

Semana 01

Técnicas de Integração: A Substituição

Karla Lima

Sumário



1. Revisão de Integrais
2. Substituição: Integrais Indefinidas
3. Exercícios
4. Substituição: Integrais Definidas
5. Exercícios
6. Gabarito

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the top-left portion, while a light gray shape occupies the bottom-left portion. The rest of the slide is white. The text is centered in the white area.

Revisão de Integrais

Definição



Definição 1

*Uma função F é denominada uma **primitiva** de f no intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para todo x em I .*

Definição



Definição 1

Uma função F é denominada uma **primitiva** de f no intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para todo x em I .

Teorema 1

Se F for uma primitiva de f em um intervalo I , então a primitiva mais geral de f em I é

$$F(x) + C$$

em que C é uma constante arbitrária.

Funções Exponenciais e Logarítmicas



Seja C uma constante qualquer.

Função	Primitiva (Geral)	Justificativa
e^x	$e^x + C$	$\frac{d}{dx}(e^x + C) = e^x$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	$\frac{d}{dx}(\ln x + C) = \frac{1}{x}$
$a^x \ln a$	$a^x + C$	$\frac{d}{dx}(a^x + C) = a^x \ln a$
$\frac{1}{x \ln a}$	$\log_a x + C$	$\frac{d}{dx}(\log_a x + C) = \frac{1}{x \ln a}$

Algumas Funções Trigonométricas



Seja C uma constante qualquer.

Função	Primitiva (Geral)	Justificativa
$\cos x$	$\sin x + C$	$\frac{d}{dx}(\sin x + C) = \cos x$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\frac{d}{dx}(-\cos x + C) = \sin x$
$\sec^2 x$	$\tan x + C$	$\frac{d}{dx}(\tan x + C) = \sec^2 x$

Algumas Funções Trigonométricas Inversas



Seja C uma constante qualquer.

Função	Primitiva (Geral)	Justificativa
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sin^{-1}x + C$	$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x + C) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\cos^{-1}x + C$	$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x + C) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\tan^{-1}x + C$	$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x + C) = \frac{1}{1+x^2}$

O Teorema Fundamental do Cálculo



Teorema 2

Se f for contínua em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) \mathbf{d}x = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer primitiva de f .

Integral Indefinida



Para identificar a primitiva da função f , usamos a notação

$$F(x) = \int f(x) \mathbf{d}x.$$

Ela é chamada **integral indefinida**.

$$F(x) = \int f(x) \mathbf{d}x \quad \text{significa} \quad F'(x) = f(x)$$

Tabela de Integrais



Do que já vimos até aqui, podemos preencher a seguinte tabela de integrais:

$$\int e^x \mathbf{d}x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\int \cos x \mathbf{d}x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathbf{d}x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\int \frac{1}{x} \mathbf{d}x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\int \sin x \mathbf{d}x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathbf{d}x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\int a^x \ln a \mathbf{d}x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\int \sec^2 x \mathbf{d}x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \mathbf{d}x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\int \frac{1}{x \ln a} \mathbf{d}x = \underline{\hspace{2cm}}$$

Exercício: Tabela de Integrais



As funções hiperbólicas estão relacionadas com hipérboles, assim como as funções trigonométricas estão relacionadas com o círculo. Elas são definidas através de exponenciais:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

As demais funções hiperbólicas seguem a lógica das funções trigonométricas. Por exemplo,

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad \text{e} \quad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}.$$

.

Exercício: Tabela de Integrais



Use a tabela de derivadas a seguir para calcular as integrais pedidas.

Função	Derivada
$\sinh x$	$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$
$\cosh x$	$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$
$\operatorname{sech} x$	$\frac{d}{dx} \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$

a) $\int_0^{\ln 2} \cosh x \, dx$

b) $\int_0^{\ln 2} (\sinh x - \operatorname{sech} x \tanh x) \, dx$

Substituição: Integrais Indefinidas

Quando usá-la?



