UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS

FACET

Cálculo III

Lista 01 — 15 de Dezembro de 2015

(1) Uma pequena empresa fabrica caixas de papelão de três tamanhos: pequena, média e grande. O custo é de R$2,50 para fabricar uma caixa pequena, R$4,00 para uma caixa média e R$4,50 para uma caixa grande. Os custos fixos são de R$8.000,00.

a) Expresse o custo da fabricação de x caixas pequenas, y caixas médias, z caixas grandes como uma função de três variáveis: $C = f(x, y, z)$.

b) Encontre $f(3000, 5000, 4000)$ e interprete-a.

c) Qual o domínio de f?

(2) Seja $f(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \ln(4 - x^2 - y^2 - z^2)$.

a) Calcule $f(1, 1, 1)$.

b) Determine o domínio de f.

(3) Determine e esboce o domínio da função:

a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$.

b) $f(x, y, z) = \ln(16 - 4x^2 - 4y^2 - z^2)$.

(4) Desenhe algumas curvas de nível e esboce o gráfico:

a) $f(m, n) = 4 - m^2 - n^2$.

b) $f(x, y) = 4 - x^2$.

(5) Se $V(x, y)$ é o potencial elétrico em um ponto (x, y) no plano xy, então as curvas de nível de V são chamadas curvas equipotenciais, porque em todos os pontos dessa curva o potencial elétrico é o mesmo. Esboce algumas curvas equipotenciais de $V(x, y) = \dfrac{c}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$, onde c e r são constantes reais, com $c > 0$.

(6) Esboce o gráfico das superfícies de nível das funções:

a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$

b) $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$

(7) Suponha que $\lim\limits_{(x,y)\to(3,1)} f(x, y) = 6$. O que podemos dizer do valor de $f(3, 1)$? (Ele existe? É igual a 6? Justifique.) E se a função f for contínua?

(8) Determine o limite, se existir, ou mostre que o limite não existe.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{ysenx}{xy + 2x}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} (1 + x)^{\dfrac{1 + xy}{x}}$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{xy} - 1}{xy}$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$(Ver em Flemming, D. - Cálculo B)

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^3 + y^2}$

(9) Determine o maior conjunto no qual a função é contínua:

a)

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + xy + y^2} & \text{se}(x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se}(x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Observação: Para achar os valores de (x, y) que anulam o denominador, tente completar quadrados: $x^2 + yx = (x + \frac{y}{2})^2 - (\frac{y}{2})^2$.

b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$.

Fórmulas úteis:

- Limites fundamentais:

$$\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

- $|y| \leq |x| \Rightarrow -|x| \leq y \leq |x|$

- Equação de um elipsóide centrado na origem.:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- Equação de um hiperbolóide de duas folhas:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

  onde a, b e c são constantes e os eixos de simetria são tomados como os eixos coordenados. Quando b = c, as seções y-z são circulares e esta é o hiperbolóide de revolução de duas folhas obtido girando a hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

  ao redor do eixo-x.

Como resolver alguns exercícios:

- Para encontrar o domínio de uma função:
  (1) O domínio tem restrição física do problema?
  (2) Para quais valores faz sentido calcular a função?
- Para encontrar as curvas de nível de uma função:
  (1) Qual o domínio de f?
  (2) Qual o conjunto imagem $Im(f)$ da função?
  (3) Para $k \notin Im(f)$, $C_k = \emptyset$.
  (4) Identificar a curva dada pela equação $f(x, y) = k$
- Para esboçar o gráfico de uma função $f(x, y)$:
  (1) Encontrar as curvas de nível da função;
  (2) Encontrar as curvas resultante das interseções com os planos coordenados:

$$XY = \{(x, y, z) \in D_f / z = 0\}$$

$$XZ = \{(x, y, z) \in D_f / y = 0\}$$

$$YZ = \{(x, y, z) \in D_f / x = 0\}$$

Bons estudos e boas festas!