



- (1) Verifique se as funções indicadas são soluções particulares das equações diferenciais dadas. No caso positivo, dê o intervalo de definição I para cada solução.

a) $xy' = 2y$; $y = 0$ e $y = 2x$.

b) $y'' + 9y = 18$; $y = 2$ e $y = 2x^2$.

c) $xy'' - y' = 0$; $y = 2x^2$ e $y = 2x$.

d) $x^2y'' + xy' + y = 0$; $y = \sin(\ln x)$.

- (2) Dado que $y = x - \frac{2}{x}$ é uma solução da equação diferencial $xy' + y = 2x$, encontre x_0 e o maior intervalo para o qual $y(x)$ é uma solução do PVI de 1^a ordem

$$xy' + y = 2x$$

$$y(x_0) = 1$$

- (3) Sabendo que $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-x} - 2x$ é uma família de soluções da equação diferencial de 2^a ordem $y'' - 2y - 3y = 6x + 4$, encontre uma solução para o PVI com as condições iniciais abaixo:

a) $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

b) $y(1) = 4$ e $y'(1) = -2$.

- (4) Resolva as equações diferenciais.

a) $\frac{dy}{dx} = xy^2$

b) $\frac{dy}{dx} = xe^{-y}$

c) $\frac{dy}{dt} = \frac{t}{ye^{y+t^2}}$

- (5) Uma esfera com raio 1 m está a uma temperatura de 15°C. Ela está dentro de uma esfera concêntrica com raio de 2 m e temperatura de 25 °C. A temperatura $T(r)$ a uma distância r do centro comum das duas esferas satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} = 0$$

Se fizermos $S(r) = \frac{dT}{dr}$, então S satisfaz uma equação diferencial de primeira onrdem. Encontre uma expressão para $T(r)$ entre as duas esferas.

(6) Dada a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

- a) Encontre a solução geral da equação.
- b) Encontre a solução explícita para o problema com valor inicial $y(0) = -2$ e seu intervalo de definição.

(7) O modelo de Malthus para o crescimento de uma população, basea-se na suposição de que a população cresce (ou decresce) a uma taxa proporcional ao tamanho da população:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

- a) Resolva a equação com condição inicial $P(0) = P_0$.
 - b) Se a constante de proporcionalidade k for positiva o que acontece com a população? E se for negativa?
 - c) O que acontece com a população quando o tempo t tende ao infinito?
- (8) Uma população com frequência cresce exponencialmente em seus estágios iniciais, seguindo o modelo de Malthus, mas em dado momento se estabiliza e se aproxima de sua capacidade de suporte por causa dos recursos limitados. Para refletir que a taxa de crescimento diminui quando a população P aumenta e torna-se negativa quando P ultrapassa sua **capacidade de suporte** K , a expressão mais simples é dada por

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{K}\right).$$

Este modelo é conhecido Modelo Logístico.

- a) Dada a condição inicial $P(0) = P_0$, resolva o PVI.
- b) O que acontece com a população quando o tempo t tende ao infinito?

(9) Determine se a equação diferencial é linear.

- a) $y' + e^x y = x^2 y^2$
- b) $y + \sin x = x^3 y'$
- c) $xy' + \ln x - x^2 y = 0$.

(10) Resolva as equações diferenciais.

- a) $y' + y = 1$
- b) $xy' + y = \sqrt{x}$
- c) $\sin x \frac{dy}{dx} + (\cos x)y = \sin(x^2)$
- d) $xy' = y + x^2 \sin x$, com $y(\pi) = 0$

