

Geometria Plana

Lista de Exercícios:

1. Ponto, reta e plano.
 2. Ângulos.
 3. Triângulos.
 4. Retas Paralelas.
-

1 Ponto, reta e plano

1.1 Exercícios de Fixação [2] e [1]

Exercício 1 *Leia o texto História da Geometria, da prof^a Lhaylla Crissaff (UFF).*

Exercício 2 *Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F), justificando a sua resposta:*

- a) *Três pontos distintos são sempre colineares.*
- b) *Três pontos distintos são sempre coplanares.*
- c) *Quatro pontos todos distintos determinam duas retas.*
- d) *Por quatro pontos todos distintos pode passar uma só reta.*
- e) *Três pontos pertencentes a um plano são sempre colineares.*

Exercício 3 *Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F), justificando a sua resposta:*

- a) *Por um ponto passam infinitas retas.*
- b) *Por dois pontos distintos passa uma reta.*
- c) *Uma reta contém dois pontos distintos.*
- d) *Dois pontos distintos determinam uma e uma só reta.*
- e) *Por três pontos dados passa uma só reta.*

Exercício 4 *Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F), justificando a sua resposta:*

- a) *Quaisquer que sejam os pontos A e B , se A é distinto de B , então existe uma reta a tal que $A \in a$ e $B \in a$.*
- b) *Quaisquer que sejam os pontos P e Q e as retas r e s , se P é distinto de Q , e P e Q pertencem às retas r e s , então $r = s$.*
- c) *Qualquer que seja uma reta r , existem dois pontos A e B tais que A é distinto de B , com $A \in r$ e $B \in r$.*
- d) *Se $A = B$, existe uma reta r tal que $A, B \in r$.*

Exercício 5 *Usando quatro pontos todos distintos, sendo três deles colineares, quantas retas podemos construir?*

Exercício 6 *Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F), justificando a sua resposta:*

- a) *Duas retas distintas que têm um ponto comum são concorrentes.*

b) Duas retas concorrentes têm um ponto comum.

c) Se duas retas distintas têm um ponto comum, então elas possuem um único ponto comum.

Exercício 7 Demonstre os teoremas da Aula 01:

1. Duas retas distintas ou não intersectam-se ou intersectam-se em um único ponto.

2. Para todo ponto P , existem pelo menos duas retas distintas passando por P .

3. Para todo ponto P existe pelo menos uma reta r que não passa por P .

4. Se duas retas são concorrentes, então existe um único plano que as contém.

2 Ângulos

Exercício 8 Se a interseção de duas regiões convexas de um plano não for o conjunto vazio, prove que ela também é uma região convexa.

Exercício 9 Calcule a medida de um ângulo que, somado ao triplo do seu complemento, dá 210° como resultado.

Exercício 10 Calcule as medidas de dois ângulos complementares, sabendo que o complemento do dobro de um deles é igual à terça parte do outro.

Exercício 11 Se duas retas se intersectam, prove que um dos ângulos por elas formados é igual a 90° se, e só se, os quatro ângulos o forem.

Exercício 12 A terça parte da soma entre dois ângulos vale 72° . Determiná-los, sabendo-se que um deles é o quádruplo do outro.

Exercício 13 O complemento de um ângulo x está para seu suplemento, assim como 4 está para 19. Calcular esse ângulo.

Exercício 14 Em torno de um ponto, e num mesmo semiplano, constroem-se quatro ângulos consecutivos. Sabendo-se que cada um deles é igual ao dobro do anterior, achar esses ângulos.

Exercício 15 Prove que a reta perpendicular à bissetriz de um ângulo, traçada pelo vértice do mesmo, forma ângulos congruentes com os lados do ângulo.

Exercício 16 Mostre que as bissetrizes de um ângulo e do seu suplemento são perpendiculares.

GABARITO

9. 30°

10. 54° e 36°

12. 36° e 180°

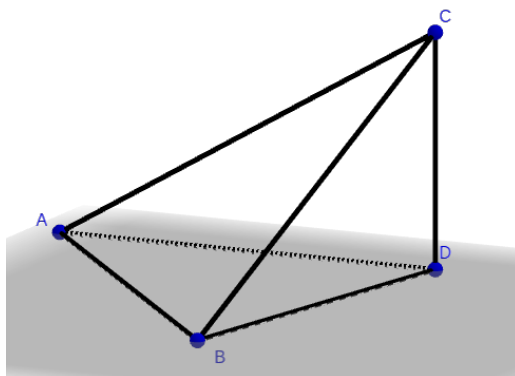
13. 66° .

14. 12° , 24° , 48° , 96° .

