UFGD

Universidade Federal
da Grande Dourados

Fundamentos da Matemática II

Lista de Exercícios: P1

Trigonometria Básica

1 - Arcos e Ângulos.

2 - Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo.

3 - Relações Trigonométricas

4 - Razões Trigonométricas Especiais. O Círculo Trigonométrico.

5 - Redução ao Primeiro Quadrante.

6 - Fórmulas e Operações com Arcos.

7 - Trigonometria em Triângulos Quaisquer.

Profa. Karla Katerine Barboza de Lima

FACET/UFGD

1 Arcos e Ângulos

Exercício 1 *Converta para radianos.*

a) $184°$

b) $210°$

c) $315°$

d) $240°$

e) $300°$

Exercício 2 *Converta para graus.*

a) $\dfrac{\pi}{6}\,rad$

b) $\dfrac{5\pi}{6}\,rad$

c) $\dfrac{2\pi}{3}\,rad$

d) $\dfrac{3\pi}{4}\,rad$

Exercício 3 *Um ângulo central de uma circunferência de raio* $30\,cm$ *intercepta um arco de* $6\,cm$. *Expresse o ângulo central* α *em radianos e em graus.*

Exercício 4 *Um ângulo central de uma circunferência de raio* $36\,cm$ *intercepta um arco de* $3\pi\,cm$. *Calcule o valor do ângulo central* α *que o arco acima determina na circunferência, em radianos e em graus.*

Exercício 5 *Calcule o comprimento* l *do arco* $\widehat{AB}$ *definido numa circunferência de raio* $r = 10\,cm$, *por um ângulo central de* $60°$.

Exercício 6 *Calcule a medida do ângulo central* $A\hat{O}B$ *que determina em uma circunferência de raio* r *um arco de comprimento* $\dfrac{2}{3}\pi r$.

Gabarito

1. (a) $\dfrac{46\pi}{45}\,rad$

   (b) $\dfrac{7\pi}{6}\,rad$

   (c) $\dfrac{7\pi}{4}\,rad$

   (d) $\dfrac{4\pi}{3}\,rad$

(e) $\dfrac{5\pi}{3}\,rad$

2. (a) $30°$

   (b) $150°$

   (c) $120°$

   (d) $135°$

3. $\alpha = \dfrac{1}{5}\,rad = \frac{36}{\pi}°$

4. $\alpha = \dfrac{\pi}{12}\,rad = 15°$

5. $l = \dfrac{10}{3}\pi\,cm$

6. $\dfrac{2}{3}\pi\,rad$

2 Relações Trigonométricas

Exercício 7 *Ache os valores de x que verificam simultaneamente $tg\,\alpha = \dfrac{x+1}{2}$ e $sec\,\alpha = \sqrt{x+2}$.*

Exercício 8 *Calcule o valor de $\cos x$, sabendo que $cotg\,x = \dfrac{2\sqrt{m}}{m-1}$, com $m > 1$.*

Exercício 9 *Se $sen\,x = \dfrac{1}{3}$ e $\cos x > 0$, calcule o valor da expressão*

$$y = \frac{1}{cossec\,x + cotg\,x} + \frac{1}{cossec\,x - cotg\,x}.$$

Exercício 10 *Calcule o valor de m para que $sen\,x = 2m+1$ e $\cos x = 4m+1$.*

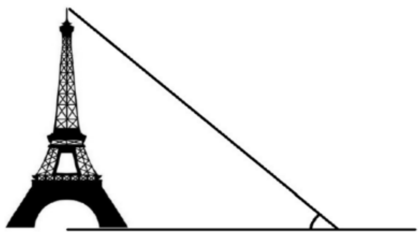
Gabarito

7. $x = -1$ ou $x = 3$.
8. $\cos x = \frac{2\sqrt{m}}{m+1}$.
9. $y = 6$.
10. $m = -\dfrac{1}{10}$ ou $m = -\dfrac{1}{2}$.

3 Razões Trigonométricas Especiais. O Círculo Trigonométrico.

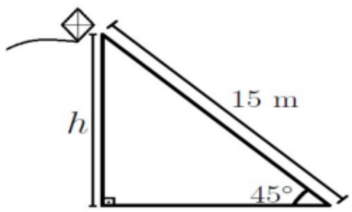
3.1 Razões Trigonométricas Especiais

Exercício 11 *Com o objetivo de calcular a altura de uma torre, um engenheiro mediu um ângulo de* $45°$ *do topo da torre com o solo, a uma distância de* 15 *metros do centro da base da torre, conforme mostra a ilustração abaixo.*

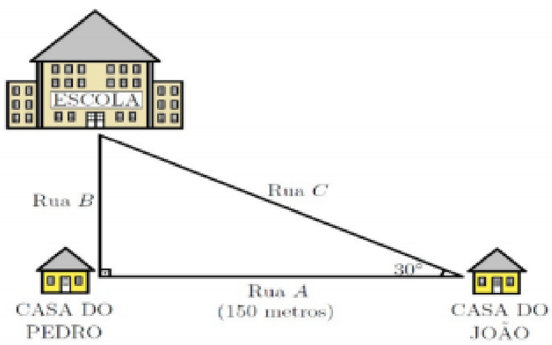


Verifique qual a altura da torre em relação ao solo.

