



## Aula 06

### Paralelismo

Karla Lima

10/02/2023

# Sumário



1. Paralelismo
2. Transversal a Várias Paralelas
3. Os Postulados de Euclides
4. Geometrias Não-Euclidianas



Paralelismo

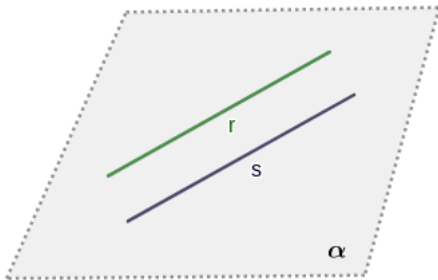
# Retas Paralelas



## Definição 1

Duas retas são ditas **paralelas**, se

- i) são coincidentes;
- ii) são coplanares e não se interceptam.

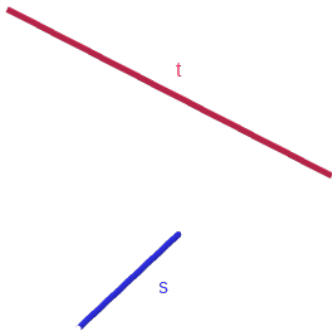


# Retas Reversas



## Definição 2

*Duas retas que não estão num mesmo plano chamam-se **retas reversas**.*



Vá visualizar no Geogebra (Click para baixar)

# Exercício



## Exercício 1

*Demonstre o seguinte teorema:*

*Duas retas paralelas distintas estão contidas em um único plano.*

# Exercício

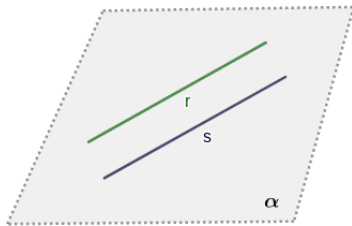


## Exercício 1

*Demonstre o seguinte teorema:*

*Duas retas paralelas distintas estão contidas em um único plano.*

- ▶ **Hipótese:**  $r$  e  $s$  são paralelas.
- ▶ **Tese:** Existe um único plano  $\alpha$  contendo  $r$  e  $s$ .





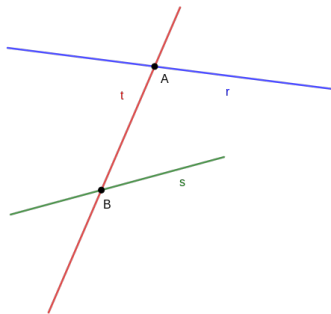
Transversal a Várias Paralelas



# Reta Transversal

## Definição 3

Uma **transversal** a duas retas coplanares é uma reta que as intercepta em dois pontos distintos.



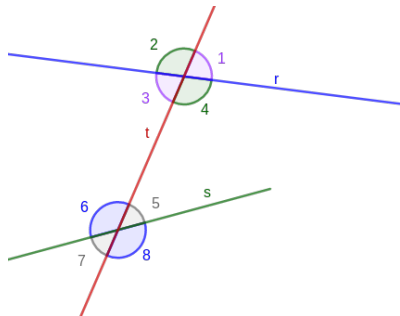
**Figura 1:**  $t$  é transversal às retas  $r$  e  $s$ , nos pontos  $A$  e  $B$

# Reta transversal

## Definição 4

Sejam  $r$  e  $s$  retas coplanares e  $t$  uma transversal às mesmas. Usaremos a seguinte nomenclatura:

- I. São denominados **alternos internos** os pares de ângulos:
  - ▶ 3 e 5
  - ▶ 4 e 6
- II. São denominados **alternos externos** os pares de ângulos:
  - ▶ 1 e 7
  - ▶ 2 e 8



# Reta transversal

## III. São denominados **correspondentes**

os pares de ângulos:

- ▶ 1 e 5
- ▶ 4 e 8
- ▶ 2 e 6
- ▶ 3 e 7

## IV. São denominados **colaterais internos**

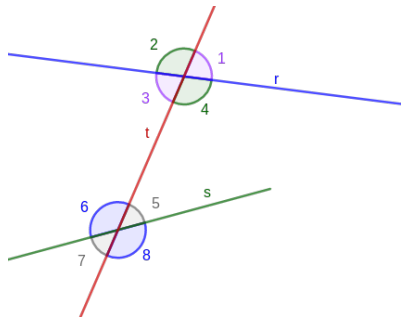
os pares de ângulos:

- ▶ 4 e 5
- ▶ 3 e 6

## V. São denominados **colaterais externos**

os pares de ângulos:

- ▶ 1 e 8
- ▶ 2 e 7



# Existência da Paralela

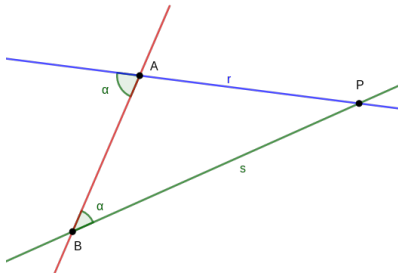


## Teorema 1

*Sejam  $r$  e  $s$  retas coplanares cortadas por uma transversal  $s$ . Se dois ângulos alternos são congruentes, então as retas  $r$  e  $s$  são paralelas.*

## Demonstração:

- ▶ Suponha, por absurdo, que as retas não são paralelas.
- ▶ Como são coplanares, as retas devem se interceptar num ponto  $P$ , formando um triângulo  $ABP$ .

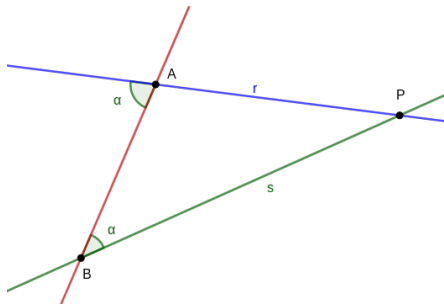


# Existência da Paralela



## Demonstração:

- Com isso,  $\triangle ABP$  teria um ângulo externo com medida igual ao ângulo interno  $\alpha$ , contrariando o teorema do ângulo externo.



# Teorema



Este teorema ainda é verdadeiro se substituirmos a expressão 'alternos internos' por:

- ▶ alternos externos
- ▶ correspondentes
- ▶ colaterais internos
- ▶ colaterais externos

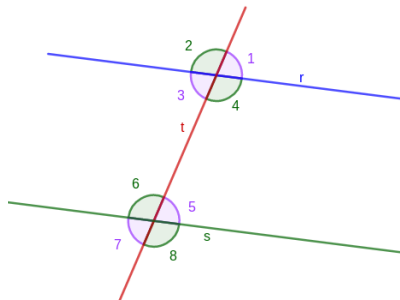
# Teorema



## Teorema 2

*Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os quatro ângulos agudos formados são congruentes, bem como os quatro ângulos obtusos.*

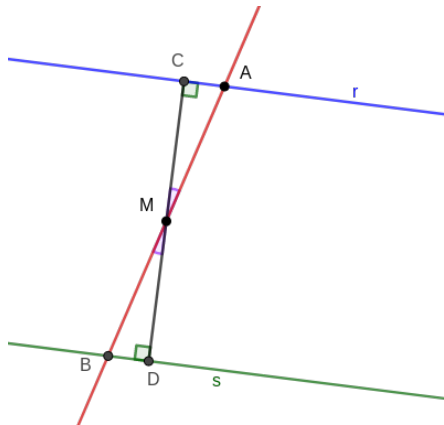
- ▶ **Hipótese:**  $r$  e  $s$  são paralelas;  
 $t$  é transversal às duas.
- ▶ **Tese:** São congruentes os ângulos:
  - ▶  $1 = 3 = 5 = 7$
  - ▶  $2 = 4 = 6 = 8$



# Teorema

## Demonstração:

- ▶ Sejam  $A$  e  $B$  os pontos de interseções da transversal com as retas  $r$  e  $s$ .
- ▶ Seja  $M$  o ponto médio do segmento  $\overline{AB}$ .
- ▶ Pelo ponto  $M$ , tracemos um segmento perpendicular às retas  $r$  e  $s$ .
- ▶ Os triângulos retângulos  $CMA$  e  $DMB$  são congruentes (Caso LAA).





