

Aula 07

Polígonos

Karla Lima

Sumário



1. Definições

2. Teoremas

The background of the slide is composed of three geometric sections. A teal-colored triangle is in the top-left corner. A light gray triangle is in the bottom-left corner. The remaining area is a white triangle that points towards the top-right corner.

Definições

Definição

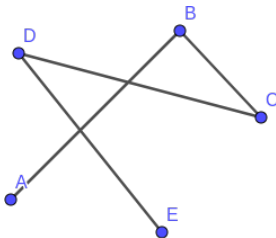


Definição 1

Sejam A_1, A_2, \dots, A_n pontos coplanares, dos quais três quaisquer deles não são colineares. A união dos segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}$ é denominada **linha poligonal**.

Exemplo 1

Abaixo, temos a linha poligonal formada pelos pontos A, B, C, D e E.



Definição



- Os pontos A_1, A_2, \dots, A_n são os vértices da poligonal e os segmentos correspondentes são os seus lados.

Definição 2

Um **polígono** é uma linha poligonal que satisfaz as seguintes condições:

- a) $A_1 \equiv A_n$;
- b) *Dois lados quaisquer da poligonal ou não se interceptam ou se interceptam apenas em seus extremos.*

Definição



Exemplo 2

Abaixo, temos um polígono formada pelos vértices A, B, C, D e E.

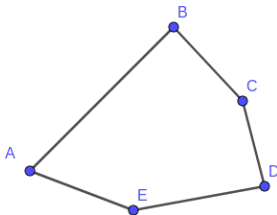


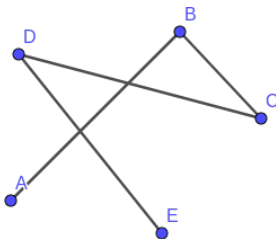
Figura 1: Polígono ABCDE

Definição



Exemplo 3

Você consegue justificar por que a linha poligonal do exemplo 1 não é um polígono?

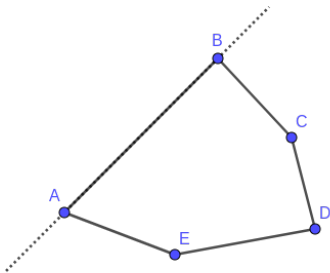


Definição

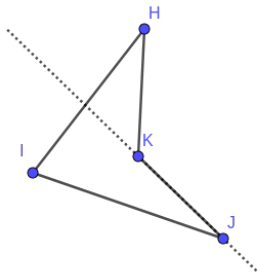


Definição 3

Um polígono é dito **convexo** se o mesmo fica contido em um mesmo semiplano com respeito a reta que contém qualquer um dos seus lados.



Polígono Convexo



Polígono Não Convexo

Nomenclatura



Os polígonos convexos recebem denominações especiais, de acordo com o número de seus lados:

- ▶ Um polígono com 3 lados chama-se **triângulo**.
- ▶ Um polígono com 4 lados chama-se **quadrilátero**.
- ▶ Um polígono com 5 lados chama-se **pentágono**.
- ▶ Um polígono com 6 lados chama-se **hexágono**.
- ▶ Um polígono com 7 lados chama-se **heptágono**.
- ▶ Um polígono com 8 lados chama-se **octógono**.
- ▶ Um polígono com 9 lados chama-se **eneágono**.

Nomenclatura



- ▶ Um polígono com 10 lados chama-se **decágono**.
- ▶ Um polígono com 11 lados chama-se **undecágono**.
- ▶ Um polígono com 12 lados chama-se **dodecágono**.
- ▶ Um polígono com 15 lados chama-se **pentadecágono**.
- ▶ Um polígono com 20 lados chama-se **icoságono**.
- ▶ Em geral, um polígono com n lados chama-se **n-látero**.

Definição

Definição 4

Um **polígono regular** é aquele que tem os lados congruentes e os ângulos também congruentes.

