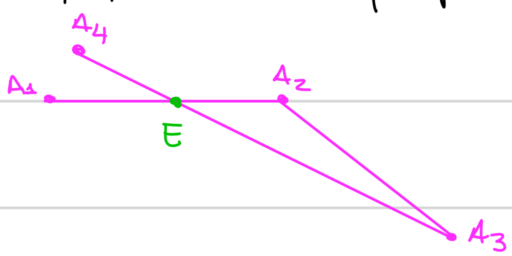
P2 - 29/08/23

01

a) Defina o que é um polígono. Dê um exemplo de linha poligonal que não é um polígono, justificando o porquê de não ser.

Um polígono é uma união de segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}$, onde o último vértice coincide com o primeiro: $A_1 \equiv A_n$. Além disso, dois lados quaisquer da poligonal só se intersep-tam se for nos extremos. Caso contrário, não há interceção.

Por exemplo, a linha poligonal



não é um polígono, pois $A_1 \neq A_4$ e $\overline{A_1A_2} \cap \overline{A_3A_4} = \{E\}$, onde E não é um extremo dos segmentos citados.

b) Quais as principais diferenças entre um losango e um retângulo? Cite pelo menos duas.

No geral, exceto quando temos um retângulo do tipo quadrado, os retângulos possuem lados consecutivos com medidas distintas. Já o losango, possui todos os lados congruentes. Além disso, no losango as diagonais são perpendiculares e bissecam os ângulos do mesmo, enquanto as diagonais de um retângulo só possuem a propriedade especial de serem congruentes.

c) Por que um trapézio não é um paralelogramo?

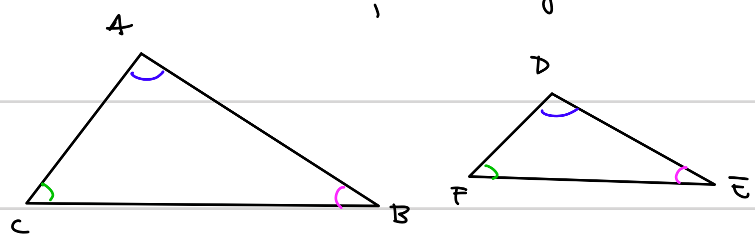
Um trapézio é um quadrilátero com apenas 2 lados opostos paralelos. Os outros 2 lados não são paralelos, o que não caracteriza ser um paralelogramo.

d) Sejam ΔABC e ΔDEF dois triângulos. Qual a diferença entre afirmar que ΔABC e ΔDEF são congruentes ou afirmar que ΔABC e ΔDEF são semelhantes? Se $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$ então $\Delta ABC \sim \Delta DEF$?

Enquanto a congruência "mantém" a forma e o tamanho do objeto, a semelhança "mantém" apenas a forma. Isso quer dizer que nos dois casos ambos os triângulos possuem os mesmos ângulos, mas na congruência os lados opostos a ângulos congruentes possuem a mesma medida, enquanto que na semelhança temos apenas que o quociente entre lados opostos a ângulos congruentes dá sempre o mesmo valor.

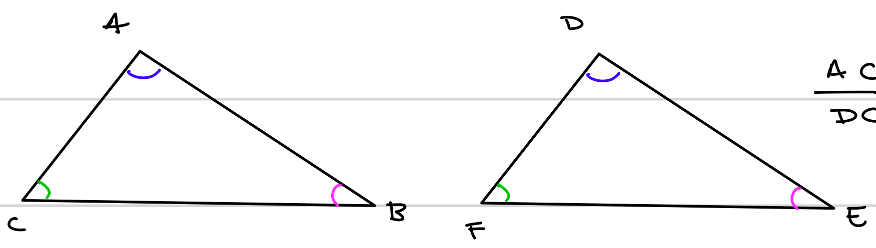
Por esse motivo, todo caso de congruência é também um caso de semelhança, onde a razão entre os lados correspondentes é 1.

