



Aula 09

Áreas de Figuras Planas: Triângulos e Quadriláteros

Karla Lima

Sumário



1. Áreas
2. A área de um retângulo
3. A área de paralelogramos
4. A área de triângulos
5. O Teorema Fundamental da Proporcionalidade
6. Formulário Avaliativo

The background consists of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape is in the upper-left corner, and a light gray shape is in the lower-left corner. They meet at a diagonal line that runs from the top-left towards the bottom-right. The rest of the background is white.

Áreas

Ideia Intuitiva



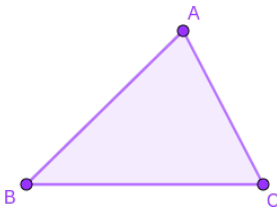
- ▶ Vem da ideia de medir a “ocupação” de uma região do plano por um contorno.
- ▶ Usaremos a área de um quadrado, dada axiomáticamente, para determinar algumas áreas planas, de contorno poligonal.

Região Poligonal



Definição 1

Uma região **triangular** é a figura plana formada por um triângulo e seus pontos interiores.

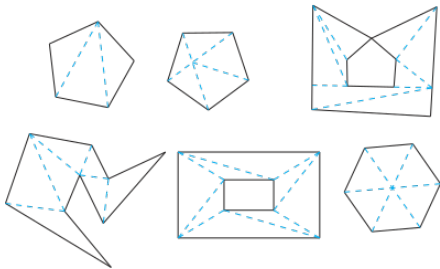


Região Poligonal



Definição 2

Uma região **poligonal** é a figura plana formada pela união de um número finito de regiões triangulares tais que se duas delas se interceptam, então a interseção ou é um ponto ou é um segmento.



Axiomas sobre Áreas



Axioma 1

A cada região poligonal \mathcal{R} está associado um único número real positivo, denotado por $A(\mathcal{R})$.

O número $A(\mathcal{R})$ é a **área** de \mathcal{R} .

Axiomas sobre Áreas



Axioma 2

Se dois triângulos são congruentes, as regiões triangulares determinadas por eles têm a mesma área.

Isso garante que a área da região poligonal não depende da sua posição no plano, mas apenas da sua forma e dos triângulos que a compõem.

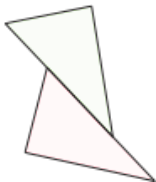
Axiomas sobre Áreas



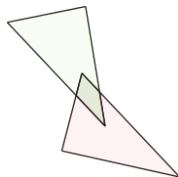
Axioma 3

Se uma região \mathcal{R} é a união de duas regiões \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 , tais que \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 se interceptam em no máximo um número finito de segmentos e pontos, então

$$A(\mathcal{R}) = A(\mathcal{R}_1) + A(\mathcal{R}_2)$$



(a) É a soma de cada área triangular



(b) Não é a soma de cada área triangular

Axiomas sobre Áreas



Axioma 4

A área de um quadrado é o produto do comprimento de seus lados.

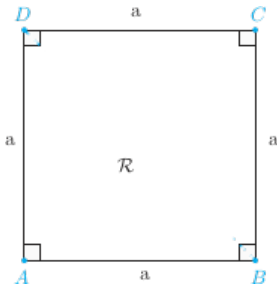


Figura 2: A área de um quadrado com lados de comprimento a é $A(\square ABCD) = a^2$

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the top-left portion, while a light gray shape occupies the bottom-left portion. The rest of the slide is white. The text is centered in the white area.

A área de um retângulo

Áreas de Retângulos



Teorema 1

A área de um retângulo é o produto das medidas de seus lados não paralelos.

