CAPÍTULO XI
Equações

I. Equações fundamentais

150. Sejam f(x) e g(x) duas funções trigonométricas da variável real *x* e sejam D_1 e D_2 os seus respectivos domínios. Resolver a equação trigonométrica $f(x) = g(x)$ significa determinar o conjunto S, denominado **conjunto solução** ou **conjunto verdade**, dos números *r* para os quais $f(r) = g(r)$ é uma sentença verdadeira. Observemos que uma condição necessária para que certo *r* seja uma solução da equação dada é que $r \in D_1$ e $r \in D_2$.

151. Quase todas as equações trigonométricas reduzem-se a uma das três equações seguintes:

1ª) $\text{sen}\ \alpha = \text{sen}\ \beta$

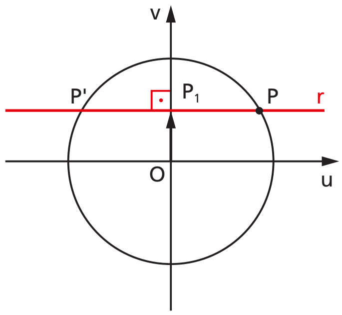
2ª) $\cos \alpha = \cos \beta$

3ª) $\text{tg}\ \alpha = \text{tg}\ \beta$

denominadas, por esse motivo, **equações fundamentais**. Assim, antes de tudo, é necessário saber resolver as equações fundamentais para poder resolver qualquer outra equação trigonométrica.

II. Resolução da equação sen α = sen β

152. Se sen α = sen β = OP_1, então as imagens de α e β no ciclo estão sobre a reta *r* que é perpendicular ao eixo dos senos no ponto P_1, isto é, estão em P ou P'.



Há, portanto, duas possibilidades:

1ª) α e β têm a mesma imagem, isto é, são **côngruos**

ou

2ª) α e β têm imagens simétricas em relação ao eixo dos senos, isto é, são **suplementares**.

153. Em resumo, temos:

$$\text{sen } \alpha = \text{sen } \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \alpha = \pi - \beta + 2k\pi \end{cases}$$

EXERCÍCIOS

290. Resolva as seguintes equações, para $x \in \mathbb{R}$:

a) sen x = sen $\frac{\pi}{5}$

b) cossec x = cossec $\frac{2\pi}{3}$

c) sen x = 0

d) sen x = $\frac{1}{2}$

e) sen x = $\frac{-\sqrt{2}}{2}$

f) sen x = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

g) sen x = 1

h) sen x = -1

Solução

a) $\text{sen } x = \text{sen } \frac{\pi}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{5} + 2k\pi = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi \end{cases}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi\right\}$

b) $\text{cossec } x = \text{cossec } \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{1}{\text{sen } x} = \frac{1}{\text{sen } \frac{2\pi}{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } x = \text{sen } \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right\}$

c) $\text{sen } x = 0 = \text{sen } 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - 0 + 2k\pi \end{cases}$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi\}$

d) $\text{sen } x = \frac{1}{2} = \text{sen } \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$

e) $\text{sen } x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \text{sen } \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right\}$

f) $\text{sen } x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \text{sen } \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\right\}$

g) $\text{sen } x = 1 = \text{sen } \dfrac{\pi}{2}$, então:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$

h) $\text{sen } x = -1 = \text{sen } \dfrac{3\pi}{2}$, então:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\right\}$

291. Resolva as equações abaixo, no domínio $\mathbb{R}$:

a) $\text{sen}^2 x = \dfrac{1}{4}$

b) $\text{sen}^2 x - \text{sen } x = 0$

c) $2 \text{ sen}^2 x - 3 \text{ sen } x + 1 = 0$

d) $2 \cos^2 x = 1 - \text{sen } x$

Solução

a) $\text{sen } x = \pm\dfrac{1}{2}$ e, então:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\right\}$

b) $\text{sen } x (\text{sen } x - 1) = 0 \Rightarrow \text{sen } x = 0 \text{ ou } \text{sen } x = 1$, então:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$

c) $\text{sen } x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \dfrac{3 \pm 1}{4} \Rightarrow \text{sen } x = 1$ ou $\text{sen } x = \dfrac{1}{2}$, então:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$$

d) $2 \cdot (1 - \text{sen}^2 x) = 1 - \text{sen } x \Rightarrow 2 \text{ sen}^2 x - \text{sen } x - 1 = 0$

resolvendo: $\text{sen } x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{1 \pm 3}{4} = 1$ ou $-\dfrac{1}{2}$

recaímos em equações fundamentais

$\text{sen } x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\text{sen } x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right\}$$

