DIGITALNA I MIKROPROCESORSKA TEHNIKA

1. UVOD
2. SINTEZA KOMBINACIJSKIH LOGIČKIH STRUKTURA
3. SINTEZA SEKVENCIJALNIH SKLOPOVA
4. OSNOVE ARHITEKTURE MIKRORAČUNALA

2. SINTEZA KOMBINACIJSKIH LOGIČKIH STRUKTURA

- 2.1. BOOLEOVA ALGEBRA
- 2.2. BOOLEOVE FUNKCIJE
- 2.3. MINIMIZACIJA BOOLEOVIH FUNKCIJA I SINTEZA PRIMJENOM LOGIČKIH VRATA
- 2.4. SINTEZA PRIMJENOM MULTIPLEKSERA I DEMULTIPLEKSERA
- 2.5. PROGRAMABILNE STRUKTURE

2.1. BOOLEOVA ALGEBRA

Booleova algebra:

$$\mathrm{B.A.} = \{\mathrm{G},\ \mathrm{x},\ =,\ \mathrm{S}\}$$

G - skup operatora;

x - Booleova varijabla, uzima vrijednosti iz S;

S - Booleove konstante:

$$\mathrm{S} = \{0, 1\};\quad \mathrm{x} \in \mathrm{S}$$

LOGIKA SUDOVA

Iz logike poznajemo operatore:

		KONJUNKCIJA	DISJUNKCIJA	NEGACIJA	
A	B	A & B	$A \vee B$	$\overline{A}$	$\overline{B}$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$

ISTINA (TRUTH) … $\top$

NEISTINA (FALSE) … $\perp$,F

tablicu zovemo **TABLICA ISTINE**

ALGEBRA LOGIKE

Izaberemo G koji sadrži:

konjunkciju, disjunkciju i negaciju - ALGEBRA LOGIKE

$$\text{A.L.} = \{\&, \vee, -, =, x, S = \{0, 1\}\}; \; \top \to 1, \perp \to 0 \; (\text{pozitivna logika})$$

x_1	x_2	$x_1 \& x_2$	$x_1 \vee x_2$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0

ALGEBRA LOGIKE

Očita svojstva (postulati):

1. ZATVORENOST:

a) $\forall x_1, x_2 \in S \Rightarrow x_1 \vee x_2 \in S$

b) $\forall x_1, x_2 \in S \Rightarrow x_1 \& x_2 \in S$

c) $\forall x_1 \in S \Rightarrow \overline{x}_1 \in S$

2. NEUTRALNI ELEMENT:

a) $\forall x_1, 0 \in S \Rightarrow x_1 \vee 0 = x_1$

b) $\forall x_1, 1 \in S \Rightarrow x_1 \& 1 = x_1$

ALGEBRA LOGIKE

Očita svojstva (postulati):

3. KOMUTATIVNOST:

a) $\forall x_1, x_2 \in S \Rightarrow x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1 \in S$

b) $\forall x_1, x_2 \in S \Rightarrow x_1 \,\&\, x_2 = x_2 \,\&\, x_1 \in S$

4. DISTRIBUTIVNOST:

a) $\forall x_1, x_2, x_3 \in S \Rightarrow$

$$x_1 \vee (x_2 \,\&\, x_3) = (x_1 \vee x_2) \,\&\, (x_1 \vee x_3)$$

b) $\forall x_1, x_2, x_3 \in S \Rightarrow$

$$x_1 \,\&\, (x_2 \vee x_3) = (x_1 \,\&\, x_2) \vee (x_1 \,\&\, x_3)$$

ALGEBRA LOGIKE

Očita svojstva (postulati):

5. KOMPLEMENTIRANJE:

a) $\forall x_1 \in S \Rightarrow x_1 \vee \overline{x}_1 = 1$

b) $\forall x_1 \in S \Rightarrow x_1 \,\&\, \overline{x}_1 = 0$

6. ASOCIJATIVNOST:

a) $\forall x_1, x_2, x_3 \in S \Rightarrow$

$$x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3$$

b) $\forall x_1, x_2, x_3 \in S \Rightarrow$

$$x_1 \,\&\, (x_2 \,\&\, x_3) = (x_1 \,\&\, x_2) \,\&\, x_3$$

ALGEBRA LOGIKE

Postulati slijede iz tablice, npr. distributivnost:

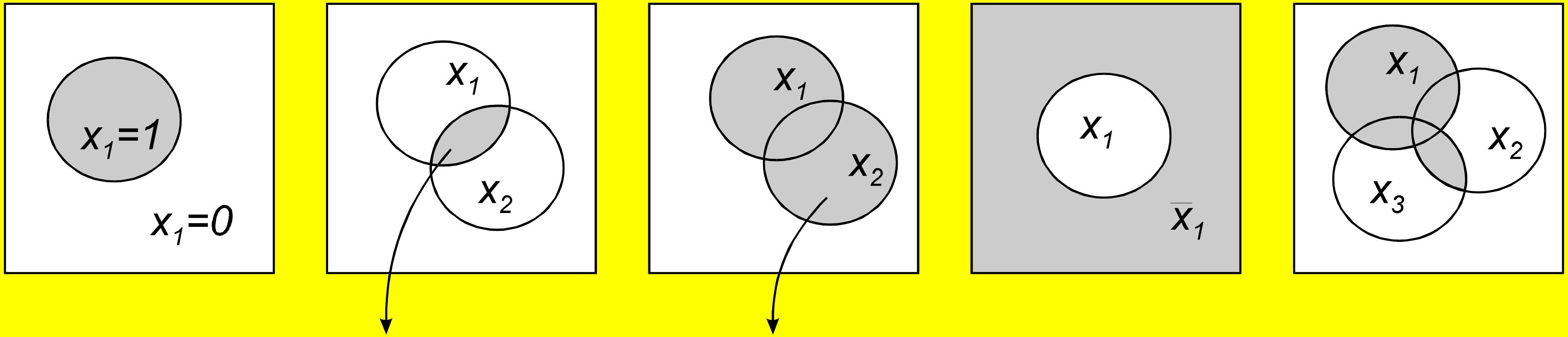
x_1	x_2	x_3	$x_2 \& x_3$	$x_1 \vee (x_2 \& x_3)$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \vee x_3$	$(x_1 \vee x_2) \& (x_1 \vee x_3)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

REDOSLIJED:

1. negacija (i sve ispod)
2. konjunkcija
3. disjunkcija

ALGEBRA LOGIKE

Analogija s operacijama nad skupovima:



$x_1 \cap x_2 \sim x_1 \,\&\, x_2$ $\quad$ $x_1 \cup x_2 \sim x_1 \vee x_2$ $\quad$ $/\,x_1 \sim \overline{x}_1$ $\quad$ $x_1 \vee (x_2 \,\&\, x_3)$

Pišemo i čitamo:

$$x_1 \,\&\, x_2 = x_1 \wedge x_2 = x_1 \cdot x_2 = x_1\, x_2 \qquad x_1 \text{ i } x_2 \,/\, x_1\, x_2$$

$$x_1 \vee x_2 = x_1 \vee x_2 \qquad x_1 \text{ ili } x_2 / x_1 \text{ vel } x_2$$

