ELEMENTOS DE ARITMÉTICA

Aula 02

Conjuntos Numéricos

Karla Lima

Sumário

Introdução

O Início [1]

- Usualmente, considera-se como a matemática mais antiga aquela resultante dos primeiros esforços do homem para sistematizar os conceitos de grandeza, forma e número.
- Desde os tempos mais remotos, os seres humanos sentiram a necessidade de contar e representar quantidades de uma forma sistemática.
- O desenvolvimento dos números e sistemas numéricos é uma narrativa fascinante que perpassa culturas e épocas, refletindo a evolução do pensamento humano e das necessidades práticas.
- O conceito de número e o processo de contar desenvolveram-se tão antes dos primeiros registros históricos (há evidências arqueológicas de que o homem, já há uns 50 000 anos, era capaz de contar) que a maneira como ocorreram é largamente conjectural.

O Início

- A contagem começou de maneira bastante simples, provavelmente com o uso de marcas em pedras, ossos ou outros objetos, para representar quantidades de animais, alimentos ou objetos.
- Com o tempo, essas representações evoluíram, dando origem a sistemas numéricos mais complexos.

Os Números Naturais

Introdução

- Os números naturais formam a base fundamental da matemática e desempenham um papel essencial em nossa compreensão do mundo ao nosso redor.
- Desde os tempos mais primordiais, os seres humanos têm contado e manipulado números naturais para quantificar objetos, eventos e fenômenos.

Introdução

- Os números naturais são aqueles usados para contar itens individuais.
- Eles começam em 1 e se estendem indefinidamente: 1, 2, 3, 4, 5 e assim por diante.
- O conjunto dos números naturais é frequentemente representado pelo símbolo $\mathbb{N}$.

Caracterização

- O sucessor de um número natural é um conceito fundamental na matemática, especialmente na teoria dos números.
- É simplesmente o próximo número natural na sequência, não havendo outros números naturais entre um número e o seu sucessor.
  - O sucessor de 1 é 2.
  - O sucessor de 2 é 3.
  - De forma geral, dado um número natural n, o seu sucessor é descrito como sendo

$$n + 1.$$

Axiomas[1] de Peano

1. Todo número natural n possui um único sucessor.
2. Números naturais diferentes possuem sucessores diferentes.
3. Existe um único número natural, chamado UM e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro.
4. **(Axioma de Indução:)** Seja X um conjunto de números naturais ($X \subset \mathbb{N}$). Se $1 \in X$ e, se além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.

[1] Axioma: Afirmação aceita sem discussão ou contestação.

Representação

- Declaramos os elementos do Conjunto dos Números Naturais escrevendo

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

- O ZERO é um número natural? A resposta é: sim, não ou depende!
- Inicialmente, ele apareceu como um símbolo para indicar um lugar vazio no sistema de numeração posicional [2].
- Este símbolo foi criado para ajudar a escrever os números no sistema posicional, para preencher o vazio que diferenciava números como 25 e 205.

---

[2] Assista ao vídeo: A longa batalha do zero para se tornar um número.

Representação

- A representação dos números utilizando os símbolos 1, 2, ..., 9, 0 (conhecidos como algarismos) é conhecida como sistema indo-arábico.
- A grande vantagem desse sistema se dá pelo uso da **base decimal**.
- As operações são mais facilmente realizadas através desse sistema.

Bases

- Quando se tornou necessário efetuar contagens mais extensas, o processo de contar teve de ser sistematizado.
- Isso foi alcançado organizando os números em grupos básicos convenientes, cuja ordem de grandeza era determinada pelo método de correspondência utilizado.
- O método envolvia escolher um número base (denominado como "b") e atribuir nomes aos números de 1 a b. Para números maiores que b, os nomes eram formados principalmente pela combinação dos nomes dos números previamente escolhidos.

Bases

- Há evidências de que 2, 3 e 4 serviram como bases primitivas.
- Como seria de esperar, o sistema quinário, ou sistema de numeração de base 5 (o número de dedos de uma mão), foi o primeiro a ser usado extensivamente.
- Como os dedos do homem constituíam um dispositivo de correspondência conveniente, não é de estranhar que o 10 acabasse sendo escolhido frequentemente como a base.

