Listas de Exercícios P2

18 de novembro de 2025

Exercícios Seção 4.9 - Álgebra Linear com Aplicações

(Howard Anton and Chris Rorres)

1. (Exercício 7) Em cada parte, determine se T é uma transformação linear.
   (a) $T(x, y, z) = (0, 0)$
   (b) $T(x, y, z) = (1, 1)$
   (c) $T(x, y, z) = (3x - 4y,\ 2x - 5z)$
   (d) $T(x, y, z) = (y^2, z)$
   (e) $T(x, y, z) = (y - 1, x)$

2. (Exercício 11) Em cada parte, encontre a matriz canônica da transformação T definida pela fórmula.
   (a) $T(x, y) = (y,\ -x,\ x + 3y,\ x - y)$
   (b) $T(x, y, z, w) = (7x + 2y - z + w,\ y + z,\ -x)$
   (c) $T(x, y, z) = (0, 0, 0, 0)$
   (d) $T(x, y, z, w) = (w, x, z, y, x - z)$

Exercícios Seção 8.1 - Álgebra Linear com Aplicações

(Howard Anton and Chris Rorres)

3. (Exercício 9) Considere a base $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, em que $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$ e $\mathbf{v}_2 = (1, 0)$ e seja o operador linear tal que

$$T(\mathbf{v}_1) = (1, 2) \quad \text{e} \quad T(\mathbf{v}_2) = (-4, 1).$$

   Encontre uma fórmula para $T(x, y)$ e use essa fórmula para obter $T(5, -3)$.

Outros Exercícios

4. Considerando $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ com a sua base canônica, verifique que cada aplicação abaixo é uma transformação linear e calcule sua matriz.
   (a) **Diferenciação:** $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$, dada por $T(p(x)) = p'(x)$.

(b) **Integração:** $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$, dada por $T(p(x)) = \displaystyle\int p(x)dx$.

(c) **Composição:** Fixado o polinômio $q(x) = 2x + 1$, defina $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$, dada por $T(p(x)) = p(q(x))$.

5. Encontre uma base para o núcleo e para a imagem de cada transformação a seguir:

   (a) $T(x, y) = (y,\ -x,\ x + 3y,\ x - y)$

   (b) $T(x, y, z, w) = (7x + 2y - z + w,\ y + z,\ -x)$

   (c) $T(x, y, z) = (0, 0, 0, 0)$

   (d) $T(x, y, z, w) = (w, x, z, y, x - z)$

   (e) **Diferenciação:** $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$, dada por $T(p(x)) = p'(x)$.

   (f) **Integração:** $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$, dada por $T(p(x)) = \displaystyle\int p(x)dx$.

Exercícios Seção 3.2 - Álgebra Linear com Aplicações

(Howard Anton and Chris Rorres)

6. (Exercício 1) Encontre a norma de $\mathbf{v}$, de um vetor unitário que tem o mesmo sentido e mesma direção de $\mathbf{v}$ e de um vetor na mesma direção mas no sentido oposto de $\mathbf{v}$:

   (a) $\mathbf{v} = (4, 3)$

   (b) $\mathbf{v} = (2, 2, 2)$

   (c) $\mathbf{v} = (1, 0, 2, 1, 3)$

7. (Exercício 9) Encontre $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \langle$ e $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$:

   (a) $\mathbf{u} = (3, 1, 4)$ e $\mathbf{u} = (2, 2, -4)$.

   (b) $\mathbf{u} = (1, 1, 4, 6)$ e $\mathbf{u} = (2, -2, 3, -2)$.

Exercícios Seção 6.1 - Álgebra Linear com Aplicações

(Howard Anton and Chris Rorres)

8. (Exercício 23) Sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. Em cada parte, mostre que a expressão é um produto interno em $\mathbb{R}^2$ verificando a validade dos axiomas de produto interno.

   (a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 5u_2v_2$

   (b) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 4u_1v_1 + u_2v_1 + u_1v_2 + 4u_2v_2$

9. (Exercício 27) Sejam $U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}$ e $V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$. Mostre que $\langle U, V \rangle = 4u_1v_1 + u_2v_3 + u_3v_2 + 4u_4v_4$ não define um produto interno em $\mathbb{M}_{22}$.

10. (Exercício 29) Em cada parte, use o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

em P_3 para calcular $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$:

(a) $p(x) = 1 - x + x^2$ e $q(x) = x - 3x^2$

(b) $p(x) = x - 5x^3$ e $q(x) = 2 + 8x^2$