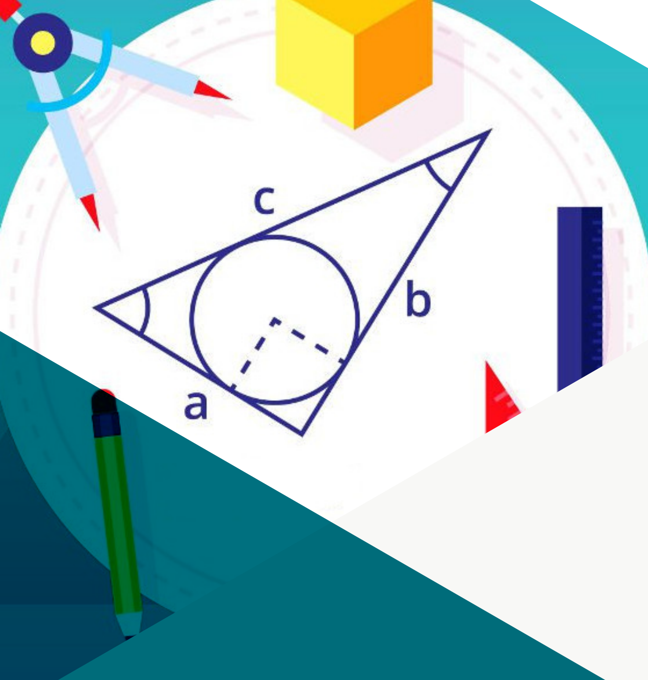


CÁLCULO II

Aplicações de Integrais

Parte I

Karla Lima

Sumário

Revisão: Área entre Curvas

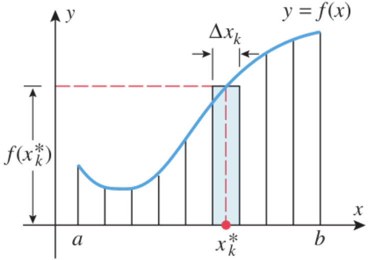
Revisitando a Definição [1]

- Antes de considerarmos o problema de área entre duas curvas, é útil recordar o princípio básico do cálculo de área como uma integral definida.
- Para que uma integral definida possa representar a área abaixo de uma função f sobre o intervalo $[a, b]$, precisamos que:
  - f seja contínua em $[a, b]$;
  - $f \geq 0$ em $[a, b]$.

Revisitando a Definição

A área A sob f sobre o intervalo $[a, b]$ é dado nos seguintes passos:

- Divida o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos. Usa cada um para dividir a região abaixo da curva em n tiras.
- Supondo que Δx_k é o comprimento da tira, aproximamos sua área por $f(x_k^*)\Delta x_k$, com $f(x_k^*)$ sendo a altura do retângulo aproximante.
- Somamos as áreas aproximadas de todas as n tiras, para aproximar a área inteira A, usando a soma de Riemann:



$$A \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

Revisitando a Definição

Por fim, tomamos o limite das somas de Riemann.

- O número de tiras aumenta, ao passo que o seu comprimento tende a zero.
- Isso resulta no erro cometido nas aproximações tender a zero, produzindo a área exata de A:

$$A = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx.$$

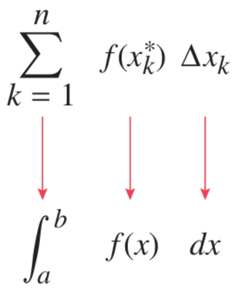
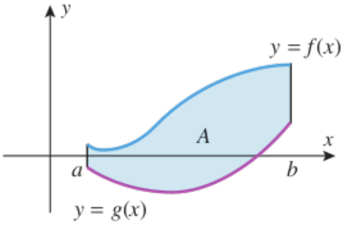


