CÁLCULO II

Aula 11

Semelhança em Triângulos Retângulos

Karla Lima

Sumário

Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Teorema 1

Teorema 1

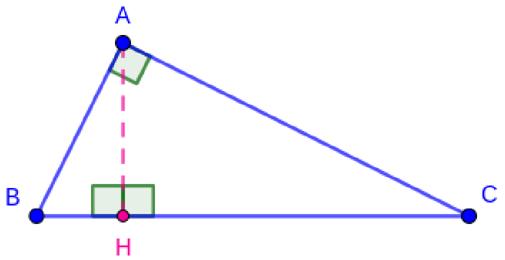
Em todo triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa divide-o em dois triângulos que são semelhantes entre si e semelhantes também ao triângulo dado.

Tese:

i) $\triangle ABH \sim \triangle AHC$

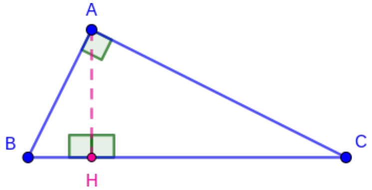
ii) $\triangle ABH \sim \triangle ABC$

iii) $\triangle AHC \sim \triangle ABC$



Demonstração: Teorema 1

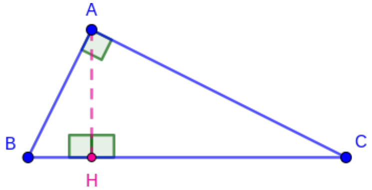
- Considere os triângulos retângulos ABH e ABC.



  - O ângulo B é comum aos dois triângulos e ambos possuem um ângulo de 90°.
  - Logo, $ABH \sim ABC$ (AA).

Demonstração: Teorema 1

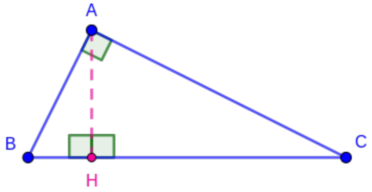
- Analogamente, considere os triângulos retângulos AHC e ABC.



  - O ângulo C é comum aos dois triângulos e ambos possuem um ângulo de $90°$.
  - Logo, $AHC \sim ABC$ (AA).

Demonstração: Teorema 1

- Por fim, considere os triângulos retângulos AHC e ABH.



  - Como $B\hat{A}H = \hat{C}$ (já que $ABH \sim ABC$), e ambos possuem um ângulo de 90°, $AHC \sim ABH$ (AA).

Corolário 1

Em todo triângulo retângulo, tem-se:

i) A altura relativa à hipotenusa é a média geométrica entre os segmentos que a mesma determina na hipotenusa

$$h = \sqrt{m * n} \Rightarrow h^2 = m * n \tag{1}$$

ii) Cada cateto é a média geométrica entre a hipotenusa e o segmento desta adjacente ao cateto:

$$b^2 = a * m \tag{2}$$

$$c^2 = a * n \tag{3}$$

Corolário 1

iii) O produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa à mesma:

$$b * c = a * h \tag{4}$$

iv) **[Teorema de Pitágoras]** O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos:

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{5}$$

Exercício

Exercício 1

Demonstre o Corolário 1.

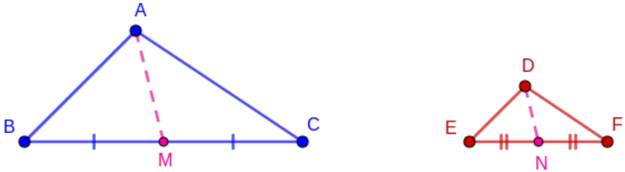
Teorema 2

Teorema 2

Se dois triângulos são semelhantes, então duas medianas quaisquer, ou duas alturas correspondentes quaisquer ou ainda duas bissetrizes internas correspondentes quaisquer, estão na mesma razão que os lados correspondentes.

Demonstração: Teorema 2

- Medianas



- Por hipótese:

$$\hat{B} = \hat{E}$$

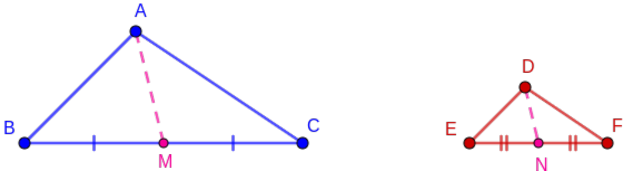
$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

Demonstração: Teorema 2

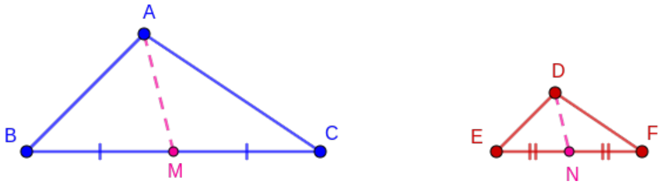
- Logo,

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BC/2}{EF/2} = \frac{BM}{EN}$$
$$\Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BM}{EN}$$

- Assim, os triângulos *ABM* e *DEN* possuem ângulos respectivamente congruentes, formados por lados proporcionais, sendo, portanto, semelhantes.



Demonstração: Teorema 2



- Da semelhança dos triângulos *ABM* e *DEN*, concluímos que

$$\frac{AM}{DN} = \frac{BM}{EN} \Rightarrow \frac{AM}{DN} = \frac{2BM}{2EN}$$
$$\Rightarrow \frac{AM}{DN} = \frac{BC}{EF},$$

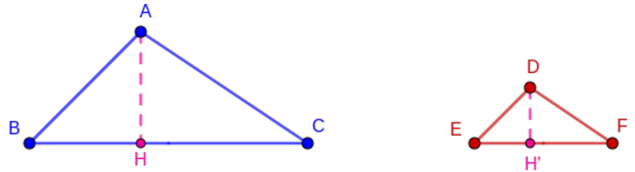
como queríamos demonstrar.

Demonstração: Teorema 2

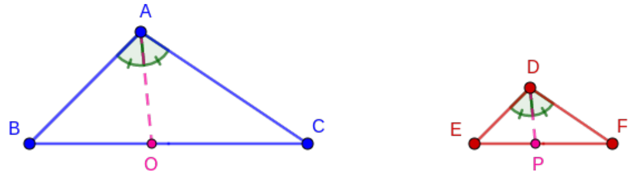
Exercício 2

Termine a demonstração do Teorema 2.

- Alturas



- Bissetrizes



Referencias I