Material Teórico - Módulo de NÚMEROS NATURAIS: REPRESENTAÇÃO E OPERAÇÕES BÁSICAS

Problemas

Sexto Ano do Ensino Fundamental

Prof. Francisco Bruno Holanda
Prof. Antonio Caminha Muniz Neto

12 de Novembro de 2020

1 Introdução

Neste último material do módulo iremos praticar os algoritmos apresentados anteriormente para realizar diversos cálculos. Além disso, resolveremos problemas que tratam sobre números naturais e suas operações e que foram propostos em diversas olimpíadas.

Exercício 1. *Calcule mentalmente* $1 + 357 + 17999$.

Solução. Usando as propriedades de comutatividade e associatividade, temos:

$$\begin{aligned} 1 + 357 + 17999 &= (1 + 17999) + 357 \\ &= 18000 + 357 \\ &= 18357. \end{aligned}$$

□

Exercício 2. *Na adição a seguir, A, B e C representam algarismos distintos. Quais são esses algarismos?*

$$\begin{array}{cccc} & A & A & A \\ + & B & B & B \\ \hline A & A & A & C \end{array}$$

Solução. Note que temos uma adição de dois números de três algarismos dando, como resultado, um número de quatro algarismos. Como $999 + 999 = 1998$, isso significa que A não pode ser maior do que 1; logo, $A = 1$. Agora, se B for no máximo 8, então a soma $AAA + BBB$ vale no máximo $111 + 888 = 999$, que só tem três algarismos. Como esse não é o caso, concluímos que $B = 9$ e, daí, que

$$AAA + BBB = 111 + 999 = 1110.$$

Portanto, $C = 0$. □

Exercício 3. *Multiplique* 101010101 *por* 57.

Solução. Usando a representação decimal de 101010101 e a distributividade, temos que

$$\begin{aligned} 101010101 \times 57 &= (10^8 + 10^6 + 10^4 + 10^2 + 1) \times 57 \\ &= 10^8 \times 57 + 10^6 \times 57 + 10^4 \times 57 \\ &\quad + 10^2 \times 57 + 1 \times 57 \\ &= 5700000000 + 57000000 + 570000 \\ &\quad + 5700 + 57 \\ &= 5757575757. \end{aligned}$$

□

Exercício 4. *Um número de seis algarismos começa, à esquerda, por 1. Se tirarmos esse algarismo 1 do início e o colocarmos no final do número, o resultado será um número três vezes maior. Qual é o número de seis dígitos inicial?*

Solução. A condição dada no enunciado pode ser resumida como segue:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & A & B & C & D & E \\ & & & & \times & 3 \\ \hline A & B & C & D & E & 1 \end{array}$$

onde A, B, C, D e E são os demais algarismos (não necessariamente distintos) dos números.

Como $3 \times E$ termina em 1, temos que $E = 7$ e, na multiplicação, "vai 2" para a casa das dezenas. Assim, a multiplicação é

$$\begin{array}{cccccc} 1 & A & B & C & D & 7 \\ & & & & \times & 3 \\ \hline A & B & C & D & 7 & 1 \end{array}$$

e $3 \times D + 2$ termina em 7.

Portanto, $3 \times D$ termina em 5, de sorte que $D = 5$ e a multiplicação é

$$\begin{array}{cccccc} 1 & A & B & C & 5 & 7 \\ & & & & \times & 3 \\ \hline A & B & C & 5 & 7 & 1 \end{array}$$

Como "foi 1" para a casa das centenas, temos $3 \times C + 1$ termina em 5, logo, $3 \times C$ termina em 4. Então, $C = 8$ e a multiplicação fica

$$\begin{array}{cccccc} 1 & A & B & 8 & 5 & 7 \\ & & & & \times & 3 \\ \hline A & B & 8 & 5 & 7 & 1 \end{array}$$

Uma vez que "foi 2" pra casa das unidades de milhar, concluímos que $3 \times B + 2$ termina em 8, logo, $B = 2$. Então, ficamos com

$$\begin{array}{cccccc} 1 & A & 2 & 8 & 5 & 7 \\ & & & & \times & 3 \\ \hline A & 2 & 8 & 5 & 7 & 1 \end{array}$$

Por fim, $3 \times A$ termina em 2, de modo que $A = 4$ e o cálculo final é

$$142857 \times 3 = 428571.$$

Assim, o número inicial é 142857. □

Exercício 5 (OBMEP). *Na adição a seguir, o símbolo* $\clubsuit$ *representa um mesmo algarismo. Qual é o valor de* $\clubsuit \times \clubsuit + \clubsuit$*?*

$$\begin{array}{cccc} & 4 & \clubsuit & 7 \\ + & 8 & 9 & 5 \\ \hline 1 & \clubsuit & \clubsuit & 2 \end{array}$$

Solução. No cálculo apresentado podemos observar o seguinte:

- Na coluna das unidades, como $7+5=12$, "vai 1"para a coluna das dezenas.
- Na coluna das dezenas, uma vez que $1+\clubsuit+9=10+\clubsuit$, o algarismo das dezenas da soma é $\clubsuit$ e "vai 1"para a coluna das centenas.
- Na coluna das centenas, como $1+4+8=13$, o algarismo das centenas da soma é 3 e vai 1 para a coluna dos milhares.

Assim, concluímos que $\clubsuit=3$ (note que a adição é $437+895=1332$). Logo, $\clubsuit\times\clubsuit+\clubsuit=3\times3+3=12$. $\square$

Exercício 6 (OBM). *A adição a seguir está incorreta. Entretanto, se substituirmos somente um certo algarismo a, toda vez que ele aparece, por um certo algarismo b, a conta fica correta. Qual é o valor de $a+b$?*

$$\begin{array}{r} 742586 \\ +829430 \\ \hline 1212016 \end{array}$$

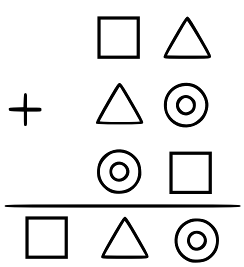
Solução. Numa primeira inspeção, notamos que os três algarismos à direita de todos os números estão corretos, isto é, estão corretamente escritos os algarismos 0, 1, 3, 4, 5, 6 e 8. Portanto, dentre os algarismos 2, 7 e 9, um está escrito incorretamente.

Olhando para a coluna dos milhares, podemos ver que o 9 está escrito corretamente, pois se o substituirmos por um outro algarismo, a soma com o 2 não estará correta. Logo, ou 2 ou 7 está incorreto.

Se o 7 estiver incorreto, então 2 estará correto. Entretanto, isto não é possível, pois a soma $2+4+1$, que aparece na colunas das dezenas de milhares, não estaria certa. Logo, 2 é o algarismo que deve ser substituído.

Olhando novamente a soma $2+4+1=11$, vemos que esta conta só ficará correta se substituirmos o 2 pelo 6. Fazendo essa substituição, verificamos que o restante da conta também fica correto. Então, $a+b=2+6=8$. $\square$

Exercício 7 (OBM 2006). *Na adição abaixo, cada símbolo representa um único algarismo e símbolos diferentes representam algarismos diferentes. Que algarismo cada símbolo representa?*



Solução. Veja que a soma de três números de dois algarismos é no máximo $99+99+99=297$. Portanto, $\square$ só pode ser 1 ou 2.

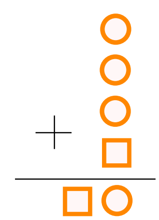
Observando a coluna das unidades, percebemos que $\square+\triangle=10$. Além disso, o "vai um" da soma das unidades faz com que a comparação feita na coluna das dezenas acarrete $\square+\circledcirc+1=10$, ou seja, $\square+\circledcirc=9$.

Agora, vamos analisar os casos $\square=1$ e $\square=2$:

- Se $\square=1$, então $\triangle=9$ e $\circledcirc=8$. Temos, pois, a adição:
$$19+98+81=198,$$
que é verdadeira.
- Se $\square=2$, então $\triangle=8$ e $\circledcirc=7$. Assim, a adição é:
$$28+87+72=287,$$
que não é verdadeira.

$\square$

Exercício 8. *Na adição abaixo, cada símbolo representa um único algarismo e símbolos diferentes representam algarismos diferentes. Qual o algarismo que cada símbolo representa?*



Solução. Veja que a soma máxima possível é $9+9+9+8=35$. Portanto, $\square$ só pode ser 1, 2 ou 3. Além disso, como a adição é feita de acordo com o sistema decimal, temos:

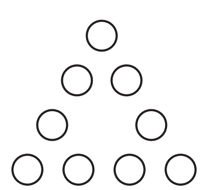
$$3\bigcirc+\square=10\square+\bigcirc.$$

Portanto,

$$2\bigcirc=9\square.$$

Da última igualdade segue que $\square$ deve ser par, logo, $\square=2$. Consequentemente, $\bigcirc=9$. $\square$

Exercício 9. *Mostre como colocar os números de 1 a 9 (um em cada círculo) nos nove círculos da figura abaixo, de modo que as somas dos números escritos em cada lado do triângulo sejam as mesmas e sejam as maiores possíveis.*



Solução. Observe que cada número escrito nas pontas do triângulo faz parte de dois lados, logo, faz parte de duas somas. Para que essas somas sejam máximas, os números escritos nessas pontas devem ser os maiores possíveis, ou seja, 9, 8 e 7.

Agora, veja que os números que já estão escritos em cada um dos lados do triângulo somam $9 + 8 = 17$, $9 + 7 = 16$ e $8 + 7 = 15$, os quais são três números inteiros consecutivos. Assim, os números que ainda não ocuparam lugar no triângulo, e somam $1+2+3+4+5+6 = 21$, devem ser separados em três grupos tais que as somas dos números em cada grupo também sejam números consecutivos.

Por outro lado, a soma dessas três somas é igual ao triplo da soma intermediária, de sorte que a soma intermediária vale $21 \div 3 = 7$. Assim, essas somas devem ser iguais a 6, 7 e 8, e os três grupos podem ser $\{2, 4\}$, $\{1, 6\}$ e $\{3, 5\}$ (veja se há outros grupos possíveis).

Por fim, uma possível distribuição dos números é como mostrado a seguir:

9
2 1
4 6
8 3 5 7

□

2 Sugestões aos professores

Utilize dois encontros de 50 minutos cada para desenvolver o conteúdo desta aula. Lembre-se de dar tempo aos alunos para pensarem nas questões. Motive-os a utilizar as propriedades das operações aritméticas, sempre chamando-as pelo nome.

Uma sugestão interessante é pedir aos alunos que resolvam primeiro as questões em grupos para, em seguida, escolher um voluntário do grupo para expor o raciocínio utilizado, no quadro, para toda a turma.

Por fim, use as referências listadas a seguir para buscar questões extras e propô-las aos estudantes.

Referências

[1] Bruno Holanda e Emiliano A. Chagas. *Círculos de Matemática da OBMEP, Volume 1: Primeiros passos em Combinatória, Aritmética e Álgebra.* IMPA, 2018.

[2] A. Gelfand, I.M. e Shen. *Algebra.* Birkhäuser Boston, 2003.

Material Teórico - Módulo de Potenciação e Dízimas Periódicas

Potenciação

Oitavo Ano

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 Potência de expoente inteiro positivo

Antes de estudar potências, é conveniente relembrar as notacões utilizadas para representar os conjuntos numéricos. $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ é o conjunto dos números **inteiros positivos** (ou **naturais**), $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ é o conjunto dos números **inteiros** e $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ é o conjunto dos números **racionais**. Utilizamos ainda $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$ para denotar os **inteiros não nulos** e $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$ para os **racionais não nulos**.

Se a é um número racional e n é um número inteiro positivo, a **potência** de **base** a e **expoente** n é definida por

$$\begin{aligned} a^1 &= a, \\ a^n &= \underbrace{a.a\dots a}_{n \text{ vezes}}. \end{aligned}$$

Lê-se a **elevado a** n ou a elevado à $n-$ésima potência. Os casos $n = 2$ e $n = 3$ têm denominações especias. Quando $n = 2$ lê-se a **elevado ao quadrado** e quando $n = 3$ lê-se a **elevado ao cubo**.

Exemplo 1. *A potência*

$$3.3.3.3.3 = 3^5$$

tem base 3 *e expoente* 5*. Lê-se três elevado a cinco ou três elevado à quinta potência.*

Exemplo 2. *A potência*

$$\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3$$

possui base $-\frac{1}{2}$ *e expoente* 3*. Neste caso, lê-se menos um meio elevado ao cubo.*

Exemplo 3.

$$(-0,3)^2 = (-0,3).(-0,3).$$

Lê-se menos zero vírgula três elevado ao quadrado.

Exemplo 4. *Qual o algarismo das unidades de 4^{2015}?*

Solução. Observe que

$$\begin{aligned} 4^1 &= 4, \\ 4^2 &= 4.4 = 16, \\ 4^3 &= 4.4.4 = 64, \\ 4^4 &= 4.4.4.4 = 256. \end{aligned}$$

Agora, sem calcular o valor da potência 4^5, podemos ver que seu algarismo das unidades é 4. Desse modo, 4^6 tem 6 como algarismo das unidades. Concluímos que se o expoente n é ímpar, a potência 4^n tem algarismo das unidades igual a 4, e se o expoente é par, então tal algarismo é 6. Portanto, 2^{2015} tem 4 como algarismo das unidades. $\square$

Exemplo 5. *Qual o algarismo das unidades de 3^{2015}?*

Solução. Veja que

$$\begin{aligned} 3^1 &= 3, \\ 3^2 &= 3.3 = 9, \\ 3^3 &= 3.3.3 = 27, \\ 3^4 &= 3.3.3.3 = 81, \\ 3^5 &= 3.3.3.3.3 = 243, \\ 3^6 &= 3.3.3.3.3.3 = 729, \\ 3^7 &= 3.3.3.3.3.3.3 = 2187, \\ 3^8 &= 3.3.3.3.3.3.3.3 = 6561. \end{aligned}$$

Como no exemplo anterior, sem calcular o valor das potências seguintes, podemos ver que o algarismo das unidades de 3^9 é 3, o de 3^{10} é 9, e assim por diante. Observe que os algarismos das unidades das potências listadas acima são 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, nesta ordem. Assim, fica claro que existe um ciclo de 4 números que se repetem como algarismo das unidades das potências de 3. Para saber tal algarismo em determinada potência, basta calcular o resto da divisão do expoente da potência por 4. Como 2015 deixa resto 3 quando dividido por 4, concluímos que o algarismo das unidades de 3^{2015} é 7. $\square$

Observação 6. *Se $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, então*

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{q}\right)^n &= \overbrace{\frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} \cdot \ldots \cdot \frac{p}{q}}^{n \textit{ vezes}} \\ &= \frac{\overbrace{p.p\dots p}^{n \textit{ vezes}}}{\underbrace{q.q\dots q}_{n \textit{ vezes}}} \\ &= \frac{p^n}{q^n}. \end{aligned}$$

Exemplo 7.

$$\begin{aligned} 2^1 &= 2, \\ 2^2 &= 2.2 = 4, \\ 2^3 &= 2.2.2 = -8, \\ 2^4 &= 2.2.2.2 = 16, \\ (-2)^1 &= -2, \\ (-2)^2 &= (-2).(-2) = 4, \\ (-2)^3 &= (-2).(-2).(-2) = -8, \\ (-2)^4 &= (-2).(-2).(-2).(-2) = 16. \end{aligned}$$

Quando o expoente de uma potência de base não nula é par, o resultado da potência é sempre positivo. Se o expoente é ímpar, então o resultado tem o mesmo sinal da base.

Quando a base de uma potência de expoente inteiro positivo é positiva, o resultado é sempre um número positivo. Caso a base seja negativa, então o resultado é positivo se o expoente é par e negativo se o expoente é ímpar.

Exemplo 8. *Se $n \in \mathbb{N}$, então*

$$\begin{array}{rcl} 0^n & = & 0; \\ 1^n & = & 1; \\ (-1)^n & = & \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é par;} \\ -1, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases} \end{array}$$

2 Propriedades

Esta seção tem como objetivo apresentar algumas propriedades das potências. Antes disso, vejamos os exemplos abaixo para facilitar a compreensão.

Exemplo 9.

$$\begin{array}{rcl} 5^3.5^4 & = & (5.5.5).(5.5.5.5) \\ & = & 5.5.5.5.5.5.5 \\ & = & 5^{3+4}. \end{array}$$

Exemplo 10.

$$\begin{array}{rcl} (-9)^5 \div (-9)^2 & = & \dfrac{(\cancel{-9}).(\cancel{-9}).(-9).(-9).(-9)}{(\cancel{-9}).(\cancel{-9})} \\ & = & (-9)^{5-2}. \end{array}$$

Exemplo 11.

$$\begin{array}{rcl} \left[\left(\dfrac{7}{2}\right)^3\right]^4 & = & \left(\dfrac{7}{2}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{7}{2}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{7}{2}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{7}{2}\right)^3 \\ & = & \left(\dfrac{7}{2}\right)^{3+3+3+3} = \left(\dfrac{7}{2}\right)^{4.3} = \left(\dfrac{7}{2}\right)^{3.4}. \end{array}$$

Exemplo 12.

$$(8.5)^3 = (8.5).(8.5).(8.5) = (8.8.8).(5.5.5) = 8^3.5^3.$$

Exemplo 13.

$$\begin{array}{rcl} 0 < \dfrac{1}{2} < 1 & \Longrightarrow & \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 < \dfrac{1}{2} < 1 \\ & \Longrightarrow & \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 < \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 < \dfrac{1}{2} < 1 \\ & \Longrightarrow & \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 < \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 < \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 < \dfrac{1}{2} < 1. \end{array}$$

Exemplo 14.

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{5}{2} > 1 & \Longrightarrow & \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 > \dfrac{5}{2} > 1 \\ & \Longrightarrow & \left(\dfrac{5}{2}\right)^3 > \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 > \dfrac{5}{2} > 1 \\ & \Longrightarrow & \left(\dfrac{5}{2}\right)^4 > \left(\dfrac{5}{2}\right)^3 > \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 > \dfrac{5}{2} > 1. \end{array}$$

As propriedades que foram evidenciadas nos exemplos acima podem ser generalizadas como segue.

