P2 - 19/04/23

01 $T(t) = T_m + (T_0 - T_m)\, e^{-kt}$

$T_0 = 160°$ $\quad\quad k = ?$

$T_m = 40°$ $\quad\quad t$ em minutos, $t_0 = 0$.

Para responder aos itens, devemos estabelecer a relação $T(t)$. Até agora, temos

$$T(5) = 140 \Rightarrow 40 + (160 - 40)\, e^{-5k} = 140$$

$$\Rightarrow 120\, e^{-5k} = 100 \Rightarrow \boxed{e^{-5k} = \frac{100}{120} = \frac{5}{6}}$$

$$\Rightarrow \ln\left(e^{-5k}\right) = \ln 5/6 \Rightarrow -5k = \ln 5/6$$

$$\Rightarrow \boxed{k = -\frac{\ln 5/6}{5}} \approx 0.036$$

a) $T(t) = 100 \Leftrightarrow 40 + 120\, e^{-kt} = 100$

$$\Leftrightarrow 120\, e^{-5k \cdot \frac{t}{5}} = 60$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{-5k}\right)^{\frac{t}{5}} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{t}{5}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{t}{5}} = \log_2 2^{-1} \quad\quad \frac{t}{5} = \frac{\ln 1/2}{\ln 5/6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{5} = \frac{-1}{\log_2 (5/6)} \approx 3{,}8$$

$$\Leftrightarrow t \approx 19 \text{ minutos}.$$

Portanto, às 7h19 min da manhã a temperatura caiu para 100°.

b) $T(t) < 90°$

$$40 + 120\, e^{-kt} < 90 \iff 120\, e^{-5k \cdot \frac{t}{5}} < 50$$

$$\iff \left(e^{-5k}\right)^{t/5} < \frac{50}{120} = \frac{5}{12}$$

$$\iff \left(\frac{5}{6}\right)^{t/5} < \frac{5}{12}$$

Como $\ln(x)$ é uma função crescente,

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{t/5} < \frac{5}{12} \iff \ln\left(\frac{5}{6}\right)^{t/5} < \ln\left(\frac{5}{12}\right)$$

$$\iff \frac{t}{5} \cdot \ln\left(\frac{5}{6}\right) < \ln\left(\frac{5}{12}\right)$$

$$\iff \frac{t}{5} > \frac{\ln(5/12)}{\ln(5/6)} \quad (\text{pois } \ln(5/6) < 0)$$

$$\iff \frac{t}{5} > 4{,}8 \quad (\text{aproximadamente})$$

$$\iff t > 24$$

Portanto, a temperatura estará abaixo de 90° a partir das 7h24 min, aproximadamente.

c) Queremos saber o que acontece com a temperatura quando $t \to \infty$. Teremos

$$\lim_{t \to \infty} T(t) = \lim_{t \to \infty} 40 + 120 e^{-kt} .$$

Como $-kt \approx -0.036\, t$, à medida que $t \to \infty$, temos que $-kt \to -\infty$. Assim,

$$\lim_{t \to \infty} e^{-kt} = \lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$$

e, como

$$\lim_{t \to \infty} 40 = 40 \quad \text{(função constante)}$$

concluímos que

$$\lim_{t \to \infty} T(t) = \lim_{t \to \infty} 40 + 120 \lim_{t \to \infty} e^{-kt}$$

$$= 40 + 120 \cdot 0 = 40 .$$

Portanto, a temperatura do líquido tende a se estabilizar na temperatura ambiente.

02

a) $(\sqrt{2})^x > \dfrac{1}{\sqrt[3]{16}}$

Como

$$(\sqrt{2})^x = (2^{1/2})^x = 2^{\frac{x}{2}}$$

e

$$\frac{1}{\sqrt[3]{16}} = \frac{1}{(2^4)^{1/3}} = 2^{-\frac{4}{3}},$$

temos que

$$(\sqrt{2})^x > \frac{1}{\sqrt[3]{16}} \iff 2^{\frac{x}{2}} > 2^{-\frac{4}{3}}$$

$$\iff \frac{x}{2} > -\frac{4}{3},$$

uma vez que a função exponencial de base 2 (>1) é crescente.

Logo,

$$(\sqrt{2})^x > \frac{1}{\sqrt[3]{16}} \iff \frac{x}{2}^{\times 2} > -\frac{4}{3}^{\times 2}$$

$\hookrightarrow$ mantém: $2>0$

$$\iff x > -\frac{8}{3}.$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{8}{3} \right\}.$$

b) $\log_x(5x+2) - \log_x(2x+3) = 1$

Devemos ter:

i) $x>0$ e $x \neq 1$ (pois é base de um logaritmo)

ii) $5x+2>0$ e $2x+3>0$, para que o logaritmo esteja definido nesses valores.

Temos:

$$\log_x(5x+2) - \log_x(2x+3) = 1$$

$$\iff \log_x\left(\frac{5x+2}{2x+3}\right) = \log_x x$$

$$\iff \frac{5x+2}{2x+3} = x,$$ pois a função logarítmica é injetiva.

