Fundamentos da Matemática II

Complemento Bibliográfico

1. Triângulos
2. Aplicações

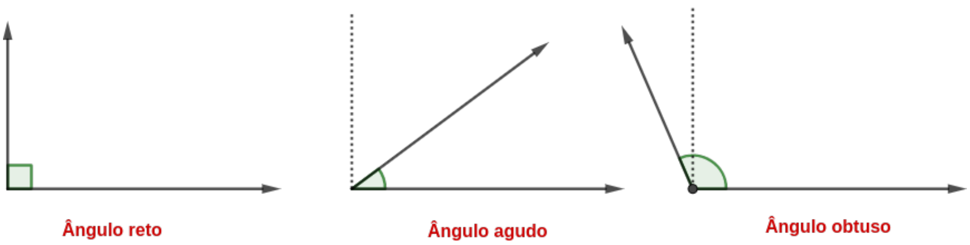
Profa. Karla Katerine Barboza de Lima
FACET/UFGD

1 Triângulos

1.1 Ainda sobre ângulos

Definição 1 *Um ângulo $A\hat{O}B$ é dito:*

- ***reto***, *se sua medida for de* $90°$*;*
- ***agudo***, *se sua medida for menor que* $90°$*;*
- ***obtuso***, *se sua medida for maior que* $90°$*;*
- ***nulo***, *se sua medida for* $0°$*;*
- ***raso***, *se sua medida for* $180°$*.*



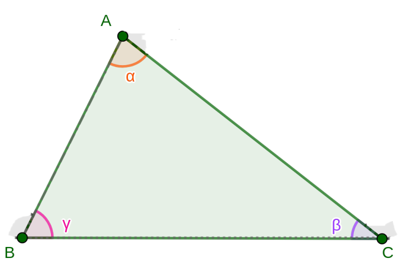
Definição 2 *Dados dois ângulos α e β, dizemos que:*

a) *eles são complementares se* $\alpha + \beta = 90°$.

b) *eles são suplementares se* $\alpha + \beta = 180°$.

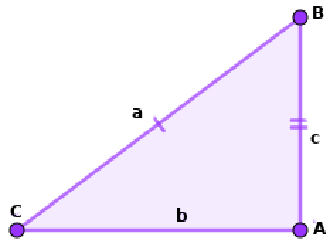
1.2 Triângulos: Definição e Semelhança

Definição 3 *Sejam A, B e C três pontos não colineares. Denominamos de **triângulo** ABC a união dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ e o denotaremos por $\triangle ABC$.*



- Os pontos A, B e C são os **vértices** e os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são os **lados** do triângulo.
- Os ângulos $B\hat{A}C = \alpha$, $A\hat{B}C = \gamma$ e $A\hat{C}B = \beta$ são os **ângulos internos** do triângulo.

Definição 4 *Em particular, um triângulo que contém um ângulo interno igual à 90°, é chamado* ***triângulo retângulo****.*



a) *o lado a, oposto ao ângulo reto A, é chamado* ***hipotenusa*** *do triângulo retângulo;*

b) *os lados restantes, b e c, são chamados* ***catetos*** *do triângulo retângulo;*

c) *dado o ângulo θ relativo ao vértice B, denotamos b como sendo o* ***cateto oposto*** *a esse ângulo e c o* ***cateto adjacente*** *ao mesmo.*

Observação: A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°. Logo, num triângulo retângulo, os ângulos não retos são agudos, pois:

$$90° + \hat{B} + \hat{C} = 180° \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 90°,$$

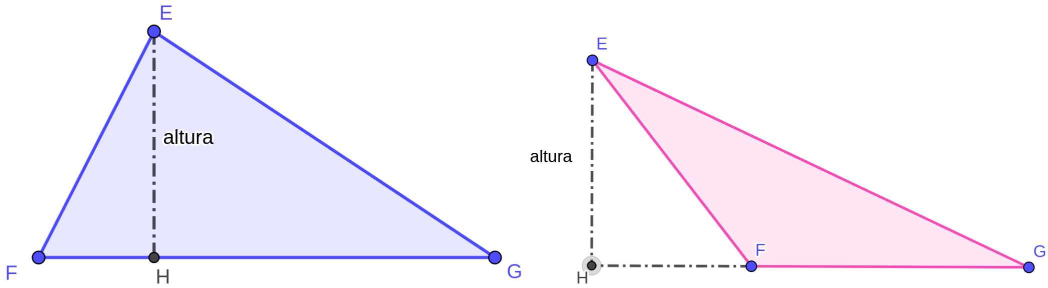
de onde segue que

$$\hat{B} < \hat{B} + \hat{C} = 90°,$$
$$\hat{C} < \hat{B} + \hat{C} = 90°.$$

Portanto, os ângulos de um triângulo retângulo tomam valores no intervalo $(0, \frac{\pi}{2}]$.

