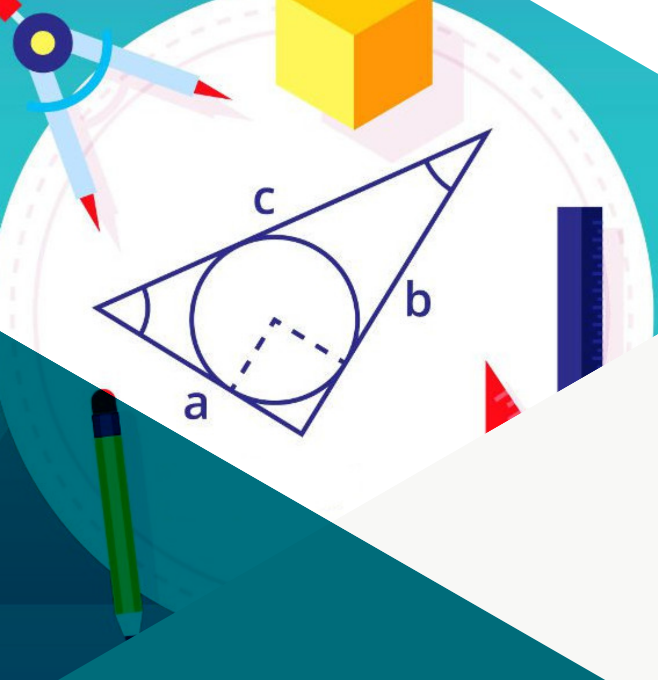


CÁLCULO II

Aula 08

Quadriláteros

Karla Lima

Sumário

1. Definição e Nomenclaturas

2. Propriedades dos Paralelogramos

3. Propriedades do Retângulo

4. Propriedades do Losango

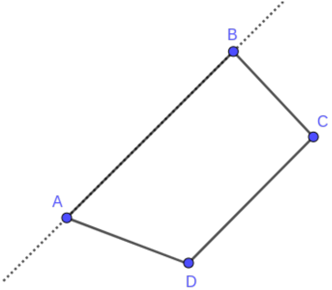
5. O Trapézio

Definição e Nomenclaturas

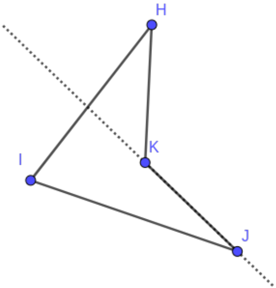
Definição

Definição 1

*Denominamos de **quadrilátero** ao polígono de quatro lados.*



Quadrilátero Convexo

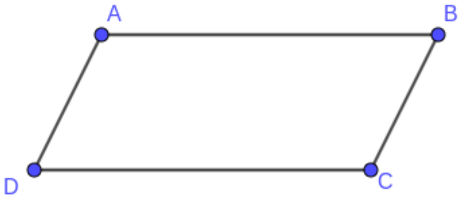


Quadrilátero Não Convexo

Quadriláteros Notáveis

Definição 2

O quadrilátero cujos lados opostos (que não possuem vértices em comum) são paralelos é denominado ***paralelogramo****.*



Quadriláteros Notáveis

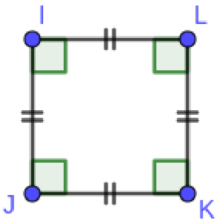
Definição 3

Um paralelogramo cujos ângulos são retos é denominado ***retângulo****.*

Quadriláteros Notáveis

Definição 4

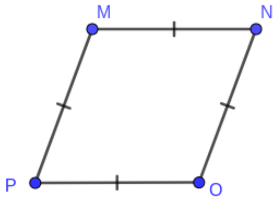
Um retângulo cujos lados são congruentes é dito um ***quadrado****.*



Quadriláteros Notáveis

Definição 5

Um paralelogramo cujos lados são congruentes é denominado ***losango****.*



Propriedades dos Paralelogramos

Teorema

Teorema 1

Em todo paralelogramo:

a) *os ângulos opostos são congruentes;*
b) *os lados opostos são congruentes;*
c) *as diagonais se bissecam.*

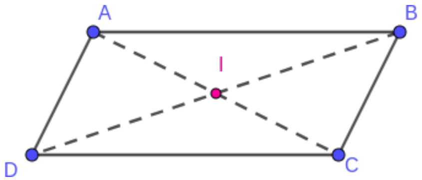
Antes de demonstrar o teorema, prove o seguinte lema:
’Segmentos paralelos compreendidos entre dois segmentos paralelos são congruentes.’

