

Aula 08


Quadriláteros

Karla Lima

Sumário



1. Definição e Nomenclaturas
2. Propriedades dos Paralelogramos
3. Propriedades do Retângulo
4. Propriedades do Losango
5. Paralelas em Triângulos
6. O Trapézio

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the upper-left portion, while a light gray shape occupies the lower-left portion. The rest of the slide is white. The text is centered in the white area.

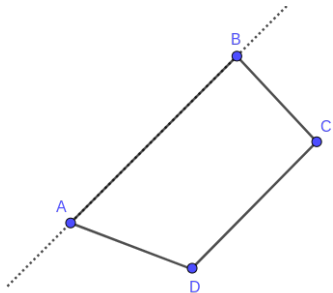
Definição e Nomenclaturas

Definição

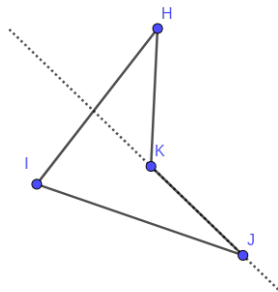


Definição 1

Denominamos de **quadrilátero** ao polígono de quatro lados.



Quadrilátero Convexo



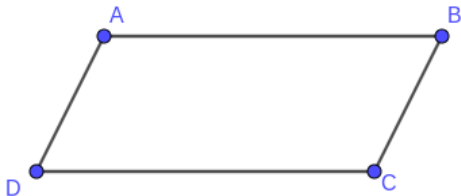
Quadrilátero Não Convexo

Quadriláteros Notáveis



Definição 2

*O quadrilátero cujos lados opostos (que não possuem vértices em comum) são paralelos é denominado **paralelogramo**.*

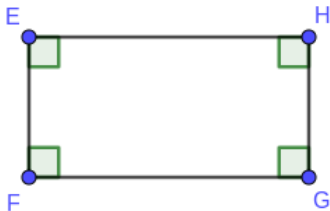


Quadriláteros Notáveis



Definição 3

Um paralelogramo cujos ângulos são retos é denominado **retângulo**.

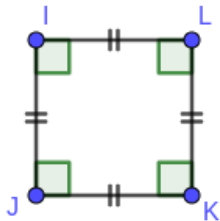


Quadriláteros Notáveis



Definição 4

*Um retângulo cujos lados são congruentes é dito um **quadrado**.*

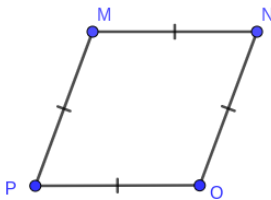


Quadriláteros Notáveis



Definição 5

Um paralelogramo cujos lados são congruentes é denominado **losango**.



The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the upper-left portion, while a light gray shape occupies the lower-left portion. The rest of the slide is white. The title is centered in the white area.

Propriedades dos Paralelogramos

Teorema



Teorema 1

Em todo paralelogramo:

- a) os ângulos opostos são congruentes;*
- b) os lados opostos são congruentes;*
- c) as diagonais se bissecam.*

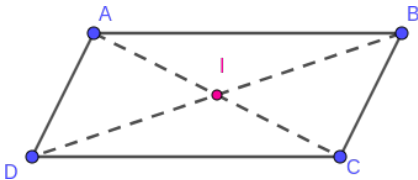
Antes de demonstrar o teorema, prove o seguinte lema:

'Segmentos paralelos compreendidos entre dois segmentos paralelos são congruentes.'

Demonstração: Teorema 1



- a) Trace uma diagonal e separe o paralelogramo em dois triângulos. Mostre que são congruentes, usando o paralelismo dos lados opostos.
- b) Use a conclusão do item a).
- c) De fato, na figura abaixo



mostre que $\hat{B}IC = \hat{A}ID$ e $\hat{IBC} = \hat{IDA}$. Conclua que $\triangle BIC \equiv \triangle AID$ (LAA).

- Com isso, teremos $\overline{BI} = \overline{ID}$ e $\overline{CI} = \overline{IA}$ (Por quê?)

Teorema



Teorema 2

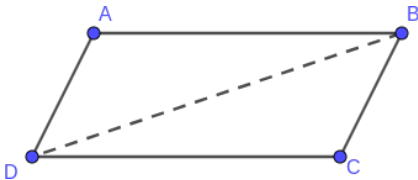
Reciprocamente, um quadrilátero convexo:

- a) *cujos lados opostos são congruentes é um paralelogramo;*
- b) *cujos ângulos opostos são congruentes é um paralelogramo;*
- c) *cujas diagonais se bissecam é um paralelogramo.*

Demonstração: Teorema 2



- a) Trace uma das diagonais do quadrilátero, dividindo-o em dois triângulos: $\triangle ABD$ e $\triangle BCD$. Mostre que eles são congruentes.



