INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Unidad Profesional .ᴬdolfo López Mateos”

ZACATENCO

CATÁLOGO DE DISTRIBUCIONES

ESTUDIANTE: Karla Michelle Soriano Sánchez

PROFESOR: Ricardo Medel Esquivel

ASIGNATURA: Procesos estocasticos

GRUPO: 7MM1

26 DE FEBRERO 2026

INTRODUCCIÓN

La teoría de probabilidad constituye uno de los pilares fundamentales en estadística, procesos estocásticos y simulación matemática. Su objetivo principal es modelar formalmente la incertidumbre asociada a fenómenos aleatorios mediante herramientas matemáticas rigurosas.

En este contexto, el concepto de **distribución de probabilidad** permite describir el comportamiento probabilístico de una variable aleatoria. Sea X una variable aleatoria definida sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$; la distribución de X especifica cómo se asigna la probabilidad a los valores que dicha variable puede asumir.

1. Clasificación de las Distribuciones de Probabilidad

Las distribuciones de probabilidad pueden clasificarse atendiendo a la naturaleza del conjunto de valores que puede asumir la variable aleatoria. De manera general, se distinguen dos grandes categorías: distribuciones discretas y distribuciones continuas.

1.1. Distribuciones Discretas

Una distribución es discreta cuando la variable aleatoria X puede tomar valores aislados o contables, generalmente enteros. En este caso, la probabilidad se asigna directamente a cada valor posible mediante una función de masa de probabilidad (pmf):

$$P(X = x), \quad x \in \mathcal{S},$$

donde $\mathcal{S}$ es un conjunto finito o numerable de los valores posibles de la variable.

Esta función satisface:

$$P(X = x) \geq 0, \qquad \sum_{x \in \mathcal{S}} P(X = x) = 1.$$

Las distribuciones discretas más importantes incluyen:

- **Bernoulli**
- **Binomial**
- **Binomial Negativa**
- **Geométrica**
- **Hipergeométrica**
- **Poisson**

Estas distribuciones se utilizan principalmente para modelar fenómenos tales como el número de éxitos en ensayos repetidos, el conteo de eventos en intervalos de tiempo o el número de ocurrencias de cierto suceso.

1.2. Distribuciones Continuas

Una distribución es continua cuando la variable aleatoria X puede tomar valores en intervalos de los números reales. En este caso, la probabilidad se describe mediante una función de densidad de probabilidad (pdf) $f(x)$, tal que:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

con

$$f(x) \geq 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

A diferencia del caso discreto, para variables continuas se cumple que

$$P(X = x) = 0.$$

para todo valor real x.

Entre las distribuciones continuas más relevantes se encuentran:

- **Uniforme**
- **Exponencial**
- **Normal**
- **Gamma**
- **Beta**
- **Weibull**
- **Lognormal**
- **Chi-cuadrada**
- **t de Student**
- **F de Fisher**

Las distribuciones de probabilidad desempeñan un papel fundamental en la simulación de sistemas estocásticos. A través de ellas es posible modelar tiempos de llegada, fallas, demandas, duraciones, variaciones naturales y múltiples fenómenos donde interviene la incertidumbre.

En particular, el conocimiento de propiedades como la esperanza matemática, la varianza, los momentos y las funciones generadoras permite analizar, comparar y validar modelos probabilísticos. Asimismo, constituyen la base teórica para la construcción de algoritmos de generación de variables aleatorias y para el análisis del comportamiento estadístico de sistemas complejos.

El presente catálogo tiene como objetivo recopilar, organizar y describir de manera sistemática las principales distribuciones discretas y continuas utilizadas en probabilidad y simulación, resaltando sus propiedades fundamentales y su aplicación en el modelado matemático.

Distribuciones Discretas

1. Distribución de Bernoulli

Notación

$$X \sim \text{Bernoulli}(p) \quad \text{o bien} \quad X \sim Ber(p)$$

Soporte

$$X \in \{0, 1\}$$

Función de masa de probabilidad

$$P(X = x) = \begin{cases} p, & x = 1 \\ 1 - p, & x = 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad \text{con } 0 < p < 1$$

Función de distribución acumulativa

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - p, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Media: $E[X] = p$

Varianza

$$Var(X) = p(1 - p)$$

Desviación estándar

$$\sigma = \sqrt{p(1 - p)}$$

Función generadora de momentos:

$$M_X(t) = 1 - p + pe^t$$

Parámetro

$$p \in (0, 1)$$

Interpretación

La distribución de Bernoulli modela un experimento con dos posibles resultados: éxito (1) con probabilidad p o fracaso (0) con probabilidad $1 - p$.

En simulación, permite representar eventos binarios tales como decisiones, activaciones o fallas. Es la base de la distribución Binomial y constituye el bloque elemental para la construcción de modelos probabilísticos más complejos.

Una variable Bernoulli puede generarse a partir de una variable uniforme $U \sim U(0, 1)$ definiendo:

$$X = \begin{cases} 1, & U \leq p \\ 0, & U > p \end{cases}$$

La siguiente gráfica representa la distribución Bernoulli con parámetro $p = 0{,}6$.

