GEOMETRIA PLANA

Aula 02

Ângulos

Karla Lima

22 de fevereiro de 2022

Sumário

Definição e Propriedades

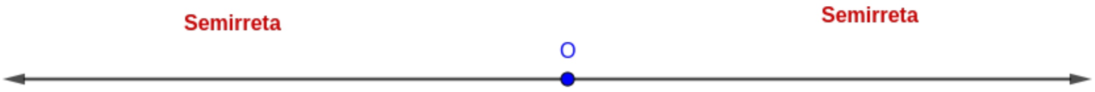
AVISO

Nesta aula, todas os entes geométricos estão situados num mesmo plano α.

Semirretas

Definição 1

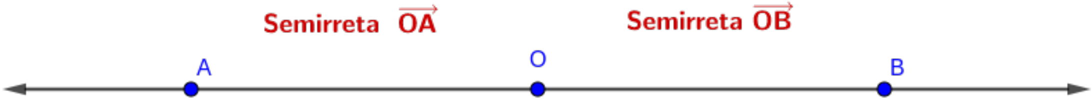
Um ponto O de uma reta r divide-a em duas partes, cada uma delas denominada ***semirreta****.*



O ponto *O* é denominado a **origem** dessas semirretas e as mesmas são denominadas semirretas **opostas**.

Semirretas

Denotaremos as semirretas com letras minúsculas (como as retas) ou através de dois dos seu pontos, sendo um deles a origem.

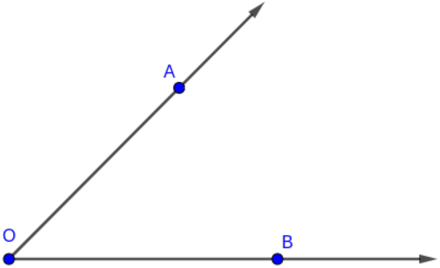


Acima, temos as semirretas opostas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

Ângulos

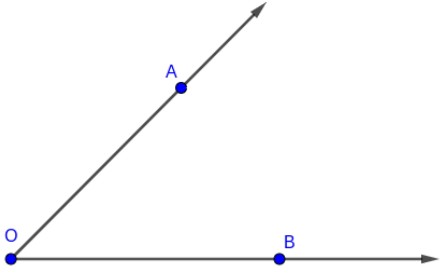
Definição 2

*Chamamos de **ângulo** a figura formada por duas semirretas que têm a mesma origem.*



As semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são chamados **lados** do ângulo e a origem comum O é o seu vértice.

Notações



Para denotar este ângulo, escrevemos:

- $\hat{O}$
- $A\hat{O}B$
- $B\hat{O}A$
- uma letra grega: $\alpha, \beta, \gamma, \eta, \ldots$

Ângulos

Definição 3

Denominamos de ângulo ***raso*** *ao ângulo cujos lados são semirretas opostas (estão sobre a mesma reta, em sentidos opostos).*

Figura 1: $\hat{O}$ é um ângulo raso

Medida de Ângulos

Definição 4

*O número de graus de um ângulo chama-se a sua **medida**.*

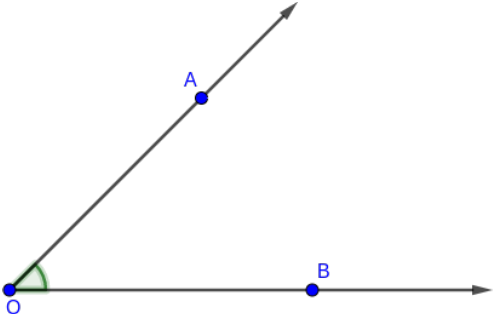


Figura 2: A área em verde representa o ângulo $A\hat{O}B$

8º Postulado

- **Postulado 8:** Todo ângulo tem sua medida, em graus, compreendida entre 0 e 180. A medida de um ângulo é zero se, e somente se, seus lados são semirretas coincidentes. Se seus lados são semirretas opostas, sua medida é 180°.

