

Aula 06

Perpendicularidade

Karla Lima

Sumário



1. Perpendicularidade
2. Projeções e Distâncias
3. Trabalho 04/07 - Parte 2

The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the upper-left portion, while a light gray shape occupies the lower-left portion. The rest of the slide is white. The word "Perpendicularidade" is centered in the white area.

Perpendicularidade

Definição



- ▶ Como vimos, Euclides define 'ângulo reto' como sendo igual ao ângulo formado por duas retas que se cortam de maneira a formar quatro ângulos iguais.
- ▶ Essas duas retas são ditas **perpendiculares** (símbolo: \perp).
- ▶ O resultado a seguir é um corolário do Teorema do Triângulo Externo.

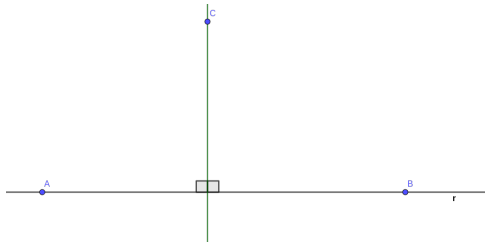
Corolário



Corolário 1

Por um ponto não pertencente a uma reta, passa uma única reta perpendicular a reta dada.

- ▶ **Hipótese:** $C \notin r$.
- ▶ **Tese:** Existe uma única reta que passa por C e é perpendicular a reta r .

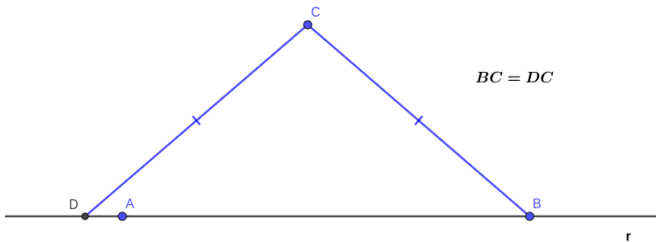


Demonstração Corolário 1



Existência:

- ▶ Seja r uma reta e C um ponto fora dela.
- ▶ Trace na reta r um ponto D tal que $CD = CB$.

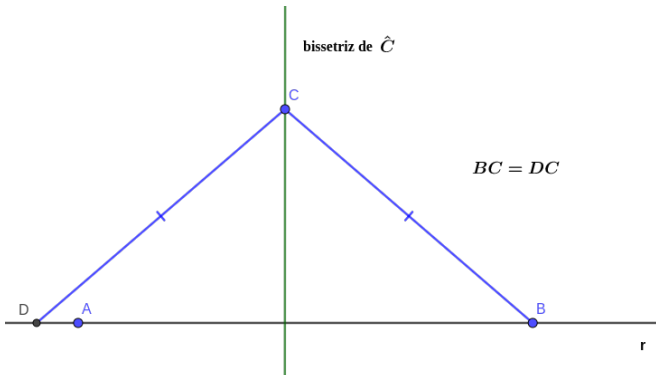


Demonstração Corolário 1



Existência:

- ▶ O triângulo DCB é isósceles, logo sua bissetriz é também sua mediana e sua altura (Teorema 2).

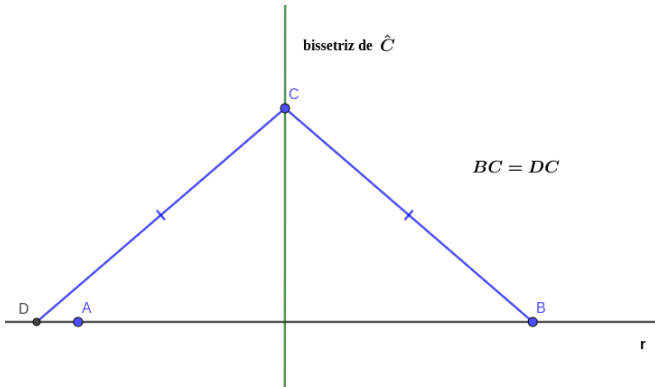


Demonstração Corolário 1



Existência:

- Assim, a bissetriz de \hat{C} é uma reta perpendicular à reta r que passa por C .

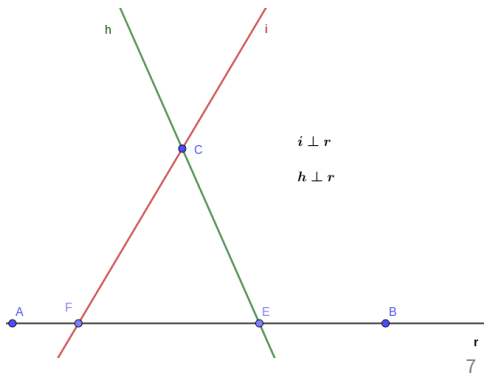


Demonstração Corolário 1



Unicidade: .

- Suponha, por absurdo, que existam duas retas perpendiculares à reta r , que passam por C .



Demonstração Corolário 1



Unicidade:

- ▶ O triângulo CFE possui dois ângulos retos ($\hat{C}\hat{F}E$ e $\hat{C}\hat{E}F$).
- ▶ Mas, por causa do TAE, se um ângulo for reto os outros devem ser agudos, contradizendo a afirmação acima.

Exercício



Exercício 1

Demonstre o seguinte teorema:

Num mesmo plano, duas retas distintas perpendiculares a uma terceira, são paralelas entre si.

