CÁLCULO II

Aula 08

Quadriláteros

Karla Lima

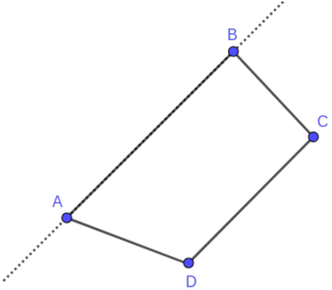
Sumário

Definição e Nomenclaturas

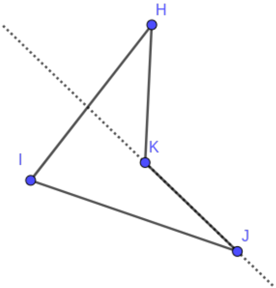
Definição

Definição 1

*Denominamos de **quadrilátero** ao polígono de quatro lados.*



Quadrilátero Convexo



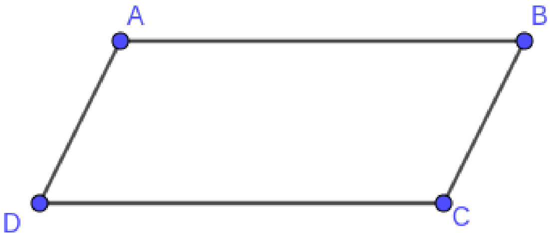
Quadrilátero Não Convexo

Tipos de Quadriláteros

Estudaremos apenas os quadriláteros convexos.

Definição 2

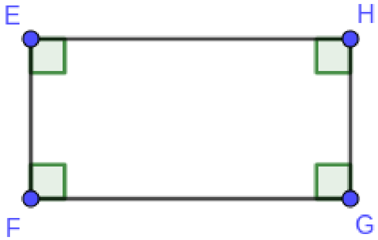
*O quadrilátero cujos lados opostos (que não possuem vértices em comum) são paralelos é denominado **paralelogramo**.*



Tipos de Quadriláteros

Definição 3

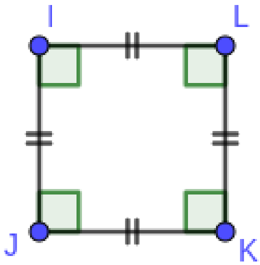
Um paralelogramo cujos ângulos são retos é denominado ***retângulo****.*



Tipos de Quadriláteros

Definição 4

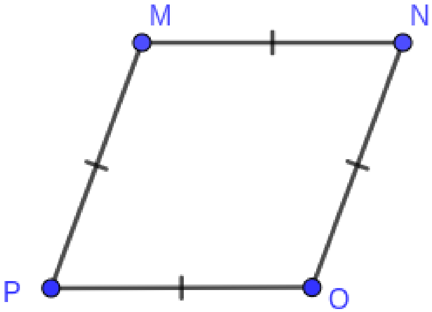
Um retângulo cujos lados são congruentes é dito um ***quadrado****.*



Tipos de Quadriláteros

Definição 5

Um paralelogramo cujos lados são congruentes é denominado ***losango****.*



Propriedades dos Paralelogramos

Teorema

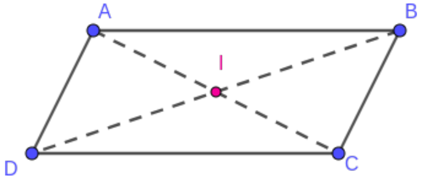
Teorema 1

Em todo paralelogramo:

a) *os lados opostos são congruentes;*
b) *os ângulos opostos são congruentes;*
c) *as diagonais se bissecam.*

Demonstração: Teorema 1

a) Qual teorema de paralelas garante a veracidade deste item?
b) Qual teorema de paralelas e secantes garante a veracidade deste item?
c) De fato, na figura abaixo



pode-se demonstrar que $\triangle BIC = \triangle AID$ (mostre!).

- Com isso, teremos $BI = ID$ e $CI = IA$ (Por quê?)

Teorema

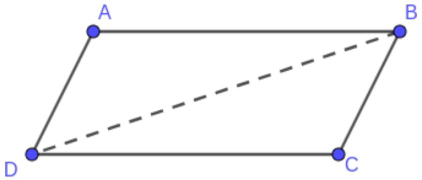
Teorema 2

Reciprocamente, um quadrilátero convexo:

a) *cujos lados opostos são congruentes é um paralelogramo;*
b) *cujos ângulos opostos são congruentes é um paralelogramo;*
c) *cujas diagonais se bissecam é um paralelogramo.*

Demonstração: Teorema 2

a) Trace uma das diagonais do quadrilátero, dividindo-o em dois triângulos: $\triangle ABD$ e $\triangle BCD$. Mostre que eles são congruentes.



