

Aula 05


Desigualdades nos Triângulos

Karla Lima

Sumário



1. Desigualdades



Desigualdades

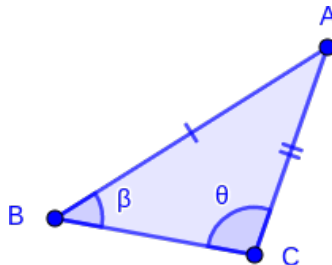
Teorema



Teorema 1

Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a estes lados também não são congruentes, e ao maior lado opõe-se o maior ângulo.

- ▶ **Hipótese:** $AB \neq AC$
- ▶ **Tese:**
 - ▶ $\hat{C} \neq \hat{B}$;
 - ▶ Se $AB > AC$, então $\hat{C} > \hat{B}$.



Demonstração: Teorema 1



Parte 1: $\hat{C} \neq \hat{B}$.

Suponha, por contradição, que $\hat{C} = \hat{B}$. Vimos no Exercício 3 da aula 03: se dois ângulos de um triângulo são congruentes, então o triângulo é isósceles. Mas isso contraria a hipótese de que $AB \neq AC$ e, portanto, devemos ter $\hat{C} \neq \hat{B}$.

Demonstração: Teorema 1

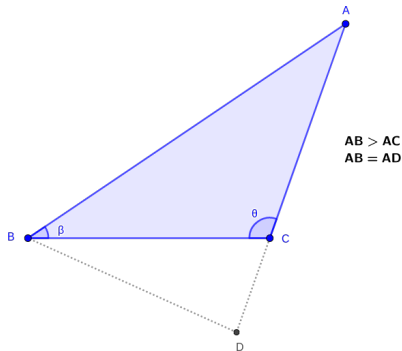
Parte 2: Supondo que $AB > AC$, vamos mostrar que $\hat{C} > \hat{B}$.

- Seja D um ponto da semirreta \overrightarrow{AC} tal que

$$AD = AB.$$

- Dessa forma, o triângulo ABD é isósceles. Portanto

$$\hat{ABD} = \hat{D}$$



Demonstração: Teorema 1

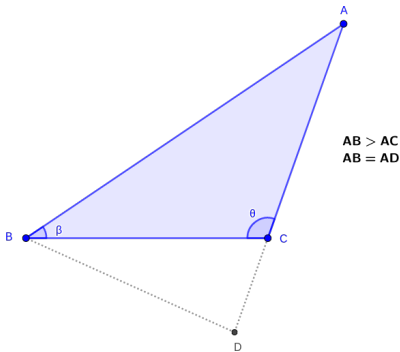
Como $\hat{A}CB$ é um ângulo externo ao triângulo BCD , podemos concluir:

- ▶ \hat{C} é maior que o ângulo não adjacente D (teorema do ângulo externo);
- ▶ Como $\hat{D} = \hat{B} + \hat{CBD}$, tem-se

$$\hat{B} < \hat{D} < \hat{C},$$

de onde segue que

$$\hat{B} < \hat{C}.$$



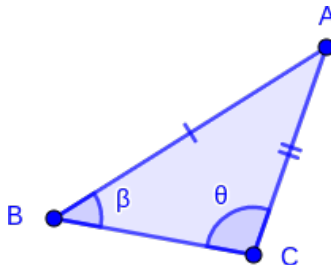
Teorema



Teorema 2

Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a estes ângulos também não são congruentes e ao maior ângulo opõe-se o maior lado.

- ▶ **Hipótese:** $\hat{B} \neq \hat{C}$
- ▶ **Tese:**
 - ▶ $AB \neq AC$;
 - ▶ Se $\hat{B} < \hat{C}$, então $AC < AB$.



Demonstração: Teorema 2



Parte 1: $AB \neq AC$.

Suponha, por contradição, que $AB = AC$. Então o triângulo é isósceles e, pelo Teorema 1 da aula 03, os ângulos oposto a esses lados seriam congruentes, contrariando a hipótese.

Demonstração: Teorema 2



Parte 2: Se $\hat{B} < \hat{C}$, então $AC < AB$.

