

# Geometria Plana

---

## Lista de Exercícios:

Ponto, reta e plano

Ângulos

Triângulos

Paralelismo e Perpendicularidade

---

Profa. Karla Lima

FACET/UFGD

# 1 Ponto, reta e plano

**Exercício 1** *Faça uma figura para ilustrar as seguintes situações:*

- a) *Dois planos que não se interceptam.*
- b) *Uma reta e um plano que se interceptam em exatamente um ponto.*
- c) *Uma reta e um plano que não se interceptam.*
- d) *Uma reta contida em um plano.*
- e) *Dois planos que se interceptam.*
- f) *Três planos que se interceptam em um ponto.*
- g) *Três planos que se interceptam em uma reta.*
- h) *Uma reta que intercepta dois planos em diferentes pontos.*
- i) *Um sólido que seja limitado por superfícies planas, que não seja convexo.*

**Exercício 2** *Prove que:*

- a) *Todo plano contém no mínimo três pontos não colineares.*
- b) *O espaço contém no mínimo quatro pontos não coplanares.*
- c) *Se três pontos estão alinhados então eles são coplanares.*

**Exercício 3** a) *Quantas retas passam:*

- i) *Por um ponto dado?*
- ii) *Por dois pontos distintos?*

b) *Quantas planos passam:*

- i) *Por um ponto dado?*
- ii) *Por dois pontos distintos?*
- iii) *Por três pontos distintos?*

**Exercício 4** *Classifique como verdadeiro (V) ou falso (F):*

- a) *Três pontos distintos são colineares.*
- b) *Três pontos quaisquer são coplanares.*
- c) *Quatro pontos distintos determinam quatro retas.*
- d) *Por quatro pontos distintos pode passar uma só reta.*

- e) Três pontos distintos são sempre colineares.
- f) Se quatro pontos são coplanares, então eles estão alinhados.
- g) Dois pontos quaisquer são colineares.
- h) Dois pontos quaisquer são coplanares.
- i) Dois pontos distintos determinam um plano.
- j) Dois pontos distintos determinam uma reta.
- k) Dois pontos distintos determinam um plano.
- l) Três pontos distintos determinam um plano.
- m) Por uma reta passam infinitos planos.
- n) É convexo o conjunto constituído por dois pontos apenas.
- o) Uma reta possui infinitos pontos.
- p) No plano, duas retas distintas ou não se interceptam ou se interceptam num só ponto.

### Gabarito

- 1. a) i) Infinitas.  
ii) Apenas uma (postulado 1).
- b) i) Infinitos.  
ii) Infinitos.
- iii) Apenas um (postulado 4) se forem não colineares. Infinitos em caso contrário.

2.	a) F	i) F
	b) V	j) V
	c) F	k) F
	d) F	l) F
	e) F	m) V
	f) F	n) F
	g) V	o) V
	h) F	p) V

## 2 Ângulos

**Exercício 5** *Escreva algebricamente as seguintes frases:*

- a) *A medida de um ângulo.*

- b) O dobro da medida de um ângulo.
- c) A terça parte de um ângulo.
- d) Os três quintos de um ângulo.
- e) O complemento de um ângulo.
- f) A metade do complemento de um ângulo.
- g) O complemento da metade de um ângulo.
- h) O suplemento de um ângulo.
- i) A terça parte do suplemento de um ângulo.
- j) O suplemento da terça parte de um ângulo.
- k) A soma entre as medidas de dois ângulos.
- l) A metade da soma entre as medidas de dois ângulos.
- m) A quinta parte da soma entre dois ângulos.
- n) O suplemento da soma entre dois ângulos.

**Exercício 6** Complete:

- a) Se  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  são ângulos suplementares, então \_\_\_\_\_
- b) Se  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  são suplementos de  $\hat{C}$ , então \_\_\_\_\_
- c) Se  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  são ângulos complementares, então \_\_\_\_\_
- d) Se  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  são complementos de ângulos congruentes, então \_\_\_\_\_

**Exercício 7** A terça parte da soma entre dois ângulos vale  $72^\circ$ . Determiná-los, sabendo-se que um deles é o quádruplo do outro.

