UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Prof^a^. Karla Lima

Cálculo II 19 de Fevereiro de 2018

As Falsicações das Obras de Arte por Van Meegeren

A investigação da origem de uma obra de arte é uma das aplicações do modelo de Malthus em equações diferenciais ordinárias. Depois da libertação da Bélgica na II Guerra Mundial, Van Meegeren foi detido sob a acusação de ser um colaborador dos nazistas por ter vendido a Goering o quadro "Mulheres apanhadas em adultério"de um famoso pintor holandês do século XVII. Em 12 de julho de 1945, ele declarou que esse quadro e muitos outros, incluindo o belo "Os Peregrinos de Emaús"eram seu próprio trabalho. Muitos duvidaram, pois acreditavam que Van Meegeren queria se livrar da acusação de traição. Foi então indicada uma comissão internacional de químicos, físicos e historiadores de arte ilustres para investigar o assunto. Eles determinaram que Van Meegeren havia falsificado os quadros e em 12 de outubro 1947 ele foi sentenciado a um ano de prisão, onde morreu em 30 de dezembro do mesmo ano. Entretanto, mesmo com as conclusões da comissão de especialistas, muitos pediram uma prova meticulosamente científica e conclusiva de que o "Os Peregrinos de Emaús"era realmente uma falsificação.

Para entendermos melhor, define-se a atividade de uma amostra radioativa como sendo o número de desintegrações por unidade de tempo. Sabe-se que a atividade é proporcional ao número de átomos radioativos presentes. Então, se N(t) é o número de átomos em uma amostra num instante t, temos

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N,$$

onde λ é chamada de constante de desintegração ou decaimento radioativo, $\lambda > 0$.

A meia-vida de uma substância radioativa é definida como sendo o tempo necessário para a decomposição da metade da substância; ou seja, o instante t para o qual $\dfrac{N(t)}{N_0} = \dfrac{1}{2}$

(1) Suponha que, no instante t_0, $N(t_0) = N_0$. Resolva o PVI

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N, \quad N(t_0) = N_0.$$

(2) Determine, em função de *lambda*, a meia vida de uma substância, usando a solução anterior. Obs:Use $\dfrac{N(t)}{N_0} = \dfrac{1}{2}$.

Por mais de dois mil anos, todos os pintores usaram tintas com pequenas quantidades da substância química Chumbo 210 (^{210}Pb), e ainda menores de Radio 226 (^{216}Ra).Mais ainda, a desintegração do ^{210}Pb é exatamente equilibrada pela desintegração do ^{216}Ra.

Seja $y(t)$ a quantidade de ^{210}Pb por grama de óxido de chumbo no tempo t, y_0 a quantidade de ^{210}Pb por grama de óxido de chumbo no tempo de formação t_0, $r(t)$ o número de desintegração do ^{216}Ra por minuto e por grama de óxido de chumbo no tempo t. Se λ é a constante de decaimento de ^{210}Pb, então

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda y + r(t), \quad y(t_0) = y_0.$$

(3) Como nos interessa apenas o período de 300 anos e o tempo de meia vida do Radio 226 é de 1600 anos, podemos supor que a semi-vida do Radio 226 presente na amostra é constante e igual a r. Agora o PVI fica

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda y + r, \quad y(t_0) = y_0.$$

Resolva-o.

Observou-se que é impossível precisar a idade do quadro, porque y_0 poderá variar num intervalo muito grande pois o número de desintegrações de ^{210}Pb é proporcional à quantidade presente. Entretanto, é possível distinguir um quadro do século XVII de uma falsificação moderna. A base para isso foi a constatação de que se a tinta é muito antiga comparada aos 22 anos de meia-vida do ^{210}Pb, então sua taxa de radioatividade será próxima à do ^{216}Ra na tinta. Por outro lado, se o quadro é moderno então a radioatividade do ^{210}Pb será muito maior que a radioatividade do ^{216}Ra.

Assim, admitimos que o quadro em questão tem cerca de 300 anos, ou seja, $t - t_0 = 300$ anos.

(4) Usando a solução encontrada no item anterior, conclua que $\lambda y_0 = \lambda y(t) e^{300\lambda} - r(e^{300\lambda} - 1)$.

(5) O tempo de meia vida do ^{210}Pb é de 22 anos. Use a função encontrada em (2) e calcule λ.

Para calcular λy_0, devemos determinar a taxa de desintegração, $\lambda y(t)$, do ^{210}Pb e a taxa de desintegração r do ^{226}Ra. Como a taxa de desintegração do Polônio 210 ^{210Po} é igual à do ^{210}Pb depois de muitos e anos e é mais fácil de ser medida, usaremos essas taxas. A tabela a seguir mostra as taxas de desintegrações do ^{210Po} e do ^{216}Ra para algumas obras:

Descrição	Desintegração de Po^{210}	Desintegração do Ra^{226}
Os Peregrinos de Emmáus	8.5	0.8
Lavagem dos Pés	12.6	0.26
Mulher Lendo música	10.3	0.3
Mulher tocando bandolim	8.2	0.17
A rendeira	1.5	1.4
Mulher sorridente	5.2	6.0

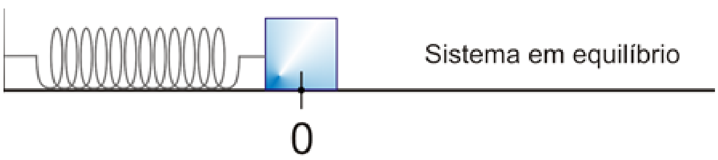
(6) Use esses valores para calcular λy_0 e decidir quais dos quadros listados acima são falsificações (λy_0 muito alto) e quais são verdadeiros (λy_0 baixo).

Estudo de Oscilações

A equação diferencial ordinária que descreve as oscilações ou vibrações de um sistema massa-mola é dada por

$$my''(t) + \gamma y'(t) + ky(t) = F_{ext},$$

onde y é o deslocamento do corpo da posição de equilíbrio do sistema.



As constantes têm o seguinte significado:

- m: massa do corpo conectado à mola;
- k: constante da mola (devido à força exercida pela mola sobre o corpo dada pela Lei de Hooke);
- γ: constante de amortecimento devido à resistência do ar (assumida ser proporcional à velocidade do corpo).

Esta equação descreve também vibrações em outros fenômenos físicos como, por exemplo, vibrações acústicas ou circuitos elétricos. Nesses casos, os significados de y e das constantes devem ser ajustados de acordo com cada fenômeno.

(7) Ache a solução geral da equação $my''(t) + \gamma y'(t) + ky(t) = F_{ext}$, no caso em que as oscilações são livres ($F_{ext} = 0$) e não há amortecimento ($\gamma = 0$).

(8) Ache a solução geral da equação $my''(t) + \gamma y'(t) + ky(t) = F_{ext}$, no caso em que as oscilações são livres ($F_{ext} = 0$) e há amortecimento ($\gamma \neq 0$). Discuta as três possibilidades de solução:

- Superamortecimento: $\Delta > 0$;
- Amortecimento crítico: $\Delta = 0$;
- Subamortecimento: $\Delta < 0$

O que acontece com essas soluções $y(t)$ quando $t \to \infty$? Compare com o que acontece à solução do item (7) e interprete o resultado.

O Teorema de Existência e Unicidade

(9) Enuncie e dê a idéia geral da demonstração do Teorema de Existência e Unicidade de Soluções de uma Equação Diferencial Ordinária de 1^{a} ordem.

Entrega: 23/03/2018