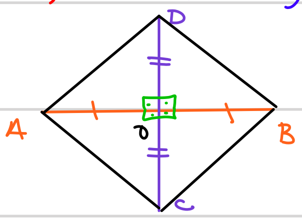
P1 - 2023 - 1

01

a) $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ se bissecam em um ângulo reto.



Tese: $\overline{AD} = \overline{AC} = \overline{DB} = \overline{BC}$

Com efeito, seja O o ponto de interseção entre os dois segmentos. Os triângulos AOD, DOB, BOC e AOC são congruentes:

$\overline{AO} = \overline{OB}$ (L)

$A\hat{O}C = C\hat{O}B = A\hat{O}D = D\hat{O}B = 90°$ (A)

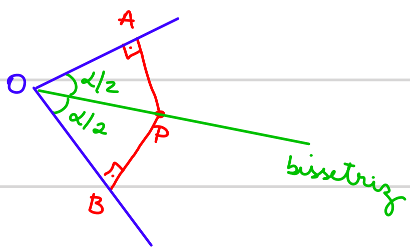
$\overline{DO} = \overline{OC}$ (L)

lados opostos aos ângulos congruentes de 90°

Portanto, as hipotenusas dos 4 triângulos são congruentes, de onde segue que

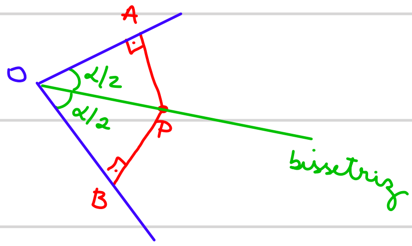
$\overline{AD} = \overline{AC} = \overline{DB} = \overline{BC}$, c.q.d.

b)



Tese: $\overline{AP} = \overline{PB}$

Para calcular distância de um ponto a uma reta, medimos o segmento que parte de P e encontra a reta num ângulo de 90°.



Assim, formamos os triângulos AOP e BOP, que são congruentes:

$\overline{OP}$: lado em comum (L)

$B\hat{O}P = A\hat{O}P$: ângulos adjacentes congruentes (A)

$\hat{A} = \hat{B}$: ângulos opostos congruentes (A).

Portanto, os lados opostos aos ângulos congruentes $B\hat{O}P$ e $A\hat{O}P$ também são congruentes: $\overline{BP} = \overline{AP}$, como queríamos demonstrar.

02 Plano $\alpha = \{A, B, C, D\}$

retas em α : $\{A,B\}$, $\{A,C\}$, $\{A,D\}$, $\{B,C\}$, $\{B,D\}$, $\{C,D\}$

a) Postulado 1: Com efeito, dados dois pontos distintos existe apenas uma reta que os contém, pois cada reta dessa "geometria" possui apenas essa dupla de pontos.

Postulado 2: Pela definição de reta nessa "geometria", cada reta possui exatamente dois pontos distintos e, portanto, possui no mínimo dois desses pontos.

Postulado 3: Como uma reta é formada por apenas 2 pontos distintos, qualquer conjunto de 3 pontos é não colinear.

b) Neste "plano", existem várias retas paralelas. Por exemplo:

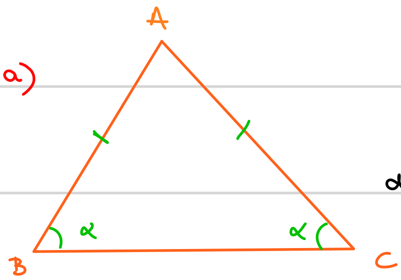
{A, B} e {C, D} são paralelas: estão no mesmo plano e não possuem interseção.

O postulado de Playfair é verificado: dado qualquer ponto P e uma reta que não o contém, existe uma única reta paralela à reta dada:

$P = A$ e $r = \{B, C\}$. A única reta que contém A e não possui interseção com r é a reta {A, D}.

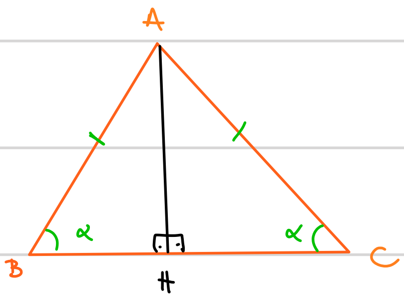
De modo análogo, mostra-se para $P = B$, $P = C$ e $P = D$.