Bases Comuns na Atualidade

- Decimal (Base 10): Esta é a base numérica mais comum e amplamente utilizada. No sistema decimal, cada posição em um número representa um múltiplo de potências de 10.
- Binária (Base 2): O sistema binário é fundamental em sistemas digitais e computacionais. Ele usa apenas dois dígitos, 0 e 1, para representar números. Cada posição em um número binário representa um múltiplo de potências de 2.
- Octal (Base 8): O sistema octal utiliza 8 dígitos, de 0 a 7, para representar números. É usado em algumas áreas de computação e programação.
- Hexadecimal (Base 16): O sistema hexadecimal utiliza 16 dígitos, de 0 a 9 e A a F (representando 10 a 15, respectivamente). É comumente usado em programação e ciência da computação, pois fornece uma forma compacta de representar números binários. Usado no padrão HEX de cores!

Bases: Dígitos

Para cada base, há um conjunto pré-determinado de dígitos que podem ser usados:

- Decimal (Base 10): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- Binária (Base 2): 0, 1.
- Octal (Base 8): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
- Hexadecimal (Base 16): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F (representando 10 a 15, respectivamente).

Bases

Os símbolos abaixo representam o MESMO número!

- 12
- 1100
- 14
- C

Bases

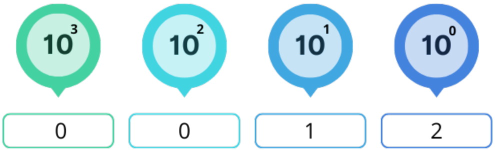
Os símbolos abaixo representam o MESMO número!

- 12
- 1100
- 14
- C

Eles apenas estão escritos em **bases diferentes**.

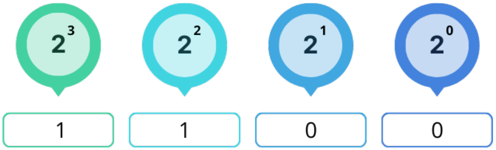
Bases

Base 10



$$12 = 1*10^1 + 2*1$$

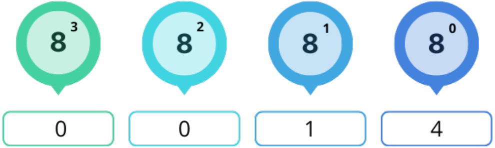
Base 2



$$12 = 1*2^3 + 1*2^2 + 0*2^1 + 0*1$$

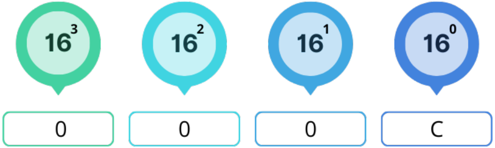
Bases

Base 8



$$12 = 1*8^1 + 4*1$$

Base 16



$$12 = C$$

Bases

Base b

$$X * b^k$$

Posição do dígito, em relação a vírgula.

Dígito do número na posição k.

Base do sistema de numeração.

Exercício

Exercício 1

Escreva o número 19 *nas bases decimal, binária, octal e hexadecimal.*

Operações com Números Naturais: Adição

A Reta Numérica

Além de utilizarmos a notação decimal, podemos representar os números naturais por meio de pontos equidistantes marcados ao longo uma semirreta, como mostrado a seguir:

A reta correspondente é conhecida como a **reta numérica**.

A Reta Numérica

Essa compreensão de que os números podem ser posicionados em uma reta facilita o entendimento dos conceitos de maior que e menor que.

De fato, escrevemos $a < b$ (leia a menor do que b) sempre que a estiver representado à esquerda de b na reta numérica

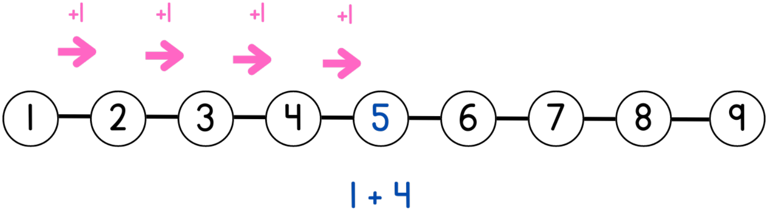
Operação entre Números Naturais: Adição

Definição 1

Mediante essa nova forma de compreender os números naturais, definimos a ***adição*** $a + b$ *como sendo o número natural que se obtém a partir de* a *aplicando-se* p *vezes seguidas a operação de tomar o sucessor.*

