Funções

↳ expressa a noção de dependência

1. A tabela abaixo indica a concentração y de alumínio (mg/kg) em uma espécie de planta em função do acúmulo de fósforo x (mg/kg) no solo.

Fósforo (x)	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Alumínio (y)	8.95	4.69	1.73	0.8	0.7	0.9	2.87	6.41	11.25

A curva de ajuste quadrático é $y = a + bx + cx^2$, onde os coeficientes tem valores aproximados: $a = 14.043$, $b = -0.582$ e $c = 0.006$.

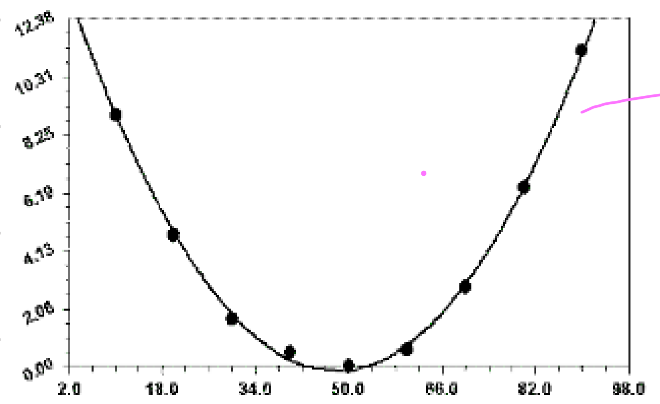


Figura 2: Concentração de alumínio devido ao fósforo no solo

3. A tabela mostra a densidade volumétrica y do solo (mg/m^3) em diferentes alturas x (m) do perfil do solo, para um dado tipo de manejo.

x	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
y	1.14	1.26	1.31	1.32	1.30	1.27	1.26	1.27	1.33	1.47	1.69

A curva de ajuste cúbico é $y = a + bx + cx^2 + dx^3$, com coeficientes tendo valores aproximados: $a = 1.1399$, $b = 3.1625$, $c = -16.95$ e $d = 25.657$

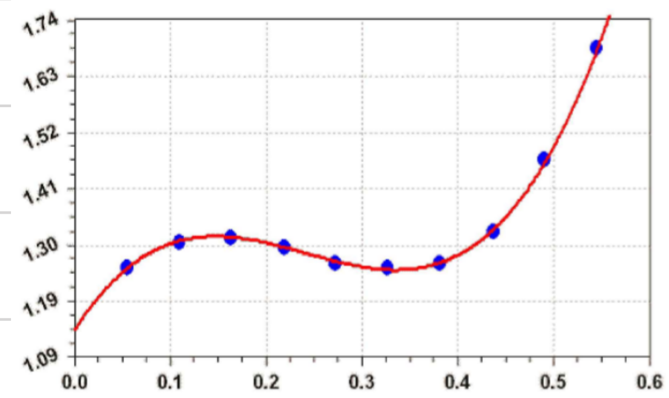


Figura 3: Densidade volumétrica em função da altura do perfil

$Gr(f) = \{ (x, f(x)) : x \in D_f \}.$

ENTRADA $\quad x \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow f(x) \quad$ SAÍDA

↓ Domínio: constitui-se dos valores da variável independente

↳ a função age

→ Imagem: constitui-se dos valores da variável dependente.

Função de várias variáveis

De acordo com o Manual de Hidráulica de Azevedo Netto, a velocidade de vazão através de uma tubulação pode ser dada por

$$V = \frac{1}{n} R^{2/3} S^{1/2}$$

onde V é a velocidade média (m/s); R, o raio hidráulico (m); S, o desnível do canal (m/m) e n o coeficiente de rugosidade do material.

V depende de quais variáveis?

Domínio está em qual espaço? E a imagem?

Outro exemplo: Em 1928, Charles Cobb e Paul Douglas publicaram um estudo no qual eles modelaram o crescimento da economia Americana durante o período de 1899 a 1922.

Modelo simplificado: Produção (P) é determinada pela quantidade de mão de obra envolvida (L) e pela quantidade de capital envolvido (K).

