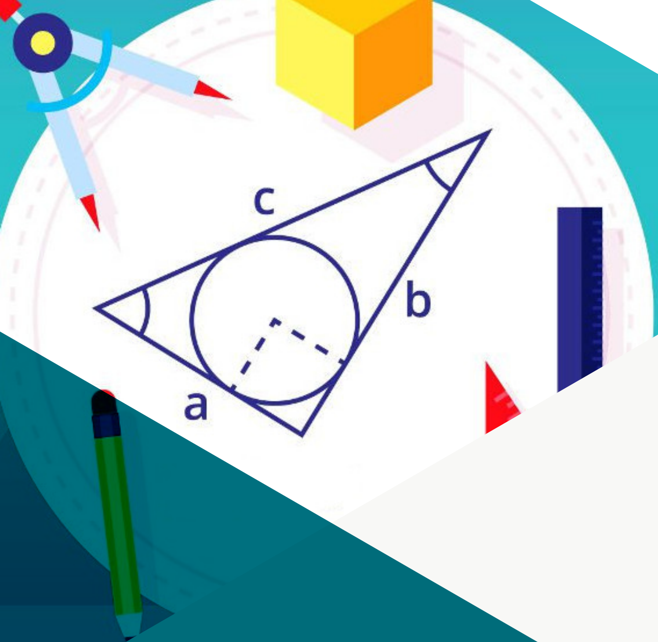


GEOMETRIA PLANA

Aula 06

Retas Paralelas - Parte 1

Karla Lima

Sumário

Definições

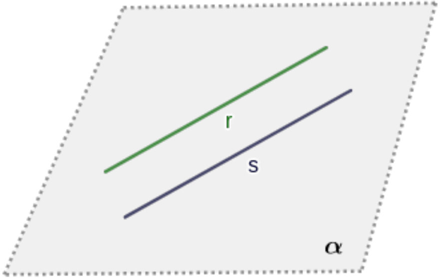
Retas Paralelas

Definição 1

*Duas retas são ditas **paralelas**, se*

i) *estão em um mesmo plano;*

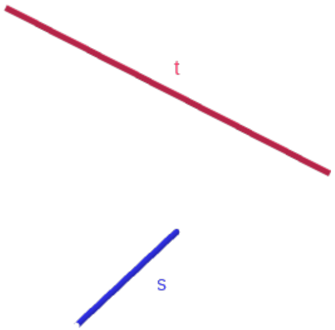
ii) *não se interceptam.*



Retas Reversas

Definição 2

*Duas retas que não estão num mesmo plano chamam-se **retas reversas**.*



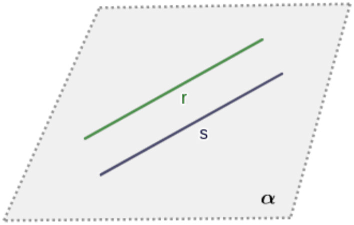
Teorema

Teorema 1

Duas retas paralelas estão contidas em um único plano.

Demonstração:

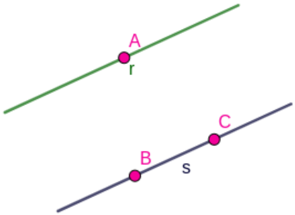
- **Hipótese:** r e s são paralelas.
- **Tese:** Existe um único plano α contendo r e s.



Demonstração: Teorema 1

Como as retas são paralelas, elas não se interceptam e estão contida num plano α. Vamos mostrar que α é único.

- Tome um ponto A na reta r e dois pontos, B e C, na reta s.
- Os três pontos acima são não colineares, logo existe um único plano que os contém.
- Como α contém as duas retas, este plano também contém os pontos A, B e C.
- Como vimos acima, só existe um plano que contém os três pontos, logo esse plano é o α que contém as duas retas.



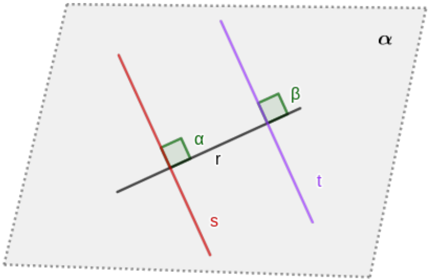
Teorema

Teorema 2

Num mesmo plano, duas retas distintas perpendiculares a uma terceira, são paralelas entre si.

Demonstração:

- **Hipótese:**
  $r, s, t \in \alpha, r \perp s,$
  $r \perp t$ e $s \neq t.$
- **Tese:** s e t são paralelas.



Demonstração: Teorema 2

- Suponha, por absurdo, que as retas s e t se interceptam em um ponto P.
- Pelo Corolário 2 do Teorema 7 (Triângulos), por esse ponto P passa uma única reta perpendicular a reta r.
- Como $r \perp s$ e $r \perp t$, teríamos $t = s$, contrariando a nossa hipótese de que as retas são distintas.
- Portanto, $s \cap t = \emptyset$, de onde segue que as retas estão num mesmo plano (hipótese) e não se interceptam, sendo paralelas.

