



## Cálculo II

---

### Lista de Exercícios: P1

#### 1 - Técnicas de Integração

- 1.1 - Revisão de Integrais.
- 1.2 - O Método de Substituição.
- 1.3 - Integração por partes.
- 1.4 - Integração por Frações Parciais.
- 1.5 - Integrais impróprias.
- 1.6 - Aplicações de integrais.

#### 2 - EDO's de 1ª ordem

- 2.1 - Definição e Motivação.
- 2.2 - Resolução de EDO's de 1ª ordem: Equações Separáveis.
- 2.3 - Resolução de EDO's de 1ª ordem: Método do Fator Integrante.

---

Profa. Karla Katerine Barboza de Lima  
FACET/UFGD

# 1 Técnicas de Integração

## Tabela Básica

- $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$
- $\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$
- $\int e^u du = e^u + C$
- $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
- $\int \sin(u) du = -\cos(u) + C$
- $\int \cos(u) du = \sin(u) + C$

## 1.1 Revisão de Integração

**Exercício 1** Calcule as integrais:

a)  $\int_{-1}^1 x^{100} dx$

b)  $\int_0^1 1 + \frac{1}{2}u^4 - \frac{2}{5}u^9 du$

c)  $\int_1^2 \frac{v^5 + 3v^6}{v^4} dv$

d)  $\int_{-1}^1 e^{u+1} du$

e)  $\int_{-2}^2 f(x) dx$ , onde:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } -2 \leq x \leq 0, \\ 4 - x^2 & \text{se } 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

f)  $\int_{-1}^2 \frac{4}{x^3} dx$

## Gabarito

- a)  $\int_{-1}^1 x^{100} dx = \frac{2}{101}$
- b)  $\int_0^1 1 + \frac{1}{2}u^4 - \frac{2}{5}u^9 du = \frac{53}{50}$
- c)  $\int_1^2 \frac{v^5 + 3v^6}{v^4} dv = \frac{17}{2}$

d)  $\int_{-1}^1 e^{u+1} du = e^2 - 1$

e)  $\frac{28}{3}$

f) Indeterminado, pois  $f$  possui uma descontinuidade infinita no intervalo de integração.

## 1.2 O Método de Substituição

**Exercício 2** Calcule a integral fazendo a substituição dada.

a)  $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}, u = 3-5x.$

b)  $\int_0^\pi \cos(3x) dx, u = 3x.$

c)  $\int_0^1 x(4+x^2)^{10} dx, u = 4+x^2.$

d)  $\int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \operatorname{sen} \theta d\theta, u = \cos \theta.$

e)  $\int_0^1 (x^2-1)^4 x^5 dx, u = x^2-1.$

**Exercício 3** Avalie a integral definida.

a)  $\int_0^1 \cos(\pi t/2) dt.$

b)  $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx.$

c)  $\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} dx.$

d)  $\int_0^1 \frac{e^z + 1}{e^z + z} dz.$

e)  $\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$

**Exercício 4** Um tanque de armazenamento de petróleo sofre uma ruptura em  $t = 0$  e o petróleo vaza do tanque a uma taxa de  $r(t) = 100e^{-0,01t}$  litros por minuto. Quanto petróleo vazou na primeira hora?

**Exercício 5** A respiração é cíclica e o ciclo completo respiratório desde o início da inalação até o fim da expiração demora cerca de 5 s. A taxa máxima de fluxo de ar nos pulmões é de cerca de 0,5 L/s. Isso explica, em partes, porque a função  $f(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\pi t/5)$  tem sido frequentemente utilizada para modelar a taxa de fluxo de ar nos pulmões. Use esse modelo para encontrar o volume de ar inalado nos pulmões no instante  $t$ .