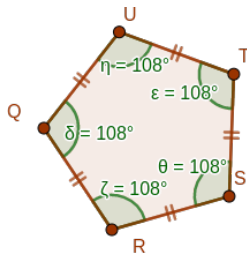
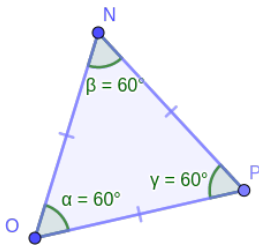


Figura 2: Polígonos Regulares

Definição



Definição 5

Diagonal de um polígono é o segmento que une dois vértices não consecutivos.

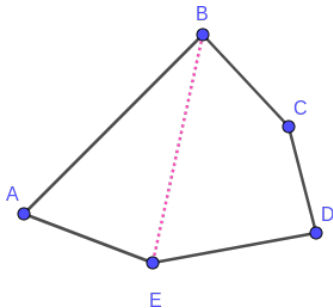


Figura 3: \overline{BE} é uma diagonal do polígono $ABCDE$

Definição



Definição 6

Denominamos de **ângulo externo** de um polígono ao suplemento de qualquer um de seus ângulos internos.

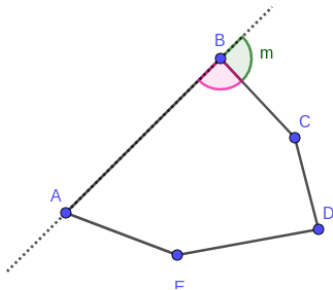


Figura 4: m é um ângulo externo do polígono $ABCDE$, em \hat{B}

Diagonais



Vamos visualizar algumas diagonais no Geogebra (Click para baixar)

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the top-left corner, while a light gray shape occupies the bottom-left corner. The rest of the slide is white. The word "Teoremas" is centered in the white area.

Teoremas

Teorema



Teorema 1

O número de diagonais de um polígono de n lados é dado pela fórmula

$$d = \frac{n(n-3)}{2}.$$

- **Hipótese:** O polígono possui n lados. Logo, possui n vértices

$$A_1, A_2, \dots, A_n.$$

- **Tese:** A fórmula

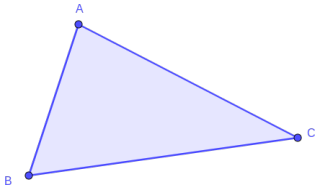
$$d = \frac{n(n-3)}{2}.$$

determina o número de diagonais do polígono.

Demonstração: Teorema 1



- ▶ Seja $n = 3$. Temos um triângulo:



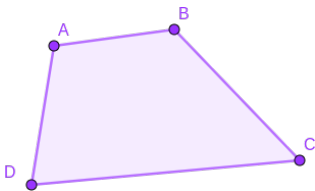
- ▶ Qualquer segmento que une dois vértices do triângulo, resulta em um lado do mesmo.
- ▶ Ou seja, o número de diagonais d é zero.
- ▶ A fórmula, então, é verdadeira para $n = 3$, uma vez que

$$\frac{n(n-3)}{2} = \frac{3(3-3)}{2} = 0.$$

Demonstração: Teorema 1

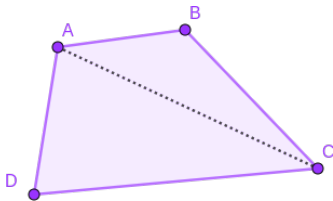


- ▶ Para $n = 4$, temos um quadrilátero.



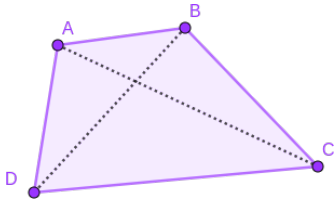
- ▶ Para formar os lados, cada vértice é ligado a outros 2 vértices.
- ▶ No caso do triângulo, ao fixar um dos vértices e ligá-lo à 2 deles, não há vértice livre para formar uma diagonal.
- ▶ No caso do quadrilátero, quantos vértices ficam disponíveis para formar uma diagonal?

