

Aula 10: Funções Exponenciais.

Karla Lima

Sumário



1. Bibliografia
2. Motivação e Propriedades
3. A Função Exponencial
4. O Número de Euler
5. Exercícios



Bibliografia

Bibliografia da Aula 08



- ▶ Fundamentos da Matemática Elementar: 2 (Click para baixar)

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the upper-left portion, while a light gray shape occupies the lower-left portion. The rest of the slide is white. The text is centered in the white area.

Motivação e Propriedades

Meia-vida



- ▶ **Meia-vida** é o tempo necessário para desintegrar a metade da massa de um composto químico.
- ▶ Por exemplo, se tivermos 100 kg de um material, cuja meia-vida é de 100 anos, depois desses 100 anos, teremos 50 kg deste material. Mais 100 anos e teremos 25 kg, mais 100 anos e teremos 12,5 kg, mais 100 anos 6,25 kg, mais 100 anos 3,125 kg, mais 100 anos 1,5625 kg, mais 100 anos 0,78125 kg e assim sucessivamente.
- ▶ No caso do carbono-14 a meia-vida é de 5.730 anos, ou seja, este é o tempo necessário para uma determinada massa deste isótopo instável decair para a metade da sua massa, transformando-se em nitrogênio-14 pela emissão de uma partícula beta.
- ▶ Esta medida é utilizada para a datação de fósseis e elementos químicos radioativos.

Meia-vida



Exemplo 1

A concentração de alguns medicamentos no organismo está relacionada com a meia-vida. Ou seja, o tempo necessário para que a quantidade inicial do medicamento no organismo seja reduzida pela metade. A meia-vida do antibiótico amoxicilina é de 1 hora. Sabendo que um paciente ingeriu 1000mg desse medicamento às 7 horas, qual é, aproximadamente, a concentração desse medicamento no organismo desse paciente, às 16 horas do mesmo dia?

Meia-vida



Às 8 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\frac{1000}{2} = 500\text{mg}$:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	0	0	0	0	0	0	0	0

Meia-vida



Às 8 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\frac{1000}{2} = 500\text{mg}$:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	0	0	0	0	0	0	0	0

Às 9 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\frac{\frac{1000}{2}}{2} = 250\text{mg}$:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	250	0	0	0	0	0	0	0

Meia-vida



Às 10 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\frac{1000}{2^2} = 125\text{mg}$:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	250	125	0	0	0	0	0	0

Meia-vida



Às 10 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\frac{1000}{2^2} = 125\text{mg}$:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	250	125	0	0	0	0	0	0

Às 11 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\frac{1000}{2^3} = 62,5\text{mg}$:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	250	125	62,5	0	0	0	0	

Meia-vida



Às 12 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\frac{1000}{2^4} = 31,25\text{mg}$:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	250	125	62,5	31,25	0	0	0	0

Meia-vida



Às 12 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\frac{1000}{2^4} = 31,25\text{mg}$:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	250	125	62,5	31,25	0	0	0	0

Às 13 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\frac{1000}{2^5} = 15,625\text{mg}$:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	250	125	62,5	31,25	15,625	0	0	0

Meia-vida



Às 14 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\frac{1000}{2^6} = 7,8125\text{mg}$:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	250	125	62,5	31,25	15,625	7,8125	0	0

Meia-vida



Às 14 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\frac{1000}{2^6} = 7,8125\text{mg}$:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	250	125	62,5	31,25	15,625	7,8125	0	0

Às 15 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\frac{1000}{2^7} = 3,90625\text{mg}$:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	250	125	62,5	31,25	15,625	7,8125	3,90625	0

Meia-vida



Às 16 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\frac{1000}{2^8} = 1,953125\text{mg}$:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	250	125	62,5	31,25	15,625	7,8125	3,90625	1,953125

Portanto, às 16 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de aproximadamente 1,95mg.

Meia-vida



Observe que:

- ▶ A diminuição inicial é bem significativa;
- ▶ A medida que a quantidade se aproxima de zero, a diminuição é mais lenta.

Meia-vida



Ainda,

- ▶ Após a primeira hora a quantidade é dada pela expressão $\frac{1000}{2}$;
- ▶ Após a segunda hora a quantidade é dada pela expressão $\frac{1000}{2^2}$;
- ▶ Após a terceira hora a quantidade é dada pela expressão $\frac{1000}{2^3}$;
- ▶ Assim por diante, até que, após 9 horas, a quantidade é dada pela expressão $\frac{1000}{2^9}$.
- ▶ No geral, após t horas, a quantidade é dada pela expressão $\frac{1000}{2^t} = 1000 * 2^{-t}$.

