Introdução ao Cálculo

Aula 08: Funções Exponenciais.

Karla Lima

01/03/2022

Sumário

Bibliografia

Bibliografia da Aula 08

- Fundamentos da Matemática Elementar: 2 (Click para baixar)

Motivação e Propriedades

Meia-vida

- **Meia-vida** é o tempo necessário para desintegrar a metade da massa de um composto químico.
- Por exemplo, se tivermos 100 kg de um material, cuja meia-vida é de 100 anos, depois desses 100 anos, teremos 50 kg deste material. Mais 100 anos e teremos 25 kg, mais 100 anos e teremos 12,5 kg, mais 100 anos 6,25 kg, mais 100 anos 3,125 kg, mais 100 anos 1,5625 kg, mais 100 anos 0,78125 kg e assim sucessivamente.
- No caso do carbono-14 a meia-vida é de 5.730 anos, ou seja, este é o tempo necessário para uma determinada massa deste isótopo instável decair para a metade da sua massa, transformando-se em nitrogênio-14 pela emissão de uma partícula beta.
- Esta medida é utilizada para a datação de fósseis e elementos químicos radioativos.

Meia-vida

Exemplo 1

A concentração de alguns medicamentos no organismo está relacionada com a meia-vida. Ou seja, o tempo necessário para que a quantidade inicial do medicamento no organismo seja reduzida pela metade. A meia-vida do antibiótico amoxicilina é de 1 hora. Sabendo que um paciente ingeriu 1000mg desse medicamento às 7 horas, qual é, aproximadamente, a concentração desse medicamento no organismo desse paciente, às 16 horas do mesmo dia?

Meia-vida

Às 8 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\frac{1000}{2} = 500$mg:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	0	0	0	0	0	0	0	0

Meia-vida

Às 8 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\frac{1000}{2} = 500$mg:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	0	0	0	0	0	0	0	0

Às 9 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\frac{\frac{1000}{2}}{2} = 250$mg:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	250	0	0	0	0	0	0	0

Meia-vida

Às 10 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\dfrac{\frac{1000}{2^2}}{2} = 125$mg:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	250	125	0	0	0	0	0	0

Meia-vida

Às 10 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\frac{\frac{1000}{2^2}}{2} = 125\text{mg}$:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	250	125	0	0	0	0	0	0

Às 11 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\frac{\frac{1000}{2^3}}{2} = 62,5\text{mg}$:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	250	125	$62,5$	0	0	0	0	

Meia-vida

Às 12 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\dfrac{\frac{1000}{2^4}}{2} = 31,25$mg:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	250	125	$62,5$	$31,25$	0	0	0	0

Meia-vida

Às 12 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\dfrac{\frac{1000}{2^4}}{2} = 31,25\text{mg}$:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	250	125	$62,5$	$31,25$	0	0	0	0

Às 13 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\dfrac{\frac{1000}{2^5}}{2} = 15,625\text{mg}$:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	250	125	$62,5$	$31,25$	$15,625$	0	0	0

Meia-vida

Às 14 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\dfrac{\frac{1000}{2^6}}{2} = 7,8125\text{mg}$:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	250	125	62, 5	31, 25	15, 625	7, 8125	0	0

Meia-vida

Às 14 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\dfrac{\frac{1000}{2^6}}{2} = 7,8125\text{mg}$:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	250	125	$62,5$	$31,25$	$15,625$	$7,8125$	0	0

Às 15 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\dfrac{\frac{1000}{2^7}}{2} = 3,90625\text{mg}$:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	250	125	$62,5$	$31,25$	$15,625$	$7,8125$	$3,90625$	0

Meia-vida

Às 16 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de $\dfrac{\frac{1000}{2^8}}{2} = 1,953125$mg:

8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
500	250	125	$62,5$	$31,25$	$15,625$	$7,8125$	$3,90625$	$1,953125$

Portanto, às 16 horas, a quantidade de medicamento no organismo é de aproximadamente $1,95$mg.

Meia-vida

Observe que:

- A diminuição inicial é bem significativa;
- A medida que a quantidade se aproxima de zero, a diminuição é mais lenta.

Meia-vida

Ainda,

- Após a primeira hora a quantidade é dada pela expressão $\dfrac{1000}{2}$;
- Após a segunda hora a quantidade é dada pela expressão $\dfrac{1000}{2^2}$;
- Após a terceira hora a quantidade é dada pela expressão $\dfrac{1000}{2^3}$;
- Assim por diante, até que, após 9 horas, a quantidade é dada pela expressão $\dfrac{1000}{2^9}$.
- No geral, após t horas, a quantidade é dada pela expressão $\dfrac{1000}{2^t} = 1000 * 2^{-t}$.