(11) A lei de resfriamento/ aquecimento de Newton foi uma das aplicações de EDO dadas em sala de aula; No exemplo do bolo, encontramos que a função que dá a temperatura dele t minutos

após sua retirada do forno:

$$T(t) = 20 + 130 \left(\frac{15}{26} \right)^{t/3}.$$

- a) Mostre que essa solução não fornece uma solução finita para a pergunta feita no exemplo: quanto tempo demoraria para a temperatura do bolo chegar à temperatura ambiente?
- b) Intuitivamente esperamos que o bolo atinja a temperatura ambiente após um período finito de tempo. Plote o gráfico da função $T(t)$ e diga em quantos minutos, aproximadamente, o bolo atingirá a temperatura desejada.
- (12) Suponha que pouco antes do meio-dia o corpo de uma vítima de homicídio é encontrado numa sala com ar condicionado, mantida a uma temperatura constante de 21°C . Ao meio-dia a temperatura do corpo é de 30°C e uma hora mais tarde é de 27°C . Assumindo que a temperatura do corpo na hora da morte era 36.5°C , use a lei de resfriamento de Newton para dizer qual foi a hora da morte.
- (13) Resolva as equações diferenciais.
- a) $y'' + 16y = 0$
- b) $9y'' - 12y' + 4y = 0$
- c) $y' = 2y''$

Busque a solução de uma integral em uma tabela de integrais sempre que os métodos conhecidos não ajudem na solução.

- (14) Resolva as edo's lineares não homogêneas abaixo:

- a) $y'' - 2y' + y = e^{2x}$
- b) $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^{-x}}$
- c) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1 + x^2}$

Gabarito

- (1) a) $y = 0$ é solução. $I = \mathbb{R}$.
- b) $y = 2$ é solução. $I = \mathbb{R}$
- c) $y = 2x^2$ é solução. $I = \mathbb{R}$
- d) $y = \sin(\ln x)$ é solução. $I = (0, +\infty)$
- (2) Para que a solução satisfaça $y(x_0) = 1$ devemos ter $x_0 = -1$ ou $x_0 = 2$. Se $x_0 = -1$ então $I = (-\infty, 0)$; se $x_0 = 2$ então $I = (0, +\infty)$.
- (3) a) $y = \frac{e^{3x}}{2} - \frac{e^{-x}}{2} - 2x$.
- b) $y = \frac{3}{2}e^{3x-3} + \frac{9}{2}e^{1-x} - 2x$.

- (4) a) $y(x) = \frac{2}{k-x^2}$, $y(x) = 0$.
 b) $y(x) = \ln \left| \frac{x^2}{2} + c \right|$
 c) $e^y(y-1) = c - \frac{1}{2e^{t^2}}$
- (5) $T(r) = -\frac{20}{r} + 35$
- (6) a) Solução implícita: $y^2 + x^2 = C$.
 b) $y(x) = -\sqrt{4-x^2}$, $I = [-2, 2]$.
- (7) a) $P(t) = P_0 e^{kt}$.
 b) Se for positiva a taxa de variação é positiva e, assim, a população está crescendo; no caso de ser negativa, ela está decrescendo.
 c) Ela tende ao infinito também. Significa que a população continuará crescendo indefinidamente.
- (8) a) $P(t) = \frac{k}{1 + Ae^{-kt}}$, onde $A = \frac{K - P_0}{P_0}$.
 b) Atinge sua população máxima K.
- (9) a) Não é linear
 b) É linear
 c) É linear.
- (10) a) $y = 1 + ce^{-x}$
 b) $y = \frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{c}{x}$
 c) $y = \frac{\int \sin(x^2)dx + c}{\sin x}$
 d) $y = -x \cos x - x$
- (11) a)
 b) Aproximadamente 40 minutos.
- (12) Aproximadamente às 10:40 da manhã.
- (13) a) $y = c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x)$
 b) $y = c_1 e^{2x/3} + c_2 x e^{2x/3}$
 c) $y = c_1 + c_2 e^{x/2}$
- (14) Resolva as edo's lineares não homogêneas abaixo:
 a) $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + e^{2x}$
 b) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + (e^x + e^{2x}) \ln(1 + e^{-x})$

c) $y = e^x [c_1 + c_2 x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + x \tan^{-1} x]$