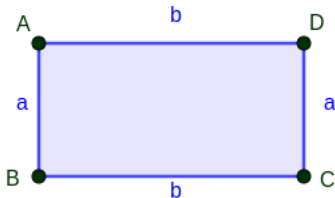
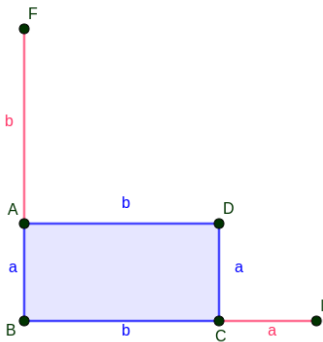


Figura 3: A área de um retângulo \mathcal{R} com lados de comprimento a e b é $A(\mathcal{R}) = ab$

Áreas de Retângulos



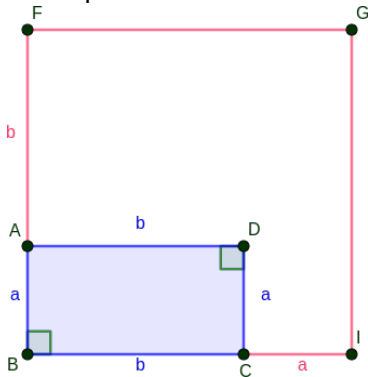
- ▶ A partir do retângulo dado, do lado \overline{AB} prolongue o segmento num comprimento b . Do lado \overline{BC} , prolongue o segmento num comprimento a .



Áreas de Retângulos



- ▶ Traçando em F uma paralela à \overline{BC} e traçando em I uma paralela à \overline{AB} , obtemos um quadrado $FGIB$, de lados com comprimento $a + b$.

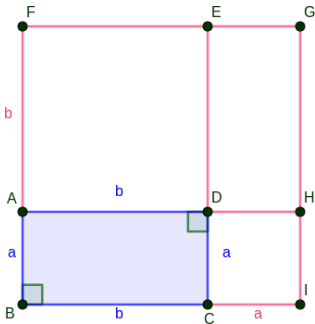


- ▶ Sua área é dada por $(a + b)^2$.

Áreas de Retângulos



- Traçando paralelas aos lados desse quadrado em D subdividimos esse quadrado em quatro regiões poligonais, que se interceptam em no máximo um segmento e/ou um ponto.

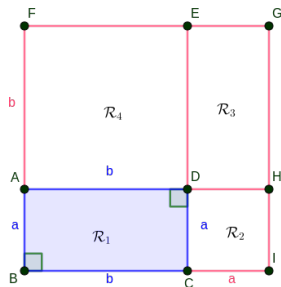


Áreas de Retângulos



Com isso, a área de $\square FGIB$ pode ser determinada pela soma das áreas $A(\mathcal{R}_1)$, $A(\mathcal{R}_2)$, $A(\mathcal{R}_3)$ e $A(\mathcal{R}_4)$, onde:

- ▶ \mathcal{R}_1 é o retângulo original $ABCD$;
- ▶ \mathcal{R}_2 é o quadrado $CDHI$;
- ▶ \mathcal{R}_3 é o retângulo $DEGH$;
- ▶ \mathcal{R}_4 é o quadrado $ADEF$.



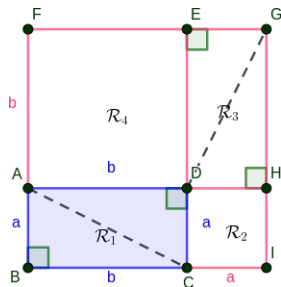
Área de Retângulos



► Já sabemos que $A(\mathcal{R}_2) = a^2$ e $A(\mathcal{R}_4) = b^2$.

$A(\mathcal{R}_2) = A(\mathcal{R}_3)$, pois

- $A(\mathcal{R}_1) = A(\triangle ADC) + A(\triangle ABC)$;
- $A(\mathcal{R}_3) = A(\triangle EDG) + A(\triangle HGD)$;
- Os 4 triângulos são congruentes (pq?).
- Pelos Axioma 2 e 3, os retângulos possuem a mesma área.



Área de Retângulos



► Com isso,

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2(A(\mathcal{R}_1)),$$

de onde segue que

$$A(\mathcal{R}_1) = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - a^2 - b^2}{2} = ab.$$

Área de Triângulos Retângulos



Corolário 1

A área de um triângulo retângulo é a metade do produto das medidas dos seus catetos.