Figura 1: Efeito do limite na soma de Riemann

Área entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$

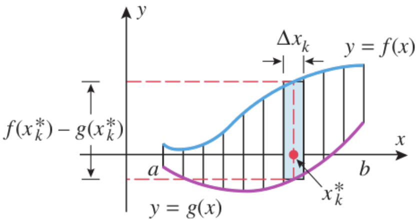
Suponha que f e g são funções contínuas no intervalo $[a, b]$ e que a curva de f está sempre acima da curva de g:

$$f(x) \geq g(x) \text{ para } a \leq x \leq b$$



Área entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$

Analogamente ao problema de área inicial, usamos os seguintes passos:



- Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos. Usa cada um para dividir a região entre as curvas em n tiras.
- Supondo que Δx_k é o comprimento da tira, aproximamos sua área por

$$(f(x_k^*) - g(x_k^*))\Delta x_k,$$

  com $f(x_k^*) - g(x_k^*)$ sendo a altura do retângulo aproximante.
- Somamos as áreas aproximadas de todas as n tiras, para aproximar a área inteira A, usando a soma de Riemann: $A \approx \sum_{k=1}^{n} [f(x_k^*) - g(x_k^*)]\Delta x_k$.

Revisitando a Definição

Por fim, tomamos o limite das somas de Riemann:

- O número de tiras aumenta, ao passo que o seu comprimento tende a zero.
- Isso resulta no erro cometido nas aproximações tender a zero, produzindo a área exata de A:

$$A = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(x_k^*) - g(x_k^*)]\Delta x_k = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

Um problema de velocidade

Deriva-se do Teorema Fundamental do Cálculo, o Teorema da Variação Total: a integral de uma taxa de variação é a variação total

$$\int_a^b F'(x) = F(b) - F(a) \quad \text{(variação de } F \text{ no intervalo } [a, b]\text{)}.$$

Um problema de velocidade

Sabendo que a velocidade é a taxa de variação instantânea da função posição $s(t)$, obtemos que

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t) = \int_{t_1}^{t_2} s'(t) = s(t_2) - s(t_1),$$

de onde segue que a integral acima representa o deslocamento de uma partícula durante o período de tempo t_1 a t_2.

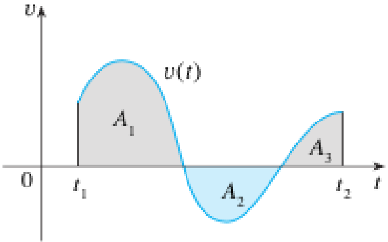
Um problema de velocidade

Se quisermos calcular a distância percorrida durante este mesmo intervalos, teremos que considerar tanto quanto $v \geq 0$ (a partícula se move no sentido do movimento) e també os intervalos onde $v \leq 0$ (a partícula se move no sentido contrário ao do movimento). Para ambos os casos, a distância é calculada integrando-se $|v(t)|$ (velocidade escalar):

$$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)| = \text{ distância total percorrida.}$$

Um problema de velocidade

Resumindo, temos:

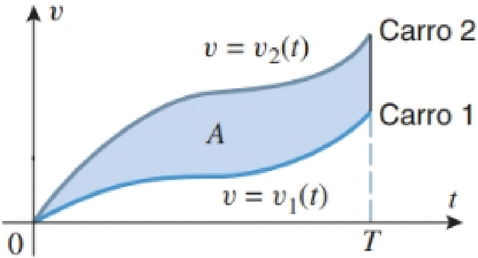


$$\text{deslocamento} = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = A_1 - A_2 + A_3$$

$$\text{distância} = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt = A_1 + A_2 + A_3$$

Um problema de velocidade

A figura abaixo mostra as curvas velocidade $\times$ tempo, para dois carros de corrida movendo-se em uma pista reta, partindo do repouso no mesmo instante. O que representa a área entre as curvas, no intervalo $0 \leq t \leq T$?

