



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Unidad Profesional "dolfo López Mateos"
ZACATENCO

CATÁLOGO DE DISTRIBUCIONES

ESTUDIANTE: Karla Michelle Soriano Sánchez

PROFESOR: Ricardo Medel Esquivel

ASIGNATURA: Simulación

GRUPO: 7MM1

INTRODUCCIÓN

La teoría de probabilidad constituye uno de los pilares fundamentales en estadística, procesos estocásticos y simulación matemática. Su objetivo principal es modelar formalmente la incertidumbre asociada a fenómenos aleatorios mediante herramientas matemáticas rigurosas.

En este contexto, el concepto de **distribución de probabilidad** permite describir el comportamiento probabilístico de una variable aleatoria. Sea X una variable aleatoria definida sobre un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) ; la distribución de X especifica cómo se asigna la probabilidad a los valores que dicha variable puede asumir.

1. Clasificación de las Distribuciones de Probabilidad

Las distribuciones de probabilidad pueden clasificarse atendiendo a la naturaleza del conjunto de valores que puede asumir la variable aleatoria. De manera general, se distinguen dos grandes categorías: distribuciones discretas y distribuciones continuas.

1.1. Distribuciones Discretas

Una distribución es discreta cuando la variable aleatoria X puede tomar valores aislados o contables, generalmente enteros. En este caso, la probabilidad se asigna directamente a cada valor posible mediante una función de masa de probabilidad (pmf):

$$P(X = x), \quad x \in \mathcal{S},$$

donde \mathcal{S} es un conjunto finito o numerable de los valores posibles de la variable.

Esta función satisface:

$$P(X = x) \geq 0, \quad \sum_{x \in \mathcal{S}} P(X = x) = 1.$$

Las distribuciones discretas más importantes incluyen:

- Bernoulli
- Binomial
- Binomial Negativa
- Geométrica
- Hipergeométrica
- Poisson

Estas distribuciones se utilizan principalmente para modelar fenómenos tales como el número de éxitos en ensayos repetidos, el conteo de eventos en intervalos de tiempo o el número de ocurrencias de cierto suceso.

1.2. Distribuciones Continuas

Una distribución es continua cuando la variable aleatoria X puede tomar valores en intervalos de los números reales. En este caso, la probabilidad se describe mediante una función de densidad de probabilidad (pdf) $f(x)$, tal que:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$

con

$$f(x) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

A diferencia del caso discreto, para variables continuas se cumple que

$$P(X = x) = 0.$$

para todo valor real x .

Entre las distribuciones continuas más relevantes se encuentran:

- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none">■ Uniforme■ Exponencial■ Normal■ Gamma■ Beta | <ul style="list-style-type: none">■ Weibull■ Lognormal■ Chi-cuadrada■ t de Student■ F de Fisher |
|--|---|

Las distribuciones de probabilidad desempeñan un papel fundamental en la simulación de sistemas estocásticos. A través de ellas es posible modelar tiempos de llegada, fallas, demandas, duraciones, variaciones naturales y múltiples fenómenos donde interviene la incertidumbre.

En particular, el conocimiento de propiedades como la esperanza matemática, la varianza, los momentos y las funciones generadoras permite analizar, comparar y validar modelos probabilísticos. Asimismo, constituyen la base teórica para la construcción de algoritmos de generación de variables aleatorias y para el análisis del comportamiento estadístico de sistemas complejos.

El presente catálogo tiene como objetivo recopilar, organizar y describir de manera sistemática las principales distribuciones discretas y continuas utilizadas en probabilidad y simulación, resaltando sus propiedades fundamentales y su aplicación en el modelado matemático.

Distribuciones Discretas

1. Distribución de Bernoulli

Notación

$$X \sim \text{Bernoulli}(p) \quad \text{o bien} \quad X \sim \text{Ber}(p)$$

Soporte

$$X \in \{0, 1\}$$

Función de masa de probabilidad

$$P(X = x) = \begin{cases} p, & x = 1 \\ 1 - p, & x = 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \text{con } 0 < p < 1$$

Función de distribución acumulativa

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - p, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Media: $E[X] = p$

Varianza

$$\text{Var}(X) = p(1 - p)$$

Desviación estándar

$$\sigma = \sqrt{p(1 - p)}$$

Función generadora de momentos:

$$M_X(t) = 1 - p + pe^t$$

Parámetro

$$p \in (0, 1)$$

Interpretación

La distribución de Bernoulli modela un experimento con dos posibles resultados: éxito (1) con probabilidad p o fracaso (0) con probabilidad $1 - p$.

En simulación, permite representar eventos binarios tales como decisiones, activaciones o fallas. Es la base de la distribución Binomial y constituye el bloque elemental para la construcción de modelos probabilísticos más complejos.

Una variable Bernoulli puede generarse a partir de una variable uniforme $U \sim U(0, 1)$ definiendo:

$$X = \begin{cases} 1, & U \leq p \\ 0, & U > p \end{cases}$$

La siguiente gráfica representa la distribución Bernoulli con parámetro $p = 0,6$.

