GEOMETRIA PLANA

Aula 05

Desigualdades nos Triângulos

Karla Lima

Sumário

Desigualdades

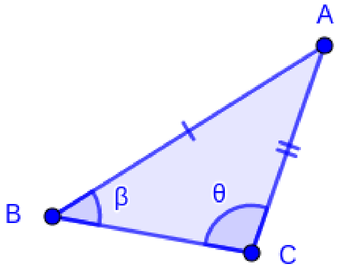
Teorema

Teorema 1

Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a estes lados também não são congruentes, e ao maior lado opõe-se o maior ângulo.

.

- **Hipótese:** $AB \neq AC$
- **Tese:**
  - $\hat{C} \neq \hat{B}$;
  - Se $AB > AC$, então $\hat{C} > \hat{B}$.



Demonstração: Teorema 1

Parte 1: $\hat{C} \neq \hat{B}$.

Suponha, por contradição, que $\hat{C} = \hat{B}$. Vimos no Exercício 3 da aula 03: se dois ângulos de um triângulo são congruentes, então o triângulo é isósceles. Mas isso contraria a hipótese de que $AB \neq AC$ e, portanto, devemos ter $\hat{C} \neq \hat{B}$.

Demonstração: Teorema 1

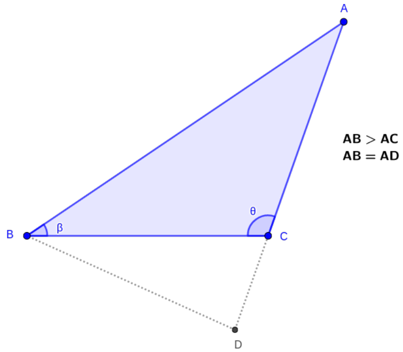
Parte 2: Supondo que $AB > AC$, vamos mostrar que $\hat{C} > \hat{B}$.

- Seja D um ponto da semirreta $\overrightarrow{AC}$ tal que

$$AD = AB.$$

- Dessa forma, o triângulo ABD é isósceles. Portanto

$$A\hat{B}D = \hat{D}$$



Demonstração: Teorema 1

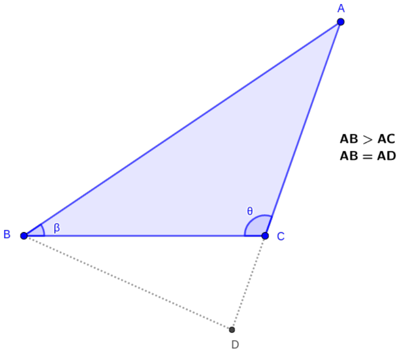
Como $A\hat{C}B$ é um ângulo externo ao triângulo BCD, podemos concluir:

- $\hat{C}$ é maior que o ângulo não adjacente D (teorema do ângulo externo);
- Como $\hat{D} = \hat{B} + C\hat{B}D$, tem-se

$$\hat{B} < \hat{D} < \hat{C},$$

de onde segue que

$$\hat{B} < \hat{C}.$$



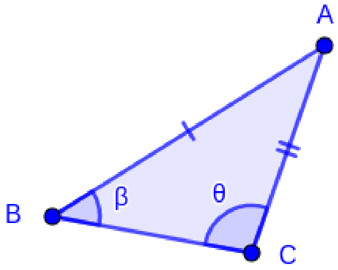
Teorema

Teorema 2

Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a estes ângulos também não são congruentes e ao maior ângulo opõe-se o maior lado.

.

- **Hipótese:** $\hat{B} \neq \hat{C}$
- **Tese:**
  - $AB \neq AC$;
  - Se $\hat{B} < \hat{C}$, então $AC < AB$.



Demonstração: Teorema 2

Parte 1: $AB \neq AC$.

Suponha, por contradição, que $AB = AC$. Então o triângulo é isósceles e, pelo Teorema 1 da aula 03, os ângulos oposto a esses lados seriam congruentes, contrariando a hipótese.

Demonstração: Teorema 2

Parte 2: Se $\hat{B} < \hat{C}$, então $AC < AB$.

De fato, considere um triângulo ABC no qual $\hat{C} > \hat{B}$. Há três possibilidades para as medidas de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$:

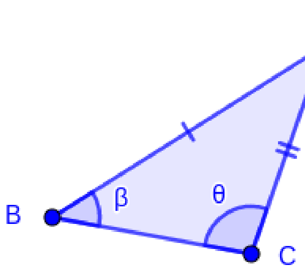
i) ou $AB < AC$;
ii) ou $AB = AC$;
iii) ou $AB > AC$;

Demonstração: Teorema 2

Se $AB < AC$ é verdadeira, pelo Teorema 1, então ao maior lado opõe-se o maior ângulo. Logo, teríamos

$$\hat{C} < \hat{B},$$

contrariando a hipótese.



Demonstração: Teorema 2

Se ii) é verdadeira, teríamos $AB = AC$, o que já vimos ser uma contradição na parte 1.