Demonstração: Teorema 1

a) Trace uma diagonal e separe o paralelogramo em dois triângulos. Mostre que são congruentes, usando o paralelismo dos lados opostos.

b) Use a conclusão do item a).

c) De fato, na figura abaixo



mostre que $B\hat{I}C = A\hat{I}D$ e $I\hat{B}C = I\hat{D}A$. Conclua que $\triangle BIC \equiv \triangle AID$ (LAA).

- Com isso, teremos $\overline{BI} = \overline{ID}$ e $\overline{CI} = \overline{IA}$ (Por quê?)

Teorema

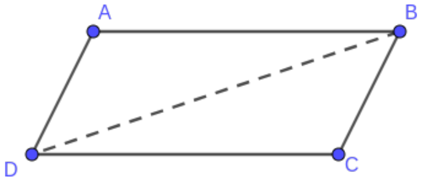
Teorema 2

Reciprocamente, um quadrilátero convexo:

a) *cujos lados opostos são congruentes é um paralelogramo;*
b) *cujos ângulos opostos são congruentes é um paralelogramo;*
c) *cujas diagonais se bissecam é um paralelogramo.*

Demonstração: Teorema 2

a) Trace uma das diagonais do quadrilátero, dividindo-o em dois triângulos: $\triangle ABD$ e $\triangle BCD$. Mostre que eles são congruentes.



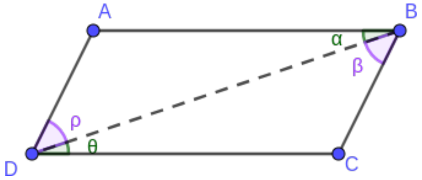
- Conclua que $C\hat{B}D = B\hat{D}A$ e mostre que os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ são paralelos.

Demonstração: Teorema 2

- Do mesmo modo, conclua que $A\hat{B}D = B\hat{D}C$ e mostre que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ são paralelos.

Demonstração: Teorema 2

b) Trace uma das diagonais do quadrilátero.



- Por hipótese, $\hat{A} = \hat{C}$ e $A\hat{B}D = A\hat{D}C$.
- Na figura acima, temos que $\alpha + \beta = \rho + \theta$ (por hipótese).
- Além disso, pela Lei Angular de Tales (soma dos ângulos internos):

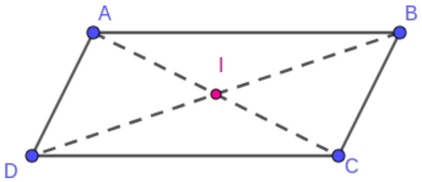
$$\beta + \theta = \alpha + \rho \quad (\textit{confira}!)$$

Demonstração: Teorema 2

- Some estas equações, membro a membro, e conclua que $\alpha = \theta$.
- Mostre que, por isso, os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ são paralelos.
- Analogamente, conclua que $\beta = \rho$ e, com isso, mostre que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ são paralelos.
- Portanto, *ABDC* é um paralelogramo.

Demonstração: Teorema 2

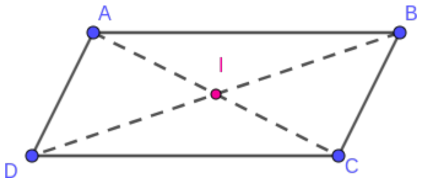
c) Trace as diagonais do quadrilátero.



- Qual caso de congruência garante que $\triangle BIC \equiv \triangle AID$?
- Dessa congruência, como podemos relacionar os ângulos $C\hat{B}D$ e $B\hat{D}A$?
- Conclua que $\overline{BC} = \overline{AD}$.

Demonstração: Teorema 2

- Analogamente, conclua a congruência dos triângulos AIB e DIC.



- Dessa congruência, relacione os ângulos $A\hat{B}D$ e $B\hat{D}C$.
- Conclua que $\overline{AB} = \overline{DC}$.

Do exposto acima, conclui-se que $ABCD$ é um paralelogramo.

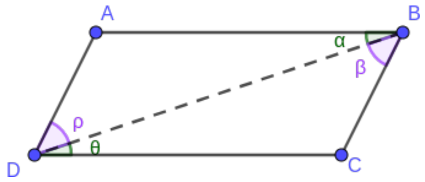
Teorema

Teorema 3

O quadrilátero que tem dois lados paralelos e congruentes é um paralelogramo.

Demonstração: Teorema 3

- Trace a diagonal do quadrilátero, transversal aos lados paralelos e congruentes, $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$:



- Temos $A\hat{B}D = B\hat{D}C$ (justifique!) e, assim,

$$\triangle CBD = \triangle BDA \quad \text{(qual congruência?)}.$$

- Dessa forma, $AB = DC$ (por quê?).
- Pelo item a), do Teorema 2, segue-se que $ABCD$ é um paralelogramo.

