

Aula 11


Semelhança em Triângulos Retângulos

Karla Lima

Sumário



1. Relações Métricas no Triângulo Retângulo

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape, consisting of two triangles meeting at a diagonal line, occupies the upper-left portion of the frame. The remaining area is a light gray shape, also composed of triangles, which fills the lower-left and extends towards the bottom right. The overall effect is a modern, minimalist design with sharp diagonal lines.

Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Teorema 1

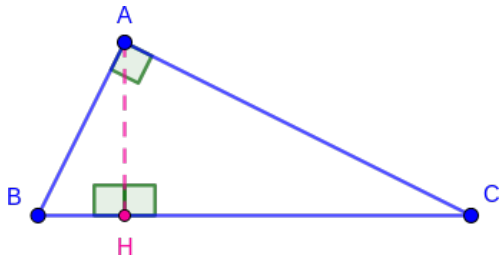


Teorema 1

Em todo triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa divide-o em dois triângulos que são semelhantes entre si e semelhantes também ao triângulo dado.

Tese:

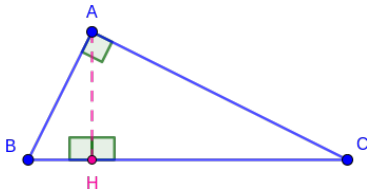
- i) $\triangle ABH \sim \triangle AHC$
- ii) $\triangle ABH \sim \triangle ABC$
- iii) $\triangle AHC \sim \triangle ABC$



Demonstração: Teorema 1



- Considere os triângulos retângulos ABH e ABC .

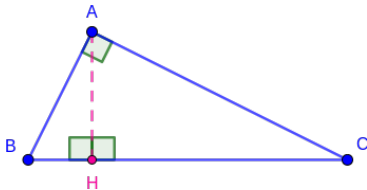


- O ângulo B é comum aos dois triângulos e ambos possuem um ângulo de 90° .
- Logo, $ABH \sim ABC$ (AA).

Demonstração: Teorema 1



- ▶ Analogamente, considere os triângulos retângulos AHC e ABC .

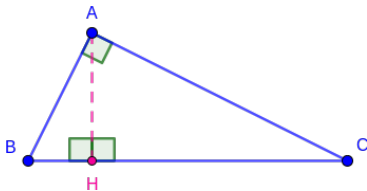


- ▶ O ângulo C é comum aos dois triângulos e ambos possuem um ângulo de 90° .
- ▶ Logo, $AHC \sim ABC$ (AA).

Demonstração: Teorema 1



- Por fim, considere os triângulos retângulos AHC e ABH .



- Como $\hat{BAH} = \hat{C}$ (já que $ABH \sim ABC$), e ambos possuem um ângulo de 90° , $AHC \sim ABH$ (AA).

Corolário 1



Em todo triângulo retângulo, tem-se:

- i) A altura relativa à hipotenusa é a média geométrica entre os segmentos que a mesma determina na hipotenusa

$$h = \sqrt{m * n} \Rightarrow h^2 = m * n \quad (1)$$

- ii) Cada cateto é a média geométrica entre a hipotenusa e o segmento desta adjacente ao cateto:

$$b^2 = a * m \quad (2)$$

$$c^2 = a * n \quad (3)$$

Corolário 1



iii) O produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa à mesma:

$$b * c = a * h \quad (4)$$

iv) **[Teorema de Pitágoras]** O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (5)$$

Exercício



Exercício 1

Demonstre o Corolário 1.

Teorema 2

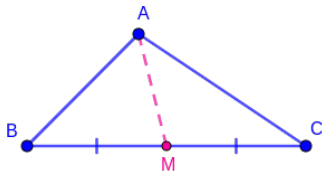


Teorema 2

Se dois triângulos são semelhantes, então duas medianas quaisquer, ou duas alturas correspondentes quaisquer ou ainda duas bissetrizes internas correspondentes quaisquer, estão na mesma razão que os lados correspondentes.

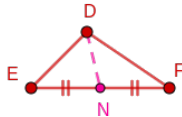
Demonstração: Teorema 2

► Medianas



► Por hipótese:

$$\hat{B} = \hat{E}$$
$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$



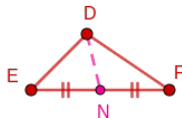
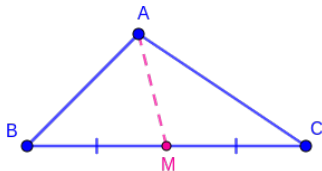
Demonstração: Teorema 2



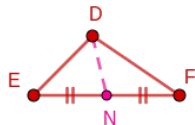
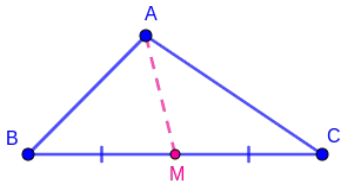
► Logo,

$$\begin{aligned}\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} &\Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BC/2}{EF/2} = \frac{BM}{EN} \\ &\Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BM}{EN}\end{aligned}$$

► Assim, os triângulos ABM e DEN possuem ângulos respectivamente congruentes, formados por lados proporcionais, sendo, portanto, semelhantes.



Demonstração: Teorema 2



► Da semelhança dos triângulos ABM e DEN , concluímos que

$$\begin{aligned}\frac{AM}{DN} &= \frac{BM}{EN} \Rightarrow \frac{AM}{DN} = \frac{2BM}{2EN} \\ &\Rightarrow \frac{AM}{DN} = \frac{BC}{EF},\end{aligned}$$

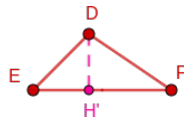
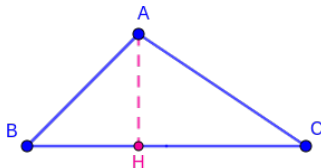
como queríamos demonstrar.

Demonstração: Teorema 2

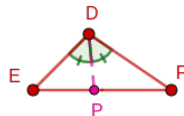
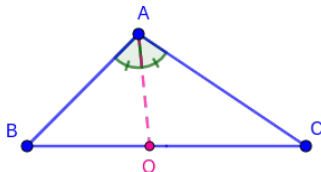
Exercício 2

Termine a demonstração do Teorema 2.

► Alturas



► Bissetrizes



Referencias I

