GEOMETRIA PLANA

Aula 09

Áreas de Figuras Planas: Triângulos e Quadriláteros

Karla Lima

Sumário

Áreas

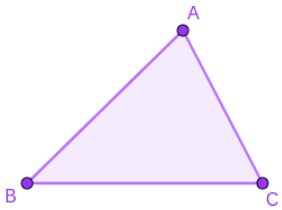
Ideia Intuitiva

- Vem da ideia de medir a “ocupação” de uma região do plano por um contorno.
- Usaremos a área de um quadrado, dada axiomaticamente, para determinar algumas áreas planas, de contorno poligonal.

Região Poligonal

Definição 1

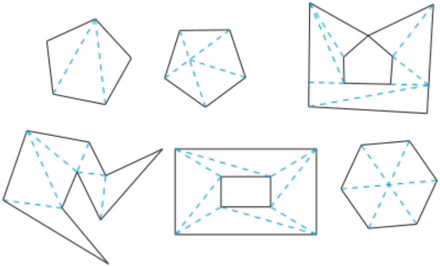
*Uma região **triangular** é a figura plana formada por um triângulo e seus pontos interiores.*



Região Poligonal

Definição 2

*Uma região **poligonal** é a figura plana formada pela união de um número finito de regiões triangulares tais que se duas delas se interceptam, então a interseção ou é um ponto ou é um segmento.*



Axiomas sobre Áreas

Axioma 1

A cada região poligonal $\mathcal{R}$ está associado um único número real positivo, denotado por $A(\mathcal{R})$.

O número $A(\mathcal{R})$ é a **área** de $\mathcal{R}$.

Axiomas sobre Áreas

Axioma 2

Se dois triângulos são congruentes, as regiões triangulares determinadas por eles têm a mesma área.

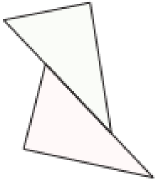
Isso garante que a área da região poligonal não depende da sua posição no plano, mas apenas da sua forma e dos triângulos que a compõem.

Axiomas sobre Áreas

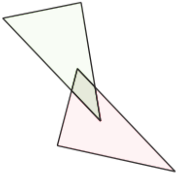
Axioma 3

Se uma região $\mathcal{R}$ é a união de duas regiões $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$, tais que $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ se interceptam em no máximo um número finito de segmentos e pontos, então

$$A(\mathcal{R}) = A(\mathcal{R}_1) + A(\mathcal{R}_2)$$



(a) É a soma de cada área triangular



(b) Não é a soma de cada área triangular

Axiomas sobre Áreas

Axioma 4

A área de um quadrado é o produto do comprimento de seus lados.

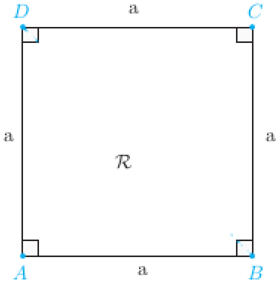


Figura 2: A área de um quadrado com lados de comprimento a é $A(\square ABCD) = a^2$

A área de um retângulo

Áreas de Retângulos

Teorema 1

A área de um retângulo é o produto das medidas de seus lados não paralelos.

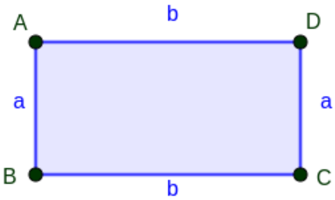
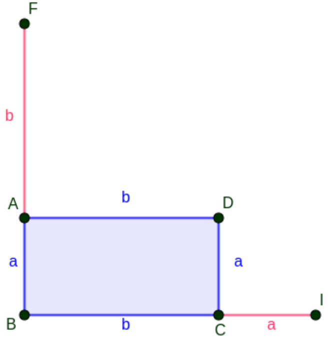


Figura 3: A área de um retângulo $\mathcal{R}$ com lados de comprimento a e b é $A(\mathcal{R}) = ab$

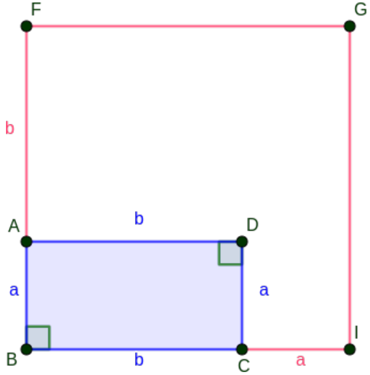
Áreas de Retângulos

- A partir do retângulo dado, do lado $\overline{AB}$ prolongue o segmento num comprimento b. Do lado $\overline{BC}$, prolongue o segmento num comprimento a.