Exercício 12 *Uma pipa é presa a um fio esticado que forma um ângulo de* $45°$ *com o solo. Se o comprimento do fio é de* 15 *metros, determine a altura da pipa em relação ao solo.*



Exercício 13 *João e Pedro são dois amigos que costumam ir juntos à escola. Geralmente, João se desloca até a casa do Pedro, passando pela rua A, para então se deslocarem juntos até a escola utilizando a rua B, conforme a figura abaixo.*

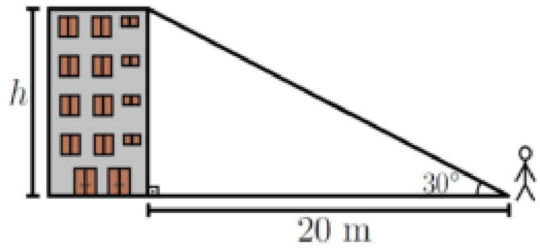


Certo dia, Pedro não pôde ir à aula, e João decidiu se deslocar até a escola utilizando a rua C. Sabendo que as ruas A e B são perpendiculares, que as ruas A e C formam um ângulo de $30°$, e que a distância entre as casas de João e Pedro é de 150 metros, determine:

a) *Qual a distância percorrida diariamente por João, passando pela casa de Pedro?*

b) *No dia em que João utilizou a rua C para ir até a escola, qual foi a distância percorrida?*

Exercício 14 *Determine a altura do prédio da figura abaixo, sabendo que a distância entre o observador e o prédio é de 20 metros e que o ângulo do solo ao topo do prédio é de $30°$.*



Gabarito

11. 15 metros.

12. $\dfrac{15\sqrt{2}}{2}$ metros.

13. a) Para ir até a escola, passando pela casa de Pedro, João percorre $50(3+\sqrt{3})$ metros.

    b) Para ir até a escola, passando pela rua C, João percorre $100\sqrt{3}$ metros.

14. $h = \dfrac{20\sqrt{3}}{3}$.

3.2 O Ciclo Trigonométrico

Exercício 15 *Encontre a primeira determinação positiva dos seguintes arcos:*

a) $1930°$

b) $-4350°$

c) $\dfrac{25\pi}{3}\,rad$

d) $\dfrac{26\pi}{5}\,rad$

e) $-\dfrac{49\pi}{6}\,rad$

f) $-\dfrac{2\pi}{3}\,rad$

Gabarito

15. a) $130°$

    b) $330°$

    c) $\dfrac{\pi}{3}\,rad$

    d) $\dfrac{6\pi}{5}\,rad$

    e) $\dfrac{11\pi}{6}\,rad$

    f) $\dfrac{4\pi}{3}\,rad$

4 Redução ao Primeiro Quadrante

Exercício 16 *Encontre os valores reais de t para os quais*

$$\cos x = \frac{1-t}{t}.$$

Exercício 17 *Estude o sinal de cada expressão abaixo:*

a) $sen\, 100° \cdot \cos 100°$

b) $sen\, 550° \cdot \cos 1000°$

c) $\dfrac{sen\, 1750° \cdot \cos 600°}{\cos 5000° \cdot \cos(-10)°}$

Exercício 18 *Encontre a expressão geral, em radianos, dos arcos x para os quais*

$$\cos\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -1.$$

Gabarito

16. $t \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ (ou seja, $t > \frac{1}{2}$).

17. a) Negativo.
    b) Negativo.
    c) Positivo.

