MATEMÁTICA
Faculdade de Ciências
Exatas e Tecnologias

Elementos de Aritmética

Lista de Aprofundamento

2ª Avaliação

Profª Karla Lima

2024.1

Sumário

Resumo

"A Arte de Resolver Problemas (1945)" é um livro clássico escrito por George Pólya, que oferece uma abordagem sistemática e prática para resolver problemas matemáticos e, por extensão, problemas em diversas áreas da vida.

Ele destaca estratégias heurísticas, como divisão em subproblemas, analogia, tentativa e erro, e trabalhar de trás para frente.

Além disso, o autor enfatiza a importância de persistência, criatividade e flexibilidade mental na resolução de problemas.

Abaixo, segue o esquema introduzido por Pólya para a resolução de problemas. Use-o para ajudar no processo de aprendizado.

Elabore um PLANO

01. Conexões

Encontre a conexão entre os dados e a incógnita.
É possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não puder encontrar uma conexão imediata.

02. Questione

Já viu este problema antes? Ou o mesmo problema apresentado ligeiramente diferente?

02. Questione

Conhece um problema correlato ou que poderia ser útil?

03. Relacione

Procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.

04. Entenda

Entenda as soluções de problemas resolvidos. São eles que vão te dar a bagagem necessária para se aventurar nos exercícios propostos.

Execute o PLANO

01. Mão na Massa

Em geral, você só precisa de cuidado e paciência, desde que tenha as habilidades necessárias.
Persista com o plano que você escolheu e execute.

02. Descarte

Se continuar sem funcionar, descarte-o e escolha outro. Não se deixe enganar, é assim que a matemática é feita, mesmo por profissionais.

03. Verfique

É possível verificar claramente que os passo está correto?
É possível demonstrar que ele está correto?

04. Retropecto

Examine a solução obtida.
Reserve um tempo para refletir e olhar para trás, para o que você fez, o que funcionou e o que não funcionou.

04. Retrospecto

Isso permitirá que você preveja qual estratégia usar para resolver problemas futuros.

1 Os Números Inteiros

1.1 Múltiplos de Números Inteiros

Exercício 1

O Problema 3.7 *de* [1] (Hefez, A.) *pede para mostrar as seguintes propriedades, para um elemento $a \in \mathbb{Z}$:*

i) 0 *é múltiplo de a.*

ii) Se m é um múltiplo de a, então $-m$ é um múltiplo de a.

iii) Um múltiplo de um múltiplo de a é um múltiplo de a.

iv) Se m e m' são múltiplos de a, então $m + m'$ e $m - m'$ são também múltiplos de a.

v) Se m e m' são múltiplos de a, então $e \cdot m + f \cdot m'$ é múltiplo de a, quaisquer que sejam os inteiros e e f.

vi) Se $m + m'$ ou $m - m'$ é múltiplo de a e m é múltiplo de a, então m' também é múltiplo de a.

Resolva os itens a seguir.

a) Para cada item, faça um caso particular, escolhendo valores adequados para a, m, m', e e f.

b) Demonstre, formalmente, cada um dos itens de (a) até (f).

Exercício 2 *Faça o mesmo para o Problema* 3.8 *de* [1] (Hefez, A.) .

1.2 Divisores de um Número Inteiro

Exercício 3 *Mostre que se a é um inteiro não nulo, os divisores de a são em número finito.*

Exercício 4 *Mostre que se a e b são números naturais não nulos, então $a \mid b$ e $b \mid a$ se, e somente se, $a = b$.*

Exercício 5 *Em cada item, escolha casos particulares adequados de a, b e d e verifique as propriedades. Depois, demonstre-as formalmente.*

a) *Se $d \mid a$ e $d \mid b$, então $d \mid b + a$ e $d \mid (b - a)$.*

b) *Se $d \mid b + a$ ou $d \mid (b - a)$ e $d \mid a$, então $d \mid b$.*

Exercício 6 *O que é o **máximo divisor comum** de dois números inteiros a e b?*

Exercício 7 *Mostre que:*

a) *O $mdc(0, 0)$ não existe.*

b) *Se $b \neq 0$, então*

$$mdc(0, b) = \begin{cases} b, & se\ b < 0, \\ -b, & se\ b < 0. \end{cases}$$

c) *Mostre que se $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, então*

$$mdc(a, b) = mdc(-a, b) = mdc(a, -b) = mdc(-a, -b).$$

Exercício 8 *Um número d é divisor comum de a e b, ambos não nulos, se, e somente se, ele é um divisor comum de a e $b - a$.*

Exercício 9 *O que são números primos entre si?*

Referências

[1] A. Hefez. *Iniciação à Aritmética*. IMPA, 2015.

Referências

[1] A. Hefez. *Iniciação à Aritmética*. IMPA, 2015.