GEOMETRIA PLANA

Aula 02

Ângulos

Karla Lima

Sumário

1. Conjuntos Convexos

2. Ângulos

3. Medida de um Ângulo

Conjuntos Convexos

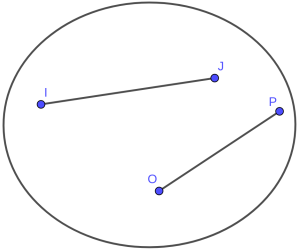
AVISO

Nesta aula, todas os entes geométricos estão situados num mesmo plano α.

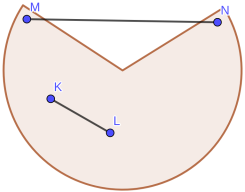
Conjuntos Convexos

Definição 1

Um conjunto A chama-se ***convexo****, se para cada dois pontos X e Y de A, o segmento* $\overline{XY}$ *está contido em A.*



Conjunto Convexo



Conjunto Não-Convexo

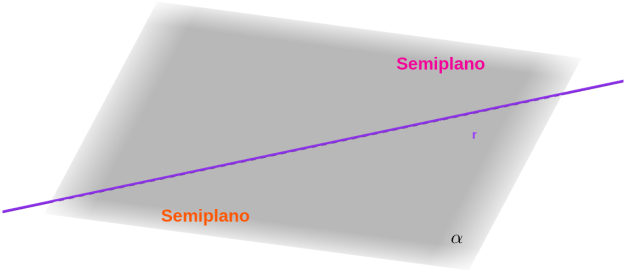
Conjuntos Convexos

- Os conjuntos convexos em geometria plana são regiões do plano onde, para qualquer par de pontos dentro da região, a linha reta que os une também está completamente dentro dessa região.
- Em termos mais simples, um conjunto é convexo se contém todos os pontos no segmento de linha que conecta qualquer par de pontos dentro do conjunto.
- Esses conjuntos não têm "buracos"ou "pontos salientes", e qualquer linha reta traçada entre dois pontos dentro do conjunto permanece dentro dele.
- Exemplos típicos de conjuntos convexos são os polígonos simples, como triângulos, quadrados e círculos.

Postulado da Separação dos Pontos de um Plano

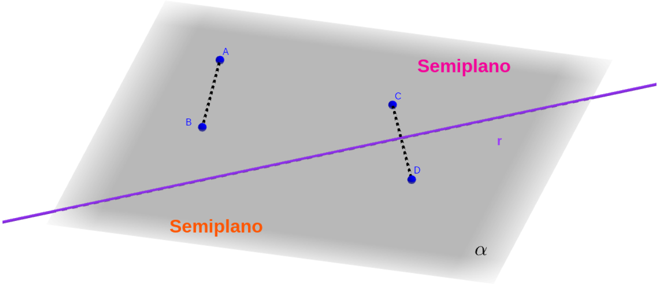
Postulado da Separação dos Pontos de um Plano

Toda reta de um plano divide-o em dois conjuntos, os quais são convexos, denominados **semiplanos.**



A reta r chama-se **aresta** de cada semiplano de α.

Postulado da Separação dos Pontos de um Plano



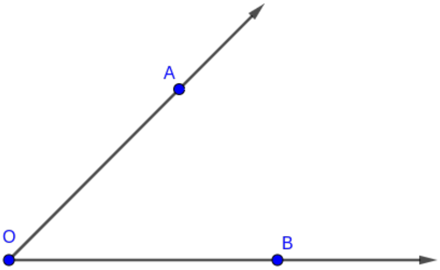
- Se A e B pertencem a um mesmo semiplano, o segmento $\overline{AB}$ está contido no mesmo semiplano e não intercepta a reta r.
- Se os pontos C e D pertencem a semiplanos distintos, o segmento $\overline{CD}$ intercepta a reta r.

Ângulos

Ângulos

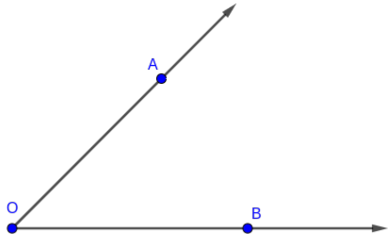
Definição 2

*Chamamos de **ângulo** a figura formada por duas semirretas que têm a mesma origem.*



As semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são chamados **lados** do ângulo e a origem comum O é o seu vértice.

