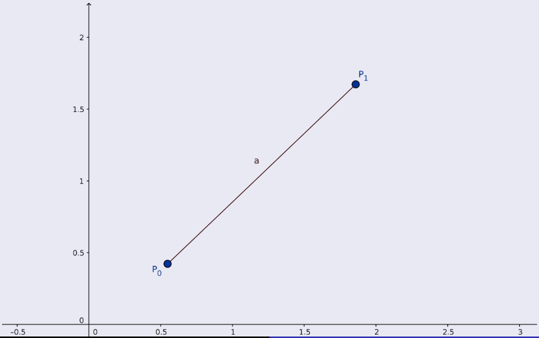
# Funções Trigonométricas

# Distância no Plano $\mathbb{R}^2$

grafico função trigonometrica

## Definição

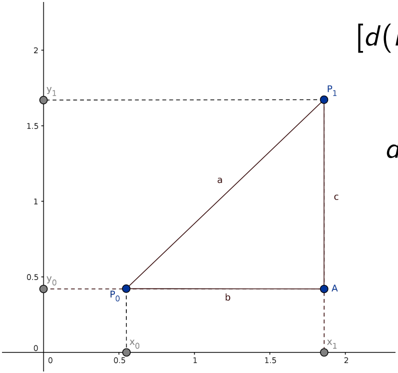
*A distância entre os pontos* $P_0 = (x_0, y_0)$ *e* $P_1 = (x_1, y_1)$, *denotada por* $d(P_0, P_1)$, *é o comprimento do segmento cujos extemos são* $P_0$ *e* $P_1$.



# Distância no Plano $\mathbb{R}^2$

Pelo teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$.

Assim:




$$[d(P_0, P_1)]^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2$$

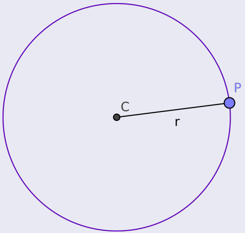
$$\Downarrow$$

$$d(P_0, P_1) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

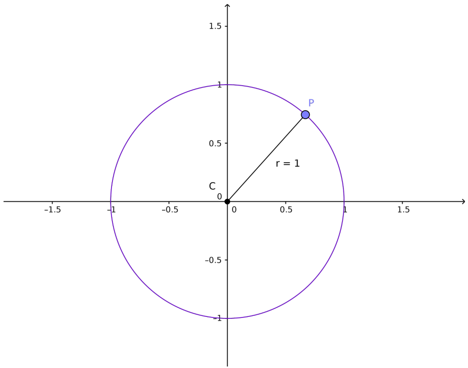
# O círculo

## Definição

*O conjunto de todos os pontos que estão a exatamente uma determinada distância $r$ de um ponto $C$ dado no $\mathbb{R}^2$.*



# A equação do círculo



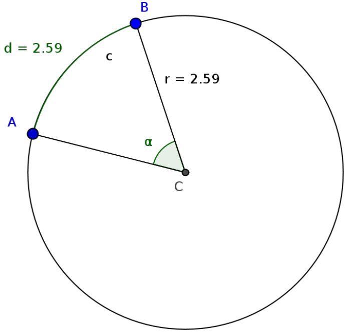

Tomando o raio igual a 1 e o centro do círculo na origem $C = (0, 0)$, a distância de qualquer ponto $P = (x, y)$ que está no círculo é dada pela equação:

$$1 = d(P, C)^2 = x^2 + y^2$$

# O Radiano

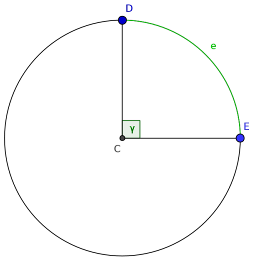
- É uma forma de medir ângulos muito usada em trigonometria.
- É determinado pela razão entre o comprimento de um arco circular e seu raio.

# O Radiano



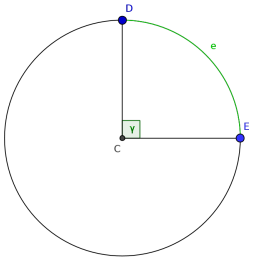

Na circunferência acima, o ângulo $\alpha$ subtende o arco $AB$ cujo comprimento é igual ao raio. Dizemos que este ângulo mede 1 radiano.

# O Radiano




**Exemplo:**Quantos radianos tem o ângulo $\gamma$ em radianos? E em graus?

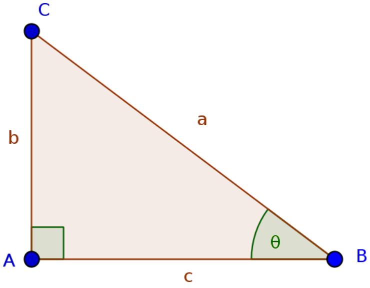
# O Radiano




**Exemplo:** Quantos radianos tem o ângulo $\gamma$ em radianos? E em graus?

**Resposta:** $\gamma = \dfrac{2r\pi/4}{r} = \dfrac{\pi}{2}$ radianos e 90 graus. Ou seja, o ângulo medir 90 graus é equivalente a medir $\dfrac{\pi}{2}$ radianos.

