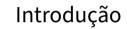


Sumário

- 1. Introdução
- 2. Conceitos Primitivos
- 3. Primeiras Propriedades
- 4. Posições Relativas Exercícios
- 5. Outras Definições Exercícios
- 6. Planos e Espaços Exercícios
- 7. Lista de Exercícios
- 8. Gabarito



Visão Geral



- A geometria estuda as propriedades das figuras usadas na medição de comprimentos, áreas e volumes.
- Essas propriedades são obtidas através de uma sequência lógica de raciocínios (que faz com que a Geometria seja uma excelente oportunidade para o desenvolvimento do pensamento lógico de qualquer pessoa!)
- Aprendendo a raciocinar com lógica, a argumentar e a justificar nossas afirmações, podemos conduzir melhor nossas vidas.

Início

- Teve seu início muito antes de Cristo.
- De forma empírica, foi especialmente desenvolvida pelos egípcios que a utilizaram para medir a terra nos trabalhos de irrigação.
- Mas coube aos gregos a formulação de uma cadeia lógica e rigorosa da Geometria.
- ► Euclides (330 275 A.C.) foi o primeiro matemático a introduzir uma estrutura estritamente lógica na Geometria, sintetizando trabalhos de vários séculos em sua famosa obra de 13 volumes: **Elementos**.

Conceitos Primitivos

O ponto inicial: ponto, reta e plano



- ▶ Pode parecer possível definir todos os entes da Geometria, mas percebam que para definir um termo (por exemplo, paralelogramos) empregamos outros termo (por exemplo, quadriláteros).
- Por isso, teremos que aceitar alguns termos sem defini-los. São eles: o ponto, a reta e o plano.

Noção exata e Notações



Mesmo sem defini-los, temos a noção exata desses entes:

- Um ponto pode ser representado pela marca produzida pela ponta fina de um lápis quando pressionada sobre uma folha de papel
- Parte de uma reta pode ser desenhada com a ajuda de uma régua, com duas setas nas suas pontas.
 - ightharpoonup Usaremos letras minúsculas como a, b, c, ..., para denotar as retas:
- Um plano pode ser visto como a superfície de uma parede que se estende indefinidamente em todas as direções.



• Usaremos letras gregas como α , β , γ , . . ., para denotar os planos:

Primeiras Propriedades

Postulados[Machado(2012)]



- Nem tudo na matemática pode ser provado!
- ► Isso se deve ao fato de que, quando demonstramos uma proposição, nos apoiamos em alguma proposição anteriormente provada.
- Assim, em algum momento, teremos que aceitar algumas afirmações sem demonstrá-las.
- Essas afirmações são denominadas **postulados**.
- As proposições que provarmos serão chamadas teoremas.

Observação



Os entes geométricos aqui trabalhados estão dentro de um espaço tridimensional.

O 1º Postulado



Postulado 1

Dados dois pontos distintos quaisquer, existe uma única reta que os contém.

Assim, diremos que dois pontos distintos determinam uma reta.



Neste caso, designaremos também a reta por \overrightarrow{AB} .

Consequência do Postulado 1



Quando duas retas, uma reta e um plano ou dois planos têm um ponto em comum, diz-se que eles se **interceptam**.

Teorema 1

Se duas retas distintas se interceptam, então a interseção contém um ponto apenas.

- ▶ **Hipótese**¹: as retas distintas r e s se interceptam.
- ► Tese²: o ponto de interseção é único.

¹Hipótese é um conjunto de condições que se supõe verdadeiras.

²Tese é a verdade que se pretende demonstrar.

Teorema 1: Demonstração



Vamos usar a prova por contradição, supondo que a negativa da tese seja verdadeira. Ou seja, existe mais de um ponto de interseção.

Sejam P e Q dois pontos em comum das retas r e s. Então, pelo Postulado 1, existe uma única reta que passa pelos pontos P e Q. Como P, $Q \in r$ e P, $Q \in s$, devemos ter r = s, contrariando a hipótese de que as duas retas são distintas.

Portanto, não pode haver mais de um ponto de interseção entre duas retas distintas, como queríamos.

Posições Relativas

Retas Concorrentes



Definição 1

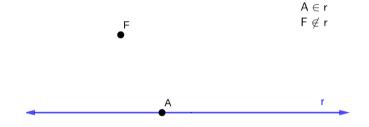
Quando duas retas têm apenas um ponto em comum, elas são ditas concorrentes.

2º Postulado



Postulado 2

Dada uma reta qualquer, existem pontos que pertencem a r e pontos que não pertencem a r.

