

## **Aula 02**

### **Ângulos**

Karla Lima

22 de fevereiro de 2022

# Sumário



## 1. Definição e Propriedades

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the top-left corner, while a light gray shape occupies the bottom-left corner. The rest of the slide is white.

## Definição e Propriedades

# AVISO



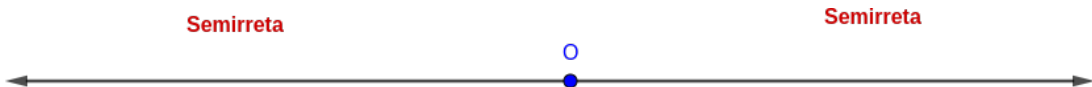
Nesta aula, todos os entes geométricos estão situados num mesmo plano  $\alpha$ .

# Semirretas



## Definição 1

Um ponto  $O$  de uma reta  $r$  divide-a em duas partes, cada uma delas denominada **semirreta**.

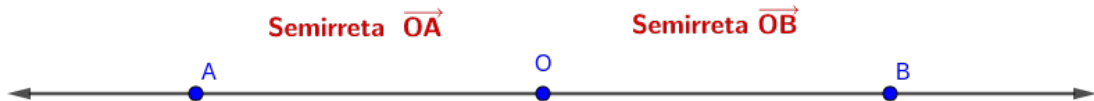


O ponto  $O$  é denominado a **origem** dessas semirretas e as mesmas são denominadas semirretas **opostas**.

# Semirretas



Denotaremos as semirretas com letras minúsculas (como as retas) ou através de dois dos seu pontos, sendo um deles a origem.



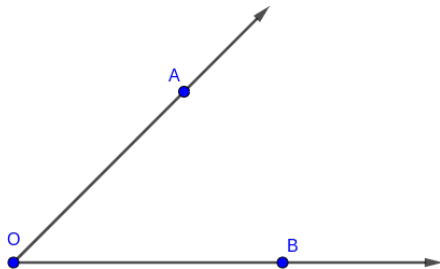
Acima, temos as semirretas opostas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ .

# Ângulos



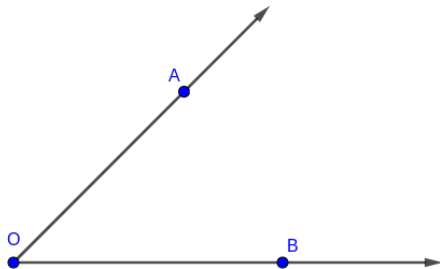
## Definição 2

Chamamos de **ângulo** a figura formada por duas semirretas que têm a mesma origem.



As semirretas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$  são chamados **lados** do ângulo e a origem comum  $O$  é o seu vértice.

# Notações



Para denotar este ângulo, escrevemos:

- ▶  $\hat{O}$
- ▶  $\hat{AOB}$
- ▶  $\hat{BOA}$
- ▶ uma letra grega:  $\alpha, \beta, \gamma, \eta, \dots$



# Ângulos



## Definição 3

Denominamos de ângulo **raso** ao ângulo cujos lados são semirretas opostas (estão sobre a mesma reta, em sentidos opostos).



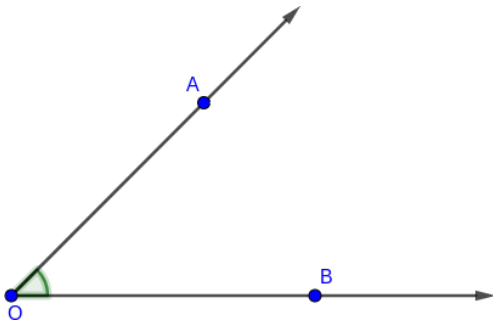
Figura 1:  $\hat{O}$  é um ângulo raso

# Medida de Ângulos



## Definição 4

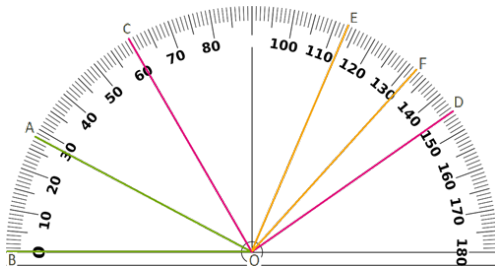
*O número de graus de um ângulo chama-se a sua **medida**.*



**Figura 2:** A área em verde representa o ângulo  $\widehat{AOB}$

## 8º Postulado

- **Postulado 8:** Todo ângulo tem sua medida, em graus, compreendida entre 0 e 180. A medida de um ângulo é zero se, e somente se, seus lados são semirretas coincidentes. Se seus lados são semirretas opostas, sua medida é  $180^\circ$ .



