MATEMÁTICA
Faculdade de Ciências
Exatas e Tecnologias

Geometria Plana I

Lista de Aprofundamento

2ª Avaliação

Profª Karla Lima

2024.1

Sumário

1 Perpendicularidade **4**

2 Polígonos **5**

3 Área de Polígonos **6**

4 Semelhança de Triângulos **7**

5 Relações Métricas nos Triângulos **9**

Resumo

"A Arte de Resolver Problemas (1945)" é um livro clássico escrito por George Pólya, que oferece uma abordagem sistemática e prática para resolver problemas matemáticos e, por extensão, problemas em diversas áreas da vida.

Ele destaca estratégias heurísticas, como divisão em subproblemas, analogia, tentativa e erro, e trabalhar de trás para frente.

Além disso, o autor enfatiza a importância de persistência, criatividade e flexibilidade mental na resolução de problemas.

Abaixo, segue o esquema introduzido por Pólya para a resolução de problemas. Use-o para ajudar no processo de aprendizado.

Elabore um PLANO

01. Conexões

Encontre a conexão entre os dados e a incógnita.
É possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não puder encontrar uma conexão imediata.

02. Questione

Já viu este problema antes? Ou o mesmo problema apresentado ligeiramente diferente?

02. Questione

Conhece um problema correlato ou que poderia ser útil?

03. Relacione

Procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.

04. Entenda

Entenda as soluções de problemas resolvidos. São eles que vão te dar a bagagem necessária para se aventurar nos exercícios propostos.

Execute o PLANO

01. Mão na Massa

Em geral, você só precisa de cuidado e paciência, desde que tenha as habilidades necessárias.
Persista com o plano que você escolheu e execute.

02. Descarte

Se continuar sem funcionar, descarte-o e escolha outro. Não se deixe enganar, é assim que a matemática é feita, mesmo por profissionais.

03. Verfique

É possível verificar claramente que os passo está correto?
É possível demonstrar que ele está correto?

04. Retropecto

Examine a solução obtida.
Reserve um tempo para refletir e olhar para trás, para o que você fez, o que funcionou e o que não funcionou.

04. Retrospecto

Isso permitirá que você preveja qual estratégia usar para resolver problemas futuros.

1 Perpendicularidade

Seja r uma reta, P um ponto fora dela e P' a projeção ortogonal deste ponto. Ainda, sejam A e B pontos de r.

Prove os seguintes Teoremas:

Exercício 1 *O segmento perpendicular* $\overline{PP'}$ *é menor que qualquer oblíquo* $\overline{PA}$*.*

Exercício 2 *Se os segmentos oblíquos* $\overline{PA}$ *e* $\overline{PB}$ *possuem projeções congruentes, então eles também são congruentes.*

Exercício 3 *Segmentos oblíquos congruentes têm projeções congruentes.*

Exercício 4 *De dois segmentos oblíquos de projeções não congruentes, o de maior projeção é maior.*

Exercício 5 *De dois segmentos oblíquos não congruentes, o maior tem projeção maior.*

Exercício 6 *De dois segmentos oblíquos não congruentes, o maior forma com a sua projeção ângulo menor.*

Exercício 7 *De dois segmentos oblíquos não congruentes, aquele que forma com a sua projeção um ângulo menor é maior.*

2 Polígonos

Exercício 8 *Calcule o número de lados de um polígono cuja soma dos ângulos internos vale* $1440°$.

Exercício 9 *Quantos lados tem um polígono regular cujo ângulo externo vale* $36°$*?*

Exercício 10 *Um polígono tem* 5 *lados a mais que outro e a diferença entre os números de diagonais distintas de cada um deles é de* 80*. Calcular o número de lados de cada polígono.*

Exercício 11 *Num quadrilátero* $ABCD$*, o ângulo* $\hat{A}$ *vale* $160°$*. Calcular o ângulo* $\hat{C}$*, sabendo-se que os vértices* B*,* C *e* D *são equidistantes do vértice* A*.*

Exercício 12 *Num paralelogramo* $ABCD$*, tem-se:*

a) *o perímetro (soma dos comprimentos de todos os lados) vale* 42*;*

b) *o ângulo* $\hat{A}$ *mede* $120°$*;*

c) *a bissetriz do ângulo* D *passa pelo ponto médio* M *do lado* $\overline{AB}$*.*

Calcule o lado maior do paralelogramo dado e os ângulos do triângulo CMD*.*

Exercício 13 *Dado um quadrado* $ABCD$*, considere o triângulo equilátero* ABM*, interno ao quadrado. Unindo-se o ponto* M *ao vértice* C*, calcule o ângulo* BMC*.*

Exercício 14 *Seja* P *um ponto da base de um triângulo isósceles, distinto de seus extremos. De* P*, traçam-se retas paralelas aos lados congruentes. Prove que o perímetro do paralelogramo formado é igual à soma das medidas dos lados congruentes do triângulo.*

Exercício 15 *Num trapézio retângulo $ABCD$, os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{D}$ são retos. As bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ formam o ângulo $A\hat{M}B$ que vale $87°30'$. Calcule os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$.*

Exercício 16 *Num trapézio isósceles $ABCD$, a base menor $\overline{AB}$, mede 5 e a diagonal $\overline{DB}$ é perpendicular ao lado não paralelo $\overline{BC}$. Calcule o perímetro desse trapézio, sabendo-se que a soma dos ângulos obtusos é o dobro da soma dos ângulos agudos.*

Gabarito

8. 10

9. 10

10. 15 e 20.

