CÁLCULO II

Integração

Aplicações

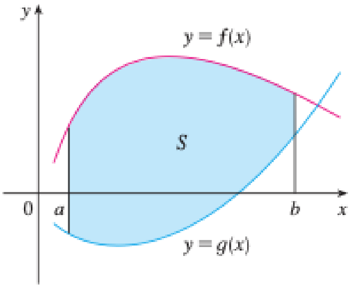
Karla Lima

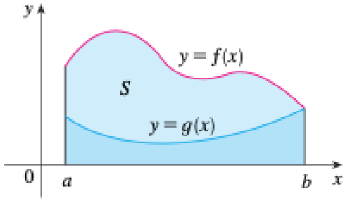
Sumário

Áreas entre Curvas

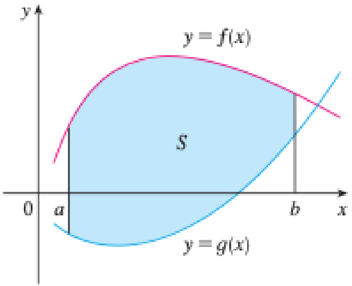
Definição [1]

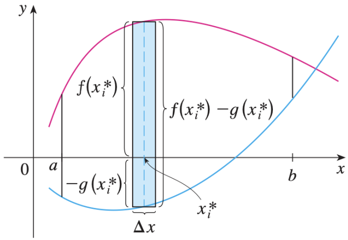
- Já vimos que uma integral pode representar a área abaixo do gráfico de uma função não negativa e acima do eixo x, em um dado intervalo.
- Aqui, usamos as integrais para encontrar áreas de regiões entre gráficos de duas funções.



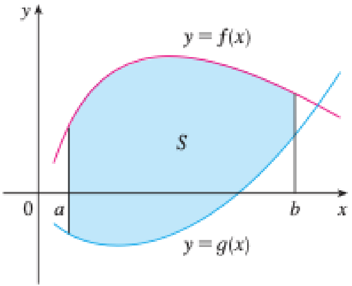


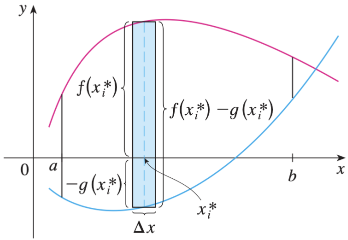
Definição





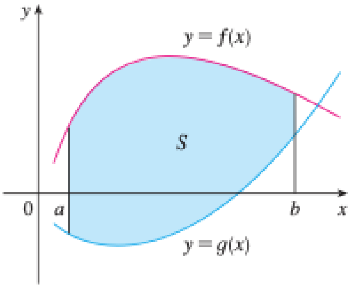
Definição

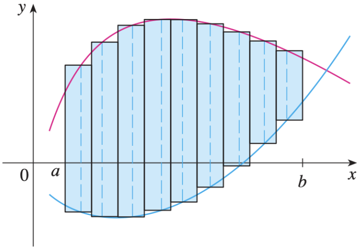




- Assim como fizemos anteriormente, dividimos a região S em n faixas de larguras iguais e então aproximamos a i-ésima faixa por um retângulo com base Δx e altura $f(x_i^*) - g(x_i^*)$, supondo $f(x) \geq g(x)$ em $[a, b]$.

Definição



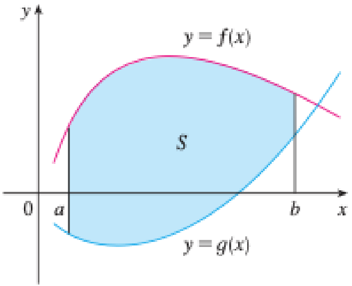


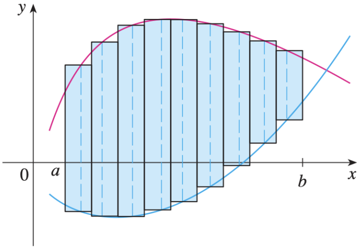
- A soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\Delta x$$

é uma aproximação do que pensamos como a área de S.

Definição





- Essa aproximação parece tornar-se cada vez melhor quando $n \to \infty$.
- Portanto, a área A da região S é dada como o limite

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)] \Delta x.$$

Definição

- Reconhecemos o limite anterior como a integral da função $f - g$.

Definição 1

A área A da região limitada pelas curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ *e pelas retas* $x = a$, $x = b$, *onde f e g são contínuas e* $f(x) \geq g(x)$ *para todo x em* $[a, b]$, *é*

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$

Exemplos

Exemplo 1

Encontre a área da região limitada acima por $y = e^x$, limitada abaixo por $y = x$, e limitada nos lados por $x = 0$ e $x = 1$.

Exemplo 2

Encontre a área da região delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = 2x - x^2$.

