

Álgebra Linear - Aula 02

Espaços Vetoriais Euclidianos

Profª Dra. Karla Lima

- 1 **Introdução**
- 2 **Vetores - Geometria**
- 3 **Vetores em Sistemas de Coordenadas**
- 4 **Espaços Vetoriais Reais**
- 5 **Exercícios**

O que é Álgebra Linear?

- Álgebra Linear estuda funções lineares em espaços vetoriais de dimensão finita.
- Por exemplo, veremos que:

$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ **é um espaço de dimensão finita;**

$\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é contínua em } \mathbb{R}\}$ **é um espaço de dimensão infinita;**

- Nesta aula, definiremos os espaços vetoriais euclidianos e suas propriedades básicas.

Vamos começar com os exemplos conhecidos, como:

- Plano Euclidiano \mathbb{R}^2 ;
- Espaço Tridimensional Euclidiano \mathbb{R}^3 ;
- Espaços Euclidianos de dimensão n : \mathbb{R}^n .

Esses são os espaços vetoriais que vocês estudam em Geometria Analítica.

- Mas estes não são os únicos espaços vetoriais que existem!
- Depois desta introdução de algumas semanas, ampliaremos para o conceito abstrato de espaço vetorial.



Figura: Exemplo de um espaço vetorial (opcional)

- Escalares: quantidades descritas apenas por um valor numérico (ex: temperatura, comprimento).
- Vetores: quantidades que exigem valor, direção e sentido (ex: velocidade, força).
- Exemplo:
Temperatura = 20°C \rightarrow escalar
Força = 100kgf para baixo \rightarrow vetor
- Embora tenham origem na Física e Engenharia, vetores e escalares são úteis em diversas áreas: Genética, Computação, Economia, Telecomunicações, Ecologia.

- Qual a sua massa? **R:** 60 kg
- Que horas são? **R:** 8 hs
- Qual a sua temperatura corporal atual? **R:** 36°C

- Qual a sua massa? **R:** 60 kg
- Que horas são? **R:** 8 hs
- Qual a sua temperatura corporal atual? **R:** 36°C

Para responder a estas perguntas, basta apenas **um número**, sem que outras informações precisem ser adicionadas.

Grandezas Vetoriais

- Como localizar um carro a 100 km/h , na BR101?
- Como encontrar um barco perdido no oceano Atlântico?
- Como localizar um avião que está a uma velocidade de 800 km/h ?

- Como localizar um carro a 100 km/h , na BR101?
- Como encontrar um barco perdido no oceano Atlântico?
- Como localizar um avião que está a uma velocidade de 800 km/h ?

Para responder a estas perguntas, além do valor escalar, precisamos indicar uma **direção** e um **sentido**.

- Como encontrar um barco perdido no oceano Atlântico?
↪ Precisamos saber a rapidez, a direção e o sentido em que este barco se deslocou. Só a velocidade escalar (rapidez) não é suficiente!
- Como localizar um avião que está a uma velocidade de 800 km/h ?
↪ Aqui, além da rapidez que já foi dada, precisamos saber a direção e o sentido em que este avião se deslocou.

Direções



Vertical



Horizontal



Inclinada

Direções



Vertical



Horizontal



Inclinada

Como nos deslocamos em cima dessas retas?

Sentido: exemplos

O sentido nos diz como estamos nos deslocando na direção dada.



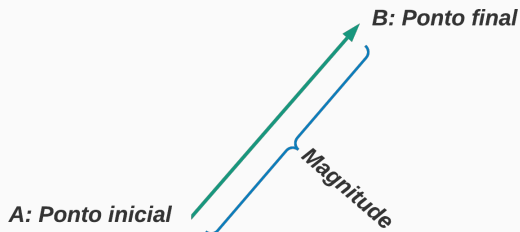
Sentido: exemplos

Na mesma direção, mas com sentidos opostos, temos:

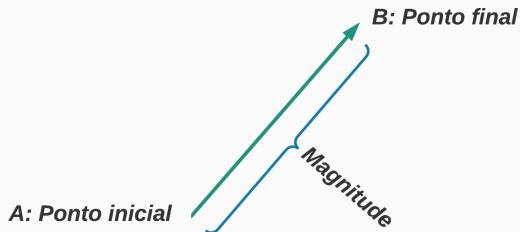


Representação de Vetores

Um vetor é representado através de uma flecha (seta):

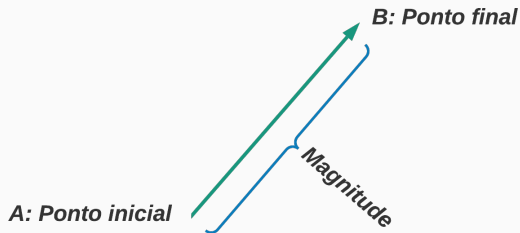


Um vetor é representado através de uma flecha (seta):



Com essa representação, conseguimos as seguintes informações sobre o vetor:

TAMANHO DIREÇÃO SENTIDO



- O tamanho (magnitude) é dado pelo comprimento da seta.
- A direção é dada pelo corpo da seta.
- O sentido é dado pela ponta da seta.

