GEOMETRIA PLANA

Aula 04

Triângulos

Karla Lima

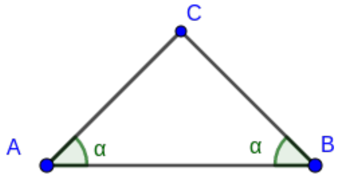
15 de março de 2022

Sumário

Congruência - continuação

Teorema 3

Se dois ângulos de um triângulo são congruentes, então o triângulo é isósceles.



Teorema 3: Demonstração

As figuras abaixo são cópias do mesmo triângulo: uma de frente e outra de verso.

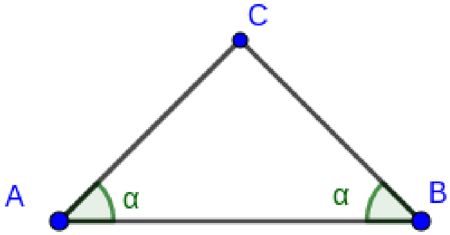


Figura 1: Frente

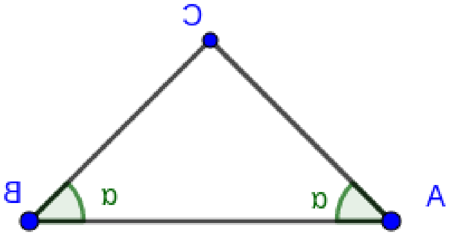


Figura 2: Verso

Teorema 3: Demonstração

Olhe agora para os triângulos ABC e ACB:

- O ângulo $\hat{A}$ do 1º triângulo é congruente ao ângulo $\hat{B}$ do 2;
- O ângulo $\hat{B}$ do 1º triângulo é congruente ao ângulo $\hat{A}$ do 2;
- $AB = BA$

Teorema 3: Demonstração

Pelo teorema 2 (LAL), segue-se que

$$\triangle ABC = \triangle ACB.$$

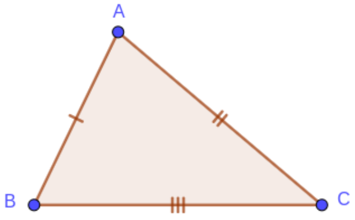
- O comprimento do lado oposto ao ângulo α é igual nos dois triângulos. Portanto,

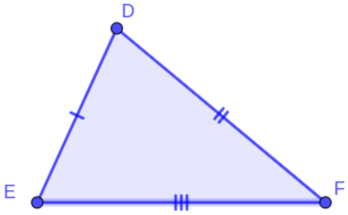
  $$AC = BC$$

  e o triângulo é isósceles.

Teorema 4 (Caso LLL)

Se dois triângulos têm três lados respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.

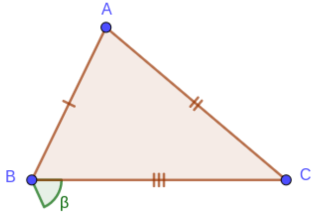


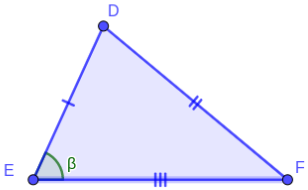


Teorema 4: Demonstração

Hipótese: $\begin{cases} AB = DE \\ AC = DF \\ BC = EF \end{cases}$ Tese: $\triangle ABC = \triangle DEF$

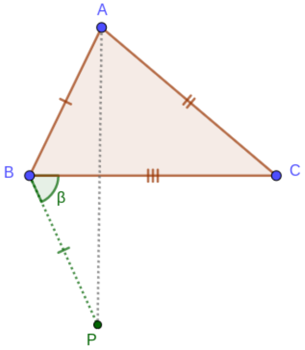
- Na semirreta $\overrightarrow{BC}$, e no semiplano que não contém o ponto A, tracemos um ângulo congruente a $\hat{E}$, com vértice em B.

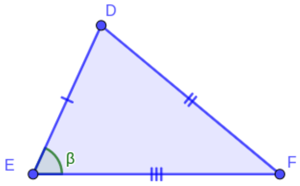




Teorema 4: Demonstração

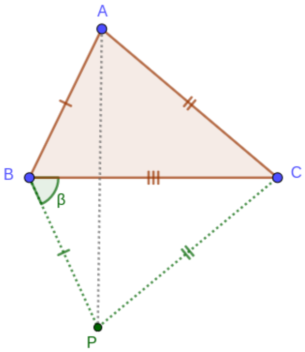
- No outro lado desse ângulo, marquemos um ponto P de modo que $BP = DE$.

