

# Geometria Plana

---

## Lista de Exercícios:

1. Ponto, reta e plano.
  2. Ângulos.
  3. Triângulos.
  4. Retas Paralelas.
-

# 1 Ponto, reta e plano

## 1.1 Exercícios de Fixação [2] e [1]

**Exercício 1** *Leia o texto História da Geometria, da prof<sup>a</sup> Lhaylla Crissaff (UFF).*

**Exercício 2** *Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F), justificando a sua resposta:*

- a) *Três pontos distintos são sempre colineares.*
- b) *Três pontos distintos são sempre coplanares.*
- c) *Quatro pontos todos distintos determinam duas retas.*
- d) *Por quatro pontos todos distintos pode passar uma só reta.*
- e) *Três pontos pertencentes a um plano são sempre colineares.*

**Exercício 3** *Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F), justificando a sua resposta:*

- a) *Por um ponto passam infinitas retas.*
- b) *Por dois pontos distintos passa uma reta.*
- c) *Uma reta contém dois pontos distintos.*
- d) *Dois pontos distintos determinam uma e uma só reta.*
- e) *Por três pontos dados passa uma só reta.*

**Exercício 4** *Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F), justificando a sua resposta:*

- a) *Quaisquer que sejam os pontos  $A$  e  $B$ , se  $A$  é distinto de  $B$ , então existe uma reta  $a$  tal que  $A \in a$  e  $B \in a$ .*
- b) *Quaisquer que sejam os pontos  $P$  e  $Q$  e as retas  $r$  e  $s$ , se  $P$  é distinto de  $Q$ , e  $P$  e  $Q$  pertencem às retas  $r$  e  $s$ , então  $r = s$ .*
- c) *Qualquer que seja uma reta  $r$ , existem dois pontos  $A$  e  $B$  tais que  $A$  é distinto de  $B$ , com  $A \in r$  e  $B \in r$ .*
- d) *Se  $A = B$ , existe uma reta  $r$  tal que  $A, B \in r$ .*

**Exercício 5** *Usando quatro pontos todos distintos, sendo três deles colineares, quantas retas podemos construir?*

**Exercício 6** *Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F), justificando a sua resposta:*

- a) *Duas retas distintas que têm um ponto comum são concorrentes.*

b) Duas retas concorrentes têm um ponto comum.

c) Se duas retas distintas têm um ponto comum, então elas possuem um único ponto comum.

**Exercício 7** Demonstre os teoremas da Aula 01:

1. Duas retas distintas ou não intersectam-se ou intersectam-se em um único ponto.

2. Para todo ponto  $P$ , existem pelo menos duas retas distintas passando por  $P$ .

3. Para todo ponto  $P$  existe pelo menos uma reta  $r$  que não passa por  $P$ .

4. Se duas retas são concorrentes, então existe um único plano que as contém.

## 2 Ângulos

**Exercício 8** Se a interseção de duas regiões convexas de um plano não for o conjunto vazio, prove que ela também é uma região convexa.

**Exercício 9** Calcule a medida de um ângulo que, somado ao triplo do seu complemento, dá  $210^\circ$  como resultado.

**Exercício 10** Calcule as medidas de dois ângulos complementares, sabendo que o complemento do dobro de um deles é igual à terça parte do outro.

**Exercício 11** Se duas retas se intersectam, prove que um dos ângulos por elas formados é igual a  $90^\circ$  se, e só se, os quatro ângulos o forem.

**Exercício 12** A terça parte da soma entre dois ângulos vale  $72^\circ$ . Determiná-los, sabendo-se que um deles é o quádruplo do outro.

**Exercício 13** O complemento de um ângulo  $x$  está para seu suplemento, assim como 4 está para 19. Calcular esse ângulo.

**Exercício 14** Em torno de um ponto, e num mesmo semiplano, constroem-se quatro ângulos consecutivos. Sabendo-se que cada um deles é igual ao dobro do anterior, achar esses ângulos.

**Exercício 15** Prove que a reta perpendicular à bissetriz de um ângulo, traçada pelo vértice do mesmo, forma ângulos congruentes com os lados do ângulo.

