GEOMETRIA PLANA

Aula 06

Paralelismo

Karla Lima

Sumário

Paralelismo

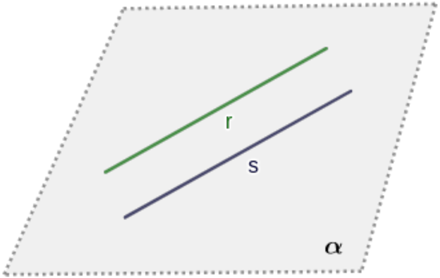
Retas Paralelas

Definição 1

Duas retas são ditas ***paralelas****, se*

i) *são coincidentes;*

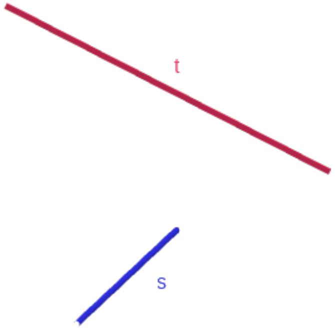
ii) *são coplanares e não se interceptam.*



Retas Reversas

Definição 2

*Duas retas que não estão num mesmo plano chamam-se **retas reversas**.*



Vá visualizar no Geogebra (Click para baixar)

Trabalho 04/07

Exercício 1

Demonstre o seguinte teorema:

Duas retas paralelas distintas estão contidas em um único plano.

Trabalho 04/07

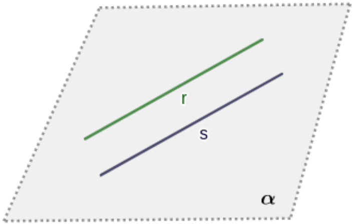
Exercício 1

Demonstre o seguinte teorema:

Duas retas paralelas distintas estão contidas em um único plano.

.

- **Hipótese:** r e s são paralelas.
- **Tese:** Existe um único plano α contendo r e s.



Transversal a Várias Paralelas

Reta Transversal

Definição 3

Uma ***transversal*** *a duas retas coplanares é uma reta que as intercepta em dois pontos distintos.*

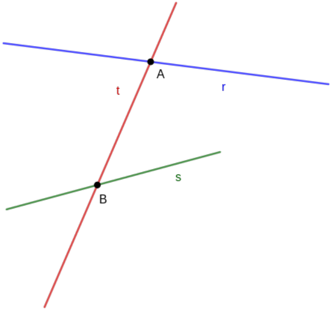


Figura 1: t é transversal às retas r e s, nos pontos A e B

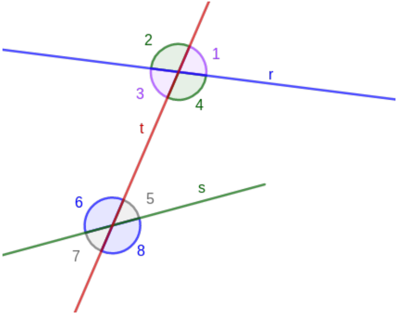
Reta transversal

Definição 4

Sejam r e s retas coplanares e t uma transversal às mesmas. Usaremos a seguinte nomenclatura:

I. São denominados **alternos internos** os pares de ângulos:
   - 3 e 5
   - 4 e 6

II. São denominados **alternos externos** os pares de ângulos:
   - 1 e 7
   - 2 e 8

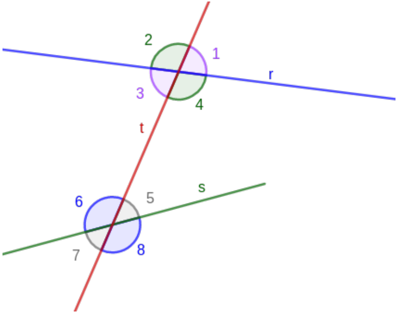


Reta transversal

III. São denominados **correspondentes** os pares de ângulos:
  - 1 e 5
  - 4 e 8
  - 2 e 6
  - 3 e 7

IV. São denominados **colaterais internos** os pares de ângulos:
  - 4 e 5
  - 3 e 6

V. São denominados **colaterais externos** os pares de ângulos:
  - 1 e 8
  - 2 e 7



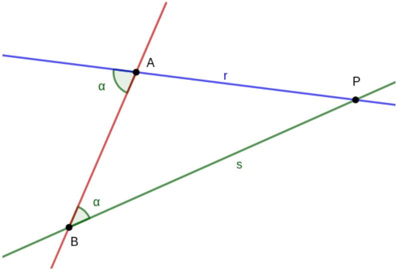
Existência da Paralela

Teorema 1

Sejam r e s retas coplanares cortadas por uma transversal t. Se dois ângulos alternos são congruentes, então as retas r e s são paralelas.