ALGEBRA LOGIKE

Izvedena svojstva (teoremi):

1. APSORPCIJA za disjunkciju: $\boxed{x_1 \vee 1 = 1}$

$$\underset{P_{2b}}{\equiv} (x_1 \vee 1) \cdot 1 \underset{P_{5a}}{=} (x_1 \vee 1) \cdot (x_1 \vee \overline{x}_1) \underset{P_{4a}}{=} x_1 \vee (1 \cdot \overline{x}_1) \underset{P_{2b}}{=} x_1 \vee \overline{x}_1 \underset{P_{5a}}{=} 1$$

5. APSORPCIJA za konjunkciju: $\boxed{x_1 \cdot 0 = 0}$

$$\underset{P_{2a}}{\equiv} x_1 \cdot 0 \vee 0 \underset{P_{5b}}{=} x_1\, 0 \vee x_1\, \overline{x}_1 \underset{P_{4b}}{=} x_1 (0 \vee \overline{x}_1) \underset{P_{2a}}{=} x_1\, \overline{x}_1 \underset{P_{5b}}{=} 0$$

ALGEBRA LOGIKE

Izvedena svojstva (teoremi):

2. IDEMPOTENTNOST za disjunkciju: $$\boxed{x_1 \vee x_1 = x_1}$$

$$\underset{P_{2b}}{\equiv}\left(x_1 \vee x_1\right)\cdot 1 \underset{P_{5a}}{=}\left(x_1 \vee x_1\right)\cdot\left(x_1 \vee \overline{x}_1\right)\underset{P_{4a}}{=} x_1 \vee \left(x_1 \cdot \overline{x}_1\right)\underset{P_{5b}}{=} x_1 \vee 0 \underset{P_{2a}}{=} x_1$$

3. IDEMPOTENTNOST za konjunkciju: $$\boxed{x_1 \cdot x_1 = x_1}$$

$$\underset{P_{2a}}{\equiv} x_1 \cdot x_1 \vee 0 \underset{P_{5b}}{=} x_1 x_1 \vee x_1 \overline{x}_1 \underset{P_{4b}}{=} x_1\left(x_1 \vee \overline{x}_1\right)\underset{P_{5a}}{=} x_1 \cdot 1 \underset{P_{2b}}{=} x_1$$

ALGEBRA LOGIKE

Izvedena svojstva (teoremi):

4. DVOSTRUKA NEGACIJA:

$$\boxed{\overline{\overline{x}}_1 = x_1}$$

x_1	$\overline{x}_1$	$\overline{\left(\overline{x}_1\right)} = \overline{\overline{x}}_1$
0	1	0
1	0	1

ALGEBRA LOGIKE

Izvedena svojstva (teoremi):

DeMORGANOVI TEOREMI:

T12: $\boxed{\overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2}$

$$A = \overline{x_1 \vee x_2}$$

$$\bar{A} = \overline{\overline{x_1 \vee x_2}} = x_1 \vee x_2$$

$$A = \bar{x}_1 \bar{x}_2$$

$$A \vee \bar{A} = 1 \qquad \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \vee \left(x_1 \vee x_2\right) = 1$$

$$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \vee \left(x_1 \vee x_2\right) = \left(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_1\right) \cdot \left(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_2\right) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$A \cdot \bar{A} = 0 \qquad \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \left(x_1 \vee x_2\right) = 0$$

$$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \left(x_1 \vee x_2\right) = \left(\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_1\right) \vee \left(\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_2\right) = 0 \vee 0 = 0$$

ALGEBRA LOGIKE

Izvedena svojstva (teoremi):

DeMORGANOVI TEOREMI:

T13: $\boxed{\overline{X_1 \cdot X_2} = \overline{X}_1 \vee \overline{X}_2}$

$$\overline{X_1 \cdot X_2} = \overline{X}_1 \vee \overline{X}_2 \quad \Big/ \overline{}$$

$$\overline{\overline{X_1 \cdot X_2}} = \overline{\overline{X}_1 \vee \overline{X}_2}$$

$$X_1 \cdot X_2 = \overline{\overline{X}}_1 \cdot \overline{\overline{X}}_2 = X_1 \cdot X_2$$

2.2. BOOLEOVE FUNKCIJE

Ako je X skup svih n varijabli x: $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

tada je $P_n(X)$ skup svih kodnih riječi varijabli x:

$$P_n(X) = \{00\ldots0,\ 00\ldots1, \cdots\cdots, 11\ldots0,\ 11\ldots1\}$$

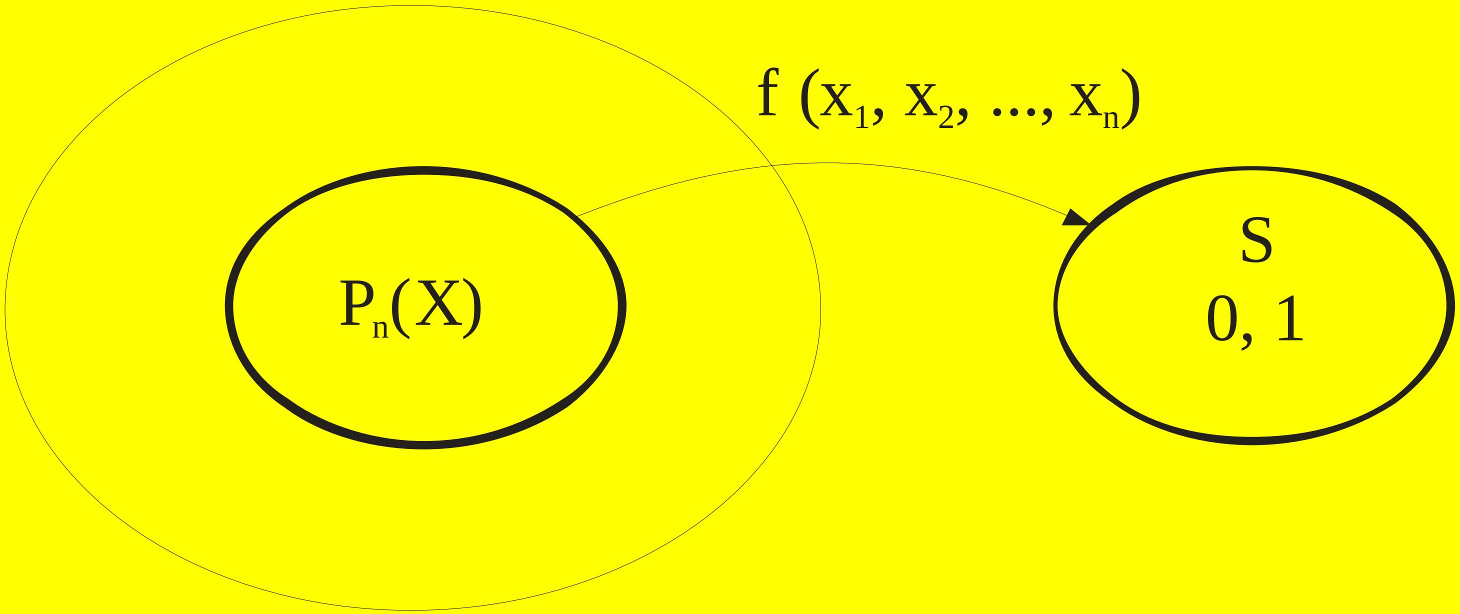
BOOLEOVA FUNKCIJA $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

