P2 - 14/04/23

01 Sejam m e n o número de lados de cada polígono.

Tem-se: $m = 5 + n$;

$$d_m - d_n = 80 .$$

Queremos calcular m e n.

Sabemos que o número de diagonais distintas é dada em função do número de lados de cada polígono:

$$d_m = \frac{m(m-3)}{2} \quad e \quad d_n = \frac{n(n-3)}{2} .$$

Por hipótese, temos:

$$\begin{cases} m = n+5 & (I) \\ \dfrac{m(m-3)}{2} - \dfrac{n(n-3)}{2} = 80 & (II) \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$\frac{(n+5)(n+5-3) - n(n-3)}{2} = 80$$

$$\Rightarrow (n+5)(n+2) - n(n-3) = 2 \cdot 80$$

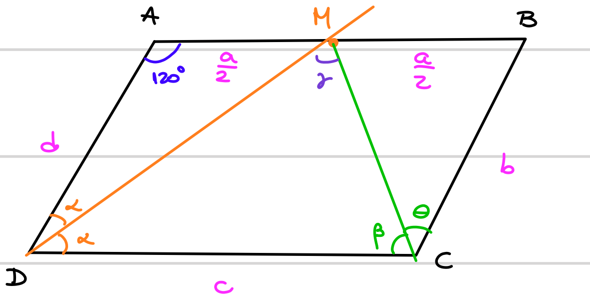
$$\Rightarrow n^2 + 2n + 5n + 10 - (n^2 - 3n) = 160$$

$$\Rightarrow \cancel{n^2} + 7n + 10 - \cancel{n^2} + 3n = 160$$

$$\Rightarrow 10n = 160 - 10 = 150 \Rightarrow n = \frac{150}{10} \Rightarrow n = 15 .$$

Logo, $m = 5 + 15 = 20$.

02



Hipótese: $a+b+c+d = 42$

$\hat{A} = 120°$

r bissetriz de D, com

$AM = MB$.

Calcular $AB = DC$ e os ângulos de $C\hat{M}D$.

Como ABCD é um paralelogramo, temos que

$a = c$ e $b = c$. (lados opostos num paralelogramo)

Logo,

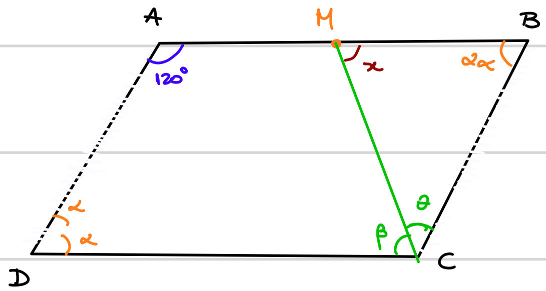
$$a+b+c+d = 42 \Rightarrow 2a+2b = 42 \Rightarrow a+b = \frac{42}{2} \Rightarrow a+b = 21.$$

Além disso, os ângulos opostos são congruentes e, portanto,

$\hat{A} = \hat{C} = 120°$ e $\hat{B} = \hat{D}$ (ângulos opostos)

de onde segue que

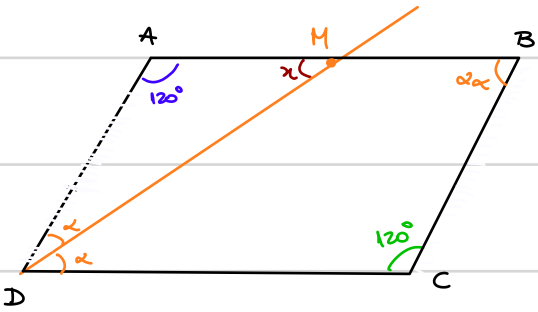
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360° \Rightarrow 240° + 2\hat{B} = 360° \Rightarrow \hat{B} = 60° = 2\alpha.$$



Considerando $AB \parallel DC$ cortadas por $\overleftrightarrow{MC}$, obtemos que

$\gamma = \beta$ (alternos internos).

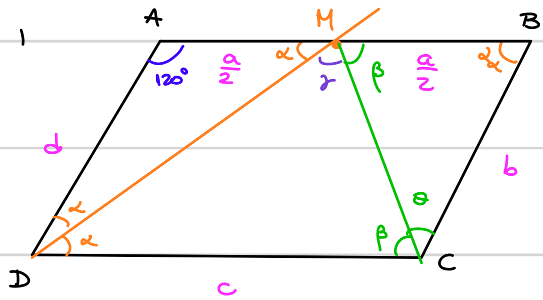
Analogamente,



Considerando AB ∥ DC cortadas por $\overleftrightarrow{MD}$, obtemos que

$x = \alpha$ (alternos internos).