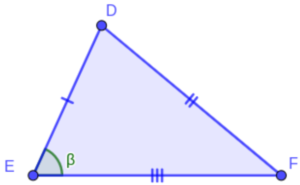




Teorema 4: Demonstração

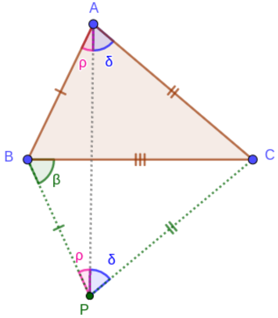
- Ligando P a C, obtemos o triângulo PBC congruente ao triângulo DEF (LAL: $BC = EF$, $P\hat{B}C = D\hat{E}F$ e $BP = ED$). Com isso, $PC = DF$.

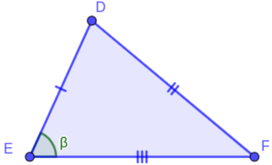




Teorema 4: Demonstração

- Traçando o segmento $\overline{AP}$, os triângulos PAB e PCA são isósceles.
- Com isso, $B\hat{A}P = B\hat{P}A$ e $P\hat{A}C = A\hat{P}C$.
- $\hat{D} = \hat{A} = B\hat{P}A + P\hat{A}C = A\hat{P}C = B\hat{A}P + P\hat{A}C = \hat{A}$





Teorema 4: Demonstração

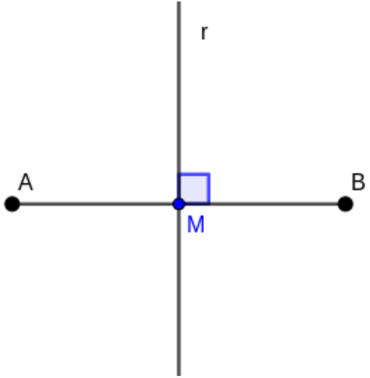
Assim,

- $\triangle PBC = \triangle DEF$;
- $\triangle PBC = \triangle ABC$ (LAL);
- Concluímos que $\triangle DEF = \triangle ABC$.

Mediatriz

Definição 1

*Chama-se **mediatriz** de um segmento a reta perpendicular ao mesmo em seu ponto médio.*



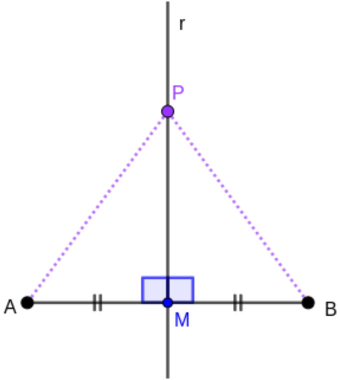
r é a mediatriz de $\overline{AB}$

$$AM = MB$$

$$r \perp \overline{AB}$$

Teorema 5

Todo ponto da mediatriz de um segmento é equidistante dos extremos desse segmento.

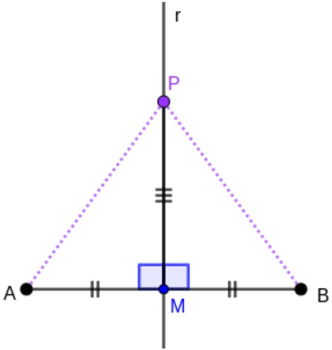


Hipótese: $\begin{cases} AM = MB \\ \overrightarrow{AB} \perp r \end{cases}$

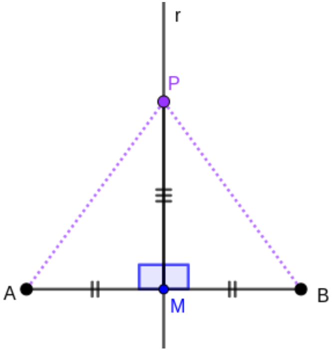
Tese: $PA = PB$

Teorema 5: Demonstração

- Seja M o ponto médio de $\overline{AB}$.
- Seja P um ponto qualquer da mediatriz de $\overline{AB}$ diferente de M.
- Trace os segmentos PA e PB.



