



Construções Geométricas

Notas sobre Geometria Plana

Profa. Karla Katerine Barboza de Lima
FACET/UFGD

Sumário

1	Ângulos	4
2	Triângulos	7
2.1	Classificação	7
2.2	Pontos Notáveis no Triângulo	10
2.3	Congruência de Triângulos	11
2.4	Postulado: Caso LAL	12
2.5	Caso ALA	12
2.6	Caso LLL	12
2.7	Caso LAA	13
2.8	Caso Especial: Triângulos Retângulos	13
2.9	Desigualdades em triângulos	14
3	Paralelogramos	15
3.1	Propriedades do Retângulos	17
3.2	Propriedades do Losango	17
3.3	Trapézio: um quadrilátero que NÃO é um paralelogramo	17
4	Circunferências	18
4.1	Tangentes	19
4.2	O arco capaz	21

Introdução

As construções com régua e compasso já apareceram desde o séc. V a.C., na época dos pitagóricos na antiga Grécia. Tais construções tiveram grande importância no desenvolvimento da matemática grega. Nessa época, a palavra *número* era usada só para os inteiros e uma *fração* era considerada apenas uma razão entre números, causando dificuldade nas medidas das grandezas.

Por volta do ano de 300 a.C., com Euclides, as grandezas passaram a ser associadas a segmentos de retas e, então, eram 'construídas', no lugar de serem calculadas ou medidas [1]. Nesse período nasce uma nova álgebra, completamente geométrica, onde a palavra *resolver* era sinônimo de *construir*.

Por exemplo, resolver a equação $ax = b$ não tinha significado porque o lado esquerdo era associado à área de um retângulo e o lado direito a um segmento de reta, não podendo as grandezas serem comparadas. Em contrapartida, resolver a equação $ax = bc$ significava encontrar a altura x de um retângulo de base a que tivesse a mesma área de um retângulo de dimensões a e b .

Exemplo 1 *Vamos resolver a equação $3x = 16$, como na Grécia antiga.*

Solução: *Ver em [2].*

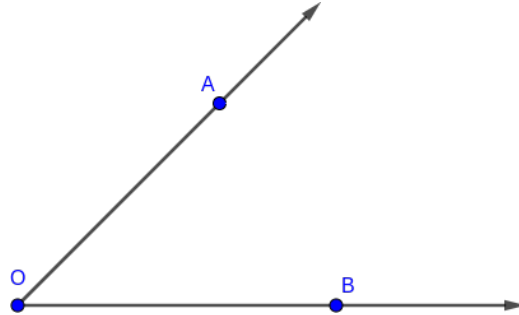
Usando a régua e o compasso (físicos ou através do Geogebra), nos será permitido, de início, executar uma série de **operações elementares** como:

- Marcar dois pontos sobre uma reta ou sobre uma circunferência.
- Dados dois pontos A e B , traçar, com auxílio da régua: a reta AB , o segmento de reta AB e as semirretas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BA} .
- Dados três pontos A , B e C não colineares traçar, com o auxílio da régua:
 - a) o Ângulo $\hat{A}BC$ de vértice B e lados \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BC} ;
 - b) o triângulo ABC , de vértices A , B e C .
- Dados dois pontos O e A traçar, com o auxílio do compasso, a circunferência $\mathcal{C}(O, \overline{OA})$.
- Transportar, através do traçado de uma circunferência $\mathcal{C}(O, \overline{AB})$, a medida AB a partir de um ponto O dado.
- Determinar interseções de duas retas, de uma reta e uma circunferência, e de duas circunferências.

Nas próximas páginas, a teoria de Geometria Plana que embasará as nossas construções será descrita. As demonstrações dos teoremas serão omitidas, pois as mesmas serão abordadas na disciplina de mesmo nome.

1 Ângulos

Definição 1 Chamamos de **ângulo** a figura formada por duas semirretas que têm a mesma origem.



As semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} são chamados **lados** do ângulo e a origem comum O é o seu vértice.

Definição 2 Seja P um ponto interior do ângulo $A\hat{O}B$. A **bissetriz** do ângulo $A\hat{O}B$, é a semirreta \overrightarrow{OP} , tal que $A\hat{O}P = P\hat{O}B$.

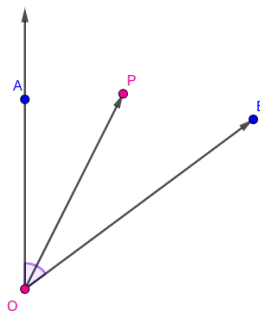
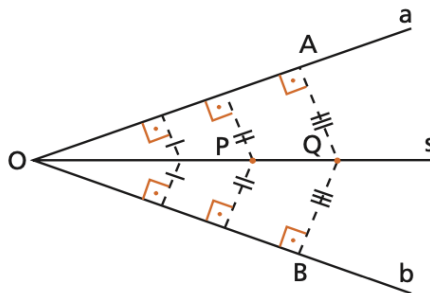


Figura 1: Os ângulos $A\hat{O}P$ e $P\hat{O}B$ possuem a mesma medida.

