Cálculo III

Curvas e campos vetoriais

Curvas

Uma **função vetorial**, ou **função a valores vetoriais**, é uma função cujo domínio é um conjunto de números reais e cuja imagem é um conjunto de vetores.

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$$

Exemplo

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$$

Exemplo

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$$

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t$$

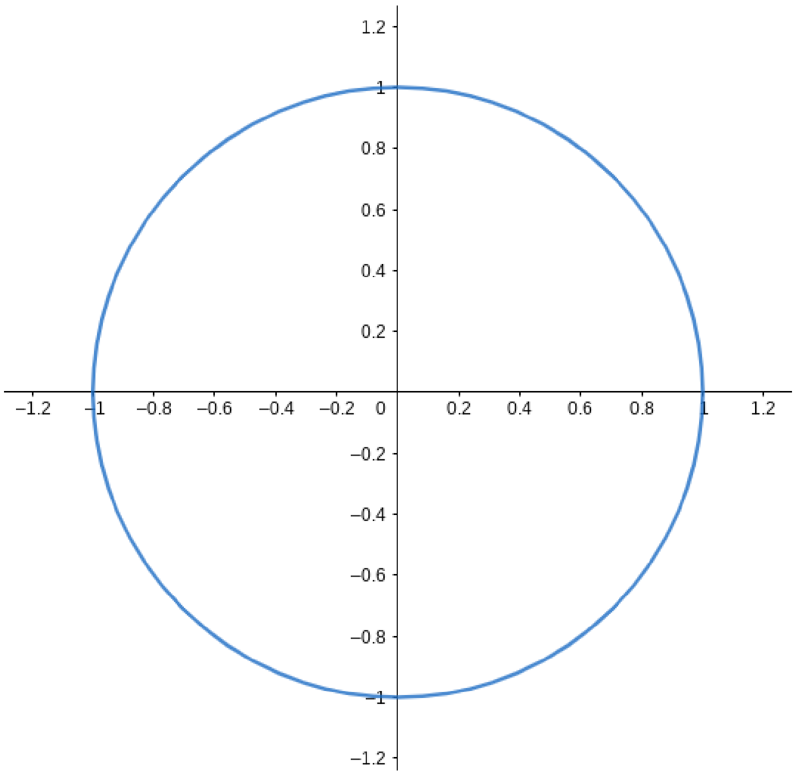
$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

Exemplo

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$$

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t$$

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$



Exemplo

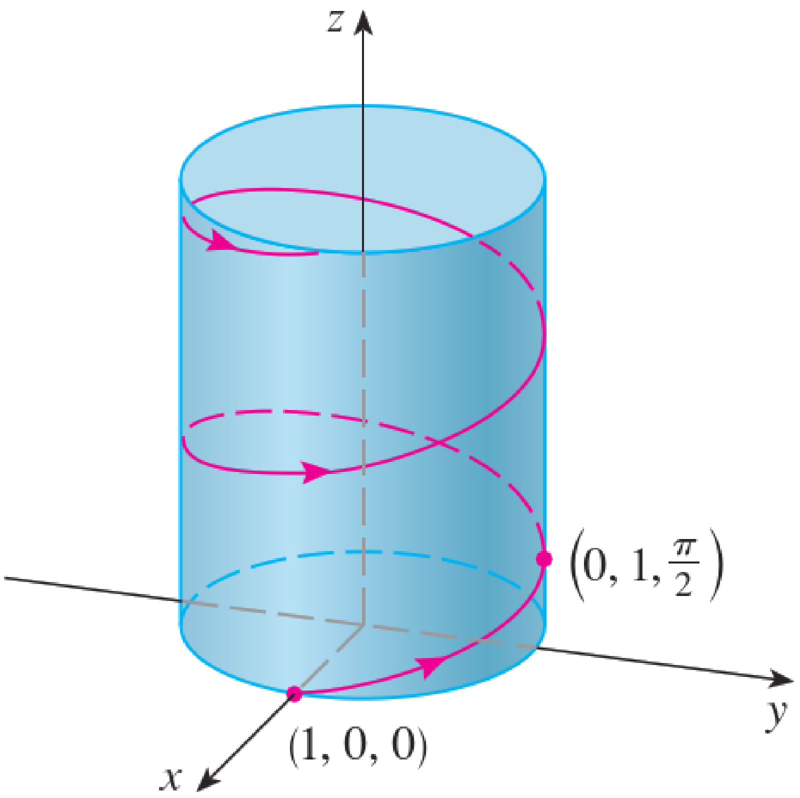
$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$$