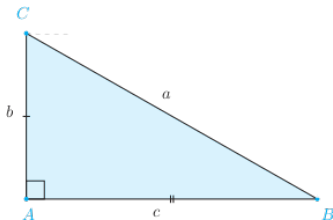
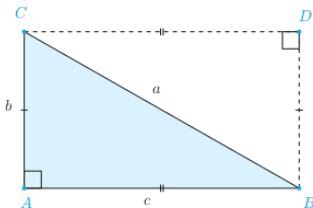


Figura 4: $A(\triangle ABC) = \frac{bc}{2}$

Demonstração do Corolário 1



- ▶ A partir do triângulo dado, construa um retângulo de lados b e c .



- ▶ Os triângulos ABC e DCB são congruentes (pq?), logo possuem mesma área.
- ▶ Como a área do retângulo é igual à soma das áreas dos dois triângulos, obtemos

$$bc = A(\triangle ABC) + A(\triangle DCB) = 2A(\triangle ABC)$$

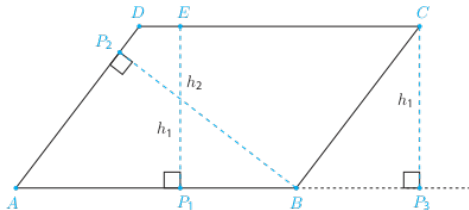
$$\Rightarrow A(\triangle ABC) = \frac{bc}{2}.$$

A área de paralelogramos

Áreas de Paralelogramos



- Antes de calcular a área de um paralelogramo, vamos estabelecer alguma nomenclatura.

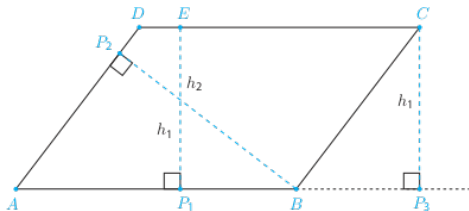


- Costumamos designar um de seus lados como uma base.
- Fixada a base, dizemos que a distância entre a reta suporte deste lado e a reta suporte do seu lado oposto é a **altura** do paralelogramo relativa a esta base.

Áreas de Paralelogramos



► Na figura abaixo:



► h_1 é a altura relativa à base \overline{AB} ;

► h_2 é a altura relativa à base \overline{AD} .

Áreas de Paralelogramos



Teorema 2

A área de um paralelogramo é o produto de qualquer uma de suas bases pela altura correspondente.

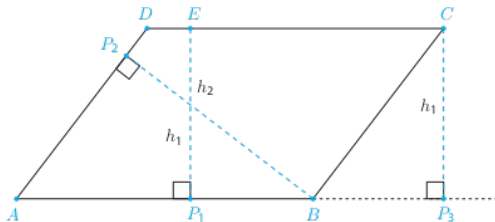


Figura 5: A área pode ser encontrada através das fórmulas $AB * h_1$ ou $AD * h_2$

Demonstração: Teorema 4

- ▶ Escolha uma base e uma altura.
- ▶ A partir delas, construa um retângulo, como a seguir.

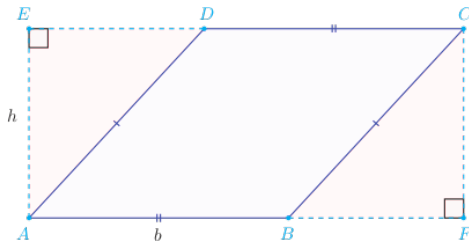


Figura 6: Base escolhida: \overline{AB} . Os lados \overline{AE} e \overline{CF} têm comprimento h

- ▶ Queremos provar que $A(ABCD) = bh$.

Demonstração: Teorema 4

- A área do retângulo $AFCE$ é dada por

$$A(AEFC) = (b + \overline{BF})h = bh + \overline{BF} * h,$$

com $b = AB$.