Assim, devemos resolver a equação quadrática

$$5x+2 = x(2x+3),$$

com as condições i) e ii):

$$5x+2 = 2x^2+3x \iff 2x^2+3x-5x-2=0$$

$$\iff 2x^2-2x-2=0$$

$$\iff 2(x^2-x-1)=0$$

$$\iff x^2-x-1=0.$$

Logo,

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4.1.(-1)}}{2.1} \begin{cases} x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Para satisfazer o item i), precisamos ter $x>0$. Logo,

$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62 > 0$ pode ser solução da equação. Porém,

$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.62 < 0$ não pode ser solução.

Resta-nos mostrar que x_1 também satisfaz a condição ii). Com efeito,

$$5 . \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 2 \approx 10.09 > 0$$

e

$$2 . \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 3 \approx 6.24 > 0 .$$

Portanto, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ satisfaz as 2 duas condições, sendo solução da equação dada.

03 $s(t) = t^2 - 8t + 18$, $t \geq 0$.

a) $$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(t+h)^2 - 8(t+h) + 18 - (t^2 - 8t + 18)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{t^2 + 2th + h^2 - 8t - 8h + 18 - t^2 + 8t - 18}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{t^2} + 2th + h^2 \cancel{- 8t} - 8h \cancel{+ 18} \cancel{- t^2} \cancel{+ 8t} \cancel{- 18}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2th + h^2 - 8h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2t + h - 8)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2t - 8 + h), \text{ pois } h \neq 0 \text{ e } \frac{h}{h} = 1.$$

Para cada t fixado, queremos calcular o limite, com h tendendo a zero, do polinômio $p(h) = 2t - 8 + h$. Como todo polinômio é contínuo em $\mathbb{R}$, segue que

$$v(t) = \lim_{h \to 0} p(h) = p(0) = 2t - 8 + 0 = 2t - 8.$$

Com isso,

$$v(t) = 2t - 8 \quad \text{e} \quad v(4) = 2 \cdot 4 - 8 = 0 \text{ m/s}.$$

b) $$a(t) = \lim_{h \to 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(t+h) - 8 - (2t - 8)}{h}$$

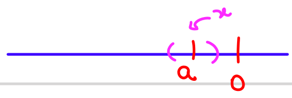
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{2t} + 2h \cancel{- 8} \cancel{- 2t} \cancel{+ 8}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 2 = 2, \text{ pois } h \neq 0, \ \frac{h}{h} = 1$$ e a função constante é contínua em $\mathbb{R}$.

Portanto, $a(t) = 2$ m/s e $a(4) = 2$ m/s (aceleração constante).

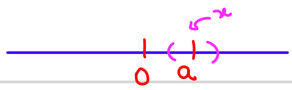
04 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x<0 \\ x^2+\cos x, & x \geq 0 \end{cases}$

a) Se $a<0$, então arbitrariamente próximo de a, os valores de x são negativos:



Logo, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} e^x = e^a = f(a)$, pois e^x é contínua em $\mathbb{R}$.

Por outro lado, se $a>0$, então arbitrariamente próximo de a, os valores de x são positivos:

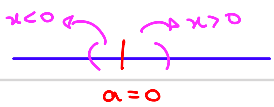


Assim,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x^2+\cos x = a^2+\cos a = f(a),$$

uma vez que as funções x^2 e $\cos x$ são contínuas em $\mathbb{R}$, e a soma de funções contínuas resulta em uma função contínua.

Resta-nos verificar a continuidade em $a=0$. Como nesse ponto sempre teremos valores de x negativos e positivos, devemos tomar os limites laterais:



Usando as continuidades citadas acima, obtemos:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2+\cos x = 0^2+\cos 0 = 1 = f(0)$$

e

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1 = f(0).$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$ e f é contínua em todo $\mathbb{R}$.

b) Como x tende ao infinito positivo,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 + \cos x .$$

Temos que $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$ e $\cos x$ é um número entre -1 e 1.

Logo, a função explode e o limite não existe:

$$-1 \leq \cos x \Rightarrow x^2 - 1 \leq x^2 + \cos x \Rightarrow \lim_{x\to\infty} x^2 - 1 \leq \lim_{x\to\infty} x^2 + \cos x$$

$$\Rightarrow +\infty \leq \lim_{x\to\infty} x^2 + \cos x ,$$ que também diverge.

c) Pela continuidade de f em $\mathbb{R}$, podemos concluir que f é contínua

em $[0, \pi/2]$. Como

$$f(0) = 0^2 + \cos 0 = 1 \quad \text{e} \quad f(\pi/2) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \cos(\pi/2) = \frac{\pi^2}{4} \approx 2.47$$

com $1 < 2 < 2.47$,

o Teorema do Valor Intermediário garante que existe $c \in (0, \pi/2)$

tal que $f(c) = 2$.

