

Aula 12

Circunferência


Karla Lima

31/03/2023

Sumário



1. Definições e Conceitos Básicos
2. Correspondência entre arcos e ângulos
3. Retas Secantes e Tangentes
4. Ângulos
5. Polígonos Inscritíveis e Circunscritíveis
6. Formulário Avaliativo

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the upper-left portion, while a light gray shape occupies the lower-left portion. The rest of the slide is white. The text is centered in the white area.

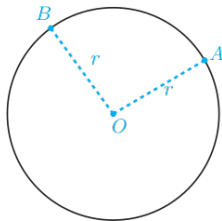
Definições e Conceitos Básicos

Definição



Definição 1

Sejam r um número real positivo e O um ponto do plano. O lugar geométrico de todos os pontos do plano que estão à distância r de O é a **circunferência** de raio r e centro O .



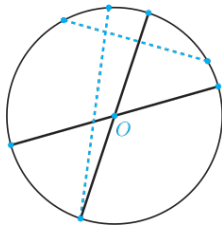
- Denotaremos esta circunferência por $\mathcal{C}(O, r)$.
- O segmento que une o centro O a qualquer ponto da circunferência é denominado **raio** da mesma.

Definição



Definição 2

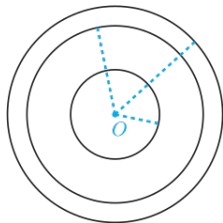
- ▶ O segmento cujos extremos pertencem à circunferência é denominado **corda**.
- ▶ A corda que passa pelo centro é denominada **diâmetro**.



Conceitos Básicos



- ▶ Circunferências que possuem o mesmo centro são chamadas **concêntricas**.
- ▶ Circunferências que possuem mesmo raio são chamadas **congruentes**.

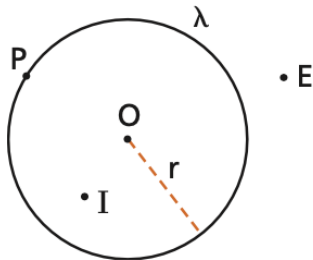


Posição de ponto e circunferência



Dado um ponto X e uma circunferência $\mathcal{C}(O, r)$, temos que:

- ▶ X é interno a $\mathcal{C}(O, r) \Leftrightarrow d(X, O) < r$;
- ▶ X pertence a $\mathcal{C}(O, r) \Leftrightarrow d(X, O) = r$;
- ▶ X é externo a $\mathcal{C}(O, r) \Leftrightarrow d(X, O) > r$.



Geogebra



- ▶ Acesse o <https://www.geogebra.org/classic>.
- ▶ Use o "controle deslizante", com intervalo de 0 à 10, com incremento de 0.5:



Controle Deslizante

Nome

a = 1



Número



Ângulo



Inteiro

Intervalo

Controle Deslizante

Animação

min

0

max

10

Incremento

0.5

CANCELAR

OK

Geogebra



- Construa uma circunferência de raio a (o controle deslizante):

The image shows the Geogebra interface. The toolbar at the top contains various construction tools. The 'Círculo' (Circle) tool is highlighted with a blue box. Below the toolbar, the object list shows the following objects:

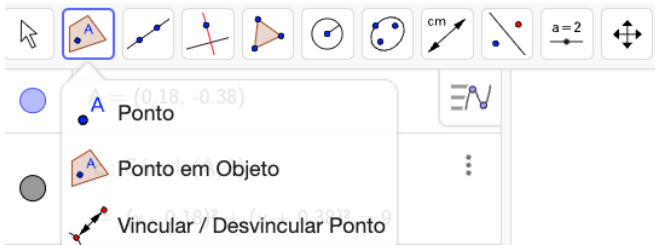
	$A = (0.18, -0.38)$		Círculo dados Centro e Um de seus Pontos
	$c : \text{Círculo}(A, 3)$ $= (x - 0.18)^2 + (y + 0.38)^2 = 9$		Círculo: Centro & Raio
			Compasso
	Entrada...		Círculo definido por Três Pontos

- Trace um segmento que passe pelo centro da circunferência (diâmetro) e meça seu comprimento.
- Altere o valor de a e compare os resultados.

