Lekcija 6

Lūgums izlasīt sadaļas 1.3 un 1.4 no mācību grāmatas.

Aksiomas L12-L15 (vēlāk pie tām vēl atgriezīsimies):

L12: $\forall xF(x)\rightarrow F(t)$

L13: $F(t)\rightarrow\exists xF(x)$

L14: $\forall x(G\rightarrow F(x))\rightarrow(G\rightarrow\forall xF(x))$

L15: $\forall x(F(x)\rightarrow G)\rightarrow(\exists xF(x)\rightarrow G)$

$\forall y\ (T(x,y) \vee M(x,y) \rightarrow S(y))$

$\exists y(T(x,y) \vee M(x,y))$

Piemērs par pierādījumiem konstruktīvajā un klasiskajā loģikā

Ir jāpierāda, ka $\exists a\exists b$, tādi, ka a,b ir iracionālie skaitļi $\wedge$ a^b – racionāls.

Kāds ir pirmais atklātais iracionālais skaitlis? Skaitlis π tika atklāts 19. gadsimtā. Bet skaitlis $\sqrt{2}$ apmērām 6. gadsimtā pirms mūsu ēras.

Pierādījums:

1) Ņemam $a = b = \sqrt{2}$. Mēs nezinam, vai $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ir racionāls, ja ir, tad pierādījums ir pabeigts.

Patiesībā eksistē 30 lpp. garš pierādījums, ka ir iracionāls skaitlis.

2) Pieņemam, ka $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ir irracionals skaitlis. Tad mēs varam paņemt $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ un $b = \sqrt{2}$. Tad mums ir $a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$.

Līdz ar to pierādījums ir pabeigts.

Tas ir nekonstruktīva pierādījuma piemērs. Mēs nezinām kurš no pierādījumiem (kurš skaitļu pāris) ir patiess.

Tajā pašā laikā skaitlis $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ir zināms no 20. gadsimta 30-iem gadiem.

Tagad konstruktīvais pierādījums: $a = \sqrt{2}$, $b = 2\log_2 3$, $a^b = 2^{\frac{1}{2}*2\log_2 3} = 3$.

To, ka $\log_2 3$ ir irracionāls, nav grūti pierādīt: pieņemam, ka $\log_2 3 = p/q$; $2^{p/q} = 3$; $2^p = 3^q$, pie $p \neq q \neq 0$ tas nav iespējams.

L1-L10 ar MP ir konstruktīva loģika; L1-L11 ar MP ir klasiskā loģika. L11: $B \lor \neg B$ nevar pierādīt konstruktīvajā loģikā.

$\neg(\neg B \land \neg C) \rightarrow B \lor C$ – nekonstruktīva formula.

$\neg\forall x F(x) \rightarrow \exists x \neg F(x)$ – kā uzkonstruēt tādu x?

Nekonstruktīva pierādījuma gadījumā mēs nevaram izsecināt šādu x.

Bez L11 nevar izsecināt $\neg\neg B \rightarrow B$

L11 ir vienīgais nekonstruktīvs spriedums.

Konstruktīva matemātika ir ļoti sarežģīta.

Modus Ponens: Mēs kaut kur pieradām $B \rightarrow C$, tad pēc kāda laika B, un līdz ar to varam izsecināt C.

Svarīgi nesajaukt. $B \rightarrow C; C \vdash B$ – tas ir nepareizi. Tajā pašā laikā mūsu cerības/ticība priekš B nedaudz palielinās.

Teorēma 1.4.1 (grāmatas lpp. 40).

L1: $A \rightarrow (A \rightarrow A)$ – tā mums veidojas deadlock.

L2 instance: (A→(☼→A))→((A→☼)→(A→A))

L1 instance: A→(☼→A)

Ar MP mums sanāk (A→☼)→(A→A)

☼ mēs varam uzskatīt kā mainīgo/šablonu (template), kurā varam likt arī formulu. Kas mums sanāk:

☼ vietā no paša sākuma liekam $(C \rightarrow A)$. Tad mums formula ir $(A \rightarrow (C \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$, un MP kopā ar $A \rightarrow (C \rightarrow A)$ dod $A \rightarrow A$.

Teorēma 1.4.3 a) Gana sarežģīti.

