Introdução ao Cálculo

Lista de Exercícios: P2

1 - Funções Exponenciais.

2 - Funções Logarítmicas.

3 - Funções Compostas. Equações e Inequações Exponenciais e Logarítmicas.

4 - Funções Trigonométricas.

5 - Limites.

6 - Complemento P2.

Profa. Karla Lima

FACET/UFGD

1 Funções Exponenciais

1.1 Exercícios propostos em aula

1. A meia-vida de certa substância radioativa é igual a 14 dias. Existem 6,6 gramas presentes inicialmente.

   a) Expresse a quantidade da substância remanescente como uma função do tempo t, em dias.

   b) Quando existirá menos de 1 grama?

2. O número de bactérias em uma cultura é contado como 400 no começo de um experimento. Se o número de bactérias dobrar a cada 3 horas, determine:

   a) A fórmula que descreve o número de bactérias em função do tempo t, dado em horas.

   b) O número de bactérias presentes na cultura após 24 horas.

3. Seja a função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, definida por $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

   (a) A função f é crescente ou decrescente?

   (b) Para que valores de x tem-se $\frac{1}{128} < f(x)$?

   (c) Para qual valor de x tem-se $f(x) = 32$?

4. Uma certa quantia de dinheiro P_0 é investida a uma taxa anual de juros de $8,0\%$, capitalizados bimestralmente (a cada 2 meses).

   (a) Quantos anos (com aproximação na ordem de décimos de ano) levaria para o montante inicial quadriplicar?

   (b) Se $P_0 = 10.000,00$ reais, quanto haverá, aproximadamente, na conta bancária após 1 ano e 6 meses?

5. Resolva a equação exponencial $(\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{81}$.

6. Resolva a equação exponencial $125^x = 0,04$.

7. Resolva a equação exponencial $5^{2x^2+3x-2} = 1$.

8. Resolva a equação exponencial $4^x - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$.

9. O número de bactérias em uma cultura é contado como 400 no começo de um experimento. Se o número de bactérias dobrar a cada 3 horas, o número de indivíduos pode ser expresso pela fórmula $N(t) = 400(2)^{t/3}$. Determine o número de bactérias presentes na cultura após 30 horas.

10. Se um país tem uma população de 22 milhões em 2000 e mantém uma taxa de crescimento populacional de 1% ao ano, então sua população, em milhões de habitantes, após um tempo, assumindo que $t = 0$ em 2023, pode ser modelada como $N(t) = 22e^{0,01t}$. Estime a população em 2033.

11. Um certo isótopo radioativo decai de acordo com a fórmula $Q(t) = Q_0 e^{-0,034t}$, sendo que t é o tempo em anos e Q_0 é o número de gramas presentes inicialmente.

    Se 20 gramas estão inicialmente presentes, em quantos anos restarão $\dfrac{20}{e^{0,34}}$ gramas ($\approx 14,2g$)?

12. A meia-vida de certa substância radioativa é igual a 14 dias. Existem $6,6$ gramas presentes inicialmente.

    a) Expresse a quantidade da substância remanescente como uma função do tempo t, em dias.

    b) Resolvendo uma equação exponencial, determine quando existirá $0,4125$ gramas?

13. Resolva a seguinte inequação exponencial: $4^x \geq 8$.

14. Resolva a seguinte inequação exponencial: $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x^2-1} \leq 32^{1-x}$.

2 Funções Logarítmicas

2.1 Exercícios propostos em aula

1. a) Calcule o nível decibel do menor som audível, $I_0 = 10^{-12}$ watts por metro quadrado.

   b) Calcule o nível decibel de um concerto de rock com uma intensidade de 10^{-1} watts por metro quadrado.

   c) Calcule a intensidade de um som com nível de 85 decibéis.

2. Há mais de uma escala logarítmica, conhecida como escala Richter, empregada para medir o poder destrutivo de um terremoto. Uma escala Richter comumente usada é definida como:

$$R = \frac{2}{3}\log\frac{E}{E_0},$$

sendo que R é a chamada magnitude (Richter) do terremoto, E é a energia liberada pelo terremoto (medida em joules) e E_0 é a energia liberada por um terremoto muito fraco.

a) Encontre a magnitude na escala Ritcher de um terremoto que libera energia de $1000E_0$.

b) Encontre a energia liberada por um terremoto que mede $5,0$ na escala Ritcher, sendo $E_0 = 10^{4,40}$ joules.

c) Qual é a razão entre a energia liberada por um terremoto que mede $8,1$ na escala Ritcher e um tremor medindo $5,4$ na mesma escala?