Geogebra



- Use a ferramenta "ponto em um objeto", marque dois pontos na circunferência e construa um ângulo com vértice no centro da mesma.



- Usando os mesmos pontos sobre a circunferência, marque mais um ponto sobre a circunferência e construa um ângulo com vértice no novo ponto.
- Compare os dois ângulos construídos.
- Ao alterar o valor de α , os ângulos são alterados? A relação entre eles se mantêm?



- ▶ Escolha um ponto da circunferência e trace uma reta tangente à mesma, no ponto escolhido.
- ▶ Por esse mesmo ponto, trace o raio da circunferência.
- ▶ Tome um ponto da reta tangente e calcule o ângulo entre os pontos citados, com vértice no centro da circunferência.



- ▶ Marque um diâmetro na circunferência e um outro ponto fora dele. Com esse ponto e diâmetro, construa um triângulo.
- ▶ Calcule o ângulo formado pelos lados do triângulo que não são o diâmetro.
- ▶ Mude o valor de α . O valor do ângulo se altera?

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the upper-left portion, while a light gray shape occupies the lower-left portion. The rest of the slide is white. The text is centered in the white area.

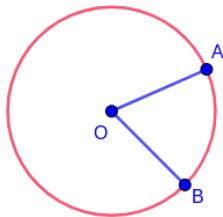
Correspondência entre arcos e ângulos

Ângulo Central



Definição 3

Chama-se **ângulo central** ao ângulo cujo vértice é o centro da circunferência.

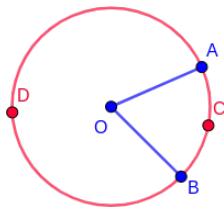


- ▶ A parte da circunferência limitada pelos pontos A e B é denominada **arco da circunferência** e o denotamos por \widehat{AB} .
- ▶ Os pontos A e B são os extremos do arco AB .

Ângulo Central



- ▶ Há uma ambiguidade na notação para arcos, uma vez que não nos permite distinguir se estamos nos referindo ao arco menor ou ao arco maior.
- ▶ Para evitar tal ambiguidade, considera-se outro ponto do arco.
- ▶ Na figura abaixo, o arco AB menor é denotado por \widehat{ACB} , enquanto que o maior é denotado por \widehat{ADB} .

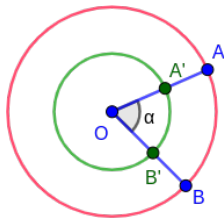


- ▶ Quando não houver dúvidas quanto ao arco que estamos nos referindo, podemos escrever simplesmente \widehat{AB} .

Ângulo Central e Arcos



- Pode-se estabelecer uma correspondência entre ângulos centrais e arcos de circunferência, de tal modo que a medida de um arco, em graus ou radianos, não dependa do raio da circunferência.
- Na figura abaixo, os extremos dos arcos AB e $A'B'$, das duas circunferências concêntricas, correspondem a mesma abertura dos lados do ângulo central α .



Ângulo Central e Arcos



O fato anterior motiva a seguinte definição:

Definição 4

A medida, em graus ou radianos, de um arco é a medida do ângulo central correspondente.

Notação: $\widehat{AB} = \alpha$.

