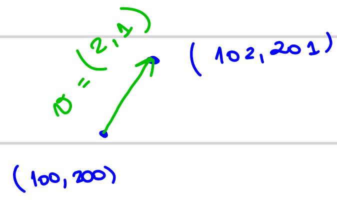
Exame Final : C III

(01) $P(x,y) = 759 + 12x + 7y + 0.01xy - 0.09x^2 - 0.008y^2$



$* \quad v = (2,1) \Rightarrow \dfrac{v}{\|v\|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2,1) = \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$* \quad \nabla P(x,y) = (12 + 0.01y - 0.18x \,,\, 7 + 0.01x - 0.016y)$

$\Rightarrow \nabla P(100,200) = (12 + 0.01 \times 200 - 0.18 \times 100 \,,\, 7 + 0.01 \times 100 - 0.016 \times 200)$

$= (-4, 4.8)$

Queremos encontrar a que taxa a produção de feijão irá variar a partir do ponto (100,200) na direção do ponto (102, 201). Para isso, calculamos a derivada direcional de P no ponto (100,200), na direção do vetor $v = (2,1)$:

$$D_v P(100,200) = \nabla P(100,200) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= (-4, 4.8) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{-8}{\sqrt{5}} + \frac{4.8}{\sqrt{5}} = -\frac{3.2}{\sqrt{5}} .$$

(02) $f(x,y) = 3x^2 + 2xy + y^2 + 10x + 2y + 1$

a) Para encontrar os pontos críticos, devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} f_x = 6x + 2y + 10 = 0 \\ f_y = 2x + 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y + 5 = 0 & (\mathrm{I}) \\ x + y + 1 = 0 & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

Fazendo (I) − (II), obtemos

$2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$.

Substituindo em (II) : $-2 + y + 1 = 0 \Rightarrow y = 1$.

Logo, o único ponto crítico é $(-2,1)$. Para classificá-lo, aplicaremos o teste da 2ª derivada :

$D(-2,1) = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 4 = 8 > 0$, com $f_{xx} = 6 > 0$. O ponto é de mínimo local.

b) A restrição é dada pela função $g(x,y) = x-y$. Usando o método de multiplicadores de Lagrange, obtemos:

$$\begin{cases} 6x + 2y + 10 = \lambda & (I) \\ 2x + 2y + 2 = -\lambda & (II) \\ x - y = 1 & (III) \end{cases}$$

Somando (I) e (II), obtemos

$$8x + 4y + 12 = 0 \Rightarrow 2x + y + 3 = 0.$$

De (III), concluímos que $x = 1+y$ e substituindo na equação acima, temos que

$$2(1+y) + y + 3 = 0 \Rightarrow 2 + 2y + y + 3 = 0 \Rightarrow y = -\frac{5}{3}.$$

Logo, $x = 1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}$. Precisamos verificar se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ que satisfaz (I) e (II) para $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right)$:

$$6\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\left(-\frac{5}{3}\right) + 10 = \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{8}{3}$$

$$2\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\left(-\frac{5}{3}\right) + 2 = -\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{8}{3}.$$

o mesmo para o par $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right)$

Portanto $(x, y, \lambda) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right)$ é a solução do sistema e $f\left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right)$ é um candidato a extremo absoluto. Como é único, devemos verificar se é de máximo ou de mínimo. Dado o ponto $(2,1)$ da restrição $(2-1=1)$, temos que $f(2,1) = 40$. Como $f\left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right) = -\frac{24}{9} < f(2,1) = 40$, só resta a $f(-2/3, -5/3)$ ser um valor mínimo absoluto.

Não há valor máximo absoluto nesta restrição.

03 $\iiint_E \frac{x}{x^2+y^2}\, dV$

$$\iiint_E \frac{x}{x^2+y^2}\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^4\int_2^{6-r} \frac{r\cos\theta}{r^2}\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^4\int_2^{6-r} \cos\theta\, dz\, dr\, d\theta \quad \int_0^{2\pi}\int_0^4 \cos\theta\, (6-r-2)\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta \int_0^4 (4-r)\, dr = \operatorname{sen}\theta \Big|_0^{2\pi} \left(4r - r^2/2\right)\Big|_0^4 = 0.$$

04 $\iiint_E \frac{e^{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dV$, $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, $z \leq 0$

$$\iiint_E \frac{e^{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dV = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^1 \frac{e^{\rho^2}}{\rho}\, \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen}\phi \int_0^1 e^{\rho^2} \rho\, d\rho = 2\pi\, (-\cos\phi)\Big|_{\pi/2}^{\pi} \frac{e^{\rho^2}}{2}\Big|_0^1$$

$$= 2\pi \left(\frac{e}{2} - \frac{1}{2}\right) = \pi\,(e-1)$$

05 Temos que

$$x = 3r\cos\theta + 3 \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial r} = 3\cos\theta \quad e \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -3r\operatorname{sen}\theta$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta + 2 \rightarrow \frac{\partial y}{\partial r} = \operatorname{sen}\theta \quad e \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta .$$

Assim, o Jacobiano é dado por

$$|J| = \begin{vmatrix} 3\cos\theta & -3r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = 3r\cos^2\theta - (-3r\operatorname{sen}^2\theta) = 3r\cos^2\theta + 3r\operatorname{sen}^2\theta$$

$$= 3r\,(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = 3r.$$

Logo,

$$\iint_R x\, dx\, dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (3r\cos\theta + 3)\, 3r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (9r^2\cos\theta + 9r)\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 3r^3\cos\theta + \frac{9r^2}{2}\Big|_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} 3\cos\theta + \frac{9}{2}\, d\theta$$

$$= 3\operatorname{sen}\theta + \frac{9}{2}\theta \Big|_0^{2\pi} = 9\pi.$$