Álgebra Linear - Aula 02

Espaços Vetoriais Euclidianos

Profª Dra. Karla Lima

Sumário

O que é Álgebra Linear?

- Álgebra Linear estuda funções lineares em espaços vetoriais de dimensão finita.
- Por exemplo, veremos que:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$$ **é um espaço de dimensão finita**;

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ é contínua em } \mathbb{R}\}$$ **é um espaço de dimensão infinita**;

- Nesta aula, definiremos os espaços vetoriais euclidianos e suas propriedades básicas.

Vamos começar com os exemplos conhecidos, como:

- Plano Euclidiano $\mathbb{R}^2$;
- Espaço Tridimensional Euclidiano $\mathbb{R}^3$;
- Espaços Euclidianos de dimensão n: $\mathbb{R}^n$.

Esses são os espaços vetoriais que vocês estudam em Geometria Analítica.

Generalizando Espaços

- Mas estes não são os únicos espaços vetoriais que existem!
- Depois desta introdução de algumas semanas, ampliaremos para o conceito abstrato de espaço vetorial.

Figura: Exemplo de um espaço vetorial (opcional)

Escalares e Vetores Reais

- Escalares: quantidades descritas apenas por um valor numérico (ex: temperatura, comprimento).
- Vetores: quantidades que exigem valor, direção e sentido (ex: velocidade, força).
- Exemplo:
  Temperatura = 20°C $\rightarrow$ escalar
  Força = $100kgf$ para baixo $\rightarrow$ vetor
- Embora tenham origem na Física e Engenharia, vetores e escalares são úteis em diversas áreas: Genética, Computação, Economia, Telecomunicações, Ecologia.

- Qual a sua massa? **R:** 60 kg
- Que horas são? **R:** 8 hs
- Qual a sua temperatura corporal atual? **R:** $36°C$

Grandezas Escalares

- Qual a sua massa? **R:** 60 kg
- Que horas são? **R:** 8 hs
- Qual a sua temperatura corporal atual? **R:** $36°C$

Para responder a estas perguntas, basta apenas **um número**, sem que outras informações precisem ser adicionadas.

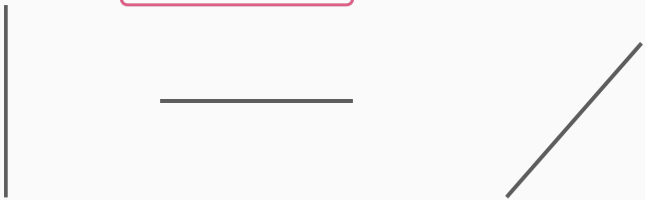
- Como localizar um carro a 100 km/h, na BR101?
- Como encontrar um barco perdido no oceano Atlântico?
- Como localizar um avião que está a uma velocidade de 800 km/h?

- Como localizar um carro a 100 km/h, na BR101?
- Como encontrar um barco perdido no oceano Atlântico?
- Como localizar um avião que está a uma velocidade de 800 km/h?

Para responder a estas perguntas, além do valor escalar, precisamos indicar uma **direção** e um **sentido**.

- Como encontrar um barco perdido no oceano Atlântico?
  ⇝Precisamos saber a rapidez, a direção e o sentido em que este barco se deslocou. Só a velocidade escalar (rapidez) não é suficiente!
- Como localizar um avião que está a uma velocidade de 800 km/h?
  ⇝Aqui, além da rapidez que já foi dada, precisamos saber a direção e o sentido em que este avião se deslocou.

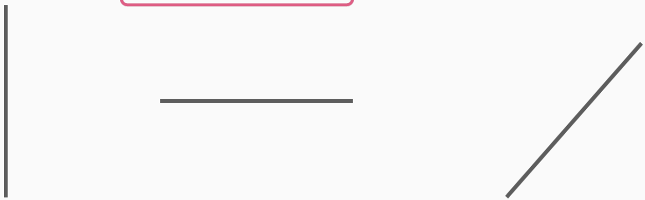
Direções



Vertical ***Horizontal*** ***Inclinada***

Direção: exemplos

Direções



Vertical ***Horizontal*** ***Inclinada***

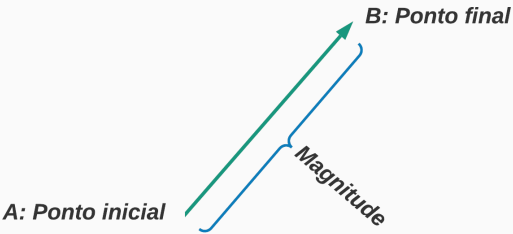
Como nos deslocamos em cima dessas retas?

