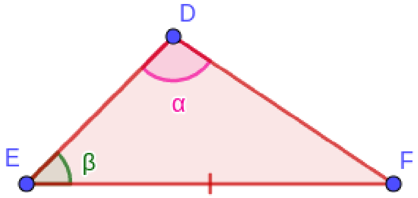
Congruência LAA

4° caso: LAA

Teorema 4

Se dois triângulos têm um lado congruente, o ângulo oposto e um ângulo adjacente a este lado respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.





Teorema 4: Demonstração

- **Hipótese:**
  - $BC = EF$
  - $\hat{A} = \hat{D}$
  - $\hat{B} = \hat{E}$
- **Tese:** $\triangle ABC = \triangle DEF$.

Comparando-se as medidas dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ podemos afirmar que:

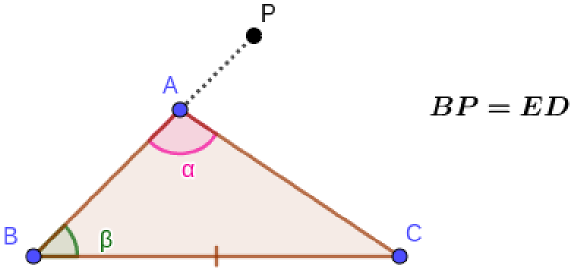
i) ou $AB < DE$;

ii) ou $DE < AB$;

iii) ou $AB = DE$.

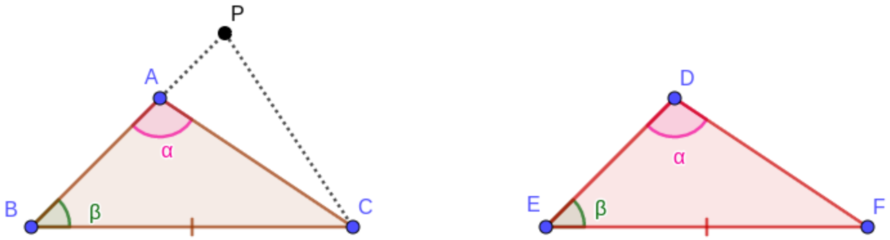
Teorema 4: Demonstração

Suponha, por absurdo, que $AB < DE$. Seja P um ponto da semirreta $\overrightarrow{BA}$, tal que $BP = ED$:



Teorema 4: Demonstração

O triângulo *PBC* construído será congruente ao triângulo *DEF*:

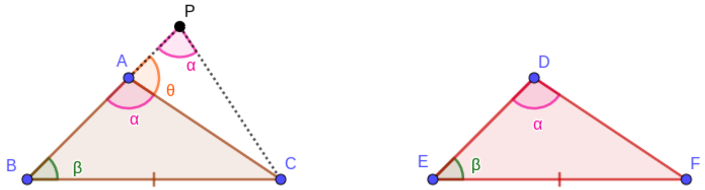


$\triangle PBC = \triangle DEF$ (LAL)

Teorema 4: Demonstração

Portanto,

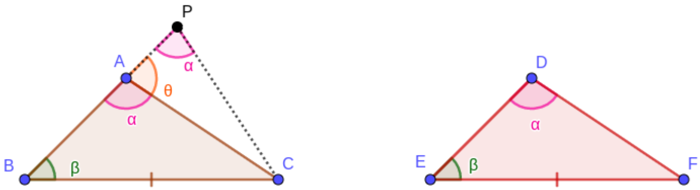
- $\hat{P} = \hat{D}$ (ângulos opostos a lados congruentes)
- $\hat{A} = \hat{D}$ (hipótese)



Portanto,

$$\hat{A} = \hat{P}.$$

Teorema 4: Demonstração



Por outro lado, o ângulo $\hat{A} = B\hat{A}C$ é um ângulo externo do ângulo $C\hat{A}P$. Pelo Teorema do Ângulo Externo (TAE), $\hat{A}$ é maior que os ângulos internos de $\triangle APC$, não adjacentes a ele. Portanto, teríamos

$$\hat{A} > A\hat{P}C = \hat{P} \quad \text{e} \quad \hat{A} = \hat{P},$$

um absurdo.

Teorema 4: Demonstração

De maneira análoga, demonstra-se que $DE < AB$ é falsa.

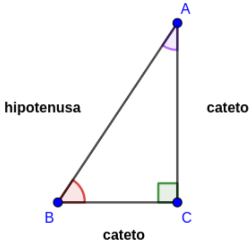
Do exposto, concluímos que $AB = DE$ e, pelo Postulado (LAL), os triângulos ABC e DEF são congruentes.