Na semelhança em geral:



$$\frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE} = \frac{CB}{FE}$$

Na congruência:



$$\frac{AC}{DC} = \frac{AB}{DE} = \frac{CB}{FE} = 1,$$

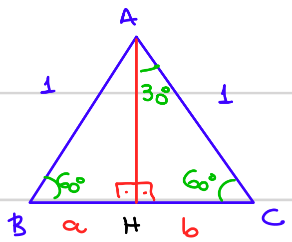
pois $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$, $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ e $\overline{CB} \equiv \overline{FE}$.

e) O que é suficiente para definir uma circunferência? Qual a diferença entre uma corda qualquer e um diâmetro?

Para definir uma circunferência, basta termos o centro e o raio da mesma.

Uma corda é qualquer segmento cujos extremos são pontos da circunferência. Um diâmetro é uma corda que passa pelo centro da circunferência.

02



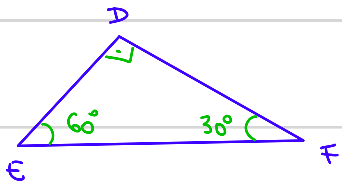
a) Como ΔABC é isósceles (pois é equilátero), sua altura é também sua mediana, com relação à base $\overline{BC}$. Assim,

$$BH = HC = \frac{1}{2}.$$

Usando o teorema de Pitágoras, obtemos a altura AH:

$$(AH)^2 + (HC)^2 = (AC)^2 \Rightarrow (AH)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

b)



Considere o triângulo AHC, descrito no item a). Como o ΔABC é equilátero, todos os seus ângulos são congruentes e iguais a $60°$. Além disso, a altura $\overline{AH}$ é também bissetriz do ângulo $\hat{A}$, de onde segue que $\hat{D} = A\hat{H}C$, $\hat{E} = \hat{C}$ e $\hat{F} = C\hat{A}H$. Pelo caso de semelhança AA, os triângulos DEF e AHC são semelhantes.

Portanto,

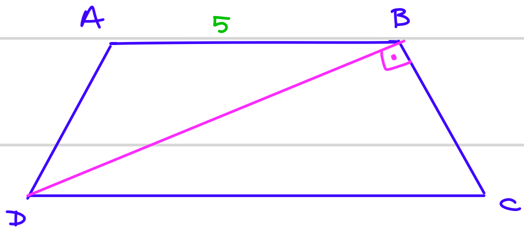
$$\frac{DE}{HC} = \frac{EF}{AC} \Rightarrow \frac{DE}{EF} = \frac{HC}{AC} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

e

$$\frac{DF}{HA} = \frac{EF}{AC} \Rightarrow \frac{DF}{EF} = \frac{HA}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Logo, não importa o tamanho dos lados de um triângulo de ângulos $30°$, $60°$ e $90°$. A proporção entre os catetos e a hipotenusa sempre será $\frac{1}{2}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

03



Hipóteses:

$\triangle$ ABCD é isósceles

$\overline{AB} = 5$

$\overline{DB} \perp \overline{BC}$

$\hat{A}+\hat{B} = 2(\hat{D}+\hat{C})$

Como o trapézio é isósceles, os ângulos adjacentes à mesma base são congruentes. Logo, $\hat{C}=\hat{D}$ e $\hat{A}=\hat{B}$. A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é $180°(4-2) = 360°$. Da relação dada, obtemos:

$$360° = \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D} = 2(\hat{D}+\hat{C}) + \hat{C}+\hat{D} = 3(\hat{C}+\hat{D}) = 6\hat{C}$$

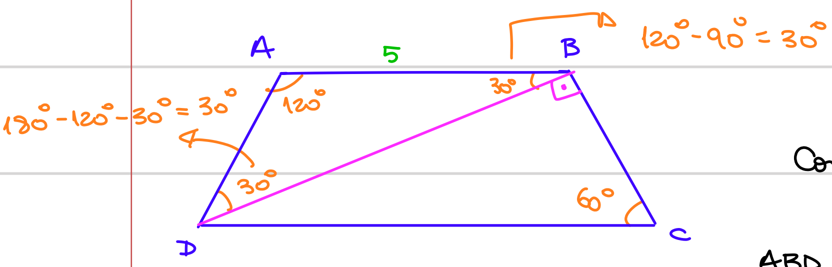
Portanto,

$$6\hat{C} = 360° \Rightarrow \hat{C} = \frac{360°}{6} \Rightarrow \hat{C} = \hat{D} = 60°.$$