Os Postulados de Euclides

Elementos de Euclides

- No início do curso, falamos um pouco (bem pouco), sobre a obra ’Elementos’ de Euclides.
- Esse livro faz uma apresentação da Geometria muito bem organizada na roupagem da lógica.
- Cada resultado é demonstrado com base no antecedente, de modo que, para o processo tenha começo, é preciso formular algumas proposições que ficam sem demonstração (chamados axiomas ou postulados).

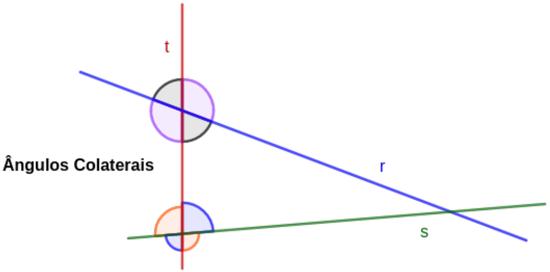
Os Postulados de Euclides

Euclides formulou 5 postulados que, traduzidos e interpretados em nossa linguagem, são enunciados a seguir:

1. Por dois pontos passa uma reta e somente uma.
2. A partir de qualquer ponto de uma reta dada é possível marcar um segmento de comprimento dado sobre a reta.
3. É possível descrever um círculo de centro e raios dados.
4. Todos os ângulos retos são iguais (Euclides define ’ângulo reto’ como sendo igual ao ângulo formado por duas retas que se cortam de maneira a formar quatro ângulos iguais.)
5. Se uma reta t corta duas outras r e s (todas num mesmo plano) de modo que um dos pares dos ângulos colaterais internos tem soma inferior a dois ângulos retos, então r e s, quando prolongadas suficientemente, se cortam do lado de t em que se encontram os referidos ângulos colaterais internos.

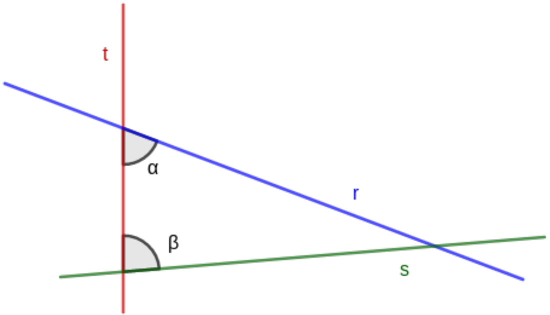
O 5º Postulado de Euclides

O enunciado fica mais claro quando acompanhado da observação da figura abaixo:



- Num mesmo plano, *t* corta as retas *r* e *s*.
- Tome pares (α, β), onde α é um ângulo formado pela interseção de *t* e *r* e β formado pela interseção de *t* e *s* (ângulos colaterais). Acima, temos apenas um exemplo. Cada interseção gera 4 ângulos.

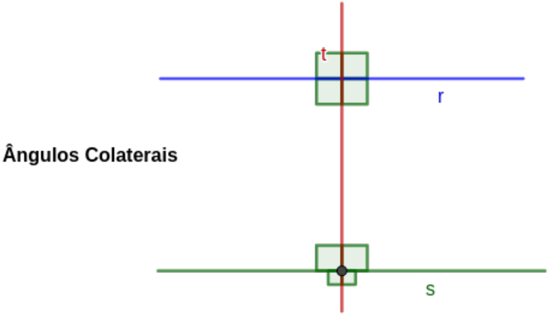
O 5º Postulado de Euclides



- Se existir um par no qual a sua soma é menor que 180, as retas *r* e *s* se cortam. Além disso, se cortam no semiplano gerado por *t*, em que os ângulos colaterais referidos estão (nesse exemplo, do lado direito de *t*).

O 5º Postulado de Euclides

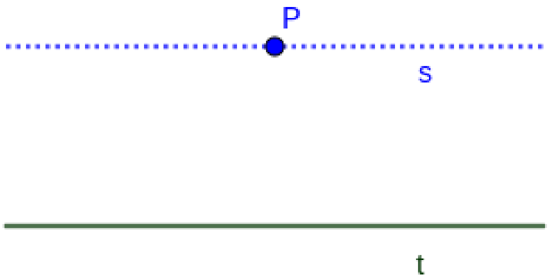
No caso em que não há um par (α, β) tal que $\alpha + \beta < 180$, temos então, obrigatoriamente (por quê?) $\alpha = \beta = 90°$, em todos os pares. Assim, teremos:



- As retas não r e s não se cruzam.

Postulado 12

Postulado de Playfair: Por um ponto não pertencente a uma reta, passa um única reta paralela à reta dada.

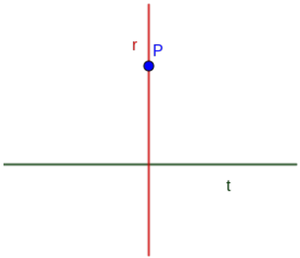


Esse postulado é equivalente ao 5º Postulado de Euclides. Leia mais em [1, 2, 3].

