GEOMETRIA PLANA

Aula 07

Polígonos

Karla Lima

Sumário

Polígonos

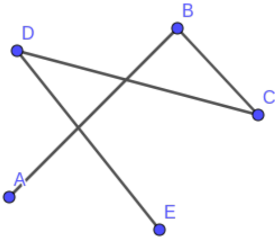
Definição

Definição 1

*Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontos coplanares, dos quais três quaisquer deles não são colineares. A união dos segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}$ é denominada **linha poligonal**.*

Exemplo 1

Abaixo, temos a linha poligonal formada pelos pontos A, B, C, D e E.



Definição

- Os pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são os vértices da poligonal e os segmentos correspondentes são os seus lados.

Definição 2

Um ***polígono*** *é uma linha poligonal que satisfaz as seguintes condições:*

a) $A_1 \equiv A_n$;

b) *Dois lados quaisquer da poligonal ou não se interceptam ou se interceptam apenas em seus extremos.*

Definição

Exemplo 2

Abaixo, temos um polígono formada pelos vértices A, B, C, D e E.

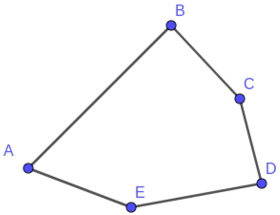
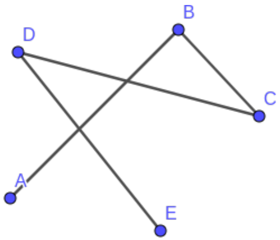


Figura 1: Polígono ABCDE

Definição

Exemplo 3

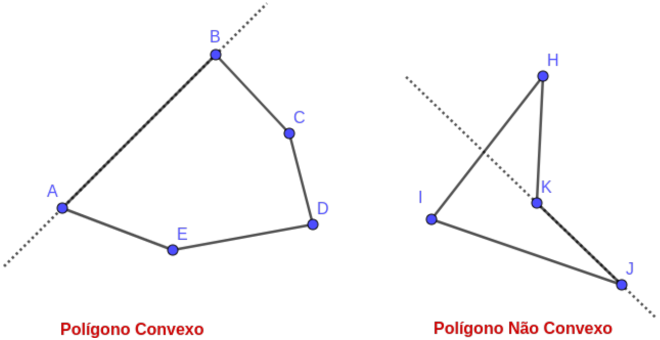
Você consegue justificar por que a linha poligonal do exemplo 1 não é um polígono?



Definição

Definição 3

Um polígono é dito ***convexo*** *se o mesmo fica contido em um mesmo semiplano com respeito a reta que contém qualquer um dos seus lados.*



Nomenclatura

Os polígonos convexos recebem denominações especiais, de acordo com o número de seus lados:

- Um polígono com 3 lados chama-se **triângulo**.
- Um polígono com 4 lados chama-se **quadrilátero**.
- Um polígono com 5 lados chama-se **pentágono**.
- Um polígono com 6 lados chama-se **hexágono**.
- Um polígono com 7 lados chama-se **heptágono**.
- Um polígono com 8 lados chama-se **octógono**.
- Um polígono com 9 lados chama-se **eneágono**.

Nomenclatura

- Um polígono com 10 lados chama-se **decágono**.
- Um polígono com 11 lados chama-se **undecágono**.
- Um polígono com 12 lados chama-se **dodecágono**.
- Um polígono com 15 lados chama-se **pentadecágono**.
- Um polígono com 20 lados chama-se **icoságono**.
- Em geral, um polígono com n lados chama-se **n-látero**.

