Universidade Federal
da Grande Dourados

Construções Geométricas

Trabalhos: P2

Profa. Karla Katerine Barboza de Lima
FACET/UFGD

Sumário

1 Aula 05: Segmentos Construtíveis - Introdução

Ver notas de aula Números Construtíveis e o Capítulo 9 de [1].

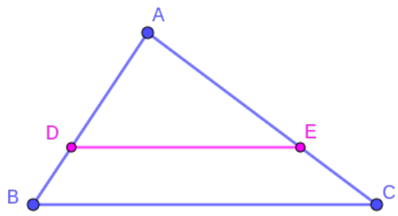
2 Aula 06: Segmentos Proporcionais. Média Geométrica. Expressões Algébricas.

2.1 Exemplos em sala

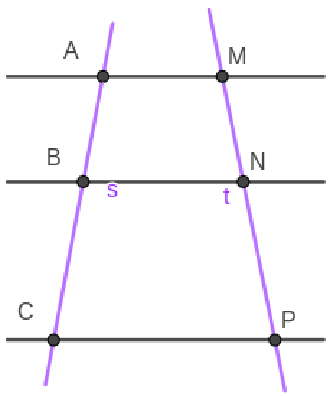
Exemplo 1 *Dados dois segmentos a e b, $a > b$, obtenha graficamente o segmento $a + b$.*

Exemplo 2 *Dados dois segmentos a e b, $a > b$, obtenha graficamente o segmento $a - b$.*

Teorema 1 **[Teorema Fundamental da Proporcionalidade:]** *Sejam $\triangle ABC$ um triângulo e $D \in \overline{AB}$, $E \in \overline{AC}$ pontos tais que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. Então, $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$.*



Teorema 2 **[Teorema de Tales:]** *Quando três ou mais retas paralelas são cortadas por duas transversais, os segmentos das transversais, determinados pelas paralelas, são proporcionais.*



Definição 1 *Os segmentos a e b são ditos* ***proporcionais*** *aos segmentos c e d quando é verificada a relação $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, ou qualquer outra equivalente.*

1. *Dizemos que o segmento x é a $4^{\underline{a}}$ proporcional entre os segmentos a, b e c quando for válida a relação $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{x}$.*
2. *Dizemos que o segmento x é a $3^{\underline{a}}$ proporcional entre os segmentos a e b, nessa ordem, quando for válida a relação $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{x}$.*

Exemplo 3 *Para obter a $4^{\underline{a}}$ proporcional, usamos o Teorema Fundamental da Proporcionalidade. O procedimento é o seguinte:*

1. *Construímos um ângulo qualquer de vértice O e, sobre os seus lados, transportamos os segmentos $a + b = \overline{OA} + \overline{AB}$ e $c = \overline{OC}$ (um em cada lado).*

2. *A partir do final do segmento a e do segmento c, construímos um segmento. Ao final do segmento $a + b$, construímos uma paralela a este, tocando o outro lado em X.*

3. *Como $\overline{AC} \parallel \overline{BX}$, pelo TFP temos que*

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OX}} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{x},$$

   como queríamos construir.

Exemplo 4 *Vamos dividir o segmento $\overline{AB}$ dado em partes proporcionais a 2, 3 e 5.*

3 Aula 07 - Expressões Algébricas

3.1 Equações Quadráticas

Exemplo 5 *Dados os segmentos u, a e b, obtenha os segmentos:*

a) $\sqrt{a^2 + b^2}$.

b) $\sqrt{a^2 - b^2}$, $a > b$.

c) $\sqrt{a + b}$.

Exemplo 6 *Dados os segmentos a e b, determine os segmentos x e y tais que*

$$x + y = a \qquad e \qquad xy = b^2.$$

Antes de começar a construção, determine os valores de b que tornam o problema solucionável.

De modo geral, podemos resolver graficamente uma equação do segundo grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b e c são números construtíveis dados.

- *Obtenha graficamente os segmentos $r = \dfrac{b}{a}$ e $s = \dfrac{c}{a}$.*

- *Transforme a equação dada na nova equação $x^2 + rx + s = 0$. Verifique a condição para que a equação tenha solução.*

- *Sabemos que:*

  1. *Se $s > 0$, então as soluções possuem o mesmo sinal.*

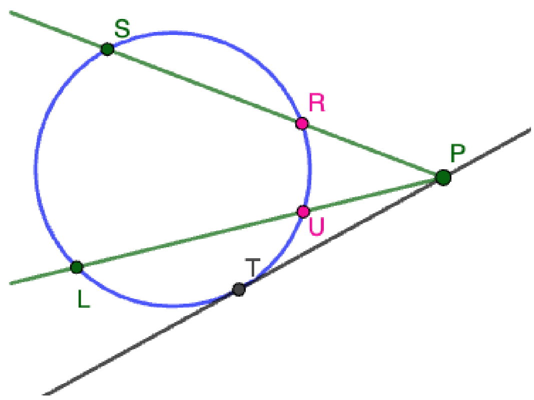
2. *Se $s < 0$, então as soluções possuem sinais opostos.*

