Introdução ao Cálculo


# Aula 03: Função Afim

Karla Lima

07/12/2022

# Sumário

# Bibliografia

# Bibliografia da Aula 02

- Livro texto: Fundamentos da Matemática Elementar: 1 (Click para baixar)

# Problemas de Proporcionalidade

# Proporcionalidade

**Proporcionalidade**

**Direta:** Duas grandezas se correspondem de tal modo que, multiplicando-se uma quantidade de uma delas por um número, a quantidade correspondente da outra fica multiplicada pelo mesmo número.

**Indireta:** Duas grandezas se correspondem de tal modo que, multiplicando-se uma quantidade de uma delas por um número, a quantidade correspondente da outra fica dividida pelo mesmo número.

# Proporcionalidade

**Proporcionalidade**

**No geral, duas grandezas x e y são proporcionais quando existe um número a tal que**
**$y = ax$**

# Revisitando os Problemas da Aula 02

**Problema 01:**

i) As grandezas $P$ e $G$, sendo $P$ o número de passagens ao mês e de $G$ o gasto mensal com transporte, do Problema 1 são proporcionais? Em caso positivo, de qual tipo?

| $P$ | $G$ (R$) |
|---|---|
| $1$ | |
| $2 * 1$ | |
| $10 * 1$ | |
| $10/2$ | |
| | $45,5$ |
| | $45,5 * 2$ |
| | $130,00/4$ |

# Revisitando os Problemas da Aula 02

**Problema 02:**

ii) As grandezas $A$ e $T$, sendo $A$ o número necessário de arestas par formar uma quantidade de triângulos $T$, do Problema 2 são proporcionais? Em caso positivo, de qual tipo?

| $T$ | $A$ |
|---|---|
| $1$ | |
| $2 * 1$ | |
| $10 * 1$ | |
| $10/2$ | |
| | $13$ |
| | $13 * 2$ |
| | $21/3$ |

# Revisitando os Problemas da Aula 02

iii) O que podemos falar sobre a variação das grandezas $A$ e $T$, do Problema 2? Essas novas grandezas

$$\Delta T = T_f - T_i \quad \text{e} \quad \Delta A = A_f - A_i$$

são proporcionais? Em caso positivo, de qual tipo?

# Problema de Velocidade 1

**Problema 03:**

i) Um automóvel está viajando por uma estrada com uma velocidade constante de $v$ $km/h$. Relacione a quantidade de quilômetros percorrido $s$ pelo carro em 1 hora e meia, com a velocidade do mesmo.

| $v\ (km/h)$ | $s\ (km)$ |
|---|---|
| 50 | |
| 75 | |
| 100 | |
| 120 | |
| | $75 * 2$ |
| | 210 |
| | $210/3$ |

# Problema de Velocidade 1

ii) As grandezas $v$ e $s$ são proporcionais? Em caso positivo, de qual tipo?

# Problema de Velocidade 2

**Problema 04:**

i) Um automóvel está viajando por uma estrada com uma velocidade constante de 80 $km/h$. Relacione a quantidade de quilômetros percorrido $s$ pelo carro em um tempo de $t$ horas.

| $t\ (h)$ | $s\ (km)$ |
|---|---|
| $1$ | |
| $1,5$ | |
| $3$ | |
| $4,25$ | |
| | $240 * 2$ |
| | $210$ |
| | $210/3$ |

# Problema de Velocidade 1

ii) As grandezas *v* e *s* são proporcionais? Em caso positivo, de qual tipo?

# Problema de Estacionamento

i) Vitória fez uma pesquisa de preço nos estacionamentos próximo do seu trabalho e verificou que no estacionamento $A$ é cobrado R\$ $5,00$ na primeira hora e R\$ $3,00$ para as horas adicionais. Relacione a quantidade de horas $t$ de estacionamento com o valor a ser pago $E$ por essas horas.

| $t$ ($h$) | $E$ (R\$) |
|---|---|
| 1 | |
| 3 | |
| 10 | |
| 12 | |
| | $32 * 2$ |
| | $17 * 3$ |

# Problema de Estacionamento

ii) As grandezas $t$ e $E$ são proporcionais? Em caso positivo, de qual tipo?

iii) O que podemos falar sobre a variação das grandezas $t$ e $E$? Essas novas grandezas

$$\Delta t = t_f - t_i \quad \text{e} \quad \Delta E = E_f - E_i$$

são proporcionais? Em caso positivo, de qual tipo?

# Funções

# Definição

**Definição 1**

*Sejam $A$ e $B$ conjuntos de números reais ($A, B \subset \mathbb{R}$). Uma relação $f$ de $A$ em $B$ recebe o nome de* ***função definida em*** *$A$* ***com imagens em*** *$B$ se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.*

# Notação das Funções

- Toda função é uma relação binária de $A$ em $B$; portanto, toda função é um conjunto de pares ordenados.
- Em geral, existe uma sentença aberta $y = f(x)$ que expressa a lei mediante a qual, dado $x \in A$, determina-se $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.
- Isso significa que, dados os conjuntos $A$ e $B$, a função $f$ tem a lei de correspondência $y = f(x)$.

# Notação das Funções

Nas notações da definição 1:

1. O conjunto $A$ é chamado de **domínio** da função $f$. O conjunto $B$ é chamado **contra-domínio** de $f$.
2. Se $x \in A$, o elemento $y = f(a) \in B$ é chamado **imagem de** $x$ pela função $f$.
3. Nenhum elemento de $A$ pode ficar sem imagem e cada $x \in A$ só pode ter uma única imagem.

