

Aula 05: Funções Quadráticas.

Karla Lima

25/01/2022

Sumário



1. Bibliografia
2. Definição e Propriedades das Funções Quadráticas
3. Os Zeros de uma Função Quadrática
4. Exercícios

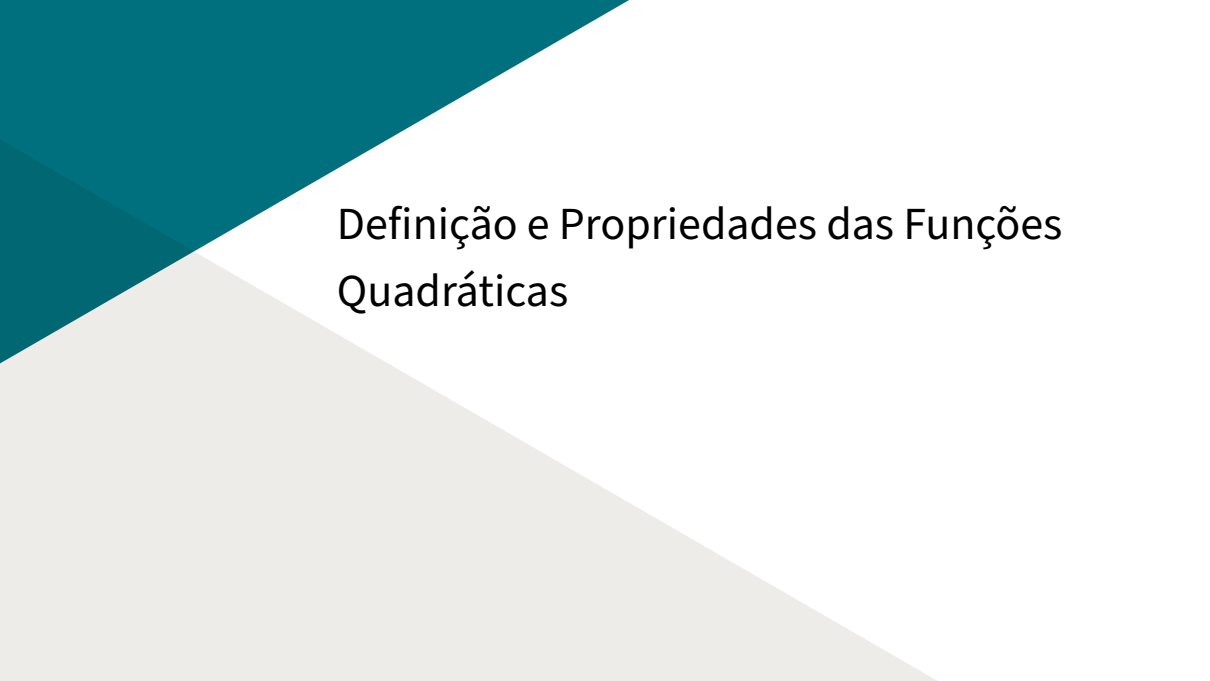


Bibliografia

Bibliografia da Aula 05



- ▶ Fundamentos da Matemática Elementar: 1 (Click para baixar)

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape, consisting of two triangles, is located in the upper-left corner. The rest of the slide is a light gray color.

Definição e Propriedades das Funções Quadráticas

Definição



Definição 1

Uma **função quadrática** (ou **função do 2º grau**) é uma função **polinomial**, dada pela forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

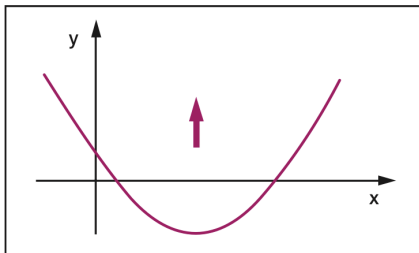
onde a , b e c são constantes reais e $a \neq 0$.

Propriedades

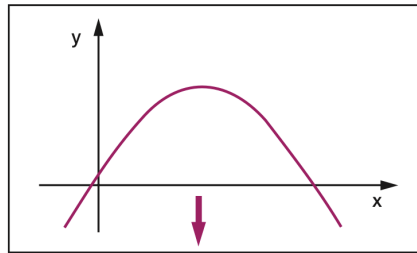


- ▶ O gráfico de toda função quadrática, de \mathbb{R} em \mathbb{R} , é uma parábola.
- ▶ Se o gráfico possui concavidade para cima, isso significa que a função possui um valor mínimo. A função não tem um valor máximo.
- ▶ Já se o gráfico possui concavidade para baixo, isso significa que a função possui um valor máximo. A função não tem um valor mínimo.
- ▶ O ponto do gráfico no qual $(x, f(x))$ representa esse valor mínimo ou máximo é chamado de **vértice da parábola**.