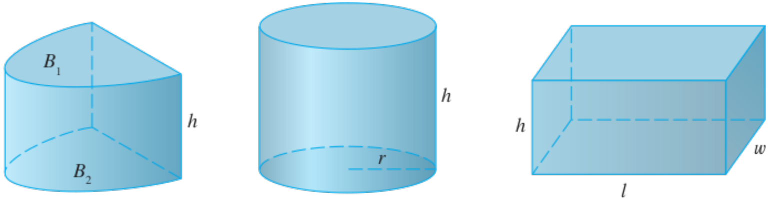


Volumes

Sólidos Simples [2]

- Para sólidos denominados ’cilindros retos’, já sabemos como calcular seu volume:

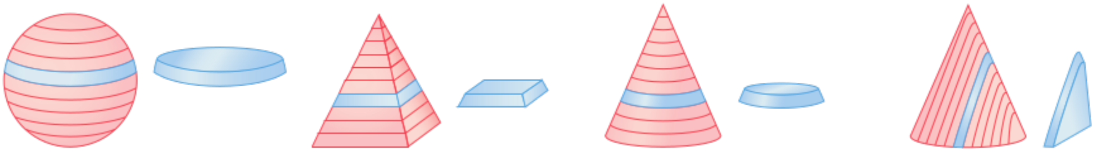
$$\text{Volume} = \text{Área da Base} \times \text{Altura}.$$



(a) Cilindro $V = Ah$ (b) Cilindro circular $V = \pi r^2 h$ (c) Caixa retangular $V = lwh$

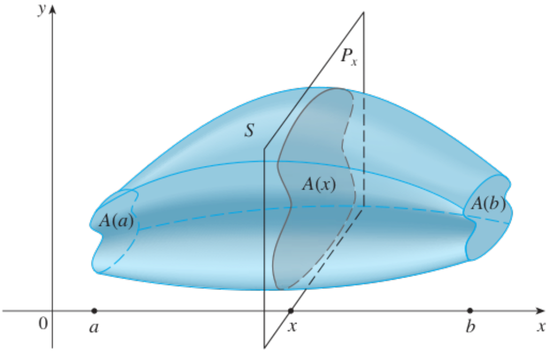
Volume por Seção Transversal

- Para um sólido S que não é um cilindro, primeiro 'cortamos' S em pedaços que aproximamos por um cilindro :



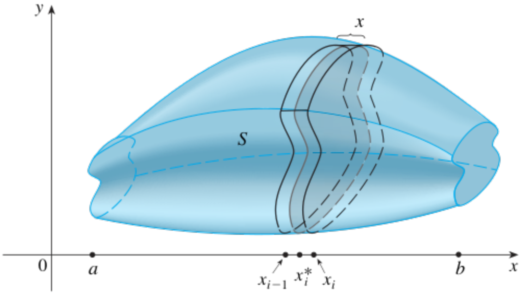
Volume por Seção Transversal

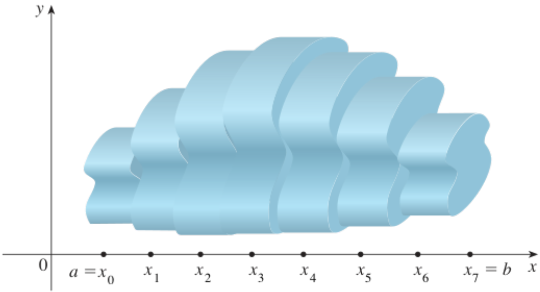
- Começamos interceptando S com um plano, obtendo uma região plana chamada **seção transversal** :



Volume por Seção Transversal

- Dividimos S em n fatias de larguras iguais Δx.
- Aproximamos o volume dessas fatias pelos cilindros de área da base igual à $A(x_i^*)$ e altura Δx:





Volume por Seção Transversal

- Com isso,

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x.$$

- Como em cálculo de áreas, essa aproximação melhora quando $n \to \infty$ (as fatias vão ficando mais finas e o erro vai ficando menor).

Volume por Seção Transversal

Definição 1

Seja S um sólido que está entre $x = a$ e $x = b$.