292. Resolva as equações abaixo:

a) $\text{sen } x = \text{sen } \dfrac{\pi}{7}$

b) $\text{sen } x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\text{sen}^2 x = 1$

d) $2 \cdot \text{sen } x - \text{cossec } x = 1$

e) $\text{sen } x + \cos 2x = 1$

f) $\text{cossec } x = 2$

g) $2 \cdot \text{sen}^2 x = 1$

h) $2 \cdot \text{sen}^2 x + \text{sen } x - 1 = 0$

i) $3 \cdot \text{tg } x = 2 \cdot \cos x$

j) $\cos^2 x = 1 - \text{sen } x$

293. Determine os valores de *x* que satisfazem a equação:

$$4 \text{ sen}^4 x - 11 \text{ sen}^2 x + 6 = 0$$

294. Resolva as seguintes equações:

a) $\text{sen } 2x = \dfrac{1}{2}$

b) $\text{sen } 3x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\text{sen } 2x = \text{sen } x$

Solução

a) $\text{sen } 2x = \dfrac{1}{2} = \text{sen } \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \pi - \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = \dfrac{5\pi}{12} + k\pi\right\}$

b) $\text{sen } 3x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \text{sen } \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 3x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x = \pi - \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2k\pi}{3}\right\}$

c) $\text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \text{sen } \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x - \dfrac{\pi}{3} = \pi - \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi + 2k\pi\right\}$

d) $\text{sen } 2x = \text{sen } x \Rightarrow \begin{cases} 2x = x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \pi - x + 2k\pi \end{cases}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \text{ ou } x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}\right\}$

295. Determine $x \in \mathbb{R}$ tal que:

a) $\text{sen } 5x = \text{sen } 3x$ b) $\text{sen } 3x = \text{sen } 2x$

296. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação:

$$2 \text{ sen } x \, |\text{sen } x| + 3 \text{ sen } x = 2$$

297. Resolva o sistema $\begin{cases} \text{sen } (x + y) = 0 \\ x - y = \pi \end{cases}$

III. Resolução da equação cos α = cos β

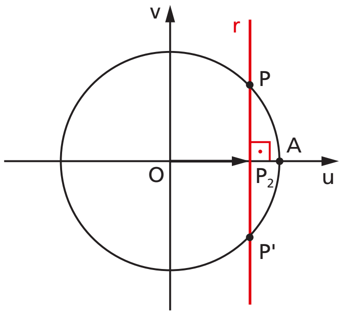
154. Se $\cos \alpha = \cos \beta = OP_2$, então as imagens de α e β no ciclo estão sobre a reta *r* que é perpendicular ao eixo dos cossenos no ponto P_2, isto é, estão em P ou P'.

Há, portanto, duas possibilidades:

1ª) α e β têm a mesma imagem, isto é, são côngruos

ou

2ª) α e β têm imagens simétricas em relação ao eixo dos cossenos, isto é, são **replementares**.



155. Em resumo, temos:

$$\cos \alpha = \cos \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \alpha = \pm\beta + 2k\pi$$

EXERCÍCIOS

298. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $\cos x = \cos \dfrac{\pi}{5}$

b) $\sec x = \operatorname{sen} \dfrac{2\pi}{3}$

c) $\cos x = 0$

d) $\cos x = 1$

e) $\cos x = -1$

f) $\cos x = \dfrac{1}{2}$

g) $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

h) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Solução

a) $\cos x = \cos \frac{\pi}{5} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{5} + 2k\pi$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{\pi}{5} + 2k\pi\right\}$

b) $\sec x = \sec \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos \frac{2\pi}{3}} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right\}$

c) $\cos x = 0 = \cos \frac{\pi}{2}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$

d) $\cos x = 1 = \cos 0$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi\}$

e) $\cos x = -1 = \cos \pi$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi + 2k\pi\}$

f) $\cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right\}$

g) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right\}$

h) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{5\pi}{6}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$

