GEOMETRIA PLANA

Aula 05

Triângulos

Karla Lima

Sumário

Congruência - Continuação

Teorema 8 - Caso LAA

Se dois triângulos têm um lado congruente, o ângulo oposto e um ângulo adjacente a este lado respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.

Demonstração: Teorema 8

- **Hipótese:**
  - $BC = EF$
  - $\hat{A} = \hat{D}$
  - $\hat{B} = \hat{E}$
- **Tese:** $\triangle ABC = \triangle DEF$.

Comparando-se as medidas dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ podemos afirmar que:

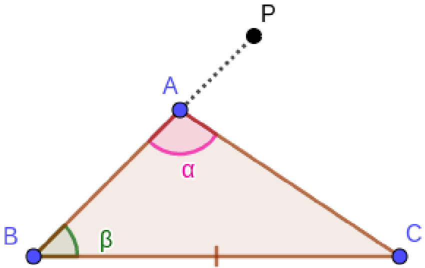
i) ou $AB < DE$;

ii) ou $DE < AB$;

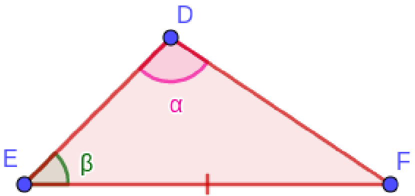
iii) ou $AB = DE$.

Demonstração: Teorema 8

Suponha, por absurdo, que $AB < DE$. Seja P um ponto da semirreta $\overrightarrow{BA}$, tal que $BP = ED$:

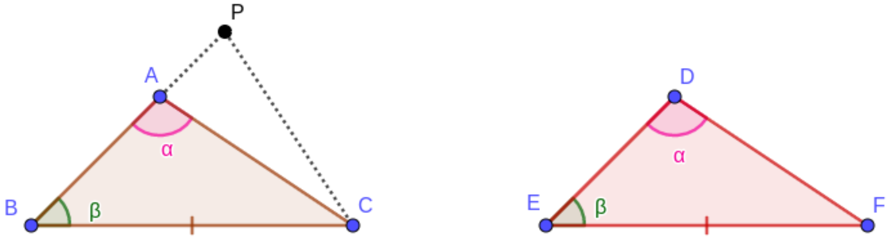


$$BP = ED$$



Demonstração: Teorema 8

O triângulo *PBC* construído será congruente ao triângulo *DEF*:

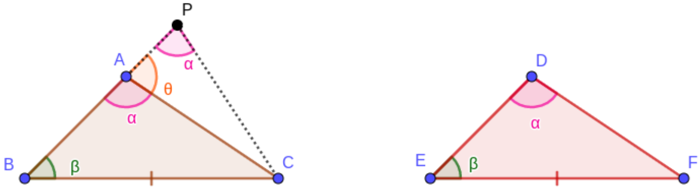


$$\triangle PBC = \triangle DEF \text{ (LAL)}$$

Demonstração: Teorema 8

Portanto,]

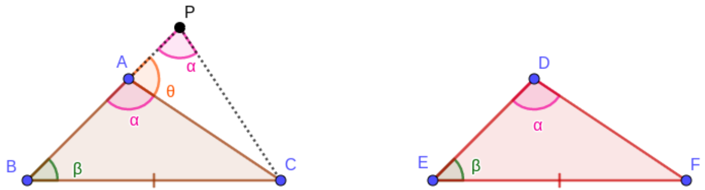
- $\hat{P} = \hat{D}$ (ângulos opostos a lados congruentes)
- $\hat{A} = \hat{D}$ (hipótese)



Portanto,

$$\hat{A} = \hat{P}.$$

Demonstração: Teorema 8



Por outro lado, o ângulo $\hat{A} = B\hat{A}C$ é um ângulo externo do ângulo $C\hat{A}P$. Pelo Teorema 7, $\hat{A}$ é maior que os ângulos internos de $\triangle APC$, não adjacentes a ele. Portanto, teríamos

$$\hat{A} > A\hat{P}C = \hat{P} \quad \text{e} \quad \hat{A} = \hat{P},$$

um absurdo.

Demonstração: Teorema 8

De maneira análoga, demonstra-se que $DE < AB$ é falsa (Exercício 27).
Do exposto, concluímos que $AB = DE$ e, pelo Postulado 11 (LAL), os triângulos ABC e DEF são congruentes.

