1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
Total	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Profª. Karla Lima
Cálculo II

Avaliação P1 — 29 de novembro de 2023

Aluno(a): ....

Obs: Respostas sem justificativa não serão consideradas.

(1) Resolva as integrais abaixo.

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{\cos t}\operatorname{sen}(2t)\,dt$

(b) $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{t^3-t}{t^4-1}\,dt$

(2) Sobre primitivas, responda:

(a) Uma colmeia com uma população inicial de 100 abelhas cresce a uma taxa de $n'(t)$ por semana. O que representa $100+\displaystyle\int_0^{15} n'(t)dt$?

(b) Se $f(x)$ for a inclinação de uma trilha a uma distância de x quilômetros do começo dela, o que $\displaystyle\int_3^5 f(x)$ representa? Faça um desenho para ajudar na sua solução.

(3) (a) Escreva a integral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ como uma soma de Riemann e explique o significado da notação que você usar.

(b) Qual a interpretação geométrica de uma soma de Riemann, se $f(x)\geq 0$? Ilustre a sua resposta.

(c) Qual a interpretação geométrica de uma soma de Riemann, se $f(x)$ possuir valores positivos e negativos? Ilustre a sua resposta.

(4) Suponha que uma partícula mova-se para frente e para trás ao longo de uma linha reta com velocidade $v(t)$, medida em metros por segundo, com aceleração $a(t)$.

(a) Qual o significado de $\displaystyle\int_{60}^{120} v(t)dt$?

(b) Qual o significado de $\displaystyle\int_{60}^{120} |v(t)|dt$?

(c) Qual o significado de $\displaystyle\int_{60}^{120} a(t)dt$?

(5) Um aluno, ao calcular a integral $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x^2}\,dx$, resolveu da seguinte forma:

'Fazendo a mudança de variável $u = 1 + x^2$, os novos limites de integração seriam iguais ($x = -1 \to u = 2$ e $x = 1 \to u = 2$). Portanto, após a mudança de variável, a integral obtida seria igual a zero.'

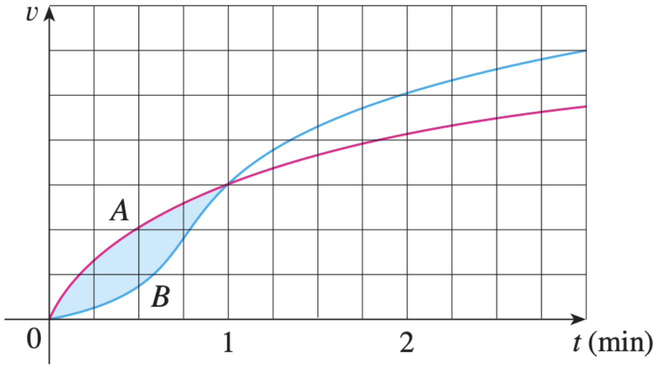
Discorra sobre a solução dada.

(6) Considere V o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região delimitada por $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$. Encontre V pelo método do fatiamento e por cascas cilíndricas. Em ambos os casos, desenhe um diagrama para explicar seu método.

(7) Se $f(0) = g(0) = 0$ e f'' e g'' forem contínuas, mostre que

$$\int_0^a f(x)g''(x)\,dx = f(a)g'(a) - f'(a)g(a) + \int_0^a f''(x)g(x)\,dx.$$

(8) Dois carros, A e B, largam lado a lado e aceleram a partir do repouso. A figura mostra os gráficos de suas funções velocidade.



a) Qual carro estará na frente após 1 minuto? Explique.
b) Qual o significado da área da região sombreada?
c) Qual carro estará na frente após 2 minutos? Explique.
d) Estime quando os carros estarão novamente lado a lado.

Gabarito P1 29/11/23

01 a) $\int_0^{\pi} e^{\cos t} \operatorname{sen}(2t)\, dt$ e^t, $\cos t$, $\operatorname{sen} t$ e $2t$ funções contínuas em $\mathbb{R}$ e, portanto, seus produtos e composições também são.