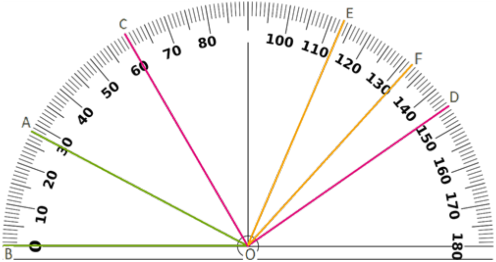


Figura 3: Transferidor: a 'régua' para medir ângulos

Ângulos Congruentes

Definição 5

Dois ângulos são ditos ***congruentes*** *se têm a mesma medida.*

Interior

Definição 6

*Diz-se que um ponto P pertence ao **interior** de um ângulo $A\hat{O}B$, se*

- *P e A estão num mesmo semiplano definido pela reta $\overleftrightarrow{OB}$;*
- *P e B estão num mesmo semiplano definido pela reta $\overleftrightarrow{OA}$.*

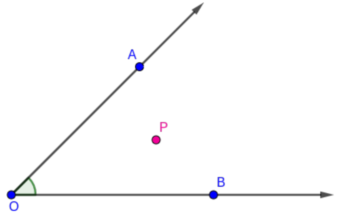


Figura 4: P pertence ao interior do ângulo $A\hat{O}B$

Exterior

Definição 7

*O **exterior** de um ângulo $A\hat{O}B$ é o conjunto de todos os pontos do plano que o contém, tais que:*

- *não pertencem aos lados do ângulo;*
- *não pertencem ao interior do ângulo dado.*

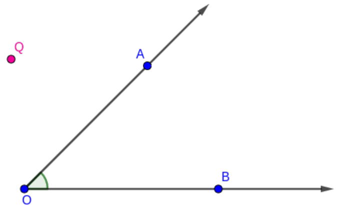
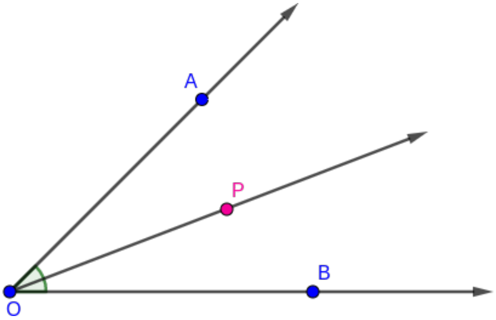


Figura 5: Q pertence ao exterior do ângulo $A\hat{O}B$

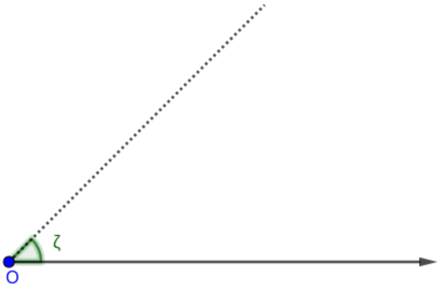
9º Postulado

- **Postulado 9 (Da adição de Ângulos):** Se P é um ponto de interior de um ângulo $A\hat{O}B$, então $A\hat{O}B = A\hat{O}P + P\hat{O}B$.



10º Postulado

- **Postulado 10:** Qualquer que seja o número real ζ, com $0 < \zeta < 180$, podemos construir um único ângulo de ζ graus, a partir de uma semirreta dada num semiplano.

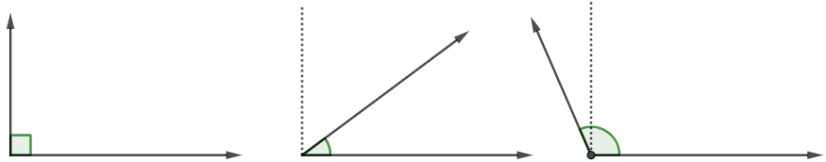


Tipos de Ângulos

Definição 8

Um ângulo $A\hat{O}B$ é dito:

- ***reto**, se sua medida for de 90°;*
- ***agudo**, se sua medida for menor que 90°;*
- ***obtuso**, se sua medida for maior que 90°.*

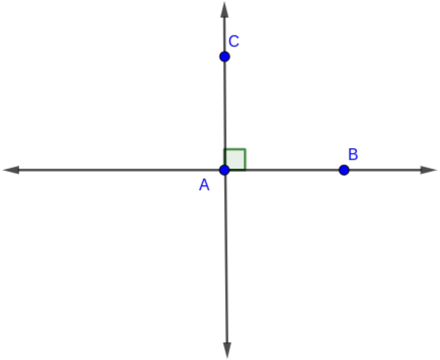


Ângulo reto — Ângulo agudo — Ângulo obtuso

Perpendicularidade

Definição 9

Se duas retas $\overleftrightarrow{AB}$ *e* $\overleftrightarrow{AC}$ *formam um ângulo reto, diz-se que elas são* ***perpendiculares*** *e escrevemos* $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AC}$.