Demonstração: Teorema 1



- ▶ Por exemplo, ao fixarmos os vértice A , os lados são formados por \overline{AB} e \overline{AD} , ficando o vértice C livre para formar a diagonal \overline{AC} .
- ▶ O mesmo ocorre com cada um dos vértices restantes: cada um só pode gerar uma diagonal com o vértice restante.
- ▶ São eles: \overline{AC} , \overline{BD} , \overline{CA} , \overline{DB} .

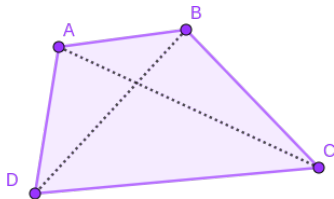
Demonstração: Teorema 1



- Assim, cada vértice gera 1 diagonal, que é o número de vértices que restam após eu fixar um vértice e formar lados com dois outros vértices do polígono:

$$4 \text{ (vértices)} \times (4 \text{ (vértices)} - 3 \text{ (vértices usados para formar os lados)}) = 4 \times 1 = 4$$

Demonstração: Teorema 1



- ▶ Como $\overline{AC} = \overline{CA}$ e $\overline{BD} = \overline{DB}$, estamos contando a mesma diagonal 2 vezes.
- ▶ Portanto, o número de diagonais é dado por

$$\frac{4 \text{ (vértices)} \times (4 \text{ (vértices)} - 3 \text{ (vértices usados para formar os lados)})}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

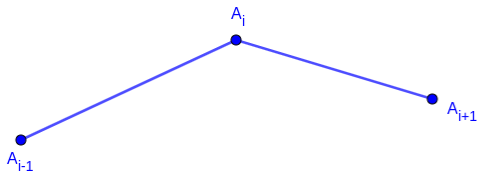
- ▶ Novamente, para $n = 4$, temos que o número de diagonais é dado pela fórmula

$$\frac{n(n-3)}{2} = \frac{4(4-3)}{2} = 2.$$

Demonstração: Teorema 1



- Se o polígono tem n lados, então, ao fixarmos um vértice para formar dois lados do mesmo, usamos 3 vértices e nos restam $n - 3$ vértices para formarmos as diagonais.



- Assim, são $n(n - 3)$ diagonais, mas como $\overline{A_i A_j} = \overline{A_j A_i}$, cada diagonal foi computada duplamente.

Portanto, o número de diagonais é metade desse valor,

$$\frac{n(n - 3)}{2},$$

como queríamos demonstrar.

Teorema



Teorema 2

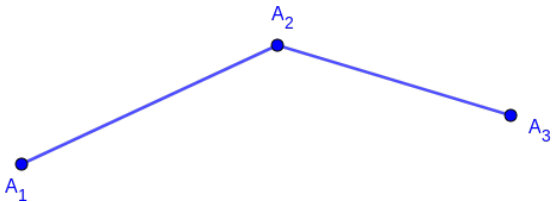
A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é dado pela fórmula

$$S_i = 180^\circ(n - 2)$$

Demonstração: Teorema 2

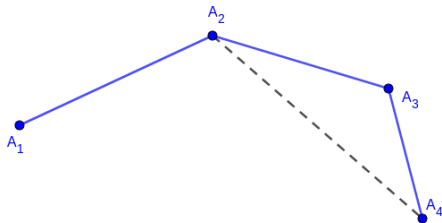


Como vimos na demonstração do teorema 1, um vértice é ligado a dois outros adjacentes para formar lados do polígono:



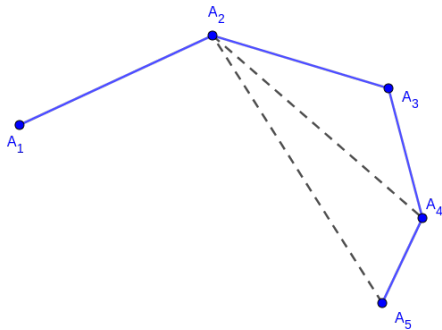
Acima, se o polígono tem n lados, então ele possui $n - 3$ outros vértices que fazem diagonal com A_2 .

