

Técnicas de Integração

Integrais Impróprias

Karla Lima

Sumário



1. Tipo I: Intervalos Infinitos
2. Tipo 2: Integrandos Descontínuos

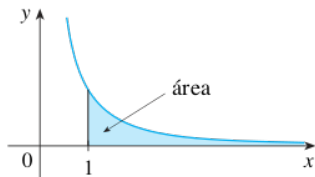
Tipo I: Intervalos Infinitos

Tipo 1



Já vimos que uma integral pode representar a área abaixo do gráfico de uma função não negativa, em um dado intervalo.

- Considerando a região infinita S que está sob a curva $y = 1/x^2$ e acima do eixo x , no intervalo $1 \leq x$, poderíamos pensar que sua área é infinita.

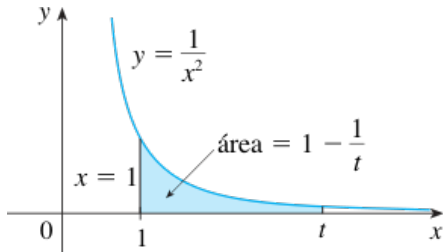


Tipo 1



Fixando $t > 1$, podemos calcular a área sob a curva $y = 1/x^2$ e acima do eixo x , no intervalo $[1, t]$ dado por:

$$A(t) = 1 - \frac{1}{t}.$$

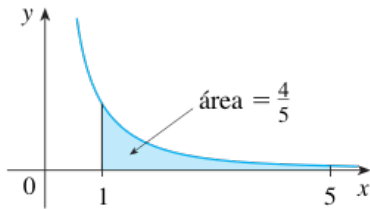
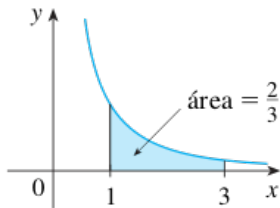
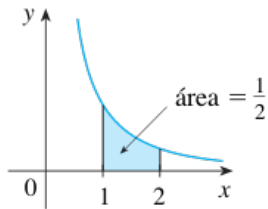


Tipo 1



Abaixo, vemos os valores da área para $t = 2$, $t = 3$ e $t = 5$, ao substituírmos esses valores em

$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^t = 1 - \frac{1}{t}.$$



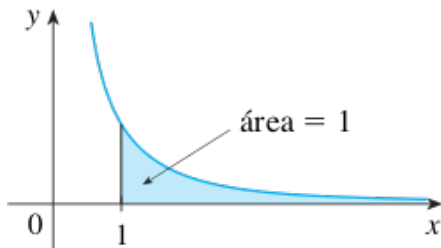
Tipo 1



Para a área desejada de S , devemos ter $t \rightarrow \infty$, pois o intervalo desejado é $[1, \infty)$ (intervalo infinito):

► Área de S :

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{t} \right) \\ &= 1.\end{aligned}$$



► A área da região infinita S é 1.

Definição



Definição 1

Definimos as integrais em intervalos infinitos $[(a, \infty), (-\infty, b), (-\infty, \infty)]$ a seguir:

a) Se $\int_a^t f(x) dx$ existe para cada número $t \geq a$, então

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx,$$

desde que o limite exista (como um número finito).

Definição



b) Se $\int_t^b f(x) dx$ existe para cada número $t \leq b$, então

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx,$$

desde que o limite exista (como um número finito).

Definição



As integrais impróprias $\int_a^\infty f(x) dx$ e $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ são ditas **convergentes** se os limites correspondentes existem e **divergentes** se os limites não existem.

c) Se ambas $\int_a^\infty f(x) dx$ e $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ são convergentes, então definimos

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^\infty f(x) dx,$$

onde a é qualquer número real.

Exemplo



Exemplo 1

Determine se a integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ é convergente ou divergente.

Solução:

1. Verificamos se é possível calcular a integral $\int_1^t \frac{1}{x} dx$ para todo $t > 1$:

$$\begin{aligned}\int_1^t \frac{1}{x} dx &= \ln |x| \Big|_1^t \\ &= \ln |t| - \ln |1| \\ &= \ln |t|.\end{aligned}$$

Como $0 < 1 < t$, $\ln |t|$ existe para todo $t > 1$.

Exemplo



2. Verificamos se existe o limite, quando $t \rightarrow \infty$:

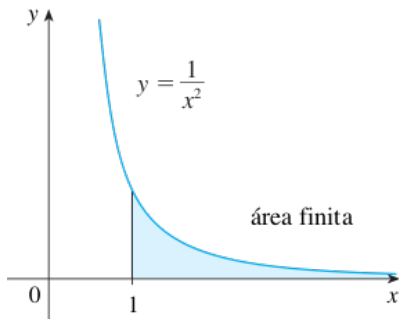
$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \ln |t| \\ &= \infty.\end{aligned}$$

Portanto, o limite não existe e a integral imprópria $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ é divergente.

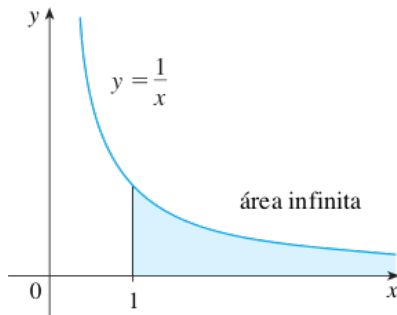
Exemplo



Embora as curvas $\frac{1}{x^2}$ e $\frac{1}{x}$ sejam bem semelhantes, a área sob seus gráficos, e acima do eixo x , no intervalo $[1, \infty)$ são distintas: uma é um número e a outra é infinita.



