

## PARTIE 2

### III. Valeurs propres et vecteurs propres

Par définition,  $\lambda_1$  est valeur propre de A associée au vecteur propre  $X_1$  si  $A \cdot X_1 = \lambda_1 \cdot X_1$ .

Il existe différentes méthodes de calcul numérique pour extraire les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice A. Vous allez en programmer une en particulier avec MATLAB : la méthode de **la puissance itérée avec déflation de Wielandt**, dont les explications détaillées sont données dans l'annexe mathématique. Vous regarderez aussi **l'algorithme QR**, qui sert de base à la méthode eig de Matlab.

#### Application 1

Pour étudier la sonorité d'un tambour, on recherche l'ensemble des vibrations élémentaires qui s'établissent à sa surface (voir figure 5). Ce sont ses pulsations propres, c'est à dire les fréquences de vibration qui vont créer une résonance (ou onde stationnaire) sur la peau du tambour. Mis en équation, ce problème revient à trouver les valeurs de  $\lambda$  qui vérifient :

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\lambda u$$

ainsi que leurs vecteurs propres associés. La fonction  $u(x,y)$  correspond ici à la distance sur les z par rapport à la position d'équilibre horizontal.

On modélise le tambour par une représentation discrète de sa surface (voir figure 6). On aura  $u = 0$  sur les bords de la peau du tambour fixés sur le cadre représenté en gras sur la figure 6. Les autres zones sont mobiles.