Definição

Definição 4

*Um **polígono regular** é aquele que tem os lados congruentes e os ângulos também congruentes.*

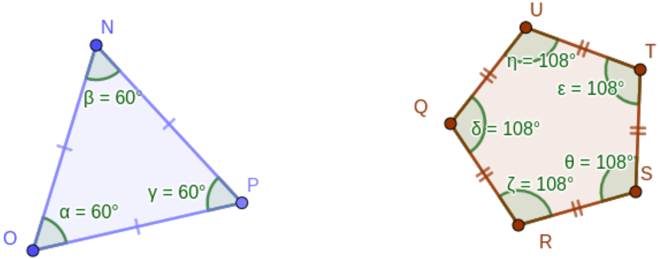


Figura 2: Polígonos Regulares

Definição

Definição 5

Diagonal *de um polígono é o segmento que une dois vértices não consecutivos.*

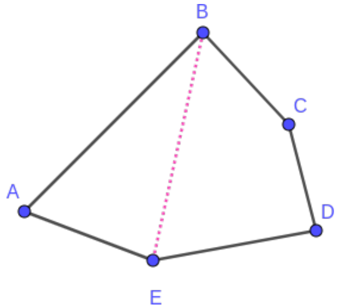


Figura 3: $\overline{BE}$ é uma diagonal do polígono *ABCDE*

Definição

Definição 6

*Denominamos de **ângulo externo** de um polígono ao suplemento de qualquer um de seus ângulos internos.*

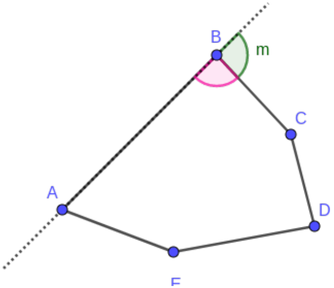


Figura 4: m é um ângulo externo do polígono $ABCDE$, em $\hat{B}$

Diagonais

Vamos visualizar algumas diagonais no Geogebra (Click para baixar)

Teorema

Teorema 1

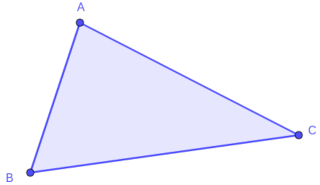
O número de diagonais de um polígono de n lados é dado pela fórmula

$$d = \frac{n(n-3)}{2}.$$

- **Hipótese:** O polígono possui n lados. Logo, possui n vértices
$$A_1, A_2, \ldots, A_n.$$
- **Tese:** A fórmula
$$d = \frac{n(n-3)}{2}.$$
determina o número de diagonais do polígono.

Demonstração: Teorema 1

- Seja $n = 3$. Temos um triângulo:

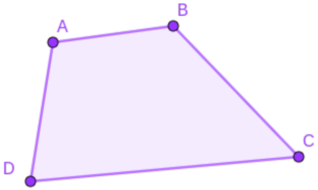


- Qualquer segmento que une dois vértices do triângulo, resulta em um lado do mesmo.
- Ou seja, o número de diagonais d é zero.
- A fórmula, então, é verdadeira para $n = 3$, uma vez que

$$\frac{n(n-3)}{2} = \frac{3(3-3)}{2} = 0.$$

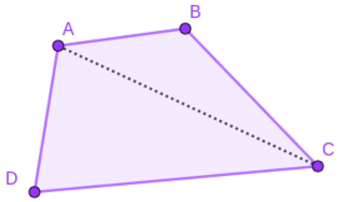
Demonstração: Teorema 1

- Para $n = 4$, temos um quadrilátero.



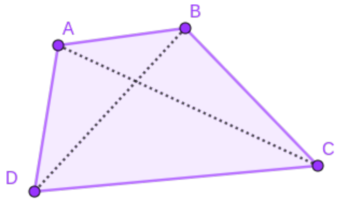
- Para formar os lados, cada vértice é ligado a outros 2 vértices.
- No caso do triângulo, ao fixar um dos vértices e ligá-lo à 2 deles, não há vértice livre para formar uma diagonal.
- No caso do quadrilátero, quantos vértices ficam disponíveis para formar uma diagonal?