O sentido nos diz como estamos nos deslocando na direção dada.

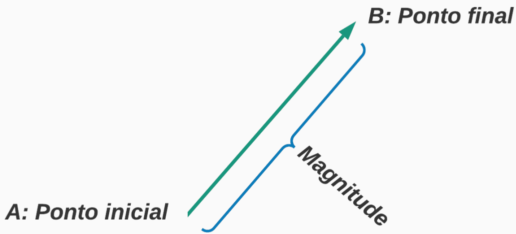
Sentido: exemplos

Na mesma direção, mas com sentidos opostos, temos:

Um vetor é representado através de uma flecha (seta):

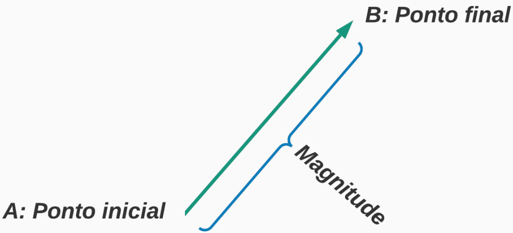


Um vetor é representado através de uma flecha (seta):



Com essa representação, conseguimos as seguintes informações sobre o vetor:

TAMANHO DIREÇÃO SENTIDO



- O tamanho (magnitude) é dado pelo comprimento da seta.
- A direção é dada pelo corpo da seta.
- O sentido é dado pela ponta da seta.

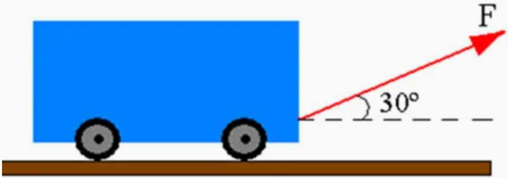


Figura: Força para puxar o carrinho

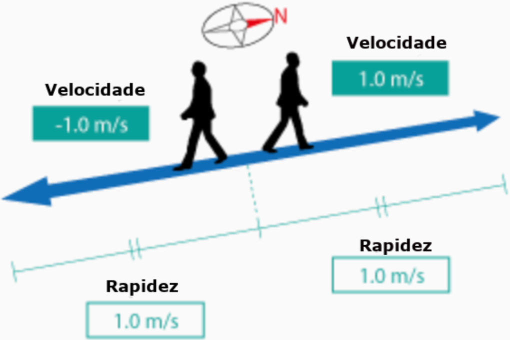
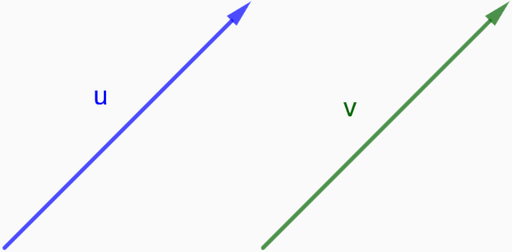


Figura: Velocidade: direção, sentido e magnitude (rapidez)

Figura: Velocidade: mesma direção, mesmo sentido e diferentes magnitudes (rapidez)

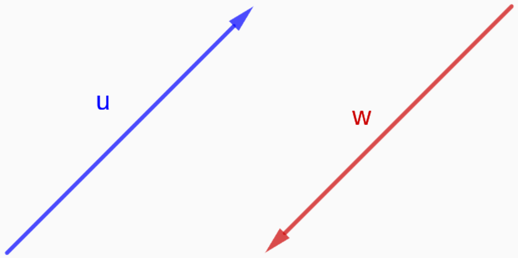
Equivalência de Vetores [?]

Dois vetores são **equivalentes** (ou **equipolentes**) se possuem o mesmo tamanho, a mesma direção e mesmo sentido:



Equivalência de Vetores

Os vetores abaixo possuem a mesma direção e a mesma magnitude, porém, os sentidos não são equivalentes.



Portanto, os vetores são diferentes.