Proposição 15. *Sejam $a, b \in \mathbb{Q}$ e $m, n \in \mathbb{N}$. Então*

I. $a^m.a^n = a^{m+n}$;

II. $a^m \div a^n = a^{m-n}$, *se* $a \neq 0$ *e* $m > n$;

III. $(a^m)^n = a^{m.n}$;

IV. $(a.b)^n = a^n.b^n$;

V. $0 < a < 1,\ m > n \Longrightarrow a^m < a^n$;

VI. $a > 1,\ m > n \Longrightarrow a^m > a^n$.

Exemplo 16.

$$\frac{11}{4} > 2 \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{11}{4}\right)^3 = \frac{11}{4} \cdot \frac{11}{4} \cdot \frac{11}{4} > 2.2.2 = 2^3.$$

Exemplo 17.

$$-3 > -4 \Longrightarrow 4 > 3 \Longrightarrow (-4)^2 = 4^2 > 3^2 = (-3)^2.$$

Exemplo 18.

$$2 > -1 \Longrightarrow 2^5 > 0 > (-1)^5.$$

Mais uma vez, generalizando os exemplos acima obtém-se:

Proposição 19. *Sejam $a, b \in \mathbb{Q}$ e $m \in \mathbb{N}$. Então*

I. $a > b \geq 0 \Longrightarrow a^m > b^m$;

II. $0 > a > b \Longrightarrow a^m < b^m$, *se m é par*

III. $a > b \Longrightarrow a^m > b^m$, *se m é ímpar .*

Exemplo 20. *Transforme o produto 8.2^{100} em uma potência de 2.*

Solução.

$$8.2^{100} = 2^3.2^{100} = 2^{3+100} = 2^{103}.$$

□

Exemplo 21. *Qual é a metade de 4^{80}?*

Solução. Observando que

$$4 = 2^2,$$

obtemos

$$4^{80} = (2^2)^{80} = 2^{2.80} = 2^{160}.$$

Assim

$$4^{80} \div 2 = 2^{160} \div 2^1 = 2^{160-1} = 2^{159}.$$

□

Exemplo 22. *Efetuando as operações indicadas na expressão* $\dfrac{2^{2017}+2^{2015}}{2^{2016}+2^{2014}} \cdot 2015$ *obtemos*

$$\begin{aligned} \frac{2^{2017}+2^{2015}}{2^{2016}+2^{2014}} \cdot 2015 &= \frac{2^{2015}.(2^2+1)}{2^{2014}.(2^2+1)} \cdot 2015 \\ &= \frac{\cancel{5}.2^{2015}}{\cancel{5}.2^{2014}} \cdot 2015 \\ &= 2^{2015-2014}.2015 \\ &= 2.2015 \\ &= 4030. \end{aligned}$$

Exemplo 23. *Para saber qual é o maior dentre os números* 2^{97}, 4^{48}, 8^{31}, 32^{19} *e* 128^{14}, *a estratégia é tranformá-los em potências de 2 e utilizar o item VI da proposicão 15. Temos então*

$$\begin{aligned} 4^{48} &= (2^2)^{48} = 2^{2.48} = 2^{96}, \\ 8^{31} &= (2^3)^{31} = 2^{3.31} = 2^{93}, \\ 32^{19} &= (2^5)^{19} = 2^{5.19} = 2^{95}, \\ 128^{14} &= (2^7)^{14} = 2^{7.14} = 2^{98}. \end{aligned}$$

Como o maior dos expoentes é 98, 128^{14} *é o maior dos números.*

Exemplo 24. *Qual número é maior,* 2^{96} *ou* 3^{64}*?*

Solução. Observe que

$$\begin{aligned} 2^{96} &= 2^{3.32} = (2^3)^{32} = 8^{32}; \\ 3^{64} &= 3^{2.32} = (3^2)^{32} = 9^{32}. \end{aligned}$$

Neste caso, utilizamos a proposição 19 para concluir que $9^{32} > 8^{32}$. Portanto, $3^{64} > 2^{96}$. □

Exemplo 25. *Qual número é maior,* 31^{11} *ou* 17^{14} *?*

Solução. Fazendo uso das proposições 15 e 19 obtemos

$$\begin{aligned} 31^{11} &< 32^{11} = (2^5)^{11} = 2^{5.11} \\ &= 2^{55} < 2^{56} = 2^{4.14} \\ &= (2^4)^{14} = 16^{14} < 17^{14}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 26. *Qual número é maior,* $2^{100} + 3^{100}$ *ou* 4^{100} *?*

Solução. Mais uma vez utilizando a proposição 19 obtém-se

$$\begin{aligned} 2^{100} + 3^{100} &< 3^{100} + 3^{100} = 2.3^{100} \\ &= 2.3^3.3^{97} = 2.27.3^{97} \\ &= 54.3^{97} < 64.4^{97} \\ &= 4^3.4^{97} = 4^{100}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 27. *Ponha os números* $a = 2^{60}$, $b = 3^{40}$, $c = 7^{20}$ *e* $d = 19^{10}$ *em ordem crescente.*

Solução. Observe que

$$\begin{aligned} a &= 2^{60} = \left(2^6\right)^{10} = 64^{10}, \\ b &= 3^{40} = \left(3^4\right)^{10} = 81^{10}, \\ c &= 7^{20} = \left(7^2\right)^{10} = 49^{10}, \\ d &= 19^{10}. \end{aligned}$$

Portanto, pela proposição 19, a ordem correta é $d < c < a < b$. □

Exemplo 28. *Determine o valor de* $\dfrac{2^n.10^{n+2}}{5^{n+1}.4^n}$.

Solução.

$$\begin{aligned} \frac{2^n.10^{n+2}}{5^{n+1}.4^n} &= \frac{2^n.(2.5)^{n+2}}{5.5^n.4^n} \\ &= \frac{2^n.2^{n+2}.5^{n+2}}{5.5^n.\left(2^2\right)^n} \\ &= \frac{2^n.2^n.2^2.5.5^{n+1}}{5^{n+1}.2^{2n}} \\ &= \frac{\cancel{2^{2n}}.2^2.5.\ \cancel{5^{n+1}}}{\cancel{5^{n+1}}.\ \cancel{2^{2n}}} \\ &= 2^2.5 = 20. \end{aligned}$$

□

É conveniente diferenciar potência cuja base é uma potência de potência cujo expoente é uma potência, isto é, em geral temos

$$\left(a^m\right)^n \neq a^{m^n}.$$

Exemplo 29. *Veja que*

$$\begin{aligned} (2^3)^4 &= 2^{3.4} = 2^{12} \ e \\ 2^{3^4} &= 2^{81}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(2^3)^4 \neq 2^{3^4}.$$

Exemplo 30.

$$\left(3^{2^3}\right)^5 = \left(3^8\right)^5 = 3^{8.5} = 3^{40}.$$

Exemplo 31.

$$2^{2^{2^{2^2}}} = 2^{2^{2^4}} = 2^{2^{16}} = 2^{65536}.$$

Exemplo 32.

$$\left(2^{2^2}\right)^{2^2} = \left(2^4\right)^4 = 2^{4.4} = 2^{16}.$$

3 Potências de base 10

Uma situação particular é quando tratamos de **potências de base 10**. Veja que

$$\begin{aligned} 10^1 &= 10,\\ 10^2 &= 100,\\ 10^3 &= 1000,\\ 10^4 &= 10000,\\ 10^5 &= 100000. \end{aligned}$$

Mais geralmente, temos

$$10^n = 1\underbrace{00\ldots0}_{n\text{ zeros}}.$$

Exemplo 33. *O número $2^{2012}.5^{2015}$ possui 2015 algarismos, pois*

$$\begin{aligned} 2^{2012}.5^{2015} &= 2^{2012}.5^{2012}.5^3\\ &= (2.5)^{2012}.5^3\\ &= 5^3.10^{2012}\\ &= 125.1\underbrace{00\ldots0}_{2012\ zeros}\\ &= 125\underbrace{00\ldots0}_{2012\ zeros}. \end{aligned}$$

Exemplo 34. *Qual é a soma dos algarismos do número $10^{1958}+10^{1962}+10^{1970}+10^{1994}+10^{2002}$?*

Solução. Temos

$$10^{1958}+10^{1962}+10^{1970}+10^{1994}+10^{2002} =$$

$$= 1\underbrace{00\ldots0}_{7\text{ zeros}}1\underbrace{00\ldots0}_{23\text{ zeros}}1\underbrace{00\ldots0}_{7\text{ zeros}}1\underbrace{00\ldots0}_{3\text{ zeros}}1\underbrace{00\ldots0}_{1958\text{ zeros}}.$$

Portanto, a soma dos algarismos do número

$$10^{1958}+10^{1962}+10^{1970}+10^{1994}+10^{2002}$$

é igual a 5. □

Exemplo 35. *Qual é a soma dos algarismos do número $1+10+10^2+\ldots+10^{2014}+10^{2015}$?*

Solução. Temos

$$1+10+10^2+\ldots+10^{2014}+10^{2015} = \underbrace{11\ldots111}_{2016\text{ algarismos }1}.$$

Portanto, a soma dos algarismos de

$$1+10+10^2+\ldots+10^{2014}+10^{2015}$$

é 2016. □

Exemplo 36. *Qual é o maior dentre os números 2015^5, 3016^4, 4017^3, 5018^2 e 6019^1?*

Solução. Observe que

$$\begin{aligned} 2015^5 &> 2000^5 = \left(2.10^3\right)^5\\ &= 2^5.\left(10^3\right)^5 = 32.10^{15}\\ &= 32\underbrace{00\ldots0}_{15\text{ zeros}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3016^4 &< 4000^4 = \left(4.10^3\right)^4\\ &= 4^4.\left(10^3\right)^4 = 256.10^{12}\\ &= 256\underbrace{00\ldots0}_{12\text{ zeros}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4017^3 &< 5000^3 = \left(5.10^3\right)^3\\ &= 5^3.\left(10^3\right)^3 = 125.10^9\\ &= 125\underbrace{00\ldots0}_{9\text{ zeros}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5018^2 &< 6000^2 = \left(6.10^3\right)^2\\ &= 6^2.\left(10^3\right)^2 = 36.10^6\\ &= 36000000, \end{aligned}$$

$$6019^1 < 7000.$$

Portanto, fica claro que o maior dos números é 2015^5, pois possui a maior quantidade de algarismos. □

4 Expoente zero e expoente negativo

Relembremos a seguinte propriedade (cf. proposição 15), válida para $a \in \mathbb{Q}^*$, $m, n \in \mathbb{N}$, com $m > n$:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Agora, queremos estender as potências aos expoentes inteiros que não são positivos sem perder a propriedade acima. Então devemos ter

$$\begin{aligned} a^0 &= a^{1-1} = \frac{a^1}{a^1} = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}} = 1; \\ a^{-n} &= a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}. \end{aligned}$$

Desse modo, podemos definir

$$\begin{aligned} a^0 &= 1; \\ a^{-n} &= \frac{1}{a^n}. \end{aligned}$$

Exemplo 37.

$$\begin{aligned} 2^0 &= 1; \\ 15873^0 &= 1. \end{aligned}$$

Exemplo 38.

$$\left[\left(10^{2015} + 11^{2014} + 12^{2013}\right)^{2016}\right]^0 = 1.$$

Exemplo 39.

$$\left\{\left[\left(-\frac{9}{13}\right)^{11} + \left(\frac{19}{17}\right)^{15}\right]^{49}\right\}^0 = 1.$$

Exemplo 40.

$$7^{-3} = \frac{1}{7^3}.$$

Exemplo 41.

$$\left(\frac{3}{8}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{3}{8}\right)^4} = \left(\frac{8}{3}\right)^4.$$

As propriedades apresentadas na proposição 15 agora são válidas para expoentes inteiros quaisquer.

Proposição 42. *Sejam $a, b \in \mathbb{Q}$ e $m, n \in \mathbb{Z}$. Então*

I. $a^m.a^n = a^{m+n}$;

II. $a^m \div a^n = a^{m-n}$, *se* $a \neq 0$;

III. $(a^m)^n = a^{m.n}$;

IV. $(a.b)^n = a^n.b^n$;

V. $0 < a < 1,\ m > n \Longrightarrow a^m < a^n$;

VI. $a > 1,\ m > n \Longrightarrow a^m > a^n$.

Exemplo 43. *Escreva*

$$\frac{9^{-5}.81^4.3^{-7}}{27^9.3^{-11}}$$

como uma única potência.

Solução. Utilizando as propriedades dadas na proposição 15 obtemos

$$\begin{aligned} \frac{9^{-5}.81^4.3^{-7}}{27^9.3^{-11}} &= \frac{\left(3^2\right)^{-5}.\left(3^4\right)^4.3^{-7}}{\left(3^3\right)^9.3^{-11}} \\ &= \frac{3^{-10}.3^{16}.3^{-7}}{3^{27}.3^{-11}} \\ &= \frac{3^{-10+16-7}}{3^{27-11}} = \frac{3^{-1}}{3^{16}} \\ &= 3^{-1-16} = 3^{-17}. \end{aligned}$$

□

5 Raizes quadradas e cúbicas

A **raiz quadrada** do número racional $a \geq 0$ é o número racional não negativo cujo quadrado é a. Denotamos a raiz quadrada de a por $\sqrt{a}$. Então

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Exemplo 44.

$$\begin{aligned} 0^2 &= 0 \Longrightarrow \sqrt{0} = 0; \\ 1^2 &= 1 \Longrightarrow \sqrt{1} = 1; \\ 2^2 &= 4 \Longrightarrow \sqrt{4} = 2; \\ 3^2 &= 9 \Longrightarrow \sqrt{9} = 3; \\ 4^2 &= 16 \Longrightarrow \sqrt{16} = 4; \\ 5^2 &= 25 \Longrightarrow \sqrt{25} = 5; \\ 6^2 &= 36 \Longrightarrow \sqrt{36} = 6; \\ 7^2 &= 49 \Longrightarrow \sqrt{49} = 7; \\ 8^2 &= 64 \Longrightarrow \sqrt{64} = 8; \\ 9^2 &= 81 \Longrightarrow \sqrt{81} = 9. \end{aligned}$$

Um número $p \in \mathbb{N}$ é chamado **quadrado perfeito** se existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $p = q^2$.

Como vimos no exemplo acima, os números 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 e 81 são os quadrados dos números naturais que possuem apenas um algarismo. Daí segue que um quadrado perfeito sempre tem 0, 1, 4, 5, 6 ou 9 como algarismo das unidades.

Exemplo 45. *Para calcular $\sqrt{196}$, comece observando que $10^2 = 100$ e $20^2 = 400$. Portanto, $\sqrt{196}$ está entre 10 e 20. Como o algarismo das unidades de 196 é 6, temos apenas duas possibilidades para $\sqrt{196}$, que são 14 e 16. Checando essas duas possibilidades obtemos $\sqrt{196} = 14$.*

Exemplo 46. *Agora o objetivo é determinar $\sqrt{625}$. Desde que $20^2 = 400$ e $30^2 = 900$, temos que $\sqrt{625}$ está entre 20 e 30. Veja que o algarismo das unidades de 625 é 5. Logo, para que 625 seja um quadrado perfeito, a única possibilidade é $\sqrt{625} = 25$. Checando, vemos que de fato $25^2 = 625$.*

Exemplo 47.

$$\begin{aligned}
\sqrt{31+\sqrt{22+\sqrt{7+\sqrt{4}}}} &= \sqrt{31+\sqrt{22+\sqrt{7+2}}}\\
&= \sqrt{31+\sqrt{22+\sqrt{9}}}\\
&= \sqrt{31+\sqrt{22+3}}\\
&= \sqrt{31+\sqrt{25}} = \sqrt{31+5}\\
&= \sqrt{36} = 6.
\end{aligned}$$

Agora observe exemplos que seguem abaixo.

Exemplo 48.

$$\sqrt{9.16} = \sqrt{144} = 12 = 3.4 = \sqrt{9}.\sqrt{16}.$$

Exemplo 49.

$$(\sqrt{25})^3 = 5^3 = 125 = \sqrt{15625} = \sqrt{25^3}.$$

Exemplo 50.

$$\sqrt{\frac{49}{100}} = \sqrt{0,49} = 0,7 = \frac{7}{10} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{100}}.$$

Exemplo 51.

$$49 < 81 \Longrightarrow \sqrt{49} < \sqrt{81} \Longrightarrow 7 < 9.$$

Nos exemplos foram evidenciadas propriedades que podem ser generalizados na seguinte proposição:

Proposição 52. *Sejam $a, b \in \mathbb{Q}$ e $m \in \mathbb{N}$, com $a \geq 0$, $b \geq 0$. Então*

I. $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$;

II. $(\sqrt{a})^m = \sqrt{a^m}$;

III. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, *se* $b \neq 0$,

IV. $a < b \Longrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$

> Observe que a raiz quadrada da soma não é igual à soma das raízes quadradas, isto é, em geral vale
>
> $$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Exemplo 53.

$$\begin{aligned}
\sqrt{9+16} &= \sqrt{25} = 5\\
\sqrt{9}+\sqrt{16} &= 3+4 = 7.
\end{aligned}$$

A **raiz cúbica** do número racional a é o número racional cujo cubo vale a. A raiz cúbica de a é denotada por $\sqrt[3]{a}$. Então temos

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a.$$

Exemplo 54.

$$\begin{aligned}
0^3 &= 0 \Longrightarrow \sqrt[3]{0} = 0;\\
1^3 &= 1 \Longrightarrow \sqrt[3]{1};\\
2^3 &= 8 \Longrightarrow \sqrt[3]{8} = 2;\\
3^3 &= 27 \Longrightarrow \sqrt[3]{27} = 3;\\
4^3 &= 64 \Longrightarrow \sqrt[3]{64} = 4;\\
5^3 &= 125 \Longrightarrow \sqrt[3]{125} = 5;\\
(-1)^3 &= -1 \Longrightarrow \sqrt[3]{-1} = -1;\\
(-2)^3 &= -8 \Longrightarrow \sqrt[3]{-8} = -2;\\
(-3)^3 &= -27 \Longrightarrow \sqrt[3]{-27} = -3;\\
(-4)^3 &= -64 \Longrightarrow \sqrt[3]{-64} = -4\\
(-5)^3 &= -125 \Longrightarrow \sqrt[3]{-125} = -5.
\end{aligned}$$

Um número $p \in \mathbb{N}$ é chamado **cubo perfeito** se existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $p = q^3$.

Exemplo 55.

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{123+\sqrt[3]{12-\sqrt[3]{61+\sqrt[3]{27}}}} &= \sqrt[3]{123+\sqrt[3]{12-\sqrt[3]{61+3}}}\\
&= \sqrt[3]{123+\sqrt[3]{12-\sqrt[3]{64}}}\\
&= \sqrt[3]{123+\sqrt[3]{12-4}}\\
&= \sqrt[3]{123+\sqrt[3]{8}} = \sqrt[3]{123+2}\\
&= \sqrt[3]{125} = 5.
\end{aligned}$$

As propriedades listadas na proposição 52 se estendem às raízes cúbicas.

Proposição 56. *Sejam $a, b \in \mathbb{Q}$ e $m \in \mathbb{N}$. Então*

I. $\sqrt[3]{a.b} = \sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}$;

II. $(\sqrt[3]{a})^m = \sqrt[3]{a^m}$;

III. $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$, *se* $b \neq 0$;

IV. $a < b \Longrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$.

> Observe que a raiz cúbica da soma não é igual à soma das raízes cúbicas, isto é, em geral vale
>
> $$\sqrt[3]{a+b} \neq \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}.$$

Exemplo 57.

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{8+27} &= \sqrt[3]{35},\\
\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{27} &= 2+3 = 5.
\end{aligned}$$

Até o momento, só estudamos potências com expoentes inteiros. Uma pergunta natural a esta altura seria: existem potências com expoentes racionais não inteiros? Abaixo vemos uma resposta parcial para essa pegunta.

Supondo que as propriedades das potências de expoentes inteiros (cf. proposição 15) ainda são válidas, qual seria um possível valor para $a^{\frac{1}{2}}$, em que a é um número racional não negativo? Teríamos

$$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^{2\cdot\frac{1}{2}} = a^1 = a.$$

Ou seja, o quadrado de $a^{\frac{1}{2}}$ valeria a. Mas o número que tem essa propriedade é a raiz quadrada de a. Assim

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}.$$

Analogamente, se a é um número racional qualquer,

$$\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a^{3\cdot\frac{1}{3}} = a^1 = a.$$

Portanto

$$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}.$$

6 Raizes $n-$ésimas

Esta seção e a próxima podem ser omitidas numa primeira leitura.

