GEOMETRIA PLANA

Aula 02

Ângulos

Karla Lima

Sumário

Definição e Propriedades

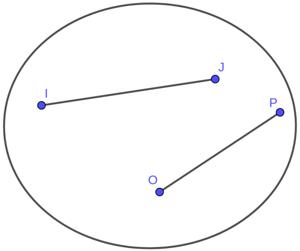
AVISO

Nesta aula, todas os entes geométricos estão situados num mesmo plano α.

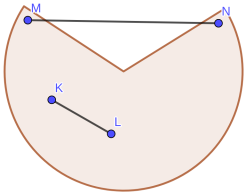
Conjuntos Convexos

Definição 1

*Um conjunto A chama-se **convexo**, se para cada dois pontos X e Y de A, o segmento $\overline{XY}$ está contido em A.*



Conjunto Convexo

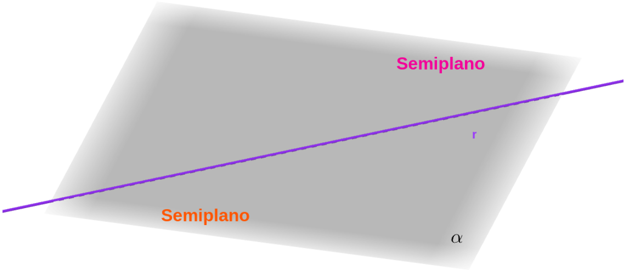


Conjunto Não-Convexo

Postulado da Separação dos Pontos de um Plano

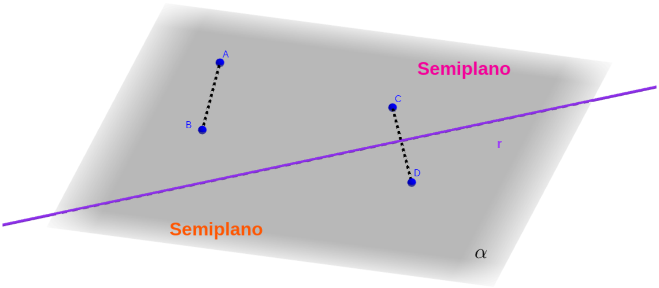
Postulado da Separação dos Pontos de um Plano

Toda reta de um plano divide-o em dois conjuntos, os quais são convexos, denominados **semiplanos.**



A reta r chama-se **aresta** de cada semiplano de α.

Postulado da Separação dos Pontos de um Plano

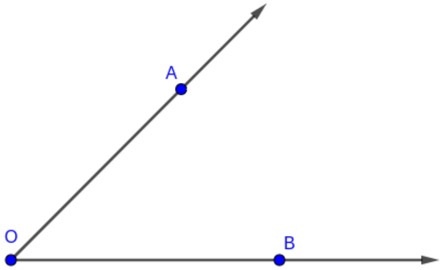


- Se A e B pertencem a um mesmo semiplano, o segmento $\overline{AB}$ está contido no mesmo semiplano e não intercepta a reta r.
- Se os pontos C e D pertencem a semiplanos distintos, o segmento $\overline{CD}$ intercepta a reta r.

Ângulos

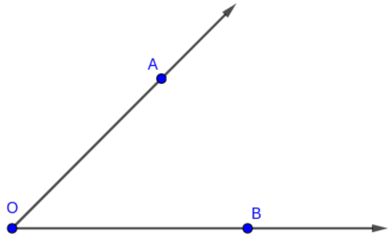
Definição 2

*Chamamos de **ângulo** a figura formada por duas semirretas que têm a mesma origem.*



As semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são chamados **lados** do ângulo e a origem comum O é o seu vértice.