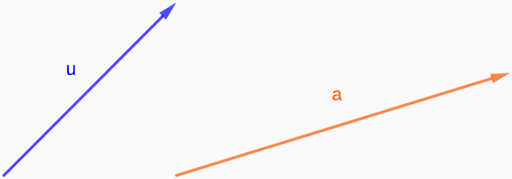
Os vetores abaixo possuem a mesma direção e a mesma magnitude, porém, os sentidos não são equivalentes.

Portanto, os vetores são diferentes.

Quando os vetores têm a mesma direção e a mesma magnitude, mas sentidos diferentes, dizemos que os vetores são **opostos**.

Equivalência de Vetores

Os dois vetores abaixo são diferentes, pois todas as suas características são distintas.



Notação

- Em geral, vetores são indicados por letras minúsculas em negrito;
- Quando sabemos quem é o ponto inicial A e o ponto final B, também escrevemos:

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}.$$

Exercício

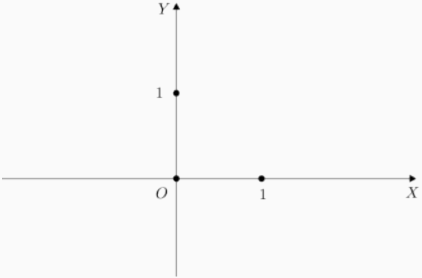
Encontre os vetores equivalentes: Geogebra Vetores Equivalentes (Clique aqui!)

Vetor Nulo

Definição

O vetor cujos pontos inicial e final coincidem tem ***comprimento zero*** *e denominamos esse vetor de* ***vetor nulo****, e o denotamos por* $\mathbf{0} = \overrightarrow{0}$.

O Plano Cartesiano é composto por duas retas, perpendiculares[1] entre si:



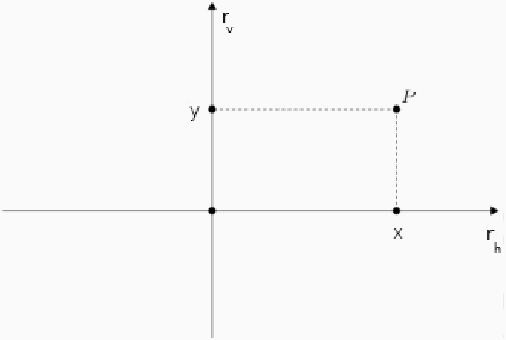
Chama-se **origem** do plano cartesiano, o ponto $O = (0, 0)$.

[1] o ângulo entre as duas retas é de 90°

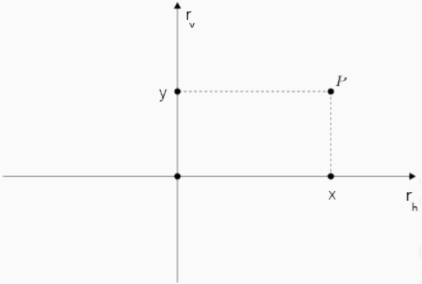
i) Na horizontal, escolhe-se um ponto para representar o número 0, e os números positivos são colocados à direita, enquanto os negativos à esquerda do 0.

ii) Na vertical, escolhe-se um ponto para representar o número 0 (coincidindo com o 0 da reta horizontal), e os números positivos são colocados acima, enquanto os negativos abaixo do 0.

A identificação de um ponto P do plano está em função da sua distância até a reta vertical (r_v) e sua distância até a reta horizontal (r_h): $P = (x, y)$.



Sistema de Coordenadas Retangulares no Plano

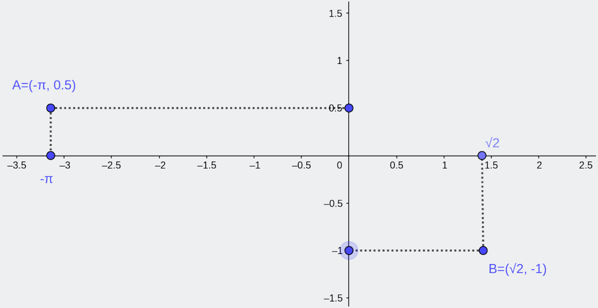


- Se x estiver à direita da origem, temos $x =$ distância à r_v; caso contrário, temos $x = -$ (distância à r_v).
- Analogamente, se y estiver acima da origem, temos $y =$ distância à r_h; caso contrário, temos $y = -$ (distância à r_h).