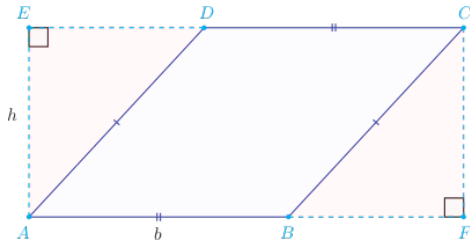
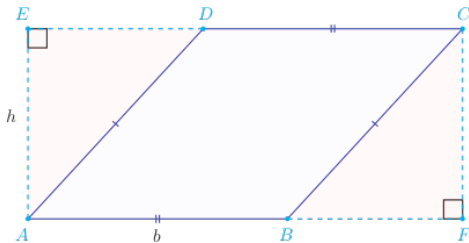


Figura 7: Base escolhida: \overline{AB} . Os lados \overline{AE} e \overline{CF} têm comprimento h

Demonstração: Teorema 4



- ▶ Além disso, tal retângulo é composto por 3 regiões poligonais que se interceptam em no máximo um segmento.

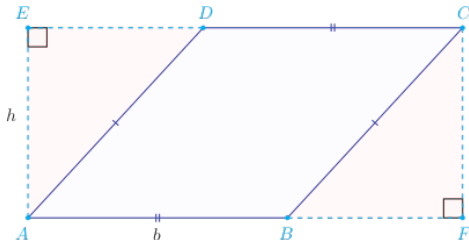


- ▶ Então $A(AFCE) = A(\triangle ADE) + A(ABCD) + A(\triangle BFC)$.

Demonstração: Teorema 4



- Os triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle BFC$ são congruentes (pq?).



- Com isso, $A(\triangle ADE) = A(\triangle BFC) = \frac{BF \cdot h}{2}$.

Demonstração: Teorema 4




► Portanto,

$$\begin{aligned}bh + \overline{BF} * h &= A(AFCE) = A(\triangle ADE) + A(ABCD) + A(\triangle BFC) \\&= \frac{\overline{BF} * h}{2} + A(ABCD) + \frac{\overline{BF} * h}{2} \\&= A(ABCD) + \overline{BF} * h,\end{aligned}$$

de onde segue que

$$\begin{aligned}A(ABCD) &= bh + \overline{BF} * h - \overline{BF} * h \\&= bh\end{aligned}$$

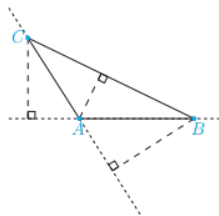
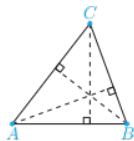
The background of the slide is composed of large, overlapping geometric shapes. On the left side, there are two overlapping triangles in shades of teal. The rest of the slide is a light gray color, which also forms a large triangular shape on the left side, meeting the teal shapes. The overall design is minimalist and modern.

A área de triângulos

Áreas de Paralelogramos



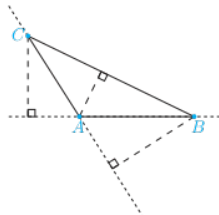
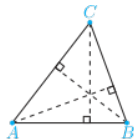
- ▶ Antes de calcular a área de um triângulo qualquer, vamos estabelecer alguma nomenclatura.
- ▶ Novamente, costumamos designar um de seus lados como uma base.
- ▶ Fixada a base, dizemos que a distância entre esta e o vértice oposto é a **altura** do triângulo relativa a esta base.



Áreas de Triângulos



- ▶ Se todos os ângulos de um triângulo são agudos, então todas as alturas são interiores;
- ▶ se um dos ângulos é obtuso, então a altura correspondente a este vértice é interior, e as outras duas são exteriores;
- ▶ se o triângulo é retângulo, então duas alturas coincidem com os catetos, e a altura correspondente à hipotenusa é interior.



Áreas de Triângulos



Teorema 3

A área de um triângulo é a metade do produto da medida de qualquer um de seus lados escolhido como base pela altura correspondente.