Meia-vida



Assim, se quisermos saber a quantidade de medicamento no organismo após 24 horas, basta calcular

$$1000 * 2^{-24} = \frac{1000}{16777216} \approx 0,00006\text{mg.}$$

Exercício



Exercício 1

A meia-vida de certa substância radioativa é igual a 14 dias. Existem 6,6 gramas presentes inicialmente.

- a) Expresse a quantidade da substância remanescente como uma função do tempo t , em dias.*
- b) Quando existirá menos de 1 grama?*

A Lenda do Xadrez [1]



- ▶ O primeiro registro do problema do trigo num tabuleiro de xadrez é de 1256, do historiador muçulmano Ibn Khallikan, mas é provável que recontre uma versão anterior do século V.
- ▶ Segundo a história, a invenção do xadrez é creditada a um brâmane de uma corte indiana, que, atendendo a um pedido do rei, inventou o jogo para demonstrar o valor da inteligência. O rei, encantado com o invento, ofereceu ao brâmane a escolha de uma recompensa. De acordo com essa lenda, o inventor do jogo de xadrez pediu ao rei que a recompensa fosse paga em grãos de arroz da seguinte maneira: 1 grão para a casa 1 do tabuleiro, 2 grãos para a casa 2, 4 para a casa 3, 8 para a casa 4 e assim sucessivamente. Ou seja, a quantidade de grãos para cada casa do tabuleiro correspondia ao dobro da quantidade da casa imediatamente anterior.

A Lenda do Xadrez [1]



- ▶ Perplexo ante o que parecia ser uma magra recompensa, o rei ordenou que os grãos fossem contados.
- ▶ Vamos fazer alguns cálculos:
 - ▶ Quantos grãos contém o oitavo quadrado?

A Lenda do Xadrez [1]



- ▶ Perplexo ante o que parecia ser uma magra recompensa, o rei ordenou que os grãos fossem contados.
- ▶ Vamos fazer alguns cálculos:
 - ▶ Quantos grãos contém o oitavo quadrado? $R:128$.

A Lenda do Xadrez [1]



- ▶ Perplexo ante o que parecia ser uma magra recompensa, o rei ordenou que os grãos fossem contados.
- ▶ Vamos fazer alguns cálculos:
 - ▶ Quantos grãos contém o oitavo quadrado? $R:128$.
 - ▶ E no trigésimo segundo, na primeira metade do tabuleiro? E no trigésimo terceiro?

A Lenda do Xadrez [1]



- ▶ Perplexo ante o que parecia ser uma magra recompensa, o rei ordenou que os grãos fossem contados.
- ▶ Vamos fazer alguns cálculos:
 - ▶ Quantos grãos contém o oitavo quadrado?R:128.
 - ▶ E no trigésimo segundo, na primeira metade do tabuleiro? E no trigésimo terceiro?R: Aproximadamente 2 bilhões e 4 bilhões, respectivamente.

A Lenda do Xadrez [1]



- ▶ Perplexo ante o que parecia ser uma magra recompensa, o rei ordenou que os grãos fossem contados.
- ▶ Vamos fazer alguns cálculos:
 - ▶ Quantos grãos contém o oitavo quadrado?R:128.
 - ▶ E no trigésimo segundo, na primeira metade do tabuleiro? E no trigésimo terceiro?R: Aproximadamente 2 bilhões e 4 bilhões, respectivamente.
 - ▶ Como podemos calcular o total de grãos?

A Lenda do Xadrez [1]



- ▶ Perplexo ante o que parecia ser uma magra recompensa, o rei ordenou que os grãos fossem contados.
- ▶ Vamos fazer alguns cálculos:
 - ▶ Quantos grãos contém o oitavo quadrado? R: 128.
 - ▶ E no trigésimo segundo, na primeira metade do tabuleiro? E no trigésimo terceiro? R: Aproximadamente 2 bilhões e 4 bilhões, respectivamente.
 - ▶ Como podemos calcular o total de grãos? R: Para cada n -ésimo quadrado, tem-se 2^n grãos. No Total, seriam $1 + 2 + \dots + 2^{63} \approx 18 * 10^{18}$ grãos .

A Lenda do Xadrez [1]



- ▶ Perplexo ante o que parecia ser uma magra recompensa, o rei ordenou que os grãos fossem contados.
- ▶ Vamos fazer alguns cálculos:
 - ▶ Quantos grãos contém o oitavo quadrado? R: 128.
 - ▶ E no trigésimo segundo, na primeira metade do tabuleiro? E no trigésimo terceiro? R: Aproximadamente 2 bilhões e 4 bilhões, respectivamente.
 - ▶ Como podemos calcular o total de grãos? R: Para cada n -ésimo quadrado, tem-se 2^n grãos. No Total, seriam $1 + 2 + \dots + 2^{63} \approx 18 * 10^{18}$ grãos .
- ▶ A história tem dois finais alternativos: num, o rei torna o brâmane seu conselheiro-mor; no outro, ele é executado por fazer o rei parecer tolo.