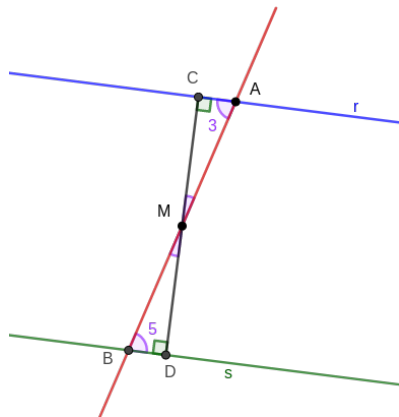
# Teorema

## Demonstração:

- ▶ Com isso, são congruentes os ângulos 3 e 5.
- ▶ Como  $1 = 3$  e  $5 = 7$ , por serem ângulos opostos pelo vértice, segue que

$$1 = 3 = 5 = 7.$$

- ▶ Por outro lado,  $2 = 4 = 6 = 8$  por serem suplementos de ângulos congruentes.

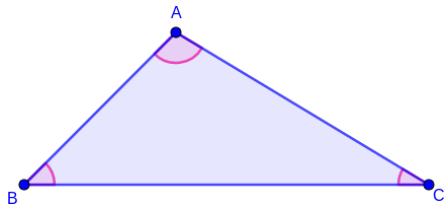


# Soma dos ângulos de um triângulo



## Teorema 3

*Em todo triângulo, a soma dos seus ângulos internos é igual à  $180^\circ$ .*

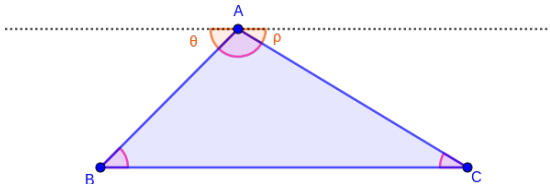


- ▶ **Hipótese:**  $ABC$  é um triângulo.
- ▶ **Tese:**  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ .

## Demonstração: Teorema 3



- Pelo vértice  $A$ , trace uma reta  $r$  paralela ao lado  $\overline{BC}$ .

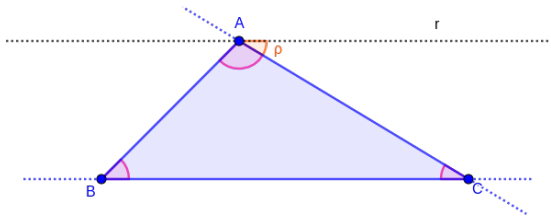


- i) Temos que  $\theta + \hat{A} + \rho = 180^\circ$ .

## Demonstração: Teorema 3



- Observando as paralelas  $\overline{BC}$  e  $r$  cortadas pela transversal  $\overline{AC}$ , obtemos que os ângulos  $\hat{C}$  e  $\rho$  são alternos internos.

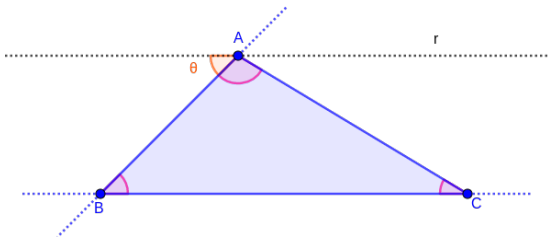


ii) Portanto,  $\rho = \hat{C}$ .

## Demonstração: Teorema 3



- Por fim, observando as paralelas  $\overline{BC}$  e  $r$  cortadas pela transversal  $\overline{AB}$ , obtemos que os ângulos  $\hat{B}$  e  $\theta$  são alternos internos.



iii) Portanto,  $\theta = \hat{B}$ .

## Demonstração: Teorema 3



De i), ii) e iii), concluímos que

$$180^\circ = \hat{A} + \theta + \rho = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}.$$

# Exercício



Prove o seguinte corolário do Teorema 3:

## **Corolário 1**

*Em todo triângulo, a medida de qualquer ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes.*

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the upper-left portion, while a light beige shape occupies the lower-left portion. The rest of the slide is white. The title is centered in the white area.

# Os Postulados de Euclides



# Elementos de Euclides



- ▶ No início do curso, citamos a obra 'Elementos' de Euclides.
- ▶ Esse livro faz uma apresentação da Geometria muito bem organizada na roupagem da lógica.
- ▶ Cada resultado é demonstrado com base no antecedente, de modo que, para o processo tenha começo, é preciso formular algumas proposições que ficam sem demonstração (chamados axiomas ou postulados).