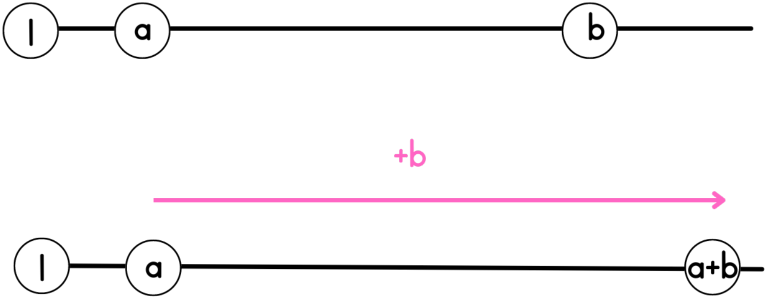
Operação entre Números Naturais: Adição

A adição do número 4 ao número 1 pode ser entendida aplicando-se 4 vezes seguidas a operação de tomar o sucessor, a partir de 1:



Operação entre Números Naturais: Adição

A adição de um número b a um número a pode ser entendida como um deslocamento de b passos para a direita a partir do ponto a.

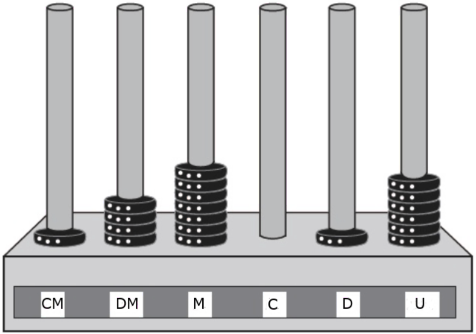


O Ábaco

O ábaco é um antigo instrumento de cálculo que usa notação posicional de base 10 para representar números naturais. Ele pode ser apresentado em vários modelos, um deles formado por hastes apoiadas em uma base. Cada haste corresponde a uma posição no sistema decimal e nelas são colocadas argolas; a quantidade de argolas na haste representa o algarismo daquela posição.

O Ábaco

Em geral, colocam-se adesivos abaixo das hastes com os símbolos U, D, C, M, DM e CM, que correspondem, respectivamente, a unidades, dezenas, centenas, unidades de milhar, dezenas de milhar e centenas de milhar, sempre começando com a unidade na haste da direita e as demais ordens do número no sistema decimal nas hastes subsequentes (da direita para esquerda), até a haste que se encontra mais à esquerda.



Adição em Diferentes Bases

Figura 1: A adição de 19 a 12 nas bases 10 e 2, respectivamente.

Adição em Diferentes Bases

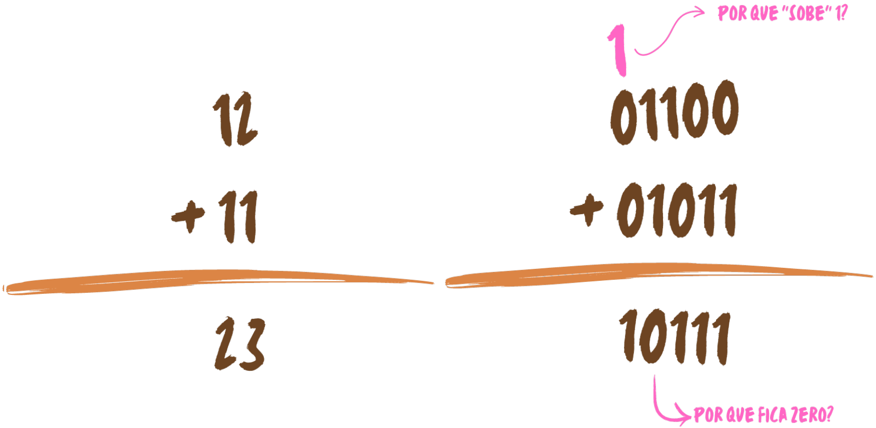


Figura 2: A adição de 11 a 12 nas bases 10 e 2, respectivamente.