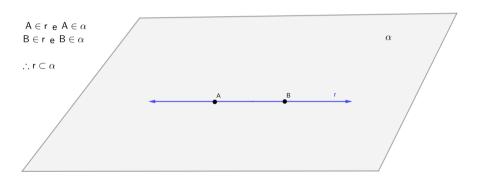


3º Postulado



Postulado 3

Se dois pontos de uma reta pertencem a um plano, então esta reta está contida neste plano.

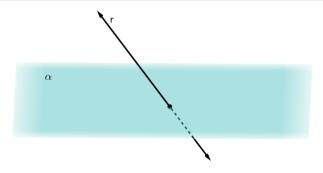


Consequência do Postulado 3



Teorema 2

Se uma reta intercepta um plano que não a contém, então a interseção contém um ponto apenas.



Demonstração do Teorema 2

- ▶ **Hipótese:** a reta r intercepta o plano α que não a contém .
- ► Tese: o ponto de interseção é único.

Novamente, usaremos a prova por contradição.

Negando a tese, temos que existe mais de um ponto de interseção. Com isso, temos dois pontos A e B que estão tanto no plano α quanto na reta r. Como A e B determinam a reta r, e ambos estão em α , segue do Postulado 3 que a reta r está contida no plano, contradizendo a nossa hipótese.

Portanto, concluímos que não pode haver mais de um ponto de interseção se a reta não está contida no plano, como queríamos demonstrar.

Reta Secante. Pontos Colineares



Definição 2

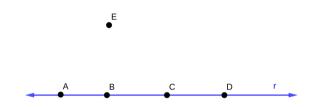
Quando uma reta e um plano têm apenas um ponto em comum, diz-se que a reta é **secante** ao plano.

Definição 3

Diz-se que os pontos de um conjunto estão **alinhados** ou são **colineares**, se existe uma reta que os contém.

Pontos Colineares





Os pontos A, B, C e D são colineares.

Qualquer conjunto que tenha dois pontos da reta dada e o ponto E não vai ser colinear: por exemplo, A, B e E não são colineares (qual Postulado garante essa afirmação?)

Pontos Coplanares



Definição 4

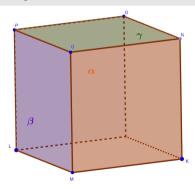
Diz-se que os pontos de um conjunto são **coplanares**, se existe um plano que os contém.

Pontos Coplanares



Exemplo 1

A figura abaixo é um cubo. Cada face visível representa um plano α , β ou γ .



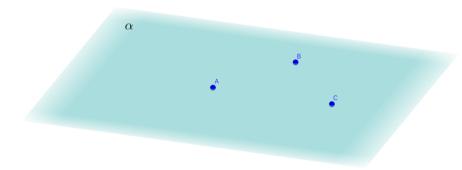
- Os pontos K, M e N são coplanares, pois estão no mesmo plano α .
- Os pontos L, M e P são coplanares, pois estão no mesmo plano β .
- Os pontos N, O, P e M não são coplanares.
- O que pode ser dito sobre os pontos O, P e Q? E dos pontos K, M, N e P?

4º Postulado



Postulado 4

Dados três pontos quaisquer não colineares, existe um único plano que os contém.



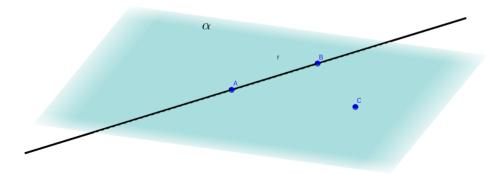
Três pontos não colineares determinam um plano!

Consequência do Postulado 4



Teorema 3

Dados uma reta e um ponto fora dela, existe um único plano que os contém.



Demonstração do Teorema 3

- ▶ **Hipótese:** C é um ponto não pertencente à reta r ($C \notin r$).
- ► **Tese:** Existe um único plano que contém *C* e *r*.

Usaremos a prova direta (partimos da hipótese).

Sejam A e B dois pontos distintos sobre a reta r. Como C não pertence à reta $\overrightarrow{AB} = r$, os três pontos A, B e C são não colineares e, segue do Postulado 4, determinam um único plano α . Pelo Postulado 3, como dois pontos distintos de r pertencem a α , então a reta está contida neste plano.

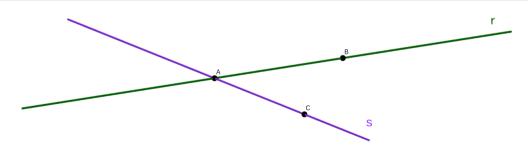
Portanto, o único plano determinado por A, B e C, contém C e a reta r.