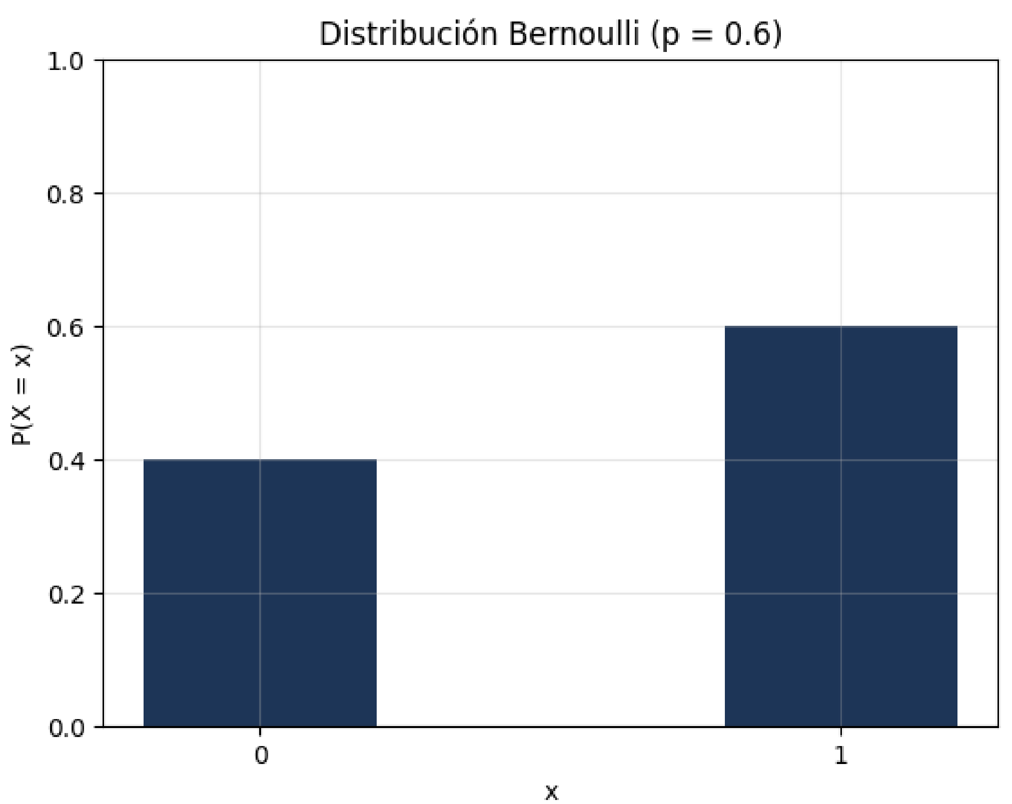

Figura 1: Distribución Bernoulli con parámetro $p = 0{,}6$. La gráfica muestra $P(X = 0) = 0{,}4$ y $P(X = 1) = 0{,}6$.Se observa que la probabilidad de éxito es mayor que la de fracaso.

2. Distribución Binomial

Notación

$$X \sim \text{Binomial}(n, p) \quad \text{o bien} \quad X \sim Bin(n, p)$$

Soporte

$X \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ donde $n \in \mathbb{N}$ es el número de ensayos y $0 < p < 1$.

Función de masa de probabilidad

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Función de distribución acumulativa

$$F(k) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i}$$

Media :

$$E[X] = np$$

Varianza

$$Var(X) = np(1 - p)$$

Desviación estándar

$$\sigma = \sqrt{np(1 - p)}$$

Función generadora de momentos

$$M_X(t) = (1 - p + pe^t)^n$$

Parámetros: $n \in \mathbb{N}, \quad 0 < p < 1$

Interpretación e importancia

La distribución Binomial modela el número de éxitos en n ensayos independientes de Bernoulli con probabilidad constante p.

En simulación, se emplea para representar procesos donde se realizan múltiples intentos bajo condiciones idénticas e independientes, tales como el número de respuestas correctas en un examen, el número de clientes que aceptan una oferta o el número de piezas defectuosas en un lote de tamaño fijo.

Desde el punto de vista computacional, puede generarse como la suma de n variables Bernoulli independientes:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad X_i \sim Ber(p)$$

lo cual resalta su importancia como extensión natural del modelo de Bernoulli dentro del análisis probabilístico y la simulación de sistemas discretos.

La siguiente gráfica representa la distribución Binomial con parámetros $n = 10$ y $p = 0{,}6$.

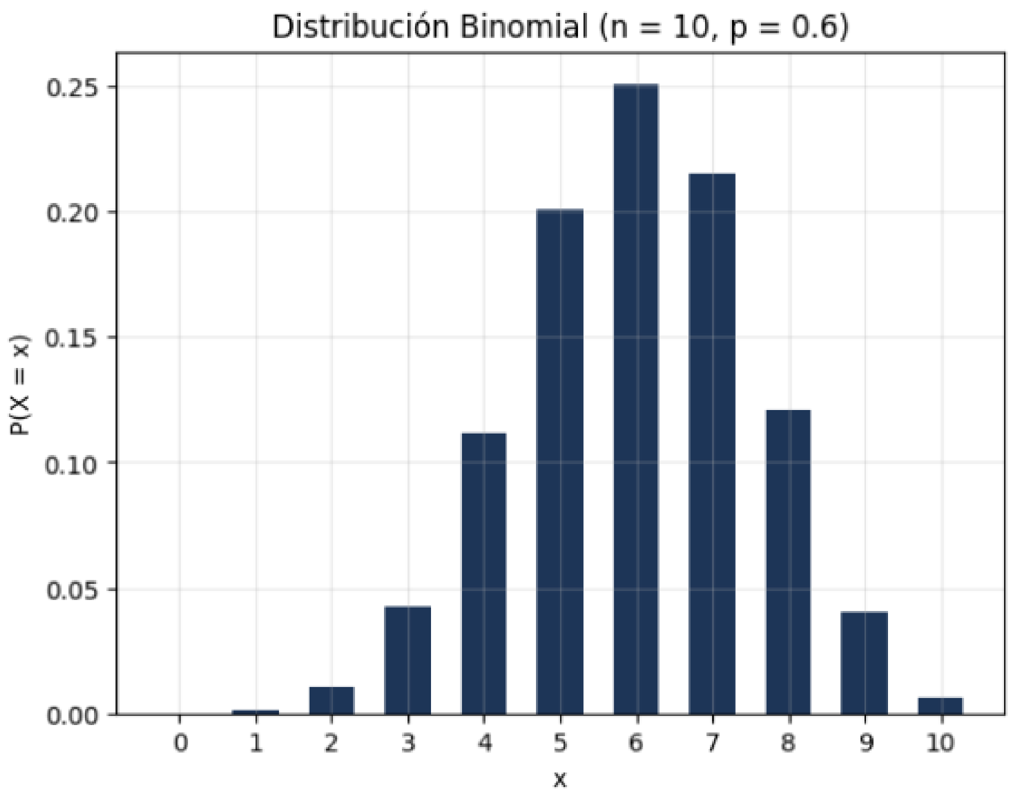

Figura 2: Distribución Binomial con $n = 10$ y $p = 0{,}6$. Se observa que la mayor probabilidad ocurre alrededor de $x = 6$, que coincide con la media $\mu = np = 6$.

3. Distribución Binomial Negativa

Notación :

$$X \sim \text{Binomial Negativa}(r, p) \quad \text{o bien} \quad X \sim NB(r, p)$$

Soporte: En esta parametrización, X representa el número total de ensayos necesarios para obtener r éxitos:

$$X \in \{r, r+1, r+2, \dots\} donde \quad r \in \mathbb{N}, \quad 0 < p < 1.$$

Función de masa de probabilidad

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \quad k = r, r+1, r+2, \dots$$

Función de distribución acumulativa

$$F(k) = P(X \leq k) = \sum_{i=r}^{k} \binom{i-1}{r-1} p^r (1-p)^{i-r}$$

(No posee forma cerrada elemental; puede expresarse mediante la función beta incompleta regularizada.)

