Trabalho Final

01) $\vec{F}(x,y) = \left( \dfrac{2x}{x^2+y^2}, \dfrac{2y}{x^2+y^2} \right)$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x.2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2+2y^2-4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{0.(x^2+y^2) - 2x.2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{0.(x^2+y^2) - 2y.2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2+2y^2-4y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Todas são descontínuas na origem (0,0).

Verificar se pode aplicar o Teorema de Green: 0,4

a) Como a região determinada por C contém o ponto de descontinuidade das derivadas parciais, não podemos aplicar o Teorema de Green. Resta-nos usar a definição ou o Teorema fundamental.

Se resolvermos pela definição, teremos que resolver duas integrais, uma vez que $C = C_1 \cup C_2$ e, assim,

$$\int_C F.dr = \int_{C_1} F.dr + \int_{C_2} F.dr.$$

verificar: 0,4

Vamos verificar se o campo é conservativo, a fim de usar o teorema fundamental. Queremos encontrar $\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla\phi(x,y) = F(x,y)$.

Ou seja,

$$\phi_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad \text{e} \quad \phi_y = \frac{2y}{x^2+y^2}.$$

Integrando $\phi_x$ com relação a $x$, obtemos

$$\phi = \int \phi_x dx = \int \frac{2x}{x^2+y^2} dx = \int \frac{1}{u} du$$

$u = x^2+y^2$
$\Downarrow$
$du = 2x dx$

$$= \ln u + c(y) = \ln(x^2+y^2) + c(y).$$

Derivando a $\phi$ encontrada no passo anterior com relação a y, obtemos

$$\phi_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln(x^2+y^2) + c(y)\right) = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2y + c'(y).$$

Resolvendo o sistema:

$$\frac{2y}{x^2+y^2} + c'(y) = \frac{2y}{x^2+y^2} \Rightarrow c'(y) = 0 \Rightarrow c \text{ é uma constante.}$$

Portanto, $\phi(x,y) = \ln(x^2+y^2) + C$ é uma função potencial para o campo $\vec{F}$, de onde segue que ele é conservativo. Como a curva começa em $C_1$, temos que o ponto inicial é dado por $r(0) = (1-2.0,\ 3/4) = (1, 3/4)$. Ela termina em $C_2$, logo o ponto final é dado por $r(1) = (1,\ 1^2 - 1/4) = (1, 3/4)$. A curva é fechada, logo seus pontos final e inicial coincidem. Logo,

$$\int_C F \cdot dr = \phi(1, 3/4) - \phi(1, 3/4) = 0.$$

↳ resolver a integral aplicando o teorema corretamente: 2,5

b) Pelo item a), o campo é conservativo e podemos aplicar o teorema fundamental. Como a curva é fechada, temos que $(x_f, y_f) = (x_i, f_i)$ de onde segue que $\int_C F \cdot dr = \phi(x_f, y_f) - \phi(x_i, f_i) = \phi(x_f, y_f) - \phi(x_f, y_f) = 0.$

Também podemos usar o teorema de Green, pois a curva é plana, fechada simples, suave por partes e orientada positivamente. Além disso, $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ e $\frac{\partial Q}{\partial y}$ (calculadas na página anterior) só são descontínuas no ponto $(0,0)$ que não está na região delimitada pelo retângulo.

Assim,

$$\int_C F \cdot dr = \iint_D \left( \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2} \right) dA = \iint_D 0\, dA = 0.$$

Verificar as hipóteses do teorema de Green: 0,4

Verificar se o campo é conservativo: 0,4

Calcular a integral corretamente: 2,5

02 $F(x,y,z) = (x, y, xy)$ , $r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ $0 \leq t \leq \pi$

Não podemos usar o teorema de Green, pois a curva não é plana, nem fechada: $r(0) = (\cos 0, \operatorname{sen} 0, 0) = (1,0,0)$

$\Rightarrow r(0) \neq r(\pi)$.

$r(\pi) = (\cos\pi, \operatorname{sen}\pi, \pi) = (-1,0,\pi)$

0,4

Vamos verificar se o campo é conservativo. Para isso, devemos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi}{\partial x} = x & (I) \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial y} = y & (II) \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial z} = xy & (III) \end{cases}$$

Integrando (III) com relação a $z$, obtemos

$$\phi(x,y,z) = \int \frac{\partial\phi}{\partial z}\,dz = \int xy\,dz = xyz + c(x,y).$$

Derivando $\phi$ com relação a $y$, obtemos de (II):

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y,z) = xz + \frac{\partial c}{\partial y}(x,y) = y \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial y}(x,y) = y - xz$$

$$\Rightarrow c(x,y) = \int \frac{\partial c}{\partial y}\,dy = \int (y - xz)\,dy = \frac{y^2}{2} - xzy + k(x).$$

Veja que a função $c(x,y)$ só pode depender de $x$ e $y$, mas acima vemos que $c(x,y) = \frac{y^2}{2} - xyz + k(x)$ depende de $z$. Logo, tal sistema não possui solução e o campo não é conservativo.

0,4

Por fim, resta-nos calcular $\int_C F \cdot dr$ pela definição:

$F(r(t)) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \cos t \operatorname{sen} t)$

$r'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$

$$\int_C F \cdot dr = \int_0^\pi (\cancel{-\cos t \operatorname{sen} t} + \cancel{\operatorname{sen} t \cos t} + \cos t \operatorname{sen} t)\,dt$$

$$= \int_0^\pi \cos t \operatorname{sen} t\,dt = \int_0^0 u\,du = \frac{u^2}{2}\Big|_0^0 = 0.$$

$u = \operatorname{sen} t \Rightarrow du = \cos t\,dt$

$u(0) = 0$ e $u(\pi) = 0$

2,6