Elementos de Aritmética

Aula 02: Múltiplos de um Inteiro

Profª Dra. Karla Lima

Sumário

Propriedades das Operações

Como vimos na descrição da reta numérica, podemos ordenar os números inteiros. Podemos reescrever a definição de ordem como a seguir:

Definição

Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, diz-se que a ***é menor do que*** *b, e escreve-se $a < b$, para significar que existe algum $p \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a + p$.*

Como vimos na descrição da reta numérica, podemos ordenar os números inteiros. Podemos reescrever a definição de ordem como a seguir:

Definição

*Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, diz-se que a **é menor do que** b, e escreve-se $a < b$, para significar que existe algum $p \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a + p$.*

Por exemplo,

$$-1 < 3,$$

pois

$$3 = -1 + 4.$$

Exercício

Exercício

Use os sinais de $<$ e $>$ para cada um dos itens abaixo:

a) 0 ____ -1

b) -2 ____ -4

c) 3 ____ 8

d) -3 ____ -8

e) -2 ____ 5

f) 6 ____ 0

g) 0 ____ -6

h) -10 ____ -26

A relação de ordem $a < b$ tem as seguintes propriedades:

- **Transitividade:** Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$.
- **Tricotomia:** Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, exatamente uma das 3 alternativas seguintes a seguir:
  - ou $a = b$;
  - ou $a < b$ e existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a + p$;
  - ou $b < a$ e existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $a = b + q$.

Proposição 1

Proposição

São verdadeiras as seguintes afirmações:

a) *Se $a < b$ e $\in \mathbb{Z}$, então $a + c < b + c$.*

b) *Sobre a compatibilidade da multiplicação com a ordem:*

- *Se $a < b$ e $c > 0$, então $c \cdot a < b \cdot c$.*
- *Porém, se $c < 0$, $c \cdot a < b \cdot c$ não é verdade. O correto é: $c \cdot b < b \cdot a$, quando $a < b$ (o sinal inverte!).*

Exercício

João, Maria, José e Carla estavam brincando com um jogo de tabuleiro que dura quatro rodadas e anotaram as pontuações de cada uma na Tabela 3.

	Rodada 1	**Rodada 2**	**Rodada 3**	**Rodada 4**
João	6	-4	-1	-2
Maria	-3	-3	-2	1
José	-2	-8	-4	5
Carla	5	-10	6	-4

Tabela: Pontuação em quatro rodadas.

Vence o jogo quem, após a soma das quatro rodadas, fizer menos pontos. Determine:

a) Qual a ordem crescente dos resultados?

b) Qual a colocação de cada participante ao final do jogo?

Operações Fechadas

Definição

Seja M um conjunto não vazio e $\otimes$ uma operação entre elementos de M. Dizemos que $\otimes$ é fechada se $a \otimes b$ pertencer a M sempre que a e b forem elementos de M.

Assim, você pode entender uma operação fechada em um conjunto *M* como uma “máquina” que transforma dois elementos de um conjunto *M* em um outro elemento de *M*.

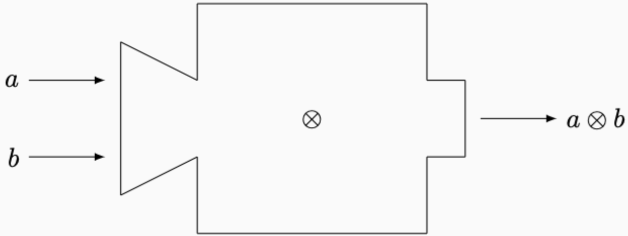


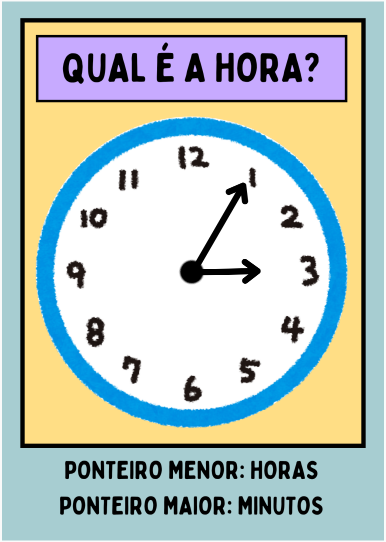
Figura: Entram *a* e *b* de *M* e sai um novo elemento ainda de *M*, o $a \otimes b$.

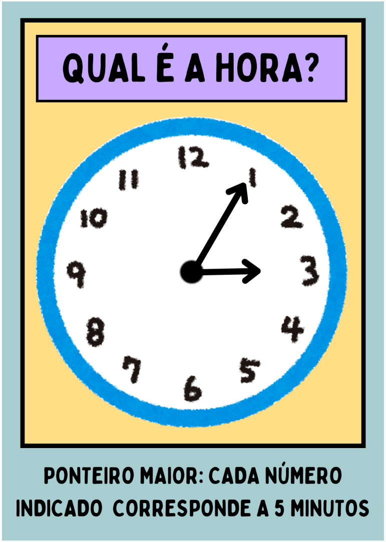
Operações Fechadas

- As operações de **adição** e **multiplicação** são fechadas no conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$.
- Ou seja, a soma de números inteiros ainda é um número inteiro; a multiplicação de números inteiros ainda é, também, um número inteiro.

