Elementos de Aritmética

Lista de Exercícios:

1. Conjuntos.
2. Conjuntos Numéricos: Os Naturais.
3. Múltiplos. Potências.
4. Técnicas de Demonstração.
5. Problemas Propostos.

Profa. Karla Lima
FACET/UFGD

1 Conjuntos

Exercício 1 *Sejam A e B subconjuntos de U. Utilize diagramas de Venn para explicar porque as seguintes identidades, conhecidas como **Leis de De Morgan**, são verdadeiras:*

a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Exercício 2 *Dados dois conjuntos não vazios A e B, se ocorrer $A \cup B = A$, podemos afirmar que:*

a) $A \subset B$.

b) Isso nunca pode ocorrer.

c) B é um subconjunto de A.

d) D é um conjunto unitário.

e) A é um subconjunto de B.

Exercício 3 *Se A e B são subconjuntos não vazios de U, verifique quais das afirmações a seguir são verdadeiras:*

a) $(A - B)^c \cap (B \cup A^c)^c = \emptyset$.

b) $(A - B^c)^c = B - A^c$.

c) $[(A^c - B) \cap (B - A)]^c = A$.

2 Conjuntos Numéricos: Os Naturais

Exercício 4 *Usando a propriedade distributiva, calcule o produto 62×35.*

Exercício 5 *Usando a propriedade distributiva, calcule o produto $2(20 + 15)$.*

Exercício 6 *A e B são locadoras de automóveis. A cobra R\$ $1,00$ por quilômetro rodado mais uma taxa de R\$ $100,00$ fixa. B cobra R\$ $0,80$ mais uma taxa de R\$ $200,00$. Discuta a vantagem de alugar um carro em A ou em B.*

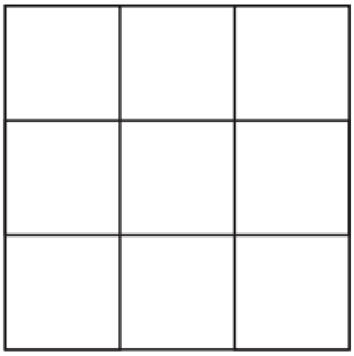
Exercício 7 *Num encontro entre 8 amigos, cada um troca um aperto de mão com todos os outros. Quantos apertos de mão terão ao todo?*

Exercício 8 *Um camponês colheu 90 maçãs e as distribuiu entre suas três filhas. Maria, a mais velha, recebeu 50 maçãs; Clara, a do meio, recebeu 30 e Lúcia, a mais nova, ficou com as restantes. O pai determinou que elas vendessem todas as maçãs e ainda que, se Maria vendesse 7 maçãs por um real, as outras deveriam vender também pelo mesmo preço, isto é, 7 maçãs por um real; se Maria resolvesse vender a 30 centavos cada uma, seria esse o preço pelo qual Clara e Lúcia deveriam vender suas maçãs. Além disso, o negócio deveria ser feito de modo que todas as três obtivessem, no final das vendas, a mesma quantia. Como as irmãs podem fazer a venda das maçãs para atender às determinações do pai?*

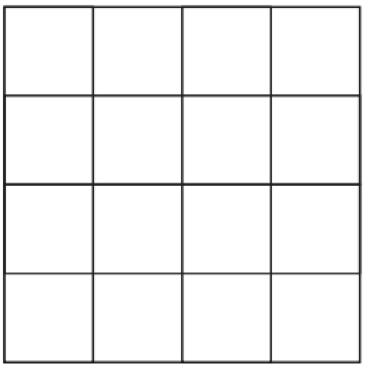
Dica: Comece com a sugestão de preço inicial do pai.

Exercício 9 *Os diagramas abaixo são chamados de quadrados mágicos. Eles devem ser preenchidos de modo que, em cada linha, coluna ou diagonal, a soma seja sempre a mesma.*

a) Esse primeiro quadrado 3x3 deve ser preenchido com os números de 1 a 9. Veja se consegue e descubra qual é sua soma mágica:



b) Achou fácil? Tente agora com o quadrado mágico abaixo que deve ser preenchido com os números de 1 a 16. Note que não há repetição de números.



3 Múltiplos. Potências.

Exercício 10 *Ao escrevermos todos os números naturais de* 40 *até* 1200*, quantos algarismos utilizamos?*

Exercício 11 *Se n é um número inteiro qualquer,qual das expressões abaixo resulta num número ímpar?*

a) $n^2 - n + 2$	c) $n^2 + n + 5$	e) $n^3 + 5$
b) $n^2 + n + 2$	d) $n^2 + 5$	

Exercício 12 *Quanto é o dobro de* 24 *mais o triplo de* 13 *menos o quádruplo de* 15*?*

Exercício 13 *Usando propriedades das operações entre números naturais, calcule quanto é* $99 + 999 + 9999$*?*

Exercício 14 *Marina, ao comprar uma blusa de R\$17,00, enganou-se e deu ao vendedor uma nota de R\$10,00 e outra de R\$50,00. O vendedor, distraído, deu o troco como se Marina lhe tivesse dado duas notas de R\$ 10,00. Qual foi o prejuízo de Marina?*

