Os Teoremas de Gauss e Stokes

(1) Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C F dr$, onde C tem orientação anti-horária vista de cima no eixo z:

a) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x+y^2, y+z^2, z+x^2)$ e C é o triângulo com vértices $(1,0,0)$,$(0,1,0)$ e $(0,0,1)$.

b) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (yx, 2xz, e^{xy})$ e C é o círculo $x^2+y^2=16$, $z=5$.

(2) Use o Teorema de Stokes para calcular $\iint_S rot F dS$:

a) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x^2z^2, y^2z^2, xyz)$ e S é a parte do parabolóide $z = x^2+y^2$ que está dentro do cilindro $x^2+y^2=4$, orientada para cima.

b) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (xyz, xy, x^2yz)$ e S consiste no topo e os 4 lados (mas não o fundo) de um cubo com vértices $(\pm1, \pm1, \pm1)$, orientado para fora.

(3) Calcule o fluxo de saída do campo vetorial F através da superfície S:

a) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x^2+y, z^2, e^y-z)$ e S é a superfície do sólido retangular limitado pelos planos coordenados e os planos $x=3$, $y=1$ e $z=2$.

b) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x^3-e^y, y^3+\text{sen}z, z^3-xy)$ e S é a superfície do sólido limitado acima por $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ e por baixo pelo plano XY.

c) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x^3, x^2y, xy)$ e S é a superfície do sólido limitado acima por $z=4-x^2$, $y+z=5$, $z=0$ e $y=0$.

O Teorema de Green

(4) Considere o campo de forças $\overrightarrow{F}(x,y) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$, definido para $(x,y) \neq (0,0)$.

a) Calcule o trabalho realizado pelo campo $\overrightarrow{F}$ numa partícula que se move ao longo de uma circunferência de raio R.

b) Considere D a região delimitada pela circunferência de centro em $(0,0)$ e raio R menos a origem. Esta região é descrita por $\{(x,y)/0 < x^2+y^2 \leq R^2\}$. Mostre que

$$\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

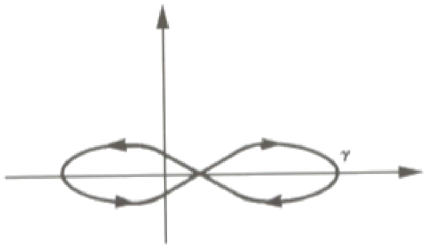
c) Usando o Teorema de Green e a parte a), mostre que $\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0$ para toda curva fechada simples C, suave por partes, que circunda a origem.
Dica: aqui o teorema de Green não pode ser usado diretamente com b) - Por quê?

(5) Considere o campo de forças $\overrightarrow{F}(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$, definido para $(x,y) \neq (0,0)$.

a) Calcule o trabalho realizado pelo campo $\overrightarrow{F}$ numa partícula que se move ao longo de uma circunferência de raio R, no sentido anti-horário.

b) Usando o Teorema de Green e a parte a), mostre que $\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 2\pi$ para toda curva fechada simples C, suave por partes, que circunda a origem.

c) Calcule o trabalho realizado pelo campo $\overrightarrow{F}$ na curva abaixo:



Gabarito

(1) a) -1

b) 80π

(2) a) 0

b) 0

(3) a) 12

b) $\dfrac{192\pi}{5}$

c) $\dfrac{4608}{35}$

(4) (a) 0

(5) (a) 0

(b)

(c) 2π