

Aula 10

Semelhança


Karla Lima

17/03/2023

Sumário



1. Semelhança de Triângulos
2. Casos de Semelhança de Triângulos
3. Relações Métricas no Triângulo Retângulo
4. Formulário Avaliativo

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape, consisting of two triangles meeting at a vertex, is positioned in the upper-left corner. The rest of the slide is a light gray color.

Semelhança de Triângulos

Semelhança



- ▶ De forma grosseira, dizemos que duas figuras são **semelhantes** se uma delas é uma ampliação ou redução da outra, sem mudar sua forma original.

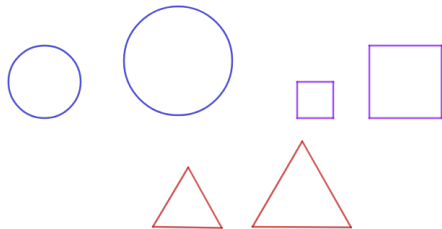


Figura 1: São semelhantes: duas circunferências quaisquer, dois quadrados quaisquer e dois triângulos equiláteros quaisquer.

Semelhança



Definição 1

Dois triângulos são ditos **semelhantes** se for possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam congruentes e lados correspondentes sejam proporcionais.

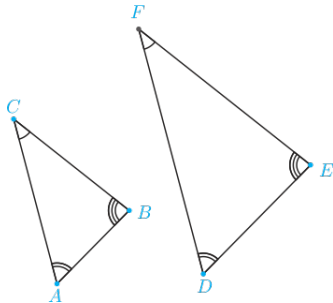
► $\hat{A} = \hat{D}$

► $\hat{B} = \hat{E}$

► $\hat{C} = \hat{F}$

► $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$

Notação: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$



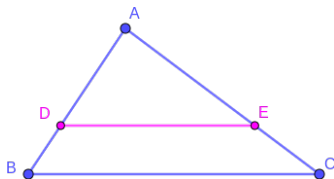
O Teorema Fundamental da Proporcionalidade



Teorema 1

Sejam $\triangle ABC$ um triângulo e $D \in \overline{AB}$, $E \in \overline{AC}$ pontos tais que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. Então,

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$



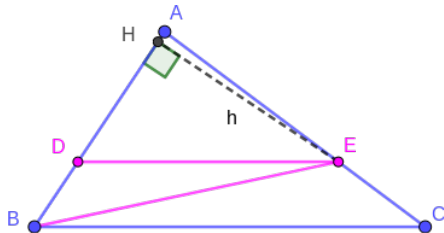
Demonstração: Teorema 1



Demonstração:

- ▶ Considere os triângulos ADE e BDE .
- ▶ A altura \overline{EH} relativa aos lados \overline{AD} e \overline{DB} é a mesma para os dois triângulos.
- ▶ Logo:

$$\frac{\mathcal{A}(\triangle ADE)}{\mathcal{A}(\triangle BDE)} = \frac{AD}{DB}. \quad (1)$$



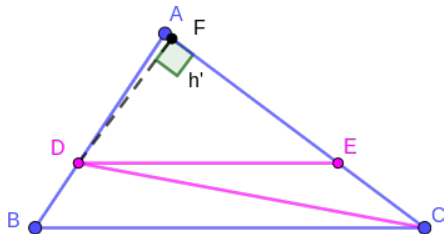
Demonstração: Teorema 1



Analogamente:

- ▶ Considere os triângulos ADE e CDE .
- ▶ A altura \overline{DF} relativa aos lados \overline{AE} e \overline{CE} é a mesma para os dois triângulos.
- ▶ Logo:

$$\frac{\mathcal{A}(\triangle ADE)}{\mathcal{A}(\triangle CDE)} = \frac{AE}{EC}. \quad (2)$$

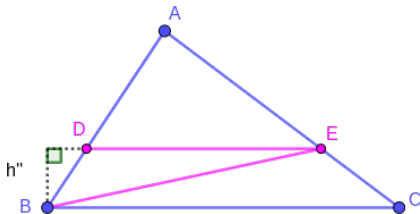


Demonstração: Teorema 1



Vamos mostrar que as áreas dos triângulos BDE e CDE são iguais.

