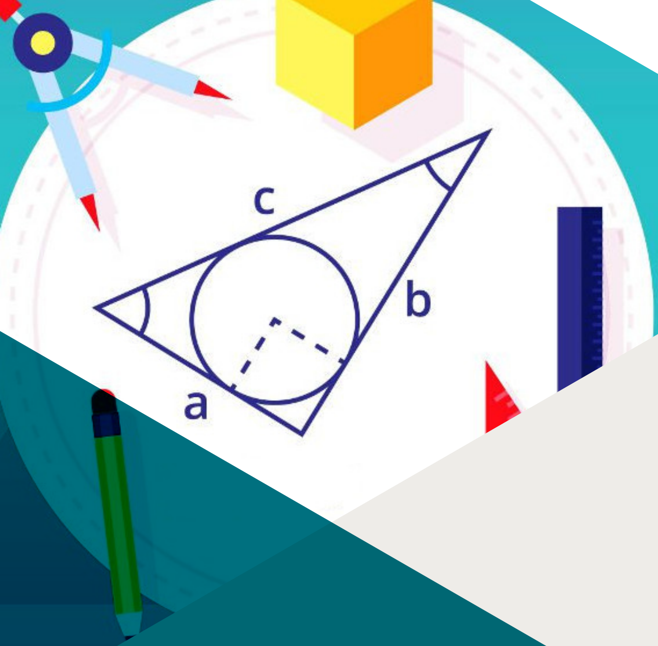


Introdução ao Cálculo

Aula 12: Funções Logarítmicas.

Karla Lima

Sumário

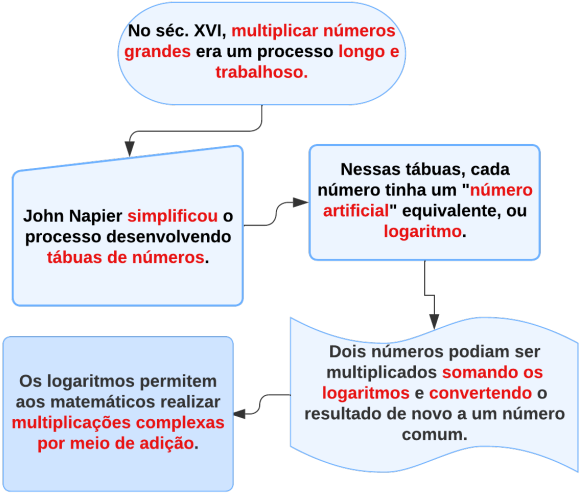
Bibliografia

Bibliografia da Aula 10

- Fundamentos da Matemática Elementar: 2 (Click para baixar)
- Pré-Cálculo, Schafier. (Click para baixar)
- Para o resumo histórico, ver em [1].

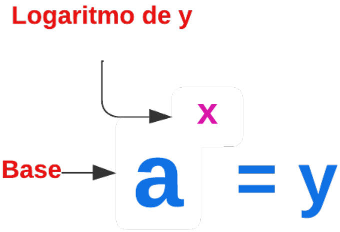
Transformando Multiplicação em Adição

Introdução


No séc. XVI, multiplicar números grandes era um processo longo e trabalhoso.
John Napier simplificou o processo desenvolvendo tábuas de números.
Nessas tábuas, cada número tinha um "número artificial" equivalente, ou logaritmo.
Dois números podiam ser multiplicados somando os logaritmos e convertendo o resultado de novo a um número comum.
Os logaritmos permitem aos matemáticos realizar multiplicações complexas por meio de adição.

Introdução

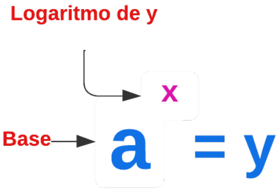
- **A geração de logaritmos:** um logaritmo de um número dado y é o expoente ou potência x ao qual outro número fixo (a base a) é elevado para produzir aquele número dado (o y).