Áreas de Retângulos

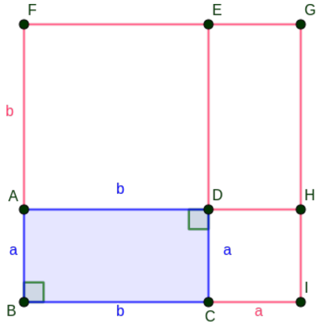
- Traçando em F uma paralela à $\overline{BC}$ e traçando em I uma paralela à $\overline{AB}$, obtemos um quadrado $FGIB$, de lados com comprimento $a + b$.



- Sua área é dada por $(a + b)^2$.

Áreas de Retângulos

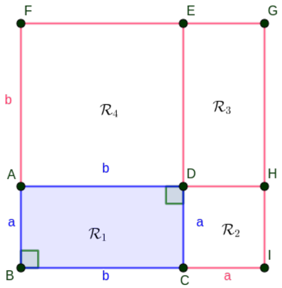
- Traçando paralelas aos lados desse quadrado em *D* subdividimos esse quadrado em quatro regiões poligonais, que se interceptam em no máximo um segmento e/ou um ponto.



Áreas de Retângulos

Com isso, a área de $\square FGIB$ pode ser determinada pela soma das áreas $A(\mathcal{R}_1)$, $A(\mathcal{R}_2)$, $A(\mathcal{R}_3)$ e $A(\mathcal{R}_4)$, onde:

- $\mathcal{R}_1$ é o retângulo original $ABCD$;
- $\mathcal{R}_2$ é o quadrado $CDHI$;
- $\mathcal{R}_3$ é o retângulo $DEGH$;
- $\mathcal{R}_4$ é o quadrado $ADEF$.

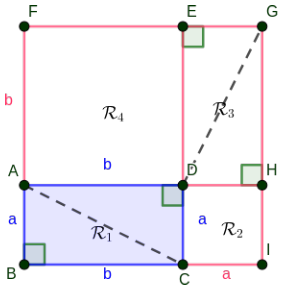


Área de Retângulos

- Já sabemos que $A(\mathcal{R}_2) = a^2$ e $A(\mathcal{R}_4) = b^2$.

$A(\mathcal{R}_2) = A(\mathcal{R}_3)$, pois

- $A(\mathcal{R}_1) = A(\triangle ADC) + A(\triangle ABC)$;
- $A(\mathcal{R}_3) = A(\triangle EDG) + A(\triangle HGD)$;
- Os 4 triângulos são congruentes (pq?).
- Pelos Axioma 2 e 3, os retângulos possuem a mesma área.



Área de Retângulos

- Com isso,

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2(A(\mathcal{R}_1)),$$

de onde segue que

$$A(\mathcal{R}_1) = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - a^2 - b^2}{2} = ab.$$

Área de Triângulos Retângulos

Corolário 1

A área de um triângulo retângulo é a metade do produto das medidas dos seus catetos.

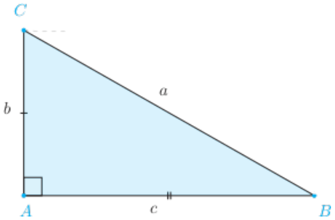
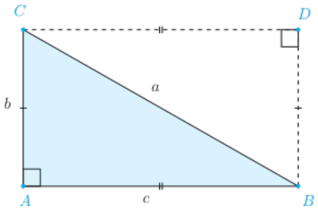


Figura 4: $A(\triangle ABC) = \frac{bc}{2}$

Demonstração do Corolário 1

- A partir do triângulo dado, construa um retângulo de lados b e c.



- Os triângulos ABC e DCB são congruentes (pq?), logo possuem mesma área.
- Como a área do retângulo é igual à soma das áreas dos dois triângulos, obtemos

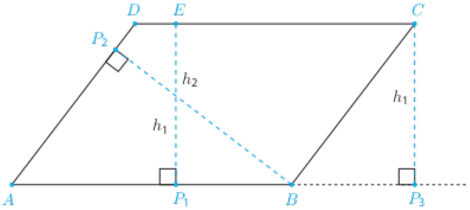
$$bc = A(\triangle ABC) + A(\triangle DCB) = 2A(\triangle ABC)$$

$$\Rightarrow A(\triangle ABC) = \frac{bc}{2}.$$

A área de paralelogramos

Áreas de Paralelogramos

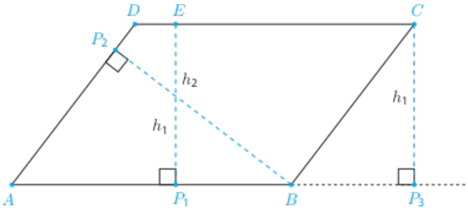
- Antes de calcular a área de um paralelogramo, vamos estabelecer alguma nomenclatura.