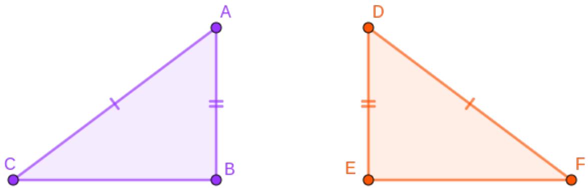
Congruência de Triângulos Retângulos

- Os 4 casos de congruência apresentados aplicam-se a qualquer tipo de triângulos.
- A seguir, apresentamos um caso de congruência exclusivo dos triângulos retângulos.

Teorema 9

Se dois triângulos retângulos possuem a hipotenusa e um cateto respectivamente congruentes então os triângulos são congruentes.

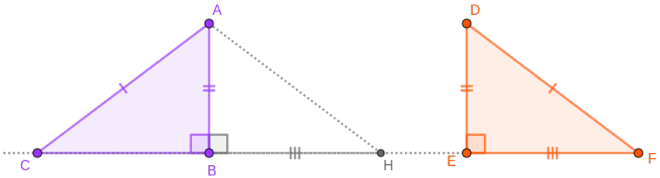
- **Hipótese:**
  - $AC = DF$
  - $AC = DE$
  - $\hat{B} = \hat{E} = 90^\circ$
- **Tese:** $\triangle ABC = \triangle DEF$.



Demonstração: Teorema 9

Sobre a semirreta $\overrightarrow{CB}$, tomemos um ponto H de modo a termos $BH = ED$. Assim,

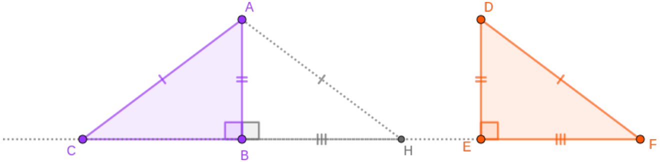
- $AB = DE$ (hipótese) **L**
- $A\hat{B}H = 90^\circ = \hat{E}$ ($A\hat{B}H$ é externo ao ângulo reto $\hat{B}$) **A**
- $BH = EF$ (construção) **L**



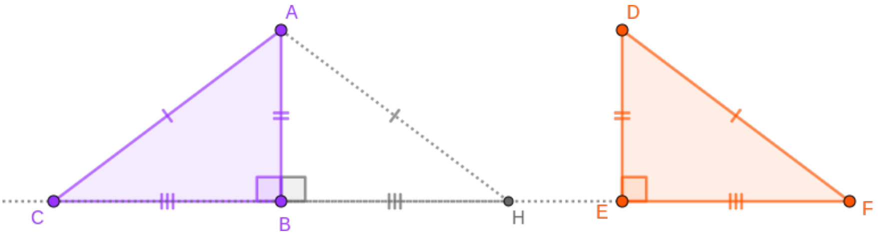
Demonstração: Teorema 9

Portanto, pelo caso (LAL), os triângulos *ABH* e *DEF* são congruentes. Logo,

- $AH = DF$
  (hipotenusas congruentes).
- $AC = DF \Rightarrow AC = AH$.
- $\triangle ACH$ é isósceles.



Demonstração: Teorema 9



Como $\triangle ACH$ é isósceles, a altura $\overline{AB}$ é também a mediana do segmento $\overline{CH}$, de onde concluímos que

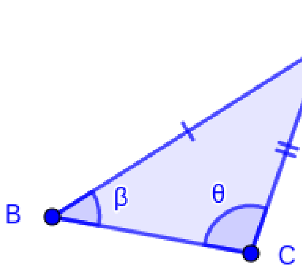
$$CB = BH = EF,$$

e, portanto, os triângulos ABC e DEF são congruentes (LLL).

Teorema 10

Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a estes lados também não são congruentes, e ao maior lado opõe-se o maior ângulo.

- **Hipótese:** $AB \neq AC$
- **Tese:**
  - $\hat{C} \neq \hat{B}$;
  - Se $AB > AC$, então $\hat{C} > \hat{B}$.



Demonstração: Teorema 10

Parte 1: $\hat{C} \neq \hat{B}$.