**Figura 3:** Transferidor: a 'régua' para medir ângulos

# Ângulos Congruentes



## Definição 5

*Dois ângulos são ditos **congruentes** se têm a mesma medida.*

# Interior



## Definição 6

Diz-se que um ponto  $P$  pertence ao **interior** de um ângulo  $\widehat{AOB}$ , se

- ▶  $P$  e  $A$  estão num mesmo semiplano definido pela reta  $\overleftrightarrow{OB}$ ;
- ▶  $P$  e  $B$  estão num mesmo semiplano definido pela reta  $\overleftrightarrow{OA}$ .

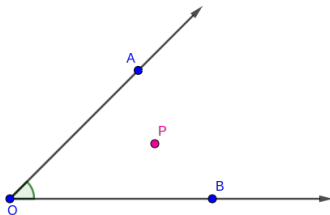


Figura 4:  $P$  pertence ao interior do ângulo  $\widehat{AOB}$

# Exterior



## Definição 7

O **exterior** de um ângulo  $\hat{A}OB$  é o conjunto de todos os pontos do plano que o contém, tais que:

- ▶ não pertencem aos lados do ângulo;
- ▶ não pertencem ao interior do ângulo dado.

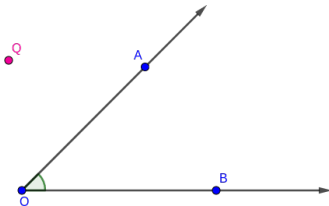
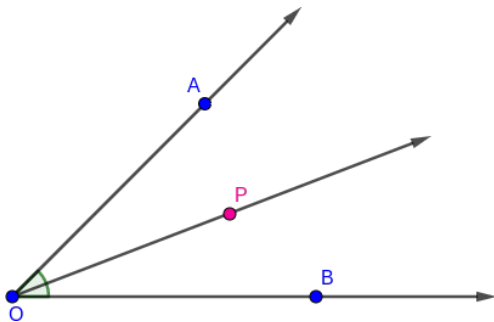


Figura 5: Q pertence ao exterior do ângulo  $\hat{A}OB$

## 9º Postulado



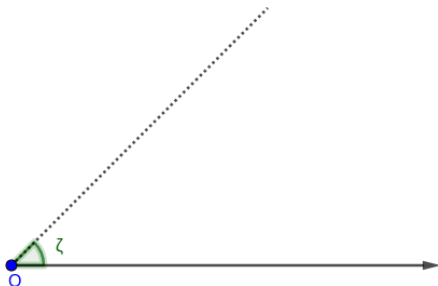
- **Postulado 9 (Da adição de Ângulos):** Se  $P$  é um ponto de interior de um ângulo  $\widehat{AOB}$ , então  $\widehat{AOB} = \widehat{AOP} + \widehat{POB}$ .



# 10º Postulado



- **Postulado 10:** Qualquer que seja o número real  $\zeta$ , com  $0 < \zeta < 180$ , podemos construir um único ângulo de  $\zeta$  graus, a partir de uma semirreta dada num semiplano.





# Tipos de Ângulos



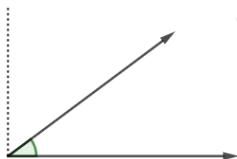
## Definição 8

Um ângulo  $A\hat{O}B$  é dito:

- ▶ **reto**, se sua medida for de  $90^\circ$ ;
- ▶ **agudo**, se sua medida for menor que  $90^\circ$ ;
- ▶ **obtuso**, se sua medida for maior que  $90^\circ$ .



Ângulo reto



Ângulo agudo



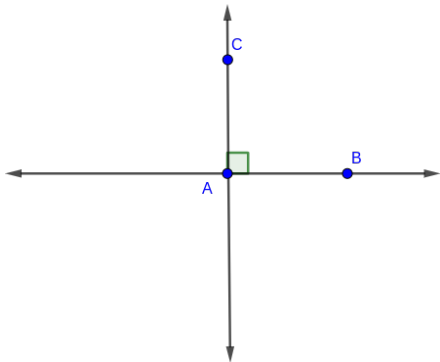
Ângulo obtuso

# Perpendicularidade



## Definição 9

Se duas retas  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{AC}$  formam um ângulo reto, diz-se que elas são **perpendiculares** e escrevemos  $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AC}$ .



