O gradiente

Se f possuir derivadas parciais, definimos o gradiente de f por

$\nabla f(x,y) = \left(f_x(x,y), f_y(x,y) \right)$, se for uma função de 2 variáveis

e

$\nabla f(x,y,z) = \left(f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z) \right)$, se for de 3 variáveis.

Assim, podemos reescrever

$$D_u f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot u$$

e

$$D_u f(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) \cdot u .$$

* Lembretes

Temos que $u \cdot v = \langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos\theta$, onde $\theta \in [0, \pi]$ é o ângulo entre os vetores u e v.

Como $D_u f(x,y) = \langle \nabla f(x,y), u \rangle$, com $\|u\| = 1$, obtemos que

$$D_u f(x,y) = \|\nabla f(x,y)\| \|u\| \cos\theta = \|\nabla f(x,y)\| \cos\theta .$$

Como para $\theta \in [0,\pi]$ temos $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, o maior valor para $D_u f(x,y)$ é obtido quando $\cos\theta = 1$ e, portanto, $\theta = 0$. Isto quer dizer que o ângulo entre u e $\nabla f(x,y)$ é zero e os dois tem o mesmo sentido e a mesma direção: $u = \dfrac{\nabla f(x,y)}{\|\nabla f(x,y)\|}$.

Analogamente, o menor valor para $D_u f(x,y)$ é obtido quando $\cos\theta = -1$ e, portanto, $\theta = \pi$. Isto quer dizer que o ângulo entre u e $\nabla f(x,y)$ é $180°$ e os dois possuem a mesma direção mas sentidos opostos: $u = -\dfrac{\nabla f(x,y)}{\|\nabla f(x,y)\|}$.

Teorema: Seja f uma função de 2 ou 3 variáveis e denotemos por P o ponto $P(x_0, y_0)$ ou $P(x_0, y_0, z_0)$. Suponha que f seja diferenciável em P.

a) Se $\nabla f = \vec{0}$ em P, então todas as derivadas direcionais de f em P são nulas.

b) Se $\nabla f \neq \vec{0}$ em P, o valor $\underbrace{\text{máximo}}_{}$ da derivada direcional $D_u f(P)$ é $\|\nabla f(P)\|$ e ocorre quando u possui a mesma direção e sentido do vetor gradiente $(\nabla f(P))$.

maior taxa de crescimento

c) Se $\nabla f \neq \vec{0}$ em P, o valor mínimo da derivada direcional $D_u f(P)$ é $\|\nabla f(P)\|$ e ocorre quando u possui a mesma direção mas sentido contrário ao vetor gradiente $(\nabla f(P))$.

maior taxa de decrescimento

Exercício: Considere a quantidade de luz interceptada por um dossel como função da radiação fotossinteticamente ativa (r) e do índice de área foliar (A) para uma plantação de milho:

$$q(r, A) = r\,(1 - e^{-0.7A}).$$

Estando no ponto $(1.5, 2.7)$, calcule a taxa de variação se o ponto passar para $(1.52, 2.6)$. Determine também a direção e o sentido a partir de $(1.5, 2.7)$ para que a taxa de variação seja máxima.

Solução: Queremos calcular a taxa de variação da função q no ponto $(1.5, 2.7)$ na direção do vetor $\vec{u} = \underset{\text{ponto final}}{(1.52, 2.6)} - \underset{\text{ponto inicial}}{(1.5, 2.7)} = (0.02, -0.1)$.

Para tanto, precisamos calcular $\nabla q(1.5, 2.7)$ e o vetor unitário $\dfrac{u}{\|u\|}$:

i) $\nabla q(1.5, 2.7)$

Temos que

$$q_r(r, A) = 1 - e^{-0.7A} \quad \text{e} \quad q_A(r, A) = r\left(0 - (-0.7)\,e^{-0.7A}\right) = 0.7r\,e^{-0.7A}$$

e, portanto,

$$q_r(1.5, 2.7) = 1 - e^{-1.89} \quad \text{e} \quad q_A(1.5, 2.7) = 1.05\,e^{-1.89}.$$

Assim, $\nabla q(1.5, 2.7) = \left(1 - e^{-1.89},\ 1.05\,e^{-1.89}\right)$.

ii) $\dfrac{u}{\|u\|}$

Calculando o comprimento do vetor u, obtemos

$$\|u\| = \sqrt{(0.02)^2 + (-0.1)^2} = \sqrt{0.0104}.$$

Assim, $\dfrac{u}{\|u\|} = \left(\dfrac{0.02}{\sqrt{0.0104}},\ \dfrac{-0.1}{\sqrt{0.0104}}\right).$

Logo, de i) e ii),

$$D_u q(1.5, 2.7) = \nabla q(1.5, 2.7) \cdot \frac{u}{\|u\|} = \frac{(1-e^{-1.89}) \cdot 0.02}{\sqrt{0.0104}} - \frac{1.05 \times 0.1 \times e^{-1.89}}{\sqrt{0.0104}}$$

$$= \frac{0.02 - 0.125\, e^{-1.89}}{\sqrt{0.0104}} \simeq 0.011$$

Para que a taxa seja máxima, deve-se, a partir de $(1.5, 2.7)$, variar no sentido e direção do vetor gradiente $\nabla q(1.5, 2.7)$. Logo, $u = (1 - e^{-1.89}, 1.05\, e^{-1.89})$.