Demonstração:

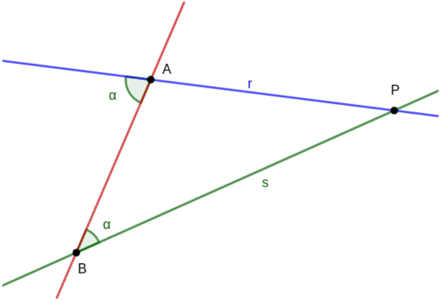
- Suponha, por absurdo, que as retas não são paralelas.
- Como são coplanares, as retas devem se interceptar num ponto P, formando um triângulo ABP.



Existência da Paralela

Demonstração:

- Com isso, $\triangle ABP$ teria um ângulo externo com medida igual ao ângulo interno α, contrariando o teorema do ângulo externo.



Teorema

Este teorema ainda é verdadeiro se substituirmos a expressão 'alternos internos' por:

- alternos externos
- correspondentes
- colaterais internos
- colaterais externos

Os Postulados de Euclides

Elementos de Euclides

- No início do curso, citamos a obra ’Elementos’ de Euclides.
- Esse livro faz uma apresentação da Geometria muito bem organizada na roupagem da lógica.
- Cada resultado é demonstrado com base no antecedente, de modo que, para o processo tenha começo, é preciso formular algumas proposições que ficam sem demonstração (chamados axiomas ou postulados).

Os Postulados de Euclides

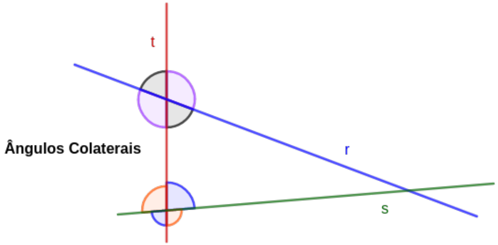
Euclides formulou 5 postulados que, traduzidos e interpretados em nossa linguagem, são enunciados a seguir:

1. Por dois pontos passa uma reta e somente uma.
2. A partir de qualquer ponto de uma reta dada é possível marcar um segmento de comprimento dado sobre a reta.
3. É possível descrever um círculo de centro e raios dados.
4. Todos os ângulos retos são iguais (Euclides define 'ângulo reto' como sendo igual ao ângulo formado por duas retas que se cortam de maneira a formar quatro ângulos iguais.)

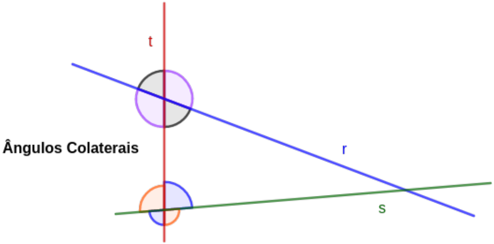
O 5º Postulado de Euclides

5. Se uma reta *t* corta duas outras *r* e *s* (todas num mesmo plano) de modo que um dos pares dos ângulos colaterais internos tem soma inferior a dois ângulos retos, então *r* e *s*, quando prolongadas suficientemente, se cortam do lado de *t* em que se encontram os referidos ângulos colaterais internos.