Tabela com os valores



72 quatri- lhões	144 quatri- lhões	288 quatri- lhões	600 quatri- lhões	1,2 quinti- lhão	2,3 quinti- lhões	4,6 quinti- lhões	9,2 quinti- lhões
281 trilhões	562 trilhões	1,1 quatri- lhão	2,3 quatri- lhões	4,5 quatri- lhões	9 quatri- lhões	18 quatri- lhões	36 quatri- lhões
1 trilhão	2 trilhões	4 trilhões	8 trilhões	17 trilhões	35 trilhões	70 trilhões	140 trilhões
4 bilhões	8 bilhões	16 bilhões	33 bilhões	66 bilhões	131 bilhões	262 bilhões	524 bilhões
16 milhões	32 milhões	64 milhões	128 milhões	256 milhões	512 milhões	1 bilhão	2 bilhão
65.536	131.072	262.144	524.288	1 milhão	2 milhões	4 milhões	8 milhões
256	512	1.024	2.048	4.096	8.192	16.384	32.768
1	2	4	8	16	32	64	128

A Segunda Metade do Tabuleiro de Xadrez [1]



- ▶ Pensadores recentes usaram o problema do tabuleiro de xadrez como metáfora da taxa de mudança em tecnologia nos últimos anos.
- ▶ Previu-se que, como o trigo na segunda metade do tabuleiro, a taxa de desenvolvimento tecnológico logo aumentaria de modo descontrolado, seguindo o modelo de duplicação do crescimento anterior a cada passo adiante.
- ▶ Essa taxa de crescimento levaria por fim à singularidade, que marca o ponto em que a habilidade cognitiva da inteligência artificial ultrapassará a dos seres humanos!

Exercício



Exercício 2

O número de bactérias em uma cultura é contado como 400 no começo de um experimento. Se o número de bactérias dobrar a cada 3 horas, determine:

- a) A fórmula que descreve o número de bactérias em função do tempo t , dado em horas.*
- b) O número de bactérias presentes na cultura após 24 horas.*

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the top-left corner, while a light gray shape occupies the bottom-left corner. The rest of the slide is white. The title is centered in the white area.

A Função Exponencial

Propriedades dos Expoentes [2]



Antes de definirmos uma função exponencial, vamos recordar algumas propriedades das potências a^x , onde a é a base da potência e x é o seu expoente.

Teorema 1

Sejam a e b números reais positivos ($a, b > 0$). Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\text{i) } a^x a^y = a^{x+y}$$

$$\text{ii) } (a^x)^y = a^{xy}$$

$$\text{iii) } a^x b^x = (ab)^x$$

$$\text{iv) } a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$\text{v) } \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\text{vi) } \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

Propriedades dos Expoentes



Obs: Como estamos enunciando propriedades que valem para quaisquer números reais x, y , devemos tomar a base positiva, para que a operação a^x seja sempre possível. Por exemplo, para números x negativos, 0^x não está definido. Então tais propriedades não valem nesse caso. Do mesmo modo, se $x = \frac{1}{2n}$, com $n \in \mathbb{N}^*$, a operação a^x não está definida quando $a < 0$, pois não há raiz par de números negativos.

Exemplo



Exemplo 2

Calcule $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[5]{128}$.

Não podemos efetuar o produto diretamente, pois as raízes são diferentes. ao realizar o produto de duas potências devemos ter a mesma base ou o mesmo expoente. Neste caso, não temos os mesmos expoentes, então devemos tentar escrever as potências de modo que possuam a mesma base.

Exemplo



Lembrando que $\sqrt[3]{16} = 16^{\frac{1}{3}}$ e $\sqrt[5]{128} = 128^{\frac{1}{5}}$, obtemos:

$$\sqrt[3]{16} = 16^{\frac{1}{3}}$$

$$= (2^4)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 2^{4\frac{1}{3}}$$

$$= 2^{\frac{4}{3}} \quad \leftarrow ii)$$

$$\sqrt[5]{128} = 128^{\frac{1}{5}}$$

$$= (2^7)^{\frac{1}{5}}$$

$$= 2^{7\frac{1}{5}}$$

$$= 2^{\frac{7}{5}} \quad \leftarrow ii)$$

onde a última igualdade das duas equações são obtidas através da propriedade ii).