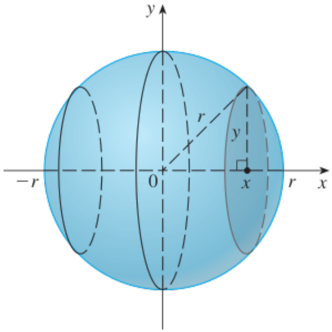
1. *Passamos um plano perpendicular ao eixo x e calculamos a área da seção transversal $A(x)$.*
2. *O volume de S é dado por*

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x = \int_a^b A(x)\,dx.$$

O Volume da Esfera

Exemplo 1

Mostre que o volume de uma esfera de raio r é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

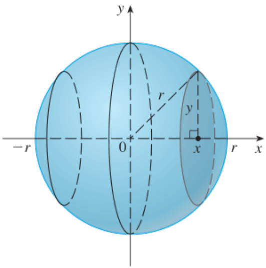


O Volume da Esfera

Como aplicação de cálculo de área, podemos concluir que a área da região delimitada por um círculo de raio y é πy^2.

- Ao fatiar a esfera com um plano perpendicular ao eixo x, obtemos seções transversais circulares.
- O raio é dado pela altura y, perpendicular ao eixo x, que pode ser obtido através do teorema de Pitágoras, no triângulo indicado na figura:

$$r^2 = y^2 + x^2, \ \text{com}\ x, y, r > 0 \ \Rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$



O Volume da Esfera

Portanto, como o raio r é único para cada esfera, a área da seção transversal está bem definida e é dada por $A(x) = \pi y(x)^2 = \pi(r^2 - x^2)$.

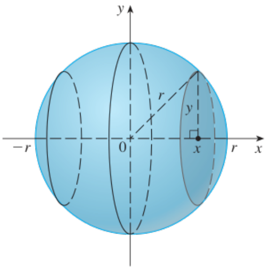
- Usando a definição de volume, com $a = -r$ e $b = r$, temos

$$V = \int_{-r}^{r} A(x)\,dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\,dx$$

$$= \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{r}$$

$$= \pi \left[r^3 - \frac{r^3}{3} - \left(-r^3 + \frac{r^3}{3}\right) \right]$$

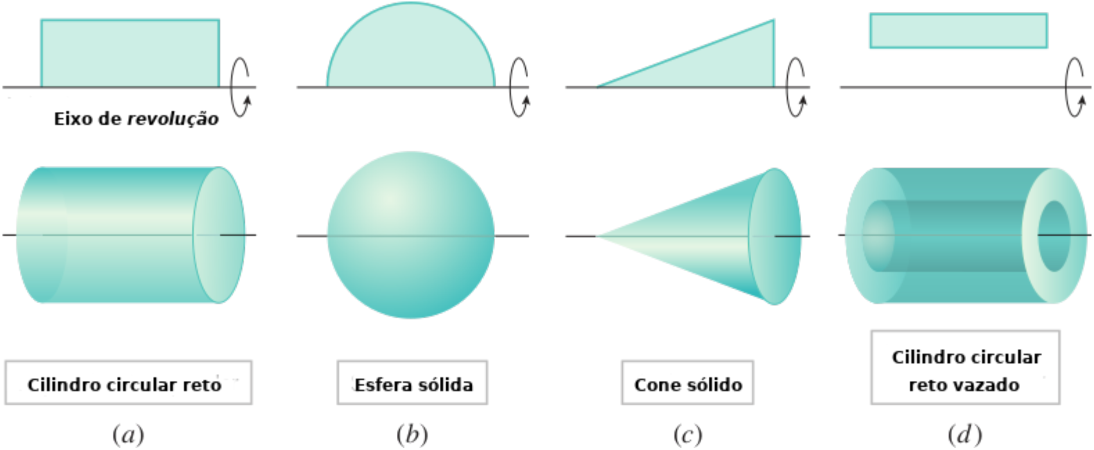
$$= \pi r^3 \left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$



Volumes de Sólidos de Revolução

- A esfera é um exemplo de um tipo de sólido interessante: um sólido de revolução.
- Um **sólido de revolução** é um sólido que é gerado girando uma região plana em torno de uma linha que está no mesmo plano da região; a linha é chamada de eixo de revolução.
- Os cortes plano perpendiculares a esse eixo de revolução são circulares, iguais às da esfera no exemplo anterior.