je preslikavanje iz skupa svih kodnih riječi u skup Booleovih konstanti S:

$$P_n(X) \to S; \qquad S = \{0, 1\}; \quad x \in S$$

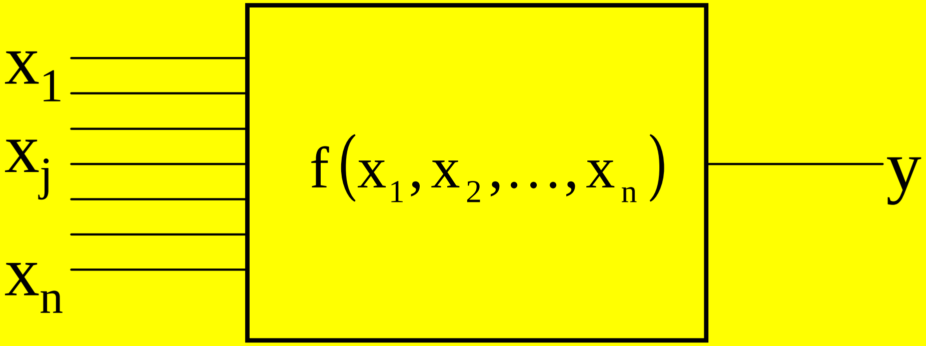
2.2. BOOLEOVE FUNKCIJE

grafički:



BOOLEOVE FUNKCIJE

Booleova funkcija je interesantna jer opisuje rad digitalnog sklopa:



u nekom trenutku

$x_1, x_2, \ldots, x_n$

čine kodnu riječ

y je funkcija od

$x_1, x_2, \ldots, x_n$

BOOLEOVE FUNKCIJE

Booleovu funkciju je najjednostavnije zapisati tablično:

- **s lijeve strane napišemo sve kodne riječi prirodnim binarnim nizom**
- **s desne strane napišemo vrijednosti funkcije (vrijednosti y)**
- **takvu strukturu zovemo TABLICA ISTINE**
- **funkcija može biti POTPUNO ILI NEPOTPUNO specificirana – za redundantne kodne riječi n znamo T**

i	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	T_i
0	0	0	0	1	1	T_0
1	0	0	1	0	R	T_1
2	0	1	0	0	0	T_2
3	0	1	1	0	0	T_3
4	1	0	0	1	1	T_4
5	1	0	1	1	1	T_5
6	1	1	0	1	1	T_6
7	1	1	1	1	1	T_7

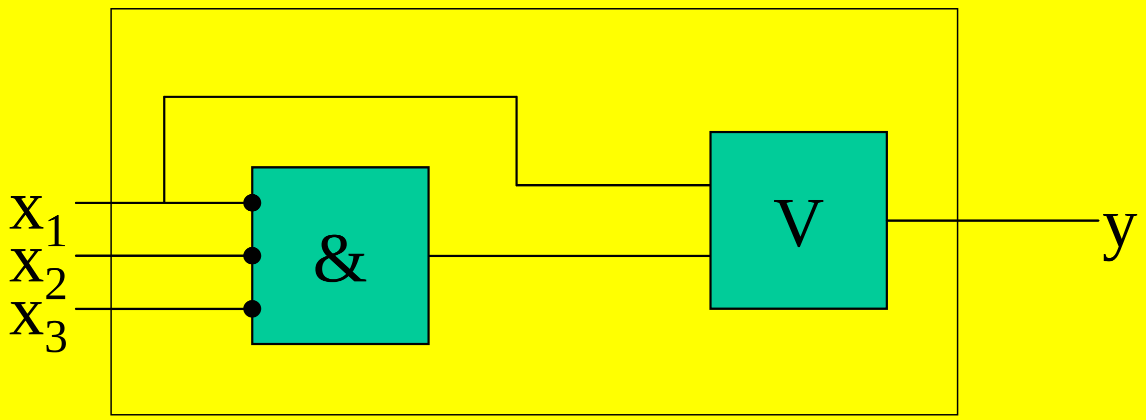
BOOLEOVE FUNKCIJE

Osim tablice istine, interesantan je

ALGEBARSKI OBLIK zapisa (formula):

$$y = x_1 \vee \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3$$

jer uvodi operatorske veze među varijablama potrebne za crtanje logičkog dijagrama i sheme:



Kružić označava negaciju

BOOLEOVE FUNKCIJE

Uvjerimo se u istovjetnost tablice i algebarskog oblika:

x_1	x_2	x_3	y		$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	x_1	$x_1 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$
0	0	0	1		1	0	1
0	0	1	0		0	0	0
0	1	0	0		0	0	0
0	1	1	0	$\equiv$	0	0	0
1	0	0	1		0	1	1
1	0	1	1		0	1	1
1	1	0	1		0	1	1
1	1	1	1		0	1	1

BOOLEOVE FUNKCIJE

U praksi su najvažniji

NORMALNI ALGEBARSKI OBLICI

zbog:

- **moguće ih je napisati neposredno iz tablice istine**
- **omogućavaju izradu sklopa s najmanjim kašnjenjem**
- **sklop ima jednoliko kašnjenje**
- **moguće ih je minimizirati egzaktnim postupcima**
- **garantiran je prijelaz na NI i NILI operatore**

BOOLEOVE FUNKCIJE

<u>POTPUNI DISJUNKTIVNI NORMALNI OBLIK (PDNO)</u>

PDNO je disjunkcija svih onih MINTERMA m_i
za koje je vrijednost funkcije i-tog retka T_i jednaka jedinici:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i \cdot T_i$$

MINTERM m_i i-tog retka tablice istine je konjunkcija SVIH varijabli tako da su one koje u pripadnoj kodnoj riječi imaju vrijednost nula negirane, a one u jedinici nenegirane:

$$m_3(x_1, x_2, x_3) \underset{011}{=} \overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

za pripadnu kodnu riječ minterm je jednak jedinici, inače nuli

BOOLEOVE FUNKCIJE

SVI MINTERMI ZA n=3

i	x_1	x_2	x_3	$m_i(x_1\,x_2\,x_3)$
0	0	0	0	$\bar{x}_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3$
1	0	0	1	$\bar{x}_1\,\bar{x}_2\,x_3$
2	0	1	0	$\bar{x}_1\,x_2\,\bar{x}_3$
3	0	1	1	$\bar{x}_1\,x_2\,x_3$
4	1	0	0	$x_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3$
5	1	0	1	$x_1\,\bar{x}_2\,x_3$
6	1	1	0	$x_1\,x_2\,\bar{x}_3$
7	1	1	1	$x_1\,x_2\,x_3$