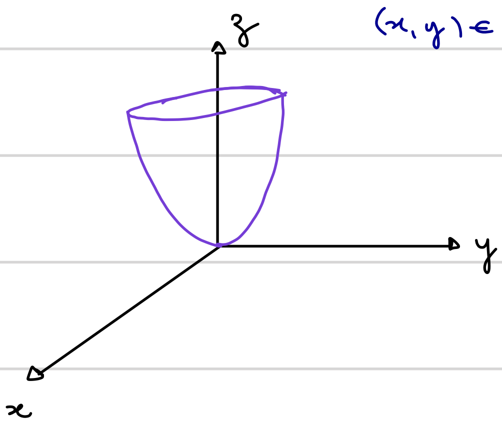
↳ nº de horas/pessoa trabalhadas em um ano

↳ valor monetário de todas as máquinas, equipamentos e prédios

$P(L,K) = 1.01\, L^{0.75} K^{0.25}$

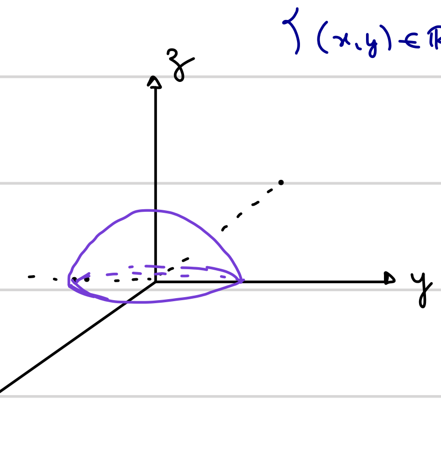
$L, K \geq 0$

Ex: $f(x,y) = 4x^2 + y^2$ $\quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$



$g(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

$\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9 \}$



Curvas de Nível

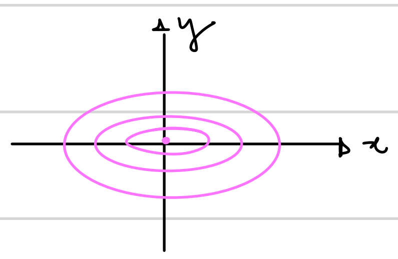
Outro método para visualizar funções, um mapa de contorno no qual pontos de elevação constante são unidos para formar linhas de contorno.

Ex: Uma camada fina de metal, localizada no plano XY, tem temperatura $T(x,y)$ no ponto (x,y). As curvas de nível de T são chamadas de isotérmicas (todos os seus pontos têm a mesma temperatura).

$$T(x,y) = \frac{100}{1 + x^2 + 2y^2}$$

$$T(x,y) = K \Rightarrow K = \frac{100}{1+x^2+2y^2} \Rightarrow 1 + x^2 + 2y^2 = \frac{100}{K} \Rightarrow x^2 + 2y^2 = \frac{100}{K} - 1$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{y^2}{1/2} = \frac{100-K}{K} \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{100-K}{K}} + \frac{y^2}{\frac{100-K}{2K}} = 1 \qquad K \leq 100$$