Suponha, por contradição, que $\hat{C} = \hat{B}$. Pelo Teorema 3, se dois ângulos de um triângulo são congruentes, então o triângulo é isósceles. Mas isso contraria a hipótese de que $AB \neq AC$ e, portanto, devemos ter $\hat{C} \neq \hat{B}$.

Demonstração: Teorema 10

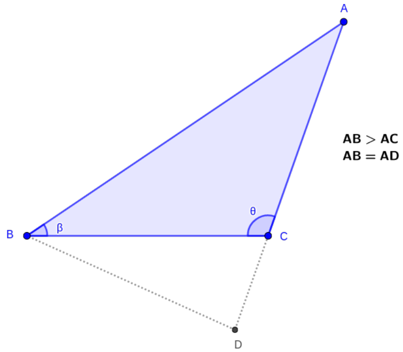
Parte 2: Supondo que $AB > AC$, vamos mostrar que $\hat{C} > \hat{B}$.

- Seja D um ponto da semirreta $\overrightarrow{AC}$ tal que

$$AD = AB.$$

- Dessa forma, o triângulo ABD é isósceles. Portanto

$$A\hat{B}D = \hat{D}$$



Demonstração: Teorema 10

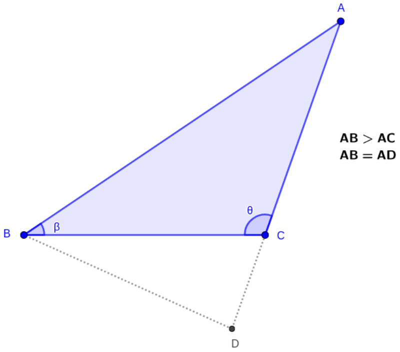
Como $A\hat{C}D$ é um ângulo externo ao triângulo BCD, podemos concluir:

- $\hat{C}$ é maior que o ângulo não adjacente D (Teorema 7);
- Como $\hat{D} = \hat{B} + C\hat{B}D$, tem-se

$$\hat{B} < \hat{D} < \hat{C},$$

de onde segue que

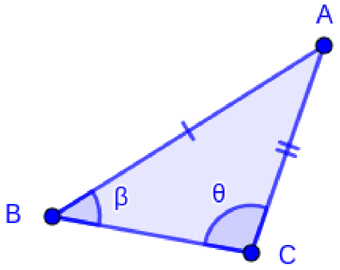
$$\hat{B} < \hat{C}.$$



Teorema 11

Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a estes ângulos também não são congruentes e ao maior ângulo opõe-se o maior lado.

- **Hipótese:** $\hat{B} \neq \hat{C}$
- **Tese:**
  - $AB \neq AC$;
  - Se $\hat{B} < \hat{C}$, então $AC < AB$.



Demonstração: Teorema 10

Parte 1: $AB \neq AC$.

Suponha, por contradição, que $AB = AC$. Então o triângulo é isósceles e, pelo Corolário 1 do Teorema 2, os ângulos oposto a esses lados seriam congruentes, contrariando a hipótese.

Demonstração: Teorema 10

Parte 2: Se $\hat{B} < \hat{C}$, então $AC < AB$.

De fato, considere um triângulo ABC no qual $\hat{C} > \hat{B}$. Há três possibilidades para as medidas de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$:

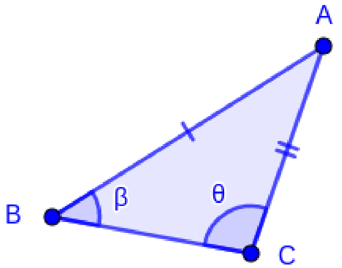
i) ou $AB < AC$;
ii) ou $AB = AC$;
iii) ou $AB > AC$;

Demonstração: Teorema 10

Se $AB < AC$ é verdadeira, pelo Teorema 10, então ao maior lado opõe-se o maior ângulo. Logo, teríamos

$$\hat{C} < \hat{B},$$

contrariando a hipótese.



