UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Prof^{a}. Karla Lima

Cálculo I 15 de Agosto de 2017

Aplicações de Integral

Use somente a teoria de integrais para resolver os exercícios abaixo:

(1) Uma partícula move-se ao longo do eixo s. Use as informações dadas para encontrar a função posição da partícula.

a) $v(t) = 3t^2 - 2t$; $s(0) = 1$.

b) $a(t) = 3\text{sen}(t)$; $v(0) = 3$ e $s(0) = 3$.

(2) Uma partícula move-se ao longo de uma reta de tal forma que sua velocidade no instante t é $v(t) = t^2 - t - 6$ (medida em metros por segundo).

a) Ache o deslocamento da partícula durante o período de tempo $1 \leq t \leq 4$.

b) Ache a distância percorrida durante esse período de tempo.

(3) Quando uma partícula está localizada a uma distância de x metros da origem, uma força de $\cos(\pi x/3)$ newtons atua sobre ela. Quanto trabalho é feito ao mover a partícula de $x = 1$ até $x = 2$?

Lei de Hooke: A força necessária para manter uma mola esticada x unidades além do seu comprimento natural é proporcional a x: $F(x) = kx$. Por exemplo, se o comprimento natural de uma mola é de $0,1m$ e $F(x) = 800x$, então a força necessária para segurar a mola esticada de seu comprimento natural para um comprimento de $0,15m$ é de

$$F(0,05) = 800,05 = 40N.$$

Lembre-se x = comprimento final - comprimento natural $= 0,15 - 0,1$.

(4) Suponha que $2J$ de trabalho (W) sejam necessário para esticar uma mola de seu comprimento natural de $0,3m$ para $0,42m$.

a) Usando a informação acima e que $W = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b kx dx$, encontre k.
b) Quanto trabalho é necessário para esticar a mola de $0,35m$ para $0,4m$?
c) Quão longe de seu comprimento natural uma força de $30N$ manterá a mola esticada?

Gabarito:

(1) a) $s(t) = t^3 - t^2 + 1$.
b) $s(t) = -3\text{sen}(t) + 6t + 3$.

(2) a) $4,5m$ para a esquerda.

b) $\dfrac{61}{6}m$.

(3) 0.

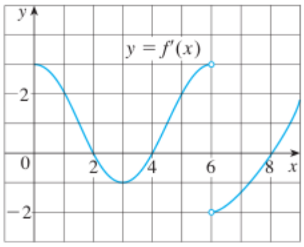
(4) a) $k = \dfrac{2500}{9}$.

b) $W = \dfrac{3,125}{3} J$.

c) $x = 0,108m$.

Exercícios de Revisão de Máximos e Mínimos

(1) O gráfico da derivada f' de uma função contínua f está ilustrado.



a) Em que intervalos f está crescendo ou decrescendo?
b) Em que valores de x a função f tem um mínimo ou máximo local?
c) Em que intervalos f é côncava para cima ou para baixo?
d) Diga as coordenadas x dos pontos de inflexão.

(2) Encontre os intervalos onde as funções são crescentes e decrescentes. Além disso, encontre e classifique seus pontos críticos.

a) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$, com $x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x^2 - 16}$, com $x \in \mathbb{R}/\{-4, 4\}$.

(3) Encontre os valores máximo e mínimo absolutos de $f(x) = x + \text{sen}x$ no intervalo $[0, 4\pi]$.

(4) Uma companhia de alta tecnologia compra um novo sistema computacional cujo valor inicial é V. O sistema depreciará a uma taxa $f = f(t)$ e acumulará custos de manutenção a uma taxa $g = g(t)$, onde t é o tempo medido em meses. A companhia quer determinar o tempo ótimo para substituir o sistema.

Seja $C(t) = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t [f(s) + g(s)]ds$.

a) Explique o que C representa.
b) Suponha que

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{V}{15} - \dfrac{V}{450}t, & \text{se} \quad 0 < t \leq 30 \\ 0, & \text{se} \quad t > 30 \end{cases} \qquad \text{e} \quad g(t) \quad = \quad \frac{Vt^2}{12900} \quad t > 0$$

Calcule o mínimo absoluto de C em $[0, 30]$. Qual o tempo ótimo para substituir o sistema?

Gabarito:

(1) a) Crescente: $(0, 2) \cup (4, 6) \cup (8, \infty)$; Decrescente: $(2, 4) \cup (6, 8)$.
b) Mínimo local em $x = 4$ e $x = 8$. Máximo local em $x = 2$.
c) Concavidade para cima: $(3, 6) \cup (6, 8)$; Concavidade para baixo: $(0, 3)$.
d) $x = 3$.

(2) a) Crescente em $(-\infty, 1)$ e decrescente em $(1, \infty)$. Possui máximo local em $x = 1$.
b) Crescente em $(-\infty, -4) \cup (-4, 0)$ e decrescente em $(0, 4) \cup (4, \infty)$. Possui máximo local em $x = 0$.

(3) Máximo global em $x = 4\pi$ e mínimo local em $x = 0$.

(4) a) A função C pode ser pensada como a média do gasto com manutenção e com a perda de valor do sistema computacional em t meses.

b) O mínimo é em $t = 21,5$. A função decresce até se passar 21 meses e meio; a partir daí a função C começa a crescer, o que não é interessante para a companhia que começa a perder mais dinheiro. Esse é o tempo ideal da troca.