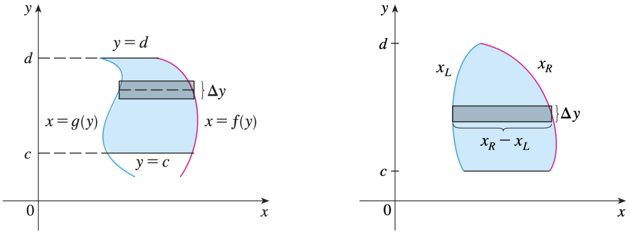
Exemplo 3

Encontre a área da região delimitada pelas curvas $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $x = 0$ e $x = \pi/2$.

Exemplos

- Algumas regiões são mais bem tratadas considerando x como uma função de y. Se uma região é delimitada por curvas com equações $x = f(y), x = g(y), y = c$ e $y = d$, em que f e g são contínuas e $f(y) \geq g(y)$ para $c \leq y \leq d$.
- Então a sua área é

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\, dx.$$



Exemplos

Exemplo 4

Encontre a área delimitada pela reta $y = x - 1$ *e pela parábola* $y^2 = 2x + 6$.

Exercício

Exercício 1

a) *Calcule a área de um círculo centrado na origem do sistema de coordenadas e com raio igual a* 1.

b) *Calcule a área de um círculo de raio* R.

Exercício

Exercício 2

Dois carros, A e B, largam lado a lado e aceleram a partir do repouso. A figura mostra os gráficos de suas funções velocidade.

a) *Qual carro estará na frente após 1 minuto? Explique.*

b) *Qual o significado da área da região sombreada?*

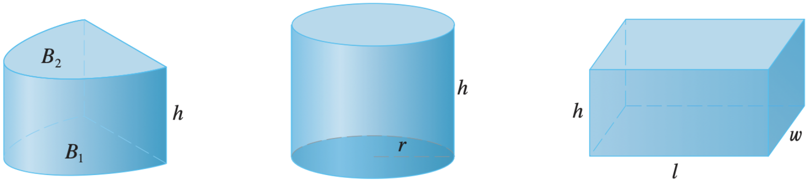
c) *Qual carro estará na frente após 2 minutos? Explique.*

d) *Estime quando os carros estarão novamente lado a lado.*

Volume

O Problema de Volume

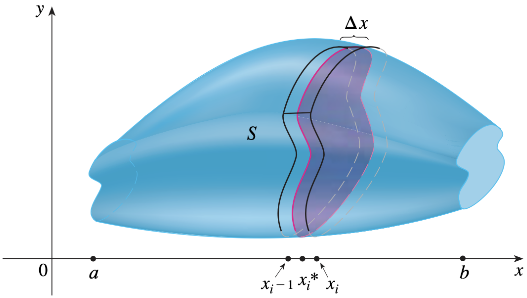
- Sabemos calcular volume de sólidos simples, do tipo **cilindro reto**: área da base $\times$ altura.



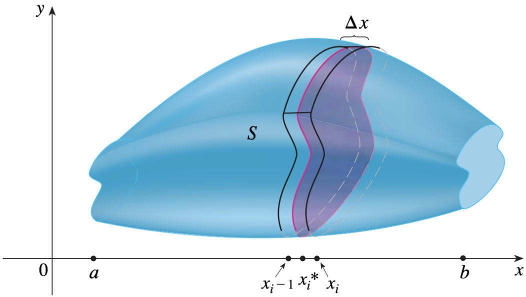
(a) Cilindro $V = Ah$ (b) Cilindro circular $V = \pi r^2 h$ (c) Caixa retangular $V = lwh$

O Problema de Volume

- Para um sólido S que não é um cilindro reto, temos o mesmo problema de calcular áreas não retangulares.
- A solução é a mesma: cortamos o sólido S em pedações e aproximamos cada parte por um cilindro.

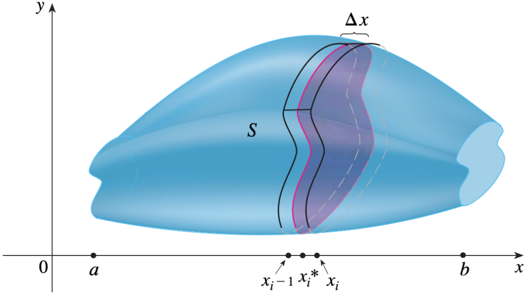


O Problema de Volume



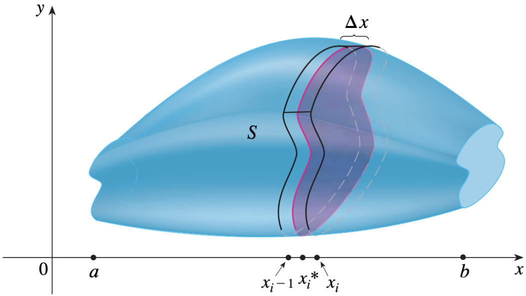
- O volume de cada cilindro vai ser dado pela expressão $A(x_i^*)\Delta x$.

O Problema de Volume



- Então, uma aproximação do volume de S é dado por $V(S) \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x$.

O Problema de Volume



- Esta aproximação parece melhorar quando $n \to \infty$, quando tomamos fatias cada vez mais finas.