3 Funções Compostas. Equações e Inequações Exponenciais e Logarítmicas.

3.1 Exercícios propostos em aula

1. Resolva a equação exponencial $5^{2x-3} = 3$.

2. O crescimento de certa cultura de bactérias obedece à função $X(t) = Ce^{kt}$, em que $X(t)$ é o número de bactérias no tempo $t = 0$; C e k são constantes positivas (e é a base do logaritmo neperiano). Verificando que o número inicial de bactérias $X(0)$ duplica em 4 horas, quantas delas se pode esperar no fim de 6 horas?

3. Uma substância radioativa está em processo de decaimento, de modo que no instante t a quantidade não decaída é $A(t) = A(0) \cdot e^{-3t}$, em que $A(0)$ indica a quantidade da substância no instante $t = 0$. Calcule o tempo necessário para que a metade da quantidade inicial se decaia.

4. Um rebanho de cervos é introduzido em uma ilha. A população inicial é de 500 indivíduos e estima-se que a população que se manterá constante a longo prazo será de 2.000 indivíduos. Se o tamanho da população é dado pela função de crescimento logístico

$$N(t) = \frac{2000}{1 + 3e^{-0,05t}},$$

após quantos anos o número de cervos será aproximadamente 950 indivíduos?

5. Uma certa quantia de dinheiro P é investida a uma taxa anual de juros de 4,5%. Quantos anos (com aproximação na ordem de décimos de ano) levaria para o montante inicial dobrar, assumindo que a capitalização dos juros seja trimestral? **Obs:** Use a fórmula $A(t) = P\left(1 = \frac{r}{n}\right)^{nt}$.

4 Funções Trigonométricas

4.1 Exercícios propostos em aula

- Atividades no Geogebra.

5 Limites

1. Se

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4}, & \text{se} \quad x > 4 \\ 8 - 2x, & \text{se} \quad x \leq 4 \end{cases}$$

   calcule:

   a) $\lim_{x \to 4^-} f(x)$;

   b) $\lim_{x \to 4^+} f(x)$;

   c) O $\lim_{x \to 4} f(x)$ existe? Justifique sua resposta.

2. Seja $F(x) = \dfrac{x}{|x|}$.

   a) Qual o domínio da função F?

   b) Sabemos que $|x|$ é uma função definida por partes:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

   Usando a regra de $|x|$, descreva $F(x)$ como uma função definida por partes.

   c) Calcule $\lim_{x \to 0^-} f(x)$, $\lim_{x \to 0^+} f(x)$. O $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe? Justifique sua resposta.

3. Calcule o limite, se existir.

a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - x + 6}{x - 2}$

b) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

c) $\lim_{t\to -3} \dfrac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$

d) $\lim_{h\to 0} \dfrac{(4+h)^2 - 16}{h}$

e) $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{1+h} - 1}{h}$

f) $\lim_{t\to 9} \dfrac{9 - t}{3 - \sqrt{t}}$

g) $\lim_{t\to 0} \left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2 + t}\right)$

h) $\lim_{x\to 9} \dfrac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3}$

i) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{1}{2x + 3}$

j) $\lim_{t\to -\infty} \dfrac{t^2 + 2}{t^3 + t^2 - 1}$

k) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x + 2}{\sqrt{9x^2 + 1}}$

4. **(Crescimento Populacional Logístico)** Se uma população consistindo inicialmente de N_0 indivíduos é modelada como crescente e com população limite (devido a recursos limitados) de P indivíduos, a população $N(t)$, em qualquer instante t posterior, é dada pela fórmula:

$$N(t) = \frac{N_0 P}{N_0 + (P - N_0)e^{-kt}}.$$

Se a população de trutas em um lago é dada pela fórmula

$$N(t) = \frac{9000}{8 + 10e^{-0{,}05t}}$$

a) Qual a população atual?

b) Qual será a população daqui a 10 anos, aproximadamente?

c) De acordo com o modelo, qual é o número máximo de trutas possível de modo que os recursos necessários para a sobrevivência sejam suficientes? (Ou seja, determine a população limite, $t \to \infty$.)

5. Definimos a **velocidade instantânea** como o limite das velocidades médias:

$$v(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

De maneira análoga, a **aceleração instantânea** é dada como o limite das acelerações médias:

$$a(x) = \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h}.$$

Se uma partícula move-e sobre o eixo y de modo que, no instante x, a posição y é dada por $y = x^2$, $x \geq 0$, onde x é dado em segundos e y é dado em metros.

   a) Qual a velocidade da partícula no instante x? E em $x = 2$?

   b) Qual a aceleração da partícula no instante x? E em $x = 2$?