Exemplo



Assim,

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[5]{128} &= 2^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{\frac{7}{5}} \\ &= 2^{\frac{4}{3} + \frac{7}{5}} \quad \leftarrow i) \\ &= 2^{\frac{20+21}{15}} \\ &= 2^{\frac{41}{15}} \\ &= \sqrt[15]{2^{41}}.\end{aligned}$$

Definição



Definição 1

Seja a um número real positivo, com $a \neq 1$. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, dada por $f(x) = a^x$, é chamada **função exponencial** de base a .

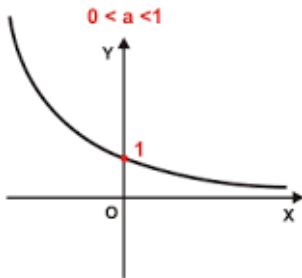
Se $a = 1$, temos que $f(x) = 1^x = 1$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Portanto, f é uma função constante e não uma função exponencial.

Obs: Mais adiante, veremos que a exponencial é definida por ter sua taxa de variação instantânea proporcional à própria função. A função constante não se encaixa nesse perfil.

Propriedades das Funções Exponenciais



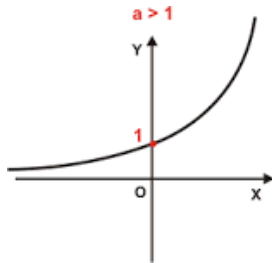
1. Como estamos calculando potências de um número real positivo a , $f(x)$ será sempre um número real positivo ($f(x) > 0$). Logo, o gráfico de f está todo acima do eixo x , nunca o tocando.
2. Se a base a for tal que $0 < a < 1$, então f é decrescente. Seu gráfico é dado abaixo:



Propriedades das Funções Exponenciais



3. Se a base a for tal que $1 < a$, então f é crescente. Seu gráfico é dado abaixo:



Observe que o gráfico de f toca o eixo y quando $x = 0$ e, portanto, $y = f(0) = a^0 = 1$.



Propriedades das Funções Exponenciais

4. As funções exponenciais são **injetivas**. Portanto,

$$a^x = a^y \Rightarrow x = y.$$

Como a imagem de uma função exponencial é o conjunto

$$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\},$$

temos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, tal que $f(x) = a^x$, é uma bijeção.

Exemplo



Exemplo 3

Identificando uma função exponencial:

a) $f(x) = 3^x$

Exemplo



Exemplo 3

Identificando uma função exponencial:

a) $f(x) = 3^x$ é uma função exponencial, com base $a = 3$.

Exemplo



Exemplo 3

Identificando uma função exponencial:

a) $f(x) = 3^x$ é uma função exponencial, com base $a = 3$.

b) $g(x) = x^4$

Exemplo



Exemplo 3

Identificando uma função exponencial:

- a) $f(x) = 3^x$ é uma função exponencial, com base $a = 3$.
- b) $g(x) = x^4$ não é uma função exponencial, pois a variável está na base e não no expoente.

Exemplo



Exemplo 3

Identificando uma função exponencial:

- a) $f(x) = 3^x$ é uma função exponencial, com base $a = 3$.
- b) $g(x) = x^4$ não é uma função exponencial, pois a variável está na base e não no expoente.
- c) $h(x) = 6^\pi$

Exemplo



Exemplo 3

Identificando uma função exponencial:

- a) $f(x) = 3^x$ é uma função exponencial, com base $a = 3$.
- b) $g(x) = x^4$ não é uma função exponencial, pois a variável está na base e não no expoente.
- c) $h(x) = 6^\pi$ não é uma função exponencial, pois o expoente é uma constante.

Exemplo



Exemplo 3

Identificando uma função exponencial:

- a) $f(x) = 3^x$ é uma função exponencial, com base $a = 3$.
- b) $g(x) = x^4$ não é uma função exponencial, pois a variável está na base e não no expoente.
- c) $h(x) = 6^\pi$ não é uma função exponencial, pois o expoente é uma constante.
- d) $i(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Exemplo



Exemplo 3

Identificando uma função exponencial:

- a) $f(x) = 3^x$ é uma função exponencial, com base $a = 3$.
- b) $g(x) = x^4$ não é uma função exponencial, pois a variável está na base e não no expoente.
- c) $h(x) = 6^\pi$ não é uma função exponencial, pois o expoente é uma constante.
- d) $i(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ é uma função exponencial, com base $a = \frac{1}{2}$.