- Para o triângulo BDE , considere o lado \overline{DE} como base e h'' a altura relativa a essa base:



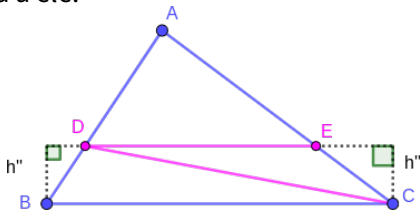
- Sua área é dada por

$$\mathcal{A}(\triangle BDE) = \frac{\overline{DE} * h''}{2}.$$

Demonstração: Teorema 1



- ▶ Analogamente, para o triângulo CDE , consideramos o mesmo lado \overline{DE} como base e tomamos a altura relativa a ele:



- ▶ Como $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, as alturas dos dois triângulos são congruentes, já que também são paralelas (e estão entre segmentos paralelos).
- ▶ Sua área é dada por

$$\mathcal{A}(\triangle CDE) = \frac{\overline{DE} * h''}{2}.$$

Demonstração: Teorema 1



► Portanto,

$$\mathcal{A}(\triangle BDE) = \frac{\overline{DE} * h''}{2} = \mathcal{A}(\triangle CDE). \quad (3)$$

► De (1), (2) e (3), concluímos que

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

Observação



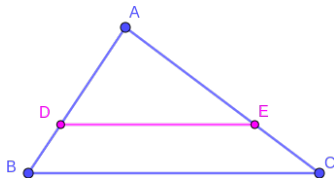
Observação: Como

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE},$$

podemos concluir que

$$1 + \frac{DB}{AD} = 1 + \frac{EC}{AE} \Rightarrow \frac{AD}{AD} + \frac{DB}{AD} = \frac{AE}{AE} + \frac{EC}{AE}.$$

Observação



Assim,

$$\frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE} \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

O Teorema de Tales



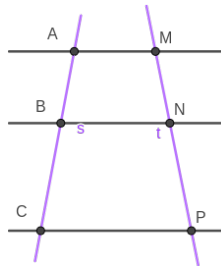
Teorema 2

Quando três ou mais retas paralelas são cortadas por duas transversais, os segmentos das transversais, determinados pelas paralelas, são proporcionais.

Demonstração:

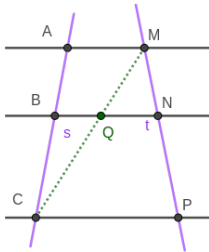
- **Hipótese:** $\overline{AM} \parallel \overline{BN} \parallel \overline{CP}$
 s e t são transversais às paralelas.

- **Tese:** $\frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP}$



Demonstração: Teorema 2

- No $\triangle MAC$, \overline{BQ} é paralelo à \overline{AM} .



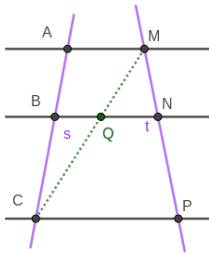
- Pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{MQ}{QC}.$$

(4)

Demonstração: Teorema 2

- No $\triangle MCP$, \overline{NQ} é paralelo à \overline{CP} .



- Novamente, pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade,

$$\frac{MN}{NP} = \frac{MQ}{QC}. \quad (5)$$

Demonstração: Teorema 2



► De (4) e (5), obtemos

$$\frac{MN}{NP} = \frac{MQ}{QC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{MN}{NP} = \frac{AB}{BC},$$

como queríamos demonstrar.

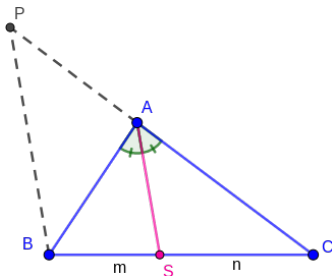
O Teorema da Bissetriz Interna



Exercício 1

Prove o Teorema da Bissetriz Interna: a bissetriz de um ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos dois outros lados.

Dica: Pelo ponto B , trace um segmento \overline{BP} paralelo à bissetriz \overline{AS} , com $P \in \overrightarrow{CA}$. Use o Teorema Fundamental da Proporcionalidade.