Temos que $\operatorname{sen}(2t) = 2 \operatorname{sen} t \cos t$. Assim, a integral fica:

$$\int_0^{\pi} e^{\cos t} \operatorname{sen}(2t)\, dt = \int_0^{\pi} e^{\cos t} (2 \operatorname{sen} t \cos t)\, dt.$$

Fazendo a substituição $u = \cos t$, obtemos:

$$du = -\operatorname{sen} t\, dt \Rightarrow -du = \operatorname{sen} t\, dt$$

$$u(0) = \cos 0 = 1 \quad \text{e} \quad u(\pi) = \cos \pi = -1.$$

Portanto,

$$\int_0^{\pi} e^{\cos t} \operatorname{sen}(2t)\, dt = -2 \int_0^{\pi} e^{\cos t} \cos t \operatorname{sen} t\, dt$$

$$= -2 \int_1^{-1} e^{u} u\, (-du)$$

$$= -2 \int_{-1}^{1} u e^{u}\, du.$$

Façamos agora uma integração por partes, com $v = u$ e $dw = e^u$.

Assim,

$$dv = du \quad \text{e} \quad w = e^u.$$

Logo,

$$\int_0^{\pi} e^{\cos t}\, sen(2t)\, dt = -2\left(u e^{u} \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^{u}\, du \right)$$

$$= -2\left(e - (-e^{-1}) - e^{u}\Big|_{-1}^{1} \right)$$

$$= -2\left(\cancel{e} + e^{-1} - [\cancel{e} - e^{-1}] \right)$$

$$= -2 \cdot 2e^{-1} = -\frac{4}{e}.$$

b) $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{t^3 - t}{t^4 - 1}\, dt$

Para $t \neq \pm 1$ $(t^4 - 1 \neq 0$ e $t^2 - 1 \neq 0)$, podemos escrever:

$$\frac{t^3 - t}{t^4 - 1} = t \cdot \frac{t^2 - 1}{t^4 - 1} = t \cdot \frac{\cancel{t^2 - 1}}{(\cancel{t^2 - 1})(t^2 + 1)} = \frac{t}{t^2 + 1}.$$

Como $\pm 1 \notin [0, 1/\sqrt{3}]$, $\dfrac{t^3 - t}{t^4 - 1}$ é contínua em tal intervalo

e

$$\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{t^3 - t}{t^4 - 1}\, dt = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{t}{t^2 + 1}\, dt = \int_1^{4/3} \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{2}, \text{ onde}$$

$$u = t^2 + 1 \Rightarrow du = 2t\, dt \Rightarrow t\, dt = \frac{du}{2}$$

$$u(0) = 1 \quad \text{e} \quad u(1/\sqrt{3}) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{1}{4}.$$

Portanto,

$$\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{t^3 - t}{t^4 - 1}\, dt = \frac{1}{2}\int_1^{4/3} \frac{1}{u}\, du = \frac{1}{2} \ln|u| \Big|_1^{4/3}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{4}{3} - \ln 1\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}.$$

02 a) $n'(t)$ - taxa de crescimento de uma população de abelhas na semana t.

População inicial : 100 abelhas

$$100 + \int_0^{15} n'(t)\, dt$$

Supondo que a taxa de crescimento $n'(t)$ é contínua, podemos usar o Teorema Fundamental do Cálculo:

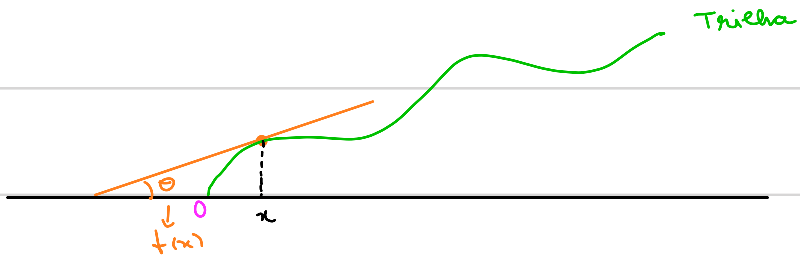
$$\int_0^{15} n'(t)\, dt = n(15) - n(0) = n(15) - 100.$$

Portanto,

$$100 + \int_0^{15} n'(t)\, dt = 100 + n(15) - 100 = n(15)$$

e representa a população de abelhas após 15 semanas.

b) $f(x)$ - inclinação de uma trilha



A inclinação da reta tangente ao ponto da trilha é dada pela derivada da função contínua que descreve a que altura estamos na trilha, digamos $g(x)$. Logo,

$$g'(x) = f(x)$$

e, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_3^5 f(x)\,dx = \int_3^5 g'(x)\,dx = g(5) - g(3)$$

é a variação total de altura entre os quilômetros 3 e 5.