Se $a \geq 0$ é um número racional e n é um inteiro positivo, definimos a **raiz $n-$ésima de a** como sendo o único racional não negativo cuja $n-$ésima potência é igual a a. A raiz $n-$ésima de a é denotada por $\sqrt[n]{a}$. Neste caso,

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Exemplo 58.

$$\begin{aligned}
0^n = 0 &\implies \sqrt[n]{0} = 0,\\
1^n = 1 &\implies \sqrt[n]{1} = 1,\\
2^4 = 16 &\implies \sqrt[4]{16} = 2,\\
3^5 = 243 &\implies \sqrt[5]{243} = 3,\\
4^6 = 4096 &\implies \sqrt[6]{4096} = 4.
\end{aligned}$$

Generalizando as definições de quadrado e cubo perfeito dadas na seção 5, dizemos que um número $p \in \mathbb{N}$ é uma **n-ésima potência perfeita** se existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $p = q^n$.

Observação 59. *Quando n é ímpar, a raiz $n-$ésima pode ser naturalmente estendida aos números racionais negativos.*

Exemplo 60.

$$\begin{aligned}
(-1)^9 = -1 &\implies \sqrt[9]{-1} = -1,\\
(-3)^5 = -243 &\implies \sqrt[5]{-243} = -3,\\
(-2)^7 = -128 &\implies \sqrt[7]{-128} = -2,\\
\left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32} &\implies \sqrt[5]{-\frac{1}{32}} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Generalizando o que foi feito para raízes quadradas e cúbicas obtemos

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{n\cdot\frac{1}{n}} = a^1 = a.$$

Portanto

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

As proposições 52 e 56 podem ser generalizadas na proposição que segue abaixo.

Proposição 61. *Sejam $a, b \in \mathbb{Q}$ tais que $a \geq 0$, $b \geq 0$ e $m, n, d \in \mathbb{N}$. Então*

I. $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$;

II. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$;

III. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n.d]{a^{m.d}}$;

IV. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\div d]{a^{m\div d}}$, *se $d|n$ e $d|m$;*

V. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, *se $b \neq 0$;*

VI. $a < b \implies \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$;

VII. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$.

> Para raízes $n-$ésimas também vale
>
> $$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}.$$

7 Potência de expoente racional

Como poderíamos definir $a^{\frac{m}{n}}$, onde a é um número racional positivo e $\dfrac{m}{n}$ é uma fracão com $m > 0$ e $n > 0$? Supondo que as propriedades das potências de expoentes inteiros (cf. proposição 15) continuam válidas, podemos escrever

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Sob as mesmas hipóteses, veja que

$$a^{-\frac{m}{n}}.a^{\frac{m}{n}} = 1.$$

Logo

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}.$$

De fato, mais uma vez, todas as propriedades apresentadas na proposição 15 continuam válidas.

Proposição 62. *Sejam* $a, b, x, y \in \mathbb{Q}$*, tais que* $a \geq 0$ *e* $b \geq 0$*. Então*

I. $a^x.a^y = a^{x+y}$;

II. $a^x \div a^y = a^{m-n}$, *se* $a \neq 0$;

III. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$;

IV. $(a.b)^x = a^x.b^x$;

V. $0 < a < 1,\ x > y \Longrightarrow a^x < a^y$;

VI. $a > 1,\ x > y \Longrightarrow a^x > a^y$.

Exemplo 63.

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{0,00032} &= (0,00032)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{32}{100000}\right)^{\frac{1}{5}} \\ &= \frac{32^{\frac{1}{5}}}{100000^{\frac{1}{5}}} = \frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{100000}} = \frac{2}{10} = 0,2.\end{aligned}$$

Exemplo 64.

$$2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2.2} = \sqrt{2^2}.\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

Exemplo 65.

$$6^{\frac{7}{4}} = \sqrt[4]{6^7} = \sqrt[4]{6^4.6^3} = \sqrt[4]{6^4}.\sqrt[4]{6^3} = 6\sqrt[4]{216}.$$

Exemplo 66.

$$\begin{aligned}5^{-\frac{8}{3}} &= \frac{1}{5^{\frac{8}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^8}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^3.5^3.5^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{5^3}.\sqrt[3]{5^3}.\sqrt[3]{5^2}} = \frac{1}{5.5.\sqrt[3]{25}} = \frac{1}{25\sqrt[3]{25}}.\end{aligned}$$

Exemplo 67.

$$\begin{aligned}\frac{5\sqrt[6]{49}}{\sqrt[3]{500}} &= \frac{5\sqrt[3]{\sqrt{49}}}{\sqrt[3]{125.4}} = \frac{5\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{5^3.4}} \\ &= \frac{5\sqrt[3]{7}}{5\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{7}{4}}.\end{aligned}$$

Exemplo 68.

$$\sqrt[9]{27^{36}} = 27^{\frac{36}{9}} = 27^4 = \left(3^3\right)^4 = 3^{3.4} = 3^{12}.$$

Dicas para o Professor

Reserve duas sessões de 50min para a segunda seção e uma sessão de 50min para cada uma das outras seções. Na segunda seção, enfatize as propriedades listadas nas proposições 15 e 19, invocando sua utilização, sempre que necessário, nas soluções dos exemplos. Outro ponto que deve ser observado é que as propriedades contidas na proposição 15 se estendem naturalmente quando passamos a expoentes inteiros ou racionais. Finalmente, na quinta seção, chame a atenção dos alunos para as propriedades das raízes quadradas que aparecem na proposição 52, bem como sua genezalização para raízes cúbicas e, mais geralmente, para raízes de índice n.

Material Teórico - Módulo de Produtos Notáveis e Fatoração de Expressões Algébricas

Produtos Notáveis - Parte 1

Oitavo Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

03 de julho de 2015

Uma identidade algébrica é uma equação em que os dois membros são expressões algébricas e que é verdadeira se, e somente se, a igualdade é verdadeira para quaisquer valores que se atribua às variáveis envolvidas.

Produtos notáveis são identidades algébricas que merecem ser destacadas por conta da grande frequência com que aparecem quando operamos com expressões algébricas.

1 Quadrado da soma e quadrado da diferença de dois termos

Utilizando as propriedades comutativa e associativa da adição e multiplicação de números reais, além da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, obtemos:

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= (x+y)(x+y)\\ &= x(x+y)+y(x+y)\\ &= (x^2+xy)+(yx+y^2)\\ &= x^2+2xy+y^2,\end{aligned}$$

em que x e y são números reais quaisquer.

Fórmula para o quadrado da soma de dois termos: $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2.$

Podemos interpretar geometricamente a fórmula para o quadrado da soma de dois termos desenhando um quadrado de lado $x+y$. Então, a área desse quadrado, que é igual a $(x+y)^2$, será dada também pela soma das áreas dos dois quadrados menores e dos dois retângulos que formam o quadrado maior de lado $x+y$ (veja figura 1). Obtemos, assim,

$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2.$$

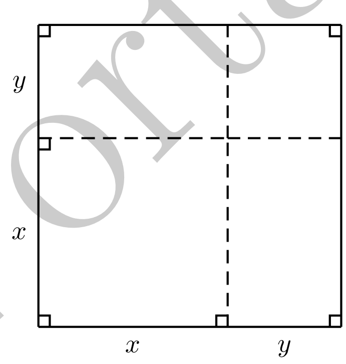


Figura 1: Quadrado da soma de dois termos.

Exemplo 1. *Desenvolvendo o quadrado* $(a+2b)^2$, *obtemos:*

$$\begin{aligned}(a+2b)^2 &= a^2+2a\cdot 2b+(2b)^2\\ &= a^2+4ab+4b^2.\end{aligned}$$

Observe que, nos cálculos acima, o que fizemos foi substituir, na fórmula para $(x+y)^2$, x *por* a *e* y *por* $2b$.

Exemplo 2. *Se* x *é um número real tal que* $x+\dfrac{1}{x}=7$, *calcule o valor de* $x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

Solução. Utilizando a fórmula para $(x+y)^2$, com $\frac{1}{x}$ no lugar de y, obtemos

$$\begin{aligned}x+\frac{1}{x}=7 &\Longrightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = 7^2\\ &\Longrightarrow x^2+2\cdot\cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}+\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 49\\ &\Longrightarrow x^2+2+\frac{1}{x^2}=49\\ &\Longrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=49-2=47.\end{aligned}$$

□

Exemplo 3 (OCM). *Existem inteiros positivos* a *e* b *tais que* $\dfrac{a^2+a}{b^2+b}=4$*?*

Solução. Suponhamos a existência de inteiros positivos a e b satisfazendo $\dfrac{a^2+a}{b^2+b}=4$. Então, temos

$$\begin{aligned}\frac{a^2+a}{b^2+b}=4 &\Longrightarrow a^2+a=4b^2+4b\\ &\Longrightarrow a^2+a+1=(2b)^2+2\cdot 2b\cdot 1+1^2\\ &\Longrightarrow a^2+a+1=(2b+1)^2.\end{aligned}$$

Por outro lado, veja que

$$\begin{aligned}a^2 &< a^2+a+1 < a^2+2a+1\\ &= a^2+2\cdot a\cdot 1+1^2=(a+1)^2.\end{aligned}$$

Portanto, a^2+a+1 não pode ser o quadrado de um número inteiro, pois encontra-se entre dois quadrados consecutivos.

Como chegamos a uma contradição, concluímos que a única possibilidade é que não existem tais inteiros a e b. □

Agora, utilizando a fórmula para o quadrado da soma de dois termos, obtemos

$$\begin{aligned}(x-y)^2 &= [x+(-y)]^2\\ &= x^2+2x\cdot(-y)+(-y)^2\\ &= x^2-2xy+y^2,\end{aligned}$$

em que x e y são números reais quaisquer.

Fórmula para o quadrado da diferença de dois termos:

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$

Também podemos interpretar geometricamente a fórmula para o quadrado da diferença de dois termos. Neste caso, desenhamos um quadrado de lado x e, dentro dele, um quadrado de lado $x-y$, um retângulo de lados $x-y$ e y, e um quadrado de lado y (veja a figura 2). Então, a área do quadrado maior, que por um lado vale x^2, também é dada pela soma $(x-y)^2 + 2y(x-y) + y^2$, ou seja,

$$x^2 = (x-y)^2 + 2xy - 2y^2 + y^2.$$

Logo,

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$

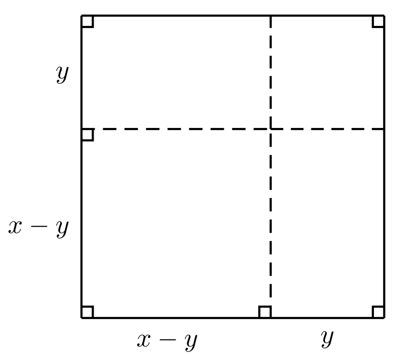


Figura 2: Quadrado da diferença de dois termos.

Exemplo 4. *Desenvolvendo o quadrado $(p^2-3q)^2$, com o auxílio da fórmula para o quadrado da diferença entre dois termos, obtemos:*

$$\begin{aligned}(p^2-3q)^2 &= \left(p^2\right)^2 - 2p^2 \cdot 3q + (3q)^2\\ &= p^4 - 6p^2q + 9q^2.\end{aligned}$$

Exemplo 5. *Sejam a e b números racionais positivos, tais que $\sqrt{ab}$ é irracional. Mostre que a diferença $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ também é irracional.*

Solução. Primeiramente, observe que o quadrado de um número racional é ainda racional. Por contradição, suponhamos que $d = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ seja racional. Então, d^2 também o será (uma vez que d^2 será representado pela fração cujos numerador e denominador são, respectivamente, iguais aos quadrados do numerador e do denominador da fração que representa d).

Utilizando novamente a fórmula para o quadrado da diferença entre dois termos, obtemos:

$$d^2 = \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 = a - 2\sqrt{ab} + b,$$

ou seja,

$$\sqrt{ab} = \frac{a+b-d^2}{2}.$$

Essa última igualdade, por suavez, acarreta que $\sqrt{ab}$ é racional, pois é dado por uma fração com numerador e denominador racionais. Mas isso contradiz o fato, assumido como hipótese, de que $\sqrt{ab}$ é irracional. Concluímos, pois, que $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ é irracional. □

2 Quadrado da soma de três termos

Utilizando duas vezes a fórmula para o quadrado da soma de dois termos, obtemos:

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2 &= (x+y)^2 + 2(x+y)z + z^2\\ &= (x^2+2xy+y^2) + (2xz+2yz) + z^2\\ &= x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz\\ &= x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz).\end{aligned}$$

Também é possível interpretar geometricamente o quadrado da soma de três termos. Na figura 3, o quadrado maior, de lado $x+y+z$, tem área dada pela soma das áreas dos quadrados e retângulos que o compõem. São dois retângulos de área xy, dois de área xz e dois de área yz, além dos três quadrados menores, de áreas x^2, y^2 e z^2. Então, vê-se facilmente que

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz).$$

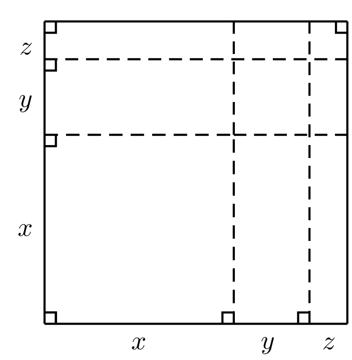


Figura 3: Quadrado da soma de três termos.

Fórmula para o quadrado da soma de três termos:

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz).$$

Exemplo 6. *Desenvolvendo a expressão* $\left(x^2+2y+z^3\right)^2$ *com o auxílio da fórmula anterior, obtemos:*

$$\begin{aligned}\left(x^2+2y+z^3\right)^2 &= \left(x^2\right)^2+(2y)^2+\left(z^3\right)^2\\ &\quad +2[x^2\cdot 2y+x^2z^3+2yz^3]\\ &= x^4+4y^2+z^6+4x^2y+2x^2z^3+4yz^3.\end{aligned}$$

3 Produto da soma pela diferença

Utilizando novamente as propriedades das operações aritméticas de números reais listadas anteriormente, obtemos:

$$\begin{aligned}(x+y)(x-y) &= x(x-y)+y(x-y)\\ &= (x^2-xy)+(yx-y^2)\\ &= x^2-\cancel{xy}+\cancel{xy}-y^2\\ &= x^2-y^2,\end{aligned}$$

em que x e y são números reais quaisquer. Então, temos:

Fórmula para o produto da soma pela diferença de dois termos:

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2.$$

Exemplo 7 (OBMEP - 2009)**.** *Qual o valor da diferença* 5353^2-2828^2*?*

(a) 2525^2.

(b) 3535^2.

(c) 4545^2.

(d) 4565^2.

(e) 5335^2.

Solução. Veja que $5353=53\cdot 101$ e $2828=28\cdot 101$. Daí, aplicando a fórmula para o produto da soma pela diferença de dois termos, obtemos:

$$\begin{aligned}5353^2-2828^2 &= 53^2\cdot 101^2-28^2\cdot 101^2\\ &= (53^2-28^2)\cdot 101^2\\ &= (53+28)\cdot(53-28)\cdot 101^2\\ &= 81\cdot 25\cdot 101^2 = 9^2\cdot 5^2\cdot 101^2\\ &= (9\cdot 5\cdot 101)^2 = 4545^2.\end{aligned}$$

Portanto, a alternativa correta é o item c. □

Exemplo 8. *Detremine o quociente da divisão de* $x^{16}-1$ *por* $\left(x^8+1\right)\left(x^4+1\right)\left(x^2+1\right)(x+1)$.

Demonstração. Aplicando a fórmula para o produto da soma pela diferença algumas vezes, temos:

$$\begin{aligned}x^{16}-1=x^{16}-1^{16} &= \left(x^8-1^8\right)\left(x^8+1^8\right)\\ &= \left(x^4-1^4\right)\left(x^4+1^4\right)\left(x^8+1\right)\\ &= \left(x^2-1^2\right)\left(x^2+1^2\right)\left(x^4+1\right)\left(x^8+1\right)\\ &= (x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)\left(x^8+1\right).\end{aligned}$$

Portanto, o quociente da divisão de $x^{16}-1$ por $\left(x^8+1\right)\left(x^4+1\right)\left(x^2+1\right)(x+1)$ é $x-1$. □

Exemplo 9 (EUA)**.** *Se* $x+\sqrt{x^2-1}+\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}=20$, *determine o valor de*

$$x^2+\sqrt{x^4-1}+\frac{1}{x^2+\sqrt{x^4-1}}.$$

Demonstração. Observe que

$$\begin{aligned}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) &= x^2-\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2\\ &= x^2-\left(x^2-1\right)\\ &= \cancel{x^2}-\cancel{x^2}+1=1.\end{aligned}$$

Daí, obtemos:

$$\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}=x+\sqrt{x^2-1}.$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned}&x+\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}=20\\ &\Longrightarrow 2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=20\\ &\Longrightarrow x+\sqrt{x^2-1}=10\\ &\Longrightarrow \sqrt{x^2-1}=10-x\\ &\Longrightarrow \left(\sqrt{x^2-1}\right)^2=(10-x)^2\\ &\Longrightarrow \cancel{x^2}-1=100-20x+\cancel{x^2}\\ &\Longrightarrow 20x=101\Longrightarrow x=\frac{101}{20}.\end{aligned}$$

Analogamente, temos

$$\begin{aligned}\left(x^2+\sqrt{x^4-1}\right)\left(x^2-\sqrt{x^4-1}\right) &= \left(x^2\right)^2-\left(\sqrt{x^4-1}\right)^2\\ &= x^4-\left(x^4-1\right)\\ &= \cancel{x^4}-\cancel{x^4}+1,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{x^2+\sqrt{x^4-1}}=x^2-\sqrt{x^4-1}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
&x^2+\sqrt{x^4-1}+\frac{1}{x^2-\sqrt{x^4-1}}\\
&=x^2+\cancel{\sqrt{x^4-1}}+x^2-\cancel{\sqrt{x^4-1}}\\
&=2x^2=2\cdot\left(\frac{101}{20}\right)^2=2\cdot\frac{101^2}{20^2}=2\cdot\frac{10201}{400}=\frac{10201}{200}.
\end{aligned}$$

□

Exemplo 10. *Simplifique a expressão*

$$\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7}\right)$$
$$\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)\cdot\left(-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}\right).$$

Solução. Utilizendo as fórmulas para o quadrado da soma, quadrado da diferença e produto da soma pela diferença de dois termos, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7}\right)\\
&\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)\cdot\left(-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)\\
&=\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7}\right)\\
&\cdot\left[\sqrt{7}+\left(\sqrt{5}-\sqrt{6}\right)\right]\cdot\left[\sqrt{7}-\left(\sqrt{5}-\sqrt{6}\right)\right]\\
&=\left[\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2\right]\cdot\left[\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{5}-\sqrt{6}\right)^2\right]\\
&=\left[(5+2\sqrt{30}+6)-7\right]\cdot\left[7-\left(5-2\sqrt{30}+6\right)\right]\\
&=\left(2\sqrt{30}+4\right)\cdot\left(2\sqrt{30}-4\right)\\
&=\left(2\sqrt{30}\right)^2-4^2=2^2\cdot 30-16=120-16=104.
\end{aligned}$$

□

4 Cubo da soma e cubo da diferença de dois termos

Mais uma vez utilizando as propriedades da adição e multiplicação de números reais citadas anteriormente, além da fórmula para o quadrado da soma de dois termos, obtemos:

$$\begin{aligned}
(x+y)^3&=(x+y)(x+y)^2\\
&=(x+y)(x^2+2xy+y^2)\\
&=x(x^2+2xy+y^2)+y(x^2+2xy+y^2)\\
&=x\cdot x^2+x\cdot 2xy+x\cdot y^2+y\cdot x^2+y\cdot 2xy+y\cdot y^2\\
&=x^3+2x^2y+xy^2+x^2y+2xy^2+y^3\\
&=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3,
\end{aligned}$$

em que x e y são números reais quaisquer.