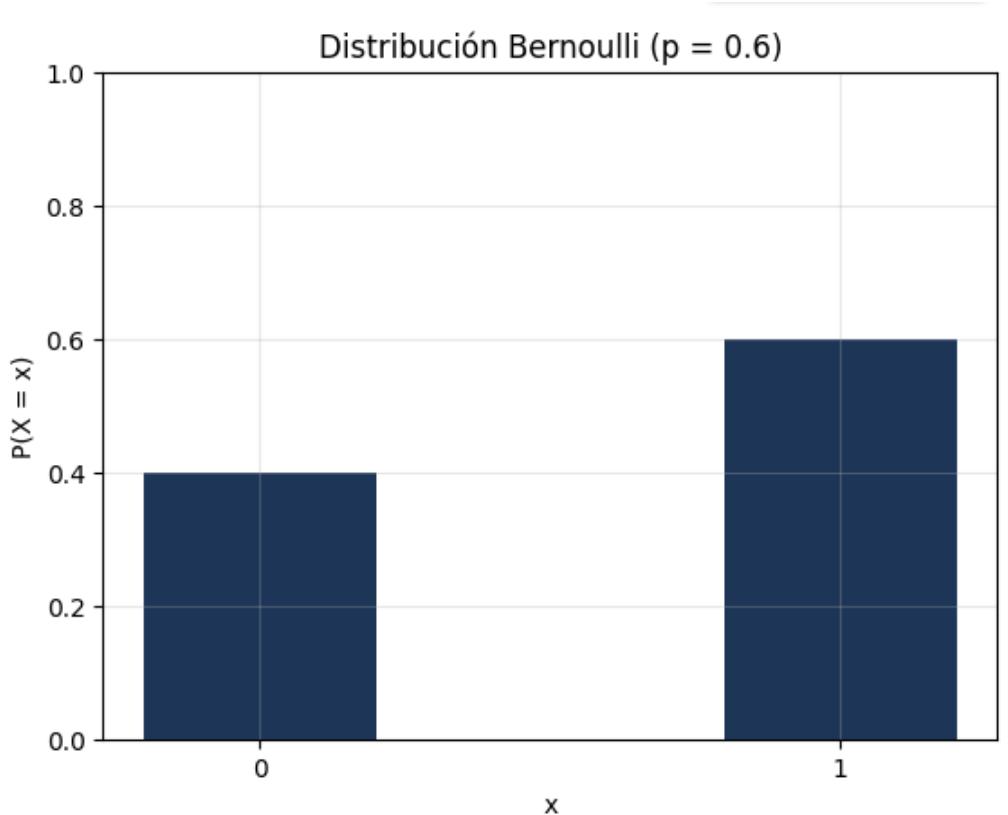


Figura 1: Distribución Bernoulli con parámetro $p = 0,6$. La gráfica muestra $P(X = 0) = 0,4$ y $P(X = 1) = 0,6$. Se observa que la probabilidad de éxito es mayor que la de fracaso.

2. Distribución Binomial

Notación

$$X \sim \text{Binomial}(n, p) \quad \text{o bien} \quad X \sim \text{Bin}(n, p)$$

Soporte

$X \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ donde $n \in \mathbb{N}$ es el número de ensayos y $0 < p < 1$.

Función de masa de probabilidad

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

Función de distribución acumulativa

$$F(k) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

Media :

$$E[X] = np$$

Varianza

$$\text{Var}(X) = np(1-p)$$

Desviación estándar

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Función generadora de momentos

$$M_X(t) = (1 - p + pe^t)^n$$

Parámetros: $n \in \mathbb{N}, \quad 0 < p < 1$

Interpretación e importancia

La distribución Binomial modela el número de éxitos en n ensayos independientes de Bernoulli con probabilidad constante p .

En simulación, se emplea para representar procesos donde se realizan múltiples intentos bajo condiciones idénticas e independientes, tales como el número de respuestas correctas en un examen, el número de clientes que aceptan una oferta o el número de piezas defectuosas en un lote de tamaño fijo.

Desde el punto de vista computacional, puede generarse como la suma de n variables Bernoulli independientes:

$$X = \sum_{i=1}^n X_i, \quad X_i \sim Ber(p)$$

lo cual resalta su importancia como extensión natural del modelo de Bernoulli dentro del análisis probabilístico y la simulación de sistemas discretos.

La siguiente gráfica representa la distribución Binomial con parámetros $n = 10$ y $p = 0,6$.

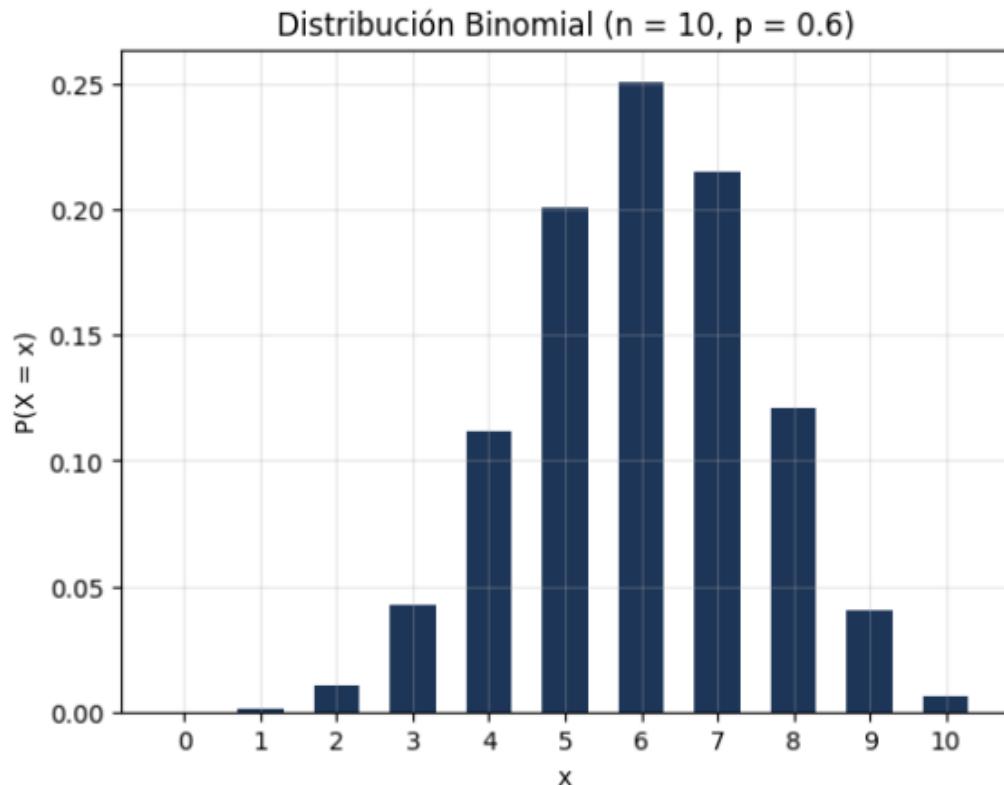


Figura 2: Distribución Binomial con $n = 10$ y $p = 0,6$. Se observa que la mayor probabilidad ocurre alrededor de $x = 6$, que coincide con la media $\mu = np = 6$.

3. Distribución Binomial Negativa

Notación :

$$X \sim \text{Binomial Negativa}(r, p) \quad \text{o bien} \quad X \sim NB(r, p)$$

Soporte: En esta parametrización, X representa el número total de ensayos necesarios para obtener r éxitos:

$$X \in \{r, r+1, r+2, \dots\} \text{ donde } r \in \mathbb{N}, \quad 0 < p < 1.$$

Función de masa de probabilidad

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \quad k = r, r+1, r+2, \dots$$

Función de distribución acumulativa

$$F(k) = P(X \leq k) = \sum_{i=r}^k \binom{i-1}{r-1} p^r (1-p)^{i-r}$$

(No posee forma cerrada elemental; puede expresarse mediante la función beta incompleta regularizada.)

