Lekcija 5

Lūgums iepazīties ar mācību grāmatas lpp. 27-31, 35-38, 40-42.

Vēl nedaudz atkārtojuma

Vēl pāris piemēru par predikātu valodām.

$\forall x\, (S(x) \rightarrow \exists y(P(y) \wedge \forall z(K(z) \rightarrow (pasn(y,z) \rightarrow \neg studē(x,z)))))$

$\exists z1 \exists z2(studē(x,z1) \wedge studē(x,z2) \wedge studē(y,z1) \wedge studē(y,z2) \wedge \neg(z1=z2))$

$\forall z(K(z) \rightarrow (stud(x,z) \rightarrow stud(y,z)) \wedge (stud(y,z) \rightarrow stud(x,z)))$

$A \leftrightarrow B$: $(A\rightarrow B) \wedge (B\rightarrow A)$ $studē(x,z) \leftrightarrow studē(y,z)$

1.3. Loģikas aksiomas

Kontroldarbā var gadīties, ka jūs jau zināsiet Dedukcijas teorēmas, bet nedrīkstēsiet tās izmantot. Tas attiecās uz pirmo kontroldarbu.

Teorija = Predikātu valoda + Aksiomas + Izveduma likumi.

Kā iemācīt datoram $\rightarrow, \wedge, \vee, \neg, \forall; \exists$?

Tagad koncentrēsimies uz $\rightarrow, \wedge, \vee, \neg$.

Aksiomas.

[L1 – L11; MP] noklāj visu, ja Jums nav kvantoru.

Modus Ponens: Ja ir pierādīts (patiess) $B\rightarrow C$ un B, tad no tā seko C. Tas ir mūsu izveduma likums.

L1: $B\rightarrow(C\rightarrow B)$
L2: $(B\rightarrow(C\rightarrow D))\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow(B\rightarrow D))$
L3: $B\wedge C\rightarrow B$
L4: $B\wedge C\rightarrow C$
L5: $B\rightarrow(C\rightarrow B\wedge C)$
L6: $B\rightarrow B\vee C$
L7: $C\rightarrow B\vee C$
L8: $(B\rightarrow D)\rightarrow((C\rightarrow D)\rightarrow(B\vee C\rightarrow D))$
L9: $(B\rightarrow C)\rightarrow((B\rightarrow\neg C)\rightarrow\neg B)$
L10: $\neg B\rightarrow(B\rightarrow C)$
L11: $B\vee\neg B$

Jūs varat skatīties uz minētām aksiomām kā uz aksiomu shēmām (šabloniem). Tas ir, B, C un D vietā var būt patvaļīga loģiskā formula/izteiksme. Piemēram, L1: ☺→(☼→☺). Modus Ponens kā līdzīgs piemērs: ja ir pierādīts ☼→☺ un ☼, tad ar MP mēs varam izsecināt ☺. Šāda veida abstrakcija mums būs noderīga pierādījumu veidošanā.

Aksioma L2 ir gana dabīga, bet to nevar pateikt par L1. L1-L2 definē implikāciju (→). Aksiomas L3-L5 definē konjunkciju (UN/AND definīcija). L6-L8 definē disjunkciju (VAI/inclusive OR definīcija). L9 definē negāciju.

Aksiomas L1: B→(C→B) un L10: ¬B→(B→C) ir dīvainas, neintuitīvas, bet ir nepieciešami, lai vienkāršotu sistēmu.

L10 – no pretrunas nav jēgas turpināt, jo var izsecināt jebko. Līdz ar to nepieciešams iet atpakaļ, lai atrastu problēmu.

L1 – ja kaut kas ir pierādīts, tad tas pierādītais var sekot no jebkā. Citiem vārdiem, nav jēgas pētīt, no kā ir izsecināts B, ja tas ir jau pierādīts.

Pastāv arī citas loģikas: B→C (C ir piesaistīts B), loģikas bez L1 un L10.

Pirmās pakāpes teorijas sastāv no:

1) Specifiskas predikātu valodas.

2) Loģiskām aksiomām un izveduma likumiem.

3) Specifiskām (ne-loģiskām) teorijas aksiomām.

Interesanti tas, ka mums pat nav nepieciešamības ieviest citus izveduma likumus.

Pierādījumu un teorēmu piemēri.

Dots B,C, jāpierāda B∧C.

B,C – dotās hipotēzes, …, MP 1,3:

1) B – dotā hipotēze (sākam pierādījumu ar dotajām hipotēzēm)

2) C – dotā hipotēze (sākam pierādījumu ar dotajām hipotēzēm)

3) B→(C→B∧C) L5 instance (varam izmantot mūsu aksiomu shēmu instances)

4) C→B∧C ar MP no 1. un 3. (MP ļauj pierādīt jaunās formulas no iepriekš pierādītajām/dotajām formulām)

5) B∧C ar MP no 2. un 4. (pierādījuma pēdējam solim jāsatur pierādāmā formula)

Teorēma 1.4.2 (grāmatas lpp. 41).

[L1,L2,MP]: A→B, B→C ⊢ A→C

1) A→B Hipotēze.

2) $B \to C$ Hipotēze.

3) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ Aksiomas L2 instance: $(B \to (C \to D)) \to ((B \to C) \to (B \to D))$, kur $B = A$, $C = B$, $D = C$.

4) $(B \to C) \to (A \to (B \to C))$ Aksiomas L1 instance: $B \to (C \to B)$, kur $B = B \to C$, $C = A$.

5) $A \to (B \to C)$ Seko no 2. un 4. ar Modus Ponens.

6) $(A \to B) \to (A \to C)$ Seko no 3. un 5. ar Modus Ponens.

7) $A \to C$ Seko no 1. un 6. ar Modus Ponens.

Kā uzminēt, kuru aksiomu vajag lietot? Pakāpeniski sāksim veidot intuīciju no nākamās lekcijas.