- Costumamos designar um de seus lados como uma base.
- Fixada a base, dizemos que a distância entre a reta suporte deste lado e a reta suporte do seu lado oposto é a **altura** do paralelogramo relativa a esta base.

Áreas de Paralelogramos

- Na figura abaixo:



- h_1 é a altura relativa à base $\overline{AB}$;
- h_2 é a altura relativa à base $\overline{AD}$.

Áreas de Paralelogramos

Teorema 2

A área de um paralelogramo é o produto de qualquer uma de suas bases pela altura correspondente.

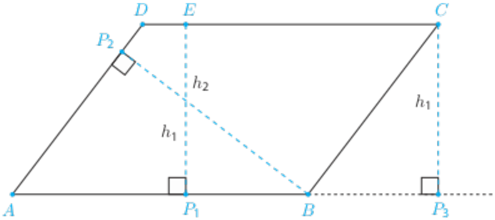


Figura 5: A área pode ser encontrada através das fórmulas $AB * h_1$ ou $AD * h_2$

Demonstração: Teorema 4

- Escolha uma base e uma altura.
- A partir delas, construa um retângulo, como a seguir.

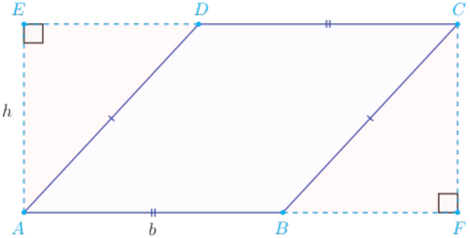


Figura 6: Base escolhida: $\overline{AB}$. Os lados $\overline{AE}$ e $\overline{CF}$ têm comprimento h

- Queremos provar que $A(ABCD) = bh$.

Demonstração: Teorema 4

- A área do retângulo *AFCE* é dada por

$$A(AEFC) = (b + \overline{BF})h = bh + \overline{BF} * h,$$

com $b = AB$.

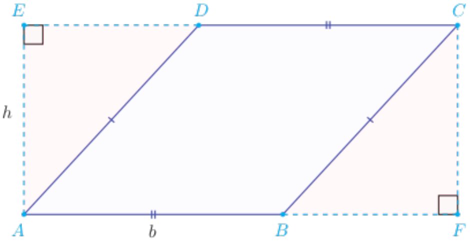
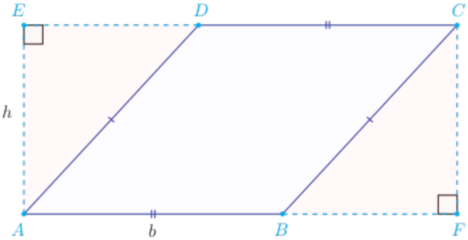


Figura 7: Base escolhida: $\overline{AB}$. Os lados $\overline{AE}$ e $\overline{CF}$ têm comprimento h

Demonstração: Teorema 4

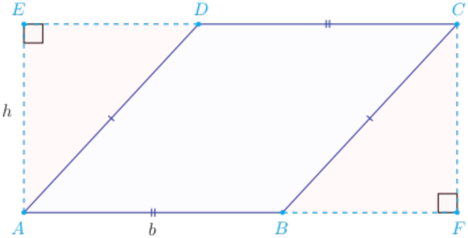
- Além disso, tal retângulo é composto por 3 regiões poligonais que se interceptam em no máximo um segmento.



- Então $A(AFCE) = A(\triangle ADE) + A(ABCD) + A(\triangle BFC)$.

Demonstração: Teorema 4

- Os triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle BFC$ são congruentes (pq?).



- Com isso, $A(\triangle ADE) = A(\triangle BFC) = \frac{BF*h}{2}$.

Demonstração: Teorema 4

- Portanto,

$$\begin{aligned} bh + \overline{BF} * h = A(AFCE) &= A(\triangle ADE) + A(ABCD) + A(\triangle BFC) \\ &= \frac{\overline{BF} * h}{2} + A(ABCD) + \frac{\overline{BF} * h}{2} \\ &= A(ABCD) + \overline{BF} * h, \end{aligned}$$

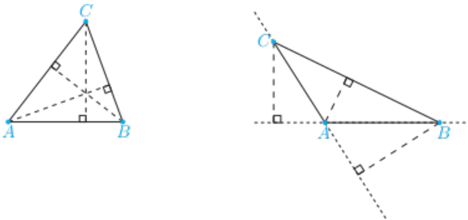
de onde segue que

$$\begin{aligned} A(ABCD) &= bh + \overline{BF} * h - \overline{BF} * h \\ &= bh \\ &= \overline{BF} * h. \end{aligned}$$

A área de triângulos

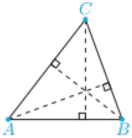
Áreas de Paralelogramos

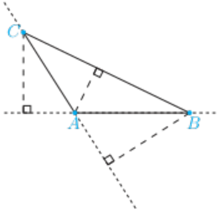
- Antes de calcular a área de um triângulo qualquer, vamos estabelecer alguma nomenclatura.
- Novamente, costumamos designar um de seus lados como uma base.
- Fixada a base, dizemos que a distância entre esta e o vértice oposto é a **altura** do triângulo relativa a esta base.



