ELEMENTOS DE ARITMÉTICA

Aula 05

Diferença. Técnicas de Demonstração. Infinito.

Karla Lima

Sumário

Subtração entre Números Naturais

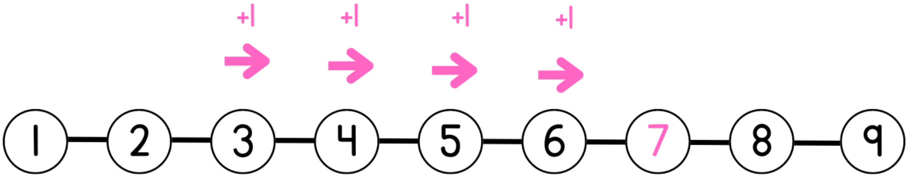
Definição

Definição 1

Dados dois números naturais a e b tais que $a < b$, o número de deslocamentos para a direita partindo de a para atingir b será representado por $b - a$ e será chamado de ***diferença*** *entre b e a.*

Diferença

Desloca-se o número 3 para a direita de 4 posições para alcançar o número 7.



Logo, 7-3 = 4.

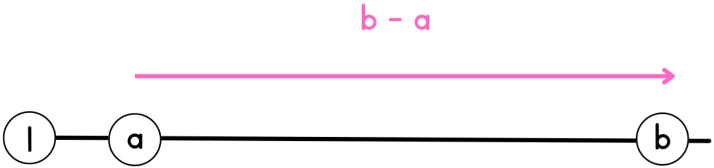
Diferença

- A operação $3 - 7$ é uma operação no conjuntos dos números naturais? O resultado é um número natural?
- Você consegue entender por que, na definição da operação diferença de $b - a$, exigimos que $a < b$?

Diferença

Pela definição de $b - a$, temos que

$a + (b-a) = b$.



O número $b - a$ pode ser interpretado como

o quanto falta a a para atingir b.

Diferença

Portanto, se tivermos uma igualdade entre números naturais do tipo

$$a + c = b,$$

então

$$c = b - a.$$

Exemplos

1. Tenho 200 reais, mas uma bicicleta custa 800 reais, quanto falta para eu poder comprar a bicicleta?

Um pouco sobre Técnicas de Demonstração

Condicional

Definição 2

Duas proposições formam uma ***condicional*** *quando for possível colocá-las na seguinte forma:*

Se (proposição 1), então (proposição 2).

Condicional

Definição 2

Duas proposições formam uma ***condicional*** *quando for possível colocá-las na seguinte forma:*

Se (proposição 1), então (proposição 2).

- a proposição 1 é chamada de antecedente, e a proposição 2 de consequente;

Condicional

Definição 2

*Duas proposições formam uma **condicional** quando for possível colocá-las na seguinte forma:*

Se (proposição 1), então (proposição 2).

- a proposição 1 é chamada de antecedente, e a proposição 2 de consequente;
- o símbolo utilizado para ligar as duas proposições de uma condicional é $\Rightarrow$, em matemática.

Exemplo

Exemplo 1

Se estudarmos para a prova, então teremos uma chance maior de tirar uma boa nota.

Neste exemplo, a proposição condicional afirma que se a condição "estudarmos para a prova" for verdadeira, então a conclusão "teremos uma chance maior de tirar uma boa nota" também será verdadeira.

Exemplo

Exemplo 2

Se você regar as plantas regularmente, então elas vão crescer saudáveis.

Neste caso, a condição é "regar as plantas regularmente", e a conclusão é "elas vão crescer saudáveis". Isso significa que se a condição for cumprida (regar as plantas regularmente), então a conclusão será verdadeira (as plantas crescerão saudáveis).

Bicondicional

Quando temos uma afirmação do tipo

’ (proposição 1) se, e somente se, (proposição 2)’

devemos provar duas coisas:

1. Se (proposição 1) acontece, então (proposição 2) acontece.
2. Se (proposição 2) acontece, então (proposição 1) acontece.

- **Você vai à festa se e somente se seus amigos também forem.**
  1. Se você for à festa, então seus amigos também irão.
  2. Se seus amigos forem à festa, então você também irá.

Portanto, a presença na festa está condicionada à presença dos seus amigos, e vice-versa.

