Lekcija 4

Lūgums vēlreiz izlasīt sadaļu 1.2 no mācību grāmatas.

Sadaļa 1.2 Predikātu valodas. Šodien – daudz piemēru.

Tipiskās kļūdas.

Parasti universālais kvantors iet ar implikāciju, bet eksistences kvantors – ar konjunkciju.

$\forall x\ (V(x) \to C(x))$ alternatīvi $\forall x\ (\neg V(x) \lor C(x))$

Teorētiski var, bet kopumā $\exists$ neiet kopā ar implikāciju:

$\exists x\ (B(x) \land C(x))$

$\exists x\ (B(x) \to C(x))$ – nav viegli izgudrot tādu piemēru.

$(\forall x>2)\ F(x)$ – sintaktiski nav definēts, jāraksta $\forall x(x>2 \to F(x))$

Vispārīgi $(\forall x B(x))\ C(x)$ jāraksta kā $\forall x(B(x) \to C(x))$

Warning! Some typical errors!

1a) Trying to say "for all x>2, F(x)", do not write $\forall x(x>2 \land F(x))$. This formula would imply that $\forall x(x>2)$ – a silly conclusion! Indeed, how about x=1? The correct version: $\forall x(x>2 \to F(x))$.

1b) Trying to say "there is x>2, such that F(x)", do not write $\exists x(x>2 \to F(x))$. The formula under the quantifier is true for x=1, hence, the entire formula cannot guarantee that "there is x>2, such that F(x)". The correct version: $\exists x(x>2 \land F(x))$

2) Some computer programmers do not like using the implication

connective →, trying to write formulas as conditions of IF- or WHILE-statements, i.e. by using conjunction, disjunction and negation only. This "approach" makes most logical tasks much harder than they really are! More than that − some people try saying, for example, "Persons are not Departments", as crazy as follows: $\forall x(Person(x) \land \neg Department(x))$ − instead of the correct version:

$$\forall x(Person(x) \rightarrow \neg Department(x)) \ .$$

3) Do not use abbreviations at this early stage of your logical studies. For example, do not write *(∀x>2)∃yF(x, y)* to say that "for all x that are >2, there is y such that F(x, y)". Instead, you should write *∀x(x>2→∃yF(x, y))*. Similarly, instead of *(∃a>2)∃bG(a, b)*, you should write $\exists\, a(a>2 \land \exists\, b G(a,b))$.

To say "there is one and only one x such that F(x)", you shouldn't write ∃!*x F(x)* (at this stage of your studies), you should write, instead,

$$((\exists x F(x)) \land (\forall x_1(\forall x_2((F(x_1) \land F(x_2)) \rightarrow (x_1 = x_2))))) \ .$$

Of course, ∃!*x F(x)* could serve as a “macro” for the above longer formula.

4) Predicates cannot be substituted for object variables. For example, having 3 predicate constants *working(x, y), Person(x), Department(y)*, do not try writing *working(Person(x), Department(y))* to say that "only persons are working, and only in departments*"*. The correct version:

$$\forall\ x \forall\ y(working(x,y) \rightarrow Person(x) \land Department(y)) \ .$$

5) Trying to say “each person is working in some department”, do not write

$$\forall x \exists y(Person(x) \land Department(y) \rightarrow working(x,y)) \ .$$

The correct version:

$$\forall x(Person(x) \rightarrow \exists\, y(Department(y) \land working(x,y))) \ .$$

Think it over: what is the difference?

Funkcijas strādā ar objektiem, predikāti – citādi, nosaka patiesuma vērtību.

(x+y)+z +(+(x,y),z)

Prioritātes. Funkcijas saista visstiprāk. Piemēram, x+y=y+x “=” ir predikāts, līdz ar to “+” saista stiprāk.

Kopumā īsumā par prioritātēm dilstošā secībā: Funkcijas; Predikāti; ∀; ∃; ¬; ∧; ∨; →

∀x∀y(x+y=y+x)

Piemēri no grāmatas lpp 19.

Vingrinājums 1.2.7.

prime(x): 1<x∧¬∃y∃z(y< x ∧ z< x ∧ x=y∗z)

y<z: ∃u(((x+u)+1)=y)

$twin(x,y): prime(x) \wedge prime(y) \wedge y=x+1+1$

$\forall z \exists x \exists y(twin(x,y) \wedge x>z)$

$\forall x(x \geq 4 \wedge even(x) \rightarrow \exists y \exists z(prime(y) \wedge prime(z) \wedge x=y+z)$

Kā pierakstīt, ka $\sqrt{2}$ nav racionāls skaitlis:

$\neg \exists m \exists n(\sqrt{2}=m/n)$

$\neg \exists m \exists n(1+1=(m*m)/(n*n))$

$\neg \exists m \exists n(n*n*(1+1)=m*m)$

P(x) – pasniedzējs; K(x) – kurss; S(x) – students.

$\forall x(P(x) \rightarrow \neg S(x) \wedge \neg K(x))$

$\neg \exists x(P(x) \wedge (S(x) \vee K(x)))$

māca(x,y): $\exists z$ (K(z) $\wedge$ pasn(x,z) $\wedge$ studē(y,z))

$\neg \exists x$(S(x) $\wedge$ $\forall y$(P(y) $\rightarrow$ māca(y,x))

$\forall x$(S(x) $\rightarrow$ $\exists y$(P(y) $\wedge$ $\neg$māca(y,x))

Kā pierakstīt "viens un tikai viens" par kaut ko? Mēs varam pateikt, ka ja mums ir ne vairāk ka viens tāds objekts, un ka tāds objekts eksistē (tātad, vismaz viens un ne vairāk ka viens). Pateikt, ka tāds objekts eksistē, ir vienkārši – ar eksistences kvantora palīdzību. Lai pateiktu, ka ir ne vairāk ka viens objekts, mēs varam pateikt, ka ja mums ir divi tādi objekti, piem., x un y, tad tas ir viens un tāds pats objekts (x=y).

Piemērs (eksistē viens un tikai viens Top1):

$\forall x \forall y(Top1(x) \wedge Top1(y) \rightarrow x=y)$ – ne vairāk ka viens

$\exists x(Top1(x))$ – vismaz viens

Liekam abas izteiksmes konjunkcijā.

Padomājiet kā pierakstīt ka eksistē tikai divi specifiski objekti, piem., TwoWinners(x).

Atcerieties, ka bieži pastāv vairākas iespējas pierakstīt prasāmo izteiksmi. Kā piemēru paņemsim "Nav tāda raksta, kas atsaucās uz visiem rakstiem" ar predikātiem atsaucās(x,y) – "raksts x atsaucās uz rakstu y"; Raksts(x) – "x ir raksts":

$\forall x(\text{Raksts}(x) \rightarrow \exists y \neg \text{atsaucās}(x,y))$

$\neg \exists x \forall y(\text{Raksts}(x) \wedge \text{atsaucās}(x,y))$

Pēdējam piemēram par kvantoriem – vai pamainot $\neg \exists x \boldsymbol{\forall y}(\text{Raksts}(x) \wedge \text{atsaucās}(x,y))$ uz $\neg \exists x(\text{Raksts}(x) \wedge \boldsymbol{\forall y}\text{atsaucās}(x,y))$ sanāks pareizi? Atbilde ir jā, jo abos gadījumos $\forall y$ attiecās uz atsaucās(x,y).