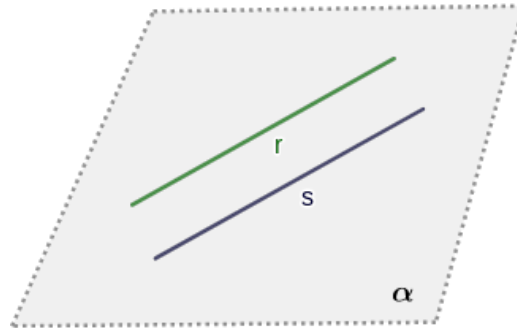
Sobre a bissetriz, temos o seguinte teorema:

Teorema 1 Todo ponto da bissetriz de um ângulo equidista dos lados do mesmo.

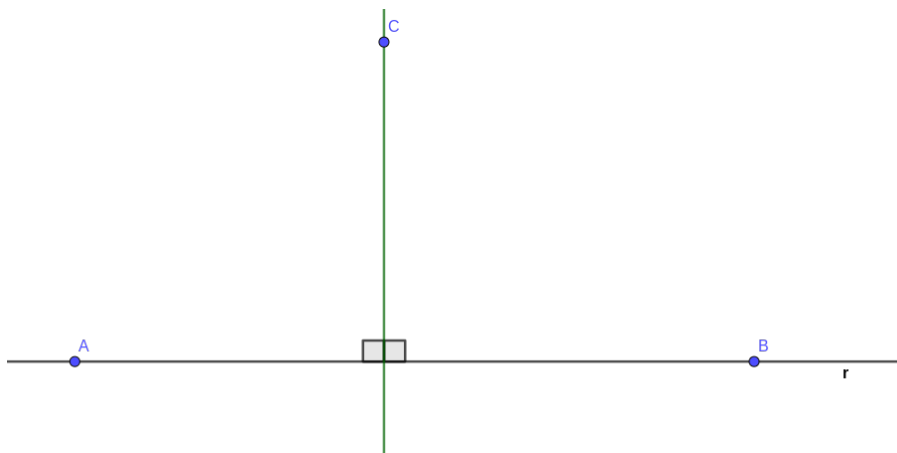


Definição 3 Duas retas são ditas **paralelas**, se

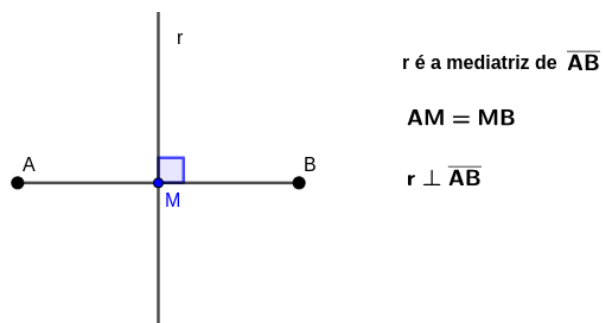
- i) estão em um mesmo plano;
- ii) não se interceptam.



Euclides define 'ângulo reto' como sendo igual ao ângulo formado por duas retas que se cortam de maneira a formar quatro ângulos iguais. Tais retas são ditas **perpendiculares**.

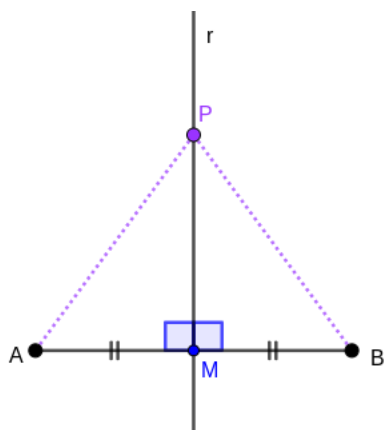


Definição 4 Chama-se **mediatriz** de um segmento a reta perpendicular ao mesmo em seu ponto médio.



Sobre a mediatriz, temos o seguinte teorema:

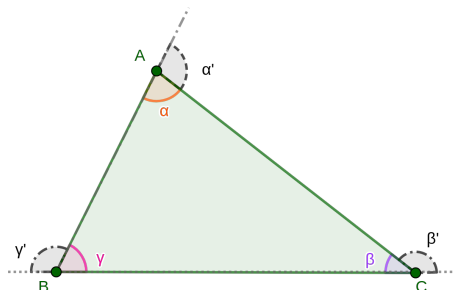
Teorema 2 *Todo ponto da mediatriz de um segmento é equidistante dos extremos desse segmento.*



2 Triângulos

Definição 5 Sejam A , B e C três pontos não colineares.

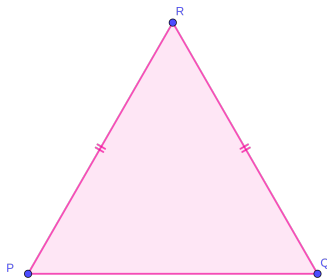
Denominamos de **triângulo** ABC a união dos segmentos \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} e o denotaremos por $\triangle ABC$.