Propriedades do Retângulo

Teorema

Teorema 4

As diagonais de um retângulo são congruentes.

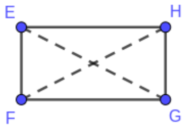


Figura 1: Se $EFGH$ é um retângulo, então $EG = HF$.

Demonstração: Exercício.

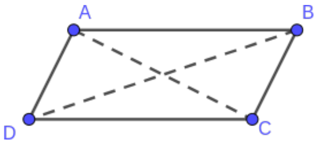
Teorema

Teorema 5

Reciprocamente, o paralelogramo que tem as diagonais congruentes é um retângulo.

Demonstração: Teorema 5

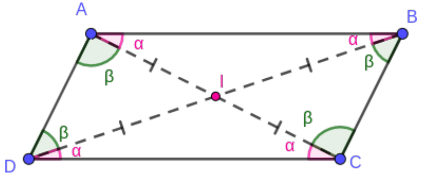
- Trace as diagonais do paralelogramo:



- Pelo Teorema 1, item c), as diagonais se bissecam.
- Como $AC = BD$, temos que $\frac{AC}{2} = AI = BI = DI = CI = \frac{BD}{2}$.
- Portanto, são isósceles os triângulos AID, BIC, AIB e DIC.
- Conclua que $\triangle AID \equiv \triangle BIC$ e $\triangle AIB \equiv \triangle DIC$.

Demonstração: Teorema 5

- Assim, teremos $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = \alpha + \beta$.



- Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é $180^\circ(4-2) = 360^\circ$, segue que

$$360^\circ = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 4(\alpha + \beta) \Leftrightarrow \alpha + \beta = 90^\circ.$$

- Portanto, $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$, sendo o paralelogramo um retângulo.

Propriedades do Losango

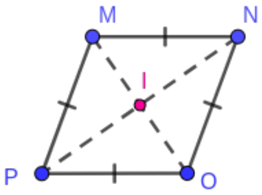
Teorema

Teorema 6

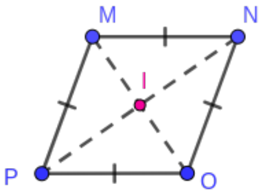
Em todo losango:

a) *as diagonais são perpendiculares;*

b) *as diagonais são bissetrizes dos ângulos do quadrilátero.*



Demonstração: Teorema 6



- Na figura acima, $\triangle PMN$ é isósceles.
- O segmento $\overline{MI}$ divide a base PN em dois segmentos congruentes. Portanto, é mediana referente a este lado.
- Como a mediana da base é também a altura do triângulo isósceles, temos que $\overline{MI}$ é perpendicular à diagonal $\overline{PN}$.
- Conclua daí que $\overline{MO} \perp \overline{PN}$.

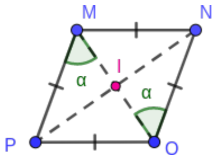
Demonstração: Teorema 6

Para o item b), sabemos que a mediana da base é também a bissetriz do vértice oposto.

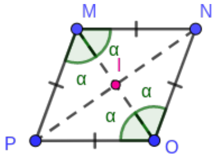
- Conclua que $\overline{MO}$ é a bissetriz de $\hat{M}$ e de $\hat{O}$.
- Conclua que $\overline{PN}$ é a bissetriz de $\hat{P}$ e de $\hat{N}$.

Demonstração: Teorema 6

- $P\hat{M}I = I\hat{O}N$ (por quê?)

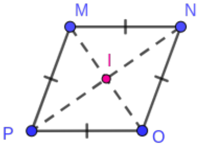


- Com isso, $\overline{MN}$ é bissetriz dos ângulos $\hat{M}$ e $\hat{O}$.



Demonstração: Teorema 6

- Para concluir a demonstração do item b), mostre que $\overline{NP}$ é bissetriz dos ângulos $\hat{P}$ e $\hat{N}$.



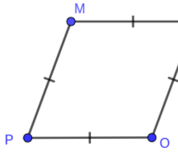
Teorema

Teorema 7

Reciprocamente, se as diagonais de um quadrilátero se bissecam e são perpendiculares, então o quadrilátero é um losango.

Demonstração: Teorema 7

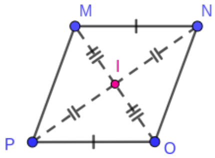
- Pelo Teorema 2, se as diagonais de um quadrilátero se bissecam, então ele é um paralelogramo.
- Logo, $MN = PO$ e $MP = NO$ (por quê?).



- Para concluir a demonstração, precisamos mostrar que os quatro lados são iguais.