# Perpendicularidade



Empregamos o mesmo termo e a mesma notação para semirretas e segmentos. Assim, se  $\hat{B}AC = 90$ , escrevemos:

►  $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC};$

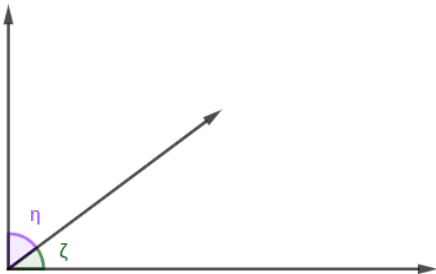
►  $\overline{AB} \perp \overline{AC}.$

# Ângulos Complementares



## Definição 10

Dois ângulos são ditos **complementares**, se a soma de suas medidas é  $90^\circ$ . Cada um deles é denominado o **complemento** do outro.



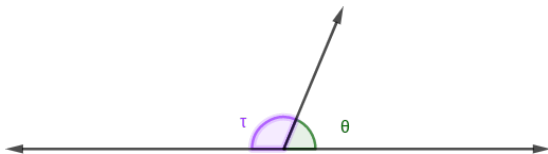
**Figura 6:** Temos que  $\eta + \zeta = 90^\circ$ , logo são ângulos complementares.

# Ângulos Suplementares



## Definição 11

Dois ângulos são ditos **suplementares**, se a soma de suas medidas é  $180^\circ$ . Cada um deles é denominado o **suplemento** do outro.



**Figura 7:** Temos que  $\tau + \theta = 180^\circ$ , logo são ângulos suplementares.

# Ângulos Consecutivos



## Definição 12

Dois ângulos são ditos **consecutivos**, se têm o mesmo vértice, um lado em comum e os outros dois lados situados em semiplanos opostos determinados pelo lado comum.

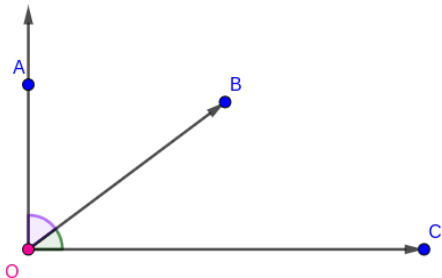


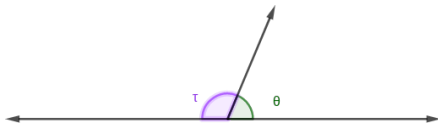
Figura 8: Os ângulos  $\widehat{AOB}$  e  $\widehat{BOC}$  são consecutivos.

# Ângulos Adjacentes



## Definição 13

*Dois ângulos consecutivos, cujos lados não comuns são semirretas opostas, são denominados **adjacentes**.*



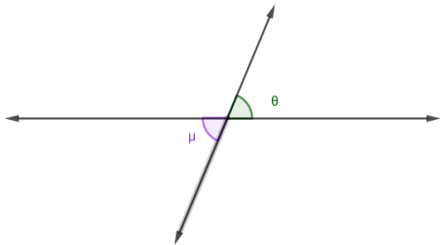
**Figura 9:** Os ângulos  $\tau + \theta = 180^\circ$  são adjacentes.

# Ângulos Opostos pelo Vértice



## Definição 14

Dois ângulos são ditos **opostos pelo vértice**, se os lados de um deles são as semirretas opostas dos lados do outro.



**Figura 10:** Os ângulos  $\mu$  e  $\theta$  são opostos pelo vértice.

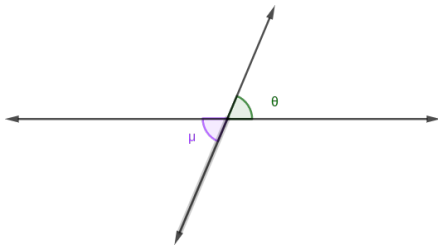


# Teorema



## Teorema 1

*Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.*



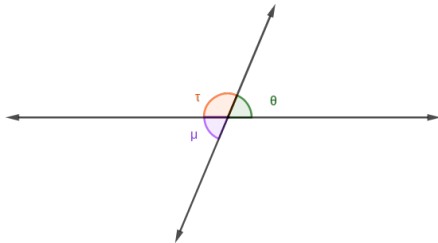
**Figura 11:** Os ângulos  $\mu$  e  $\theta$  são opostos pelo vértice.

