

## Aula 14

### Limite e Continuidade

Karla Lima

12/04/2023

# Sumário



1. Limites Laterais
2. Limites Infinitos
3. Cálculo de Limites
4. Continuidade
5. O Conceito de Derivada

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the upper-left portion, while a light gray shape occupies the lower-left portion. The rest of the slide is white. The text is centered in the white area.

# Limites Laterais

# Função de Heaviside



- ▶ Em matemática e estatística, a função de **Heaviside** (ou função degrau), desenvolvida pelo matemático e engenheiro eletricitista Oliver Heaviside, é uma função singular e descontínua (?) com valor zero quando o seu argumento é negativo e valor unitário quando o argumento é positivo.
- ▶ Quando o argumento é zero a função não precisa estar definida (ou pode-se definir qualquer valor, dependendo do contexto, por exemplo  $1/2$  - a média dos limites laterais da função (pela esquerda e pela direita)).

# Função de Heaviside



- Costuma-se defini-la como

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

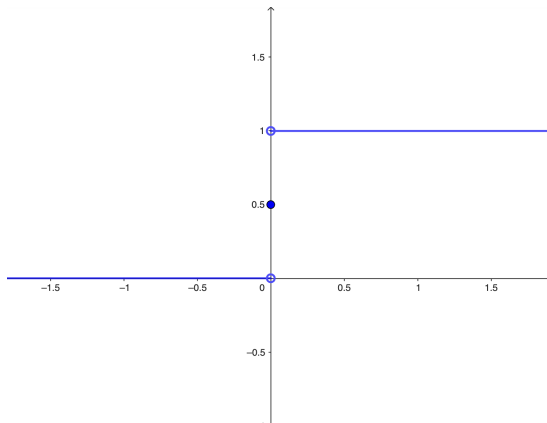
- No caso em que ela está com um valor definido para o zero, podemos escrever, por exemplo:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/2, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

# Função de Heaviside



- No segundo caso, seu gráfico é dado ao lado:



# Função de Heaviside

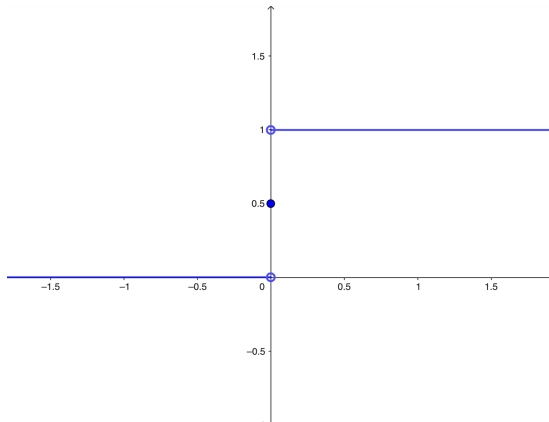


► que você pode afirmar sobre os seguintes limites:

a)  $\lim_{x \rightarrow -0.5} H(x).$

b)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} H(x).$

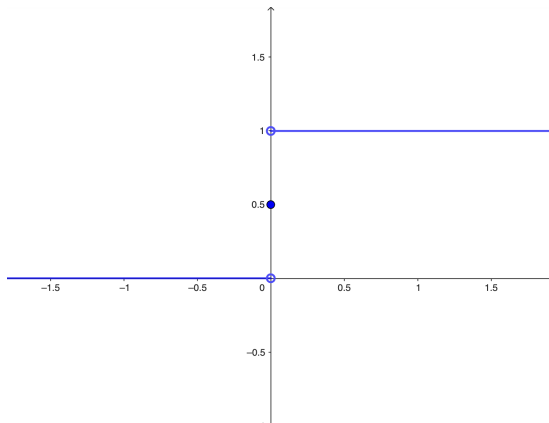
c)  $\lim_{x \rightarrow 0} H(x).$



# Função de Heaviside



- ▶ Se  $a < 0$ , então em torno desse valor ( $x$  arbitrariamente próximo de  $a$ ) a função assume o valor constante  $H(x) = 0$ .
  - ▶ Logo,  $\lim_{x \rightarrow a} H(x)$
- ▶ Se  $a > 0$ , então em torno desse valor ( $x$  arbitrariamente próximo de  $a$ ) a função assume o valor constante  $H(x) = 1$ .
  - ▶ Logo,  $\lim_{x \rightarrow a} H(x) = 1$ .



