GEOMETRIA PLANA

Aula 01

Ponto, reta e plano

Karla Lima

Sumário

Apresentação do curso

Avaliações

- T - Trabalhos semanais escritos e orais.
- P1 – 18/07/2023
- P2 – 29/08/2023
- PS – 05/08/2023
- EF – 12/09/2023

Fórmula de Avaliação

$$M = 0,4 \cdot P1 + 0,4 \cdot P2 + 0,2 \cdot T$$

Bibliografia

- Livro texto: REZENDE, Eliane Quelho Frota. Geometria euclidiana plana e construções geométricas. 2. ed., 6. reimpr Campinas, SP: Ed. Unicamp, 2016. 260p, il, 28cm.

Introdução

Visão Geral

- A geometria estuda as propriedades das figuras usadas na medição de comprimentos, áreas e volumes.
- Essas propriedades são obtidas através de uma sequência lógica de raciocínios (que faz com que a Geometria seja uma excelente oportunidade para o desenvolvimento do pensamento lógico de qualquer pessoa!)
- Aprendendo a raciocinar com lógica, a argumentar e a justificar nossas afirmações, podemos conduzir melhor nossas vidas.

Início

- Teve seu início muito antes de Cristo.
- De forma empírica, foi especialmente desenvolvida pelos egípcios que a utilizaram para medir a terra nos trabalhos de irrigação.
- Mas coube aos gregos a formulação de uma cadeia lógica e rigorosa da Geometria.
- Euclides (330 - 275 A.C.) foi o primeiro matemático a introduzir uma estrutura estritamente lógica na Geometria, sintetizando trabalhos de vários séculos em sua famosa obra de 13 volumes: **Elementos**.

Conceitos Primitivos

O ponto inicial: ponto, reta e plano

- Pode parecer possível definir todos os entes da Geometria, mas percebam que para definir um termo (por exemplo, paralelogramos) empregamos outros termo (por exemplo, quadriláteros).
- Por isso, teremos que aceitar alguns termos sem defini-los. São eles: o **ponto**, a **reta** e o **plano**.

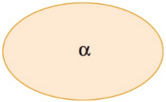
Noção exata e Notações

Mesmo sem defini-los, temos a noção exata desses entes:

- Um ponto pode ser representado pela marca produzida pela ponta fina de um lápis quando pressionada sobre uma folha de papel
  - Usaremos letras maiúsculas como *A*, *B*, *C*, . . ., para denotar os pontos: 

- Parte de uma reta pode ser desenhada com a ajuda de uma régua, com duas setas nas suas pontas.
  - Usaremos letras minúsculas como *a*, *b*, *c*, . . ., para denotar as retas: 

- Um plano pode ser visto como a superfície de uma parede que se estende indefinidamente em todas as direções.



  - Usaremos letras gregas como α, β, γ, . . ., para denotar os planos:

Primeiras Propriedades

Postulados

- Nem tudo na matemática pode ser provado!
- Isso se deve ao fato de que, quando demonstramos uma proposição, nos apoiamos em alguma proposição anteriormente provada.
- Assim, em algum momento, teremos que aceitar algumas afirmações sem demonstrá-las.
- Essas afirmações são denominadas **postulados**.
- As proposições que provarmos serão chamadas **teoremas**.

Pontos Colineares

Definição 1

*Diz-se que os pontos de um conjunto estão **alinhados** ou são **colineares**, se existe uma reta que os contém.*

Os pontos A, B e C são colineares.

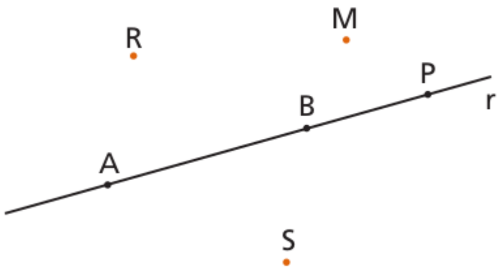
Os pontos R, S e T não são colineares.

Postulados de Incidência

- **Postulado 1:** Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.
- **Postulado 2:** Em qualquer reta estão no mínimo dois pontos distintos.
- **Postulado 3:** Existem pelo menos três pontos distintos não colineares (que não estão todos numa mesma reta).