O enunciado fica mais claro quando acompanhado da observação da figura abaixo:

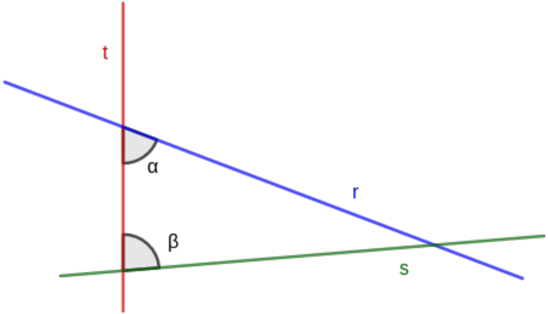


O 5º Postulado de Euclides



- Num mesmo plano, *t* corta as retas *r* e *s*.
- Tome pares (α, β), onde α é um ângulo formado pela interseção de *t* e *r* e β formado pela interseção de *t* e *s* (ângulos colaterais). Acima, temos apenas um exemplo. Cada interseção gera 4 ângulos.

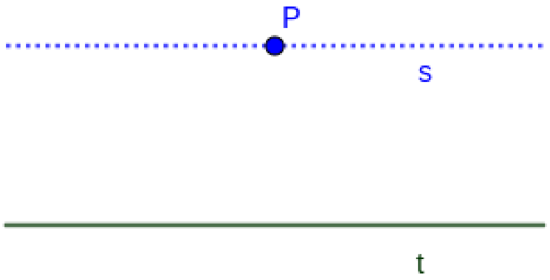
O 5º Postulado de Euclides



- Se existir um par no qual a sua soma é menor que 180, as retas *r* e *s* se cortam. Além disso, se cortam no semiplano gerado por *t*, em que os ângulos colaterais referidos estão (nesse exemplo, do lado direito de *t*).

Postulado de Playfair

Postulado de Playfair: Por um ponto não pertencente a uma reta, passa um única reta paralela à reta dada.



Esse postulado é equivalente ao 5º Postulado de Euclides. Leia mais em [1, 2, 3].

Teorema

Teorema 2

Sejam r e s duas retas paralelas distintas cortadas pela transversal t. Se a transversal t é perpendicular à reta r, então t é também perpendicular à reta s.

Trabalho 04/07

Exercício 2

Como o 5° postulado de Euclides pode ser usado para demonstrar o Teorema 2?

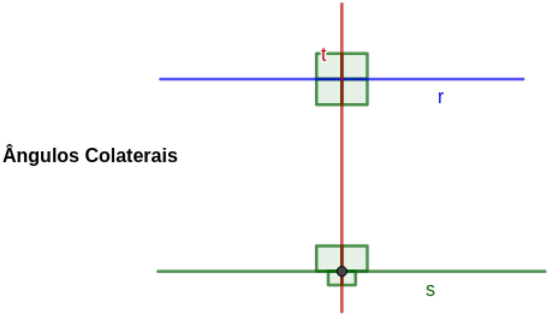
Trabalho 04/07

Exercício 2

Como o 5° postulado de Euclides pode ser usado para demonstrar o Teorema 2?

O 5º Postulado de Euclides e o Teorema 2

No caso em que não há um par (α, β) tal que $\alpha + \beta < 180$, temos então, obrigatoriamente (por quê?) $\alpha = \beta = 90°$, em todos os pares. Assim, teremos:



- As retas não r e s não se cruzam.

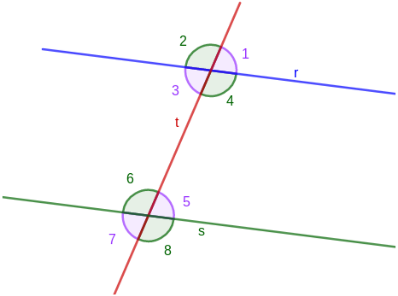
Teorema

Teorema 3

Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os quatro ângulos agudos formados são congruentes, bem como os quatro ângulos obtusos.

.

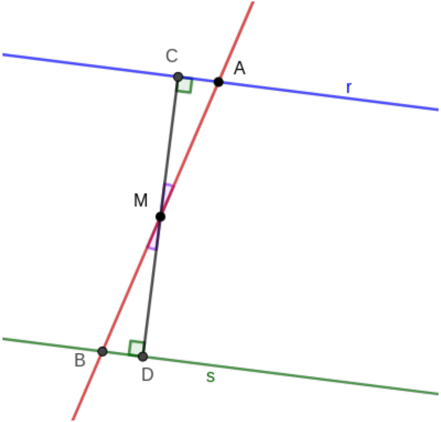
- **Hipótese:** *r* e *s* são paralelas;
  t é transversal às duas.
- **Tese:**São congruentes os ângulos:
  - $1 = 3 = 5 = 7$
  - $2 = 4 = 6 = 8$



Teorema

Demonstração:

- Sejam A e B os pontos de interseções da transversal com as retas r e s.
- Seja M o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.
- Pelo ponto M, tracemos um segmento perpendicular às retas r e s.
- Os triângulos retângulos CMA e DMB são congruentes (Caso LAA).