**Exercício 16** Mostre que as bissetrizes de um ângulo e do seu suplemento são perpendiculares.

### GABARITO

9.  $30^\circ$

10.  $54^\circ$  e  $36^\circ$

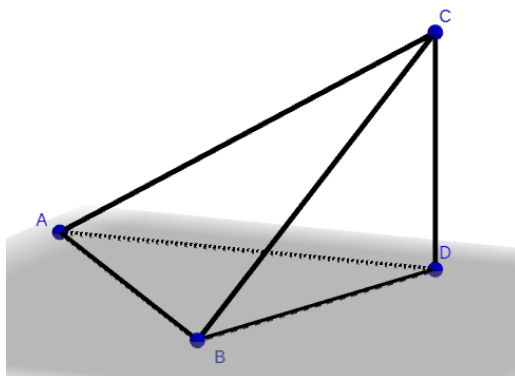
12.  $36^\circ$  e  $180^\circ$

13.  $66^\circ$ .

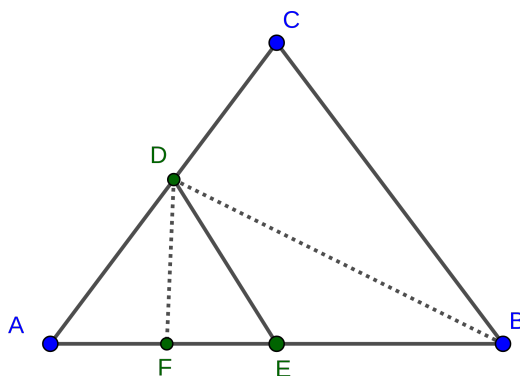
14.  $12^\circ$ ,  $24^\circ$ ,  $48^\circ$ ,  $96^\circ$ .

### 3 Triângulos

**Exercício 17** Na figura abaixo,  $\overline{CD} \perp \overline{AD}$ ,  $\overline{CD} \perp \overline{BD}$  e  $AD = BD$ .  
Demonstre que o  $\triangle ABC$  é isósceles.



**Exercício 18** No triângulo isósceles  $ABC$  abaixo, a bissetriz do ângulo  $\hat{B}$  intercepta o lado oposto em  $D$ .  $E$  é um ponto da base  $\overline{AB}$  tal que  $ED = EA$ .  $\overline{DF}$  bisseca o ângulo  $\hat{ADE}$ . Demonstre que  $\hat{EDF} = \hat{CBD}$ .

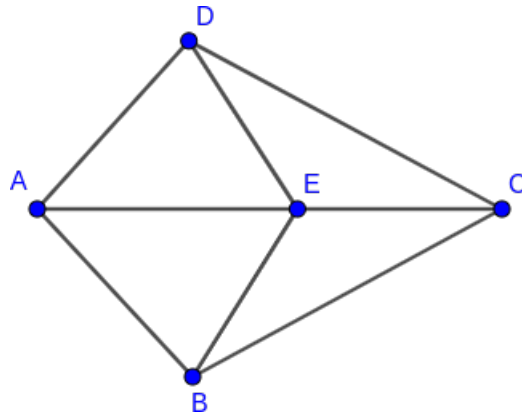


**Exercício 19** Demonstre que todo ponto da bissetriz de um ângulo equidista dos lados do mesmo.

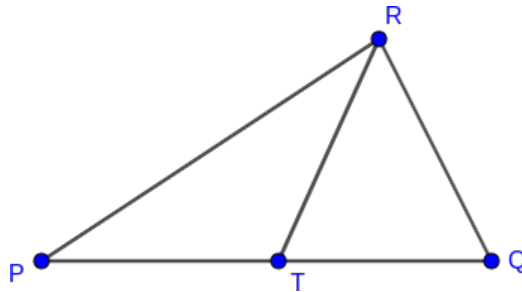
**Exercício 20** Mostre que a soma das medidas de dois ângulos quaisquer de um triângulo é menor do que  $180^\circ$ .