Postulado 12

Obs: O resultado acima é um postulado por causa da unicidade da paralela e não por causa da sua existência. Essa pode ser provada facilmente:

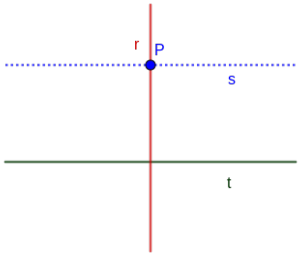
- Pelo Corolário 2 do Teorema 7 (Triângulos), passando por P, existe uma única reta perpendicular à reta t.



Postulado 12

O mesmo pode ser feito com a nova reta r.

- Pelo Corolário 2 do Teorema 7 (Triângulos), passando por P, existe uma única reta perpendicular à reta r, no mesmo plano α em que r e t estão.
- Pelo Teorema 2 (Retas Paralelas), como t e s são perpendiculares à r, num mesmo plano α, t e s são paralelas entre si, como queríamos demonstrar.



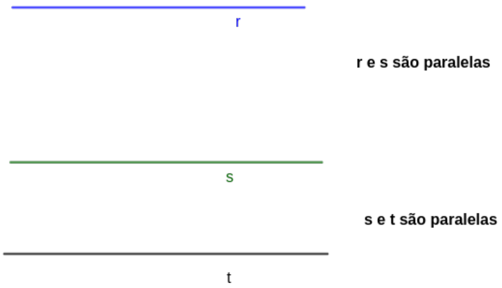
Teorema

Teorema 3

Num mesmo plano, duas retas paralelas a um terceira são paralelas entre si.

Demonstração:

- **Hipótese:**
  r e s são paralelas;
  t e s são paralelas;
  $r, s, t \in \alpha$.
- **Tese:** r e t são paralelas.



Demonstração: Teorema 3

- Suponha, por absurdo, que r e t não são paralelas.
- Como estão num mesmo plano, isso quer dizer que existe um ponto P que é a interseção entre as duas retas.
- Por esse ponto P, podemos traçar duas retas distintas, r e t, paralelas à reta s.
- Isso contraria o Postulado das Paralelas e, portanto, as retas r e t não podem ser concorrentes e, sim, paralelas, c.q.d.

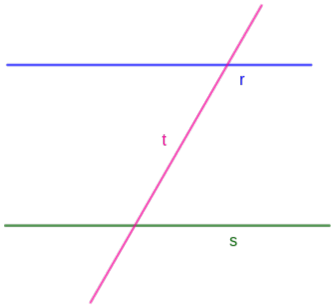
Teorema

Teorema 4

Num mesmo plano, se duas retas são paralelas, então toda reta que intercepta uma delas, também interceptará a outra.

Demonstração:

- **Hipótese:** *r* e *s* são paralelas;
  t e *r* são concorrentes.
- **Tese:** *s* e *t* se interceptam.



Demonstração: Teorema 4

- Suponha, por absurdo, que s e t não se interceptam.
- Então, s e t são retas paralelas entre si.
- Logo,

$$s \parallel t \quad \text{e} \quad s \parallel r$$

  de onde concluímos, pelo Teorema 3, que r e t também são paralelas, contrariando a hipótese.
- Portanto, deve-se ter s e t concorrentes.

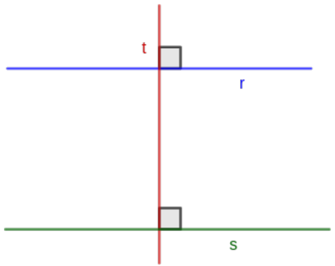
Teorema

Teorema 5

Num mesmo plano, se duas retas são paralelas, então toda reta perpendicular a uma delas será perpendicular a outra.

Demonstração:

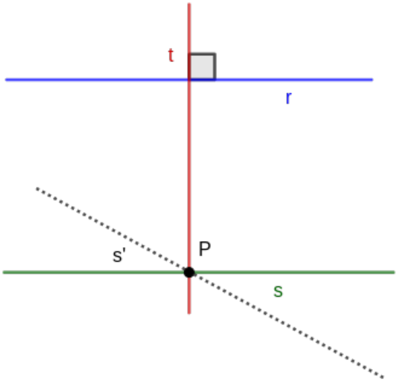
- **Hipótese:** r e s são paralelas;
  $t \perp r$.
- **Tese:** $s \perp t$.



Demonstração: Teorema 5

Demonstração:

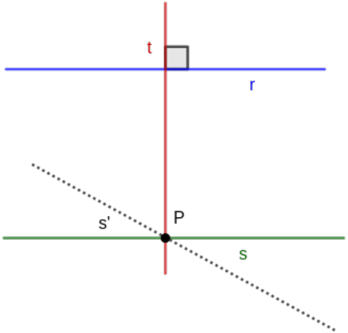
- Seja P o ponto de interseção entre as retas s e t (garantido pelo Teorema 4).
- Por P, trace uma reta s' perpendicular à reta t (garantido pelo Corolário 2, Teorema 7 - Triângulos).



Demonstração: Teorema 5

Demonstração:

- Assim, $r \perp t$ e $s' \perp t$.
- Pelo Teorema 2, temos que $r//s'$.
- Assim, pelo ponto P, passam duas retas, s e s', paralelas à reta r.
- Pelo Postulado das Paralelas, tem-se $s = s'$.
- Portanto, s é perpendicular à r.