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad z = t$$

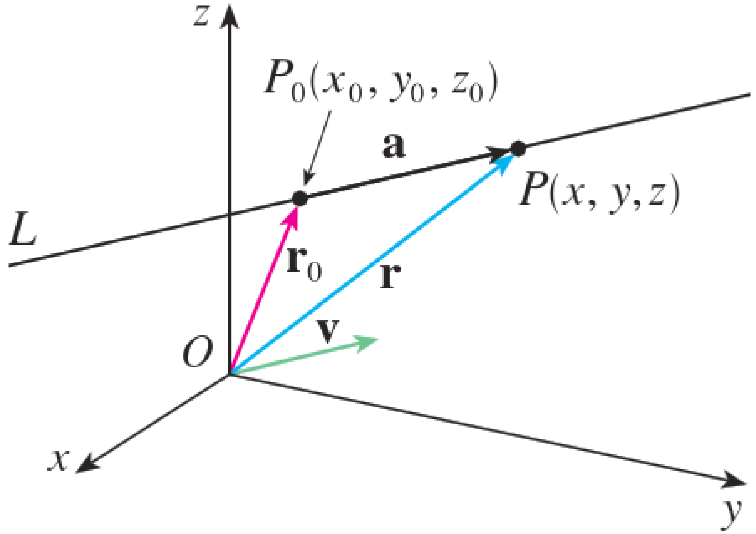
Exemplo

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$$

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad z = t$$



Exemplo



$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$$

$$\langle x, y, z \rangle = \langle x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc \rangle$$

Exemplo

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$$

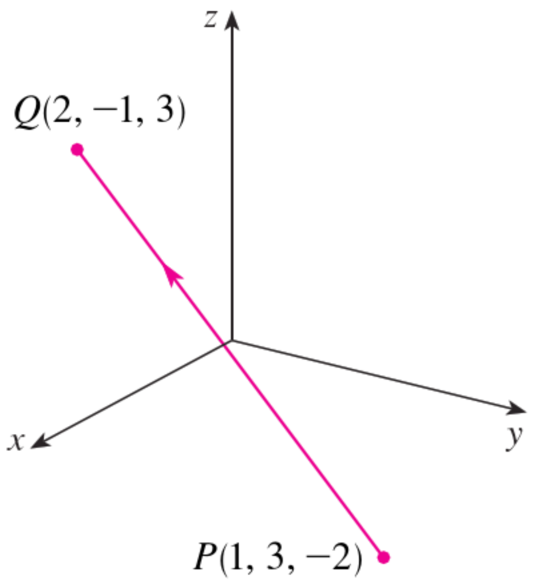
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{r}_1$$

O segmento de reta de $\mathbf{r}_0$ até $\mathbf{r}_1$ é dado pela equação vetorial

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{r}_1 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

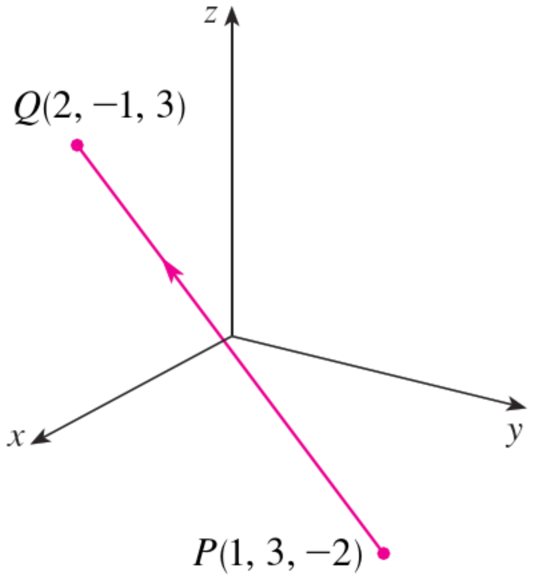
Exemplo

Determine uma equação vetorial e as equações paramétricas para o segmento de reta ligando o ponto $P(1, 3, -2)$ ao ponto $Q(2, -1, 3)$.