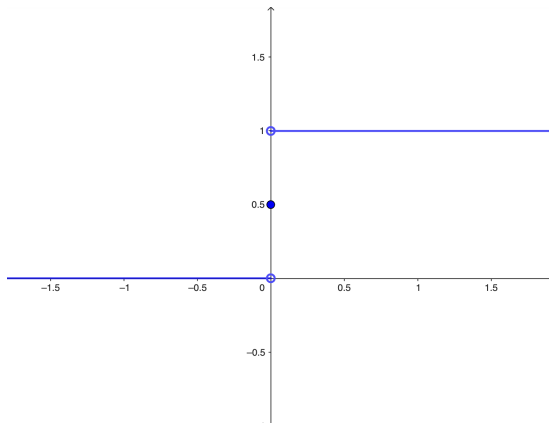


# Função de Heaviside



- ▶ Entretanto, se  $a = 0$ , então em torno desse valor ( $x$  arbitrariamente próximo de  $a$ ) a função assume os dois valores, dependendo se estão à direita ou à esquerda de zero:

- ▶ Logo,  $\lim_{x \rightarrow 0} H(x) = \nexists$ .



# Limites Laterais - à direita



## Definição 1

**Limite à direita:** Se os valores assumidos por uma função  $f(x)$  arbitrariamente se aproximam de  $L$ , quando os valores de entrada  $x$  ficam cada vez mais próximos de  $a$  (mas sempre maiores), então  $L$  é chamado de limite de  $f(x)$  quando  $x$  se aproxima de  $a$  pela direita, o que se escreve como

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L.$$

# Limites Laterais - à direita

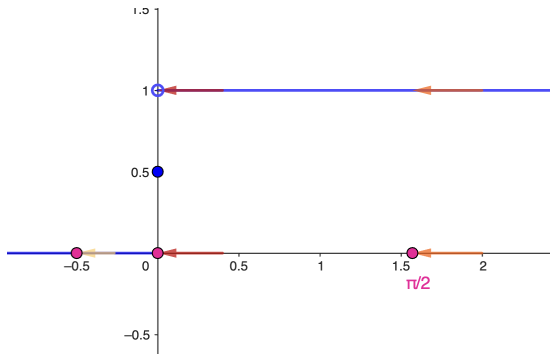


Por exemplo, na função Heaviside, temos:

►  $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} H(x) = 1.$

►  $\lim_{x \rightarrow 0^+} H(x) = 1.$

►  $\lim_{x \rightarrow -0.5^+} H(x) = 0.$



# Limites Laterais - à esquerda



## Definição 2

**Limite à esquerda:** Se os valores assumidos por uma função  $f(x)$  arbitrariamente se aproximam de  $L$ , quando os valores de entrada  $x$  ficam cada vez mais próximos de  $a$  (mas sempre menores), então  $L$  é chamado de limite de  $f(x)$  quando  $x$  se aproxima de  $a$  pela esquerda, o que se escreve como

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L.$$

# Limites Laterais - à esquerda

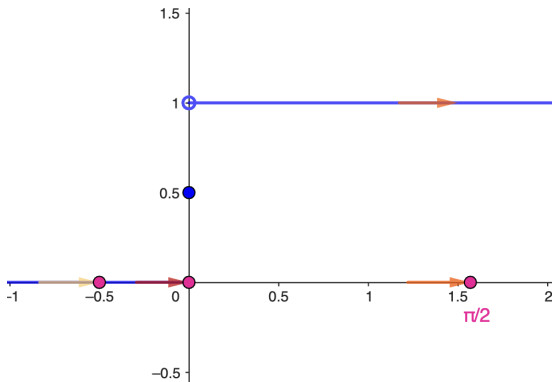


Por exemplo, na função Heaviside, temos:

►  $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} H(x) = 1.$

►  $\lim_{x \rightarrow 0^-} H(x) = 0.$

►  $\lim_{x \rightarrow -0.5^-} H(x) = 0.$



# Limites Laterais e a Definição de Limite



## Definição 3

*O limite bilateral de uma função  $f$  existe em um ponto  $a$  se, e somente se, existirem os limites laterais naquele ponto e tiverem o mesmo valor; isto é*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

# Limites Laterais e a Definição de Limite



## Definição 3

*O limite bilateral de uma função  $f$  existe em um ponto  $a$  se, e somente se, existirem os limites laterais naquele ponto e tiverem o mesmo valor; isto é*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

► Com isso, temos que

- $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} H(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} H(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pi/2} H(x) = 1;$
- $\lim_{x \rightarrow -0.5^-} H(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow -0.5^+} H(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -0.5} H(x) = 0;$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} H(x) = 0 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} H(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} H(x) = \nexists.$

► Todas as propriedades de limite são válidas para os limites laterais.