**Exercício 8** O complemento de um ângulo  $x$  está para seu suplemento, assim como 4 está para 19. Calcular esse ângulo.

**Exercício 9** Dois ângulos consecutivos têm um lado em comum e suas medidas somam  $134^\circ$ . Determine o ângulo formado pelas suas bissetrizes.

**Exercício 10** Em torno de um ponto, e num mesmo plano, constroem-se quatro ângulos consecutivos. Sabendo-se que cada um deles é igual ao dobro do anterior, achar esses ângulos.

**Exercício 11** Prove que a reta perpendicular à bissetriz de um ângulo, traçada pelo vértice do mesmo, forma ângulos congruentes com os lados do ângulo.

**Exercício 12** *Mostre que as bissetrizes de um ângulo e do seu suplemento são perpendiculares.*

**Exercício 13** *Prove que as bissetrizes de dois ângulos opostos pelo vértice são semirretas opostas.*

**Exercício 14** *Dois ângulos retos,  $\widehat{AOB}$  e  $\widehat{COD}$ , têm em comum o ângulo  $\widehat{BOC}$ . Mostre que os ângulos  $\widehat{AOC}$  e  $\widehat{BOD}$  são congruentes e que os ângulos  $\widehat{AOD}$  e  $\widehat{BOC}$  são suplementares.*

### Gabarito

4. a) A medida de um ângulo.

**R:**  $x$

- b) O dobro da medida de um ângulo.

**R:**  $2x$ .

- c) A terça parte de um ângulo.

**R:**  $\frac{x}{3}$ .

- d) Os três quintos de um ângulo.

**R:**  $\frac{3}{5}x$ .

- e) O complemento de um ângulo.

**R:**  $90 - x$ .

- f) A metade do complemento de um ângulo.

**R:**  $\frac{90-x}{2}$ .

- g) O complemento da metade de um ângulo.

**R:**  $90 - \frac{x}{2}$ .

- h) O suplemento de um ângulo.

**R:**  $180 - x$ .

- i) A terça parte do suplemento de um ângulo.

**R:**  $\frac{180-x}{3}$ .

- j) O suplemento da terça parte de um ângulo.

**R:**  $180 - \frac{x}{3}$ .

- k) A soma entre as medidas de dois ângulos.

**R:**  $x + y$ .

- l) A metade da soma entre as medidas de dois ângulos.

**R:**  $\frac{x+y}{2}$ .

- m) A quinta parte da soma entre dois ângulos.

**R:**  $\frac{x+y}{5}$ .

- n) O suplemento da soma entre dois ângulos. **R:**  $180 - (x + y)$ .

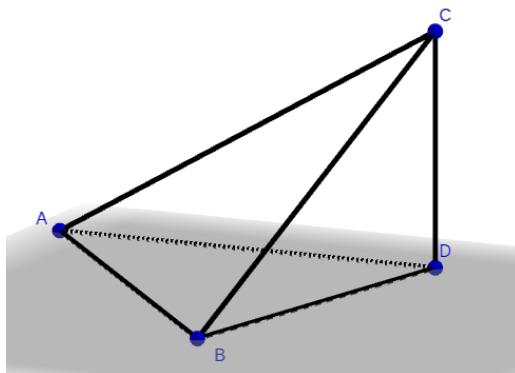
6. a) Se  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  são ângulos suplementares, então  $\hat{A} + \hat{B} = 180$ .  
b) Se  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  são suplementos de  $\hat{C}$ , então  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  são congruentes.  
c) Se  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  são ângulos complementares, então  $\hat{A} + \hat{B} = 90$ .  
d) Se  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  são complementos de ângulos congruentes, então  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  também são congruentes.
7.  $36^\circ$  e  $180^\circ$ .
8.  $66^\circ$ .
9.  $67^\circ$ .
10.  $12^\circ$ ,  $24^\circ$ ,  $48^\circ$ ,  $96^\circ$ .