Propriedades



(a) Concavidade para cima: mínimo



(b) Concavidade para baixo: máximo

Forma Canônica



Algumas observações sobre quadrados:

- ▶ Sabemos que $m^2 + 2mp + p^2 = (m + p)^2$.
- ▶ $m^2 > 0$, se $m \neq 0$.
 - ▶ O produto por um número positivo mantém o sinal. Logo, $m * m$ mantém o mesmo sinal do número m .
 - ▶ O produto de m por um número negativo, resulta em um simétrico. Como m é negativo, $m * m$ gera um número positivo, pois o simétrico de um número negativo é um número positivo.
- ▶ $m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$ (pois o produto de dois números reais é zero se, e somente se, um deles é zero).

Forma Canônica



a) Seja a função quadrática $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$.

► Como $x^2 = x * x \geq 0$, a função quadrática $f(x) = x^2$ possui um valor mínimo em $x = 0$.

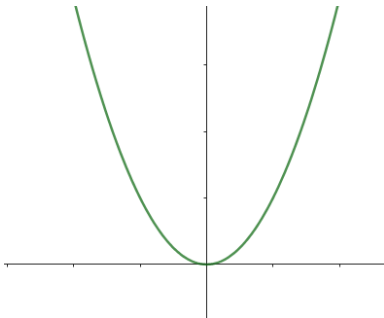


Figura 2: A parábola deve ter concavidade para cima.

Forma Canônica



b) Agora, considere a função quadrática $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = -x^2$.

► Como $x^2 = x * x \geq 0$, a função quadrática $f(x) = -x^2$ possui um valor máximo em $x = 0$:

$$x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (-1) * x^2 \leq (-1) * 0 \Leftrightarrow -x^2 \leq 0.$$

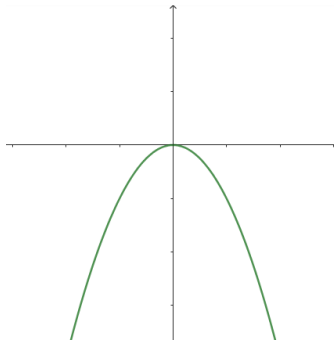


Figura 3: A parábola deve ter concavidade para baixo.

Forma Canônica



c) Seja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $h(x) = x^2 + 3$.

► Como $x^2 = x * x \geq 0$, a função quadrática $f(x) = x^2 + 3$ possui um valor mínimo $y = 3$:

$$\begin{aligned}x^2 \geq 0 &\Leftrightarrow x^2 + 3 \geq 0 + 3 \\&\Leftrightarrow x^2 + 3 \geq 3.\end{aligned}$$

► O valor mínimo ocorre quando $x^2 = 0$; ou seja, quando $x = 0$.

Forma Canônica

- O esboço do gráfico é o seguinte:

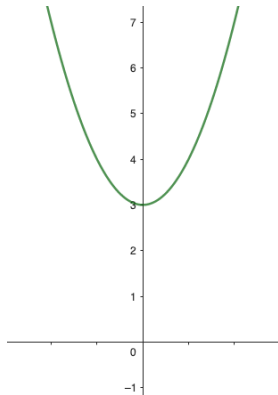


Figura 4: A parábola deve ter concavidade para cima.

Forma Canônica



- d) Considere a função quadrática $i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $i(x) = 3x^2 + 12x + 13$.
- ▶ Diferente do que fizemos anteriormente, não conseguimos apontar, de forma direta, se esta função possui valor máximo ou mínimo, determinando a sua concavidade.
 - ▶ Entretanto, podemos fazer algumas manipulações algébricas, a fim de determinar a concavidade do gráfico desta função.

Completando Quadrado



Colocamos o coeficiente de x^2 em evidência:

$$3x^2 + 12x + 13 = 3 * (x^2 + 4x) + 13. \quad (1)$$

O monômio $x^2 + 4x$ pode ser reescrito como

$$x^2 + 4x = x^2 + 2 * 2 * x + 2^2 - 2^2 \quad (2)$$

$$= (x^2 + 2 * x * 2 + 2^2) - 4 \quad (3)$$

$$= (x + 2)^2 - 4. \quad (4)$$

Completando Quadrado



Das equações (1) e (4), concluímos que

$$\begin{aligned} 3x^2 + 12x + 13 &= 3 * (x^2 + 4x) + 13 \\ &= 3 * [(x + 2)^2 - 4] + 13 \\ &= 3 * (x + 2)^2 - 12 + 13 \\ &= 3 * (x + 2)^2 + 1. \end{aligned}$$