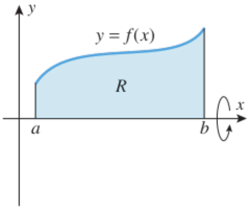
Volumes de Sólidos de Revolução

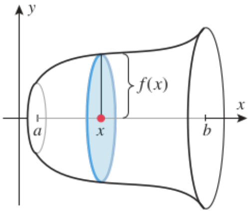


Volumes de Sólidos de Revolução Não Vazados

Caso 1: O eixo de rotação é o eixo x.

- Supondo que a região a ser rotacionada é delimitada por:
  - um gráfico de uma função contínua e não negativa em $[a, b]$;
  - o eixo de revolução x;
  - pelas retas $x = a$ e $x = b$, nas laterais.





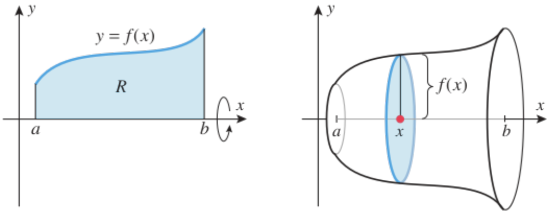
Volumes de Sólidos de Revolução Não Vazados

Para esse tipo de sólido, o raio da seção transversal fica bem definido, e podemos calcular seu volume.

- O raio da seção transversão é dada por $r = f(x)$;
- Com isso, a área da seção transversal é dada por

$$A(x) = \pi r^2 = \pi[f(x)]^2$$

e o volume é dado por

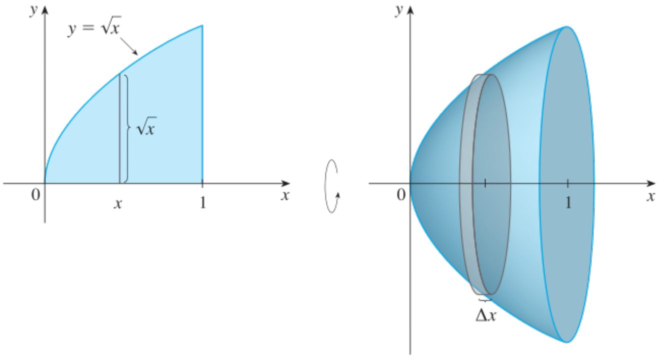


$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx.$$

Exemplo

Exemplo 2

Vamos encontrar o volume do sólido obtido em torno do eixo x da região sob a curva $y = \sqrt{x}$ *de* 0 *até* 1.



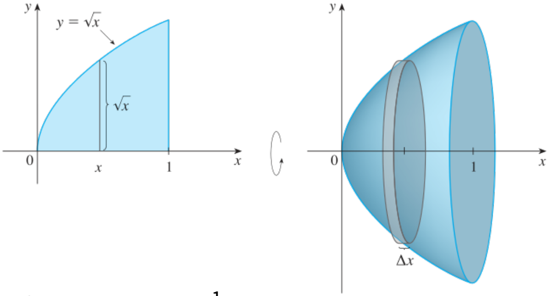
Exemplo

Solução:

- O raio da seção transversão é dada por $f(x) = \sqrt{x}$;
- Com isso, a área da seção transversal é dada por

$$A(x) = \pi[\sqrt{x}]^2 = \pi x$$

e o volume é dado por

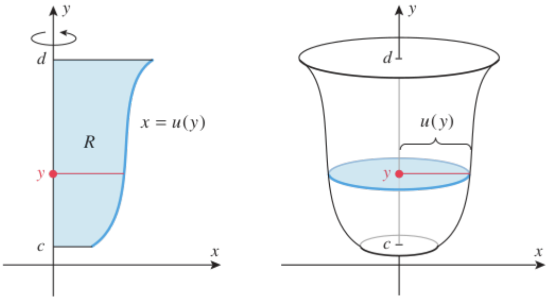


$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi x\,dx = \pi\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Volumes de Sólidos de Revolução Não Vazados

Caso 2: O eixo de rotação é o eixo y.