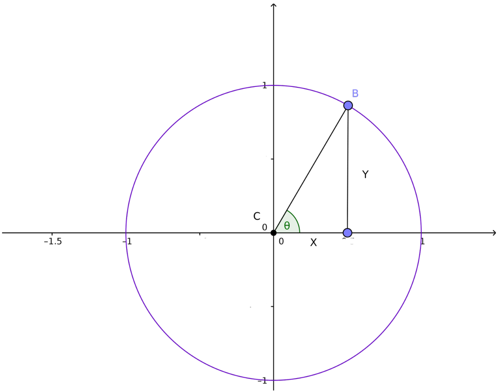
# Seno e Cosseno em um triângulo retângulo




Relações no triangulo retângulo:

- $\cos\theta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$
- $\text{sen}\theta = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$

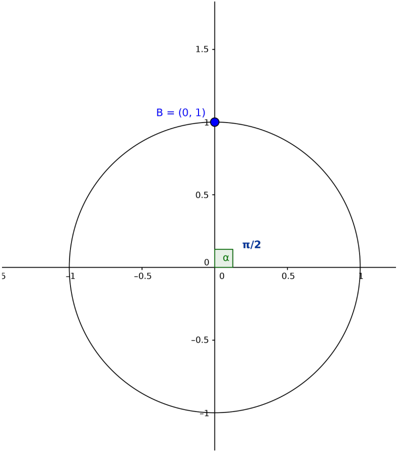
# O círculo trigonométrico




Das relações trigonométricas no triângulo, vemos que:

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \text{sen}\theta \end{cases} \Rightarrow \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$$

# O círculo trigonométrico




$$B = (\cos\alpha, \text{sen}\alpha) = (0, 1)$$

# O seno como uma função

- Usando o círculo trigonométrico, podemos definir o seno de qualquer número real $x$ que esteja no intervalo $[0, 2\pi]$.

# O seno como uma função

- Usando o círculo trigonométrico, podemos definir o seno de qualquer número real $x$ que esteja no intervalo $[0, 2\pi]$.
- Podemos extender este conceito para todos os números reais usando as seguintes propriedades do seno:

$$f(x+2\pi) = \text{sen}(x+2\pi) = \text{sen}x\cos 2\pi + \text{sen}2\pi\cos x = \text{sen}x = f(x)$$

# O seno como uma função

- Usando o círculo trigonométrico, podemos definir o seno de qualquer número real $x$ que esteja no intervalo $[0, 2\pi]$.
- Podemos extender este conceito para todos os números reais usando as seguintes propriedades do seno:

$$f(x+2\pi) = \text{sen}(x+2\pi) = \text{sen} x \cos 2\pi + \text{sen} 2\pi \cos x = \text{sen} x = f(x)$$

$$f(x-2\pi) = \text{sen}(x-2\pi) = \text{sen} x \cos 2\pi - \text{sen} 2\pi \cos x = \text{sen} x = f(x)$$

# O seno como uma função

- Usando o círculo trigonométrico, podemos definir o seno de qualquer número real $x$ que esteja no intervalo $[0, 2\pi]$.
- Podemos extender este conceito para todos os números reais usando as seguintes propriedades do seno:

$$f(x+2\pi) = \text{sen}(x+2\pi) = \text{sen} x \cos 2\pi + \text{sen} 2\pi \cos x = \text{sen} x = f(x)$$

$$f(x-2\pi) = \text{sen}(x-2\pi) = \text{sen} x \cos 2\pi - \text{sen} 2\pi \cos x = \text{sen} x = f(x)$$

- Funções que satisfazem $f(x+T) = f(x)$ são chamadas Funções Períodicas, com período $T$.

# O seno como uma função

- Usando o círculo trigonométrico, podemos definir o seno de qualquer número real $x$ que esteja no intervalo $[0, 2\pi]$.
- Podemos extender este conceito para todos os números reais usando as seguintes propriedades do seno:

$$f(x+2\pi) = \mathrm{sen}(x+2\pi) = \mathrm{sen} x \cos 2\pi + \mathrm{sen} 2\pi \cos x = \mathrm{sen} x = f(x)$$

$$f(x-2\pi) = \mathrm{sen}(x-2\pi) = \mathrm{sen} x \cos 2\pi - \mathrm{sen} 2\pi \cos x = \mathrm{sen} x = f(x)$$

- Funções que satisfazem $f(x+T) = f(x)$ são chamadas Funções Períodicas, com período $T$.
- Assim, a função seno é uma função periódica, de período $2\pi$.

