

Ponto Crítico

Definição

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que $(x_0, y_0) \in D$ é um ponto crítico (ou estacionário) se

- $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$;
- Ou se uma das derivadas parciais não existir.

Exemplos:

- 1 Encontrar os pontos críticos de $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$
- 2 Encontrar os pontos críticos de $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Classificação dos pontos críticos

Os pontos críticos de uma função são classificados como:

- Máximo - que pode ser interpretado como o topo de uma montanha;
- Mínimo - que pode ser interpretado como o fundo de um vale;
- Ponto de Sela - que pode ser interpretado como a sela de um cavalo.

Classificação dos pontos críticos

Definição

Uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tem:

- Um *máximo relativo ou máximo local* em (x_0, y_0) se
$$f(x) < f(x_0, y_0), \quad \forall (x, y) \text{ próximo de } (x_0, y_0)$$
- Um *máximo global* em (x_0, y_0) se
$$f(x) < f(x_0, y_0), \quad \forall (x, y) \in D.$$

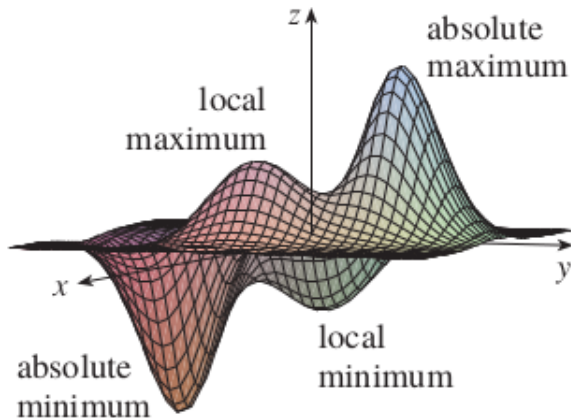
Classificação dos pontos críticos

Definição

Uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tem:

- Um *mínimo relativo ou mínimo local* em (x_0, y_0) se
$$f(x_0, y_0) < f(x, y), \quad \forall (x, y) \text{ próximo de } (x_0, y_0)$$
- Um *mínimo global* em (x_0, y_0) se
$$f(x_0, y_0) < f(x, y), \quad \forall (x, y) \in D.$$

Classificação dos pontos críticos



Classificação dos pontos críticos

Exemplos:

① $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$

② $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

③ $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$

Classificação dos pontos críticos

Teorema

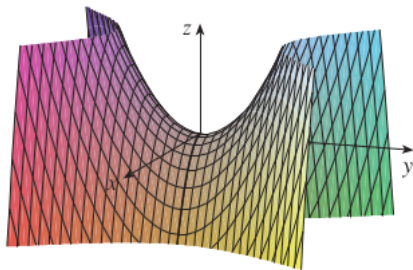
Se f possui um máximo ou mínimo local em (x_0, y_0) e as derivadas parciais de primeira ordem de f existem, então $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$.

Exemplos:

- 1 $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$
- 2 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
- 3 $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$

Pontos de Sela

Encontre os valores extremos de $f(x, y) = y^2 - x^2$.



Obs: O teorema anterior garante apenas que se o ponto for de mínimo ou máximo local então $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$. Já ter $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$ não garante que o ponto seja um ponto extremo, como vimos no exemplo acima.

Pontos de Sela

- 1 Encontre os valores extremos de $f(x, y) = xy$.
- 2 Encontre os valores extremos de $f(x, y) = x^2y^2$.

A Matriz Hessiana

Teorema

Se as derivadas parciais mistas de segunda ordem de uma função f são contínuas, então:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Definição

*A matriz 2×2 com as derivadas parciais de segunda ordem de uma função de 2 variáveis é chamada **Matriz Hessiana** e denotada por $H(x, y)$:*

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{bmatrix}$$

Exemplos

Calcule o vetor gradiente e a matriz Hessiana de cada função abaixo:

- 1 $f(x, y) = xy;$
- 2 $f(x, y) = x^2y^2;$
- 3 $f(x, y) = y^2 - x^2;$
- 4 $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14;$
- 5 $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2.$



Bianchini, Waldecir. Aprendendo Cálculo de várias variáveis:
<http://www.im.ufrj.br/waldecir/calculo2/calculo2.pdf>



Lima, Paulo. Cálculo de várias variáveis:
http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/Calculo_de_varias_variaveis.pdf



Plotar gráficos e regiões:
<https://www.wolframalpha.com/examples/PlottingAndGraphics.html>
Software para computador: Geogebra



Stewart, James. Cálculo, Volume II



Anton, Howard. Cálculo, Volume II