03 a) $\int_a^b f(x)\,dx$ como soma de Riemann

Seja $P = \{x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$ uma partição do intervalo $[a,b]$, formando subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, \dots, n-1)$ de comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Escreve-se

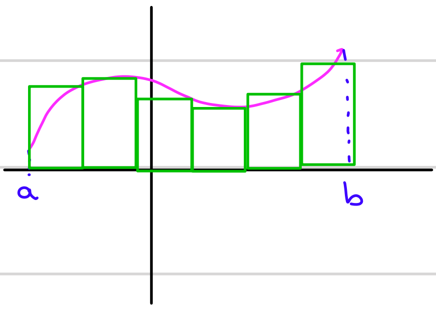
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x,$$

onde x_i^* são pontos amostrais dos subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$.

Σ indica o somatório das parcelas $f(x_i^*)\,\Delta x$, fazendo i variar até a quantidade n de subintervalos de $[a,b]$. Já $f(x_i^*)$ representa a imagem de f no ponto amostral.

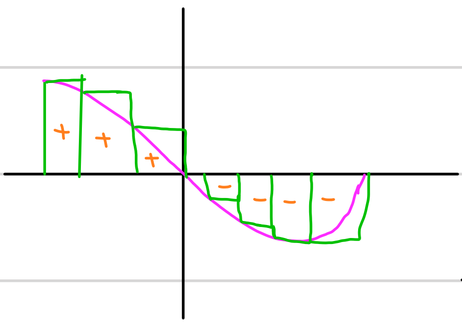
O limite indica que tomamos uma quantidade cada vez maior de subintervalos, fazendo com que Δx tenda a zero.

b) Interpretação Geométrica: $f(x) \geq 0$



A soma de Riemann pode ser interpretada como uma soma de áreas de retângulos "aproximantes", como na figura acima. Quão menor é o comprimento da base, mais próxima a soma das áreas está da área abaixo do gráfico da função dada (quando a mesma é integrável). A base dos retângulos são representadas pelo Δx e cada altura é representada pela imagem $f(x_i^*)$. Ou seja, a área do retângulo A_i é dada pelo produto $\overbrace{\Delta x}^{\text{base}} \cdot \underbrace{f(x_i^*)}_{\text{altura}}$.

c) Interpretação Geométrica: $f(x) \geq 0$ e $f(x) < 0$



No caso em que f assume valores negativos, a soma de Riemann é a soma das áreas dos retângulos que estão acima do eixo x e do oposto das áreas dos retângulos que estão abaixo do eixo x.

04 $v(t)$ - velocidade em m/s

$a(t)$ - aceleração em m/s^2

Supondo que sejam contínuas

a) $\displaystyle\int_{60}^{120} v(t)\,dt = ?$

A velocidade é a taxa de variação da função que descreve a posição da partícula. Pelo T.F.C, como $s'(t) = v(t)$ (contínuas),

$$\int_{60}^{120} v(t)\,dt = \int_{60}^{120} s'(t)\,dt = s(120) - s(60)$$

e representa o deslocamento da partícula durante o intervalo entre 60 s e 120 s.

b) $\displaystyle\int_{60}^{120} |v(t)|\,dt = ?$

No caso em que não fazemos distinção entre mover-se para frente ou para trás, toma-se $|v(t)|$. Ou seja, só contabilizamos a distância percorrida no intervalo dado.

c) $\int_{60}^{120} a(t)\, dt = ?$

Como a aceleração é a taxa de variação da velocidade. Assim, tomando $a(t)$ contínua, temos:

$$\int_{60}^{120} a(t)\, dt = \int_{60}^{120} v'(t)\, dt = v(120) - v(60)$$

que representa a mudança de velocidade do instante 60 s até 120 s.

05 $\int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\, dx = 0$, $u = 1+x^2$ $\left(u(-1) = 2 \text{ e } u(1) = 2\right)$.

