GEOMETRIA
PLANA

Aula 01

Ponto, reta e plano

Karla Lima

15/02/2022

Sumário

Introdução

Visão Geral

- A geometria estuda as propriedades das figuras usadas na medição de comprimentos, áreas e volumes.
- Essas propriedades são obtidas através de uma sequência lógica de raciocínios (que faz com que a Geometria seja uma excelente oportunidade para o desenvolvimento do pensamento lógico de qualquer pessoa!)
- Aprendendo a raciocinar com lógica, a argumentar e a justificar nossas afirmações, podemos conduzir melhor nossas vidas.

Início

- Teve seu início muito antes de Cristo.
- De forma empírica, foi especialmente desenvolvida pelos egípcios que a utilizaram para medir a terra nos trabalhos de irrigação.
- Mas coube aos gregos a formulação de uma cadeia lógica e rigorosa da Geometria.
- Euclides (330 - 275 A.C.) foi o primeiro matemático a introduzir uma estrutura estritamente lógica na Geometria, sintetizando trabalhos de vários séculos em sua famosa obra de 13 volumes: **Elementos**.

Conceitos Primitivos

O ponto inicial: ponto, reta e plano

- Pode parecer possível definir todos os entes da Geometria, mas percebam que para definir um termo (por exemplo, paralelogramos) empregamos outros termo (por exemplo, quadriláteros).
- Por isso, teremos que aceitar alguns termos sem defini-los. São eles: o **ponto**, a **reta** e o **plano**.

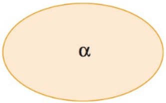
Noção exata e Notações

Mesmo sem defini-los, temos a noção exata desses entes:

- Um ponto pode ser representado pela marca produzida pela ponta fina de um lápis quando pressionada sobre uma folha de papel
  - Usaremos letras maiúsculas como $A, B, C, \ldots$, para denotar os pontos: 

- Parte de uma reta pode ser desenhada com a ajuda de uma régua, com duas setas nas suas pontas.
  - Usaremos letras minúsculas como $a, b, c, \ldots$, para denotar as retas: 

- Um plano pode ser visto como a superfície de uma parede que se estende indefinidamente em todas as direções.



  - Usaremos letras gregas como $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, para denotar os planos:

Primeiras Propriedades

Postulados[Machado(2012)]

- Nem tudo na matemática pode ser provado!
- Isso se deve ao fato de que, quando demonstramos uma proposição, nos apoiamos em alguma proposição anteriormente provada.
- Assim, em algum momento, teremos que aceitar algumas afirmações sem demonstrá-las.
- Essas afirmações são denominadas **postulados**.
- As proposições que provarmos serão chamadas **teoremas**.

Observação

Os entes geométricos aqui trabalhados estão dentro de um espaço tridimensional.

O 1º Postulado

Postulado 1

Dados dois pontos distintos quaisquer, existe uma única reta que os contém.

Assim, diremos que *dois pontos distintos* determinam uma reta.

Neste caso, designaremos também a reta por $\overleftrightarrow{AB}$.

Consequência do Postulado 1

Quando duas retas, uma reta e um plano ou dois planos têm um ponto em comum, diz-se que eles se **interceptam**.

Teorema 1

Se duas retas distintas se interceptam, então a interseção contém um ponto apenas.

- **Hipótese**[1]**:** as retas distintas r e s se interceptam.
- **Tese**[2]**:** o ponto de interseção é único.

[1] Hipótese é um conjunto de condições que se supõe verdadeiras.
[2] Tese é a verdade que se pretende demonstrar.

Teorema 1: Demonstração

Vamos usar a prova por contradição, supondo que a negativa da tese seja verdadeira. Ou seja, existe mais de um ponto de interseção.
Sejam P e Q dois pontos em comum das retas r e s. Então, pelo Postulado 1, existe uma única reta que passa pelos pontos P e Q. Como $P, Q \in r$ e $P, Q \in s$, devemos ter $r = s$, contrariando a hipótese de que as duas retas são distintas.
Portanto, não pode haver mais de um ponto de interseção entre duas retas distintas, como queríamos.