Media :

$$E[X] = \frac{r}{p}$$

Varianza

$$Var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Desviación estándar:

$$\sigma = \sqrt{\frac{r(1-p)}{p^2}}$$

Función generadora de momentos

$$M_X(t) = \left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t} \right)^r, \quad t < -\ln(1-p)$$

Parámetros:

$$r \in \mathbb{N}, \quad 0 < p < 1$$

La distribución Binomial Negativa modela el número de ensayos necesarios para obtener r

éxitos en una secuencia de ensayos independientes de Bernoulli con probabilidad de éxito p.

En simulación, se utiliza para representar procesos como el número de intentos hasta alcanzar cierto número de ventas, el número de llamadas necesarias hasta obtener un número fijo de respuestas o el número de eventos requeridos hasta acumular una cantidad determinada de éxitos.

Puede interpretarse como la suma de r variables geométricas independientes:

$$X = \sum_{i=1}^{r} Y_i, \quad Y_i \sim Geom(p).$$

Cuando $r = 1$, la distribución Binomial Negativa se reduce a la distribución Geométrica.

La siguiente gráfica representa la distribución Binomial Negativa con parámetros $r = 5$ y $p = 0{,}6$.

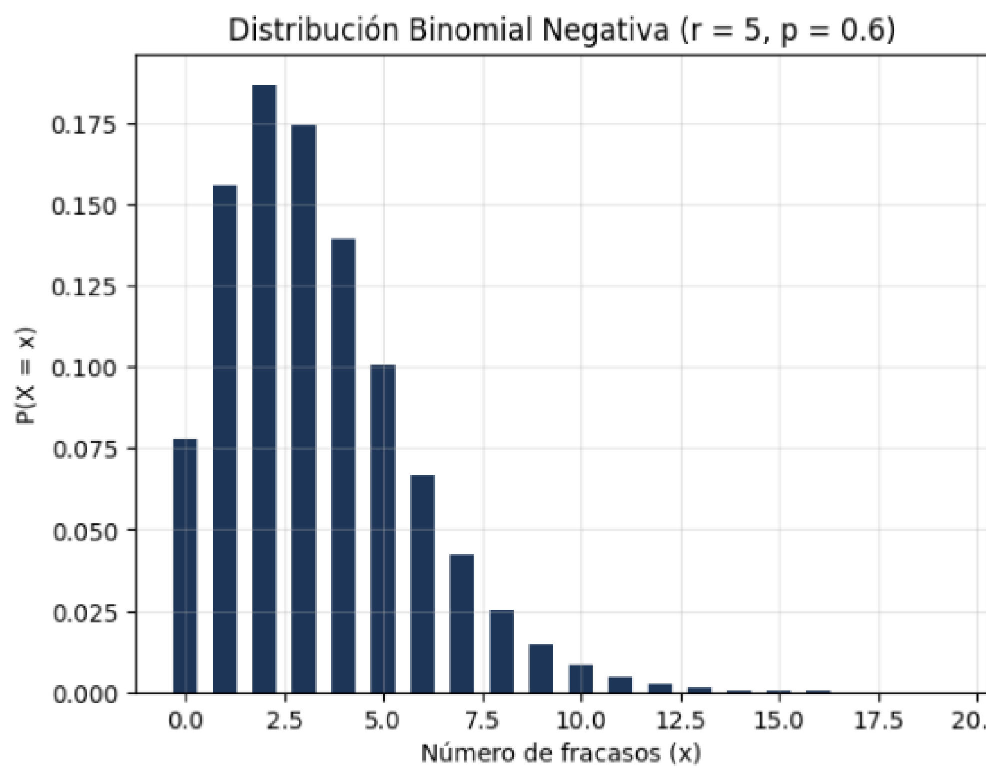

Figura 3: Distribución Binomial Negativa con $r = 5$ y $p = 0{,}6$. La variable aleatoria representa el número de fracasos antes de obtener r éxitos. Se observa una asimetría hacia la derecha, característica de esta distribución.

4. Distribución Geométrica

La distribución geométrica puede definirse de dos maneras distintas, dependiendo de si se cuenta:

- El número total de ensayos hasta el primer éxito.
- El número de fracasos antes del primer éxito.

Ambas parametrizaciones son correctas y es importante especificar cuál se está utilizando.

Versión 1: Número de ensayos hasta el primer éxito

Notación: $X \sim \text{Geom}(p)$

Soporte: $X \in \{1, 2, 3, \dots\}, \quad 0 < p < 1$

Función de masa de probabilidad: $P(X = k) = (1-p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, 3, \dots$

Función de distribución acumulativa: $F(k) = P(X \leq k) = 1 - (1-p)^k$

Varianza: $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Desviación estándar: $\sigma = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}$

Función generadora de momentos

$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}, \quad t < -\ln(1-p)$$

Parámetro: $0 < p < 1$

Versión 2: Número de fracasos antes del primer éxito

En esta parametrización: $Y \sim \text{Geom}_0(p)$

Soporte: $Y \in \{0, 1, 2, \dots\}$

Función de masa de probabilidad:

$$P(Y = k) = (1-p)^k p$$

Media: $E[Y] = \frac{1-p}{p}$

Varianza: $Var(Y) = \frac{1-p}{p^2}$

Interpretación e importancia

La distribución geométrica modela el número de ensayos necesarios hasta que ocurre el primer éxito en una secuencia de ensayos independientes de Bernoulli con probabilidad p.

En simulación, se utiliza para representar el número de intentos hasta lograr una venta, el número de llamadas hasta obtener respuesta o el número de pruebas hasta detectar un defecto.

Una propiedad fundamental es la **propiedad de falta de memoria**:

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t)$$

lo cual indica que el proceso no depende del tiempo ya transcurrido. La siguiente gráfica representa la distribución Geométrica con parámetro $p = 0{,}6$.