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the top-left corner, while a light gray shape occupies the bottom-left corner. The rest of the slide is white. The text "Limites Infinitos" is centered in the white area.

# Limites Infinitos



# Limite Infinito



## Definição 4

*Seja  $f$  uma função definida em ambos os lados de  $a$ , exceto possivelmente em  $a$ . Então*

- 1)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  significa que podemos fazer os valores de  $f(x)$  ficarem arbitrariamente grandes tomando  $x$  suficientemente próximo de  $a$ , mas não igual a  $a$ .*
- 2)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  significa que podemos fazer os valores de  $f(x)$  ficarem arbitrariamente grandes, porém negativos, tomando  $x$  suficientemente próximo de  $a$ , mas não igual a  $a$ .*

# Limite Infinito



## Exemplo 1

Vamos analisar o que acontece com a função  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  quando  $x$  se aproxima de 0.

- ▶ A medida que  $x$  se aproxima de 0,  $x^2$  também se aproxima de zero, tornando-se um número muito pequeno.
- ▶ Assim, ao efetuarmos a divisão  $\frac{1}{x^2}$ , obtemos um número grande, como podemos ver na tabela ao lado:

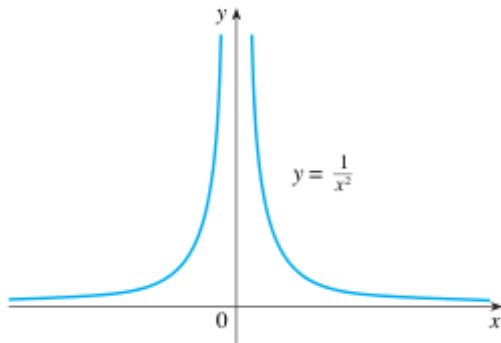
$x$	$\frac{1}{x^2}$
$\pm 1$	1
$\pm 0,5$	4
$\pm 0,2$	25
$\pm 0,1$	100
$\pm 0,05$	400
$\pm 0,01$	10 000
$\pm 0,001$	1 000 000

# Limite Infinito

- ▶ Assim, os valores de  $f(x)$  não tendem a um número, e não existe  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ .
- ▶ Para indicar o comportamento exibido nesse exemplo, usamos a notação

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

- ▶ Lê-se:  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  tende ao infinito, quando  $x$  tende a 0.



# Limite Infinito

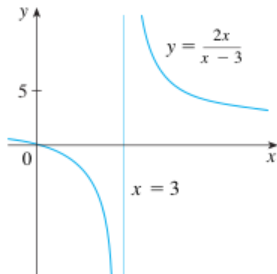
## Exemplo 2

*Na figura abaixo, podemos ver que a medida que  $x$  se aproxima de 3 pela esquerda, os valores de  $f(x)$  se tornam arbitrariamente grandes, negativos. Já a medida que se aproxima de 3 pela direita, os valores de  $f(x)$  se tornam arbitrariamente grandes, mas positivos.*

► Escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x}{x-3} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x}{x-3} = \infty$$

para indicar esses limites laterais (que não existem, é apenas uma notação!).



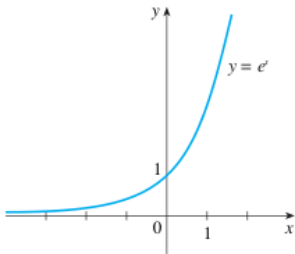
# Limites no Infinito



Agora vamos analisar os limites de uma função  $f(x)$ , quando os valores de  $x$  tornam-se arbitrariamente grandes, tanto positivos quanto negativos.

## Exemplo 3

Observe o gráfico da função  $f(x) = e^x$  e uma tabela com alguns valores para  $x$ .



$x$	$e^x$
0	1,00000
-1	0,36788
-2	0,13534
-3	0,04979
-5	0,00674
-8	0,00034
-10	0,00005

# Limites no Infinito



- ▶ A medida que  $x$  torna-se grande, porém negativo, a função  $e^x$  torna-se pequena, próxima de 0.
- ▶ Escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0,$$

para dizer que o limite de  $e^x$ , quando  $x$  tende a  $-\infty$ , é igual a 0.