Definição de Volume

Definição 2

Seja S um sólido que está entre $x = a$ e $x = b$. Se a área da seção transversal de S no plano P_x, passando por x e ***perpendicular*** *ao eixo x, é $A(x)$, onde A é uma função contínua, então o* ***volume*** *de S é*

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x = \int_a^b A(x)\, dx.$$

Definição de Volume

Definição 2

Seja S um sólido que está entre $x = a$ e $x = b$. Se a área da seção transversal de S no plano P_x, passando por x e ***perpendicular*** *ao eixo x, é $A(x)$, onde A é uma função contínua, então o* ***volume*** *de S é*

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x = \int_a^b A(x)\, dx.$$

Obs: Esse limite sempre existe? Justifique.

Definição de Volume

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

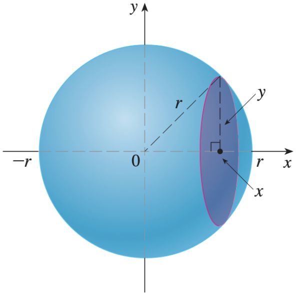
- Na fórmula acima, $A(x)$ é a área de uma seção transversal móvel, obtida ao fatiar S perpendicularmente ao eixo x.
- Para um cilindro reto, a área da seção transversal é constante: $A(x) = A$.
- O volume resulta em

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b A\,dx = A\int_a^b dx \\ &= A(b-a) = Ah \qquad \text{(área da base} \times \text{altura)} \end{aligned}$$

Exemplo

Exemplo 5

Mostre que o volume de uma esfera de raios r é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.



Exemplo

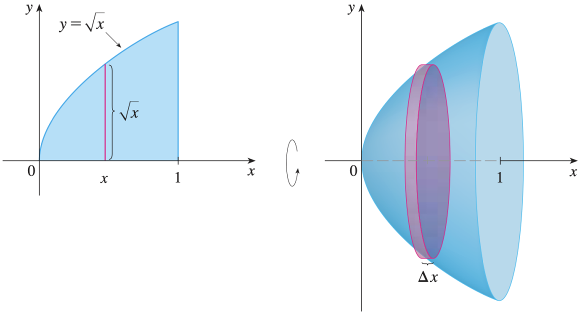
Exemplo 6

Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região sob a curva $y = \sqrt{x}$ de 0 a 1.

Exemplo

Exemplo 6

Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região sob a curva $y = \sqrt{x}$ *de 0 a 1.*



Exemplo

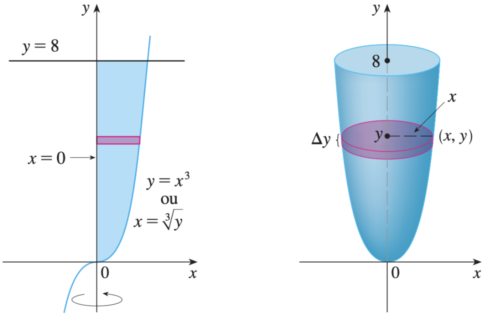
Exemplo 7

Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região delimitada por $y = x^3$, $y = 8$ *e* $x = 0$.

Exemplo

Exemplo 7

Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região delimitada por $y = x^3$, $y = 8$ e $x = 0$.



Exemplo

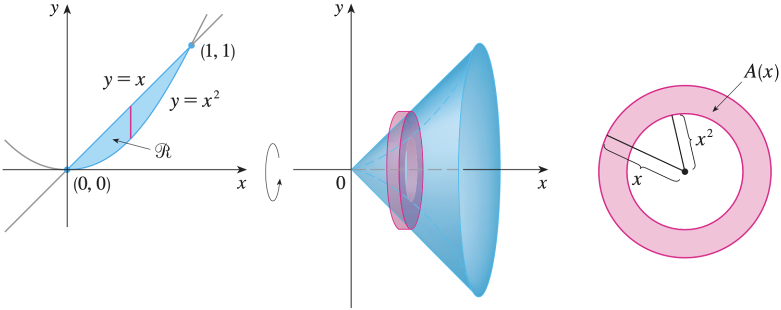
Exemplo 8

A região $\mathcal{R}$, delimitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$, é girada ao redor do eixo x. Encontre o volume do sólido resultante.

Exemplo

Exemplo 8

A região $\mathcal{R}$, delimitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$, é girada ao redor do eixo x. Encontre o volume do sólido resultante.



Sólidos de Revolução

- Os sólidos dos Exemplos **??** são chamados **sólidos de revolução** porque são obtidos pela rotação de uma região em torno de um eixo.
- Se a seção transversal é um disco (Exemplos **??**), encontramos o raio do disco (em termos de x ou de y) e usamos

$$A = \pi(\text{raio})^2.$$

- Se a seção transversal é um anel (Exemplo 22), encontramos os raios interior e exterior e usamos

$$A = \pi(\text{raio externo})^2 - \pi(\text{raio interno})^2.$$

Referencias I

J. Stewart.
Calculo: volume 1.
Pioneira Thomson Learning, 2006.