Consequência do Postulado 4



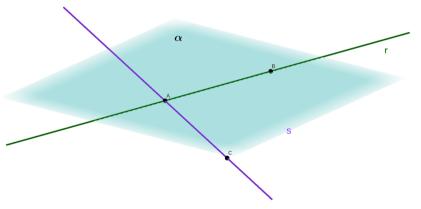
Teorema 4

Se duas retas são concorrentes, então existe um único plano que as contém.



Demonstração do Teorema 4

- ▶ **Hipótese:** As retas *r* e *s* são concorrentes .
- ► Tese: Existe um único plano que as contém.



Demonstração do Teorema 4



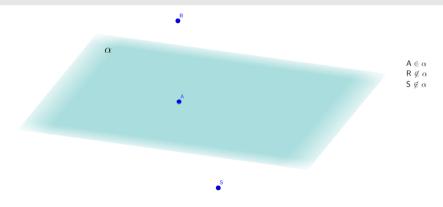
Sejam A o único ponto de interseção entre as retas. Sejam B e C dois pontos distintos de A, com $B \in r$ e $C \in s$. Com isso, obtemos 3 pontos não colineares³ que, pelo Postulado 4, determinam um único plano α . Como A e B pertencem à reta r e ao plano α , o Postulado 3 garante que r está contida no plano α ($r \subset \alpha$). Analogamente, B e C pertencem à reta s e ao plano α , de onde concluímos que s está contida no plano α ($s \subset \alpha$). Portanto, o único plano determinado por A, B e C, contém r e s. Não há outro plano que satisfaça a condição de conter r e s, uma vez que esse plano também deve conter os pontos A, B e C, não podendo ser distinto de α .

³Para exercitar: o que garante essa afirmação?

5° Postulado

Postulado 5

Dado um plano α qualquer, existem pontos que pertencem a α e pontos que não pertencem a α .



Exercício 1



Preencha corretamente as lacunas⁴:

- a) Dados dois pontos distintos, então existe exatamente um(a) _____ que os contém.
- b) Pontos _____ são aqueles situados sobre uma mesma reta.
- c) Dados três pontos não-colineares, então existe exatamente um(a) _____ que os contém.
- d) Se dois pontos distintos pertencem a um plano, então a reta que os contém _____ no plano.

⁴Identifique qual resultado foi utilizado.

Exercício 2



- a) Qual dos postulados assegura que uma reta não contém todos os pontos de um plano que a contenha?
- b) Qual dos postulados assegura que um plano não contém todos os pontos do espaço?

Exercício 3



Quantas retas podemos traçar passando por pares de pontos distintos de cada um dos conjuntos abaixo⁵?

- a) $\{A, B, C\}$ é um conjunto de pontos colineares.
- b) $\{A, B, C, D\}$ é um conjunto coplanar onde três quaisquer desses pontos não estão alinhados.
- c) $\{A, B, C, D\}$ é um conjunto de pontos não coplanares.

⁵Esboce os conjuntos!

Outras Definições

Segmentos



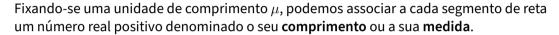
Definição 5

Dados dois pontos quaisquer A e B em uma reta r, chama-se **segmento de reta** de extremos A e B ao conjunto formado pelos pontos A e B, e por todos todos os pontos de r entre A e B.



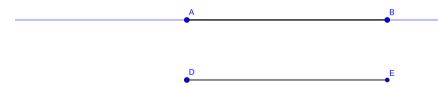
Denotaremos por \overline{AB} o segmento de extremos A e B.

Segmentos



Definição 6

Dois segmentos são ditos **congruentes** se têm a mesma medida.

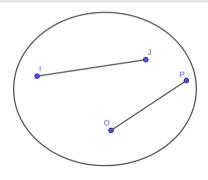


Conjuntos Convexos

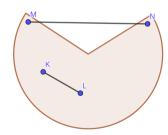


Definição 7

Um conjunto A chama-se **convexo**, se para cada dois pontos X e Y de A, o segmento \overline{XY} está contido em A.



Conjunto Convexo



Conjunto Não-Convexo

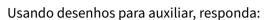
Conjuntos Convexos



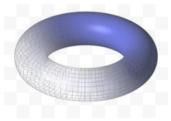
Exemplo 2

Quais dos conjuntos a seguir são convexos?

- Uma reta.
- Um plano.
- Uma reta menos um ponto.
- Um plano menos um ponto.



- a) A circunferência é um conjunto convexo?
- b) A região do plano delimitada por uma circunferência é um conjunto convexo?
- c) Um toro superfície que tem a forma de uma câmara de ar de pneu é um conjunto convexo?





- a) Demonstre que a interseção de dois conjuntos convexos, que têm ao menos dois pontos em comum, é um conjunto convexo.
- b) Faça um desenho para mostrar que a união de dois conjuntos convexos pode não ser um conjunto convexo.