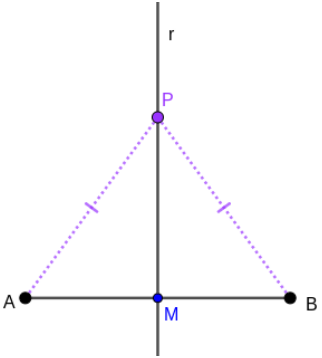
Teorema 5: Demonstração



- Concluímos que $\triangle PMA = \triangle PMB$ (LAL: $\overline{PM}$ lado comum, $P\hat{M}A = 90^\circ = P\hat{M}B$ e $AM = MB$).
- Portanto, $PA = PB$ (lados opostos a ângulos congruentes).

Teorema 6

Se um ponto é equidistante dos extremos de um segmento, então ele pertence a mediatriz do segmento.



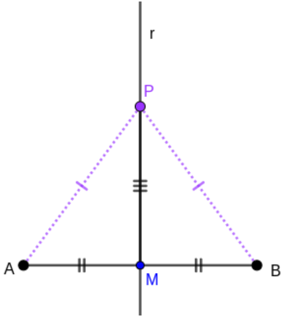
Hipótese: $PA = PB$

Tese: P pertence a mediatriz de

$\overline{AB}$.

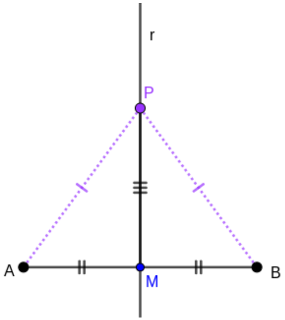
Teorema 6: Demonstração

- Sejam M o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e $P \neq M$ um ponto tal que $PA = PB$.
- Tracemos o segmento $\overline{PM}$.
- Assim, $\triangle PMA = \triangle PMB$ (LLL)



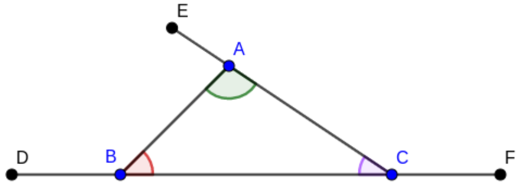
Teorema 6: Demonstração

- Os ângulos $A\hat{M}P$ e $B\hat{M}P$ são congruentes (ângulos opostos a lados congruentes).
- $A\hat{M}P + B\hat{M}P = 180^\circ$.
- Portanto, $A\hat{M}P = B\hat{M}P = 90^\circ$.



Ângulos Não-Adjacentes

No triângulo abaixo, os ângulos internos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são ditos **não-adjacentes** ao ângulo externo $A\hat{C}F$.



Teorema 7

Todo ângulo externo de um triângulo é maior que cada um dos ângulos internos que não lhes são adjacentes.

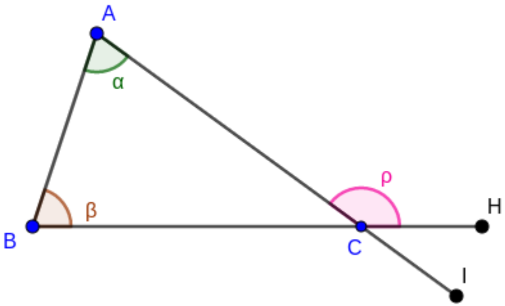


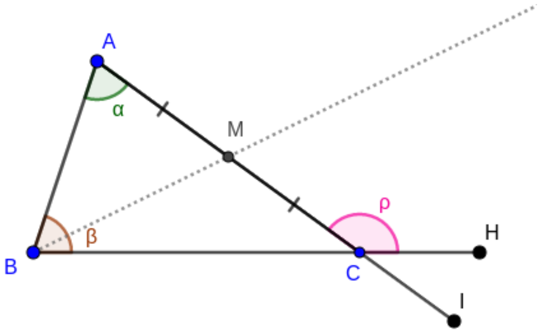
Figura 3: Por exemplo, temos $\rho > \alpha$ e $\rho > \beta$.

Teorema 7: Demonstração

- **Hipótese:** $A\hat{C}F$ é um ângulo externo do $\triangle ABC$.
- **Tese:**
  1. $A\hat{C}F > A\hat{B}C$.
  2. $A\hat{C}F > B\hat{A}C$.

