Lekcija 7

Lūgums izlasīt sadaļu 1.5 no mācību grāmatas līdz Dedukcijas teorēmai 2 neieskaitot (līdz ar to lpp. 44-47), kā arī lpp. 52 un 53 no sadaļas 2.

Piemērs, kas ietver L11 izmantošanu.

[L8,L11,MP]: $A\to B$; $\neg A\to B \vdash B$

L11: $A\lor\neg A$

L8: $(B\to D)\to((C\to D)\to(B\lor C\to D))$

1) $(A\to B)\to((\neg A\to B)\to(A\lor\neg A\to B))$

2) $A\to B$ – dotā hipotēze

3) $\neg A\to B$ – dotā hipotēze

4) $(\neg A\to B)\to(A\lor\neg A\to B)$ – MP no 1. un 2.

5) $A\lor\neg A\to B$ – MP no 3. un 4.

6) $A\lor\neg A$ L11 instance

7) B – MP no 5. un 6.

Kā dators varētu pārbaudīt šīs pierādījuma virknes pareizību?

Hipotēzes – jāpārbauda (vai bija dotas), viss pārējais – aksiomu instances vai MP.

Kā mēs varam izveidot vispārīgu algoritmu pierādījuma virknes pārbaudei? Kas tam ir nepieciešams? Katrā solī jāpārbauda galīgs iespēju skaits. Padomājiet par iespējamo algoritma sarežģītību.

Dedukcijas teorēma 1.

$B \vdash C$ ir vieglāk pierādīt, nekā $\vdash B\to C$

Dedukcijas Teorēma I: $B \vdash C \Rightarrow \vdash B\to C$

Citiem vārdiem, ja mums no B tika pierādīts C, tad mums ir pierādījums $B\to C$.

Apspriedīsim DT1 pierādījumu no lpp. 44-45.

Patiesībā DT1 pierādījums ir vienkārši algoritms, kā pierādījumu, kas ietver DT1 izmantošanu, pārveidot par tādu, kur DT1 netika izmantota.

Gala rezultātā pierādījumu ar m rindiņām, kur mēs izmantojam DT1 vienu reizi, var pārveidot par analoģisku pierādījumu bez DT1 ar $3m$ vai $3m+2$ rindiņām.

Pārsteidzošā DT1 efektivitāte.

[L1-L4,MP]: ⊢ (A→(B→C))→(A∧B→C)

1) A→(B→C) Hipotēze pieņemtā

2) A∧B Hipotēze pieņemtā

3) A∧B→A Aksiomas L3 instance: B∧C→B kur B = A, C = B.

4) A∧B→B Aksiomas L4 instance: B∧C→C kur B = A, C = B.

5) A Ar MP no 2 un 3.

6) B Ar MP no 2 un 4.

7) B→C Ar MP no 1 un 5.

8) C Ar MP no 6 un 7.

Tātad, mums ir pierādījums priekš [L3-L4,MP]: A→(B→C), A∧B ⊢ C

Pielietojot DT1: [L1-L4,MP]: A→(B→C) ⊢ A∧B→C

Un pielietojot DT1 vēlreiz: [L1-L4,MP]: ⊢ (A→(B→C))→(A∧B→C)

Bez DT1 mums varētu sanākt $3 * (3 * 8 + 2) + 2 = 80$ formulas 8 vietā.

Cits piemērs ar DT1. Ja mums jāpierāda ⊢ (B→C) → D, tad pieņemot B→C ka hipotēzi, un procesā pierādot D, ar DT1 secinām (B→C) → D.

Piezīme par DT1:

Atceroties definīciju: ja ir pierādījums priekš

[T, MP]: A1, A2, ..., An, B ⊢ C,

tad arī ir pierādījums priekš

[L1, L2, T, MP]: A1, A2, ..., An ⊢ B→C.

Līdz ar to, mēs varam lietot DT1 tikai ja mums ir pieejamas L1, L2 un MP.

Piemērs ar to, kādu pierādījumu mums dod Dedukcijas teorēmas 1 pierādījuma algoritms.

[L1, L2, MP]: A→(A→B), A ⊢ B
1) A→(A→B) - pieņemtā hipotēze
2) A - pieņemtā hipotēze
3) A→B MP 1 un 2
4) B MP 3 un 2 [L1, L2, MP]: A→(A→B), A ⊢ B
Ar DT1 secinām: [L1, L2, MP]: A→(A→B) ⊢ A→B
Ar DT1 vēlreiz, secinām: [L1, L2, MP]: ⊢ A→(A→B)→(A→B)

[L1, L2, MP]: $A\to(A\to B) \vdash A\to B$

1) $A\to(A\to B)$ - dotā hipotēze

2) $A\to(A\to B)\to(A\to(A\to(A\to B)))$ L1 instance, kur $B=A\to(A\to B)$, $C=A$

!!!3) $A\to(A\to(A\to B))$ MP no 2. un 1.

4) $(A\to((D\to A)\to A))\to((A\to(D\to A))\to(A\to A))$ L2 instance, kur $B=A$, $C=A$

5) $A\to((D\to A)\to A)$ L1 instance, kur $B=A$, $C=D\to A$

6) $(A\to(D\to A))\to(A\to A)$ MP no 4. un 5.

7) $A\to(D\to A)$ L1, kur $B=A$, $C=D$

!!!8) $A\to A$ MP no 6. un 7.

9) $(A\to(A\to(A\to B)))\to((A\to A)\to(A\to(A\to B)))$ L2, kur $B=A$

10) $(A\to A)\to(A\to(A\to B))$ MP no 9. un 3.

!!!11) $A\to(A\to B)$ MP no 10. un 8.

12) $(A\to(A\to B))\to((A\to A)\to(A\to B))$

13) $(A\to A)\to(A\to B)$ MP no 12. un 11.

!!!14) $A\to B$ MP 13. un 8. [L1, L2, MP]: $A\to(A\to B) \vdash A\to B$

Ar DT1 secinām: [L1, L2, MP]: $\vdash A\to(A\to B)\to(A\to B)$

Uzskatāmi redzam, cik DT1 vienkāršo mūsu dzīvi, kad jāpierāda formula, kas satur implikāciju.