Fórmula para o cubo da soma de dois termos:

$$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3.$$

Por vezes, utilizaremos a fórmula para o cubo da soma de dois termos da seguinte forma:

$$(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y).$$

Exemplo 11. *Utilizando a fórmula para o cubo da soma de dois termos podemos expandir a expressão* $\left(2a^2+3b\right)^3$. *Para tanto, substituímos, na fórmula acima,* x *por* $2a^2$ *e* y *por* $3b$, *obtendo:*

$$\begin{aligned}
\left(2a^2+3b\right)^3&=\left(2a^2\right)^3+3\cdot\left(2a^2\right)^2\cdot(3b)\\
&\quad+3\cdot\left(2a^2\right)\cdot(3b)^2+(3b)^3\\
&=8a^6+3\cdot 4a^4\cdot 3b+3\cdot 2a^2\cdot 9b^2+27b^3\\
&=8a^6+36a^4b+54a^2b^2+27b^3.
\end{aligned}$$

Exemplo 12. *Se* a *e* b *são números reais positivos, mostre que* $4\left(a^3+b^3\right)\geq(a+b)^3$.

Prova. Utilizando a fórmula para o cubo da soma de dois termos, obtemos

$$\begin{aligned}
4\left(a^3+b^3\right)\geq(a+b)^3&\iff 4\left(a^3+b^3\right)\\
&\qquad\geq a^3+b^3+3ab(a+b)\\
&\iff 3\left(a^3+b^3\right)\geq 3ab(a+b)\\
&\iff a^3+b^3\geq ab(a+b)\\
&\iff a^3+b^3\geq a^2b+ab^2\\
&\iff a^3+b^3-a^2b-ab^2\geq 0.
\end{aligned}$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned}
a^3+b^3-a^2b-ab^2&=a^3-a^2b+b^3-ab^2\\
&=a^2(a-b)-b^2(a-b)\\
&=\left(a^2-b^2\right)(a-b)\\
&=(a+b)(a-b)(a-b)\\
&=(a+b)(a-b)^2\geq 0,
\end{aligned}$$

pois $a+b>0$ e $(a-b)^2\geq 0$. □

Aplicando a fórmula para o cubo da soma de dois termos a $(x-y)^3=(x+(-y))^3$, obtemos:

$$\begin{aligned}
(x-y)^3&=(x+(-y))^3\\
&=x^3+3x^2(-y)+3x(-y)^2+(-y)^3\\
&=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3.
\end{aligned}$$

Fórmula para o cubo da diferença de dois termos:

$$(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3.$$

Exemplo 13. *Utilizando a fórmula para o cubo da diferença de dois termos, com $2x$ no lugar de x e $\frac{1}{5}$ no lugar de y, podemos expandir a expressão $\left(2x - \frac{1}{5}\right)^3$, obtendo:*

$$\begin{aligned}\left(2x - \frac{1}{5}\right)^3 &= (2x)^3 - 3\cdot(2x)^2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)\\ &\quad + 3\cdot(2x)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^3\\ &= 8x^3 - \frac{12x^2}{5} + \frac{6x}{25} - \frac{1}{125}.\end{aligned}$$

5 Cubo da soma de três termos

Aplicando a fórmula para o cubo da soma de dois termos duas vezes e utilizando as propriedades usuais das operações aritméticas, obtemos:

$$\begin{aligned}(x+y+z)^3 &= [(x+y)+z]^3\\ &= (x+y)^3 + z^3 + 3(x+y)z[(x+y)+z]\\ &= x^3 + y^3 + 3xy(x+y) + z^3\\ &\quad + 3(x+y)[(x+y)z + z^2]\\ &= x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)[xy + xz + yz + z^2]\\ &= x^3 + y^3 + z^3\\ &\quad + 3(x+y)[x(y+z) + z(y+z)]\\ &= x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)(x+z)(y+z).\end{aligned}$$

Fórmula para o cubo da soma de três termos:

$$(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)(x+z)(y+z).$$

Exemplo 14. *Se a, b e c são números reais que satisfazem $a+b+c=0$, mostre que $a^3+b^3+c^3 = 3abc$.*

Solução. Observando que $a+b=-c$, $a+c=-b$ e $b+c=-a$ e utilizando a fórmula para o cubo da soma de três termos, temos:

$$\begin{aligned}0 = (a+b+c)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(a+c)(b+c)\\ \Longrightarrow 0 &= a^3 + b^3 + c^3 + 3(-c)(-b)(-a)\\ \Longrightarrow 0 &= a^3 + b^3 + c^3 - 3cba\\ \Longrightarrow a^3 + b^3 + c^3 &= 3abc.\end{aligned}$$

$\square$

6 Soma e diferença de cubos

Mais uma vez fazendo uso das propriedades que as operações aritméticas com números reais satisfazem, obtemos os produtos notáveis abaixo.

$$\begin{aligned}(x-y)(x^2+xy+y^2) &= x(x^2+xy+y^2) - y(x^2+xy+y^2)\\ &= (x^3 + \cancel{x^2y} + \cancel{xy^2}) - (\cancel{x^2y} + \cancel{xy^2} + y^3)\\ &= x^3 - y^3.\end{aligned}$$

Fórmula para a diferença de dois cubos:

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2).$$

$$\begin{aligned}(x+y)(x^2-xy+y^2) &= x(x^2-xy+y^2) + y(x^2-xy+y^2)\\ &= (x^3 - \cancel{x^2y} + \cancel{xy^2}) + (\cancel{x^2y} - \cancel{xy^2} + y^3)\\ &= x^3 + y^3.\end{aligned}$$

Fórmula para a soma de dois cubos:

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2).$$

Exemplo 15. *Aplicando a fórmula para a diferença de dois cubos, temos:*

$$\begin{aligned}1 = 6 - 5 &= \left(\sqrt[3]{6}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{5}\right)^3\\ &= \left(\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{5}\right)\left[\left(\sqrt[3]{6}\right)^2 + \sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{5} + \left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right]\\ &= \left(\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{5}\right)\left(\sqrt[3]{6^2} + \sqrt[3]{6\cdot 5} + \sqrt[3]{5^2}\right)\\ &= \left(\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{5}\right)\left(\sqrt[3]{36} + \sqrt[3]{30} + \sqrt[3]{25}\right),\end{aligned}$$

donde concluímos que

$$\frac{1}{\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{36} + \sqrt[3]{30} + \sqrt[3]{25}.$$

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para cada uma das seções 1, 3 e 4, e uma sessão de 50min para as demais seções que compõem esta aula (possivelmente discutindo mais exemplos, os quais podem ser encontrados na bibliografia sugerida). Ao longo de toda a aula, é importante chamar a atenção dos alunos para as propriedades das operações aritméticas que são utilizadas para a dedução da fórmula de cada produto notável. Ressalte também a diferença entre "quadrado da soma" e "soma de quadrados", "cubo da soma" e "soma de cubos", etc.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.

Material Teórico - Módulo de Produtos Notáveis e Fatoração de Expressões Algébricas

Produtos Notáveis e Fatorações - Parte 1

Oitavo Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

Fatorar uma expressão algébrica inteira E significa escrevê-la como um produto de outras expressões algébricas, caso isso seja possível. Nesse caso, dizemos que um tal produto é uma **forma fatorada** da E. Por exemplo, $(x+y)(x-y)$ é uma forma fatorada da expressão algébrica x^2-y^2. Ao longo desta aula, estudaremos algumas técnicas utilizadas para fatorar expressões algébricas.

1 Fatoração pondo fatores comuns em evidência

Pôr um fator comum em evidência, significa utilizar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para fatorar uma expressão algébrica que é dada por uma soma de monômios, em que existe um fator comum a todos esses monômios. Por exemplo, pondo o fator comum 3 em evidência na expressão $3x+9$, obtemos $3x+9 = 3\cdot x + 3\cdot 3 = 3(x+3)$, sendo esta última uma forma fatorada de $3x+9$.

Exemplo 1. *Fatore a expressão algébrica* $5x^2+25x$.

Solução. Observe que o fator $5x$ é comum às parcelas $5x^2$ e $25x$. Portanto, pondo esse fator em evidência, obtemos:

$$5x^2+25x = 5x\cdot x + 5x\cdot 5 = 5x(x+5).$$

$\square$

Exemplo 2. *Fatore a expressão algébrica* $6a^3+2a^2-10a$.

Solução. Neste caso, note que o fator $2a$ é comum aos monômios $6a^3$, $2a^2$ e $-10a$. Portanto, obtemos uma forma fatorada de $6a^3+2a^2-10a$ procedendo do seguinte modo:

$$\begin{aligned} 6a^3+2a^2-10a &= 2a\cdot 3a^2 + 2a\cdot a + 2a\cdot(-5) \\ &= 2a(3a^2+a-5). \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 3. *Fatore a expressão algébrica* $15xy^2z^3 - 20x^2y^3z^2 - 10x^3y^4z^5$.

Solução. Denote por F a expressão algébrica do enunciado. Pondo o fator comum $5xy^2z^2$ em evidência, obtemos:

$$\begin{aligned} F &= 15xy^2z^3 - 20x^2y^3z^2 - 10x^3y^4z^5 \\ &= 5xy^2z^2\cdot 3z + 5xy^2z^2\cdot(-4xy) + 5xy^2z^2\cdot(-2x^2y^2z^3) \\ &= 5xy^2z^2(3z-4xy-2x^2y^2z^3). \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 4. *Fatorando o numerador e o denominador, simplifique a expressão algébrica* $\dfrac{9a^2-3a}{6ab-2b}$.

Solução. Pondo o fator $3a$ em evidência no numerador, obtemos:

$$\begin{aligned} 9a^2-3a &= 3a\cdot 3a + 3a\cdot(-1) \\ &= 3a(3a-1). \end{aligned}$$

Agora, pondo o fator comum $2a$ em evidência no denominador, obtemos:

$$\begin{aligned} 6ab-2b &= 2b\cdot 3a + 2b\cdot(-1) \\ &= 2b(3a-1). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{9a^2-3a}{6ab-2b} = \frac{3a\cancel{(3a-1)}}{2b\cancel{(3a-1)}} = \frac{3a}{2b}.$$

$\square$

2 Fatoração utilizando produtos notáveis

Outra técnica utilizada para fatorar expressões algébricas é utilizar os produtos notáveis estudados na aula anterior. Por exemplo, notando que $25x^2+20x+4$ pode ser escrito da forma $(5x)^2+2\cdot(5x)\cdot 2+2^2$, que, por sua vez, é o quadrado da soma dos termos $5x$ e 2, obtemos:

$$\begin{aligned} 25x^2+20x+4 &= (5x)^2+2\cdot(5x)\cdot 2+2^2 \\ &= (5x+2)^2. \end{aligned}$$

Portanto, $(5x+2)^2 = (5x+2)(5x+2)$ é uma forma fatorada de $25x^2+20x+4$.

Abaixo seguem mais alguns exemplos que ilustram como obter formas fatoradas de expressões algébricas utilizando produtos notáveis.

Exemplo 5. *Fatore a expressão algébrica* $9m^4-16n^2$.

Solução. Inicialmente, note que $9m^4 = \left(3m^2\right)^2$ e $16n^2 = (4n)^2$. Agora, utilizando a fórmula do produto da soma pela diferença de dois termos, segue que

$$\begin{aligned} 9m^4-16n^2 &= \left(3m^2\right)^2 - (4n)^2 \\ &= (3m^2+4n)(3m^2-4n). \end{aligned}$$

$\square$

O próximo exemplo, o qual é consideravelmente mais elaborado que os anteriores, mostra que, por vezes, a utilização de um produto notável como estratégia de fatoração requer um passo intermediário, que, por vezes, resume-se a um *artifício algébrico*. Observamos que, à medida que você adquirir mais experiência com fatorações, artifícios como o que será utilizado nesse exemplo parecerão ser mais naturais do que à primeira vista.

Exemplo 6. *Fatore a expressão* x^4+4y^4.

Solução. Adicionando e subtraindo o monômio $4x^2y^2$, obtemos

$$\begin{aligned} x^4 + 4y^4 &= x^4 + 4y^4 + (4x^2y^2 - 4x^2y^2) \\ &= (x^4 + 4y^4 + 4x^2y^2) - 4x^2y^2. \end{aligned}$$

Agora, observamos que a expressão $x^4 + 4y^4 + 4x^2y^2$ é o quadrado de uma soma de dois termos:

$$\begin{aligned} x^4 + 4y^4 + 4x^2y^2 &= \left(x^2\right)^2 + 2(x^2)(2y^2) + \left(2y^2\right)^2 \\ &= (x^2 + 2y^2)^2. \end{aligned}$$

Por fim, juntando os dois passos anteriores, escrevendo $4x^2y^2 = (2xy)^2$ e utilizando a fórmula do produto da soma pela diferença de dois termos, obtemos:

$$\begin{aligned} x^4 + 4y^4 &= \left(x^2 + 2y^2\right)^2 - (2xy)^2 \\ &= (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy). \end{aligned}$$

□

Exemplo 7. *Fatore a expressão algébrica* $E = 8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$.

Solução. Observe que

$$\begin{aligned} E &= 8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3 \\ &= (2a)^3 - 3 \cdot 4a^2 \cdot b + 3 \cdot (2a) \cdot b^2 - b^3 \\ &= (2a)^3 - 3 \cdot (2a)^2 \cdot b + 3 \cdot (2a) \cdot b^2 - b^3 \\ &= (2a - b)^3, \end{aligned}$$

em que, na última igualdade acima, utilizamos a fórmula para o cubo da diferença de dois termos. □

Exemplo 8. *Para obter uma forma fatorada para a expressão* $n^6 - 27$*, basta notar que* $n^6 = \left(n^2\right)^3$ *e* $27 = 3^3$*. Depois disso, utilizamos a fórmula da diferença de dois cubos. Assim, obtemos:*

$$\begin{aligned} n^6 - 27 &= \left(n^2\right)^3 - 3^3 \\ &= (n^2 - 3)\left[\left(n^2\right)^2 + n^2 \cdot 3 + 3^2\right] \\ &= (n^2 - 3)(n^4 + 3n^2 + 9). \end{aligned}$$

Para o próximo exemplo, recorde, da aula anterior, que a fórmula para o cubo da soma de três termos fornece

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y)(x + z)(y + z).$$

Agora, suponha que $x + y + z = 0$. Utilizando a identidade algébrica acima, segue que

$$\begin{aligned} 0 = (x + y + z)^3 &= x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y)(x + z)(y + z) \\ &= x^3 + y^3 + z^3 + 3(-z)(-y)(-x), \end{aligned}$$

pois $x + y = -z$, $x + z = -y$ e $y + z = -x$. Daí, temos

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz. \tag{1}$$

Exemplo 9. *Fatore a expressão* $(a - c)^3 + (c - b)^3 + (b - a)^3$.

Solução. Note que $(a - c) + (c - b) + (b - a) = a - a + b - b + c - c = 0$. Portanto, utilizando a identidade (1), segue que

$$(a - c)^3 + (c - b)^3 + (b - a)^3 = 3(a - c)(c - b)(b - a).$$

□

A identidade algébrica

$$\begin{aligned} (x - a)(x - b) &= x^2 - ax - bx + ab \\ &= x^2 - (a + b)x + ab \end{aligned}$$

fornece a fatoração

$$x^2 - Sx + P = (x - a)(x - b), \tag{2}$$

em que $S = a + b$ e $P = ab$. Por exemplo, temos

$$x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5),$$

uma vez que $7 = 2 + 5$ e $10 = 2 \cdot 5$. Assim, vemos que a chave para fatorar a expressão $x^2 - Sx + P$ é perceber S como sendo igual à soma e P como sendo igual à diferença de um mesmo par de números a e b, como no exemplo numérico acima. Uma expressão do tipo

$$x^2 - Sx + P$$

é denominada um **trinômio do segundo grau** em x.

O próximo exemplo traz uma aplicação mais elaborada de fatorações do tipo (2).

Exemplo 10. *A fim de fatorar a expressão* $E = a^2(c - b) + b^2(a - c) + c^2(b - a)$*, combinamos sucessivamente várias das estratégias discutidas até aqui: aplicamos a propriedade distributiva às duas últimas parcelas, agrupamos as parcelas obtidas em outra ordem, pomos fatores comuns em evidência, utilizamos a fórmula do produto da soma pela diferença de dois termos e, por fim, fatoramos um trinômio do segundo grau em* a*:*

$$\begin{aligned} E &= a^2(c - b) + b^2(a - c) + c^2(b - a) \\ &= a^2(c - b) + b^2a - b^2c + c^2b - c^2a \\ &= a^2(c - b) + (b^2a - c^2a) + (c^2b - b^2c) \\ &= a^2(c - b) + a(b^2 - c^2) + bc(c - b) \\ &= a^2(c - b) + a(b + c)(b - c) + bc(c - b) \\ &= a^2(c - b) - a(b + c)(c - b) + bc(c - b) \\ &= (c - b)\left[a^2 - a(b + c) + bc\right] \\ &= (c - b)(a - b)(a - c). \end{aligned}$$

3 Fatoração por agrupamento

Para fatorar uma expressão algébrica inteira por **agrupamento**, devemos, iniciamente, escrevê-la como soma de outras expressões algébricas (**grupos**), as quais devem ser fatoradas; depois disso, é necessário que apareça um fator comum a todas essas formas fatoradas, o qual deve ser posto em evidência.

Por exemplo, para fatorar a expressão algébrica

$$ac + bc + ad + bd,$$

começamos agrupando suas parcelas da forma $(ac + bc) + (ad + bd)$; em seguida, pomos o fator c em evidência nas duas primeiras parcelas e o fator d em evidência nas duas últimas, obtendo, assim:

$$(ac + bc) + (ad + bd) = c(a + b) + d(a + b).$$

Por fim, pondo $a + b$ em evidência no segundo membro da última igualdade acima, obtemos:

$$\begin{aligned} ac + bc + ad + bd &= c(a + b) + d(a + b) \\ &= (a + b)(c + d). \end{aligned}$$

Observe que, alternativamente, poderíamos ter agrupado a expressão $ac + bc + ad + bd$ da forma $(ac + ad) + (bc + bd)$. Neste caso, o fator a seria posto em evidência na soma $ac + ad$ e o fator b na soma $bc + bd$. Procedendo assim, obteríamos:

$$\begin{aligned} ac + bc + ad + bd &= (ac + ad) + (bc + bd) \\ &= a(c + d) + b(c + d) \\ &= (c + d)(a + b), \end{aligned}$$

em que, na última igualdade, o fator comum $c+d$ foi posto em evidência para que pudéssemos obter a forma fatorada.