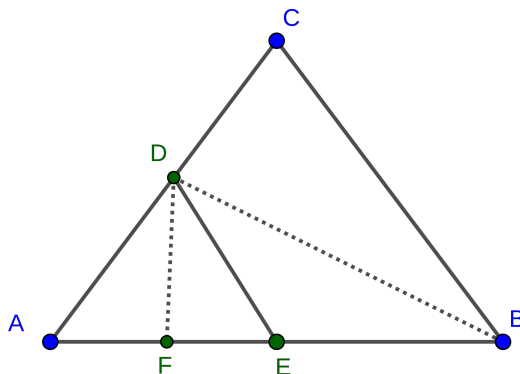
3 Triângulos

Exercício 17 Na figura abaixo, $\overline{CD} \perp \overline{AD}$, $\overline{CD} \perp \overline{BD}$ e $AD = BD$.

Demonstre que o $\triangle ABC$ é isósceles.



Exercício 18 No triângulo isósceles ABC abaixo, a bissetriz do ângulo \hat{B} intercepta o lado oposto em D . E é um ponto da base \overline{AB} tal que $ED = EA$. \overline{DF} bisseca o ângulo $\hat{A}DE$. Demonstre que $\hat{EDF} = \hat{CBD}$.

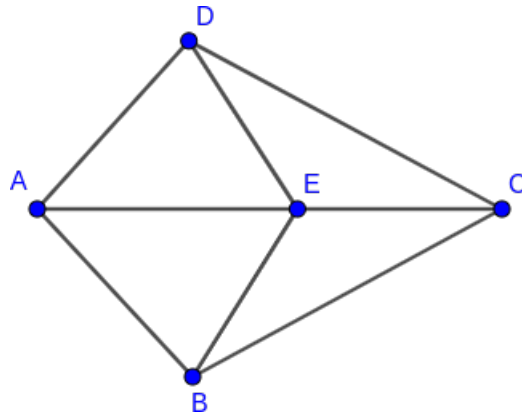


Exercício 19 Demonstre que todo ponto da bissetriz de um ângulo equidista dos lados do mesmo.

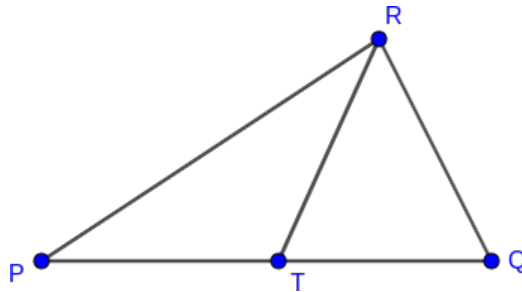
Exercício 20 Mostre que a soma das medidas de dois ângulos quaisquer de um triângulo é menor do que 180° .

Exercício 21 Dado um segmento AB , construímos os ângulos $\hat{CAB} \equiv \hat{DBA}$, um em cada semiplano determinado pela reta que \overline{AB} , com $AC = DB$. Unindo os pontos C e D obtemos o ponto M no segmento AB . Mostre que M é o ponto médio de AB .

Exercício 22 Se $DC = BC$ e $DE = BE$, demonstre que $AD = AB$, sabendo-se que os pontos A , E e C são colineares.

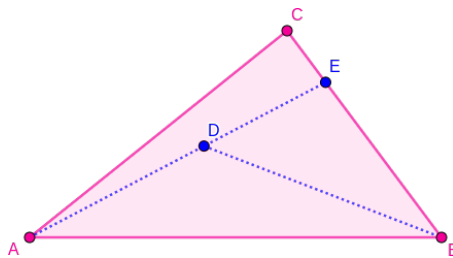


Exercício 23 Na figura abaixo, $PT = TR = RQ$. Demonstre que $PR > RQ$.



Exercício 24 Mostre que não é possível construir um triângulo de lados 4 cm, 5 cm e 10 cm.

Exercício 25 Na figura abaixo, provar que $\hat{ADB} > \hat{C}$.



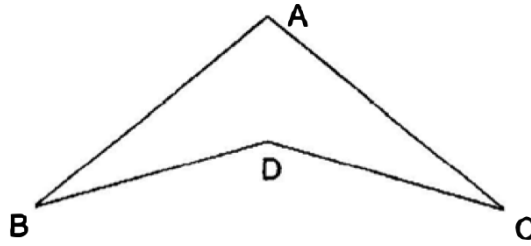
Exercício 26 Por que *ALL* ou *LLA* não é caso de congruência entre triângulos?

Exercício 27 Prove que se dois segmentos se bissecam em um ângulo reto, então os segmentos que unem seus extremos são congruentes.

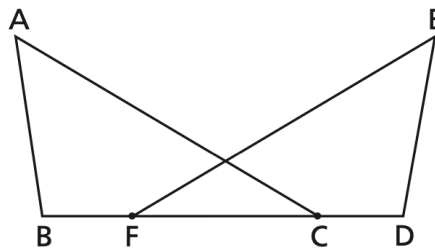
Exercício 28 Demonstre que as mediatrizes dos lados de um triângulo concorrem em um mesmo ponto, equidistante dos três vértices, denominado **circuncentro**.