Meia-vida

Assim, se quisermos saber a quantidade de medicamento no organismo após 24 horas, basta calcular

$$1000 * 2^{-24} = \frac{1000}{16777216} \approx 0,00006\text{mg}.$$

Exercício

Exercício 1

A meia-vida de certa substância radioativa é igual a 14 dias. Existem 6,6 gramas presentes inicialmente.

a) *Expresse a quantidade da substância remanescente como uma função do tempo t, em dias.*
b) *Quando existirá menos de 1 grama?*

A Lenda do Xadrez [1]

- O primeiro registro do problema do trigo num tabuleiro de xadrez é de 1256, do historiador muçulmano Ibn Khallikan, mas é provável que reconte uma versão anterior do século V.
- Segundo a história, a invenção do xadrez é creditada a um brâmane de uma corte indiana, que, atendendo a um pedido do rei, inventou o jogo para demonstrar o valor da inteligência. O rei, encantado com o invento, ofereceu ao brâmane a escolha de uma recompensa. De acordo com essa lenda, o inventor do jogo de xadrez pediu ao rei que a recompensa fosse paga em grãos de arroz da seguinte maneira: 1 grão para a casa 1 do tabuleiro, 2 grãos para a casa 2, 4 para a casa 3, 8 para a casa 4 e assim sucessivamente. Ou seja, a quantidade de grãos para cada casa do tabuleiro correspondia ao dobro da quantidade da casa imediatamente anterior.

A Lenda do Xadrez [1]

- Perplexo ante o que parecia ser uma magra recompensa, o rei ordenou que os grãos fossem contados.
- Vamos fazer alguns cálculos:
  - Quantos grãos contém o oitavo quadrado?

A Lenda do Xadrez [1]

- Perplexo ante o que parecia ser uma magra recompensa, o rei ordenou que os grãos fossem contados.
- Vamos fazer alguns cálculos:
  - Quantos grãos contém o oitavo quadrado?R:128.

A Lenda do Xadrez [1]

- Perplexo ante o que parecia ser uma magra recompensa, o rei ordenou que os grãos fossem contados.
- Vamos fazer alguns cálculos:
  - Quantos grãos contém o oitavo quadrado?R:128.
  - E no trigésimo segundo, na primeira metade do tabuleiro? E no trigésimo terceiro?

A Lenda do Xadrez [1]

- Perplexo ante o que parecia ser uma magra recompensa, o rei ordenou que os grãos fossem contados.
- Vamos fazer alguns cálculos:
  - Quantos grãos contém o oitavo quadrado?R:128.
  - E no trigésimo segundo, na primeira metade do tabuleiro? E no trigésimo terceiro?R: Aproximadamente 2 bilhões e 4 bilhões, respectivamente.

A Lenda do Xadrez [1]

- Perplexo ante o que parecia ser uma magra recompensa, o rei ordenou que os grãos fossem contados.
- Vamos fazer alguns cálculos:
  - Quantos grãos contém o oitavo quadrado?R:128.
  - E no trigésimo segundo, na primeira metade do tabuleiro? E no trigésimo terceiro?R: Aproximadamente 2 bilhões e 4 bilhões, respectivamente.
  - Como podemos calcular o total de grãos?

A Lenda do Xadrez [1]

- Perplexo ante o que parecia ser uma magra recompensa, o rei ordenou que os grãos fossem contados.
- Vamos fazer alguns cálculos:
  - Quantos grãos contém o oitavo quadrado?R:128.
  - E no trigésimo segundo, na primeira metade do tabuleiro? E no trigésimo terceiro?R: Aproximadamente 2 bilhões e 4 bilhões, respectivamente.
  - Como podemos calcular o total de grãos? R: Para cada n-ésimo quadrado, tem-se 2^n grãos. No Total, seriam $1 + 2 + \cdots + 2^{64} \approx 18 * 10^{18}$ grãos .