Demonstração: Teorema 1



- Por exemplo, ao fixarmos os vértice A, os lados são formados por $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$, ficando o vértice C livre para formar a diagonal $\overline{AC}$.
- O mesmo ocorre com cada um dos vértices restantes: cada um só pode gerar uma diagonal com o vértice restante.
- São eles: $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CA}$, $\overline{DB}$.

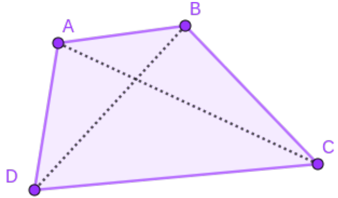
Demonstração: Teorema 1



- Assim, cada vértice gera 1 diagonal, que é o número de vértices que restam após eu fixar um vértice e formar lados com dois outros vértices do polígono:

$$4\ (\text{vértices}) \times (4\ (\text{vértices}) - 3\ (\text{vértices usados para formar os lados})) = 4 \times 1 = 4$$

Demonstração: Teorema 1



- Como $\overline{AC} = \overline{CA}$ e $\overline{BD} = \overline{DB}$, estamos contando a mesma diagonal 2 vezes.
- Portanto, o número de diagonais é dado por

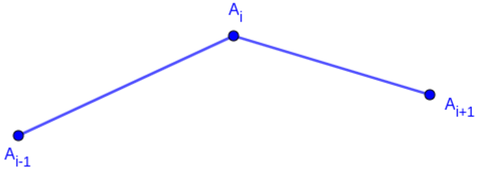
$$\frac{4\text{ (vértices)} \times (4\text{ (vértices)} - 3\text{ (vértices usados para formar os lados)})}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

- Novamente, para $n = 4$, temos que o número de diagonais é dado pela fórmula

$$\frac{n(n-3)}{2} = \frac{4(4-3)}{2} = 2.$$

Demonstração: Teorema 1

- Se o polígono tem n lados, então, ao fixarmos um vértice para formar dois lados do mesmo, usamos 3 vértices e nos restam $n-3$ vértices para formarmos as diagonais.



- Assim, são $n(n-3)$ diagonais, mas como $\overline{A_iA_j} = \overline{A_jA_i}$, cada diagonal foi computada duplamente.
  Portanto, o número de diagonais é metade desse valor,
  $$\frac{n(n-3)}{2},$$
  como queríamos demonstrar.

Teorema

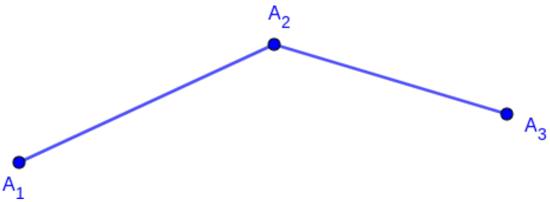
Teorema 2

A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é dado pela fórmula

$$S_i = 180^\circ(n-2)$$

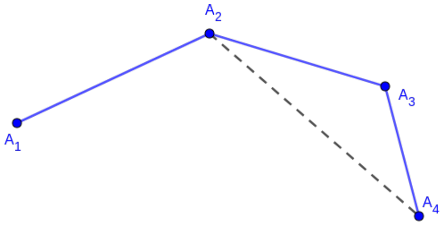
Demonstração: Teorema 2

Como vimos na demonstração do teorema 1, um vértice é ligado a dois outros adjacentes para formar lados do polígono:



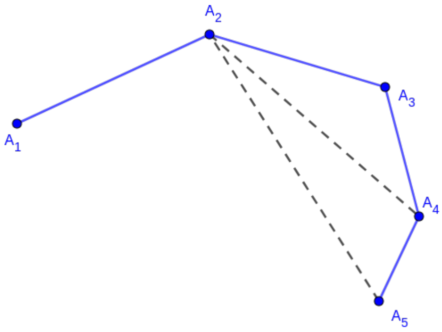
Acima, se o polígono tem n lados, então ele possui $n - 3$ outros vértices que fazem diagonal com A_2.