Media :

$$E[X] = \frac{r}{p}$$

Varianza

$$Var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Desviación estándar:

$$\sigma = \sqrt{\frac{r(1-p)}{p^2}}$$

Función generadora de momentos

$$M_X(t) = \left(\frac{pe^t}{1 - (1-p)e^t} \right)^r, \quad t < -\ln(1-p)$$

Parámetros:

$$r \in \mathbb{N}, \quad 0 < p < 1$$

La distribución Binomial Negativa modela el número de ensayos necesarios para obtener r

éxitos en una secuencia de ensayos independientes de Bernoulli con probabilidad de éxito p .

En simulación, se utiliza para representar procesos como el número de intentos hasta alcanzar cierto número de ventas, el número de llamadas necesarias hasta obtener un número fijo de respuestas o el número de eventos requeridos hasta acumular una cantidad determinada de éxitos.

Puede interpretarse como la suma de r variables geométricas independientes:

$$X = \sum_{i=1}^r Y_i, \quad Y_i \sim Geom(p).$$

Cuando $r = 1$, la distribución Binomial Negativa se reduce a la distribución Geométrica.

La siguiente gráfica representa la distribución Binomial Negativa con parámetros $r = 5$ y $p = 0,6$.

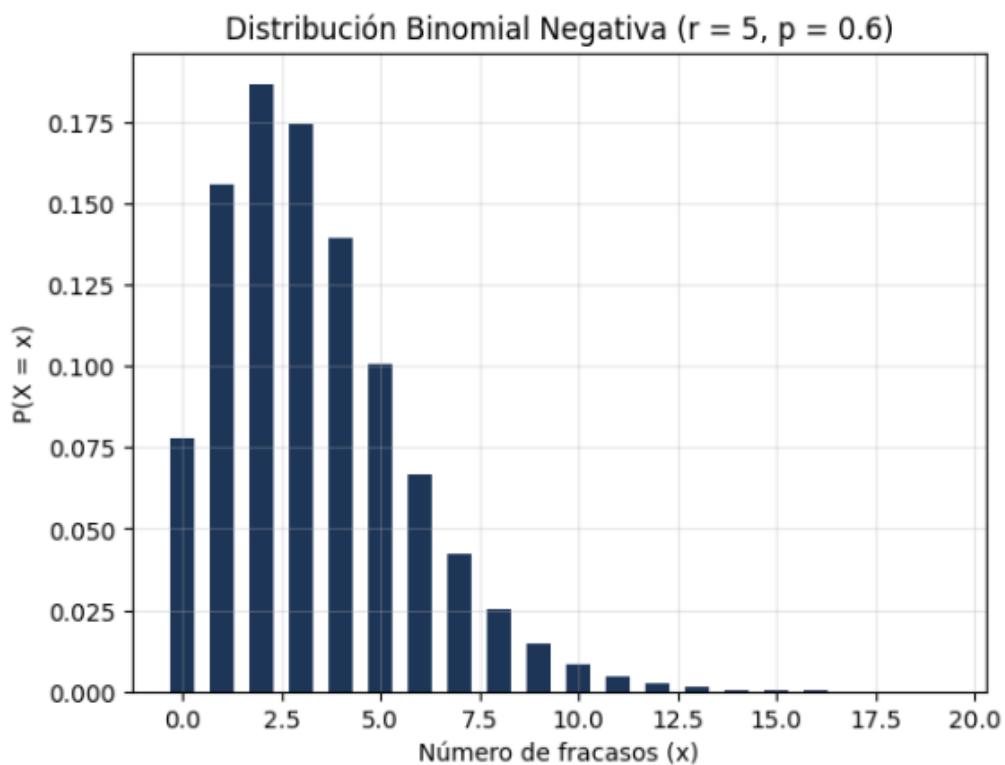


Figura 3: Distribución Binomial Negativa con $r = 5$ y $p = 0,6$. La variable aleatoria representa el número de fracasos antes de obtener r éxitos. Se observa una asimetría hacia la derecha, característica de esta distribución.

4. Distribución Geométrica

La distribución geométrica puede definirse de dos maneras distintas, dependiendo de si se cuenta:

- El número total de ensayos hasta el primer éxito.
- El número de fracasos antes del primer éxito.

Ambas parametrizaciones son correctas y es importante especificar cuál se está utilizando.

Versión 1: Número de ensayos hasta el primer éxito

Notación: $X \sim \text{Geom}(p)$

Soporte: $X \in \{1, 2, 3, \dots\}$, $0 < p < 1$

Función de masa de probabilidad: $P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Función de distribución acumulativa: $F(k) = P(X \leq k) = 1 - (1 - p)^k$

Varianza: $\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Desviación estándar: $\sigma = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}$

Función generadora de momentos

$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1 - (1 - p)e^t}, \quad t < -\ln(1 - p)$$

Parámetro: $0 < p < 1$

Versión 2: Número de fracasos antes del primer éxito

En esta parametrización: $Y \sim \text{Geom}_0(p)$

Soporte: $Y \in \{0, 1, 2, \dots\}$

Función de masa de probabilidad:

$$P(Y = k) = (1 - p)^k p$$

Media: $E[Y] = \frac{1-p}{p}$

$$\text{Varianza: } \text{Var}(Y) = \frac{1-p}{p^2}$$

Interpretación e importancia

La distribución geométrica modela el número de ensayos necesarios hasta que ocurre el primer éxito en una secuencia de ensayos independientes de Bernoulli con probabilidad p .

En simulación, se utiliza para representar el número de intentos hasta lograr una venta, el número de llamadas hasta obtener respuesta o el número de pruebas hasta detectar un defecto.

Una propiedad fundamental es la **propiedad de falta de memoria**:

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t)$$

lo cual indica que el proceso no depende del tiempo ya transcurrido. La siguiente gráfica representa la distribución Geométrica con parámetro $p = 0,6$.