Demonstração: Teorema 10

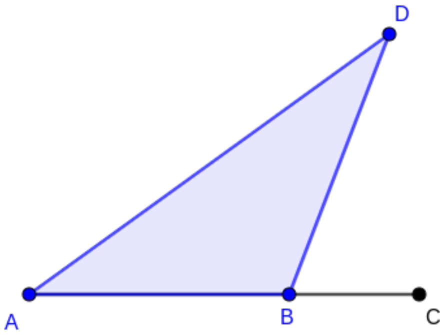
Se ii) é verdadeira, teríamos $AB = AC$, o que já vimos ser uma contradição na parte 1. Portanto só nos resta ter iii) verdadeira, ou seja, se $\hat{B} < \hat{C}$, então

$$AC < AB.$$

Exercício

Exercício 1

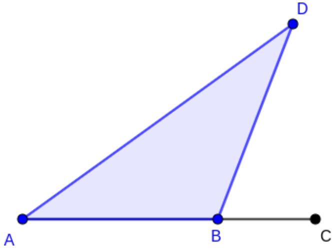
Na figura abaixo, $A\hat{B}D > D\hat{B}C$. Demonstrar que $AD > BD$ e que $AD > AB$.



Exercício

Por hipótese, $A\hat{B}D > D\hat{B}C$.

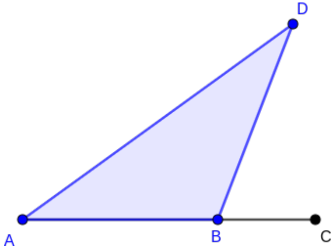
- O ângulo $D\hat{B}C$ é externo ao $\triangle ABC$ em $\hat{C}$. Pelo Teorema 7:
$$D\hat{B}C > \hat{A}.$$
- Junto à hipótese, obtemos
$$\hat{A} < D\hat{B}C < A\hat{B}D.$$
- Pelo Teorema 11, o lado oposto a $A\hat{B}D$ é maior que o lado oposto a $\hat{A}$:
$$AD > BD.$$



Exercício

Analogamente, obtemos o segundo resultado.

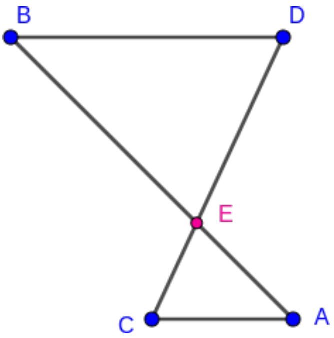
- O ângulo $D\hat{B}C$ é externo ao $\triangle ABC$ em $\hat{C}$. Pelo Teorema 7:
$$D\hat{B}C > \hat{D}.$$
- Junto à hipótese, obtemos
$$\hat{D} < D\hat{B}C < A\hat{B}D.$$
- Pelo Teorema 11, o lado oposto a $A\hat{B}D$ é maior que o lado oposto a $\hat{D}$:
$$AD > AB.$$



Exercício

Exercício 2

Na figura abaixo, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ *se intersectam em* E, $\hat{C} > \hat{A}$ e $\hat{D} > \hat{B}$. *Demonstre que* $AB > CD$.



Exercício

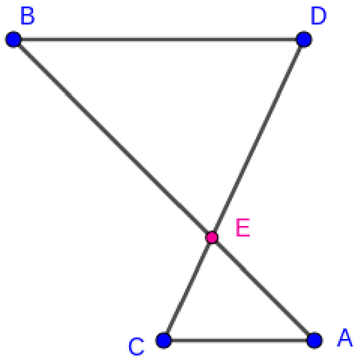
Usando o Teorema 11, obtemos que:

i) $\hat{C} > \hat{A} \Rightarrow EA > EC$

ii) $\hat{D} > \hat{B} \Rightarrow EB > ED$

Assim, somando i) e ii), concluímos que:

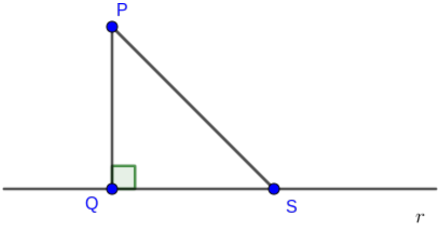
$$AB = AE + EB > CE + ED = CD.$$



Teorema 12

O segmento de menor comprimento que une um ponto a uma reta que não o contém é o segmento perpendicular à reta traçada por este ponto.

- **Hipótese:** $\overline{PQ} \perp r$
- **Tese:** $\overline{PQ}$ é o segmento de menor comprimento que une P a r.

