GEOMETRIA PLANA

Aula 06

Paralelismo

Karla Lima

Sumário

Paralelismo

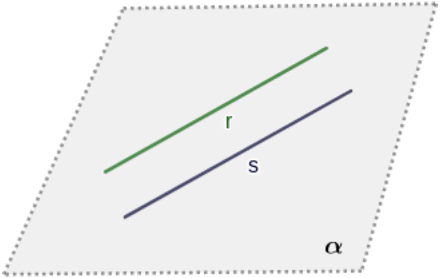
Retas Paralelas

Definição 1

Duas retas são ditas ***paralelas****, se*

i) *são coincidentes;*

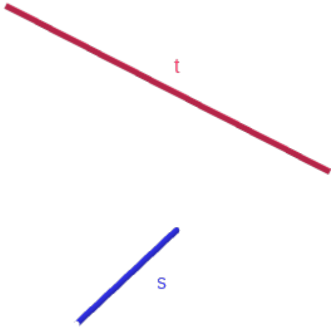
ii) *são coplanares e não se interceptam.*



Retas Reversas

Definição 2

Duas retas que não estão num mesmo plano chamam-se ***retas reversas****.*



Vá visualizar no Geogebra (Click para baixar)

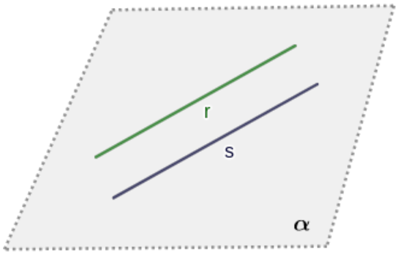
Exercício

Exercício 1

Demonstre o seguinte teorema:

Duas retas paralelas distintas estão contidas em um único plano.

- **Hipótese:** r e s são paralelas.
- **Tese:** Existe um único plano α contendo r e s.



Transversal a Várias Paralelas

Reta Transversal

Definição 3

Uma ***transversal*** *a duas retas coplanares distintas é uma reta que as intercepta em dois pontos distintos.*

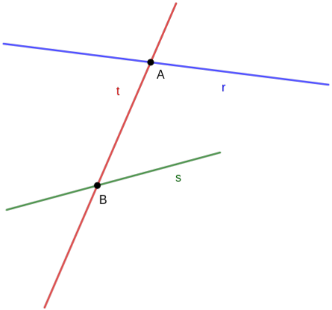


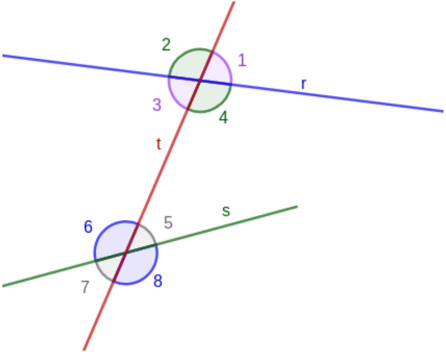
Figura 1: t é transversal às retas r e s, nos pontos A e B

Reta transversal

Definição 4

Sejam r e s retas coplanares distintas e t uma transversal às mesmas. Usaremos a seguinte nomenclatura:

I. São denominados **alternos internos** os pares de ângulos:
   - 3 e 5
   - 4 e 6
II. São denominados **alternos externos** os pares de ângulos:
   - 1 e 7
   - 2 e 8



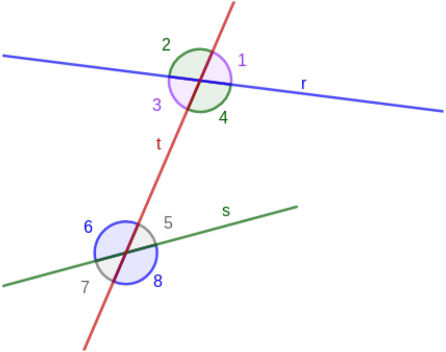
Reta transversal

III. São denominados **correspondentes** os pares de ângulos:

- 1 e 5
- 4 e 8
- 2 e 6
- 3 e 7

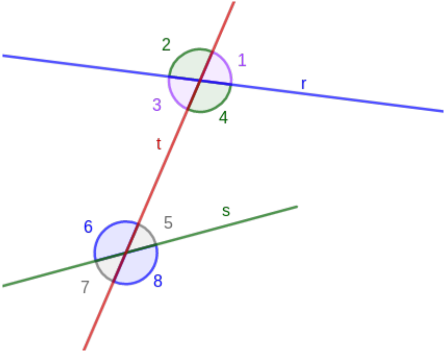
IV. São denominados **colaterais internos** os pares de ângulos:

- 4 e 5
- 3 e 6



Reta transversal

V. São denominados **colaterais externos**
os pares de ângulos:
- 1 e 8
- 2 e 7



Existência da Paralela

Teorema 1

Sejam r e s retas coplanares distintas cortadas por uma transversal t. Se dois ângulos alternos são congruentes, então as retas r e s são paralelas.

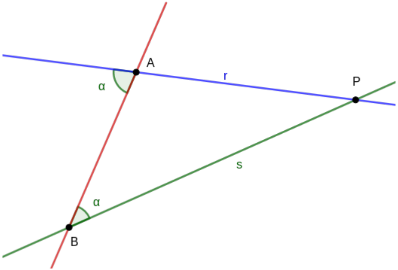
Existência da Paralela

Teorema 1

Sejam r e s retas coplanares distintas cortadas por uma transversal t. Se dois ângulos alternos são congruentes, então as retas r e s são paralelas.

Demonstração:

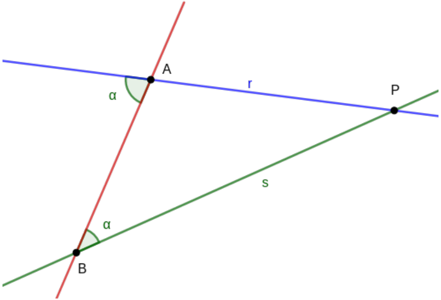
- Suponha, por absurdo, que as retas não são paralelas.
- Como são coplanares, as retas devem se interceptar num ponto *P*, formando um triângulo *ABP*.



Existência da Paralela

Demonstração:

- Com isso, $\triangle ABP$ teria um ângulo externo com medida igual ao ângulo interno α, contrariando o teorema do ângulo externo.



Teorema

Este teorema ainda é verdadeiro se substituirmos a expressão 'alternos internos' por:

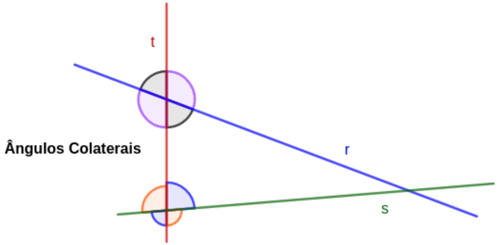
- alternos externos
- correspondentes
- colaterais internos
- colaterais externos

O 5º Postulado de Euclides

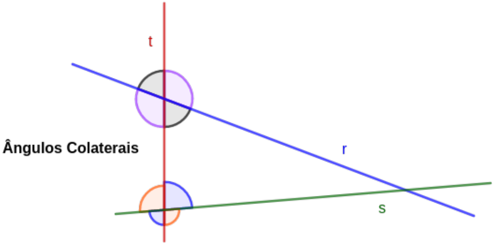
O 5º Postulado de Euclides

5. Se uma reta *t* corta duas outras *r* e *s* (todas num mesmo plano) de modo que um dos pares dos ângulos colaterais internos tem soma inferior a dois ângulos retos, então *r* e *s*, quando prolongadas suficientemente, se cortam do lado de *t* em que se encontram os referidos ângulos colaterais internos.

O enunciado fica mais claro quando acompanhado da observação da figura abaixo:

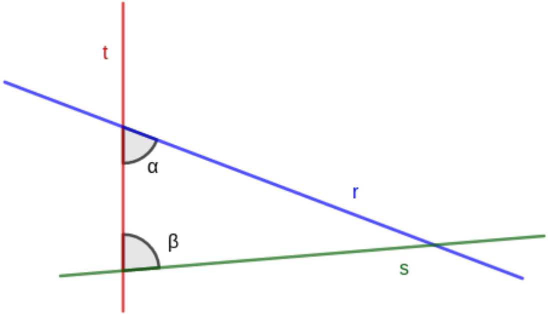


O 5º Postulado de Euclides



- Num mesmo plano, *t* corta as retas *r* e *s*.
- Tome pares (α, β), onde α é um ângulo formado pela interseção de *t* e *r* e β formado pela interseção de *t* e *s* (ângulos colaterais). Acima, temos apenas um exemplo. Cada interseção gera 4 ângulos.