Propriedades Formais da Adição

- **Associatividade:** $a + (b + c) = (a + b) + c$;
- **Comutatividade:** $a + b = b + a$;
- **Lei do Corte:** $a + b = c + b \Rightarrow a = c$;

Exercícios

Exercício 2

Usando as propriedades da adição dos números naturais, calcule a soma

$$1997 + 1998 + 2002 + 2003.$$

Operações com Números Naturais: Multiplicação

Multiplicação

Definição 2

Por definição, tem-se $a \times 1 = a$*. Quando* $b \neq 1$*,* $a \times b$ *é a soma de* b *parcelas iguais a* a*.*

- $4 \times 1 = 4.$
- $4 \times 2 = 4 + 4 = 8.$
- $5 \times 3 = 5 + 5 + 5 = 15.$

Propriedades Formais da Multiplicação

- **Associatividade:** $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$;
- **Comutatividade:** $a \times b = b \times a$;
- **Lei do Corte:** $a \times b = c \times b \Rightarrow a = c$ (Lembrem-se, não estou considerando o número 0 como um número natural. Se $b = 0$, tal lei não é válida!);
- **Distributividade:** $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

Erro comum: $2 \times (b + 3) = 2 \times b + 3$ (Não multiplicar tudo que está dentro dos parênteses!)

Exercícios

Exercício 3

Usando as propriedades da adição e multiplicação dos números naturais, calcule a soma

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100.$$

Exercícios

Exercício 4

Usando as propriedades da multiplicação dos números naturais, calcule

$$16 \times 73 \times 125.$$

Multiplicação em Diferentes Bases

$$
\begin{array}{r}
12 \\
\times\ 11 \\
\hline
12 \\
+120 \\
\hline
132
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
1100 \\
\times\ 1011 \\
\hline
1100 \\
+11000 \\
+000000 \\
+1100000 \\
\hline
10000100
\end{array}
$$

POR QUE DESLOCA UMA UNIDADE E SOMA?

POR QUE DESLOCA UMA UNIDADE E SOMA?

Ordenação

Ordenação

Como vimos na descrição da reta numérica, podemos ordenar os números naturais.

Definição 3

Dados $a, \ b \in \mathbb{N}$, *diz-se que* a ***é menor do que*** b, *e escreve-se* $a < b$, *para significar que existe algum* $p \in \mathbb{N}$ *tal que* $b = a + p$.

Propriedades da Relação de Ordem '$<$'

A relação de ordem $a < b$ tem as seguintes propriedades:

- **Transitividade:** Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$.
- **Tricotomia:** Dados $a, b \in \mathbb{N}$, exatamente uma das 3 alternativas seguintes a seguir:
  - ou $a = b$;
  - ou $a < b$ e existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $b = a + p$;
  - ou $b < a$ e existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $a = b + q$.
- **Monotonicidade:** Se $a < b$ então, para qualquer $p \in \mathbb{N}$, tem-se $a + p < b + p$ e $ap < bp$.

Operações Fechadas

Definição 4

Seja M um conjunto não vazio e $\otimes$ uma operação entre elementos de M. Dizemos que $\otimes$ é fechada se $a \otimes b$ pertencer a M sempre que a e b forem elementos de M.

Operações Fechadas

Assim, você pode entender uma operação fechada em um conjunto M como uma "máquina" que transforma dois elementos de um conjunto M em um outro elemento de M.

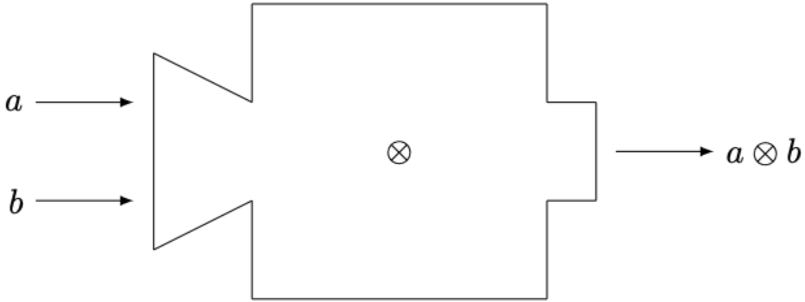


Figura 3: Entram a e b de M e sai um novo elemento ainda de M, o $a \otimes b$.

Operações Fechadas

- As operações de **adição** e **multiplicação** são fechadas no conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$.
- Ou seja, a soma de números naturais ainda é um número natural; a multiplicação de números naturais ainda é, também, um número natural.

Referencias I

H. Eves.
Introdução à História da Matemática.
Editora UNICAMP, 2005.