Exemplo

Determine uma equação vetorial e as equações paramétricas para o segmento de reta ligando o ponto $P(1, 3, -2)$ ao ponto $Q(2, -1, 3)$.

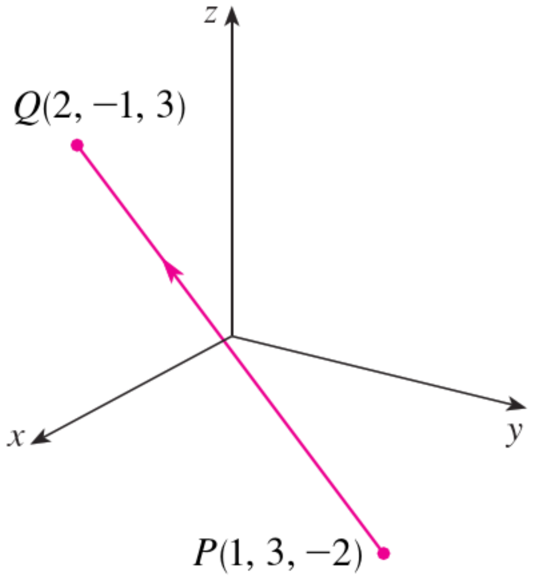


$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

$$\mathbf{r}_0 = \langle 1, 3, -2 \rangle \text{ e } \mathbf{r}_1 = \langle 2, -1, 3 \rangle$$

Exemplo

Determine uma equação vetorial e as equações paramétricas para o segmento de reta ligando o ponto $P(1, 3, -2)$ ao ponto $Q(2, -1, 3)$.



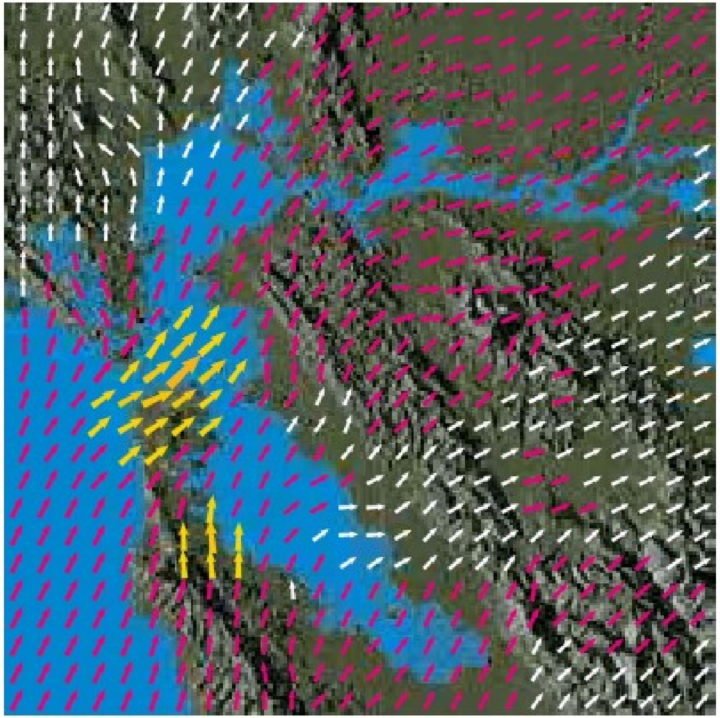
$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

