GEOMETRIA PLANA

Aula 06

Perpendicularidade

Karla Lima

10/02/2023

Sumário

Perpendicularidade

Definição

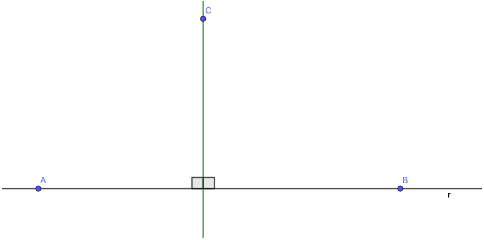
- Como vimos, Euclides define ’ângulo reto’ como sendo igual ao ângulo formado por duas retas que se cortam de maneira a formar quatro ângulos iguais.
- Essas duas retas são ditas **perpendiculares** (símbolo: $\perp$).
- O resultado a seguir é um corolário do Teorema do Triângulo Externo.

Corolário

Corolário 1

Por um ponto não pertencente a uma reta, passa uma única reta perpendicular a reta dada.

.

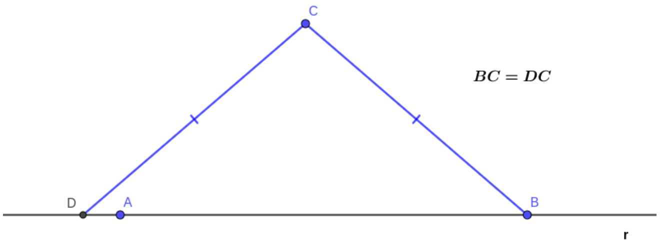


- **Hipótese:** $C \notin r$.
- **Tese:** Existe uma única
  reta que passa por C e é perpendicular a reta r.

Demonstração Corolário 1

Existência:

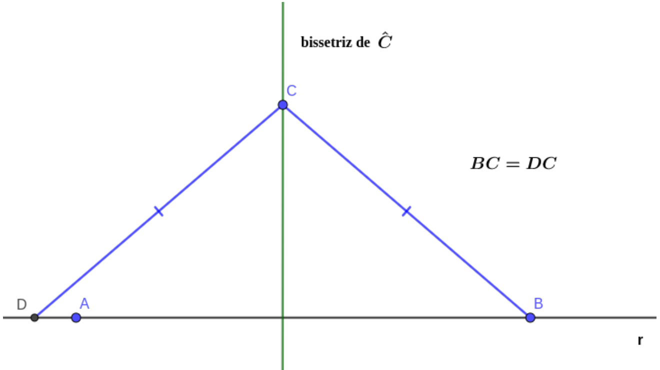
- Seja r uma reta e C um ponto fora dela.
- Trace na reta r um ponto D tal que $CD = CB$.



Demonstração Corolário 1

Existência:

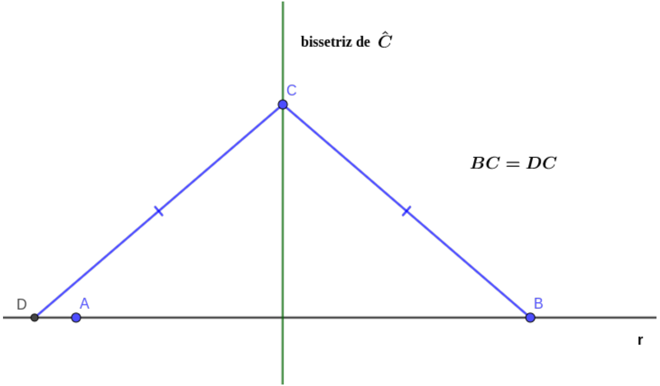
- O triângulo DCB é isósceles, logo sua bissetriz é também sua mediana e sua altura (Teorema 2).



Demonstração Corolário 1

Existência:

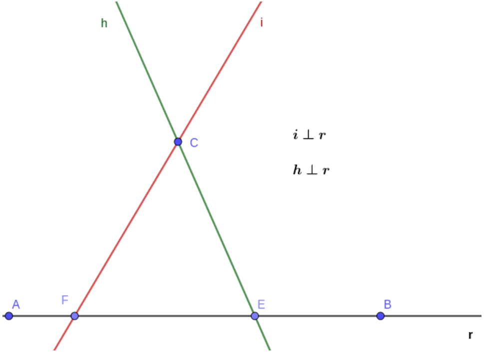
- Assim, a bissetriz de $\hat{C}$ é uma reta perpendicular à reta r que passa por C.



Demonstração Corolário 1

Unicidade: .

- Suponha, por absurdo, que existam duas retas perpendiculares à reta *r*, que passam por *C*.



Demonstração Corolário 1

Unicidade:

- O triângulo CFE possui dois ângulos retos ($C\hat{F}E$ e $C\hat{E}F$).
- Mas, por causa do TAE, se um ângulo for reto os outros devem ser agudos, contradizendo a afirmação acima.

Exercício

Exercício 1

Demonstre o seguinte teorema:

Num mesmo plano, duas retas distintas perpendiculares a uma terceira, são paralelas entre si.

