Derivadas Direcionais

→ Derivadas parciais dão as taxas de variação instantâneas da função nas direções paralelas aos eixos coordenados;
↳ aqui apenas uma variável é variada

→ Derivadas direcionais nos permitem calcular taxas de variação em relação a qualquer direção.
↳ aqui, todas as variáveis podem variar ao mesmo tempo

Definição: A derivada direcional de uma função f na direção e no sentido de um vetor $u=(a,b)$ é calculada pela expressão

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \underbrace{\cdot}_{\text{produto escalar}} \frac{u}{|u|}$$

(é o produto entre vetores)

$$= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\text{produto entre números}} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

onde $|u| = \sqrt{a^2+b^2}$ (comprimento do vetor $u=(a,b)$).

Esta derivada dá a taxa de variação de $f(x,y)$ na direção e no sentido do vetor unitário $\frac{u}{|u|}$.
↓ módulo do vetor é igual a 1!

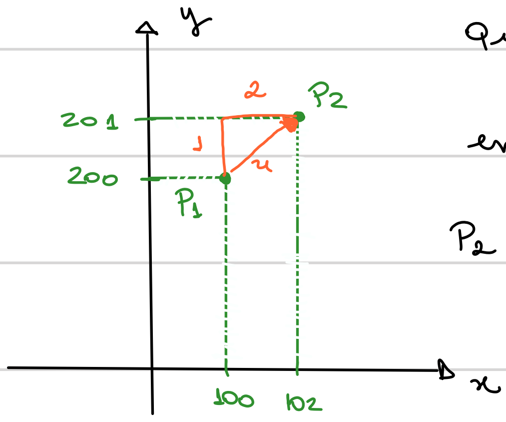
Exemplo 1: Considerando a produção de feijão (kg/ha), em função da quantidade aplicada de nitrogênio x (kg/ha) e da lâmina de água y (mm), dada por

$$P(x,y) = 759.29 + 12.771x + 7.96y + 0.0152xy - 0.0913x^2 - 0.00854y^2,$$

analise qual deverá ser a produção de feijão quando a dose de nitrogênio passar de 100 para 102 (kg/ha) e a lâmina de água variar de 200 para 201 (mm).

Solução: Queremos avaliar se a produção irá crescer, decrescer ou permanecer constante, em relação ao valor da produção $P(100,200) = 2677.79$ (kg/ha), quando aumentarmos a dose de nitrogênio em 2 (kg/ha) e a lâmina de água em 1 (mm).

Geometricamente:

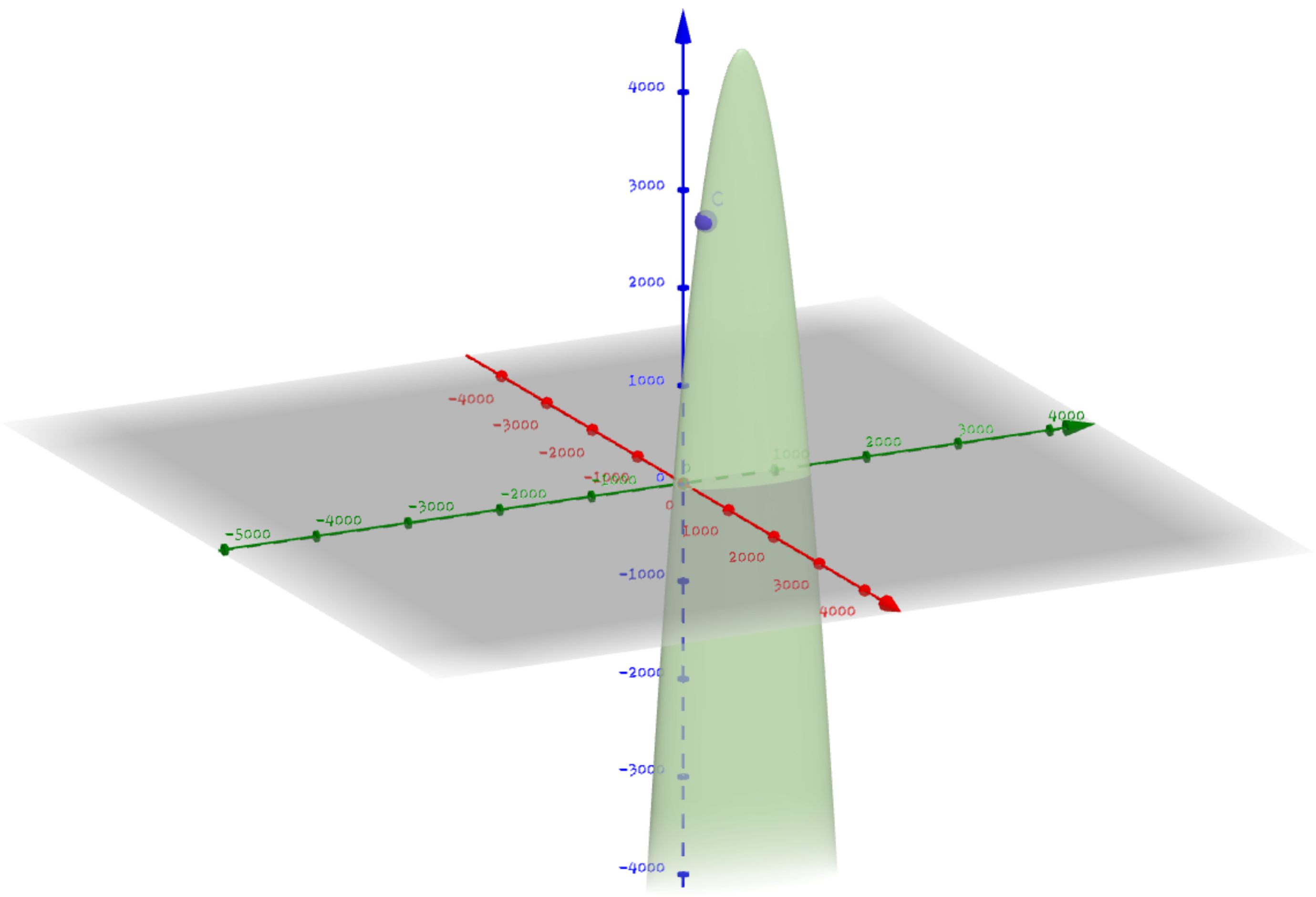


Queremos avaliar a variação da produção em $P_1 = (100, 200)$ em direção ao ponto $P_2 = (102, 201)$; isto significa que a partir de P_1 andamos na direção e sentido do vetor $u = (2, 1)$