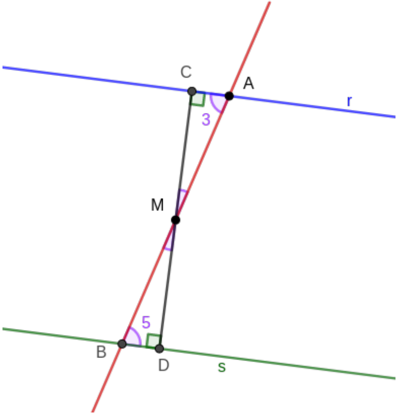
Teorema

Demonstração:

- Com isso, são congruentes os ângulos 3 e 5.
- Como $1 = 3$ e $5 = 7$, por serem ângulos opostos pelo vértice, segue que

$$1 = 3 = 5 = 7.$$

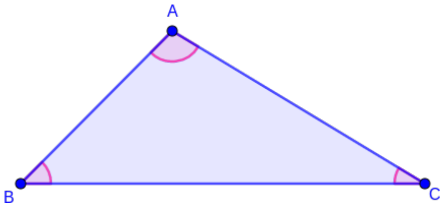
- Por outro lado, $2 = 4 = 6 = 8$ por serem suplementos de ângulos congruentes.



Soma dos ângulos de um triângulo

Teorema 4

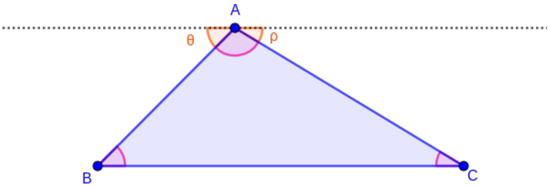
Em todo triângulo, a soma dos seus ângulos internos é igual à $180°$.



- **Hipótese:** *ABC* é um triângulo.
- **Tese:** $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$.

Demonstração: Teorema 4

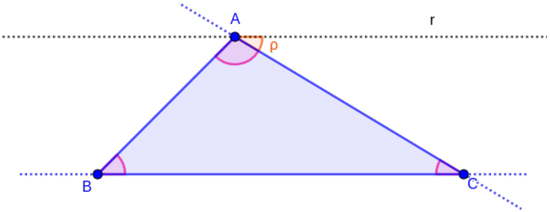
- Pelo vértice A, trace uma reta r paralela ao lado $\overline{BC}$.



i) Temos que $\theta + \hat{A} + \rho = 180^\circ$.

Demonstração: Teorema 4

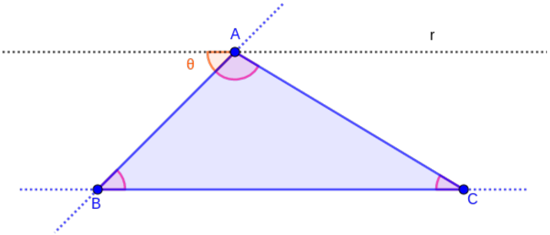
- Observando as paralelas $\overline{BC}$ e r cortadas pela transversal $\overline{AC}$, obtemos que os ângulos $\hat{C}$ e ρ são alternos internos.



ii) Portanto, $\rho = \hat{C}$.

Demonstração: Teorema 4

- Por fim, observando as paralelas $\overline{BC}$ e r cortadas pela transversal $\overline{AB}$, obtemos que os ângulos $\hat{B}$ e θ são alternos internos.



iii) Portanto, $\theta = \hat{B}$.

