UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Prof$^{\text{a}}$. Karla Lima

Análise I 15 de Julho de 2018

(1) Um número natural **n** é dito um **quadrado perfeito**, se, e somente se, existir um número natural **a** tal que $n = a^2$. Prove que se um quadrado perfeito é par sua raiz quadrada é par e que se um quadrado perfeito é ímpar então sua raiz quadrada é ímpar.

(2) Usando o princípio de indução, mostre que:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(3) Uma caixa contém 3 tipos de bolas (azuis, verdes, amarelas). Qual o número de bolas que devemos retirar da caixa para garantirmos que temos duas bolas da mesma cor?

(4) Seja o conjunto infinito e enumerável $A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots \right\}$. Mostre que:

(a) A está escrito na ordem crescente de seus termos; ou seja

$$a_n = \frac{n}{n+1} < a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(b) A é limitado inferior e superiormente;

(c) 1 é o supremo e $\frac{1}{2}$ é o ínfimo de A.

(5) Seja $(a_n) = \left(\frac{n}{2n+3} \right)$.

(a) Encontre um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0$ tem-se $\left| \frac{n}{2n+3} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{4}$;

(b) Mostre, usando a definição de limite de sequência, que $\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{1}{2}$.

(6) Prove que se (a_n) é uma sequência que converge para zero e (b_n) uma sequência limitada, não necessariamente convergente, então $(a_n b_n)$ converge para zero. Dê um exemplo.

(7) Prove que $a_n = 5n^3 - 4n^2 + 7$ tende ao infinito.