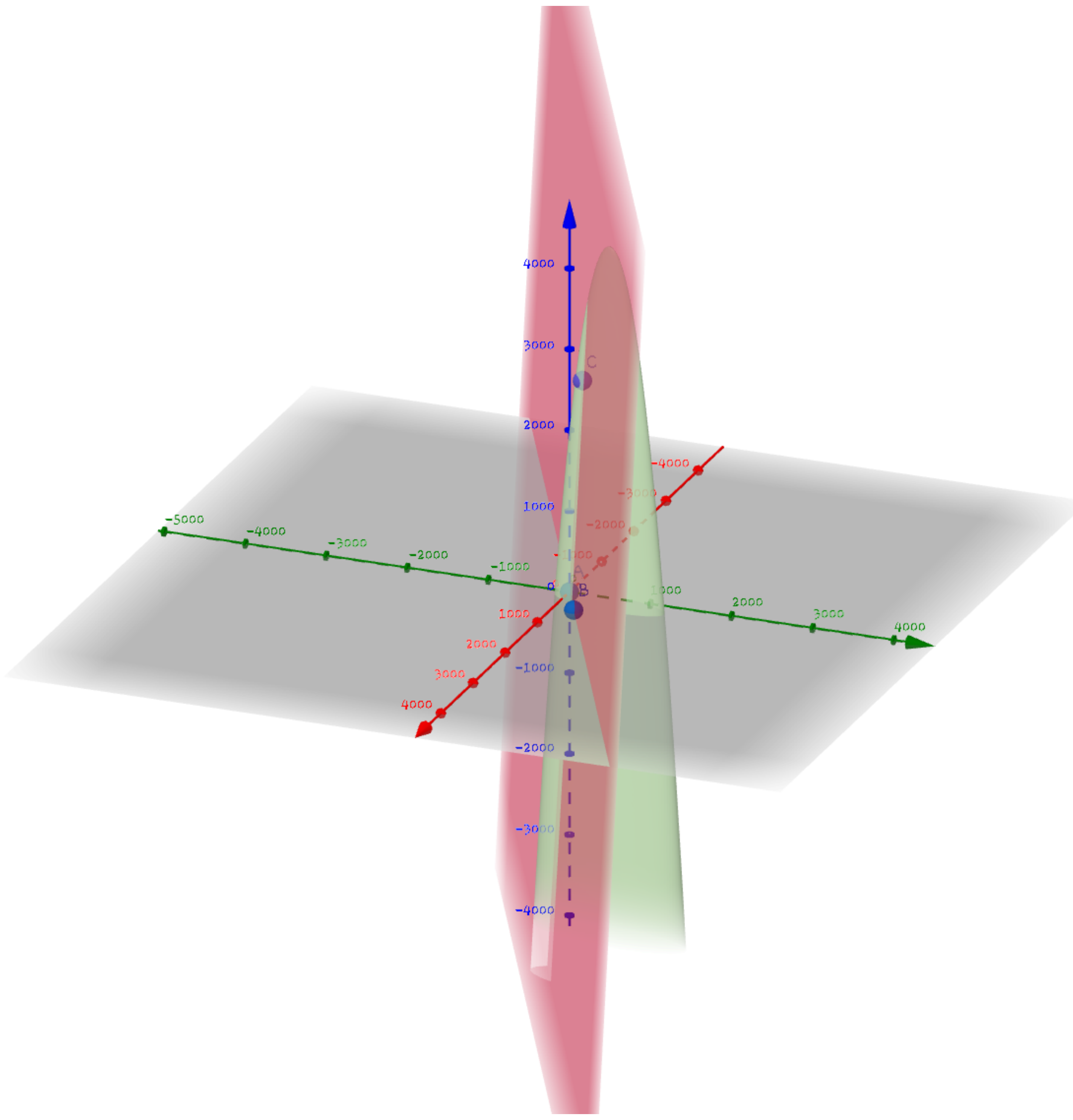
anda 2 unidades em x

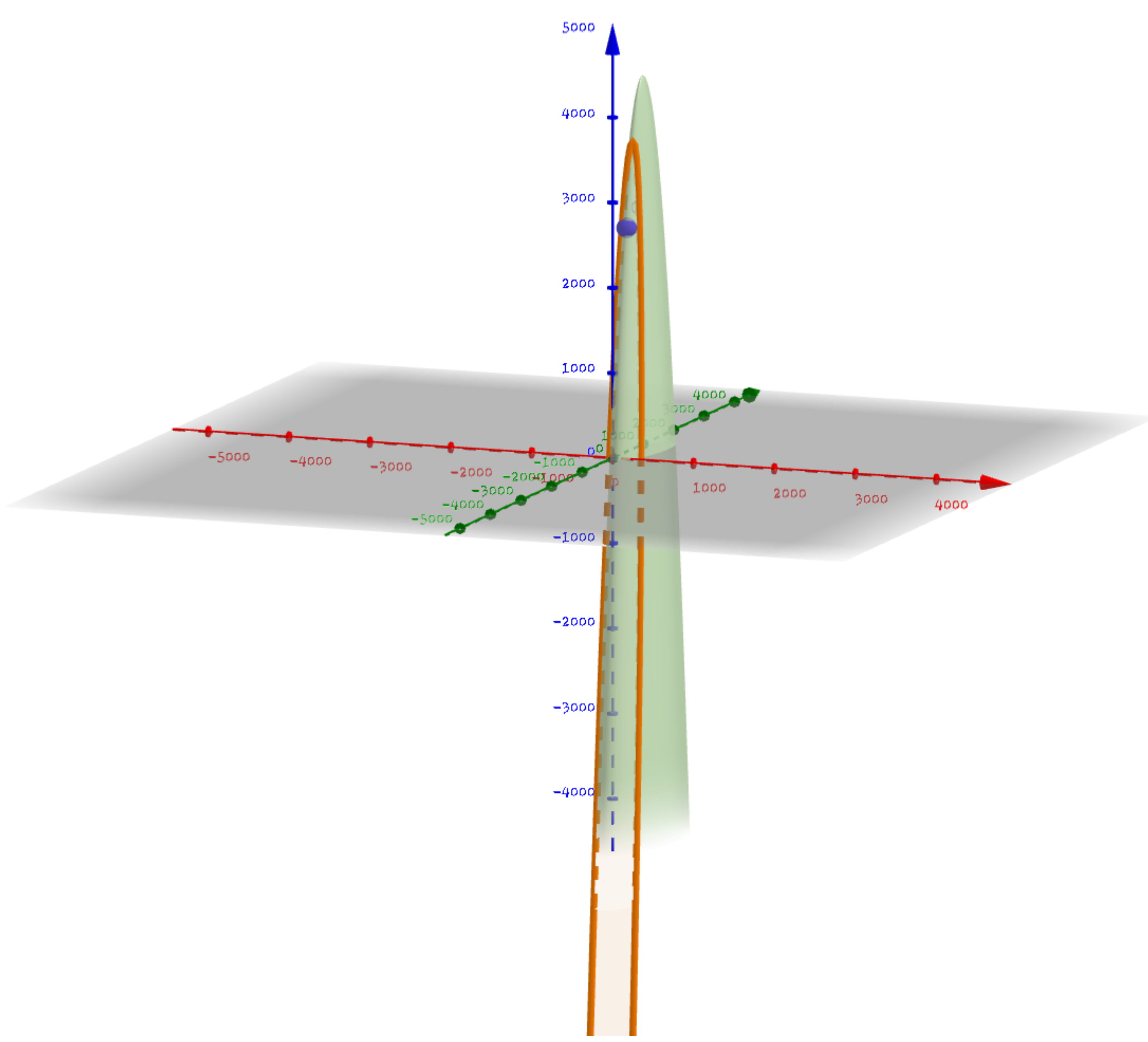
anda 1 unidade em y.

Abaixo temos o gráfico da função P e $C = (100, 200, P(100,200))$
$= (100, 200, 2677.79)$.



Queremos a variação da função na direção do vetor $u = (2,1)$ e, tomando o plano que é paralelo ao vetor u e passa pelo ponto $C = (100, 200, 2677.9)$, obtemos uma curva na qual calcularemos a taxa de variação em C:





IMPORTANTE: Para calcular a derivada parcial na direção de u, na fórmula usamos o representante unitário dessa direção e sentido: $\frac{u}{|u|}$.

Antes de calcular a taxa de variação pedida, vamos calcular o vetor unitário na direção e sentido de u:

$$|u| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5} \implies \frac{u}{|u|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Devemos, também, calcular as derivadas parciais $\frac{\partial P}{\partial x}(100, 200)$ e $\frac{\partial P}{\partial y}(100, 200)$:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 12.771 + 0.0152y - 1.826x \implies \frac{\partial P}{\partial x}(100,200) = -2.449$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 7.96 + 0.0152x - 0.01708y \implies \frac{\partial P}{\partial y}(100,200) = 6.064.$$

Por fim, aplicando a definição de derivada direcional:

$$\frac{dP}{du}(100,200) = \left(-2.449, 6.064\right) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= -2.449\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + 6.064\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1.166}{\sqrt{5}} \simeq 0.5214.$$

positivo

Isto quer dizer que 0.5214 é a taxa na qual a produção irá aumentar por unidade de variação, medida na direção e sentido do vetor u.

Para mais exemplos: Cálculo, vol. 2 - J. Stewart

Matemática aplicada às ciências agrárias - R.S. Ferreira.