BOOLEOVE FUNKCIJE

Npr. za gornju funkciju:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = m_0 T_0 \vee m_1 T_1 \vee m_2 T_2 \vee m_3 T_3 \vee m_4 T_4 \vee m_5 T_5 \vee m_6 T_6 \vee m_7 T_7 =$$
$$= m_0 \cdot 1 \vee m_1 \cdot 0 \vee m_2 \cdot 0 \vee m_3 \cdot 0 \vee m_4 \cdot 1 \vee m_5 \cdot 1 \vee m_6 \cdot 1 \vee m_7 \cdot 1 =$$
$$= m_0 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 = \vee(0,4,5,6,7)$$

Raspišimo minterme prema definiciji pa imamo PDNO:

$$f_1(x) = \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee x_1 \overline{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3$$

BOOLEOVE FUNKCIJE

<u>POTPUNI KONJUNKTIVNI NORMALNI OBLIK (PKNO)</u>

je konjunkcija svih onih MAKSTERMA M_i
za koje je vrijednost funkcije i-tog retka T_i jednaka nuli:

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \mathop{\&}_{i=0}^{2^n-1}\left(M_i \vee T_i\right)$$

MAKSTERM M_i i-tog retka tablice istine je disjunkcija SVIH varijabli tako da su one koje u pripadnoj kodnoj riječi imaju vrijednost jedan negirane, a one u nuli nenegirane:

$$M_3\left(x_1, x_2, x_3\right) \underset{011}{=} x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3$$

za pripadnu kodnu riječ maksterm je jednak nuli, inače jedinici

BOOLEOVE FUNKCIJE

SVI MAKSTERMI ZA n=3

i	x_1	x_2	x_3	$M_i(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	$x_1 \vee x_2 \vee x_3$
1	0	0	1	$x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3$
2	0	1	0	$x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3$
3	0	1	1	$x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3$
4	1	0	0	$\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3$
5	1	0	1	$\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3$
6	1	1	0	$\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3$
7	1	1	1	$\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3$

BOOLEOVE FUNKCIJE

Npr. za gornju funkciju:

$$y(x_1, x_2, x_3) = M_1 \,\&\, M_2 \,\&\, M_3 = \&(1,2,3)$$

napišimo maksterme prema definiciji i dobijemo PKNO:

$$y = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \cdot (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \cdot (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$$

BOOLEOVE FUNKCIJE

PDNO nepotpuno specificirane funkcije:

$$y_2 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \cdot R_1 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3$$

$$y_2(x_1, x_2, x_3) = \vee(0, R_1, 4,5,6,7)$$

PKNO nepotpuno specificirane funkcije :

$$y_2 = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee R_1) \,\&\, (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \,\&\, (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$$

$$y_2(x_1, x_2, x_3) = \&(R_1, 2,3)$$

BOOLEOVE FUNKCIJE

SVOJSTVA NORMALNIH OBLIKA

$$\bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1 \qquad \mathop{\&}_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0$$

$$\overline{m_i} = M_i \qquad \overline{M_i} = m_i$$

$$m_i \vee M_i = 1 \qquad m_i M_i = 0$$

$$m_i m_j \underset{i \neq j}{=} 0 \qquad M_i \vee M_j \underset{i \neq j}{=} 1$$

BOOLEOVE FUNKCIJE

NEGIRANA FUNKCIJA

x_1	x_2	x_3	$f_2(x)$	$\bar{f}_2(x)$
0	0	0	1	0
0	0	1	R	R
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

BOOLEOVE FUNKCIJE

NEGIRANA FUNKCIJA

$$f(x) = \bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i T_i \Rightarrow$$

$$\bar{f}(x) = \overline{\bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i T_i} = \mathop{\&}_{i=0}^{2^n-1} \overline{m_i T_i} = \mathop{\&}_{i=0}^{2^n-1} \left(\overline{m}_i \vee \overline{T}_i\right) = \mathop{\&}_{i=0}^{2^n-1} \left(M_i \vee \overline{T}_i\right)$$

$$\bar{f}(x) = \overline{\mathop{\&}_{i=0}^{2^n-1} \left(M_i \vee T_i\right)} = \bigvee_{i=0}^{2^n-1} \overline{M_i \vee T_i} = \bigvee_{i=0}^{2^n-1} \overline{M}_i \cdot \overline{T}_i = \bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i \cdot \overline{T}_i$$

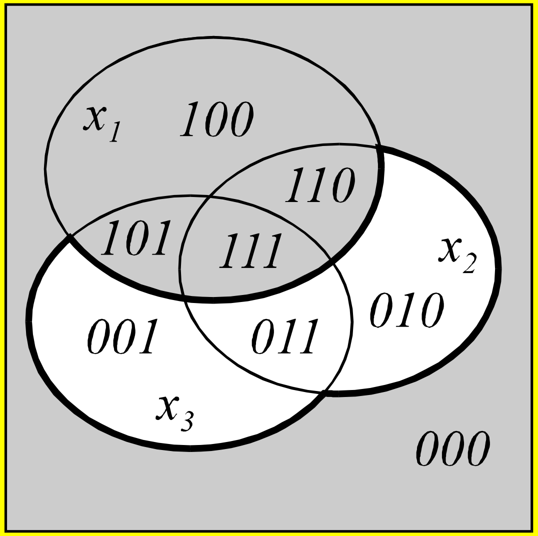
Dokaz dobijemo neposredno preko $f \vee \bar{f} = 1$ i $f \,\&\, \bar{f} = 0$

BOOLEOVE FUNKCIJE

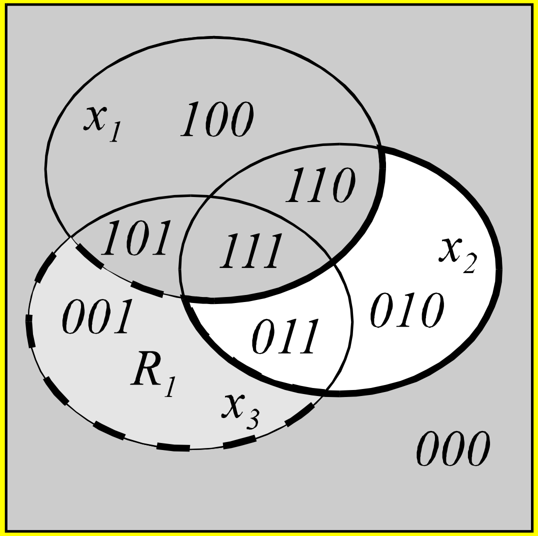
Prikaz BOOLEOVIH funkcija Vennovim dijagramima:

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2
0	0	0	1	1
0	0	1	0	R
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

y_1

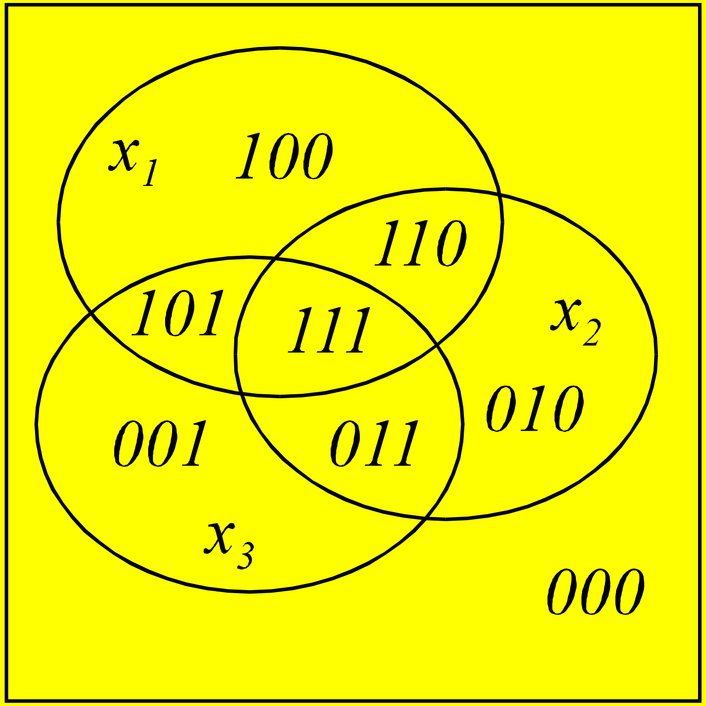


y_2



BOOLEOVE FUNKCIJE

Stilizirani Vennovi dijagrami - VEITCHEVI dijagrami:



$n=3$

x_1 (first two columns), x_2 (top row), x_3 (middle two columns)

6 *110*	7 *111*	3 *011*	2 *010*
4 *100*	5 *101*	1 *001*	0 *000*

BOOLEOVE FUNKCIJE

VEITCHEVI dijagrami za n=1, 2 i 4:

$n=1$

x_1

1	0

$n=2$

x_1

x_2

3 11	1 01
2 10	0 00

$n=4$

x_1

x_2

12 1100	14 1110	6 0110	4 0100
13 1101	15 1111	7 0111	5 0101
9 1001	11 1011	3 0011	1 0001
8 1000	10 1010	2 0010	0 0000

x_4

x_3

BOOLEOVE FUNKCIJE

VEITCHEV dijagram za n=5:

x_5 susjednost

x_1 x_1

$n=5$

25	29	13	9	24	28	12	8
27	31	15	11	26	30	14	10
19	23	7	3	18	22	6	2
17	21	5	1	16	20	4	0

x_2 x_4

x_3 x_3

VEITCHEV dijagram za n=6:

n=6

x_5

x_1 x_1

x_6 x_2 x_2 x_4 x_4

51	59	27	19	49	57	25	17
55	63	31	23	53	61	29	21
39	47	15	7	37	45	13	5
35	43	11	3	33	41	9	1
50	58	26	18	48	56	24	16
54	62	30	22	52	60	28	20
38	46	14	6	36	44	12	4
34	42	10	2	32	40	8	0

x_3 x_3

BOOLEOVE FUNKCIJE

Primjer prikaza funkcija Veitchevim dijagramom n=3:

y_1:

	x_1	x_1		
x_2	1	1	0	0
	1	1	0	1
		x_3	x_3	

y_2:

	x_1	x_1		
x_2	1	1	0	0
	1	1	R	1
		x_3	x_3	

BOOLEOVE FUNKCIJE

Dvodimenzionalne tablice:
tablica crtana dvodimenzionalno štede prostor na papiru:

$x_3 \backslash x_1x_2$	00	01	10	11
0	A	B	C	D
1	a	b	c	d

npr. tablica kodiranja znakova a,b,c,d

BOOLEOVE FUNKCIJE

Grayev kod:
ima svojstvo susjednosti:

i	x_1	x_2	x_3
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	1
3	0	1	0
4	1	1	0
5	1	1	1
6	1	0	1
7	1	0	0

koristi se kod optičkih senzora položaja ili kuta

BOOLEOVE FUNKCIJE

K-TABLICE (Karnaugh):

tablica istine crtana dvodimenzionalno, Grayev kod:

$$
\begin{array}{cc|c|c|c|c|}
 & & \multicolumn{4}{c}{x_1x_2} \\
 & & 10 & 11 & 01 & 00 \\
\hline
x_3 & 1 & 101 & 111 & 011 & 001 \\
\hline
 & 0 & 100 & 110 & 010 & 000 \\
\hline
\end{array}
$$