Exercício 15 *Na adição de termos iguais* $2023^{2023} + 2023^{2023} + \cdots + 2023^{2023} = 2023^{2024}$ *, escrita de forma simplificada, foram escritos muitos sinais de adição (+). Quantos foram escritos?*

Exercício 16 *Colocando sinais de adição entre alguns dos algarismos do número* 123456789 *podemos obter várias somas. Por exemplo, podemos obter* 279 *com quatro sinais de adição:* $123 + 4 + 56 + 7 + 89 = 279$*. Quantos sinais de adição são necessários para que se obtenha assim o número* 54*?*

Exercício 17 *Representamos por $n!$ o produto de todos os inteiros naturais de* 1 *a n. Por exemplo,* $5! = 54321 = 120$*. Calculando a soma* $1! + 2! + 3! + 4! + \cdots + 2010! + 2011!$*, qual é o algarismo das unidades do resultado obtido?*

Exercício 18 *Usando as propriedades da potenciação, escreva na forma de uma única potência:*

a) $(4^3 \cdot 4^2)^2$*;*

b) $x^3 \cdot y^2 \cdot y^5 \cdot x \cdot x^3$*.*

Exercício 19 *Sendo* $a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 7$ *e* $b = 2^5 \cdot 3^6$*, discorra se a é ou não múltiplo de b.*

Exercício 20 *Nos tempos antigos, não existiam as calculadoras eletrônicas e por isso eram ensinadas várias regras de cálculo mental. Uma delas era a seguinte:*

Seja a um número natural cujo algarismo da unidade é 5*, ou seja,* $a = 10q + 5$*, com q um número natural.*

a) *Mostre que* $a^2 = 100q(q+1) + 25$.

b) *Com isto, ache uma regra para calcular mentalmente o quadrado de* a.

c) *Aplique a sua regra para calcular os quadrados dos números: 15, 45, 105 e 205.*

Exercício 21 *Mostre que:*

i) *Se um número é múltiplo de* 5*, então o seu algarismo das unidades é* 0 *ou* 5.

ii) *Reciprocamente, se o algarismo da unidade de um número é* 0 *ou* 5*, então tal número é múltiplo de* 5.

Exercício 22 *Mostre que:*

i) *Se um número é múltiplo de* 10*, então o seu algarismo das unidades é* 0.

ii) *Reciprocamente, se o algarismo da unidade de um número é* 0*, então tal número é múltiplo de* 10.

Exercício 23 *Mostre que Um número* $n = n_r n_{r-1} \cdots n_1 n_0$ *é múltiplo de 3 se, e somente se, o número* $n_r + \cdots + n_1 + n_0$ *for múltiplo de 3.*

Exercício 24 *Mostre que Um número* $n = n_r n_{r-1} \cdots n_1 n_0$ *é múltiplo de 9 se, e somente se, o número* $n_r + \cdots + n_1 + n_0$ *for múltiplo de 9.*

4 Técnicas de Demonstração

Exercício 25 *Demonstre a Proposição 05, da aula 05: Se* $c < a < b$*, então* $a - c < b - c$.

Exercício 26 *Demonstre a Proposição 06, da aula 05: Sejam dados números naturais* a*,* b *e* c *tais que* a *é múltiplo de* c*. Mostre que*

$$a + b \text{ é múltiplo de } c \text{ se, e somente se, } b \text{ é múltiplo de } c.$$

Exercício 27 *Mostre que em* $\mathbb{Z}$*, continua valendo a propriedade:*

$$\text{Se } a, b, c \in \mathbb{Z}, \text{ com } a + c = b + c, \text{ então } a = b.$$

Exercício 28 *Mostre que em* $\mathbb{Z}$*, continua valendo a propriedade:*

$$\text{Se } a, b \in \mathbb{Z}, \text{ então } (b - a) + a = b \text{ e } (a + b) - b = a.$$

Exercício 29 *Mostre com exemplos que a subtração não é uma operação nem comutativa, nem associativa. Com isso, discorra sobre a vantagem em pensar nela como* $a - b = a + (-b)$.

Exercício 30 *Mostre que se* $a \cdot c = b \cdot c$*, com* $c \neq 0$*, então* $a = b$.

Exercício 31 *Sobre a compatibilidade com a ordem:*

- *Se* $a < b$ *e* $c > 0$*, então* $c \cdot a < b \cdot c$.
- *Porém, se* $c < 0$*, mostre que* $c \cdot a < b \cdot c$ *não é verdade.*

5 Problemas Propostos

Exercício 32 *Como alguém pode pagar uma conta de R\$1327,00 a um comerciante que não dispõe de troco, utilizando 14 notas de R\$100,00, 9 cédulas de R\$10,00 e 9 moedas de R\$1,00?*

Exercício 33 *Na adição a seguir, o símbolo* $\clubsuit$ *representa um mesmo algarismo. Qual é o valor de* $\clubsuit \times \clubsuit + \clubsuit$*?*

$$\begin{array}{r} 4\clubsuit 7 \\ +\ 895 \\ \hline 1\clubsuit\clubsuit 2 \end{array}$$

Exercício 34 *Um fazendeiro mediu sua terra, de formato retangular, para cercá-la inteiramente com uma cerca de madeira. Quantos metros de cerca ele deverá fazer, se sua fazenda possui 1500 metros de largura por 2789 metros de comprimento?*