

Aula 05: Técnicas de Demonstração

- Parte 1

Karla Lima

Álgebra Elementar: 09/11/23

FACET/UFGD

Prova Direta

Considerações Finais

Prova Direta

Definição [1]

Definição 1

Diz-se que uma proposição q é formalmente dedutível (consequência) de certas proposições dadas (premissas) quando e somente quando for possível formar uma sequência de proposições p_1, p_2, \dots, p_n de tal modo que

- a) p_n é exatamente q ;*
- b) para qualquer valor de i ($i = 1, 2, \dots, n$), p_i ou é uma premissa ou constitui a conclusão de um argumento válido formado a partir das proposições que a precedem na sequência.*

Prova Direta

Na definição acima, no caso em que q é formalmente dedutível, chamamos a proposição q de teorema e a sequência formada chama-se prova ou demonstração do teorema.

Exemplos

Exemplo 1

A soma de dois números ímpares resulta em um número par.

Exemplo 2

A soma de um número par e um número ímpar resulta em um número ímpar.

Obs: As soluções dos exemplos ímpares estão descritas no seguinte arquivo: "Aula__05__Ex.pdf"

Regras de Demonstração [2]

- Escreva o teorema a ser provado.
- Marque o início da prova com a palavra PROVA ou a palavra DEMONSTRAÇÃO.
- Escreva a prova de tal forma que ela seja auto-contida.
 - Identifique cada variável usada na prova juntamente com o seu tipo.

Exemplos: Seja x um número real maior que 2.

Suponha que m e n são inteiros.

- Escreva provas em linguagem natural, usando sentenças completas.

Erros Comuns [2]

- Argumentar a partir de exemplos:
 - Se $m = 14$ e $n = 3$ então $m + n = 17$, que é ímpar.
- Usar a mesma letra para representar duas coisas diferentes.
- Pular para uma conclusão, alegando a verdade de alguma coisa sem dar uma razão adequada.
- Assumir como verdadeiro o que deve ser provado.

Exemplos

Exemplo 3

O produto de quaisquer dois inteiros consecutivos é par.

Exemplo 4

Prove que o produto de três números consecutivos quaisquer é divisível por 3.

Exemplos

Exemplo 5

Resolva a equação $2x + 6 = 0$.

Exemplo 6

Mostre que $x = -3$ é solução da equação $x^2 - 9 = 0$.

Há diferenças entre os dois exemplos?

Observação sobre equações [3]

Costuma-se dar a seguinte explicação para resolver equações como $2x + 6 = 0$: $2x = -6$ (passamos o 6 para o segundo membro, mudando o seu sinal)

$$x = \frac{-6}{2} = -3 \text{ (passamos o 2 para baixo)}$$

Observação sobre equações [3]

Costuma-se dar a seguinte explicação para resolver equações como $2x + 6 = 0$: $2x = -6$ (passamos o 6 para o segundo membro, mudando o seu sinal)

$$x = \frac{-6}{2} = -3 \text{ (passamos o 2 para baixo)}$$

“Explicações” desse tipo são causa de erros frequentes como os descritos a seguir:

a) Se $3x = 6$, então $x = 6 - 3$.

b) Se $x + 5 = 10$, então $x = \frac{10}{5}$.

É sempre melhor dizer explicitamente, a cada passagem, o que realmente está sendo feito, como vimos no exemplo 5.

Exemplos

Exemplo 7

O lado AC de um triângulo ABC tem comprimento 3.8 e o lado AB tem comprimento 0.6. Se o comprimento do lado BC é um inteiro, qual o seu comprimento?

Exemplo 8

Se b e c são os catetos de um triângulo retângulo de hipotenusa a e altura h , mostre que $b + c < a + h$.

Considerações Finais

O que aprendemos

1. A demonstração direta é a forma mais simples de demonstração, e a mais óbvia: para demonstrar que $p \Rightarrow q$ assumamos que p é verdadeiro, e através de uma série de etapas, cada uma seguinte das anteriores, conclui-se q .

Referências



J. Daghljan.

Lógica e Álgebra de Boole.

Editora Atlas S.A., 2009.



Antonio Alfredo Ferreira Loureiro.

Métodos de prova.

Technical report, UFMG.



Elon Lages Lima.

Temas e problemas elementares.

Sociedade Brasileira de Matematica, 2006.