Demonstração: Teorema 4

De i), ii) e iii), concluímos que

$$180^\circ = \hat{A} + \theta + \rho = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}.$$

Trabalho 04/07

Prove o seguinte corolário do Teorema 4:

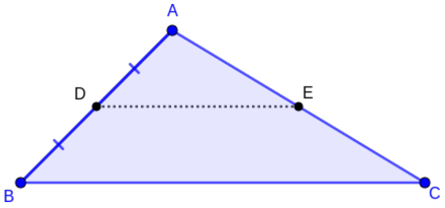
Corolário 1

Em todo triângulo, a medida de qualquer ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes.

Teorema

Teorema 5

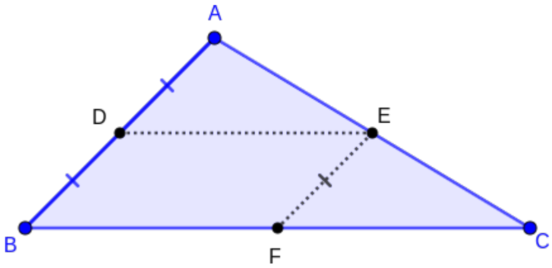
Se do ponto médio do lado de um triângulo, traçarmos uma paralela a um dos lados, esta passará pelo ponto médio do terceiro lado.



- **Hipótese:** $AD = DB$ e $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.
- **Tese:** $AE = EC$.

Demonstração: Teorema 5

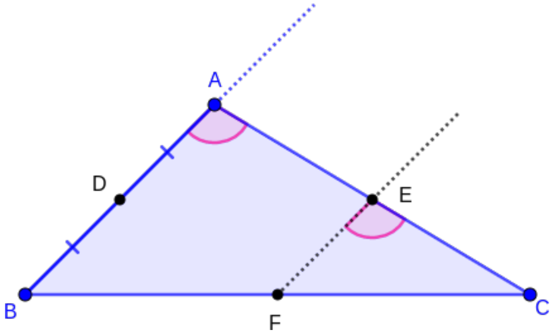
- Pelo ponto E, que a paralela ao lado $\overline{BC}$ corta o lado $\overline{AC}$, trace um segmento paralelo ao lado $\overline{AB}$, cortando o lado $\overline{BC}$.



i) Qual teorema garante que $BD = FE$?

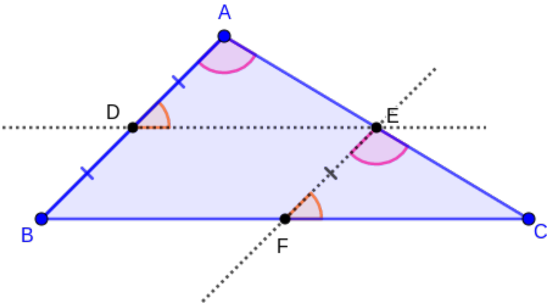
Demonstração: Teorema 5

ii) Sendo $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$, cortadas pela transversal $\overline{AC}$, como podemos relacionar os ângulos $A\hat{D}E$ e $E\hat{F}C$?



Demonstração: Teorema 5

iii) Como $\overline{DA} \parallel \overline{FE}$ e $\overline{DE} \parallel \overline{FC}$, como podemos relacionar os ângulos $A\hat{D}E$ e $E\hat{F}C$?



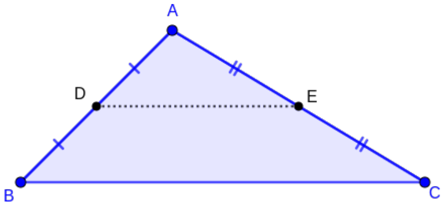
iv) Dos itens anteriores, o que garante a congruência dos triângulos DAE e FEC?

- Da congruência acima, o que garante que $AE = EC$?

Teorema

Teorema 6

O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado.



- **Hipótese:** $AD = DB$ e $AE = EC$.
- **Tese:** $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

Demonstração: Teorema 6

1. Pelo ponto médio de $\overline{AB}$, D, traçamos uma reta paralela ao lado $\overline{BC}$.
2. Pelo Teorema 5, essa reta corta o lado $\overline{AC}$ no seu ponto médio, E.
3. Como pelos pontos distintos D e E passa uma única reta, o segmento $\overline{DE}$ deve estar contido na reta traçada, o que implica em - também - ser paralelo ao lado $\overline{BC}$.