- *Desse modo, caímos nos seguintes sistemas:*

  1. $s > 0$
  $$\begin{cases} |x_1| + |x_2| = |r| \\ |x_1| \cdot |x_2| = s \end{cases}$$
  2. $s < 0$
  $$\begin{cases} |x_1| - |x_2| = |r| \\ |x_1| \cdot |x_2| = |s| \end{cases}$$
  Para este segundo caso, precisaremos do seguinte teorema de Geometria Plana:

  Teorema 3 *Sejam dados uma circunferência C e um ponto exterior P. Sejam S e L pontos da circunferência tais que $\overleftrightarrow{PS}$ e $\overleftrightarrow{PL}$ são retas secantes à mesma. Seja, ainda, T um ponto de C tal que $\overleftrightarrow{PT}$ seja tangente à circunferência. Então valem as igualdades:*

  $$PR \cdot PS = PU \cdot PL = (PT)^2.$$



3.2 Secção Áurea

Há anos, matemáticos, artistas, fotógrafos, dentistas e cientistas dedicam-se ao estudo do intrigante e fascinante número de ouro. Alguns focam a análise da razão áurea e os retângulos áureos presentes na geometria, os sólidos de Platão e o Pentagrama, por exemplo. Já outros focam-se nas medidas para obter uma imagem considerada esteticamente perfeita. Perfeição essa quando comparada a natureza: a espiral do náutilo, as espirais em sentidos opostos de margaridas e dos girassóis, o número de pétalas comuns serem associados a números áureos, entre tantos outros fenômenos naturais que encantam os olhos e estão relacionadas sobre um mesmo padrão, o padrão áureo [3].

Dado o segmento $a = \overline{AB}$, podemos determinar nele um ponto E tal que $\overline{AE}$ seja a média geométrica entre $\overline{AB}$ e $\overline{BE}$, ou seja, $AE = \sqrt{AB \cdot BE}$.

Definição 2 *O segmento $\overline{AE}$, citado acima, é chamado* ***segmento áureo*** *interno de $\overline{AB}$ e o ponto E é a* ***secção áurea*** *do segmento $\overline{AB}$.*

Se denotarmos $AE = x$, obtemos $EB = a - x$ e, então, podemos escrever

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}. \tag{1}$$

Encontrar x é resolver a equação $x^2 + ax - a^2 = 0$, com $a > 0$.

a) Qual a solução algébrica dessa equação?

b) Obtenha graficamente o segmento áureo x.

Trabalho 10/08

Exercício 1 *Resolva graficamente $x^2 - 9x + 18 = 0$.*

Exercício 2 *Dados o segmento unitário u e os segmentos a, b e c, determine graficamente os segmentos que seguem.*

a) $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

b) $x = \dfrac{a^3 + a^2 b}{c}$

Exercício 3 *Construa os segmentos x e y, dados pelo sistema:*

$$\begin{cases} x + y = a \\ x^2 - y^2 = b^2 \end{cases}$$

Exercício 4 a) *Construa um triângulo ABC cujos lados medem $AB = 7\,cm$, $AB = 8\,cm$ e $AB = 6\,cm$.*

b) *Inscreva nesse triângulo um quadrado que tenha um de seus lados contido no lado BC.*

c) *Agora, inscreva um retângulo áureo tendo o seu lado maior contido no lado BC do triângulo.*

4 Trabalho Final

Para os dois grupos: escreva sobre a história envolvendo os tópicos, bem como suas aplicações.

4.1 O Triângulo Áureo

1. Construa um triângulo isósceles com um lado sendo um segmento áureo.
2. Construa triângulos áureos semelhantes.
3. Dado um triângulo, inscreva-o num retângulo tal que a área dos três triângulos restantes seja a mesma.
4. Mostre que se o retângulo acima for áureo, então o triângulo dado é isósceles e retângulo.
5. Descreva a espiral no triângulo áureo.

4.2 O Retângulo Áureo

1. Construa um retângulo áureo.
2. Construa um retângulo de Fibonacci.
3. Construa um pentágono regular e um pentagrama.
4. Descreva a espiral no retângulo áureo.
5. Fale sobre o ângulo ideal.

Referências

[1] REZENDE, E. Q. F., *Geometria euclidiana plana e construções geométricas*, Ed. Unicamp, 2016. Baixe aqui. Obrigada, Lucas!

[2] WAGNER, E., *Construções geométricas.*, Rio de Janeiro, SBM, 2007. Baixe aqui.

[3] AZEVEDO, N. C., *O número de ouro e construções geométricas*, UFG, 2013. Baixe aqui.