Introdução ao Cálculo

Aula 16

Limites

Karla Lima

Sumário

Atividades Preliminares

Questionário [1]

1. Quando você ouve a palavra "limite" o que você entende?

Questionário [1]

1. Quando você ouve a palavra "limite" o que você entende?
2. Escreva duas sentenças diferentes, utilizando a palavra "limite".

Questionário [1]

1. Quando você ouve a palavra "limite" o que você entende?
2. Escreva duas sentenças diferentes, utilizando a palavra "limite".
3. Você sabe de alguma utilização matemática para a palavra "limite"? Se sim, descreva o que você sabe. Como é semelhante ou diferente do que você respondeu na questão 1?

Questionário [1]

1. Quando você ouve a palavra "limite" o que você entende?
2. Escreva duas sentenças diferentes, utilizando a palavra "limite".
3. Você sabe de alguma utilização matemática para a palavra "limite"? Se sim, descreva o que você sabe. Como é semelhante ou diferente do que você respondeu na questão 1?
4. Mesmo se você não estiver familiarizado com a notação, considere a seguinte expressão: $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$.
   Tente descrever o que ela significa.

Questionário [1]

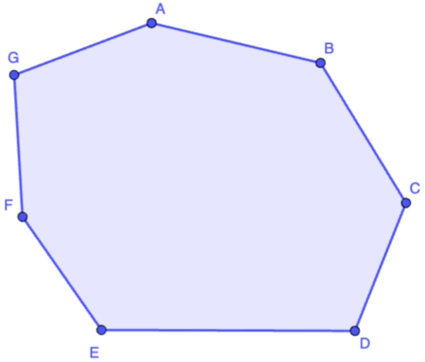
1. Quando você ouve a palavra "limite" o que você entende?
2. Escreva duas sentenças diferentes, utilizando a palavra "limite".
3. Você sabe de alguma utilização matemática para a palavra "limite"? Se sim, descreva o que você sabe. Como é semelhante ou diferente do que você respondeu na questão 1?
4. Mesmo se você não estiver familiarizado com a notação, considere a seguinte expressão: $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$.
   Tente descrever o que ela significa.
5. Como você poderia resolver a expressão dada na questão 4? Abra o Geogebra e desenhe o gráfico dessa função.

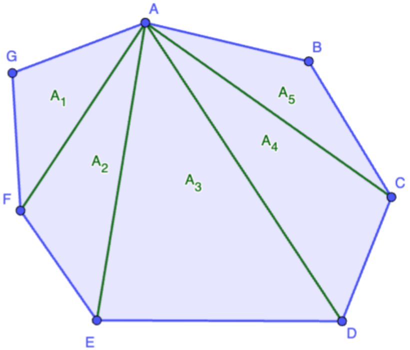
O Problema de Área

- O cálculo de áreas de figuras planas é baseado na área de triângulos.

O Problema de Área

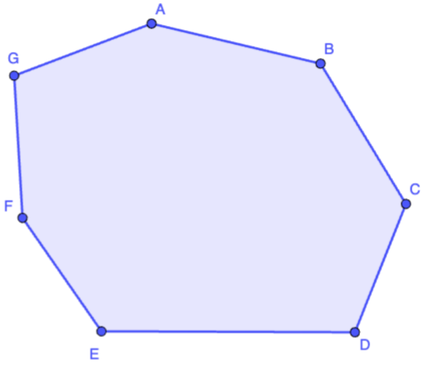
- O cálculo de áreas de figuras planas é baseado na área de triângulos.
- Isso porque todo polígono de n lados pode ser dividido em $n - 2$ triângulos, partindo de um vértice escolhido.



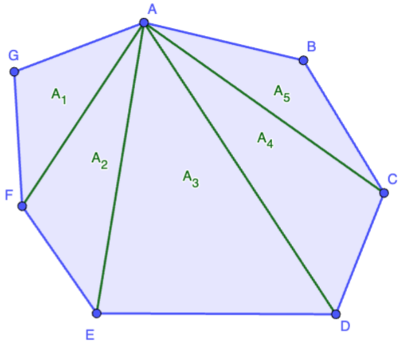


O Problema de Área

- Logo, basta calcular a área de cada triângulo criado e teremos a área do polígono dado.