Podemos observar que a solução dada pelo aluno está incorreta, pois

$$1+x^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e, pela continuidade de $\sqrt{1+x^2}$ em $\mathbb{R}$, tem-se

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\, dx > \int_{-1}^{1} 0\, dx \Rightarrow \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\, dx > 0$$

e, portanto, $\int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\, dx \neq 0$.

Mas o que está errado na solução?

Fazendo a mudança de variável, obtemos:

$$u = 1+x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}\,du, \text{ desde que } x \neq 0.$$

Devemos escrever x em função de u, para completar a mudança:

$$u = 1+x^2 \Rightarrow x^2 = 1-u \Rightarrow x = \sqrt{1-u}, \ x \geq 0$$

ou

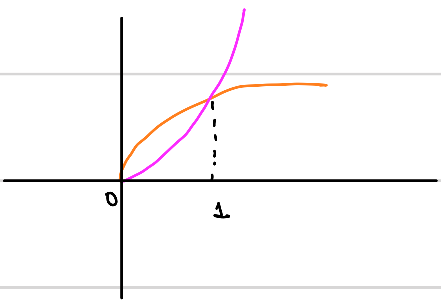
$$x = -\sqrt{1-u}, \ x<0.$$

Assim,

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\,dx = -\int_{-1}^{0} \underbrace{\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{1-u}}\,du + \int_{0}^{1} \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{1-u}}}_{\substack{\text{descontínuas} \\ \text{em } u=1\ (x=0)}}\,du \neq \int_{2}^{2} \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{1-u}}\,du.$$

Ou seja, os limites são iguais após a mudança de variável, mas não estamos integrando a mesma função de 2 à 2.

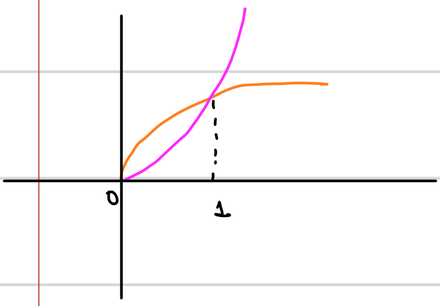
06 $y = \sqrt{x}$ ($\Rightarrow x \geq 0$) e $y = x^2$



$$\sqrt{x} = x^2 \overset{x\geq 0}{\Rightarrow} x = x^4 \Rightarrow x^4 - x = 0$$

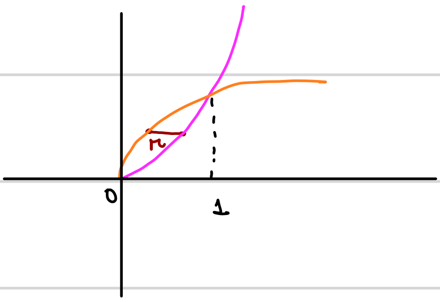
$$\Rightarrow x(x^3-1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$



As curvas se interceptam nos pontos $(0,0)$ e $(1,1)$.

i) Fatiamento



A seção transversal tem formato de anel, com raio externo $y = x^2$ $\to x = \sqrt{y}$ e raio interno $y = \sqrt{x}$ $\to x = y^2$.

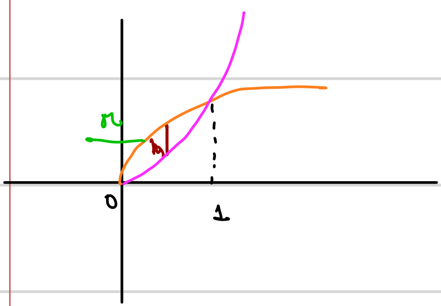
Assim, a área da seção transversal é dada por

$$A(y) = \pi r_{ext}^2 - \pi r_{int}^2 = \pi\left(y - y^4\right)$$

$$V = \int_{\underset{\hookrightarrow y(0)}{0}}^{\overset{\to y(1)}{1}} A(y)\,dy = \int_0^1 \pi\left(y - y^4\right)dy$$

$$= \pi\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{5}\Big|_0^1\right) = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3\pi}{10}$$

ii) Cascas Cilíndricas



O raio da casca é x, circunferência de comprimento $2\pi x$ e altura $\sqrt{x} - x^2$.

