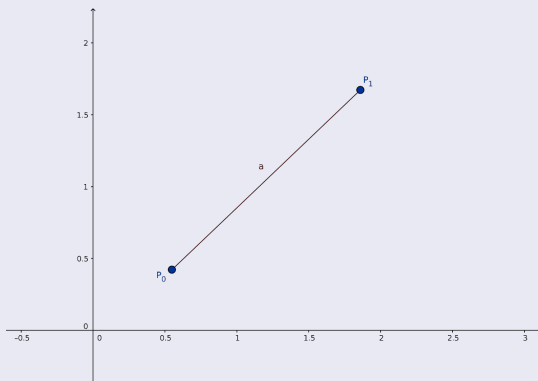


Distância no Plano \mathbb{R}^2

Definição

A distância entre os pontos $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$, denotada por $d(P_0, P_1)$, é o comprimento do segmento cujos extremos são P_0 e P_1 .



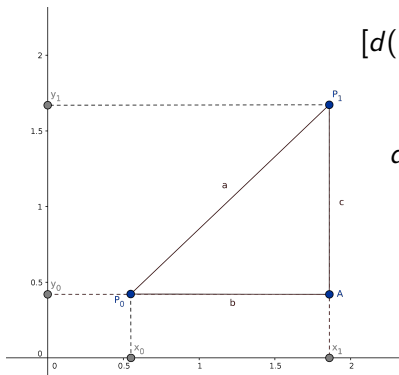
Distância no Plano \mathbb{R}^2

Pelo teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$.

Assim:

$$[d(P_0, P_1)]^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2$$

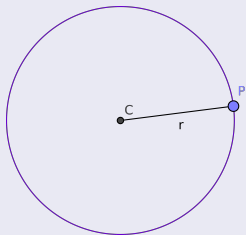
$$d(P_0, P_1) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$



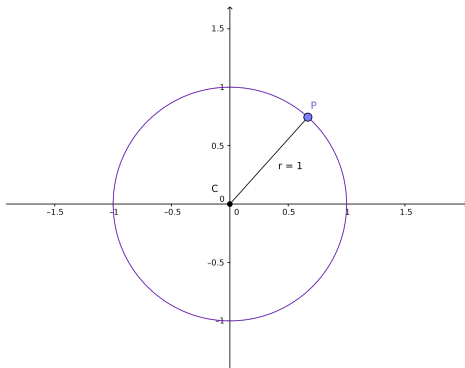
O círculo

Definição

O conjunto de todos os pontos que estão a exatamente uma determinada distância r de um ponto C dado no \mathbb{R}^2 .



A equação do círculo



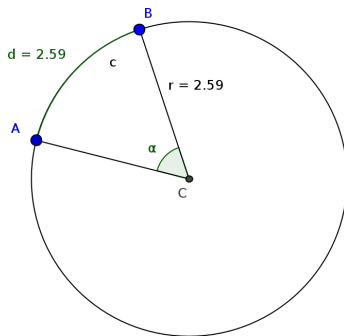
Tomando o raio igual a 1 e o centro do círculo na origem $C = (0,0)$, a distância de qualquer ponto $P = (x, y)$ que está no círculo é dada pela equação:

$$1 = d(P, C)^2 = x^2 + y^2$$

O Radiano

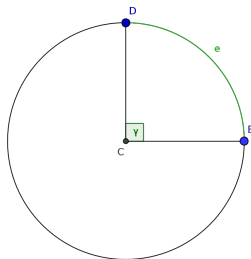
- É uma forma de medir ângulos muito usada em trigonometria.
- É determinado pela razão entre o comprimento de um arco circular e seu raio.

O Radiano



Na circunferência acima, o ângulo α subtende o arco AB cujo comprimento é igual ao raio. Dizemos que este ângulo mede 1 radiano.

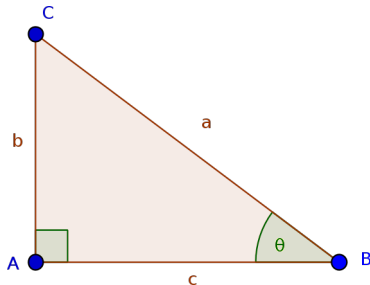
O Radiano



Exemplo: Quantos radianos tem o ângulo γ em radianos? E em graus?

