

## **Aula 08**

### **Polígonos**

Karla Lima

17/02/2023

# Sumário



## 1. Polígonos



# Polígonos

# Definição

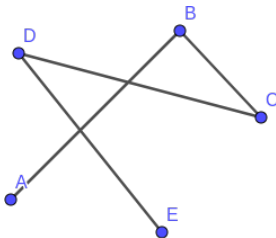


## Definição 1

Sejam  $A_1, A_2, \dots, A_n$  pontos coplanares, dos quais três quaisquer deles não são colineares. A união dos segmentos  $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}$  é denominada **linha poligonal**.

## Exemplo 1

Abaixo, temos a linha poligonal formada pelos pontos A, B, C, D e E.



# Definição



- Os pontos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  são os vértices da poligonal e os segmentos correspondentes são os seus lados.

## Definição 2

Um **polígono** é uma linha poligonal que satisfaz as seguintes condições:

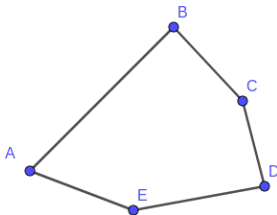
- a)  $A_1 \equiv A_n$ ;
- b) *Dois lados quaisquer da poligonal ou não se interceptam ou se interceptam apenas em seus extremos.*

# Definição



## Exemplo 2

*Abaixo, temos um polígono formada pelos vértices A, B, C, D e E.*



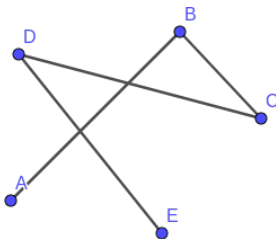
**Figura 1:** Polígono ABCDE

# Definição



## Exemplo 3

*Você consegue justificar por que a linha poligonal do exemplo 1 não é um polígono?*

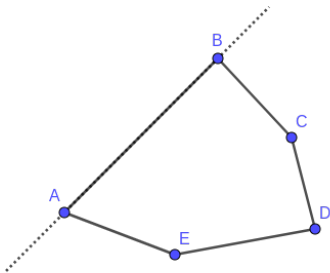


# Definição

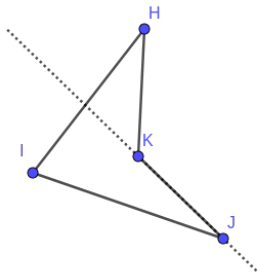


## Definição 3

Um polígono é dito **convexo** se o mesmo fica contido em um mesmo semiplano com respeito a reta que contém qualquer um dos seus lados.



Polígono Convexo



Polígono Não Convexo



# Nomenclatura



Os polígonos convexos recebem denominações especiais, de acordo com o número de seus lados:

- ▶ Um polígono com 3 lados chama-se **triângulo**.
- ▶ Um polígono com 4 lados chama-se **quadrilátero**.
- ▶ Um polígono com 5 lados chama-se **pentágono**.
- ▶ Um polígono com 6 lados chama-se **hexágono**.
- ▶ Um polígono com 7 lados chama-se **heptágono**.
- ▶ Um polígono com 8 lados chama-se **octógono**.
- ▶ Um polígono com 9 lados chama-se **eneágono**.

# Nomenclatura



- ▶ Um polígono com 10 lados chama-se **decágono**.
- ▶ Um polígono com 11 lados chama-se **undecágono**.
- ▶ Um polígono com 12 lados chama-se **dodecágono**.
- ▶ Um polígono com 15 lados chama-se **pentadecágono**.
- ▶ Um polígono com 20 lados chama-se **icoságono**.
- ▶ Em geral, um polígono com  $n$  lados chama-se  **$n$ -látero**.

# Definição

## Definição 4

Um **polígono regular** é aquele que tem os lados congruentes e os ângulos também congruentes.