Uma tábua de logaritmos

Utilizando 2 como base, podemos produzir a seguinte tábua de logaritmos:

Número	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
Logaritmo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



- Observe que cada número está associado com a potência de 2 que o gera.
- Por exemplo: $1 = 2^0$, $32 = 2^5$ e $512 = 2^9$.

Uma tábua de logaritmos

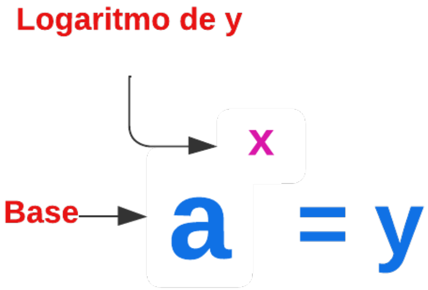
Usando a tábua de logaritmo para calcular o produto 16×64:

Número	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
Logaritmo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

- Sem calculadora, multiplicar os números 16 e 64 através de ábacos ou pranchas de contagem era um processo trabalhoso.
- Usando a tábua de logaritmos acima, o processo torna-se simples:
  - somam-se os logaritmos associados aos números dados ($4 + 6 = 10$);
  - localiza-se o número que está associado ao logaritmo 10, neste caso, o 1024.
- Portanto, $16 \times 64 = 1024$.

Por que somar os logaritmos?

Por que definindo logaritmos como abaixo, podemos determinar o produto 16×64 através da soma dos seus logaritmos 4 e 6, na tábua com base 2?



Tábuas de logaritmos

- O uso de tais tábuas facilitava cálculos complexos e ajudou a **trigonometria** a avançar.
- Napier percebeu que podia substituir o trabalho entendiante da multiplicação pela operação simples da adição:
  - Multiplicação: somando os dois logaritmos e convertendo a resposta a um número comum.
  - Divisão: subtraindo os dois logaritmos e convertendo a resposta a um número comum (Justifique!).

O método aperfeiçoado

- Napier levou vinte anos para completar seus cálculos e publicar as primeiras tábuas de logaritmos como ’Descrição da maravilhosa regra dos logaritmos.
- Apesar de reconhecer a importância das tábuas de Napier, o professor de Oxford Henry Briggs as considerou pouco práticas.
- Entre 1616 e 1617, os dois discutiram o tema e concordaram que o logaritmo de 1 fosse redefinido como 0 e o logaritmo de 10 como 1.

O método aperfeiçoado

- Essa abordagem tornou os logaritmos muito mais fáceis de usar.
- Com essas mudanças, Briggs passou vários anos recalculando as tábuas.
- Em 1624, os resultados foram publicados com logaritmos calculados até catorze casas decimais.
- Os logaritmos de base 10 calculados por Briggs são conhecidos como $\log_{10} = \log$ ou logaritmos comuns.
- A tábua anterior, de potências de 2, pode ser pensada com uma tábua de $\log_2$, ou base 2.

O Impacto dos Logaritmos

Astronomia

- Os logaritmos tiveram impacto imediato na ciência, em especial na astronomia.
- Kepler publicou as duas primeiras leis do movimento planetário em 1605, mas sua revolucionária terceira lei só chegou após a invenção das tábuas de logaritmos.
- Esta lei descreve como o tempo que um planeta leva para completar uma órbita ao redor do sol se relaciona a sua distância orbital média.

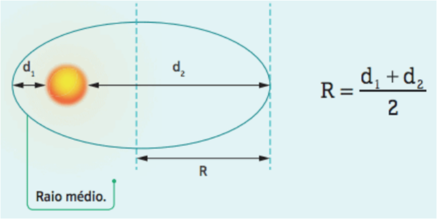


Figura 1: Terceira Lei de Kepler

Astronomia

- Quando Kepler publicou sua descoberta em 1620, ele o dedicou a Napier.


