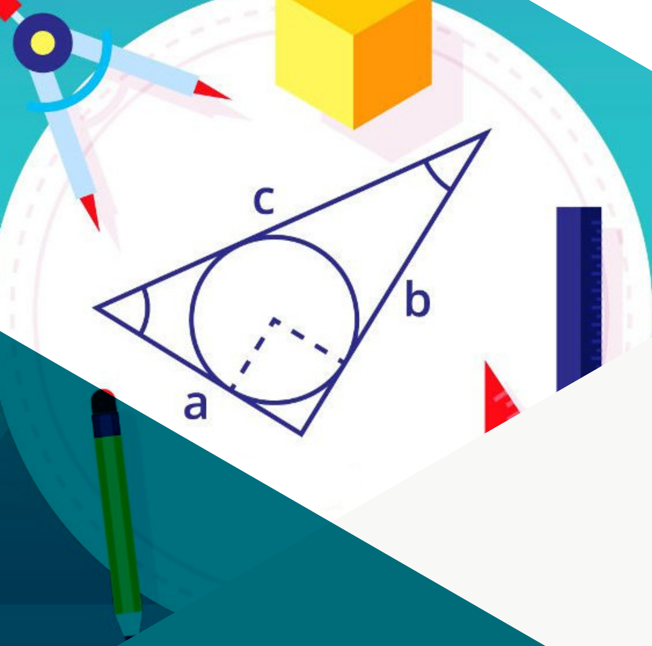
CÁLCULO II



Técnicas de Integração

Integrais Impróprias

Karla Lima

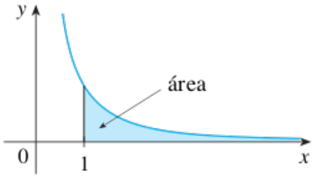
Sumário

Tipo I: Intervalos Infinitos

Tipo 1

Já vimos que uma integral pode representar a área abaixo do gráfico de uma função não negativa, em um dado intervalo.

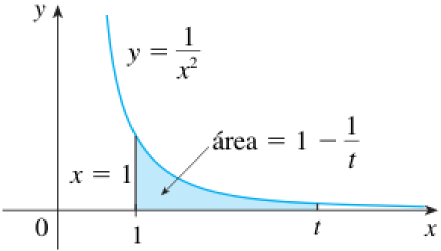
- Considerando a região infinita S que está sob a curva $y = 1/x^2$ e acima do eixo x, no intervalo $1 \leq x$, poderíamos pensar que sua área é infinita.



Tipo 1

Fixando $t > 1$, podemos calcular a área sob a curva $y = 1/x^2$ e acima do eixo x, no intervalo $[1, t]$ dado por:

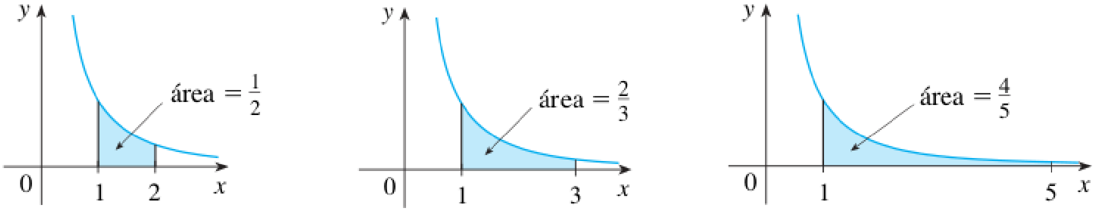
$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = -\left.\frac{1}{x}\right|_1^t = 1 - \frac{1}{t}.$$



Tipo 1

Abaixo, vemos os valores da área para $t = 2$, $t = 3$ e $t = 5$, ao substituirmos esses valores em

$$A(t) = 1 - \frac{1}{t}.$$

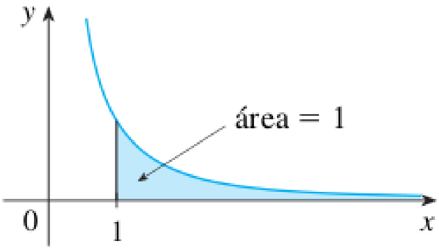


Tipo 1

Para a área desejada de S, devemos ter $t \to \infty$, pois o intervalo desejado é $[1, \infty)$ (intervalo infinito):

- Área de S:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} A(t) &= \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx \\ &= \lim_{t\to\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$



- A área da região infinita S é 1.

