Introdução ao Cálculo

Lista de Exercícios: P2

1 - Funções Exponenciais
2 - Funções Logarítmicas
3 - Funções Trigonométricas
4 - Compostas e Inversas
5 - O Limite de uma Função

Profa. Karla Lima
FACET/UFGD

1 Função Exponencial

1.1 Potências e Raízes

1. Calcule o valor de $A = (-1)^{2023} - (-1)^{2022} + (-1)^{3567} - (-1)^{1235}$.

2. Classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das sentenças abaixo:

   (a) $5^3 \cdot 5^2 = 5^6$

   (b) $3^6 : 3^2 = 3^3$

   (c) $2^3 \cdot 3 = 6^3$

   (d) $(2+3)^4 = 2^4 + 3^4$

   (e) $(5^3)^2 = 5^6$

   (f) $(-2)^6 = 2^6$

   (g) $\dfrac{2^7}{2^5} = (-2)^2$

   (h) $5^2 - 4^2 = 3^2$

3. Simplifique as expressões:

   (a) $a^{2n+1} \cdot a^{1-n} \cdot a^{3-n}$

   (b) $\dfrac{a^{2n+3} \cdot a^{n-1}}{a^{2(n-1)}}$

   (c) $(a^{-1} + b^{-1}) \cdot (a+b)^{-1}$

   (d) $\dfrac{2^{n+4} - 2 \cdot 2^n}{2 \cdot 2^{n+3}}$

4. Escreva cada potência abaixo como uma raiz:

   (a) $9^{\frac{3}{2}}$

   (b) $8^{\frac{4}{3}}$

   (c) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$

   (d) $64^{-\frac{2}{3}}$

Gabarito Seção 1.1

1. $A = -2$

2. (a) F

   (b) F

   (c) F

(d) F

(e) V

(f) V

(g) V

(h) V

3. (a) a^5

   (b) a^{n+4}

   (c) $a^{-1} \cdot b^{-1}$

   (d) $\frac{7}{8}$

4. (a) $9^{\frac{3}{2}} = \sqrt{9^3}$

   (b) $8^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{8^4}$

   (c) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{4}$

   (d) $64^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{64^2}}$

1.2 Funções Exponenciais

1. Um capital inicial de R\$5.000 foi aplicado a juro composto, durante 7 meses, à taxa de 2% ao mês. Dado $(1,02)^7 \approx 1,15$, calcular:

   (a) o montante acumulado ao fim dos 7 meses de aplicação.

   (b) o juro produzido durante o período que durou a aplicação.

2. Um automóvel novo que foi comprado por R\$$40.000,00$ sofreu, em cada ano, desvalorização de 10%. Calcular seu valor, em real, depois de 3 anos de uso.

3. Um corretor de uma bolsa de valores previu que, durante certo dia, o preço de cada ação de uma empresa poderia ser determinado pela função $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ em que y é o preço, em real, e x é o tempo, em hora, decorrido a partir da abertura do pregão.

   (a) Esboce o gráfico da função $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, considerando que o pregão teve exatamente 5 horas de duração.

   (b) Observando o gráfico que você construiu, classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das afirmações:

      i. $f(4) > f(3)$

      ii. $f(2) < f(1)$

      iii. Se x_1 e x_2 são elementos do domínio de f, com $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$.

4. Um capital de R\$ 1.000, 00 foi aplicado à taxa de juro composto de 10% ao ano.

   (a) Escreva uma equação que expresse o montante acumulado em função do tempo t, em ano.

   (b) Durante quanto tempo o montante acumulado será inferior a R\$ 1.331, 00?

