UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS	
Prof$^{\underline{a}}$. Karla Lima	
Cálculo II — Avaliação P1	
Engenharia de Computação	29 de Agosto de 2022

1	
2	
3	
4	
Total	

Aluno(a): ....

Obs: Respostas sem justificativa não serão consideradas.

(1) Calcule as integrais abaixo, se possível:

(1 ponto) a) $\displaystyle\int_1^e x^2 \ln x \, dx$

(1 ponto) b) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-9} \, dx$

(1.5 ponto) c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x} \, dx$

(2) (1.5 ponto) Verifique se a função $y = \text{sen}\,(\ln x)$ é solução da equação diferencial $x^2 y'' + xy' + y = 0$.

(3) Considere o problema de valor inicial $y' + y = 1$, com $y(0) = 2$.

(1 ponto) a) Use o método de Euler com passo $h = 0.2$ para estimar o valor de $y(0.6)$.

(1 ponto) b) Resolva o problema de valor inicial dado.

(0.5 ponto) c) O erro no método de Euler é a diferença entre o valor exato e o valor aproximado. Calcule o erro cometido no item a) ao usar o método de Euler para estimar o valor de $y(0.6)$.

(4) Suponha que pouco antes do meio-dia o corpo de uma vítima de homicídio é encontrado numa sala com ar condicionado, mantida a uma temperatura constante de 21°. Ao meio-dia a temperatura do corpo é de 30° e uma hora mais tarde é de 27°. Assuma que a temperatura do corpo na hora da morte era 36.5°.

(1.5 ponto) a) Use a lei de resfriamento de Newton e escreva um problema de valor inicial (PVI) que determina a temperatura do corpo no instante t, em horas. Resolva o PVI obtido.

(1 ponto) b) Determine a hora da morte.

Lembretes

EDO 1$^{\underline{a}}$ Ordem Linear: $y' + P(x)y = Q(x)$

Fator Integrante: $I = e^{\int P(x)dx}$

Equação auxiliar: $(I(x)y)' = I(x)Q(x)$

Lei de Resfriamento de Newton

$T'(t) = -k(T(t) - T_a)$

Método de Newton

$y_n = y_{n-1} + hF(x_{n-1}, y_{n-1})$

com $y' = F(x,t)$

Tabela Básica

$\displaystyle\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$

$\displaystyle\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$

$\displaystyle\int e^u \, du = e^u + C$

$\displaystyle\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

$\displaystyle\int \text{sen}\,(u) \, du = -\cos(u) + C$

$\displaystyle\int \cos\,(u) \, du = \text{sen}\,(u) + C$

Avaliação P1: Cálculo II

29/08/22

01 a) $\displaystyle\int_1^e x^2 \ln x \, dx$

Usando a integração por partes, com

$u = \ln x \quad \left(du = \frac{1}{x} dx \right)$

$dv = x^2 dx \quad \left(v = \frac{x^3}{3} \right)$,

obtemos:

$$\int_1^e x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \frac{e^3}{3} \ln e - \frac{1^3}{3} \cdot \ln 1 - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 \, dx$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} \Big|_1^e = \frac{e^3}{3} - \left(\frac{e^3}{9} - \frac{1}{9} \right)$$

$$= \frac{3e^3}{9} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}$$

b) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-9} \, dx$

Aplicando o método de frações parciais, devemos encontrar constantes A e B, tais que

$$\frac{x+2}{x^2-9} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}.$$

Assim,

$$\frac{x+2}{x^2-9} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-3)}{x^2-9}$$

$$= \frac{Ax+3A+Bx-3B}{x^2-9}.$$

logo, devemos ter

$$\begin{cases} A+B = 1 \\ 3A-3B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3A+3B = 3 & (\mathrm{I}) \\ 3A-3B = 2 & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

Fazendo $(\mathrm{I})+(\mathrm{II})$, obtemos

$$6A = 5 \Rightarrow A = \frac{5}{6}.$$

Substituindo em (I), concluímos que

$$B = 1-A = 1-\frac{5}{6} = \frac{6-5}{6} = \frac{1}{6}.$$

Portanto,

$$\int \frac{x+2}{x^2-9}\,dx = \frac{5}{6}\underbrace{\int \frac{1}{x-3}\,dx}_{\hookrightarrow u = x-3} + \frac{1}{6}\underbrace{\int \frac{1}{x+3}\,dx}_{\hookrightarrow u = x+3}$$

$$= \frac{5}{6}\ln|x-3| + \frac{1}{6}\ln|x+3| + C.$$

c) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx$

Como

$$\int_1^{t} \frac{\ln x}{x}\, dx = \int_0^{\ln t} u\, du \qquad u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}\, dx$$

$$u(1) = \ln 1 = 0 \quad e \quad u(t) = \ln t$$

$$= \frac{u^2}{2}\Big|_0^{\ln t} = \frac{\ln^2 t}{2} - 0 = \frac{\ln^2 t}{2},$$

segue que

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx = \lim_{t \to \infty} \frac{\ln^2 t}{2} = \infty,$$

e a integral diverge.