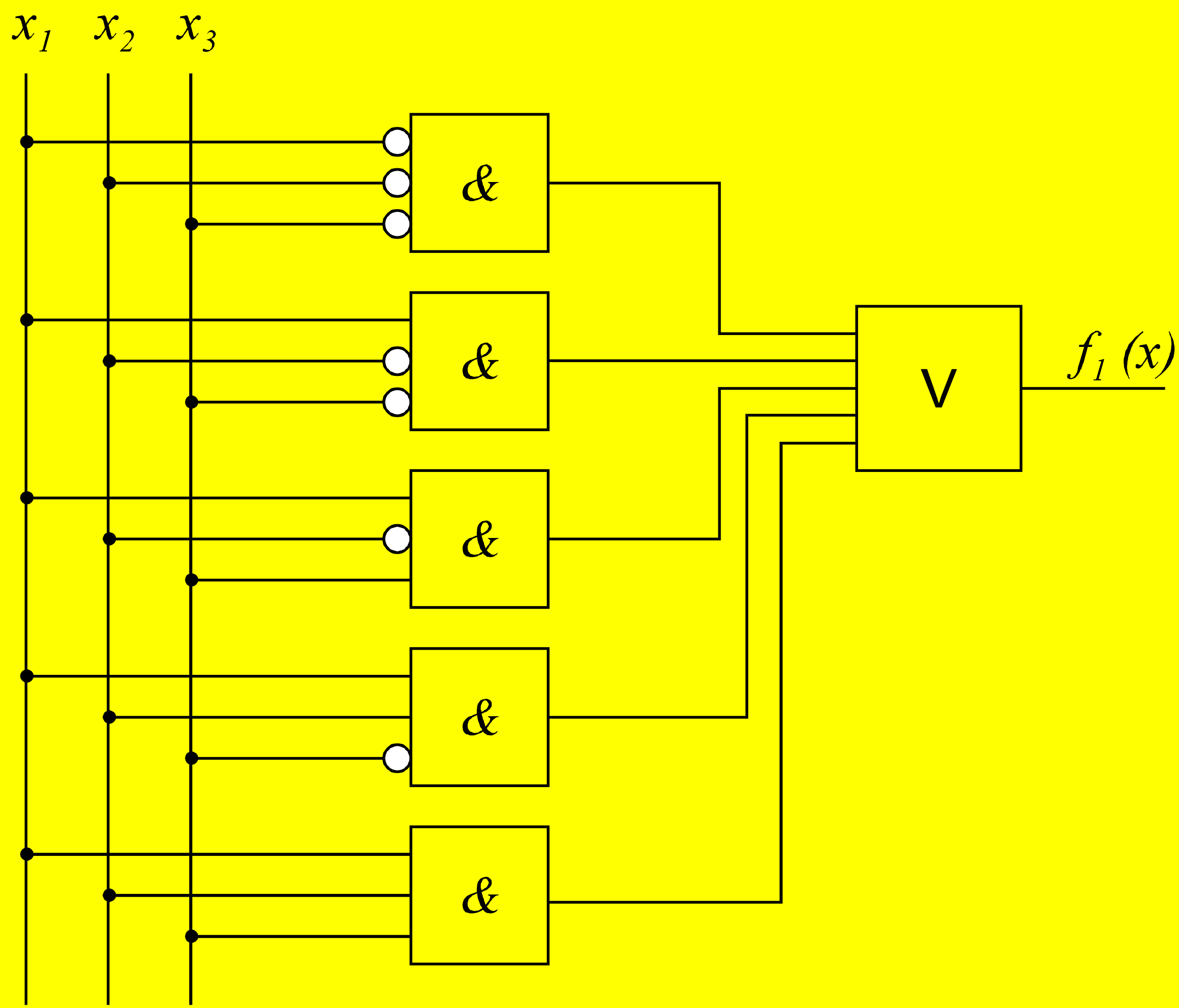
KARNAUGH

K - TABLICE

OTEŽANO OČITAVANJE ČLANOVA!

BOOLEOVE FUNKCIJE

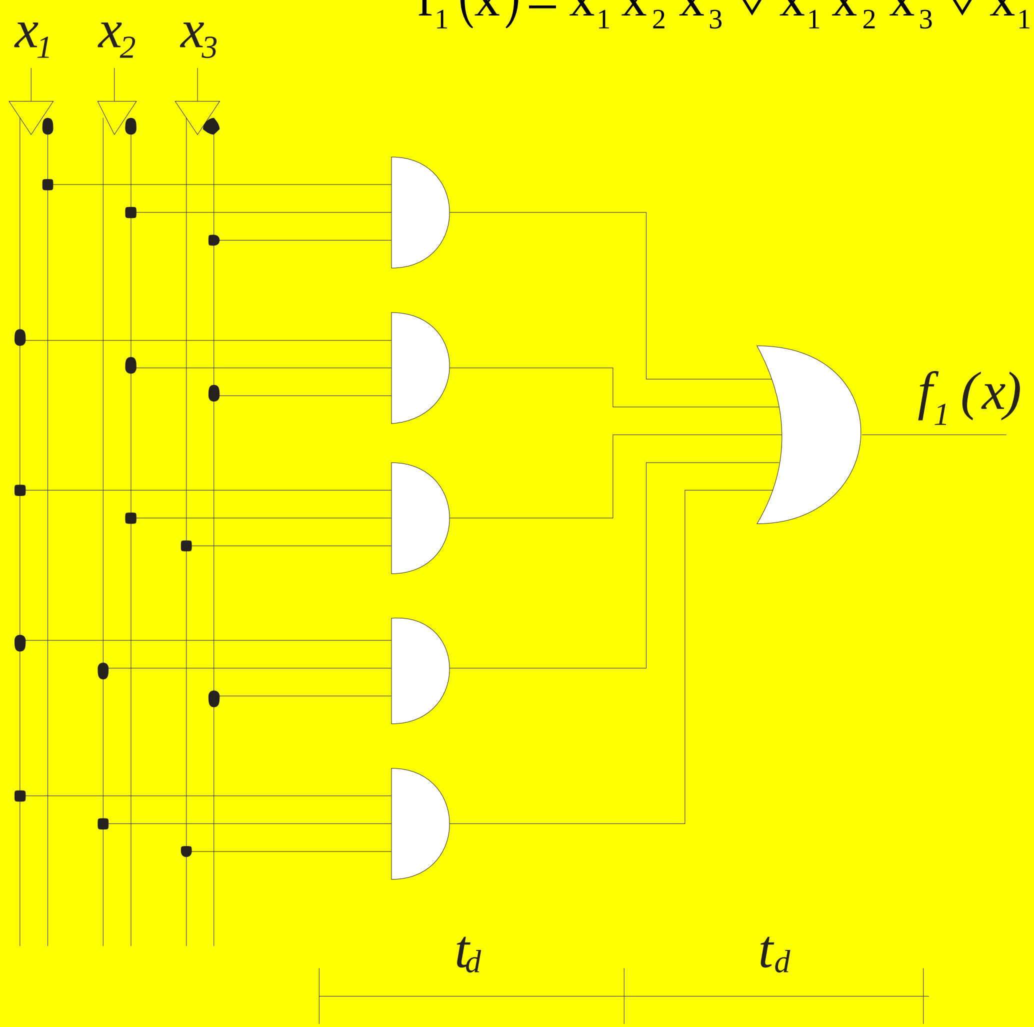
LOGIČKI DIJAGRAM: $f_1(x) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3$



BOOLEOVE FUNKCIJE

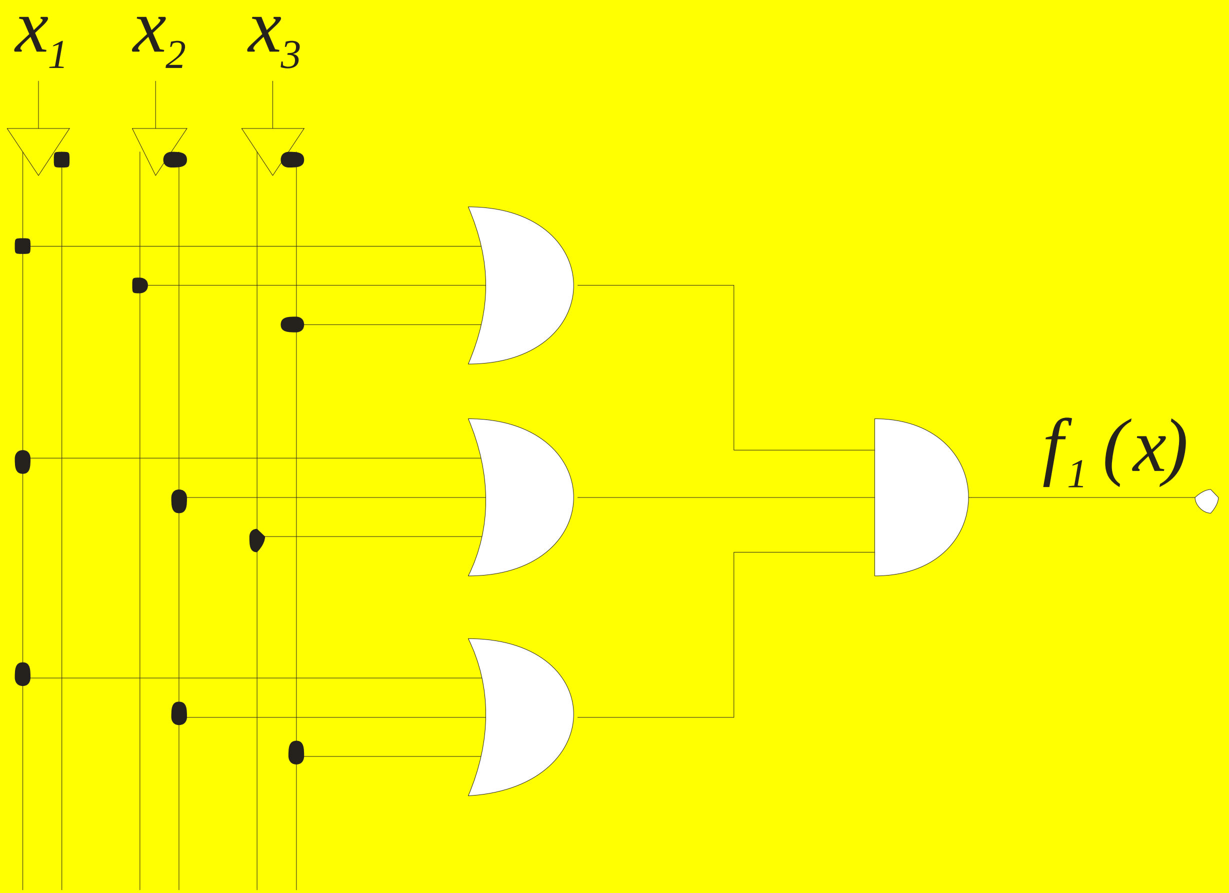
SHEMA SKLOPA:

$$f_1(x) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3$$



BOOLEOVE FUNKCIJE

SHEMA SKLOPA: $f_1(x)=(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)\cdot(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)\cdot(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$



BOOLEOVE FUNKCIJE

RAZBIJANJE PDNO-a NA PARCIJALNE (PREOSTALE) FUNKCIJE: po x_1, x_2

$$\underset{\{x_1,x_2,x_3\}}{f(x)} = \bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i \cdot T_i = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 T_0 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 T_1 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 T_2 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 T_3 \vee$$

$$\vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 T_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 T_5 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 T_6 \vee x_1 x_2 x_3 T_7 =$$

$$= \bar{x}_1 \bar{x}_2 (\bar{x}_3 T_0 \vee x_3 T_1) \vee \bar{x}_1 x_2 (\bar{x}_3 T_2 \vee x_3 T_3) \vee x_1 \bar{x}_2 (\bar{x}_3 T_4 \vee x_3 T_5) \vee$$

$$\vee x_1 x_2 (\bar{x}_3 T_6 \vee x_3 T_7) =$$

$$= \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot f_0(x_3) \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot f_1(x_3) \vee x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot f_2(x_3) \vee x_1 \cdot x_2 \cdot f_3(x_3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = m_0(x_1 x_2) f_0(x_3) \vee m_1(x_1 x_2) f_1(x_3) \vee m_2(x_1 x_2) f_2(x_3) \vee m_3(x_1 x_2) f_3(x_3) =$$

$$= \bigvee_{j=0}^{2^m-1} m_j(x_1 \cdots x_m) f_j(x_{m+1} \cdots x_n); \quad f_j(x_{m+1} \cdots x_n) = \bigvee_{k=0}^{2^{n-m}-1} m_k(x_{m+1} \cdots x_n) T_{j \cdot 2^{n-m}+k}$$

BOOLEOVE FUNKCIJE

RAZBIJANJE PDNO-a NA PARCIJALNE (PREOSTALE) FUNKCIJE: po x_1

$$f(x) = \overline{x}_1 \cdot \left(\overline{x}_2\,\overline{x}_3 T_0 \vee \overline{x}_2\, x_3 T_1 \vee x_2\,\overline{x}_3 T_2 \vee x_2\, x_3 T_3\right) \vee$$

$$\vee x_1 \cdot \left(\overline{x}_2\,\overline{x}_3 T_4 \vee \overline{x}_2\, x_3 T_5 \vee x_2\,\overline{x}_3 T_6 \vee x_2\, x_3 T_7\right) =$$