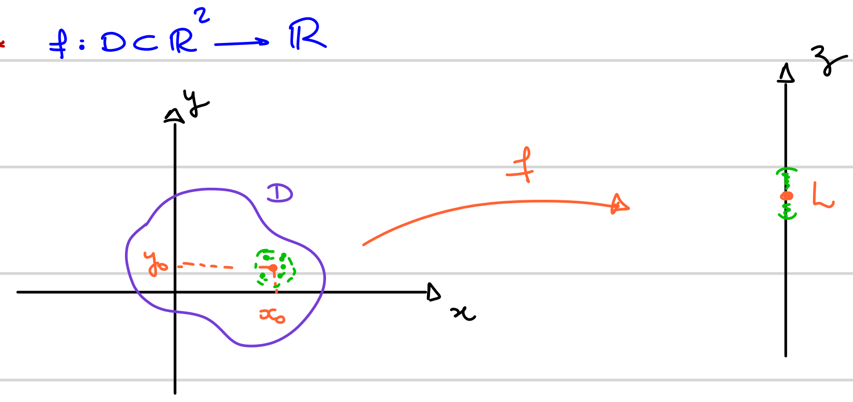
$K = 100 \rightsquigarrow x = y = 0$

$K = 99 \rightsquigarrow x^2 + 2y^2 = \frac{1}{99}$

$\rightsquigarrow \frac{x^2}{\frac{1}{99}} + \frac{y^2}{\frac{1}{198}} = 1$

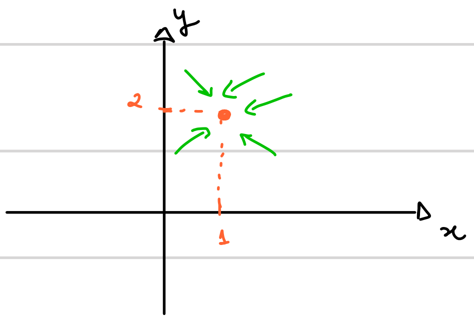
Limites

* $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$



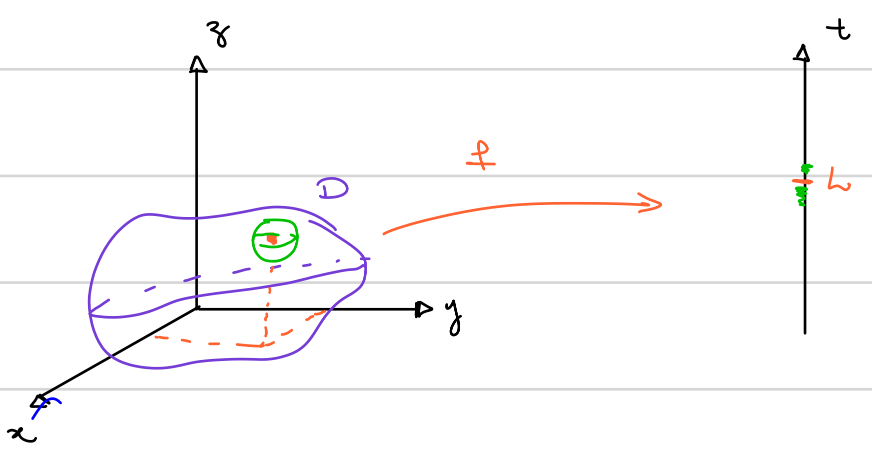
L é chamado o limite da função f no ponto (x_0, y_0) se, e somente se, para todo (x,y) suficientemente próximo de (x_0,y_0), mas não igual a este ponto, temos $f(x,y)$ próximo de L.

Ex: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$



aproxima-se por todas as direções!

* $f: D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$



Analogamente,

L é chamado o limite da função f no ponto (x_0, y_0, z_0) se, e somente se, para todo (x,y,z) suficientemente próximo de (x_0,y_0,z_0), mas não igual a este ponto, temos $f(x,y,z)$ próximo de L.

Ex: $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} (xy + yz) = 0$.

Obs: Existem técnicas para o cálculo de limites. Interessados podem ver em qualquer livro de Cálculo de várias variáveis.

Continuidade

Uma função $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dita contínua em (a,b) se

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

Dizemos que f é contínua em D se f for contínua em todo ponto $(a,b) \in D$.

Analogamente, uma $f: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é dita contínua em (a,b) se

$$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z) = f(a,b,c)$$

Dizemos que f é contínua em D se f for contínua em todo ponto $(a,b,c) \in D$.

Obs: f ser contínua em D implica que pequenas variações em $X \in D$ ($X = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ ou $X = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$) produzem pequenas variações em $f(X)$.

Teorema 1: São contínuas em seus domínios as funções:

Polinomiais ($\mathbb{R}$)

Seno e cosseno ($\mathbb{R}$)

Exponenciais ($\mathbb{R}$)

Logarítmicas ($\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} ; x > 0\}$)

Obs: Assim como em funções de uma variável, a composição $h = f \circ g$ de duas funções contínuas de várias variáveis também será contínua.