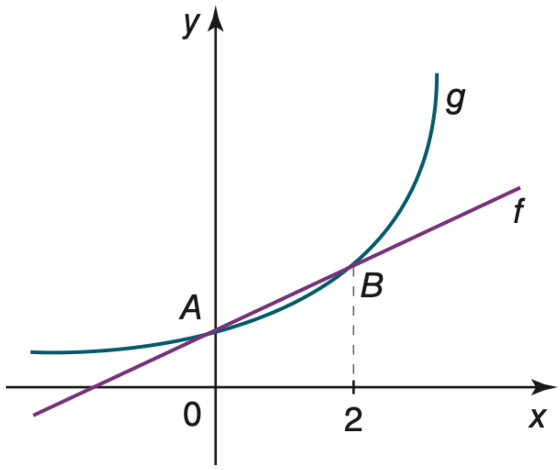
5. Estude o sinal das funções abaixo:

   (a) $f(x) = e^x(x-1)$

   (b) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x (x^2-1)$

   (c) $h(x) = 2^x x^2 + 2^x$

6. Na figura abaixo, os pontos A e B são as intersecções dos gráficos das funções f e g.



Se $g(x) = (\sqrt{2})^x$ e f é uma função afim, então $f(10)$ é igual a

a) 3 **b)** 4 **c)** 6 **d)** 7 **e)** 9

Gabarito Seção 1.2

1. (a) $M \approx$ R\$5750, 00.

   (b) $J \approx$ R\$750, 00.

2. 29.160, 00.

3. (a) i. V

   ii. F

   iii. V

4. (a) $M = 1000 \cdot 1,1^t$.

(b) $t < 3$.

5. (a) $f(x) < 0$ se $x < 1$; $f(x) > 0$ se $x > 1$ e $f(x) = 0$ se $x = 1$.

   (b) $g(x) < 0$ se $-1 < x < 1$; $g(x) > 0$ se $x < -1$ ou $x > 1$ e $g(x) = 0$ se $x = -1$ ou $x = 1$.

   (c) $h(x) > 0$ para todo número real x.

6. **c)** 6

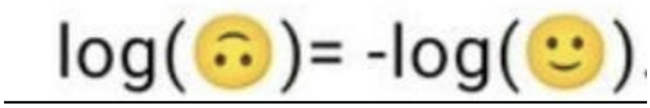
2 Funções Logarítmicas

1. Cada uma das figuras abaixo usa emojis para representar algumas propriedades dos logaritmos. Identifique cada uma das propriedades ilustradas.

   (a)

   (b)

   (c)



   (d)

2. Determine o valor das incógnitas a, b e c em:

   (a) $\log_2 a = 2$

   (b) $\log_{25} 5^b = b + 1$

   (c) $c \cdot \log_9 3 = 2c + 1$

3. O pH de uma solução aquosa é definido pela expressão $pH = -log[H^+]$, em que $[H^+]$ indica a concentração, em mol/L, de íons de hidrogênio na solução e log, o logaritmo na base 10. Ao analisar determinada solução, um pesquisador verificou que, nela, a concentração de íons de hidrogênio era $[H^+] = 5,4 \cdot 10^{-8}\, mol/L$. Então, o valor aproximado que o pesquisador obteve para o pH dessa solução foi:

   a) $7,26$ **b)** $7,32$ **c)** $7,58$ **d)** $7,74$

4. A desintegração nuclear é regida pela equação exponencial $N = N_0 e^{-\lambda t}$, em que λ é uma constante, N_0 é a quantidade inicial e N é a quantidade após um tempo t. A equação que fornece o tempo, em qualquer instante, é:

   a) $t = -\lambda(N - N_0)\ln e$ **b)** $t = \left(\dfrac{N}{N_0 e}\right)^{-\lambda}$ **c)** $t = \sqrt{\dfrac{N}{N_0}e}$ **d)** $t = -\dfrac{1}{\lambda}\cdot\ln\left(\dfrac{N}{N_0}\right)$

5. Para quais valores de x podemos calcular as funções a seguir:

   (a) $f(x) = \log_4(2x - 12)$

   (b) $f(x) = \log_{x-5}(x^2 - 4x)$

6. Classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) as afirmações seguintes, sendo $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