# O cosseno como uma função

- Do mesmo modo, podemos definir o cosseno de qualquer número real $x$ que esteja no intervalo $[0, 2\pi]$.

# O cosseno como uma função

- Do mesmo modo, podemos definir o cosseno de qualquer número real $x$ que esteja no intervalo $[0, 2\pi]$.
- Podemos extender este conceito para todos os números reais usando as seguintes propriedades do cosseno:

$$f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) = \cos x \cos 2\pi - \mathrm{sen} 2\pi \mathrm{sen} x = \cos x = f(x)$$

# O cosseno como uma função

- Do mesmo modo, podemos definir o cosseno de qualquer número real $x$ que esteja no intervalo $[0, 2\pi]$.
- Podemos extender este conceito para todos os números reais usando as seguintes propriedades do cosseno:

$$f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) = \cos x \cos 2\pi - \text{sen}2\pi\text{sen}x = \cos x = f(x)$$

$$f(x-2\pi) = \cos(x-2\pi) = \cos x \cos 2\pi + \text{sen}2\pi\text{sen}x = \cos x = f(x)$$

# O cosseno como uma função

- Do mesmo modo, podemos definir o cosseno de qualquer número real $x$ que esteja no intervalo $[0, 2\pi]$.
- Podemos extender este conceito para todos os números reais usando as seguintes propriedades do cosseno:

$$f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) = \cos x \cos 2\pi - \text{sen}2\pi\text{sen}x = \cos x = f(x)$$

$$f(x-2\pi) = \cos(x-2\pi) = \cos x \cos 2\pi + \text{sen}2\pi\text{sen}x = \cos x = f(x)$$

- Assim, a função cosseno é uma função periódica, também de período $2\pi$.

# Funções Limitadas

- Uma vez que $\text{sen}^2 x \leq \text{sen}^2 x + \cos^2 x$ segue que

# Funções Limitadas

- Uma vez que $\text{sen}^2 x \leq \text{sen}^2 x + \cos^2 x$ segue que

$$|\text{sen}x| = \sqrt{\text{sen}^2 x} \leq \sqrt{\text{sen}^2 x + \cos^2 x} = 1$$

# Funções Limitadas

- Uma vez que $\mathrm{sen}^2 x \leq \mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x$ segue que

$$|\mathrm{sen} x| = \sqrt{\mathrm{sen}^2 x} \leq \sqrt{\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x} = 1$$

e, assim, para todo $x \in \mathbb{R}$ temos: $-1 \leq \mathrm{sen} x \leq 1$.

# Funções Limitadas

- Uma vez que $\operatorname{sen}^2 x \leq \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$ segue que

$$|\operatorname{sen} x| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x} \leq \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x} = 1$$

  e, assim, para todo $x \in \mathbb{R}$ temos: $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$.

- Do mesmo modo, $\cos^2 x \leq \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$ segue que

$$|\cos x| = \sqrt{\cos^2 x} \leq \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x} = 1$$

# Funções Limitadas

- Uma vez que $\text{sen}^2 x \leq \text{sen}^2 x + \cos^2 x$ segue que

$$|\text{sen} x| = \sqrt{\text{sen}^2 x} \leq \sqrt{\text{sen}^2 x + \cos^2 x} = 1$$

  e, assim, para todo $x \in \mathbb{R}$ temos: $-1 \leq \text{sen} x \leq 1$.
- Do mesmo modo, $\cos^2 x \leq \text{sen}^2 x + \cos^2 x$ segue que

$$|\cos x| = \sqrt{\cos^2 x} \leq \sqrt{\text{sen}^2 x + \cos^2 x} = 1$$

  e, assim, para todo $x \in \mathbb{R}$ temos: $-1 \leq \cos x \leq 1$.

# Funções Limitadas

- Uma vez que $\text{sen}^2 x \leq \text{sen}^2 x + \cos^2 x$ segue que

$$|\text{sen} x| = \sqrt{\text{sen}^2 x} \leq \sqrt{\text{sen}^2 x + \cos^2 x} = 1$$

  e, assim, para todo $x \in \mathbb{R}$ temos: $-1 \leq \text{sen} x \leq 1$.
- Do mesmo modo, $\cos^2 x \leq \text{sen}^2 x + \cos^2 x$ segue que

$$|\cos x| = \sqrt{\cos^2 x} \leq \sqrt{\text{sen}^2 x + \cos^2 x} = 1$$

  e, assim, para todo $x \in \mathbb{R}$ temos: $-1 \leq \cos x \leq 1$.
- Se existe um número real $M \geq 0$ tal que para todo $x \in D_f$ tem-se $|f(x)| \leq M$, dizemos que $f$ é uma função limitada.