A Lenda do Xadrez [1]

- Perplexo ante o que parecia ser uma magra recompensa, o rei ordenou que os grãos fossem contados.
- Vamos fazer alguns cálculos:
  - Quantos grãos contém o oitavo quadrado?R:128.
  - E no trigésimo segundo, na primeira metade do tabuleiro? E no trigésimo terceiro?R: Aproximadamente 2 bilhões e 4 bilhões, respectivamente.
  - Como podemos calcular o total de grãos? R: Para cada n-ésimo quadrado, tem-se 2^n grãos. No Total, seriam $1 + 2 + \cdots + 2^{64} \approx 18 * 10^{18}$ grãos .
- A história tem dois finais alternativos: num, o rei torna o brâmane seu conselheiro-mor; no outro, ele é executado por fazer o rei parecer tolo.

Tabela com os valores

72 quatri-lhões	144 quatri-lhões	288 quatri-lhões	600 quatri-lhões	1,2 quinti-lhão	2,3 quinti-lhões	4,6 quinti-lhões	9,2 quinti-lhões
281 trilhões	562 trilhões	1,1 quatri-lhão	2,3 quatri-lhões	4,5 quatri-lhões	9 quatri-lhões	18 quatri-lhões	36 quatri-lhões
1 trilhão	2 trilhões	4 trilhões	8 trilhões	17 trilhões	35 trilhões	70 trilhões	140 trilhões
4 bilhões	8 bilhões	16 bilhões	33 bilhões	66 bilhões	131 bilhões	262 bilhões	524 bilhões
16 milhões	32 milhões	64 milhões	128 milhões	256 milhões	512 milhões	1 bilhão	2 bilhão
65.536	131.072	262.144	524.288	1 milhão	2 milhões	4 milhões	8 milhões
256	512	1.024	2.048	4.096	8.192	16.384	32.768
1	2	4	8	16	32	64	128

A Segunda Metade do Tabuleiro de Xadrez [1]

- Pensadores recentes usaram o problema do tabuleiro de xadrez como metáfora da taxa de mudança em tecnologia nos últimos anos.
- Previu-se que, como o trigo na segunda metade do tabuleiro, a taxa de desenvolvimento tecnológico logo aumentaria de modo descontrolado, seguindo o modelo de duplicação do crescimento anterior a cada passo adiante.
- Essa taxa de crescimento levaria por fim à singularidade, que marca o ponto em que a habilidade cognitiva da inteligência artificial ultrapassará a dos seres humanos!

Exercício

Exercício 2

O número de bactérias em uma cultura é contado como 400 no começo de um experimento. Se o número de bactérias dobrar a cada 3 horas, determine:

a) *A fórmula que descreve o número de bactérias em função do tempo t, dado em horas.*

b) *O número de bactérias presentes na cultura após 24 horas.*

A Função Exponencial

Propriedades dos Expoentes [2]

Antes de definirmos uma função exponencial, vamos recordar algumas propriedades das potências a^x, onde a é a base da potência e x é o seu expoente.

Teorema 1

Sejam a e b números reais positivos $(a, b > 0)$. Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\text{i) } a^x a^y = a^{x+y} \qquad \text{iv) } a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$\text{ii) } (a^x)^y = a^{xy} \qquad \text{v) } \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\text{iii) } a^x b^x = (ab)^x \qquad \text{vi) } \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

Propriedades dos Expoentes

Obs: Como estamos enunciando propriedades que valem para quaisquer números reais x, y, devemos tomar a base positiva, para que a operação a^x seja sempre possível. Por exemplo, para números x negativos, 0^x não está definido. Então tais propriedades não valem nesse caso. Do mesmo modo, se $x = \frac{1}{2n}$, com $n \in \mathbb{N}^*$, a operação a^x não está definida quando $a < 0$, pois não há raiz par de números negativos.

Exemplo

Exemplo 2

Calcule $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[5]{128}$.

Não podemos efetuar o produto diretamente, pois as raízes são diferentes. ao realizar o produto de duas potências devemos ter a mesma base ou o mesmo expoente. Neste caso, não temos os mesmos expoentes, então devemos tentar escrever as potências de modo que possuam a mesma base.

Exemplo

Lembrando que $\sqrt[3]{16} = 16^{\frac{1}{3}}$ e $\sqrt[5]{128} = 128^{\frac{1}{5}}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{16} &= 16^{\frac{1}{3}} \\ &= (2^4)^{\frac{1}{3}} \\ &= 2^{4\frac{1}{3}} \\ &= 2^{\frac{4}{3}} \quad \leftarrow \mathit{ii}) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \sqrt[5]{128} &= 128^{\frac{1}{5}} \\ &= (2^7)^{\frac{1}{5}} \\ &= 2^{7\frac{1}{5}} \\ &= 2^{\frac{7}{5}} \quad \leftarrow \mathit{ii}) \end{aligned}$$

onde a última igualdade das duas equações são obtidas através da propriedade $\mathrm{ii})$.