Bicondicional

- Vamos nos encontrar no restaurante se e somente se ambos estivermos livres na sexta-feira.

Bicondicional

- Vamos nos encontrar no restaurante se e somente se ambos estivermos livres na sexta-feira.
    1. Se ambos estiverem livres na sexta-feira, então eles se encontrarão no restaurante.

Bicondicional

- Vamos nos encontrar no restaurante se e somente se ambos estivermos livres na sexta-feira.
    1. Se ambos estiverem livres na sexta-feira, então eles se encontrarão no restaurante.
    2. Se decidirem se encontrar no restaurante, então ambos estarão livres na sexta-feira.

Bicondicional

- Vamos nos encontrar no restaurante se e somente se ambos estivermos livres na sexta-feira.
    1. Se ambos estiverem livres na sexta-feira, então eles se encontrarão no restaurante.
    2. Se decidirem se encontrar no restaurante, então ambos estarão livres na sexta-feira.

Assim, o encontro no restaurante está condicionado à disponibilidade de ambos na sexta-feira, e vice-versa. Se ambas as condições forem atendidas, o encontro ocorrerá; caso contrário, não acontecerá.

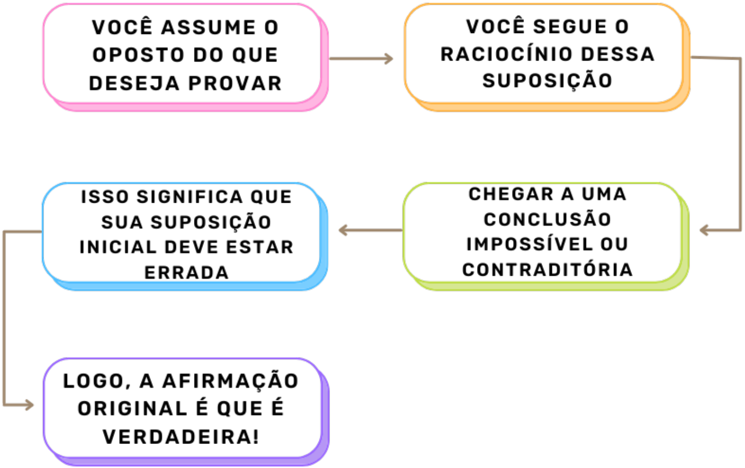
Prova por Redução ao Absurdo

- Dada uma proposição só há duas formas de classificá-la: ou a afirmação é verdadeira ou a afirmação é falsa. Nunca as duas coisas ao mesmo tempo.
- Quando uma afirmação é verdadeira, sua negativa é falsa.
- Quando uma afirmação é falsa, sua negativa é verdadeira.

Prova por Redução ao Absurdo

- A prova por redução ao absurdo é uma técnica usada na lógica e na matemática para provar que uma afirmação é verdadeira, mostrando que a suposição contrária leva a uma contradição.
- Como funciona?

Prova por Redução ao Absurdo



Prova por Redução ao Absurdo

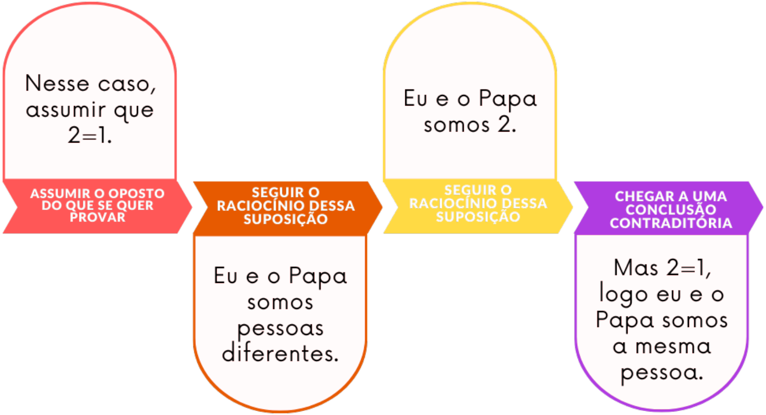
É COMO SE VOCÊ DISSESSE:

"VAMOS SUPOR QUE O CONTRÁRIO DO QUE QUERO PROVAR SEJA VERDADEIRO. SE ISSO FOSSE VERDADE, LEVARIA A UMA SITUAÇÃO ILÓGICA, ENTÃO MINHA SUPOSIÇÃO INICIAL DEVE ESTAR ERRADA E, PORTANTO, O QUE EU QUERIA PROVAR É VERDADEIRO".