EPHEMERIDES NOVÆ
Motuum Cœlestium, ab anno vulga-
ris aerae M DC XVII.
Ex Observationibus potissimum TYCHONIS BRA-
HEI, Hypothesibus Physicis, & Tabulis
RVDOLPHINIS;
Ad Meridianum Vranoburgicum in freto Cimbrico,
Authore Ioanne Kepplero, Imp:

A função exponencial

- Já no séc. XVII, os logaritmos se revelaram algo de importância ainda maior.
- O matemático Pietro Mengoli mostrou que a série alternada

  $$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - \ldots$$

  tinha um valor ao redor de $0,693147$, que ele demonstrou ser o logaritmo natural de 2.
- Um logaritmo natural (representado por ln) é assim chamado porque ocorre naturalmente, revelando o tempo necessário para atingir certo nível de crescimento.
- Tem uma base especial, chamada depois de e (o número de Euler), com valor de aproximadamente $2,71828$.

A função exponencial

- O número natural *e* tem enorme significado em matemática, devido as suas ligações com crescimento e decaimento naturais.
- Com o advento das calculadoras manuais e dos computadores, as tábuas de logaritmos perderam sua utilidade. Hoje, o que importa especialmente são certas propriedades funcionais da função logaritmo e de sua inversa, a função exponencial. E nesse sentido deve-se privilegiar, isto sim, a base *e*.

Definição e Propriedades

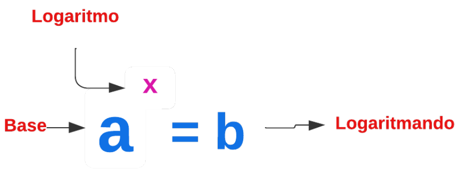
Definição

Definição 1

Sendo a e b números reais e positivos, com $a \neq 1$, chama-se logaritmo de b na base a o expoente que se deve dar à base a de modo que a potência obtida seja igual a b:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b.$$

- Para que a operação de potência esteja bem definida, devemos ter $0 < a \neq 1$, como vimos ao definir a função exponencial.
- Como $b = a^x$, com $a > 0$, então este também será positivo.



Exemplos

1. $\ln 1 = 0$, pois $\ln 1 = \log_e 1$ e $e^0 = 1$.
2. $\log_{0,2} 25 = -2$, pois $(0,2)^{-2} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2}$.

Propriedades

Decorrem da definição de logaritmos as seguintes propriedades para $0 < a \neq 1, b > 0$.

1. Para qualquer base a, tem-se $\log_a 1 = 0$.

Propriedades

Decorrem da definição de logaritmos as seguintes propriedades para $0 < a \neq 1, b > 0$.

1. Para qualquer base a, tem-se $\log_a 1 = 0$. Com efeito,

$$a^0 = 1.$$

Propriedades

Decorrem da definição de logaritmos as seguintes propriedades para $0 < a \neq 1, b > 0$.

1. Para qualquer base a, tem-se $\log_a 1 = 0$. Com efeito,
$$a^0 = 1.$$
2. Para qualquer base a, tem-se $\log_a a = 1$.

Propriedades

Decorrem da definição de logaritmos as seguintes propriedades para $0 < a \neq 1, b > 0$.

1. Para qualquer base a, tem-se $\log_a 1 = 0$. Com efeito,

$$a^0 = 1.$$

2. Para qualquer base a, tem-se $\log_a a = 1$. De fato,

$$a^1 = a.$$

Propriedades

Decorrem da definição de logaritmos as seguintes propriedades para $0 < a \neq 1, b > 0$.

1. Para qualquer base a, tem-se $\log_a 1 = 0$. Com efeito,
$$a^0 = 1.$$

2. Para qualquer base a, tem-se $\log_a a = 1$. De fato,
$$a^1 = a.$$

3. Temos que $a^{\log_a b} = b$.

Propriedades

Decorrem da definição de logaritmos as seguintes propriedades para $0 < a \neq 1, b > 0$.

