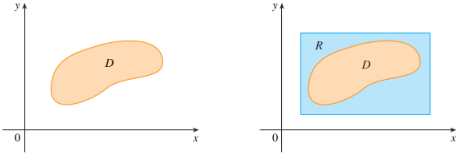
Dada uma região não retângular, podemos integrar uma função f nesta região da seguinte forma:

$$\boxed{1} \qquad F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \text{ está em } D \\ 0 & \text{se } (x,y) \text{ está em } R \text{ mas não em } D \end{cases}$$



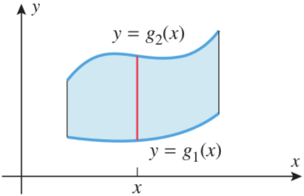
Se F for integrável em R, definimos a integral dupla de f em D por

$$\int\int_D f(x,y)\,dA = \int\int_R F(x,y)\,dA$$

Como calcular na prática:

Dividimos essas regiões em dois tipos.

- Tipo I: $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$



A variável x varia entre dois valores constantes e a variável y entre duas funções de x.

Como calcular na prática:

Se f é contínua em uma região D do tipo I tal que

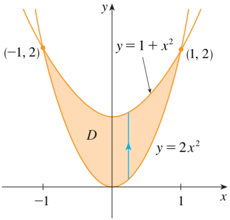
$$D = \{(x, y) \,|\, a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

então,

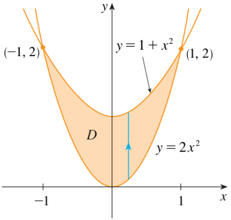
$$\int\int_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx.$$

Exemplo:

1) Calcule $\displaystyle\int\int_D (x+2y)\,dA$, onde D é a região limitada pelas parábolas $y = 2x^2$ e $y = 1 + x^2$.



Exemplo:



- Seguindo a seta azul, de baixo para cima, verificamos que y varia da função $g_1(x) = 2x^2$ até chegar na função $g_2(x) = 1 + x^2$.
- No exemplo, a limitação do x é dada pelos pontos que fecham a região, que neste caso, são dados no encontro das duas funções. Para verificar, basta resolver a equação $2x^2 = 1 + x^2$, que resultará nos valores de x que fazem com que $g_1(x) = g_2(x)$. Teremos $-1 \leq x \leq 1$.

Exemplo:

Assim,

$$\int\int_D (x+2y)\,dA = \int_{-1}^{1}\left[\int_{2x^2}^{1+x^2}(x+2y)dy\right]dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[xy+y^2\right]_{2x^2}^{1+x^2} dx$$

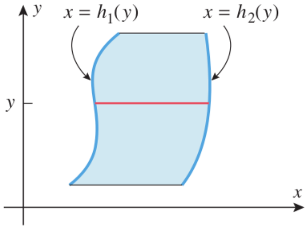
$$= \int_{-1}^{1}\left[x(1+x^2)-x(2x^2)+(1+x^2)^2-(2x^2)^2\right]dx$$

$$= \int_{-1}^{1}(-3x^4-x^3+2x^2+x+1)dx$$

$$= -3\tfrac{x^5}{5}-\tfrac{x^4}{4}+2\tfrac{x^3}{3}+\tfrac{x^2}{2}+x\Big]_{-1}^{1} = \frac{32}{15}$$

Como calcular na prática:

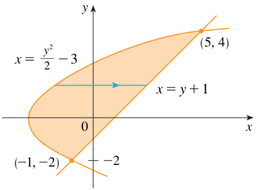
- Tipo 2: $D = \{(x, y) \mid h_1(y) \leq x \leq h_2(y),\ c \leq y \leq d\}$



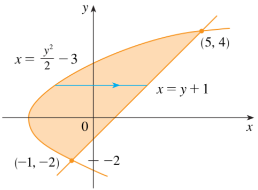
A variável y varia entre dois valores constantes e a variável x entre duas funções de y.

Exemplo:

1) Calcule $\int\int_D xy\, dA$, onde D é a região limitada pela reta $x = y + 1$ e pela parábola $x = \frac{y^2}{2} - 3$.



Exemplo:



- Seguindo a seta azul, da esquerda para a direita, verificamos que x varia da função $h_1(y) = \frac{y^2}{2} - 3$ até chegar na função $h_2(y) = y^2 + 1$.
- No exemplo, a limitação do y é dada pelos pontos que fecham a região, que neste caso, são dados no encontro das duas funções. Para verificar, basta resolver a equação $\frac{y^2}{2} - 3 = y^2 + 1$, que resultará nos valores de y que fazem com que $h_1(y) = h_2(y)$. Teremos $-2 \leq y \leq 4$.

Exemplo:

Assim,

$$\begin{aligned}
\int\int_D xy\, dA &= \int_{-2}^{4}\left[\int_{\frac{y^2}{2}-3}^{y+1} xy\, dx\right] dy \\
&= \int_{-2}^{4}\left[y\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{y^2}{2}-3}^{y+1} dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{-2}^{4} y\left[(y+1)^2-\left(\frac{y^2}{2}-3\right)^2\right] dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{-2}^{4}\left(-\frac{y^5}{4}+4y^3+2y^2-8y\right) dy \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{y^6}{24}+y^4+2\frac{y^3}{3}-4y^2\right]_{-2}^{4} = 36
\end{aligned}$$

Exercícios:

1. Calcule a integral dupla $\displaystyle\int\int_D y^2\, dA$, onde

$$D = \{(x, y) \,|\, -1 \leq y \leq 1, \, -y - 2 \leq x \leq y\}.$$

Resp: $\frac{4}{3}$

2. Calcule a integral dupla $\displaystyle\int\int_D x\, dA$, onde

$$D = \{(x, y) \,|\, 0 \leq x \leq \pi, \, 0 \leq y \leq \operatorname{sen} x\}.$$

Resp: π