- Os pontos A , B e C são os **vértices** e os segmentos \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} são os **lados** do triângulo.
- Os ângulos $B\hat{A}C = \alpha$, $A\hat{B}C = \gamma$ e $A\hat{C}B = \beta$ são os **ângulos internos** do triângulo. Seus suplementos α' , γ' e β' são os **ângulos externos** do triângulo.

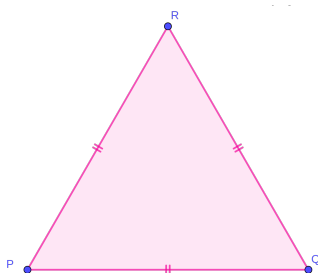
2.1 Classificação

Definição 6 Um triângulo que tem dois lados congruentes é denominado **isósceles**.



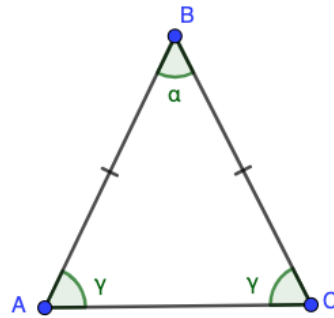
O outro lado é chamado **base** e o ângulo oposto à base é o **ângulo do vértice**.

Definição 7 Um triângulo cujos lados são congruentes chama-se **equilátero**.



Obs: Todo triângulo equilátero possui dois lados congruentes, logo ele também será isósceles.

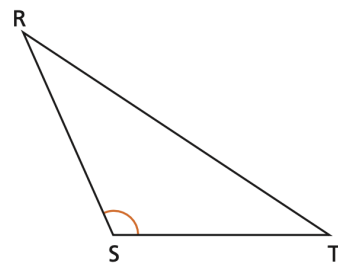
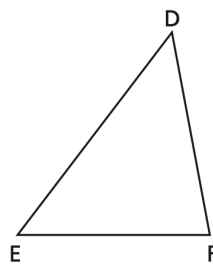
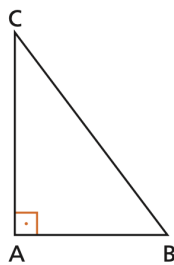
Teorema 3 *Em todo triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.*



Definição 8 *Um triângulo no qual dois lados quaisquer não são congruentes, chama-se **escaleno**.*

Quanto aos ângulos, os triângulos se classificam em:

- retângulos se, e somente se, têm um ângulo reto;
- acutângulos se, e somente se, têm os três ângulos agudos;
- obtusângulos se, e somente se, têm um ângulo obtuso.



$\triangle ABC$ é retângulo em A. $\triangle DEF$ é acutângulo. $\triangle RST$ é obtusângulo em S.

Definição 9 *Um ponto C chama-se **ponto médio** do segmento \overline{AB} , se:*

1. C pertence ao segmento \overline{AB} ($C \in \overline{AB}$);
2. O comprimento do segmento \overline{AC} é igual ao do segmento \overline{CB} ($AC = CB$).



Ponto Médio (segmento)

Definição 10 Chama-se **mediana** de um triângulo ao segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto a ele.

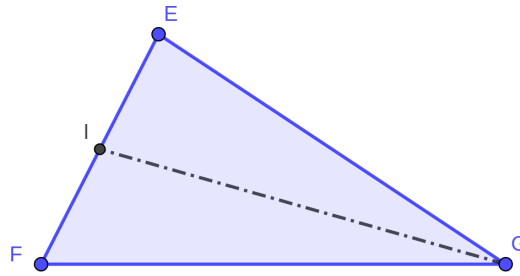
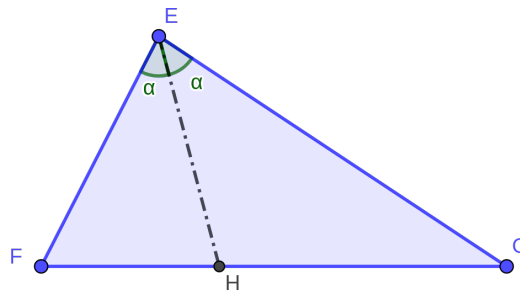


Figura 2: Na figura acima, \overline{GI} é a mediana relativa ao lado EF

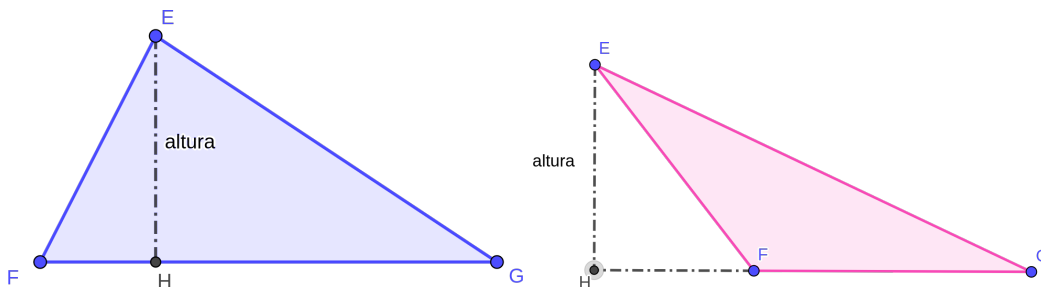
Definição 11 Sejam EFG um triângulo e H um ponto da reta que contém o lado FG .