Exemplos de funções contínuas:

Polinomiais: $f(x,y) = x^5 + y$; $g(x,y,z) = x + y + z^2$

Composições: $h(x,y) = e^{(x+y)}$, $i(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$

$j(x,y) = \operatorname{sen}(x + y^2)$

Outro modo de produzir funções contínuas é através de operações entre funções já contínuas.

Proposição: Se f e g são funções contínuas no ponto (a,b) então

a) $f+g$ é contínua em (a,b).

b) Kf é contínua em (a,b).

c) $f \cdot g$ é contínua em (a,b).

d) f/g é contínua em (a,b), desde que $g(a,b) \neq 0$

Analogamente para funções f e g contínuas no ponto $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

Exemplos:

a) $f(x,y) = \dfrac{2xy+1}{x^2+y^2}$ é contínua em todo ponto de $\mathbb{R}^2$ exceto na origem $(0,0)$.

polinômio

polinômio

$x^2+y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0$.

b) $g(x,y,z) = 2\,\text{sen}\,x \cdot \cos y + z^3$

constante

polinômio

Derivadas Parciais

* $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

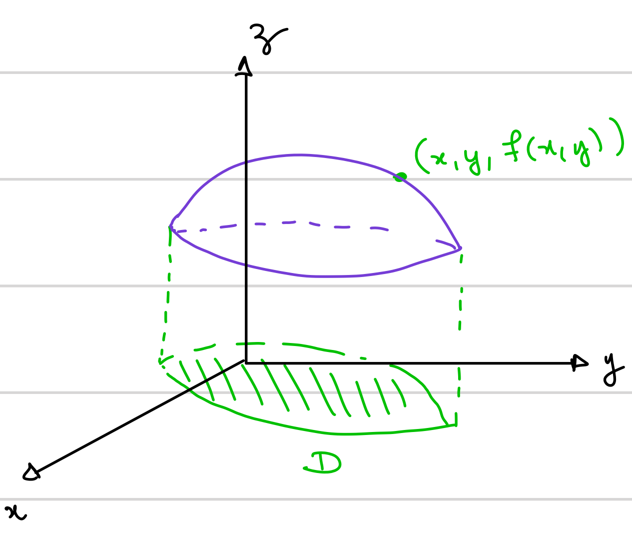
Quando $y=f(x)$ é derivável em x_0, o valor $f'(x_0)$ mede a variação da função f no instante x_0:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

variação média

ao tomar o limite obtemos a variação instântanea

* $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



Suponha que $f(x,y)$ seja a função temperatura, medida em graus, onde

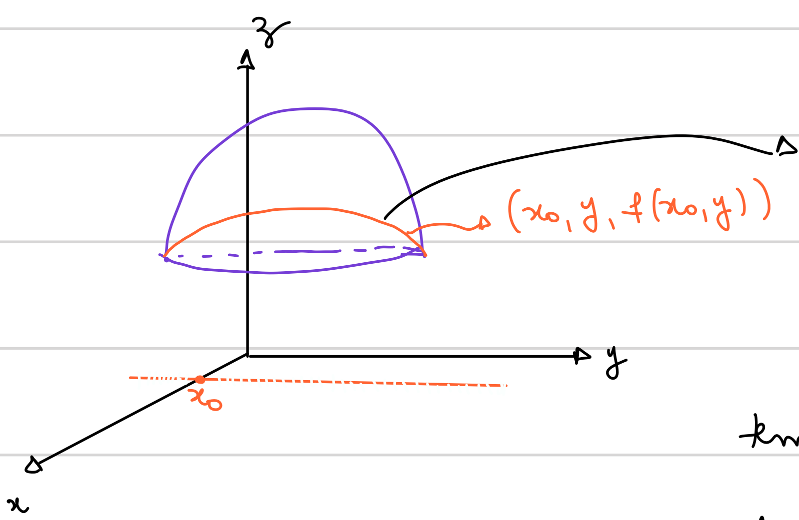
x: tempo medido em horas

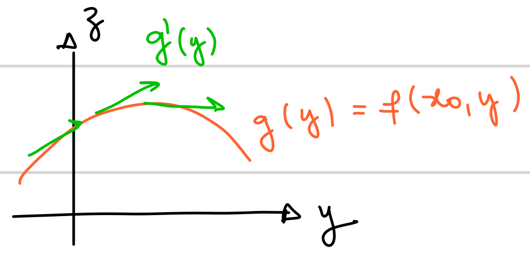
y: altitude de uma região medida em metros.