Abaixo, seguem mais alguns exemplos, os quais têm por objetivo aperfeiçoar a técnica de fatoração por agrupamento.

Exemplo 11. *Fatore a expressão* $6x^2 - 9xy + 2xy^2 - 3y^3$.

Solução. Agrupando a expressão na forma $(6x^2 - 9xy) + (2xy^2 - 3y^3)$, pomos em evidência o fator $3x$ no primeiro grupo e o fator y^2 no segundo, obtendo:

$$\begin{aligned} 6x^2 - 9xy + 2xy^2 - 3y^3 &= (6x^2 - 9xy) + (2xy^2 - 3y^3) \\ &= 3x(2x - 3y) + y^2(2x - 3y). \end{aligned}$$

Em seguida, pomos o fator $2x-3y$ em evidência, chegamos a

$$6x^2 - 9xy + 2xy^2 - 3y^3 = (2x - 3y)(3x + y^2).$$

□

Exemplo 12. *Simplifique a expressão algébrica*

$$\frac{x^2 + xy - 3x - 3y}{x^2 + 5x + xy + 5y}.$$

Solução. Fatorando o numerador e o denominador por agrupamento, obtemos, respectivamente:

$$\begin{aligned} x^2 + xy - 3x - 3y &= (x^2 - 3x) + (xy - 3y) \\ &= x(x - 3) + y(x - 3) \\ &= (x - 3)(x + y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + xy + 5y &= (x^2 + 5x) + (xy + 5y) \\ &= x(x + 5) + y(x + 5) \\ &= (x + 5)(x + y). \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + xy - 3x - 3y}{x^2 + 5x + xy + 5y} &= \frac{(x - 3)\cancel{(x + y)}}{(x + 5)\cancel{(x + y)}} \\ &= \frac{x - 3}{x + 5}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 13. *Determine uma forma fatorada para a expressão* $E = qm^3 + q^3 - 2m^3 - 2q^2 + q - 2$.

Solução. Agrupando a expressão da forma

$$E = (qm^3 + q^3 + q) + (-2m^3 - 2q^2 - 2),$$

pondo o fator q em evidência no primeiro grupo e o fator -2 no segundo, obtemos:

$$\begin{aligned} E &= (qm^3 + q^3 + q) + (-2m^3 - 2q^2 - 2) \\ &= q(m^3 + q^2 + 1) - 2(m^3 + q^2 + 1) \\ &= (m^3 + q^2 + 1)(q - 2). \end{aligned}$$

Outra possibilidade seria agrupar $E = (q^3 - 2q^2) + (qm^3 - 2m^3) + (q - 2)$. Se procedêssemos assim, teríamos:

$$\begin{aligned} E &= (q^3 - 2q^2) + (qm^3 - 2m^3) + (q - 2) \\ &= q^2(q - 2) + m^3(q - 2) + (q - 2) \\ &= (q - 2)(q^2 + m^3 + 1). \end{aligned}$$

□

Exemplo 14. *Simplifique a expressão* $\dfrac{a^4 - 5a^3 + 3a - 15}{a^3 - 125}$.

Solução. Observe que

$$\begin{aligned} a^4 - 5a^3 + 3a - 15 &= (a^4 - 5a^3) + (3a - 15) \\ &= a^3(a - 5) + 3(a - 5) \\ &= (a - 5)(a^3 + 3) \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
a^3 - 125 &= a^3 - 5^3 \\
&= (a-5)(a^2 + a \cdot 5 + 5^2) \\
&= (a-5)(a^2 + 5a + 25).
\end{aligned}
$$

Daí, segue que

$$
\begin{aligned}
\frac{a^4 - 5a^3 - 3a + 15}{a^3 - 125} &= \frac{\cancel{(a-5)}(a^3+3)}{\cancel{(a-5)}(a^2+5a+25)} \\
&= \frac{a^3+3}{a^2+5a+25}.
\end{aligned}
$$

□

Como no exemplo 6, utilizamos, no exemplo a seguir, o artifício de somar e subtrair parcelas que, originalmente, não apareciam na expressão a ser fatorada.

Exemplo 15. *Encontre uma forma fatorada para a expressão algébrica* $S = p^5 + p^4 + 1$.

Solução. Adicionando e subtraindo as parcelas p^3, p^2 e p a S e depois agrupando, obtemos:

$$
\begin{aligned}
S &= p^5 + p^4 + (p^3 - p^3) + (p^2 - p^2) + (p - p) + 1 \\
&= p^5 + p^4 + p^3 - p^3 - p^2 - p + p^2 + p + 1 \\
&= p^3(p^2 + p^2 + 1) - p(p^2 + p + 1) + (p^2 + p + 1) \\
&= (p^2 + p + 1)(p^3 - p + 1).
\end{aligned}
$$

□

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas uma sessão de 50min para cada uma das seções que compõem esta aula. Uma boa compreensão da seção 1 é fundamental para o desenvolvimento das demais. Por isso, é importante que seja dada uma atenção especial a tal seção. Na seção 2, é fundamental que os alunos aprendam a reconhecer um produto notável dentre os termos que compõem uma expressão algébrica inteira.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.

2. V. Litivinenko e A. Mordkovitch. *Solving Problems in Algebra and Trigonometry* . Moscou, Editora MIR, 1984.

Material Teórico - Módulo de Produtos Notáveis e Fatoração de Expressões Algébricas

Produtos Notáveis - Parte 2

Oitavo Ano

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

20 de julho de 2021

1 Exercícios variados

Neste material, apresentamos exercícios variados envolvendo produtos notáveis.

Exemplo 1. *Sejam x, y e z números reais positivos tais que $x^2+y^2+z^2=38$ e $xy+xz+yz=31$. Calcule o valor de $x+y+z$.*

Solução. Utilizando a fórmula para o quadrado da soma de três termos:

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2 &= x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)\\ &= 38+2\cdot 31\\ &= 100.\end{aligned}$$

Logo,

$$x+y+z=\sqrt{100}=10.$$

□

Exemplo 2. *Se x e y são números reais tais que $xy=9$ e $x+y=6$, assinale a alternativa que corresponde ao valor de $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$:*

(*a*) 2.

(*b*) 4.

(*c*) 6.

(*d*) 8.

(*e*) 10.

Solução. Observe inicialmente que

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{x^2+y^2}{9}.$$

Para calcular o valor de x^2+y^2, note que, por um lado,

$$x+y=6\Rightarrow (x+y)^2=6^2=36.$$

Por outro,

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2\\ &= x^2+y^2+2\cdot 9\\ &= x^2+y^2+18.\end{aligned}$$

Daí, obtemos

$$36 = x^2+y^2+18 \Longrightarrow x^2+y^2 = 18.$$

Agora,

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x} = \frac{x^2+y^2}{9} = \frac{18}{9} = 2.$$

A alternativa correta é a letra **(a)**. □

Exemplo 3. *Calcule o valor da expressão numérica* $0{,}779^2 - 0{,}221^2$.

Solução. A fórmula para a diferença de dois quadrados diz que

$$x^2-y^2 = (x+y)(x-y).$$

Aplicando-a com $x = 0{,}779$ e $y = 0{,}221$, obtemos:

$$\begin{aligned}0{,}779^2 - 0{,}221^2 &= (0{,}779+0{,}221)(0{,}779-0{,}221)\\ &= 1\cdot 0{,}558\\ &= 0{,}558.\end{aligned}$$

□

Exemplo 4 (OBM). *Qual das opções a seguir corresponde ao valor da expressão* $20112011^2 + 20112003^2 - 16\cdot 20112007$*?*

(*a*) $2\cdot 20112007^2$.

(*b*) $2\cdot 20112003^2$.

(*c*) $2\cdot 20112007$.

(*d*) $2\cdot 20112003$.

(e) $2 \cdot 20112011^2$.

Solução. Fazendo $x = 20112007$, temos $x - 4 = 20112003$ e $x + 4 = 20112011$. Assim,

$$\begin{aligned}
&20112011^2 + 20112003^2 - 16 \cdot 20112007 = \\
&= (x+4)^2 + (x-4)^2 - 16x \\
&= x^2 + 8x + 16 + x^2 - 8x + 16 - 16x \\
&= 2x^2 - 16x + 32 \\
&= 2(x^2 - 8x + 16) \\
&= 2(x-4)^2 \\
&= 2 \cdot 20112003^2.
\end{aligned}$$

Portanto, a alternativa correta é a letra **(b)**. □

Exemplo 5. *Sabe-se que $9x + 5y = 1$ e $9x - 5y = 3$. Calcule o valor numérico da expressão algébrica*

$$\frac{2^{81x^2}}{2^{25y^2}}.$$

Solução. Veja que

$$\begin{aligned}
\frac{2^{81x^2}}{2^{25y^2}} &= 2^{81x^2 - 25y^2} = 2^{(9x)^2 - (5y)^2} \\
&= 2^{(9x+5y)(9x-5y)} = 2^{1 \cdot 3} \\
&= 2^3 = 8.
\end{aligned}$$

□

Exemplo 6. *Seja x um número real positivo tal que $x + \frac{1}{x} = 4$. Calcule o valor numérico de $x^3 + \frac{1}{x^3}$.*

Solução. Uma vez que $\frac{1}{x^3} = \left(\frac{1}{x}\right)^3$, comecemos desenvolvendo a expressão $\left(x + \frac{1}{x}\right)^3$. Recordando que

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

e fazendo $y = \frac{1}{x}$, obtemos

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 &= x^3 + 3x^2\left(\frac{1}{x}\right) + 3x\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^3\\ &= x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x + 3\cdot\frac{1}{x}\\ &= x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x+\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x+\frac{1}{x}\right)\\ &= 4^3 - 3\cdot 4\\ &= 52.\end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 7 (OBM). *Assinale a opção que corresponde ao valor de $x+y$, em que x e y são reais tais que $x^3+y^3=9$ e $xy^2+x^2y=6$:*

(a) 1.

(b) 2.

(c) 3.

(d) 4.

(e) 5.

Solução. Veja que

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\\ &= \left(x^3+y^3\right)+3(xy^2+x^2y)\\ &= 9+3\cdot 6\\ &= 27.\end{aligned}$$

Desse modo, obtemos

$$x + y = \sqrt[3]{27} = 3.$$

Logo, a alternativa correta é a letra **(c)**. $\square$

Exemplo 8 (OBM). *Se x e y são números reais tais que $x^3 + y^3 = 5(x + y)$, $x^2 + y^2 = 4$ e $x + y \neq 0$, calcule o valor de xy:*

(*a*) 4.

(*b*) 3.

(*c*) 1.

(*d*) 0.

(*e*) −1.

Solução. Utilizando a fatoração para a soma de dois cubos,

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2),$$

juntamente com a informação de que

$$x^3 + y^3 = 5(x + y),$$

obtemos

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = 5(x + y).$$

Uma vez que $x + y \neq 0$, podemos cancelar o fator $x + y$ em ambos os membros da última igualdade, ficando com

$$x^2 - xy + y^2 = 5.$$

Agora, fazendo a substituição $x^2 + y^2 = 4$ na última igualdade, obtemos

$$\begin{aligned} x^2 - xy + y^2 = 5 &\Longrightarrow 4 - xy = 5 \\ &\Longrightarrow xy = -1. \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 9. *Dentre as opções a seguir, assinale a que traz um valor de n para o qual o número $2^{20}+2^{26}+2^n$ é um quadrado perfeito:*

(*a*) 10.

(*b*) 15.

(*c*) 30.

(*d*) 20.

(*e*) 12.

Solução. Vamos utilizar a fórmula para o quadrado da soma de dois termos, $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$, para encontrar n tal que a expressão $2^{20}+2^{26}+2^n$ possa ser escrita como um quadrado perfeito. Temos

$$\begin{aligned} 2^{20}+2^{26}+2^n &= \left(2^{10}\right)^2 + 2\cdot 2^{25} + 2^n \\ &= \left(2^{10}\right)^2 + 2\cdot 2^{10}\cdot 2^{15} + 2^n. \end{aligned}$$

Agora, uma vez que $\left(2^{15}\right)^2 = 2^{30}$, ao fazermos a substituição $n=30$, obtemos um quadrado perfeito:

$$\begin{aligned} \left(2^{10}\right)^2 + 2\cdot 2^{10}\cdot 2^{15} + 2^{30} &= \left(2^{10}\right)^2 + 2\cdot 2^{10}\cdot 2^{15} + \left(2^{15}\right)^2 \\ &= \left(2^{10}+2^{15}\right)^2. \end{aligned}$$

Portanto, a alternativa correta é a letra **(c)**. □

Exemplo 10. *Se x, y, a e b são números reais positivos tais que $\sqrt{x-y}=a$ e $\sqrt{x}+\sqrt{y}=b$, qual o valor de $\sqrt{xy}$?*

(*a*) $\dfrac{b^4-a^4}{4b^2}$.

(*b*) $\dfrac{a^2}{b}$.

(c) $\dfrac{b^2+a^2}{b}$.

(d) $\dfrac{1}{b}$.

(e) a^2.

Solução. Veja que

$$\sqrt{x-y}=a \Longrightarrow x-y=a^2$$

e

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right) &= \left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2\\ &= x-y.\end{aligned}$$

Daí, obtemos

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{a^2}{b}.$$

Agora, somando membro a membro as igualdades $\sqrt{x}+\sqrt{y}=b$ e $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\frac{a^2}{b}$, obtemos

$$\sqrt{x}=\frac{b^2+a^2}{2b} \quad \text{e} \quad \sqrt{y}=\frac{b^2-a^2}{2b}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\sqrt{xy} &= \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}\\ &= \frac{b^2+a^2}{2b}\cdot\frac{b^2-a^2}{2b}\\ &= \frac{\left(b^2+a^2\right)\left(b^2-a^2\right)}{2b\cdot 2b}\\ &= \frac{\left(b^2\right)^2-\left(a^2\right)^2}{4b^2}\\ &= \frac{b^4-a^4}{4b^2}.\end{aligned}$$

Portanto, a alternativa correta é a letra **(a)**. □

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Sugerimos aos professores que apresentem os exemplos com todos os detalhes e proponham exemplos adicionais aos alunos, sempre dando algum tempo para que eles tentem encontrar as soluções por conta própria.

É importante que os alunos memorizem as fórmulas para os vários produtos notáveis e fatorações, pois assim os cálculos ficam mais simples e os erros diminuem. Isso deve acontecer de forma natural, à medida que eles fizerem uma boa quantidade de exercícios. Entretanto, enquanto esse processo não estiver completo, vale a pena deduzir as fórmulas novamente. Como na aula anterior, ressalte a diferença entre "quadrado de uma soma" e "soma de quadrados", "cubo de uma soma" e "soma de cubos", etc.

A referência a seguir contém uma discussão completa de produtos notáveis e fatorações, assim como vários outros exercícios envolvendo tais temas.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume* 1*: Números Reais.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.

Material Teórico - Módulo de Produtos Notáveis e Fatoração de Expressões Algébricas

Produtos Notáveis e Fatorações - Parte 2

Oitavo Ano

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

20 de julho de 2021

Portal da Matemática
OBMEP

1 Exercícios variados

Neste material, continuamos apresentando exercícios variados envolvendo produtos notáveis e fatoração de expressões algébricas.

Exemplo 1. *Prove a validade da* ***identidade de Euler***[1]*:*

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=(ad-bc)^2+(ac+bd)^2.$$

Solução. Desenvolvendo o lado direito da identidade, obtemos:

$$\begin{aligned}(ad-bc)^2+(ac+bd)^2 &= (ad)^2-2(ad)(bc)+(bc)^2\\ &\quad+(ac)^2+2(ac)(bd)+(bd)^2\\ &= a^2d^2-\cancel{2abcd}+b^2c^2\\ &\quad+a^2c^2+\cancel{2abcd}+b^2d^2\\ &= a^2d^2+a^2c^2+b^2c^2+b^2d^2\\ &= a^2\left(d^2+c^2\right)+b^2\left(c^2+d^2\right)\\ &= \left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right).\end{aligned}$$

□

Exemplo 2. *Mostre que a soma do produto de quaisquer quatro números inteiros consecutivos com uma unidade é um quadrado perfeito.*

Solução. Sejam n, $n+1$, $n+2$ e $n+3$ quatro inteiros consecutivos. Veja que

$$\begin{aligned}n(n+1)(n+2)(n+3)+1 &= n(n+3)(n+1)(n+2)+1\\ &= \left(n^2+3n\right)\left(n^2+2n+n+2\right)+1\\ &= \left(n^2+3n\right)\left(n^2+3n+2\right)+1.\end{aligned}$$

[1] Leonhard Euler foi um matemático suíço do século XVIII, até hoje considerado um dos maiores matemáticos da História.

Agora, denotando $N = n^2 + 3n$, obtemos:

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3)+1 &= \left(n^2+3n\right)\left(n^2+3n+2\right)+1 \\ &= N(N+2)+1 \\ &= N^2+2N+1 \\ &= (N+1)^2. \end{aligned}$$

□

Exemplo 3 (OBM). *Sendo a, b e c reais tais que $ab(a+b+c) = 1001$, $bc(a+b+c) = 2002$ e $ac(a+b+c) = 3003$. Encontre o valor de abc.*

Solução. Temos:

$$ab(a+b+c) = 1001 \iff abc(a+b+c) = 1001c,$$

$$bc(a+b+c) = 2002 \iff abc(a+b+c) = 2002a = 2 \cdot 1001a$$

e

$$ac(a+b+c) = 3003 \iff abc(a+b+c) = 3003b = 3 \cdot 1001b.$$

Logo,

$$abc(a+b+c) = 1001c$$

$$\frac{abc(a+b+c)}{2} = 1001a$$

e

$$\frac{abc(a+b+c)}{3} = 1001b.$$

Somando membro a membro as últimas três equações, obtemos

$$\begin{aligned} &abc(a+b+c) + \frac{abc(a+b+c)}{2} + \frac{abc(a+b+c)}{3} = \\ &= 1001c + 1001a + 1001b \\ \iff &abc(a+b+c)\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 1001(c+a+b). \end{aligned}$$

Agora, note que

$$ab(a+b+c) = 1001 \Longrightarrow a+b+c \neq 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} abc(a+b+c)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) &= 1001(c+a+b) \\ \Longleftrightarrow abc(\cancel{a+b+c})\cdot\frac{11}{6} &= 1001(\cancel{a+b+c}) \\ \Longleftrightarrow abc = 1001\cdot\frac{6}{11} &= 546. \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 4. *Sejam a, b, c e d reais tais que*

$$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2 = 4(ab+bc+cd).$$

Mostre que $a=b=c=d$.