Exercício 29 Demonstre que as bissetrizes internas dos ângulos de um triângulo concorrem em um mesmo ponto, equidistante dos três lados, denominado **incentro**.

Exercício 30 Sejam $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\overline{DB} = \overline{DC}$. Mostre que $\hat{A}BD = \hat{A}CD$.



Exercício 31 Na figura abaixo, sendo os segmentos \overline{BF} e \overline{CD} congruentes, os ângulos $\hat{A}BC$ e $\hat{F}DE$ congruentes e os ângulos $\hat{B}AC$ e $\hat{D}EF$ também congruentes, prove que os segmentos \overline{AC} e \overline{EF} são congruentes.



4 Retas Paralelas

Exercício 32 A soma dos ângulos agudos formados por duas paralelas e uma transversal é igual à 121° . Calcular um dos ângulos obtusos.

Exercício 33 Duas paralelas cortadas por uma transversal formam ângulos colaterais internos, cujas medidas, em graus, são representadas por $x + 20$ e $5x + 60$, respectivamente. Calcular o valor de um dos ângulos agudos da figura.

Exercício 34 Os ângulos colaterais externos formados por duas paralelas e uma secante são tais que um excede o outro de $20^\circ 30'$. Calcule esses ângulos.

Obs: Estude as relações entre as medidas de ângulos em graus, minutos e segundos.

Exercício 35 Duas paralelas cortadas por uma transversal formam dois ângulos correspondentes cujas medidas, em graus, são respectivamente iguais à $4x - 20$ e $x + 70$. Encontre a soma dos ângulos obtusos formados pelas retas acima.

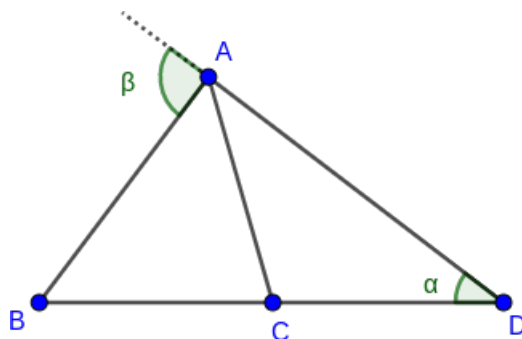
Exercício 36 Num triângulo isósceles, o ângulo do vértice mede $30^\circ 42'$. Calcule um dos ângulos da base.

Exercício 37 Num triângulo isósceles ABC , o ângulo \hat{A} (do vértice) mede $41^\circ 20'$. Calcule a medida dos ângulos formados pela bissetriz do ângulo \hat{B} com o lado \overline{AC} .

Exercício 38 Num triângulo isósceles ABC , o ângulo do vértice \hat{A} é $1/5$ do ângulo $B\hat{M}C$, formado pelas bissetrizes dos ângulos \hat{B} e \hat{C} . Calcular os ângulos desse triângulo.

Exercício 39 Num triângulo ABC , a bissetriz externa de \hat{C} forma com a bissetriz interna de \hat{B} um ângulo de 10° . A altura \overline{AH} forma, com a bissetriz interna \overline{AS} , um ângulo de 30° . Calcular os ângulos desse triângulo.

Exercício 40 Na figura abaixo, tem-se $AB = AC = CD$ e β é um ângulo externo do $\triangle ABD$.



a) Qual dos lados \overline{AB} ou \overline{AD} é maior?

b) Se $\alpha = 36^\circ$, quanto mede o ângulo β ?

Exercício 41 *O ângulo obtuso formado por duas bissetrizes internas de um triângulo é igual a um ângulo reto aumentado da metade do terceiro ângulo. Provar.*

Gabarito

- 33. $149^{\circ}45'$
- 33. $36^{\circ}40'$
- 34. $79^{\circ}45'$ e $100^{\circ}15'$
- 35. 400°
- 36. $74^{\circ}39'$
- 37. 76° e 104°
- 38. 20° , 80° e 80°
- 39. 20° , 110° e 50°
- 40. a) Lado maior: AD . b) 108° .

Referências

- [1] Osvaldo D. e José N. P. *Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana*. Ed. Atual, 2013. URL: https://drive.google.com/file/d/1kRA28s0HglbFZQHVMiRq_JXzKiIpKA57/view?usp=sharing.
- [2] Eliane Q. F. R e Maria L. B. Q. *Geometria Plana e construções geométricas*. Ed. UNICAMP, 2018. URL: <https://drive.google.com/file/d/14eeFiaaKIFD1lthpz-GWTMroZfbsr32h/view?usp=sharing>.