Resposta: $\gamma = \frac{2r\pi/4}{r} = \frac{\pi}{4}$ radianos e 90 graus. Ou seja, o ângulo medir 90 graus é equivalente a medir $\frac{\pi}{4}$ radianos.

Seno e Cosseno em um triângulo retângulo

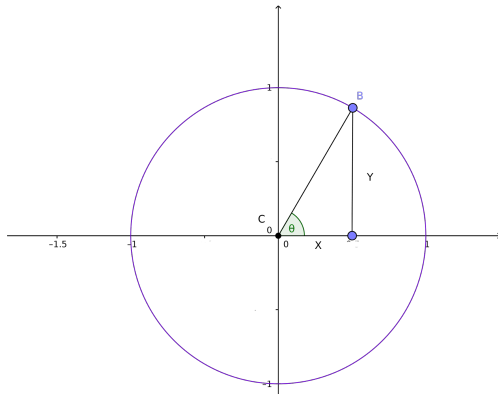


Relações no triângulo retângulo:

- $\cos \theta = \frac{c}{a} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$

- $\sin \theta = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$

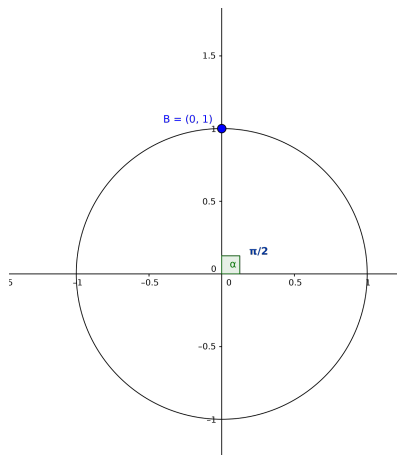
O círculo trigonométrico



Das relações trigonométricas no triângulo, vemos que:

$$\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

O círculo trigonométrico



$$B = (\cos \alpha, \sin \alpha) = (0, 1)$$

O seno como uma função

- Usando o círculo trigonométrico, podemos definir o seno de qualquer número real x que esteja no intervalo $[0, 2\pi]$.
- Podemos estender este conceito para todos os números reais usando as seguintes propriedades do seno:

$$f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) = \sin x \cos 2\pi + \sin 2\pi \cos x = \sin x = f(x)$$

$$f(x-2\pi) = \sin(x-2\pi) = \sin x \cos 2\pi - \sin 2\pi \cos x = \sin x = f(x)$$

- Funções que satisfazem $f(x+T) = f(x)$ são chamadas Funções Periódicas, com período T .
- Assim, a função seno é uma função periódica, de período 2π .

O cosseno como uma função

- Do mesmo modo, podemos definir o cosseno de qualquer número real x que esteja no intervalo $[0, 2\pi]$.
- Podemos estender este conceito para todos os números reais usando as seguintes propriedades do cosseno:

$$f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) = \cos x \cos 2\pi - \sin 2\pi \sin x = \cos x = f(x)$$

$$f(x-2\pi) = \cos(x-2\pi) = \cos x \cos 2\pi + \sin 2\pi \sin x = \cos x = f(x)$$

- Assim, a função cosseno é uma função periódica, também de período 2π .

Funções Limitadas

- Uma vez que $\sin^2 x \leq \sin^2 x + \cos^2 x$ segue que

$$|\sin x| = \sqrt{\sin^2 x} \leq \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = 1$$

e, assim, para todo $x \in \mathbb{R}$ temos: $-1 \leq \sin x \leq 1$.

- Do mesmo modo, $\cos^2 x \leq \sin^2 x + \cos^2 x$ segue que

$$|\cos x| = \sqrt{\cos^2 x} \leq \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = 1$$

e, assim, para todo $x \in \mathbb{R}$ temos: $-1 \leq \cos x \leq 1$.

- Se existe um número real $M \geq 0$ tal que para todo $x \in D_f$ tem-se $|f(x)| \leq M$, dizemos que f é uma função limitada.