Solução. Observando que

$$\begin{aligned} (x+y)^2-4xy &= x^2+y^2+2xy-4xy \\ &= x^2+y^2-2xy \\ &= (x-y)^2, \end{aligned}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} &(a+b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2-4(ab+bc+cd) = \\ &= [(a+b)^2-4ab]+[(b+c)^2-4bc]+[(c+d)^2-4cd] \\ &= (a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2. \end{aligned}$$

Então,

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2 = 0,$$

de forma que $a-b=0$, $b-c=0$ e $c-d=0$. Assim, $a=b=c=d$. $\square$

Exemplo 5. *Se a, b e c são números reais tais que $a^2+b^2+c^2=1$, prove que*

$$-\frac{1}{2} \leq ab+ac+bc \leq 1.$$

Solução. Observe que

$$\begin{aligned}
&(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2 \geq 0 \Longrightarrow\\
&\Longrightarrow a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2 \geq 0\\
&\Longrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2 \geq 2ab+2ac+2bc\\
&\Longrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc.
\end{aligned}$$

Logo,

$$ab+ac+bc \leq a^2+b^2+c^2=1.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)^2 \geq 0 \Longrightarrow\\
&\Longrightarrow\ a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc \geq 0\\
&\Longrightarrow\ 2(ab+ac+bc) \geq -\left(a^2+b^2+c^2\right)\\
&\Longrightarrow\ ab+ac+bc \geq -\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.
\end{aligned}$$

Daí segue que

$$ab+ac+bc \geq -\frac{a^2+b^2+c^2}{2} \geq -\frac{1}{2}.$$

$\square$

Exemplo 6 (OBM). *Assinale a opção que corresponde ao valor da expressão*

$$\frac{2015^3-1^3}{1^2+2015^2+2016^2}.$$

(a) 1006.

(b) 1007.

(c) 1008.

(d) 2014.

(e) 2015.

Solução. Utilizando o produto notável

$$x^3 - y^3 = (x - y)\left(x^2 + xy + y^2\right),$$

obtemos

$$\begin{aligned} 2015^3 - 1^3 &= (2015 - 1)(2015^2 + 2015 \cdot 1 + 1^2) \\ &= 2014 \cdot \left(2015^2 + 2016\right). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$2016^2 = (2015 + 1)^2 = 2015^2 + 2 \cdot 2015 + 1,$$

logo,

$$\begin{aligned} 1^2 + 2015^2 + 2016^2 &= 1 + 2015^2 + 2015^2 + 2 \cdot 2015 + 1 \\ &= 2 \cdot 2015^2 + 2 \cdot 2015 + 2 \\ &= 2\left(2015^2 + 2015 + 1\right) \\ &= 2\left(2015^2 + 2016\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{2015^3 - 1^3}{1^2 + 2015^2 + 2016^2} &= \frac{2014 \cdot \left(2015^2 + 2016\right)}{2\left(2015^2 + 2016\right)} \\ &= \frac{2014}{2} \\ &= 1007. \end{aligned}$$

Desse modo, a alternativa correta é a letra **(b)**. □

Exemplo 7 (OBM). *Calcule o valor do real positivo b, sabendo que a equação*

$$\left(4^2 + b^2\right)x^2 - 26bx + \left(b^2 + 9^2\right) = 0$$

tem raízes iguais.

Solução 1. Observe que

$$\begin{aligned} &\left(4^2 + b^2\right)x^2 - 26bx + \left(b^2 + 9^2\right) = 0 \\ \iff\ & 4^2 \cdot x^2 + b^2 \cdot x^2 - 8bx - 18bx + b^2 + 9^2 = 0 \\ \iff\ & b^2 - 2 \cdot b \cdot 4x + (4x)^2 + (bx)^2 - 2 \cdot bx \cdot 9 + 9^2 = 0 \\ \iff\ & (b - 4x)^2 + (bx - 9)^2 = 0. \end{aligned}$$

Agora, uma vez que existe x real que é solução da equação do enunciado, obtemos $b-4x=0$ e $bx-9=0$. Mas $x \neq 0$, pois, caso contrário, obteríamos $b^2+9^2=0$, o que é impossível. Portanto, $b=4x=\frac{9}{x}$ e, daí,

$$b^2 = 4\cancel{x} \cdot \frac{9}{\cancel{x}} = 36 \Longrightarrow b = 6.$$

□

Solução 2. Alternativamente, a fim de que a equação de segundo grau do enunciado tenha raízes iguais, seu discriminante deve ser igual a 0. Portanto,

$$26^2 b^2 = 4(4^2+b^2)(b^2+9^2)$$

ou, o que é o mesmo,

$$b^4 - 72b^2 + 36^2 = 0.$$

Por sua vez, a última equação acima é o mesmo que

$$(b^2-36)^2 = 0,$$

de sorte que $b^2 = 36$ e, daí, $b = 6$. □

Exemplo 8 (OBM - adaptado). *Quantos são os pares de inteiros positivos* (x,y) *que satisfazem a equação* $x^2 - y^2 = 2^{2021}$*?*

(*a*) 1007.

(*b*) 1008.

(*c*) 1009.

(*d*) 1010.

(*e*) 1011.

Solução. Veja que

$$x^2 - y^2 = 2^{2021} \iff (x-y)(x+y) = 2^{2021}.$$

Desse modo, devemos ter $x - y = 2^a$ e $x + y = 2^b$, com a e b inteiros não negativos tais que $a + b = 2021$. Somando e subtraindo membro a membro as equações do sistema linear

$$\begin{cases} x - y = 2^a \\ x + y = 2^b \end{cases},$$

obtemos

$$2x = 2^b + 2^a \iff x = 2^{b-1} + 2^{a-1}$$

e

$$2y = 2^b - 2^a \iff y = 2^{b-1} - 2^{a-1}.$$

Assim, para que as soluções de $x^2 - y^2 = 2^{2021}$ sejam pares de inteiros positivos, a e b devem ser inteiros tais que $1 \leq a < b$. Como $a + b = 2021$, os possíveis pares (a,b) são

$$(1{,}2020),(2{,}2019),(3{,}2018),\ldots,(1010{,}1011).$$

Portanto, há 1010 pares de inteiros positivos (x,y) que satisfazem a equação $x^2 - y^2 = 2^{2021}$, e a alternativa correta é a letra **(d)**. □

Exemplo 9 (OBM). *Considere o trinômio do segundo grau $p(x) = x^2 - x + 1$.*

(a) *Calcule o número de soluções reais distintas da equação $p(x^2) = x^2$, isto é,*

$$\left(x^2\right)^2 - \left(x^2\right) + 1 = x^2.$$

(b) *Calcule o número de soluções reais distintas da equação*

$$p(p(x)) = p(x).$$

Solução.
(a) Veja que

$$
\begin{aligned}
\left(x^2\right)^2 - \left(x^2\right) + 1 = x^2 &\iff \left(x^2\right)^2 - 2\left(x^2\right) + 1 = 0\\
&\iff \left(x^2 - 1\right)^2 = 0\\
&\iff x^2 - 1 = 0\\
&\iff (x+1)(x-1) = 0\\
&\iff x = \pm 1.
\end{aligned}
$$

Logo, a equação $p(x^2) = x^2$ possui exatamente duas soluções reais distintas.

(b) Fazendo $y = p(x)$, temos:

$$
\begin{aligned}
p(p(x)) = p(x) &\iff p(y) = y\\
&\iff y^2 - y + 1 = y\\
&\iff y^2 - 2y + 1 = 0\\
&\iff (y-1)^2 = 0\\
&\iff y = 1.
\end{aligned}
$$

Agora,

$$
\begin{aligned}
y = 1 &\iff p(x) = 1\\
&\iff x^2 - x + 1 = 1\\
&\iff x^2 - x = 0\\
&\iff x(x-1) = 0\\
&\iff x = 0 \text{ ou } x = 1.
\end{aligned}
$$

Assim, a equação $p(p(x)) = p(x)$ também possui duas raízes reais distintas. □

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Sugerimos aos professores que apresentem os exemplos com todos os detalhes e proponham exemplos adicionais aos alunos, sempre dando algum tempo para que eles tentem encontrar as soluções por conta própria.

É importante que os alunos memorizem as fórmulas para os vários produtos notáveis e fatorações, pois assim os cálculos ficam mais simples e os erros diminuem. Isso deve acontecer de forma natural, à medida que eles fizerem uma boa quantidade de exercícios. Entretanto, enquanto esse processo não estiver completo, vale a pena deduzir as fórmulas novamente. Como na aula anterior, ressalte a diferença entre "quadrado de uma soma" e "soma de quadrados", "cubo de uma soma" e "soma de cubos", etc.

A referência a seguir contém uma discussão completa de produtos notáveis e fatorações, assim como vários outros exercícios envolvendo tais temas.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume* 1*: Números Reais.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.

Material Teórico - Módulo Frações Algébricas

Operações Básicas

Oitavo Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 Simplificação de frações algébricas

Uma **fração algébrica** é uma expressão algébrica da forma $\frac{P}{Q}$, em que P e Q são polinômios e Q não é identicamente nulo. Assim como em frações numéricas (números racionais), P é chamado o **numerador** da fração e Q é o seu **denominador**. São exemplos de frações algébricas:

$$\frac{2}{x},\ \frac{4xy-x^2}{5xy^2-2x^3y} \text{ e } \frac{1-abc}{a^2+b^2+c^2}.$$

Para **simplificar** uma fração algébrica, a regra básica é fatorar o numerador e o denominador e, em seguida, cancelar os termos comuns aos dois. Também como com frações numéricas, quando uma fração algébrica é obtida a partir de outra através de uma simplificação, dizemos que essas duas frações algébricas são **equivalentes**.

Exemplo 1. *Simplifique a fração algébrica*

$$\frac{3ab+3b^2+6bc}{6a^2+6ab+12ac}.$$

Solução. Pondo o fator $3b$ em evidência no numerador e o fator $6a$ em evidência no denominador, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{3ab+3b^2+6bc}{6a^2+6ab+12ac} &= \frac{3b\cancel{(a+b+2c)}}{6a\cancel{(a+b+2c)}}\\ &= \frac{\cancel{3}b}{\cancel{3}\cdot 2a} = \frac{b}{2a}.\end{aligned}$$

□

Exemplo 2. *Simplifique a fração algébrica*

$$\frac{4x-12}{x^2-9}.$$

Solução. Utilizando a fórmula para a diferença de dois quadrados, temos:

$$x^2-9 = x^2-3^2 = (x+3)(x-3).$$

Portanto, colocando o fator 4 em evidência no numerador, obtemos

$$\frac{4x-12}{x^2-9} = \frac{4\cancel{(x-3)}}{(x+3)\cancel{(x-3)}} = \frac{4}{x+3}.$$

□

Exemplo 3. *Simplifique a fração algébrica*

$$\frac{a^2+ab-5a-5b}{a^2+7a+ab+7b}.$$

Solução. Começamos fatorando o numerador e o denominador por agrupamento, obtendo

$$\begin{aligned}a^2+ab-5a-5b &= (a^2-5a)+(ab-5b)\\ &= a(a-5)+b(a-5)\\ &= (a-5)(a+b)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}a^2+7a+ab+7b &= (a^2+7a)+(ab+7b)\\ &= a(a+7)+b(a+7)\\ &= (a+7)(a+b).\end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\frac{a^2+ab-5a-5b}{a^2+7a+ab+7b} = \frac{(a-5)\cancel{(a+b)}}{(a+7)\cancel{(a+b)}} = \frac{a-5}{a+7}.$$

□

Exemplo 4. *Simplifique a fração algébrica*

$$\frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-2x+1}.$$

Solução. Novamente, fatoramos o numerador por agrupamento para obter:

$$\begin{aligned}x^3-x^2+x-1 &= (x^3-x^2)+(x-1)\\ &= x^2(x-1)+1\cdot(x-1)\\ &= (x^2+1)(x-1).\end{aligned}$$

Por outro lado, o denominador é um trinômio quadrado perfeito. De fato, temos $x^2-2x+1=(x-1)^2$. Daí, segue que

$$\begin{aligned}\frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-2x+1} &= \frac{(x^2+1)(x-1)}{(x-1)^2}\\ &= \frac{(x^2+1)\cancel{(x-1)}}{(x-1)\cancel{(x-1)}}\\ &= \frac{x^2+1}{x-1}.\end{aligned}$$

□

2 Adição e subtração de expressões algébricas

Antes de definirmos como adicionar duas frações algébricas, recordemos que se duas frações numéricas possuem o mesmo denominador, então a soma dessas duas frações é a fração cujo denominador é o mesmo das duas parcelas e cujo numerador é dado pela soma dos numeradores das parcelas.

Por outro lado, se os denominadores são diferentes, basta encontrarmos duas frações com denominadores iguais, cada uma das quais equivalente a uma das parcelas da soma, e, em seguida, somar essas duas frações (que agora já possuem um mesmo denominador). Normalmente, esse denominador comum é dado pelo *mmc* dos denominadores das duas frações, mas também pode-se tomar, por exemplo, simplesmente o produto dos dois denominadores.

Com frações algébricas procedemos de modo análogo. Se duas frações algébricas são dadas por $\frac{P}{Q}$ e $\frac{P'}{Q}$, definimos sua **soma** pondo

$$\frac{P}{Q} + \frac{P'}{Q} = \frac{P + P'}{Q}.$$

A **diferença** entre $\frac{P}{Q}$ e $\frac{P'}{Q}$ (nessa ordem) é definida de modo semelhante:

$$\frac{P}{Q} - \frac{P'}{Q} = \frac{P - P'}{Q}.$$

Por exemplo, temos:

$$\frac{2}{a} + \frac{b}{a} = \frac{2 + b}{a}$$

e

$$\frac{1}{x^2 + 2x + y} - \frac{x}{x^2 + 2x + y} = \frac{1 - x}{x^2 + 2x + y}.$$

Se os denominadores das duas frações algébricas em questão são diferentes, primeiro devemos encontrar duas frações algébricas equivalentes às frações algébricas dadas inicialmente e que possuam um mesmo denominador. Em seguida, somamos (ou subtraímos, conforme o caso) essas duas últimas frações algébricas (que agora possuem o mesmo denominador) conforme definimos acima.

Mais precisamente, uma vez que as frações algébricas $\frac{P}{Q}$ e $\frac{P'}{Q'}$ são respectivamente equivalentes às frações algébricas $\frac{PQ'}{QQ'}$ e $\frac{P'Q}{QQ'}$, definimos a **soma** e a **diferença** das frações algébricas $\frac{P}{Q}$ e $\frac{P'}{Q'}$ (nessa ordem, no caso da diferença) pondo

$$\frac{P}{Q} + \frac{P'}{Q'} = \frac{PQ' + P'Q}{P'Q'}$$

e

$$\frac{P}{Q} - \frac{P'}{Q'} = \frac{PQ' - P'Q}{P'Q'}.$$

Chamamos o processo de encontrar essas frações algébricas equivalentes às frações dadas inicialmente de **redução ao mesmo denominador**. Vejamos mais um exemplo.

Exemplo 5. *Efetue a soma de frações algébricas abaixo:*

$$\frac{1}{x + y} + \frac{1}{x - y}.$$

Solução. Temos:

$$\frac{1}{x + y} + \frac{1}{x - y} = \frac{(x - \cancel{y}) + (x + \cancel{y})}{(x + y)(x - y)} = \frac{2x}{x^2 - y^2}.$$

Note que na última igualdade utilizamos a fórmula do produto da soma pela diferença, produto notável discutido no modulo de expressões algébricas. □

Para reduzir ao mesmo denominador podemos fazer como acima, multiplicando o numerador e o denominador de cada fração algébrica original pelo denominador da outra. Entretanto, se os denominadores das frações originais tiverem grau alto, esse processo pode dificultar bastante os cálculos.

Nos três exemplos a seguir veremos outro procedimento para reduzir frações algébricas ao mesmo denominador, o qual se assemelha bastante ao processo de redução de frações numéricas a um mesmo denominador, calculando o mmc de seus denominadores. Teremos mais a dizer sobre isso logo após examinarmos tais exemplos.

Exemplo 6. *Efetue a diferença de frações algébricas abaixo:*

$$\frac{a}{a + 2} - \frac{1}{a^2 + 4a + 4}.$$

Solução. Observe que $a^2 + 4a + 4$ é um trinômio quadrado perfeito. De fato, temos:

$$a^2 + 4a + 4 = (a + 2)^2.$$

Portanto, para reduzir as frações algébricas a um mesmo denominador, multiplicamos o numerador e o denominador da primeira fração por $a + 2$, obtendo assim:

$$\begin{aligned}\frac{a}{a + 2} - \frac{1}{a^2 + 4a + 4} &= \frac{a(a + 2)}{(a + 2)^2} - \frac{1}{a^2 + 4a + 4} \\ &= \frac{a^2 + 2a}{a^2 + 4a + 4} - \frac{1}{a^2 + 4a + 4} \\ &= \frac{a^2 + 2a - 1}{a^2 + 4a + 4}.\end{aligned}$$

□

Exemplo 7. *Efetue a soma de frações algébricas abaixo:*

$$\frac{a}{a - b} + \frac{2b}{a^2 - b^2} + \frac{b}{a + b}.$$

Solução. Para reduzir as três frações algébricas dadas na adição acima a um mesmo denominador, podemos mais uma vez lançar mão da fórmula do produto da soma pela diferença de dois termos:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Realmente, se multiplicarmos o numerador e o denominador da fração algébrica $\frac{a}{a-b}$ por $a + b$, e se multiplicamos o numerador e o denominador da fração algébrica $\frac{b}{a+b}$ por

$a-b$, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{a}{a-b}+\frac{2b}{a^2-b^2}+\frac{b}{a+b} &= \frac{a(a+b)}{(a-b)(a+b)}+\frac{2b}{a^2-b^2}\\ &\quad+\frac{b(a-b)}{(a+b)(a-b)}\\ &= \frac{a^2+ab}{a^2-b^2}+\frac{2b}{a^2-b^2}+\frac{ab-b^2}{a^2-b^2}\\ &= \frac{a^2+ab+2b+ab-b^2}{a^2-b^2}\\ &= \frac{a^2+2ab+2b-b^2}{a^2-b^2}.\end{aligned}$$

□

Exemplo 8. *Calcule o valor da soma algébrica:*

$$\frac{x+6}{x^2-49}+\frac{1}{2x-14}.$$

Solução. Note que $x^2-49=(x+7)(x-7)$ e $2x-14=2(x-7)$. Daí, para reduzirmos as duas frações ao mesmo denominador, podemos multiplicar os dois termos da primeira fração por 2 e os dois termos da segunda fração por $x+7$. Assim procedendo, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{x+6}{x^2-49}+\frac{1}{2x-14} &= \frac{x+6}{(x-7)(x+7)}+\frac{1}{2(x-7)}\\ &= \frac{2(x+6)}{2(x-7)(x+7)}+\frac{(x+7)\cdot 1}{2(x-7)(x+7)}\\ &= \frac{2x+12}{2(x^2-49)}+\frac{x+7}{2(x^2-49)}\\ &= \frac{2x+12+x+7}{2(x^2-49)}\\ &= \frac{3x+19}{2(x^2-49)}.\end{aligned}$$

□

Em última análise veja que, em cada um dos três últimos exemplos, o que fizemos foi fatorar os denominadores das frações algébricas dadas e, em seguida, ver os fatores comuns e não comuns a tais denominadores, a fim de poder reduzi-los a um denominador comum com um mínimo de esforço computacional. Isso é exatamente o mesmo processo que utilizamos para reduzir frações numéricas a um mesmo denominador, calculando o mmc dos denominadores das frações dadas.

