GEOMETRIA PLANA

Aula 03

Triângulos

Karla Lima

Sumário

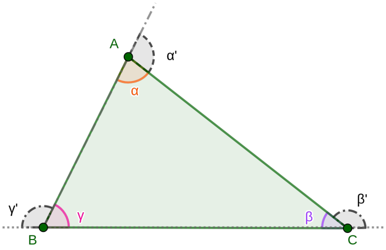
Definição

Definição

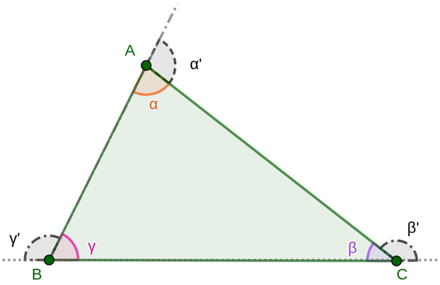
Definição 1

Sejam A, B e C três pontos não colineares.

Denominamos de ***triângulo*** *ABC a união dos segmentos* $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ *e* $\overline{BC}$ *e o denotaremos por* $\triangle ABC$.



Definição



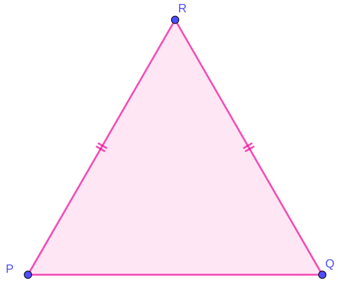
- Os pontos A, B e C são os **vértices** e os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são os **lados** do triângulo.
- Os ângulos $B\hat{A}C = \alpha$, $A\hat{B}C = \gamma$ e $A\hat{C}B = \beta$ são os **ângulos internos** do triângulo. Seus suplementos α', γ' e β' são os **ângulos externos** do triângulo.

Classificação

Isósceles

Definição 2

*Um triângulo que tem dois lados congruentes é denominado **isósceles**.*

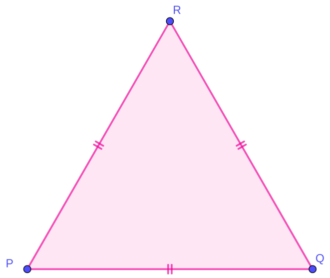


O outro lado é chamado **base** e o ângulo oposto à base é o **ângulo do vértice**.

Equilátero

Definição 3

Um triângulo cujos lados são congruentes chama-se ***equilátero****.*

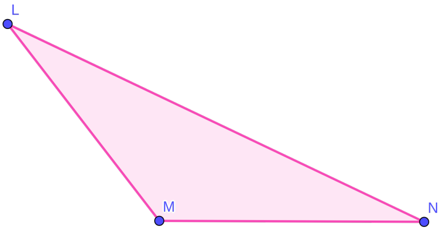


Obs: Todo triângulo equilátero possui dois lados congruentes, logo ele também será isósceles.

Escaleno

Definição 4

*Um triângulo no qual dois lados quaisquer não são congruentes, chama-se **escaleno**.*



Exercício

Exercício 1

Usando o Geogebra, construa:

1. *Um triângulo equilátero.*
2. *Um triângulo isósceles, não equilátero.*
3. *Um triângulos escaleno.*

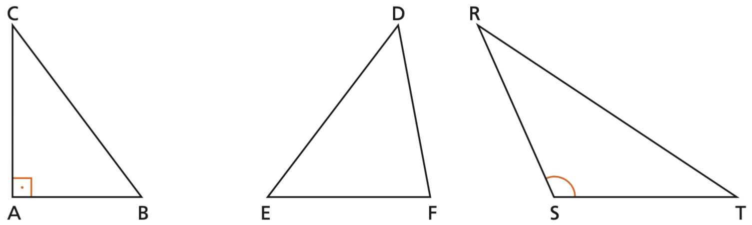
Usaremos as seguintes ferramentas:

- Segmento com comprimento fixo;
- Polígono Regular.