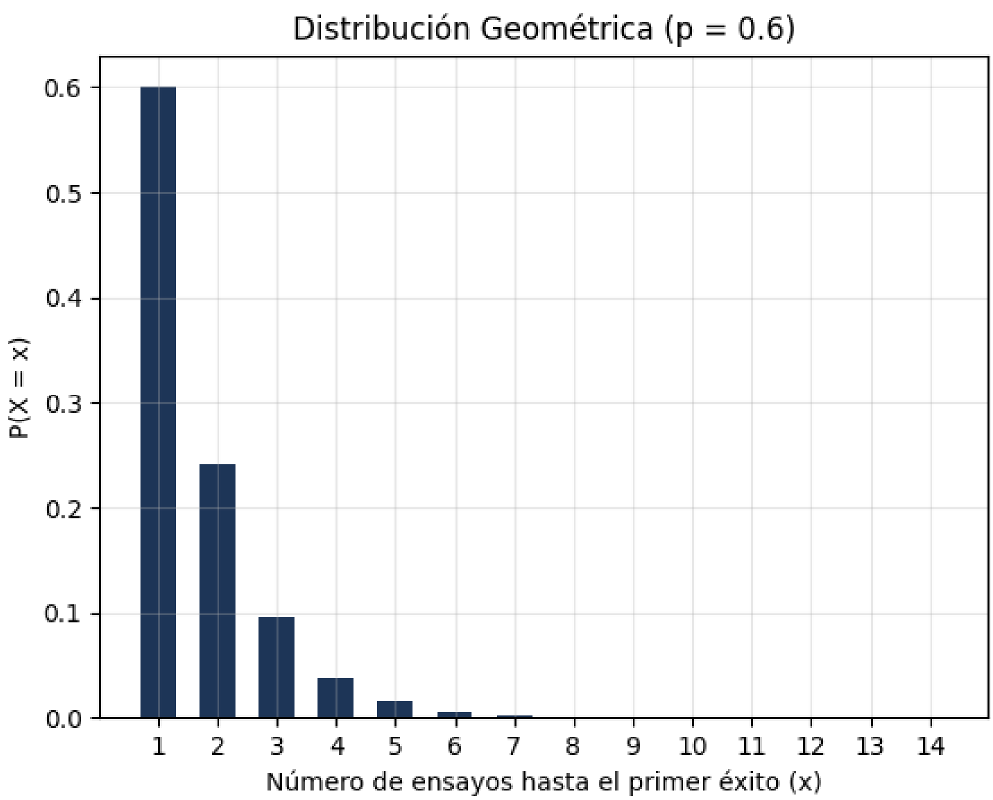

Figura 4: Distribución Geométrica con $p = 0{,}6$. La variable aleatoria representa el número de ensayos necesarios hasta obtener el primer éxito. Se observa una fuerte concentración en los primeros valores, característica de esta distribución.

5. Distribución Hipergeométrica

Notación

$$X \sim \text{Hipergeométrica}(N, K, n) \quad \text{o bien} \quad X \sim H(N, K, n)$$

Parámetros

- N: tamaño total de la población.
- K: número de elementos exitosos en la población.
- n: tamaño de la muestra.

Con restricciones:

$$0 \leq K \leq N, \qquad 0 \leq n \leq N$$

Soporte

$$X \in \{\max(0, n + K - N), \ldots, \min(n, K)\}$$

Función de masa de probabilidad

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

donde

$$k = \max(0, n + K - N), \ldots, \min(n, K)$$

Función de distribución acumulativa

$$F(k) = P(X \leq k) = \sum_{i=\max(0, n+K-N)}^{k} \frac{\binom{K}{i}\binom{N-K}{n-i}}{\binom{N}{n}}$$

(No posee forma cerrada elemental.)

Media

$$E[X] = n\frac{K}{N}$$

Varianza

$$Var(X) = n\frac{K}{N}\left(1 - \frac{K}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$$

Desviación estándar

$$\sigma = \sqrt{n\frac{K}{N}\left(1 - \frac{K}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}}$$

Función generadora de momentos

No posee una forma cerrada simple. Puede expresarse en términos de funciones hipergeométricas generalizadas.

Interpretación e importancia en simulación

La distribución hipergeométrica modela el número de éxitos obtenidos al seleccionar una muestra de tamaño n sin reemplazo de una población finita de tamaño N que contiene K elementos exitosos.

En simulación, se utiliza para representar procesos de muestreo sin reemplazo, como inspección de calidad en lotes finitos o selección aleatoria en poblaciones pequeñas.

La siguiente gráfica representa la distribución Hipergeométrica con parámetros $N = 50$, $K = 20$ y $n = 10$.

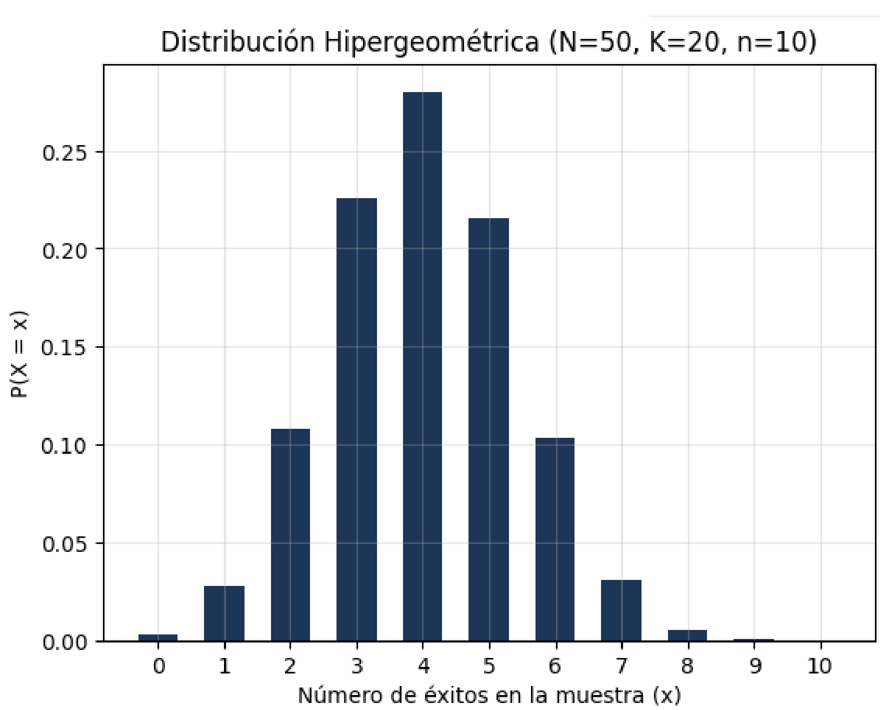

Figura 5: Distribución Hipergeométrica con $N = 50$, $K = 20$ y $n = 10$. La variable aleatoria representa el número de éxitos obtenidos en una muestra sin reemplazo. Se observa una forma aproximadamente simétrica alrededor del valor esperado.

6. Distribución de Poisson

Notación

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda) \quad \text{o bien} \quad X \sim Poi(\lambda)$$

Parámetro

$$\lambda > 0$$

donde λ representa la tasa promedio de ocurrencia de eventos en un intervalo fijo.

Soporte

$$X \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

Función de masa de probabilidad

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Función de distribución acumulativa

$$F(k) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}$$

(No posee forma cerrada elemental.)

Media

$$E[X] = \lambda$$

Varianza

$$Var(X) = \lambda$$

Desviación estándar

$$\sigma = \sqrt{\lambda}$$

Función generadora de momentos

$$M_X(t) = \exp\big(\lambda(e^t - 1)\big)$$

Interpretación e importancia en simulación

La distribución de Poisson modela el número de eventos que ocurren en un intervalo fijo de tiempo, espacio o área, cuando los eventos ocurren de manera independiente y con tasa constante λ.