The background of the slide is composed of large, overlapping geometric shapes. A teal-colored triangle is in the top-left corner, and a light gray triangle is in the bottom-left corner. The rest of the slide is white.

Casos de Semelhança de Triângulos

1º Caso: AA



Teorema 3

Se dois triângulos têm dois pares de ângulos respectivamente congruentes, então os triângulos são semelhantes.

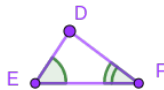
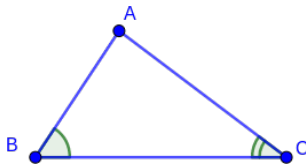
Demonstração:

► **Hipótese:** $\hat{B} = \hat{E}$ e $\hat{C} = \hat{F}$

► **Tese:**

► $\hat{A} = \hat{D}$

► $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$

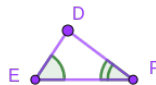
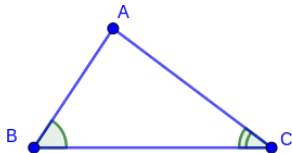


Demonstração: Teorema 3



► Como $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ = \hat{D} + \hat{E} + \hat{F}$, com $\hat{B} = \hat{E}$ e $\hat{C} = \hat{F}$, segue que

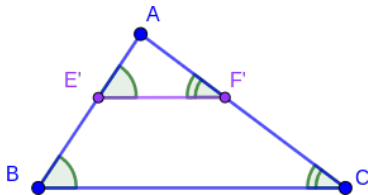
$$\hat{A} = \hat{D}.$$



Demonstração: Teorema 3



- ▶ Seja E' um ponto sobre \overline{AB} tal que $\overline{AE'} = \overline{DE}$.
- ▶ Neste ponto, trace um segmento paralelo ao lado \overline{BC} , que encontra o lado \overline{AC} no ponto F' .

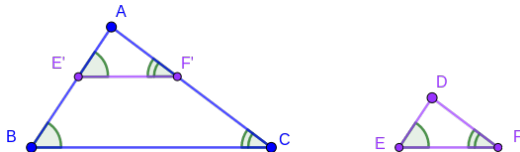


- ▶ Como são correspondentes, temos:

$$\widehat{AE'F'} = \widehat{B} \quad \text{e} \quad \widehat{AF'E'} = \widehat{C}. \quad (6)$$

Demonstração: Teorema 3

- Como $\overline{AE'} = \overline{DE}$, os triângulos $AE'F'$ e DEF são congruentes (LAA ou ALA).



- Assim,

$$\overline{AE'} = \overline{DE} \quad \text{e} \quad \overline{AF'} = \overline{DF}. \quad (7)$$

- Pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, obtemos

$$\frac{\overline{E'B}}{\overline{AE'}} = \frac{\overline{F'C}}{\overline{AF'}} \Rightarrow \frac{\overline{AE'} + \overline{E'B}}{\overline{AE'}} = \frac{\overline{AF'} + \overline{F'C}}{\overline{AF'}} \quad (8)$$

Demonstração: Teorema 3



- ▶ De (7) e (8), concluímos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}.$$

- ▶ Resta-nos mostrar que $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}.$
 - ▶ Repita esse raciocínio, considerando agora um ponto D' sobre \overline{CA} tal que $CD' = FD$.
(Exercício)

2º Caso: LAL



Teorema 4

Se dois triângulos têm um par de ângulos respectivamente congruentes e os lados que os formam proporcionais, então os triângulos são semelhantes.

Demonstração:

► Hipótese:

► $\hat{A} = \hat{D}$

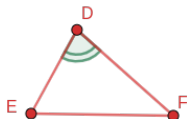
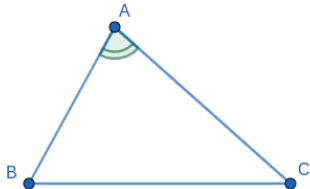
► $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$

► Tese:

► $\hat{B} = \hat{E}$

► $\hat{C} = \hat{F}$

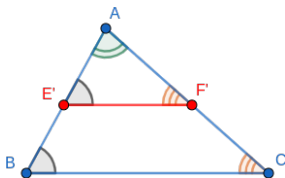
► $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$



Demonstração: Teorema 4



- ▶ Seja E' um ponto sobre \overline{AB} tal que $AE' = DE$.
- ▶ Neste ponto, trace um segmento paralelo ao lado \overline{BC} , que encontra o lado \overline{AC} no ponto F' .