**Exercício 21** Dado um segmento  $AB$ , construímos os ângulos  $\hat{CAB} \equiv \hat{DBA}$ , um em cada semiplano determinado pela reta que  $\overline{AB}$ , com  $AC = DB$ . Unindo os pontos  $C$  e  $D$  obtemos o ponto  $M$  no segmento  $AB$ . Mostre que  $M$  é o ponto médio de  $AB$ .

**Exercício 22** Se  $DC = BC$  e  $DE = BE$ , demonstre que  $AD = AB$ , sabendo-se que os pontos  $A$ ,  $E$  e  $C$  são colineares.

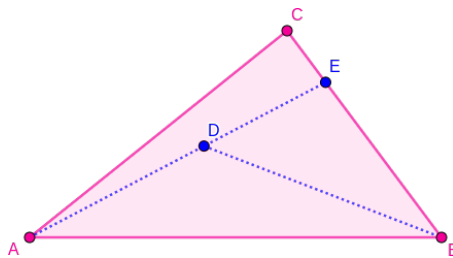


**Exercício 23** Na figura abaixo,  $PT = TR = RQ$ . Demonstre que  $PR > RQ$ .



**Exercício 24** Mostre que não é possível construir um triângulo de lados 4 cm, 5 cm e 10 cm.

**Exercício 25** Na figura abaixo, provar que  $\hat{ADB} > \hat{C}$ .



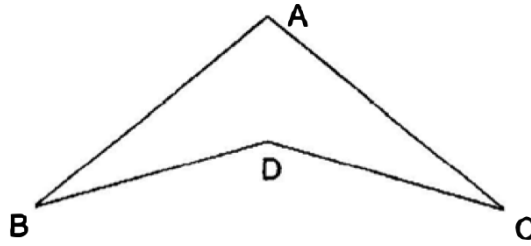
**Exercício 26** Por que *ALL* ou *LLA* não é caso de congruência entre triângulos?

**Exercício 27** Prove que se dois segmentos se bissecam em um ângulo reto, então os segmentos que unem seus extremos são congruentes.

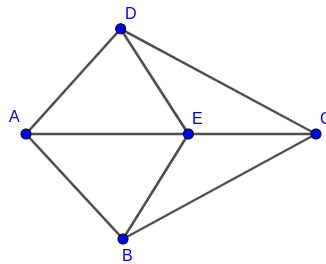
**Exercício 28** Demonstre que as mediatrizes dos lados de um triângulo concorrem em um mesmo ponto, equidistante dos três vértices, denominado **circuncentro**.

**Exercício 29** Demonstre que as bissetrizes internas dos ângulos de um triângulo concorrem em um mesmo ponto, equidistante dos três lados, denominado **incentro**.

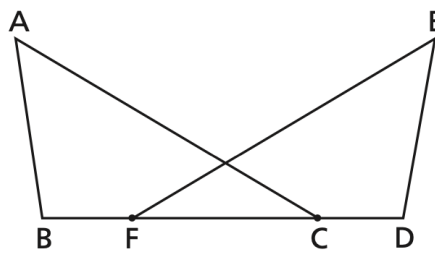
**Exercício 30** Sejam  $\overline{AB} = \overline{AC}$  e  $\overline{DB} = \overline{DC}$ . Mostre que  $\hat{A}BD = \hat{A}CD$ .



**Exercício 31** Se  $DC = BC$  e  $DE = BE$ , demonstre que  $AD = AB$ , sabendo-se que os pontos A, E e C são colineares.



**Exercício 32** Na figura abaixo, sendo os segmentos  $\overline{BF}$  e  $\overline{CD}$  congruentes, os ângulos  $\hat{ABC}$  e  $\hat{FDE}$  congruentes e os ângulos  $\hat{BAC}$  e  $\hat{DEF}$  também congruentes, prove que os segmentos  $\overline{AC}$  e  $\overline{EF}$  são congruentes.



## 4 Retas Paralelas

**Exercício 33** A soma dos ângulos agudos formados por duas paralelas e uma transversal é igual à  $121^\circ$ . Calcular um dos ângulos obtusos.

**Exercício 34** Duas paralelas cortadas por uma transversal formam ângulos colaterais internos, cujas medidas, em graus, são representadas por  $x + 20$  e  $5x + 60$ , respectivamente. Calcular o valor de um dos ângulos agudos da figura.