# Exemplo

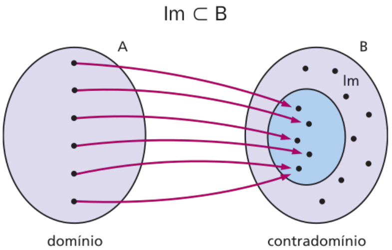
**Exemplo 1**

- *Retorne aos problemas 1 à 4 e determine se as relações estabelecidas entre as grandezas determinam uma função ou não.*
- *Nos casos positivos, determine o domínio e o contra-domínio de cada função.*

# Conjunto Imagem

Para uma função $f : A \to B$, o conjunto de todos os elementos do contra-domínio $B$ que corresponde a alguma elemento do domínio $A$ é um subconjunto de $B$ chamado de **imagem** da função $f$, e é denotado por $Imf$. Escrevemos

$$Im\, f = \{y \in B |\, y = f(x),\ \text{para algum}\ x \in A\}$$



# Exemplo

**Exemplo 2**

*Retorne ao Exemplo 1 e verifique se os números reais a seguir fazem parte do conjunto imagem das funções estabelecidas.*

a) $y = -3$

b $y = 45,5$

c $y = 13$

d $y = 210$

e $y = 70$

# Função Afim

# Definição

**Definição 2**

*Uma função de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$ *recebe o nome de função afim quando a cada* $x \in \mathbb{R}$ *associa ao elemento* $ax + b \in \mathbb{R}$, *em que* $a \neq 0$ *e* $b$ *são números reais dados.*

# Definição

- Isso quer dizer que em toda função afim a sua variação na imagem $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ é proporcional à variação no domínio $\Delta x = x_2 - x_1$ :

$$\begin{aligned}
\Delta y = f(x_2) - f(x_1) &= (ax_2 + b) - (ax_1 + b) \\
&= ax_2 + b - ax_1 - b \\
&= (ax_2 - ax_1) + (b - b) \\
&= a(x_2 - x_1) = a\Delta x
\end{aligned}$$

- Assim, sempre que $x_1 \neq x_2$ (ou seja, $x_2 - x_1 \neq 0$), temos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a \qquad \text{(variação média constante)}$$

# Exemplo

**Exemplo 3**

*São exemplos de função afim:*

a) $f(x) = 3x + 2$

- $a = 3$ e $b = 2$;
- $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 3.$

b) $f(x) = -\sqrt{2}x + 1$

- $a = -\sqrt{2}$ e $b = 1$;
- $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\sqrt{2}.$

# Exemplo

c) $f(x) = \pi x$

- $a = \pi$ e $b = 0$;
- $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \pi$.

# Casos Particulares

- **OBS:** Quando $a = 0$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, tem-se $f(x) = b$ e a variação média é nula:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b - b}{x_2 - x_1} = 0.$$

  A esta função dá-se o nome de **função constante**.

- No caso em que $b = 0$, a função $f(x) = ax$ é denominada **função linear**.

# O Gráfico de uma Função

**Definição 3**

*Dada uma função $f : A \to B$, o conjunto de todos os pares ordenados da forma $(x, f(x)) \in A \times B$ é chamado* ***gráfico*** *da função $f$:*

$$gr(f) = \{(x, f(x)) | \, x \in A \text{ e } f(x) \in B\}.$$

Como trabalharemos com $A \subset \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{R}$, então podemos representar o gráfico da função $f$, geometricamente, como um subconjunto do plano cartesiano: $gr(f) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

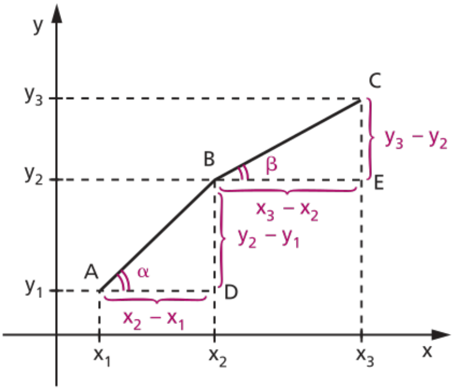
# O Gráfico de uma Função Afim

**Teorema 1**

*O gráfico cartesiano da função* $f(x) = ax + b$ *é uma reta.*

# Demonstração: Teorema 1

- Mostra-se que quaisquer 3 pontos do gráfico estão alinhados.
- Para tanto, usa-se semelhança de triângulos, demonstrada através da proporcionalidade entre as variações $\Delta y$ e $\Delta x$.



# Crescimento de Funções

**Definição 4**

*Uma função* $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é chamada* ***crescente*** *se o valor de* $f(x)$ *cresce quando* $x$ *cresce; ou seja, se para* $x, x' \in A$*, tivermos*

$$x < x' \Rightarrow f(x) < f(x').$$

*Uma função* $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é chamada* ***decrescente*** *se o valor de* $f(x)$ *decresce quando* $x$ *cresce; ou seja, se para* $x, x' \in A$*, tivermos*

$$x < x' \Rightarrow f(x) > f(x').$$

# Atividades com o Geogebra

- Função Afim Crescente.
- Função Afim Decrescente.
- Função Afim Linear.
- Função Constante.