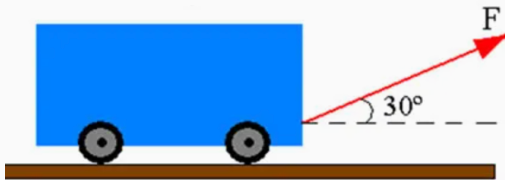


Figura: Força para puxar o carrinho

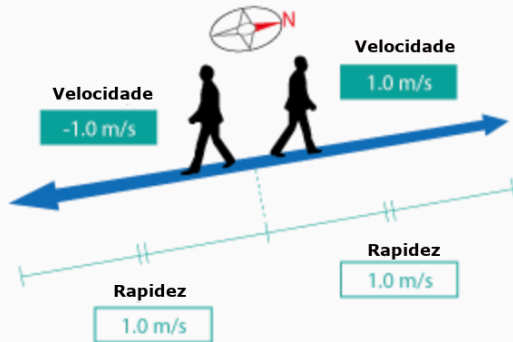


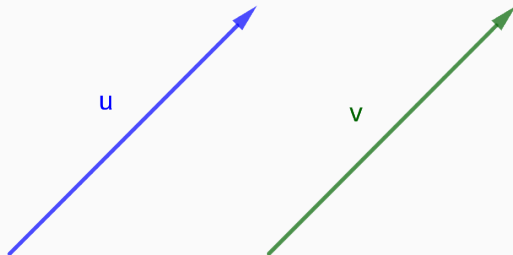
Figura: Velocidade: direção, sentido e magnitude (rapidez)



Figura: Velocidade: mesma direção, mesmo sentido e diferentes magnitudes (rapidez)

Equivalência de Vetores [1]

Dois vetores são **equivalentes** (ou **equipolentes**) se possuem o mesmo tamanho, a mesma direção e mesmo sentido:



Os vetores abaixo possuem a mesma direção e a mesma magnitude, porém, os sentidos não são equivalentes.



Portanto, os vetores são diferentes.

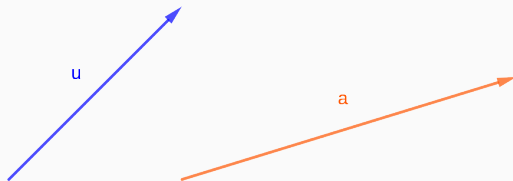
Os vetores abaixo possuem a mesma direção e a mesma magnitude, porém, os sentidos não são equivalentes.



Portanto, os vetores são diferentes.

Quando os vetores têm a mesma direção e a mesma magnitude, mas sentidos diferentes, dizemos que os vetores são **opostos**.

Os dois vetores abaixo são diferentes, pois todas as suas características são distintas.



- Em geral, vetores são indicados por letras minúsculas em negrito;
- Quando sabemos quem é o ponto inicial A e o ponto final B , também escrevemos:

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}.$$

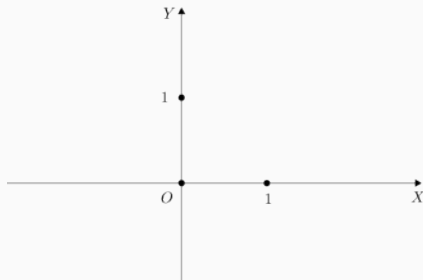
Exercício

Encontre os vetores equivalentes: [Geogebra Vetores Equivalentes](#) (Clique aqui!)

Definição

O vetor cujos pontos inicial e final coincidem tem **comprimento zero** e denominamos esse vetor de **vetor nulo**, e o denotamos por $\mathbf{0} = \vec{0}$.