- ▶ Porém, a medida que  $x$  torna-se grande, positivo, a função  $e^x$  torna-se arbitrariamente grande, e, portanto, o limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$$

não existe.

# Outras Funções



1. Abra o Geogebra e conjecture sobre os seguintes limites:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos(x)$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin(x)$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x)$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x)$

e)  $\lim_{x \rightarrow 3\pi/2^-} \tan(x)$

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the top-left portion, while a light gray shape occupies the bottom-left portion. The rest of the slide is white. The title 'Cálculo de Limites' is centered in the white area.

# Cálculo de Limites



# Calculando Limites



Sejam  $a$  e  $k$  números reais. Segue uma lista de limites fundamentais:

1. O limite de uma Função Constante (inclusive nos infinitos):

$$\lim_{x \rightarrow a} k = k$$

2. O limite de uma Função Afim Linear:

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a$$

3. Os limites nos infinitos de uma Função Afim Linear:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

# Calculando Limites



4. Os limites infinitos de  $\frac{1}{x}$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

5. Os limites nos infinitos de  $\frac{1}{x}$ :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

# Definição Precisa de Limite



## Definição 5

Seja  $f$  uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número  $a$ , exceto possivelmente no próprio  $a$ . Então dizemos que o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende a  $a$  é  $L$ , e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

se para todo número  $\epsilon > 0$  houver um número  $\delta > 0$  tal que

$$\text{se } |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

- **Todo** número  $\epsilon$  tem que possuir **algum** número  $\delta$  que faça ser verdade a afirmação acima.

# Alguns Exemplos com a Definição Precisa



## Exemplo 4

*Vamos mostrar que, fixado o número real  $a$  o limite da função constante é*

$$\lim_{x \rightarrow a} k = k.$$

# Alguns Exemplos com a Definição Precisa



## Exemplo 4

*Vamos mostrar que, fixado o número real  $a$  o limite da função constante é*

$$\lim_{x \rightarrow a} k = k.$$

**Antes de demonstrar o caso geral: caso particular**  $\lim_{x \rightarrow -2} \pi = \pi$ . Com efeito, dado qualquer valor real  $\epsilon > 0$ , teremos

$$|f(x) - L| = |f(x) - \pi| = |\pi - \pi| = 0 < \epsilon,$$

qualquer que seja o valor de  $\delta > 0$  e  $|x - (-2)| < \delta$ .

Nesse caso, qualquer valor real positivo pode ser usado para  $\delta$ .

## Exemplo 4



### Demonstração:

Dado qualquer  $\epsilon > 0$ , temos que

$$|f(x) - k| = |k - k| = 0 < \epsilon,$$

qualquer que seja o valor de  $\delta > 0$  e  $|x - a| < \delta$ .

# Alguns Exemplos com a Definição Precisa



## Exemplo 5

*Vamos mostrar que, fixado o número real  $a$  o limite da função afim linear é*

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a.$$



## Exemplo 5

**Antes de demonstrar o caso geral: caso particular**  $\lim_{x \rightarrow 1/2} x = 1/2$ .

Com efeito, dado qualquer valor real  $\epsilon > 0$ , queremos encontrar  $\delta > 0$  tal que

$$|f(x) - L| = |f(x) - 1/2| = |x - 1/2| = 0 < \epsilon,$$

sempre que  $|x - 1/2| < \delta$ .

- ▶ Qual valor de  $\delta$  podemos escolher?
- ▶ Escolha um valor para  $\epsilon$ . Qual valor de  $\delta$  pode ser tomado?





## Exemplo 5

**Antes de demonstrar o caso geral: caso particular**  $\lim_{x \rightarrow 1/2} x = 1/2$ .

Com efeito, dado qualquer valor real  $\epsilon > 0$ , queremos encontrar  $\delta > 0$  tal que

$$|f(x) - L| = |f(x) - 1/2| = |x - 1/2| = 0 < \epsilon,$$

sempre que  $|x - 1/2| < \delta$ .

- ▶ Qual valor de  $\delta$  podemos escolher?
- ▶ Escolha um valor para  $\epsilon$ . Qual valor de  $\delta$  pode ser tomado?

**Resposta:** Qualquer valor de  $\delta$  tal que  $0 < \delta \leq \epsilon$ .

## Exemplo 5



### Demonstração:

Dado qualquer  $\epsilon > 0$ , temos que

$$|f(x) - k| = |k - k| = 0 < \epsilon,$$

qualquer que seja o valor de  $\delta > 0$  e  $|x - a| < \delta$ .