En simulación, se utiliza ampliamente para representar procesos de llegada, como el número de clientes que llegan a un sistema, el número de fallas en un periodo determinado o el conteo de eventos raros en intervalos definidos.

La siguiente gráfica representa la distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 4$.

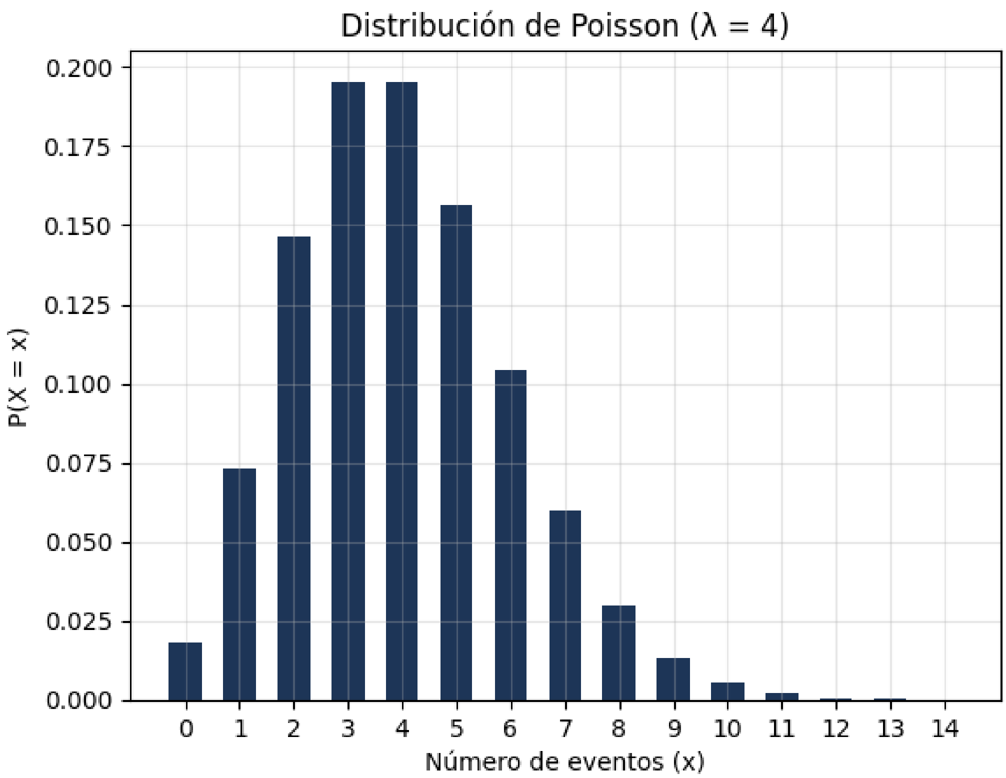

Figura 6: Distribución de Poisson con $\lambda = 4$. Se observa una asimetría hacia la derecha. En esta distribución, la media y la varianza son iguales a λ.

2. Distribuciones Continuas

1. Distribución Uniforme Continua

Notación

$$X \sim \text{Uniforme}(a, b) \quad \text{o bien} \quad X \sim U(a, b)$$

Parámetros

$$a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b$$

Soporte

$$X \in [a, b]$$

Función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Función de distribución acumulativa

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Media

$$E[X] = \frac{a+b}{2}$$

Varianza

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Desviación estándar

$$\sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

Función generadora de momentos

$$M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}, \quad t \neq 0,$$

y por continuidad $M_X(0) = 1$.

Interpretación e importancia en simulación

La distribución uniforme continua modela una variable aleatoria que puede tomar cualquier valor dentro del intervalo $[a, b]$ con igual densidad. En simulación es fundamental, ya que constituye la base para la generación de variables aleatorias mediante el método de la transformación inversa y otros algoritmos computacionales.

La siguiente gráfica representa la distribución Uniforme con parámetros $a = 2$ y $b = 8$.

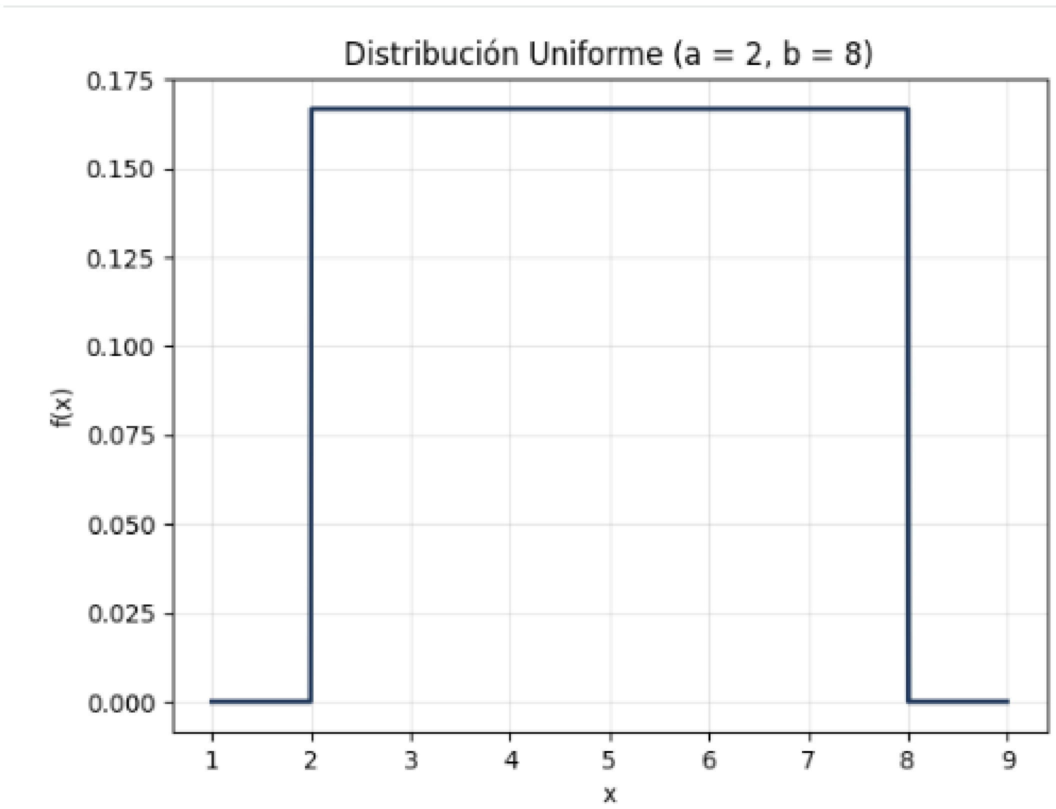

Figura 7: Distribución Uniforme con $a = 2$ y $b = 8$. La función de densidad es constante en el intervalo $[2, 8]$ y nula fuera de él. Todos los valores dentro del intervalo tienen la misma probabilidad.