   (a) $\log_3 x = \log_3 5 \Leftrightarrow x = 5$

   (b) $\log_3 a > \log_3 10 \Leftrightarrow a > 10$

   (c) $\log_{\frac{1}{3}} b > \log_{\frac{1}{3}} 10 \Leftrightarrow b > 10$

7. A inversa da função $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x}$ é:

   (a) $y = \ln(x - 1)$

   (b) $y = \ln(2x - 2)$

   (c) $y = 2\ln(x + 1)$

   (d) $y = \ln\left(\sqrt{x - 1}\right)$

   (e) $y = \ln\left(\dfrac{1}{x - 1}\right)$

8. Estude o sinal das funções abaixo:

   (a) $f(x) = (2x - 3)\log(x)$

   (b) $g(x) = x^2\ln(x - 1)$

   (c) $h(x) = (x^2 - 2x)\ln(x - 1)$

Gabarito Seção 2

1.

2. (a) $a = 4$
   (b) $b = -2$
   (c) $c = -\dfrac{2}{3}$

3. **a)**

4. **d)**

5. (a) $x > 6$.
   (b) $x > 5$ e $x \neq 6$.

6. (a) V
   (b) V
   (c) F

7. **e)**

8. (a) $f(x) < 0$ se $1 < x < \frac{3}{2}$; $f(x) > 0$ se $0 < x < 1$ ou $x > \frac{3}{2}$ e $f(x) = 0$ se $x = \frac{3}{2}$.
   (b) $g(x) < 0$ se $1 < x < 2$ e $g(x) > 0$ se $x > 2$. Não há zeros para $g(x)$, no domínio $x > 1$.
   (c) $h(x) > 0$ se $1 < x < 2$ ou $x > 2$ e $h(x) = 0$, para $x = 2$. Não há valores de h negativos, no domínio $x > 1$.

3 Funções Trigonométricas

1. O ponteiro de um relógio de medição funciona acoplado a uma engrenagem de modo que, a cada volta completa da engrenagem, o ponteiro dá $\frac{1}{4}$ de volta em um mostrador graduado de $0°$ a $360°$. No início da medição, o ponteiro encontra-se na posição $0°$. Quantos graus indicará o ponteiro quando a engrenagem tiver completado 4.135 voltas?

2. Sendo a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 2\,\text{sen}\,(x) + \text{sen}\,(2x) + \cos(3x),$$

   calcule:

   (a) $f(\frac{\pi}{2})$
   (b) $f(\pi)$

(c) $\dfrac{f(0)+f(2\pi)}{f(\frac{3\pi}{2})}$

3. Sendo a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 3\text{sen}\,(x) + 1,$$

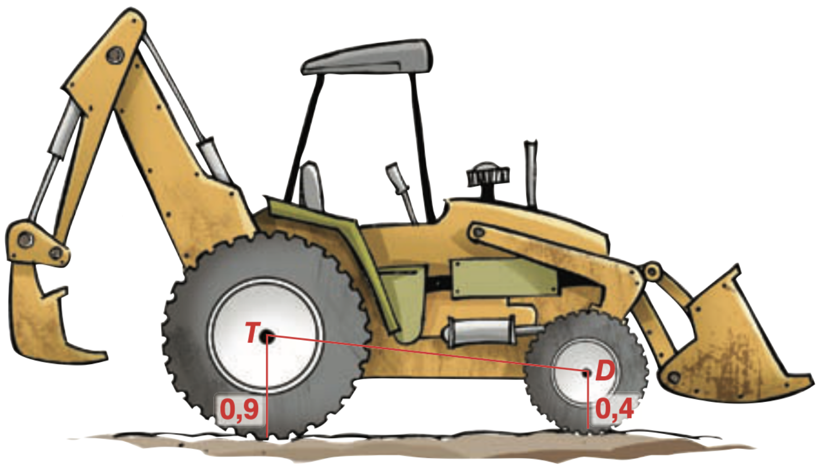
determine o valor máximo e o valor mínimo de f.