Sistema de Coordenadas Retangulares no Plano

Exemplo

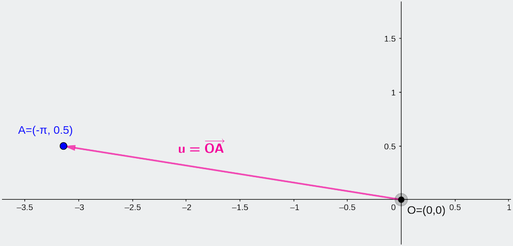
Os pontos $A = (-i, 0.5)$ *e* $B = (\sqrt{2}, -1)$ *no plano cartesiano:*



Os pares ordenados (x, y) são usados tanto para representar pontos quanto vetores no plano. Portanto, deve ser enfatizado o ponto de vista geométrico desejado.

Os vetores $\mathbf{u} = (x, y)$ têm início na origem do sistema de coordenadas $(0, 0)$ e final no ponto (x, y).

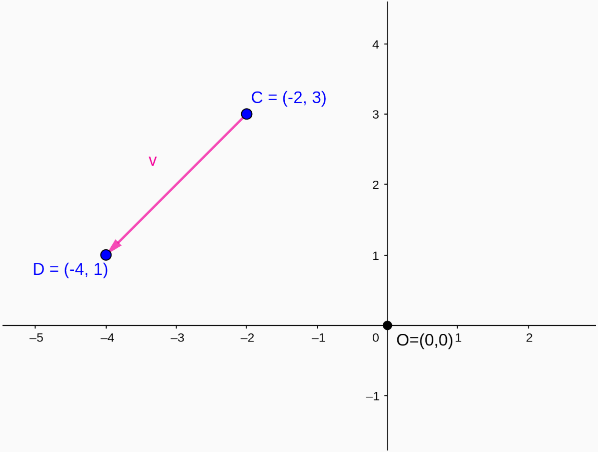
Exemplo



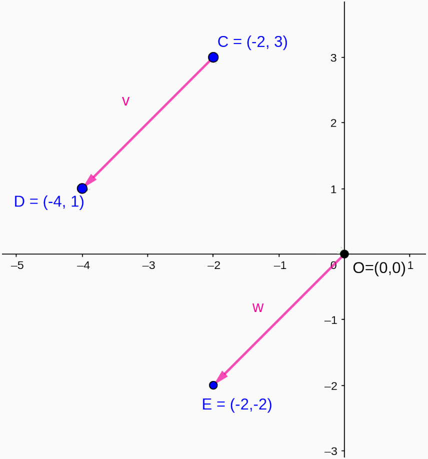
Em azul, o ponto $A = (-i, 0.5)$*; em rosa, o vetor* ***u****, que tem início na origem* $(0, 0)$ *e final em* A*.*

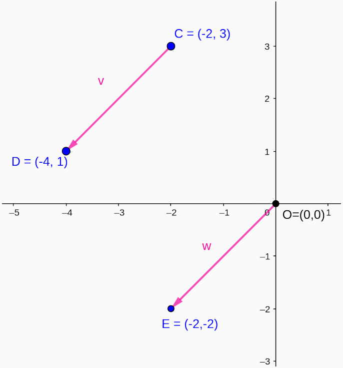
Representação Vetorial no Plano

Quando o vetor **v** não possui início na origem do sistema, devemos descrevê-lo através dos seus pontos inicial e final.



O vetor $\mathbf{w} = \overrightarrow{OE}$ é equivalente ao vetor **v**, onde seu ponto inicial é a origem $(0, 0)$.





Na álgebra dos vetores, costumamos utilizar o vetor equivalente ao vetor dado, que tem seu ponto inicial na origem. Então, se queremos identificar o vetor $\overrightarrow{CD}$, o identificamos como sendo: $\overrightarrow{CD} = (-2, -2)$.

O Vetor Nulo

Denotamos por **0** o vetor que tem comprimento igual a 0, não possui nem direção nem sentido. Em $\mathbb{R}^2$, é representado por $\mathbf{0} = (0, 0)$.

Definição [?]

Vamos considerar V um conjunto não vazio qualquer de objetos no qual estejam definidas duas operações:

- adição entre dois objetos do conjunto;
- multiplicação por escalares.