Assim,

$$V = \int_0^1 (2\pi x)(\sqrt{x} - x^2)\, dx = 2\pi \int_0^1 x^{3/2} - x^3\, dx$$

$$= 2\pi \left(\frac{x^{5/2}}{5/2} - \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 \right) = 2\pi \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4} \right)$$

$$= 2\pi \cdot \frac{3}{20} = \frac{3\pi}{10}.$$

07 $f(0) = g(0) = 0$ e f'' e g'' contínuas (logo, f', g', f e g também são contínuas)

Para calcular $\int_0^a f(x)\, g''(x)\, dx$, usaremos integração por partes, com

$$u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)\, dx$$

$$dv = g''(x)\, dx \Rightarrow v = g'(x).$$

Logo,

$$\int_0^a f(x)\, g''(x)\, dx = f(x) \cdot g'(x) \Big|_0^a - \int_0^a g'(x)\, f'(x)\, dx \quad (\mathrm{I})$$

Aplicando novamente a integração por partes, agora em $\int_0^a g'(x)\, f'(x)\, dx$, com

$$u = f'(x) \Rightarrow du = f''(x)\, dx$$

$$dv = g'(x)\, dx \Rightarrow v = g(x),$$

obtemos

$$\int_0^a g'(x)\, f'(x)\, dx = f'(x) \cdot g(x) \Big|_0^a - \int_0^a g(x)\, f''(x)\, dx \quad (\mathrm{II})$$

Portanto, de (I) e (II), concluímos:

$$\int_0^a f(x)\, g''(x)\, dx = f(a)\, g'(a) - \cancel{f(0)\, g'(0)}^{0} - \left[f'(a)\, g(a) - \cancel{f'(0)\, g(0)}^{0} - \int_0^a f''(x)\, g(x)\, dx \right]$$

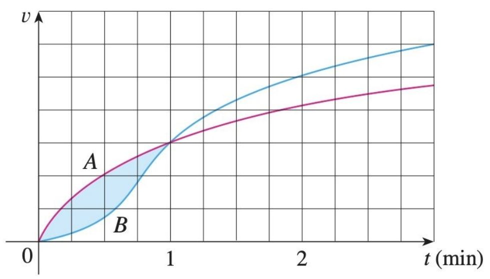
$$= f(a)\, g'(a) - f'(a)\, g(a) + \int_0^a f''(x)\, g(x)\, dx,$$

como queríamos demonstrar.

08 Gráficos: velocidade ⇝ integral: posição dos carros

a) Temos que $S_A(0) = S_B(0) = 0$ e

$$S_A(1) = \int_0^1 v_A(t)\, dt \quad \text{e} \quad S_B(1) = \int_0^1 v_B(t)\, dt.$$



Como $v_A(t) > v_B(t)$, $\forall t \in [0,1]$,

temos que

$$\int_0^1 v_A(t)\, dt > \int_0^1 v_B(t)\, dt$$

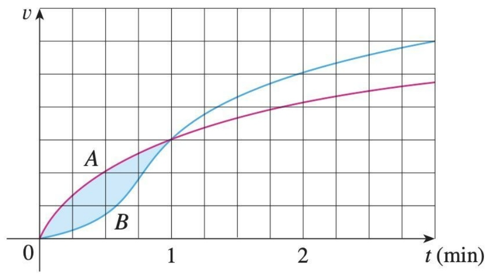
e, portanto, $S_A(1) > S_B(1)$ e o carro A estará na frente.

b) A área sombreada é dada por

$$\int_0^1 v_A(t) - v_B(t)\, dt = S_A(1) - S_B(1),$$

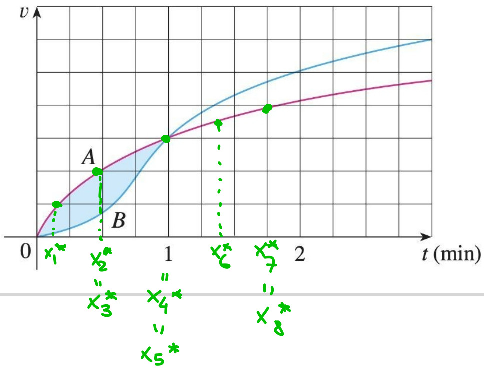
que representa a distância entre os carros A e B, após 1 minuto.

