P1: 29/03/22

01

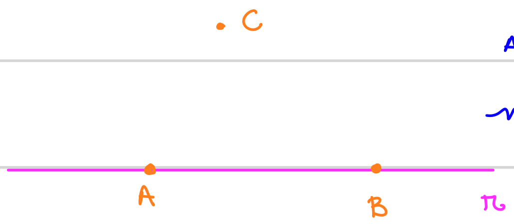
a) Se os pontos forem não colineares, existe um único plano que os contém. Logo, os planos são coplanares.

Se os pontos forem colineares, digamos numa reta r, podemos escolher um ponto P fora dela, de modo a gerar um plano α.

Como $r \subset \alpha$, os três pontos colineares iniciais pertencem ao plano e são coplanares.

b) A afirmação é falsa.

Pelo Postulado 2, dada uma reta, existem pontos que não pertencem à mesma. Assim, dados dois pontos colineares, podemos tomar um ponto fora da reta gerada pelos mesmos, de modo que os 3 pontos sejam não colineares:



A, B e C pontos não colineares.

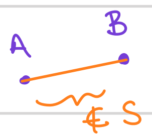
c) De fato, dados dois pontos A e B, eles determinam uma reta r. Fora de r, existe um ponto C tal que A, B e C são não colineares e, portanto, geram um plano α. Assim, A e B pertencem a um plano

α e são coplanares.

d) Falso.

Dados dois pontos distintos, o segmento de reta que os une contém infinitos pontos distintos dos pontos dados que, portanto, não pertencem ao conjunto inicial.

$S = \{A, B\}$



e) Com efeito, duas retas são distintas se possuem pontos que não são comuns às duas, podendo ter:

i) nenhum ponto em comum;

ii) alguns pontos em comum, apenas.

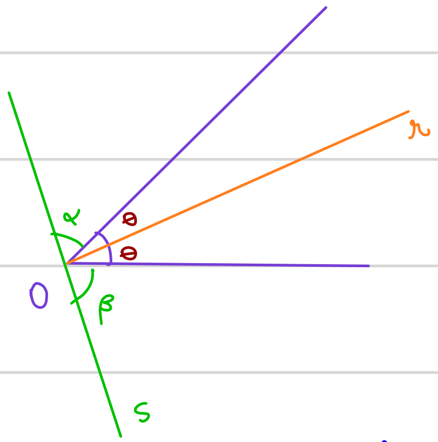
No caso i) não temos nada a acrescentar. No caso ii), mostraremos que tal interseção é única.

Suponha, por absurdo, que as retas distintas r e s possuem mais de um ponto em comum. Sendo A e B dois deles, existe uma única reta que os contém. Como $A, B \in r$ e $A, B \in s$, teríamos

$$r = s,$$

um absurdo. Portanto, a interseção deve ser única.

02



Hipótese: r é bissetriz de $\hat{O}$

$r \perp s$

Tese: $\alpha = \beta$.

Solução: Como $r \perp s$, temos que

$$\alpha + \theta = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 90^\circ - \theta$$

$$\beta + \theta = 90^\circ \Rightarrow \beta = 90^\circ - \theta.$$

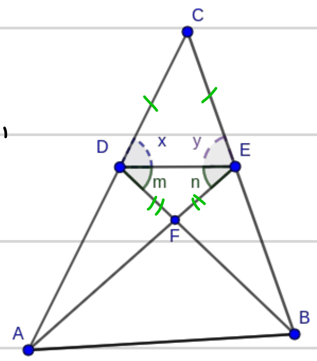
Portanto,

$$\alpha = 90^\circ - \theta = \beta \Rightarrow \alpha = \beta,$$

como queríamos demonstrar.

03

i) $x = y$ e $m = n \Rightarrow AC = BC$



Se $x = y$, então o triângulo DCE é isósceles, com $DC = CE$. (I)

Além disso, se $m = n$, então DEF também é isósceles, com $DF = FE$.