- a) se a semirreta \overrightarrow{EH} é bissetriz do ângulo \hat{E} , o segmento \overline{EH} chama-se a **bissetriz interna** do triângulo, relativa ao lado \overline{FG} .



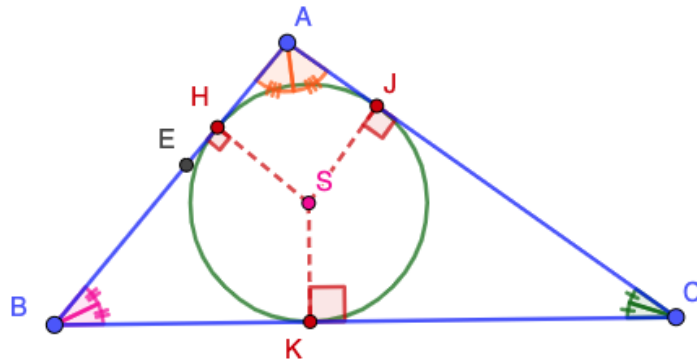
Bissetriz Interna

- b) se \overrightarrow{EH} for perpendicular à reta que contém o lado \overline{FG} , o segmento \overline{EH} chama-se **altura** do triângulo, relativa ao lado \overline{FG} .

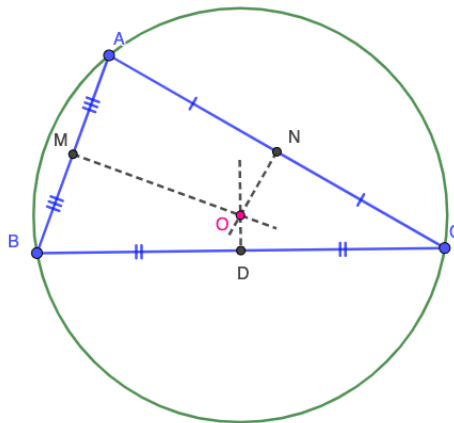


2.2 Pontos Notáveis no Triângulo

- O ponto de interseção das três bissetrizes internas de um triângulo é o **incentro** do triângulo. O incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo.



- O ponto de interseção (ou ponto de encontro ou ponto de concurso) das mediatrizes dos lados de um triângulo é o **circuncentro** do triângulo. O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.



- O ponto de interseção das alturas relativas aos lados de um triângulo é o **ortocentro** do triângulo.

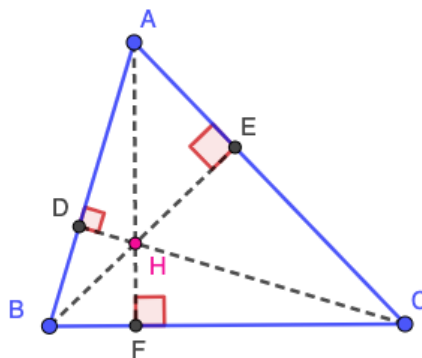


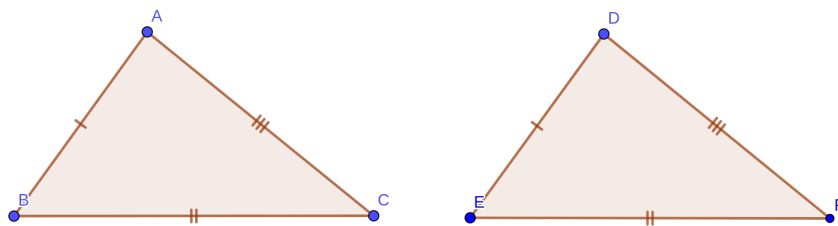
Figura 3: $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$

2.3 Congruência de Triângulos

Definição 12 Um triângulo é congruente (símbolo \equiv) a outro se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que:

- seus lados são ordenadamente congruentes aos lados do outro;
- seus ângulos são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro.

Em linguagem popular, dizemos que duas figuras planas são congruentes se elas coincidem por superposição.



- $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$;
- $\hat{A} \equiv \hat{D}$, $\hat{B} \equiv \hat{E}$ e $\hat{C} \equiv \hat{F}$.

Exemplo 2 Suponhamos que os triângulos abaixo coincidem por superposição. Quais os pares de vértices que devem ser sobrepostos?