* Fixado o tempo $x = x_0$, a função $f(x_0, y)$ mede a temperatura neste instante e sua variação depende apenas da altitude y.
Assim, fixado o valor de x, a função passa a depender de apenas uma variável: $f(x_0, y) = g(y)$.

Por exemplo: Seja $f(x,y) = 2 - \sqrt{x^2 - y^2}$. Fixando o valor de $x = 1$, obtemos a função $f(1, y) = 2 - \sqrt{1 - y^2}$, que agora depende apenas de y.

Olhando no gráfico:





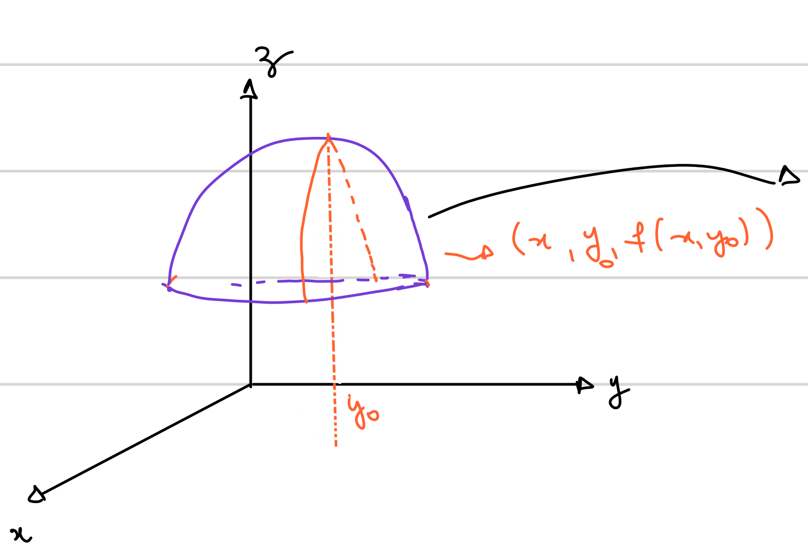
$g'(y)$ indica a variação da temperatura com relação a altitude y, uma vez que o tempo está fixado em x_0.

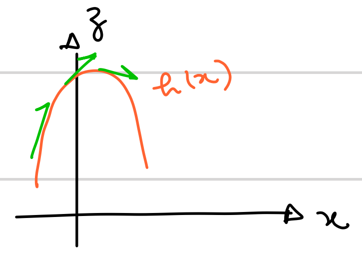
Escrevemos $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) = g'(y)$, a derivada parcial da função f com relação a y, para descrever a taxa de variação da função f com relação à variável y.

Já ao fixar a altitude $y = y_0$, a função $f(x, y_0)$ mede a temperatura na mesma altitude, mas em horas distintas; ou seja, a função depende apenas do tempo: $f(x, y_0) = h(x)$.

Por exemplo: Seja $f(x,y) = 2 - \sqrt{x^2 - y^2}$. Fixando o valor de $y = -2$, obtemos a função $f(x, -2) = 2 - \sqrt{x^2 - 4}$, que agora depende apenas de x.

Olhando no gráfico:





$h'(x)$ indica a variação da temperatura com relação ao tempo x, calculada na mesma altitude y_0.

Escrevemos $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) = h'(x)$, a derivada parcial da função f com relação a x, para descrever a taxa de variação da função f com relação à variável x.

Notação:

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = D_1 f$$
$$f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = D_2 f$$

Derivadas parciais de 1ª ordem da função $f(x,y)$.

Regra para determinar as derivadas parciais de 1ª ordem de $f(x,y)$.

1. $f_x(x,y)$: trate y como uma constante e derive $f(x,y)$ com relação a x.

Exemplos:

i) Quando temos $h(x) = x^2 + 1$ a derivada é dada por

$$h'(x) = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(1) = 2x + 0 = 2x.$$

Como 1 é constante, sua derivada é nula.