(a) Integral Imprópria Convergente



(b) Integral Imprópria Divergente

Exercícios [1, 2]



Exercício 1

Calcule $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$.

R: -1

Exercício 2

Calcule $\int_0^{\infty} (1-x)e^{-x} dx$.

R: 0

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the upper-left portion, while a light gray shape occupies the lower-left portion. The rest of the slide is white. The text is centered in the white area.

Tipo 2: Integrando Descontínuos

Tipo 2

Já sabemos como integrar funções com descontinuidades do tipo 'salto' e 'buraco'. Agora, vamos tratar das descontinuidades infinitas, aquelas em que a função 'explode':

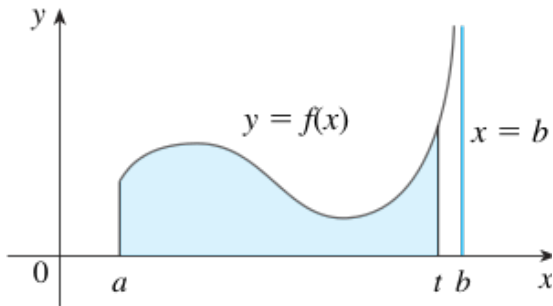


Figura 2: A região é infinita em uma direção vertical

Definição



Definição 2

Definimos a seguir como calcular integrais de funções que possuem assíntotas verticais nos extremos de integração:

a) Se f é contínua em $[a, b)$ e descontínua em b , então

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

se esse limite existir.

Definição



A integral imprópria $\int_a^b f(x) dx$ é chamada **convergente** se o limite correspondente existir e **divergente** se o limite não existir.

- c) Se f é descontínua em c , onde $a < c < b$, e ambos $\int_a^c f(x) dx$ e $\int_c^b f(x) dx$ forem convergentes, então definimos

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

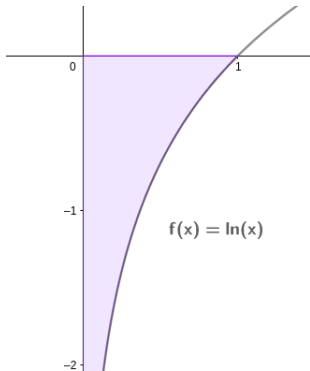
se esse limite existir.

Exemplo



Exemplo 2

Calcule $\int_0^1 \ln x \, dx$.



Exemplo



Solução: Como podemos ver na figura acima, a função $\ln(x)$ possui uma assíntota vertical em $x = 0$ e é contínua no intervalo $(0, 1]$.

1. Calculamos a integral $\int_t^1 \ln(x) dx$:

$$\begin{aligned}\int_t^1 \ln(x) dx &= x \ln(x) - x \Big|_t^1 \\ &= 1 \ln(1) - 1 - (t \ln(t) - t) \\ &= -1 - t \ln(t) + t.\end{aligned}$$

Exemplo



2. Calculamos o limite para $t \rightarrow 0^+$. Como

► $\lim_{t \rightarrow 0^+} -1 + t = -1 + 0 = -1;$

► $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(t)}{1/t} \stackrel{1}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1/t}{-1/t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} (-t) = 0,$

concluimos que:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \ln(x) dx &= \lim_{t \rightarrow 0^+} (-1 - t \ln(t) + t) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} (-1 + t) - \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln(t) \\ &= -1 - 0 = -1. \end{aligned}$$

¹Usando a regra de L'Hôspital

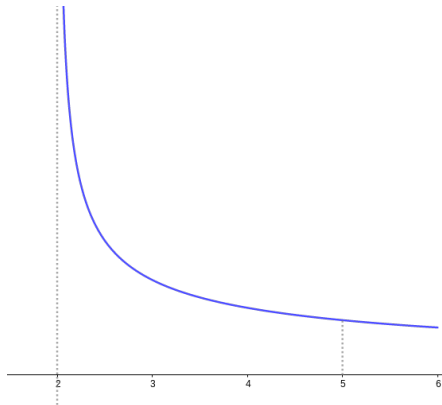
Exercícios



Exercício 3

Calcule $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ se for possível.

Exercícios



R: $2\sqrt{3}$.

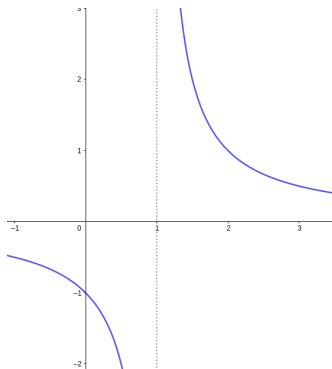
Exercícios



Exercício 4

Calcule $\int_0^3 \frac{1}{x-1}$ se for possível.

Exercícios



R: A integral diverge.

Referencias I



J. Stewart.

Calculo: volume 1.

Pioneira Thomson Learning, 2006.



H. Anton, I. Bivens, and S. Davis.

Cálculo - Volume I - 10.ed.

Bookman Editora, 2014.