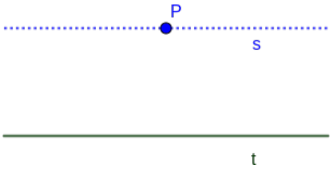
O 5º Postulado de Euclides



- Se existir um par no qual a sua soma é menor que 180, as retas *r* e *s* se cortam. Além disso, se cortam no semiplano gerado por *t*, em que os ângulos colaterais referidos estão (nesse exemplo, do lado direito de *t*).

Postulado de Playfair

Postulado de Playfair: Por um ponto não pertencente a uma reta, passa um única reta paralela à reta dada.



Esse postulado é equivalente ao 5º Postulado de Euclides. Leia mais em [1][1],[2, 3].

[1]Veja o arquivo em: Legendre e o Postulado das Paralelas

Teorema

Teorema 2

Sejam r e s duas retas paralelas distintas cortadas pela transversal t. Se a transversal t é perpendicular à reta r, então t é também perpendicular à reta s.

Teorema

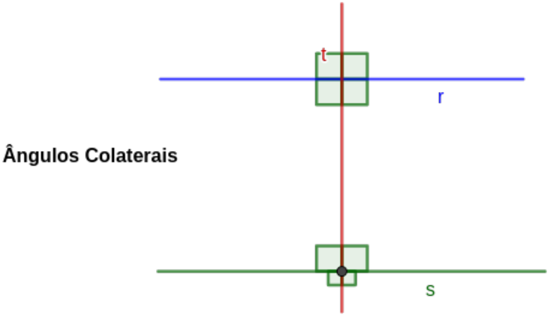
Teorema 2

Sejam r e s duas retas paralelas distintas cortadas pela transversal t. Se a transversal t é perpendicular à reta r, então t é também perpendicular à reta s.

Como o 5° postulado de Euclides pode ser usado para demonstrar o Teorema 2?

O 5º Postulado de Euclides e o Teorema 2

No caso em que não há um par (α, β) tal que $\alpha + \beta < 180$, temos então, obrigatoriamente (por quê?) $\alpha = \beta = 90°$, em todos os pares. Assim, teremos:



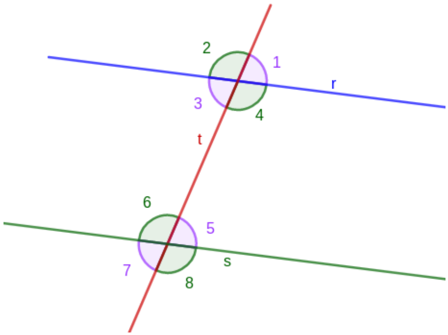
- As retas não r e s não se cruzam.

Teorema

Teorema 3

Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os quatro ângulos agudos formados são congruentes, bem como os quatro ângulos obtusos.

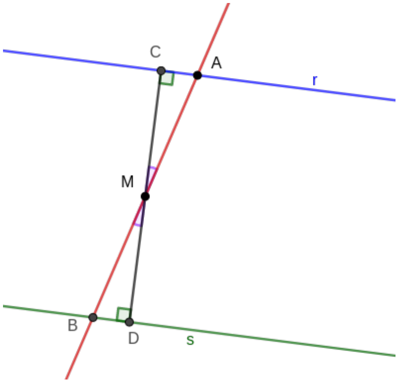
- **Hipótese:** r e s são paralelas;
  t é transversal às duas.
- **Tese:** São congruentes os ângulos:
  - $1 = 3 = 5 = 7$
  - $2 = 4 = 6 = 8$



Teorema

Demonstração:

- Sejam A e B os pontos de interseções da transversal com as retas r e s.
- Seja M o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.
- Pelo ponto M, tracemos um segmento perpendicular às retas r e s.
- Os triângulos retângulos CMA e DMB são congruentes (Caso LAA_0).