# Alguns Exemplos com a Definição Precisa



## Exemplo 6

*Vamos verificar, no Geogebra, que*

$$\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2.$$

*Para isso, baixe o arquivo Limite\_Def\_Precisa (Click aqui!) e abra-o no Geogebra .*

# Propriedades de Limites



Sejam  $a$  e  $k$  números reais.

## Teorema 1

Suponha que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ . Então:

1.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 + L_2$ ;
2.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 - L_2$ ;
3.  $\lim_{x \rightarrow a} [kf(x)] = k * \lim_{x \rightarrow a} f(x) = k * L_1$ ;
4.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) * g(x)] = \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \left( \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right) = L_1 * L_2$ ;

# Propiedades de Limites



5.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$ , desde que  $L_2 \neq 0$ ;

6.  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$ , desde que  $L_1 \geq 0$ , se  $n$  for par.

# Exemplos



## Exemplo 7

Como  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} 2 = 2$ , segue que

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + 2) = 1 + 2 = 3.$$

# Exemplos



## Exemplo 7

Como  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} 2 = 2$ , segue que

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + 2) = 1 + 2 = 3.$$

Por outro lado, **não podemos escrever**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} x,$$

pois  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$  não existe.

# Exemplos



## Exemplo 8

Sendo  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{x} \right) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ , segue que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{x} - e^x \right) = 0 - 0 = 0.$$



# Exemplos



## Exemplo 8

Sendo  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{x} \right) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ , segue que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{x} - e^x \right) = 0 - 0 = 0.$$

Por outro lado, **não podemos escrever**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x - \lim_{x \rightarrow \infty} x,$$

pois os limites  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$  não existem.

# Exemplos



## Exemplo 9

Como  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ , segue que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{x} = \pi \cdot 0 = 0.$$

# Exemplos



## Exemplo 9

Como  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ , segue que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{x} = \pi \cdot 0 = 0.$$

Por outro lado, **não podemos escrever**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x \cdot 0) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} 0,$$

pois o limite  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = +\infty$  não existe.

# Exemplos



## Exemplo 10

Temos  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} x = \sqrt{2}$ , logo

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} x^2 = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} x \cdot x = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2.$$

# Exemplos



## Exemplo 10

Temos  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} x = \sqrt{2}$ , logo

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} x^2 = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} x \cdot x = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2.$$

Por outro lado, **não podemos escrever**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( e^x \cdot \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x},$$

pois o limite  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = +\infty$  não existe.

# Exemplos



## Exemplo 11

Como  $\lim_{x \rightarrow -3} x + 1 = -2$  e  $\lim_{x \rightarrow -3} x + 2 = -1$ , temos

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 1}{x + 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow -3} x + 1}{\lim_{x \rightarrow -3} x + 2} = \frac{-2}{-1} = 2.$$

# Exemplos



## Exemplo 11

Como  $\lim_{x \rightarrow -3} x + 1 = -2$  e  $\lim_{x \rightarrow -3} x + 2 = -1$ , temos

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 1}{x + 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow -3} x + 1}{\lim_{x \rightarrow -3} x + 2} = \frac{-2}{-1} = 2.$$

Por outro lado, **não podemos escrever**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} e^x}{\lim_{x \rightarrow \infty} x},$$

pois os limites  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow \infty} x = +\infty$  não existem.

# Exemplos



## Exemplo 12

Como  $\lim_{x \rightarrow -3} x = -3$ , temos

$$\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt[5]{x} = \sqrt[5]{-3},$$

pois a raiz não é par e não precisamos nos preocupar com o sinal dentro dela.



# Exemplos



## Exemplo 12

Como  $\lim_{x \rightarrow -3} x = -3$ , temos

$$\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt[5]{x} = \sqrt[5]{-3},$$

pois a raiz não é par e não precisamos nos preocupar com o sinal dentro dela.

Por outro lado, **não podemos escrever**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x-2} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} (x-2)},$$

pois o limite  $\lim_{x \rightarrow 0} (x-2) = -2$  é negativo e a raiz é par.