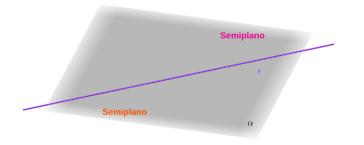
- a) Dê um contra-exemplo para mostrar que é falsa a sentença:
 'Uma infinidade de pontos alinhados é uma reta.'
- b) Por que uma mesa de quatro pernas às vezes balança e uma de três pernas está sempre firme?

Planos e Espaços

6° Postulado

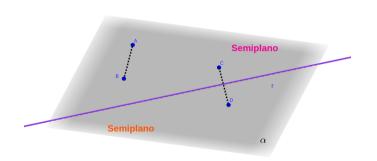
Postulado 6

Toda reta de um plano divide-o em dois conjuntos, os quais são convexos, denominados **semiplanos**.



A reta r chama-se **aresta** de cada semiplano de α .

6° Postulado



- ► Se A e B pertencem a um mesmo semiplano, o segmento AB está contido no mesmo semiplano e não intercepta a reta r.
- ► Se os pontos *C* e *D* pertencem a semiplanos distintos, o segmento \overline{CD} intercepta a reta *r*.

7º Postulado



Postulado 7

Todo plano separa o espaço em dois conjuntos, os quais são convexos, denominados **semiespaços.**

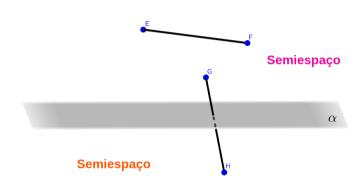
Semiespaço

 O plano α chama-se face de cada um dos semiespaços.

 α

Semiespaço

7º Postulado



- Se E e F pertencem a um mesmo semiespaço, o segmento AB está contido no mesmo semiespaço e não intercepta o plano α.
- Se os pontos G e H pertencem a semiespaços distintos, o segmento \overline{CD} intercepta o plano α .



- a) Dois planos que se intersectam separam o espaço em quantas regiões?
- b) Dois planos paralelos separam o espaço em quantas regiões?

Lista de Exercícios

Faça uma figura para ilustrar as seguintes situações:

- a) Dois planos que não se interceptam.
- b) Uma reta e um plano que se interceptam em exatamente um ponto.
- c) Uma reta e um plano que não se interceptam.
- d) Uma reta contida em um plano.
- e) Dois planos que se interceptam.
- f) Três planos que se interceptam em um ponto.
- g) Três planos que se interceptam em uma reta.
- h) Uma reta que intercepta dois planos em diferentes pontos.
- i) Um sólido que seja limitado por superfícies planas, que não seja convexo.



Prove que:

- a) Todo plano contém no mínimo três pontos não colineares.
- b) O espaço contém no mínimo quatro pontos não coplanares.
- c) Se três pontos estão alinhados então eles são coplanares.



- a) Quantas retas passam:
 - i) Por um ponto dado?
 - ii) Por dois pontos distintos?
- b) Quantas planos passam:
 - i) Por um ponto dado?
 - ii) Por dois pontos distintos?
 - iii) Por três pontos distintos?

Classifique como verdadeiro (V) ou falso (F):

- a) Três pontos distintos são colineares.
- b) Três pontos quaisquer são coplanares.
- c) Quatro pontos distintos determinam quatro retas.
- d) Por quatro pontos distintos pode passar uma só reta.
- e) Três pontos distintos são sempre colineares.
- f) Se quatro pontos são coplanares, então eles estão alinhados.
- g) Dois pontos quaisquer são colineares.
- h) Dois pontos quaisquer são coplanares.



- i) Dois pontos distintos determinam um plano.
- j) Dois pontos distintos determinam uma reta.
- k) Dois pontos distintos determinam um plano.
- l) Três pontos distintos determinam um plano.
- m) Por uma reta passam infinitos planos.
- n) É convexo o conjunto constituído por dois pontos apenas.
- o) Uma reta possui infinitos pontos.
- p) No plano, duas retas distintas ou não se interceptam ou se interceptam num só ponto.

Gabarito

- a) i) Infinitas.
 - ii) Apenas uma (postulado 1).
- b) i) Infinitos.
 - ii) Infinitos.
 - iii) Apenas um (postulado 4) se forem não colineares. Infinitos em caso contrário.



a) F	i) F
b) V	j) V
c) F	k) F
d) F	l) F
e) F	m) V
f) F	n) F
g) V	o) V
h) F	p) V

Referencias I





P. Machado.

Fundamentos de Geometria Plana.

CAED-UFMG, Belo Horizonte, 2012.

URL https://www.ime.usp.br/~afisher/ps/MAT0230/Fundamentos_de_geometria_planaMachado.pdf.