Classificação: Ângulos

Quanto aos ângulos, os triângulos se classificam em:

- retângulos se, e somente se, têm um ângulo reto;
- acutângulos se, e somente se, têm os três ângulos agudos;
- obtusângulos se, e somente se, têm um ângulo obtuso.



$\triangle ABC$ é retângulo em A. $\triangle DEF$ é acutângulo. $\triangle RST$ é obtusângulo em S.

Exercício

Exercício 2

Usando o Geogebra, e os triângulos obtidos no exercício 1, classifique-os com relação aos seus ângulos.

Usaremos a seguintes ferramenta:

- Ângulo.

Congruência de Triângulos

Definição de Congruência

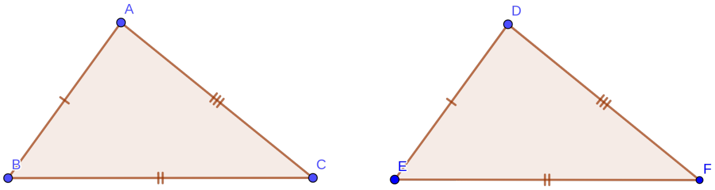
Definição 5

Um triângulo é congruente (símbolo $\equiv$) a outro se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que:

- *seus lados são ordenadamente congruentes aos lados do outro;*
- *seus ângulos são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro.*

Em linguagem popular, dizemos que duas figuras planas são congruentes se elas coincidem por superposição.

Definição de Congruência



- $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$;
- $\hat{A} \equiv \hat{D}$, $\hat{B} \equiv \hat{E}$ e $\hat{C} \equiv \hat{F}$.

Exemplo

Exemplo 1

Suponhamos que os triângulos abaixo coincidem por superposição. Quais os pares de vértices que devem ser sobrepostos?

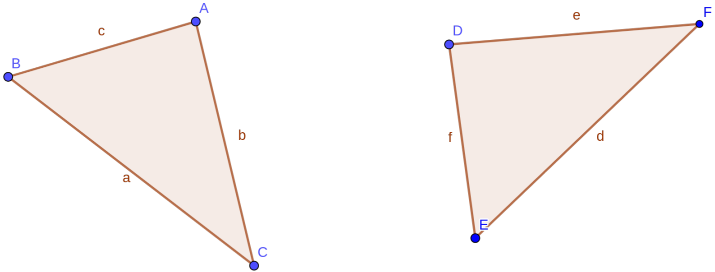


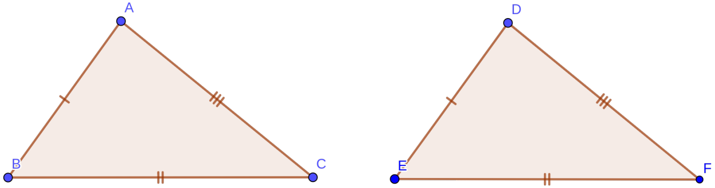
Figura 1: $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

Nomenclatura

- Os **vértices** que coincidem na superposição são denominados **correspondentes**.
- Os **lados** que unem vértices correspondentes são também chamados **correspondentes**.
- Analogamente, os **ângulos** cujos vértices estão em correspondência, são **correspondentes**.

Observação

Observe que em triângulos correspondentes, a ângulos congruentes opõem-se lados congruentes e vice-versa.



Notação: Para indicar que dois triângulos são congruentes, escrevemos:

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF.$$

A ordem em que as letras aparecem, indicam as correspondências entre os vértices.

Exercício

Baixe o arquivo LAL_1.ggb e abra no Geogebra.

1. Construa outro triângulo com dois lados congruentes aos lados $\overline{A'B}$ e $\overline{BC}$, com o ângulo formado por estes lados congruente ao ângulo $\hat{B}$.
2. Compare o comprimento do terceiro lado obtido e a medida dos outros dois ângulos com os correspondentes do triângulo original.