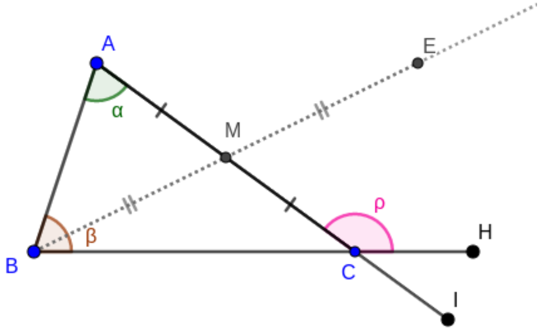
Teorema 7: Demonstração

- Seja M o ponto médio do lado $\overline{AC}$.



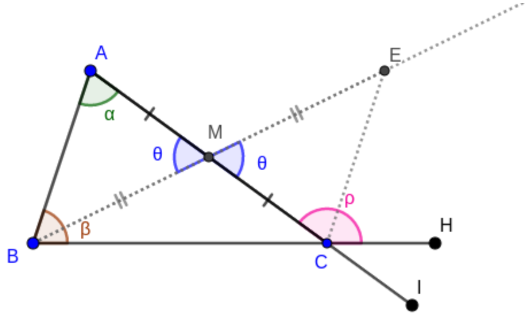
Teorema 7: Demonstração

- Na semirreta $\overrightarrow{BM}$, marquemos um ponto E tal que $BM = ME$.



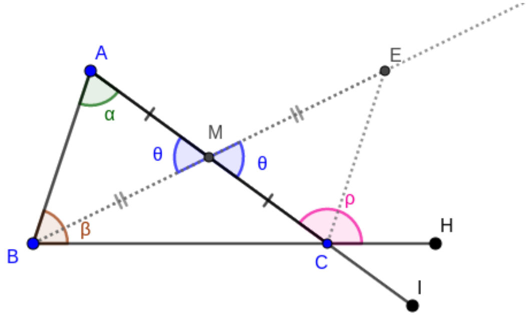
Teorema 7: Demonstração

- Desta forma, $\triangle AMB = \triangle CME$ (LAL: $AM = MC$, $A\hat{M}B = C\hat{M}E$ - ângulos opostos pelo vértice - e $BM = ME$).



Teorema 7: Demonstração

- Consequentemente, $\hat{A} = M\hat{C}E$ (ângulos opostos a lados congruentes).



- Como $A\hat{C}F = A\hat{C}E + E\hat{C}F = \hat{A} + E\hat{C}F$, segue-se que $A\hat{C}F > \hat{A}$.

Teorema 7: Demonstração

Exercício 1

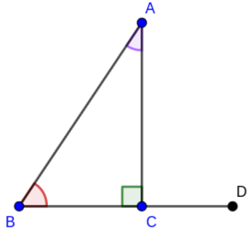
Repita este argumento, em outra figura conveniente, para provar que $A\hat{C}F > A\hat{B}C$.

Corolário 1

Corolário 1

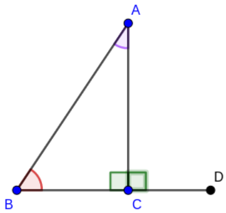
Se um triângulo tem um ângulo reto, então os demais ângulos são agudos.

- **Hipótese:** $\hat{C} = 90°$.
- **Tese:** $\hat{A} < 90°$ e $\hat{B} < 90°$.



Corolário 1: Demonstração

- Se $\hat{C} = 90°$, então seu ângulo externo é $\hat{\alpha} = 90°$.



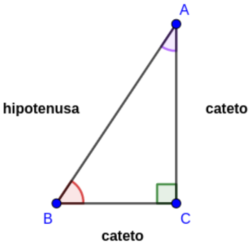
- Pelo Teorema 7, os ângulos não adjacentes $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são menores que $\hat{\alpha}$.
- Portanto,

$$\hat{A} < 90°$$
$$\hat{B} < 90°$$

Triângulo Retângulo

Definição 2

Um triângulo que possui um ângulo reto é denominado ***triângulo retângulo****.*



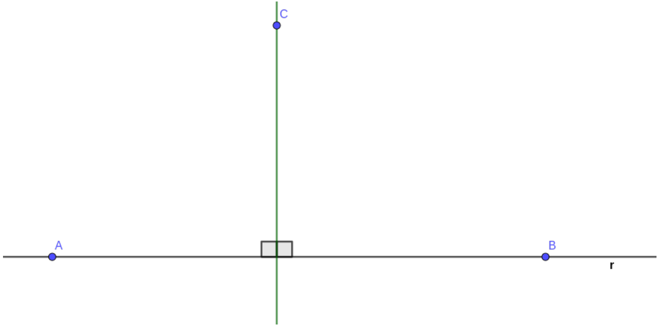
- O lado oposto ao ângulo reto é chamado **hipotenusa**.
- Os outros lados são denominados **catetos** do triângulo.