$\blacksquare$

Posições Relativas

Retas Concorrentes

Definição 1

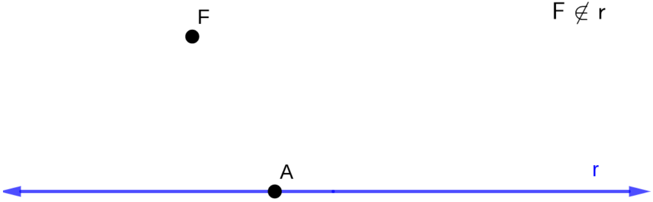
Quando duas retas têm apenas um ponto em comum, elas são ditas ***concorrentes****.*

2º Postulado

Postulado 2

Dada uma reta qualquer, existem pontos que pertencem a r e pontos que não pertencem a r.

$A \in r$
$F \notin r$



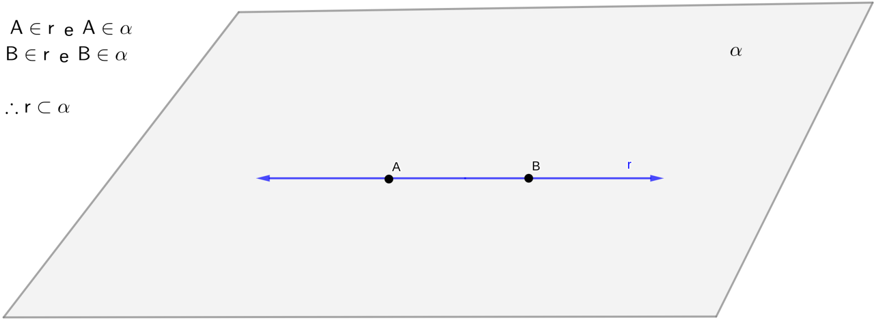
3º Postulado

Postulado 3

Se dois pontos de uma reta pertencem a um plano, então esta reta está contida neste plano.

$A \in r$ e $A \in \alpha$
$B \in r$ e $B \in \alpha$

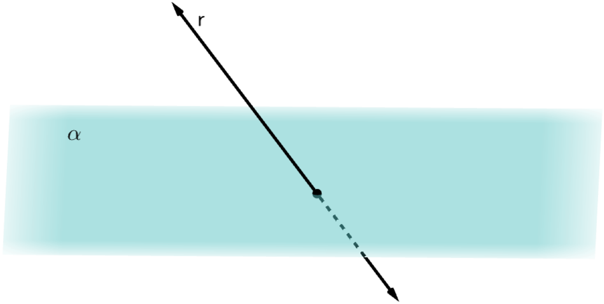
$\therefore r \subset \alpha$



Consequência do Postulado 3

Teorema 2

Se uma reta intercepta um plano que não a contém, então a interseção contém um ponto apenas.



Demonstração do Teorema 2

- **Hipótese:** a reta r intercepta o plano α que não a contém .
- **Tese:** o ponto de interseção é único.

Novamente, usaremos a prova por contradição.
Negando a tese, temos que existe mais de um ponto de interseção. Com isso, temos dois pontos A e B que estão tanto no plano α quanto na reta r. Como A e B determinam a reta r, e ambos estão em α, segue do Postulado 3 que a reta r está contida no plano, contradizendo a nossa hipótese.
Portanto, concluímos que não pode haver mais de um ponto de interseção se a reta não está contida no plano, como queríamos demonstrar.