Os próximos dois exemplos mostram como as operações com frações algébricas que estudamos até aqui podem ser úteis para o cálculo de expressões numéricas.

Exemplo 9.

(a) *Mostre que* $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$.

(b) *Utilize o resultado encontrado em (a) para calcular o valor da soma:*

$$S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{98\cdot 99}+\frac{1}{99\cdot 100}.$$

Solução. No item (a), observe que podemos reduzir as duas frações algébricas do primeiro membro ao mesmo denominador multiplicando os termos (numerador e denominador) da primeira por $n+1$ e os da segunda por n. Assim fazendo, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} &= \frac{1\cdot(n+1)}{n\cdot(n+1)}-\frac{1\cdot n}{(n+1)\cdot n}\\ &= \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}.\end{aligned}$$

Para o item (b), podemos utilizar o resultado do item (a) várias vezes, para obter a sequência de igualdades abaixo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\cdot 2} &= \frac{1}{1}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2\cdot 3} &= \frac{1}{2}-\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3\cdot 4} &= \frac{1}{3}-\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4\cdot 5} &= \frac{1}{4}-\frac{1}{5}\\ &\vdots\\ \frac{1}{98\cdot 99} &= \frac{1}{98}-\frac{1}{99}\\ \frac{1}{99\cdot 100} &= \frac{1}{99}-\frac{1}{100}.\end{aligned}$$

Somando-as membro a membro e fazendo os cancelamentos possíveis, obtemos:

$$\begin{aligned}S &= \left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\cdots\\ &\quad+\left(\cancel{\frac{1}{98}}-\cancel{\frac{1}{99}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{99}}-\frac{1}{100}\right)\\ &= 1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}.\end{aligned}$$

□

Exemplo 10. *Calcule o valor da expressão numérica*

$$S=\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 15}+\cdots+\frac{1}{54\cdot 57}+\frac{1}{57\cdot 60}.$$

Solução. Observe que

$$9S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{18\cdot 19}+\frac{1}{19\cdot 20}.$$

Portanto, argumentando como no exemplo anterior, temos:

$$\begin{aligned}9S &= \left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)\\ &\quad+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{18}}-\cancel{\frac{1}{19}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{19}}-\frac{1}{20}\right)\\ &= 1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}.\end{aligned}$$

Daí,

$$S=\frac{1}{9}\cdot\frac{19}{20}=\frac{19}{180}.$$

□

Por fim, vejamos um exemplo no qual operações com expressões algébricas podem ajudar a abordar outras situações problema.

Exemplo 11. *Sejam a e b números naturais não nulos tais que $56a = 65b$. Prove que $a+b$ é um número composto.*

Solução. Observe que:

$$56a = 65b \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{65}{56}.$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{b} &= \frac{a}{b}+\frac{\cancel{b}}{\cancel{b}}=\frac{65}{56}+1\\ &=\frac{65+56}{56}=\frac{121}{56}.\end{aligned}$$

Agora, como $121 = 11^2$ e $56 = 2^3\cdot 7$, concluímos que a fração $\frac{121}{56}$ é irredutível. Mas, como a e b representam números naturais, temos que $\frac{a+b}{b}$ é uma fração equivalente à fração irredutível $\frac{121}{56}$. Desse modo, $a+b$ é um múltiplo de 121 e, assim, é um número composto. □

3 Multiplicação e divisão de frações algébricas

Para **multiplicar** ou **dividir** frações algébricas, também procedemos de modo análogo ao que fazemos com frações numéricas. Mais precisamente, se $\frac{P}{Q}$ e $\frac{P'}{Q'}$ são frações algébricas dadas, definimos o **produto** e o **quociente** de $\frac{P}{Q}$ por $\frac{P'}{Q'}$, respectivamente, por

$$\frac{P}{Q}\cdot\frac{P'}{Q'}=\frac{P\cdot P'}{Q\cdot Q'}$$

e

$$\frac{P}{Q}\div\frac{P'}{Q'}=\frac{P}{Q}\cdot\frac{Q'}{P'}=\frac{P\cdot Q'}{P'\cdot Q}$$

Por exemplo:

$$\frac{a^2}{b}\cdot\frac{a^3c}{b^2}=\frac{a^2\cdot a^3c}{b\cdot b^2}=\frac{a^5c}{b^3}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{x^2z+1}{y^3}\div\frac{z}{x} &= \frac{x^2z+1}{y^3}\cdot\frac{x}{z}\\ &=\frac{(x^2z+1)\cdot x}{y^3\cdot z}=\frac{x^3z+x}{y^3z}.\end{aligned}$$

Vejamos mais alguns exemplos.

Exemplo 12. *Efetue as operações com frações algébricas indicadas abaixo, simplificando o resultado quando possível:*

(a) $\dfrac{x^3-y^3}{x^2+2x+1}\cdot\dfrac{x+1}{x-y}$.

(b) $\dfrac{8x^4}{y^3}\cdot\dfrac{y^2}{6x^2}$.

Solução.

(a) Utilizando os produtos notáveis que estudamos anteriormente nos termos da primeira fração, temos:

$$\begin{aligned}\frac{x^3-y^3}{x^2+2x+1}\cdot\frac{x+1}{x-y} &= \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x+1)^2}\cdot\frac{x+1}{x-y}\\ &=\frac{\cancel{(x-y)}(x^2+xy+y^2)\cdot\cancel{(x+1)}}{(x+1)^{\cancel{2}}\cancel{(x-y)}}\\ &=\frac{x^2+xy+y^2}{x+1}.\end{aligned}$$

(b) Neste caso, efetuando inicialmente o produto e, em seguida, executando os cancelamentos possíveis, temos:

$$\frac{8x^4}{y^3}\cdot\frac{y^2}{6x^2}=\frac{8x^4y^2}{6x^2y^3}=\frac{4x^2}{3y}.$$

□

Exemplo 13. *Efetue a divisão de frações algébricas abaixo e simplifique o resultado:*

$$\frac{a^3-b^3}{a^4-b^4}\div\frac{a-b}{a+b}.$$

Solução. Fatorando o numerador e o denominador da primeira fração, obtemos:

$$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$$

e

$$\begin{aligned}a^4-b^4 &= \left(a^2\right)^2-\left(b^2\right)^2\\ &=\left(a^2+b^2\right)\left(a^2-b^2\right)\\ &=\left(a^2+b^2\right)(a+b)(a-b).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{a^3-b^3}{a^4-b^4} \div \frac{a-b}{a+b} &= \frac{\cancel{(a-b)}\left(a^2+ab+b^2\right)}{\left(a^2+b^2\right)\cancel{(a+b)}\cancel{(a-b)}} \cdot \frac{\cancel{a+b}}{a-b}\\
&= \frac{a^2+ab+b^2}{\left(a^2+b^2\right)(a-b)}\\
&= \frac{a^2+ab+b^2}{a^3-a^2b+ab^2-b^3}.
\end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 14. *Efetue a multiplicação abaixo, simplificando o resultado se possível:*

$$\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}\right)\cdot\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right).$$

Solução. Inicialmente, efetuamos as duas somas que se encontram dentro dos parênteses:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b} &= \frac{a-b}{(a-b)(a+b)}+\frac{a+b}{(a-b)(a+b)}\\
&= \frac{a-b+a+b}{(a-b)(a+b)} = \frac{2a}{a^2-b^2}
\end{aligned}$$

e

$$\frac{a^2}{b^2}-1 = \frac{a^2-b^2}{b^2}.$$

Agora, substituindo tais expressões no produto original, obtemos:

$$\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}\right)\cdot\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right) = \frac{2a}{\cancel{a^2-b^2}}\cdot\frac{\cancel{a^2-b^2}}{b^2} = \frac{2a}{b^2}.$$

$\square$

Exemplo 15. *Efetue a divisão abaixo, simplificando o resultado se possível:*

$$\frac{4x^2+8x+4}{x^3+y^3} \div \frac{4x^2-4}{x^2-xy+y^2}.$$

Solução. Fatorando cada polinômio que figura como numerador ou denominador das frações algébricas dadas, obtemos:

$$4x^2+8x+4 = 4\left(x^2+2x+1\right) = 4(x+1)^2,$$

$$x^3+y^3 = (x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)$$

e

$$4x^2-4 = 4\left(x^2-1^2\right) = 4(x+1)(x-1).$$

Substituindo tais formas fatoradas na expressão do enunciado, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{4x^2+8x+4}{x^3+y^3} \div \frac{4x^2-4}{x^2-xy+y^2} &=\\
&= \frac{4x^2+8x+4}{x^3+y^3}\cdot\frac{x^2-xy+y^2}{4x^2-4}\\
&= \frac{\cancel{4}(x+1)^{\cancel{2}}}{(x+y)\cancel{\left(x^2-xy+y^2\right)}}\cdot\frac{\cancel{x^2-xy+y^2}}{\cancel{4}\cancel{(x+1)}(x-1)}\\
&= \frac{x+1}{(x+y)(x-1)} = \frac{x+1}{x^2+xy-x-y}.
\end{aligned}$$

$\square$

Dicas para o Professor

Recomendamos que seja utilizada uma sessão de 50min para discutir cada uma das seções que compõem esse material. O processo de simplificação de frações algébricas dado na seção 1 deve ser exposto depois de uma breve revisão sobre os métodos de fatoração estudados no módulo de expressões algébricas e polinômios. Antes de abordar as operações com frações algébricas discutidas nas seções 2 e 3, é importante que seja feita uma comparação com as mesmas operações com frações numéricas (números racionais).

As referências colecionadas a seguir contém muitos problemas e exemplos relacionados ao conteúdo do presente material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar Volume 1: Números Reais*, 2ª Edição. Rio de Janeiro, SBM, 2013.

2. G Iezzi. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 6: Complexos, Polinômios e Equações.* São Paulo, Atual Editora, 2012.

Material Teórico - Módulo Frações Algébricas

Resolução de Exercícios

Oitavo Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 Resolução de exercícios

Nesse material, apresentamos alguns exemplos envolvendo simplificação de frações algébricas.

Exemplo 1 (EPCAR). *O valor da expressão*

$$P = \left(\frac{x^{-2} - y^{-2}}{x^{-1} + y^{-1}}\right) \cdot \left(\frac{x^2y + xy^2}{x^2 - y^2}\right),$$

em que $x, y \in \mathbb{R}^*$, $x \neq y$ *e* $x \neq -y$, *é:*

(a) -1.

(b) -2.

(c) 1.

(d) 2.

Solução. Observe que

$$\begin{aligned} x^{-2} - y^{-2} &= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{x^2y^2} \\ &= \frac{(y-x)\cdot(y+x)}{x^2y^2}, \end{aligned}$$

onde, na última igualdade acima, utilizamos a fórmula para a diferença de dois quadrados. Por outro lado, temos também:

$$x^{-1} + y^{-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y+x}{xy}.$$

Quanto ao numerador da segunda fração, pondo o fator xy em evidência, obtemos:

$$x^2y + xy^2 = xy(x+y).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x^{-2} - y^{-2}}{x^{-1} + y^{-1}}\right) \cdot \left(\frac{x^2y + xy^2}{x^2 - y^2}\right) \\ &= \frac{\frac{(y-x)\cdot(y+x)}{x^2y^2}}{\frac{y+x}{xy}} \cdot \frac{xy(x+y)}{(x+y)(x-y)} \\ &= \frac{(y-x)\cdot\cancel{(y+x)}}{x^2y^2} \cdot \frac{xy}{\cancel{y+x}} \cdot \frac{xy\cancel{(x+y)}}{\cancel{(x+y)}(x-y)} \\ &= \frac{y-x}{\cancel{x^2y^2}} \cdot \frac{\cancel{x^2y^2}}{x-y} = \frac{-\cancel{(x-y)}}{\cancel{x-y}} \\ &= -1. \end{aligned}$$

Segue que a alternativa correta é a letra (a). □

Exemplo 2 (EPCAR). *Analise cada afirmativa abaixo e classifique-a em (V) verdadeira ou (F) falsa:*

(i) Se x, y e z são números reais dois a dois distintos, então

$$\frac{1}{(x-y)(x-z)} + \frac{1}{(y-x)(y-z)} + \frac{1}{(z-x)(z-y)} = 0.$$

(ii) Se $p, q \in \mathbb{R}^*$ *e* $p \neq q$, *então, ao simplificar a fração algébrica*

$$E = \left[\frac{p^2 + pq}{p^2 - q^2} \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\right]^{-1}$$

obtemos q.

(iii) Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$ *tais que* $x > 0$, $y < 0$ *e* $z \neq 0$. *Então* $\frac{x^7y^5}{z^{30}} < 0$.

A sequência correta é:

(a) V-V-V.

(b) V-F-V.

(c) F-F-V.

(d) V-V-F.

Solução. Em relação à expressão do item (a), temos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(x-y)(x-z)} + \frac{1}{(y-x)(y-z)} + \frac{1}{(z-x)(z-y)} = \\ &= \frac{(z-y) - (z-x) + (y-x)}{(z-x)(z-y)(y-x)} \\ &= \frac{\cancel{z} - \cancel{y} - \cancel{z} + \cancel{x} + \cancel{y} - \cancel{x}}{(z-x)(z-y)(y-x)} = 0. \end{aligned}$$

Portanto, a afirmação (i) é verdadeira.

Para (b), veja que

$$p^2 + pq = p(p+q),$$

$$p^2 - q^2 = (p-q)(p+q)$$

e

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{q-p}{pq}.$$

Logo, obtemos:

$$\begin{aligned} E &= \left[\frac{p^2 + pq}{p^2 - q^2} \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\right]^{-1} \\ &= \left[\frac{\cancel{p}\cancel{(p+q)}}{(p-q)\cancel{(p+q)}} \cdot \frac{q-p}{\cancel{p}q}\right]^{-1} \\ &= \left[\frac{-\cancel{(p-q)}}{\cancel{(p-q)}\cdot q}\right]^{-1} \\ &= \left(-\frac{1}{q}\right)^{-1} = -q. \end{aligned}$$

Assim, (ii) é falsa.

Finalmente, se $x, y, z \in \mathbb{R}$ são tais que $x > 0$, $y < 0$ e $z \neq 0$, temos $x^7 > 0$, $y^5 < 0$ e $z^{30} > 0$. Portanto, $x^7y^5 < 0$, e segue que

$$\frac{x^7y^5}{z^{30}} < 0.$$

Desse modo, a afirmação (iii) é verdadeira.

Concluímos que a sequência correta é V-F-V, ou seja, a alternativa correta é (b). □

Exemplo 3. *Simplifique a fração algébrica abaixo:*

$$\frac{x^4+y^4-6x^2y^2}{x^2-y^2+2xy}.$$

Solução. Inicialmente, podemos escrever

$$x^4+y^4-6x^2y^2 = x^4+y^4-2x^2y^2-4x^2y^2.$$

Utilizando a fórmula para o quadrado da diferença de dois termos, obtemos:

$$(x^2-y^2)^2 = (x^2)^2-2x^2y^2+(y^2)^2 = x^4-2x^2y^2+y^4.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{x^4+y^4-6x^2y^2}{x^2-y^2+2xy} &= \frac{(x^4+y^4-2x^2y^2)-4x^2y^2}{x^2-y^2+2xy}\\ &= \frac{(x^2-y^2)^2-4x^2y^2}{x^2-y^2+2xy}.\end{aligned} \tag{1}$$

Agora, utilizando a fórmula para a diferença de dois quadrados, podemos escrever também:

$$\begin{aligned}(x^2-y^2)^2-4x^2y^2 &= (x^2-y^2)^2-(2xy)^2\\ &= (x^2-y^2-2xy)\cdot(x^2-y^2+2xy).\end{aligned}$$

Por fim, substituindo a última expressão encontrada acima em (1), obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{x^4+y^4-6x^2y^2}{x^2-y^2+2xy} &= \frac{(x^2-y^2)^2-4x^2y^2}{x^2-y^2+2xy}\\ &= \frac{(x^2-y^2-2xy)\cdot\cancel{(x^2-y^2+2xy)}}{\cancel{x^2-y^2+2xy}}\\ &= x^2-y^2-2xy.\end{aligned}$$

□

Exemplo 4. *Simplifique a expressão algébrica:*

$$\frac{\left(x^3-y^3-z^3\right)^2-\left(x^3+y^3+z^3\right)^2}{y^3+z^3}.$$

Solução. Aqui, utilizaremos inicialmente a fórmula para a diferença de dois quadrados, aplicada ao numerador da expressão dada:

$$\begin{aligned}&\left(x^3-y^3-z^3\right)^2-\left(x^3+y^3+z^3\right)^2 =\\ &= \left[\left(x^3-y^3-z^3\right)-\left(x^3+y^3+z^3\right)\right]\\ &\quad\cdot\left[\left(x^3-y^3-z^3\right)+\left(x^3+y^3+z^3\right)\right]\\ &= \left[\cancel{x^3}-y^3-z^3-\cancel{x^3}-y^3-z^3\right]\cdot\\ &\quad\cdot\left[x^3-\cancel{y^3}-\cancel{z^3}+x^3+\cancel{y^3}+\cancel{z^3}\right]\\ &= -2\left(y^3+z^3\right)\cdot 2x^3\\ &= -4x^3(y^3+z^3).\end{aligned}$$

Segue daí que

$$\begin{aligned}\frac{\left(x^3-y^3-z^3\right)^2-\left(x^3+y^3+z^3\right)^2}{y^3+z^3} &= \frac{-4x^3\cancel{(y^3+z^3)}}{\cancel{y^3+z^3}}\\ &= -4x^3.\end{aligned}$$

□

Exemplo 5. *Considere as frações algébricas abaixo, em que $a \neq b$:*

$$P = \frac{a^6-b^6}{a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5}$$

e

$$Q = \frac{a^8-b^8}{a^6+a^4b^2+a^2b^4+b^6}.$$

Assim, tem-se que $\frac{Q}{P}$ é igual a:

(a) $\frac{1}{a-b}$.

(b) $\frac{1}{a+b}$.

(c) $a+b$.

(d) $a-b$.

