

### Sumário

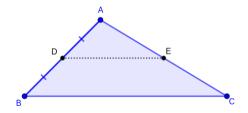
- 1. Paralelismo
- 2. Perpendicularidade
- 3. Projeções e Distâncias

# Paralelismo

### Teorema

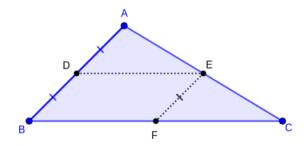
#### Teorema 1

Se do ponto médio do lado de um triângulo, traçarmos uma paralela a um dos lados, esta passará pelo ponto médio do terceiro lado.



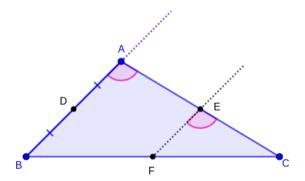
- ▶ **Hipótese:**  $AD = DB \ e \ \overline{DE} \parallel \overline{BC}$ .
- ightharpoonup Tese: AE = EC.

Pelo ponto E, que a paralela ao lado  $\overline{BC}$  corta o lado  $\overline{AC}$ , trace um segmento paralelo ao lado  $\overline{AB}$ , cortando o lado  $\overline{BC}$ .

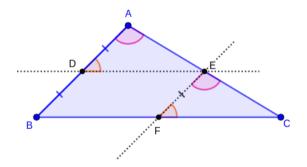


i) Qual teorema garante que BD = FE?

ii) Sendo  $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$ , cortadas pela transversal  $\overline{AC}$ , como podemos relacionar os ângulos  $\widehat{ADE} = \widehat{EFC}$ ?



iii) Como  $\overline{DA} \parallel \overline{FE} \in \overline{DE} \parallel \overline{FC}$ , como podemos relacionar os ângulos  $\widehat{ADE} \in \widehat{EFC}$ ?

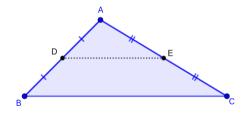


- iv) Dos itens anteriores, o que garante a congruência dos triângulos DAE e FEC?
- ightharpoonup Da congruência acima, o que garante que AE = EC?

### Teorema

#### Teorema 2

O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado.



- ▶ **Hipótese:** AD = DB e AE = EC.
- ▶ Tese:  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ .

- 1. Pelo ponto médio de  $\overline{AB}$ , D, traçamos uma reta paralela ao lado  $\overline{BC}$ .
- 2. Pelo Teorema 5, essa reta corta o lado  $\overline{AC}$  no seu ponto médio, E.
- 3. Como pelos pontos distintos D e E passa uma única reta, o segmento  $\overline{DE}$  deve estar contido na reta traçada, o que implica em também ser paralelo ao lado  $\overline{BC}$ .

### Exercício



#### Exercício 1

Demonstre o seguinte corolário do Teorema 2:

### Corolário 1

No triângulo anterior, tem-se 
$$DE = \frac{BC}{2}$$
.

# Perpendicularidade

# Definição



- Como vimos, Euclides define 'ângulo reto' como sendo igual ao ângulo formado por duas retas que se cortam de maneira a formar quatro ângulos iguais.
- ► Essas duas retas são ditas **perpendiculares** (símbolo: ⊥).
- O resultado a seguir é um corolário do Teorema do Triângulo Externo.

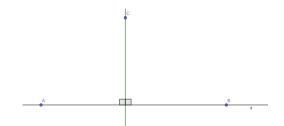
### Corolário



#### Corolário 2

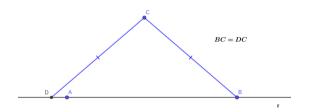
Por um ponto não pertencente a uma reta, passa uma única reta perpendicular a reta dada.

- ► Hipótese:  $C \notin r$ .
- ► Tese: Existe uma única reta que passa por C e é perpendicular a reta r.