Para pensar: Por que o $0\,rad$ não é considerado no intervalo acima?

Definição 5 *Dado um triângulo EFG, se $\overrightarrow{EH}$ for perpendicular à reta que contém o lado $\overline{FG}$, o segmento $\overline{EH}$ chama-se* ***altura*** *do triângulo, relativa ao lado $\overline{FG}$.*



1.3 Semelhança de Triângulos

De forma grosseira, dizemos que duas figuras são **semelhantes** se uma delas é uma ampliação ou redução da outra, sem mudar sua forma original.

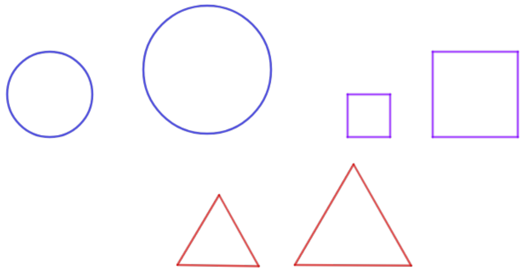
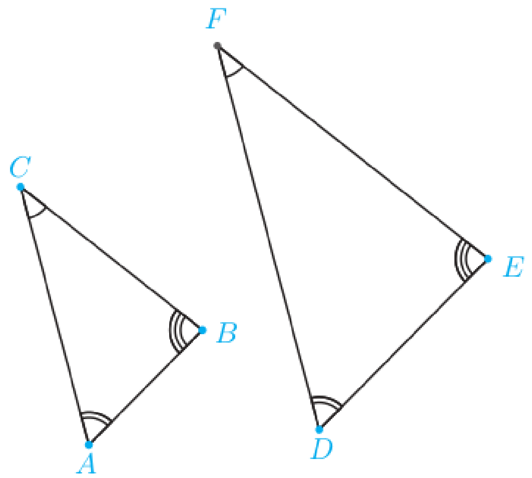


Figura 1: São semelhantes: duas circunferências quaisquer, dois quadrados quaisquer e dois triângulos equiláteros quaisquer.

Definição 6 *Dois triângulos são ditos* ***semelhantes*** *se for possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam congruentes e lados correspondentes sejam proporcionais.*

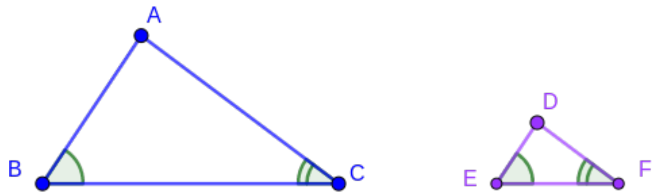


- $\hat{A} = \hat{D}$
- $\hat{B} = \hat{E}$
- $\hat{C} = \hat{F}$
- $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$

Notação: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

Existem vários casos que garantem a semelhança entre triângulos, mas vamos focar apenas no primeiro deles:

Teorema 1 *Se dois triângulos têm dois pares de ângulos respectivamente congruentes, então os triângulos são semelhantes.*



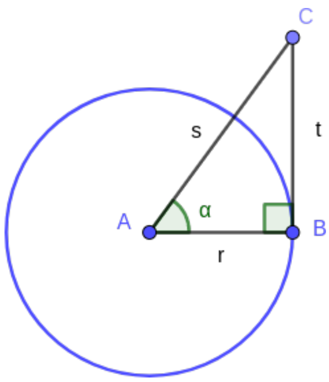
2 O nome das funções trigonométricas

2.1 Nomenclatura

O nome **seno** vem do latim sinus, que por sua vez é a tradução da palavra árabe jaib (dobra, bolso ou prega). Isto não tem nada a ver com o conceito matemático de seno. A palavra árabe adequada, a que deveria ser traduzida seria jiba, que significa a corda de um arco (de caça ou de guerra)[1].

A trigonometria teve seu início na antiguidade remota, quando se acreditava que os planetas descreviam órbitas circulares em redor da terra, surgindo daí o interesse em relacionar o comprimento da corda de uma circunferência com o ângulo central por ela subentendido [2]. Se c é o comprimento da corda, α é o ângulo central e r o raio da circunferência, então $c = 2r\text{sen}\,(\alpha/2)$.

Quanto ao termo tangente, ele tem significado claro, pois $tg(\alpha) = t/r$, onde t é o segmento da tangente compreendido entre a extremidade do raio (um dos lados do ângulo α) e o prolongamento do outro lado.