$\blacksquare$

Reta Secante. Pontos Colineares

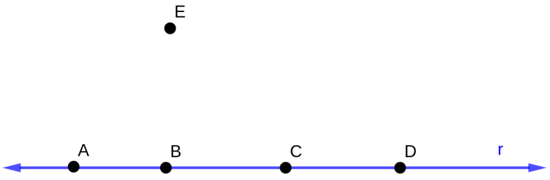
Definição 2

Quando uma reta e um plano têm apenas um ponto em comum, diz-se que a reta é ***secante*** *ao plano.*

Definição 3

Diz-se que os pontos de um conjunto estão ***alinhados*** *ou são* ***colineares****, se existe uma reta que os contém.*

Pontos Colineares



Os pontos A, B, C e D são colineares.
Qualquer conjunto que tenha dois pontos da reta dada e o ponto E não vai ser colinear: por exemplo, A, B e E não são colineares (qual Postulado garante essa afirmação?)

Pontos Coplanares

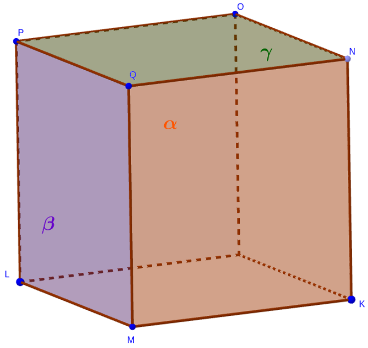
Definição 4

Diz-se que os pontos de um conjunto são ***coplanares****, se existe um plano que os contém.*

Pontos Coplanares

Exemplo 1

A figura abaixo é um cubo. Cada face visível representa um plano α, β ou γ.

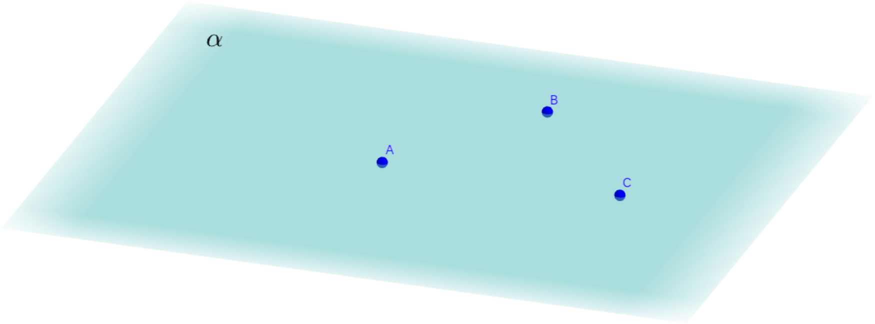


- Os pontos K, M e N são coplanares, pois estão no mesmo plano α.
- Os pontos L, M e P são coplanares, pois estão no mesmo plano β.
- Os pontos N, O, P e M não são coplanares.
- O que pode ser dito sobre os pontos *O*, *P* e *Q*? E dos pontos *K*, *M*, *N* e *P*?

4º Postulado

Postulado 4

Dados três pontos quaisquer não colineares, existe um único plano que os contém.

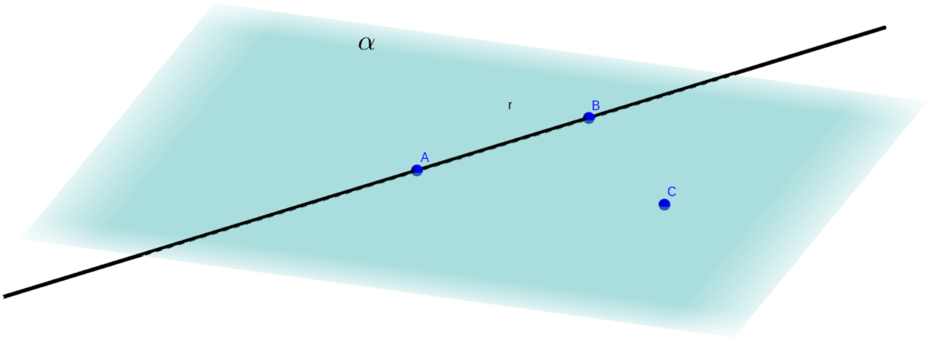


Três pontos não colineares determinam um plano!