Corolário 2

Corolário 2

Por um ponto não pertencente a uma reta, passa uma única reta perpendicular a reta dada.

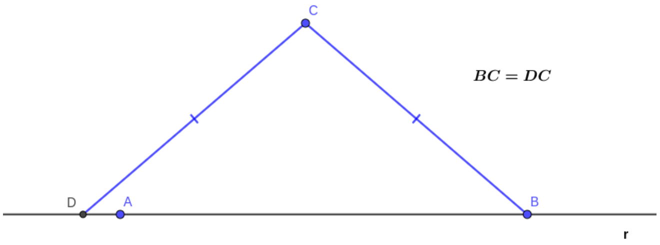
- **Hipótese:** $C \notin r$.
- **Tese:** Existe uma única reta que passa por C e é perpendicular a reta r.



Corolário 2: Demonstração

Existência:

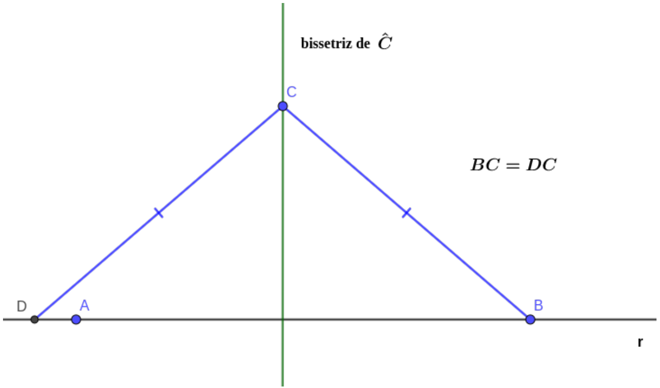
- Seja r uma reta e C um ponto fora dela.
- Trace na reta r um ponto D tal que $CD = CB$.



Corolário 2: Demonstração

Existência:

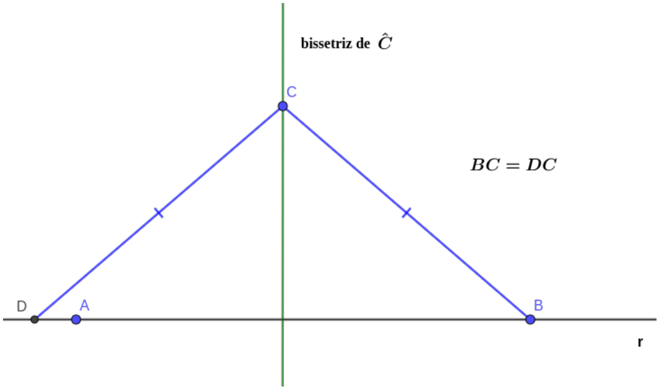
- O triângulo DCB é isósceles, logo sua bissetriz é também sua mediana e sua altura (Teorema 2).



Corolário 2: Demonstração

Existência:

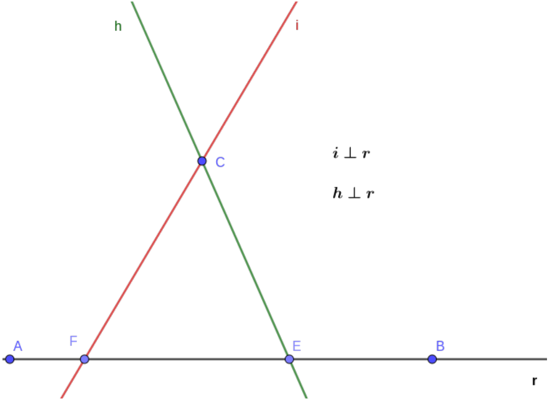
- Assim, a bissetriz de $\hat{C}$ é uma reta perpendicular à reta r que passa por C.



Corolário 2: Demonstração

Unicidade:

- Suponha, por absurdo, que existam duas retas perpendiculares à reta *r*, que passam por *C*.



Corolário 2: Demonstração

Unicidade:

- O triângulo CFE possui dois ângulos retos ($C\hat{F}E$ e $C\hat{E}F$).
- Mas, pelo Corolário 1, se um ângulo for reto os outros devem ser agudos, contradizendo a afirmação acima.