- Conclua que $\hat{C}BD = \hat{B}DA$ e mostre que os segmentos \overline{BC} e \overline{AD} são paralelos.

Demonstração: Teorema 2

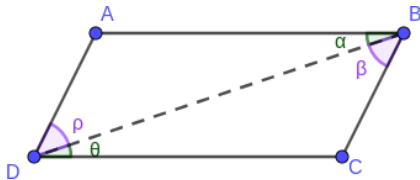


- Do mesmo modo, conclua que $\hat{A}BD = \hat{B}DC$ e mostre que os segmentos \overline{AB} e \overline{DC} são paralelos.

Demonstração: Teorema 2



b) Trace uma das diagonais do quadrilátero.



- ▶ Por hipótese, $\hat{A} = \hat{C}$ e $\hat{ABD} = \hat{ADC}$.
- ▶ Na figura acima, temos que $\alpha + \beta = \rho + \theta$ (por hipótese).
- ▶ Além disso, pela Lei Angular de Tales (soma dos ângulos internos):

$$\beta + \theta = \alpha + \rho \quad (\text{confira!})$$

Demonstração: Teorema 2

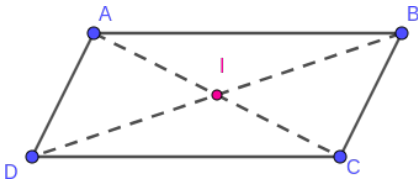


- ▶ Some estas equações, membro a membro, e conclua que $\alpha = \theta$.
- ▶ Mostre que, por isso, os segmentos \overline{BC} e \overline{AD} são paralelos.
- ▶ Analogamente, conclua que $\beta = \rho$ e, com isso, mostre que os segmentos \overline{AB} e \overline{DC} são paralelos.
- ▶ Portanto, $ABDC$ é um paralelogramo.

Demonstração: Teorema 2



c) Trace as diagonais do quadrilátero.

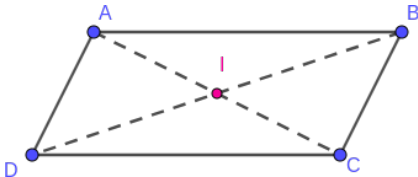


- Qual caso de congruência garante que $\triangle BIC \equiv \triangle AID$?
- Dessa congruência, como podemos relacionar os ângulos \widehat{CBD} e \widehat{BDA} ?
- Conclua que $\overline{BC} = \overline{AD}$.

Demonstração: Teorema 2



- Analogamente, conclua a congruência dos triângulos AIB e DIC .



- Dessa congruência, relacione os ângulos $\hat{A}BD$ e $\hat{B}DC$.
- Conclua que $\overline{AB} = \overline{DC}$.

Do exposto acima, conclui-se que $ABCD$ é um paralelogramo.

Teorema



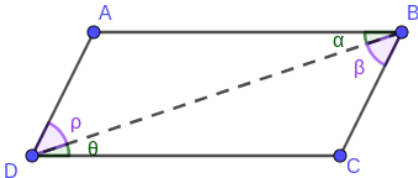
Teorema 3

O quadrilátero que tem dois lados paralelos e congruentes é um paralelogramo.

Demonstração: Teorema 3



- Trace a diagonal do quadrilátero, transversal aos lados paralelos e congruentes, \overline{AD} e \overline{BC} :



- Temos $\hat{A}BD = \hat{B}DC$ (justifique!) e, assim,

$$\triangle CBD = \triangle BDA \quad (\text{qual congruência?}).$$

- Dessa forma, $AB = DC$ (por quê?).
- Pelo item a), do Teorema 2, segue-se que $ABCD$ é um paralelogramo.

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the upper-left portion, while a light gray shape occupies the lower-left portion. The right side of the slide is a solid white background.

Propriedades do Retângulo

Teorema



Teorema 4

As diagonais de um retângulo são congruentes.

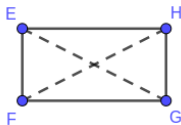


Figura 1: Se $EFGH$ é um retângulo, então $EG = HF$.

Demonstração: Exercício.

Teorema



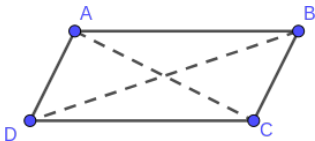
Teorema 5

Reciprocamente, o paralelogramo que tem as diagonais congruentes é um retângulo.

