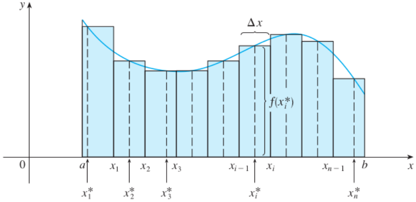
A integral na reta

Se $f(x)$ é uma função não negativa:

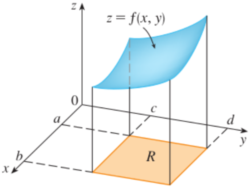


- Aproximamos o valor da área abaixo do gráfico, pela soma das áreas dos retângulos acima.
- Se existe, a integral é definida pelo limite

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^*)\Delta x$$

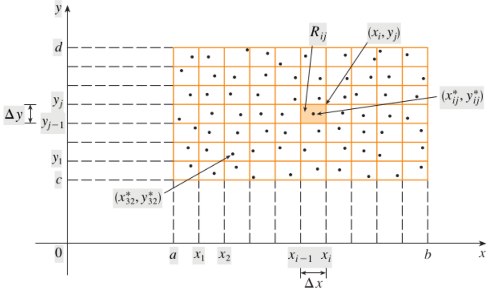
A integral no plano

Analogamente, se $f(x, y)$ é uma função não negativa:



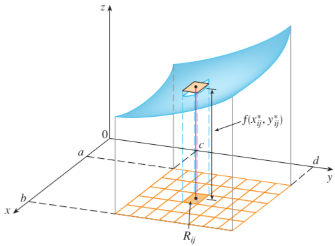
- Queremos aproximar o valor do volume abaixo do gráfico, pela soma dos volumes de alguns paralelepípedos, cujo volume é de fácil cálculo.

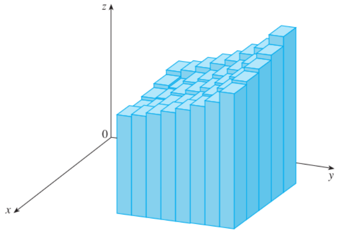
Partição no plano



- Se o domínio da função é o retângulo $A = [a, b] \times [c, d]$, dividiremos este em retângulos menores.

Volume





- Cada paralelepípedo tem volume:

$$\text{Área da base x Altura} = \Delta x \Delta y \times f(x_i, y_j).$$

- A soma dos volumes dos paralelepípedos vai ser dada por

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j) \Delta x \Delta y.$$

Definição Formal

Se o limite existir, a integral da função $f(x, y)$ sobre o retângulo $[a, b] \times [c, d]$ é dada por

$$\int\int_A f(x, y)dA = \lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j)\Delta x \Delta y$$

Exemplo

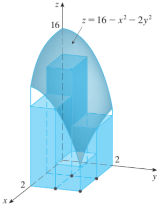
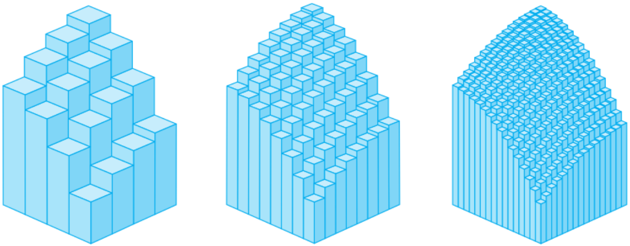


FIGURE 7

- Vamos ver algumas aproximações para o valor da integral da função acima, sobre o intervalo $[0, 2] \times [0, 2]$.
- Para $n = 2$ e $m = 2$, temos

$$
\begin{aligned}
V &\approx \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} f(x_i, y_j)\, \Delta A \\
&= f(1, 1)\, \Delta A + f(1, 2)\, \Delta A + f(2, 1)\, \Delta A + f(2, 2)\, \Delta A \\
&= 13(1) + 7(1) + 10(1) + 4(1) = 34
\end{aligned}
$$

Outras partições



(a) $m = n = 4$, $V \approx 41.5$ (b) $m = n = 8$, $V \approx 44.875$ (c) $m = n = 16$, $V \approx 46.46875$

- A medida que aumentamos o número de retângulos do domínio, ou seja, aumentar m e n, mais preciso fica o valor da aproximação.

Como resolver

- Calcular integrais usando a definição não é nada fácil.
- Para isto, usamos as propriedades e regras de funções conhecidas.
- Pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int f(x)dx = F(x)$$

  onde $F'(x) = f(x)$.
- Ou seja, para integrar uma função f devemos pensar: "Qual é a função cuja derivada é $f(x)$?"
- Por exemplo, sabemos que a integral de $f(x) = x^2$ é a função $F(x) = \frac{x^3}{3}$, pois $F'(x) = x^2$.

Como resolver

- Resolver uma integral dupla é semelhante à resolver uma derivada parcial; consideramos uma das variáveis como constante e integramos na outra variável.
- Temos que

$$\int\int_A f(x,y)dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$$

- Vamos resolver a integral anterior

$$\int\int_A f(x,y)dA = \int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2)dxdy$$

Resolvendo uma integral

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2)dxdy &= \int_0^2 \left[\int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2)dx\right] dy \\
&= \int_0^2 \left[\left(16x - \frac{x^3}{3} - 2y^2x\right)\right]_0^2 dy \\
&= \int_0^2 \left(\frac{88}{3} - 4y^2\right) dy \\
&= \left[\frac{88y}{3} - \frac{4y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{144}{3} = 48.
\end{aligned}
$$