Secantes a Várias Paralelas

Reta Secante

Definição 3

*Uma **secante** a duas retas coplanares é uma reta que as intercepta em dois pontos distintos.*

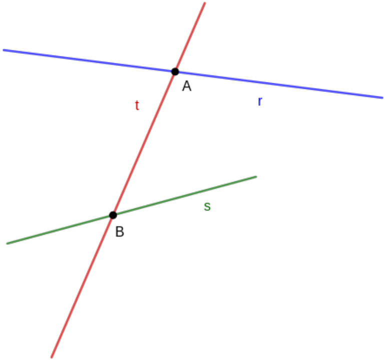


Figura 1: t é secante às retas r e s, nos pontos A e B

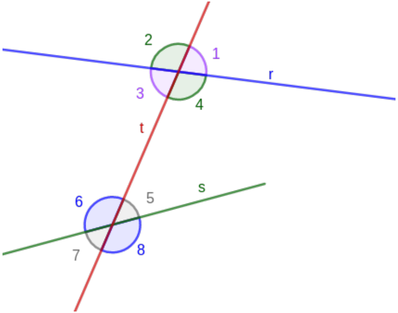
Reta Secante

Definição 4

Sejam r e s retas coplanares e t uma secante às mesmas. Usaremos a seguinte nomenclatura:

- I. São denominados **alternos internos** os pares de ângulos:
  - 3 e 5
  - 4 e 6

  II. São denominados **alternos externos** os pares de ângulos:
  - 1 e 7
  - 2 e 8

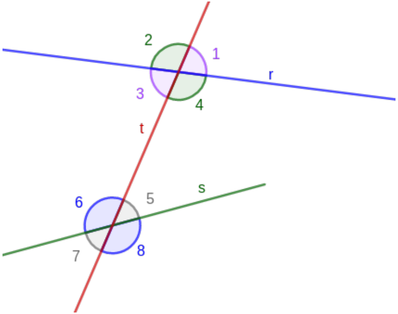


Reta Secante

III. São denominados **correspondentes** os pares de ângulos:
   - 1 e 5
   - 4 e 8
   - 2 e 6
   - 3 e 7

IV. São denominados **colaterais internos** os pares de ângulos:
   - 4 e 5
   - 3 e 6

V. São denominados **colaterais externos** os pares de ângulos:
   - 1 e 8
   - 2 e 7

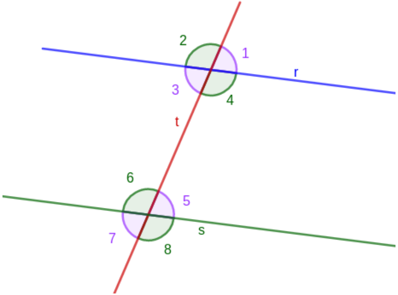


Teorema

Teorema 6

Se duas retas paralelas são cortadas por uma secante, então os quatro ângulos agudos formados são congruentes, bem como os quatro ângulos obtusos.

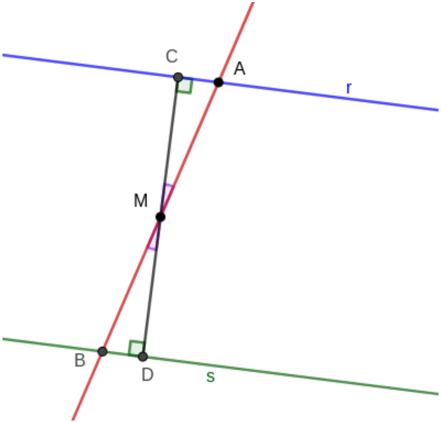
- **Hipótese:** *r* e *s* são paralelas;
  t é secante às duas.
- **Tese:** São congruentes os ângulos:
  - $1 = 3 = 5 = 7$
  - $2 = 4 = 6 = 8$



Demonstração: Teorema 6

Demonstração:

- Sejam A e B os pontos de interseções da secante com as retas r e s.
- Seja M o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.
- Pelo ponto M, tracemos um segmento perpendicular às retas r e s.
- Os triângulos retângulos CMA e DMB são congruentes (Caso LAA).



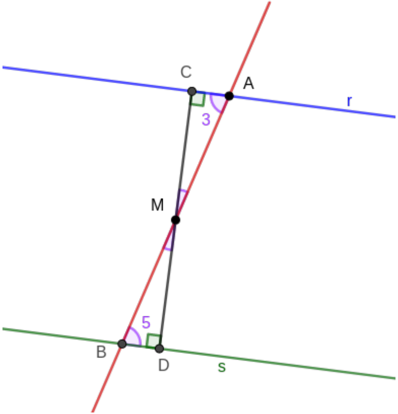
Demonstração: Teorema 6

Demonstração:

- Com isso, são congruentes os ângulos 3 e 5.
- Como $1 = 3$ e $5 = 7$, por serem ângulos opostos pelo vértice, segue que

$$1 = 3 = 5 = 7.$$

- Por outro lado, $2 = 4 = 6 = 8$ por serem suplementos de ângulos congruentes.