Notações



Para denotar este ângulo, escrevemos:

- $\hat{O}$
- $A\hat{O}B$
- $B\hat{O}A$
- uma letra grega: $\alpha, \beta, \gamma, \eta, \ldots$

Ângulos Convexos e Côncavos (não convexos)

Chamamos de **ângulo convexo**, aquele em que seus lados formam uma região convexa np plano. Caso contrário, dizemos que ele é côncavo.

Inicialmente, trabalharemos apenas com ângulos convexos. Mas adiante, incluiremos os ângulos côncavos.

Interior

Definição 3

*Diz-se que um ponto P pertence ao **interior** de um ângulo $A\hat{O}B$, se*

- *P e A estão num mesmo semiplano definido pela reta $\overleftrightarrow{OB}$;*
- *P e B estão num mesmo semiplano definido pela reta $\overleftrightarrow{OA}$.*

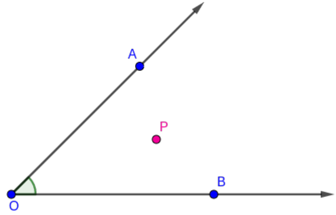


Figura 1: P pertence ao interior do ângulo $A\hat{O}B$

Exterior

Definição 4

*O **exterior** de um ângulo $A\hat{O}B$ é o conjunto de todos os pontos do plano que o contém, tais que:*

- *não pertencem aos lados do ângulo;*
- *não pertencem ao interior do ângulo dado.*

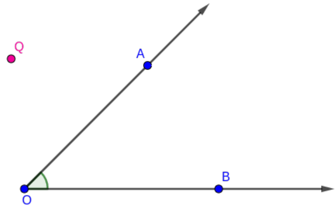
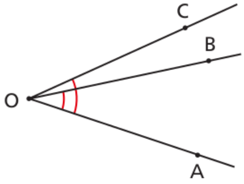


Figura 2: Q pertence ao exterior do ângulo $A\hat{O}B$

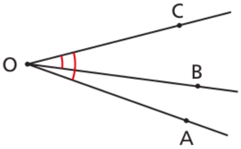
Ângulos Consecutivos

Definição 5

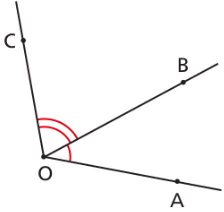
Dois ângulos são ditos ***consecutivos*** *se têm o mesmo vértice e um lado em comum.*



AÔB e AÔC são consecutivos ($\overrightarrow{OA}$ é o lado comum)



AÔC e BÔC são consecutivos ($\overrightarrow{OC}$ é o lado comum)



AÔB e BÔC são consecutivos ($\overrightarrow{OB}$ é o lado comum)

Ângulos Adjacentes

Definição 6

Dois ângulos consecutivos que não possuem pontos internos em comum, são denominados ***adjacentes****.*

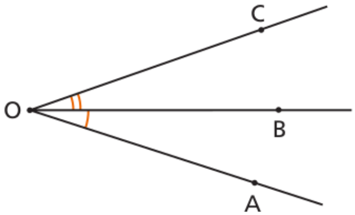


Figura 3: Os ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são adjacentes.

Ângulos Opostos pelo Vértice

Definição 7

Dois ângulos são ditos ***opostos pelo vértice****, se os lados de um deles são as semirretas opostas dos lados do outro.*

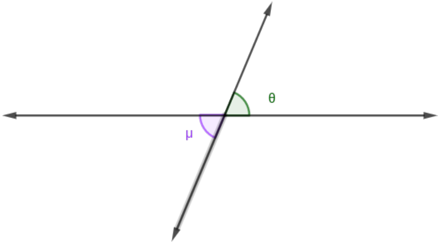
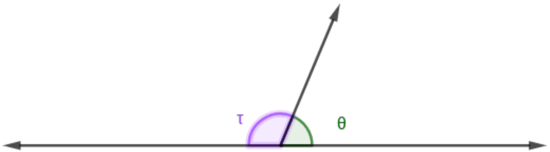


Figura 4: Os ângulos μ e θ são opostos pelo vértice.