### 3 Triângulos

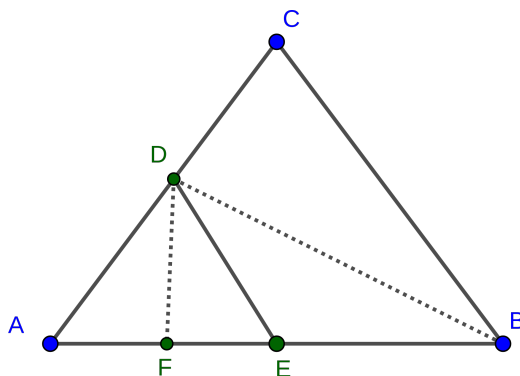
**Exercício 15** Complete a demonstração do teorema 2, da aula 03.

**Exercício 16** Na figura abaixo,  $\overline{CD} \perp \overline{AD}$ ,  $\overline{CD} \perp \overline{BD}$  e  $AD = BD$ .

Demonstre que o  $\triangle ABC$  é isósceles.



**Exercício 17** No triângulo isósceles  $ABC$  abaixo, a bissetriz do ângulo  $\hat{B}$  intercepta o lado oposto em  $D$ .  $E$  é um ponto da base  $\overline{AB}$  tal que  $ED = EA$ .  $\overline{DF}$  bisseca o ângulo  $\hat{A}DE$ . Demonstre que  $E\hat{D}F = C\hat{B}D$ .



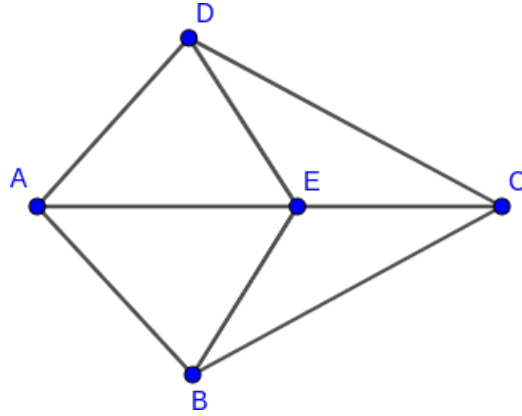
**Exercício 18** Prove que se dois segmentos se bissecam em um ângulo reto, então os segmentos que unem seus extremos são congruentes.

**Exercício 19** Demonstre que as mediatrizes dos lados de um triângulo concorrem em um mesmo ponto, equidistante dos três vértices, denominado **circuncentro**.

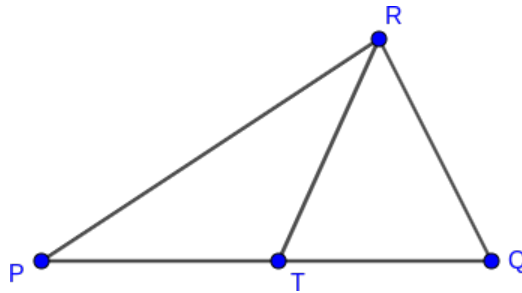
**Exercício 20** Demonstre que as bissetrizes internas dos ângulos de um triângulo concorrem em um mesmo ponto, equidistante dos três lados, denominado **incentro**.

**Exercício 21** Demonstre que todo ponto da bissetriz de um ângulo equidista dos lados do mesmo.

**Exercício 22** Se  $DC = BC$  e  $DE = BE$ , demonstre que  $AD = AB$ , sabendo-se que os pontos  $A$ ,  $E$  e  $C$  são colineares.