Notações



Para denotar este ângulo, escrevemos:

- $\hat{O}$
- $A\hat{O}B$
- $B\hat{O}A$
- uma letra grega: $\alpha, \beta, \gamma, \eta, \ldots$

Interior

Definição 3

Diz-se que um ponto P pertence ao ***interior*** *de um ângulo $A\hat{O}B$, se*

- *P e A estão num mesmo semiplano definido pela reta $\overleftrightarrow{OB}$;*
- *P e B estão num mesmo semiplano definido pela reta $\overleftrightarrow{OA}$.*

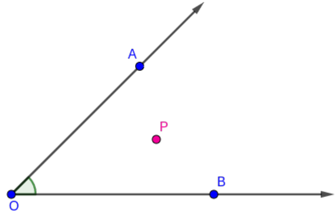


Figura 1: P pertence ao interior do ângulo $A\hat{O}B$

Exterior

Definição 4

*O **exterior** de um ângulo $A\hat{O}B$ é o conjunto de todos os pontos do plano que o contém, tais que:*

- *não pertencem aos lados do ângulo;*
- *não pertencem ao interior do ângulo dado.*

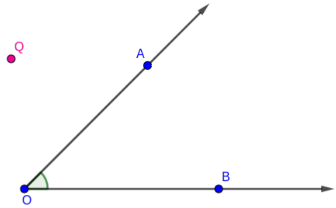
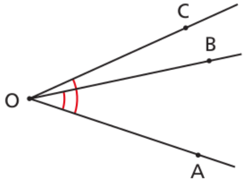


Figura 2: Q pertence ao exterior do ângulo $A\hat{O}B$

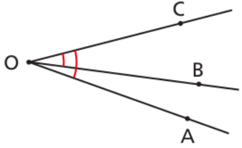
Ângulos Consecutivos

Definição 5

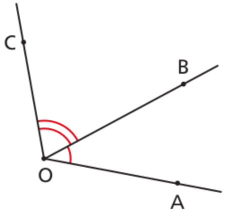
*Dois ângulos são ditos **consecutivos** se têm o mesmo vértice e um lado em comum.*



AÔB e AÔC são consecutivos ($\overrightarrow{OA}$ é o lado comum)



AÔC e BÔC são consecutivos ($\overrightarrow{OC}$ é o lado comum)



AÔB e BÔC são consecutivos ($\overrightarrow{OB}$ é o lado comum)

Ângulos Adjacentes

Definição 6

*Dois ângulos consecutivos que não possuem pontos internos em comum, são denominados **adjacentes**.*

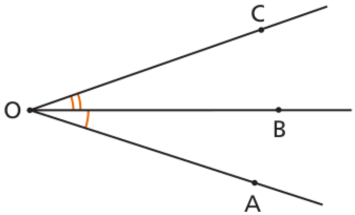


Figura 3: Os ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são adjacentes.

Ângulos Opostos pelo Vértice

Definição 7

*Dois ângulos são ditos **opostos pelo vértice**, se os lados de um deles são as semirretas opostas dos lados do outro.*

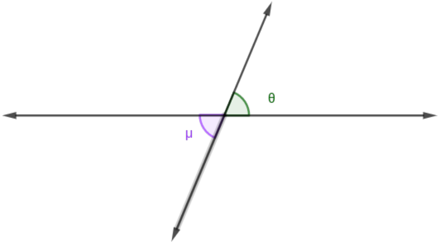


Figura 4: Os ângulos μ e θ são opostos pelo vértice.

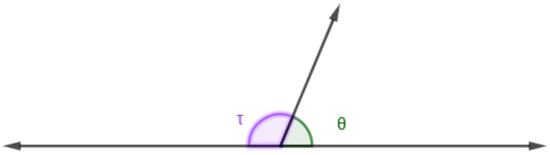
Trabalho

Responda ao questionário: Aula 02: Ângulos Parte 1.