2.1. 2.Distribución Chi-cuadrada

Notación

$$X \sim \chi^2(k)$$

donde k es el número de grados de libertad.

Parámetro

$$k \in \mathbb{N}, \quad k > 0$$

Soporte

$$X \in (0, \infty)$$

Función de densidad (PDF)

$$f(x) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-x/2}, \quad x > 0$$

Función de distribución acumulativa (CDF)

$$F(x) = \frac{\gamma\left(\frac{k}{2}, \frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$$

donde $\gamma(\cdot, \cdot)$ es la función gamma incompleta inferior. No posee forma cerrada elemental.

Media

$$E[X] = k$$

Varianza

$$\mathrm{Var}(X) = 2k$$

Desviación estándar

$$\sigma = \sqrt{2k}$$

Función generadora de momentos (MGF)

$$M_X(t) = (1 - 2t)^{-k/2}, \quad t < \frac{1}{2}$$

Relación con otras distribuciones

Si $Z_i \sim N(0, 1)$ independientes, entonces:

$$X = \sum_{i=1}^{k} Z_i^2 \sim \chi^2(k)$$

Además, es un caso particular de la distribución Gamma:

$$\chi^2(k) \sim \Gamma\left(\frac{k}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Interpretación

En simulación se utiliza en pruebas de bondad de ajuste, análisis de varianza y construcción de intervalos de confianza para varianzas.

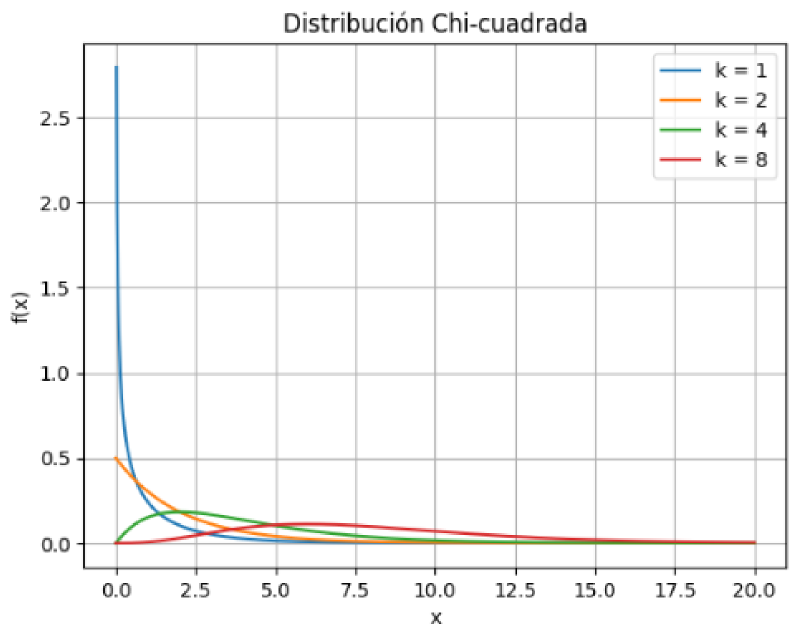

Figura 8: Distribución Chi-cuadrada para distintos grados de libertad

3. Distribución Exponencial

Notación

$$X \sim \text{Exponencial}(\lambda) \quad \text{o bien} \quad X \sim Exp(\lambda)$$

Parámetro

$$\lambda > 0$$

donde λ es la tasa de ocurrencia (intensidad del proceso).

Soporte

$$X \in [0, \infty)$$

Función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Función de distribución acumulativa

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Media

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

Varianza

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Desviación estándar

$$\sigma = \frac{1}{\lambda}$$

Función generadora de momentos

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda$$

Interpretación e importancia en simulación

La distribución exponencial modela el tiempo de espera hasta la ocurrencia del primer evento en un proceso con tasa constante λ. En simulación se utiliza para representar tiempos entre llegadas, tiempos de falla o duraciones de servicio, siendo fundamental en modelos de colas y procesos de Poisson.

Una propiedad clave es la **propiedad de falta de memoria**:

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t).$$

La siguiente gráfica muestra la distribución Exponencial para diferentes valores del parámetro λ.

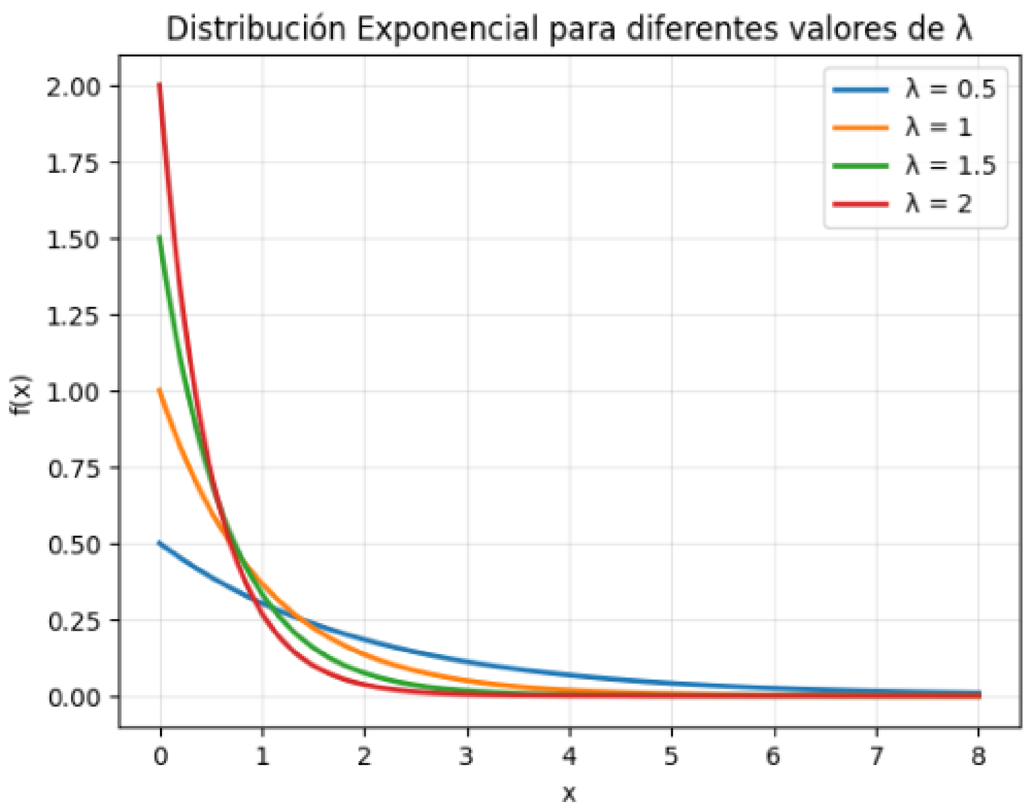

Figura 9: Distribución Exponencial para $\lambda = 0{,}5, 1, 1{,}5, 2$. Se observa que al aumentar λ, la curva se concentra más cerca de cero y decrece más rápidamente. La media está dada por $\mu = \frac{1}{\lambda}$.