#### Existência:

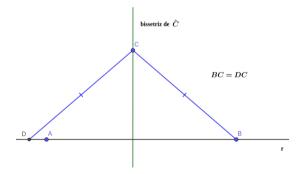
- ▶ Seja *r* uma reta e *C* um ponto fora dela.
- Trace na reta r um ponto D tal que CD = CB.



# 4

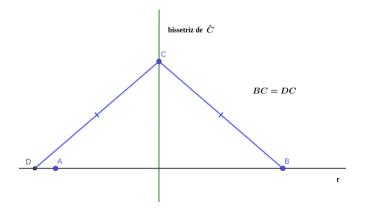
#### Existência:

➤ O triângulo *DCB* é isósceles, logo sua bissetriz é também sua mediana e sua altura (Teorema 2).



#### Existência:

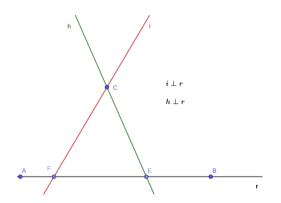
Assim, a bissetriz de  $\hat{C}$  é uma reta perpendicular à reta r que passa por C.





#### Unicidade:

Suponha, por absurdo, que existam duas retas perpendiculares à reta r, que passam por C.





#### **Unicidade:**

- O triângulo *CFE* possui dois ângulos retos (*CFE* e *CEF*).
- Mas, por causa do TAE, se um ângulo for reto os outros devem ser agudos, contradizendo a afirmação acima.

### Exercício

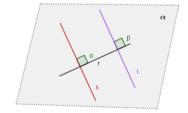


### Exercício 2

Demonstre o sequinte teorema:

Num mesmo plano, duas retas distintas perpendiculares a uma terceira, são paralelas entre si.

- ► Hipótese:  $r, s, t \in \alpha, r \perp s$ ,  $r \perp t$  e  $s \neq t$ .
- ► **Tese:** *s* e *t* são paralelas.



# Projeções e Distâncias

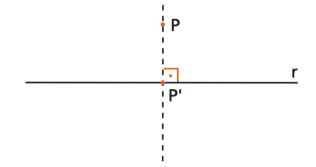
# Projeção Ortogonal



### Definição 1

Chama-se **projeção ortogonal** de um ponto sobre uma reta r ao ponto de interseção da reta com a perpendicular à ela que passa por aquele ponto.

- $ightharpoonup \overrightarrow{PP'} \perp r e \overrightarrow{PP'} \cap r = \{P'\}.$
- ▶ Se  $P \in r$ , então P' = P.



## Projeção de um segmento sobre uma reta

### Definição 2

A **projeção** de um segmento de reta  $\overline{AB}$  não perpendicular a uma reta r sobre esta reta é o segmento  $\overline{A'B'}$  em que

- ► A' é a projeção de A sobre r e
- ▶ B' é a projeção de B sobre r.

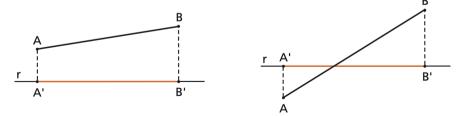
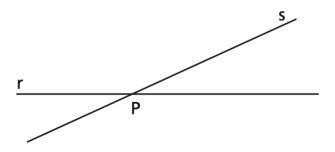


Figura 1: Exemplos da projeção

# Retas Oblíquas

### Definição 3

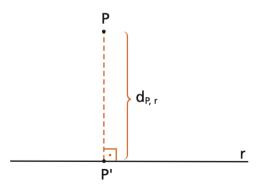
Se duas retas são concorrentes e não são perpendiculares, diz-se que essas retas são oblíquas.



### Distâncias

### Definição 4

A distância de um ponto a uma reta é a distância desse ponto à projeção dele sobre a reta.



### Exercícios



### Exercício 3

Mostre que todo ponto da bissetriz de um ângulo é equidistante dos lados do ângulo.