- ▶ Como são correspondentes, temos que

$$\hat{A}E'F' = \hat{B} \quad (9)$$

$$\hat{A}F'E' = \hat{C} \quad (10)$$

- ▶ Assim, os triângulos $AE'F'$ e ABC possuem dois pares de ângulos respectivamente congruentes e, pelo 1º caso (AA), esses triângulos são semelhantes.

Demonstração: Teorema 4



- ▶ Por hipótese, temos que

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \quad (11)$$

e acabamos de mostrar que

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}. \quad (12)$$

- ▶ De (11) e (12), concluímos que

$$\frac{DE}{DF} = \frac{AB}{AC} = \frac{AE'}{AF'} \Rightarrow \frac{DE}{DF} = \frac{AE'}{AF'}.$$

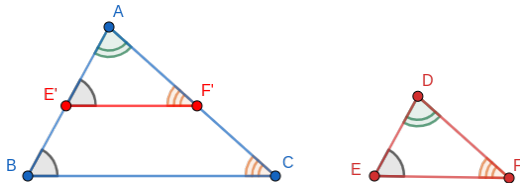
- ▶ Como $DE = AE'$, segue que

$$\frac{DE}{DF} = \frac{AE'}{AF'} \Rightarrow \frac{AE'}{DF} = \frac{AE'}{AF'} \Rightarrow DF = AF'. \quad (13)$$

Demonstração: Teorema 4



- Portanto, os triângulos $AE'F'$ e DEF são congruentes (LAL).



- Usando a congruência acima, mostramos que

$$\hat{A} = \hat{D} \quad (14)$$

$$\hat{B} = \hat{E} \quad (15)$$

$$\hat{C} = \hat{F}. \quad (16)$$

Demonstração: Teorema 4



- Além disso, como $\triangle AE'F' \sim \triangle ABC$ e $\triangle AE'F' \equiv \triangle DEF$, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{AB}{DE} &= \frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'} = \frac{AC}{DF} \\ \frac{AC}{DF} &= \frac{AC}{AF'} = \frac{BC}{E'F'} = \frac{BC}{EF},\end{aligned}$$

de onde segue que

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}. \quad (17)$$

- De (14)–(17), concluímos que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

3º Caso: LLL



Teorema 5

Se os lados correspondentes de dois triângulos são proporcionais, então os triângulos são semelhantes.

Demonstração:

► **Hipótese:**

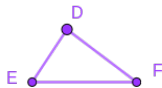
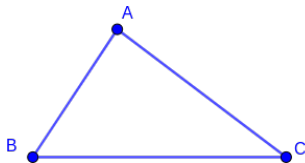
► $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$

► **Tese:**

► $\hat{A} = \hat{D}$

► $\hat{B} = \hat{E}$

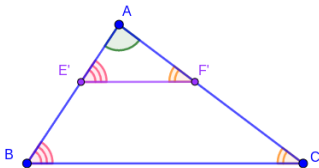
► $\hat{C} = \hat{F}$



Demonstração: Teorema 5



- ▶ Seja E' um ponto sobre \overline{AB} tal que $AE' = DE$.
- ▶ Neste ponto, trace um segmento paralelo ao lado \overline{BC} , que encontra o lado \overline{AC} no ponto F' .



- ▶ Como são correspondentes, temos que

$$\hat{A}E'F' = \hat{B} \quad (18)$$

$$\hat{A}F'E' = \hat{C}. \quad (19)$$

Demonstração: Teorema 5



- ▶ Assim, os triângulos $AE'F'$ e ABC possuem dois pares de ângulos respectivamente congruentes e, pelo 1º caso (AA), esses triângulos são semelhantes.
- ▶ Portanto,

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'} = \frac{BC}{E'F'}. \quad (20)$$