Demonstração: Teorema 2



- A primeira diagonal pode ser traçada com o vértice adjacente ao vértice A_3.
- Com isso, essa diagonal descreve um triângulo $A_2A_3A_4$ no polígono dado.

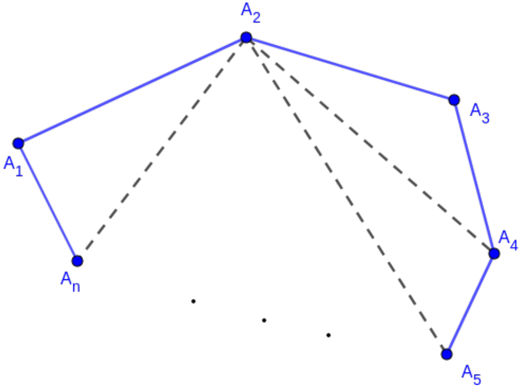
Demonstração: Teorema 2



- A segunda diagonal pode ser traçada com o vértice adjacente ao vértice A_4.
- Com isso, essa diagonal descreve um triângulo $A_2A_4A_5$ no polígono dado.

Demonstração: Teorema 2

- Cada diagonal a partir de A_2 pode ser traçada com um vértice A_i, com $i \neq 1$ e $i \neq 3$, gerando um triângulo $A_2A_iA_{i+1}$ até o último vértice A_n que faz um triângulo $A_2A_nA_1$.



Demonstração: Teorema 2

- Ou seja, temos os triângulos
  1. $A_2\mathbf{A_3}A_4$ $\quad (\triangle \text{ número } 1 = 3 - 2)$
  2. $A_2\mathbf{A_4}A_5$ $\quad (\triangle \text{ número } 2 = 4 - 2)$

     $\vdots$

  n-3. $A_2\mathbf{A_{n-1}}A_n$ $\quad (\triangle \text{ número } n - 3 = (n-1) - 2)$

  n-2. $A_2\mathbf{A_n}A_1$ $\quad (\triangle \text{ número } n - 2 = n - 2)$
- O polígono está dividido em $n - 2$ triângulos, cuja soma dos ângulos internos é 180°.
- Portanto, a soma dos ângulos internos do polígono original é

$$S_i = 180^\circ(n-2),$$

c.q.d.

Corolário

Corolário 1

Se o polígono é regular, então cada ângulo interno mede

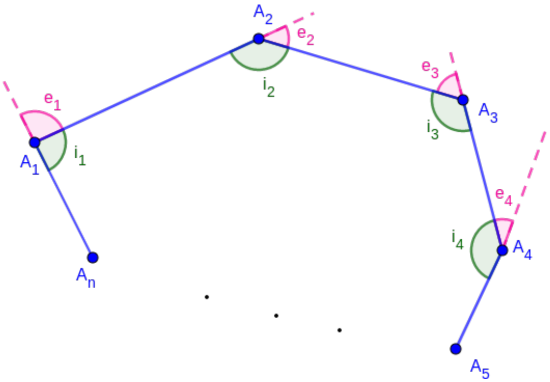
$$a_i = \frac{180^\circ(n-2)}{n}.$$

Teorema

Teorema 3

A soma dos ângulos externos de um polígono convexo é igual à 360°.

Demonstração: Teorema 3



- A soma de um ângulo interno com o ângulo externo correspondente é igual a 180°.

Demonstração: Teorema 3

- Isto é,

$$
\begin{aligned}
i_1 + e_1 &= 180^\circ \\
i_2 + e_2 &= 180^\circ \\
&\vdots \\
i_n + e_n &= 180^\circ
\end{aligned}
$$

- Some os membros dessa igualdade e conclua que

$$S_e = 360^\circ$$

Corolário

Corolário 2

Se o polígono é regular, então cada ângulo externo mede

$$a_e = \frac{360^\circ}{n}.$$