Polígono de área A



Área do Polígono = $A_1+A_2+A_3+A_4+A_5$

O Problema de Área

- Os polígonos são figuras planas determinadas por uma união de segmentos de reta, tal que os pontos inicial e final coincidem e estes segmentos não se cruzam.
- Um círculo não é um polígono. Então como calcular a sua área?

O Problema de Área

- Os polígonos são figuras planas determinadas por uma união de segmentos de reta, tal que os pontos inicial e final coincidem e estes segmentos não se cruzam.
- Um círculo não é um polígono. Então como calcular a sua área?
- Baixe o arquivo Area_Circulo e abra-o no Geogebra.

Questionário

1. Seja A_n a área do polígono regular inscrito com n lados, o que acontece com a área à medida que aumentamos n ?
2. Fixado o número de lados, construa polígonos não regulares (lados diferentes) e compare sua área com a do círculo e do polígono regular.

Questionário

1. Seja A_n a área do polígono regular inscrito com n lados, o que acontece com a área à medida que aumentamos n ?
2. Fixado o número de lados, construa polígonos não regulares (lados diferentes) e compare sua área com a do círculo e do polígono regular.
3. Para encontrar a melhor aproximação para a área do círculo é suficiente apenas aumentar a quantidade dos lados do polígono? Justifique.

O Problema de Velocidade

- Para calcular a velocidade média de um objeto em movimento, em um intervalo de tempo Δt, precisamos saber o deslocamento *Deltas* do mesmo nesse intervalo:

$$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_f) - s(t_i)}{t_f - t_i}.$$

- Se você observar o velocímetro de um carro no tráfego urbano, verá que o ponteiro não fica parado por muito tempo; isto é, a velocidade do carro não é constante.
- Podemos conjecturar, pela observação do velocímetro, que o carro tem uma velocidade definida em cada momento. Mas como definir essa velocidade "instantânea"? Vamos investigar o exemplo da bola caindo.

O Problema de Velocidade

- Suponha que uma bola é atirada no ar com velocidade de $10m/s$. Sua altura em metros após t segundos é dada por

$$s(t) = 10t - 4,9t^2.$$

- A dificuldade em encontrar a velocidade após 1.5 segundos está em tratarmos de um único instante de tempo ($t = 1.5$), ou seja, não temos um intervalo de tempo. Porém, podemos aproximar a quantidade desejada calculando a velocidade média sobre o breve intervalo de tempo de um décimo de segundo, de $t = 1.5$ até $t = 1.6$.
- Baixe o arquivo Problema_Velocidade e abra-o no Geogebra.

O Paradoxo de Zenão [2]

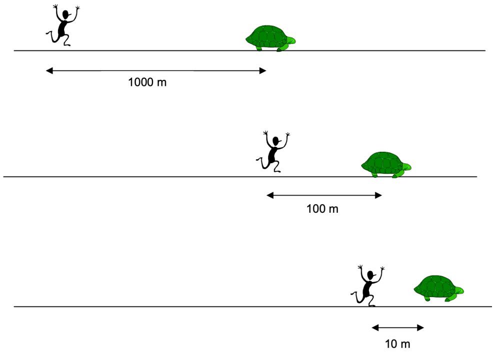
- No século V a.C., Zenão de Eléia desafiou os filósofos gregos com alguns paradoxos, entre eles o de Aquiles e a tartaruga.

O Paradoxo de Zenão [2]

- No século V a.C., Zenão de Eléia desafiou os filósofos gregos com alguns paradoxos, entre eles o de Aquiles e a tartaruga.
- ’Aquiles, conhecido por sua velocidade, decide apostar corrida com uma tartaruga. Como a velocidade de Aquiles é maior, a tartaruga recebe uma vantagem, começando a corrida pouco à frente da linha de largada. De acordo com o paradoxo, Aquiles nunca alcançaria a tartaruga, pois quando ele chegar à posição inicial da tartaruga, esta encontra-se mais a frente, numa outra posição. Quando Aquiles chegar à próxima posição, a tartaruga caminhou para uma nova posição e assim infinitamente.’