6. Escreva as funções abaixo como a composta de duas funções:

   a) $h(x) = (3x^4 + 5)^3$

   b) $h(x) = \sqrt{x^2 + 5x - 6}$

   c) $h(x) = \sqrt{1 + \cos^2 x}$

   d) $h(x) = \operatorname{sen}(2x - \pi/3)$

   e) $h(x) = e^{3\tan x}$

7. Usando a continuidade das funções, determine os limites abaixo:

   a) $\lim_{x\to 0} (3x^4 + 5)^3$

   b) $\lim_{x\to\sqrt{2}} \sqrt{x^2 + 5x - 6}$

   c) $\lim_{x\to\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x}$

   d) $\lim_{x\to\pi/2} \operatorname{sen}(2x - \pi/3)$

e) $\lim\limits_{x \to \pi/4} e^{3\tan x}$

Gabarito

1. a) $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 0$;

   b) $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 0$;

   c) $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 0$, pois os limites laterais existem e são iguais.

2. a) $D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\}$

   b) $F(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x > 0 \\ -1, & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$

   c)

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

   Portanto, temos que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \nexists$, pois os limites laterais apesar de existirem, não são iguais.

3. a) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x + 6}{x - 2} = \nexists$

b) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 5$

c) $\lim_{t \to -3} \dfrac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3} = \dfrac{6}{5}$

d) $\lim_{h \to 0} \dfrac{(4 + h)^2 - 16}{h} = 8$

e) $\lim_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + h} - 1}{h} = \dfrac{1}{2}$

f) $\lim_{t \to 9} \dfrac{9 - t}{3 - \sqrt{t}} = 6$

g) $\lim_{t \to 0} \left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2 + t} \right) = 1$

h) $\lim_{x \to 9} \dfrac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3} = 108$

i) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{1}{2x + 3} = 0$

j) $\lim_{t \to -\infty} \dfrac{t^2 + 2}{t^3 + t^2 - 1} = 0$

k) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x + 2}{\sqrt{9x^2 + 1}} = \dfrac{1}{3}$

4. a) $N(0) = 500$

b) $N(10) \approx 639$

c) $\lim_{t \to \infty} N(t) = 1125$

5. a) $v(x) = 2x$; $v(2) = 4\ m/s$

b) $a(x) = 2$; $a(2) = 2\ m/s^2$

6. a) $f(x) = x^3$ e $g(x) = 3x^4 + 5$

b) $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 + 5x - 6$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 1 + \cos^2 x$

d) $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = 2x - \pi/3$

e) $f(x) = e^x$ e $g(x) = 3\tan x$

7. a) $\lim_{x\to 0}(3x^4+5)^3 = 125$

b) $\lim_{x\to\sqrt{2}} \sqrt{x^2+5x-6} = \sqrt{5\sqrt{2}-4}$

c) $\lim_{x\to\pi} \sqrt{1+\cos^2 x} = \sqrt{2}$

d) $\lim_{x\to\pi/2} \operatorname{sen}(2x-\pi/3) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\lim_{x\to\pi/4} e^{3\tan x} = e^3$

6 Complemento P2

Obs1: É necessário mas não é o suficiente para a prova. É apenas um resumo do que pode ser abordado.

Obs2: Todos os exercícios de limites e continuidade estão no livro Cálculo, Vol I (J. Stweart). Como são de numeração ímpar, seu gabarito está disponível ao final do livro.

1. A lei de resfriamento de Newton estabelece que a temperatura T de um corpo, inicialmente a uma temperatura T_0, colocado em um meio a uma temperatura menor T_m, é dada pela fórmula $T = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$. Se uma xícara de café, a 160° às 7h da manhã, é levada a um ambiente cujo ar está a 40° e esfria para 140° às 7h05min da manhã, (a) encontre sua temperatura às 7h10min da manhã, (b) a que horas a temperatura terá caído para 100°?

   Resp. (a) 123°; (b) 7h19min da manhã

2. Nos livros do Iezzi, resolva equações e inequações envolvendo as funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.

Limites e Continuidade

3. Resolva o exercício 7 da seção 2.2.

4. (a) O **Teorema do Confronto** é muito importante no cálculo de limites indeterminados. Ele diz o seguinte:

   'Se $f(x) \le g(x) \le h(x)$ quando x está próximo de a (exceto possivelmente em a) e

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L,$$

então $\lim_{x \to a} g(x) = L$.'

Para ilustrar o resultado, veja o exemplo 11, da seção 2.3.

(b) Resolva o exercício 39, da seção 2.3.

5. (a) **Teorema do Valor Intermediário:** Suponha que f seja contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e seja N um número qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, em que $f(a) \neq f(b)$. Então existe um número c em (a, b) tal que $f(c) = N$.

   Veja o exemplo 10, da seção 2.5, para visualizar a sua aplicação.

   (b) Resolva o exercício 69, da seção 2.5.

6. (a) A reta $x = a$ é chamada assíntota vertical da curva $y = f(x)$ se pelo menos algum dos limites de x tendendo à a (bilateral ou lateral) explode. Veja o exemplo 9, da seção 2.2, para visualizar a sua definição.

   (b) Resolva o exercício 51, da seção 2.6.