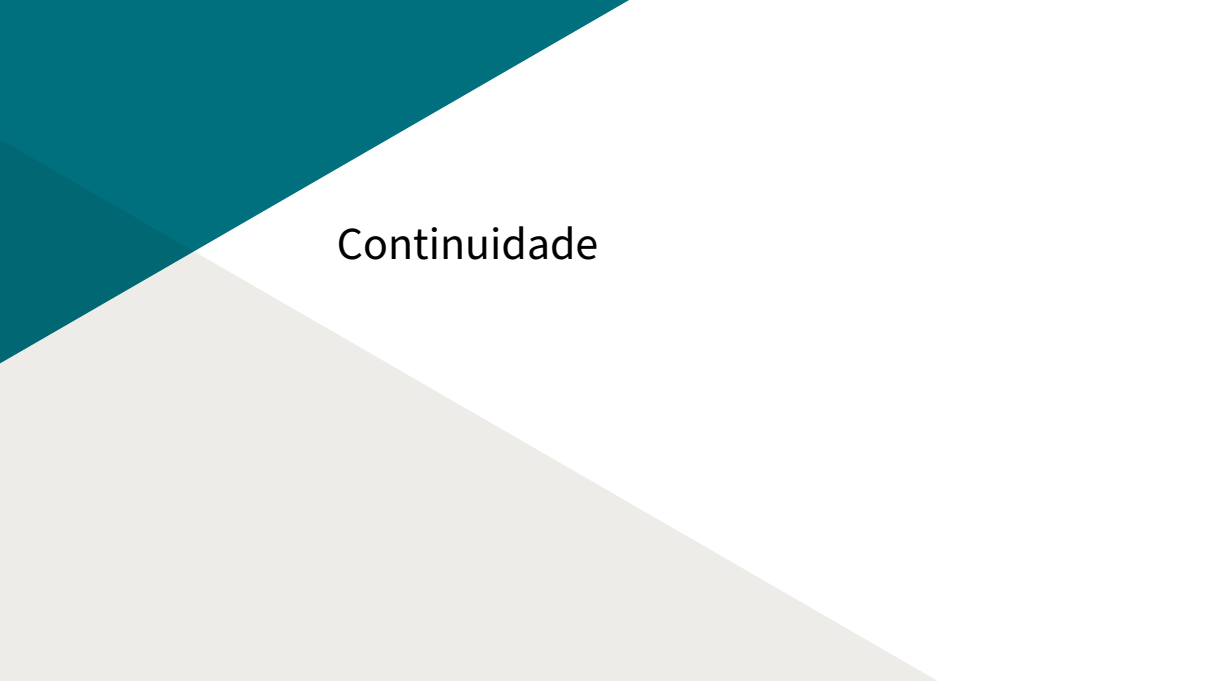
# Exercício



## Exercício 1

Seja  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ , com  $x \neq 1$ . Calcule  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

**Obs:** Embora  $x = 1$  não pertença ao domínio da função, podemos investigar o comportamento dessa função próximo deste ponto, uma vez que ela está definida para todos os pontos em torno do  $x = 1$ .

The background consists of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape is in the upper-left corner, and a light gray shape is in the lower-left corner. They meet at a diagonal line that runs from the top-left towards the bottom-right. The rest of the background is white.

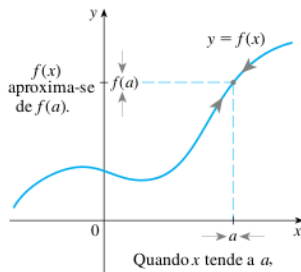
Continuidade

# Definição

## Definição 6

Uma função  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em um ponto  $a \in A$  se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

- ▶ Com isso, a função não tem interrupções ou mudanças abruptas no seu gráfico, dentro do seu domínio.
- ▶ Os fenômenos físicos são geralmente contínuos. Por exemplo, o deslocamento ou a velocidade de um veículo variam continuamente com o tempo, como a altura das pessoas. Mas descontinuidades ocorrem em situações tais como a corrente elétrica (modelada pela função de Heaviside).



# Exemplo



## Exemplo 13

- a) A função  $f(x) = 1$  se  $x \neq 3$  não é contínua em  $x = 3$ , uma vez que 3 não está no domínio de  $f$ . Já para qualquer outro valor de  $a \in \mathbb{R}$ , com  $a \neq 3$ , temos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 = f(a),$$

sendo  $f$  contínua em qualquer número real diferente de 3.

- b) A função  $g(x) = -x^2$  é contínua em  $x = 2$ , pois

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -4 = g(2).$$

# Exemplo



c) A função  $h(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 0 \\ -1, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$  não é contínua em  $x = 0$ , pois seus limites laterais são distintos e  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$  não existe.