O Plano Cartesiano é composto por duas retas, perpendiculares¹ entre si:

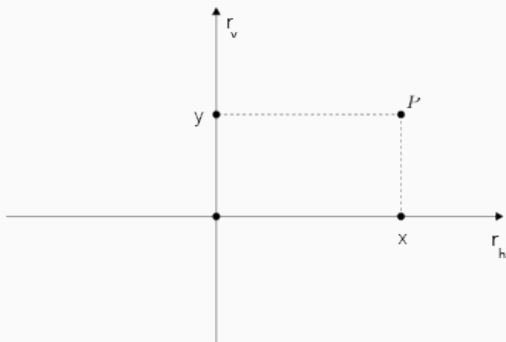


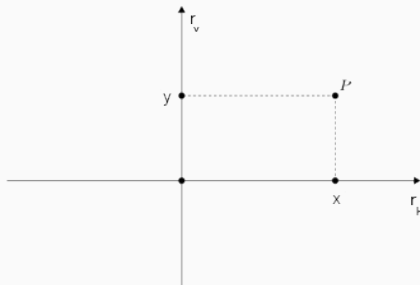
Chama-se **origem** do plano cartesiano, o ponto $O = (0, 0)$.

¹o ângulo entre as duas retas é de 90°

- i) Na horizontal, escolhe-se um ponto para representar o número 0, e os números positivos são colocados à direita, enquanto os negativos à esquerda do 0.
- ii) Na vertical, escolhe-se um ponto para representar o número 0 (coincidindo com o 0 da reta horizontal), e os números positivos são colocados acima, enquanto os negativos abaixo do 0.

A identificação de um ponto P do plano está em função da sua distância até a reta vertical (r_v) e sua distância até a reta horizontal (r_h): $P = (x, y)$.

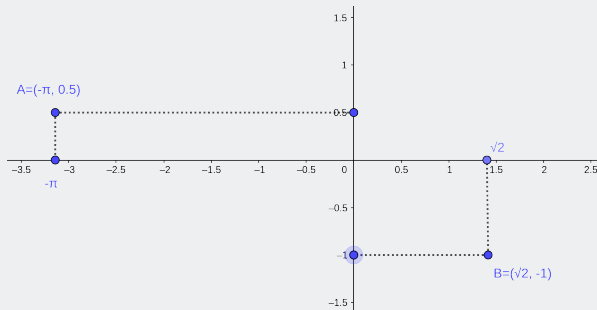




- Se x estiver à direita da origem, temos $x =$ distância à r_v ; caso contrário, temos $x = -$ (distância à r_v).
- Analogamente, se y estiver acima da origem, temos $y =$ distância à r_h ; caso contrário, temos $y = -$ (distância à r_h).

Exemplo

Os pontos $A = (-i, 0.5)$ e $B = (\sqrt{2}, -1)$ no plano cartesiano:

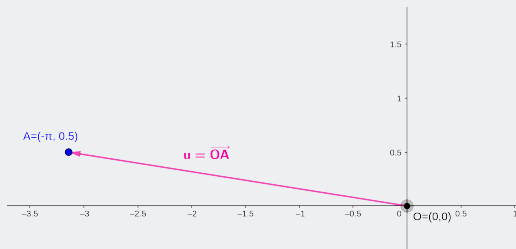


Os pares ordenados (x, y) são usados tanto para representar pontos quanto vetores no plano. Portanto, deve ser enfatizado o ponto de vista geométrico desejado.

Os vetores $\mathbf{u} = (x, y)$ têm início na origem do sistema de coordenadas $(0, 0)$ e final no ponto (x, y) .

Representação Vetorial no Plano

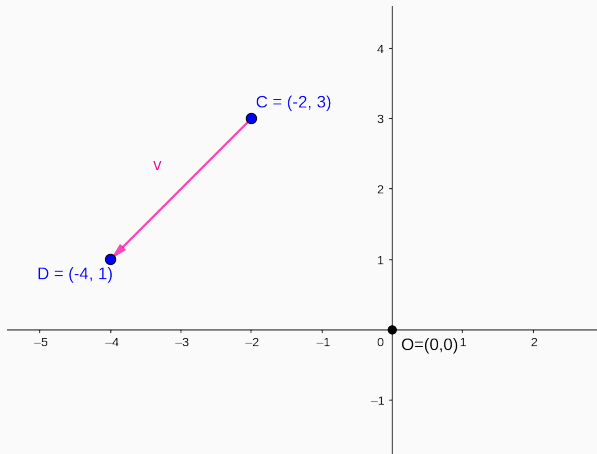
Exemplo



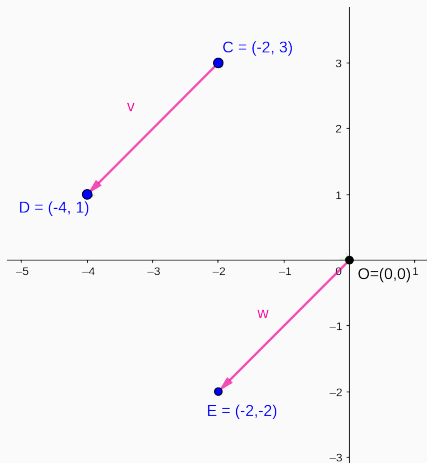
Em azul, o ponto $A = (-i, 0.5)$; em rosa, o vetor u , que tem início na origem $(0, 0)$ e final em A .