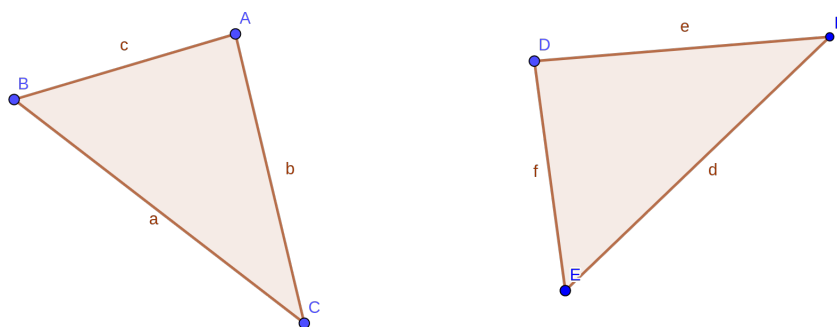


Figura 4: $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

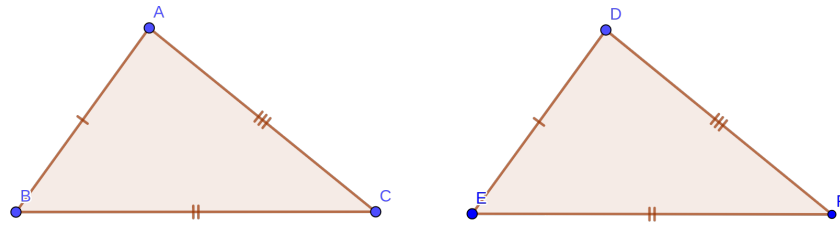
- Os **vértices** que coincidem na superposição são denominados **correspondentes**.
- Os **lados** que unem vértices correspondentes são também chamados **correspondentes**.
- Analogamente, os **ângulos** cujos vértices estão em correspondência, são **correspondentes**.

Observe que em triângulos correspondentes, a ângulos congruentes opõem-se lados congruentes e vice-versa.

Notação: Para indicar que dois triângulos são congruentes, escrevemos:

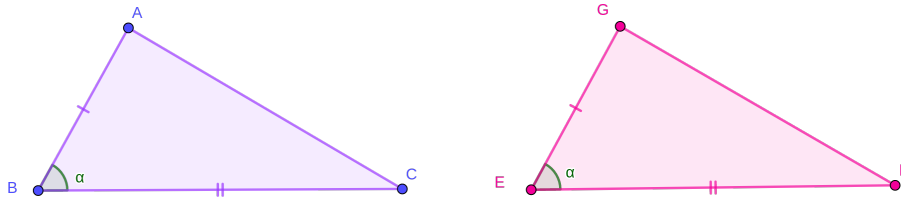
$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF.$$

A ordem em que as letras aparecem, indicam as correspondências entre os vértices.



2.4 Postulado: Caso LAL

Se dois triângulos têm dois lados congruentes e os ângulos compreendidos entre eles são respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.



2.5 Caso ALA

Teorema 4 *Se dois triângulos têm um lado congruente, compreendido entre dois ângulos respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.*

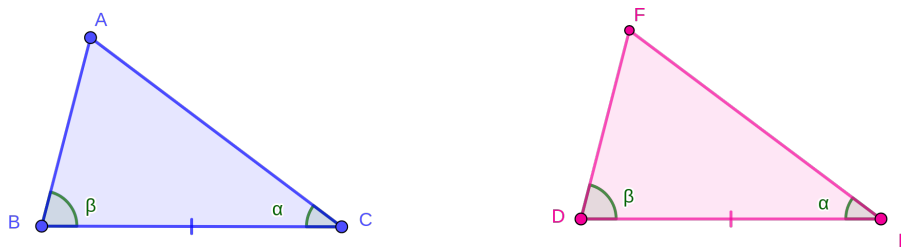


Figura 5: $\triangle ABC \equiv \triangle FDE$

2.6 Caso LLL

Teorema 5 *Se dois triângulos têm três lados respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.*



Figura 6: $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

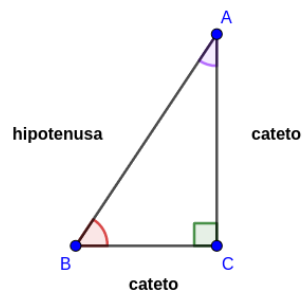
2.7 Caso LAA

Teorema 6 Se dois triângulos têm um lado congruente, o ângulo oposto e um ângulo adjacente a este lado respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.



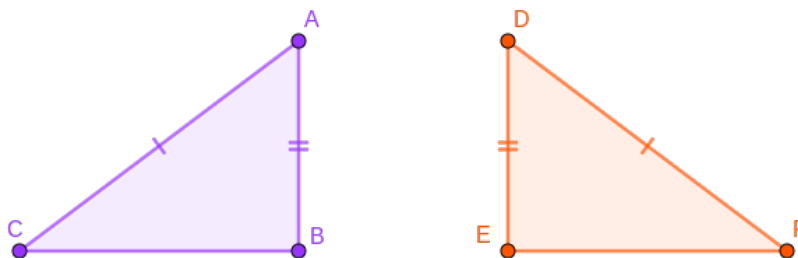
2.8 Caso Especial: Triângulos Retângulos

Definição 13 Um triângulo que possui um ângulo reto é denominado **triângulo retângulo**.