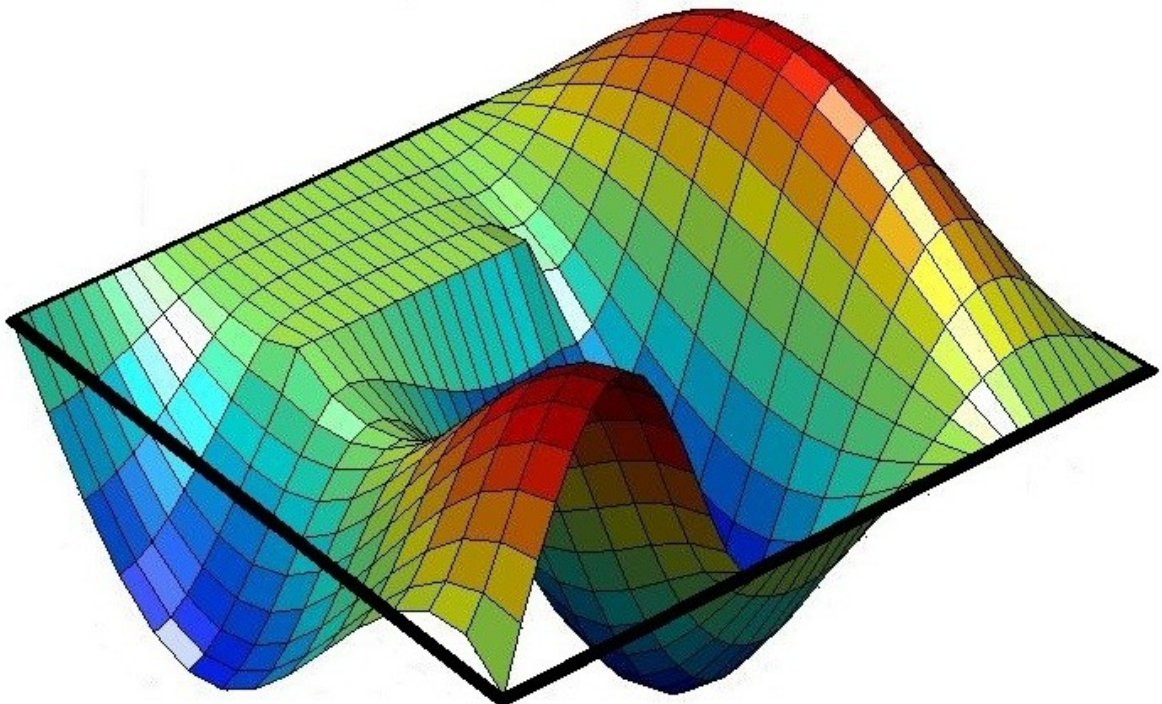


Figure 5

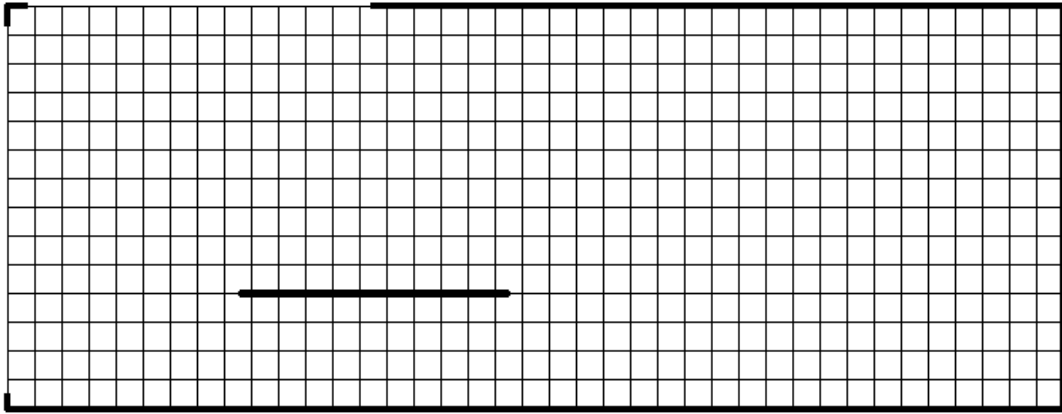


Figure 6

- Donner les **50** valeurs propres de plus petit module et les **20** de plus grand module. Ces valeurs correspondent aux 50 fréquences les plus basses et aux 20 les plus hautes.
- Trouver aussi la valeur propre la plus proche de **6.82** en module.
- Visualiser les vibrations (vecteurs propres) correspondantes.
- Toutes ces vibrations vous semblent-elles physiquement plausibles ? Si non, expliquer pourquoi et pourquoi on les obtient.

### **Application 2 - Bonus**

On essaye de transmettre une image par un canal dans lequel la transmission d'informations est très lente. Dans une telle situation, l'idéal serait de pouvoir voir apparaître l'image progressivement, c'est-à-dire grossièrement au début et avec de plus en plus de détails au fur et à mesure que les informations arrivent. Cela permettrait d'arrêter la transmission très rapidement, si l'on juge l'image inintéressante ou dès que la qualité est jugée suffisante. Tout cela doit bien évidemment se faire en transmettant un volume de données le **plus petit possible** par rapport à ce que contient l'image elle-même.

- Réaliser cela à partir de la décomposition de matrices en valeurs singulières. Cette décomposition est décrite dans l'annexe mathématique.
- Comment peut-on évaluer la qualité de l'image courante par rapport à l'image d'origine (qualité = 100% si les deux images sont identiques ...).
- Quels sont, à votre avis, les avantages et les inconvénients de ce codage de l'image ?

## ***PARTIE 2 : ANNEXE MATHÉMATIQUE***

### **III. Valeurs propres, vecteurs propres et valeurs singulières**

#### **Puissance itérée**

**Théorème :** Soit  $A$  une matrice  $n \times n$  à coefficients réels.

**Si**  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$  sont les valeurs propres de  $A$ ,  
classées pour que  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > \dots > |\lambda_n|$  (les  $\lambda$  sont donc réels aussi)

**alors**  $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \lim_{k \rightarrow \infty} A^k \cdot \vec{x} = K \cdot \vec{v}_1$ , avec  $\vec{v}_1$  vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_1$  de

plus grand module et  $K$  une valeur réelle (de l'ordre de  $\lambda_1^k$ ).

C'est sur ce théorème qu'est construite la méthode de la puissance itérée qui permet d'estimer  $\lambda_1$  et  $\vec{v}_1$  en calculant des valeurs consécutives de  $A^k \cdot \vec{x}$  pour  $k$  assez grand. Pour cela, on réalise des itérations à partir d'un  $Y^0$  quelconque, par exemple sur le processus :

$$\begin{aligned} X^k &= Y^k / \text{norm}(Y^k) \\ Y^{k+1} &= A.X^k \end{aligned}$$

Lorsque le nombre d'itérations réalisé est suffisant,  $Y^{k+1}$  et  $X^k$  prennent des orientations très proches et on a alors la valeur propre  $\lambda_1$  estimée à l'itération  $(k+1)$  par le coefficient de proportionnalité entre  $Y^{k+1}$  et  $X^k$ .

On pourra arrêter les itérations en fonction de la valeur de  $k$  grand (ce qui est cependant toujours difficile à définir dans l'absolu), en fonction de l'évolution de la valeur estimée de la valeur propre ou en fonction de la « qualité de la colinéarité » entre  $X^k$  et  $Y^{k+1} = A.X^k$ .

### Déflation de Wielandt

**Théorème :** Soit  $\vec{u}_1$  le vecteur propre de  $A^t$  associé à la valeur propre  $\lambda_1$ .

Si  $A$  admet les  $n$  valeurs propres réelles et distinctes  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$  et les vecteurs propres (colonnes) à gauche correspondants  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n$  et  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_n$  les vecteurs propres à droite (lignes)

alors la matrice  $A - \lambda_1 \cdot \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{v}_1}$  admet  $0, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$  pour valeurs propres et

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n$  pour vecteurs propres.

Ce théorème permet, connaissant  $\lambda_1, \vec{u}_1$  et  $\vec{v}_1$  de faire apparaître  $\lambda_2$  comme valeur propre dominante (de plus grand module) et donc de calculer  $\lambda_2$  et  $\vec{v}_2$  par la méthode de la puissance itérée, etc.