Demonstração: Teorema 5



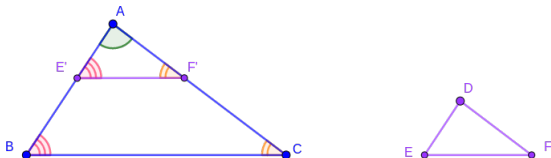
► Como $AE' = DE$, de (20) temos

$$\begin{aligned}\frac{AC}{DF} &= \frac{AB}{DE} = \frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'} \\ \Rightarrow \frac{AC}{DF} &= \frac{AC}{AF'} \\ \Rightarrow DF &= AF'\end{aligned}$$

e


$$\begin{aligned}\frac{BC}{EF} &= \frac{AB}{DE} = \frac{AB}{AE'} = \frac{BC}{E'F'} \\ \Rightarrow \frac{BC}{EF} &= \frac{BC}{E'F'} \\ \Rightarrow EF &= E'F' .\end{aligned}$$

Demonstração: Teorema 5



- ▶ Com isso, $\triangle DEF = \triangle AE'F'$ (LLL).
- ▶ Pela congruência acima, usando os ângulos opostos à lados congruentes, obtemos que
 - ▶ $\hat{A} = \hat{D}$;
 - ▶ $\hat{B} = \hat{AE'F'} = \hat{E}$;
 - ▶ $\hat{C} = \hat{AF'E'} = \hat{F}$;

de onde segue que, junto à hipótese de que $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the upper-left portion, while a light gray shape occupies the lower-left portion. The rest of the slide is white. The title text is centered in the white area.

Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Teorema 1

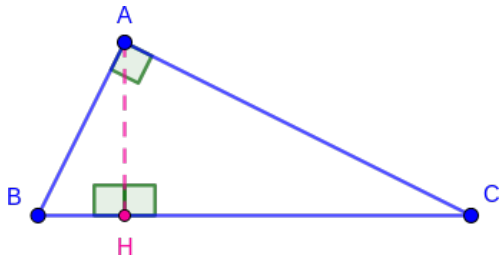


Teorema 6

Em todo triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa divide-o em dois triângulos que são semelhantes entre si e semelhantes também ao triângulo dado.

Tese:

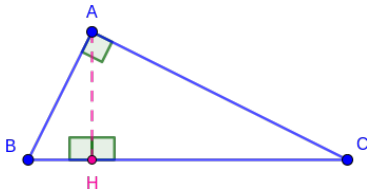
- i) $\triangle ABH \sim \triangle AHC$
- ii) $\triangle ABH \sim \triangle ABC$
- iii) $\triangle AHC \sim \triangle ABC$



Demonstração: Teorema 1



- Considere os triângulos retângulos ABH e ABC .

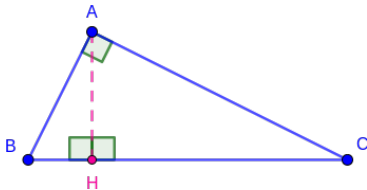


- O ângulo B é comum aos dois triângulos e ambos possuem um ângulo de 90° .
- Logo, $ABH \sim ABC$ (AA).

Demonstração: Teorema 1



- ▶ Analogamente, considere os triângulos retângulos AHC e ABC .

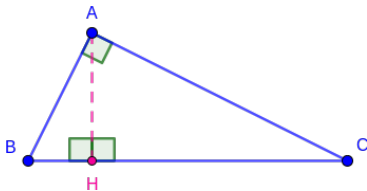


- ▶ O ângulo C é comum aos dois triângulos e ambos possuem um ângulo de 90° .
- ▶ Logo, $AHC \sim ABC$ (AA).

Demonstração: Teorema 1



- Por fim, considere os triângulos retângulos AHC e ABH .



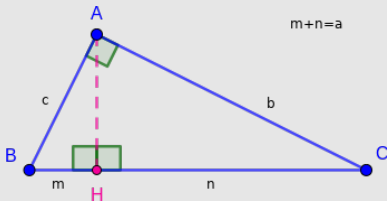
- Como $\hat{BAH} = \hat{C}$ (já que $ABH \sim ABC$), e ambos possuem um ângulo de 90° , $AHC \sim ABH$ (AA).