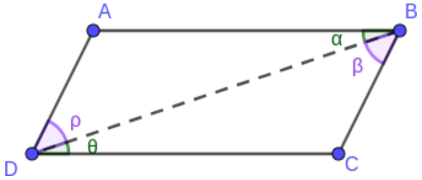
- Conclua que $C\hat{B}D = B\hat{D}A$ e mostre que os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ são paralelos.

Demonstração: Teorema 2

- Do mesmo modo, conclua que $A\hat{B}D = B\hat{D}C$ e mostre que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ são paralelos.

Demonstração: Teorema 2

b) Trace uma das diagonais do quadrilátero.



- Por hipótese, $\hat{A} = \hat{C}$ e $A\hat{B}D = A\hat{D}C$.
- Na figura acima, temos que $\alpha + \beta = \rho + \theta$ (por hipótese).
- Além disso, pela Lei Angular de Tales:

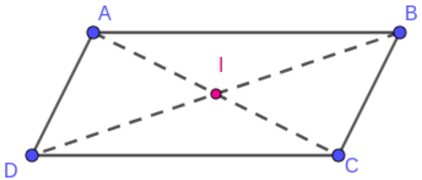
$$\beta + \theta = \alpha + \rho \quad (\textit{confira}!)$$

Demonstração: Teorema 2

- Some estas equações, membro a membro, e conclua que $\alpha = \theta$.
- Mostre que, por isso, os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ são paralelos.
- Analogamente, conclua que $\beta = \rho$ e, com isso, mostre que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ são paralelos.
- Portanto, *ABDC* é um paralelogramo.

Demonstração: Teorema 2

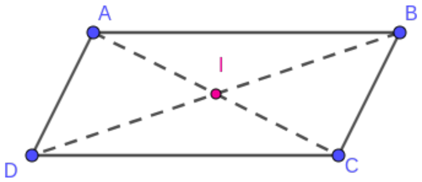
c) Trace as diagonais do quadrilátero.



- Qual caso de congruência garante que $\triangle BIC = \triangle AID$?
- Dessa congruência, como podemos relacionar os ângulos $C\hat{B}D$ e $B\hat{D}A$?
- Conclua que $\overline{BC} = \overline{AD}$.

Demonstração: Teorema 2

- Analogamente, conclua a congruência dos triângulos AIB e DIC.



- Dessa congruência, relacione os ângulos $A\hat{B}D$ e $B\hat{D}C$.
- Conclua que $\overline{AB} = \overline{DC}$.

Do exposto acima, conclui-se que $ABCD$ é um paralelogramo.

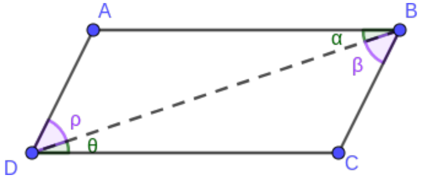
Teorema

Teorema 3

O quadrilátero que em dois lados paralelos e congruentes é um paralelogramo.

Demonstração: Teorema 3

- Trace uma das diagonais do quadrilátero.



- Temos $C\hat{B}D = B\hat{D}A$ (justifique!) e, assim,

$$\triangle CBD = \triangle BDA \quad \text{(qual congruência?).}$$

- Dessa forma, $AB = DC$ (por quê?).
- Pelo item a), do Teorema 2, segue-se que $ABCD$ é um paralelogramo.

Propriedades do Retângulo

Teorema

Teorema 4

As diagonais de um retângulo são congruentes.

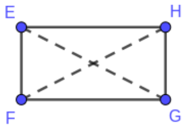


Figura 1: Se $EFGH$ é um retângulo, então $EG = HF$.

Demonstração: Exercício.

Teorema

Teorema 5

Reciprocamente, o paralelogramo que tem as diagonais congruentes é um retângulo.

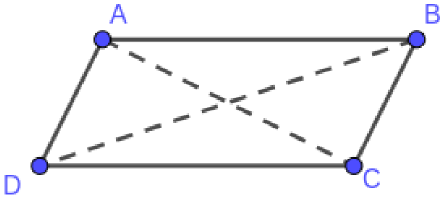
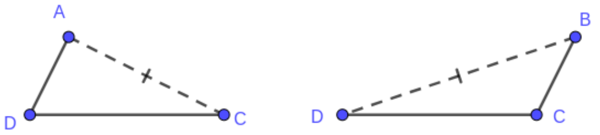


Figura 2: Se $AC = BD$, então $ABCD$ tem que ser um retângulo.

