Lekcija 1

Lūgums izlasīt sadaļu 1.1 no mācību grāmatas un sadaļas 1 ievadu, kas ir pirms sadaļas 1.1 sākuma. Citiem vārdiem – mācību grāmatas lpp. 4-10.

Nedaudz informācijas par kursa kārtību

Katrai lekcijai ir sagatavoti lekciju materiāli + tiek apskatītas attiecīgas tēmas sadaļas mācību grāmatā, kas ir pieejama šeit: https://dspace.lu.lv/dspace/handle/7/53914 (Detlovs_Podnieks_Math_Logic_2021.pdf).

Mājas darbi tiks doti pēc katras lekcijas. Jāiesniedz divas reizes – pirms 1. kontroldarba un sesijas sākumā. Nosacīti uz vienu mājas darbu ir paredzēta nedēļa, līdz ar to nav ieteicams visu taisīt pēdējā brīdī – nedēļā pirms iesniegšanas termiņa. Atkārtoti iesniegumi/iesniegumi pēc termiņa netiks pieņemti. Izmantojiet mājas darbu kā iespēju patrenēties, pamēģināt atrisināt uzdevumu pašiem.

i-iespējas mājas darbi dod bonusu punktus kopskaitam un izredzes saņemt 10 par kursu. Uzdevumi papildus treniņam ir domāti kā iespēja pavingroties, punkti par tiem nav paredzēti.

Atzīme: 25% par visiem mājas darbiem + 25% KD1 + 50% KD2. Atzīme 9 baļļu skalā (tas ir, 100% dod atzīmi 9). Jā ar i-iespējām pārsniegsiet šos nosacītus 100%, tad saņemsiet 10. Svarīgi: KD1 un KD2 jāsaņem vismaz 39% (kas ir atzīmes 4 ekvivalents).

Termiņi:

MD 1-6 jāiesniedz līdz 3. martam ieskaitot (23:59:59 Latvijas laiks). Provizoriski 4. martā būs konsultācija par to, kā pareizi bija jārisina uzdevumi.

MD 7-15 jāiesniedz līdz 22. aprīlim ieskaitot (23:59:59 Latvijas laiks). Provizoriski 23. aprīlī būs konsultācija par to, kā pareizi bija jārisina uzdevumi.

1. kontroldarbs būs par lekciju 1-6 tēmām. Provizoriski būs 10. martā.

2. kontroldarbs – eksāmens, būs sesijas laikā. Visticamāk 28. aprīlī, tad 12. maijā būs dota iespēja atkārtoti nolikt eksāmenu vai kārtot kontroldarbu.

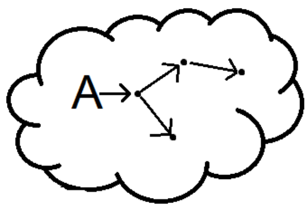
Tagad l. lekcijas materiāli

Loģika pārstāv vispārīgāko spriešanas (argumentācijas) veidu, ko izmanto cilvēki un datori. Loģiku var definēt kā jebkuru vienotu ietvaru teoriju veidošanai.

Kā nodot datoram zināšanas, kā veikt secinājumus?

Mēs mēģinām sakārtot zināšanas un spriešanas līdzekļus. Process beidzās ar aksiomām, faktiem, noteikumiem. Tātad tiek panākts mūsu zināšanu pamats, kodols. Mēs varam neglabāt visas pārējās formulas. Mēs varam tās izvest ar izveduma likumiem.

Tad mums sanāk sekojoša bilde. Mums ir teorijas aksiomas (fakti), un mums ir izveduma likumi, ar kuru palīdzību mēs varam izvest jaunus rezultātus (teorēmas), tātad, visas pārējās zināšanas.



Pilna aksiomatizācija tiek saukta par formalizāciju.

Ja mums ir aksiomas un izveduma likumi, tad mēs varam ģenerēt teorēmas – apgalvojumus, kas ir pierādāmi mūsu teorijā. Piemēram, matemātisko teoriju var saukt par teorēmu ģenerēšanas "dzinēju".

Ir svarīga precīzi definēta formāla valoda, kurā var izteikt tās apgalvojumus. Otra svarīga formalitātes īpašība ir tā, ka jābūt iespējai mehāniski pārbaudīt pierādījuma pareizību.

Teoriju T sauc par formālu teoriju, tad un tikai tad, ja pastāv algoritms, kas ļauj verificēt (pārbaudīt), vai dotais teksts ir pareizs pierādījums atbilstoši T principiem.

Kas ir nepieciešams teorijai:

1) Valoda

2) Aksiomas

3) Izveduma likumi. Ar tiem mēs varam iegūt pierādījumus un teorēmas.

4) Pierādījumu pareizības verifikācija (pārbaude). Piemēram, ar datoru, programmu. Līdz ar to tas ir kaut kas algoritmisks.

5) Nepierādāmi apgalvojumi. Mums tad būs nepieciešams algoritms hipotēžu pārbaudei.

Nopietnām matemātiskām teorijām parasti neeksistē algoritmi, lai pārbaudītu apgalvojumu, vai tas ir iegūstams (vai to ir iespējams pierādīt esošā teorijā). Tātad, šādā gadījumā, ja mums ir dots pierādījums kaut kādai teorēmai, tad mēs šo pierādījumu varam pārbaudīt (4. punkts). Bet ja mums dots patvaļīgs apgalvojums (hipotēze), var gadīties, ka mēs nespēsim pateikt, vai tas ir pierādāms mūsu teorijas ietvaros.

