UFGD
Universidade Federal
da Grande Dourados

Cálculo II

Lista de Exercícios: P1

Profa. Karla Katerine Barboza de Lima

FACET/UFGD

1 Técnicas de Integração

1.1 Revisão de Integração

Exercício 1 *Calcule as integrais:*

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^{100}dx$

b) $\displaystyle\int_{0}^{1} 1+\frac{1}{2}u^4-\frac{2}{5}u^9du$

c) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{v^5+3v^6}{v^4}dv$

d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{u+1}du$

e) $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)dx$*, onde:*

$$f(x)=\begin{cases} 2 & se \quad -2\leq x\leq 0,\\ 4-x^2 & se \quad 0<x\leq 2\end{cases}$$

f) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{4}{x^3}dx$

Gabarito

1. a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^{100}dx= \frac{2}{101}$

   b) $\displaystyle\int_{0}^{1} 1+\frac{1}{2}u^4-\frac{2}{5}u^9du= \frac{53}{50}$

   c) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{v^5+3v^6}{v^4}dv= \frac{17}{2}$

   d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{u+1}du= e^2-1$

   e) $\dfrac{28}{3}$

   f) Não existe, pois f possui um descontinuidade infinita no intervalo de integração

1.2 O Método de Substituição

Exercício 2 *Calcule a integral fazendo a substituição dada.*

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$, $u = 3 - 5x$.

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(3x)dx$, $u = 3x$.

c) $\displaystyle\int_0^1 x(4+x^2)^{10}dx$, $u = 4 + x^2$.

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3\theta sen\,\theta\, d\theta$, $u = \cos\theta$.

e) $\displaystyle\int_0^1 (x^2-1)^4 x^5 dx$, $u = x^2 - 1$.

Exercício 3 *Avalie a integral definida.*

a) $\displaystyle\int_0^1 \cos(\pi t/2)dt$.

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$.

c) $\displaystyle\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}dx$.

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^z+1}{e^z+z}dz$.

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Gabarito

2. a) $\dfrac{1}{14}$
   b) 0
   c) $\dfrac{5^{11}-4^{11}}{22}$
   d) $\dfrac{1}{4}$
   e) $\dfrac{1}{210}$

3. a) $\dfrac{2}{\pi}$
   b) $e - \sqrt{e}$
   c) 2
   d) $\ln(e+1)$
   e) $2 - 2\ln 2$

1.3 Integração por Partes

Exercício 4 *Calcule a integral usando a integração por partes com as escolhas de u e dv dadas.*

a) $\displaystyle\int x^2 \ln x \, dx, \; u = \ln x \text{ e } dv = x^2 dx.$

b) $\displaystyle\int \theta \cos(\theta) \, d\theta, \; u = \theta \text{ e } dv = \cos\theta \, d\theta.$

Exercício 5 *Calcule a integral.*

a) $\displaystyle\int x e^{-x} \, dx.$

b) $\displaystyle\int p^5 \ln p \, dp.$

c) $\displaystyle\int (\ln x)^2 \, dx.$

d) $\displaystyle\int_0^1 (x^2 + 1) e^{-x} \, dx.$

e) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} \, dx.$

Exercício 6 *Primeiro faça uma substituição e então use integração por partes para calcular a integral.*

a) $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \cos(\sqrt{x}) \, dx.$

b) $\displaystyle\int_0^1 t^3 e^{-t^2} \, dt.$

c) $\displaystyle\int_0^1 x \ln(1 + x) \, dx.$

Gabarito

4. a) $\dfrac{x^3 \ln x}{3} - \dfrac{x^3}{9} + c.$

   b) $\theta \operatorname{sen}\theta + \cos\theta + c.$

5. a) $-xe^{-x} - e^{-x} + c.$

b) $\dfrac{p^6 \ln p}{6} - \dfrac{p^6}{36} + c.$

c) $x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + c.$

d) $3 - \dfrac{6}{e}.$

e) $\dfrac{1 - \ln 2}{2}.$

6. a) $-4.$

b) $\dfrac{-2e^{-1} + 1}{2}.$

c) $\frac{1}{4}.$

1.4 Integração por Frações Parciais

Exercício 7 *Calcule as integrais abaixo.*

a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+1} dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x-9}{x-2}\, dx$

c) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\, dx$

d) $\displaystyle\int_3^4 \frac{x^3-2x^2-4}{x^3+2x^2}\, dx$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+5)^2(x-1)}\, dx$

f) $\displaystyle\int \frac{x^3+4}{x^2+4}\, dx$

g) $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}\, dx$

h) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}\, dx$

Gabarito

7. a) $\frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1| + C$

   b) $x - 7\ln|x-2| + C$

   c) $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

   d) $\frac{7}{6} + \ln\frac{2}{3}$

   e) $-\frac{1}{36}\ln|x+5| + \frac{1}{6}\frac{1}{x+5} + \frac{1}{36}\ln|x-1| + C$

   f) $\frac{1}{2}x^2 - 2\ln(x^2+4) + 2\tan^{-1}(x/2) + C$

   g) $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$

   h) $\ln\left[\frac{(e^x+2)^2}{e^x+1}\right] + C$

1.5 Integrais Impróprias

Exercício 8 *Explique por que cada uma das seguintes integrais é imprópria:*

a) $\displaystyle\int_1^{\infty} x^4 e^{-x^4}\,dx$

b) $\displaystyle\int_1^{\pi/2} \sec x$

Exercício 9 *Determine se cada integral é convergente ou divergente. Calcule aquelas que são convergentes.*

a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{(3x+1)^2}\,dx$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} e^{-2t}\,dt$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$

d) $\displaystyle\int_{2\pi}^{\infty} sen\,\theta\,d\theta$

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{6} re^{r/3}\,dr$

f) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{3}{x^5}\,dx$

g) $\displaystyle\int_{-2}^{14} \frac{1}{\sqrt[4]{x+2}}\,dx$

h) $\displaystyle\int_0^{2} z^2 \ln z\,dz$

Gabarito

8. a) Intervalo é infinito.

   b) A função possui uma descontinuidade no intervalo de integração.

9. a) Converge: $\dfrac{1}{12}$

b) Diverge

c) Converge: 0

d) Diverge

e) Converge: $9e^2$

f) Diverge

g) Converge: $\dfrac{32}{3}$

h) Converge: $\dfrac{8}{3}\ln 2 - \dfrac{8}{9}$

2 EDO's de $1^{\underline{a}}$ ordem

2.1 Definição e Motivação

Exercício 10 *Verifique se as funções indicadas são soluções particulares das equações diferenciais dadas.*

a) $xy' = 2y$; $y = 0$ *e* $y = 2x$.

b) $y'' + 9y = 18$; $y = 2$ *e* $y = 2x^2$.

c) $xy'' - y' = 0$; $y = 2x^2$ *e* $y = 2x$.

d) $x^2y'' + xy' + y = 0$; $y = sen\,(\ln x)$.

Exercício 11 *Confirme que* $y = 3e^{x^3}$ *é uma solução do problema de valor inicial* $y' = 3x^2y$, *com* $y(0) = 3$.

Exercício 12 *Uma população é modelada pela equação diferencial*

$$\frac{dP}{dt} = 1,2\,P\left(1 - \frac{P}{4200}\right).$$

Usando uma ferramenta de calcular gráficos (Geogebra, Wolframalpha, etc...), analise o gráfico da derivada acima e responda:

a) Para quais valores de P *a população está aumentando?*

b) Para quais valores de P *a população está diminuindo?*

c) Quais são as soluções de equilíbrio?

Gabarito

10. a) $y = 0$ é solução.
    b) $y = 2$ é solução.
    c) $y = 2x^2$ é solução.
    d) $y = \text{sen}\,(\ln x)$ é solução.

12. (a) $0 < P < 4200$
    (b) $P > 4200$
    (c) $P = 0,\ P = 4200$

Referências

[1] STEWART J., *Cálculo*, Volume I, Editora Thomson.

[2] STEWART J., *Cálculo*, Volume II, Editora Thomson.

[3] Anton H., *Cálculo*, Volume I, Editora Bookman.

[4] Anton H., *Cálculo*, Volume II, Editora Bookman.