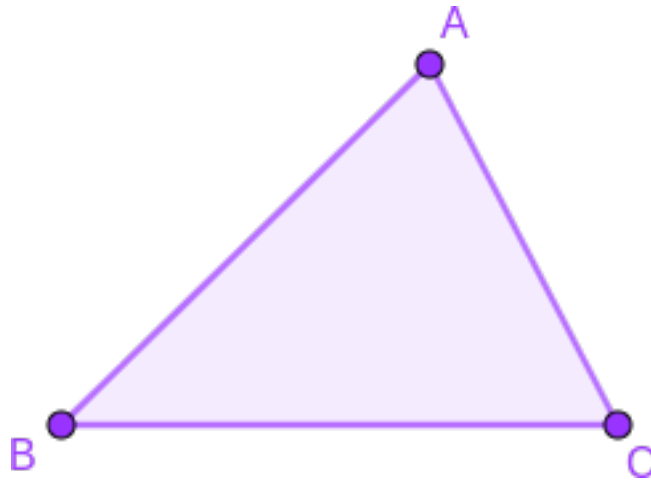
- O lado oposto ao ângulo reto é chamado **hipotenusa**.
- Os outros lados são denominados **catetos** do triângulo.

Teorema 7 Se dois triângulos retângulos possuem a hipotenusa e um cateto respectivamente congruentes então os triângulos são congruentes.



2.9 Desigualdades em triângulos

Teorema 8 *Em todo triângulo, a soma dos comprimentos de dois lados quaisquer é maior que o comprimento do terceiro lado.*



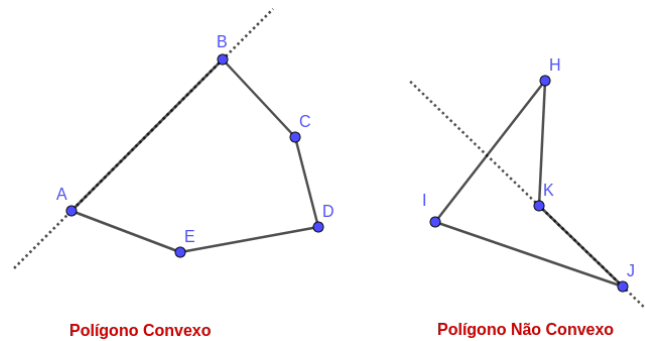
Tem-se:

- i) $BC < BA + AC$;
- ii) $BA < AC + CB$;
- iii) $AC < AB + BC$.

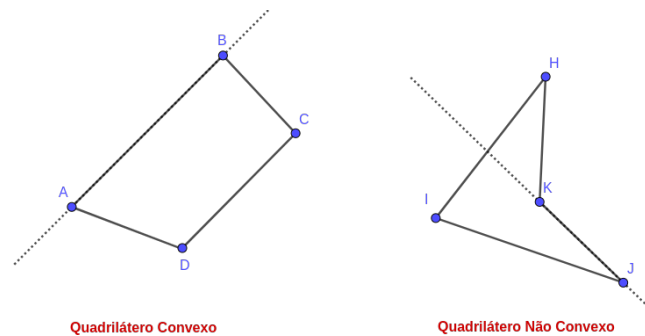
3 Paralelogramos

Resumidamente, um **polígono** é a união de segmentos de reta. Eles podem ser convexos e não convexos.

Definição 14 Um polígono é dito **convexo** se o mesmo fica contido em um mesmo semiplano com respeito a reta que contém qualquer um dos seus lados.

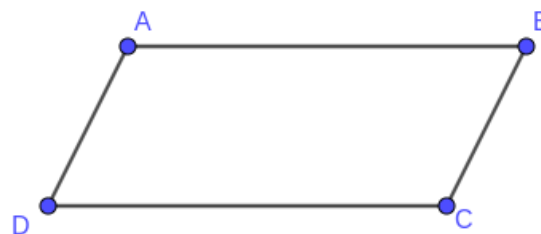


Já os polígonos de quatro lados, denominamos de **quadrilátero**.



Estamos interessados em um caso particular de quadrilátero: os paralelogramos.

Definição 15 O quadrilátero cujos lados opostos (que não possuem vértices em comum) são paralelos é denominado **paralelogramo**.



Os paralelogramos possuem as propriedades a seguir.

Teorema 9 Em todo paralelogramo:

- a) os ângulos opostos são congruentes;
- b) os lados opostos são congruentes;

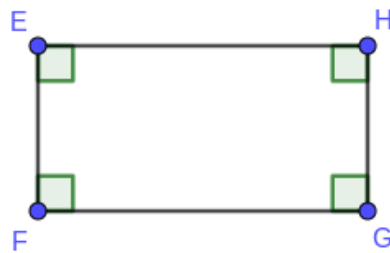
c) as diagonais se bisseçam.

