Ponto Crítico

Definição

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. *Dizemos que* $(x_0, y_0) \in D$ *é um ponto crítico (ou estacionário) se*

- $f_x(x_0, y_0) = 0$ *e* $f_y(x_0, y_0) = 0$;
- *Ou se uma das derivadas parciais não existir.*

Exemplos:

1. Encontrar os pontos críticos de $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$
2. Encontrar os pontos críticos de $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Classificação dos pontos críticos

Os pontos críticos de uma função são classificados como:

- Máximo - que pode ser interpretado como o topo de uma montanha;
- Mínimo - que pode ser interpretado como o fundo de um vale;
- Ponto de Sela - que pode ser interpretado como a sela de um cavalo.

Classificação dos pontos críticos

Definição

Uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tem:

- *Um máximo relativo ou máximo local em (x_0, y_0) se*

$$f(x) \leq f(x_0, y_0), \quad \forall (x, y) \textbf{ próximo de } (x_0, y_0)$$

- *Um máximo global em (x_0, y_0) se*

$$f(x) \leq f(x_0, y_0), \quad \forall (x, y) \in D.$$

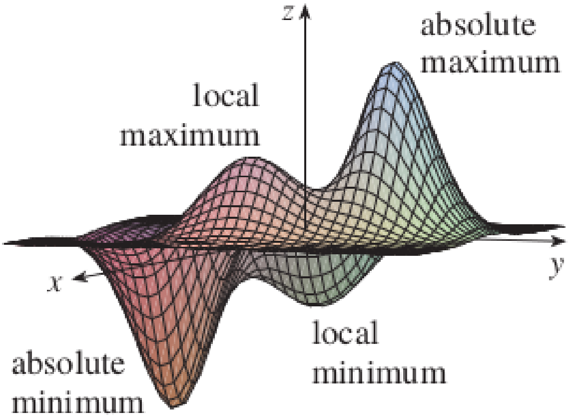
Classificação dos pontos críticos

Definição

Uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tem:*

- *Um mínimo relativo ou mínimo local em* (x_0, y_0) *se*
$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y), \quad \forall (x, y) \textbf{ próximo de } (x_0, y_0)$$
- *Um mínimo global em* (x_0, y_0) *se*
$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y), \quad \forall (x, y) \in D.$$

Classificação dos pontos críticos



Classificação dos pontos críticos

Exemplos:

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$
2. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
3. $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$

Classificação dos pontos críticos

Teorema

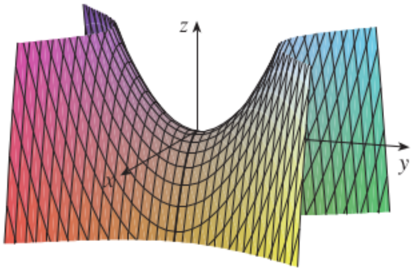
Se f possui um máximo ou mínimo local em (x_0, y_0) e as derivadas parciais de primeira ordem de f existem, então $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$.

Exemplos:

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$
2. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
3. $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$

Pontos de Sela

Encontre os valores extremos de $f(x,y) = y^2 - x^2$.



Obs: O teorema anterior garante apenas que se o ponto for de mínimo ou máximo local então $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$. Já ter $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$ não garante que o ponto seja um ponto extremo, como vimos no exemplo acima.

Pontos de Sela

1. Encontre os valores extremos de $f(x, y) = xy$.
2. Encontre os valores extremos de $f(x, y) = x^2y^2$.

A Matriz Hessiana

Teorema

Se as derivadas parciais mistas de segunda ordem de uma função f são contínuas, então:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Definição

A matriz 2×2 com as derivas parciais de segunda ordem de uma função de 2 variáveis é chamada ***Matriz Hessiana*** *e denotada por $H(x, y)$:*

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix}$$

Exemplos

Calcule o vetor gradiente e a matriz Hessiana de cada função abaixo:

1. $f(x, y) = xy;$
2. $f(x, y) = x^2y^2;$
3. $f(x, y) = y^2 - x^2;$
4. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14;$
5. $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2.$

- Bianchini, Waldecir. Aprendendo Cálculo de várias variáveis: http://www.im.ufrj.br/waldecir/calculo2/calculo2.pdf
- Lima, Paulo. Cálculo de várias variáveis: http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/Calculo_de_varias_variaveis.pdf
- Plotar gráficos e regiões: https://www.wolframalpha.com/examples/PlottingAndGraphics.html
  Software para computador: Geogebra
- Stewart, James. Cálculo, Volume II
- Anton, Howard. Cálculo, Volume II