18. Os arcos são da forma $x = \dfrac{1+\pi+2k\pi}{1-\pi-2k\pi}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

5 Fórmulas e Operações com Arcos

19. Utilizando as fórmulas do seno e cosseno da soma / diferença, prove que:

    a) $\text{sen}\,(\theta - \pi/2) = -\cos\theta$

    b) $\text{sen}\,(\theta + \pi/2) = \cos\theta$

    c) $\cos(\theta - \pi/2) = \text{sen}\,\theta$

    d) $\cos(\theta + \pi/2) = -\text{sen}\,\theta$

    e) $\text{sen}\,(\theta - \pi) = -\text{sen}\,\theta$

    f) $\cos(\theta - \pi) = -\cos\theta$

    g) $\text{sen}\,(\theta + \pi) = -\text{sen}\,\theta$

    h) $\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$

    i) $\text{sen}\,(\theta + 2\pi) = \text{sen}\,\theta$

    j) $\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$

20. Verifique as igualdades acima, desenhando no Ciclo Trigonométrico.

21. Sabendo que $x + y = 120°$ e que $tan\,x = \frac{3}{2}$, onde x é um arco do 1 quadrante, calcule a $cossec\,y$.

22. Demonstre que $(\text{sen}\,x + \cos x)^2 = 1 + 2\text{sen}\,(2x)$.

23. Sabendo que $sec\,x = -\frac{13}{5}$ e que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcule o valor de $\text{sen}\,(2x)$.

24. Mostre que

    a) $\text{sen}\,40° + \text{sen}\,20° = \cos 10°$

    b) $\text{sen}\,105° + \text{sen}\,15° = \frac{\sqrt{6}}{2}$

    c) $\cos 130° + \cos 110° + \cos 10° = 0$

    d) $\cos 220° + \cos 100° + \cos 20° = 0$

Gabarito

19.

20.

21. $cscy = \dfrac{2\sqrt{13}}{3 + 2\sqrt{3}}$

22.

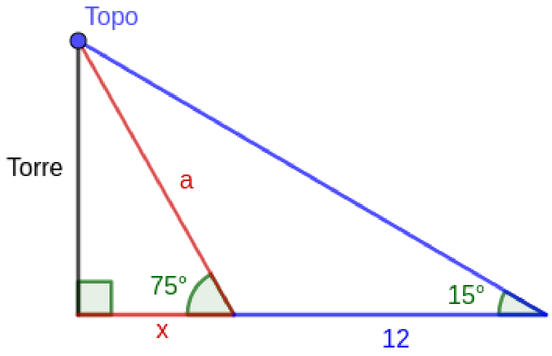
23. $\text{sen}\,(2x) = \frac{120}{169}$

24.

6 Trigonometria em Triângulos Quaisquer

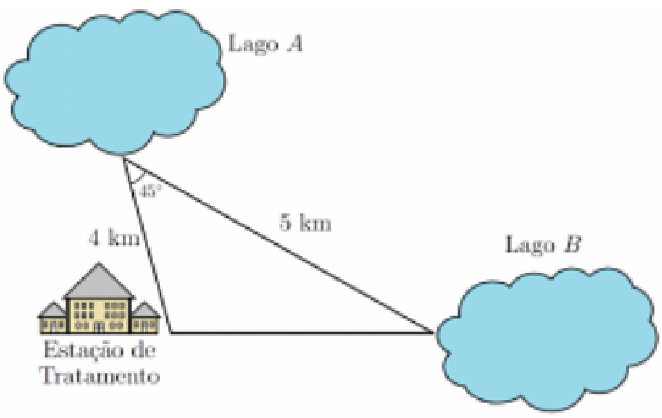
25. Para medir a altura de uma torre, um observador, distante da base da torre, vê o seu topo sob um ângulo de $75°$. Afastando-se mais $12\,m$ da torre, passa a ver o topo sob um ângulo de $15°$. Determine a altura da torre.

    Dica: use a lei dos senos para obter o valor de a.



26. Dado um triângulo ABC com lados $b = 1$ e $c = \sqrt{3}$ e ângulo interno $\hat{A} = 30°$, determine as medidas dos ângulos internos $\hat{B}$ e $\hat{C}$, classificando o triângulo quanto aos lados (escaleno, isósceles ou equilátero) e quantos aos ângulos (acutângulo ou obtusângulo), justificando a sua resposta.

27 Uma determinada cidade possui abastecimento de água proveniente de um reservatório chamado de Lago A, que se localiza a 4 quilômetros de distância da estação de tratamento de água. O lago A, por sua vez, é ligado ao lago B através de um canal retilíneo de 5 quilômetros de comprimento, que forma uma ângulo de $45°$ com o canal que leva a água à estação, conforme a figura abaixo.



Por questões estratégicas, a prefeitura pretende fazer um canal ligando diretamente o Lago B com a estação de tratamento. Qual deve ser o comprimento deste canal?

Gabarito

25. $2\sqrt{3}m$

26. $\hat{B} = 30^\circ$ e $\hat{C} = 120^\circ$, ou seja, o triângulo é isósceles e obtusângulo.

27. Aproximadamente $11,803$ quilômetros.

Referências

[1] Molter, A. and Nachtigall, C. and Zahn, M., *Trigonometria e Números Complexos: com aplicações*, Editora Blucher, 2020.

[2] Iezzi, G., *Fundamentos de matemática elementar, 3: trigonometria*, Atual, 2004.