P1 - Gabarito (24/02/23)

01

a) Verdadeiro.

Como A e B são distintos, existe (e é única) uma reta r que contém os dois pontos.

b) Verdadeiro.

Duas retas distintas não podem ter mais de um ponto em comum. De fato, suponha - por absurdo - que $r \neq s$, $A \neq B$ e $\{A, B\} \subset r \cap s$. Como $A \neq B$, existe uma ÚNICA reta contendo os dois pontos simultaneamente. Assim,

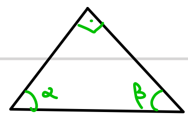
$$A, B \in r \quad e \quad A, B \in s \implies r = s,$$

contrariando a hipótese de que as retas são distintas.

Portanto, se $r \cap s \neq \emptyset$, então elas possuem um único ponto comum.

c) Falso.

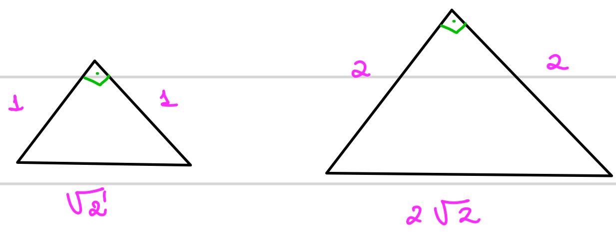
Se dois triângulos retângulos são isósceles, temos que ambos possuem os três ângulos congruentes :



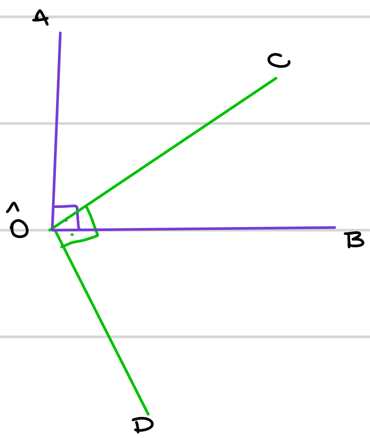
* $\theta = 90^\circ$ (reto)

* $\alpha = \beta = 45^\circ$ (ângulos da base)

Não há congruência AAA. Veja um contra-exemplo abaixo :



02



$A\hat{O}B = C\hat{O}D = 90^\circ$

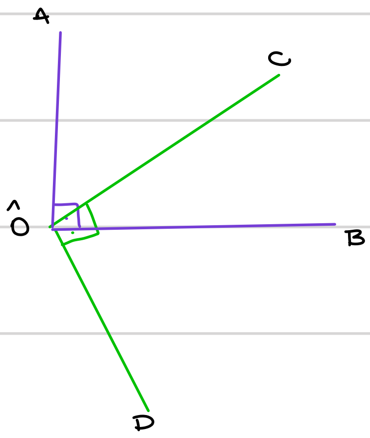
Temos que :

$$90^\circ = A\hat{O}B = A\hat{O}C + C\hat{O}B \qquad \qquad A\hat{O}C = 90^\circ - C\hat{O}B$$
$$\Longrightarrow$$
$$90^\circ = C\hat{O}D = B\hat{O}D + C\hat{O}B \qquad \qquad B\hat{O}D = 90^\circ - C\hat{O}B.$$

Portanto,

$$A\hat{O}C = 90^\circ - C\hat{O}B = B\hat{O}D,$$

de onde segue que os ângulos $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}D$ são congruentes.

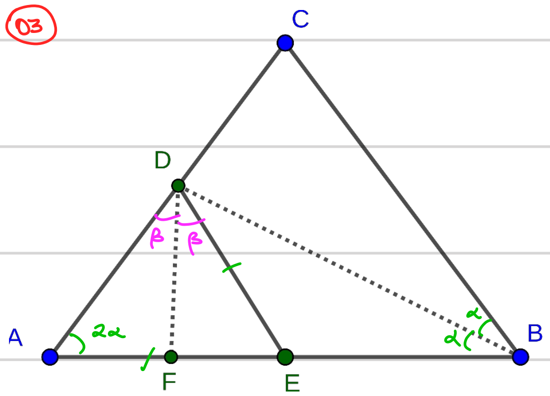


Agora,

$$A\hat{O}D + B\hat{O}C = A\hat{O}B + B\hat{O}D + B\hat{O}C$$
$$= A\hat{O}B + D\hat{O}C$$
$$= 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

de onde segue que $A\hat{O}D$ e $B\hat{O}C$ são suplementares.