Observe as seguintes integrais:

a) $\int 2x\sqrt{1+x^2} dx;$

b) $\int 4x^3 \cos(x^4 + 2) dx.$

Você consegue encontrar alguma primitiva para cada uma das integrais (de memória ou usando tabelas de integrais ou derivadas)?

Quando usá-la?



- ▶ As nossas fórmulas de primitivação não mostram como calcular integrais desse tipo.
- ▶ Aqui, usamos a estratégia de resolução de problemas de **introduzir alguma coisa extra**: uma nova variável.

Quando usá-la?



- ▶ Usamos o método de substituição quando uma integral **contém uma função composta e a derivada da função interna.**
- ▶ Esse método desfaz a regra da cadeia.

Como aplicar o método?



Vamos retornar ao nosso primeiro exemplo:

$$\int 2x\sqrt{1+x^2} dx.$$

No integrando $2x\sqrt{1+x^2}$, você consegue identificar uma multiplicação envolvendo a derivada de alguma função conhecida?

Como aplicar o método?



- ▶ O produto é formado por $2x$ e a raiz $\sqrt{x^2 + 1}$. Devemos sempre começar pelo que parece ser mais fácil. Nesse caso, o $2x$.
- ▶ Sabemos que $2x$ é a derivada de qualquer função da forma $x^2 + C$.
- ▶ E olha só: temos dentro da raiz uma função desse tipo!
- ▶ Fazemos a seguinte mudança de variável:
 - ▶ denotamos $u = x^2 + 1$;
 - ▶ relacionamos a sua diferencial du com a diferencial dx

$$u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x dx;$$

- ▶ substituímos $x^2 + 1$ por u e $2x dx$ por du , e resolvemos a integral em u .
- ▶ Após resolver a integral em u , retorne à variável x , usando novamente que $u = x^2 + 1$.

Exemplo 1



Exemplo 1

Usando o método de substituição, calcule a integral $\int 2x\sqrt{1+x^2} dx$.

Solução: Seja $u = x^2 + 1$. Então $du = 2x dx$ e a integral fica

$$\begin{aligned}\int 2x\sqrt{1+x^2} dx &= \int \sqrt{1+x^2} 2x dx = \int \sqrt{u} du = \int u^{1/2} du \\ &= \frac{u^{1/2+1}}{1/2+1} + C = \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2u^{3/2}}{3} + C \\ &= \frac{2(x^2 + 1)^{3/2}}{3} + C.\end{aligned}$$

Regra da Substituição



Definição 2

Se $u = g(x)$ for uma função derivável cuja imagem é um intervalo I e f for contínua em I , então

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du.$$

Ou seja, queremos encontrar uma primitiva F de f , tal que

$$\frac{d}{dx}F(u) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Consegue reproduzir?



Agora é a sua vez.

Exemplo 2

Seja

$$\int 4x^3 \cos(x^4 + 2) dx.$$

- a) *No integrando $4x^3 \cos(x^4 + 2)$, você consegue identificar uma multiplicação envolvendo a derivada de alguma função conhecida?*
- b) *Resolva a integral usando o método da substituição.*

Exemplo



Às vezes, é necessário trabalhar algumas constantes para obter a forma desejada da substituição. Por exemplo, para resolver a integral

$$\int \sqrt{2x + 1} \, dx,$$

devemos usar a substituição dentro da raiz, fazendo $u = 2x + 1$. Com isso, obtemos

$$du = 2 \, dx.$$

Observe que na integral aparece apenas dx , e não $2 \, dx$.

Exemplo



Porém, uma constante não atrapalha o cálculo da integral, então podemos reescrever $1 = \frac{1}{2} \cdot 2$:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x+1} \, dx &= \int \sqrt{2x+1} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sqrt{2x+1} \cdot 2 \, dx,\end{aligned}$$

ou $dx = \frac{1}{2} du$:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x+1} \, dx &= \int \sqrt{u} \frac{1}{2} du \\ &= \frac{1}{2} \int \sqrt{u} \, du.\end{aligned}$$

Exemplo



Usando a segunda opção, concluímos:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x+1} \, dx &= \frac{1}{2} \int \sqrt{u} \, du \\ &= \frac{1}{2} \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C \\ &= \frac{1}{3} (2x+1)^{3/2} + C.\end{aligned}$$

The background of the slide is composed of three geometric sections. A teal-colored triangle is in the top-left corner. A light gray triangle is in the bottom-left corner. The remaining area is a white trapezoid. The word "Exercícios" is centered in the white area.