4. Determine os valores de sen (x) e $\cos(x)$ sabendo que:

   (a) $\text{sen}\,(x) = 3\cos(x)$ e que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$;

   (b) $\text{sen}\,(x) = \dfrac{m}{6}$ e $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{4m}}{3}$.

5. cada pneu traseiro de um trator tem raio de $0,9\,m$ e cada pneu dianteiro tem raio de $0,4\,m$. Calcule a distância entre os centros T e D de dois pneus de um mesmo lado do trator, sabendo que a reta $\overleftrightarrow{TD}$ forma um ângulo obtuso (entre 0 e 90 graus) de medida α com o solo plano tal que $\cos\alpha = -\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$.



6. Resolva as inequações abaixo:

   (a) $2\cos^2(x) - \cos(x) < 0$, para $0 \le x \le 2\pi$.

   (b) $4\cos^2(x) - 1 \le 0$, para $0 \le x < 2\pi$.

Gabarito Seção 3

1. $270°$.
2. a) $f(\frac{\pi}{2}) = 2$; b) $f(\pi) = -1$ e c) $\dfrac{f(0)+f(2\pi)}{f(\frac{3\pi}{2})} = -1$.
3. Valor máximo: 4. Valor mínimo: -2.

4. a) $\text{sen}\,(x) = -\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ e $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

   b) $\text{sen}\,(x) = \dfrac{1}{3}$ e $\cos(x) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

5. $2,5$ metros.

6. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R};\ \dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \dfrac{3\pi}{2} < x < \dfrac{5\pi}{3}\right\}$

   b) $S = \left\{x \in \mathbb{R};\ \dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{2\pi}{3} \quad \text{ou} \quad \dfrac{4\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{5\pi}{3}\right\}$

4 Compostas e Inversas

1. Dadas as funções $f(x) = 2x + 5$ e $g(x) = x^2 - 2$, determine:

   (a) $g \circ f(3)$

   (b) $f \circ g(3)$

   (c) $g \circ f(x)$

   (d) $f \circ g(x)$

2. Escreva as funções abaixo como a composta de duas funções:

   a) $h(x) = (3x^4 + 5)^3$

   b) $h(x) = \sqrt{x^2 + 5x - 6}$

   c) $h(x) = \sqrt{1 + \cos^2 x}$

   d) $h(x) = \text{sen}\,(2x - \pi/3)$

   e) $h(x) = e^{3\tan x}$

3. Nos itens abaixo, confirme se f e g são inversas, mostrando que $f(g(x)) = g(f(x)) = x$.

   (a) $f(x) = 3x - 2$ e $g(x) = \dfrac{x+2}{3}$

   (b) $f(x) = \dfrac{x+1}{4}$ e $g(x) = 4x - 3$

   (c) $f(x) = x^3 + 1$ e $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$

   (d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ e $\dfrac{1}{x-1}$

   (e) $f(x) = \ln(x-1)$ e $e^x + 1$.

Gabarito Seção 4

1. (a) 119

   (b) 19

   (c) $g \circ f(x) = 4x^2 + 20x + 23$

   (d) $f \circ g(x) = 2x^2 + 1$

2. a) $f(x) = x^3$ e $g(x) = 3x^4 + 5$

   b) $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 + 5x - 6$

   c) $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 1 + \cos^2 x$

   d) $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = 2x - \pi/3$

   e) $f(x) = e^x$ e $g(x) = 3\tan x$

   (a) São inversas.

   (b) Não são inversas.

   (c) São inversas.

   (d) São inversas.

   (e) São inversas.