03



$\overline{AC} = \overline{CB}$ e $\hat{A} = \hat{B}$

$\hat{B} = 2\alpha$

$\overline{ED} = \overline{EA}$

Mostrar que $\beta = E\hat{D}F = C\hat{B}D = \alpha$.

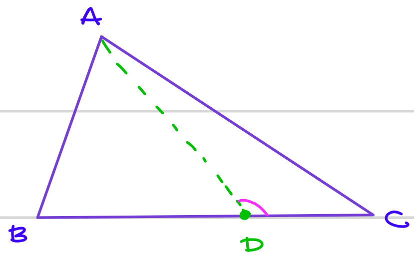
Com efeito, como $\overline{ED} = \overline{EA}$, o triângulo DEA é isósceles. Logo,

$\hat{D} = \hat{A} = \hat{B}$, de onde segue que

$$\beta = E\hat{D}F = \frac{\hat{D}}{2} = \frac{\hat{B}}{2} = C\hat{B}D$$

e $E\hat{D}F = C\hat{B}D$, como queríamos demonstrar.

04



$AB < AC$

Como $AB < AC$, o ângulo oposto a AB é menor do que aquele oposto a AC. Logo, $\hat{C} < \hat{B}$.

No triângulo ADC, o ângulo $\hat{D}$ ($A\hat{D}C$) é externo ao triângulo ADB. Pelo Teorema do Ângulo Externo,

$$\hat{B} < \hat{D}.$$

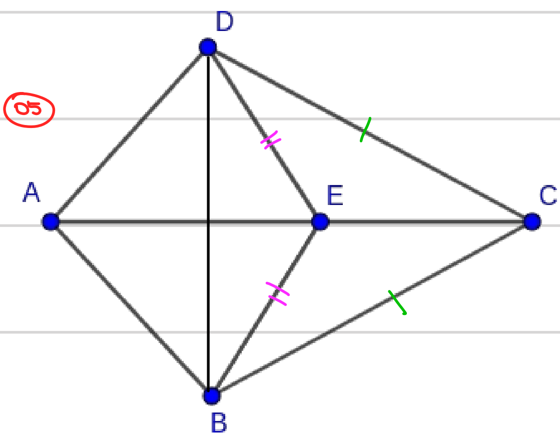
Como $\hat{C} < \hat{B}$ e $\hat{B} < \hat{D}$, por transitividade, temos que

$$\hat{C} < \hat{D}.$$

Portanto, no mesmo triângulo, oposto ao maior ângulo teremos o maior lado:

$$AD \text{ (oposto a } C) < AC \text{ (oposto a } \hat{D}).$$

05



$DC = BC$

$DE = BE$

AEC são colineares

Os triângulos EDC e EBC são congruentes, pela congruência

LLL:

- $DC = BC$
- $DE = EB$
- EC lado em comum.

Portanto, os ângulos opostos aos lados DE e EB são congruentes:

$D\hat{C}E = C\hat{E}B$.

Como A, E e C estão alinhados:

- $A\hat{C}D$ e $E\hat{C}D$ são o mesmo ângulo;
- $A\hat{C}B$ e $E\hat{C}B$ são o mesmo ângulo.

Portanto, $A\hat{C}B = A\hat{C}D$.

Nos triângulos ADC e ABC, temos que:

- $DC = BC$ (L)
- $D\hat{C}A = B\hat{C}A$ (A)
- AC é lado em comum (L)

Pela congruência LAL, podemos concluir que

$$\Delta ADC \equiv \Delta ABC.$$

Como AD e AB são opostos aos ângulos congruentes $D\hat{C}A$ e $B\hat{C}A$, concluímos que AD e AB são, também, congruentes.