É UMA MANEIRA INTELIGENTE DE PROVAR COISAS!

Aplicação

Vamos ver numa aplicação prática: suponha que queremos provar que $2 \neq 1$.



Aplicação

A SUPOSIÇÃO INICIAL ESTÁ ERRADA

Nesse caso, o erro foi assumir que 2=1.

LOGO, A AFIRMAÇÃO ORIGINAL É A VERDADEIRA

2 é diferente de 1.

Aplicação em Matemática

Usando a propriedade de Tricotomia dos números naturais, mostre que:

Proposição 1

Dados três números naturais a, b e c, quaisquer,

$$\text{se } a + c < b + c \text{ então } a < b.$$

Aplicação em Matemática

Usando a propriedade de Tricotomia dos números naturais, mostre que:

Proposição 2

Dados três números naturais a, b e c, quaisquer,

$$\textit{se } a + c = b + c \textit{ então } a = b.$$

Aplicação em Matemática

Usando a propriedade de compatibilidade da adição[1] (o mesmo que a monotonicidade da ordenação [2]) entre a ordem e a transitividade da ordem, mostre que:

Proposição 3

Dados três números naturais a, b e c, quaisquer,

$$\textit{se } a < c \textit{ e } b < d \textit{ então } a + b < c + d.$$

[1] ver em [1].

[2] ver no arquivo da Aula 02

Aplicação em Matemática

Proposição 4

Dados três números naturais a, b e c, quaisquer,

$$\text{se } ac < bc, \text{ então } a < b.$$

Aplicação em Matemática

Proposição 5

Mostre que se $c < a < b$*, então* $a - c < b - c$*.*

Aplicação em Matemática

Proposição 6

Sejam dados números naturais a, b e c tais que a é múltiplo de c. Mostre que

$$a + b \text{ é múltiplo de } c \text{ se, e somente se, } b \text{ é múltiplo de } c.$$

Proposição 6

Dados do problema:

- a, b e c são números naturais.
- a é múltiplo de c.

O que queremos provar:

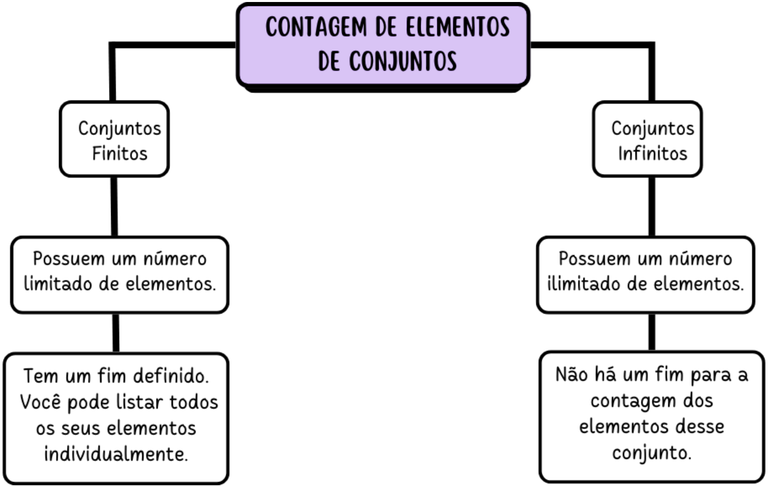
1. Se $a + b$ é múltiplo de c, então b é múltiplo de c.
2. Se b é múltiplo de c, então $a + b$ é múltiplo de c.

Proposição 6

Demonstração: Em aula.

Conjuntos Infinitos

Definição Informal



Definição Informal

CONJUNTO FINITO

A = {1,2,3,4,5,6}
B = {Alunos do Curso de Matemática da UFGD}

CONJUNTO INFINITO

Números Naturais = {1,2,3,...}

O único conhecido, por enquanto.

Conjuntos Infinitos

- O conjunto dos números naturais (1, 2, 3, 4, ...) é infinito, pois não importa o quanto você conte, sempre haverá mais números naturais a serem incluídos.
- Números infinitos não podem ser expressos ou representados em sua totalidade, pois sua contagem nunca termina.