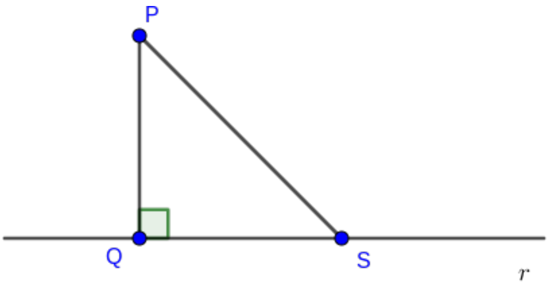


Demonstração: Teorema 10

Sejam r uma reta e P um ponto fora dela.

- Seja Q um ponto de r tal que $\overline{PQ} \perp r$.
- Qualquer outro ponto S de r forma um triângulo PQS, com $\hat{S}$ agudo (Corolário 1, Teorema 7)
- Assim, $\hat{S} < 90^\circ$ e, pelo Teorema 11,

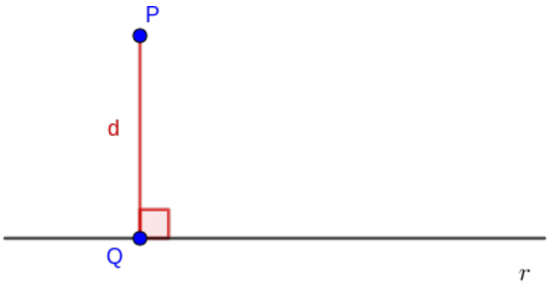
$$PQ < PS.$$



Definição

Definição 1

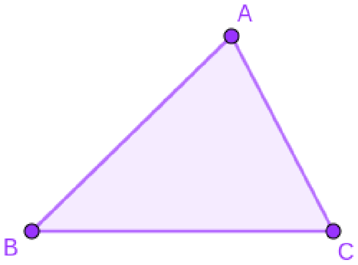
*O comprimento do segmento $\overline{PQ}$ é denominado a **distância** do ponto P a reta r.*



Teorema 13

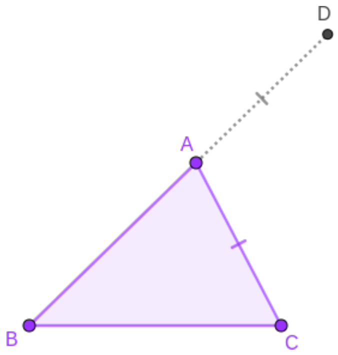
Em todo triângulo, a soma dos comprimentos de dois lados quaisquer é maior que o comprimento do terceiro lado.

- **Hipótese:** ABC é um triângulo.
- **Tese:**
  - i) $BC < BA + AC$
  - ii) $BA < AC + CB$
  - iii) $AC < AB + BC$



Demonstração: Teorema 10

Vamos demonstrar o item i): seja D um ponto da semirreta $\overrightarrow{BA}$, com A entre B e D, tal que $AD = AC$.



Demonstração: Teorema 10

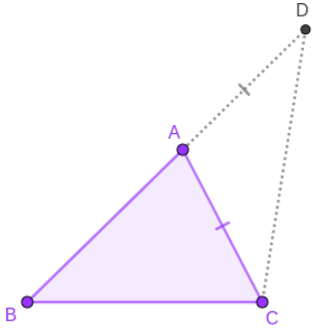
Assim, construímos o triângulo ACD isósceles.

- $A\hat{C}D = \hat{D}$.
- Como $B\hat{C}D = B\hat{C}A + A\hat{C}D$, tem-se

$$B\hat{C}D > A\hat{C}D = \hat{D}.$$

- Pelo Teorema 11, aplicado a $\triangle BCD$

$$BD > BC.$$

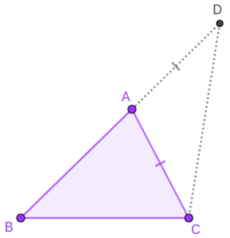


Demonstração: Teorema 10

Ou seja

$$BA + AD = BD > BC,$$

o que prova a desigualdade i).



Como exercício, prove as demais desigualdades (Exercício 28).

Exercício

Exercício 3

Mostre que não é possível construir um triângulo de lados 4 cm, 5 cm e 10 cm.

Exercício 4

Na figura abaixo, provar que $A\hat{D}B > \hat{C}$.