Caso Especial: Triângulos Retângulos

Triângulo Retângulo

Definição 2

Um triângulo que possui um ângulo reto é denominado ***triângulo retângulo****.*

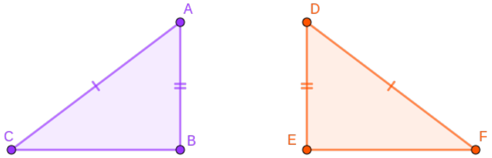


- O lado oposto ao ângulo reto é chamado **hipotenusa**.
- Os outros lados são denominados **catetos** do triângulo.

Caso Especial: Triângulos Retângulos

Teorema 5

Se dois triângulos retângulos possuem a hipotenusa e um cateto respectivamente congruentes então os triângulos são congruentes.

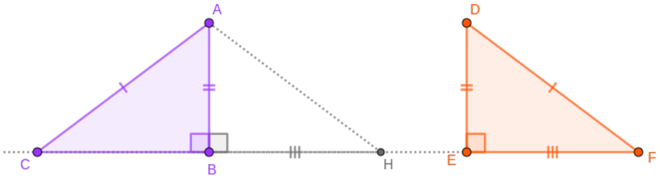


- **Hipótese:**
  - $AC = DF$
  - $AC = DE$
  - $\hat{B} = \hat{E} = 90^\circ$
- **Tese:** $\triangle ABC = \triangle DEF$.

Teorema 5 Demonstração

Sobre a semirreta $\overrightarrow{CB}$, tomemos um ponto H de modo a termos $BH = ED$. Assim,

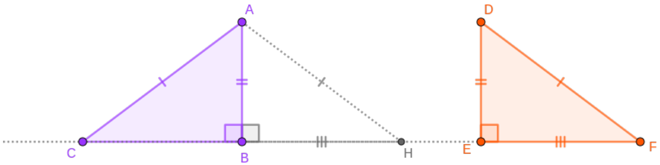
- $AB = DE$ (hipótese) **L**
- $A\hat{B}H = 90^\circ = \hat{E}$ ($A\hat{B}H$ é externo ao ângulo reto $\hat{B}$) **A**
- $BH = EF$ (construção) **L**



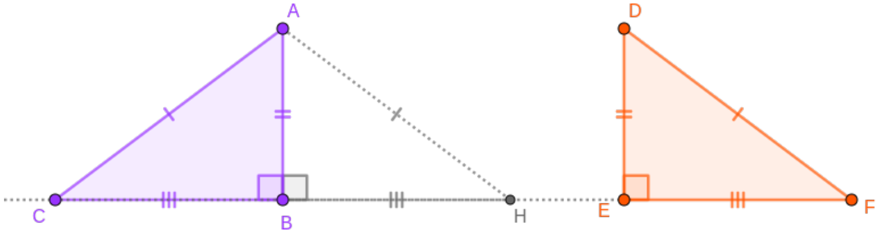
Teorema 5 Demonstração

Portanto, pelo caso (LAL), os triângulos *ABH* e *DEF* são congruentes. Logo,

- $AH = DF$
  (hipotenusas congruentes).
- $AC = DF \Rightarrow AC = AH$.
- $\triangle ACH$ é isósceles.



Teorema 5 Demonstração



Como $\triangle ACH$ é isósceles, a altura $\overline{AB}$ é também a mediana do segmento $\overline{CH}$, de onde concluímos que

$$CB = BH = EF,$$

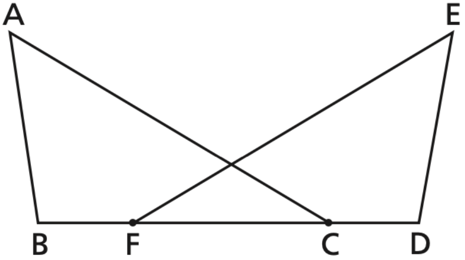
e, portanto, os triângulos ABC e DEF são congruentes (LLL).

Problemas

Exercício 2

Exercício 2

Na figura abaixo, sendo os segmentos $\overline{BF}$ *e* $\overline{CD}$ *congruentes, os ângulos* $A\hat{B}C$ *e* $F\hat{D}E$ *congruentes e os ângulos* $B\hat{A}C$ *e* $D\hat{E}F$ *também congruentes, prove que os segmentos* $\overline{AC}$ *e* $\overline{EF}$ *são congruentes.*



Exercício 3

Exercício 3

Mostre que a soma das medidas de dois ângulos quaisquer de um triângulo é menor do que 180°.

Exercício 4

Exercício 4

Dado um segmento AB, construímos os ângulos $C\hat{A}B \equiv D\hat{B}A$*, um em cada semiplano determinado pela reta que* $\overline{AB}$*, com* $AC = DB$*. Unindo os pontos C e D obtemos o ponto M no segmento AB. Mostre que M é o ponto médio de AB.*