Exemplo

Assim,

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[5]{128} &= 2^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{\frac{7}{5}} \\
&= 2^{\frac{4}{3}+\frac{7}{5}} \qquad {\color{red}\leftarrow i)} \\
&= 2^{\frac{20+21}{15}} \\
&= 2^{\frac{41}{15}} \\
&= \sqrt[15]{2^{41}}.
\end{aligned}$$

Definição

Definição 1

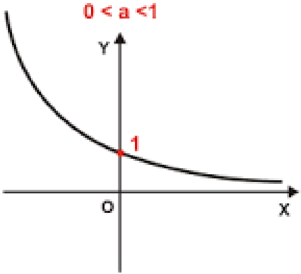
Seja a um número real positivo, com $a \neq 1$. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, dada por $f(x) = a^x$, é chamada ***função exponencial*** *de base a.*

Se $a = 1$, temos que $f(x) = 1^x = 1$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Portanto, f é uma função constante e não uma função exponencial.

Obs: Mais adiante, veremos que a exponencial é definida por ter sua taxa de variação instantânea proporcional à própria função. A função constante não se encaixa nesse perfil.

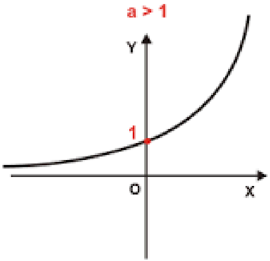
Propriedades das Funções Exponenciais

1. Como estamos calculando potências de um número real positivo a, $f(x)$ será sempre um número real positivo $(f(x) > 0)$. Logo, o gráfico de f está todo acima do eixo x, nunca o tocando.
2. Se a base a for tal que $0 < a < 1$, então f é decrescente. Seu gráfico é dado abaixo:



Propriedades das Funções Exponenciais

3. Se a base a for tal que $1 < a$, então f é crescente. Seu gráfico é dado abaixo:



Observe que o gráfico de f toca o eixo y quando $x = 0$ e, portanto, $y = f(0) = a^0 = 1$.

Propriedades das Funções Exponenciais

4. As funções exponenciais são **injetivas**. Portanto,

$$a^x = a^y \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

Como a imagem de uma função exponencial é o conjunto

$$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\},$$

temos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, tal que $f(x) = a^x$, é uma bijeção.

Exemplo

Exemplo 3

Identificando uma função exponencial:

a) $f(x) = 3^x$

Exemplo

Exemplo 3

Identificando uma função exponencial:

a) $f(x) = 3^x$ *é uma função exponencial, com base* $a = 3$.

Exemplo

Exemplo 3

Identificando uma função exponencial:

a) $f(x) = 3^x$ *é uma função exponencial, com base* $a = 3$.

b) $g(x) = x^4$

Exemplo

Exemplo 3

Identificando uma função exponencial:

a) $f(x) = 3^x$ *é uma função exponencial, com base* $a = 3$.

b) $g(x) = x^4$ *não é uma função exponencial, pois a variável está na base e não no expoente.*

Exemplo

Exemplo 3

Identificando uma função exponencial:

a) $f(x) = 3^x$ *é uma função exponencial, com base* $a = 3$.

b) $g(x) = x^4$ *não é uma função exponencial, pois a variável está na base e não no expoente.*

c) $h(x) = 6^\pi$

Exemplo

Exemplo 3

Identificando uma função exponencial:

a) $f(x) = 3^x$ *é uma função exponencial, com base* $a = 3$.
b) $g(x) = x^4$ *não é uma função exponencial, pois a variável está na base e não no expoente.*
c) $h(x) = 6^\pi$ *não é uma função exponencial, pois o expoente é uma constante.*

Exemplo

Exemplo 3

Identificando uma função exponencial:

a) $f(x) = 3^x$ *é uma função exponencial, com base* $a = 3$.

b) $g(x) = x^4$ *não é uma função exponencial, pois a variável está na base e não no expoente.*

c) $h(x) = 6^{\pi}$ *não é uma função exponencial, pois o expoente é uma constante.*

d) $i(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Exemplo

Exemplo 3

Identificando uma função exponencial:

a) $f(x) = 3^x$ *é uma função exponencial, com base* $a = 3$.

b) $g(x) = x^4$ *não é uma função exponencial, pois a variável está na base e não no expoente.*

c) $h(x) = 6^\pi$ *não é uma função exponencial, pois o expoente é uma constante.*

d) $i(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ *é uma função exponencial, com base* $a = \frac{1}{2}$.