**Exercício 6** Se  $f$  for contínua e  $\int_0^4 f(x) dx = 10$ , calcule  $\int_0^2 f(2x) dx$ .

### Gabarito

2. a)  $\frac{1}{14}$

- b) 0
  - c)  $\frac{5^{11} - 4^{11}}{22}$
  - d)  $\frac{1}{4}$
  - e)  $\frac{1}{210}$
- 3.
- a)  $\frac{2}{\pi}$
  - b)  $e - \sqrt{e}$
  - c) 2
  - d)  $\ln(e + 1)$
  - e)  $2 - 2 \ln 2$
4. Aproximadamente 4512 litros.
5.  $\frac{5}{4\pi} \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi t}{5} \right) \right)$  litros.
6. 5

### 1.3 Integração por Partes

**Exercício 7** Calcule a integral usando a integração por partes com as escolhas de  $u$  e  $dv$  dadas.

a)  $\int x^2 \ln x \, dx$ ,  $u = \ln x$  e  $dv = x^2 dx$ .

b)  $\int \theta \cos(\theta) \, d\theta$ ,  $u = \theta$  e  $dv = \cos \theta \, d\theta$ .

**Exercício 8** Calcule a integral.

a)  $\int x e^{-x} \, dx$ .

b)  $\int p^5 \ln p \, dp$ .

c)  $\int (\ln x)^2 \, dx$ .

d)  $\int_0^1 (x^2 + 1) e^{-x} \, dx$ .

e)  $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} \, dx$ .

f)  $\int e^{2x} \operatorname{sen}(3x) \, dx$ .

**Exercício 9** Primeiro faça uma substituição e então use integração por partes para calcular a integral.

a)  $\int_0^{\pi^2} \cos(\sqrt{x}) \, dx$ .

b)  $\int_0^1 t^3 e^{-t^2} \, dt$ .

c)  $\int_0^1 x \ln(1+x) \, dx$ .

**Exercício 10** Uma partícula que se move ao longo de uma reta tem velocidade igual à  $v(t) = t^2 e^{-t}$  metros por segundo, após  $t$  segundos. Qual a distância que essa partícula percorrerá durante os primeiros 5 segundos?

**Exercício 11** Suponha que  $f(1) = 2$ ,  $f(4) = 7$ ,  $f'(1) = 5$ ,  $f'(4) = 3$  e  $f''$  seja contínua. Encontre o valor de  $\int_1^4 x f''(x) \, dx$ .

## Gabarito

7. a)  $\frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + c.$   
b)  $\theta \operatorname{sen} \theta + \cos \theta + c.$
8. a)  $-xe^{-x} - e^{-x} + c.$   
b)  $\frac{p^6 \ln p}{6} - \frac{p^6}{36} + c.$   
c)  $x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + c.$   
d)  $3 - \frac{6}{e}.$   
e)  $\frac{1 - \ln 2}{2}.$   
f)  $\frac{1}{13}e^{2x}(2\operatorname{sen}(3x) - 3\cos(3x)) + c.$
9. a)  $-4.$   
b)  $\frac{-2e^{-1} + 1}{2}.$   
c)  $\frac{1}{4}.$
10.  $2 - 37e^{-5}$  metros.
11. 2.

## 1.4 Integração por Frações Parciais

**Exercício 12** Calcule as integrais abaixo.

a)  $\int \frac{x^2}{x+1} dx$

b)  $\int \frac{x-9}{x-2} dx$

c)  $\int_2^3 \frac{1}{x^2-1} dx$

d)  $\int_3^4 \frac{x^3-2x^2-4}{x^3+2x^2} dx$

e)  $\int \frac{1}{(x+5)^2(x-1)} dx$

f)  $\int \frac{x^3+4}{x^2+4} dx$

g)  $\int \frac{x+4}{x^2+2x+5} dx$

h)  $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2} dx$

**Exercício 13** Um método de retardar o crescimento de uma população de insetos sem usar pesticidas é introduzir na população um número de machos estéreis que cruzam com fêmeas férteis, mas não produzem filhotes. Se  $P$  representar o número de fêmeas na população de insetos,  $S$ , o número de machos estéreis introduzidos a cada geração e  $r$ , a taxa de crescimento populacional natural, então a população de fêmeas está relacionada com o instante  $t$  através de

$$t = \int \frac{P+S}{P[(r-1)P-S]} dP.$$

Suponha que uma população de insetos com 10000 fêmeas cresça a uma taxa de  $r = 0,10$  e que 900 machos estéreis sejam adicionados. Calcule a integral para dar uma equação relacionando a população de fêmeas com o tempo. (Observe que a equação resultante não pode ser resolvida explicitamente para  $P$ .)