Ângulos Suplementares

Definição 8

Dois ângulos adjacentes, cujos lados não comuns são semirretas opostas, são denominados ***suplementares****.*



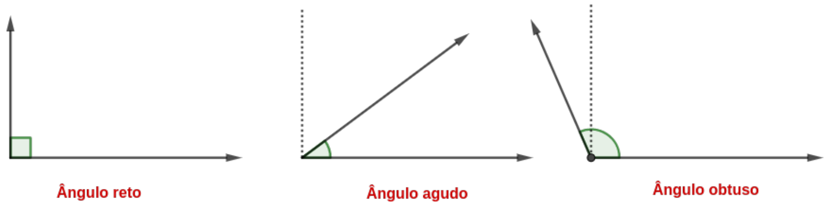
- Dizemos que τ é um **ângulo suplementar adjacente** de θ (e vice-versa).

Tipos de Ângulos

Definição 9

Um ângulo $A\hat{O}B$ é dito:

- ***reto**, se é congruente a seu suplementar adjacente;*
- ***agudo**, se é um ângulo menor que um ângulo reto;*
- ***obtuso**, se é um ângulo maior que um ângulo reto.*



Medida de um Ângulo

Medida de Ângulos

- As unidades mais utilizadas para medir ângulos (sua amplitude) são o **grau** e **radiano**.

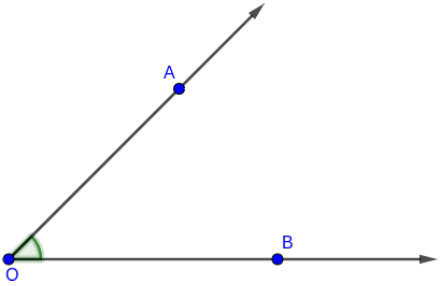


Figura 5: A área em verde representa o ângulo $A\hat{O}B$

Medida de um Ângulo

- Os graus são convenientes para muitas aplicações cotidianas e também são amplamente compreendidos e utilizados em matemática, física e outras disciplinas.
- Os radianos são convenientes para cálculos trigonométricos e matemáticos avançados, especialmente quando se lida com funções trigonométricas.

Medida de um Ângulo: Graus

- O **ângulo de um grau** (1°) é o ângulo obtido ao dividirmos o ângulo reto em 90 ângulos iguais. Com isso, um ângulo reto possui 90°.
- O **ângulo de um minuto** $(1')$ é o ângulo obtido ao dividirmos o ângulo de 1° em 60 partes iguais:

$$1' = \frac{1^\circ}{60}.$$

- O **ângulo de um segundo** $(1'')$ é o ângulo obtido ao dividirmos o ângulo de $1'$ em 60 partes iguais:

$$1'' = \frac{1'}{60} = \frac{1^\circ}{3600}.$$

Medidas de um ângulo

- Todo ângulo tem sua medida, em graus, de 0 à 180. A medida de um ângulo é zero se, e somente se, seus lados são semirretas coincidentes. Se seus lados são semirretas opostas, sua medida é 180°.

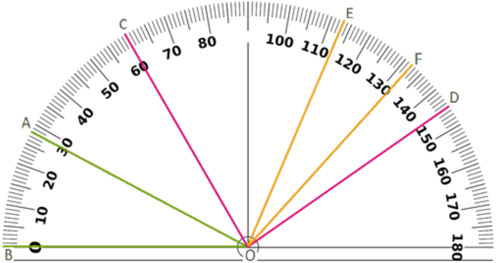


Figura 6: Transferidor: a ’régua’ para medir ângulos

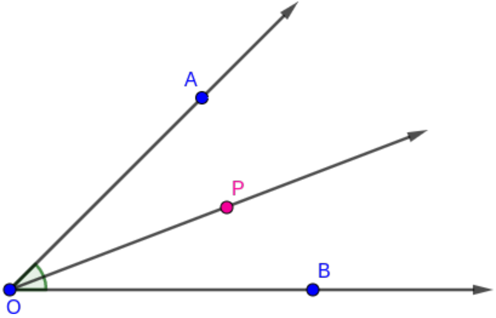
Ângulos Congruentes

Definição 10

Dois ângulos são ditos ***congruentes*** *se têm a mesma medida.*

Adição de Ângulos

- **Postulado Da adição de Ângulos:** Se P é um ponto de interior de um ângulo $A\hat{O}B$, então $A\hat{O}B = A\hat{O}P + P\hat{O}B$.