Postulado da Existência

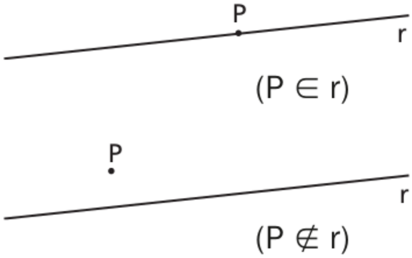
a) Numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos.
b) Num plano há infinitos pontos.



Posição de ponto e reta

Dado um ponto P e uma reta r, de duas uma:

- ou o ponto P está na reta ($P \in r$);
- ou o ponto P não está na reta ($P \notin r$)



Postulado da Determinação

Postulado da Determinação: Reta

Dados dois pontos distintos quaisquer, existe uma única reta que os contém.

Assim, diremos que *dois pontos distintos* determinam uma reta.

Neste caso, designaremos também a reta por $\overleftrightarrow{AB}$.

Consequência do Postulado da Determinação: Reta

Quando duas retas, uma reta e um plano ou dois planos têm um ponto em comum, diz-se que eles se **interceptam**.

Teorema 1

Se duas retas distintas se interceptam, então a interseção contém um ponto apenas.

- **Hipótese**[1]**:** as retas distintas r e s se interceptam.
- **Tese**[2]**:** o ponto de interseção é único.

[1] Hipótese é um conjunto de condições que se supõe verdadeiras.
[2] Tese é a verdade que se pretende demonstrar.

Teorema 1: Demonstração

Vamos usar a prova por contradição, supondo que a negativa da tese seja verdadeira. Ou seja, existe mais de um ponto de interseção.

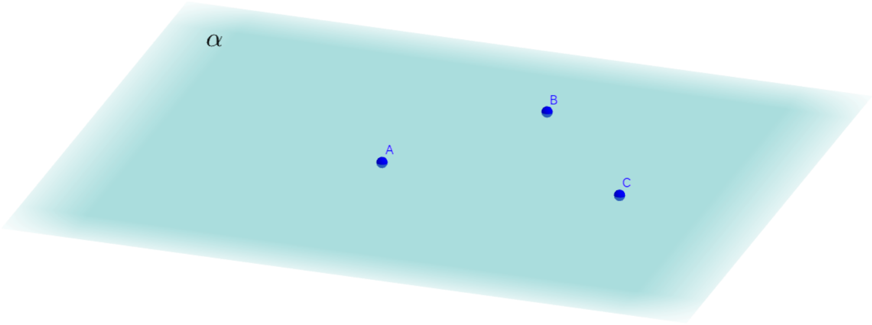
Sejam P e Q dois pontos em comum das retas r e s. Então, pelo Postulado da Determinação para retas, existe uma única reta que passa pelos pontos P e Q. Como $P, Q \in r$ e $P, Q \in s$, devemos ter $r = s$, contrariando a hipótese de que as duas retas são distintas.

Portanto, não pode haver mais de um ponto de interseção entre duas retas distintas, como queríamos.

$\blacksquare$

Postulado da Determinação: Plano

Postulado da Determinação: Plano
Dados três pontos quaisquer não colineares, existe um único plano que os contém.



Três pontos não colineares determinam um plano!

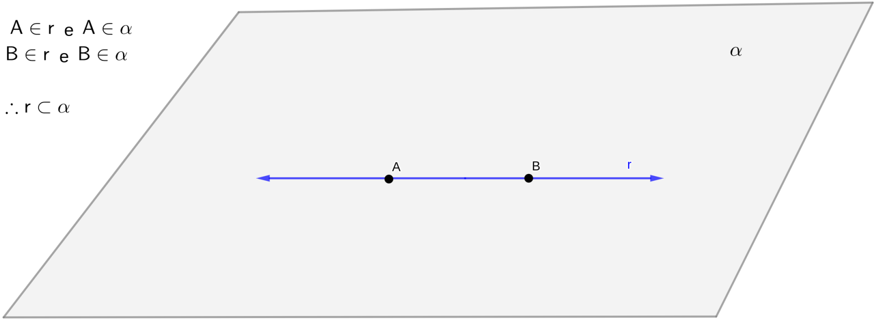
Postulado da Inclusão

Postulado da Inclusão

Se dois pontos de uma reta pertencem a um plano, então esta reta está contida neste plano.