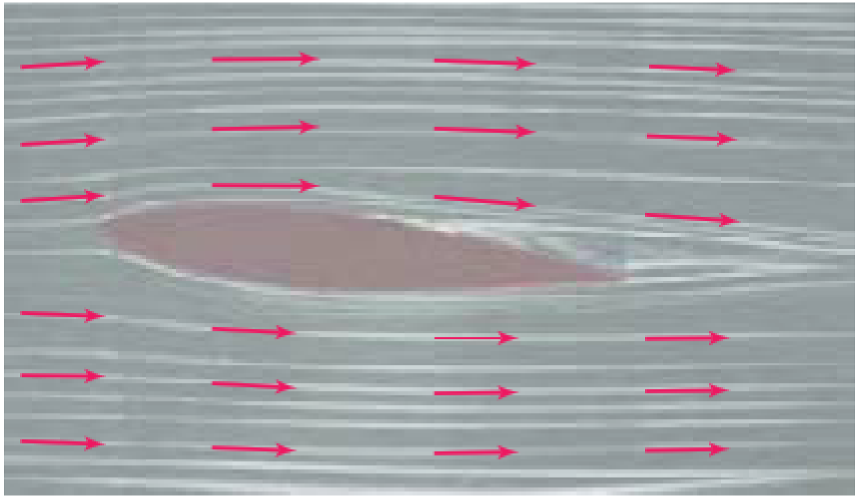
$$\mathbf{r}_0 = \langle 1, 3, -2 \rangle \text{ e } \mathbf{r}_1 = \langle 2, -1, 3 \rangle$$

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\langle 1, 3, -2 \rangle + t\langle 2, -1, 3 \rangle \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

$$\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 3 - 4t, -2 + 5t \rangle \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Campos vetoriais

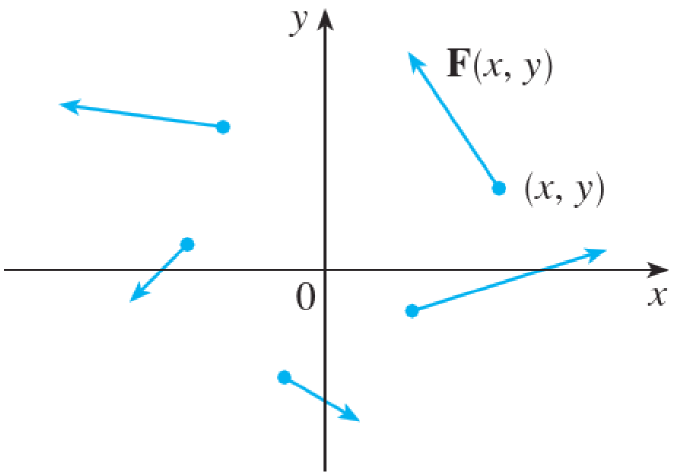




Adaptado de ONERA photograph, Werlé, 1974

Campos vetoriais

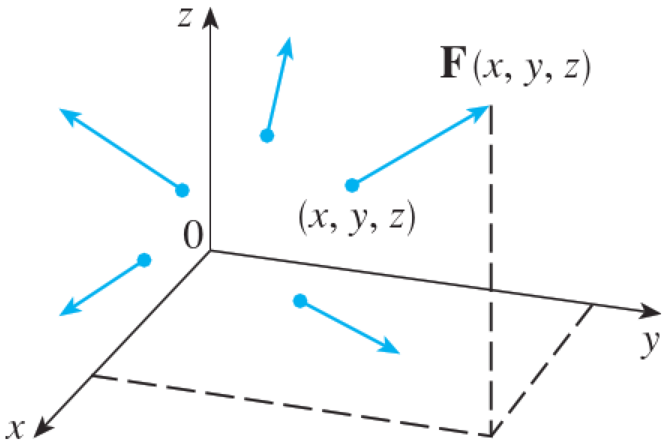
Seja D um conjunto em $\mathbb{R}^2$ (uma região plana). Um **campo vetorial em $\mathbb{R}^2$** é uma função $\mathbf{F}$ que associa a cada ponto (x, y) em D um vetor bidimensional $\mathbf{F}(x, y)$.



$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}$$

Campos vetoriais

Seja E um subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Um **campo vetorial em** $\mathbb{R}^3$ é uma função $\mathbf{F}$ que associa a cada ponto (x, y, z) em E um vetor tridimensional $\mathbf{F}(x, y, z)$.