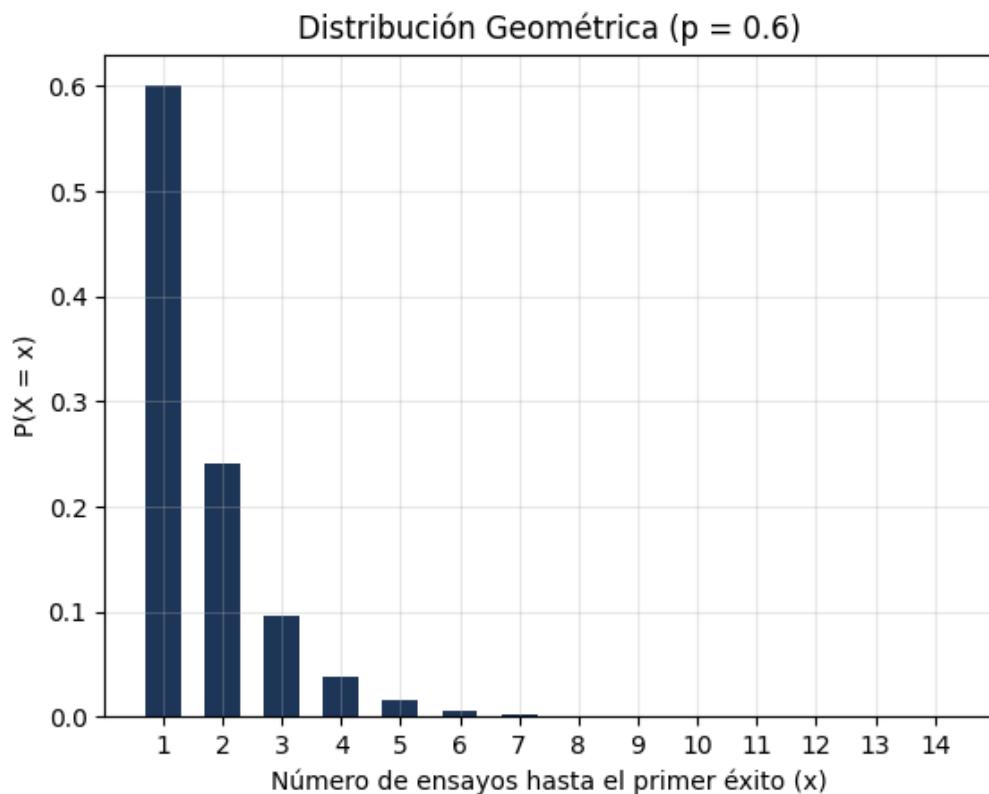


Figura 4: Distribución Geométrica con $p = 0,6$. La variable aleatoria representa el número de ensayos necesarios hasta obtener el primer éxito. Se observa una fuerte concentración en los primeros valores, característica de esta distribución.

5. Distribución Hipergeométrica

Notación

$$X \sim \text{Hipergeométrica}(N, K, n) \quad \text{o bien} \quad X \sim H(N, K, n)$$

Parámetros

- N : tamaño total de la población.
- K : número de elementos exitosos en la población.
- n : tamaño de la muestra.

Con restricciones:

$$0 \leq K \leq N, \quad 0 \leq n \leq N$$

Soporte

$$X \in \{\max(0, n + K - N), \dots, \min(n, K)\}$$

Función de masa de probabilidad

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

donde

$$k = \max(0, n + K - N), \dots, \min(n, K)$$

Función de distribución acumulativa

$$F(k) = P(X \leq k) = \sum_{i=\max(0, n+K-N)}^k \frac{\binom{K}{i} \binom{N-K}{n-i}}{\binom{N}{n}}$$

(No posee forma cerrada elemental.)

Media

$$E[X] = n \frac{K}{N}$$

Varianza

$$Var(X) = n \frac{K}{N} \left(1 - \frac{K}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}$$

Desviación estándar

$$\sigma = \sqrt{n \frac{K}{N} \left(1 - \frac{K}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}}$$

Función generadora de momentos

No posee una forma cerrada simple. Puede expresarse en términos de funciones hipergeométricas generalizadas.

Interpretación e importancia en simulación

La distribución hipergeométrica modela el número de éxitos obtenidos al seleccionar una muestra de tamaño n sin reemplazo de una población finita de tamaño N que contiene K elementos exitosos.

En simulación, se utiliza para representar procesos de muestreo sin reemplazo, como inspección de calidad en lotes finitos o selección aleatoria en poblaciones pequeñas.

La siguiente gráfica representa la distribución Hipergeométrica con parámetros $N = 50$, $K = 20$ y $n = 10$.

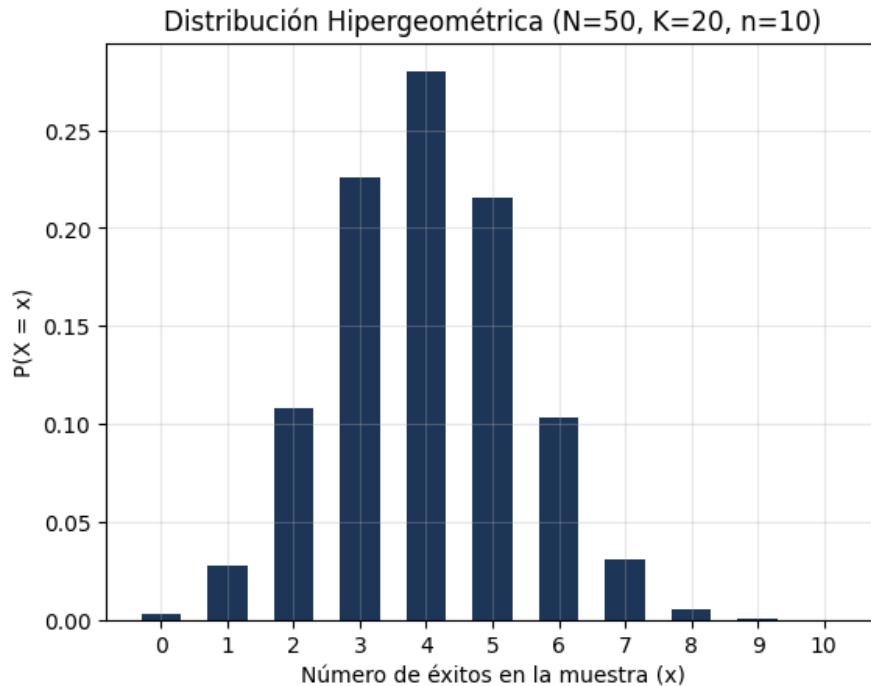


Figura 5: Distribución Hipergeométrica con $N = 50$, $K = 20$ y $n = 10$. La variable aleatoria representa el número de éxitos obtenidos en una muestra sin reemplazo. Se observa una forma aproximadamente simétrica alrededor del valor esperado.

6. Distribución de Poisson

Notación

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda) \quad \text{o bien} \quad X \sim Poi(\lambda)$$

Parámetro

$$\lambda > 0$$

donde λ representa la tasa promedio de ocurrencia de eventos en un intervalo fijo.

Soporte

$$X \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

Función de masa de probabilidad

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Función de distribución acumulativa

$$F(k) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!}$$

(No posee forma cerrada elemental.)

Media

$$E[X] = \lambda$$

Varianza

$$Var(X) = \lambda$$

Desviación estándar

$$\sigma = \sqrt{\lambda}$$

Función generadora de momentos

$$M_X(t) = \exp(\lambda(e^t - 1))$$

Interpretación e importancia en simulación

La distribución de Poisson modela el número de eventos que ocurren en un intervalo fijo de tiempo, espacio o área, cuando los eventos ocurren de manera independiente y con tasa constante λ .