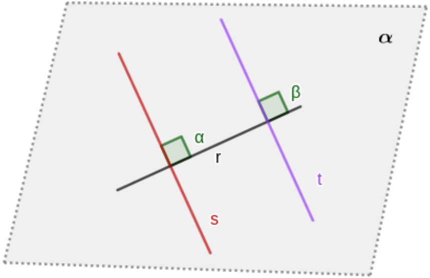
Exercício

Exercício 1

Demonstre o seguinte teorema:

Num mesmo plano, duas retas distintas perpendiculares a uma terceira, são paralelas entre si.

.



- **Hipótese:**
  $r, s, t \in \alpha, r \perp s,$
  $r \perp t$ e $s \neq t$.
- **Tese:** s e t são paralelas.

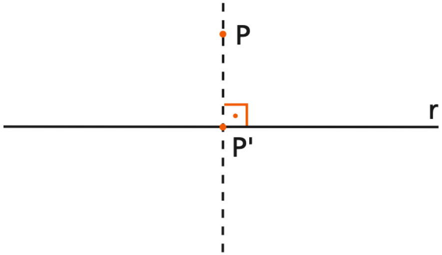
Projeções e Distâncias

Projeção Ortogonal

Definição 1

*Chama-se **projeção ortogonal** de um ponto sobre uma reta r ao ponto de interseção da reta com a perpendicular à ela que passa por aquele ponto.*

- $\overleftrightarrow{PP'} \perp r$ e $\overleftrightarrow{PP'} \cap r = \{P'\}$.
- Se $P \in r$, então $P' = P$.



Projeção de um segmento sobre uma reta

Definição 2

*A **projeção** de um segmento de reta $\overline{AB}$ não perpendicular a uma reta r sobre esta reta é o segmento $\overline{A'B'}$ em que*

- *A' é a projeção de A sobre r e*
- *B' é a projeção de B sobre r.*

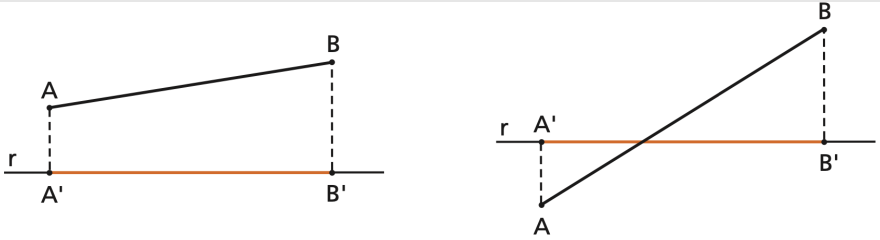
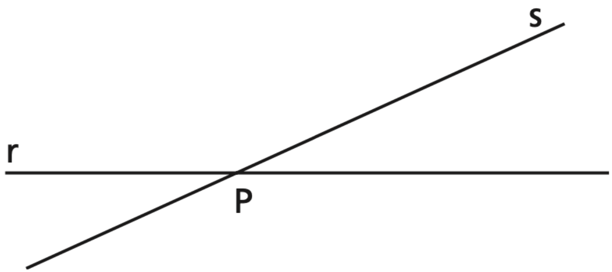


Figura 1: Exemplos da projeção

Retas Oblíquas

Definição 3

Se duas retas são concorrentes e não são perpendiculares, diz-se que essas retas são oblíquas.



Teoremas

Seja r uma reta, P um ponto fora dela e P' a projeção ortogonal deste ponto. Ainda, sejam A e B pontos de r.

Demonstre os teoremas a seguir:

Teorema 1

O segmento perpendicular $\overline{PP'}$ *é menor que qualquer oblíquo* $\overline{PA}$.

Teorema 2

Se os segmentos oblíquos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ *possuem projeções congruentes, então eles também são congruentes.*

Teorema 3

Segmentos oblíquos congruentes têm projeções congruentes.

Teoremas

Teorema 4

De dois segmentos oblíquos de projeções não congruentes, o de maior projeção é maior.

Teorema 5

De dois segmentos oblíquos não congruentes, o maior tem projeção maior.

Teorema 6

De dois segmentos oblíquos não congruentes, o maior forma com a sua projeção ângulo menor.

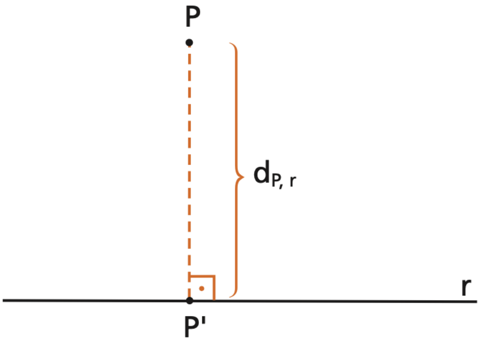
Teorema 7

De dois segmentos oblíquos não congruentes, aquele que forma com a sua projeção um ângulo menor é maior.

Distâncias

Definição 4

A distância de um ponto a uma reta é a distância desse ponto à projeção dele sobre a reta.



Exercícios

Exercício 2

Mostre que todo ponto da bissetriz de um ângulo é equidistante dos lados do ângulo.

Referencias I