Teorema 10 Reciprocamente, um quadrilátero convexo:

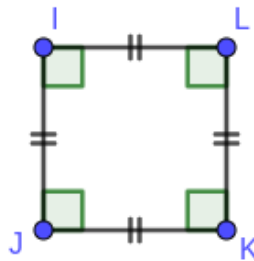
- a) cujos lados opostos são congruentes é um paralelogramo;
- b) cujos ângulos opostos são congruentes é um paralelogramo;
- c) cujas diagonais se bisseçam é um paralelogramo.

Dentre os paralelogramos, destacam-se:

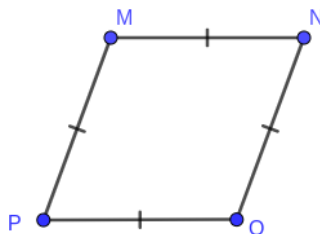
1. **Retângulo:** paralelogramo cujos ângulos são retos (90°).



2. **Quadrado:** retângulo cujos lados são congruentes.



3. **Losango:** paralelogramo cujos lados são congruentes.



3.1 Propriedades do Retângulos

Teorema 11 *As diagonais de um retângulo são congruentes.*

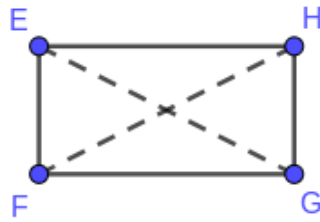
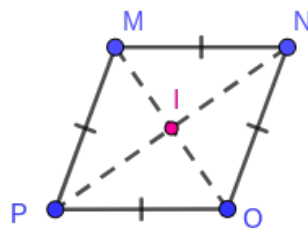


Figura 7: Se $EFGH$ é um retângulo, então $EG = HF$.

3.2 Propriedades do Losango

Teorema 12 *Em todo losango:*

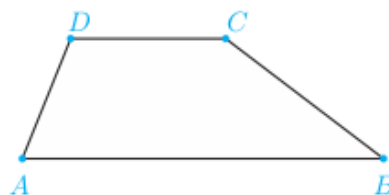
- a) *as diagonais são perpendiculares;*
- b) *as diagonais são bissetrizes dos ângulos do quadrilátero.*



Teorema 13 *Reciprocamente, se as diagonais de um quadrilátero se bissecam e são perpendiculares, então o quadrilátero é um losango.*

3.3 Trapézio: um quadrilátero que NÃO é um paralelogramo

Definição 16 *Um quadrilátero que tem apenas dois lados paralelos é denominado **trapézio**.*

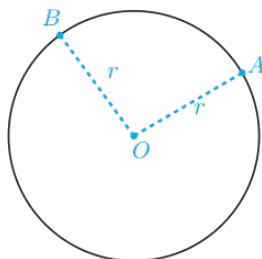


Os segmentos \overline{AB} e \overline{CD} são as **bases** do trapézio.

4 Circunferências

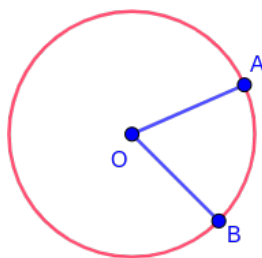
Definição 17 *Sejam r um número real positivo e O um ponto do plano. O lugar geométrico de todos os pontos do plano que estão à distância r de O é a **circunferência** de raio r e centro O .*

Duas circunferências são ditas **congruentes** se possuem o mesmo raio.



- Denotaremos esta circunferência por $\mathcal{C}(O, r)$.
- O segmento que une o centro O a qualquer ponto da circunferência é denominado **raio** da mesma.

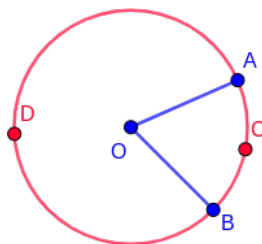
Definição 18 *Chama-se **ângulo central** ao ângulo cujo vértice é o centro da circunferência.*



A parte da circunferência limitada pelos pontos A e B é denominada **arco da circunferência** e o denotamos por \widehat{AB} . Os pontos A e B são os extremos do arco AB .

Há uma ambiguidade na notação para arcos, uma vez que não nos permite distinguir se estamos nos referindo ao arco menor ou ao arco maior. Para evitar tal ambiguidade, considera-se outro ponto do arco.

Na figura abaixo, o arco AB menor é denotado por \widehat{ACB} , enquanto que o maior é denotado por \widehat{ADB} .



Quando não houver dúvidas quanto ao arco que estamos nos referindo, podemos escrever simplesmente \widehat{AB} .

Definição 19 A medida, em graus ou radianos, de um arco é a medida do ângulo central correspondente.

Notação: $\widehat{AB} = \alpha$.