Logo,



e o triângulo ADM é isósceles. Portanto,

$$BC = AD = AM = \frac{a}{2},$$

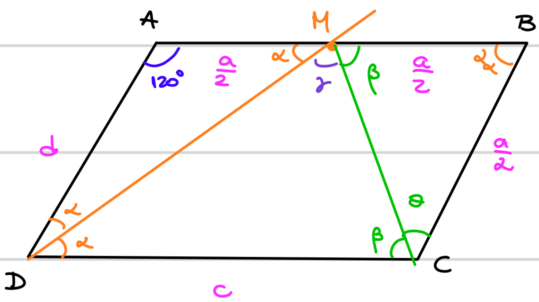
de onde segue que

$$a + \frac{a}{2} = 21 \Rightarrow \frac{2a+a}{2} = 21 \Rightarrow 3a = 42 \Rightarrow a = 14,$$

sendo esse o comprimento do maior lado.

Já sabemos que $\hat{D} = 60°$ e, portanto,

$$\alpha = \frac{\hat{D}}{2} = 30°.$$



Como AM = MB e AD = BC, temos que $B = \frac{a}{2}$ e o Δ MBC é isósceles. Portanto, $\theta = \beta$ e $\theta + \beta = 120°$,

de onde segue que $2\beta = 120° \Rightarrow \beta = 60°$.

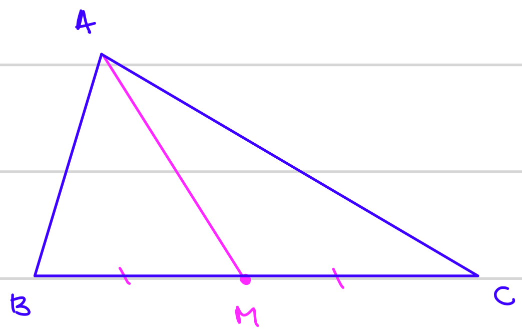
Por fim, do ΔCMD, temos que

$$\gamma+\alpha+\beta = 180^\circ \Rightarrow \gamma + 30^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \gamma = 180^\circ - 90^\circ$$

$$\Rightarrow \gamma = 90^\circ.$$

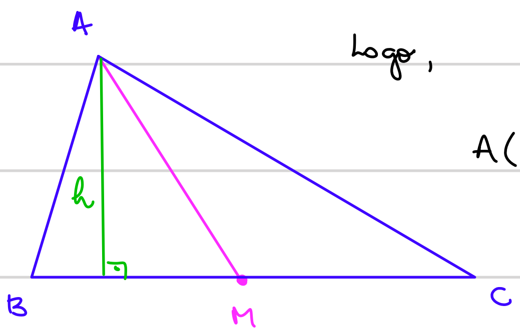
03



$\overline{AM}$ - mediana relativa ao lado $\overline{BC}$.

Nos triângulos ABM e AMC, as bases $\overline{BM}$ e $\overline{MC}$ possuem o mesmo comprimento : $\overline{BM} = \overline{MC} = \frac{\overline{BC}}{2}$ (por M ser o ponto médio do segmento $\overline{BC}$).

Além disso, a altura relativa a essas bases é obtida pelo segmento que parte do vértice A e é perpendicular à reta que contém as bases. Como B, M e C são colineares, a altura é a mesma para ambos os triângulos.



Logo,

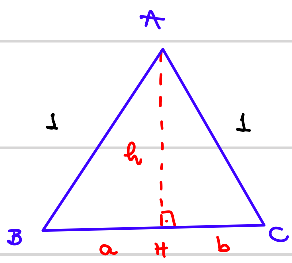
$$A(\Delta ABM) = \frac{\overline{BM}\cdot h}{2} = \frac{\frac{\overline{BC}}{2}\cdot h}{2} = \frac{\overline{BC}\cdot h}{4}$$

$$A(\Delta AMC) = \frac{\overline{MC}\cdot h}{2} = \frac{\frac{\overline{BC}}{2}\cdot h}{2} = \frac{\overline{BC}\cdot h}{4}$$

de onde concluímos que as áreas são iguais.

Analogamente, mostramos para as outras duas medianas.