Exercício

Exercício 1

Demonstre o seguinte teorema:

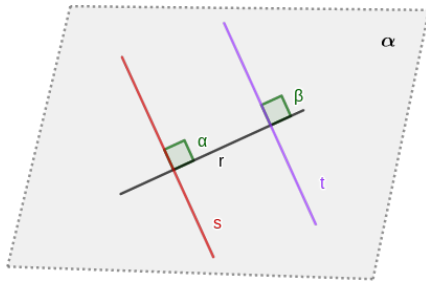
Num mesmo plano, duas retas distintas perpendiculares a uma terceira, são paralelas entre si.

► **Hipótese:**

$$r, s, t \in \alpha, r \perp s,$$

$$r \perp t \text{ e } s \neq t.$$

► **Tese:** s e t são paralelas.



The background of the slide is composed of two large, overlapping geometric shapes. A teal-colored shape occupies the top-left corner, while a light gray shape occupies the bottom-left corner. The rest of the slide is white. The text is centered in the white area.

Projeções e Distâncias

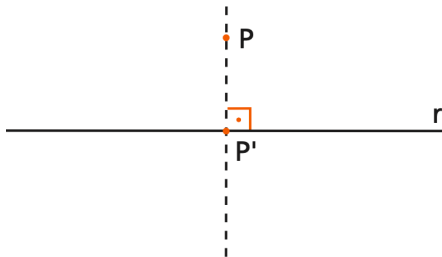
Projeção Ortogonal



Definição 1

Chama-se **projeção ortogonal** de um ponto sobre uma reta r ao ponto de interseção da reta com a perpendicular à ela que passa por aquele ponto.

- ▶ $\overleftrightarrow{PP'} \perp r$ e $\overleftrightarrow{PP'} \cap r = \{P'\}$.
- ▶ Se $P \in r$, então $P' = P$.



Projeção de um segmento sobre uma reta

Definição 2

A **projeção** de um segmento de reta \overline{AB} não perpendicular a uma reta r sobre esta reta é o segmento $\overline{A'B'}$ em que

- ▶ A' é a projeção de A sobre r e
- ▶ B' é a projeção de B sobre r .

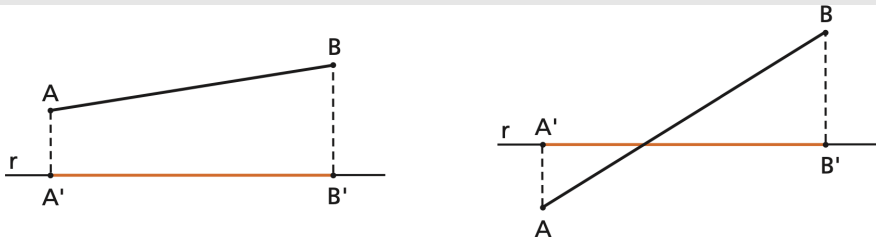


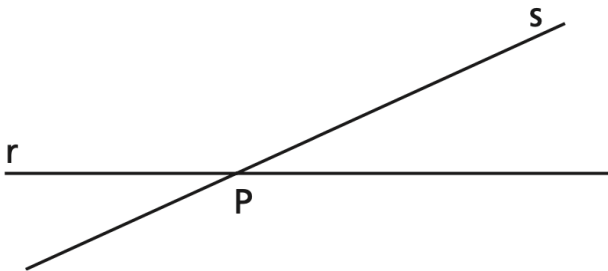
Figura 1: Exemplos da projeção

Retas Oblíquas



Definição 3

Se duas retas são concorrentes e não são perpendiculares, diz-se que essas retas são oblíquas.



Teoremas



Seja r uma reta, P um ponto fora dela e P' a projeção ortogonal deste ponto. Ainda, sejam A e B pontos de r .

Demonstre os teoremas a seguir:

Teorema 1

O segmento perpendicular $\overline{PP'}$ é menor que qualquer oblíquo \overline{PA} .

Teorema 2

Se os segmentos oblíquos \overline{PA} e \overline{PB} possuem projeções congruentes, então eles também são congruentes.

Teorema 3

Segmentos oblíquos congruentes têm projeções congruentes.

Teoremas



Teorema 4

De dois segmentos oblíquos de projeções não congruentes, o de maior projeção é maior.

Teorema 5

De dois segmentos oblíquos não congruentes, o maior tem projeção maior.

Teorema 6

De dois segmentos oblíquos não congruentes, o maior forma com a sua projeção ângulo menor.

Teorema 7

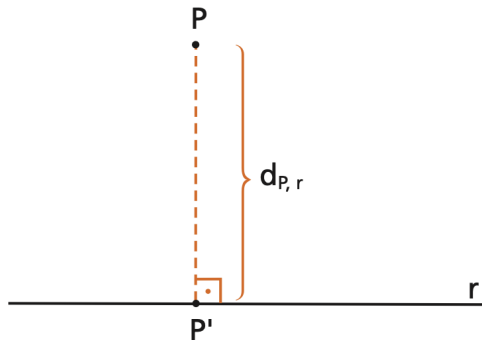
De dois segmentos oblíquos não congruentes, aquele que forma com a sua projeção um ângulo menor é maior.

Distâncias



Definição 4

A distância de um ponto a uma reta é a distância desse ponto à projeção dele sobre a reta.



Exercícios



Exercício 2

Mostre que todo ponto da bissetriz de um ângulo é equidistante dos lados do ângulo.

Trabalho 04/07 - Parte 2

Exercícios



Seja r uma reta, P um ponto fora dela e P' a projeção ortogonal deste ponto. Ainda, sejam A e B pontos de r .

5. O segmento perpendicular $\overline{PP'}$ é menor que qualquer oblíquo \overline{PA} .
6. De dois segmentos oblíquos de projeções não congruentes, o de maior projeção é maior.