CÁLCULO II

Técnicas de Integração

Substituição

Karla Lima

21 de fevereiro de 2022

Sumário

Substituição: Integrais Indefinidas

Quando usá-la?

Observe as seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$;

b) $\displaystyle\int x^3 \cos\left(x^4+2\right) dx$.

Você consegue encontrar alguma primitiva para cada uma das integrais (de memória ou usando tabelas de integrais ou derivadas)?

Quando usá-la?

- As nossas fórmulas de primitivação não mostram como calcular integrais desse tipo.
- Aqui, usamos a estratégia de resolução de problemas de **introduzir alguma coisa extra**: um nova variável.

Quando usá-la?

- Usamos o método de substituição quando uma integral **contém alguma função e sua derivada**. Use quando puder fatorar/manipular o integrando em uma multiplicação e você vir uma função interna cuja derivada está próxima.
- Esse método desfaz a regra da cadeia.

Como aplicar o método?

Vamos retornar ao nosso primeiro exemplo:

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx.$$

No integrando $2x\sqrt{1+x^2}$, você consegue identificar uma multiplicação envolvendo a derivada de alguma função conhecida?

Como aplicar o método?

- O produto é formado por $2x$ e a raiz $\sqrt{x^2+1}$. Devemos sempre começar pelo que parece ser mais fácil. Nesse caso, o $2x$.
- Sabemos que $2x$ é a derivada de qualquer função da forma x^2+C.
- E olha só: temos dentro da raiz uma função desse tipo!
- Fazemos a seguinte mudança de variável:
  - denotamos $u = x^2 + 1$;
  - relacionamos a sua diferencial du com a diferencial dx

$$u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x\,dx;$$

  - substituímos x^2+1 por u e $2x\,dx$ por du, e resolvemos a integral em u.
  - Após resolver a integral em u, retorne à variável x, usando novamente que $u = x^2 + 1$.

Exemplo 1

Exemplo 1

Usando o método de substituição, calcule a integral $\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$.

Solução: Seja $u = x^2 + 1$. Então $du = 2x\,dx$ e a integral fica

$$\begin{aligned}\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx &= \int \sqrt{1+x^2}\,2x\,dx = \int \sqrt{u}\,du = \int u^{1/2}\,du \\ &= \frac{u^{1/2+1}}{1/2+1} + C = \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2u^{3/2}}{3} + C \\ &= \frac{2(x^2+1)^{3/2}}{3} + C.\end{aligned}$$

Regra da Substituição

Definição 1

Se $u = g(x)$ for uma função derivável cuja imagem é um intervalo I e f for contínua em I, então

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du.$$

Ou seja, queremos encontrar uma primitiva F de f, tal que

$$\frac{d}{dx}F(u) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Consegue reproduzir?

Agora é a sua vez.

Exemplo 2

Seja

$$\int 4x^3 \cos\left(x^4 + 2\right) dx.$$

a) *No integrando* $4x^3 \cos\left(x^4 + 2\right)$*, você consegue identificar uma multiplicação envolvendo a derivada de alguma função conhecida?*

b) *Resolva a integral usando o método da substituição.*

Exemplo

Às vezes, é necessário trabalhar algumas constantes para obter a forma desejada da substituição. Por exemplo, para resolver a integral

$$\int \sqrt{2x+1}\,dx,$$

devemos usar a substituição dentro da raiz, fazendo $u = 2x + 1$. Com isso, obtemos

$$du = 2\,dx.$$

Observe que na integral aparece apenas dx, e não $2\,dx$.

Exemplo

Porém, uma constante não atrapalha o cálculo da integral, então podemos reescrever

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x+1}\,dx &= \int \sqrt{2x+1}\left(\frac{1}{2}\cdot 2\right)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int \sqrt{2x+1}\cdot 2\,dx.\end{aligned}$$

Exemplo

Usando a substituição $u = 2x + 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{2x+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \sqrt{2x+1}\cdot\,2\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du \\
&= \frac{1}{2}\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} + C \\
&= \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C.
\end{aligned}$$

Exercícios

Integrais Indefinidas

Exercício 1

Encontre $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx.$

Exercício 2

Encontre $\displaystyle\int e^{5x}\,dx.$

Integrais Indefinidas

Exercício 3

Encontre $\int \tan(x)\,dx$.

Exercício 4

Encontre $\int \sqrt{1+x^2}\,x^5\,dx$.

Substituição: Integrais Definidas

Método 1

- Consiste em calcular primeiro a integral indefinida e então usar o Teorema Fundamental do Cálculo.

Por exemplo, seja $\int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$. Vimos que

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + C.$$

Método 1

Usando a primitiva $F(x) = \frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2}$ e o TFC, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}\,dx &= F(1) - F(0) = \frac{2}{3}(1^2+1)^{3/2} - \frac{2}{3}(0^2+1)^{3/2}\\ &= \frac{2}{3}(2^{3/2}-1).\end{aligned}$$

Método 2

- É geralmente o método preferível, o qual consiste em alterar os limites de integração ao se mudar a variável.
- Trocamos o limitante inferior a por $u(a)$; já o limitante superior b é trocado por $u(b)$.

Método 2

No exemplo anterior, trocamos 0 por $u(0) = 1$ e 1 por $u(1) = 1 + 1^2 = 2$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,2x\,dx = \int_{u(0)}^{u(1)} \sqrt{u}\,du = \int_1^2 u^{1/2}\,du \\
= \left.\frac{u^{1/2+1}}{1/2+1}\right|_1^2 = \frac{2^{3/2}}{3/2} - \frac{1^{3/2}}{3/2} \\
= \frac{2}{3}\left(2^{3/2} - 1\right).
\end{aligned}$$

Método 2

Definição 2

Se g' for contínua em $[a, b]$ e f for contínua na imagem de $u = g(x)$, então

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Exercícios

Integrais Definidas

Usando o método 2 de substituição para as integrais definidas, resolva as integrais abaixo. Compare o resultado com o encontrado através do método 1, usando a seção anterior de exercícios.

Exercício 5

Encontre $\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx.$

Exercício 6

Encontre $\int_{0}^{3} e^{5x}\, dx.$

Integrais Definidas

Exercício 7

Encontre $\int_0^{\pi/3} tan(x)\, dx.$

Exercício 8

Encontre $\int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\, x^5\, dx.$

Gabarito

Respostas

1. $-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+C$
2. $\frac{1}{5}e^{5x}+C$
3. $-\ln|\cos x|+C$
4. $\frac{1}{7}(1+x^2)^{7/2}-\frac{2}{5}(1+x^2)^{5/2}+\frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}+C$
5. 0
6. $\frac{1}{5}(e^{15}-1)$
7. $\ln(2)$
8. 0