Teorēma 1.4.3 b) Ir vieglāka. Pierādīsim līdzīgu formulu $\neg(\neg A \land A)$

L9: $(B \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow \neg C) \rightarrow \neg B)$

B vietā liekam $\neg A \land A$, C vietā liekam A:

1) $(\neg A \land A \rightarrow A) \rightarrow ((\neg A \land A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg(\neg A \land A))$

2) $\neg A \land A \rightarrow \neg A$

3) $\neg A \land A \rightarrow A$

4) MP 1. un 3. : $(\neg A \land A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg(\neg A \land A)$

5) MP 2. un 4. : $\neg(\neg A \land A)$

Nedaudz arī parunāsim **par teoriju nekonsistenci un nepilnīgumu** (mācību grāmatas lpp. 38-40).

Teorija ir konsistenta, ja tā neļauj izsecināt pretrunas.

Teorija ir pilnīga, ja tajā var pierādīt vai atspēkot jebkuru slēgtu formulu tās valodā.

Piemērs, kas ietver L11 izmantošanu.

[L8,L11,MP]: $A \to B$; $\neg A \to B \vdash B$

L11: $A \lor \neg A$

L8: $(B \to D) \to ((C \to D) \to (B \lor C \to D))$

1) $(A \to B) \to ((\neg A \to B) \to (A \lor \neg A \to B))$

2) $A \to B$ – dotā hipotēze

3) $\neg A \to B$ – dotā hipotēze

4) $(\neg A \to B) \to (A \lor \neg A \to B)$ – MP no 1. un 2.

5) $A \lor \neg A \to B$ – MP no 3. un 4.

6) $A \lor \neg A$ L11 instance

7) B – MP no 5. un 6.

Neliels kopsavilkums

Mēs esam veikuši dažu teorēmu pierādījumus klasiskajā izteikumu loģikā (bez kvantoriem), tātad, ar L1-L11 un MP palīdzību. Kā mēs veicam pierādījumus?

Atcerieties mūsu pirmo lekciju ar teorijas L piemēru.

“a” → “ab” → “aaba”

Mums ir sākums – aksiomas, tad ar izveduma likumiem mēs veidojam jaunus vārdus. Vārdu vietā mums ir formulas, un aksiomas mums ir vairākas, bet no tām ar izveduma likumu palīdzību mēs virzāmies uz pierādāmo formulu.

Mums jāsasniedz pierādāma formula ar hipotēžu, doto aksiomu un MP palīdzību. **Ieteikums sākumā izrakstīt dotās hipotēzes kā pirmos pierādījuma soļus.** Piemēram, [L1,L2,MP]: $A \to B$, $B \to C \vdash A \to C$ gadījumā pirmie divi pierādījuma soļi bija

1) $A \to B$

2) $B \to C$

Jāpievērš uzmanība kuru aksiomu kopā mēs veicam pierādījumu. Dotajā piemērā mums jāiztiek ar L1, L2 un MP, tātad nav pat jādomā par citām aksiomām. Mums ir pieejams MP, tātad mēs varam mēģināt pierādīt kaut kādu formulu, kurai implikācijas labajā pusē būs mūsu pierādāma formula A→C. Ņemam L2:

3) (A→(☼→C))→((A→☼)→(A→C))

Uzmanieties, ka **ar MP palīdzību mēs varam noņemt premisi tikai no ārējās implikācijas** (domājiet par implikāciju, kas savieno visu formulu kopā), tātad, vienā no nākamiem soļiem mēs varēsim noņemt tikai (A→(☼→C)), bet ne (A→☼) vai (A→(☼→C))→((A→☼). Tātad, mums vajag pierādīt A→(☼→C). Ievietojot ☼ vietā B, mums sanāk A→(B→C). Ņemot vērā ka mums ir pieejams B→C, tad varam konstruēt L1 instanci (B→C)→(A→(B→C)).

Tātad mums ir (pievērsiet uzmanību kā mēs lietojam MP):

3) (A→(B→C))→((A→B)→(A→C)) L2 instance

4) (B→C)→(A→(B→C)) L1 instance

5) A→(B→C) MP no 4. un 2.

6) (A→B)→(A→C) MP no 3. un 5.

7) A→C MP no 6. un 1.

Vēl viena piezīme – katra formula no saraksta ir pierādīta, un mēs varam to izmantot. Tas nozīmē, ka nākamajos soļos Jūs varat izmantot pieejamas aksiomu shēmas un jau pierādītas formulas.