Assim,

$$D_u q(1.5, 2.7) = \nabla q(1.5, 2.7) \cdot \frac{\nabla q(1.5, 2.7)}{\|\nabla q(1.5, 2.7)\|} = \frac{\|\nabla q(1.5, 2.7)\|^2}{\|\nabla q(1.5, 2.7)\|}$$

$$= \|\nabla q(1.5, 2.7)\| = \sqrt{(1-e^{-1.89})^2 + (1.05\, e^{-1.89})^2}$$

$$\simeq 0.864$$

Extremos de funções de duas variáveis

Vimos que o gradiente em um ponto (x_0, y_0) dá a direção e o sentido, a partir do ponto, nos quais a variação é máxima. Se o vetor gradiente se anula em (x_0, y_0) temos que

$$D_u f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \frac{u}{\|u\|} = (0,0) \cdot \frac{u}{\|u\|} = 0$$

e neste ponto não se tem nenhuma variação. Dizemos que (x_0, y_0) é um ponto crítico ou estacionário de $f(x,y)$. (Analogamente para $f(x,y,z)$).

Definição: Dado um ponto (x_0, y_0) do domínio da função f com $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$, isto é, $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$, ou se $\nabla f(x_0, y_0)$ não existir então (x_0, y_0) é denominado ponto crítico.

Exemplos:

a) Para $f(x,y) = x^2 + y^2$ os pontos críticos são dados por:

$$f_x(x,y) = 2x = 0 \iff x = 0 \quad \text{e} \quad f_y(x,y) = 2y = 0 \iff y = 0$$

assim, o único ponto crítico é $(x_0, y_0) = (0,0)$.

b) Para que (x,y) seja um ponto crítico de

$$f(x,y) = 3x^2 + 2xy + y^2 + 10x + 2y + 1$$

devemos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 6x + 2y + 10 = 0 \\ f_y(x,y) = 2x + 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 2y + 10 = 0 & (\mathrm{I}) \\ 2x + 2y + 2 = 0 & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

Subtraindo (II) de (I) obtemos:

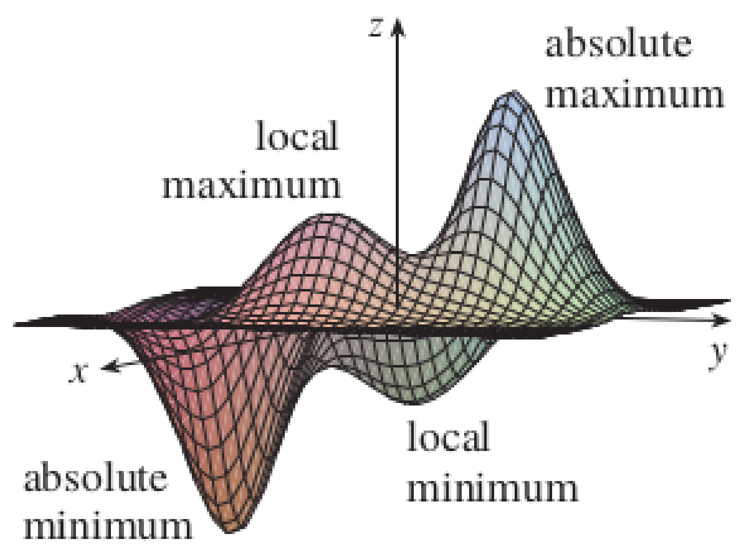
$$4x + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{-8}{4} \Rightarrow \boxed{x = -2}$$

Se $x = -2$, substituindo este valor em (II), obtemos

$$-4 + 2y + 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{2} \Rightarrow \boxed{y = 1}.$$

Portanto devemos ter $(x,y) = (-2,1)$ como único ponto crítico.

Máximos e Mínimos



* Máximos locais: pontos altos em uma vizinhança;
* Mínimos locais: pontos baixos em uma vizinhança;
* Máximos absolutos: ponto mais alto em todo o gráfico;
* Mínimos absolutos: ponto mais baixo em todo o gráfico.

Pontos críticos são candidatos a máximo e mínimo locais.

Isto ocorre pois seu plano tangente é da forma $z - z_0 = 0$, onde $z_0 = f(x_0, y_0)$.
Logo o plano $z = z_0$ é paralelo ao plano XY, podendo isto limitar o valor de z localmente.

Obs: Todo ponto de máximo ou mínimo LOCAL será um ponto crítico, mas isto não quer dizer que todo ponto crítico é um extremo relativo da função. Plote o gráfico da função $f(x,y) = x^3$ e veja que $(0,0)$ é um ponto crítico da função mas $f(0,0)$ não é nem máximo nem mínimo local de f. Então:

(x,y) é um extremo relativo $\Longrightarrow$ (x,y) é um ponto crítico

porém

(x,y) é um ponto crítico $\not\Longrightarrow$ (x,y) é um extremo relativo

→ é apenas um candidato à extremo relativo.

Veremos como testar se um ponto crítico é máximo ou mínimo local para uma função f na próxima aula.

Para mais exemplos: Cálculo, vol. 2 - J. Stewart

Matemática aplicada às ciências agrárias - R.S. Ferreira.