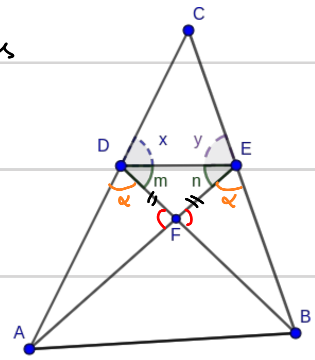
Do desenho, podemos inferir que:

$$x + m + A\hat{D}F = 180° \text{ e } y + n + B\hat{E}F = 180° \Rightarrow x + m + A\hat{D}F = y + n + B\hat{E}F.$$

Como $x = y$ e $m = n$, obtemos:

$$x - y - n + m + A\hat{D}F = y + n - y - n + B\hat{E}F \Rightarrow A\hat{D}F = B\hat{E}F = \alpha$$

Sobre os triângulos ADF e BEF, podemos afirmar que:



$A\hat{D}F = B\hat{E}F$ (provamos acima)

$DF = FE$ (ΔDFE é isósceles)

$D\hat{F}A = E\hat{F}A$ (ângulos opostos pelo vértice)

Pelo caso ALA, concluímos que

$$\Delta ADF = \Delta BEF$$

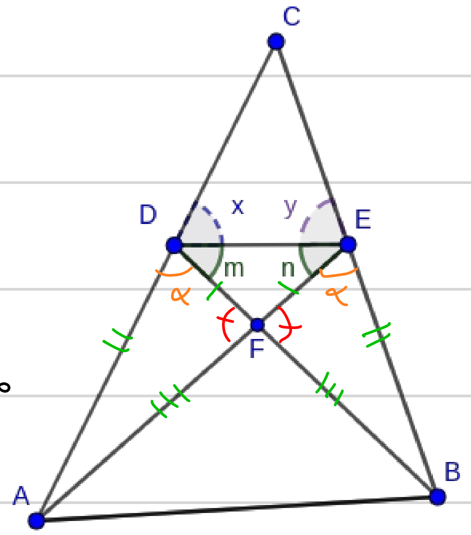
e, os lados opostos aos ângulos $D\hat{F}A$ e $E\hat{F}A$ são congruentes:

$$AD = BE. \quad \text{(II)}$$

De (I) e (II), obtemos

$$AC = AD + DC = BE + EC = BC,$$

como queríamos demonstrar.



ii) DF = EF e $x = y$ ⇒ ΔAFB é isósceles.

Com efeito, se DF = EF então o triângulo DFE é isósceles. Assim, os ângulos da base são congruentes: $m = n$.

Temos, portanto, que $x = y$ e $m = n$ e, pelo item i),

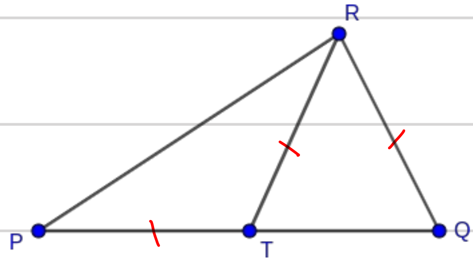
$$\Delta DFA = \Delta EFB,$$

com os lados opostos aos ângulos $A\hat{D}F$ e $B\hat{E}F$ congruentes:

$$AF = BF.$$

Portanto, ΔAFB é isósceles.

04 PT = TR = RQ ⇒ PR > RQ.

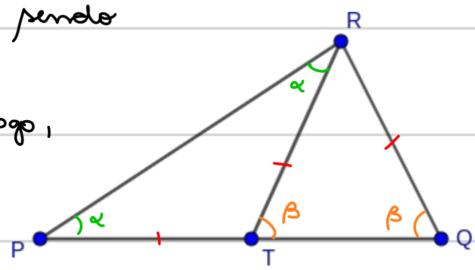


Da hipótese, podemos concluir que os triângulos PTR e TRQ são isósceles.

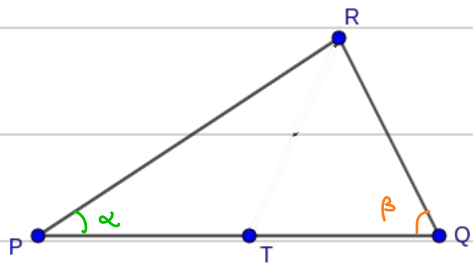
Com isso, obtemos a congruência:

$$T\hat{P}R = T\hat{R}P \quad e \quad R\hat{T}Q = R\hat{Q}T.$$

O ângulo β é tal que $\beta + P\hat{T}R = 180°$, sendo um ângulo externo a PTR em $P\hat{T}R$. Logo, β é maior que os ângulos internos de PTR não adjacentes a ele: $\beta > \alpha$.



Olhando agora o $\Delta\, PRQ$, temos



com $\alpha < \beta$. Assim, oposto ao maior ângulo deste triângulo temos o maior lado do mesmo, de onde segue que

$$PR > RQ.$$