$A \in r$ e $A \in \alpha$
$B \in r$ e $B \in \alpha$

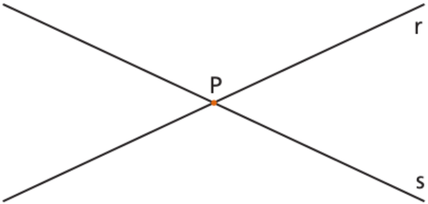
$\therefore r \subset \alpha$



Retas Concorrentes

Definição 2

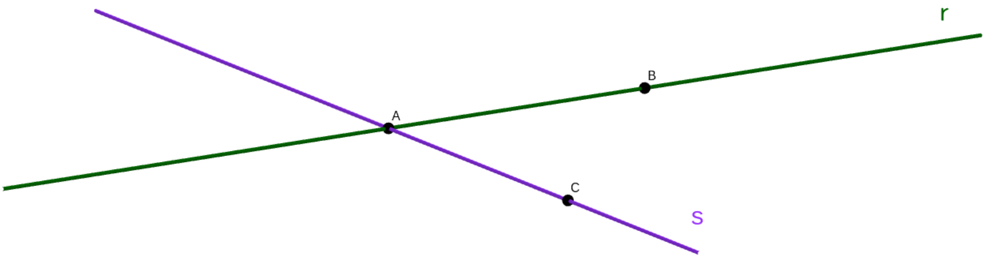
Quando duas retas têm apenas um ponto em comum, elas são ditas ***concorrentes****.*



Consequência dos Postulados de Determinação e Inclusão

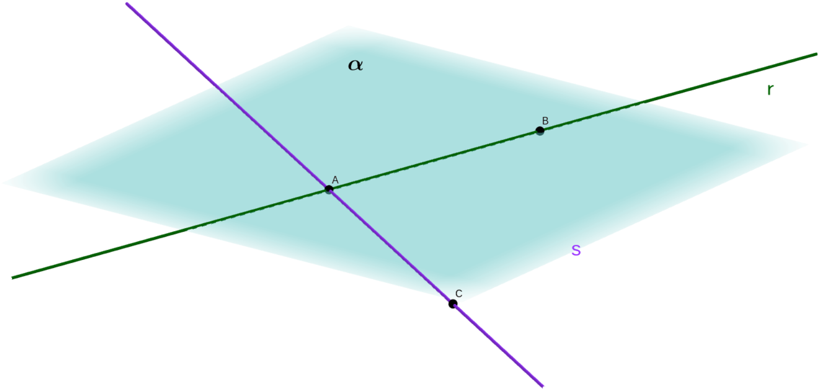
Teorema 2

Se duas retas são concorrentes, então existe um único plano que as contém.



Demonstração do Teorema 2

- **Hipótese:** As retas *r* e *s* são concorrentes .
- **Tese:** Existe um único plano que as contém.



Demonstração do Teorema 4

Sejam A o único ponto de interseção entre as retas. Sejam B e C dois pontos distintos de A, com $B \in r$ e $C \in s$. Com isso, obtemos 3 pontos não colineares[3] que, pelo Postulado da Determinação, determinam um único plano α. Como A e B pertencem à reta r e ao plano α, o Postulado da Inclusão garante que r está contida no plano α ($r \subset \alpha$). Analogamente, B e C pertencem à reta s e ao plano α, de onde concluímos que s está contida no plano α ($s \subset \alpha$).

Portanto, o único plano determinado por A, B e C, contém r e s. Não há outro plano que satisfaça a condição de conter r e s, uma vez que esse plano também deve conter os pontos A, B e C, não podendo ser distinto de α.

$\blacksquare$

[3] Para exercitar: o que garante essa afirmação?