Demonstração: Teorema 5



- ▶ Trace as diagonais do paralelogramo:

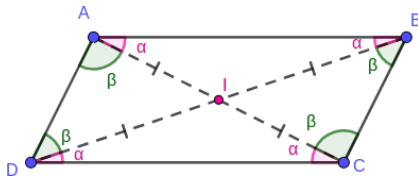


- ▶ Pelo Teorema 1, item c), as diagonais se bissecam.
- ▶ Como $AC = BD$, temos que $\frac{AC}{2} = AI = BI = DI = CI = \frac{BD}{2}$.
- ▶ Portanto, são isósceles os triângulos AID , BIC , AIB e DIC .
- ▶ Conclua que $\triangle AID \equiv \triangle BIC$ e $\triangle AIB \equiv \triangle DIC$.

Demonstração: Teorema 5



- Assim, teremos $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = \alpha + \beta$.



- Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é $180^\circ(4 - 2) = 360^\circ$, segue que

$$360^\circ = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 4(\alpha + \beta) \Leftrightarrow \alpha + \beta = 90^\circ.$$

- Portanto, $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$, sendo o paralelogramo um retângulo.

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the top-left corner, while a light gray shape occupies the bottom-left corner. The rest of the slide is white. The text is centered in the white area.

Propriedades do Losango

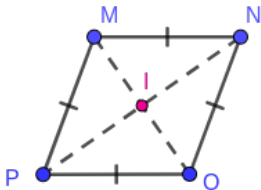
Teorema



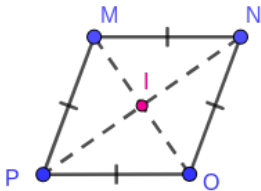
Teorema 6

Em todo losango:

- a) *as diagonais são perpendiculares;*
- b) *as diagonais são bissetrizes dos ângulos do quadrilátero.*



Demonstração: Teorema 6



- ▶ Na figura acima, $\triangle PMN$ é isósceles.
- ▶ O segmento \overline{MI} divide a base PN em dois segmentos congruentes. Portanto, é mediana referente a este lado.
- ▶ Como a mediana da base é também a altura do triângulo isósceles, temos que \overline{MI} é perpendicular à diagonal \overline{PN} .
- ▶ Conclua daí que $\overline{MO} \perp \overline{PN}$.

Demonstração: Teorema 6



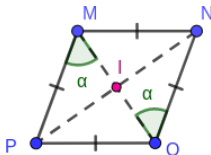
Para o item b), sabemos que a mediana da base é também a bissetriz do vértice oposto.

- ▶ Conclua que \overline{MO} é a bissetriz de \hat{M} e de \hat{O} .
- ▶ Conclua que \overline{PN} é a bissetriz de \hat{P} e de \hat{N} .

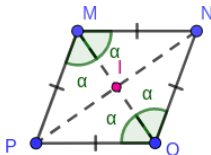
Demonstração: Teorema 6



- $\widehat{PMI} = \widehat{ION}$ (por quê?)



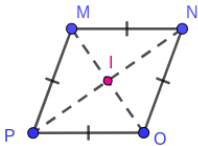
- Com isso, \overline{MN} é bissetriz dos ângulos \widehat{M} e \widehat{O} .



Demonstração: Teorema 6



- Para concluir a demonstração do item b), mostre que \overline{NP} é bissetriz dos ângulos \hat{P} e \hat{N} .



Teorema



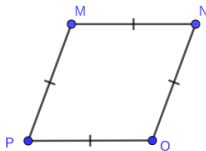
Teorema 7

Reciprocamente, se as diagonais de um quadrilátero se bisseçam e são perpendiculares, então o quadrilátero é um losango.

Demonstração: Teorema 7



- ▶ Pelo Teorema 2, se as diagonais de um quadrilátero se bissecam, então ele é um paralelogramo.
- ▶ Logo, $MN = PO$ e $MP = NO$ (por quê?).

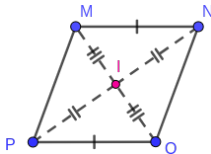


- ▶ Para concluir a demonstração, precisamos mostrar que os quatro lados são iguais.


Demonstração: Teorema 7



- Verifique que $\triangle PMI = \triangle MIN$



- Conclua que $MP = MN$ e, portanto, $MN = PO = MP = NO$, c.q.d.

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. On the left, there is a teal-colored shape that tapers towards the bottom left corner. To its right is a light gray shape that also tapers towards the bottom left corner, creating a white triangular area in the center where the text is located.