Procedemos da mesma forma ao derivar a função $f(x,y) = x^2 + y^3$.

Como y^2 é "constante" com relação a x, teremos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^3) = 2x + 0 = 2x.$$

ii) Se $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$ então $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 2xy^3$, pois

- y^3 é "constante" com relação a x e $(cf)'(x) = c \cdot f'(x)$.
- $-2y^2$ é "constante" com relação a x e $\frac{d}{dx}(c) = 0$.

obs: c = constante.

2. $f_y(x,y)$: trate x como uma constante e derive $f(x,y)$ com relação a y.

Exemplos:

i) Quando temos $g(y) = 2 + y^3$ a derivada é dada por

$$g'(y) = \frac{d}{dy}(2) + \frac{d}{dy}y^3 = 0 + 3y^2 = 3y^2.$$

Novamente, 2 é constante e sua derivada é nula.

Procedemos da mesma forma ao derivar a função $f(x,y) = x^2 + y^3$.

Como x^2 é "constante" com relação a y, teremos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{d}{dy}(x^2) + \frac{d}{dy}(y^3) = 0 + 3y^2 = 3y^2.$$

(ii) Se $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$ então $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2x^2 - 4y$, pois

- x^3 - "constante" com relação a y e $\frac{d}{dx}(c) = 0$.
- x^2 é "constante" com relação a y e $(cf)'(x) = c \cdot f'(x)$.

obs: c = constante.

Obs: O mesmo vale para uma função de três variáveis; ao derivar com relação a uma delas, as outras duas são tratadas como constantes. Por exemplo, se $f(x,y,z) = y e^x \ln z$ então

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y \ln z \, e^x$, pois $y \cdot \ln z$ é "constante" com relação a x e $\frac{d}{dx} e^x = e^x$;

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = e^x \ln z$, pois $e^x \ln z$ é "constante"

Exercícios:

01

1º: Compreensão do problema

$f(x,y) = x \cdot y$

Quem é a função?

$f(3,30) = 3 \cdot 30$ (reais . litro) $= 90$ (reais . litro)

$f(3.6, 30) = 3.6 \cdot 30$ (reais . litro) $= 108$ (reais . litro)

Quem são as derivadas parciais?

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{x \to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{\text{variação do custo (reais . litro)}}{\text{variação do preço (reais)}}$$

$$= b \text{ (litros)}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(3.6, 40) = 40$ litros (se houver qualquer variação Δx próximo a $x = 3.6$, o gasto com o combustível crescerá a uma taxa de 40 litros)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{y \to b} \frac{f(a,y) - f(a,b)}{y-b} = \lim_{y \to b} \frac{\text{variação do custo (reais . litro)}}{\text{variação da qtdade de comb. (litro)}}$$

$$= a \text{ (reais)}$$

$\frac{\partial f}{\partial y}(3.6, 40) = 3.6$ reais

havendo qualquer variação próxima a $y = 40$, o gasto com combustível deverá crescer a uma taxa de 3.6 reais.

Derivadas de ordem superior

- $2^{\underline{as}}$ derivadas

No caso em que f é uma função de duas variáveis, as derivadas parciais f_x e f_y também são funções de duas variáveis, então podemos considerar suas derivadas parciais, denotadas por:

- $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$ e $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$

2ª 1ª

- $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}$ e $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$.

2ª 1ª

Exemplos: Calcule as derivadas de 2ª ordem das seguintes funções:

a) $f(x,y) = 2x^3y + 5x^2y^2 - 3xy^2$

b) $f(x,y) = \cos(x-y)$

Analogamente, definimos as derivadas parciais de 2ª ordem para funções de 3 variáveis.

c) $f(x,y,z) = \operatorname{sen}(3x+yz)$.

2) Mostre que a função $u(x,t) = \operatorname{sen}(x-at) + \ln(x+at)$, a uma constante, satisfaz a equação da onda

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}.$$

3) Verifique que a função $u(t,x) = e^{-\alpha^2 k^2 t}\operatorname{sen}(kx)$, α, k constantes, é uma solução da equação do calor

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}.$$