Detalizētam piemēram apskatīsim teoriju L.

1) Valoda sastāv no alfabēta {a,b}

Tas nozīmē, ka visi apgalvojumi ir pierakstāmi tikai ar burtu a un b palīdzību, nav citu burtu.

2) a (vienīgā aksioma)

Jebkurš pierādījums sākas ar vārdu a, tātad, jebkura vārda veidošana sākas ar burtu a, kuram tad mēs liksim klāt citus burtus.

Aksioma ir apgalvojums, kas tiek uzskatīts par patiesu bez pierādījuma. Tātad dotā aksioma var tikt uzskatīta kā jau pierādīta.

3) x ⊢ xb ; x ⊢ axa

x ⊢ xb nozīmē, ka ja teorijā ir pierādīts kaut kāds vārds x, tad ir arī pierādāms vārds xb (tātad x, kuram no labās puses ir pievienots vārds b). Tātad, no agrāk iegūtā vārda x mēs varam iegūt vārdu xb vai axa.

Izveduma likumus varam uzskatīt ka iespēju iegūt (pierādīt) no iepriekš pierādīta apgalvojuma nākamo. Mums ir aksioma a, aksioma ir patiesa pēc definīcijas, tātad turpmāk uz to varam atsaukties kā uz pierādītu apgalvojumu. Tad izmantosim izveduma likumu x ⊢ axa. Līdz ar to no a varam iegūt aaa. Tad no aaa varam iegūt nākamo apgalvojumu, izmantojot kādu no izveduma likumiem utt.

5) aab ; b – šos apgalvojumus teorijā L pierādīt nevar.

aaba – var pierādīt. Pieraksts: L ⊢ aaba nozīmē, ka teorijā L apgalvojums aaba ir pierādāms.

Par punktu 4) – Ja mums ir secīgi dots, kā tika pierādīts apgalvojums, mēs viegli varam pārbaudīt, vai pierādījums ir korekts.

Piemēram, apgalvojums "aaba" ir pierādīts sekojoši: "a" → "ab" → "aaba". Sākums sakrīt ar vienu no aksiomām (mūsu gadījumā vienīgo aksiomu "a"), tad mēs zinām, ka tika izmantots viens no izveduma likumiem, proti x ⊢ xb, līdz ar to tiek saņemts apgalvojums "a" → "ab", un tad ar izveduma likumu x ⊢ axa tiek saņemts apgalvojums "ab" → "aaba". Ja mums dots pierādījums, mēs varam pārbaudīt katru pierādījuma posmu, apskatot galīgu izveduma likumu skaitu, tātad algoritma izveidošana nav sarežģīta. Citiem vārdiem, punkts 4) ir apmierināts, mēs varam pārbaudīt pierādījuma pareizību.

Šī teorija ir vienkārša. Šai teorijai mēs varam izveidot algoritmu, kas pārbauda, vai apgalvojums ir pierādāms teorijā. Kā to izdarīt? Mums sākumā ir dota aksioma "a". Ar izveduma likumiem mēs varam pievienot apgalvojumam labajā pusē "b" vai abās pusēs "a". Līdz ar to, ja mums dots apgalvojums, kura pareizību vajag pierādīt, mēs varam atpakaļgaitā secināt, no kādiem apgalvojumiem ar kuriem izveduma likumiem tas tika izsecināts. Proti:

Apgalvojumam noņemam vienu burtu "b" no vārda labas puses, vai pa vienam burtam "a" no apgalvojuma abām pusēm. Ja šādas operācijas tiek secīgi atkārtotas, un beigās tiek sasniegts apgalvojums "a", tad sākotnējais apgalvojums ir pierādāms teorijā L. Ja tomēr kādā posmā atbilstošā burtu noņemšana nav iespējama, un apgalvojums nav vienāds ar “a”, tad sākotnējais apgalvojums nav pierādāms.

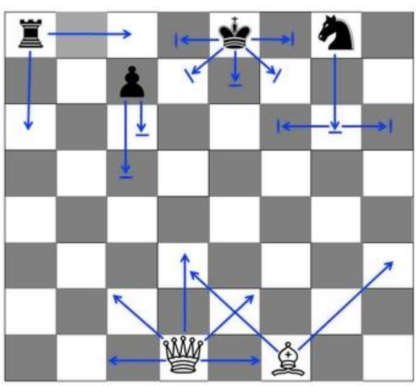
									~~b~~

~~a~~									~~a~~

Piemērs: aaba → ab → a (līdz ar to apgalvojums “aaba” ir pierādāms, un pierādījums ir sekojoša izveduma likumu virkne: a → ab → aaba).

Cits piemērs: aaabaaa → aabaa → aba → b, šeit mēs panāksim tukšu sākumu, bet katram apgalvojuma pierādījumam jāsākas ar “a”, līdz ar to apgalvojums “aaabaaa” nav pierādāms teorijā L.

Šahs kā cits teorijas piemērs:



Mums ir sākuma pozīcija kā aksioma. Tad mums ir izveduma likumi – atļauti gājieni. No tā mēs varam panākt jaunas pozīcijas – situācijas spēļu laukumā. Esošā un nākamā pozīcija – tā ir teorēma.

Vai Jūs varat izdomāt nepieradāmu apgalvojumu šahā?

Teorija ir formāla (precīzi definēta), ja Jums ir iespēja pārbaudīt pierādījuma pareizību.

Pastāv Gēdela teorēma par nepilnību, bet tā netiks apskatīta šajā kursā.