Elementos de Álgebra

Aula 04: Propriedades das Operações. Matrizes Especiais.

Profª Dra. Karla Lima

Sumário

Multiplicação - Propriedades

Propriedades

A multiplicação de matrizes apresenta as seguintes propriedades:

1. **É associativa:** Quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{jk})_{n\times p}$ e $C = (c_{kl})_{p\times r}$, tem-se
$$A(BC) = (AB)C.$$
2. **É distributiva à direita em relação à adição:** Quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{n\times p}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$ e $C = (c_{ij})_{m\times n}$, tem-se
$$A(B + C) = AB + AC.$$
3. **É distributiva à esquerda em relação à adição:** Quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{p\times m}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$ e $C = (c_{ij})_{m\times n}$, tem-se
$$(B + C)A = BA + CA.$$

Propriedades

4. Quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{jk})_{n\times p}$ e qualquer número real k, tem-se

$$(kA)B = A(kB) = k(AB)$$

Observação: É muito importante notar que a multiplicação de matrizes **não é comutativa**.
Para duas matrizes quaisquer, **NÃO É SEMPRE VERDADE** que

$$AB = BA.$$

Por exemplo, se $A_{3\times 2}$ e $B_{2\times 4}$, temos que AB existe, mas BA não.

Exemplos

Exemplo 1: Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, qual das matrizes abaixo comuta com A?

$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$E = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercício 2: Prove que, se A e B são matrizes comutáveis, então vale a igualdade:

$$(A + B)(A - B) = A^2 + B^2.$$

Exercício 2: Prove que, se A e B são matrizes comutáveis, então vale a igualdade:

$$(A+B)(A-B) = A^2 + B^2.$$

Exercício 3: Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, calcule:

a) $(A+B)^2$
b) $(A+B)(A-B)$

Matrizes Especiais

Matrizes Especiais

- **Matriz Linha:** é toda matriz do tipo $1 \times n$, com uma única linha.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- **Matriz Coluna:** é toda matriz do tipo $n \times 1$, com uma única coluna.

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- **Matriz Nula:** é toda matriz que possui todos os elementos iguais a zero.

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Matriz Quadrada de Ordem** n**:** é toda matriz do tipo $n \times n$, com o mesmo número de linhas e colunas.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

- **Diagonal Principal:** formada, numa **matriz quadrada** $A = (a_{ij})_{n \times n}$, pelos elementos da forma a_{ii}, que possuem índices iguais.

$$M = \begin{pmatrix} \color{red}{1} & 2 & 3 & 4 \\ 5 & \color{red}{6} & 7 & 8 \\ 9 & 10 & \color{red}{11} & 12 \\ 13 & 14 & 15 & \color{red}{16} \end{pmatrix}$$

$$\{a_{ij} | i = j\} = \{1, 6, 11, 16\}$$

- **Matriz Quadrada de Ordem** n**:** é toda matriz do tipo $n \times n$, com o mesmo número de linhas e colunas.
- **Diagonal Secundária:** formada, numa **matriz quadrada** $A = (a_{ij})_{n \times n}$, pelos elementos da forma a_{ij} nos quais $i + j = n + 1$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\{a_{ij} | i + j = n + 1\} = \{4, 7, 10, 13\}$$

Matrizes Especiais

- **Matriz Diagonal:** é toda matriz quadrada em que os elementos que não pertencem à diagonal principal são iguais a zero.

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -34 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$