Ângulos Suplementares

Definição 8

*Dois ângulos adjacentes, cujos lados não comuns são semirretas opostas, são denominados **suplementares**.*



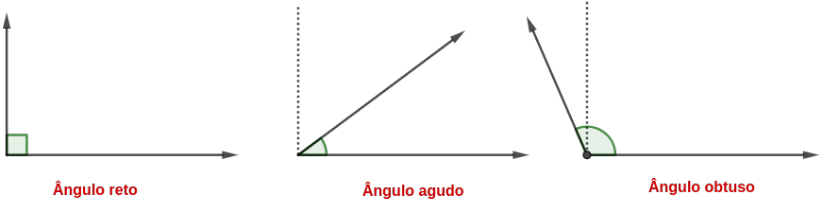
- Dizemos que τ é um **ângulo suplementar adjacente** de θ (e vice-versa).

Tipos de Ângulos

Definição 9

Um ângulo AÔB é dito:

- ***reto**, se é congruente a seu suplementar adjacente;*
- ***agudo**, se é um ângulo menor que um ângulo reto;*
- ***obtuso**, se é um ângulo maior que um ângulo reto.*



Medida de Ângulos

- As unidades mais utilizadas para medir ângulos (sua amplitude) são o **grau** e **radiano**.

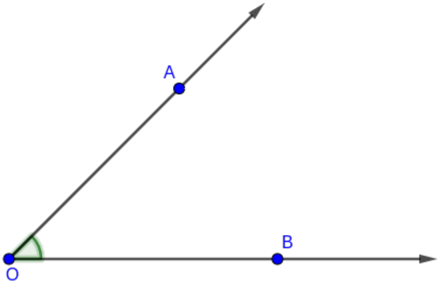
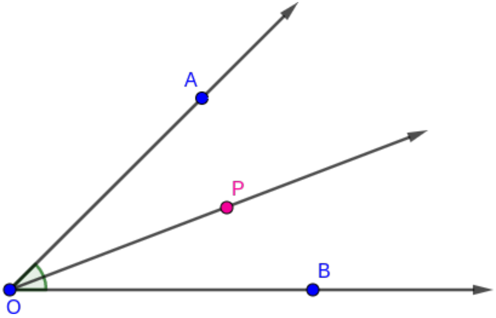


Figura 5: A área em verde representa o ângulo $A\hat{O}B$

Adição de Ângulos

- **Postulado Da adição de Ângulos:** Se P é um ponto de interior de um ângulo $A\hat{O}B$, então $A\hat{O}B = A\hat{O}P + P\hat{O}B$.



Medida de Ângulos

- O **ângulo de um grau** (1°) é o ângulo obtido ao dividirmos o ângulo reto em 90 ângulos iguais. Com isso, um ângulo reto possui 90°.
- O **ângulo de um minuto** $(1')$ é o ângulo obtido ao dividirmos o ângulo de 1° em 60 partes iguais:

$$1' = \frac{1^\circ}{60}.$$

- O **ângulo de um segundo** $(1'')$ é o ângulo obtido ao dividirmos o ângulo de $1'$ em 60 partes iguais:

$$1'' = \frac{1'}{60} = \frac{1^\circ}{360}.$$

Ângulos Congruentes

Definição 10

*Dois ângulos são ditos **congruentes** se têm a mesma medida.*

Bissetriz

Definição 11

*Seja P um ponto interior do ângulo $A\hat{O}B$. A **bissetriz** do ângulo $A\hat{O}B$, é a semirreta $\overrightarrow{OP}$, tal que $A\hat{O}P = P\hat{O}B$.*

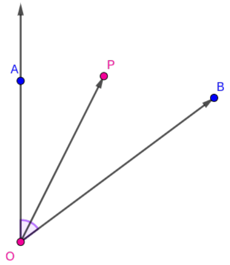


Figura 6: Os ângulos $A\hat{O}P$ e $P\hat{O}B$ possuem a mesma medida.

Ângulos Complementares

Definição 12

Dois ângulos são ditos ***complementares****, se a soma de suas medidas é* $90°$. *Cada um deles é denominado o* ***complemento*** *do outro.*

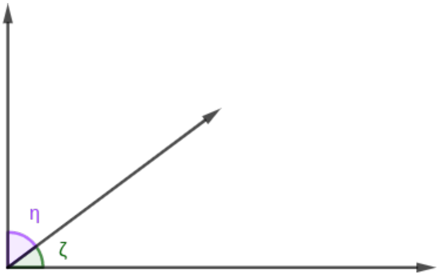


Figura 7: Temos que $\eta + \zeta = 90°$, logo são ângulos complementares.