Exercícios



Exercício 2

Dada um triângulo retângulo



mostre que altura relativa à hipotenusa é a média geométrica entre os segmentos que a mesma determina na hipotenusa

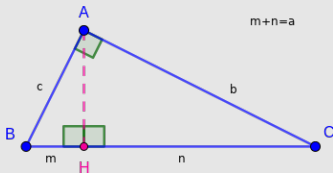
$$h = \sqrt{m * n} \Rightarrow h^2 = m * n \quad (21)$$

Exercícios



Exercício 3

Dada um triângulo retângulo



mostre que cada cateto é a média geométrica entre a hipotenusa e o segmento desta adjacente ao cateto:

$$b^2 = a * n \quad (22)$$

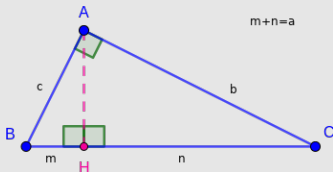
$$c^2 = a * m \quad (23)$$

Exercícios



Exercício 4

Dada um triângulo retângulo



mostre que o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa à mesma:

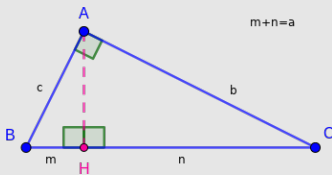
$$b * c = a * h \quad (24)$$

Exercícios



Exercício 5

Dada um triângulo retângulo



mostre que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Teorema de Pitágoras

(25)

Teorema 2

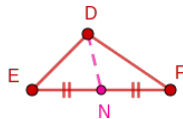
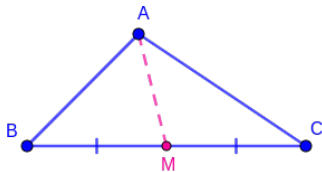


Teorema 7

Se dois triângulos são semelhantes, então duas medianas quaisquer, ou duas alturas correspondentes quaisquer ou ainda duas bissetrizes internas correspondentes quaisquer, estão na mesma razão que os lados correspondentes.

Demonstração: Teorema 2

► Medianas



► Por hipótese:

$$\hat{B} = \hat{E}$$
$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

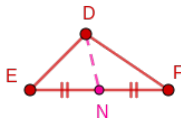
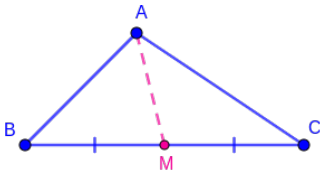
Demonstração: Teorema 2



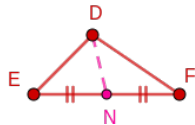
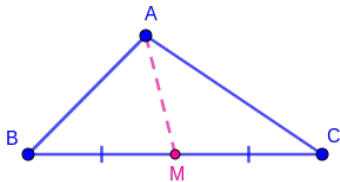
► Logo,

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BC/2}{EF/2} = \frac{BM}{EN}$$
$$\Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BM}{EN}$$

► Assim, os triângulos ABM e DEN possuem ângulos respectivamente congruentes, formados por lados proporcionais, sendo, portanto, semelhantes.



Demonstração: Teorema 2



► Da semelhança dos triângulos ABM e DEN , concluímos que

$$\begin{aligned}\frac{AM}{DN} &= \frac{BM}{EN} \Rightarrow \frac{AM}{DN} = \frac{2BM}{2EN} \\ &\Rightarrow \frac{AM}{DN} = \frac{BC}{EF},\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

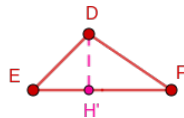
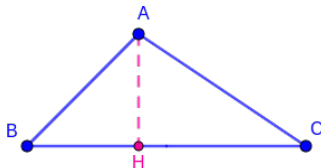
Demonstração: Teorema 2



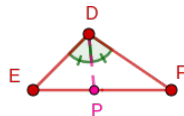
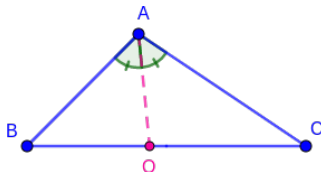
Exercício 6

Termine a demonstração do Teorema 2.

► Alturas



► Bissetrizes



The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the top-left corner, while a light gray shape occupies the bottom-left corner. The rest of the slide is white.

Formulário Avaliativo

Formulário



Responda ao formulário: Aula 10: Semelhança.