$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

Exemplo

Um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$ é definido por $\mathbf{F}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$. Descreva $\mathbf{F}$ esboçando alguns dos vetores $\mathbf{F}(x, y)$

Exemplo

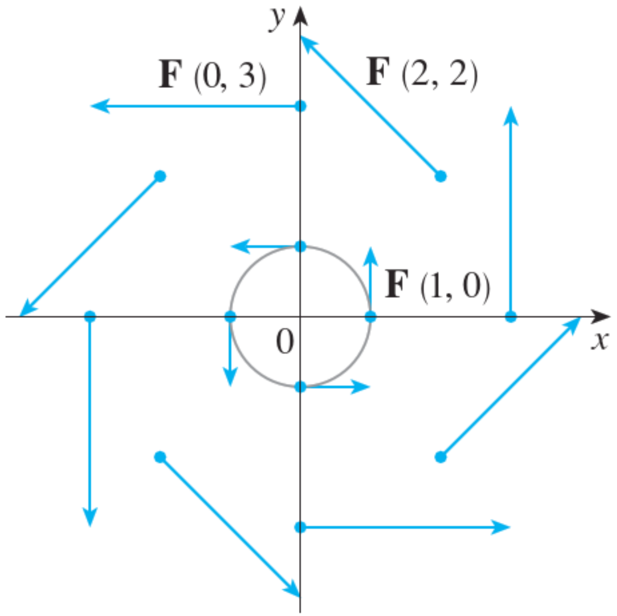
Um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$ é definido por $\mathbf{F}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$. Descreva $\mathbf{F}$ esboçando alguns dos vetores $\mathbf{F}(x, y)$

(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$	(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$
$(1, 0)$	$\langle 0, 1 \rangle$	$(-1, 0)$	$\langle 0, -1 \rangle$
$(2, 2)$	$\langle -2, 2 \rangle$	$(-2, -2)$	$\langle 2, -2 \rangle$
$(3, 0)$	$\langle 0, 3 \rangle$	$(-3, 0)$	$\langle 0, -3 \rangle$
$(0, 1)$	$\langle -1, 0 \rangle$	$(0, -1)$	$\langle 1, 0 \rangle$
$(-2, 2)$	$\langle -2, -2 \rangle$	$(2, -2)$	$\langle 2, 2 \rangle$
$(0, 3)$	$\langle -3, 0 \rangle$	$(0, -3)$	$\langle 3, 0 \rangle$

Exemplo

Um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$ é definido por $\mathbf{F}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$. Descreva $\mathbf{F}$ esboçando alguns dos vetores $\mathbf{F}(x, y)$

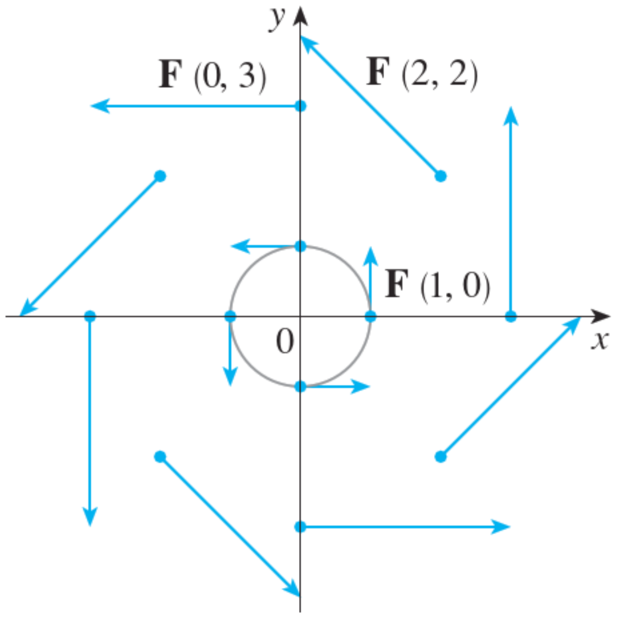
(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$	(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$
$(1, 0)$	$\langle 0, 1 \rangle$	$(-1, 0)$	$\langle 0, -1 \rangle$
$(2, 2)$	$\langle -2, 2 \rangle$	$(-2, -2)$	$\langle 2, -2 \rangle$
$(3, 0)$	$\langle 0, 3 \rangle$	$(-3, 0)$	$\langle 0, -3 \rangle$
$(0, 1)$	$\langle -1, 0 \rangle$	$(0, -1)$	$\langle 1, 0 \rangle$
$(-2, 2)$	$\langle -2, -2 \rangle$	$(2, -2)$	$\langle 2, 2 \rangle$
$(0, 3)$	$\langle -3, 0 \rangle$	$(0, -3)$	$\langle 3, 0 \rangle$