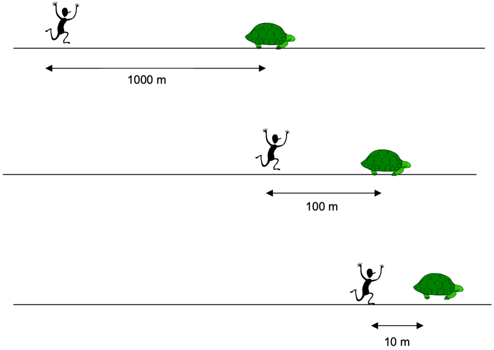
O Paradoxo de Zenão

- Pode ser explicado da seguinte forma:
- supondo que Aquiles corresse 10 vezes mais rápido que a tartaruga, para compensar essa vantagem de Aquiles, a tartaruga é colocada em uma posição muito à frente deste, digamos 1000 metros.



O Paradoxo de Zenão

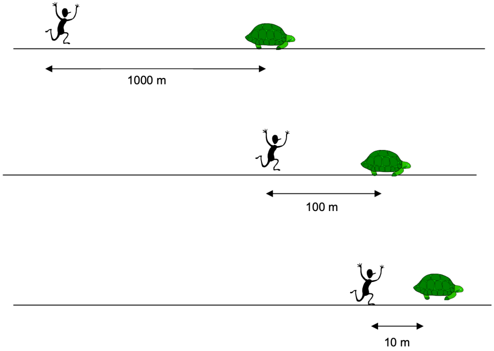
- Quando Aquiles percorre os 1000 metros e chega onde se encontrava inicialmente a tartaruga, esta, por sua vez percorre $1/10$ do percurso de Aquiles: 100 metros.
- Quando Aquiles percorre esses 100 metros, a tartaruga percorreu $\frac{100}{10} = 10$ metros.



O Paradoxo de Zenão

- Pacientemente, Aquiles percorre os 10 metros e chega onde se encontrava inicialmente a tartaruga, esta, por sua vez percorre $1/10$ do percurso de Aquiles: 1 metro.
- Ou seja, se o i-ésimo ($i \in \mathbb{N}$) deslocamento de Aquiles é de $\frac{1000}{10^{i-1}}$ metros, então o da tartaruga é

$$\frac{\frac{1000}{10^{i-1}}}{10} = \frac{1000}{10^{i}} m.$$



Questionário

1. Usando os deslocamentos da forma $\frac{1}{10^i}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, escreva a relação entre a distância entre Aquiles e a tartaruga.
2. Essa distância vai ser zero, em algum momento?

O Paradoxo de Zenão

- As posições de Aquiles são dadas pela relação a seguir:

$$s_A(0) = 0$$

$$s_A(i) = s_A(i-1) + \frac{1000}{10^{i-1}}$$

- $s(1) = s(0) + \frac{1000}{10^{1-1}} = 1000$ metros;
- $s(2) = s(1) + \frac{1000}{10^{2-1}} = 1100$ metros;
- $s(3) = s(2) + \frac{1000}{10^{3-1}} = 1110$ metros;
- $s(4) = s(3) + \frac{1000}{10^{4-1}} = 1111$ metros;
- etc...

O Paradoxo de Zenão

- As posições da tartaruga são dadas pela relação a seguir:

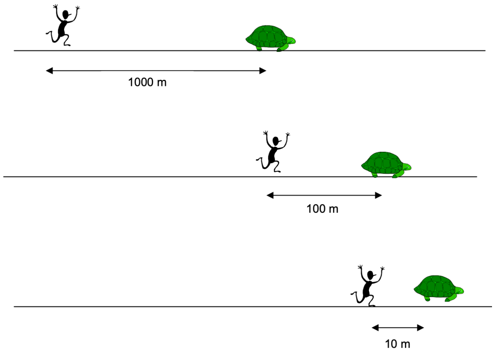
$$s_t(0) = 1000$$
$$s_t(i) = s_A(i) + \frac{1000}{10^i}$$

- $s(1) = s(0) + \frac{1000}{10^1} = 1100$ metros;
- $s(2) = s(1) + \frac{1000}{10^2} = 1110$ metros;
- $s(3) = s(2) + \frac{1000}{10^3} = 1111$ metros;
- $s(4) = s(3) + \frac{1000}{10^4} = 1111,1$ metros;
- etc...