Consequência do Postulado 4

Teorema 3

Dados uma reta e um ponto fora dela, existe um único plano que os contém.



Demonstração do Teorema 3

- **Hipótese:** C é um ponto não pertencente à reta r ($C \notin r$) .
- **Tese:** Existe um único plano que contém C e r.

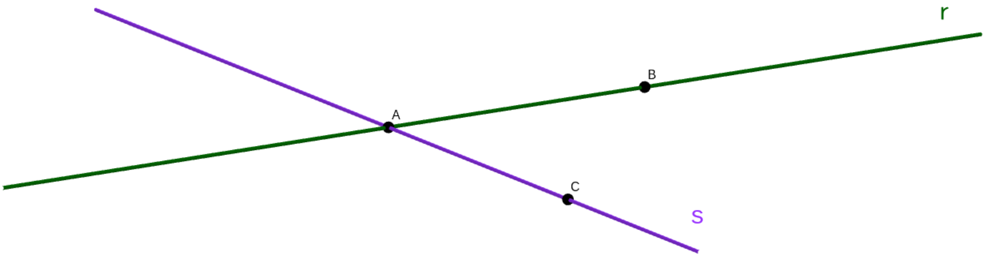
Usaremos a prova direta (partimos da hipótese).
Sejam A e B dois pontos distintos sobre a reta r. Como C não pertence à reta $\overleftrightarrow{AB} = r$, os três pontos A, B e C são não colineares e, segue do Postulado 4, determinam um único plano α. Pelo Postulado 3, como dois pontos distintos de r pertencem a α, então a reta está contida neste plano.
Portanto, o único plano determinado por A, B e C, contém C e a reta r.

$\blacksquare$

Consequência do Postulado 4

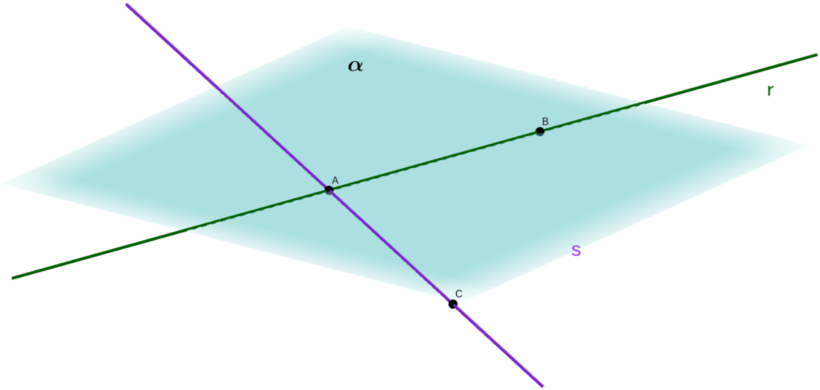
Teorema 4

Se duas retas são concorrentes, então existe um único plano que as contém.



Demonstração do Teorema 4

- **Hipótese:** As retas *r* e *s* são concorrentes .
- **Tese:** Existe um único plano que as contém.



Demonstração do Teorema 4

Sejam A o único ponto de interseção entre as retas. Sejam B e C dois pontos distintos de A, com $B \in r$ e $C \in s$. Com isso, obtemos 3 pontos não colineares[3] que, pelo Postulado 4, determinam um único plano α. Como A e B pertencem à reta r e ao plano α, o Postulado 3 garante que r está contida no plano α ($r \subset \alpha$). Analogamente, B e C pertencem à reta s e ao plano α, de onde concluímos que s está contida no plano α ($s \subset \alpha$).
Portanto, o único plano determinado por A, B e C, contém r e s. Não há outro plano que satisfaça a condição de conter r e s, uma vez que esse plano também deve conter os pontos A, B e C, não podendo ser distinto de α.