Definição

Definição 1

Definimos as integrais em intervalos infinitos $[(a,\infty),(-\infty,b),(-\infty,\infty)]$ *a seguir:*

a) Se $\displaystyle\int_a^t f(x)\,dx$ existe para cada número $t \geq a$, então

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx,$$

desde que o limite exista (como um número finito).

Definição

b) Se $\int_t^b f(x)\,dx$ existe para cada número $t \leq b$, então

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)\,dx,$$

desde que o limite exista (como um número finito).

Definição

As integrais impróprias $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ e $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ são ditas **convergentes** se os limites correspondentes existem e **divergentes** se os limites não existem.

c) Se ambas $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ e $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ são convergentes, então definimos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{\infty} f(x)\,dx,$$

onde a é qualquer número real.

Exemplo

Exemplo 1

Determine se a integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$ *é convergente ou divergente.*

Solução:

1. Verificamos se é possível calcular a integral $\int_1^t \frac{1}{x}\, dx$ para todo $t > 1$:

$$\begin{aligned} \int_1^t \frac{1}{x}\, dx &= \ln|x|\Big|_1^t \\ &= \ln|t| - \ln|1| \\ &= \ln|t|. \end{aligned}$$

   Como $0 < 1 < t$, $\ln|t|$ existe para todo $t > 1$.

Exemplo

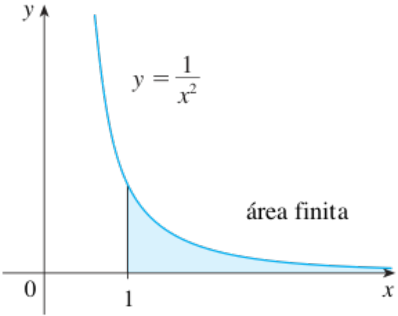
2. Verificamos se existe o limite, quando $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\, dx = \lim_{t\to\infty} \ln|t|$$
$$= \infty.$$

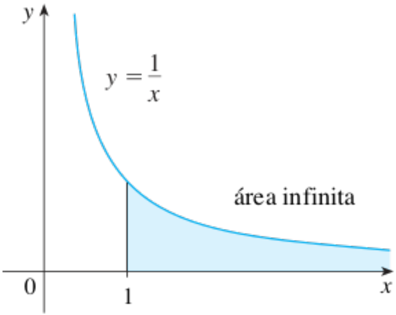
Portanto, o limite não existe e a integral imprópria $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx$ é divergente.

Exemplo

Embora as curvas $\frac{1}{x^2}$ e $\frac{1}{x}$ sejam bem semelhantes, a área sob seus gráficos, e acima do eixo x, no intervalo $[1, \infty)$ são distintas: uma é um número e a outra é infinita.



(a) Integral Imprópria Convergente



(b) Integral Imprópria Divergente

Exercícios [1, 2]

Exercício 1

Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{x}\, dx.$

R: -1

Exercício 2

Calcule $\displaystyle\int_{0}^{\infty} (1-x)e^{-x}\, dx.$

R: 0

Tipo 2: Integrando Descontínuos

Tipo 2

Já sabemos como integrar funções com descontinuidades do tipo 'salto' e 'buraco'. Agora, vamos tratar das descontinuidades infinitas, aquelas em que a função 'explode':

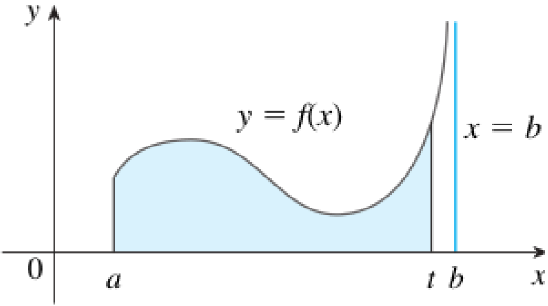


Figura 2: A região é infinita em uma direção vertical

Definição

Definição 2

Definimos a seguir como calcular integrais de funções que possuem assíntotas verticais nos extremos de integração:

a) Se f é contínua em $[a, b)$ e descontínua em b, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

se esse limite existir.

