Avaliação P2 - 30/08/23

01

a) $$\frac{2^{n+4} - 2 \cdot 2^n}{2 \cdot 2^{n+3}} = \frac{2^n \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^n}{2 \cdot 2^n \cdot 2^3} = \frac{2^n\,(2^4 - 2)}{2^n \cdot (2 \cdot 2^3)}$$

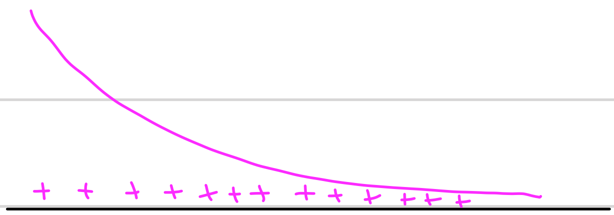
$$= \frac{2^n}{2^n} \cdot \left(\frac{16-2}{16}\right) = 1 \cdot \frac{14}{16} = \frac{7}{8}.$$

b) $$64^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{64^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{64^2}}$$ ou, equivalentemente,

$$64^{-2/3} = (64^{-1})^{2/3} = \left(\frac{1}{64}\right)^{2/3} = \sqrt[3]{\frac{1}{64^2}}.$$

c) $$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x (x^2 - 1)$$

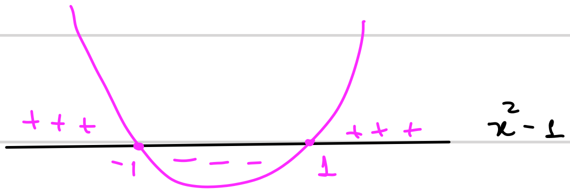
Como $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ é uma função exponencial, então ela é sempre positiva:



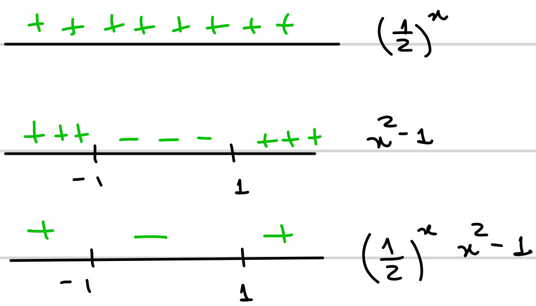
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$

As raízes de x^2-1 são 1 e -1. Como o coeficiente de x^2 é positivo, a concavidade da parábola é voltada para cima.

Assim:



Logo, temos



de onde segue que:

- $g(x) > 0$ para $x < -1$ e $x > 1$;

- $g(x) < 0$ para $-1 < x < 1$;

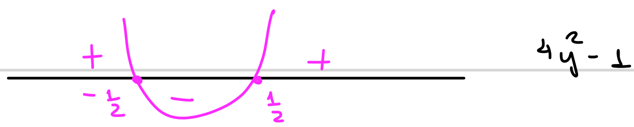
- $g(x) = 0$ para $x = -1$ ou $x = 1$.

d) $4\cos^2 x - 1 \leq 0$, para $0 \leq x \leq 2\pi$.

Faça $y = \cos x$. Então,

$$4\cos^2 x - 1 \leq 0 \quad \text{se} \quad 4y^2 - 1 \leq 0.$$

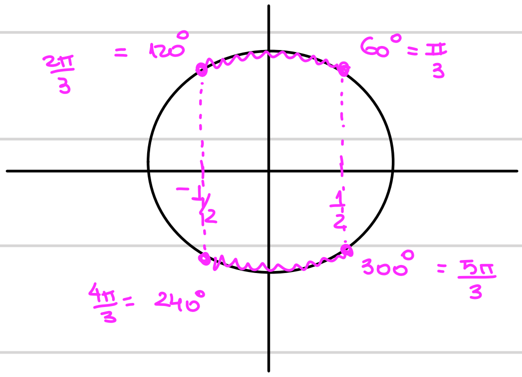
As raízes de $4y^2 - 1 = 0$ são $y = -\frac{1}{2}$ e $y = \frac{1}{2}$. A concavidade da parábola é voltada para cima, logo



Assim

$4y^2 - 1 \leq 0$ se, e somente se, $-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$. Como $y = \cos x$,

devemos ter $-\frac{1}{2} \leq \cos x \leq \frac{1}{2}$:



(02) Como f é uma função afim, tem forma geral

$$f(x) = ax + b.$$

Pelo gráficos, vemos que $f(x) = g(x)$ em $x = 0$ e $x = 2$.

Logo,

$$1 = (\sqrt{2})^0 = g(0) = f(0) = a.0 + b = b \Rightarrow b = 1.$$

Por outro lado,

$$2 = (\sqrt{2})^2 = g(2) = f(2) = a.2 + 1 \Rightarrow 2a + 1 = 2$$

$$\Rightarrow 2a = 2 - 1$$

$$\Rightarrow 2a = 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Assim, $f(x) = \frac{1}{2} . x + 1$, de onde segue que $f(16) = 9$.

03 $N = N_0 e^{-\lambda t}$

Temos que

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t}.$$

Assim,

$$\ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = \ln e^{-\lambda t} \Rightarrow -\lambda t = \ln\left(\frac{N}{N_0}\right)$$

$$\Rightarrow t = -\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{N}{N_0}\right).$$

04

a) $h(x) = \sqrt{1+\cos x}$

Tomando $f(x) = 1+\cos x$ e $g(x) = \sqrt{x}$, obtemos

$$h(x) = g \circ f(x).$$

b) $\lim\limits_{x \to \pi} \sqrt{1 + \cos x}$

Temos que

$$\lim_{x\to\pi} 1 = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\pi} \cos x = \cos \pi = -1 \text{ (pois ambas são contínuas).}$$

Logo, $\lim\limits_{x\to\pi} 1 + \cos x = \lim\limits_{x\to\pi} 1 + \lim\limits_{x\to\pi} \cos x = 1 - 1 = 0.$

Como $\sqrt{x}$ é contínua em $x=0$, obtemos:

$$\lim_{x\to\pi}\sqrt{1+\cos x} = \sqrt{\lim_{x\to\pi} 1+\cos x} = \sqrt{0} = 0.$$

c) $f(x) = \ln(x-1)$ e $g(x) = e^{x}+1$.

Como

$$f\circ g(x) = f(g(x)) = \ln\big(\overbrace{e^{x}+1}^{g(x)}-1\big) = \ln e^{x} = x$$

e

$$g\circ f(x) = g\big(f(x)\big) = e^{\overset{\log_e (x-1)}{\ln(x-1)}} + 1 = x-1+1 = x,$$

as funções são inversas.

05 $f(x) = \begin{cases} 8-2x, & x \leq 4 \\ \sqrt{x-4}, & x > 4 \end{cases}$

a) $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} (8-2x) = 8-2.4 = 0$

$x\to 4^-$ → números menores do que 4

a regra

b) $\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \sqrt{x-4} = \sqrt{\lim_{x\to 4^+}(x-4)} = \sqrt{4-4} = 0,$

regra

$x\to 4^+$ → números maiores do que 4

pois $\lim_{x\to 4^+} x-4 = 0 \geq 0$.

c) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ existe?

Como os limites laterais existem e são iguais, temos que

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^-} f(x) = 0.$$