Solução. Começamos notando que

$$a^5-a^4b+a^3b^2 = a^3(a^2-ab+b^2)$$

e

$$-a^2b^3+ab^4-b^5 = -b^3(a^2-ab+b^2).$$

Daí, obtemos:

$$\begin{aligned}&a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5 =\\ &= a^3(a^2-ab+b^2)-b^3(a^2-ab+b^2)\\ &= (a^3-b^3)\cdot(a^2-ab+b^2).\end{aligned}$$

Agora, utilizamos a fórmula para a diferença de dois quadrados para obter:

$$a^6-b^6 = (a^3)^2-(b^3)^2 = (a^3+b^3)\cdot(a^3-b^3).$$

Além disso, já sabemos que:

$$a^3+b^3 = (a^2-ab+b^2)\cdot(a+b).$$

Portanto, obtemos:

$$\begin{aligned}P &= \frac{a^6-b^6}{a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5}\\ &= \frac{(a^3+b^3)\cdot\cancel{(a^3-b^3)}}{\cancel{(a^3-b^3)}\cdot(a^2-ab+b^2)}\\ &= \frac{\cancel{(a^2-ab+b^2)}\cdot(a+b)}{\cancel{a^2-ab+b^2}}\\ &= a+b.\end{aligned}$$

Quanto a Q, por um lado temos:

$$\begin{aligned} a^8 - b^8 &= (a^4)^2 - (b^4)^2 \\ &= (a^4 - b^4) \cdot (a^4 + b^4) \\ &= ((a^2)^2 - (b^2)^2) \cdot (a^4 + b^4) \\ &= (a^2 - b^2) \cdot (a^2 + b^2) \cdot (a^4 + b^4); \end{aligned}$$

por outro, agrupando termos conforme mostrado abaixo, segue que

$$\begin{aligned} \underbrace{a^6 + a^4b^2} + \underbrace{a^2b^4 + b^6} &= a^4(a^2 + b^2) + b^4(a^2 + b^2) \\ &= (a^4 + b^4) \cdot (a^2 + b^2). \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{a^8 - b^8}{a^6 + a^4b^2 + a^2b^4 + b^6} \\ &= \frac{(a^2 - b^2) \cdot \cancel{(a^2 + b^2)} \cdot \cancel{(a^4 + b^4)}}{\cancel{(a^4 + b^4)} \cdot \cancel{(a^2 + b^2)}} \\ &= a^2 - b^2. \end{aligned}$$

Finalmente, concluímos a partir dos cálculos acima que

$$\frac{Q}{P} = \frac{a^2 - b^2}{a + b} = \frac{(a - b) \cdot \cancel{(a + b)}}{\cancel{a + b}} = a - b.$$

Logo, a opção correta é a letra (c). $\square$

Exemplo 6. *Considere os números reais a, b e x, tais que $a + b = x$, $a - b = x^{-1}$, $a \neq \pm b$ e $a \neq 0$. O valor da expressão*

$$Y = \frac{\frac{(a^2+2ab+b^2)\cdot(a^3-b^3)}{(a^2-b^2)\cdot(a^2+ab+b^2)}}{\frac{a^2-ab}{2a}}$$

é igual a:

(a) 2.

(b) $2x^2$.

(c) x^2.

(d) $\frac{x^2}{2}$.

Solução. Utilizando, mais uma vez, os produtos notáveis conhecidos como quadrado da soma, diferença de dois quadrados e diferença de dois cubos, obtemos sucessivamente:

$$\begin{aligned} Y &= \frac{\frac{(a^2+2ab+b^2)\cdot(a^3-b^3)}{(a^2-b^2)\cdot(a^2+ab+b^2)}}{\frac{a^2-ab}{2a}} \\ &= \frac{(a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a^3 - b^3)}{(a^2 - b^2) \cdot (a^2 + ab + b^2)} \cdot \frac{2a}{a^2 - ab} \\ &= \frac{(a + b)^{\cancel{2}} \cdot \cancel{(a - b)} \cdot \cancel{(a^2 + ab + b^2)}}{\cancel{(a - b)} \cdot \cancel{(a + b)} \cdot \cancel{(a^2 + ab + b^2)}} \cdot \frac{2\cancel{a}}{\cancel{a}(a - b)} \\ &= \frac{2(a + b)}{a - b}. \end{aligned}$$

Mas, como $a + b = x$ e $a - b = x^{-1}$, temos:

$$Y = \frac{2x}{x^{-1}} = \frac{2x}{1/x} = 2x \cdot x = 2x^2.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (b). $\square$

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadam duas sessões de 50min cada para discutir os exemplos que compõem esse material. Antes de começar a expô-los, faça uma lista com os produtos notáveis que serão utilizados. Ao fazer cada simplificação, chame a atenção dos alunos para os produtos notáveis aplicados em cada passagem.

As referências colecionadas a seguir contém muitos problemas e exemplos relacionados ao conteúdo do presente material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar Volume 1: Números Reais*, 2ª Edição. Rio de Janeiro, SBM, 2013.

2. G Iezzi. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 6: Complexos, Polinômios Equações.* São Paulo, Atual Editora, 2012.

Material Teórico - Módulo de Potenciação e Dízimas Periódicas

Números Irracionais e Reais

Oitavo Ano

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 Os números irracionais

Ao longo deste módulo, vimos que a representação decimal de um número racional pode ser finita ou infinita. No segundo caso, a representação decimal se dá por meio de dízimas periódicas. Pode-se mostrar que quando dividimos o numerador pelo denominador de uma fração, com o objetivo de encontrar a sua representação decimal, sempre encontramos um decimal finito ou uma dízima periódica. Agora, observe o exemplo abaixo:

Exemplo 1. *O número cuja representação decimal é* $0,01001000100001\ldots$*, onde em cada passo acrescenta-se um zero a mais entre dois algarismos um, não é uma dízima periódica, pois há sequências tão grandes quanto queiramos, formadas somente por algarismos iguais a zero e contidas na sua parte decimal. Portanto, esse número não é a representação decimal de um número racional.*

Podemos concluir que há representações decimais que não têm como origem um número racional. Um **número irracional** é um número que possui representação decimal infinita e não periódica. O número dado no exemplo 1, cuja representação decimal é $0,01001000100001\ldots$, é, portanto, um número irracional.

Exemplo 2. *Considere um quadrado de lado igual a* 1*cm, como na figura 1.*

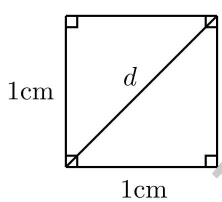


Figura 1: O número irracional $\sqrt{2}$.

Pelo teorema de Pitágoras, sua diagonal satizfaz $d^2 = 2$*. Afirmamos que tal número não pode ser racional. De fato, se tivéssemos* $d = \frac{p}{q}$ *com* $p, q \in \mathbb{N}$*, então* $p^2 = d^2q^2$*, donde* $p^2 = 2q^2$*. Mas, como todo quadrado tem um número par de fatores iguais a* 2*, concluímos, a partir dessa igualdade, que deveríamos ter um número par de fatores* 2 *do lado esquerdo da igualdade e um número ímpar de fatores* 2 *do lado direito; isso não pode acontecer, pois o modo como fatoramos um natural maior que* 1 *como um produto de números primos é único.*

O número d *é chamado raiz quadrada de* 2 *e é denotado por* $\sqrt{2}$*.*

Uma pergunta que surge a essa altura é: qual é a representação decimal de $\sqrt{2}$? Para responder a essa pergunta, precisamos de propriedades que serão discutidas na seção 2.

Exemplo 3. *Outro número irracional que merece atenção é o número* π*, definido como o quociente entre a circunferência de um círculo e o comprimento de seu diâmetro. Embora a irracionalidade de* π *seja um fato bem conhecido, uma justificativa desse fato não é elementar e está fora dos objetivos desse material. Registramos que*

$$\pi = 3,14159\ldots,$$

onde, no segundo membro acima, os cinco algarismos mostrados após a vírgula são os corretos. Nesse caso, escrevemos também

$$\pi \cong 3,14159,$$

e dizemos que $3,14159$ aproxima π com cinco casas decimais corretas.

2 Os números reais

O **conjunto dos números reais**, que é denotado por $\mathbb{R}$, é a reunião do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais. Os elementos de $\mathbb{R}$ são chamados **números reais**.

Pode-se mostrar que, no conjunto dos números reais, a extração de raízes de números naturais sempre tem sentido. Assim, dados inteiros positivos m e n, escrevemos $\sqrt[n]{m}$ para denotar o número real que, elevado a n, dá, como resultado, o número m:

$$(\sqrt[n]{m})^n = m.$$

Por exemplo, $\sqrt[3]{5}$ é o número real que, elevado ao cubo, é igual a 5; em símbolos, $(\sqrt[3]{5})^3 = 5$.

Também pode ser mostrado que ou m é uma n-ésima potência perfeita e, neste caso, $\sqrt[n]{m}$ é um número inteiro, ou então (generalizando o exemplo 2) $\sqrt[n]{m}$ é um número irracional. Esse é o caso, por exemplo, de $\sqrt[3]{5}$: como 5 não é um cubo perfeito, concluímos que $\sqrt[3]{5}$ é um número irracional.

O conjunto $\mathbb{R}$ possui operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, que são extensões das operações conhecidas em $\mathbb{Q}$ e, além disso, satisfazem as mesmas propriedades que satisfazem em $\mathbb{Q}$. A relação de ordem conhecida em $\mathbb{Q}$ também se estende a $\mathbb{R}$, satisfazendo as mesmas propriedades que satisfaz em $\mathbb{Q}$.

Mais precisamente, as operações de adição $+$ e multiplicação $\cdot$ de $\mathbb{Q}$ se estendem a $\mathbb{R}$ e possuem as seguintes propriedades, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(i) As operações $+$ e $\cdot$ são **comutativas**, isto é,

$$a + b = b + a \;\text{ e }\; a \cdot b = b \cdot a.$$

Por exemplo, $3 + \sqrt{2} = \sqrt{2} + 3$ e $3 \cdot \pi = \pi \cdot 3$.

(ii) As operações $+$ e $\cdot$ são **associativas**, isto é,

$$(a + b) + c = a + (b + c) \;\text{ e }\; (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Por exemplo, $\left(\sqrt{2}+\frac{1}{3}\right)+5=\sqrt{2}+\left(\frac{1}{3}+5\right)$ e $\left(\sqrt[3]{8}\cdot\frac{3}{5}\right)\cdot 3=\sqrt[3]{8}\cdot\left(\frac{3}{5}\cdot 3\right)$.

(iii) A operação $\cdot$ é **distributiva** em relação à operação $+$, isto é,

$$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c).$$

Por exemplo, $4\cdot(\sqrt{3}+7)=(4\cdot\sqrt{3})+(4\cdot 7)$.

(iv) Os números 0 e 1 são, respectivamente, os **elementos neutros** para as operações $+$ e $\cdot$. Isso significa que

$$a+0=a \quad \text{e} \quad a\cdot 1=a,$$

para todo $a\in\mathbb{R}$. Por exemplo, $\pi+0=\pi$ e $\sqrt[5]{25}+0=\sqrt[5]{25}$.

(v) Dado $a\in\mathbb{R}$, existe um único número número real, o qual denotamos por $-a$, tal que

$$a+(-a)=0.$$

Além disso, se $a\neq 0$, então também existe um único número real, que é denotado por a^{-1}, tal que

$$a\cdot a^{-1}=1.$$

Os números reais $-a$ e a^{-1} são chamados, respectivamente, de **oposto** (ou **simétrico**) e **inverso** de a. Também denotamos o inverso de a por $\frac{1}{a}$, sempre que for conveniente. Por exemplo, o oposto de $\sqrt{8}$ é $-\sqrt{8}$ e o seu inverso é $\sqrt{8}^{-1}=\frac{1}{\sqrt{8}}$.

Podemos definir as operações de subtração e divisão de números reais, respectivamente, por

$$a-b=a+(-b) \quad \text{e} \quad a\div b=a\cdot b^{-1}.$$

Observe que $a\div b$ só faz sentido se $b\neq 0$.

Para $a,b\in\mathbb{R}$ escrevemos $a\geq b$ para denotar que a **é maior do que ou igual a** b. Esta é a relação de ordem em $\mathbb{R}$, a qual, conforme já mencionamos, estende a relação de ordem em $\mathbb{Q}$. Escrevemos também $a\leq b$ com o mesmo sentido de $b\geq a$, mas, neste caso, lemos a **é menor do que ou igual a** b.

Escrevemos ainda $a>b$ para denotar que a **é maior do que** b, isto é, que $a\geq b$ e $a\neq b$; por fim, escrevemos $a<b$ para denotar que a **é menor do que** b, isto é, que $a\leq b$ e $a\neq b$.

Se $a>0$, dizemos que a é **positivo** e, se $a<0$, dizemos que a é **negativo**.

A relação de ordem $\geq$ em $\mathbb{R}$ satisfaz as propriedades abaixo, para quaisquer $a,b,c\in\mathbb{R}$.

(i) Se $a>0$ e $b>0$, então $a+b>0$ e $a\cdot b>0$.

(ii) Para $a,b\in\mathbb{R}$, ocorre exatamente uma das alternativas $a>b$, $a<b$ ou $a=b$.

(iii) $a>b$ se, e somente se, $a-b>0$.

(iv) Se $a\geq b$ e $b\geq a$, então $a=b$.

(v) Se $a\geq b$ e $b\geq c$, então $a\geq c$.

(vi) Se $a\geq b$, então $a+c\geq b+c$.

(vii) Se $a\geq b$ e $c>0$, então $a\cdot c\geq b\cdot c$. Por outro lado, se $a\geq b$ e $c<0$, então $a\cdot c\leq b\cdot c$.

Sejam dados dois reais $a,b>0$. Se $a>b$, então, utilizando sucessivamente as propriedades (vii) e (v), obtemos

$$\begin{aligned} a>b>0 &\Longrightarrow a\cdot a>b\cdot a \quad \text{e} \quad a\cdot b>b\cdot b\\ &\Longrightarrow a^2>ab \quad \text{e} \quad ab>b^2 \Longrightarrow a^2>b^2. \end{aligned}$$

Reciprocamente, sejam $a,b>0$ tais que $a^2>b^2$. Então, $a\neq b$, de forma que, pela propriedade (ii), $a>b$ ou $a<b$. Se fosse $a<b$, então, como $a,b>0$, o argumento do parágrafo anterior (utilizado com a no lugar de b e b no lugar de a) nos daria $a^2<b^2$, o que não é o caso. Logo, a única possibilidade é que seja $a>b$.

Podemos resumir a discussão dos dois parágrafos acima na seguinte propriedade:

(viii) Se a e b são números reais positivos, então

$$a>b\Longleftrightarrow a^2>b^2,$$

ou, de uma forma equivalente,

$$a>b\Longleftrightarrow\sqrt{a}>\sqrt{b}.$$

A propriedade (viii) pode ser utilizada para estimar raízes quadradas, conforme mostrado pelos dois exemplos a seguir.

Exemplo 4. *Voltando à pergunta feita na seção 1, sobre a representação decimal de $\sqrt{2}$, utilizando a propriedade (viii), obtemos:*

$$1<2<4\Longrightarrow\sqrt{1}<\sqrt{2}<\sqrt{4}\Longrightarrow 1<\sqrt{2}<2.$$

Daí, já sabemos que $\sqrt{2}$ está entre 1 e 2. Agora, utilizando a mesma propriedade, segue de

$$1,4^2=1,96<2<2,25=1,5^2$$

que

$$1,4=\sqrt{1,96}<\sqrt{2}<\sqrt{2,25}=1,5.$$

Analogamente,

$$1,41^2=1,9881<2<2,0164=1,42^2$$

implica, pela propriedade (vii),

$$1,41=\sqrt{1,9881}<\sqrt{2}<\sqrt{2,0164}=1,42.$$

Prosseguindo com esse raciocínio, podemos verificar facilmente que

$$\sqrt{2}=1,4142\ldots,$$

onde, no segundo membro acima, os quatro primeiros algarismos após a vírgula são os corretos.

Exemplo 5. *Raciocinando como no exemplo anterior, temos*

$$2,89 < 3 < 3,24 \Longrightarrow \sqrt{2,89} < \sqrt{3} < \sqrt{3,24}$$
$$\Longrightarrow 1,7 < \sqrt{3} < 1,8.$$

Agora, como

$$1,73^2 = 2,9929 < 3 < 1,74^2 = 3,0276,$$

temos da propriedade (viii) que $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$. *Prosseguindo analogamente, cheque que*

$$\sqrt{3} \cong 1,7320,$$

com quatro casas decimais corretas.

Terminamos esta seção observando que os conjuntos numéricos

$$\mathbb{N} = \{0, 1\ 2, 3 \ldots\},$$

$$\mathbb{Z} = \{\ldots - 3, -2, -1, 0, 1\ 2, 3 \ldots\}$$

e

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} | \, m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0\right\}$$

satisfazem a seguinte sequência de inclusões de conjuntos

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Além disso, o conjunto dos números reais também contém o conjunto dos números irracionais. De fato, se denotarmos o conjunto dos números irracionais por $\mathbb{Q}'$, então $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$.

3 Representação geométrica

Daremos, agora, uma ideia de como um número racional (fração) pode ser representado geometricamente sobre uma reta r. Para tanto, escolhemos um ponto O em r para representar o 0, uma das semirretas com origem em O para ser **positiva** (a outra será **negativa**) e um outro ponto P, agora na semirreta positiva, para representar o 1. O segmento OP será a unidade de comprimento utilizada. Por exemplo, para marcar o número $\frac{8}{3} = 2,666\ldots$ sobre r, marcamos na semirreta positiva um segmento OQ, que tem oito vezes a medida de OP. O ponto Q representará o número 8. Daí, marcamos, ainda sobre a semirreta positiva, o segmento OR, cuja medida é um terço de OQ. O ponto R representará o número $\frac{8}{3}$ (veja a figura 2).

Observe que nada do que foi utilizado para marcar o número $\frac{8}{3}$ na reta r impede que façamos o mesmo com qualquer outra fração positiva. Para marcar as frações negativas, realizamos um procedimento inteiramente análogo, mas na semirreta negativa.

Então, qualquer número racional pode ser representado sobre r. E quanto à recíproca? Isto é, com a representação dada pela figura 2, todo ponto de r representa um número

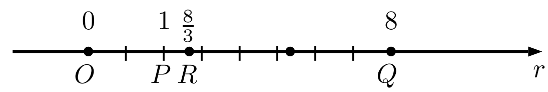


Figura 2: Representação geométrica dos racionais.

racional? A resposta a essa pergunta é não! De fato, pode-se mostrar que existe uma infinidade de pontos sobre r que não representam número racional algum.

Mais precisamente, pode-se mostrar que os pontos de r que não representam números racionais são exatamente aqueles que representam os números irracionais. Dessa forma, concluímos que todo número real pode ser representado em r, e todo ponto de r representa exatamente um número real, o qual pode ser racional ou irracional.

Vejamos um exemplo importante.

Exemplo 6. *Como na figura 2, seja P o ponto, sobre a reta r, que representa o número 1. Agora, considere o quadrado $OPQR$ de lado 1 (veja a figura 3). Por fim, marque (conforme mostrado na figura 3) um ponto T na semirreta positiva de modo que $OQ \equiv OT$. O ponto T não pode representar um número racional, pois, como já vimos, a medida da diagonal de um quadrado de lado 1, que é igual a $\sqrt{2}$, é um número irracional.*

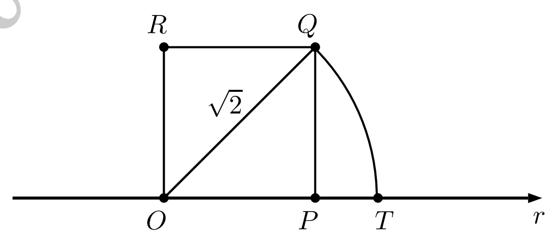


Figura 3: Representação geométrica de $\sqrt{2}$.

Dicas para o Professor

Recomendamos que seja utilizada uma sessão de 50min para cada uma das três seções que compõem esta aula. Na seção 1, chame atenção para a existência de números com representação decimal infinita e não periódica, que são os números irracionais. Na seção 2, saliente as propriedades das operações aritméticas e da relação de ordem em $\mathbb{R}$. Finalmente, na seção 3, explique como os números racionais podem ser marcados sobre uma reta e, também, justifique a existência de pontos sobre a reta que não representam números racionais.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais*. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.

2. J. Ferreira. *A construção dos Números*. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 20013.