UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Profª. Karla Lima

Cálculo III 07 de Agosto de 2017

(1) Calcule a integral de linha, onde C é a curva dada:

a) $\displaystyle\int_C y^3 ds$, $C : x = t^3$, $y = t$, $0 \leq t \leq 2$.

b) $\displaystyle\int_C xy^4 ds$, C é a metade direita do círculo $x^2 + y^2 = 16$.

c) $\displaystyle\int_C x\,\text{sen}y\,ds$, C é o segmento de $(0, 3)$ até $(4, 6)$.

(2) Determine se F é um campo conservativo ou não. Em caso positivo, encontre uma função ϕ tal que $F = \nabla\phi$.

a) $F(x, y) = (2x - 3y, -3x + 4y - 8)$

b) $F(x, y) = (e^x \cos y, e^x \text{sen} y)$

c) $F(x, y) = (ye^x + \text{sen} y, e^x + x \cos y)$

(3) Calcule a integral $\displaystyle\int_C F \cdot dr$, onde:

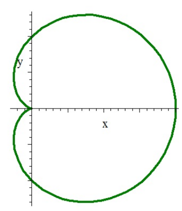
a) $F(x, y) = (e^{x-1}, xy)$ e $C : r(t) = (t^2, t^3)$, $0 \leq t \leq 1$.

b) $F(x, y, z) = (x, y, xy)$ e $C : r(t) = (\cos t, \text{sen} t, t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

c) $F(x, y) = (e^y + ye^x, xe^y + e^x)$ e $C : r(t) = \left(\text{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right), \ln t\right)$, $1 \leq t \leq 2$.

d) $F(x, y) = (2xy, x^2 + \cos y)$ e $C : r(t) = (t, t\cos(\frac{t}{3}))$, $0 \leq t \leq \pi$.

(4) Calcule $\displaystyle\oint_C ydx - xdy$, onde C é a cardióide de equação polar $r(\theta) = 2(1 + cos\theta)$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ e equação paramétrica $\overrightarrow{r}(\theta) = (2\cos t + \cos 2t + 1, 2\text{sen} t + \text{sen} 2t)$:



O exercício a seguir está respondido como exemplo no livro do Stewart. Pesquise.

(5) Considere o campo de forças $\overrightarrow{F}(x, y) = \left(\dfrac{-y}{x^2 + y^2}, \dfrac{x}{x^2 + y^2}\right)$, definido para $(x, y) \neq (0, 0)$.

a) Calcule o trabalho realizado pelo campo $\overrightarrow{F}$ numa partícula que se move ao longo de uma circunferência de raio R.

b) Usando o Teorema de Green e a parte a), mostre que $\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 2\pi$ para toda curva fechada simples C, suave por partes, que circunda a origem.

b) Considere D a região por $\{(x, y)/0 < x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Mostre que

$$\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0$$

Por que isto não contradiz o Teorema de Green?

(6) Considere o campo de forças $\overrightarrow{F}(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$, definido para $(x, y) \neq (0, 0)$.

a) Calcule o trabalho realizado pelo campo $\overrightarrow{F}$ numa partícula que se move ao longo de uma circunferência de raio R.

b) Considere D a região delimitada pela circunferência de centro em $(0, 0)$ e raio R menos a origem. Esta região é descrita por $\{(x, y)/0 < x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Mostre que

$$\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0$$

c) Usando o Teorema de Green e a parte a), mostre que $\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0$ para toda curva fechada simples C, suave por partes, que circunda a origem.
Dica: aqui o teorema de Green não pode ser usado diretamente com b) - Por quê?

Gabarito

(1) a) $\frac{145\sqrt{145} - 1}{54}$.

b) $\frac{8192}{5}$.

c) $\frac{20}{9}[\text{sen}6 - \text{sen}3 - 3\cos 6]$.

(2) a) Conservativo. $\phi(x, y) = x^2 - 3xy + 2y^2 - 8y + k$

b) Não é conservativo.

c) Conservativo. $\phi(x, y) = ye^x + x\text{sen}y + k$

(3) a) $\frac{11}{8} - \frac{1}{e}$.

b) 0.

c) $\ln 2 - 1$.

d) $\frac{\pi^3}{2} + 1$.

(4) -12π.