Áreas de Triângulos

- Se todos os ângulos de um triângulo são agudos, então todas as alturas são interiores;
- se um dos ângulos é obtuso, então a altura correspondente a este vértice é interior, e as outras duas são exteriores;
- se o triângulo é retângulo, então duas altura coincidem com os catetos, e a altura correspondente à hipotenusa é interior.





Áreas de Triângulos

Teorema 3

A área de um triângulo é a metade do produto da medida de qualquer um de seus lados escolhido como base pela altura correspondente.

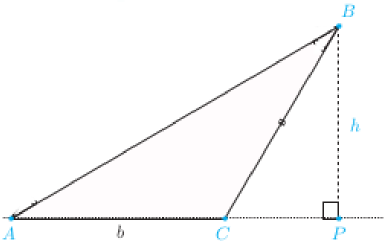
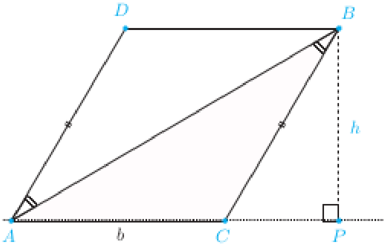


Figura 8: A área do $\triangle ABC$, de lado $\overline{AC} = b$ e altura relativa ao mesmo igual à h, é $A(\triangle ABC) = \frac{bh}{2}$

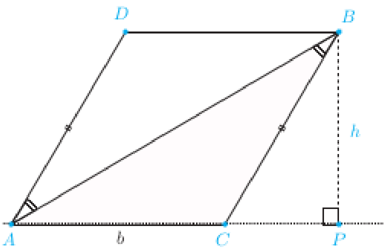
Áreas de Triângulos

A partir da região dada, construímos um paralelogramo com lados paralelos aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$.



- Os triângulos ADB e ABC são congruentes (pq?).
- Assim, $A(\triangle ADB) = A(\triangle ABC)$.

Áreas de Triângulos



- Por outro lado, $A(ACBD) = bh$ e $A(ACBD) = A(\triangle ADB) + A(\triangle ABC)$.
- Portanto,

$$bh = A(\triangle ADB) + A(\triangle ABC) = 2A(\triangle ABC)$$

$$\Rightarrow A(\triangle ABC) = \frac{bh}{2}.$$

O Teorema Fundamental da Proporcionalidade

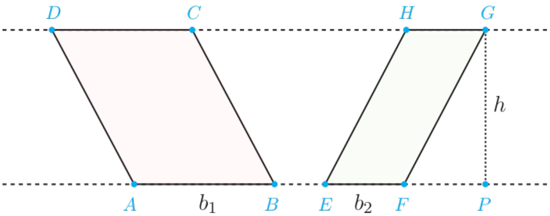
Proposição 1

Proposição 1

As áreas de dois paralelogramos com uma mesma altura são proporcionais às suas bases relativas à esta altura.

Demonstração: Sendo h_1 a altura relativa ao lado $\overline{AB}$ do primeiro paralelogramo e h_2 a altura relativa ao lado $\overline{EF}$ do segundo:

- **Hipótese:** $h_1 = h_2$
- **Tese:** $\dfrac{\mathcal{A}(ABCD)}{\mathcal{A}(EFGH)} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{EF}}$



Demonstração: Proposição 1

- Com efeito,

$$\mathcal{A}(ABCD) = (\overline{AB}) * h \quad \text{e} \quad \mathcal{A}(EFGH) = (\overline{EF}) * h.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{A}(ABCD)}{\mathcal{A}(EFGH)} &= \frac{(\overline{AB}) * h}{(\overline{EF}) * h} \\ &= \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Proposição 2

Proposição 2

Prove que as áreas de dois triângulos com uma mesma altura são proporcionais às bases relativas a esta altura.

Demonstração: Exercício

Formulário Avaliativo

Exercícios

1. Mostre que a área de um trapézio é a metade do produto das somas dos comprimentos das bases pela altura relativa a uma delas.

Exercícios

2. Demonstre o teorema de Pitágoras baseando-se na figura ao lado, isto é, mostre que $a^2 = b^2 + c^2$, expressando a área do quadrado maior de dois modos diferentes: como o produto dos lados e como a soma das áreas dos quatro triângulos e do quadrado menor.