UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Prof$^{\text{a}}$. Karla Lima

Fundamentos I 06 de Abril de 2018

(1) Usando o princípio de indução, mostre que:

(a) $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n + 1) = n^2, \quad n \in \mathbb{N}.$

(b) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}.$

(c) $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, válida para $x \geq -1$ e n natural.

(2) Construa uma bijeção entre o conjunto $\mathbb{N}$ e o conjunto dos números quadrados perfeitos.

(3) Supondo que A e B sejam conjuntos infinitos enumeráveis, mostre que $A \cup B$ é enumerável.

(4) Prove que se um conjunto infinito não enumerável A é a união de dois outros B e C, então pelo menos um destes não é enumerável.

(5) **(Hotel de Hilbert)** David Hilbert (1862 - 1943) certa vez observou que um hotel com um número infinito de quartos sempre pode acomodar mais hóspedes, até mesmo uma infinidade deles, mesmo que os quartos já estejam todos ocupados. Mostre como fazer isso.

(6) Uma caixa contém 3 tipos de bolas (azuis, verdes, amarelas). Qual o número de bolas que devemos retirar da caixa para garantirmos que temos duas bolas da mesma cor?

(7) São escolhidos cinco pontos, ao acaso, sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostre que pelo menos um dos segmentos determinados por dois desses pontos tem comprimento, no máximo, igual a $\sqrt{2}$.