Demonstração: Teorema 2



- ▶ A primeira diagonal pode ser traçada com o vértice adjacente ao vértice A_3 .
- ▶ Com isso, essa diagonal descreve um triângulo $A_2A_3A_4$ no polígono dado.

Demonstração: Teorema 2

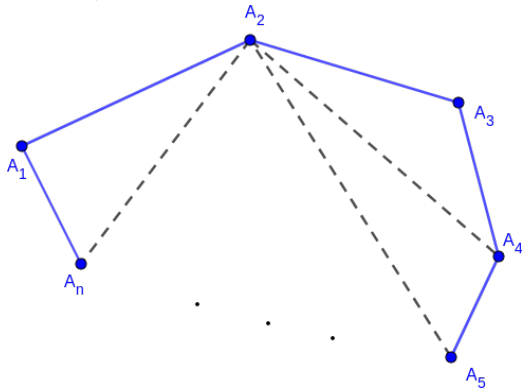


- ▶ A segunda diagonal pode ser traçada com o vértice adjacente ao vértice A_4 .
- ▶ Com isso, essa diagonal descreve um triângulo $A_2A_4A_5$ no polígono dado.

Demonstração: Teorema 2



- Cada diagonal a partir de A_2 pode ser traçada com um vértice A_i , com $i \neq 1$ e $i \neq 3$, gerando um triângulo $A_2A_iA_{i+1}$ até o último vértice A_n que faz um triângulo $A_2A_nA_1$.



Demonstração: Teorema 2



► Ou seja, temos os triângulos

1. $A_2 A_3 A_4$ (\triangle número 1 = $3 - 2$)

2. $A_2 A_4 A_5$ (\triangle número 2 = $4 - 2$)

\vdots

n-3. $A_2 A_{n-1} A_n$ (\triangle número $n - 3 = (n - 1) - 2$)

n-2. $A_2 A_n A_1$ (\triangle número $n - 2 = n - 2$)

- O polígono está dividido em $n - 2$ triângulos, cuja soma dos ângulos internos é 180° .
- Portanto, a soma dos ângulos internos do polígono original é

$$S_i = 180^\circ(n - 2),$$

c.q.d.

Corolário



Corolário 1

Se o polígono é regular, então cada ângulo interno mede

$$a_i = \frac{180^\circ(n - 2)}{n}.$$

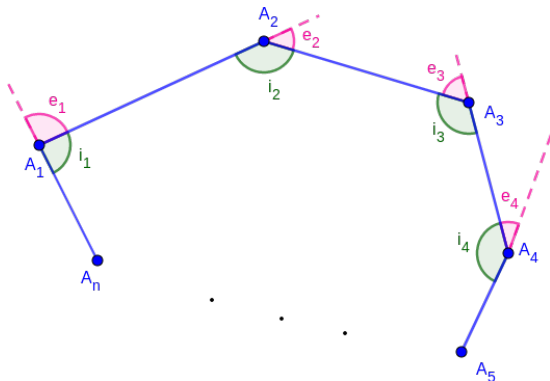
Teorema



Teorema 3

A soma dos ângulos externos de um polígono convexo é igual à 360° .

Demonstração: Teorema 3



- A soma de um ângulo interno com o ângulo externo correspondente é igual a 180° .

Demonstração: Teorema 3



► Isto é,

$$i_1 + e_1 = 180^\circ$$

$$i_2 + e_2 = 180^\circ$$

$$\vdots$$

$$i_n + e_n = 180^\circ$$

► Some os membros dessa igualdade e conclua que

$$S_e = 360^\circ$$

Corolário



Corolário 2

Se o polígono é regular, então cada ângulo externo mede

$$a_e = \frac{360^\circ}{n}.$$