P2 - Engenharia de Computação

01

a) $y'' + 16y = 0$, com $y(0) = 3$ e $y'(0) = \frac{2}{3}$

$y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \operatorname{sen}(4x)$

$\Rightarrow y'(x) = -4c_1 \operatorname{sen}(4x) + 4c_2 \cos(4x)$

Logo,

$$3 = y(0) = c_1 \Rightarrow \boxed{c_1 = 3}$$

$$\frac{2}{3} = y'(0) = 4c_2 \Rightarrow \boxed{c_2 = \frac{1}{6}}.$$

Solução : $y(x) = 3\cos(4x) + \frac{1}{6}\operatorname{sen}(4x)$.

b) $4y'' + 12y' + 9y = 0$, com $y(0) = -2$ e $y(1) = e^{-3/2}$.

$y = c_1 e^{-\frac{3}{2}x} + c_2 x e^{-3/2 x}$

Logo,

$$-2 = y(0) = c_1 \Rightarrow c_1 = -2$$

$$e^{-3/2} = y(1) = c_1 e^{-3/2} + c_2 e^{-3/2} \Rightarrow \cancel{e^{-3/2}} = \cancel{e^{-3/2}}(-2 + c_2)$$

$$\Rightarrow c_2 - 2 = 1 \Rightarrow c_2 = 3$$

Solução : $y = -2e^{-3/2 x} + 3x e^{-3/2 x}$.

02

a) $\left\{ \dfrac{n^3}{n+1} \right\}$

$a_1 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

$a_3 = \dfrac{3^3}{3+1} = \dfrac{27}{4}$

$a_2 = \dfrac{2^3}{2+1} = \dfrac{8}{3}$

$a_4 = \dfrac{4^3}{4+1} = \dfrac{64}{5}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^3}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\to\infty}{n^2}}{\underset{1 + 0 = 1}{1 + \frac{1}{n}}} = \infty \text{ (A seq. diverge)}$$

b) $\left\{ (-1)^n e^{2/n} \right\}$

$a_1 = (-1)^1 e^{2/1} = -e^2$

$a_3 = (-1)^3 e^{2/3} = -e^{2/3}$

$a_2 = (-1)^2 e^{2/2} = e$

$a_4 = (-1)^4 e^{2/4} = e^{1/2}$

Como

$$\lim_{n\to\infty} \left| (-1)^n e^{2/n} \right| = \lim_{n\to\infty} e^{\overset{\to 0}{2/n}} = e^0 = 1 \neq 0,$$

a sequência alternada diverge.

03

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$

Como $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ é : contínua em $x \geq 1$, decrescente em $x \geq 1$, positiva em $x \geq 1$, podemos usar o teste da integral.

Logo,

$$\int_1^t \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx = \int_1^t e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}\, dx$$

$u = \frac{1}{x} \to du = -\frac{1}{x^2}dx$

$u(1) = 1$

$u(t) = \frac{1}{t}$

$$= -\int_1^{1/t} e^u\, du = -e^u \Big|_1^{1/t} = -(e^{1/t} - e^1)$$

$$= e - e^{1/t},$$

de onde segue que

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{1/x}}{x^2}\, dx = \lim_{t\to\infty} (\underset{e}{e} - e^{\overset{\to 0}{1/t}}) = e - e^0 = e - 1.$$

Como a integral converge, também converge a série dada.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$

Pelo teste da raiz,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{2^n}{n^n} \right|} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{2}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0 < 1$$

de onde segue que a série converge.

04 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{2^n}$

Vamos usar o teste da razão:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)^2 |x|^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{n^2 |x^n|}{2^n}} = \frac{(n+1)^2 \cancel{|x|^n}\cdot|x|}{\cancel{2^n}\cdot 2} \cdot \frac{\cancel{2^n}}{n^2 \cancel{|x^n|}}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{|x|}{2} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \frac{|x|}{2}.$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{1+\tfrac{1}{n}}_{1+0=1}\right)^2 \frac{|x|}{2} = 1^2 \cdot \frac{|x|}{2},$$

e a série será convergente se

$$\frac{|x|}{2} < 1 \Rightarrow |x| < 2.$$

O teste é inconclusivo em $x=-2$ e $x=2$, onde o limite é igual a 1.

$x=-2$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 (-1)^n \cancel{2^n}}{\cancel{2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n} n^2 = \sum_{n=1} n^2.$

Pelo teste da divergência, como $n^2 \to \infty$, a série diverge.

$x=2$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 \cancel{2^n}}{\cancel{2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2.$

Esta é uma série alternada, com $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty \neq 0$. Logo, diverge.

05 $f(x) = e^{x^3}$

Temos que

$$T_3(x) = \sum_{i=0}^{3} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} (x-0)^i$$

$$= f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 .$$

Como

$$f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(0) = 3x^2 e^{x^3} \Big|_{x=0} = 0$$

$$f''(0) = 6x e^{x^3} + (3x^2)^2 e^{x^3} \Big|_{x=0} = 0$$

$$f'''(0) = 6 e^{x^3} + (6x) \cdot 3x^2 \cdot e^{x^3} + 2(3x^2) \cdot 6x \cdot e^{x^3} + (3x^2)^3 e^{x^3} \Big|_{x=0}$$

$$= 6,$$

concluímos que

$$T_3(x) = 1 + \frac{6}{3!} x^3 = 1 + x^3 .$$

Para calcular o erro cometido, fazemos

$$| f(0.1) - T_3(0.1) | = | e^{0.1^3} - (1 + (0.1)^3) | \approx 5 \times 10^{-7} .$$