Bissetriz

Definição 11

Seja P um ponto interior do ângulo $A\hat{O}B$. A ***bissetriz*** *do ângulo $A\hat{O}B$, é a semirreta $\overrightarrow{OP}$, tal que $A\hat{O}P = P\hat{O}B$.*

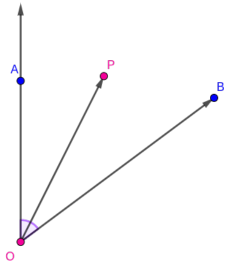


Figura 7: Os ângulos $A\hat{O}P$ e $P\hat{O}B$ possuem a mesma medida.

Ângulos Complementares

Definição 12

*Dois ângulos são ditos **complementares**, se a soma de suas medidas é 90°. Cada um deles é denominado o **complemento** do outro.*

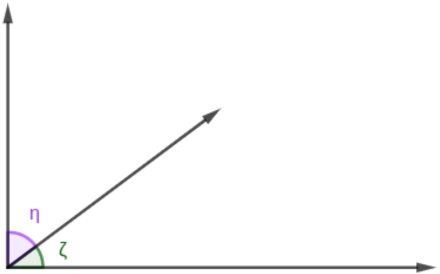


Figura 8: Temos que $\eta + \zeta = 90^\circ$, logo são ângulos complementares.

Ângulos

Definição 13

Denominamos de ângulo ***raso*** *ao ângulo cujos lados são semirretas opostas (estão sobre a mesma reta, em sentidos opostos).*

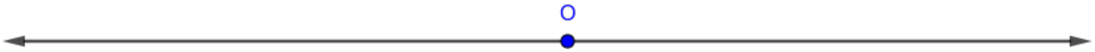


Figura 9: $\hat{O}$ é um ângulo raso

Teorema

Teorema 1

Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

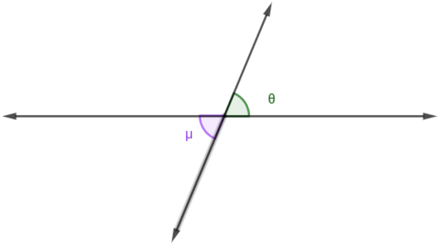


Figura 10: Os ângulos μ e θ são opostos pelo vértice.

Demonstração do Teorema 1

- **Hipótese:** μ e θ são opostos pelo vértice .
- **Tese:** $\mu = \theta$.

Usaremos a prova direta (partimos da hipótese).

Seja τ o ângulo simultaneamente adjacente aos ângulos μ e θ.

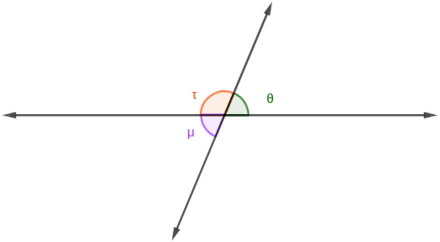
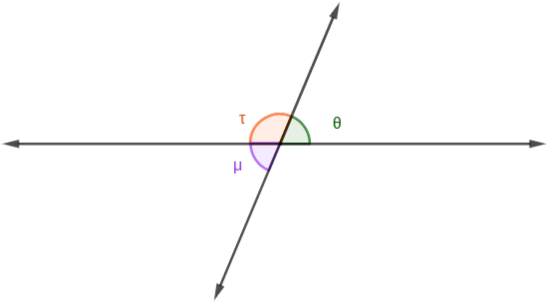


Figura 11: Os ângulos μ e θ são adjacentes ao mesmo ângulo τ.

Demonstração do Teorema 1



Com isso,

$$\mu + \tau = 180^\circ \quad \text{e} \quad \theta + \tau = 180^\circ.$$

Daí, obtemos

$$\mu + \tau = \theta + \tau \Rightarrow \mu + \tau - \tau = \theta + \tau - \tau$$
$$\Rightarrow \mu = \theta.$$

$\blacksquare$

Postulado

- **Postulado da Unicidade:** Qualquer que seja o número real ζ, com $0 < \zeta < 180$, podemos construir um único ângulo de ζ graus, a partir de uma semirreta dada num semiplano.