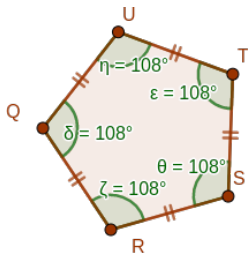
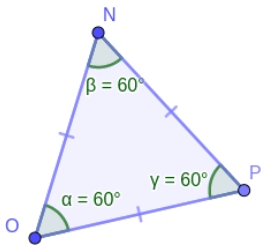


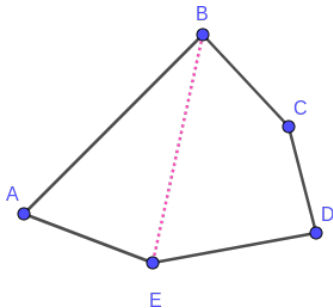
Figura 2: Polígonos Regulares

# Definição



## Definição 5

*Diagonal* de um polígono é o segmento que une dois vértices não consecutivos.



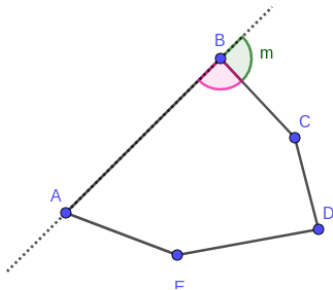
**Figura 3:**  $\overline{BE}$  é uma diagonal do polígono  $ABCDE$

# Definição



## Definição 6

Denominamos de **ângulo externo** de um polígono ao suplemento de qualquer um de seus ângulos internos.



**Figura 4:**  $m$  é um ângulo externo do polígono  $ABCDE$ , em  $\hat{B}$

# Diagonais



Vamos visualizar algumas diagonais no Geogebra (Click para baixar)

# Teorema



## Teorema 1

*O número de diagonais de um polígono de  $n$  lados é dado pela fórmula*

$$d = \frac{n(n-3)}{2}.$$

- **Hipótese:** O polígono possui  $n$  lados. Logo, possui  $n$  vértices

$$A_1, A_2, \dots, A_n.$$

- **Tese:** A fórmula

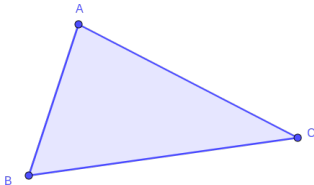
$$d = \frac{n(n-3)}{2}.$$

determina o número de diagonais do polígono.

# Demonstração: Teorema 1



- ▶ Seja  $n = 3$ . Temos um triângulo:



- ▶ Qualquer segmento que une dois vértices do triângulo, resulta em um lado do mesmo.
- ▶ Ou seja, o número de diagonais  $d$  é zero.
- ▶ A fórmula, então, é verdadeira para  $n = 3$ , uma vez que

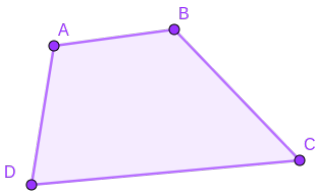
$$\frac{n(n-3)}{2} = \frac{3(3-3)}{2} = 0.$$



# Demonstração: Teorema 1

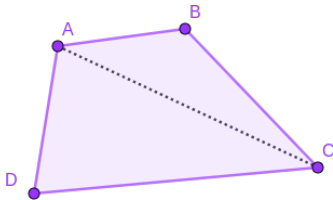


- ▶ Para  $n = 4$ , temos um quadrilátero.



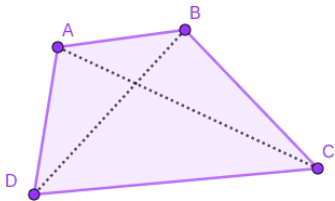
- ▶ Para formar os lados, cada vértice é ligado a outros 2 vértices.
- ▶ No caso do triângulo, ao fixar um dos vértices e ligá-lo à 2 deles, não há vértice livre para formar uma diagonal.
- ▶ No caso do quadrilátero, quantos vértices ficam disponíveis para formar uma diagonal?