Definição

A integral imprópria $\int_a^b f(x)\,dx$ é chamada **convergente** se o limite correspondente existir e **divergente** se o limite não existir.

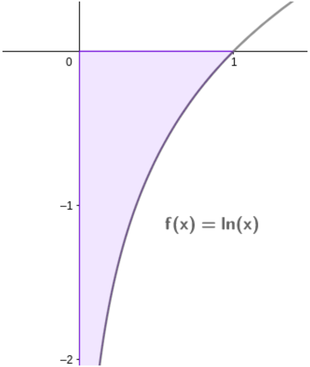
c) Se f é descontínua em c, onde $a < c < b$, e ambos $\int_a^c f(x)\,dx$ e $\int_c^b f(x)\,dx$ forem convergentes, então definimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Exemplo

Exemplo 2

Calcule $\int_0^1 \ln x \, dx.$



Exemplo

Solução: Como podemos ver na figura acima, a função $\ln(x)$ possui uma assíntota vertical em $x = 0$ e é contínua no intervalo $(0, 1]$.

1. Calculamos a integral $\displaystyle\int_t^1 \ln(x)\, dx$:

$$
\begin{aligned}
\int_t^1 \ln(x)\, dx &= x\ln(x) - x\Big|_t^1 \\
&= 1\ln(1) - 1 - (t\ln(t) - t) \\
&= -1 - t\ln(t) + t.
\end{aligned}
$$

Exemplo

2. Calculamos o limite para $t \to 0^+$. Como
   - $\lim_{t\to 0^+} -1 + t = -1 + 0 = -1$;
   - $\lim_{t\to 0^+} t\ln(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(t)}{1/t} =^{1} \lim_{t\to 0^+} \frac{1/t}{-1/t^2} = \lim_{t\to 0^+} (-t) = 0$,

   concluímos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \ln(x)\,dx &= \lim_{t\to 0^+} (-1 - t\ln(t) + t) \\
&= \lim_{t\to 0^+} (-1 + t) - \lim_{t\to 0^+} t\ln(t) \\
&= -1 - 0 = -1.
\end{aligned}$$

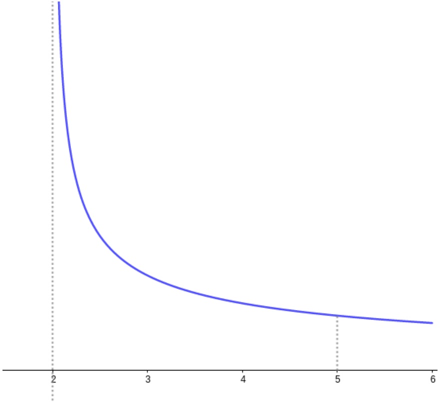
[1] Usando a regra de L'Hôspital

Exercícios

Exercício 3

Calcule $\displaystyle\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ *se for possível.*

Exercícios



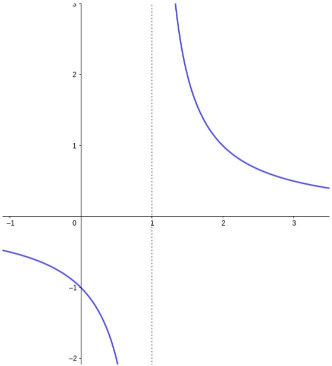
R: $2\sqrt{3}$.

Exercícios

Exercício 4

Calcule $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x-1}$ *se for possível.*

Exercícios



R: A integral diverge.

Referencias I

J. Stewart.
Calculo: volume 1.
Pioneira Thomson Learning, 2006.

H. Anton, I. Bivens, and S. Davis.
Cálculo - Volume I - 10.ed.
Bookman Editora, 2014.