1. Para qualquer base a, tem-se $\log_a 1 = 0$. Com efeito,
$$a^0 = 1.$$

2. Para qualquer base a, tem-se $\log_a a = 1$. De fato,
$$a^1 = a.$$

3. Temos que $a^{\log_a b} = b$.
Este resulta da definição de logaritmo, de que o logaritmo de b na base a é o expoente que se deve dar à base a para a potência obtida ficar igual a b.

Exercício

Usando a definição de logaritmos, demonstre as seguintes propriedades:

1. **Logaritmo do produto:** Se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, então
$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c.$$

Exercício

Usando a definição de logaritmos, demonstre as seguintes propriedades:

1. **Logaritmo do produto:** Se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, então
$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c.$$

2. **Logaritmo do quociente:** Se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, então
$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c.$$

Exercício

Usando a definição de logaritmos, demonstre as seguintes propriedades:

1. **Logaritmo do produto:** Se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, então
$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c.$$

2. **Logaritmo do quociente:** Se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, então
$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c.$$

3. **Logaritmo do potência:** Se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então
$$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b.$$

Exercício

4. **Mudança de base:** Se $0 < a \neq 1$, $0 < c \neq 1$ e $b > 0$, então

$$\frac{\log_c b}{\log_c a} = \log_a b.$$

Funções Logarítmicas

Definição

Definição 2

*Fixada a base a, chamamos **função logarítmica** de base a a função que associa cada número x ao seu logaritmo* $\log_a x = y$.

- Por definição, $x > 0$, pois $a > 0$ e, portanto, $x = a^y > 0$.
- Com isso, o domínio de uma função logarítmica é $\mathbb{R}_+^*$.
- Seu contra-domínio é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\to \log_a x \end{aligned}$$

Injetividade

- Lembrete: uma função é dita ser **injetora** quando

$$f(x) = f(z) \text{ se, e somente se, } x = z.$$

- Usando a definição de logaritmo, mostramos que uma função logarítmica é injetora:

$$\begin{aligned} f(x) = \log_a x = y = \log_a z = f(z) &\Leftrightarrow a^y = x \text{ e } a^y = z \\ &\Leftrightarrow x = a^y = z \\ &\Leftrightarrow x = z. \end{aligned}$$

Sobrejetividade

- Lembrete: uma função é dita ser **sobrejetora** quando para qualquer elemento y do contra-domínio, existe um elemento x do domínio de modo que $f(x) = y$.

Sobrejetividade

- Lembrete: uma função é dita ser **sobrejetora** quando para qualquer elemento y do contra-domínio, existe um elemento x do domínio de modo que $f(x) = y$.
- A função exponencial $g(y) = a^y$ tem como imagem o subconjunto dos números reais $\mathbb{R}_+^*$, então, cada número real y (o domínio da função é $\mathbb{R}$) está associado a um único número real positivo x (pois as funções exponenciais são injetoras) de modo que $a^y = x$.

Sobrejetividade

- Lembrete: uma função é dita ser **sobrejetora** quando para qualquer elemento y do contra-domínio, existe um elemento x do domínio de modo que $f(x) = y$.
- A função exponencial $g(y) = a^y$ tem como imagem o subconjunto dos números reais $\mathbb{R}_+^*$, então, cada número real y (o domínio da função é $\mathbb{R}$) está associado a um único número real positivo x (pois as funções exponenciais são injetoras) de modo que $a^y = x$.
- Como $\mathbb{R}_+^* = Im_g$, cada valor real y está associado a um número real positivo x, tal que $a^y = x$ e, portanto,

$$\log_a x = y,$$

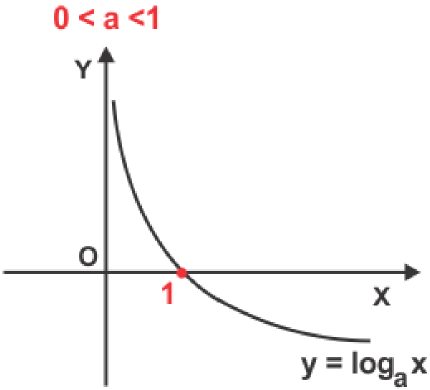
mostrando a sobrejetividade de $f(x) = \log_a x$, com $Im_f = \mathbb{R}$.