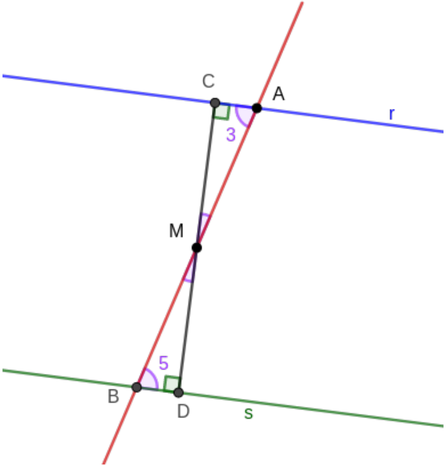


Teorema

- Com isso, são congruentes os ângulos 3 e 5.
- Como $1 = 3$ e $5 = 7$, por serem ângulos
  opostos pelo vértice, segue que

$$1 = 3 = 5 = 7.$$

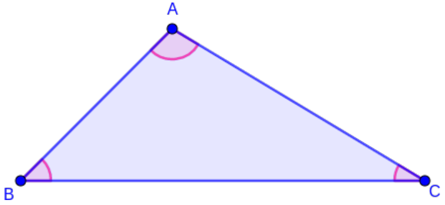
- Por outro lado, $2 = 4 = 6 = 8$ por serem
  suplementos de ângulos congruentes.



Soma dos ângulos de um triângulo

Teorema 4

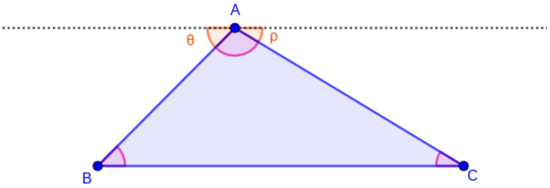
Em todo triângulo, a soma dos seus ângulos internos é igual à 180°.



- **Hipótese:** ABC é um triângulo.
- **Tese:** $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$.

Demonstração: Teorema 4

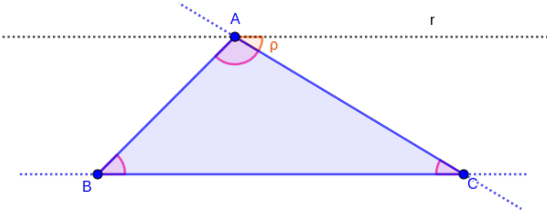
- Pelo vértice A, trace uma reta r paralela ao lado $\overline{BC}$.



i) Temos que $\theta + \hat{A} + \rho = 180°$.

Demonstração: Teorema 4

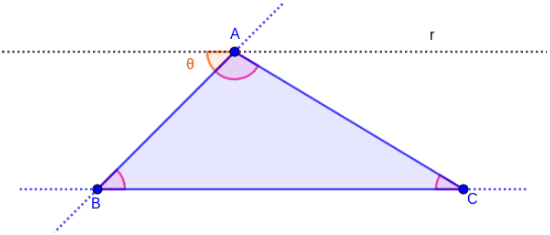
- Observando as paralelas $\overline{BC}$ e r cortadas pela transversal $\overline{AC}$, obtemos que os ângulos $\hat{C}$ e ρ são alternos internos.



ii) Portanto, $\rho = \hat{C}$.

Demonstração: Teorema 4

- Por fim, observando as paralelas $\overline{BC}$ e r cortadas pela transversal $\overline{AB}$, obtemos que os ângulos $\hat{B}$ e θ são alternos internos.



iii) Portanto, $\theta = \hat{B}$.

Demonstração: Teorema 4

De i), ii) e iii), concluímos que

$$180^\circ = \hat{A} + \theta + \rho = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}.$$

Exercício

Prove o seguinte corolário do Teorema 4:

Corolário 1

Em todo triângulo, a medida de qualquer ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes.

Referencias I

Geraldo Ávila.
Legendre e o postulado das paralelas.
Revista da Olimpíada, 6:64–76, 2005.

Manfredo Perdigão do Carmo.
Geometrias não-Euclidianas.
Matemática Universitária, 6:25–48, 1987.

A geometria dos espaços curvos ou geometria não-euclidiana.
ON - Observatório Nacional.