**Exercício 23** Na figura abaixo,  $PT = TR = RQ$ . Demonstre que  $PR > RQ$ .

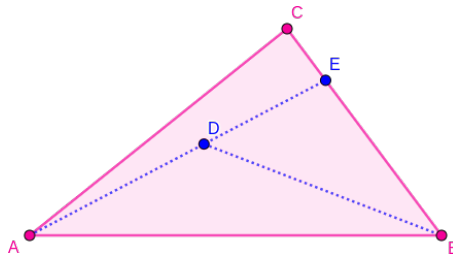


**Exercício 24** Complete a prova do Teorema 8 (aula 05), provando que  $DE < AB$  é falsa.

**Exercício 25** Complete a prova do Teorema 13 (aula 05), provando as desigualdades ii) e iii).

**Exercício 26** Mostre que não é possível construir um triângulo de lados 4 cm, 5 cm e 10 cm.

**Exercício 27** Na figura abaixo, provar que  $\hat{ADB} > \hat{C}$ .





## 4 Retas Paralelas

**Exercício 28** A soma dos ângulos agudos formados por duas paralelas e uma transversal é igual à  $121^\circ$ . Calcular um dos ângulos obtusos.

**Exercício 29** Duas paralelas cortadas por uma transversal formam ângulos colaterais internos, cujas medidas, em graus, são representadas por  $x + 20$  e  $5x + 60$ , respectivamente. Calcular o valor de um dos ângulos agudos da figura.

**Exercício 30** Os ângulos colaterais externos formados por duas paralelas e uma secante são tais que um excede o outro de  $20^\circ 30'$ . Calcule esses ângulos.

**Obs:** Estude as relações entre as medidas de ângulos em graus, minutos e segundos.

**Exercício 31** Duas paralelas cortadas por uma transversal formam dois ângulos correspondentes cujas medidas, em graus, são respectivamente iguais à  $4x - 20$  e  $x + 70$ . Encontre a soma dos ângulos obtusos formados pelas retas acima.

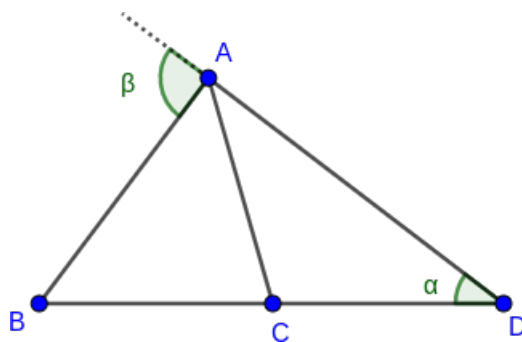
**Exercício 32** Num triângulo isósceles, o ângulo do vértice mede  $30^\circ 42'$ . Calcule um dos ângulos da base.

**Exercício 33** Num triângulo isósceles  $ABC$ , o ângulo  $\hat{A}$  (do vértice) mede  $41^\circ 20'$ . Calcule a medida dos ângulos formados pela bissetriz do ângulo  $\hat{B}$  com o lado  $\overline{AC}$ .

**Exercício 34** Num triângulo isósceles  $ABC$ , o ângulo do vértice  $\hat{A}$  é  $1/5$  do ângulo  $B\hat{M}C$ , formado pelas bissetrizes dos ângulos  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ . Calcular os ângulos desse triângulo.

**Exercício 35** Num triângulo  $ABC$ , a bissetriz externa de  $\hat{C}$  forma com a bissetriz interna de  $\hat{B}$  um ângulo de  $10^\circ$ . A altura  $\overline{AH}$  forma, com a bissetriz interna  $\overline{AS}$ , um ângulo de  $30^\circ$ . Calcular os ângulos desse triângulo.

**Exercício 36** Na figura abaixo, tem-se  $AB = AC = CD$ . Qual a relação entre  $\alpha$  e  $\beta$ , sendo  $\beta$  um ângulo externo do  $\triangle ABD$ ?



**Exercício 37** O ângulo obtuso formado por duas bissetrizes internas de um triângulo é igual a um ângulo reto aumentado da metade do terceiro ângulo. Provar.

## Gabarito

- 28.  $149^{\circ}45'$
- 29.  $36^{\circ}40'$
- 30.  $79^{\circ}45'$  e  $100^{\circ}15'$
- 31.  $400^{\circ}$
- 32.  $74^{\circ}39'$
- 33.  $76^{\circ}$  e  $104^{\circ}$
- 34.  $20^{\circ}$ ,  $80^{\circ}$  e  $80^{\circ}$
- 35.  $20^{\circ}$ ,  $110^{\circ}$  e  $50^{\circ}$