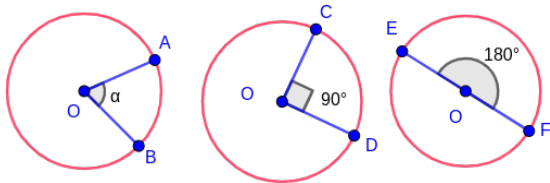


Figura 1: $\widehat{AB} = \alpha$, $\widehat{CD} = 90^\circ$ e $\widehat{EF} = 180^\circ$

Unidade de Medida



- ▶ Se A e B são as extremidades de um diâmetro, os dois arcos congruentes determinados são denominados **semicircunferências** e sua medida, em graus, é 180° .
- ▶ Do exposto, um arco que mede 1° equivale a $\frac{1}{360}$ da circunferência.
- ▶ Para medir arco menores que um grau, utilizamos **minuto** e **segundo**, definidos por

Minuto: $1' = \frac{1}{60}$ do grau;

Segundo: $1'' = \frac{1}{60}$ do minuto.

Teorema



Teorema 1

Na mesma circunferência, ou em circunferências congruentes, se duas cordas são congruentes então são congruentes os arcos por elas subentendidos.

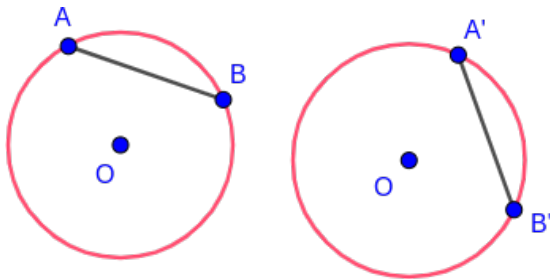
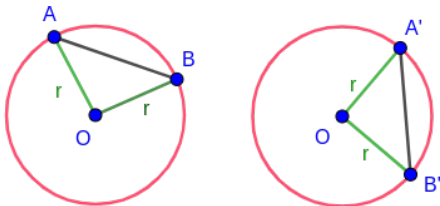


Figura 2: $AB = A'B'$

Demonstração



- ▶ Construa os triângulo AOB e $A'O'B'$, onde O e O' são os centros das circunferências congruentes.



- ▶ Como
 - ▶ $AB = A'B'$ (hipótese)
 - ▶ $AO = A'O' = r$ e $BO = B'O' = r$ (as circunferências possuem o mesmo raio)os triângulos AOB e $A'O'B'$ são congruentes (LLL).
- ▶ Logo, $\widehat{AOB} = \alpha = \widehat{A'O'B'}$ (ângulo oposto aos lados congruentes \overline{AB} e $\overline{A'B'}$), como queríamos demonstrar.

Teorema



Teorema 2

Teorema Recíproco: Na mesma circunferência ou em circunferências congruentes, se dois arcos são congruentes então são congruentes as cordas correspondentes.

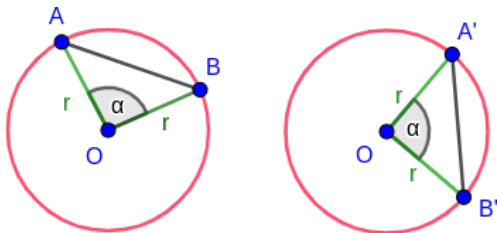


Figura 3: $\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$

Demonstração: Exercício.

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the upper-left portion, while a light gray shape occupies the lower-left portion. The right side of the slide is a plain white background.

Retas Secantes e Tangentes

Secantes



Definição 5

- Uma reta que corta uma circunferência em mais de um ponto é uma reta **secante** à circunferência.
- Duas circunferências distintas que se cortam em mais de um ponto são chamadas **secantes**.

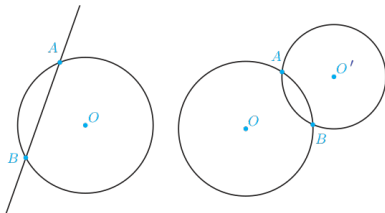


Figura 4: \overleftrightarrow{AB} reta secante à circunferência. Circunferências secantes.

Tangentes



Definição 6

A reta que intersecta a circunferência em apenas um ponto é denominada **tangente**. Este ponto é denominado **ponto de tangência**.