Trabalho

Responda a primeira parte do questionário: Exercicios_Aula_01.pdf.

Segmento de Reta

Segmentos

Definição 3

Dados dois pontos quaisquer A e B em uma reta r, chama-se ***segmento de reta*** *de extremos A e B ao conjunto formado pelos pontos A e B, e por todos todos os pontos de r entre A e B.*

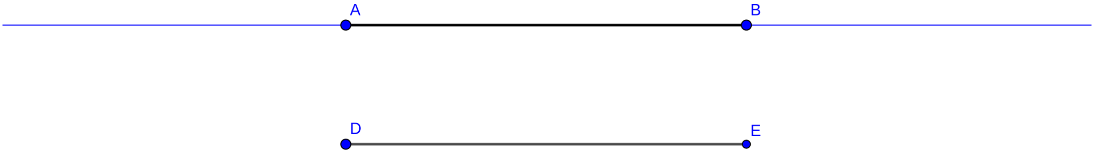
Denotaremos por $\overline{AB}$ o segmento de extremos A e B.

Segmentos

Fixando-se uma unidade de comprimento μ, podemos associar a cada segmento de reta um número real positivo denominado o seu **comprimento** ou a sua **medida**.

Definição 4

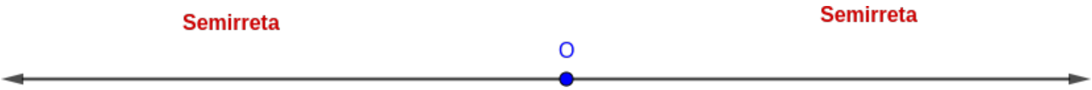
*Dois segmentos são ditos **congruentes** se têm a mesma medida.*



Semirretas

Definição 5

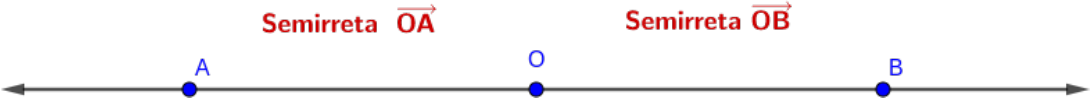
Um ponto O de uma reta r divide-a em duas partes, cada uma delas denominada ***semirreta****.*



O ponto *O* é denominado a **origem** dessas semirretas e as mesmas são denominadas semirretas **opostas**.

Semirretas

Denotaremos as semirretas com letras minúsculas (como as retas) ou através de dois dos seu pontos, sendo um deles a origem.

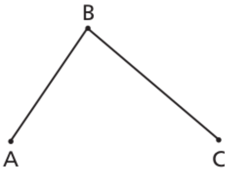


Acima, temos as semirretas opostas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

Segmentos Consecutivos

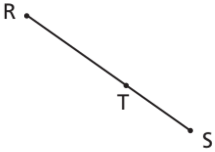
Definição 6

Dois segmentos de reta são consecutivos se, e somente se, uma extremidade de um deles é também extremidade do outro (uma extremidade de um coincide com uma extremidade do outro).



$\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são consecutivos

$\overline{MN}$ e $\overline{NP}$ são consecutivos

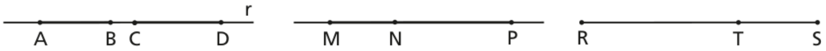


$\overline{RS}$ e $\overline{ST}$ são consecutivos

Segmentos Colineares

Definição 7

Dois segmentos de reta são colineares se, e somente se, estão numa mesma reta.



$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são colineares (não são consecutivos)

$\overline{MN}$ e $\overline{NP}$ são colineares (e consecutivos)

$\overline{RS}$ e $\overline{ST}$ são colineares (e consecutivos)

Ponto Médio de um Segmento

Definição 8

Um ponto M é ponto médio do segmento AB se, e somente se, M está entre A e B, com $\overrightarrow{AM} \equiv \overrightarrow{MB}$.

$$M \in \overline{AB} \quad \text{e} \quad \overline{MA} \equiv \overline{MB}$$

Trabalho

Responda a segunda parte do questionário: Exercicios_Aula_01.pdf.