Aula 08: Técnicas de Demonstração - Parte 2

Karla Lima

Álgebra Elementar: 14/12/23

FACET/UFGD

Condicional: Prova Direta

Definição [1]

Definição 1

Seja provar $\alpha \to \beta$ *dadas as premissas* $p_1, p_2, \ldots, p_n$. *Fazendo* P *o conjunto das premissas, queremos validar o argumento*

$$P \Longrightarrow (\alpha \to \beta).$$

Definição [1]

Definição 1

Seja provar $\alpha \to \beta$ dadas as premissas $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Fazendo P o conjunto das premissas, queremos validar o argumento

$$P \implies (\alpha \to \beta).$$

É equivalente a mostrar que

$$P \to (\alpha \to \beta)$$

é uma tautologia.

Condicional: Prova Direta

Provando uma sentença “ Se P, então Q”, de forma direta:

- Assumimos que P é verdadeira.
- Mostramos que Q também é verdadeira.
- Portanto, $P \rightarrow Q$ é verdadeira.

Condicional: Prova Direta

Provando uma sentença “ Se P, então Q”, de forma direta:

- Assumimos que P é verdadeira.
- Mostramos que Q também é verdadeira.
- Portanto, $P \to Q$ é verdadeira.

Obs:

- A única forma para P $\to$Q ser falsa é P ser verdadeira e Q ser falsa.
- Assim, assumir P verdadeira e concluir que Q é verdadeira, torna a proposição verdadeira.

Exemplos

Exemplo 1

Se a soma de dois números inteiros é par, então a sua diferença também é par.

Exemplos

Exemplo 2

Se um inteiro é divisível por 6, então duas vezes o inteiro é divisível por 4.

Exemplos

Exemplo 2

Se um inteiro é divisível por 6, então duas vezes o inteiro é divisível por 4.

Exemplo 3

Se dois inteiros são ambos divisíveis por um inteiro n, então a sua soma é divisível por n.

Bicondicional

Bicondicional: Prova Direta

A prova é semelhante à prova condicional, com a diferença de que é feita em duas partes distintas.

Bicondicional: Prova Direta

A prova é semelhante à prova condicional, com a diferença de que é feita em duas partes distintas.

Provando uma sentença " P se, e somente se, Q", de forma direta:

1. $P \rightarrow Q$
    - Assumimos que P é verdadeira.
    - Mostramos que Q também é verdadeira.
    - Portanto, $P \rightarrow Q$ é verdadeira.

Bicondicional: Prova Direta

A prova é semelhante à prova condicional, com a diferença de que é feita em duas partes distintas.

Provando uma sentença " P se, e somente se, Q", de forma direta:

1. $P \rightarrow Q$
    - Assumimos que P é verdadeira.
    - Mostramos que Q também é verdadeira.
    - Portanto, $P \rightarrow Q$ é verdadeira.
2. Recíproca: $Q \rightarrow P$
    - Assumimos que Q é verdadeira.
    - Mostramos que P também é verdadeira.
    - Portanto, $Q \rightarrow P$ e $P \rightarrow Q$ são verdadeiras.

Exemplo 4

Sejam x e y números positivos. Prove que $x < y$ se, e somente se, $x^2 < y^2$.

Exemplos

Exemplo 4

Sejam x e y números positivos. Prove que $x < y$ se, e somente se, $x^2 < y^2$.

Obs: Diferente da demonstração dada, pode-se usar a função $\sqrt{x}$ para provar a recíproca deste argumento. Quais premissas devem ser verificadas, a fim de usar tal função?

Prova por Contrapositiva

Definição

Definição 2

Consiste no uso da equivalência $p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$ (mostre novamente).

- *Pela equivalência, se $\neg q \to \neg p$ for verdadeira, então a proposição original $p \to q$ também o será.*

Assim, a proposição $p \to q$ pode ser demonstrada através da sua contrapositiva $\neg q \to \neg p$.

Exemplo

Exemplo 5
Seja x um número inteiro. Se x^2 é par, então x também é par.

Exemplo

Exemplo 5
Seja x *um número inteiro. Se* x^2 *é par, então* x *também é par.*

Exemplo 6
Seja x *um número inteiro. Se* $x^2 - 6x + 5$ *é par, então* x *é ímpar.*

Referências

J. Daghlian.
Lógica e Álgebra de Boole.
Editora Atlas S.A., 2009.