Teorema de Fubini

$\boxed{4}$ **Teorema de Fubini** Se f for contínua no retângulo $R = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$, então

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy$$

De modo mais geral, esse resultado vale se supusermos que f seja limitada em R, f tenha descontinuidades apenas em um número finito de curvas suaves e que a integral iterada exista.

Exemplo:

1: Calcule a integral $\int\int_R ye^{-xy}\,dA$, $R = [0,2] \times [0,3]$.

- Por qual variável começamos a integrar? Dá na mesma qualquer uma delas?
- Como a função é um produto de uma função polinomial com uma exponencial composta com uma polinomial,segue que f contínua em R.

Exemplo:

- Pelo teorema de Fubini:

$$\int\int_R ye^{-xy}\,dA = \int_0^2\int_0^3 ye^{-xy}\,dy\,dx = \int_0^3\int_0^2 ye^{-xy}\,dx\,dy$$

- Para calcular $\int\int_R ye^{-xy}\,dA$ primeiro em y, devemos integrar o produto ye^{-xy} como função de y, usando uma integração por partes.

Exemplo:

- Agora, integrando em x, podemos calcular a integral com uma simples substituição:
  $u(x) = -xy \Rightarrow du = -ydx$, com $u(0) = 0$ e $u(2) = -2y$.
- Logo $\int_0^2 ye^{-xy}dx = \int_0^{-2y} [-e^u]du = -e^u \Big|_0^{-2y} = 1 - e^{-2y}$, de onde segue que :
  $$\int_0^3 \int_0^2 ye^{-xy}dxdy = \int_0^3 (1 - e^{-2y})dy = y + \frac{e^{-2y}}{2} \Big|_0^3$$
  $$\Rightarrow \int \int_R ye^{-xy}dA = \frac{5}{2} + \frac{e^{-6}}{2}$$

Exercícios:

1. Calcule a integral $\displaystyle\int\int_R x \operatorname{sen} y \, dA$, onde $R = [0,2] \times [0,\pi/2]$.
(Resp:2)
2. Calcule a integral $\displaystyle\int\int_R v(u - v^2)^4 \, dA$, onde $R = [0,1] \times [0,1]$.
(Resp: $\frac{1}{30}$)
3. Calcule a integral $\displaystyle\int\int_R \frac{xy^2}{x^2+1} dA$, onde $R = [0,1] \times [-3,3]$.
(Resp: $9 \ln 2$)
4. Determine o volume do sólido que se encontra abaixo do paraboloide elíptico $z = 1 - \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4}$ e acima do retângulo $R = [-1,1] \times [-2,2]$.
(Resp: $\frac{166}{27}$)