# Tipos de Descontinuidade



## Definição 7

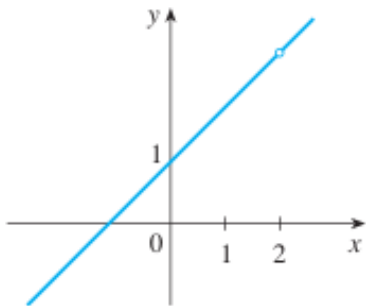
*Uma função  $f$  é descontínua em  $x = a$  se  $f$  não está definida em  $a$  ou se  $f$  não é contínua em  $a$  ( $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$ ).*

A seguir, veremos os 4 tipos de descontinuidade:

## Tipos de Descontinuidade: $a$ fora do domínio



1. A função não está definida em  $a$ , logo não existe  $f(a)$ . Assim,  $f$  é descontínua em  $x = a$ .
- Na função ao lado,  $f$  não está definida em  $x = 2$ , sendo descontínua nesse ponto.



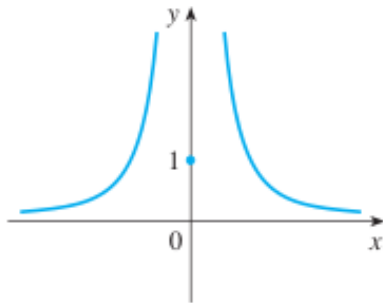
$$(a) f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$$



## Tipos de Descontinuidade: função explode



2. A função está definida em  $x = a$ , mas “explode” (tende a infinito ou a menos infinito), quando  $x$  tende a  $a$ .
- Na função ao lado,  $f$  tende ao infinito quando  $x$  tende a 0, sendo descontínua nesse ponto.



$$(b) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

## Tipos de Descontinuidade: o limite não vai a $f(a)$

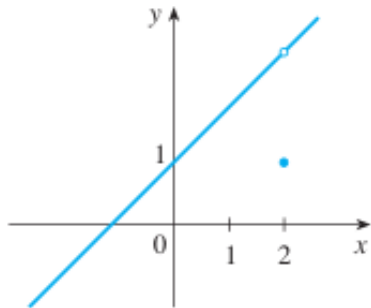


3. A função está definida em  $x = a$ , mas

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a).$$

- Na função ao lado,

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3 \neq 1 = f(2).$$

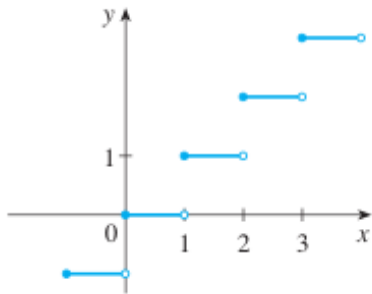


$$(c) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

# Tipos de Descontinuidade: tipo salto



4. Os limites laterais existem, mas são distintos. Portanto,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  não existe.
- Na função ao lado,  $f$  possui saltos para valores de  $x$  no conjunto dos números inteiros.



(d)  $f(x) = \llbracket x \rrbracket$

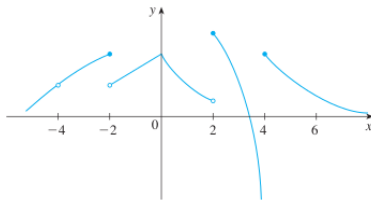
# Exemplo



## Exemplo 14

*O gráfico de uma função  $f$  é dado abaixo.*

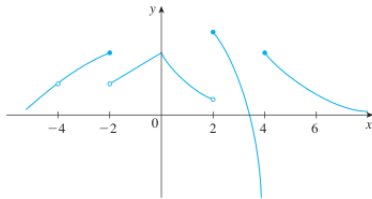
- a) Em  $x = -4$ , a função não está definida. Logo,  $f$  é descontínua em  $x = -4$ .
- b) Em  $x = -2$ , a função está definida, porém seus limites laterais são diferentes. Assim,  $f$  é descontínua em  $x = -2$ .



# Exemplo



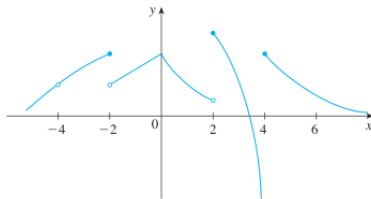
- c) Em  $x = 2$ , a função está definida, porém seus limites laterais são diferentes. Assim,  $f$  é descontínua em  $x = 2$ .
- d) Em  $x = 4$ , a função está definida, porém um dos seus limites laterais “explode”, a medida que os valores de  $x$  se aproximam de 4, pela esquerda.