- Supondo que a região a ser rotacionada é delimitada por:
  - um gráfico de uma função contínua e não negativa em $[c, d]$;
  - o eixo de revolução y;
  - pelas retas $y = c$ e $y = d$, por baixo e por cima.



Volumes de Sólidos de Revolução Não Vazados

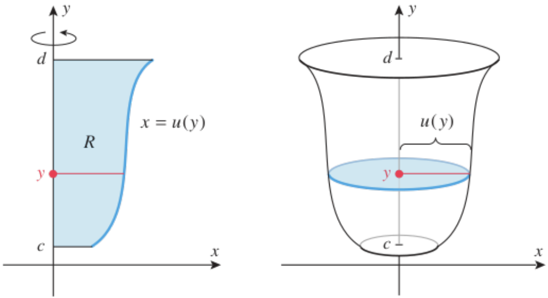
Para esse tipo de sólido, o raio da seção transversal fica bem definido, e podemos calcular seu volume.

- O raio da seção transversão é dada por $r = u(y)$;
- Com isso, a área da seção transversal é dada por

$$A(y) = \pi r^2 = \pi[u(y)]^2$$

e o volume é dado por

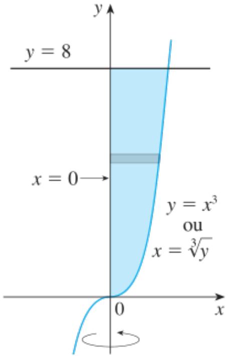
$$V = \int_c^d A(y)\, dy = \int_c^d \pi[u(y)]^2\, dy.$$

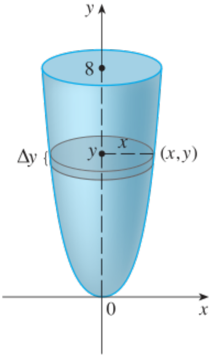


Exemplo

Exemplo 3

Vamos encontrar o volume do sólido obtido pela rotação da região delimitada por $y = x^3$, $y = 8$ *e* $x = 0$ *(eixo y).*





Exemplo

Solução:

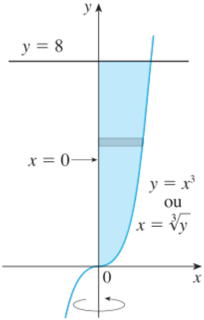
- O raio da seção transversão é dada por $u(y) = \sqrt[3]{y}$;
- Com isso, a área da seção transversal é dada por

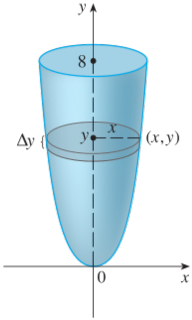
$$A(y) = \pi[\sqrt[3]{y}]^2 = \pi x$$

e o volume é dado por

$$V = \int_0^1 A(y)\,dy = \int_0^8 \pi x^{2/3}\,dy$$

$$= \pi\,\frac{x^{5/3}}{5/3}\Big|_0^8 = \frac{96\pi}{5}.$$

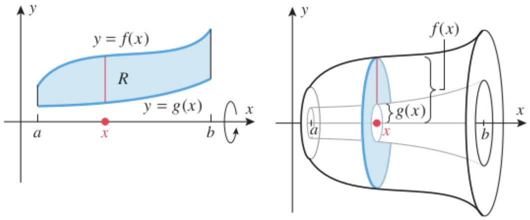




Volumes de Sólidos de Revolução Vazados

Caso 3: O eixo de rotação é o eixo x.