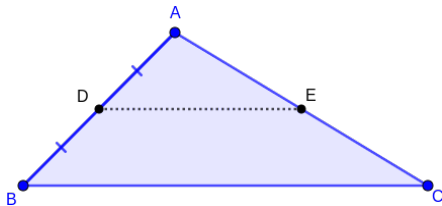
Paralelas em Triângulos

Teorema



Teorema 8

Se do ponto médio do lado de um triângulo, traçarmos uma paralela a um dos lados, esta passará pelo ponto médio do terceiro lado.



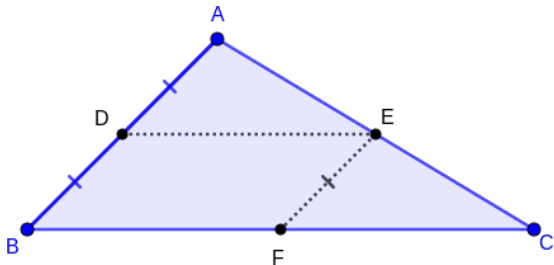
► **Hipótese:** $AD = DB$ e $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

► **Tese:** $AE = EC$.

Demonstração: Teorema 8



- Pelo ponto E , que a paralela ao lado \overline{BC} corta o lado \overline{AC} , trace um segmento paralelo ao lado \overline{AB} , cortando o lado \overline{BC} .

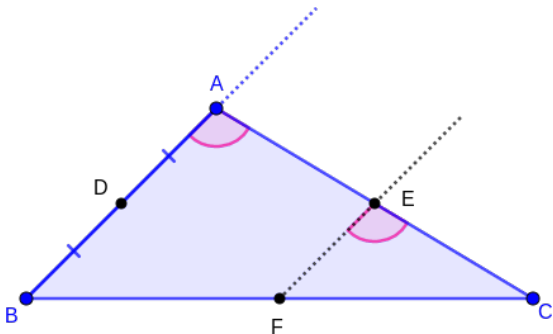


- i) Qual teorema garante que $BD = FE$?

Demonstração: Teorema 8



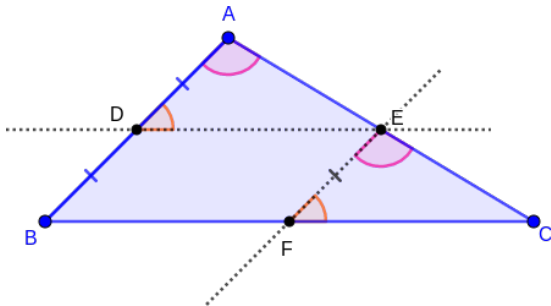
- ii) Sendo $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$, cortadas pela transversal \overline{AC} , como podemos relacionar os ângulos $\hat{A}DE$ e $\hat{E}FC$?



Demonstração: Teorema 8



iii) Como $\overline{DA} \parallel \overline{FE}$ e $\overline{DE} \parallel \overline{FC}$, como podemos relacionar os ângulos $\hat{A\hat{D}E}$ e $\hat{E\hat{F}C}$?



iv) Dos itens anteriores, o que garante a congruência dos triângulos DAE e FEC ?

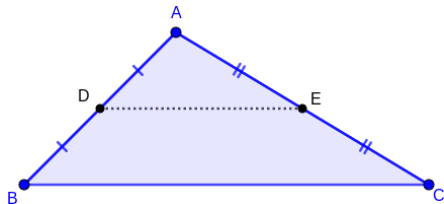
► Da congruência acima, o que garante que $AE = EC$?

Teorema



Teorema 9

O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado.



► **Hipótese:** $AD = DB$ e $AE = EC$.

► **Tese:** $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

Demonstração: Teorema 9



1. Pelo ponto médio de \overline{AB} , D , traçamos uma reta paralela ao lado \overline{BC} .
2. Pelo Teorema 8, essa reta corta o lado \overline{AC} no seu ponto médio, E .
3. Como pelos pontos distintos D e E passa uma única reta, o segmento \overline{DE} deve estar contido na reta traçada, o que implica em - também - ser paralelo ao lado \overline{BC} .

Corolário



Corolário 1

No triângulo anterior, tem-se $DE = \frac{BC}{2}$.

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the top-left corner, while a light gray shape occupies the bottom-left corner. The rest of the slide is white. The text 'O Trapézio' is centered in the white area.

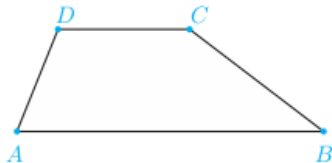
O Trapézio

Um quadrilátero que não é um paralelogramo



Definição 6

Um quadrilátero que tem apenas dois lados paralelos é denominado **trapézio**.