c)



Temos que as distâncias percorridas pelos dois carros após 2 minutos são dadas por

$$S_A(2) = \int_0^2 v_A(t)\, dt \quad e \quad S_B(2) = \int_0^2 v_B(t)\, dt.$$



$$v_A(x_1^*) = \frac{1}{4}$$

$$v_A(x_2^*) = \frac{2}{4} = v_A(x_3^*)$$

$$v_A(x_4^*) = \frac{3}{4} = v_A(x_5^*)$$

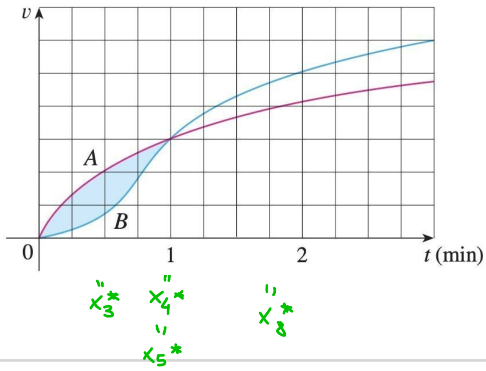
$$v_A(x_6^*) = \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$v_A(x_7^*) = 1 = v_A(x_8^*)$$

Logo,

$$S_A(2) \approx \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8} + 1 + 1\right)$$

$$\approx \frac{1}{4}\left(\frac{11}{4} + \frac{7}{8} + 2\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{22+7+16}{8} = \frac{45}{32} \text{ u.m.}$$



$$v_B(x_1^*) \approx \frac{1}{8}$$

$$v_B(x_2^*) \approx \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{2}{12} = v_B(x_3^*)$$

$$v_B(x_4^*) = \frac{3}{4} = v_B(x_5^*)$$

$$v_B(x_6^*) \approx 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{13}{12}$$

$$v_B(x_7^*) \approx 1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{14}{12} \approx v_B(x_8^*)$$

Assim,

$$S_B(2) \approx \frac{1}{4}\left(\frac{1}{8} + \frac{2}{12} + \frac{2}{12} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{13}{12} + \frac{14}{12} + \frac{14}{12}\right)$$

$$S_B(2) \approx \frac{1}{4}\left(\frac{1}{8} + \frac{6}{4} + \frac{45}{12}\right)$$

$$\approx \frac{1}{4}\cdot\frac{3 + 36 + 90}{24} = \frac{129}{96} \text{ u.m.}$$

Portanto,

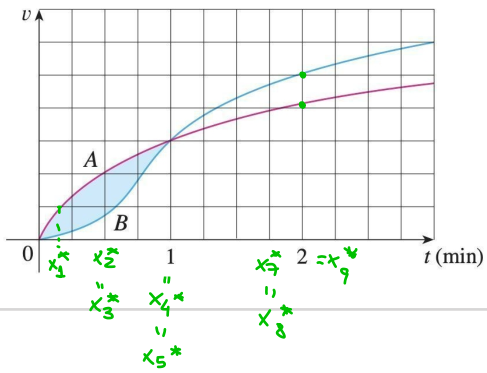
$$S_A(2) - S_B(2) \approx \frac{45}{32} - \frac{129}{96} \approx 0{,}06 \text{ u.m.}$$

e $S_A(2) > S_B(2)$.

O carro A continua na frente.

a) Pelo item acima, vimos que a diferença entre as distâncias percorridas pelos carros A e B está bem próxima de zero.

Se acrescentarmos um retângulo aproximante, teremos



$$S_A(2{,}25) \approx \frac{45}{32} + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{53}{32} \text{ u.m.}$$

$$S_B(2{,}25) \approx \frac{129}{96} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{4} = \frac{129}{96} + \frac{30}{96}$$

$$\approx \frac{159}{96}$$

Assim,

$$S_A(2{,}25) - S_B(2{,}25) \approx \frac{53}{32} - \frac{159^{\div 3}}{96_{\div 3}} = \frac{53}{32} - \frac{53}{32} = 0.$$

Portanto, os carros estarão lado a lado próximo dos 2,25 segundos.