299. Resolva as equações abaixo, no conjunto $\mathbb{R}$.

a) $4 \cdot \cos^2 x = 3$

b) $\cos^2 x + \cos x = 0$

c) $\text{sen}^2 x = 1 + \cos x$

d) $\cos 2x + 3 \cdot \cos x + 2 = 0$

Solução

a) $\cos^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, então

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$

b) $\cos x \cdot (\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \cos x = 0$ ou $\cos x = -1$, então

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \pi + 2k\pi\right\}$

c) $1 - \cos^2 x = 1 + \cos x \Rightarrow \cos^2 x + \cos x = 0$

e recaímos no anterior.

d) $(2 \cdot \cos^2 x - 1) + 3 \cdot \cos x + 2 = 0 \Rightarrow 2 \cdot \cos^2 x + 3 \cdot \cos x + 1 = 0$

$\cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{-3 \pm 1}{4} \Rightarrow \cos x = -1$ ou $\cos x = -\frac{1}{2}$

então $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi + 2k\pi \text{ ou } x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right\}$

300. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $\cos x = -\frac{1}{2}$

b) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\sec x = 2$

e) $2 \cos^2 x = \cos x$

f) $4 \cos x + 3 \sec x = 8$

g) $2 - 2 \cos x = \text{sen } x \cdot \text{tg } x$

h) $2 \text{ sen}^2 x + 6 \cos x = 5 + \cos 2x$

i) $1 + 3 \text{ tg}^2 x = 5 \sec x$

j) $\left(4 - \frac{3}{\text{sen}^2 x}\right)\left(4 - \frac{1}{\cos^2 x}\right) = 0$

301. Resolva as seguintes equações, em $\mathbb{R}$:

a) $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos 2x = \cos x$

c) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$

d) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

Solução

a) $\cos 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow 2x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, então:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\dfrac{\pi}{12} + k\pi\right\}$

b) $\cos 2x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} 2x = x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = -x + 2k\pi \end{cases}$ então:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \text{ ou } x = \dfrac{2k\pi}{3}\right\}$

c) $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 0 = \cos \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x + \dfrac{\pi}{6} = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, então:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\right\}$

d) $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 = \cos 0 \Rightarrow x - \dfrac{\pi}{4} = 2k\pi$, então:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right\}$

302. Resolva as seguintes equações, em $\mathbb{R}$:

a) $\cos 3x - \cos x = 0$ b) $\cos 5x = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

303. Dada a equação $(\text{sen } x + \cos y)(\sec x + \text{cossec } y) = 4$,

a) resolva-a se: $x = y$ b) resolva-a se: $\text{sen } x = \cos y$

304. Resolva a equação $\text{sen}^2 x + \text{sen}^4 x + \text{sen}^6 x = 3$.

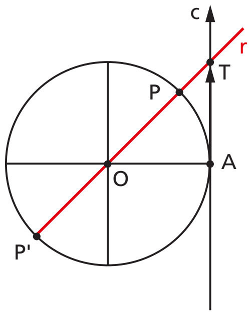
305. Resolva a equação

$$\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

306. Para que valores de *t* o sistema $\begin{cases} x + y = \pi \\ \text{sen } x + \text{sen } y = \log_{10} t^2 \end{cases}$ admite solução?

IV. Resolução da equação tg α = tg β

156. Se tg α = tg β = AT, então as imagens de α e β estão sobre a reta *r* determinada por O e T, isto é, estão em P ou P'.



Há, portanto, duas possibilidades:

1ª) α e β têm a mesma imagem, isto é, são côngruos

ou

2ª) α e β têm imagens simétricas em relação ao centro do ciclo, isto é, são **explementares**.

157. Em resumo, temos:

$$\text{tg } \alpha = \text{tg } \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \alpha = \pi + \beta + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta + k\pi$$

EXERCÍCIOS

307. Resolva as equações seguintes:

a) tg x = 1
b) cotg x = $\sqrt{3}$
c) tg x = $-\sqrt{3}$
d) tg x = 0
e) tg 2x = $\sqrt{3}$
f) tg 2x = tg x
g) tg 3x = 1
h) tg 5x = tg 3x