Exercício

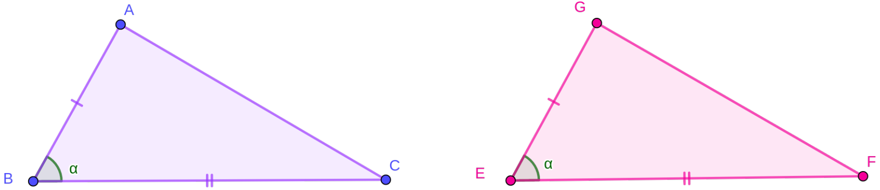
Baixe o arquivo LAL_2.ggb e abra no Geogebra.

1. Construa outro triângulo com dois lados congruentes aos lados $\overline{A'B}$ e $\overline{BC}$, com o ângulo formado por estes lados congruente ao ângulo $\hat{B}$.
2. Compare o comprimento do terceiro lado obtido e a medida dos outros dois ângulos com os correspondentes do triângulo original.

1° caso: LAL

Postulado: Caso LAL

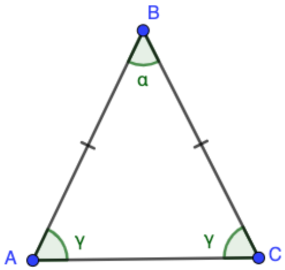
Se dois triângulos têm dois lados congruentes e os ângulos compreendidos entre eles são respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.



Teorema do Triângulo Isósceles

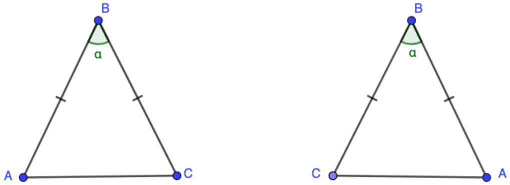
Teorema 1

Em todo triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.



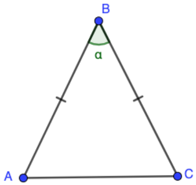
Demonstração: Teorema do Triângulo Isósceles

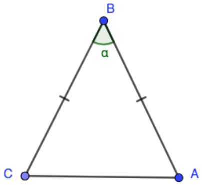
- A partir do triângulo ABC, obtemos os triângulo CBA ao espelharmos o triângulo inicial.
- Pelo caso LAL, os triângulos ABC e CBA são congruentes.



Demonstração: Teorema do Triângulo Isósceles

- Como ângulos opostos a lados congruentes são congruentes, e $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$, concluímos que $\hat{A} \equiv \hat{C}$.





Exercício

Baixe o arquivo ALA_1.ggb e abra no Geogebra.

1. Construa outro triângulo com lado congruente ao lado $\overline{A'B}$, com os ângulos adjacentes a este lado congruentes aos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$.
2. Compare o comprimento dos outros dois lados obtidos e a medida do outro ângulo com os correspondentes do triângulo original.

Exercício

Baixe o arquivo ALA_2.ggb e abra no Geogebra.

1. Construa outro triângulo com lado congruente ao lado $\overline{A'B}$, com os ângulos adjacentes a este lado congruentes aos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$.
2. Compare o comprimento dos outros dois lados obtidos e a medida do outro ângulo com os correspondentes do triângulo original.

2° caso: ALA

Teorema 2

Se dois triângulos têm um lado congruente, compreendido entre dois ângulos respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.

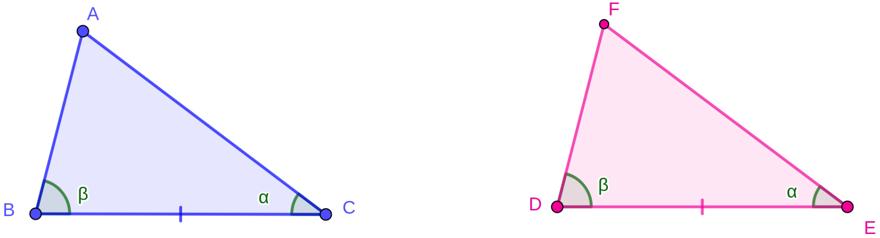


Figura 2: $\triangle ABC \equiv \triangle FDE$

Demonstração do Caso ALA

Exercício 3

Estude a demonstração dada no livro texto.