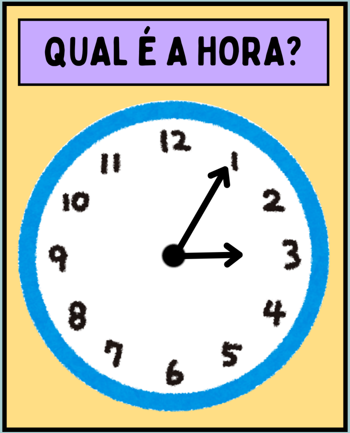
Múltiplos de Números Inteiros

Múltiplos de Inteiros

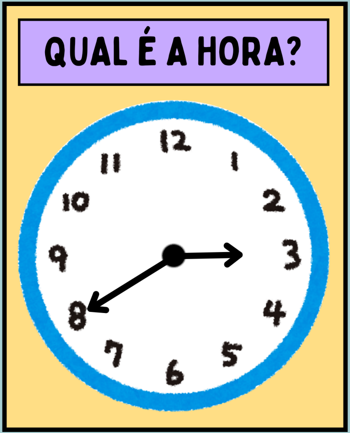




Múltiplos de Inteiros



PONTEIRO MENOR: 3 HORAS
PONTEIRO MAIOR: (1 X 5) MINUTOS



PONTEIRO MENOR: 3 HORAS
PONTEIRO MAIOR: (8 X 5) MINUTOS

Múltiplos de Inteiros

- Multiplicando 5 por diferentes números inteiros, obtemos:

$$5 \cdot (-2) = -10, \quad 5 \cdot (-1) = -5, \quad 5 \cdot 0 = 0, \quad 5 \cdot 1 = 5,$$
$$5 \cdot 2 = 10, \quad 5 \cdot 3 = 15, \quad 5 \cdot 4 = 20, \quad 5 \cdot 5 = 25, \quad \ldots$$

- Dizemos que um número m é **múltiplo** do número inteiro 5 se ele pode ser escrito como

$$m = 5 \cdot p,$$

  onde p é também um número inteiro.
- Portanto, os múltiplos de 5 são:

$$\{\ldots, -15 - 10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, \ldots\}.$$

Definição de Múltiplos

Definição

Um número inteiro m é múltiplo de um número inteiro a se existir um número inteiro p tal que

$$m = a \cdot p.$$

Ou seja, os múltiplos de um número a podem ser encontrados multiplicando a por diferentes números inteiros.

Exemplo

Considere a tabela abaixo e escreva os múltiplos listados de:

a) −4 *b*) −3 *c*) −2 *d*) −1 *e*) 0 *f*) 1

g) 1 *h*) 2 *i*) 3 *j*) 4

×	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
−4	16	12	8	4	0	−4	−8	−12	−16
−3	12	9	6	3	0	−3	−6	−9	−12
−2	8	6	4	2	0	−2	−4	−6	−8
−1	4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
2	−8	−6	−4	−2	0	2	4	6	8
3	−12	−9	−6	−3	0	3	6	9	12
4	−16	−8	−8	−8	0	4	8	12	16

Exemplo

- Como a tabela representa a multiplicação dos números de -4 a 4 entre si, os múltiplos estarão descritos em cada coluna (ou linha).
- Por exemplo, a coluna 1 lista os seguintes múltiplos de -4: $\{-16, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16\}$.

×	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
−4	16	12	8	4	0	−4	−8	−12	−16
−3	12	9	6	3	0	−3	−6	−9	−12
−2	8	6	4	2	0	−2	−4	−6	−8
−1	4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
2	−8	−6	−4	−2	0	2	4	6	8
3	−12	−9	−6	−3	0	3	6	9	12
4	−16	−8	−8	−8	0	4	8	12	16

Proposição 2

Agora vamos trabalhar com generalizações, sem explicitar os inteiros envolvidos.

Proposição

Sejam dados números inteiros a, b e c, tais que a e b são múltiplos de c . Mostre que $a + b$ também é múltiplo de c.

Proposição

Sejam dados números inteiros a, b e c, tais que a e b são múltiplos de c . Mostre que $a + b$ também é múltiplo de c.

Demonstração: De fato, se a e b são múltiplos de c, então existem inteiros p e q tais que:

$$a = c \cdot p \quad \text{e} \quad b = c \cdot q.$$

Assim,

$$\begin{aligned} a + b &= c \cdot p + c \cdot q \\ &= c \cdot (p + q) \quad \text{(pela propriedade distributiva)}. \end{aligned}$$

Demonstração: Proposição 2

$$\begin{aligned} a + b &= c \cdot p + c \cdot q \\ &= c \cdot (p + q) \quad \text{(pela propriedade distributiva).} \end{aligned}$$

Vimos que a soma de pois números inteiros ainda é um número inteiro, logo:

$$\begin{aligned} a + b &= c \cdot p + c \cdot q \\ &= c \cdot (p + q) \\ &= c \cdot m, \end{aligned}$$

onde $m = p + q \in \mathbb{Z}$.

Pela definição de múltiplo, concluímos que $a + b$ é múltiplo de c.

Atividades de Aprofundamento

Aprofunde o conhecimento:

- Clique aqui para exercícios de aprofundamento.
- Clique aqui e pratique com jogos.