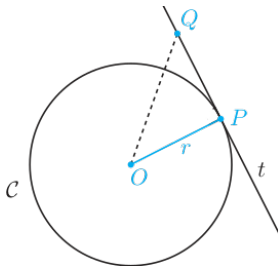


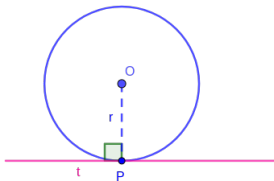
Figura 5: \overleftrightarrow{QP} reta tangente à circunferência em P .

Teorema



Teorema 3

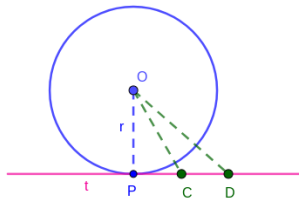
A reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio traçado pelo ponto de tangência.



Demonstração

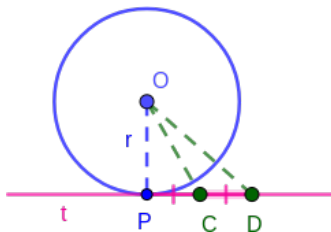


- Suponha, por absurdo, que o raio \overline{OP} não seja perpendicular à tangente t



- Então, seja C o ponto da tangente t tal que $\overline{OC} \perp t$.
- Seja, também, D um ponto de t , tal que $PC = CD$.

Demonstração



- ▶ Desta forma, $\triangle OCP = \triangle OCD$:
 - ▶ OC é um lado em comum (L);
 - ▶ $\hat{P}CO = \hat{D}CO = 90^\circ$ (A);
 - ▶ $PC = CD$ (L).
- ▶ Portanto, $OP = OD$ (lados opostos ao ângulo reto), de onde segue que

$$r = OD.$$

Demonstração: Teorema



- ▶ Isso significa que D pertence à circunferência e, assim, a reta t teria dois pontos em comum com a mesma, contrariando a hipótese de t ser tangente.

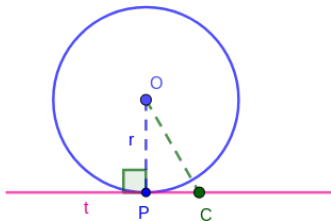
Teorema



Teorema 4

***Recíproca:** Uma reta perpendicular ao raio em seu ponto extremo é tangente à circunferência.*

Demonstração



- ▶ Sejam P o ponto de tangência e C outro ponto de t .
- ▶ Como $\overline{OP} \perp t$, segue que $OC > OP = r$ (\overline{OC} é a hipotenusa do $\triangle OPC$).
- ▶ Logo, C não pertence à circunferência, de onde segue que P é o único ponto de t em comum com a mesma.

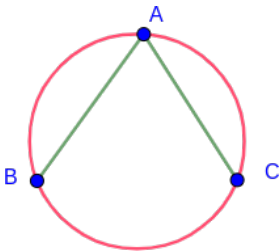
Ângulos

Ângulo Inscrito



Definição 7

Diz-se que um ângulo está **inscrito** numa circunferência se seu vértice pertence à circunferência e seus lados intersectam a mesma em dois pontos distintos do vértice.



Teorema

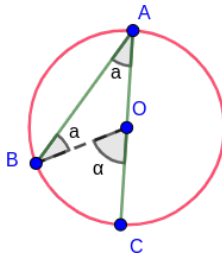


Teorema 5

O ângulo inscrito tem por medida a metade da medida do arco compreendido entre seus lados.

Demonstração

- 1º Caso: Um dos lados do ângulo contém um diâmetro.



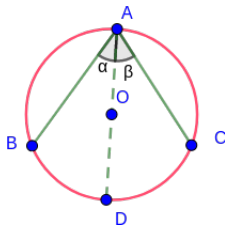
- O ângulo $\hat{\alpha}$ é externo do triângulo isósceles AOB , assim

$$\hat{\alpha} = 2\hat{a} \Rightarrow \hat{a} = \frac{\hat{\alpha}}{2} = \frac{\widehat{BC}}{2},$$

como queríamos demonstrar.