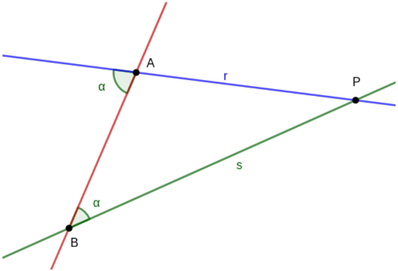
Teorema

Teorema 7

Sejam r e s retas coplanares cortadas por uma secante s. Se dois ângulos alternos são congruentes, então as retas r e s são paralelas.

Demonstração:

- Suponha, por absurdo, que as retas não são paralelas.
- Como são coplanares, as retas devem se interceptar num ponto P, formando um triângulo ABP.
- Com isso, $\triangle ABP$ teria um ângulo externo com medida igual ao ângulo interno α, contrariando o teorema do ângulo externo.



Teorema 7

Este teorema ainda é verdadeiro se substituirmos a expressão ’alternos internos’ por:

- alternos externos
- correspondentes
- colaterais internos
- colaterais externos

Secantes a Várias Paralelas

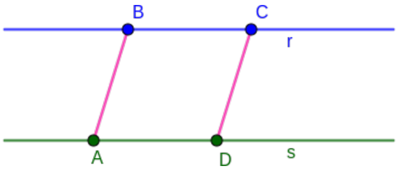
Teorema

Teorema 8

Dois segmentos paralelos, compreendidos entre retas paralelas, são congruentes.

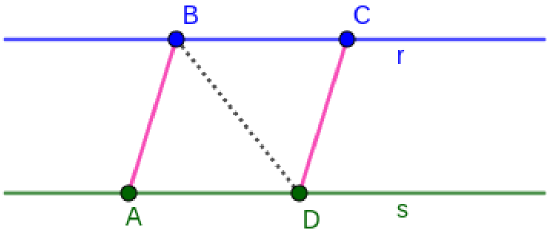
.

- **Hipótese:** r e s são paralelas; $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ são paralelos.
- **Tese:** $AB = DC$.



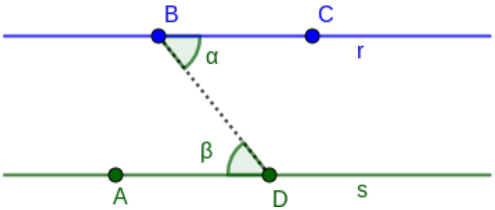
Demonstração: Teorema 8

- Unindo os pontos B e D obtemos dois triângulos: ABD e BDC.



Demonstração: Teorema 8

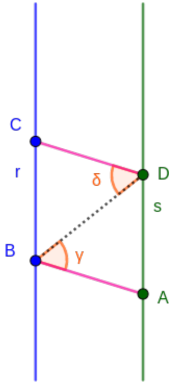
- Considere as retas r e s cortadas pela transversal que contém $\overline{BD}$.



- O que podemos concluir sobre os ângulos $\alpha = D\hat{B}C$ e $\beta = B\hat{D}A$?

Demonstração: Teorema 8

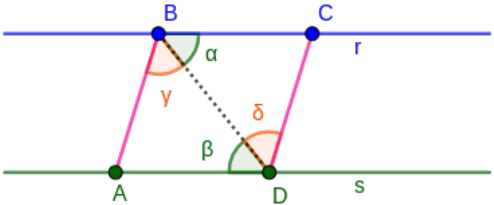
- Considere agora as retas paralelas que contém $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ cortadas pela transversal que contém $\overline{BD}$.



- O que podemos concluir sobre os ângulos $\delta = C\hat{D}B$ e $\gamma = D\hat{B}A$?

Demonstração: Teorema 8

- Qual é o caso de congruência que garante que $\triangle ABD = \triangle CDB$?



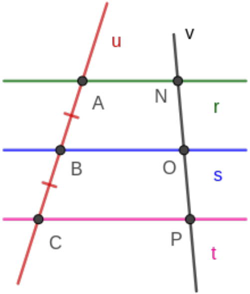
- Como podemos concluir que $AB = DC$?

Teorema

Teorema 9

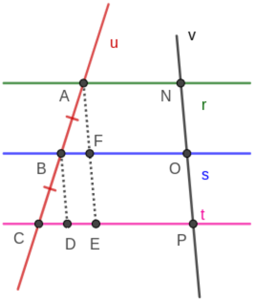
Se três paralelas determinam segmentos congruentes em um secante às mesmas, então determinam segmentos congruentes em qualquer outra secante.

- **Hipótese:** r, s e t são paralelas;
  u é secante às três retas,
  com $AB = BC$.
- **Tese:** Se v é secante às retas r, s e t,
  então $NO = OP$.



Demonstração: Teorema 9

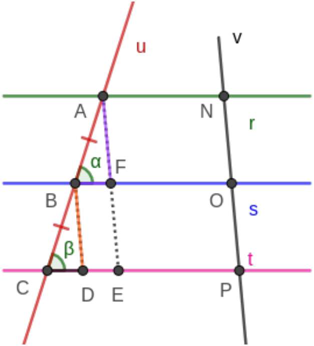
- Pelos pontos A e B da figura, trace segmentos paralelos à secante v.