De fato, considere um triângulo ABC no qual $\hat{C} > \hat{B}$. Há três possibilidades para as medidas de \overline{AB} e \overline{AC} :

- i) ou $AB < AC$;
- ii) ou $AB = AC$;
- iii) ou $AB > AC$;

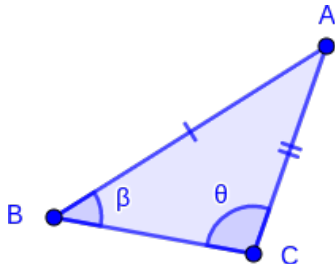
Demonstração: Teorema 2



Se $AB < AC$ é verdadeira, pelo Teorema 1, então ao maior lado opõe-se o maior ângulo.
Logo, teríamos

$$\hat{C} < \hat{B},$$

contrariando a hipótese.



Demonstração: Teorema 2



Se ii) é verdadeira, teríamos $AB = AC$, o que já vimos ser uma contradição na parte 1.

Portanto só nos resta ter iii) verdadeira, ou seja, se $\hat{B} < \hat{C}$, então

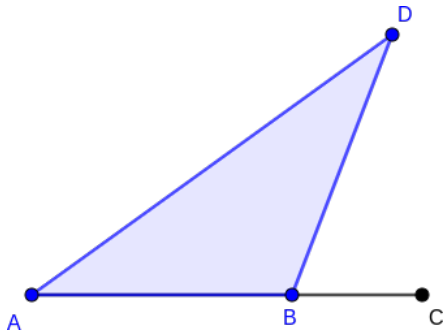
$$AC < AB.$$

Exercício



Exercício 1

Na figura abaixo, $\hat{A}BD > \hat{D}BC$. Demonstrar que $AD > BD$ e que $AD > AB$.

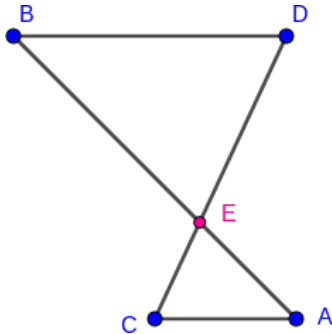


Exercício



Exercício 2

Na figura abaixo, \overline{AB} e \overline{CD} se intersectam em E , $\hat{C} > \hat{A}$ e $\hat{D} > \hat{B}$. Demonstre que $AB > CD$.



A Desigualdade Triangular



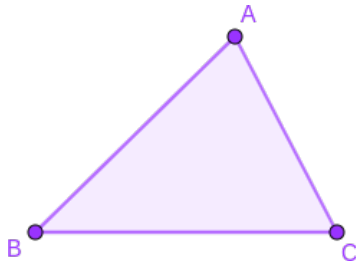
Teorema 3

Em todo triângulo, a soma dos comprimentos de dois lados quaisquer é maior que o comprimento do terceiro lado.

► **Hipótese:** ABC é um triângulo.

► **Tese:**

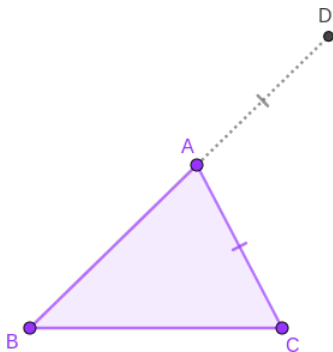
- i) $BC < BA + AC$
- ii) $BA < AC + CB$
- iii) $AC < AB + BC$



Demonstração: Teorema 3



Vamos demonstrar o item i): seja D um ponto da semirreta \overrightarrow{BA} , com A entre B e D , tal que $AD = AC$.



Demonstração: Teorema 3

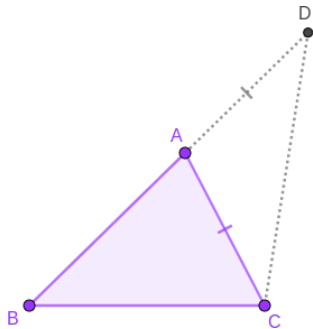
Assim, construímos o triângulo ACD isósceles.

- ▶ $\hat{ACD} = \hat{D}$.
- ▶ Como $\hat{BCD} = \hat{BCA} + \hat{ACD}$, tem-se

$$\hat{BCD} > \hat{ACD} = \hat{D}.$$

- ▶ Pelo Teorema 2, aplicado a $\triangle BCD$

$$BD > BC.$$

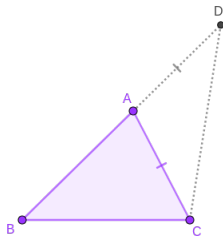


Demonstração: Teorema 3

Ou seja

$$BA + AD = BD > BC,$$

o que prova a desigualdade i).



Como exercício, prove as demais desigualdades.

Referencias I



Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 9. (Click para baixar)