Perpendicularidade

Empregamos o mesmo termo e a mesma notação para semirretas e segmentos. Assim, se $B\hat{A}C = 90$, escrevemos:

- $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$;
- $\overline{AB} \perp \overline{AC}$.

Ângulos Complementares

Definição 10

*Dois ângulos são ditos **complementares**, se a soma de suas medidas é 90°. Cada um deles é denominado o **complemento** do outro.*

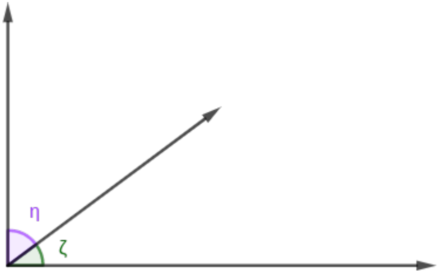


Figura 6: Temos que $\eta + \zeta = 90°$, logo são ângulos complementares.

Ângulos Suplementares

Definição 11

Dois ângulos são ditos ***suplementares****, se a soma de suas medidas é* 180°*. Cada um deles é denominado o* ***suplemento*** *do outro.*

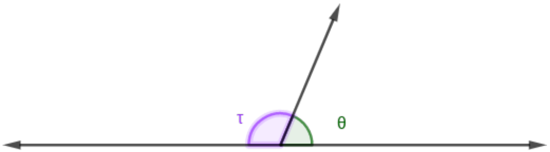


Figura 7: Temos que $\tau + \theta = 180^\circ$, logo são ângulos suplementares.

Ângulos Consecutivos

Definição 12

Dois ângulos são ditos ***consecutivos****, se têm o mesmo vértice, um lado em comum e os outros dois lados situados em semiplanos opostos determinados pelo lado comum.*

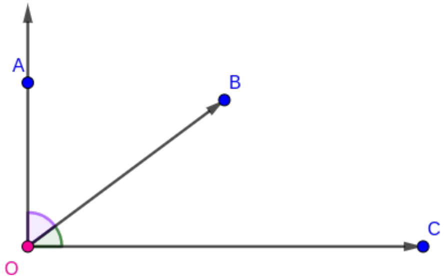


Figura 8: Os ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são consecutivos.

Ângulos Adjacentes

Definição 13

Dois ângulos consecutivos, cujos lados não comuns são semirretas opostas, são denominados ***adjacentes****.*

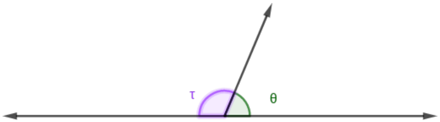


Figura 9: Os ângulos $\tau + \theta = 180^{\circ}$ são adjacentes.

Ângulos Opostos pelo Vértice

Definição 14

*Dois ângulos são ditos **opostos pelo vértice**, se os lados de um deles são as semirretas opostas dos lados do outro.*

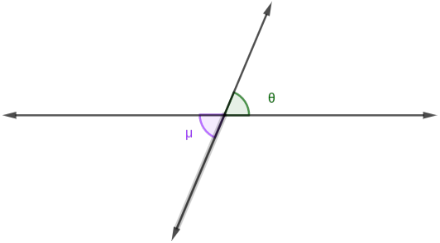


Figura 10: Os ângulos μ e θ são opostos pelo vértice.

Teorema

Teorema 1

Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

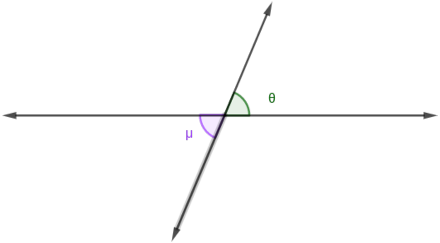


Figura 11: Os ângulos μ e θ são opostos pelo vértice.

Demonstração do Teorema 1

- **Hipótese:** μ e θ são opostos pelo vértice .
- **Tese:** $\mu = \theta$.

Usaremos a prova direta (partimos da hipótese).

Seja τ o ângulo simultaneamente adjacente aos ângulos μ e θ.