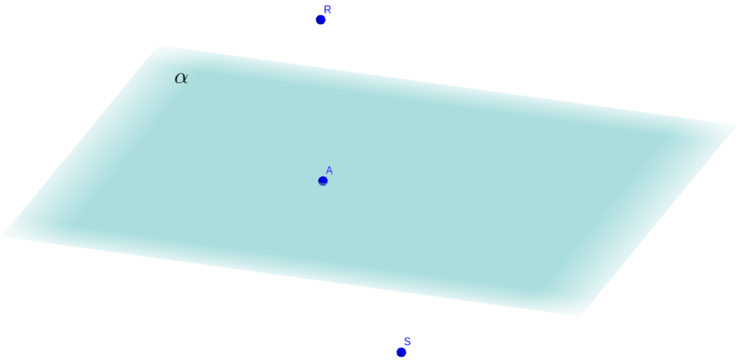
■

[3] Para exercitar: o que garante essa afirmação?

5º Postulado

Postulado 5

Dado um plano α qualquer, existem pontos que pertencem a α e pontos que não pertencem a α.



$A \in \alpha$
$R \notin \alpha$
$S \notin \alpha$

Exercício 1

Preencha corretamente as lacunas[4]:

a) Dados dois pontos distintos, então existe exatamente um(a) ______ que os contém.
b) Pontos ______ são aqueles situados sobre uma mesma reta.
c) Dados três pontos não-colineares, então existe exatamente um(a) ______ que os contém.
d) Se dois pontos distintos pertencem a um plano, então a reta que os contém ______ no plano.

[4] Identifique qual resultado foi utilizado.

Exercício 2

a) Qual dos postulados assegura que uma reta não contém todos os pontos de um plano que a contenha?

b) Qual dos postulados assegura que um plano não contém todos os pontos do espaço?

Exercício 3

Quantas retas podemos traçar passando por pares de pontos distintos de cada um dos conjuntos abaixo[5]?

a) $\{A, B, C\}$ é um conjunto de pontos colineares.

b) $\{A, B, C, D\}$ é um conjunto coplanar onde três quaisquer desses pontos não estão alinhados.

c) $\{A, B, C, D\}$ é um conjunto de pontos não coplanares.

[5] Esboce os conjuntos!

Outras Definições

Segmentos

Definição 5

*Dados dois pontos quaisquer A e B em uma reta r, chama-se **segmento de reta** de extremos A e B ao conjunto formado pelos pontos A e B, e por todos todos os pontos de r entre A e B.*

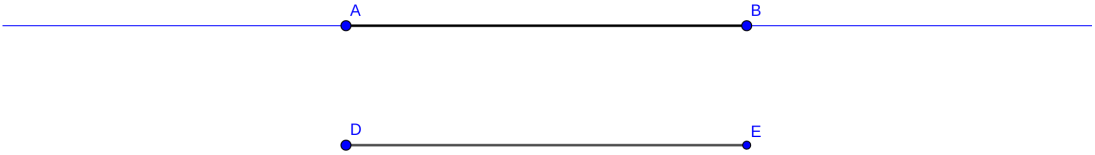
Denotaremos por $\overline{AB}$ o segmento de extremos A e B.

Segmentos

Fixando-se uma unidade de comprimento μ, podemos associar a cada segmento de reta um número real positivo denominado o seu **comprimento** ou a sua **medida**.