11. 100°

12. Comprimento do Maior Lado: 14. Ângulos: 30°, 60° e 90°.

13. 75°.

14.

15. 95° e 85°.

16. 25.

3 Área de Polígonos

Exercício 17 *A base de um triângulo é o dobro da altura e sua área mede 289. Calcule a base e a altura desse triângulo.*

Exercício 18 *Mostre que qualquer mediana de um triângulo divide-o em dois triângulos de mesma área.*

Exercício 19 *A área de um hexágono regular é* $162\sqrt{3}$*. Calcule a área do polígono estrelado que se obtém prolongando dois a dois os lados desse hexágono.*

Gabarito

17. $b = 34$ e $h = 17$.

18.

19. $324\sqrt{3}$.

4 Semelhança de Triângulos

Exercício 20 *Um feixe de retas paralelas determina sobre duas transversais os pontos* A, B, C, D *e* E, F, G, H*, respectivamente. Conhecem-se:* $AB = 2\,cm$*,* $BC = 3\,cm$*,* $CD = 4\,cm$ *e* $EF = 3\,cm$*. Calcule as medidas dos segmentos* $\overline{FG}$ *e* $\overline{GH}$*.*

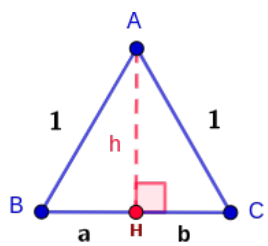
Exercício 21 *Num trapézio* $ABCD$*, uma paralela às bases divide o lado não paralelo* $\overline{AD}$ *em dois segmentos cuja razão entre suas medidas é* $2/3$*. Calcule as medidas dos segmentos determinados sobre o outro lado não paralelo, sabendo-se que* $BC = 30\,cm$*.*

Exercício 22 a) *Prove o Teorema da Bissetriz Interna.*

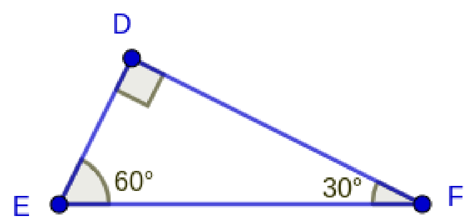
b) *Os lados de um triângulo* ABC *medem:* $AB = 10\,cm$*,* $AC = 20\,cm$ *e* $BC = 27\,cm$*. Calcule as medidas dos segmentos determinados sobre o lado oposto ao maior ângulo do triângulo, formados pela bissetriz do mesmo.*

Exercício 23 *Num triângulo ABC, seus lados medem: $AB = 4\,cm$, $AC = 12\,cm$ e $BC = 15\,cm$. Pelo ponto M, tomado sobre o lado $\overline{BC}$, tal que $BM = 3\,cm$, traçam-se as paralelas $\overline{MD}$ e $\overline{ME}$, respectivamente aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, com $D \in \overline{AB}$ e $E \in \overline{AC}$. Calcule o perímetro do paralelogramo $MDAE$.*

Exercício 24 *Seja ABC um triângulo equilátero de lado $1\,cm$.*



(a) Figura para o item a)



(b) Figura para o item b)

a) *Calcule as medidas de a, b e da altura h.*

b) *Considere o triângulo qualquer DEF. Usando semelhança de triângulos com algum dos triângulos descritos no desenho inicial, mostre que:*

$$sen\,(30^\circ) = \frac{DE}{EF} = \frac{1}{2} \quad e \quad sen\,(60^\circ) = \frac{DF}{EF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

c) *Conclua que as medidas seno e cosseno estão bem definidas a partir dos ângulos do triângulo retângulo, independente do 'tamanho' do triângulo dado.*

Gabarito

20. $FG = 4,5\,cm$ e $GH = 6\,cm$.

21. $12\,cm$ e $18\,cm$.

22. b) $9\,cm$ e $18\,cm$.

23. $11,2\,cm$.

5 Relações Métricas nos Triângulos

Exercício 25 *Num triângulo retângulo, a hipotenusa mede* $250\,m$*. Os catetos são proporcionais aos números* 3 *e* 4 *e somam* $350\,m$*. Calcule as projeções desses catetos sobre a hipotenusa.*

Exercício 26 *Num triângulo retângulo, a soma das medidas de seus lados vale* $48\,cm$ *e a soma dos quadrados dessas medidas vale* $800\,cm^2$*. Calcule os lados desse triângulo.*

Exercício 27 *As bases de um trapézio isósceles medem* $2\,cm$ *e* $8\,cm$*. A altura vale* $4\,cm$*. Calcule o perímetro do trapézio.*

Exercício 28 *Num triângulo retângulo* ABC*, o ângulo* B *mede* $30°$ *e a hipotenusa* $BC = 10\,cm$*. Calcule a distância do vértice* A *ao ponto* M *do lado* $\overline{BC}$*, sabendo-se que* $BM = 4\,cm$*.*

Exercício 29 *Num trapézio, os ângulos adjacentes à base maior são congruentes e mede* $60°$*, cada um. Calcule a área desse trapézio sabendo-se que as bases medem, respectivamente,* 8 *e* 2*.*

Gabarito

25. $160\,m$ e $90\,m$.

26. $20\,cm$, $16\,cm$ e $12\,cm$.

27. $20\,m$.

28. $\sqrt{31}\,cm$.

29. $15\sqrt{3}$.