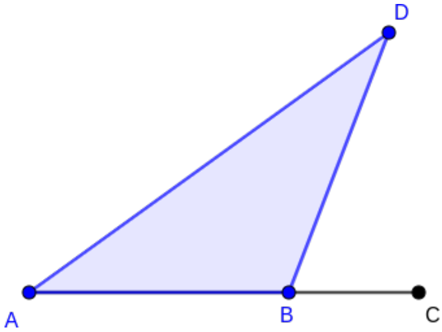
Portanto só nos resta ter iii) verdadeira, ou seja, se $\hat{B} < \hat{C}$, então

$$AC < AB.$$

Exercício

Exercício 1

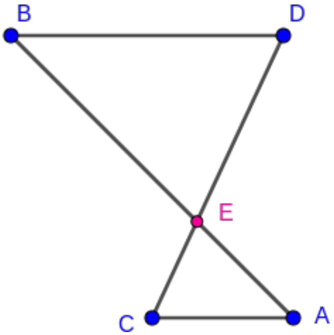
Na figura abaixo, $A\hat{B}D > D\hat{B}C$*. Demonstrar que* $AD > BD$ *e que* $AD > AB$*.*



Exercício

Exercício 2

Na figura abaixo, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ *se intersectam em* E, $\hat{C} > \hat{A}$ e $\hat{D} > \hat{B}$. *Demonstre que* $AB > CD$.



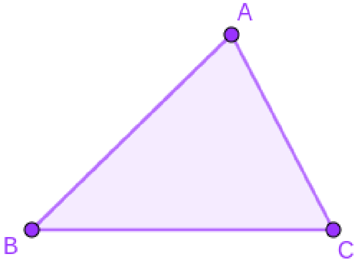
A Desigualdade Triangular

Teorema 3

Em todo triângulo, a soma dos comprimentos de dois lados quaisquer é maior que o comprimento do terceiro lado.

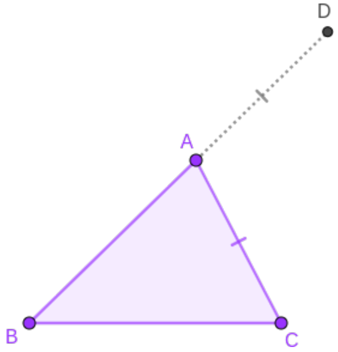
.

- **Hipótese:** ABC é um triângulo.
- **Tese:**
  - i) $BC < BA + AC$
  - ii) $BA < AC + CB$
  - iii) $AC < AB + BC$



Demonstração: Teorema 3

Vamos demonstrar o item i): seja D um ponto da semirreta $\overrightarrow{BA}$, com A entre B e D, tal que $AD = AC$.



Demonstração: Teorema 3

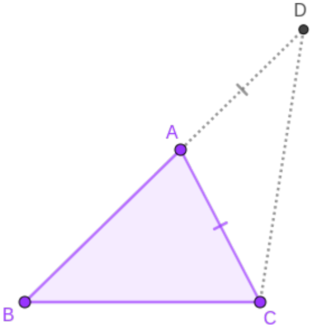
Assim, construímos o triângulo *ACD* isósceles.

- $A\hat{C}D = \hat{D}$.
- Como $B\hat{C}D = B\hat{C}A + A\hat{C}D$, tem-se

$$B\hat{C}D > A\hat{C}D = \hat{D}.$$

- Pelo Teorema 2, aplicado a $\triangle BCD$

$$BD > BC.$$

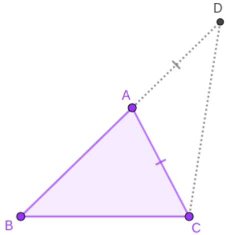


Demonstração: Teorema 3

Ou seja

$$BA + AD = BD > BC,$$

o que prova a desigualdade i).



Como exercício, prove as demais desigualdades.

Exercícios

Exercício

Exercício 3

Mostre que o segmento de menor comprimento que une um ponto a uma reta que não o contém é o segmento perpendicular à reta traçada por este ponto.

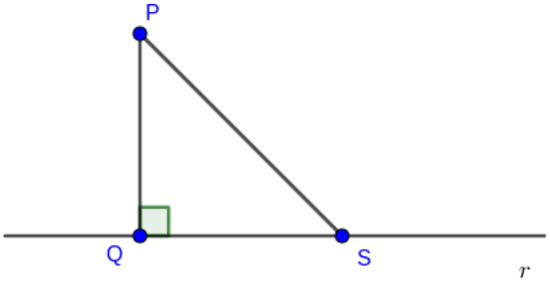


Figura 1: $\overline{PQ} < \overline{PS}$

Exercício

Exercício 4

Demonstre os seguintes corolários do Teorema do Ângulo Externo (TAE):

a) Se um triângulo tem um ângulo reto, então os demais ângulos são agudos.
b) Por um ponto não pertencente a uma reta, existe uma única reta perpendicular a reta dada.

Referencias I

Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 9. (Click para baixar)