4. Distribución Beta

Notación

$$X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta) \quad \text{o bien} \quad X \sim B(\alpha, \beta)$$

Parámetros

$$\alpha > 0, \qquad \beta > 0$$

donde α y β son parámetros de forma.

Soporte

$$X \in (0, 1)$$

Función de densidad

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, \quad 0 < x < 1$$

donde

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

es la función Beta.

Función de distribución acumulativa

$$F(x) = I_x(\alpha, \beta),$$

donde $I_x(\alpha, \beta)$ es la función beta incompleta regularizada.
(No posee forma cerrada elemental.)

Media

$$E[X] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

Varianza

$$Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

Desviación estándar

$$\sigma = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}}$$

Función generadora de momentos

No posee una forma cerrada simple en términos elementales; puede expresarse mediante funciones hipergeométricas.

Casos especiales importantes

- Si $\alpha = \beta = 1$, se obtiene la distribución Uniforme$(0, 1)$.
- Para $\alpha > 1$ y $\beta > 1$, la distribución es unimodal.
- Puede tomar formas simétricas o asimétricas dependiendo de los parámetros.

Interpretación e importancia en simulación

La distribución Beta modela variables aleatorias continuas acotadas en el intervalo $(0, 1)$, como proporciones, probabilidades o fracciones. En simulación se utiliza para representar incertidumbre en parámetros probabilísticos, tasas de éxito y fenómenos donde la variable debe permanecer dentro de límites definidos.

La siguiente gráfica muestra la función de densidad (PDF) y la función acumulativa (CDF) de la distribución Beta con parámetros $\alpha = 2$ y $\beta = 5$.

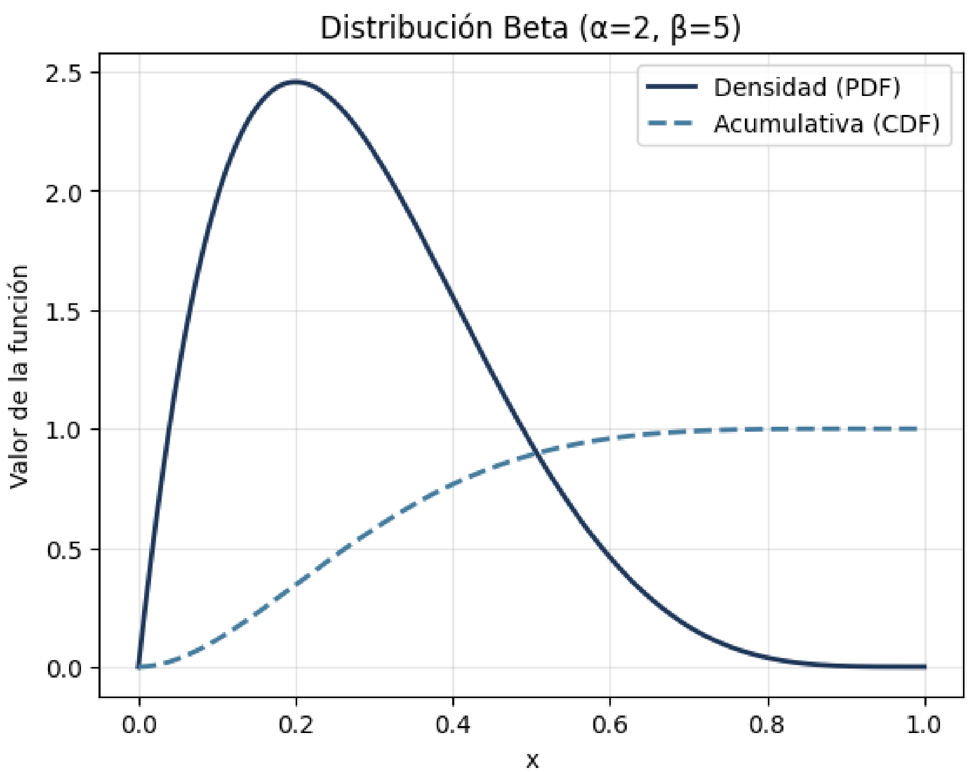

Figura 10: Distribución Beta con $\alpha = 2$ y $\beta = 5$. La línea continua representa la función de densidad (PDF), mientras que la línea punteada representa la función acumulativa (CDF). La CDF es creciente y toma valores entre 0 y 1.

5. Distribución Gamma

Notación

$$X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda) \quad \text{o bien} \quad X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$$

Parámetros

$$\alpha > 0 \quad \text{(parámetro de forma)}, \qquad \lambda > 0 \quad \text{(parámetro de tasa)}$$

Soporte

$$X \in (0, \infty)$$

Función de densidad

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

donde $\Gamma(\alpha)$ es la función Gamma:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx.$$

Función de distribución acumulativa

$$F(x) = \frac{\gamma(\alpha, \lambda x)}{\Gamma(\alpha)},$$

donde $\gamma(\alpha, \lambda x)$ es la función gamma incompleta inferior.
(No posee forma cerrada elemental.)

Media

$$E[X] = \frac{\alpha}{\lambda}$$

Varianza

$$Var(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

Desviación estándar

$$\sigma = \frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda}$$

Función generadora de momentos

$$M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{\alpha}, \quad t < \lambda$$

Casos especiales importantes

- Si $\alpha = 1$, la distribución Gamma se reduce a la distribución Exponencial.
- Si $\alpha = \frac{k}{2}$ y $\lambda = \frac{1}{2}$, se obtiene la distribución Chi-cuadrada con k grados de libertad.

Interpretación e importancia en simulación

La distribución Gamma modela el tiempo total de espera hasta que ocurren α eventos en un proceso con tasa constante λ. En simulación se utiliza para representar tiempos acumulados, duraciones de procesos y fenómenos de espera múltiples, siendo una generalización natural de la distribución exponencial.

La siguiente gráfica muestra la función de densidad (PDF) y la función acumulativa (CDF) de la distribución Gamma con parámetros $\alpha = 3$ y $\lambda = 1{,}5$.