### Itérations inverses

On peut adapter cette méthode de la puissance itérée, qui permet normalement le calcul de la valeur propre de plus grand module, au calcul de la valeur propre de plus petit module. Il suffit pour cela d'appliquer la méthode de la puissance itérée à  $Z = A^{-1}$ . Cela donnera  $\lambda_Z$ , la valeur propre de  $Z = A^{-1}$  de module le plus grand parmi les valeurs propres de  $Z$ . La valeur propre de plus petit module de  $A$  sera alors  $\lambda_n = 1 / \lambda_Z$

Plus généralement, on peut calculer  $\lambda_c$ , la valeur propre de  $A$  la plus proche du complexe  $c$  en appliquant la méthode de la puissance itérée à  $Z_c = (A - c.Id)^{-1}$ . On obtient alors  $\lambda_Z$  la valeur propre de  $Z_c$  de plus grand module, telle que  $\lambda_c = c + 1 / \lambda_Z$  est la valeur propre de  $A$  la plus proche de  $c$ . Avec  $c = 0$ , on retrouve  $\lambda_n$  la valeur propre de plus petit module de  $A$ .

### Méthode par décompositions QR successives

Si on réalise la décomposition QR d'une matrice  $A_n$ , avec  $A_n = Q.R$ , et que l'on reconstruit  $A_{n+1} = R.Q$ , les valeurs de la diagonale de  $A_n$  tendent vers les valeurs propres de  $A$  (ou  $A_0$ ) quand  $n$  tend vers l'infini. Ces deux matrices  $A_n$  et  $A_{n+1}$  sont similaires et donc possèdent les mêmes valeurs propres:  $A_{n+1} = R.Q = Q^{-1}.Q.R.Q = Q^{-1} A_n Q$

Il en est de même avec la décomposition LU.

Ici,  $Q$  est une matrice unitaire,  $R$  une matrice triangulaire supérieure,  $L$  est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et  $U$  est une matrice triangulaire supérieure.

**Décomposition en valeurs singulières**

La notion de valeurs singulières est une généralisation de la notion de valeurs propres, qui n'est définie que pour des matrices carrées. Une matrice rectangulaire  $M_{mn}$  quelconque, de  $m$  lignes et  $n$  colonnes (on supposera  $m > n$ ), peut se décomposer sous la forme :

$$M_{mn} = U_{mn} \cdot D_{nn} \cdot V'_{nn} \quad (1)$$

avec  $U'_{mn} \cdot U_{mn} = Id_n$  et  $V'_{nn} \cdot V_{nn} = Id_n$ . La matrice  $D_{nn}$  est diagonale et  $V_{nn}$  est orthonormale. Les valeurs propres de  $D_{nn}$  sont **les valeurs singulières** de  $M_{mn}$ .

**Remarque :**  $U_{mn} \cdot U'_{mn}$  est différent de  $Id_n$

***Démonstration :***

On construit  $Q_1 = M'_{mn} \cdot M_{mn}$ .  $Q_1$  est symétrique de  $n$  lignes et  $n$  colonnes et a donc  $n$  valeurs propres réelles positives ou nulles et  $n$  vecteurs (ou plutôt directions) propres associés qui sont de plus orthogonaux entre eux. Le nombre  $r$  de valeurs propres réelles strictement positives donne le rang de la matrice  $Q_1$  et par extension celui de  $M_{mn}$ . On peut donc écrire :

$$Q_1 = M'_{mn} \cdot M_{mn} = V \cdot \Lambda \cdot V^{-1} = V \cdot \Lambda \cdot V'$$

où  $\Lambda$  représente la matrice diagonale  $n \times n$  contenant les  $n$  valeurs propres de  $Q_1$  que l'on supposera classées par ordre décroissant (de en haut à gauche à en bas à droite) et  $V$  représente la matrice des vecteurs propres associés, normés et en colonne. Le fait que ces vecteurs soient normés et orthogonaux deux à deux donne la propriété  $V^{-1} = V'$ .

De plus, l'égalité triviale  $M_{mn} = M_{mn} \cdot Id$  donne  $M_{mn} = M_{mn} \cdot V \cdot \Lambda^{-1/2} \cdot \Lambda^{1/2} \cdot V'$

En posant  $U_{mn} = M_{mn} \cdot V \cdot \Lambda^{-1/2}$  et  $D_{nn} = \Lambda^{1/2}$  on retrouve (1).

On peut montrer aussi que les  $n$  colonnes de  $U_{mn}$  contiennent des vecteurs propres de  $Q_2 = M_{mn} \cdot M'_{mn}$

***Une utilisation pratique possible :***

L'équation (1) peut aussi s'écrire :

$$M_{mn} = \sum_{k=1}^r \sqrt{\lambda_k} u_k v'_k$$

avec  $\lambda_k$  la valeur propre numéro  $k$  de  $Q_1 = M'_{mn} \cdot M_{mn}$ ,  $u_k$  vecteur de la colonne  $k$  de  $U_{mn}$ , et  $v_k$  vecteur de la colonne  $k$  de  $V_{nn}$  (on utilise dans la formule le vecteur transposé)