# Os Postulados de Euclides



Euclides formulou 5 postulados que, traduzidos e interpretados em nossa linguagem, são enunciados a seguir:

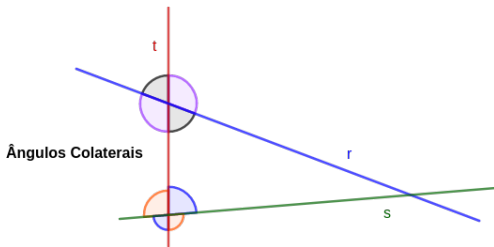
1. Por dois pontos passa uma reta e somente uma.
2. A partir de qualquer ponto de uma reta dada é possível marcar um segmento de comprimento dado sobre a reta.
3. É possível descrever um círculo de centro e raios dados.
4. Todos os ângulos retos são iguais (Euclides define 'ângulo reto' como sendo igual ao ângulo formado por duas retas que se cortam de maneira a formar quatro ângulos iguais.)

# O 5º Postulado de Euclides

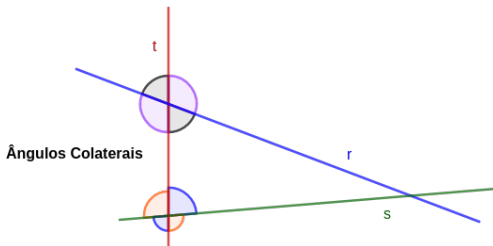


5. Se uma reta  $t$  corta duas outras  $r$  e  $s$  (todas num mesmo plano) de modo que um dos pares dos ângulos colaterais internos tem soma inferior a dois ângulos retos, então  $r$  e  $s$ , quando prolongadas suficientemente, se cortam do lado de  $t$  em que se encontram os referidos ângulos colaterais internos.

O enunciado fica mais claro quando acompanhado da observação da figura abaixo:

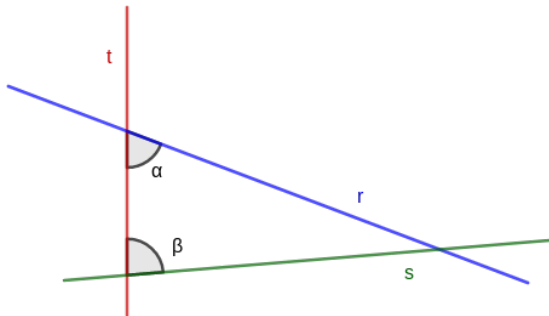


# O 5º Postulado de Euclides



- ▶ Num mesmo plano,  $t$  corta as retas  $r$  e  $s$ .
- ▶ Tome pares  $(\alpha, \beta)$ , onde  $\alpha$  é um ângulo formado pela interseção de  $t$  e  $r$  e  $\beta$  formado pela interseção de  $t$  e  $s$  (ângulos colaterais). Acima, temos apenas um exemplo. Cada interseção gera 4 ângulos.

## O 5º Postulado de Euclides

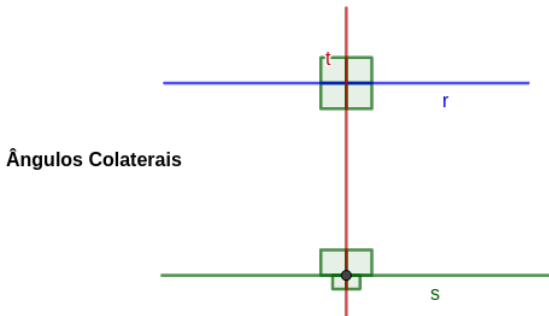


- Se existir um par no qual a sua soma é menor que 180, as retas  $r$  e  $s$  se cortam. Além disso, se cortam no semiplano gerado por  $t$ , em que os ângulos colaterais referidos estão (nesse exemplo, do lado direito de  $t$ ).

