Derivada Direcional

Exemplo

Suponha que $f(x, y)$ é a temperatura no ponto (x, y) numa sala com ar-condicionado mas com a porta aberta. Se movemos na direção da porta, a temperatura irá aumentar. Porém, se movemos na direção do ar-condicionado, a temperatura irá diminuir.

Calcular as taxas de variação nessas direções (não necessariamente nas direções dos eixos cartesianos) é o que chamamos de **Derivada Direcional**. Ela depende tanto do ponto (x, y) quanto da direção na qual nos afastamos de (x, y).

Derivada Direcional

Definição

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \in D$ *e* $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, *com* $\|u\| = 1$.
A ***derivada direcional de*** f ***em*** (x, y) ***na direção de*** u *é*

$$D_u f(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + ha, y + hb) - f(x, y)}{h},$$

se esse limite existir.

Teorema

Se f é uma função diferenciável em (x, y), então f tem derivada direcional para qualquer vetor unitário $u = (a, b)$ e

$$D_u f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)a + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)b$$

Derivada Direcional

Exemplo

Encontre a derivada direcional da função $f(x, y) = x^2y^3 - 4y$ *no ponto* $(2, -1)$ *na direção do vetor* $u = (2, 5)$.

Vetor Gradiente

Definição

*O gradiente de uma função f, denotados por ∇f ou **grad** f, é a função vetorial cujas componentes são as derivadas parciais; ou seja,*

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$$

Interpretação do Vetor Gradiente

Sabemos que o produto escalar de dois vetores a e b satisfaz:

$$a \cdot b = \|a\| \|b\| \cos\theta$$

onde θ é o ângulo entre a e b. Portanto, podemos escrever:

$$D_u f = \nabla f \cdot u = \|\nabla f\| \|u\| \cos\theta = \|\nabla f\| \cos\theta,$$

pois $\|u\| = 1$.
Como $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, para qualquer ângulo θ, segue que

$$-\|\nabla f\| \leq \|\nabla f\| \cos\theta \leq \|\nabla f\|$$

Interpretação do Vetor Gradiente

Teorema

O valor máximo da derivada direcional $D_u f$ de uma função diferenciável é $\|\nabla f\|$ e ocorre quando u tem a mesma direção e sentido que ∇f. Já o valor mínimo ocorre quando u tem a mesma direção mas sentido contrário de ∇f; o valor mínimo é $-\|\nabla f\|$.

Interpretação do Vetor Gradiente

Demonstração

Valor Mínimo: *Com efeito,* $-\|\nabla f\| \leq \|\nabla f\| \cos\theta$ *e quando* $\cos\theta = -1$ *temos a igualdade. Portanto, o menor valor que a derivada direcional alcança é* $-\|\nabla f\|$ *e ocorre quando* $\theta = \pi$*; ou seja, o ângulo entre o vetor* u *e o vetor gradiente* ∇f *é* π *(ou* 180°*), de onde concluimos que os vetores tem a mesma direção e sentidos opostos.*

Demonstração

Valor Máximo: *De fato,* $\|\nabla f\| \cos\theta \leq \|\nabla f\|$ *e quando* $\cos\theta = 1$ *temos a igualdade. Portanto, o maior valor que a derivada direcional alcança é* $\|\nabla f\|$ *e ocorre quando* $\theta = 0$*; ou seja, o ângulo entre o vetor* u *e o vetor gradiente* ∇f *é zero, de onde concluimos que os vetores tem a mesma direção e o mesmo sentido.*

Lembretes

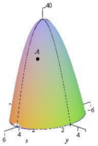
- Quando a derivada é negativa, a função está decrescendo;
- Quando a derivada é positiva, a função está crescendo.

Exemplo:

Um morro possui forma definida pelo gráfico de $f(x, y) = 36 - 2x^2 - 4y^2$:

a) Um alpinista está no ponto $A = (2, 1, 24)$, que direção ele deve tomar para subir pela parte mais íngreme do morro? Qual a taxa de variação da altura neste ponto?

b) Se o alpinista se mover na direção do vetor $v = (-3, 4)$, ele estará subindo ou descendo? Qual a taxa?



Derivada Direcional e Vetor Gradiente em $\mathbb{R}^3$

Tudo que definimos para funções de duas variáveis pode ser estendido para funções de três variáveis:

Teorema

Se f é uma função diferenciável em (x, y, z), então f tem derivada direcional para qualquer vetor unitário $u = (a, b, c)$ e

$$D_u f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)a + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)b + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)c$$

Definição

*O gradiente de uma função f, denotados por ∇f ou **grad** f, é a função vetorial cujas componentes são as derivadas parciais; ou seja,*

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\right)$$

Exemplos:

Se

$$f(x,y,z) = x\text{sen}(yz),$$

a) determine o gradiente de f,

b) determine a derivada direcional de f no ponto $(1,3,0)$ na direção de $v = (1,2,-1)$.

Exemplo:

A temperatura do ar em cada ponto (x, y, z) de uma sala é dada por

$$T(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

graus Celsius e a distância é dada em metros. Um mosquito está no ponto $Q = (3, 1, 2)$.

a) Se ele voar na direção do vetor $v = (1, 1, 1)$, ele estará aquecendo ou resfriando? Com qual taxa de variação de temperatura?

b) Em qual direção e sentido ele deve voar para que a temperatura decresça mais rapidamente? Qual é a taxa de variação?

- Bianchini, Waldecir. Aprendendo Cálculo de várias variáveis: http://www.im.ufrj.br/waldecir/calculo2/calculo2.pdf
- Lima, Paulo. Cálculo de várias variáveis: http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/Calculo_de_varias_variaveis.pdf
- Plotar gráficos e regiões: https://www.wolframalpha.com/examples/PlottingAndGraphics.html
  Software para computador: Geogebra
- Stewart, James. Cálculo, Volume II
- Anton, Howard. Cálculo, Volume II