Medidas de um ângulo

- Todo ângulo tem sua medida, em graus, de 0 à 180. A medida de um ângulo é zero se, e somente se, seus lados são semirretas coincidentes. Se seus lados são semirretas opostas, sua medida é 180°.

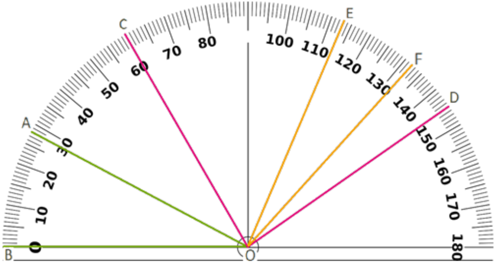


Figura 8: Transferidor: a 'régua' para medir ângulos

Ângulos

Definição 13

Denominamos de ângulo ***raso*** *ao ângulo cujos lados são semirretas opostas (estão sobre a mesma reta, em sentidos opostos).*

Figura 9: $\hat{O}$ é um ângulo raso

Teorema

Teorema 1

Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

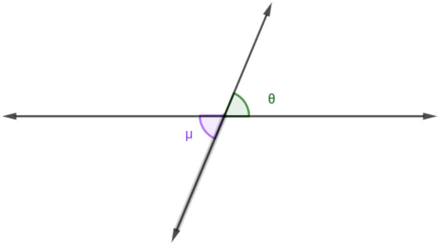


Figura 10: Os ângulos μ e θ são opostos pelo vértice.

Demonstração do Teorema 1

- **Hipótese:** μ e θ são opostos pelo vértice .
- **Tese:** $\mu = \theta$.

Usaremos a prova direta (partimos da hipótese).

Seja τ o ângulo simultaneamente adjacente aos ângulos μ e θ.

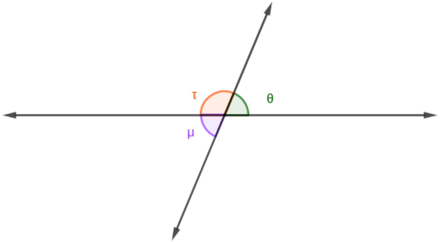
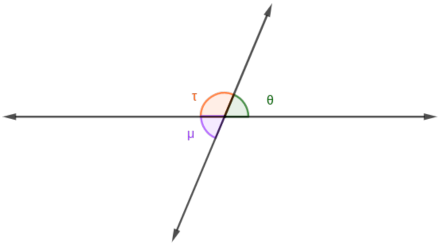


Figura 11: Os ângulos μ e θ são adjacentes ao mesmo ângulo τ.

Demonstração do Teorema 1



Com isso,

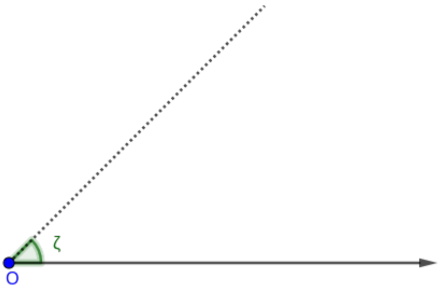
$$\mu + \tau = 180^\circ \quad \text{e} \quad \theta + \tau = 180^\circ.$$

Daí, obtemos

$$\mu + \tau = \theta + \tau \Rightarrow \mu + \tau - \tau = \theta + \tau - \tau$$
$$\Rightarrow \mu = \theta.$$

Postulado

- **Postulado da Unicidade:** Qualquer que seja o número real ζ, com $0 < \zeta < 180$, podemos construir um único ângulo de ζ graus, a partir de uma semirreta dada num semiplano.



Trabalho

Responda ao questionário: Aula 02: Ângulos Parte 2.