04



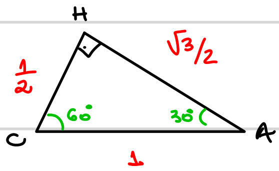
a) Como o triângulo é equilátero (e, portanto, isósceles), a altura h é também a mediana do segmento $\overline{BC}$. Portanto,

$$\overline{BD} = \overline{DC} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \text{ e } b = \frac{1}{2}.$$

Como ΔAHC é retângulo, usamos o Teorema de Pitágoras para encontrar h:

$$h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 \Rightarrow h^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \overset{h>0}{\Rightarrow} h = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

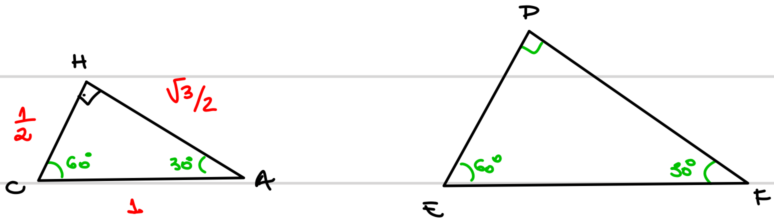
b) Do item anterior, temos que:



$\hat{C} = 60°$, pois o ΔABC é equilátero

$C\hat{A}H = 30°$, pois a altura h é, também, a bissetriz do ângulo A do triângulo equilátero ABC.

Portanto, $\Delta AHC \approx \Delta DEF$ (AAA) :

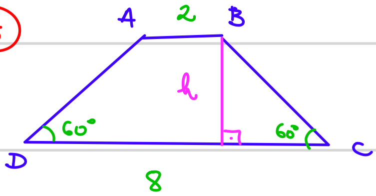


de onde segue que

$$\operatorname{sen}(30^\circ) = \frac{\overset{\to 30^\circ}{DF}}{\underset{\hookrightarrow 90^\circ}{EF}} = \frac{\overset{\to 30^\circ}{HC}}{\underset{\hookrightarrow 90^\circ}{CA}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

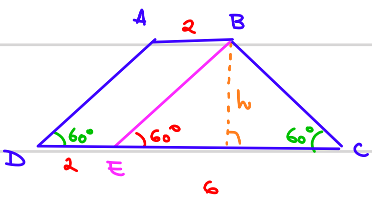
$$\operatorname{sen}(60^\circ) = \frac{\overset{\to 60^\circ}{DF}}{\underset{\hookrightarrow 90^\circ}{EF}} = \frac{\overset{\to 60^\circ}{HA}}{\underset{\hookrightarrow 90^\circ}{CA}} = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

05

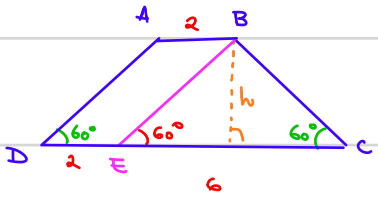


Para calcular a área do trapézio, precisamos apenas encontrar a altura h.

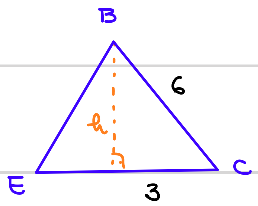
Traçando o segmento $\overline{BE}$ paralelo ao lado $\overline{AD}$, com $E \in \overline{DC}$, obtemos o paralelogramo ABED e o triângulo BED, cuja altura h é, também, a altura do trapézio. Assim, tem-se:



$B\hat{E}C = 60^\circ = \hat{C}$, pois $\overline{AD} \parallel \overline{BE}$ cortadas pela transversal $\overline{DC}$ gera os ângulos correspondentes $\hat{D} = B\hat{E}C$. Como $\hat{D} = \hat{C}$, segue a afirmação.



Como $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ são segmentos compreendidos entre segmentos paralelos, temos $\overline{AB} = \overline{DE} = 2$ e, assim, $\overline{EC} = 8 - 2 = 6$ cm.



– Como o triângulo é isósceles, sua altura divide o lado EC em dois segmentos congruentes.

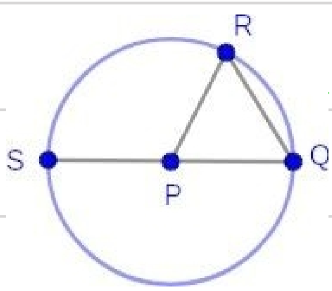
Portanto, pelo Teorema de Pitágoras,

$$h^2 + 3^2 = 6^2 \Rightarrow h^2 = 36 - 9 = 27 \Rightarrow h = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3},$$

de onde segue que

$$A(\square ABCD) = \frac{(8+2) \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3} \text{ cm}.$$

06 Como $RP = PQ = PS = r$ (raio) e, por $RQ = PS = r$, o triângulo PRQ é equilátero. Logo, todos os seus ângulos internos medem 60°.



= PS

O arco $\overset{\frown}{RQ}$ tem a medida do ângulo central $R\hat{P}Q = 60°$.

O arco $\overset{\frown}{RS}$ tem a medida do ângulo central $S\hat{P}R = 180° - R\hat{P}Q = 120°$.

O arco $\overset{\frown}{RSQ}$ tem a medida dada por $360° - \overset{\frown}{RQ} = 360° - 60° = 300°$.