05 $D_0 = 160$

$D(1) = 160 \cdot \frac{1}{2}$

a) A cada dia, a quantidade cai à metade. Temos:

$D(1) = \frac{D_0}{2}$;

$D(2) = \frac{D(1)}{2} = \frac{\frac{D_0}{2}}{2} = \frac{D_0}{2^2}$;

$D(3) = \frac{D(2)}{2} = \frac{\frac{D_0}{2^2}}{2} = \frac{D_0}{2^3}$;

$D(4) = \frac{D(3)}{2} = \frac{D_0}{2^4}$

$D(5) = \frac{D(4)}{2} = \frac{D_0}{2^5}$

$D(6) = \frac{D(5)}{2} = \frac{D_0}{2^6}$

Por indução, mostramos que após t dias a quantidade de doces é dada por

$$D(t) = \frac{160}{2^t} = 160 \cdot 2^{-t}.$$

Para $t=7$, temos:

$$D(7) = 160 \cdot 2^{-7} = \frac{160}{128} = 1,25 \text{ doces},$$

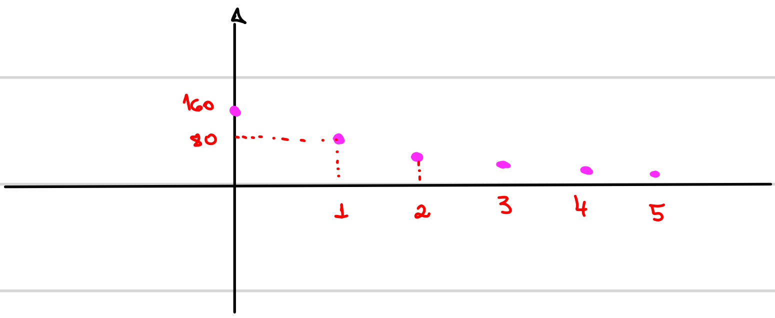
ou seja, 1 doce e 1 quarto de doce.

→ se considerar o tempo contínuo também estará ok!

b) A função é $D : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, com $D(t) = 160 \cdot 2^{-t}$.

↳ o gráfico torna-se contínuo.

O esboço do gráfico é:



c) Embora o problema seja modelado por uma função exponencial, a qual nunca se anula, chegará um momento em que será fisicamente impossível para Karla dividir o que sobrou do doce à metade, sem nenhum recurso sofisticado. Logo, o doce não durará para sempre, para a tristeza da Karla.

06 $h(t) = 10 + 3f\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ $f(\pi/2)$ máximo

a) As funções tangente, cotangente, cossecante e secante possuem descontinuidades do tipo que a função explode para valores limitados de x. Um pêndulo não possui essa propriedade. Logo, restam as funções limitadas $sen(x)$ e $cos(x)$. Como $f(x)$ possui um máximo em $x = \frac{\pi}{2}$, tal função só pode ser o seno ($sen(\pi/2) = 1$ e $cos(\pi/2) = 0 < cos(0) = 1$). Logo,

$f(x) = sen\, x$, de onde segue que

$$h(t) = 10 + 3\, sen\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right).$$

b) Queremos saber qual é o menor valor de $T > 0$ tal que

$$h(t) = h(t+T).$$

Ou seja,

$$10 + 3\, sen(\pi t + \pi/2) = 10 + 3\, sen\left(\pi(t+T) + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 10 - 10 + 3\, sen(\pi t + \pi/2) = 10 - 10 + 3\, sen(\pi(t+T) + \pi/2)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{3} sen(\pi t + \pi/2) = \frac{3}{3} sen\left(\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + \pi T\right)$$

$$\Rightarrow sen(\pi t + \pi/2) = sen((\pi t + \pi/2) + \pi T)$$

Como o período da função seno é 2π, temos que o menor período da função acima é dado quando

$$\cancel{\pi t} + \cancel{\frac{\pi}{2}} + \pi T - \left(\cancel{\pi t} + \cancel{\pi/2}\right) = 2\pi$$

$$\Rightarrow \pi T = 2\pi \Rightarrow T = 2.$$

c) Como $h(t) = 10 + 3\,\text{sen}(\pi t + \pi/2)$, temos que

$h(0) = 10 + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 10 + 3 = 13$, sendo $\text{sen}(\pi/2)$ o valor máximo da função seno.

Para $t = T = 2$, tem-se

$$h(2) = 10 + 3\,\text{sen}(2\pi + \pi/2) = 10 + 3\,\text{sen}(\pi/2) = 13.$$

A função possui valor mínimo quando $\text{sen}(x) = -1$; ou seja,

$$x = \pi t + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \pi t = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\Rightarrow t = 1 \in [0, 2].$$

d) Sim, a função é contínua pois

$g(t) = 3$ é contínua em $t \geq 0$ (função constante)

$f(t) = \text{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ é contínua em $t \geq 0$, pois é a composta entre as funções contínuas seno e a polinomial $\pi t + \frac{\pi}{2}$.

Como $h(t) = g(t) + 3f(t)$ (soma e multiplicação de funções contínuas), segue que h é contínua para $h \geq 0$.