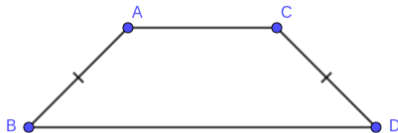


Os segmentos \overline{AB} e \overline{CD} são as **bases** do trapézio.

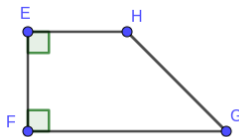
Trapézios Especiais



- ▶ O trapézio cujos lados não paralelos são congruentes é dito **isósceles**.
- ▶ O trapézio que possui dois ângulos retos é dito **trapézio retângulo**.



Trapézio Isósceles



Trapézio Retângulo

Propriedades do Trapézio



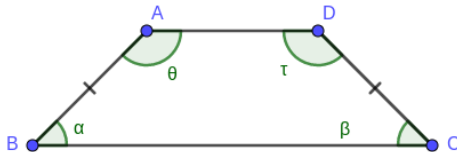
Teorema 10

No trapézio isósceles, os ângulos adjacentes à mesma base são congruentes.

Demonstração:

► **Hipótese:** $AB = CD$

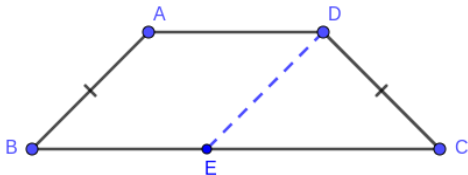
► **Tese:** $\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{B} = \hat{C}$



Demonstração: Teorema 1



- ▶ Trace pelo vértice D o segmento \overline{DE} paralelo a \overline{AB} com $E \in \overline{BC}$.

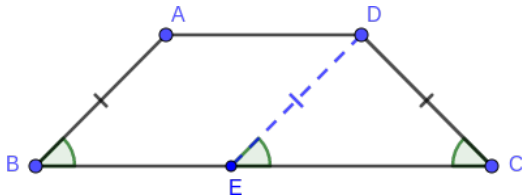


- ▶ O quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo (pq?). Logo,
 - ▶ $AB = ED$
 - ▶ $AB = DE = DC$

Demonstração: Teorema 1



- Como $\hat{B} = \hat{DEC}$ e $\hat{CED} = \hat{C}$ (pq?), então $\hat{B} = \hat{C}$.



- Por serem suplementos de ângulos congruentes, temos $\hat{A} = \hat{D}$.

Propriedades do Trapézio

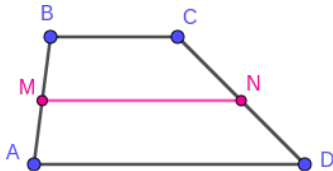


Teorema 11

O segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases e igual à sua semi-soma.

Demonstração:

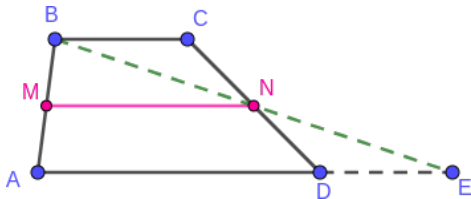
- ▶ **Hipótese:** $MB = MA$ e $NC = ND$.
- ▶ **Tese:** $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$, $\overline{MN} \parallel \overline{AD}$ e $MN = \frac{BC+AD}{2}$



Demonstração: Teorema 2



- ▶ Trace pelo vértice B o segmento \overline{BE} , que passa pelo ponto médio N , com $E \in \overrightarrow{AD}$.



- ▶ Os triângulos formados BCN e NDE formados são congruentes, pois
 - ▶ $NC = ND$ (hipótese)
 - ▶ $\hat{BNC} = \hat{DNE}$ (pq?)
 - ▶ $\hat{C} = \hat{NDE}$ (pq?)
- ▶ Assim, $BC = DE$ e $BN = NE$ (lados opostos à ângulos congruentes).

Demonstração: Teorema 2



- ▶ Dessa forma, \overline{MN} une os pontos médios dos lados \overline{AB} e \overline{BE} do $\triangle ABE$. Logo,

$$\overline{MN} \parallel \overline{AE}.$$

- ▶ Como $\overline{AE} \parallel \overline{BC}$, a primeira parte do teorema está demonstrada.
- ▶ Finalmente,

$$MN = \frac{AE}{2} = \frac{AD + DE}{2} = \frac{AD + BC}{2}.$$

O segmento \overline{MN} é denominado **base média** ou **mediana** do trapézio.