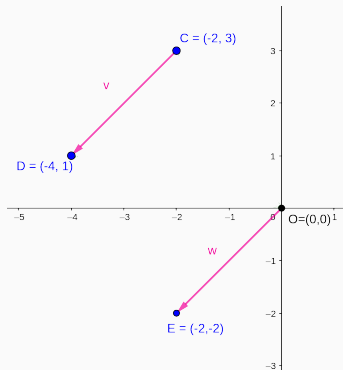
Representação Vetorial no Plano

Quando o vetor \mathbf{v} não possui início na origem do sistema, devemos descrevê-lo através dos seus pontos inicial e final.



O vetor $\mathbf{w} = \overrightarrow{OE}$ é equivalente ao vetor \mathbf{v} , onde seu ponto inicial é a origem $(0, 0)$.





Na álgebra dos vetores, costumamos utilizar o vetor equivalente ao vetor dado, que tem seu ponto inicial na origem. Então, se queremos identificar o vetor \overrightarrow{CD} , o identificamos como sendo: $\overrightarrow{CD} = (-2, -2)$.

O Vetor Nulo

Denotamos por $\mathbf{0}$ o vetor que tem comprimento igual a 0, não possui nem direção nem sentido. Em \mathbb{R}^2 , é representado por $\mathbf{0} = (0, 0)$.

Definição [1]

Vamos considerar V um conjunto não vazio qualquer de objetos no qual estejam definidas duas operações:

- adição entre dois objetos do conjunto;
- multiplicação por escalares.

Do que já vimos até agora, V pode ser:

- Conjunto de matrizes de mesma ordem;
- Conjunto de vetores de números reais com o mesmo número de coordenadas;
- Conjunto de números reais.

Todos estes conjuntos possuem a soma de seus elementos e a multiplicação por escalares bem definidas.

Definição

*Seja V um conjunto não vazio qualquer de objetos no qual estejam bem definidas as operações soma e multiplicação por escalares. Se os axiomas seguintes forem satisfeitos por todos os objetos u, v e w em V e quaisquer escalares a e b , diremos que V é um **espaço vetorial** e que os objetos de V são **vetores**.*

Axiomas dos Espaços Vetoriais

1. Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, então $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$.
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
3. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
4. Existe um objeto $\mathbf{0}$ em V , denominado **vetor nulo** de V , tal que $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$, com qualquer \mathbf{u} em V .
5. Dado qualquer \mathbf{u} em V , existe algum objeto $-\mathbf{u} \in V$, tal que $\mathbf{u} + -\mathbf{u} = -\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$.
6. Se a for qualquer escalar e $\mathbf{u} \in V$, então $a\mathbf{u} \in V$.
7. $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$
8. $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$
9. $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$
10. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Exemplo

Se V consiste num único elemento, que denotamos por $\mathbf{0}$, e estão definidas as operações

$$\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad a \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

com escalares a quaisquer, $V = (V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial denominado **espaço vetorial nulo**.

Exemplo

Seja $V = \mathbb{R}^n$. Usando as operações conhecidas de adição e multiplicação por escalar de n -uplas

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n) \\ &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)\end{aligned}$$

$$a \cdot \mathbf{u} = a(u_1, u_2, \dots, u_n) = (au_1, au_2, \dots, au_n),$$

$V = (\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ é um espaço vetorial.

Exemplo

Seja $\mathbb{M}_{2 \times 2} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2} \mid a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1, 2 \right\}$, o conjunto de todas as matrizes 2×2 com entradas reais.

Tomando as operações usuais de soma e multiplicação por escalar

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

$$k \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{bmatrix},$$

$(\mathbb{M}_{2 \times 2}, +, \cdot)$ é um espaço vetorial.

1. Faça os exercícios da seção 4.1 do livro Álgebra Linear com Aplicações, de Howard Anton and Chris Rorres: 1, 4, 5, 7, 9, 10, 23 e Exercícios de verdadeiro/falso.

- [1] Howard Anton and Chris Rorres.
Álgebra Linear com Aplicações.
Bookman, Porto Alegre, 10 edition, 2012.
Tradução técnica: Claus Ivo Doering. Editado também como livro impresso em 2012.
Recurso eletrônico.