# Demonstração: Teorema 1



- ▶ Por exemplo, ao fixarmos os vértice A, os lados são formados por  $\overline{AB}$  e  $\overline{AD}$ , ficando o vértice C livre para formar a diagonal  $\overline{AC}$ .
- ▶ O mesmo ocorre com cada um dos vértices restantes: cada um só pode gerar uma diagonal com o vértice restante.
- ▶ São eles:  $\overline{AC}$ ,  $\overline{BD}$ ,  $\overline{CA}$ ,  $\overline{DB}$ .

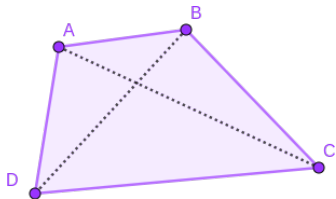
# Demonstração: Teorema 1



- Assim, cada vértice gera 1 diagonal, que é o número de vértices que restam após eu fixar um vértice e formar lados com dois outros vértices do polígono:

$$4 \text{ (vértices)} \times (4 \text{ (vértices)} - 3 \text{ (vértices usados para formar os lados)}) = 4 \times 1 = 4$$

# Demonstração: Teorema 1



- Como  $\overline{AC} = \overline{CA}$  e  $\overline{BD} = \overline{DB}$ , estamos contando a mesma diagonal 2 vezes.
- Portanto, o número de diagonais é dado por

$$\frac{4 \text{ (vértices)} \times (4 \text{ (vértices)} - 3 \text{ (vértices usados para formar os lados)})}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

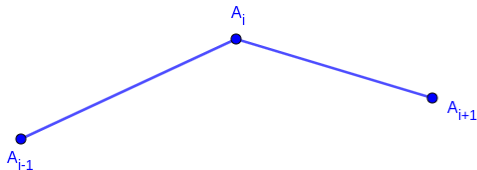
- Novamente, para  $n = 4$ , temos que o número de diagonais é dado pela fórmula

$$\frac{n(n-3)}{2} = \frac{4(4-3)}{2} = 2.$$

# Demonstração: Teorema 1



- Se o polígono tem  $n$  lados, então, ao fixarmos um vértice para formar dois lados do mesmo, usamos 3 vértices e nos restam  $n - 3$  vértices para formarmos as diagonais.



- Assim, são  $n(n - 3)$  diagonais, mas como  $\overline{A_i A_j} = \overline{A_j A_i}$ , cada diagonal foi computada duplamente.

Portanto, o número de diagonais é metade desse valor,

$$\frac{n(n - 3)}{2},$$

como queríamos demonstrar.

# Teorema



## Teorema 2

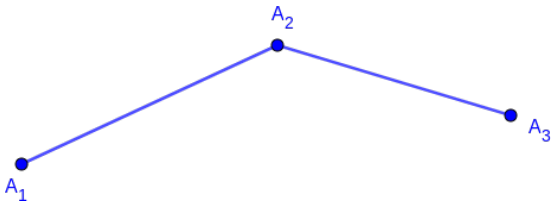
*A soma dos ângulos internos de um polígono de  $n$  lados é dado pela fórmula*

$$S_i = 180^\circ(n - 2)$$

## Demonstração: Teorema 2

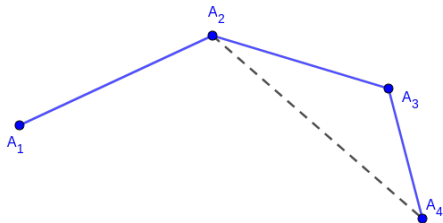


Como vimos na demonstração do teorema 1, um vértice é ligado a dois outros adjacentes para formar lados do polígono:



Acima, se o polígono tem  $n$  lados, então ele possui  $n - 3$  outros vértices que fazem diagonal com  $A_2$ .

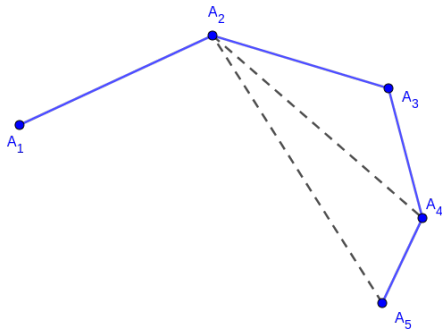
## Demonstração: Teorema 2



- ▶ A primeira diagonal pode ser traçada com o vértice adjacente ao vértice  $A_3$ .
- ▶ Com isso, essa diagonal descreve um triângulo  $A_2A_3A_4$  no polígono dado.