Do que já vimos até agora, V pode ser:

- Conjunto de matrizes de mesma ordem;
- Conjunto de vetores de números reais com o mesmo número de coordenadas;
- Conjunto de números reais.

Todos estes conjuntos possuem a soma de seus elementos e a multiplicação por escalares bem difinidas.

Definição

*Seja V um conjunto não vazio qualquer de objetos no qual estejam bem definidas as operações soma e multiplicação por escalares. Se os axiomas seguintes forem satisfeitos por todos os objetos **u**, **v** e **w** em V e quaisquer escalares a e b, diremos que V é um **espaço vetorial** e que os objetos de V são **vetores**.*

1. Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, então $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$.
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
3. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
4. Existe um objeto $\mathbf{0}$ em V, denominado **vetor nulo** de V, tal que $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$, com qualquer $\mathbf{u}$ em V.
5. Dado qualquer $\mathbf{u}$ em V, existe algum objeto $-\mathbf{u} \in V$, tal que $\mathbf{u} + \mathbf{-u} = \mathbf{-u} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$.
6. Se a for qualquer escalar e $\mathbf{u} \in V$, então $a\mathbf{u} \in V$.
7. $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$
8. $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$
9. $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$
10. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Exemplo 3

Exemplo

Se V consiste num único elemento, que denotamos por $\mathbf{0}$*, e estão definidas as operações*

$$\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad e \quad a \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

com escalares a quaisquer, $V = (V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial denominado ***espaço vetorial nulo****.*

Exemplo

Seja $V = \mathbb{R}^n$*. Usando as operações conhecidas de adição e multiplicação por escalar de n-uplas*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} &= (u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n) \\ &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n) \end{aligned}$$

$$a \cdot \boldsymbol{u} = a(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (au_1, au_2, \ldots, au_n),$$

$V = (\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *é um espaço vetorial.*

Exemplo 5

Exemplo

Seja $\mathbb{M}_{2\times 2} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2} \mid a_{ij} \in \mathbb{R},\ i,j = 1,2 \right\}$*, o conjunto de todas as matrizes* 2×2 *com entradas reais.*
Tomando as operações usuais de soma e multiplicação por escalar

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

$$k \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{bmatrix},$$

$(\mathbb{M}_{2\times 2}, +, \cdot)$ *é um espaço vetorial.*

Exemplo 6

Exemplo

De modo geral, o conjunto $(\mathbb{M}_{m \times n}, +, \cdot)$ *de todas as matrizes de ordem* $m \times n$ *é um espaço vetorial com as operações usuais de matrizes.*

Exemplo 7

Exemplo

Seja $\mathcal{F}(-\infty,\infty) = \{\boldsymbol{f} \,|\, \boldsymbol{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ *o conjunto de todas as funções definidas no intervalo* $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$*. Definimos as operações de adição e multiplicação por escalar por*

$$(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(x) = f(x) + g(x)$$
$$(a \cdot \boldsymbol{f})(x) = a\,f(x),$$

e, com essas operações, o espaço $(\mathcal{F}(-\infty,\infty),+,\cdot)$ *é um espaço vetorial.*

Exemplo

Seja $V = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$ *e defina as operações de* V *por*

$$u + v = uv$$

$$a * u = u^a.$$

O conjunto $V = (V, +, *)$ *é um espaço vetorial!*

Exemplo

Seja $V = \mathbb{R}^2$ *com as operações definidas por:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \\ a * \boldsymbol{u} &= (au_1, 0). \end{aligned}$$

Com essas operações, $V = (\mathbb{R}^2, +, *)$ *não é um espaço vetorial.*

Teorema 1

Teorema

Sejam V um espaço vetorial, $\boldsymbol{u}$ um vetor em V e a um escalar. Então

a) $0 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$
b) $a \cdot \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$
c) $(-1) \cdot \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$
d) *Se* $a \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$, *então* $a = 0$ *ou* $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.

Exemplo 10

Exemplo

Do item a) do Teorema 1, concluímos que o elemento nulo do espaço $V = \mathbb{R}^2$ *com as operações definidas por*

$$u + v = uv \;\; e \;\; a * u = u^a,$$

é

$$\boldsymbol{0} = 0 * u = u^0 = 1.$$