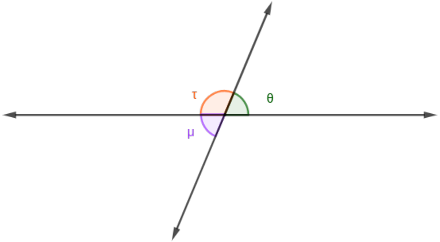
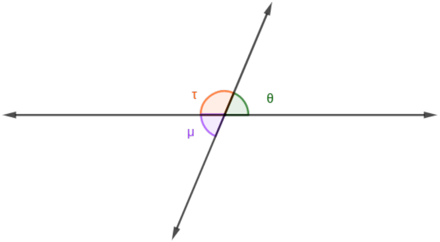


Figura 12: Os ângulos μ e θ são adjacentes ao mesmo ângulo τ.

Demonstração do Teorema 1



Com isso,

$$\mu + \tau = 180^\circ \quad \text{e} \quad \theta + \tau = 180^\circ.$$

Daí, obtemos

$$\mu + \tau = \theta + \tau \Rightarrow \mu + \tau - \tau = \theta + \tau - \tau$$
$$\Rightarrow \mu = \theta.$$

Bissetriz

Definição 15

Seja P um ponto interior do ângulo $A\hat{O}B$. A ***bissetriz*** *do ângulo $A\hat{O}B$, é a semirreta $\overrightarrow{OP}$, tal que $A\hat{O}P = P\hat{O}B$.*

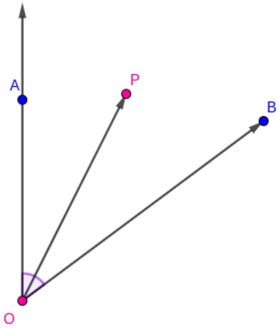
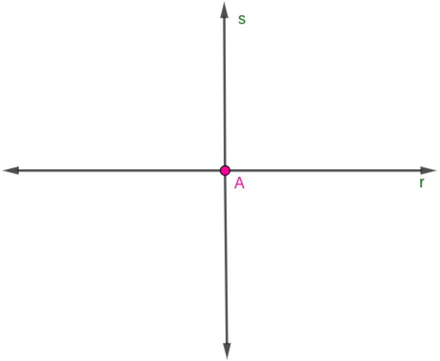


Figura 13: Os ângulos $A\hat{O}P$ e $P\hat{O}B$ possuem a mesma medida.

Teorema

Teorema 2

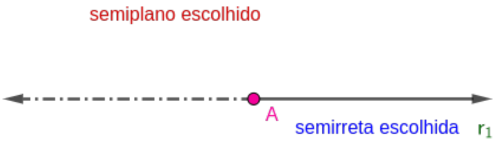
Por um ponto de uma reta pode-se traçar uma única reta perpendicular a reta dada.



Demonstração do Teorema 2

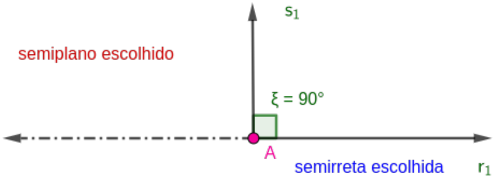
- **Hipótese:** A é um ponto da reta r .
- **Tese:** Existe uma única reta perpendicular a reta r, passando por A.

Sejam r uma reta e A um ponto da mesma. Seja r_1 uma das semirretas de r, com origem em A. Escolha também um dos semiplanos delimitado pela reta r.



Demonstração do Teorema 2

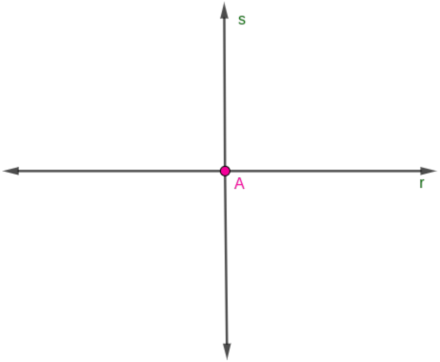
Pelo Postulado 10, existe um único ângulo de $90°$ que pode ser construído a partir de uma semirreta dada. Seja s_1 a semirreta que forma com r_1 este ângulo de $90°$.



Demonstração do Teorema 2

A reta s que contém s_1 é perpendicular a r no ponto A. Pela unicidade de s_1 (Postulado 10), segue que a perpendicular s é única.

