UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS

FACET

Cálculo Vetorial

Lista 01 — 26 de Dezembro de 2015

Exemplo de domínio limitado cuja fronteira não tem conteúdo nulo: Considere o subconjunto de $B \subset \mathbb{R}^3$ dado por:

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x, y, z \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}\}$$

ou seja,

$$B = ([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \times ([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \times ([0, 1] \cap \mathbb{Q}).$$

A fronteira de B é o cubo unitário $C = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$, de volume $v(C) = 1$. Então, para todo $0 < \epsilon < 1$ qualquer conjunto finito de paralelepípedos $A_1, \ldots, A_n$ tais que

$$C \subset A_1 \cup \cdots \cup A_n$$

teremos

$$\epsilon < 1 \leq \sum_{i=1}^{n} v(A_i)$$

e assim, C não tem conteúdo nulo.

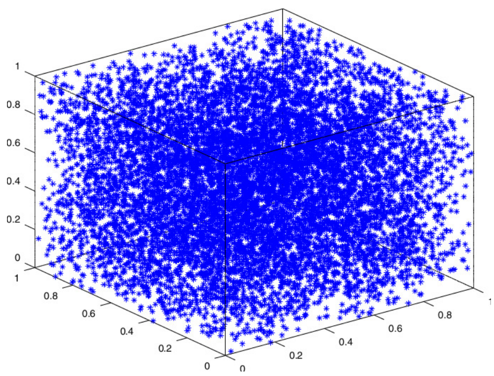

FIGURE 1. Conjunto B

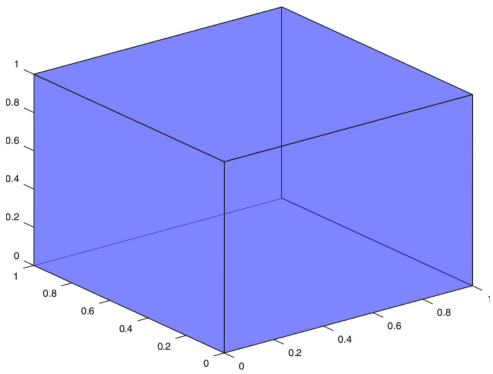

FIGURE 2. Fronteira do conjunto B

Então, mesmo tomando uma função contínua e bastante simples, tal qual $f : B \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = 1$, a soma de Riemann - e consequentemente a integral tripla - não vai convergir. Basta verificar que dada uma partição de B e tomando os $X_{ijk} \in B$, teremos

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(X_{ijk}) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = v(B) = v(C) = 1.$$

Por outro lado, se os $X_{ijk} \notin B$

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} 0\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = 0.$$

Então tomando os limites com essas partições teremos resultados diferentes, logo o limite não exite.

Exercícios

(1) Calcule as integrais triplas:

a) $\displaystyle\iiint_B xyz^2 dxdydz$ onde $B = [0,1] \times [0,2] \times [1,3]$.

b) $\displaystyle\iiint_B 2y\text{sen}(yz) dxdydz$ onde B é o paralelepípedo limitado por $x = \pi$, $y = \frac{\pi}{2}$, $z = \frac{\pi}{3}$ e os planos coordenados.

c) $\displaystyle\int_1^3 \int_x^{x^2} \int_0^{\ln z} xe^y dydzdx.$

d) $\displaystyle\int_{1/3}^{1/2} \int_0^{\pi} \int_0^1 zx\text{sen}(xy) dzdydx.$

e) $\displaystyle\iiint_B xydxdydz$ onde B é o sólido limitado pelos cilindros parabólicos $x = y^2$ e $y = x^2$ e pelos planos $z = 0$ e $z = x + y$.

f) $\displaystyle\iiint_B dxdydz$ onde B é o conjunto $x^2 + y^2 \leq z \leq 2x$.

g) $\displaystyle\iiint_B xdxdydz$ onde B é o conjunto $x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$ e $x + y \leq z \leq x + y + 1$.

h) $\displaystyle\iiint_B 2zdxdydz$ onde B é o conjunto $4x^2 + 9y^2 + z^2 \leq 4$ e $z \geq 0$.

Lembrete: Equação de um elipsóide centrado na origem.:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Bons estudos!

Bibliografia:

Stewart, J. - Cálculo Vol II

Flemming, D. - Cálculo B

Howard, A. - Cálculo Vol II

Guidorizzi, H. - Um curso de cálculo Vol 3.