# Demonstração do Teorema 1

- ▶ **Hipótese:**  $\mu$  e  $\theta$  são opostos pelo vértice .
- ▶ **Tese:**  $\mu = \theta$ .

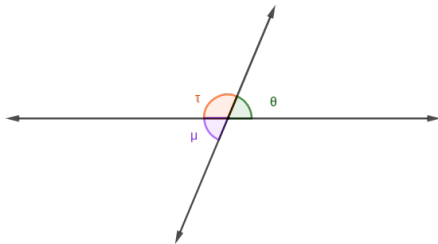
Usaremos a prova direta (partimos da hipótese).

Seja  $\tau$  o ângulo simultaneamente adjacente aos ângulos  $\mu$  e  $\theta$ .



**Figura 12:** Os ângulos  $\mu$  e  $\theta$  são adjacentes ao mesmo ângulo  $\tau$ .

# Demonstração do Teorema 1



Com isso,

$$\mu + \tau = 180^\circ \quad \text{e} \quad \theta + \tau = 180^\circ.$$

Daí, obtemos

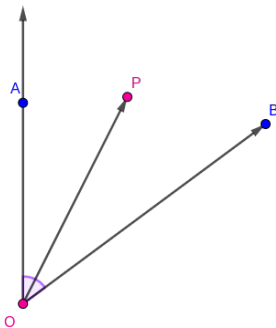
$$\begin{aligned} \mu + \tau &= \theta + \tau \Rightarrow \mu + \tau - \tau = \theta + \tau - \tau \\ &\Rightarrow \mu = \theta. \end{aligned}$$

# Bissetriz



## Definição 15

Seja  $P$  um ponto interior do ângulo  $\widehat{AOB}$ . A **bissetriz** do ângulo  $\widehat{AOB}$ , é a semirreta  $\overrightarrow{OP}$ , tal que  $\widehat{AOP} = \widehat{POB}$ .



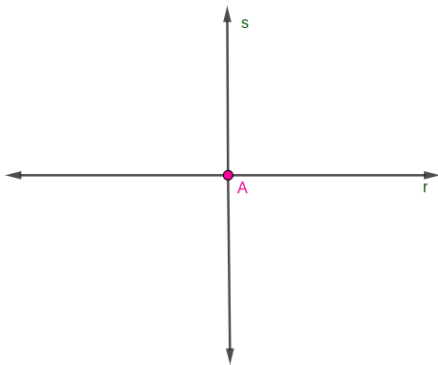
**Figura 13:** Os ângulos  $\widehat{AOP}$  e  $\widehat{POB}$  possuem a mesma medida.

# Teorema



## Teorema 2

*Por um ponto de uma reta pode-se traçar uma única reta perpendicular a reta dada.*



## Demonstração do Teorema 2



- ▶ **Hipótese:**  $A$  é um ponto da reta  $r$ .
- ▶ **Tese:** Existe uma única reta perpendicular a reta  $r$ , passando por  $A$ .

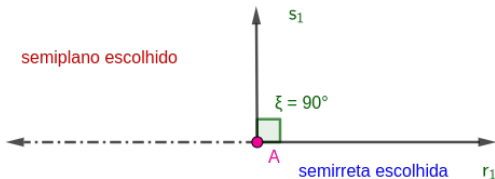
Sejam  $r$  uma reta e  $A$  um ponto da mesma. Seja  $r_1$  uma das semirretas de  $r$ , com origem em  $A$ . Escolha também um dos semiplanos delimitado pela reta  $r$ .



# Demonstração do Teorema 2



Pelo Postulado 10, existe um único ângulo de  $90^\circ$  que pode ser construído a partir de uma semirreta dada. Seja  $s_1$  a semirreta que forma com  $r_1$  este ângulo de  $90^\circ$ .



## Demonstração do Teorema 2



A reta  $s$  que contém  $s_1$  é perpendicular a  $r$  no ponto  $A$ . Pela unicidade de  $s_1$  (Postulado 10), segue que a perpendicular  $s$  é única.