Já a secante do ângulo α é definida pela fórmula $\sec(\alpha) = s/r$, onde s é a hipotenusa do triângulo retângulo cujos catetos são o raio r e o segmento de tangente t. Como o segmento de reta s corta o círculo (secare = cortar, em latim), a denominação secante se justifica.

Finalmente, cosseno, cotangente e cossecante são simplesmente o seno, a tangente e a secante do arco complementar.

2.2 Trigonometria num Triângulo Retângulo

O objeto inicial da Trigonometria era o tradicional problema da resolução de triângulos, que consiste em determinar os seis elementos dessa figura (três lados e três triângulos) quando se conhecem três deles, sendo pelo menos um deles um lado.

Para isso, considera-se as seguintes razões (frações) entre os lados de um triângulo retângulo, cada uma possuindo um nome próprio:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$
$$tg\,\alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha} \qquad cotg\,\alpha = \frac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{\text{cateto oposto a } \alpha}$$
$$\sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente a } \alpha} \qquad cossec\,\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto a } \alpha}$$

Estas relações definem seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante de um ângulo agudo qualquer, pois todo ângulo agudo é um dos ângulos de algum triângulo retângulo. É importante observar que essas relações dependem apenas do ângulo α mas não do tamanho do triângulo retângulo do qual α é um dos ângulos agudos.

Isso decorre da teoria de semelhança de triângulos, garantindo que essas razões se mantêm constantes em triângulos retângulos semelhantes.

3 Aplicações

3.1 Cena de Crime (Traduzido do texto original:[3])

Como as manchas de sangue nos dizem onde um crime foi cometido?

Manchas de sangue fornecem muitas pistas sobre o que aconteceu numa cena de crime. A análise do padrão de manchas de sangue (BPA em inglês) é a interpretação de manchas de sangue em uma cena de crime para recriar as ações que causaram as manchas. Elementos de biologia, física e matemática são usados para ajudar a determinar a origem do sangue e as posições da vítima e do agressor.

Estaremos procurando manchas de impacto (que resultam do sangue projetado pelo ar) e manchas passivas (que resultam do efeito da gravidade em um corpo). Estas podem resultar de esfaqueamentos, espancamentos e ferimentos a bala.

Quando as gotas de sangue atingem uma superfície, a forma da mancha de sangue depende do ângulo de impacto e da distância percorrida.

Direção e distância

A forma e a cauda da mancha de sangue indicam a direção em que o sangue viajou. Imagine que há três manchas de sangue no chão, conforme mostrado no diagrama abaixo. Imagine também que todas essas manchas vieram da mesma fonte (por exemplo, alguém sendo atingido na cabeça).

Agora imagine traçar linhas através das manchas de sangue de acordo com sua direção de deslocamento: essas linhas se encontrarão em um ponto P.

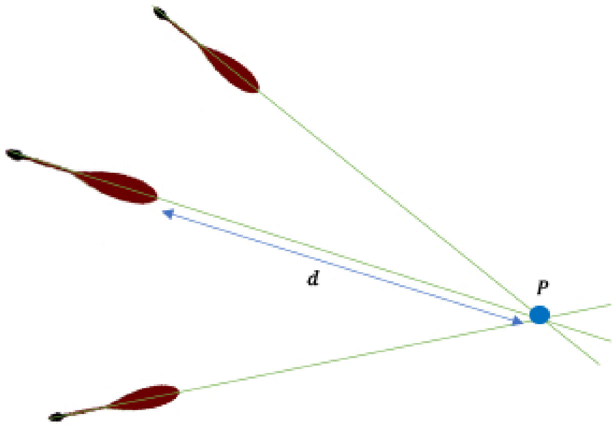


Figura 2: Olhando para três manchas de sangue no chão. A fonte do sangue estará em algum lugar verticalmente acima de P.

A verdadeira fonte do sangue (por exemplo, a cabeça da pessoa que foi atingida) deve estar em algum lugar verticalmente acima de P. Para descobrir exatamente em que altura, precisamos fazer um pouco mais de geometria.

O ângulo de incidência

Se o sangue caísse verticalmente sobre uma superfície lisa, de modo que a trajetória do sangue fizesse um ângulo de 90° com a superfície, isso criaria uma gota de formato circular. Se o sangue caísse obliquamente no chão, em um ângulo menor que cerca de 70°, ele teria uma forma elíptica com uma cauda.