O Número de Euler

Um Número Singular



- ▶ Lembre-se, uma **constante** matemática é um número significativo e **bem-definido**. Sua magnitude nunca varia.
- ▶ A constante e (2, 718...) tem **propriedades especiais**.
- ▶ É irracional (não pode ser expresso pela razão entre dois inteiros) e transcendente (não é raiz de nenhuma equação polinomial, com coeficientes inteiros).

Um Número Singular



- ▶ Tornou-se conhecido no século XVII, quando os logaritmos foram inventados para ajudar a simplificar cálculos complexos.
- ▶ Logaritmos na base e foram chamados de **logaritmos naturais**, pois podem ser usados para descrever matematicamente processos da natureza.
- ▶ O matemático suíço Bernoulli usou o número $2,718 \dots$ para calcular juros compostos, mas foi Euler que primeiro o chamou de número e .

O Número de Euler



Definição 2

O número de Euler e também é chamado de **base exponencial natural**. Ele é obtido ao fazermos n tender ao infinito na expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Matematicamente, escrevemos

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

O resultado é um número decimal com infinitas casas decimais, mas não periódicas. Logo, e é um número irracional com

$$e \approx 2,718281828459045\dots$$

Juros Compostos



Se juros são pagos de forma composta, n vezes por ano, a uma taxa de juros anual r , então, após t anos, uma quantia inicial P_0 aumenta para

$$P(t) = P_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt},$$

que é obtida a partir da função exponencial $\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$. As constantes P_0 , r e n são dadas nos problemas propostos.

Juros Compostos



Exemplo 4

Considere uma conta bancária que inicie com R\$8000, 00 e que receba 5% de juros anuais, compostos, doze vezes por ano. Quanto haverá, aproximadamente, na conta bancária após três anos?

Nesse exemplo, temos $P = 8000$, $r = 0,05$ e $n = 12$. Assim, após três anos, haverá

$$P(3) = 8000 \left(1 + \frac{0,05}{12} \right)^{12 \cdot 3}$$
$$\approx 9291,8,$$

ou seja, aproximadamente R\$9291,80.

Juro Compostos: outro exemplo

Juros compostos rendem um valor total maior.

	1 ano, taxa de juros de 100%	6 meses, taxa de juros de 50%	3 meses, taxa de juros de 25%
Janeiro	depósito principal de R\$ 10	depósito principal de R\$ 10	depósito principal de R\$ 10
Fevereiro			
Março			
Abril			$R\$ 10 \times 0,25 = R\$ 2,50$ $R\$ 10 + R\$ 2,50 = \mathbf{R\$ 12,50}$
Maió			
Junho			
Julho		$R\$ 10 \times 0,5 = R\$ 5$ $R\$ 10 + R\$ 5 = \mathbf{R\$ 15}$	$R\$ 12,50 \times 0,25 = R\$ 3,125$ $R\$ 12,50 + R\$ 3,125 = \mathbf{R\$ 15,625}$
Agosto			
Setembro			
Outubro			$R\$ 15,625 \times 0,25 = R\$ 3,906$ $R\$ 15,625 + R\$ 3,906 = \mathbf{R\$ 19,531}$
Novembro			
Dezembro			
Janeiro	$R\$ 10 \times 1 = R\$ 10$ $R\$ 10 + R\$ 10 = \mathbf{R\$ 20}$	$R\$ 15 \times 0,5 = R\$ 7,50$ $R\$ 15 + R\$ 7,50 = \mathbf{R\$ 22,50}$	$R\$ 19,531 \times 0,25 = R\$ 4,883$ $R\$ 19,531 + R\$ 4,883 = \mathbf{R\$ 24,41}$

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the top-left corner, while a light beige shape occupies the bottom-left corner. The rest of the slide is white. The word "Exercícios" is centered in the white area.

Exercícios

Exercício



Exercício 3

Seja a função exponencial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, definida por $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

1. A função f é crescente ou decrescente?
2. Para que valores de x tem-se $\frac{1}{128} < f(x)$?
3. Para qual valor de x tem-se $f(x) = 32$?

Exercício



Exercício 4

Uma certa quantia de dinheiro P_0 é investida a uma taxa anual de juros de 8,0%, capitalizados bimestralmente (a cada 2 meses).

- 1. Quantos anos (com aproximação na ordem de décimos de ano) levaria para o montante inicial quadriplicar?*
- 2. Se $P_0 = 10.000,00$ reais, quanto haverá, aproximadamente, na conta bancária após 1 ano e 6 meses?*

Referencias I



Vários.

O livro da matemática.

GLOBO LIVROS, 2020.



G. Iezzi, O. Dolce, and C. Murakami.

Fundamentos de matemática elementar, 2: logaritmos.

Atual, 2013.