5 O Limite de uma Função

1. Calcule os limites justificando cada passagem com as propriedades dos limites que forem usadas.

$$a)\ \lim_{x\to 4}(5x^2 - 2x + 3) \qquad b)\ \lim_{x\to -1}\frac{x-2}{x^2+4x-3}$$

$$c)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{1+3x}{1+4x^2+3x^4}\right)^3 \qquad d)\ \lim_{t\to\sqrt{2}} t^4(t^2+1)$$

2. Usando a continuidade das funções, determine os limites abaixo:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(3x^4+5)^3$

   b) $\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{2}}\sqrt{x^2+5x-6}$

   c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\sqrt{1+\cos^2 x}$

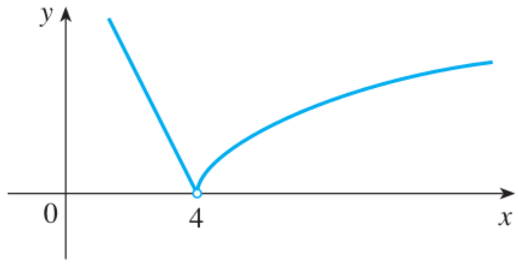
   d) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}\operatorname{sen}(2x-\pi/3)$

e) $\lim_{x \to \pi/4} e^{3 \tan x}$

3. Seja

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4}, & \text{se} \quad x > 4 \\ 8 - 2x, & \text{se} \quad x \leq 4, \end{cases}$$

sendo seu gráfico dado abaixo:



Calcule:

a) $\lim_{x \to 4^-} f(x)$;

a) $\lim_{x \to 4^+} f(x)$;

a) O $\lim_{x \to 4} f(x)$ existe? Justifique sua resposta.

4. Seja $F(x) = \dfrac{x}{|x|}$.

a) Qual o domínio da função F?

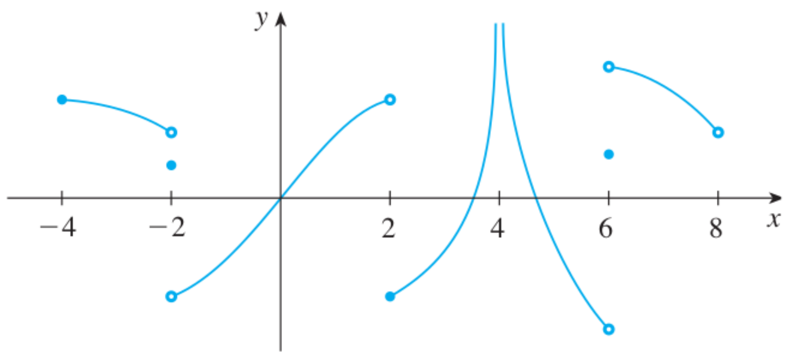
b) Sabemos que $|x|$ é uma função definida por partes:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

Usando a regra de $|x|$, descreva $F(x)$ como uma função definida por partes.

c) Calcule $\lim_{x \to 0^-} f(x)$, $\lim_{x \to 0^+} f(x)$. O $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe? Justifique sua resposta.

Do gráfico de g, identifique seus pontos de descontinuidades e classifique-os como um dos quatro tipos descritos na 19.



Gabarito Seção 5

1.

$$a)\ \lim_{x\to 4}(5x^2-2x+3)=75 \qquad b)\ \lim_{x\to -1}\frac{x-2}{x^2+4x-3}=\frac{1}{2}$$

$$c)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{1+3x}{1+4x^2+3x^4}\right)^3=\frac{1}{8} \qquad d)\ \lim_{x\to\sqrt{2}} t^4(t^2+1)=12$$

2. a) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=0$;

   a) $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=0$;

   a) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=0$, pois os limites laterais existem e são iguais.

   a) $\lim\limits_{x\to 0}(3x^4+5)^3=125$

   b) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\sqrt{x^2+5x-6}=\sqrt{5\sqrt{2}-4}$

   c) $\lim\limits_{x\to\pi}\sqrt{1+\cos^2 x}=\sqrt{2}$

   d) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\operatorname{sen}(2x-\pi/3)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   e) $\lim\limits_{x\to\pi/4} e^{3\tan x}=e^3$

3. a) $D=\{x\in\mathbb{R}/x\neq 0\}$

b) $F(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x > 0 \\ -1, & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$

c)

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

Portanto, temos que $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ não existe, pois os limites laterais apesar de existirem, não são iguais.