Demonstração: Teorema 5

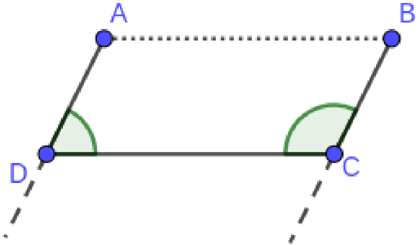
- Trace as diagonais do paralelogramo, obtendo os triângulos abaixo:



- Qual caso de congruência garante que $\triangle ADC = \triangle BCD$?
- Conclua que $A\hat{C}D = B\hat{D}C$.

Demonstração: Teorema 5

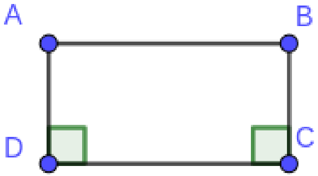
- Considere as paralelas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ cortadas pela transversal $\overleftrightarrow{DC}$.



- Os ângulos $A\hat{C}D$ e $B\hat{D}C$ são colaterais internos. Qual relação entre os dois podemos tirar dessa informação?
- Use a informação acima, junto ao fato de que $A\hat{C}D = B\hat{D}C$ para concluir que $A\hat{C}D = B\hat{D}C = 90°$.

Demonstração: Teorema 5

- Então, as paralelas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ cortadas por uma transversal $\overleftrightarrow{DC}$ perpendicular às duas.



- Como $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $\overline{AB}$ também é perpendicular às paralelas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, sendo $ABCD$ um retângulo.

Corolários

Corolário 1

Num triângulo retângulo, a mediana traçada do vértice do ângulo reto vale a metade da hipotenusa.

Demonstração: Exercício.

Corolário 2

Num triângulo retângulo, o cateto oposto ao um ângulo de 30° *vale a metade da hipotenusa.*

Demonstração: Exercício.

Propriedades do Losango

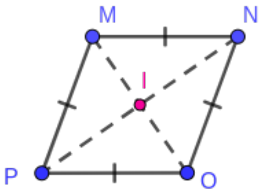
Teorema

Teorema 6

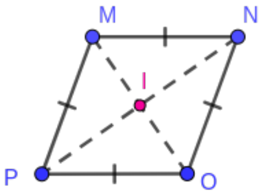
Em todo losango:

a) *as diagonais são perpendiculares;*

b) *as diagonais são bissetrizes dos ângulos do quadrilátero.*



Demonstração: Teorema 6

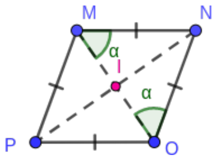


- Na figura acima, $\triangle MIN = \triangle OIN$ (por quê?)
- Com isso, conclua que $M\hat{I}N = N\hat{I}O$.
- Qual a relação entre esses dois ângulos? Como podemos checar que $M\hat{I}N = N\hat{I}O = 90°$?
- Conclua a prova do item a).

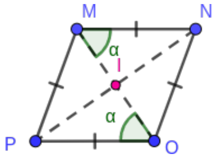
Demonstração: Teorema 6

Para o item b), observe que:

- $N\hat{M}I = I\hat{O}N$ (ângulos opostos a lados congruentes)

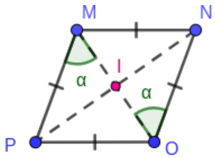


- $I\hat{O}P = N\hat{M}I$ (alternos internos)

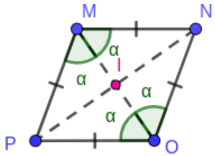


Demonstração: Teorema 6

- $P\hat{M}I = I\hat{O}N$ (por quê?)

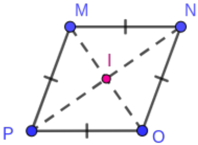


- Com isso, $\overline{MN}$ é bissetriz dos ângulos $\hat{M}$ e $\hat{O}$.



Demonstração: Teorema 6

- Para concluir a demonstração do item b), mostre que $\overline{NP}$ é bissetriz dos ângulos $\hat{P}$ e $\hat{N}$.