Demonstração

- 2º Caso: O centro do círculo fica no interior do ângulo.



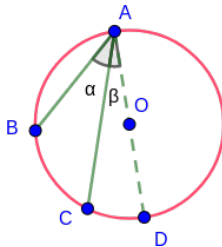
- Temos que

$$\widehat{BAC} = \alpha + \beta = \frac{\widehat{BD}}{2} + \frac{\widehat{DC}}{2} = \frac{\widehat{BD + DC}}{2} = \frac{\widehat{BC}}{2},$$

pois os arcos \widehat{BD} e \widehat{DC} contêm um diâmetro num dos seus lados.

Demonstração

- 3º Caso: O centro do círculo fica no exterior do ângulo.



- Temos que

$$\widehat{BAC} = \widehat{BAD} - \widehat{CAD} = \frac{\widehat{BD}}{2} - \frac{\widehat{DC}}{2} = \frac{\widehat{BC}}{2},$$

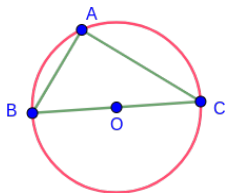
pois os arcos \widehat{BD} e \widehat{DC} contêm um diâmetro num dos seus lados.

Corolário



Corolário 1

O triângulo cujos vértices pertencem a uma circunferência e um dos lados é o diâmetro, é retângulo.



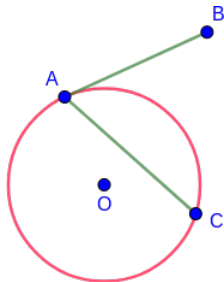
Demonstração: Exercício.

Ângulo de Segmento



Definição 8

Um ângulo é dito de **segmento** se seu vértice pertence à circunferência, um lado é secante e o outro tangente à mesma.



Teorema



Teorema 6

O ângulo de segmento tem por medida a metade da medida do arco compreendido entre seus lados.

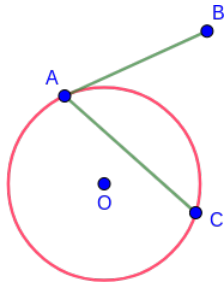
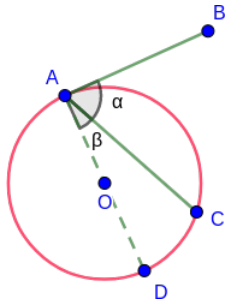


Figura 6: $\widehat{CAB} = \frac{\widehat{AC}}{2}$

Demonstração

- ▶ A tangente \overline{AB} é perpendicular ao diâmetro \overline{AD} .



- ▶ Logo, $\alpha + \beta = 90^\circ$, de onde segue que:

$$\widehat{BAC} = 90^\circ - \widehat{CAD} = \frac{\widehat{AD}}{2} - \frac{\widehat{DC}}{2} = \frac{\widehat{AD} - \widehat{DC}}{2} = \frac{\widehat{AC}}{2}.$$

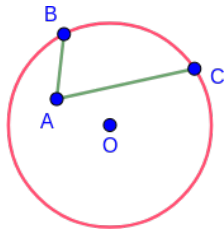
Exercício: Justifique as igualdades.

Ângulo Excêntrico Interno



Definição 9

*Um **ângulo excêntrico interno** é aquele cujo vértice é interior a circunferência.*



Teorema



Teorema 7

O ângulo excêntrico interno tem por medida a metade da soma das medidas do arco compreendido entre seus lados e do arco compreendido entre as semirretas opostas aos lados do mesmo.