En simulación, se utiliza ampliamente para representar procesos de llegada, como el número de clientes que llegan a un sistema, el número de fallas en un periodo determinado o el conteo de eventos raros en intervalos definidos.

La siguiente gráfica representa la distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 4$.

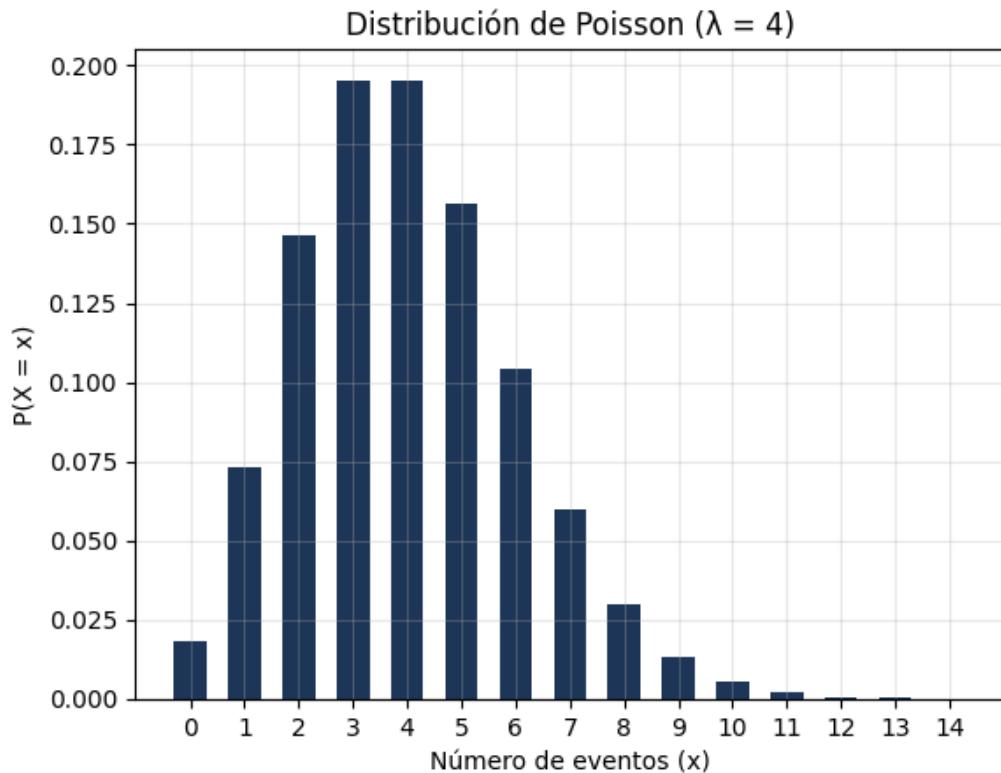


Figura 6: Distribución de Poisson con $\lambda = 4$. Se observa una asimetría hacia la derecha. En esta distribución, la media y la varianza son iguales a λ .

2. Distribuciones Continuas

1. Distribución Uniforme Continua

Notación

$$X \sim \text{Uniforme}(a, b) \quad \text{o bien} \quad X \sim U(a, b)$$

Parámetros

$$a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b$$

Soporte

$$X \in [a, b]$$

Función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Función de distribución acumulativa

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Media

$$E[X] = \frac{a+b}{2}$$

Varianza

$$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Desviación estándar

$$\sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

Función generadora de momentos

$$M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}, \quad t \neq 0,$$

y por continuidad $M_X(0) = 1$.

Interpretación e importancia en simulación

La distribución uniforme continua modela una variable aleatoria que puede tomar cualquier valor dentro del intervalo $[a, b]$ con igual densidad. En simulación es fundamental, ya que constituye la base para la generación de variables aleatorias mediante el método de la transformación inversa y otros algoritmos computacionales.

La siguiente gráfica representa la distribución Uniforme con parámetros $a = 2$ y $b = 8$.

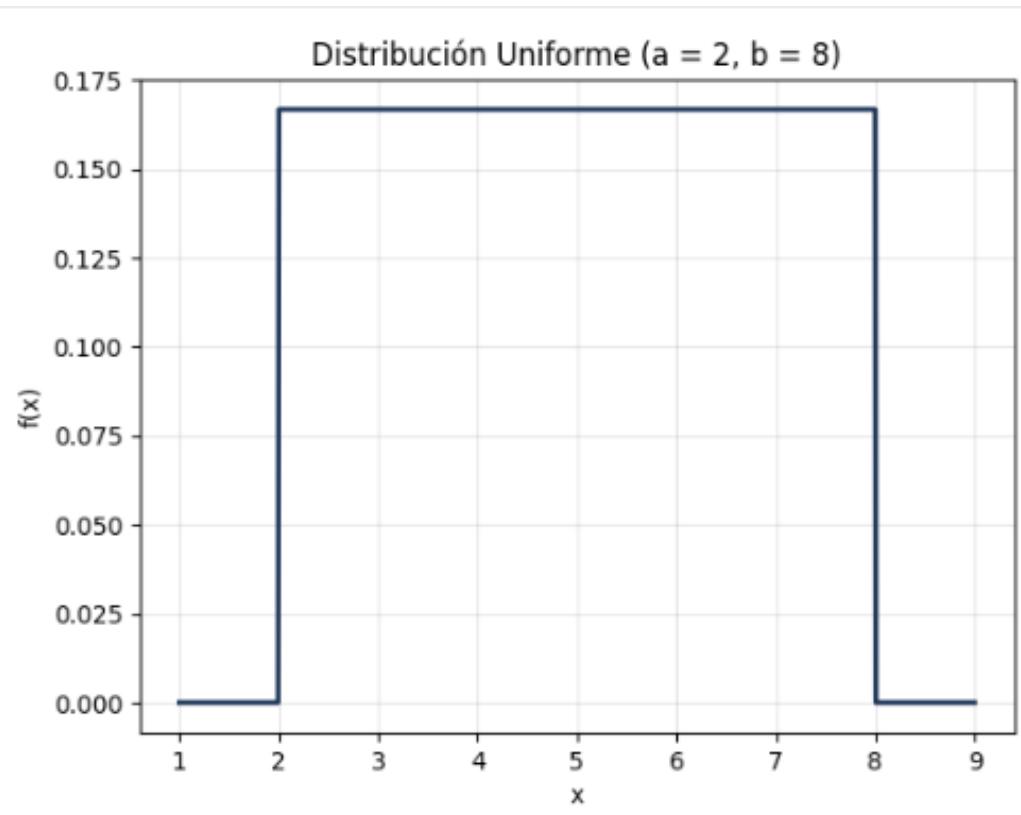


Figura 7: Distribución Uniforme con $a = 2$ y $b = 8$. La función de densidad es constante en el intervalo $[2, 8]$ y nula fuera de él. Todos los valores dentro del intervalo tienen la misma probabilidad.