Verificação de Aprendizagem

Formulário

Responda ao formulário Aula 03: Triângulos.

Exercícios

Exercício 4

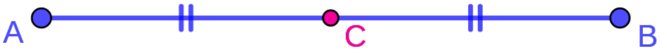
Mostre que vale a recíproca do Teorema do Triângulo Isósceles: se dois ângulos de um triângulo são congruentes, então o triângulo é isósceles.

Ponto Médio

Definição 6

Um ponto C chama-se ***ponto médio*** *do segmento* $\overline{AB}$*, se:*

1. C *pertence ao segmento* $\overline{AB}$ $(C \in \overline{AB})$;
2. *O comprimento do segmento* $\overline{AC}$ *é igual ao do segmento* $\overline{CB}$ $(AC = CB)$.

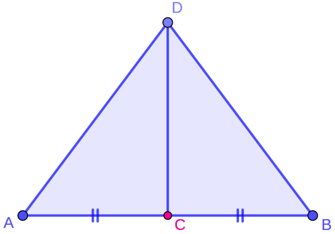


Ponto Médio (segmento)

Exercício

Exercício 5

Na figura abaixo, $\overline{DC} \perp \overline{AB}$ e C é o ponto médio de $\overline{AB}$. Demonstre que os suplementos dos ângulos $D\hat{A}B$ e $D\hat{B}A$ são congruentes.



Mediana

Definição 7

*Chama-se **mediana** de um triângulo ao segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto a ele.*

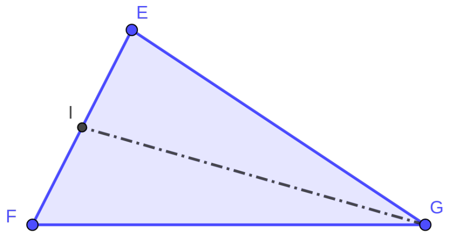


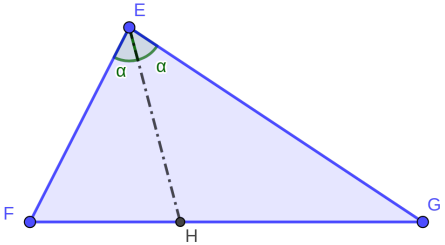
Figura 3: Na figura acima, $\overline{GI}$ é a mediana relativa ao lado EF

Bissetriz

Definição 8

Sejam EFG um triângulo e H um ponto da reta que contém o lado FG.

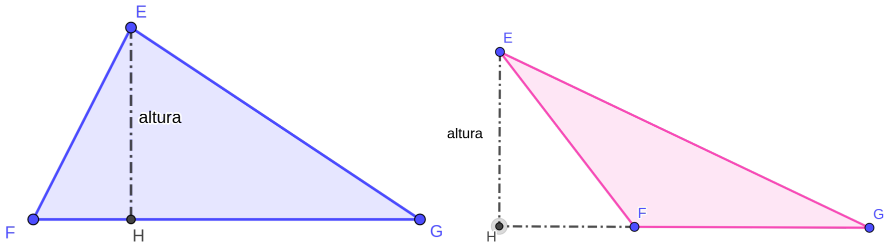
- *se a semirreta $\overrightarrow{EH}$ é bissetriz do ângulo $\hat{E}$, o segmento $\overline{EH}$ chama-se a* ***bissetriz interna*** *do triângulo, relativa ao lado $\overline{FG}$.*



Bissetriz Interna

Algumas Definições

- se $\overrightarrow{EH}$ for perpendicular à reta que contém o lado $\overline{FG}$, o segmento $\overline{EH}$ chama-se **altura** do triângulo, relativa ao lado $\overline{FG}$.



Exercício

Exercício 6

Mostre que, num triângulo isósceles, a bissetriz do ângulo do vértice é também mediana e altura.