Além disso,

$$2(60°+60°) = \hat{A}+\hat{B} = 2\hat{A} \Rightarrow 2\hat{A} = 240° \Rightarrow \hat{A} = \frac{240°}{2}$$

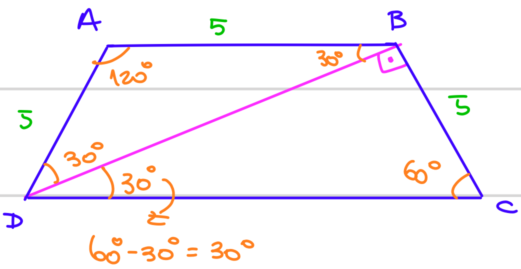
$$\Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = 120°.$$



Como $A\hat{D}B = A\hat{B}D$, o triângulo ABD é isósceles, de onde segue

$AD = AB = 5$. Como o trapézio também é isósceles, temos que

$AB = AD = BC = 5$.



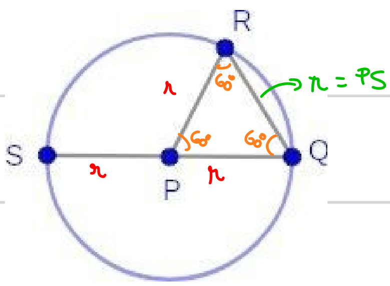
Por fim, o triângulo BCD tem ângulos internos 30°, 60° e 90°. Pelo exercício 02, a razão entre o cateto $\overline{BC}$ e a hipotenusa $\overline{DC}$ é $\frac{1}{2}$. Logo,

$$\frac{1}{2} = \frac{BC}{DC} = \frac{5}{DC} \Rightarrow DC = 2.$$

Portanto, os lados do trapézio medem $AB = BC = AD = 5$ e $DC = 10$, de onde segue que o perímetro pedido mede:

$$5 + 5 + 5 + 10 = 25.$$

04 Como $RP = PQ = PS = r$ (raio) e, por $RQ = PS = r$, o triângulo PRQ é equilátero. Logo, todos os seus ângulos internos medem 60°.

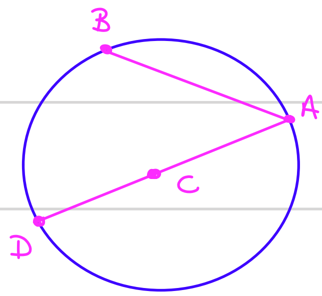


O arco $\overset{\frown}{RQ}$ tem a medida do ângulo central $R\hat{P}Q = 60°$.

O arco $\overset{\frown}{RS}$ tem a medida do ângulo central $S\hat{P}R = 180° - R\hat{P}Q = 120°$.

O arco $\overset{\frown}{RSQ}$ tem a medida dada por $360° - \overset{\frown}{RQ} = 360° - 60° = 300°$.

05



$\overset{\frown}{BD} = 3\,\overset{\frown}{AB}$

Temos que $\overset{\frown}{AD} = 180°$, pois $\overline{AD}$ é um diâmetro. Além disso,

$$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BD} \Rightarrow 180° = \overset{\frown}{AB} + 3\overset{\frown}{AB} = 4\overset{\frown}{AB} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \frac{180°}{4}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 45°.$$

Portanto, $\overset{\frown}{BD} = 3 \cdot 45° = 135°$ e, por $\hat{A}$ ser um ângulo inscrito,

$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} = \frac{135°}{2} = \frac{134°}{2} + \frac{1°}{2} = 67° + \frac{60'}{2} = 67°30'.$$