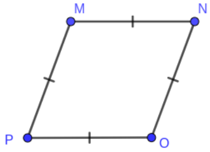
Teorema

Teorema 7

Reciprocamente, se as diagonais de um quadrilátero se bissecam e são perpendiculares, então o quadrilátero é um losango.

Demonstração: Teorema 7

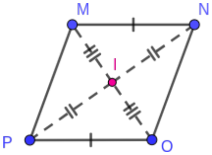
- Pelo Teorema 2, se as diagonais de um quadrilátero se bissecam, então ele é um paralelogramo.
- Logo, $MN = PO$ e $MP = NO$ (por quê?).



- Para concluir a demonstração, precisamos mostrar que os quatro lados são iguais.

Demonstração: Teorema 7

- Verifique que $\triangle PMI = \triangle MIN$



- Conclua que $MP = MN$ e, portanto, $MN = PO = MP = NO$, c.q.d.

Teorema

Teorema 8

As três medianas de um triângulo concorrem no mesmo ponto, situado a dois terços de cada uma delas a partir do vértice.

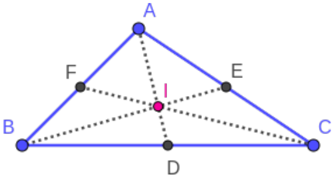
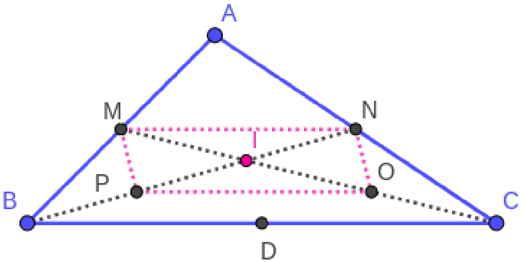


Figura 3: $AI = BI = CI = \frac{2}{3}AD = \frac{2}{3}BE = \frac{2}{3}CF$

Demonstração: Teorema8

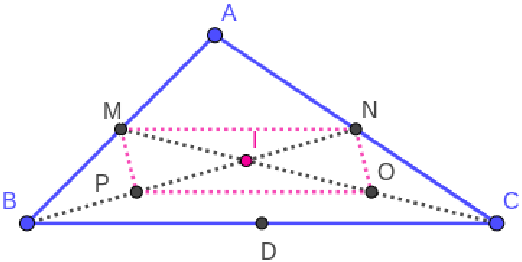
- Pelos pontos médios M e N trace um segmento de reta que, pelo Teorema 13 (Retas Paralelas), é paralelo ao lado $\overline{BC}$. Além disso, $MN = \frac{BC}{2}$.



- Pelos pontos médios de BI e CI, trace um segmento $\overline{PO}$. Por que esse segmento também é paralelo ao lado $\overline{BC}$?

Demonstração: Teorema8

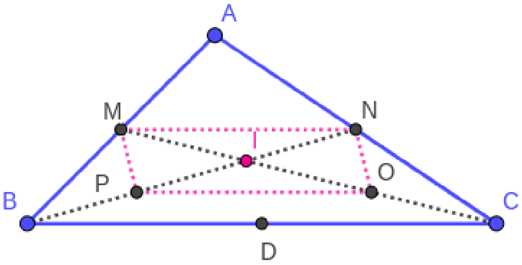
- Ainda pelos pontos médios P e O, trace as paralelas (por quê?) MP e NO.



- Conclua que os lados paralelos são congruentes.
- O quadrilátero $MNOP$ é um paralelogramo (Teorema 3).

Demonstração: Teorema8

- Se é um paralelogramo, suas diagonais se bissecam, então $MI = IO$ e $NI = IP$.



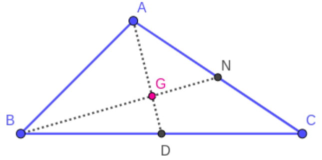
- Como $IP = BP$, $BN = BP + IP + IN = IP + IP + IP = 3IP$, segue que

$$IP = \frac{BN}{3} \Rightarrow BI = BP + IP = 2IP = \frac{2}{3}BN$$

Demonstração: Teorema8

- Por outro lado, se G é o ponto de interseção entre as medianas $\overline{BN}$ e $\overline{AD}$, então

$$BG = \frac{2}{3}BN = BI.$$



- Como BI e BG estão sobre o mesmo segmento, com o mesmo ponto inicial, podemos concluir que

$$BI = BG,$$

ou seja, os pontos I e G coincidem e as três medianas concorrem num mesmo ponto.

Referencias I