02 $y = \operatorname{sen}(\ln x)$ $\left(= f(g(x)),\ f(x) = \operatorname{sen} x \ e \ g(x) = \ln x \right)$

Como

p/ regra da cadeia

$$y' = (\operatorname{sen}(\ln x))' = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{\cos(\ln x)}{x}$$

e

$$y'' = \left[\frac{\cos(\ln x)}{x}\right]' = \frac{[\cos(\ln x)]' x - \cos(\ln x) \cdot (x)'}{x^2}$$

$$= \frac{-\operatorname{sen}(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \cdot x - \cos(\ln x)}{x^2}$$

$$= \frac{-\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)}{x^2},$$

temos que

$$x^2 y'' + x y' + y = \cancel{x^2}\left(\frac{-\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)}{\cancel{x^2}}\right) + \cancel{x}\,\frac{\cos(\ln x)}{\cancel{x}} + \operatorname{sen}(\ln x)$$

$$= \cancel{-\operatorname{sen}(\ln x)} - \cancel{\cos(\ln x)} + \cancel{\cos(\ln x)} + \cancel{\operatorname{sen}(\ln x)}$$

$$= 0,$$

e $y = \operatorname{sen}(\ln x)$ é solução da equação diferencial dada.

03 $y' + y = 1$, $y(0) = 2$.

a) Temos que

$$y' = 1 - y = F(x, y), \quad y_0 = y(0) = 2.$$

Assim, calculamos a aproximação com passo $h = 0.2$ (3 passos)

$$y_1 = y_0 + h \cdot F(0, y_0)$$

$$= 2 + 0.2(1 - 2) = 1.8$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot F(0.2, y_1)$$

$$= 1.8 + 0.2(1 - 1.8) = 1.64$$

$$y_3 = y_2 + h \cdot F(0.4, y_2)$$

$$= 1.64 + 0.2(1 - 1.64) = 1.512$$

Pelo Método de Newton,

$$y(0.6) \approx 1.512.$$

b) $y' + y = 1$, $y(0) = 2$.

A equação é linear. Usando o método do fator integrante, obtemos:

$$I(x) = e^{\int P(x)\,dx} = e^{\int 1\,dx} = e^{x} .$$

Logo,

$$(e^{x}\cdot y)' = e^{x}\cdot 1 \Rightarrow \int (e^{x}\cdot y)'\,dx = \int e^{x}\,dx$$

$$\Rightarrow e^{x}\cdot y = e^{x} + C$$

$$\Rightarrow y = e^{x}\cdot e^{-x} + C\cdot e^{-x} = 1 + Ce^{-x} .$$

Como $y(0) = 2$, temos

$$2 = y(0) = 1 + Ce^{-0} = 1 + C \Rightarrow C = 1 .$$

Portanto, a solução é $y(x) = 1 + e^{-x}$.

c) Pelo item b), $y(0.6) = 1 + e^{-0.6} \approx 1{,}548$. Assim, o erro cometido no item a) é

$$\text{erro} \approx 1.548 - 1.512 = 0.036 .$$

04 $T_a = 21°C$

$t = 0$ (meio-dia)

$T(0) = 30°C$ $\qquad$ $T(1) = 27°C$.

a) Substituindo as informações dadas, na equação que define a Lei de Resfriamento de Newton, obtemos

$$T'(t) = -k\,(T(t) - 21), \quad T(0) = 30.$$

A equação acima é linear e separável, podendo ser resolvida por qualquer um dos dois métodos. Vamos usar o método das equações separáveis:

$$\frac{T'(t)}{T(t) - 21} = -k \Rightarrow \int \frac{T'(t)}{T(t)-21}\,dt = \int -k\,dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{T(t)-21}\,dT = -k \int dt$$

$$\Rightarrow \ln |T(t) - 21| = -kt + C$$

$$\Rightarrow e^{\ln |T(t) - 21|} = e^{-kt + C}$$

$$\Rightarrow T(t) - 21 = \pm\, e^{C} e^{-kt} = A\, e^{-kt}$$

$$\Rightarrow T(t) = 21 + A\, e^{-kt}.$$

Como $T(0) = 30$, temos

$$30 = T(0) = 21 + A \Rightarrow A = 9.$$

Logo, $T(t) = 21 + 9\, e^{-kt}$.

Para determinar a constante de resfriamento k, usamos que $T(1) = 27$:

$$27 = T(1) = 21 + 9e^{-K} \Rightarrow 9e^{-K} = 6 \Rightarrow e^{-K} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Assim,

$$T(t) = 21 + 9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{t}.$$

b) Na hora da morte, a temperatura do corpo era de 36,5°.

Então, queremos encontrar t tal que $T(t) = 36,5$:

$$36,5 = T(t) = 21 + 9\left(\frac{2}{3}\right)^{t} \Rightarrow 9\left(\frac{2}{3}\right)^{t} = 15,5$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{t} = \frac{15,5}{9}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{2}{3}\right)^{t} = \ln\left(\frac{15,5}{9}\right)$$

$$\Rightarrow t \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln\left(\frac{15,5}{9}\right)$$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{15,5}{9}\right)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \approx -1.34.$$

Portanto, foi, aproximadamente, 1.34 horas antes do meio dia:

$$\begin{array}{lll} 1\,h & - & 60 \text{ min} \\ 1.34\,h & - & x \text{ min} \end{array} \Rightarrow x = \frac{60 \cdot 1,34}{1} = 80,4$$

x 1hora e 20 minutos.

Logo, a morte ocorreu próximo às 10 horas e 40 minutos.