Gráficos

- Se $f(x) = \log_a x$, com $0 < a < 1$, então

$$\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow a^{\log_a y} < a^{\log_a x}$$
$$\Leftrightarrow y < x.$$

- Portanto, para $0 < a < 1$, a função $f(x) = \log_a x$ é decrescente.
- A medida que x se aproxima de 0, estamos buscando um número y tal que a^y se aproxima de zero. Para $0 < a < 1$, isso ocorre quando y tende ao infinito.

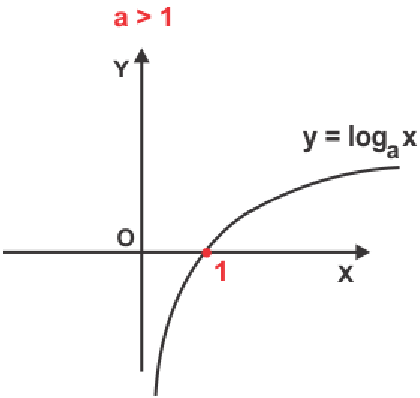


Gráficos

- Se $f(x) = \log_a x$, com $a > 1$, então

$$\begin{aligned}\log_a x < \log_a y &\Leftrightarrow a^{\log_a x} < a^{\log_a y}\\ &\Leftrightarrow x < y.\end{aligned}$$

- Portanto, para $a > 1$, a função $f(x) = \log_a x$ é crescente.
- A medida que x se aproxima de 0, estamos buscando um número y tal que a^y se aproxima de zero. Para $a > 1$, isso ocorre quando y tende ao infinito negativo.



Aplicações

Escalas Logarítmicas

Tratar com números que variam em escalas muito grandes, como, por exemplo, de $0,00000000001$ a 10.000.000.000, pode ser problemático. O trabalho pode ser feito de forma mais eficiente se forem usados os logaritmos dos números (como nesse exemplo, no qual os logaritmos variam apenas de -12 a 10).

Intensidade de Som

- A escala decibel para medição de intensidade sonora é definida como:

$$D = 10 \log \frac{I}{I_0},$$

sendo que D é o nível decibel do som, I é a intensidade do som (medida em watts por metro quadrado) e I_0 é a intensidade do menor som audível.

Intensidade de Som

Exemplo 1

a) *Calcule o nível decibel do menor som audível,* $I_0 = 10^{-12}$ *watts por metro quadrado.*

b) *Calcule o nível decibel de um concerto de rock com uma intensidade de* 10^{-1} *watts por metro quadrado.*

c) *Calcule a intensidade de um som com nível de 85 decibéis.*

Intensidade Sísmica

- Há mais de uma escala logarítmica, conhecida como escala Richter, empregada para medir o poder destrutivo de um terremoto. Uma escala Richter comumente usada é definida como:

$$R = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0},$$

sendo que R é a chamada magnitude (Richter) do terremoto, E é a energia liberada pelo terremoto (medida em joules) e E_0 é a energia liberada por um terremoto muito fraco.

Intensidade Sísmica

Exemplo 2

a) *Encontre a magnitude na escala Ritcher de um terremoto que libera energia de* $1000E_0$.

b) *Encontre a energia liberada por um terremoto que mede* $5,0$ *na escala Ritcher, sendo* $E_0 = 10^{4,40}$ *joules.*

c) *Qual é a razão entre a energia liberada por um terremoto que mede* $8,1$ *na escala Ritcher e um tremor medindo* $5,4$ *na mesma escala?*

Referências I

Vários.
O livro da matemática.
GLOBO LIVROS, 2020.