Trabalho 04/07

Exercício 3

Demonstre o seguinte corolário do Teorema 6:

Corolário 2

No triângulo anterior, tem-se $DE = \dfrac{BC}{2}$.

Geometrias Não-Euclidianas

Geometria Não-Euclidiana

- A geometria plana, também conhecida como **Geometria Euclidiana** funcionava muito bem em superfícies planas.
- Como podemos definir situações geométricas sobre uma superfície curva? Certamente a geometria Euclidiana não é satisfatória.
- Vimos que na geometria Euclidiana, a soma dos ângulos internos de um triângulo dá sempre o valor de 180°. Quando traçamos o mesmo ângulo sobre uma superfície curva isso já não é mais verdade.
- Era preciso então estabelecer uma nova geometria que pudesse resolver essas questões.

Geometria Não-Euclidiana

- Alguns poderão estar fazendo a seguinte pergunta: a Terra é uma (quase) esfera, a geometria de Euclides funciona na Terra, então porque a geometria de Euclides não pode explicar uma geometria curva?
- Ocorre que, localmente, podemos considerar que estamos trabalhando em um plano (alô cálculo diferencial!).
- Entretanto, quando precisamos considerar grandes distâncias sobre a superfície da Terra a geometria de Euclides também não funciona. Isso é visto em navegação de longo curso, onde a curvatura da Terra não pode ser desprezada.

Geometria Não-Euclidiana

- Matemáticos ilustres como Nikolai Lobachevski, János Bolyai, Carl Gauss e Bernhard Riemann dedicaram parte de sua vida a estabelecer uma geometria que ia contra o senso comum. Que tipo de argumento científico poderia ter chamado a atenção de tais matemáticos?
- Basicamente o que esses pesquisadores investigavam era o que ocorreria se eles desprezassem o quinto postulado de Euclides e considerassem exatamente o oposto ou seja, que através de um ponto C não situado sobre uma dada linha reta AB, pudéssemos traçar não uma mas duas, e consequentemente um número infinito, de linhas paralelas a AB.

Geometria Não-Euclidiana

- A tarefa agora passava a ser construir uma geometria baseada nesse novo axioma. A ideia subjacente a isso era que se o quinto postulado era realmente um teorema então, mais cedo ou mais tarde, a nova geometria conteria contradições lógicas, o que significaria que a suposição inicial estava errada e o quinto postulado estaria então provado.
- Mas após construir essa nova geometria os matemáticos não encontraram contradições. Mais ainda, eles descobriram que tinham uma nova e elegante geometria com várias características interessantes e únicas.
- Por exemplo, nessa nova geometria a soma dos ângulos internos de um triângulo era menor do que 180° e de fato dependia das dimensões lineares do triângulo.

Geometria Não-Euclidiana

Não deixe de ler sobre essas outras geometrias em [3]!

Veja os vídeos sobre:

- UM EXERCÍCIO MENTAL | Ledo Vaccaro
- O que é GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA? - História da Geometria

Trabalho 04/07 - Parte 1

Exercícios

1. Demonstre o seguinte teorema:

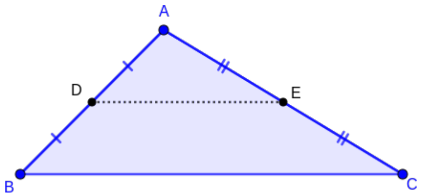
   Duas retas paralelas distintas estão contidas em um único plano.

2. Como o 5° postulado de Euclides pode ser usado para demonstrar o Teorema 2?
3. Prove o seguinte corolário do Teorema 4:

   Em todo triângulo, a medida de qualquer ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes.

Exercícios

4. Demonstre o seguinte corolário do Teorema 6:



No triângulo anterior, tem-se $DE = \dfrac{BC}{2}$.

Referencias I

Geraldo Ávila.
Legendre e o postulado das paralelas.
Revista da Olimpíada, 6:64–76, 2005.

Manfredo Perdigão do Carmo.
Geometrias não-Euclidianas.
Matemática Universitária, 6:25–48, 1987.

A geometria dos espaços curvos ou geometria não-euclidiana.
ON - Observatório Nacional.