# Exemplo



- e) Nos demais pontos, a função é contínua. Perceba que podemos desenhar o gráfico de modo contínuo, entre as discontinuidades listadas acima.



# Funções Contínuas no seu Domínio



Algumas das funções que estudamos são contínuas em todos os pontos do seu domínio.  
São elas:

- 1.

# Funções Contínuas no seu Domínio



1. As funções constantes  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = c$ , onde  $c$  é uma constante.
2. As funções polinomiais  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

onde  $a_0, a_1, \dots, a_n$  são constantes.

3. As funções exponenciais  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ , dadas por  $f(x) = a^x$ , com  $a > 0$  e  $a \neq 1$ .



# Funções Contínuas no seu Domínio



4. As funções logarítmicas  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por  $f(x) = \log_a(x)$ , com  $a > 0$  e  $a \neq 1$ .
5. As funções do tipo potência:  $x^k$ , com  $k \in \mathbb{R}$ . Para cada potência, devemos observar o domínio particular (potências que são raízes pares devem tomar apenas números reais não negativos, por exemplo).

# Funções Contínuas no seu Domínio



6. As funções trigonométricas clássicas:

$$\begin{aligned} \text{i) sen} : \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1] \\ x &\rightarrow \text{sen}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) cos} : \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1] \\ x &\rightarrow \text{cos}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii) tg} : \mathbb{R} - \left\{x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\} &\rightarrow [-1, 1] \\ x &\rightarrow \text{tg}(x), \end{aligned}$$

onde  $k \in \mathbb{Z}$ .

# Propriedades das Funções Contínuas



## Teorema 2

*Se as funções  $f$  e  $g$  são contínuas em  $x = a$ , então também são contínuas em  $x = a$ , as seguintes funções:*

- a)  $f + g$ , pois  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a) + g(a)$ .
- b)  $f - g$ , pois  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a) - g(a)$ .

# Propriedades das Funções Contínuas



- c)  $cf$ , pois  $c \lim_{x \rightarrow a} f(x) = cf(a)$ , para qualquer constante  $c \in \mathbb{R}$ .
- d)  $f \cdot g$ , pois  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = f(a) \cdot g(a)$ .
- e)  $\frac{f}{g}$ , pois  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$ , desde que  $g(a) \neq 0$ .

# Exemplo



## Exemplo 15

*Temos que  $f(x) = \cos(x)$  e  $g(x) = x^2$  são funções contínuas em  $x = \frac{\pi}{2}$ . Como  $f(\frac{\pi}{2}) = 0$  e  $g(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4}$ , temos:*

a)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} [\cos(x) + x^2] = 0 + \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4}.$

b) *Não podemos aplicar nenhuma propriedade em  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{x^2}{\cos(x)}$ , pois  $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ .*

# Composição de Funções Contínuas



## Teorema 3

Seja  $f$  contínua em  $b$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(b)$ . Em outras palavras,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x)).$$

# Exemplo



## Exemplo 16

Seja  $f(x) = \sqrt{e^x + 1}$ . Vamos calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

Podemos reescrever  $f$  como sendo

$$\begin{aligned} f(x) &= (e^x + 1)^{1/2} \\ &= g(h(x)), \end{aligned}$$

onde  $g(x) = x^{1/2}$  e  $h(x) = e^x + 1$ .

## Exemplo



Como  $h(x)$  é contínua em  $x = 0$ , por ser a soma de uma função exponencial com uma função constante, temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = e^0 + 1 = 2 > 0.$$

Assim, como  $g$  é contínua no seu domínio  $\mathbb{R}^+$ , pois é uma função raiz,  $g$  é contínua em  $x = 2$ . Portanto, pelo Teorema 3,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} g(h(x)) = g(\lim_{x \rightarrow 0} h(x)) \\ &= g(2) = \sqrt{2}.\end{aligned}$$



# Como resolver os exercícios



- ▶ Nem todas as técnicas de solução de limites foram apresentadas neste texto.
- ▶ Para resolver os exercícios da lista, é importante ler o livro texto e seus diversos exemplos: Cálculo, Vol I (J. Stweart) [\[Click aqui!\]](#)

# O Conceito de Derivada

# A Derivada como um Limite



**IMPORTANTE:** Baixe o texto `Derivada_Limite` (Click aqui!) e leia um pouco sobre o conceito de Derivadas, através de limites.

Este conteúdo será exigido na lista de exercícios (em Limites) e, portanto, estará presente na 2ª Avaliação.