2.1. 2.Distribución Chi-cuadrada

Notación

$$X \sim \chi^2(k)$$

donde k es el número de grados de libertad.

Parámetro

$$k \in \mathbb{N}, \quad k > 0$$

Soporte

$$X \in (0, \infty)$$

Función de densidad (PDF)

$$f(x) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)}x^{\frac{k}{2}-1}e^{-x/2}, \quad x > 0$$

Función de distribución acumulativa (CDF)

$$F(x) = \frac{\gamma\left(\frac{k}{2}, \frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$$

donde $\gamma(\cdot, \cdot)$ es la función gamma incompleta inferior. No posee forma cerrada elemental.

Media

$$E[X] = k$$

Varianza

$$\text{Var}(X) = 2k$$

Desviación estándar

$$\sigma = \sqrt{2k}$$

Función generadora de momentos (MGF)

$$M_X(t) = (1 - 2t)^{-k/2}, \quad t < \frac{1}{2}$$

Relación con otras distribuciones

Si $Z_i \sim N(0, 1)$ independientes, entonces:

$$X = \sum_{i=1}^k Z_i^2 \sim \chi^2(k)$$

Además, es un caso particular de la distribución Gamma:

$$\chi^2(k) \sim \Gamma\left(\frac{k}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Interpretación

En simulación se utiliza en pruebas de bondad de ajuste, análisis de varianza y construcción de intervalos de confianza para varianzas.

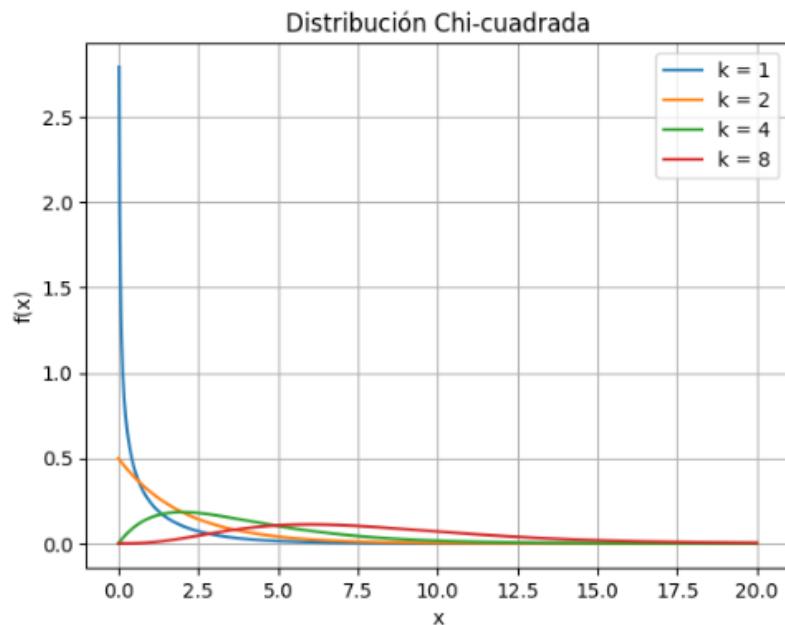


Figura 8: Distribución Chi-cuadrada para distintos grados de libertad

3. Distribución Exponencial

Notación

$$X \sim \text{Exponencial}(\lambda) \quad \text{o bien} \quad X \sim \text{Exp}(\lambda)$$

Parámetro

$$\lambda > 0$$

donde λ es la tasa de ocurrencia (intensidad del proceso).

Soporte

$$X \in [0, \infty)$$

Función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Función de distribución acumulativa

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Media

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

Varianza

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Desviación estándar

$$\sigma = \frac{1}{\lambda}$$

Función generadora de momentos

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda$$

Interpretación e importancia en simulación

La distribución exponencial modela el tiempo de espera hasta la ocurrencia del primer evento en un proceso con tasa constante λ . En simulación se utiliza para representar tiempos entre llegadas, tiempos de falla o duraciones de servicio, siendo fundamental en modelos de colas y procesos de Poisson.

Una propiedad clave es la **propiedad de falta de memoria**:

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t).$$

La siguiente gráfica muestra la distribución Exponencial para diferentes valores del parámetro λ .

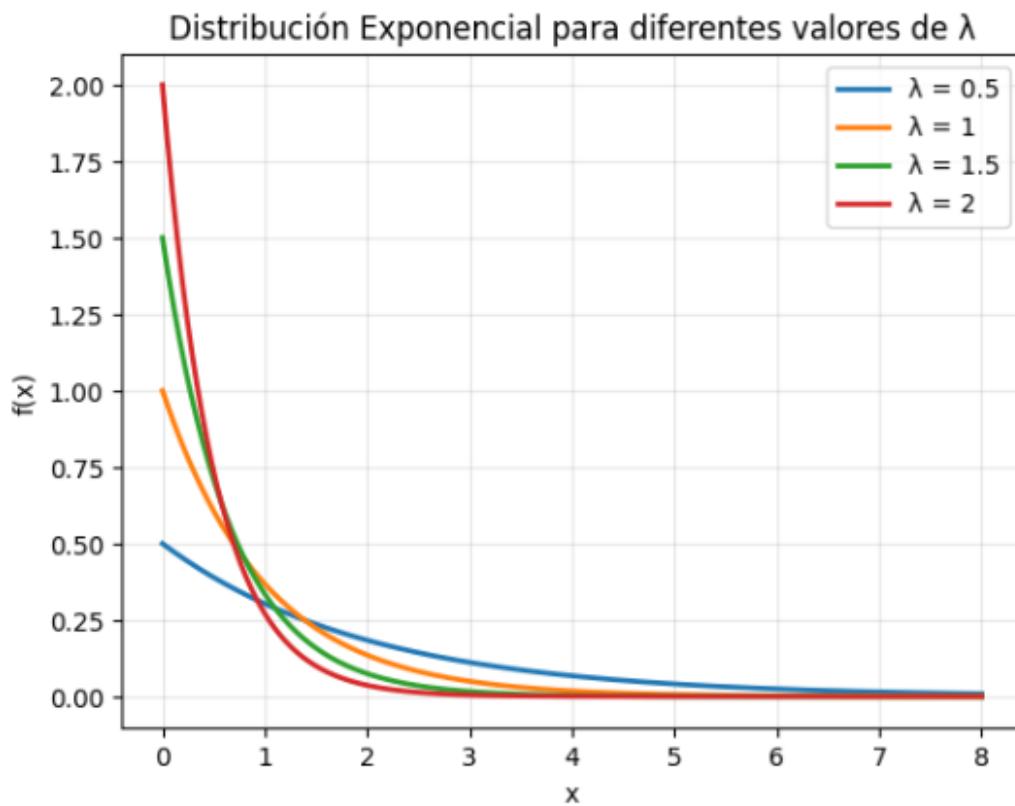


Figura 9: Distribución Exponencial para $\lambda = 0,5, 1, 1,5, 2$. Se observa que al aumentar λ , la curva se concentra más cerca de cero y decrece más rápidamente. La media está dada por $\mu = \frac{1}{\lambda}$.