03 a)



Por ser um triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes. Logo, $\hat{B} = \hat{C} = \alpha$

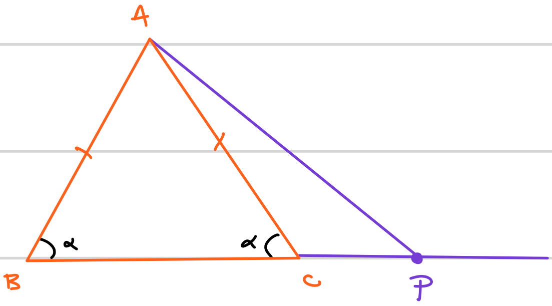
Por outro lado, traçamos a altura $\overline{AH}$ com relação ao lado $\overline{BC}$:



O ângulo $A\hat{H}B$ é externo ao triângulo AHC em H. Logo, pelo T.A.E.,

$90° = A\hat{H}B > \hat{C} = \hat{B}$ e, portanto, os ângulos da base $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são agudos.

b)

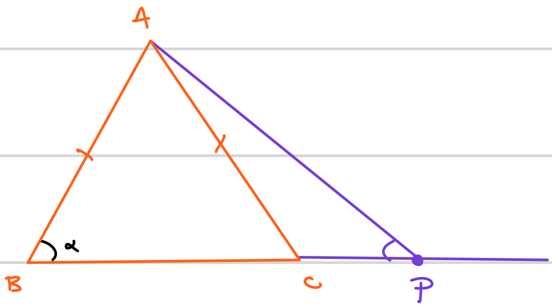


Tese: $\overline{AP} > \overline{AB} = \overline{AC}$

O ângulo $A\hat{C}B = \alpha$ é externo ao triângulo ACP em $A\hat{C}P$. Com isso, pelo Teorema do Ângulo Externo,

$$\alpha > C\hat{A}P \quad e \quad \alpha > \hat{P}.$$

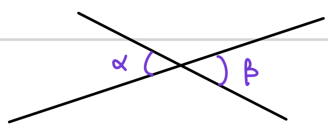
Olhando agora para o triângulo ABP



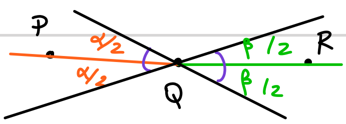
Temos $\hat{B} = \alpha > \hat{P}$ e, portanto, o lado oposto ao ângulo B é maior do que o lado oposto ao ângulo P:

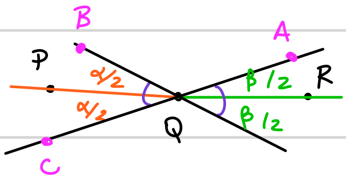
$\overline{AC} = \overline{AB} > \overline{AP}$, como queríamos demonstrar.

(04) a) Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes. Logo,



$\alpha = \beta$





Seja P um ponto na bissetriz de α e R um ponto na bissetriz de β. Seja ainda, Q o vértice desses ângulos. Queremos mostrar que

$$P\hat{Q}R = 180^\circ .$$

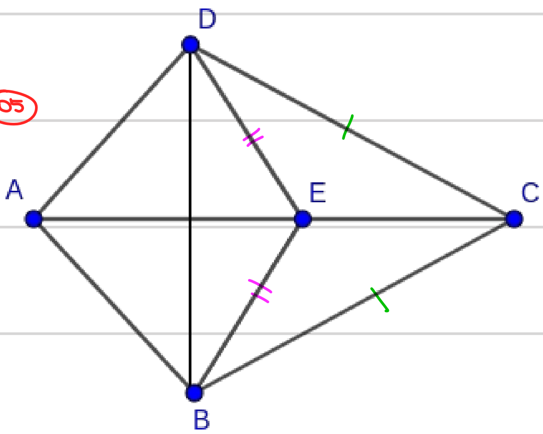
Com efeito,

$$P\hat{Q}R = R\hat{Q}A + A\hat{Q}B + P\hat{Q}B = \frac{\alpha}{2} + A\hat{Q}B + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + A\hat{Q}B$$

$$= \alpha + A\hat{Q}B .$$

Por outro lado, $A\hat{Q}B + \alpha = A\hat{Q}B + B\hat{Q}C = 180^\circ$, pois A e C são colineares. Portanto, $P\hat{Q}R = 180^\circ$, como queríamos.

05



$DC = BC$

$DE = BE$

AEC são colineares

Os triângulos EDC e EBC são congruentes, pela congruência LLL:

- $DC = BC$
- $DE = EB$
- EC lado em comum.

Portanto, os ângulos opostos aos lados DE e EB são congruentes:

$$D\hat{C}E = C\hat{E}B.$$

Como A, E e C estão alinhados:

- $A\hat{C}D$ e $E\hat{C}D$ são o mesmo ângulo;

- $A\hat{C}B$ e $E\hat{C}B$ são o mesmo ângulo.

Portanto, $A\hat{C}B = A\hat{C}D$.

Nos triângulos ADC e ABC, temos que:

- $DC = BC$ (L)

- $D\hat{C}A = B\hat{C}A$ (A)

- AC é lado em comum (L)

Pela congruência LAL, podemos concluir que

$$\Delta ADC \equiv \Delta ABC.$$

Como AD e AB são opostos aos ângulos congruentes $D\hat{C}A$ e $B\hat{C}A$, concluímos que AD e AB são, também, congruentes.