

# Álgebra Elementar

---

## Lista de Exercícios: P2

1 - Técnicas de Demonstração.

2 - Conjuntos.

---

Profa. Karla Lima  
FACET/UFACET

# 1 Técnicas de Demonstração

1. Escreva a recíproca e a contraposição para cada uma das sentenças abaixo:
  - a) O crescimento sadio das plantas é consequência de quantidade suficiente de água.
  - b) O crescimento da oferta de computadores é uma condição necessária para o desenvolvimento científico.
  - c) Haverá novos erros apenas se o programa for alterado.
2. Prove que se o produto de dois inteiros não é divisível por um inteiro  $n$ , então nenhum dos inteiros é divisível por  $n$ .
3. Prove que para qualquer inteiro positivo  $n$ :
  - (a)  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .
  - (b)  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .
  - (c)  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$ .
  - (d)  $n^2(n^2 - 1)$  é divisível por 12.
  - (e)  $2^{2n} - 1$  é divisível por 3.
4. (a) Tente usar indução para provar que
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} < 2,$$
para  $n \geq 1$ .  
O que deu errado?
  - (b) Mostre que, para  $n \geq 1$ ,
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$
  - (c) Agora você consegue concluir o item a)?
5. Prove os itens abaixo:
  - (a) A soma de três números inteiros e consecutivos é divisível por 3.
  - (b) Se  $n$  é um número inteiro, então  $n^2 \geq n$ .
  - (c) O produto de dois números inteiros pares é par.
  - (d) Se um inteiro é divisível por 6, então duas vezes esse inteiro é divisível por 4.
  - (e) Se  $3n + 2$  é ímpar, no qual  $n$  é um número inteiro, então  $n$  é ímpar.
  - (f) Se um número somado a ele mesmo é ele mesmo, então esse número é 0.
  - (g) Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Mostre que se  $n \leq 5$ , então  $n^2 \leq 5n + 10$ .
  - (h) Se  $P$  é o conjunto dos números primos, então  $P$  é infinito.
  - (i) Se  $n = ab$ , com  $a$  e  $b$  inteiros positivos, então  $a \leq \sqrt{n}$  ou  $b \leq \sqrt{n}$ .
  - (j) O número  $\sqrt{2}$  é irracional.
6. Mostre que todo inteiro par maior do que 2 pode ser escrito como a soma de 2 números primos.
7. Demonstre por absurdo que não existe raiz racional para a equação  $x^3 + x + 1 = 0$ .

## 2 Conjuntos

Para exercícios sobre conjuntos, acesse o arquivo Conjuntos\_Iezzi.pdf.

## Referências

1. Indução Matemática: veja <https://www.fc.up.pt/mp/jcsantos/PDF/inducacao.pdf>
2. Quantificadores: veja <https://www.ime.unicamp.br/~valle/PastCourses/Licao4.pdf>
3. Conjuntos: veja Fundamentos\_1\_Iezzi.pdf