Exemplo

Exemplo 3

O conjuntos dos números pares é infinito.

Exemplo

Exemplo 3

O conjuntos dos números pares é infinito.

Demonstração:

- Sabemos que o conjunto dos números naturais é infinito, o que significa que não tem fim. Por exemplo, podemos continuar contando para sempre: 1, 2, 3, 4, 5, e assim por diante, sem chegar a um ponto final.

Exemplo

- Pense em números pares como amigos que gostam de andar de em pares com os números naturais.
- Podemos emparelhar cada número natural com um número par: por exemplo, 1 com 2, 2 com 4, 3 com 6, e assim por diante).
- Portanto, existem tantos números pares, quanto a quantidade de números naturais: infinitos.

Conjuntos Infinitos

- Na teoria dos conjuntos, há diferentes tamanhos de infinito, como o infinito contável (enumerável) e o infinito incontável (não enumerável), conforme descrito pela teoria dos números cardinais de Cantor.
- O conceito de infinito também levanta questões intrigantes e paradoxos, como o paradoxo do Hotel de Hilbert.

O Paradoxo do Hotel de Hilbert

- O Paradoxo do Hotel de Hilbert é um conceito imaginado pelo matemático alemão David Hilbert para ilustrar algumas propriedades surpreendentes e contra-intuitivas dos infinitos.
- Imagine um hotel com um número infinito de quartos, todos ocupados por um hóspede em cada quarto.

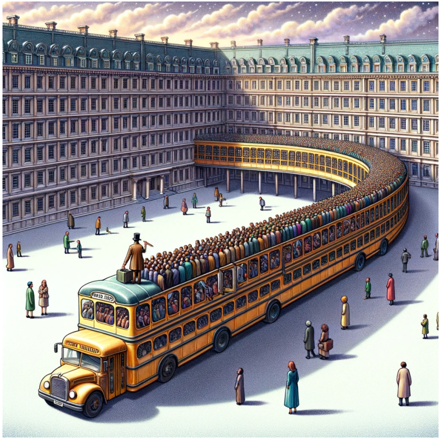
O Paradoxo do Hotel de Hilbert

- Agora, suponha que um novo hóspede chegue e peça um quarto. À primeira vista, parece que o hotel está cheio e não pode acomodar esse novo hóspede.

O Paradoxo do Hotel de Hilbert

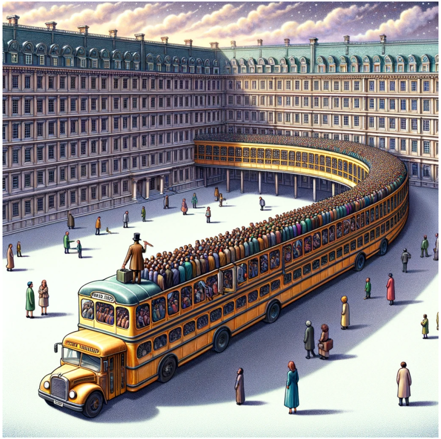
- No entanto, se o gerente do hotel mover o hóspede do quarto 1 para o quarto 2, o hóspede do quarto 2 para o quarto 3, e assim por diante (cada hóspede movendo-se do quarto n para o quarto $n + 1$), o quarto 1 ficará vazio e poderá acomodar o novo hóspede.

O Paradoxo do Hotel de Hilbert



- A situação se complica ainda mais se, por exemplo, um ônibus com um número infinito de novos hóspedes chegar ao hotel.
- Nesse caso, o gerente pode pedir a cada hóspede existente para se mudar do quarto n para o quarto $2n$ (dobrando o número do quarto).

O Paradoxo do Hotel de Hilbert



- Isso liberará todos os quartos ímpares, que são infinitos, e assim acomodar todos os novos hóspedes do ônibus.
- O paradoxo ilustra que, embora todos os quartos estejam ocupados, ainda é possível acomodar um número infinito de novos hóspedes sem precisar construir mais quartos, mostrando as estranhas propriedades do conceito matemático de "infinito"

Referencias I

A. Hefez.
Iniciação à Aritmética.
IMPA, 2015.