- Pelo Teorema 8, o que podemos concluir sobre os segmentos $\overline{AF}$ e $\overline{NO}$? E sobre os segmentos $\overline{BD}$, $\overline{FE}$ e $\overline{OP}$?

Demonstração: Teorema 9

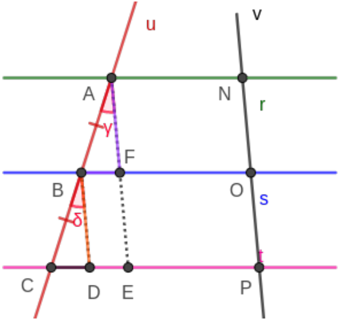
- Considere os ângulos $\alpha = A\hat{B}F$ e $\beta = B\hat{C}D$, formados pela secante u através das paralelas s e t.



ii) Qual a relação entre α e β?

Demonstração: Teorema 9

- Considere os ângulos $\gamma = B\hat{A}F$ e $\delta = C\hat{B}D$, formados pela secante u através das paralelas $\overrightarrow{AE}$ e $\overrightarrow{BD}$.



iii) Qual a relação entre γ e δ?

Demonstração: Teorema 9

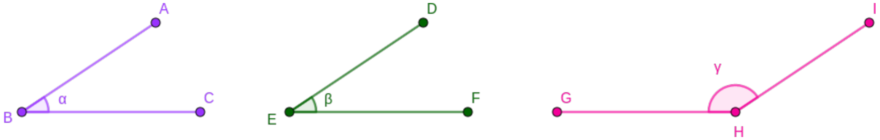
- Usando os itens ii) e iii), junto à hipótese de que $AB = BC$, qual o caso de congruência usado para mostrar que $\triangle AFB = \triangle CBD$?
- Como a congruência acima, junto ao item i), nos ajuda a concluir que $NO = OP$?

Ângulos de Lados Paralelos
Ângulos de Lados Perpendiculares

Teorema

Teorema 10

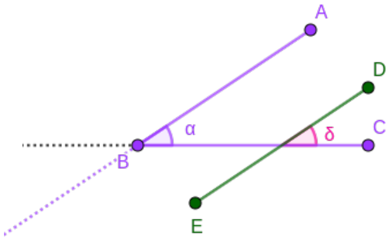
Dois ângulos de lados respectivamente paralelos são congruentes ou suplementares; são congruentes se ambos são agudos ou obtusos e são suplementares se um é agudo e o outro obtuso.



- **Hipótese:** $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ e $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$;
  $\overline{DE} \parallel \overline{HI}$ e $\overline{EF} \parallel \overline{GH}$.
- **Tese:** $A\hat{B}C = D\hat{E}F$ e $D\hat{E}F + G\hat{H}I = 180^\circ$.

Demonstração: Teorema 10

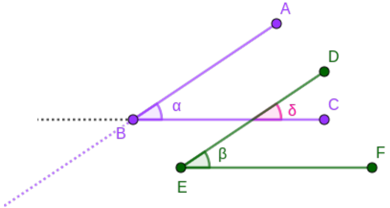
i) $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ e $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$; $\hat{B}$ e $\hat{E}$ são agudos.



- Coloque o segmento DE numa posição do plano onde $\overleftrightarrow{BC}$ seja uma secante a este segmento.
- O que podemos concluir sobre os ângulos α e δ?

Demonstração: Teorema 10

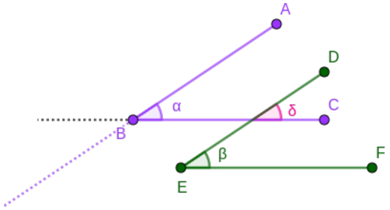
- Agora, inclua o segmento $\overline{EF}$, que é paralelo ao segmento $\overline{BC}$.



- Justifique por que podemos concluir que $A\hat{B}C = D\hat{E}F$.

Demonstração: Teorema 10

ii) $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ e $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$; $\hat{B}$ e $\hat{E}$ são agudos.



- Coloque o segmento DE numa posição do plano onde $\overleftrightarrow{BC}$ seja uma secante a este segmento.
- O que podemos concluir sobre os ângulos α e δ?

Demonstração: Teorema 10

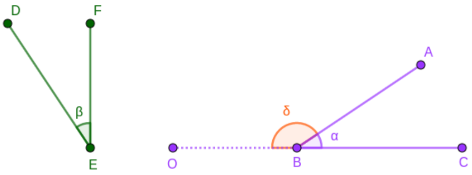
ii) $\overline{IH} \parallel \overline{DE}$ e $\overline{HG} \parallel \overline{EF}$; $\hat{E}$ é agudo e $\hat{H}$ é obtuso.

- Sobre a reta $\overleftrightarrow{GH}$, marque o ângulo ϵ complementar ao ângulo $G\hat{H}I$.
- Com isso, formamos um ângulo agudo $I\hat{H}G'$, tal que $\overline{HI} \parallel \overline{DE}$ e $\overline{HG'} \parallel \overline{EF}$.
- Do item i), o que podemos concluir sobre $D\hat{E}F$, $I\hat{H}G'$ e $G\hat{H}I$?