O Número de Euler

Um Número Singular

- Lembre-se, uma **constante** matemática é um número significativo e **bem-definido**. Sua magnitude nunca varia.
- A constante e $(2,718\ldots)$ tem **propriedades especiais**.
- É irracional (não pode ser espresso pela razão entre dois inteiros) e transcendente (qualquer potência não nula dele continua sendo irracional).

Um Número Singular

- Tornou-se conhecido no século XVII, quando os logaritmos foram invetados para ajudar a simplificar cálculos complexos.
- Logaritmos na base e foram chamados de **logaritmos naturais**, pois podem ser usados para descrever matematicamente processos da natureza.
- O matemático suíço Bernoulli usou o número $2,718\ldots$ para calcular juros compostos, mas foi Euler que primeiro o chamou de número e.

O Número de Euler

Definição 2

O número de Euler e também é chamado de ***base exponencial natural****. Ele é obtido ao fazermos n tender ao infinito na expressão* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. *Matematicamente, escrevemos*

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

O resultado é um número decimal com infinitas casas decimais, mas não periódicas. Logo, e é um número irracional com

$$e \approx 2,718281828459045...$$

Juros Compostos

Se juros são pagos de forma composta, n vezes por ano, a uma taxa de juros anual r, então, após t anos, uma quantia inicial P_0 aumenta para

$$P(t) = P_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt},$$

que é obtida a partir da função exponencial $\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$. As constantes P_0, r e n são dadas nos problemas propostos.

Juros Compostos

Exemplo 4

Considere uma conta bancária que inicie com $\mathrm{R}\$8000,00$ *e que receba 5% de juros anuais, compostos, doze vezes por ano. Quanto haverá, aproximadamente, na conta bancária após três anos?*

Nesse exemplo, temos $P = 8000$, $r = 0,05$ *e* $n = 12$. *Assim, após três anos, haverá*

$$P(3) = 8000\left(1 + \frac{0,05}{12}\right)^{12\cdot 3}$$
$$\approx 9291,8,$$

ou seja, aproximadamente $\mathrm{R}\$9291,80$.

Juro Compostos: outro exemplo

Juros compostos rendem um valor total maior.

	1 ano, taxa de juros de 100%	6 meses, taxa de juros de 50%	3 meses, taxa de juros de 25%
Janeiro	**depósito principal de R$ 10**	**depósito principal de R$ 10**	**depósito principal de R$ 10**
Fevereiro			
Março			
Abril			R$ 10 × 0,25 = R$ 2,50 R$ 10 + R$ 2,50 = **R$ 12,50**
Maio			
Junho			
Julho		R$ 10 × 0,5 = R$ 5 R$ 10 + R$ 5 = **R$ 15**	R$ 12,50 × 0,25 = R$ 3,125 R$ 12,50 + R$ 3,125 = **R$ 15,625**
Agosto			
Setembro			
Outubro			R$ 15,625 × 0,25 = R$ 3,906 R$ 15,625 + R$ 3,906 = **R$ 19,531**
Novembro			
Dezembro			
Janeiro	R$ 10 × 1 = R$ 10 R$ 10 + R$ 10 = **R$ 20**	R$ 15 × 0,5 = R$ 7,50 R$ 15 + R$ 7,50 = **R$ 22,50**	R$ 19,531 × 0,25 = R$ 4,883 R$ 19,531 + R$ 4,883 = **R$ 24,41**

Exercícios

Exercício

Exercício 3

Seja a função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_+$*, definida por* $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

1. *A função f é crescente ou decrescente?*
2. *Para que valores de x tem-se* $\frac{1}{128} < f(x)$?
3. *Para qual valor de x tem-se* $f(x) = 32$?

Exercício

Exercício 4

Uma certa quantia de dinheiro P_0 é investida a uma taxa anual de juros de $8,0\%$, capitalizados bimestralmente (a cada 2 meses).

1. *Quantos anos (com aproximação na ordem de décimos de ano) levaria para o montante inicial quadriplicar?*
2. *Se $P_0 = 10.000,00$ reais, quanto haverá, aproximadamente, na conta bancária após 1 ano e 6 meses?*

Referencias I

Vários.
O livro da matemática.
GLOBO LIVROS, 2020.

G. Iezzi, O. Dolce, and C. Murakami.
Fundamentos de matemática elementar, 2: logaritmos.
Atual, 2013.