CÁLCULO II

Técnicas de Integração

Integração por Partes

Karla Lima

Sumário

Definição e Exemplos

Quando usá-la?

Observe a seguinte integral:

- $\int x \cos x \, dx$

Você consegue encontrar alguma primitiva (de memória, usando tabelas de integrais ou derivadas ou por substituição)?

Quando usá-la?

- Usamos o método de **integração por partes** quando uma integral **é o produto entre uma função e uma derivada de outra função**.
- Esse método deriva da regra do produto para derivadas.

O método

Dada a integral $\displaystyle\int f(x)g(x)\,dx$, seja

- $G(x)$ qualquer primitiva de $g(x)$ – ou seja, $G'(x) = g(x)$.

Sabemos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[f(x)G(x)] &= f'(x)G(x) + f(x)G'(x)\\ &= f(x)g(x).\end{aligned}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, e pela igualdade acima,

$$\begin{aligned}f(x)G(x) &= \int \frac{d}{dx}[f(x)G(x)]\,dx = \int \left[f'(x)G(x) + f(x)G'(x)\right]\,dx\\ &= \int f'(x)G(x)\,dx + \int f(x)g(x)\,dx.\end{aligned}$$

O método

Como

$$f(x)G(x) = \int f'(x)G(x)\,dx + \int f(x)g(x)\,dx,$$

reescrevemos a igualdade:

$$\int f(x)g(x)\,dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,dx.$$

O método

Na prática, escrevemos:

- $u = f(x), du = f'(x)\,dx$;
- $v = G(x), dv = G'(x)\,dx = g(x)\,dx$.

Com isso, obtemos a fórmula alternativa

$$\int f(x)g(x)\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Como aplicar o método?

Vamos retornar ao nosso primeiro exemplo:

$$\int x \cos x \, dx.$$

Aqui, podemos tomar as seguintes escolhas

1. $f(x) = x$ e $g(x) = \cos x$;
2. $f(x) = \cos x$ e $g(x) = x$.

Como aplicar o método?

1. $f(x) = x$ e $g(x) = \cos x$

Temos:

- $u = x$ e $du = dx$
- $dv = \cos x\, dx$ e, portanto, podemos tomar $v = \int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x$.

Com isso,

$$\begin{aligned}
\int x \cos x\, dx &= \int u\, dv = uv - \int v\, du \\
&= x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\, dx \\
&= x\operatorname{sen} x + \cos x + C.
\end{aligned}$$

Como aplicar o método?

2. $f(x) = \cos x$ e $g(x) = x$

Temos:

- $u = \cos x$ e $du = -\operatorname{sen} x\, dx$
- $dv = x\, dx$ e, portanto, podemos tomar $v = \int x\, dx = \dfrac{x^2}{2}$.

Com isso,

$$\begin{aligned}\int x \cos x\, dx = \int u\, dv = uv - \int v\, du \\ &= \frac{x^2}{2}\cos x - \int \frac{x^2}{2}[-\operatorname{sen} x]\, dx \\ &= \frac{x^2}{2}\cos x + \frac{1}{2}\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx.\end{aligned}$$

Como aplicar o método?

Note que a integral derivada da parte $\int v\,du$ da fórmula, não nos gera uma integral que sabemos resolver ou por tabela de integral ou por substituição:

$$\frac{1}{2}\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx.$$

Isso é uma indicação de que a escolha para u e dv não foi adequada. O ideal é tentar inverter essa escolha e verificar se esta gera uma integral de fácil resolução, como no item 1.

Exercícios

Integrais indefinidas

Exercício 1

Calcule $\int xe^x \, dx.$

Exercício 2

Calcule $\int \ln x \, dx.$

Exercício 3

Calcule $\int t^2 e^t \, dt.$

Integrais Definidas

Como aplicar o método

Para integrais definidas, aplicamos novamente o TFC para obter

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b u\,dv = uv - \int_a^b v\,du.$$

Obs: a variação é dada em x, e não em u e v, como na substituição!

Exercícios

Integrais Definidas

Exercício 4

Calcule $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx.$

Exercício 5

Calcule $\displaystyle\int_1^2 \ln x\,dx.$

Exercício 6

Calcule $\displaystyle\int_{-1}^1 t^2e^t\,dt.$

Outros modos de aplicar

Exercício 7

Calcule $\displaystyle\int_0^1 tan^{-1}\,dx.$

Exercício 8

Calcule $\displaystyle\int e^x sen\,x\,dx.$

Exercício 9

Calcule $\displaystyle\int \cos^4 x\,dx.$

Outros modos de aplicar

Exercício 10

Calcule $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^5 x \, dx.$

Exercício 11

Calcule $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x \, dx.$

Gabarito

Respostas [1, 2]

1. $xe^x - e^x + C$
2. $x \ln x - x + C$
3. $t^2e^t - 2te^t + 2e^t + C$
4. 1
5. $2\ln 2 - 1$
6. $e - 5e^{-1}$
7. $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$
8. $\frac{1}{2}e^x\left(\operatorname{sen} x - \cos x\right) + C$
9. $\frac{1}{4}\cos^3 x \operatorname{sen} x + \frac{3}{8}\cos x \operatorname{sen} x + \frac{3}{8}x + C$
10. $\frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x - \frac{2}{7}\operatorname{sen}^7 x + \frac{1}{9}\operatorname{sen}^9 x + C$
11. $\frac{3}{128}x - \frac{1}{128}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{1024}\operatorname{sen} 8x + C$

Referencias I

H. Anton, I. Bivens, and S. Davis.
Cálculo - Volume I - 10.ed.
Bookman Editora, 2014.

J. Stewart.
Calculo: volume 1.
Pioneira Thomson Learning, 2006.