Teorema

Teorema 11

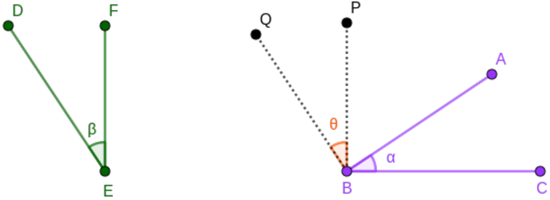
Dois ângulos de lados respectivamente perpendiculares são congruentes ou suplementares; são congruentes se ambos são agudos ou obtusos e são suplementares se um é agudo e o outro obtuso.



- **Hipótese:** $\overline{AB} \perp \overline{DE}$ e $\overline{BC} \perp \overline{EF}$;
  $\overline{AB} \perp \overline{DE}$ e $\overline{EF} \perp \overline{OB}$.
- **Tese:** $A\hat{B}C = D\hat{E}F$ e $D\hat{E}F + O\hat{B}A = 180°$.

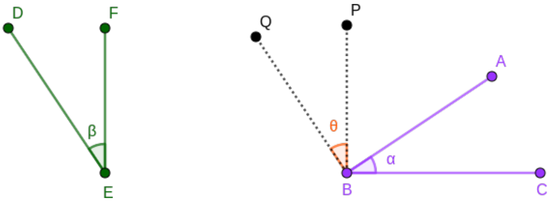
Demonstração: Teorema 11

i) $\overline{AB} \perp \overline{DE}$ e $\overline{BC} \perp \overline{EF}$; $\hat{B}$ e $\hat{E}$ são agudos.



- Pelo ponto B, tracemos $\overline{BQ} \parallel \overline{DE}$ e $\overline{BP} \parallel \overline{EF}$.
- Pelo Teorema 10, $D\hat{E}F = Q\hat{B}P$.

Demonstração: Teorema 11

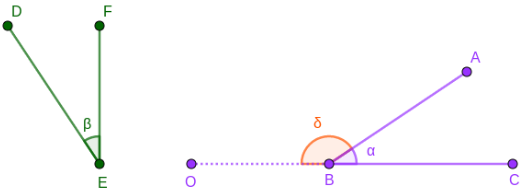


- Pelo Teorema 5, $\overline{AB} \perp \overline{BQ}$ e $\overline{BC} \perp \overline{BP}$. Logo,

$$Q\hat{B}P + P\hat{B}A = 90 \text{ e } P\hat{B}A + A\hat{B}C = 90$$
$$\Rightarrow D\hat{E}F = Q\hat{B}P = A\hat{B}C,$$

como queríamos demonstrar.

Demonstração: Teorema 11

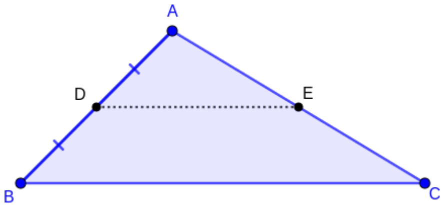


- Dada a relação entre $D\hat{E}F$ e $A\hat{B}C$, o que podemos concluir sobre $D\hat{E}F$ e $O\hat{B}A$?

Teorema

Teorema 12

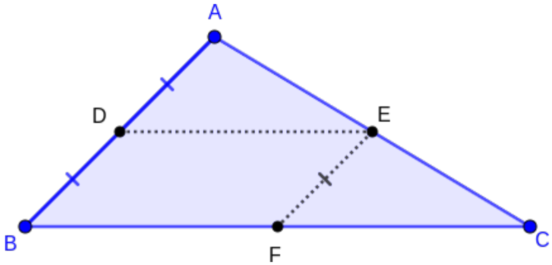
Se do ponto médio do lado de um triângulo, traçarmos uma paralela a um dos lados, esta passará pelo ponto médio do terceiro lado.



- **Hipótese:** $AD = DB$ e $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.
- **Tese:** $AE = EC$.

Demonstração: Teorema 12

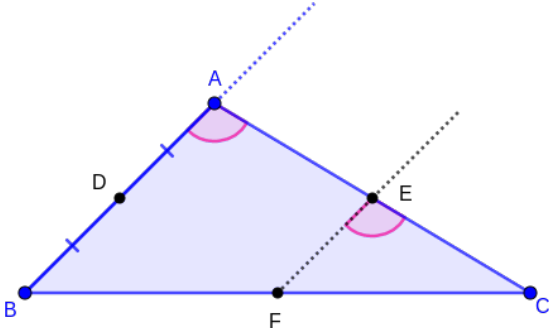
- Pelo ponto E, que a paralela ao lado $\overline{BC}$ corta o lado $\overline{AC}$, trace um segmento paralelo ao lado $\overline{AB}$, cortando o lado $\overline{BC}$.



i) Qual teorema garante que $BD = FE$?