Forma Canônica



- Para todo número real m , tem-se $m^2 \geq 0$. Assim,

$$\begin{aligned}(x+2)^2 \geq 0 &\Leftrightarrow 3 * (x+2)^2 \geq 3 * 0 \\ &\Leftrightarrow 3 * (x+2)^2 + 1 \geq 0 + 1 \\ &\Leftrightarrow 3 * (x+2)^2 + 1 \geq 1\end{aligned}$$

- Portanto, a parábola de $i(x) = 3 * (x+2)^2 + 1$ possui um valor mínimo $y = 1$, que ocorre quando $3 * (x+2)^2 = 0$ (ou seja, quando $(x+2)^2 = 0$):

$$\begin{aligned}(x+2)^2 = 0 &\Leftrightarrow (x+2)(x+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x+2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x+2-2 = 0-2 \\ &\Leftrightarrow x = -2.\end{aligned}$$

Forma Canônica

- Assim, um esboço da parábola de $i(x)$ é:

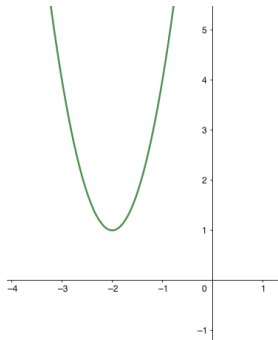


Figura 5: A parábola deve ter concavidade para cima.

Exercícios



Exercício 1

Dada a função $f(x) = -x^2 + 6$, determine se a função quadrática possui um valor máximo ou um valor mínimo e esboce o seu gráfico.

Exercício 2

Dada a função $f(x) = -3x^2 + 6x - 10$, determine se a função quadrática possui um valor máximo ou um valor mínimo e esboce o seu gráfico.

Proposição 1



Teorema 1

Toda função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser escrita na forma canônica

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Demonstração Teorema 1



Com efeito, como $a \neq 0$,

$$\begin{aligned}f(x) &= ax^2 + bx + c \\&= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c \\&= a \left(x^2 + \frac{2}{2} * \frac{b}{a}x \right) + c \\&= a \left(x^2 + \frac{2}{2} * \frac{b}{a}x \right) + c \\&= a \left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} \right) + c.\end{aligned}$$

Demonstração Teorema 1



Assim,

$$\begin{aligned}f(x) &= ax^2 + bx + c \\&= a \left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} \right) + c \\&= a \left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) + c - a * \frac{b^2}{4a^2} \\&= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac}{4a} - \frac{b^2}{4a} \\&= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.\end{aligned}$$

Corolário do Teorema 1



Corolário 1

A partir da forma canônica dada no Teorema 1, podemos afirmar que:

- i) Se $a > 0$, o gráfico de f possui concavidade voltada para cima.*
- ii) Se $a < 0$, o gráfico de f possui concavidade voltada para cima.*
- iii) O vértice da parábola é o ponto $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$.*

Demonstração



Temos que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$. Assim:

i) Se $a > 0$, então

$$\begin{aligned} a * \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq a * 0 &\Rightarrow a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \geq 0 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ &\Rightarrow a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \geq -\frac{b^2 - 4ac}{4a}, \end{aligned}$$

e a função quadrática possui um valor mínimo. A concavidade do seu gráfico é voltada para cima.

Demonstração



ii) Se $a < 0$, então

$$\begin{aligned} a * \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq a * 0 &\Rightarrow a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \leq 0 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ &\Rightarrow a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \leq -\frac{b^2 - 4ac}{4a}, \end{aligned}$$

e a função quadrática possui um valor máximo. A concavidade do seu gráfico é voltada para baixo.

Demonstração



iii) Os valores máximo ou mínimo são atingidos quando $a * \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$. Isso ocorre quando $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$. Ou seja, quando

$$\begin{aligned}x + \frac{b}{2a} = 0 &\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} - \frac{b}{2a} = 0 - \frac{b}{2a} \\&\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}.\end{aligned}$$

Por sua vez,

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

de onde segue que o vértice é o ponto $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$.

Os Zeros de uma Função Quadrática

A Raiz Quadrada



- ▶ Além das potências positivas de um número real (a^2, a^3, a^{100} , etc.), e das negativas (a^{-1}, a^{-34} , etc., quando $a \neq 0$), podemos definir potências racionais.
- ▶ Porém, a depender do racional usado, nem todo número real gera um novo número real através de tal potência.
- ▶ Veremos mais na frente que o problema está nas potências com denominador par, a qual a raiz quadrada faz parte.