Exemplo

Um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$ é definido por $\mathbf{F}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$. Descreva $\mathbf{F}$ esboçando alguns dos vetores $\mathbf{F}(x, y)$

(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$	(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$
$(1, 0)$	$\langle 0, 1\rangle$	$(-1, 0)$	$\langle 0, -1\rangle$
$(2, 2)$	$\langle -2, 2\rangle$	$(-2, -2)$	$\langle 2, -2\rangle$
$(3, 0)$	$\langle 0, 3\rangle$	$(-3, 0)$	$\langle 0, -3\rangle$
$(0, 1)$	$\langle -1, 0\rangle$	$(0, -1)$	$\langle 1, 0\rangle$
$(-2, 2)$	$\langle -2, -2\rangle$	$(2, -2)$	$\langle 2, 2\rangle$
$(0, 3)$	$\langle -3, 0\rangle$	$(0, -3)$	$\langle 3, 0\rangle$



$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}) \cdot (-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}) = -xy + yx = 0$$

$$|\mathbf{F}(x, y)| = \sqrt{(-y)^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |\mathbf{x}|$$

Exemplo

A Lei da Gravitação de Newton afirma que a intensidade da força gravitacional entre dois objetos com massas m e M é

$$|\mathbf{F}| = \frac{mMG}{r^2}$$

onde r é a distância entre os objetos e G é a constante gravitacional.

Exemplo

A Lei da Gravitação de Newton afirma que a intensidade da força gravitacional entre dois objetos com massas m e M é

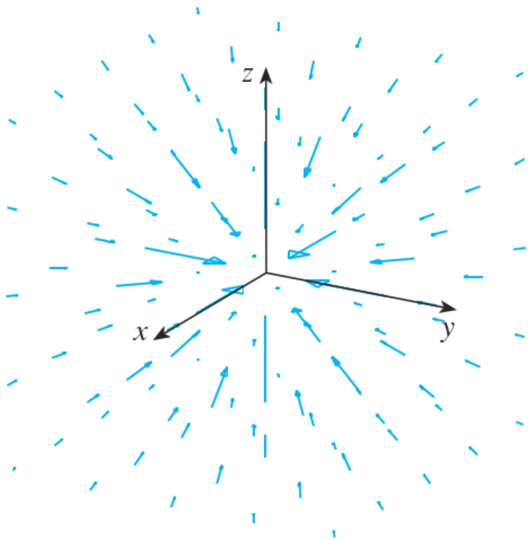
$$|\mathbf{F}| = \frac{mMG}{r^2}$$

onde r é a distância entre os objetos e G é a constante gravitacional.

Portanto, a força gravitacional agindo no objeto em $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$ é

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-mMGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{-mMGy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{j} + \frac{-mMGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{k}$$



Campo gradiente

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathbf{k}$$

Campo gradiente

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathbf{k}$$

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{-mMGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{i} + \frac{-mMGy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{j} + \frac{-mMGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{k}$$

$$= \mathbf{F}(x, y, z)$$

Campo conservativo

Um campo vetorial $\mathbf{F}$ é chamado **campo vetorial conservativo** se ele for o gradiente de alguma função escalar, ou seja, se existir uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

Nessa situação, f é denominada **função potencial** de $\mathbf{F}$.

Exercícios

Descreva a curva definida pela função vetorial

$$\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 2 + 5t, -1 + 6t \rangle$$

Determine o domínio de $\mathbf{r}(t) = \left\langle t^3, \ln(3 - t), \sqrt{t} \right\rangle$
$[0, 3)$

Determine o campo vetorial gradiente $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$