Solução

a) tg x = 1 = tg $\frac{\pi}{4}$, então:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$$

b) $\text{cotg } x = \sqrt{3} \Rightarrow \text{tg } x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \text{tg } \dfrac{\pi}{6}$, então:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi\right\}$

c) $\text{tg } x = -\sqrt{3} = \text{tg } \dfrac{2\pi}{3}$, então:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi\right\}$

d) $\text{tg } x = 0 = \text{tg } 0$, então:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi\}$

e) $\text{tg } 2x = \sqrt{3} = \text{tg } \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$,

então:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{2}\right\}$

f) $\text{tg } 2x = \text{tg } x \Rightarrow 2x = x + k\pi$,

então:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi\}$

g) $\text{tg } 3x = 1 = \text{tg } \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow 3x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$,

então:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{3}\right\}$

h) $\text{tg } 5x = \text{tg } 3x \Rightarrow 5x = 3x + k\pi \Rightarrow x = \dfrac{k\pi}{2}$

Notemos que, se *k* for ímpar, então não existe tg 5x e tg 3x, portanto:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{k\pi}{2}, \text{ k par}\right\}$

308. Resolva as equações abaixo:

a) $\text{sen } x - \sqrt{3} \cdot \cos x = 0$

b) $\text{sen}^2 x = \cos^2 x$

c) $\text{tg } x + \text{cotg } x = 2$

d) $\sec^2 x = 1 + \text{tg } x$

Solução

a) $\text{sen } x = \sqrt{3} \cdot \cos x \Rightarrow \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} = \sqrt{3} \Rightarrow \text{tg } x = \sqrt{3}$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi\right\}$$

b) $\text{sen}^2 x = \cos^2 x \Rightarrow \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 1 \Rightarrow \text{tg}^2 x = 1,$

então: $\text{tg } x = 1$ ou $\text{tg } x = -1$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + k\pi\right\}$$

c) $\text{tg } x + \dfrac{1}{\text{tg } x} = 2 \Rightarrow \text{tg}^2 x - 2 \cdot \text{tg } x + 1 = 0$

$\text{tg } x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = 1$, então:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$$

d) $\sec^2 x = 1 + \text{tg } x \Rightarrow 1 + \text{tg}^2 x = 1 + \text{tg } x \Rightarrow \text{tg}^2 x - \text{tg } x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{tg } x \cdot (\text{tg } x - 1) = 0,$

então: $\text{tg } x = 0$ ou $\text{tg } x = 1$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$$

309. Resolva as equações abaixo:

a) $\text{tg } x = \text{tg } \dfrac{\pi}{5}$

b) $\text{cotg } x = \text{cotg } \dfrac{5\pi}{6}$

c) $3 \cdot \text{tg } x = \sqrt{3}$

d) $\text{cotg } x = 0$

e) $\text{cotg } x = -1$

f) $\text{tg } 3x - \text{tg } 2x = 0$

g) $\text{tg } 2x = \text{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

h) $\text{tg } 4x = 1$

i) $\text{cotg } 2x = \text{cotg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

j) $\text{tg}^2 2x = 3$

310. Resolva as equações abaixo:

a) $\sec^2 x = 2 \cdot \text{tg } x$

b) $\dfrac{1}{\text{sen}^2 x} = 1 - \dfrac{\cos x}{\text{sen } x}$

c) $\text{sen } 2x \cdot \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos 2x \cdot \text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

d) $(1 - \text{tg } x)(1 + \text{sen } 2x) = 1 + \text{tg } x$

311. Resolva a equação $\text{cotg } x - \text{sen } 2x = 0$.

312. Para quais valores de *p* a equação $\text{tg } p\,x = \text{cotg } px$ tem $x = \dfrac{\pi}{2}$ para raiz.

313. Se *a* é a menor raiz positiva da equação $(\text{tg } x - 1)(4 \text{ sen}^2 x - 3) = 0$, calcule o valor de $\text{sen}^4 a - \cos^2 a$.

314. Determine as raízes da equação $x^2 - (2 \text{ tg } a)\,x - 1 = 0$.

V. Equações clássicas

Apresentaremos neste item algumas equações tradicionais em Trigonometria, sugerindo métodos para fazê-las recair nas equações fundamentais.

158. $a \cdot \text{sen } x + b \cdot \cos x = c \ (a, b, c \in \mathbb{R}^*)$

Método 1

Fazemos a mudança de variável $\text{sen } x = u$ e $\cos x = v$ e resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} au + bv = c \\ u^2 + v^2 = 1 \end{cases}$$

Tendo calculado *u* e *v*, determinamos os possíveis valores de *x*.