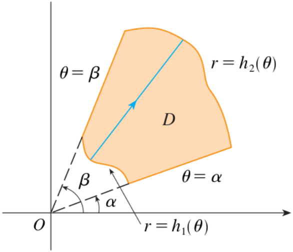
As regiões polares também podem ser escritas de forma mais geral:

**3** Se $f$ é contínua em uma região polar da forma

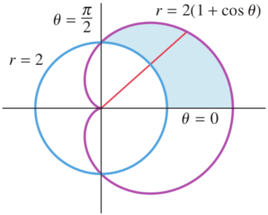
$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ h_1(\theta) \leqslant r \leqslant h_2(\theta)\}$$

então
$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$



# Exemplo:

- Calcule a integral $\displaystyle\int\int_R \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dA$, onde $R$ é a região no primeiro quadrante que está fora do círculo $x^2+y^2 = 4$ e dentro da cardióide $x^2+y^2-x-2=0$.



# Exemplo:

Como $\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{r\text{sen}\theta}{\sqrt{r^2}} = \text{sen}\theta$, temos

$$\begin{aligned}
\iint_R \sin\theta \, dA &= \int_0^{\pi/2} \int_2^{2(1+\cos\theta)} (\sin\theta) r \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{2} r^2 \sin\theta\right]_{r=2}^{2(1+\cos\theta)} d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \left[(1+\cos\theta)^2 \sin\theta - \sin\theta\right] d\theta \\
&= 2\left[-\frac{1}{3}(1+\cos\theta)^3 + \cos\theta\right]_0^{\pi/2} \\
&= 2\left[-\frac{1}{3} - \left(-\frac{5}{3}\right)\right] = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

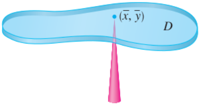
# Aplicações:

**5** As coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ do centro de massa de uma lâmina ocupando a região $D$ e tendo função densidade $\rho(x, y)$ são

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \iint_D x\,\rho(x, y)\,dA \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m} \iint_D y\,\rho(x, y)\,dA$$

onde a massa $m$ é dada por

$$m = \iint_D \rho(x, y)\,dA$$




O significado físico disso é que a lâmina se comporta como se toda sua massa estivesse concentrada em seu centro de massa. Assim, a lâmina permanece horizontal quando equilibrada em seu centro de massa (veja a Figura 4).

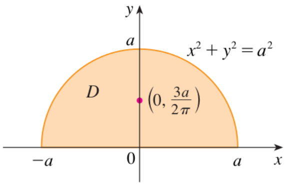
# Exemplo:

- A densidade em qualquer ponto de uma lâmina semicircular é proporcional à distância ao centro do círculo. Determine o centro de masssa da lâmina.
  1. Dados dois pontos no plano $(x, y)$ e $(w, z)$, a distância entre eles é dada por $d = \sqrt{(x-w)^2 + (y-z)^2}$;
  2. Se o centro do círculo está na origem, a distância entre um ponto da lâmina e este centro é dada por $d = \sqrt{x^2 + y^2}$;
  3. Se a função densidade é proporcional à distância ao centro do círculo, então existe uma constante $K$ tal que

$$\rho(x, y) = K\sqrt{x^2 + y^2}.$$

# Exemplo:

Assim, para uma lâmina de raio $a$




a massa da lâmina é dada por

$$m = \iint_D \rho(x, y)\, dA = \iint_D K\sqrt{x^2 + y^2}\, dA$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{a} (Kr)\, r\, dr\, d\theta = K \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{a} r^2 dr$$

$$= K\pi \frac{r^3}{3}\bigg]_0^a = \frac{K\pi a^3}{3}$$

# Exemplo:

E a coordenada $x$ do seu centro de massa é dado por:

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{1}{m}\int\int_D x\rho(x,y)\,dA = \frac{1}{m}\int\int_D x\,K\sqrt{x^2+y^2}\,dA \\ &= \frac{K}{m}\int_0^a\int_0^\pi r\cos\theta r\;r\,d\theta\,dr = \frac{K}{m}\int_0^a r^3\int_0^\pi \cos\theta\,dr\,d\theta \\ &= \frac{K}{m}\int_0^a r^3\left(\mathrm{sen}\theta\,\big|_0^\pi\right)dr = \frac{K}{m}\int_0^a r^3\,0\,dr = 0 \end{aligned}$$

Sua coordenada $y$ é dada por:

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \iint_D y\,\rho(x,y)\,dA = \frac{3}{K\pi a^3} \int_0^{\pi}\int_0^{a} r \operatorname{sen}\theta\,(Kr)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{3}{\pi a^3} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\,d\theta \int_0^{a} r^3\,dr = \frac{3}{\pi a^3} \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{a}$$

$$= \frac{3}{\pi a^3}\frac{2a^4}{4} = \frac{3a}{2\pi}$$

Portanto, o centro de massa está localizado no ponto $(0, 3a/(2\pi))$.

# Aplicações:

A **função densidade conjunta** de $X$ e $Y$ é uma função $f$ de duas variáveis tais que a probabilidade de que $(X, Y)$ esteja em uma região $D$ seja

$$P((X,Y) \in D) = \iint_D f(x,y)\, dA$$

Como probabilidades não podem ser negativas e são medidas na escala de 0 a 1, a função densidade conjunta tem as seguintes propriedades:

$$f(x,y) \geqslant 0 \qquad \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dA = 1$$

# Exemplo:

Se a função densidade conjunta de $X$ e $Y$ for dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} C(x+2y) & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 10,\ 0 \leqslant y \leqslant 10 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

determine o valor da constante $C$. Então, calcule $P(X \leqslant 7, Y \geqslant 2)$.

SOLUÇÃO Determinamos o valor de $C$ garantindo que a integral dupla de $f$ seja igual a 1. Como $f(x, y) = 0$ está fora do retângulo $[0, 10] \times [0, 10]$, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy\, dx = \int_0^{10} \int_0^{10} C(x + 2y)\, dy\, dx = C \int_0^{10} \left[xy + y^2\right]_{y=0}^{y=10} dx$$

$$= C \int_0^{10} (10x + 100)\, dx = 1\,500C$$

Portanto, $1\,500C$ e, assim, $C = \frac{1}{1\,500}$.

Agora, podemos calcular a probabilidade de $X$ ser no máximo 7 e de $Y$ ser no mínimo 2:

$$P(X \leqslant 7, Y \geqslant 2) = \int_{-\infty}^{7} \int_2^{\infty} f(x, y)\, dy\, dx = \int_0^7 \int_2^{10} \tfrac{1}{1\,500}(x + 2y)\, dy\, dx$$

$$= \tfrac{1}{1\,500} \int_0^7 \left[xy + y^2\right]_{y=2}^{y=10} dx = \tfrac{1}{1\,500} \int_0^7 (8x + 96)\, dx$$

$$= \tfrac{868}{1\,500} \approx 0{,}5787$$