■



Lista de Exercícios

Exercício 1

Exercício 1

Escreva algebricamente as seguintes frases:

a) A medida de um ângulo.
b) O dobro da medida de um ângulo.
c) A terça parte de um ângulo.
d) Os três quintos de um ângulo.
e) O complemento de um ângulo.
f) A metade do complemento de uma ângulo.
g) O complemento da metade de um ângulo.

Exercício 1

h) O suplemento de um ângulo.
i) A terça parte do suplemento de um ângulo.
j) O suplemento da terça parte de um ângulo.
k) A soma entre as medidas de dois ângulos.
l) A metade da soma entre as medidas de dois ângulos.
m) A quinta parte da soma entre dois ângulos.
n) O suplemento da soma entre dois ângulos.

Exercício 2

Exercício 2

Complete:

a) *Se* $\hat{A}$ *e* $\hat{B}$ *são ângulos suplementares, então* ______
b) *Se* $\hat{A}$ *e* $\hat{B}$ *são suplementos de* $\hat{C}$*, então* ______
c) *Se* $\hat{A}$ *e* $\hat{B}$ *são ângulos complementares, então* ______
d) *Se* $\hat{A}$ *e* $\hat{B}$ *são complementos de ângulos congruentes, então* ______

Exercícios 3 e 4

Exercício 3

A terça parte da soma entre dois ângulos vale $72°$. *Determiná-los, sabendo-se que um deles é o quíntuplo do outro.*

Exercício 4

O complemento de um ângulo x *está para seu suplemento, assim como* 4 *está para* 19. *Calcular esse ângulo.*

Exercícios 5 e 6

Exercício 5

Dois ângulos consecutivos têm um lado em comum e suas medidas somam 134°. *Determine o ângulo formado pelas suas bissetrizes.*

Exercício 6

Em torno de um ponto, e num mesmo plano, constroem-se quatro ângulos consecutivos. Sabendo-se que cada um deles é igual ao dobro do anterior, achar esses ângulos.

Exercícios 7 e 8

Exercício 7

Prove que a reta perpendicular à bissetriz de um ângulo, traçada pelo vértice do mesmo, forma ângulos congruentes com os lados do ângulo.

Exercício 8

Mostre que as bissetrizes de um ângulo e do seu suplemento são perpendiculares.

Exercícios 9 e 10

Exercício 9

Prove que as bissetrizes de dois ângulos opostos pelo vértice são semirretas opostas.

Exercício 10

Dois ângulos retos, $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$, têm em comum o ângulo $B\hat{O}C$. Mostre que os ângulos $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}D$ são congruentes e que os ângulos $A\hat{O}D$ e $B\hat{O}C$ são suplementares.

Gabarito

Exercício 1:

a) A medida de um ângulo.
R: x

b) O dobro da medida de um ângulo.
R: $2x$.

c) A terça parte de um ângulo.
R: $\frac{x}{3}$.

d) Os três quintos de um ângulo.
R: $\frac{3}{5}x$.

e) O complemento de um ângulo.
R: $90 - x$.

f) A metade do complemento de uma ângulo.
R: $\frac{90-x}{2}$.

g) O complemento da metade de um ângulo.
R: $90 - \frac{x}{2}$.

Exercício 1:

h) O suplemento de um ângulo.
R: $180 - x$.

i) A terça parte do suplemento de um ângulo.
R: $\frac{180-x}{3}$.

j) O suplemento da terça parte de um ângulo.
R: $180 - \frac{x}{3}$.

k) A soma entre as medidas de dois ângulos.
R: $x + y$.

l) A metade da soma entre as medidas de dois ângulos.
R: $\frac{x+y}{2}$.

m) A quinta parte da soma entre dois ângulos.
R: $\frac{x+y}{5}$.

n) O suplemento da soma entre dois ângulos. **R:** $180 - (x + y)$.

Exercício 2:

a) Se $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são ângulos suplementares, então $\hat{A} + \hat{B} = 180$.
b) Se $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são suplementos de $\hat{C}$, então $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são congruentes.
c) Se $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são ângulos complementares, então $\hat{A} + \hat{B} = 90$.
d) Se $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são complementos de ângulos congruentes, então $\hat{A}$ e $\hat{B}$ também são congruentes.

Exercício 3: 36° e 180°.
Exercício 4: 66°.
Exercício 5: 67°.
Exercício 6: 24°, 48°, 96° e 192°.