## Demonstração: Teorema 2

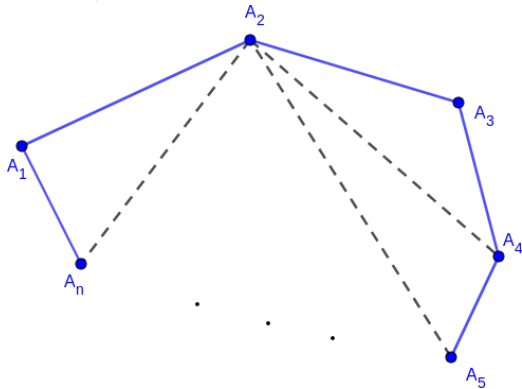


- ▶ A segunda diagonal pode ser traçada com o vértice adjacente ao vértice  $A_4$ .
- ▶ Com isso, essa diagonal descreve um triângulo  $A_2A_4A_5$  no polígono dado.

## Demonstração: Teorema 2



- Cada diagonal a partir de  $A_2$  pode ser traçada com um vértice  $A_i$ , com  $i \neq 1$  e  $i \neq 3$ , gerando um triângulo  $A_2A_iA_{i+1}$  até o último vértice  $A_n$  que faz um triângulo  $A_2A_nA_1$ .



## Demonstração: Teorema 2



► Ou seja, temos os triângulos

1.  $A_2 A_3 A_4$  ( $\triangle$  número 1 =  $3 - 2$ )

2.  $A_2 A_4 A_5$  ( $\triangle$  número 2 =  $4 - 2$ )

$\vdots$

n-3.  $A_2 A_{n-1} A_n$  ( $\triangle$  número  $n - 3 = (n - 1) - 2$ )

n-2.  $A_2 A_n A_1$  ( $\triangle$  número  $n - 2 = n - 2$ )

- O polígono está dividido em  $n - 2$  triângulos, cuja soma dos ângulos internos é  $180^\circ$ .
- Portanto, a soma dos ângulos internos do polígono original é

$$S_i = 180^\circ (n - 2),$$

c.q.d.

# Corolário



## Corolário 1

*Se o polígono é regular, então cada ângulo interno mede*

$$a_i = \frac{180^\circ(n - 2)}{n}.$$

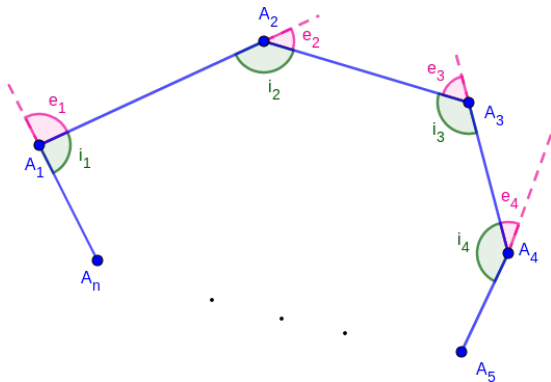
# Teorema



## Teorema 3

*A soma dos ângulos externos de um polígono convexo é igual à  $360^\circ$ .*

## Demonstração: Teorema 3



- A soma de um ângulo interno com o ângulo externo correspondente é igual a  $180^\circ$ .

## Demonstração: Teorema 3



► Isto é,

$$i_1 + e_1 = 180^\circ$$

$$i_2 + e_2 = 180^\circ$$

$$\vdots$$

$$i_n + e_n = 180^\circ$$

► Some os membros dessa igualdade e conclua que

$$S_e = 360^\circ$$

# Corolário



## Corolário 2

*Se o polígono é regular, então cada ângulo externo mede*

$$a_e = \frac{360^\circ}{n}.$$