**Exercício 35** Os ângulos colaterais externos formados por duas paralelas e uma secante são tais que um excede o outro de  $20^\circ 30'$ . Calcule esses ângulos.

**Obs:** Estude as relações entre as medidas de ângulos em graus, minutos e segundos.

**Exercício 36** Duas paralelas cortadas por uma transversal formam dois ângulos correspondentes cujas medidas, em graus, são respectivamente iguais à  $4x - 20$  e  $x + 70$ . Encontre a soma dos ângulos obtusos formados pelas retas acima.

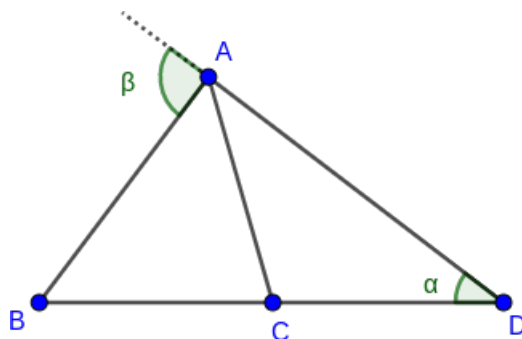
**Exercício 37** Num triângulo isósceles, o ângulo do vértice mede  $30^\circ 42'$ . Calcule um dos ângulos da base.

**Exercício 38** Num triângulo isósceles  $ABC$ , o ângulo  $\hat{A}$  (do vértice) mede  $41^\circ 20'$ . Calcule a medida dos ângulos formados pela bissetriz do ângulo  $\hat{B}$  com o lado  $\overline{AC}$ .

**Exercício 39** Num triângulo isósceles  $ABC$ , o ângulo do vértice  $\hat{A}$  é  $1/5$  do ângulo  $B\hat{M}C$ , formado pelas bissetrizes dos ângulos  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ . Calcular os ângulos desse triângulo.

**Exercício 40** Num triângulo  $ABC$ , a bissetriz externa de  $\hat{C}$  forma com a bissetriz interna de  $\hat{B}$  um ângulo de  $10^\circ$ . A altura  $\overline{AH}$  forma, com a bissetriz interna  $\overline{AS}$ , um ângulo de  $30^\circ$ . Calcular os ângulos desse triângulo.

**Exercício 41** Na figura abaixo, tem-se  $AB = AC = CD$  e  $\beta$  é um ângulo externo do  $\triangle ABD$ .



a) Qual dos lados  $\overline{AB}$  ou  $\overline{AD}$  é maior?

b) Se  $\alpha = 36^\circ$ , quanto mede o ângulo  $\beta$ ?

**Exercício 42** *O ângulo obtuso formado por duas bissetrizes internas de um triângulo é igual a um ângulo reto aumentado da metade do terceiro ângulo. Provar.*

### Gabarito

- 33.  $149^{\circ}45'$
- 34.  $36^{\circ}40'$
- 35.  $79^{\circ}45'$  e  $100^{\circ}15'$
- 36.  $400^{\circ}$
- 37.  $74^{\circ}39'$
- 38.  $76^{\circ}$  e  $104^{\circ}$
- 39.  $20^{\circ}$ ,  $80^{\circ}$  e  $80^{\circ}$
- 40.  $20^{\circ}$ ,  $110^{\circ}$  e  $50^{\circ}$
- 41. a) Lado maior:  $AD$ . b)  $108^{\circ}$ .

### Referências

- [1] Osvaldo D. e José N. P. *Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana*. Ed. Atual, 2013. URL: [https://drive.google.com/file/d/1kRA28s0HglbFZQHVMiRq\\_JXzKiIpKA57/view?usp=sharing](https://drive.google.com/file/d/1kRA28s0HglbFZQHVMiRq_JXzKiIpKA57/view?usp=sharing).
- [2] Eliane Q. F. R e Maria L. B. Q. *Geometria Plana e construções geométricas*. Ed. UNICAMP, 2018. URL: <https://drive.google.com/file/d/14eeFiaaKIFD1lthpz-GWTMroZfbsr32h/view?usp=sharing>.