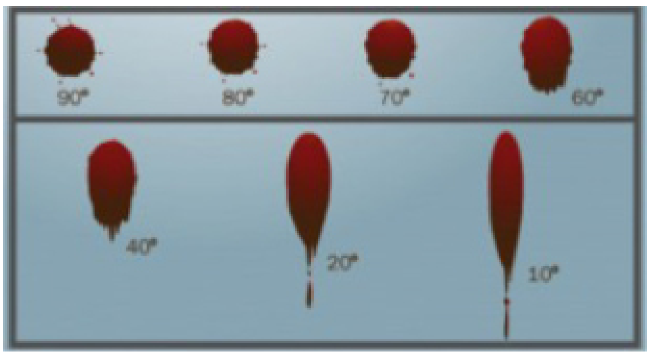


Figura 3: Forma da mancha de sangue para diferentes ângulos de incidência.

Os investigadores podem medir o comprimento, a, e a largura, b, da mancha de sangue:

Figura 4: Medindo a largura e o comprimento da mancha de sangue.

Eles podem então calcular o ângulo em que a gota de sangue atingiu a superfície, que é chamado de ângulo de incidência, com a ajuda de um triângulo retângulo, usando este diagrama:

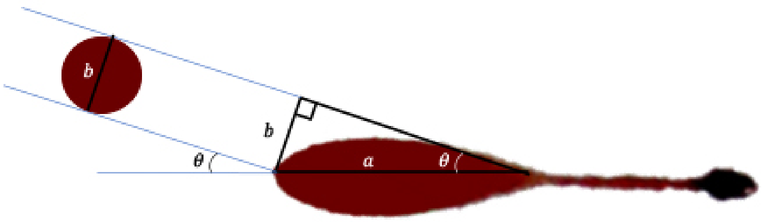


Figura 5: Medindo a largura e o comprimento da mancha de sangue.

Aqui uma gota de sangue viaja em direção a uma superfície com o ângulo de incidência igual a θ. O diâmetro da gota antes do impacto é considerado igual à largura, b, da gota (isso pode não ser exatamente verdade na realidade, mas fornece uma boa aproximação). Movendo este diâmetro como mostrado, podemos formar um triângulo retângulo. A largura, b, é oposta ao ângulo θ neste triângulo e o comprimento a é a hipotenusa. Temos, portanto,

$$\sin(\theta) = \frac{b}{a}.$$

Como sabemos a e b pela medição da mancha de sangue, podemos calcular θ como

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{b}{a}\right).$$

A altura da fonte

Agora estamos prontos para calcular a altura da fonte das manchas de sangue. Podemos formar um triângulo retângulo cujos lados são a linha de uma de nossas manchas de sangue até o ponto P que identificamos anteriormente, a linha que sobe verticalmente de P em ângulos retos até o indivíduo e a linha que começa na mancha de sangue e formando um ângulo θ com o chão.

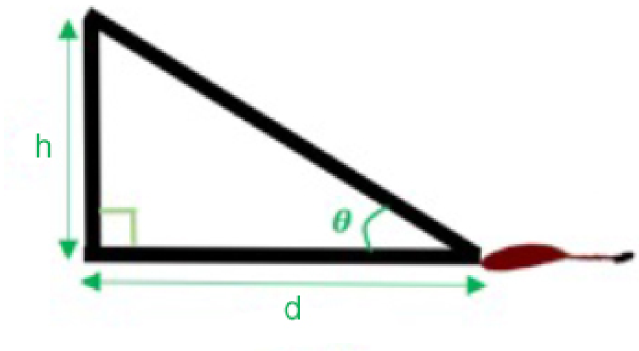


Figura 6: Calculando a altura da fonte.

A altura h da linha vertical é dada por

$$\frac{h}{d} = \tan(\theta),$$

assim

$$h = d \tan(\theta).$$

Como sabemos o valor de θ e a distância d (veja a primeira figura acima), podemos calcular h, a altura da fonte. Se você já sabe, por exemplo, que o sangue vem de uma vítima que foi atingida na cabeça, essa informação pode indicar se a pessoa estava de pé enquanto isso aconteceu, ou foi espancada enquanto já estava deitada no chão.

As saídas produzidas com a análise do padrão sanguíneo podem ser usadas para corroborar declarações de testemunhas e achados laboratoriais. É surpreendente que algo tão básico quanto a trigonometria possa nos dizer muito sobre o que aconteceu na cena do crime.

Referências

[1] Lima, E. L., *Meu Professor de Matemática e outras histórias*, Coleção do Professor de Matemática, SBM, 2004.

[2] Lima, E. L. et al., *A Matemática do Ensino Médio*, Volume 1, Coleção do Professor de Matemática, SBM, 2006.

[3] Gomes, M., *Solving crimes with maths: Bloodstain pattern analysis*. Disponível em: https://plus.maths.org/solving-crimes-maths. Acesso em: 13 de jul. de 2022.

[4] Toda a matemática, *Matemática da cena de um crime*. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=uOb4pRGfT-o. Acesso em: 13 de jul. de 2022.