Demonstração: Teorema 7

- Verifique que $\triangle PMI = \triangle MIN$



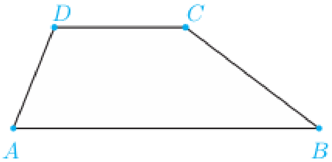
- Conclua que $MP = MN$ e, portanto, $MN = PO = MP = NO$, c.q.d.

O Trapézio

Um quadrilátero que não é um paralelogramo

Definição 6

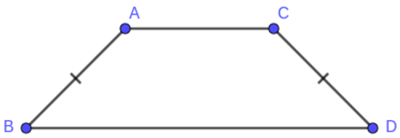
Um quadrilátero que tem apenas dois lados paralelos é denominado ***trapézio****.*



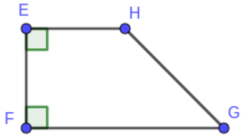
Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são as **bases** do trapézio.

Trapézios Especiais

- O trapézio cujos lados não paralelos são congruentes é dito **isósceles**.
- O trapézio que possui dois ângulos retos é dito **trapézio retângulo**.



Trapézio Isósceles



Trapézio Retângulo

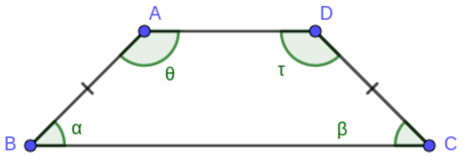
Propriedades do Trapézio

Teorema 8

No trapézio isósceles, os ângulos adjacentes à mesma base são congruentes.

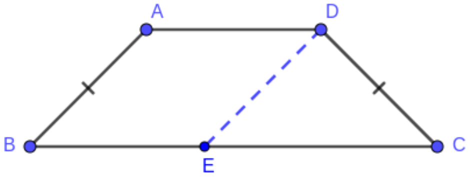
Demonstração:

- **Hipótese:** $AB = CD$
- **Tese:** $\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{B} = \hat{C}$



Demonstração: Teorema 1

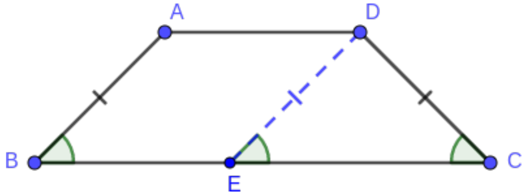
- Trace pelo vértice D o segmento $\overline{DE}$ paralelo a $\overline{AB}$ com $E \in \overline{BC}$.



- O quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo (pq?). Logo,
  - $AB = ED$
  - $AB = DE = DC$

Demonstração: Teorema 1

- Como $\hat{B} = D\hat{E}C$ e $C\hat{E}D = \hat{C}$ (pq?), então $\hat{B} = \hat{C}$.



- Por serem suplementos de ângulos congruentes, temos $\hat{A} = \hat{D}$.

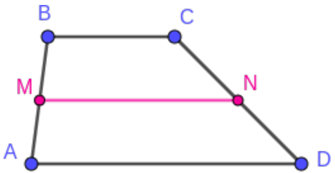
Propriedades do Trapézio

Teorema 9

O segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases e igual à sua semi-soma.

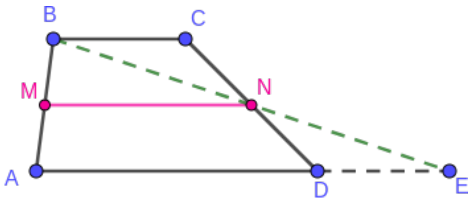
Demonstração:

- **Hipótese:** $MB = MA$ e $NC = ND$.
- **Tese:** $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$, $\overline{MN} \parallel \overline{AD}$ e $MN = \frac{BC+AD}{2}$



Demonstração: Teorema 2

- Trace pelo vértice B o segmento $\overline{BE}$, que passa pelo ponto médio N, com $E \in \overrightarrow{AD}$.



- Os triângulos formados BCN e NDE formados são congruentes, pois
  - $NC = ND$ (hipótese)
  - $B\hat{N}C = D\hat{N}E$ (pq?)
  - $\hat{C} = N\hat{D}E$ (pq?)
- Assim, $BC = DE$ e $BN = NE$ (lados opostos à ângulos congruentes).

Demonstração: Teorema 2

- Dessa forma, $\overline{MN}$ une os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BE}$ do $\triangle ABE$. Logo,

$$\overline{MN} \parallel \overline{AE}.$$

- Como $\overline{AE} \parallel \overline{BC}$, a primeira parte do teorema está demonstrada.
- Finalmente,

$$MN = \frac{AE}{2} = \frac{AD + DE}{2} = \frac{AD + BC}{2}.$$

O segmento $\overline{MN}$ é denominado **base média** ou **mediana** do trapézio.