UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS

FACET

Cálculo IV e Vetorial

Lista 03 — 27 de Março de 2016

(1) Considere o campo de forças $\overrightarrow{F}(x,y) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$.

a) Calcule o trabalho realizado pelo campo $\overrightarrow{F}$ numa partícula que se move ao longo da curva C, que consiste do arco da parábola $y = x^2 - 1$ com $-1 \leq x \leq 2$, seguido do segmento da reta que une os pontos $(2,3)$ e $(-1,0)$.

b) Mostre que $\displaystyle\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0$ para toda curva fechada simples C, suave por partes, que circunda a origem.

(2) Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\overrightarrow{F}$ numa partícula que se move ao longo de uma curva lisa C, do ponto A ao ponto B dados:

a) $F(x,y) = 3y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j}$ do ponto $A = (1,2)$ ao ponto $B = (4,0)$.

b) $F(x,y) = ye^{xy}\mathbf{i} + xe^{xy}\mathbf{j}$ do ponto $A = (-1,1)$ ao ponto $B = (2,0)$.

c) $F(x,y,z) = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ do ponto $A = (0,1,1)$ ao ponto $B = (1,0,1)$.

d) $F(x,y,z) = 2x\mathrm{sen}z\mathbf{i} + (z^3 - e^y)\mathbf{j} + (x^2\cos z + 3yz^2)\mathbf{k}$ do ponto $A = (1,1,1)$ ao ponto $B = (1,2,3)$.

(3) Considere as funções $P(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$ e $Q(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, definidas para $(x,y) \neq (0,0)$. Considere ainda D a região descrita por $0 < x^2 + y^2 \leq R$ e ∂D a curva fronteira desta região.

a) Mostre que $\displaystyle\oint_{\partial D} Pdx + Qdy = 2\pi$;

b) Mostre que $\displaystyle\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0$. Por que isto não contradiz o Teorema de Green?

c) Mostre que $\oint_C Pdx + Qdy = 2\pi$ para toda curva fechada simples, suave por partes, orientada no sentindo anti-horário que circunda a origem.

(4) Calcule as integrais de linha:

a) $\oint_C ydx - xdy$, onde C é o triângulo definido pelos pontos $A = (0,0)$, $B = (2,0)$ e $C = (4,0)$, no sentido horário.

b) $\oint_C ydx - xdy$, onde C é a cardióide de equação polar

$$r(\theta) = 2(1 + cos\theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

e equação paramétrica

$$\overrightarrow{r}(\theta) = (2\cos t + \cos 2t + 1, 2\text{sen}t + \text{sen}2t).$$

Bons estudos!

Bibliografia:

Stewart, J. - Cálculo Vol II

Flemming, D. - Cálculo B

Howard, A. - Cálculo Vol II

Guidorizzi, H. - Um curso de cálculo Vol 3.