# O 5º Postulado de Euclides



No caso em que não há um par  $(\alpha, \beta)$  tal que  $\alpha + \beta < 180$ , temos então, obrigatoriamente (por quê?)  $\alpha = \beta = 90^\circ$ , em todos os pares. Assim, teremos:

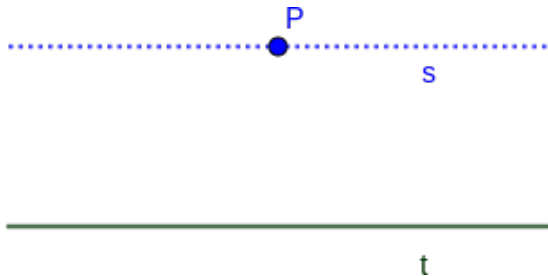


- As retas não  $r$  e  $s$  não se cruzam.

# Postulado de Playfair



**Postulado de Playfair:** Por um ponto não pertencente a uma reta, passa um única reta paralela à reta dada.



Esse postulado é equivalente ao 5º Postulado de Euclides. Leia mais em [1, 2, 3].

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the upper-left portion, while a light gray shape occupies the lower-left portion. The rest of the slide is white. The text is centered in the white area.

# Geometrias Não-Euclidianas



# Geometria Não-Euclidiana



- ▶ A geometria plana, também conhecida como **Geometria Euclidiana** funcionava muito bem em superfícies planas.
- ▶ Como podemos definir situações geométricas sobre uma superfície curva? Certamente a geometria Euclidiana não é satisfatória.
- ▶ Vimos que na geometria Euclidiana, a soma dos ângulos internos de um triângulo dá sempre o valor de  $180^\circ$ . Quando traçamos o mesmo ângulo sobre uma superfície curva isso já não é mais verdade.
- ▶ Era preciso então estabelecer uma nova geometria que pudesse resolver essas questões.

# Geometria Não-Euclidiana



- ▶ Alguns poderão estar fazendo a seguinte pergunta: a Terra é uma (quase) esfera, a geometria de Euclides funciona na Terra, então porque a geometria de Euclides não pode explicar uma geometria curva?
- ▶ Ocorre que, localmente, podemos considerar que estamos trabalhando em um plano (alô cálculo diferencial!).
- ▶ Entretanto, quando precisamos considerar grandes distâncias sobre a superfície da Terra a geometria de Euclides também não funciona. Isso é visto em navegação de longo curso, onde a curvatura da Terra não pode ser desprezada.

# Geometria Não-Euclidiana



- ▶ Matemáticos ilustres como Nikolai Lobachevski, János Bolyai, Carl Gauss e Bernhard Riemann dedicaram parte de sua vida a estabelecer uma geometria que ia contra o senso comum. Que tipo de argumento científico poderia ter chamado a atenção de tais matemáticos?
- ▶ Basicamente o que esses pesquisadores investigavam era o que ocorreria se eles desprezassem o quinto postulado de Euclides e considerassem exatamente o oposto ou seja, que através de um ponto C não situado sobre uma dada linha reta AB, pudéssemos traçar não uma mas duas, e conseqüentemente um número infinito, de linhas paralelas a AB.

# Geometria Não-Euclidiana



- ▶ A tarefa agora passava a ser construir uma geometria baseada nesse novo axioma. A ideia subjacente a isso era que se o quinto postulado era realmente um teorema então, mais cedo ou mais tarde, a nova geometria conteria contradições lógicas, o que significaria que a suposição inicial estava errada e o quinto postulado estaria então provado.
- ▶ Mas após construir essa nova geometria os matemáticos não encontraram contradições. Mais ainda, eles descobriram que tinham uma nova e elegante geometria com várias características interessantes e únicas.
- ▶ Por exemplo, nessa nova geometria a soma dos ângulos internos de um triângulo era menor do que  $180^\circ$  e de fato dependia das dimensões lineares do triângulo.




# Geometria Não-Euclidiana



Não deixe de ler sobre essa nova geometria em [3]!

# Referencias I



-  Geraldo Ávila.  
Legendre e o postulado das paralelas.  
*Revista da Olimpíada*, 6:64–76, 2005.
-  Manfredo Perdigão do Carmo.  
Geometrias não-Euclidianas.  
*Matemática Universitária*, 6:25–48, 1987.
-  A geometria dos espaços curvos ou geometria não-euclidiana.  
*ON - Observatório Nacional*.