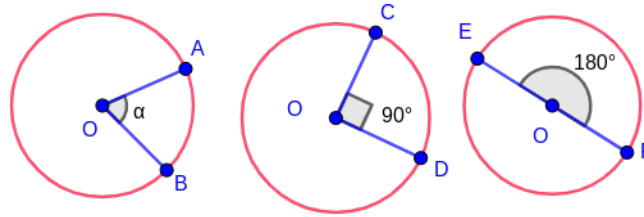


Figura 8: $\widehat{AB} = \alpha$, $\widehat{CD} = 90^\circ$ e $\widehat{EF} = 180^\circ$

4.1 Tangentes

Definição 20 A reta que intersecta a circunferência em apenas um ponto é denominada **tangente**. Este ponto é denominado **ponto de tangência**.

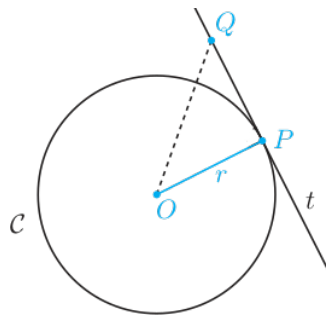
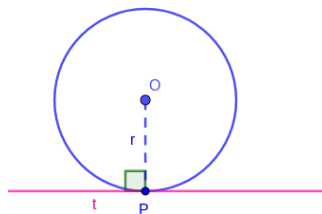


Figura 9: \overleftrightarrow{QP} reta tangente à circunferência em P .

Teorema 14 A reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio traçado pelo ponto de tangência.

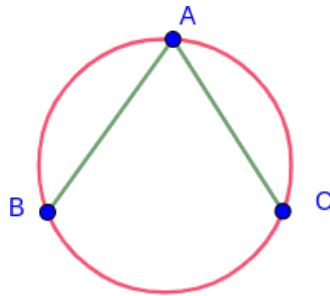


Também é verdadeira a recíproca deste teorema:

Teorema 15 Uma reta perpendicular ao raio em seu ponto extremo é tangente à circunferência.

Além do ângulo central, temos outras definições de ângulos em circunferências, dentre elas:

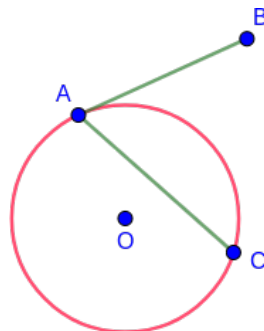
Definição 21 Diz-se que um ângulo está **inscrito** numa circunferência se seu vértice pertence à circunferência e seus lados intersectam a mesma em dois pontos distintos do vértice.



Sua relação com o ângulo central é dada pelo teorema a seguir:

Teorema 16 O ângulo inscrito tem por medida a metade da medida do arco compreendido entre seus lados.

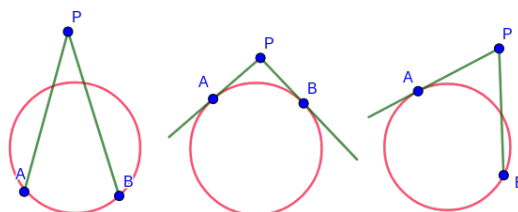
Definição 22 Um ângulo é dito de **segmento** se seu vértice pertence à circunferência, um lado é secante e o outro tangente à mesma.



Teorema 17 O ângulo de segmento tem por medida a metade da medida do arco compreendido entre seus lados.

Definição 23 Um **ângulo excêntrico externo** é aquele cujo vértice é exterior a circunferência e seus lados são secantes, ou tangentes, ou uma secante e uma tangente à mesma.

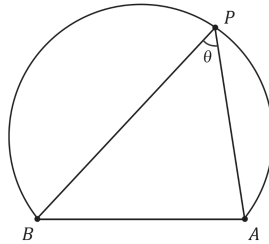
- Quando os lados desse ângulo são tangentes, o mesmo é denominado **circunscrito** à circunferência.



Teorema 18 *O ângulo excêntrico externo tem por medida a metade da diferença das medidas dos arcos compreendidos entre seus lados.*

4.2 O arco capaz

Definição 24 *Sejam A e B dois pontos sobre um círculo \mathcal{C} . Todos os ângulos \widehat{APB} , com P pertencente ao arco \widehat{AB} , têm a mesma medida (Teorema 16). Chamamos o arco \widehat{AB} de arco capaz do ângulo θ sobre o segmento AB .*



Um observador, portanto, que se mova sobre este arco, consegue ver o segmento \overline{AB} sempre sob mesmo ângulo. Naturalmente que se um ponto N pertence ao outro arco, o ângulo \widehat{ANB} é também constante e igual a $180^\circ - \theta$.

Referências

- [1] REZENDE, E. Q. F., *Geometria euclidiana plana e construções geométricas*, Ed. Unicamp, 2016. Baixe aqui. Obrigada, Lucas!
- [2] WAGNER, E., *Construções geométricas.*, Rio de Janeiro, SBM, 2007. Baixe aqui.