- Supondo que a região a ser rotacionada:
  - está entre os gráficos de duas funções contínuas e não negativa em $[a, b]$;
  - é limitada nas laterais pelas retas $x = a$ e $x = b$.



Volumes de Sólidos de Revolução Não Vazados

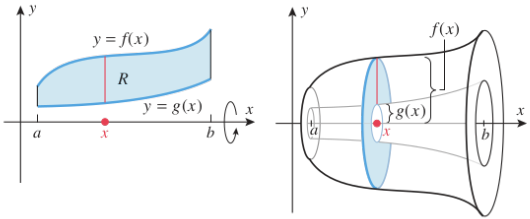
Para esse tipo de sólido, o raio da seção transversal fica bem definido, e podemos calcular seu volume.

- A seção transversal é dada pela região entre dois círculos: um de raio $f(x)$ e outro $g(x)$;
- Com isso, a área da seção transversal é dada por

$$A(x) = \pi[f(x)]^2 - \pi[g(x)]^2$$

e o volume é dado por

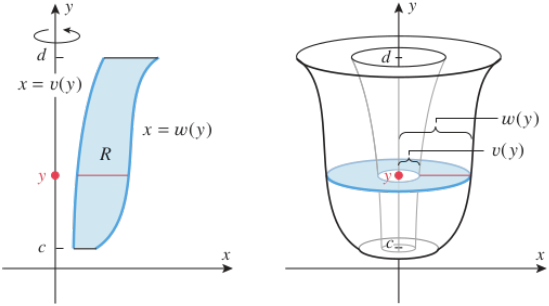
$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi\left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right)\,dx.$$



Volumes de Sólidos de Revolução Vazados

Caso 3: O eixo de rotação é o eixo y.

- Supondo que a região a ser rotacionada:
  - está entre os gráficos de duas funções contínuas e não negativa em $[c, d]$;
  - é limitada nas laterais pelas retas $y = c$ e $y = d$.



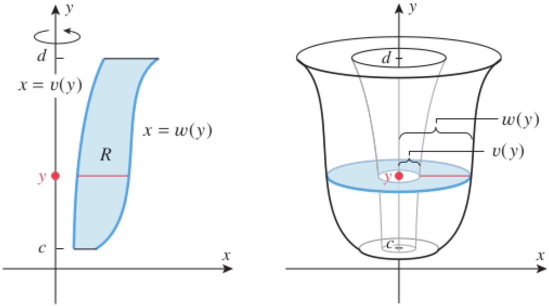
Volumes de Sólidos de Revolução Não Vazados

Para esse tipo de sólido, o raio da seção transversal fica bem definido, e podemos calcular seu volume.

- A seção transversal é dada pela região entre dois círculos: um de raio $v(y)$ e outro $w(y)$;
- Com isso, a área da seção transversal é dada por

$$A(y) = \pi[v(y)]^2 - \pi[w(y)]^2$$

e o volume é dado por



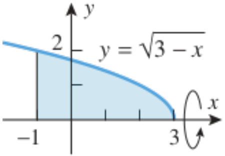
$$V = \int_c^d A(y)\, dy = \int_c^d \pi \left([v(y)]^2 - [w(y)]^2\right)\, dy.$$

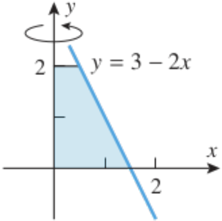
Exercícios

Exercício

Exercício 1

Encontre o volume do sólido que resulta na revolução da região sombreada, em torno do eixo indicado:





Referencias I

- H. Anton, I. Bivens, and S. Davis.
  Cálculo - Volume I - 10.ed.
  Bookman Editora, 2014.

- J. Stewart.
  Calculo: volume 1.
  Pioneira Thomson Learning, 2006.