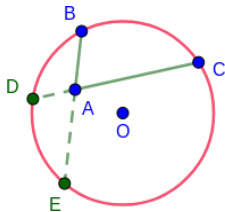
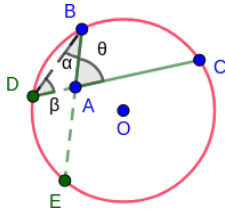


Figura 7: $\hat{A} = \frac{\widehat{ED} + \widehat{BC}}{2}$

Demonstração

- ▶ O ângulo $\theta = \widehat{BAC}$ é externo do triângulo ADB .



- ▶ Logo,

$$\widehat{BAC} = \alpha + \beta = \frac{\widehat{ED}}{2} + \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{\widehat{ED} + \widehat{BC}}{2},$$

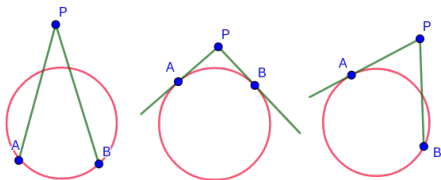
pois α e β são ângulos inscritos na circunferência dada.

Ângulo Excêntrico Externo



Definição 10

Um **ângulo excêntrico externo** é aquele cujo vértice é exterior à circunferência e seus lados são secantes, ou tangentes, ou uma secante e uma tangente à mesma.



- ▶ Quando os lados desse ângulo são tangentes, o mesmo é denominado **circunscrito** à circunferência.

Teorema

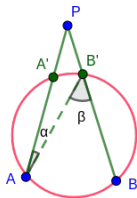


Teorema 8

O ângulo excêntrico externo tem por medida a metade da diferença das medidas dos arcos compreendidos entre seus lados.

Demonstração

- **Caso 1:** Os dois lados são secantes.



- O ângulo $\beta = \widehat{A'B'B}$ é externo do triângulo $PB'A$.
- Logo,

$$\beta = \alpha + \hat{P} = \frac{\widehat{A'B'}}{2} + \hat{P}$$

de onde segue que

$$\hat{P} = \beta - \frac{\widehat{A'B'}}{2} = \frac{\widehat{AB}}{2} - \frac{\widehat{A'B'}}{2} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{A'B'}}{2} \quad (\text{Justifique as igualdades}).$$

Demonstração



- ▶ **Caso 2:** Os dois lados são tangentes.
- ▶ **Caso 3:** Um lado é secante e o outro é tangente.

Demonstração: Exercício.

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the upper-left portion, while a light gray shape occupies the lower-left portion. The rest of the slide is white. The title text is centered in the white area.

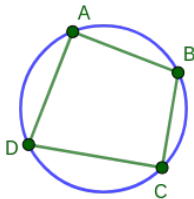
Polígonos Inscritíveis e Circunscritíveis

Polígono Inscrito



Definição 11

*Diz-se que um polígono está **inscrito** numa circunferência quando todos os seus vértices pertencem à mesma.*



Quadrilátero Inscrito

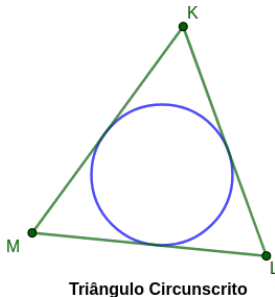
Neste caso, diz-se que a circunferência está circunscrita ao polígono.

Polígono Circunscrito



Definição 12

Diz-se que um polígono está **circunscrito** a uma circunferência quando todos os seus lados são tangentes à mesma.



Quando isso ocorre, diz-se que a circunferência está inscrita no polígono.

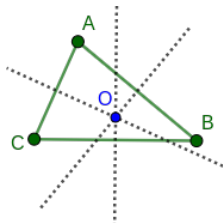
Teorema



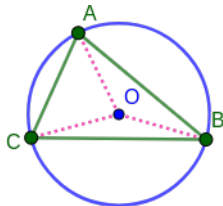
Teorema 9

Todo triângulo é inscritível.

Demonstração: As mediatrizes dos lados de um triângulo se interceptam em um único ponto O (circuncentro), equidistante dos vértices.