4. Distribución Beta

Notación

$$X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta) \quad \text{o bien} \quad X \sim B(\alpha, \beta)$$

Parámetros

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0$$

donde α y β son parámetros de forma.

Soporte

$$X \in (0, 1)$$

Función de densidad

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, \quad 0 < x < 1$$

donde

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

es la función Beta.

Función de distribución acumulativa

$$F(x) = I_x(\alpha, \beta),$$

donde $I_x(\alpha, \beta)$ es la función beta incompleta regularizada.

(No posee forma cerrada elemental.)

Media

$$E[X] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

Varianza

$$Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

Desviación estándar

$$\sigma = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}}$$

Función generadora de momentos

No posee una forma cerrada simple en términos elementales; puede expresarse mediante funciones hipergeométricas.

Casos especiales importantes

- Si $\alpha = \beta = 1$, se obtiene la distribución Uniforme(0, 1).
- Para $\alpha > 1$ y $\beta > 1$, la distribución es unimodal.
- Puede tomar formas simétricas o asimétricas dependiendo de los parámetros.

Interpretación e importancia en simulación

La distribución Beta modela variables aleatorias continuas acotadas en el intervalo (0, 1), como proporciones, probabilidades o fracciones. En simulación se utiliza para representar incertidumbre en parámetros probabilísticos, tasas de éxito y fenómenos donde la variable debe permanecer dentro de límites definidos.

La siguiente gráfica muestra la función de densidad (PDF) y la función acumulativa (CDF) de la distribución Beta con parámetros $\alpha = 2$ y $\beta = 5$.

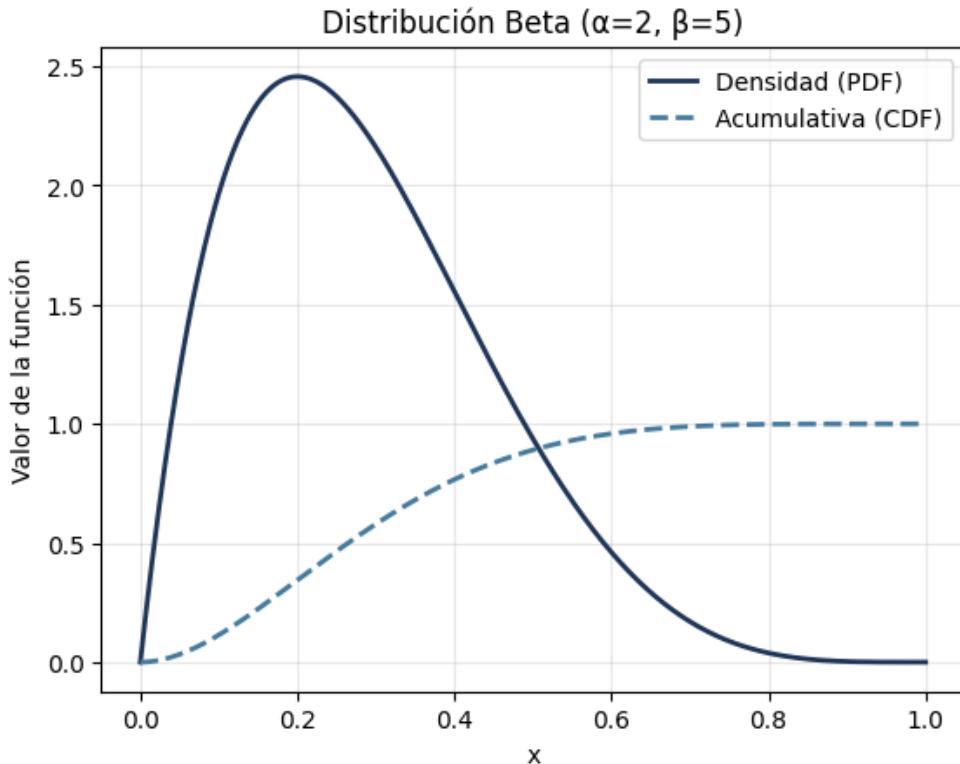


Figura 10: Distribución Beta con $\alpha = 2$ y $\beta = 5$. La línea continua representa la función de densidad (PDF), mientras que la línea punteada representa la función acumulativa (CDF). La CDF es creciente y toma valores entre 0 y 1.

5. Distribución Gamma

Notación

$$X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda) \quad \text{o bien} \quad X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$$

Parámetros

$$\alpha > 0 \quad (\text{parámetro de forma}), \quad \lambda > 0 \quad (\text{parámetro de tasa})$$

Soporte

$$X \in (0, \infty)$$

Función de densidad

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

donde $\Gamma(\alpha)$ es la función Gamma:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Función de distribución acumulativa

$$F(x) = \frac{\gamma(\alpha, \lambda x)}{\Gamma(\alpha)},$$

donde $\gamma(\alpha, \lambda x)$ es la función gamma incompleta inferior.

(No posee forma cerrada elemental.)

Media

$$E[X] = \frac{\alpha}{\lambda}$$

Varianza

$$Var(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

Desviación estándar

$$\sigma = \frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda}$$

Función generadora de momentos

$$M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^\alpha, \quad t < \lambda$$

Casos especiales importantes

- Si $\alpha = 1$, la distribución Gamma se reduce a la distribución Exponencial.
- Si $\alpha = \frac{k}{2}$ y $\lambda = \frac{1}{2}$, se obtiene la distribución Chi-cuadrada con k grados de libertad.

Interpretación e importancia en simulación

La distribución Gamma modela el tiempo total de espera hasta que ocurren α eventos en un proceso con tasa constante λ . En simulación se utiliza para representar tiempos acumulados, duraciones de procesos y fenómenos de espera múltiples, siendo una generalización natural de la distribución exponencial.

La siguiente gráfica muestra la función de densidad (PDF) y la función acumulativa (CDF) de la distribución Gamma con parámetros $\alpha = 3$ y $\lambda = 1,5$.