Exercícios

Integrais Indefinidas



Exercício 1

Encontre $\int \frac{x}{\sqrt{1+4x^2}} dx$.

Exercício 2

Encontre $\int e^{5x} dx$.

Integrais Indefinidas



Exercício 3

Encontre $\int \tan(x) dx$.

Exercício 4

Encontre $\int \sqrt{1+x^2} x^5 dx$.

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. The top-left portion is a dark teal color, and the bottom-right portion is a light gray color. These two shapes meet at a diagonal line that runs from the top-left towards the bottom-right, creating a clean, modern aesthetic.

Substituição: Integrais Definidas

Método 1



- Consiste em calcular primeiro a integral indefinida e então usar o Teorema Fundamental do Cálculo.

Por exemplo, seja $\int_0^1 2x\sqrt{1+x^2} dx$. Vimos que

$$\int 2x\sqrt{1+x^2} dx = \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2} + C.$$

Método 1



Usando a primitiva $F(x) = \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2}$ e o TFC, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^1 2x\sqrt{1+x^2} dx &= F(1) - F(0) = \frac{2}{3}(1^2 + 1)^{3/2} - \frac{2}{3}(0^2 + 1)^{3/2} \\ &= \frac{2}{3}(2^{3/2} - 1).\end{aligned}$$

Método 2



- ▶ É geralmente o método preferível, o qual consiste em alterar os limites de integração ao se mudar a variável.
- ▶ Trocamos o limitante inferior a por $u(a)$; já o limitante superior b é trocado por $u(b)$.

Método 2



No exemplo anterior, trocamos 0 por $u(0) = 1$ e 1 por $u(1) = 1 + 1^2 = 2$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^1 2x\sqrt{1+x^2} dx &= \int_0^1 \sqrt{1+x^2} 2x dx = \int_{u(0)}^{u(1)} \sqrt{u} du = \int_1^2 u^{1/2} du \\ &= \left. \frac{u^{1/2+1}}{1/2+1} \right|_1^2 = \frac{2^{3/2}}{3/2} - \frac{1^{3/2}}{3/2} \\ &= \frac{2}{3} (2^{3/2} - 1) .\end{aligned}$$

Método 2



Definição 3

Se g' for contínua em $[a, b]$ e f for contínua na imagem de $u = g(x)$, então

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

The background of the slide is composed of three geometric sections. A teal-colored triangle is in the top-left corner. A light gray triangle is in the bottom-left corner. The remaining area is a white trapezoid. The word "Exercícios" is centered within the white area.

Exercícios

Integrais Definidas



Usando o método 2 de substituição para as integrais definidas, resolva as integrais abaixo. Compare o resultado com o encontrado através do método 1, usando a seção anterior de exercícios.

Exercício 5

Encontre $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1+4x^2}} dx$.

Exercício 6

Encontre $\int_0^3 e^{5x} dx$.

Integrais Definidas




Exercício 7

Encontre $\int_0^{\pi/3} \tan(x) dx$.

Exercício 8

Encontre $\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^2} x^5 dx$.



Gabarito

Respostas



1. $\frac{1}{4}\sqrt{1+4x^2} + C$
2. $\frac{1}{5}e^{5x} + C$
3. $-\ln|\cos x| + C$
4. $\frac{1}{7}(1+x^2)^{7/2} - \frac{2}{5}(1+x^2)^{5/2} + \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + C$
5. 0
6. $\frac{1}{5}(e^{15} - 1)$
7. $\ln(2)$
8. 0