O Paradoxo de Zenão

- Para calcular a distância entre Aquiles e a tartaruga, fazemos a diferença entre as posições:

$$
\begin{aligned}
s_t(i) - s_A(i) &= s_A(i) + \frac{1000}{10^i} - s_A(i) \\
&= \frac{1000}{10^i}
\end{aligned}
$$



Crescimento Populacional com Capacidade de Suporte

Uma população com frequência cresce exponencialmente em seus estágios iniciais, seguindo o modelo de Malthus, mas em dado momento se estabiliza e se aproxima de sua capacidade de suporte por causa dos recursos limitados. Para refletir que a taxa de crescimento diminui quando a população P aumenta e torna-se negativa quando P ultrapassa sua **capacidade de suporte** K, a expressão mais simples é dada pelo modelo conhecido como Modelo Logístico

$$P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-kt}},$$

onde $A = \dfrac{K - P_0}{P_0}$, P_0 é a população inicial e k é a taxa de crescimento.

Crescimento Populacional com Capacidade de Suporte

Na década de 1930, o biólogo G. F. Gause realizou uma experiência com o protozoário paramécio e usou uma equação logística para modelar seus dados. O modelo é dado pela equação

$$P(t) = \frac{64}{1 + 31e^{-0{,}7944t}},$$

onde $P(t)$ é a contagem da população de protozoários após t dias.

Crescimento Populacional com Capacidade de Suporte

Na década de 1930, o biólogo G. F. Gause realizou uma experiência com o protozoário paramécio e usou uma equação logística para modelar seus dados. O modelo é dado pela equação

$$P(t) = \frac{64}{1 + 31e^{-0{,}7944t}},$$

onde $P(t)$ é a contagem da população de protozoários após t dias.

- No Geogebra, desenhe o gráfico dessa função.

Crescimento Populacional com Capacidade de Suporte

Na década de 1930, o biólogo G. F. Gause realizou uma experiência com o protozoário paramécio e usou uma equação logística para modelar seus dados. O modelo é dado pela equação

$$P(t) = \frac{64}{1 + 31e^{-0{,}7944t}},$$

onde $P(t)$ é a contagem da população de protozoários após t dias.

- No Geogebra, desenhe o gráfico dessa função.
- O que acontece com a população a medida que o número de dias fica muito grande?

Definição Informal de Limite

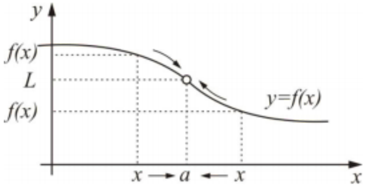
Definição Informal

Definição 1

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \ (\textit{lê-se: o limite de } f(x)\textit{, quando } x \textit{ tende a } a\textit{, é } L)$$

se os valores $f(x)$, com x arbitrariamente próximo de a, se aproximam de um único valor L.

Interpretação gráfica



Definição Informal

- Dizer que x arbitrariamente é próximo de a, significa que a diferença $|x - a|$ é muito pequena, além de se ter $x \neq a$.
- Não estamos interessados em saber quanto vale a função em a, mas, sim, no seu entorno.
- Para calcular o limite com x tendendo a a, a função não precisa estar definida em a.
- **Obs:** Se não existe um número L com essa propriedade diz-se que não existe $\lim_{x \to a} f(x)$.

Definição Informal

- Baixe o arquivo limite_informal e abra-o no Geogebra.
- Depois de trabalhar com a função f dada, vamos substituí-la por outras funções e analisar os resultados.
- Use o livro Cálculo, Vol I (J. Stweart) para o estudo de limites.

Referencias I

J. M. Sabatke.
Construção do conceito de limite: ideias e contextos, 2016.
Disponível em
https://sistemabu.udesc.br/pergamumweb/vinculos/000018/0000182a.pdf.

J. P. d. S. Neto.
Um estudo sobre o ensino de limite: um tratamento computacional com aplicações., 2006.
Disponível em https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11065/1/Dissertacao%20Joao%20Pereira%20da%20Silva%20Neto.pdf.