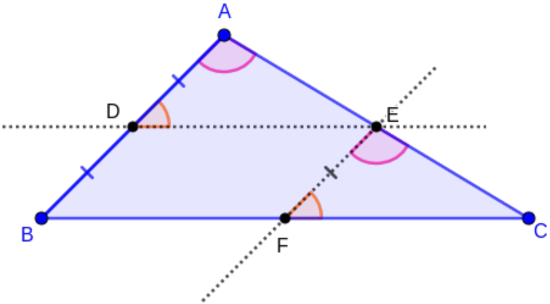
Demonstração: Teorema 12

ii) Sendo $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$, cortadas pela transversal $\overline{AC}$, como podemos relacionar os ângulos $A\hat{D}E$ e $E\hat{F}C$?



Demonstração: Teorema 12

iii) Como $\overline{DA} \parallel \overline{FE}$ e $\overline{DE} \parallel \overline{FC}$, como podemos relacionar os ângulos $A\hat{D}E$ e $E\hat{F}C$?



iv) Dos itens anteriores, o que garante a congruência dos triângulos DAE e FEC?

- Da congruência acima, o que garante que $AE = EC$?

Corolário

Corolário 1

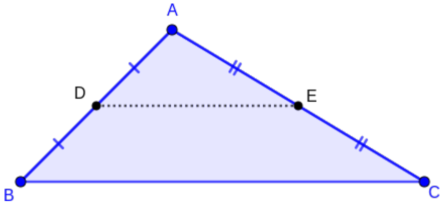
No triângulo anterior, tem-se $DE = \dfrac{BC}{2}$.

Demonstração: Exercício 7.

Teorema

Teorema 13

O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado.



- **Hipótese:** $AD = DB$ e $AE = EC$.
- **Tese:** $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

Demonstração: Teorema 13

1. Pelo ponto médio de $\overline{AB}$, D, traçamos uma reta paralela ao lado $\overline{BC}$.
2. Pelo Teorema 12, essa reta corta o lado $\overline{AC}$ no seu ponto médio, E.
3. Como pelos pontos distintos D e E passa uma única reta, o segmento $\overline{DE}$ deve estar contido na reta traçada, o que implica em - também - ser paralelo ao lado $\overline{BC}$.

Corolário

Corolário 2

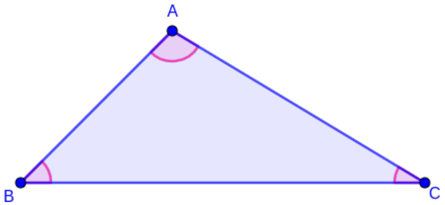
No triângulo anterior, tem-se $DE = \frac{BC}{2}$.

Demonstração: Exercício 7.

Teorema

Teorema 14

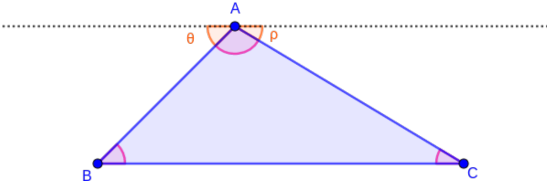
Em todo triângulo, a soma dos seus ângulos internos é igual à 180°.



- **Hipótese:** ABC é um triângulo.
- **Tese:** $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$.

Demonstração: Teorema 14

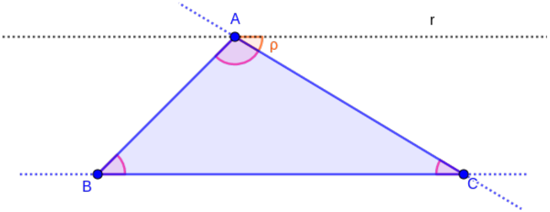
- Pelo vértice A, trace uma reta r paralela ao lado $\overline{BC}$.



i) Temos que $\theta + \hat{A} + \rho = 180°$.

Demonstração: Teorema 14

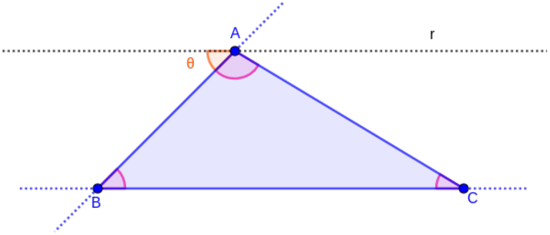
- Observando as paralelas $\overline{BC}$ e r cortadas pela transversal $\overline{AC}$, obtemos que os ângulos $\hat{C}$ e ρ são alternos internos.



ii) Portanto, $\rho = \hat{C}$.

Demonstração: Teorema 14

- Por fim, observando as paralelas $\overline{BC}$ e r cortadas pela transversal $\overline{AB}$, obtemos que os ângulos $\hat{B}$ e θ são alternos internos.



iii) Portanto, $\theta = \hat{B}$.

Demonstração: Teorema 14

De i), ii) e iii), concluímos que

$$180^\circ = \hat{A} + \theta + \rho = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}.$$

Corolário

Corolário 3

Em todo triângulo, a medida de qualquer ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes.

Demonstração: Exercício 8.

Referencias I

- Geraldo Ávila.
  Legendre e o postulado das paralelas.
  Revista da Olimpíada, 6:64–76, 2005.
- Manfredo Perdigão do Carmo.
  Geometrias não-Euclidianas.
  Matemática Universitária, 6:25–48, 1987.
- A geometria dos espaços curvos ou geometria não-euclidiana.
  ON - Observatório Nacional.