



Integrais de Superfície de Funções Reais

(1) Obtenha uma parametrização das seguintes superfícies:

a) $x = z$

b) $x + y + z = 1$

c) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2$

(2) Calcule a integral de superfície $\int \int_S (z + x^2 y) dS$, onde S é a parte do cilindro $y^2 + z^2 = 1$ que está entre os planos $x = 0$ e $x = 3$ no primeiro octante.

(3) O helicóide é parametrizado por $\phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$, $(u, v) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi]$.

a) Mostre que o helicóide definido em $[0, 1] \times [0, 2\pi]$ é uma superfície regular.

b) Determine a área do helicóide dado em a).

Obs: use que $\int \sqrt{a^2 + u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 + u^2} + \frac{1}{2} \ln(u + \sqrt{a^2 + u^2}) + C$

c) Calcule $\int \int_S y dS$, onde S é o helicóide dado em a).

Integrais de Superfície de Campos Vetoriais; Fluxo

– Mais sobre Fluxo:

https://youtu.be/aJ2ev_-T15g

<https://youtu.be/ivg3dLTarbs>

Tente visualizar todas as superfícies usando algum software matemático (Geogebra, Mathematica, etc...) ou acesse o site

<https://www.wolframalpha.com/input/?i=plot+12-2x%5E2-y%5E2>

(4) Calcule a integral de superfície para o campo vetorial e a superfície orientada dada. Para superfícies fechadas, use a orientação positiva (normal apontando para fora).

a) $F(x, y, z) = xy \vec{i} + yz \vec{j} + zx \vec{k}$, S é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ que está acima do quadrado $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, com orientação para cima.

b) $F(x, y, z) = x \vec{i} - z \vec{j} + y \vec{k}$, S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ no primeiro octante, com orientação na direção da origem.

c) $F(x, y, z) = y \vec{j} - z \vec{k}$, S consiste no parabolóide $y = x^2 + z^2$, $0 \leq y \leq 1$, e o disco $x^2 + y^2 \leq 1$ com $y = 1$.

(5) Determine o fluxo do campo elétrico

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{q}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} (x, y, z)$$

gerado por uma carga q que passa através da esfera de raio r , utilizando a normal exterior. O resultado encontrado é um caso particular da Lei de Gauss da Eletrostática.

Gabarito

- (1) Lembrem-se que pode haver mais de uma solução.
- a) $\phi(x, y) = x \vec{i} + y \vec{j} + x \vec{k}$, com $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
 - b) $\phi(x, y) = x \vec{i} + y \vec{j} + (1 - x - y) \vec{k}$, com $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
 - c) $r(\phi, \theta) = (x_0 + a \sin \phi \cos \theta) \vec{i} + (y_0 + a \sin \phi \sin \theta) \vec{j} + (z_0 + a \cos \phi) \vec{k}$, com $(\phi, \theta) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$.
- (2) 12
- (3) a) Basta mostrar que existe plano tangente em todos os pontos do domínio da parametrização.
- b) $(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})) \pi$.
 - c) 0
- (4) a) $\frac{713}{180}$
- b) $-\frac{4}{3}\pi$
 - c) 0
- (5) $4\pi q$; não depende do raio da esfera.