A Raiz Quadrada



- ▶ A raiz quadrada de um número a nada mais é do que elevar tal número à potência $\frac{1}{2}$:

$$\sqrt{a} = a^{1/2}.$$

Usando propriedades de potência de um número real, temos que

$$0 \leq \left(a^{1/2}\right)^2 = a^{1/2} * a^{1/2} = a^{1/2+1/2} = a.$$

Ou seja, para que esteja bem definida, devemos ter $a \geq 0$ ao calcularmos a raiz quadrada.

A Raiz Quadrada



- ▶ Se queremos que \sqrt{a} seja um número real, devemos ter $a \geq 0$.
- ▶ Se $a < 0$, o resultado da operação \sqrt{a} é um novo tipo de número: um **número imaginário**.
- ▶ Como o interesse deste curso são as funções que geram números reais, a raiz quadrada deve ser aplicada em reais não-negativos (≥ 0).

Zeros da Função Quadrática



Lembrem-se que o zero de uma função é o elemento x do domínio tal que $f(x) = 0$.

Exercício 3

Seja a forma canônica de uma função quadrática é dada por

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

- a) *Qual a relação entre os coeficientes a , b e c garante a existência de soluções reais da equação $f(x) = 0$?*
- b) *Quais as fórmulas para os zeros da função quadrática dada?*

Esboço do Gráfico de uma Função Quadrática



- ▶ Calcule o vértice da parábola.
- ▶ Verifique a concavidade.
- ▶ Calcule os zeros da função e marque os pontos $(x, 0)$ no plano cartesiano, onde o gráfico corta o eixo x .
- ▶ Se não houver zeros, o gráfico está todo acima ($a > 0$) do eixo x ou todo abaixo ($a < 0$) deste eixo.
- ▶ Verifique onde o gráfico intersecta o eixo y : $(0, f(0))$.

Exemplo

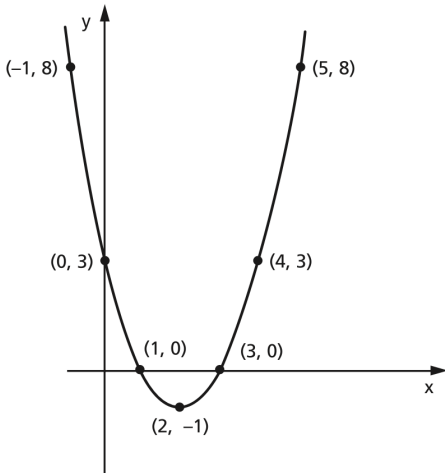


No gráfico da função

$$f(x) = x^2 - 4x + 3,$$

temos:

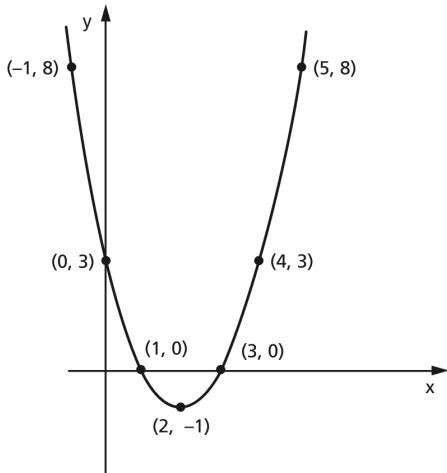
- ▶ $f(x) = (x - 2)^2 - 1$.
- ▶ O vértice é o ponto $(2, -1)$.
- ▶ Como $a = 1 > 0$, a concavidade é voltada para cima.



Exemplo



- ▶ Há duas raízes reais: $x = 1$ e $x = 3$.
- ▶ Logo, o gráfico corta o eixo x em $(1, 0)$ e $(3, 0)$.
- ▶ O gráfico corta o eixo y em $(0, 3)$.



The background is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the top-left corner, while a light beige shape occupies the bottom-left corner. The rest of the background is white. The word 'Exercícios' is centered in the white area.

Exercícios

Exercícios



Exercício 4

Determine a forma canônica, os zeros e o vértice do gráfico das funções abaixo:

a) $f(x) = -x^2 + 7x - 12$

b) $f(x) = x^2 - 2x + 2$

c) $f(x) = x^2 - 2x - 1$

Exercícios



Exercício 5

Uma empresa produz e vende determinado tipo de produto. A quantidade que ela consegue vender varia conforme o preço, da seguinte forma: a um preço y ela consegue vender x unidades do produto, de acordo com a equação $y = 50 - \frac{1}{2}x$. Sabendo que a receita (quantidade vendida vezes o preço de venda) obtida foi de R\$ 1250,00, qual foi a quantidade vendida?

Exercícios



Exercício 6

Determine os valores de m para que a função quadrática
 $f(x) = (m + 2)x^2 + (3 - 2m)x + (m - 1)$ tenha raízes reais.