**Exercício 14** Se  $f$  for uma função quadrática tal que  $f(0) = 1$  e

$$\int \frac{f(x)}{x^2(x+1)^3} dx$$

for uma função racional, encontre o valor de  $f'(0)$ .



### Gabarito

12. a)  $\frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1| + C$   
b)  $x - 7\ln|x-2| + C$   
c)  $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$   
d)  $\frac{5}{6} + \ln 4 - \ln 3 - 5\ln 6 - 5\ln 5$   
e)  $-\frac{1}{36}\ln|x+5| + \frac{1}{6}\frac{1}{x+5} + \frac{1}{36}\ln|x-1| + C$   
f)  $\frac{1}{2}x^2 - 2\ln(x^2+4) + 2\tan^{-1}(x/2) + C$   
g)  $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$   
h)  $\ln\left[\frac{(e^x+2)^2}{e^{x+1}}\right] + C$
13.  $-\ln P - \frac{1}{9}\ln(0,9P+900) + C$ , onde  $C \approx 10,23$ .
14.  $f'(0) = 3$ .

## 1.5 Integrais Impróprias

**Exercício 15** Explique por que cada uma das seguintes integrais é imprópria:

a)  $\int_1^{\infty} x^4 e^{-x^4} dx$

b)  $\int_1^{\pi/2} \sec x$

**Exercício 16** Determine se cada integral é convergente ou divergente. Calcule aquelas que são convergentes.

a)  $\int_1^{\infty} \frac{1}{(3x+1)^2} dx$

b)  $\int_{-\infty}^{-1} e^{-2t} dt$

c)  $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx$

d)  $\int_{2\pi}^{\infty} \sin \theta d\theta$

e)  $\int_{-\infty}^6 r e^{r/3} dr$

f)  $\int_0^1 \frac{3}{x^5} dx$

g)  $\int_{-2}^{14} \frac{1}{\sqrt[4]{x+2}} dx$

h)  $\int_0^2 z^2 \ln z dz$

### Gabarito

8. a) Intervalo é infinito.

b) A função possui uma descontinuidade no intervalo de integração.

9. a) Converte:  $\frac{1}{12}$

b) Diverge

c) Converte: 0

d) Diverge

e) Converge:  $9e^2$

f) Diverge

g) Converge:  $\frac{32}{3}$

h) Converge:  $\frac{8}{3} \ln 2 - \frac{8}{9}$

## 2 EDO's de 1ª ordem

### 2.1 Definição e Motivação

**Exercício 17** Verifique se as funções indicadas são soluções particulares das equações diferenciais dadas.

a)  $xy' = 2y$ ;  $y = 0$  e  $y = 2x$ .

b)  $y'' + 9y = 18$ ;  $y = 2$  e  $y = 2x^2$ .

c)  $xy'' - y' = 0$ ;  $y = 2x^2$  e  $y = 2x$ .

d)  $x^2y'' + xy' + y = 0$ ;  $y = \sin(\ln x)$ .

**Exercício 18** Confirme que  $y = 3e^{x^3}$  é uma solução do problema de valor inicial  $y' = 3x^2y$ , com  $y(0) = 3$ .

**Exercício 19** Uma população é modelada pela equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = 1,2 P \left( 1 - \frac{P}{4200} \right).$$

Usando uma ferramenta de calcular gráficos (Geogebra, Wolfram Alpha, etc...), analise o gráfico da derivada acima e responda:

a) Para quais valores de  $P$  a população está aumentando?

b) Para quais valores de  $P$  a população está diminuindo?

c) Quais são as soluções de equilíbrio?

### Gabarito

10. a)  $y = 0$  é solução.

b)  $y = 2$  é solução.

c)  $y = 2x^2$  é solução.

d)  $y = \sin(\ln x)$  é solução.

12. (a)  $0 < P < 4200$

(b)  $P > 4200$

(c)  $P = 0, P = 4200$

## Referências

[1] STEWART J., *Cálculo*, Volume I, Editora Thomson.

[2] Anton H., *Cálculo*, Volume I, Editora Bookman.