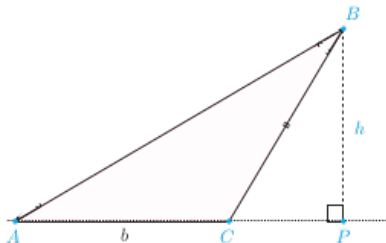
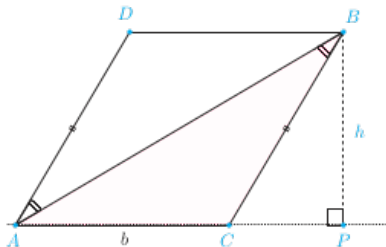


Figura 8: A área do $\triangle ABC$, de lado $\overline{AC} = b$ e altura relativa ao mesmo igual à h , é $A(\triangle ABC) = \frac{bh}{2}$

Áreas de Triângulos

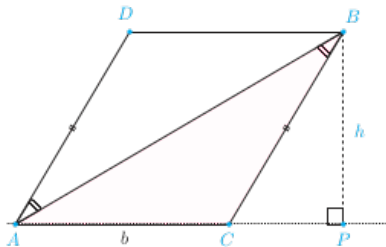


A partir da região dada, construímos um paralelogramo com lados paralelos aos lados \overline{AC} e \overline{CB} .



- ▶ Os triângulos ADB e ABC são congruentes (pq?).
- ▶ Assim, $A(\triangle ADB) = A(\triangle ABC)$.

Áreas de Triângulos



- ▶ Por outro lado, $A(ACBD) = bh$ e $A(ACBD) = A(\triangle ADB) + A(\triangle ABC)$.
- ▶ Portanto,

$$\begin{aligned}bh &= A(\triangle ADB) + A(\triangle ABC) = 2A(\triangle ABC) \\ \Rightarrow A(\triangle ABC) &= \frac{bh}{2}.\end{aligned}$$

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the upper-left portion, while a light gray shape occupies the lower-left portion. The rest of the slide is white. The title text is centered in the white area.

O Teorema Fundamental da Proporcionalidade

Proposição 1



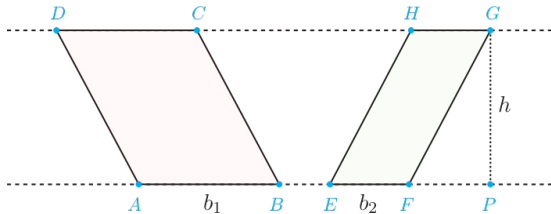
Proposição 1

As áreas de dois paralelogramos com uma mesma altura são proporcionais às suas bases relativas à esta altura.

Demonstração: Sendo h_1 a altura relativa ao lado \overline{AB} do primeiro paralelogramo e h_2 a altura relativa ao lado \overline{EF} do segundo:

► **Hipótese:** $h_1 = h_2$

► **Tese:** $\frac{\mathcal{A}(ABCD)}{\mathcal{A}(EFGH)} = \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}}$



Demonstração: Proposição 1



► Com efeito,

$$\mathcal{A}(ABCD) = (\overline{AB}) * h \quad \text{e} \quad \mathcal{A}(EFGH) = (\overline{EF}) * h.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{A}(ABCD)}{\mathcal{A}(EFGH)} &= \frac{(\overline{AB}) * h}{(\overline{EF}) * h} \\ &= \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Proposição 2



Proposição 2

Prove que as áreas de dois triângulos com uma mesma altura são proporcionais às bases relativas a esta altura.

Demonstração: Exercício

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the top-left corner, while a light gray shape occupies the bottom-left corner. The rest of the slide is white. The text is centered in the white area.

Formulário Avaliativo

Exercícios



1. Mostre que a área de um trapézio é a metade do produto das somas dos comprimentos das bases pela altura relativa a uma delas.

Exercícios



2. Demonstre o teorema de Pitágoras baseando-se na figura ao lado, isto é, mostre que $a^2 = b^2 + c^2$, expressando a área do quadrado maior de dois modos diferentes: como o produto dos lados e como a soma das áreas dos quatro triângulos e do quadrado menor.