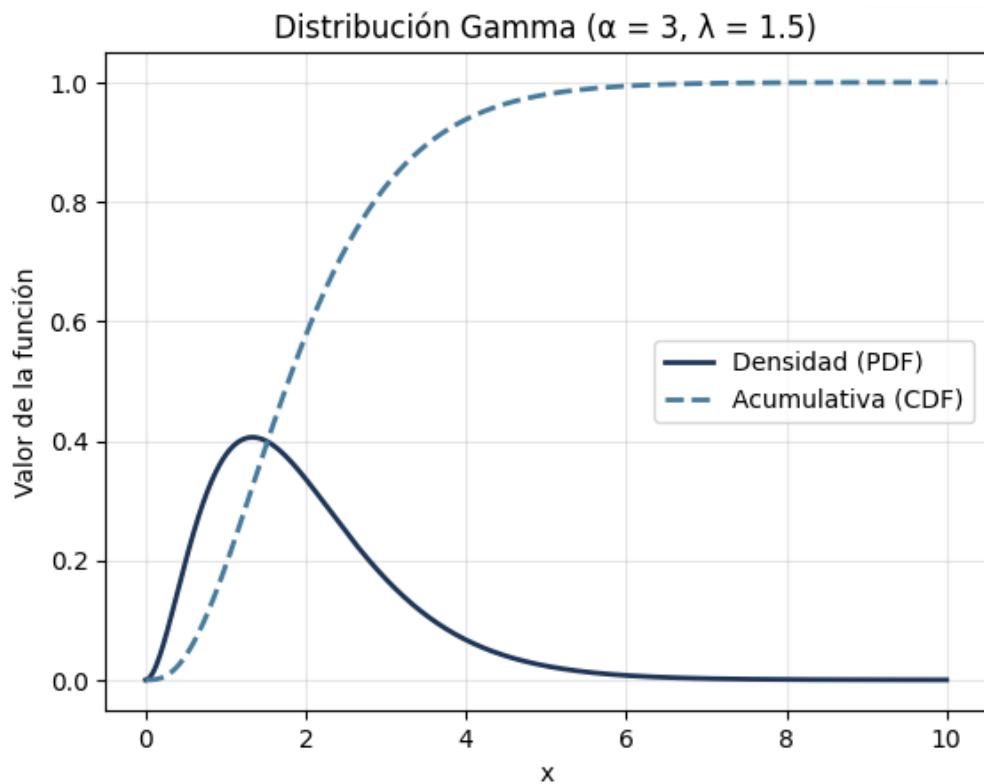


Figura 11: Distribución Gamma con $\alpha = 3$ y $\lambda = 1,5$. La línea continua representa la función de densidad (PDF), mientras que la línea punteada representa la función acumulativa (CDF). La CDF es creciente y converge a 1 conforme x aumenta.

6. Distribución Normal

Notación

$$X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2) \quad \text{o bien} \quad X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Parámetros

$$\mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma^2 > 0$$

donde μ es la media, σ^2 la varianza y σ la desviación estándar.

Soporte

$$X \in (-\infty, \infty)$$

Función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

Función de distribución acumulativa

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt$$

(No posee forma cerrada elemental; se expresa mediante la función error.)

Media

$$E[X] = \mu$$

Varianza

$$Var(X) = \sigma^2$$

Función generadora de momentos

$$M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

Caso especial: Normal Estándar

Si

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma},$$

entonces

$$Z \sim N(0, 1)$$

y su densidad es

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}.$$

Interpretación e importancia en simulación

La distribución normal modela fenómenos donde intervienen múltiples factores independientes, generando una forma simétrica alrededor de la media μ . En simulación es fundamental debido al Teorema Central del Límite, el cual establece que la suma de variables independientes tiende a seguir una distribución normal bajo condiciones generales.

Se utiliza ampliamente para modelar errores experimentales, mediciones físicas y variaciones naturales.

La siguiente gráfica representa la distribución Normal con parámetros $\mu = 0$ y $\sigma = 1$.

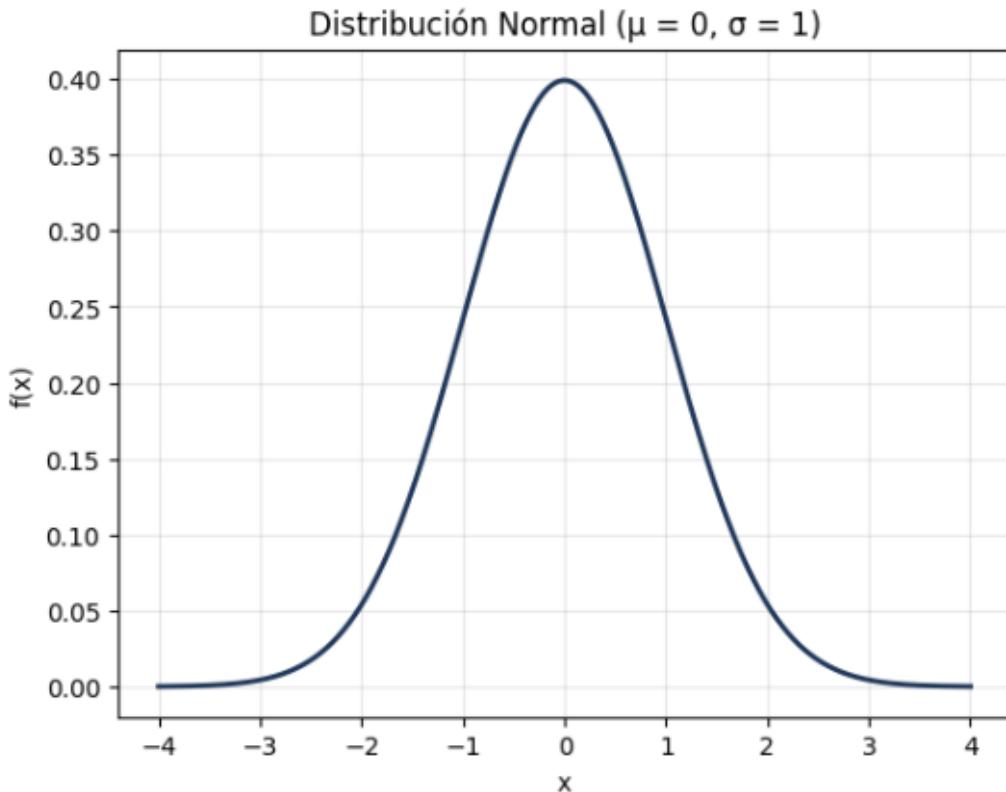


Figura 12: Distribución Normal estándar con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$. La curva es simétrica respecto a la media y el área bajo la curva es igual a 1.