Demonstração



- Logo, se $AO = BO = CO = r$, tomando a circunferência de centro em O e raio r , inscrevemos o triângulo dado.

Teorema



Teorema 10

Todo triângulo é circunscritível.

Demonstração: Exercício.

Teorema



Teorema 11

Em todo quadrilátero inscrito numa circunferência, os ângulos opostos são suplementares.

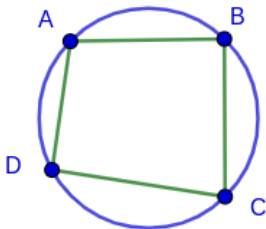
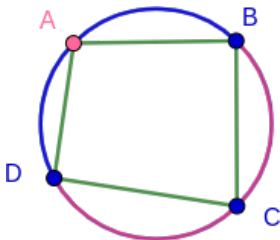


Figura 8: $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$ e $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$

Demonstração



► Observe que: $\hat{A} = \frac{\widehat{BCD}}{2}$ e $\hat{C} = \frac{\widehat{DAB}}{2}$.

► Assim,

$$\begin{aligned}\hat{A} + \hat{C} &= \frac{\widehat{BCD}}{2} + \frac{\widehat{DAB}}{2} \\ &= \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ.\end{aligned}$$

Teorema



Teorema 12

Em todo quadrilátero circunscrito, a soma de dois lados opostos é igual à soma dos outros dois.

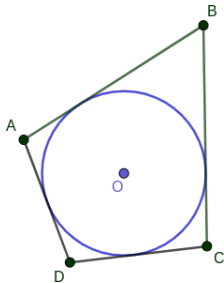
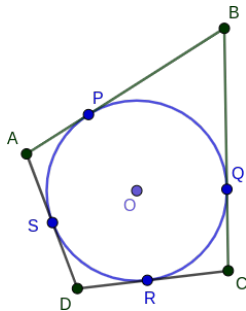


Figura 9: $AB + DC = AD + BC$

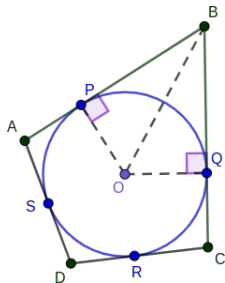
Demonstração



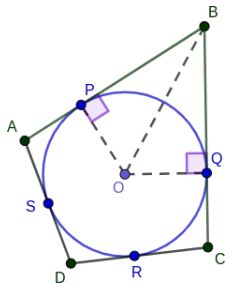
- Como os lados do quadrilátero são tangentes à circunferência, teremos:
 - $BP = BQ$;
 - $AP = AS$;
 - $DS = DR$;
 - $CR = CQ$.

Demonstração

- ▶ De fato, seja O o centro da circunferência. Tome os segmentos \overline{BO} , \overline{OP} e \overline{OQ} .
- ▶ Como P e Q são os pontos de tangência, $\hat{OPB} = \hat{OQB} = 90^\circ$.



Demonstração



- ▶ Os triângulos retângulos OPB e OQB possuem um cateto congruente ($OP = OQ = r$) e a hipotenusa em comum, ambos são congruentes.
- ▶ Portanto, os lados retantes BP e BQ são congruentes.
- ▶ A demonstração das outras igualdades segue de modo análogo.

Demonstração



- Somando-se os membros das desigualdades, obtemos:

$$\begin{aligned}(AP + PB) + (DR + RC) &= (AS + BQ) + (DS + CQ) \\ &= (AS + SD) + (BQ + QC)\end{aligned}$$

de onde segue que

$$AB + DC = AD + BC,$$

como queríamos demonstrar.

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the top-left corner, while a light gray shape occupies the bottom-left corner. The rest of the slide is white. The text is centered in the white area.

Formulário Avaliativo

Formulário Avaliativo



1. Responda o formulário Aula 12: Circunferência