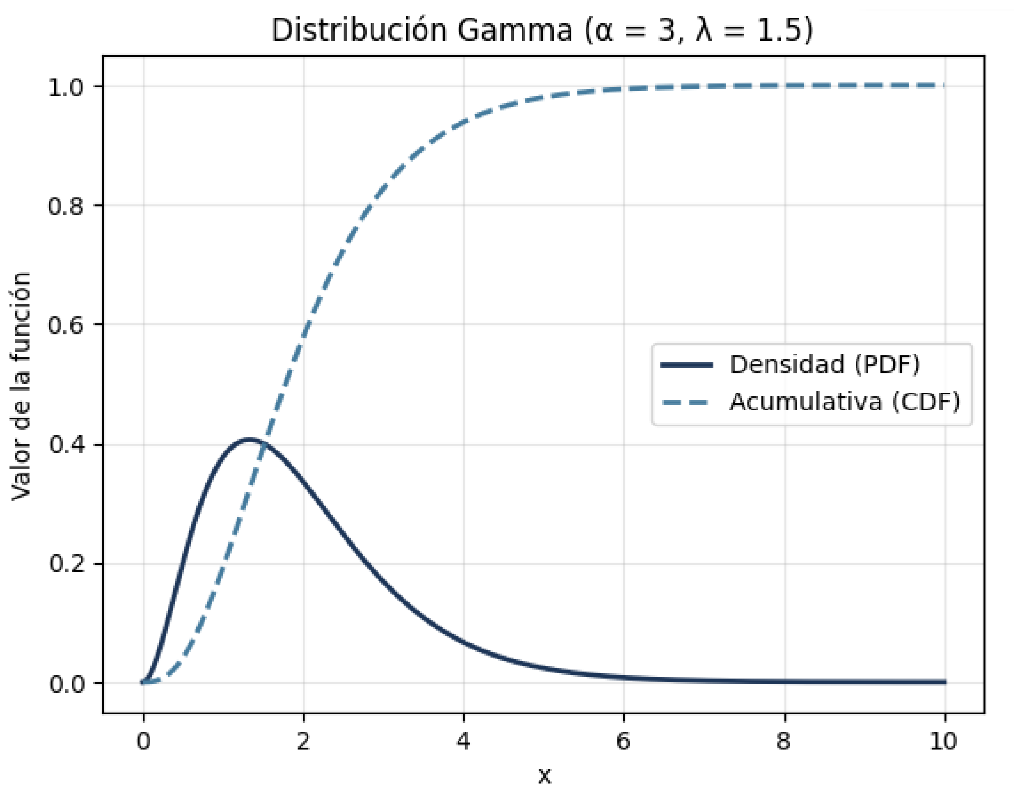

Figura 11: Distribución Gamma con $\alpha = 3$ y $\lambda = 1{,}5$. La línea continua representa la función de densidad (PDF), mientras que la línea punteada representa la función acumulativa (CDF). La CDF es creciente y converge a 1 conforme x aumenta.

6. Distribución Normal

Notación

$$X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2) \quad \text{o bien} \quad X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Parámetros

$$\mu \in \mathbb{R}, \qquad \sigma^2 > 0$$

donde μ es la media, σ^2 la varianza y σ la desviación estándar.

Soporte

$$X \in (-\infty, \infty)$$

Función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

Función de distribución acumulativa

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt$$

(No posee forma cerrada elemental; se expresa mediante la función error.)

Media

$$E[X] = \mu$$

Varianza

$$Var(X) = \sigma^2$$

Función generadora de momentos

$$M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

Caso especial: Normal Estándar

Si

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma},$$

entonces

$$Z \sim N(0,1)$$

y su densidad es

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}.$$

Interpretación e importancia en simulación

La distribución normal modela fenómenos donde intervienen múltiples factores independientes, generando una forma simétrica alrededor de la media μ. En simulación es fundamental debido al Teorema Central del Límite, el cual establece que la suma de variables independientes tiende a seguir una distribución normal bajo condiciones generales.

Se utiliza ampliamente para modelar errores experimentales, mediciones físicas y variaciones naturales.

La siguiente gráfica representa la distribución Normal con parámetros $\mu = 0$ y $\sigma = 1$.

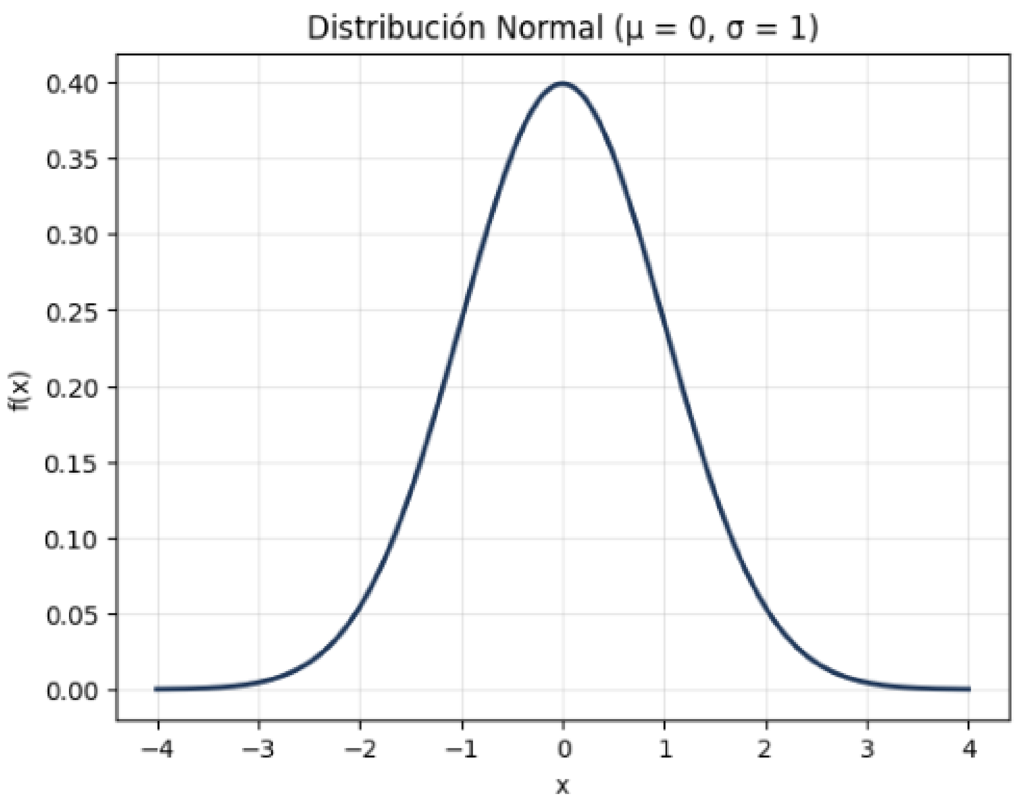

Figura 12: Distribución Normal estándar con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$. La curva es simétrica respecto a la media y el área bajo la curva es igual a 1.