Definição 6

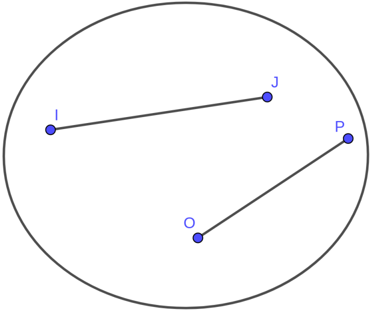
*Dois segmentos são ditos **congruentes** se têm a mesma medida.*



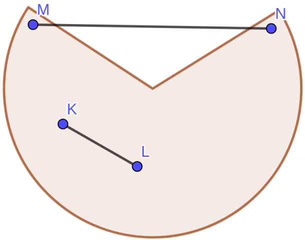
Conjuntos Convexos

Definição 7

Um conjunto A chama-se ***convexo****, se para cada dois pontos X e Y de A, o segmento* $\overline{XY}$ *está contido em A.*



Conjunto Convexo



Conjunto Não-Convexo

Conjuntos Convexos

Exemplo 2

Quais dos conjuntos a seguir são convexos?

- *Uma reta.*
- *Um plano.*
- *Uma reta menos um ponto.*
- *Um plano menos um ponto.*

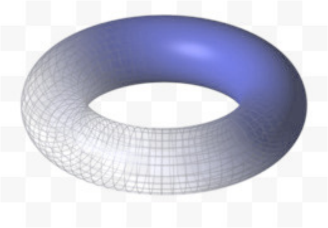
Exercício 4

Usando desenhos para auxiliar, responda:

a) A circunferência é um conjunto convexo?

b) A região do plano delimitada por uma circunferência é um conjunto convexo?

c) Um toro - superfície que tem a forma de uma câmara de ar de pneu - é um conjunto convexo?



Exercício 5

a) Demonstre que a interseção de dois conjuntos convexos, que têm ao menos dois pontos em comum, é um conjunto convexo.

b) Faça um desenho para mostrar que a união de dois conjuntos convexos pode não ser um conjunto convexo.

Exercício 6

a) Dê um contra-exemplo para mostrar que é falsa a sentença:

’Uma infinidade de pontos alinhados é uma reta.’

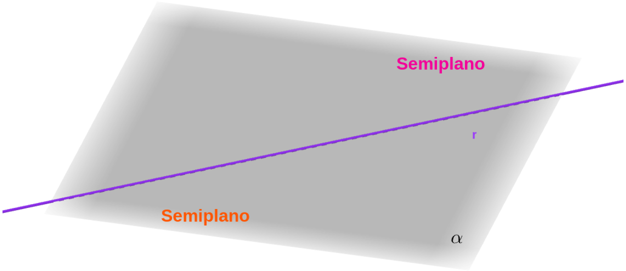
b) Por que uma mesa de quatro pernas às vezes balança e uma de três pernas está sempre firme?

Planos e Espaços

6º Postulado

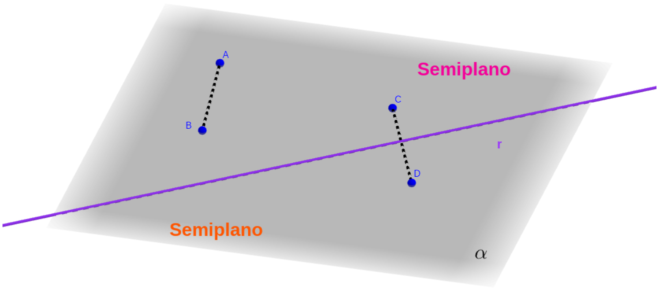
Postulado 6

*Toda reta de um plano divide-o em dois conjuntos, os quais são convexos, denominados **semiplanos**.*



- A reta r chama-se **aresta** de cada semiplano de α.

6º Postulado



- Se A e B pertencem a um mesmo semiplano, o segmento $\overline{AB}$ está contido no mesmo semiplano e não intercepta a reta r.
- Se os pontos C e D pertencem a semiplanos distintos, o segmento $\overline{CD}$ intercepta a reta r.

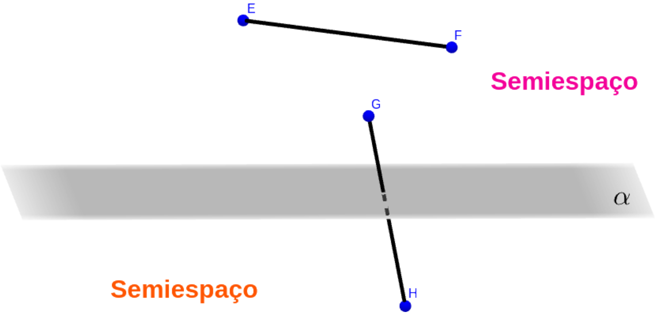
7º Postulado

Postulado 7

Todo plano separa o espaço em dois conjuntos, os quais são convexos, denominados ***semiespaços.***

- O plano α chama-se **face** de cada um dos semiespaços.

7º Postulado



- Se E e F pertencem a um mesmo semiespaço, o segmento $\overline{AB}$ está contido no mesmo semiespaço e não intercepta o plano α.
- Se os pontos G e H pertencem a semiespaços distintos, o segmento $\overline{CD}$ intercepta o plano α.

Exercício 7

a) Dois planos que se intersectam separam o espaço em quantas regiões?
b) Dois planos paralelos separam o espaço em quantas regiões?

Lista de Exercícios

Exercício 1

Faça uma figura para ilustrar as seguintes situações:

a) *Dois planos que não se interceptam.*
b) *Uma reta e um plano que se interceptam em exatamente um ponto.*
c) *Uma reta e um plano que não se interceptam.*
d) *Uma reta contida em um plano.*
e) *Dois planos que se interceptam.*
f) *Três planos que se interceptam em um ponto.*
g) *Três planos que se interceptam em uma reta.*
h) *Uma reta que intercepta dois planos em diferentes pontos.*
i) *Um sólido que seja limitado por superfícies planas, que não seja convexo.*

Exercício 2

Prove que:

a) *Todo plano contém no mínimo três pontos não colineares.*
b) *O espaço contém no mínimo quatro pontos não coplanares.*
c) *Se três pontos estão alinhados então eles são coplanares.*

Exercício 3

a) *Quantas retas passam:*
   i) *Por um ponto dado?*
   ii) *Por dois pontos distintos?*

b) *Quantas planos passam:*
   i) *Por um ponto dado?*
   ii) *Por dois pontos distintos?*
   iii) *Por três pontos distintos?*

Exercício 4

Classifique como verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Três pontos distintos são colineares.
b) Três pontos quaisquer são coplanares.
c) Quatro pontos distintos determinam quatro retas.
d) Por quatro pontos distintos pode passar uma só reta.
e) Três pontos distintos são sempre colineares.
f) Se quatro pontos são coplanares, então eles estão alinhados.
g) Dois pontos quaisquer são colineares.
h) Dois pontos quaisquer são coplanares.

i) Dois pontos distintos determinam um plano.
j) Dois pontos distintos determinam uma reta.
k) Dois pontos distintos determinam um plano.
l) Três pontos distintos determinam um plano.
m) Por uma reta passam infinitos planos.
n) É convexo o conjunto constituído por dois pontos apenas.
o) Uma reta possui infinitos pontos.
p) No plano, duas retas distintas ou não se interceptam ou se interceptam num só ponto.

Gabarito

Exercício 3

a) i) Infinitas.
   ii) Apenas uma (postulado 1).
b) i) Infinitos.
   ii) Infinitos.
   iii) Apenas um (postulado 4) se forem não colineares. Infinitos em caso contrário.

Exercício 4

a) F	i) F
b) V	j) V
c) F	k) F
d) F	l) V
e) F	m) V
f) F	n) F
g) V	o) V
h) F	p) V

Referencias I

P. Machado.
Fundamentos de Geometria Plana.
CAED-UFMG, Belo Horizonte, 2012.
URL https://www.ime.usp.br/~afisher/ps/MAT0230/Fundamentos_de_geometria_planaMachado.pdf.