$$= m_0(x_1) \cdot f_0(x_2, x_3) \vee m_1(x_1) \cdot f_1(x_2, x_3) =$$

$$= \bigvee_{i=0}^{2^m - 1} m_j(x_1) \cdot f_j(x_2, x_3)$$

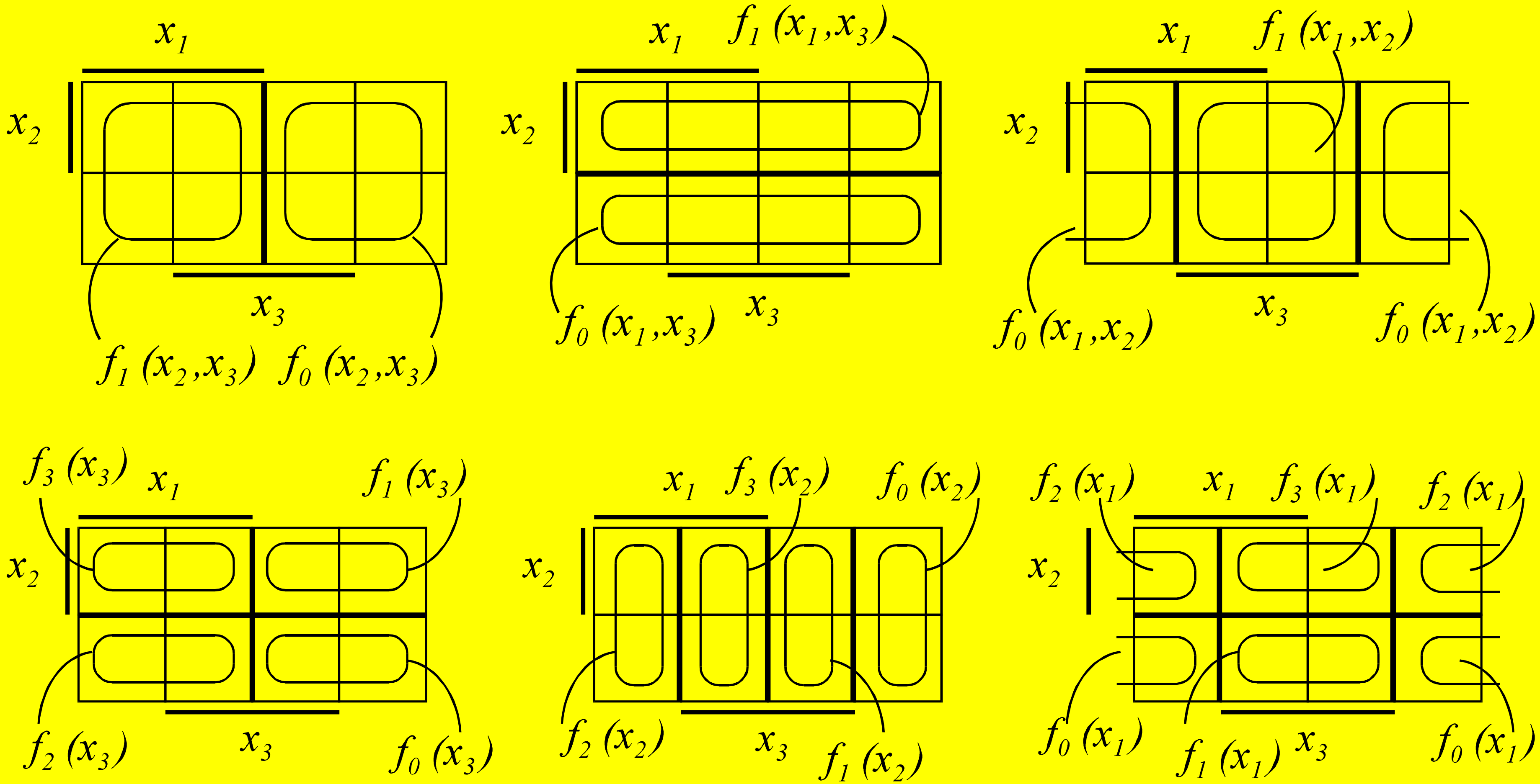
BOOLEOVE FUNKCIJE

RAZBIJANJE PDNO - prikaz TABLICOM ISTINE

	x_1	x_2	x_3	$f(x)$		
$f_0(x_2, x_3)$	0	0	0	1	T_0	$f_0(x_3)$
	0	0	1	0	T_1	
	0	1	0	0	T_2	$f_1(x_3)$
	0	1	1	0	T_3	
$f_1(x_2, x_3)$	1	0	0	1	T_4	$f_2(x_3)$
	1	0	1	1	T_5	
	1	1	0	1	T_6	$f_3(x_3)$
	1	1	1	1	T_7	

BOOLEOVE FUNKCIJE

RAZBIJANJE PDNO - prikaz VEITCHEVIM DIJAGRAMOM



BOOLEOVE FUNKCIJE

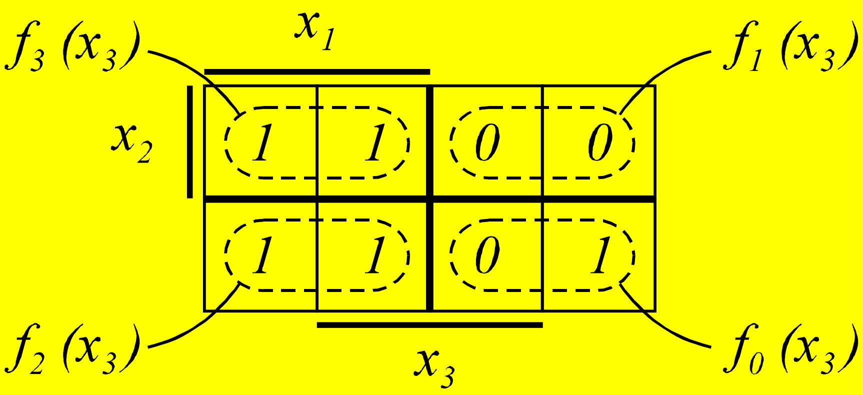
RAZBIJANJE PDNO - prikaz VEITCHEVIM DIJAGRAMOM

x_1

x_2	$T_6=f_6$	$T_7=f_7$	$T_3=f_3$	$T_2=f_2$
	$T_4=f_4$	$T_5=f_5$	$T_1=f_1$	$T_0=f_0$

x_3

Za funkciju f_1



BOOLEOVE FUNKCIJE

POTPUNI SKUPOVI FUNKCIJA ALGEBRE LOGIKE:

Interesiraju nas druge moguće funkcije, osim &, V i -

FUNKCIJE JEDNE VARIJABLE:

x_1	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	1	0	1
1	0	0	1	1

$$f_0(x_1) = 0$$

$$f_1(x_1) = \overline{x}_1$$

$$f_2(x_1) = x_1$$

$$f_3(x_1) = 1$$

Očito:

$$N = 2^n \;\; ; \;\; F = 2^N = 2^{\left(2^n\right)} = 2^{2^n}$$

BOOLEOVE FUNKCIJE

FUNKCIJE DVIJE VARIJABLE:

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

$f_0 = 0 \quad f_3 = \overline{x}_1 \quad f_5 = \overline{x}_2 \quad f_{10} = x_2 \quad f_{12} = x_1 \quad f_{15} = 1$

$f_1 = \overline{x_1 \vee x_2}$ NILI $\equiv$ PIERCE OPERATOR

$f_7 = \overline{x_1 x_2}$ NI $\equiv$ SHAEFFER OPERATOR

$f_8 = x_1 x_2$ I

$f_{14} = x_1 \vee x_2$ ILI

$f_2 = \overline{x_2 \to x_1}$ implikacija

$f_4 = \overline{x_1 \to x_2}$ implikacija

$f_{11} = x_1 \to x_2$ implikacija

$f_{13} = x_2 \to x_1$ implikacija

$f_6 = x_1 \oplus x_2$ ekskluzivno ILI

$f_9 = x_1 \equiv x_2 = \overline{x_1 \oplus x_2}$ ekvivalencija

BOOLEOVE FUNKCIJE

Potpuni skup funkcija:

ONAJ, KOJIM SE U KONAČNOM ALGEBARSKOM IZRAZU MOŽE PRIKAZATI PROIZVOLJNA BOOLEOVA FUNKCIJA

SKUP (&,V,-) je potpun:

1. Nad njim je definirana ALGEBRA LOGIKE
2. PDNO i PKNO su potvrdni primjeri

STOGA DOKAZUJEMO:

$$\text{P.S.F.A.L.}:\{\&,\vee,-\}$$

SKUP JE POTPUN AKO MOŽEMO IZRAZITI (&,V, -)

BOOLEOVE FUNKCIJE

Analizirajmo neke skupove funkcija:

$\{\&\}:\ x_1 \cdot x_2 \ \Rightarrow$ nije potpun $\qquad \{-\}:\ \overline{x}_1 \ \Rightarrow$ nije potpun

$\{\vee\}:\ x_1 \vee x_2 \ \Rightarrow$ nije potpun

$\{\&,-\}:\ x_1 \cdot x_2$

$\overline{x}_1$

$x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x_1 \vee x_2}} = \overline{\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2} \ \Rightarrow$ potpun je!

$\{\vee,-\}:\ x_1 \vee x_2$

$\overline{x}_1$

$x_1 \cdot x_2 = \overline{\overline{x_1 \cdot x_2}} = \overline{\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2} \ \Rightarrow$ potpun je!

BOOLEOVE FUNKCIJE

NI operator, Shaeffer (NAND) je <u>potpun</u>:

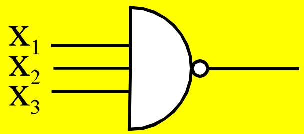
$\{\uparrow\}$, SHAEFFER, NI, $\overline{x_1\, x_2}$;

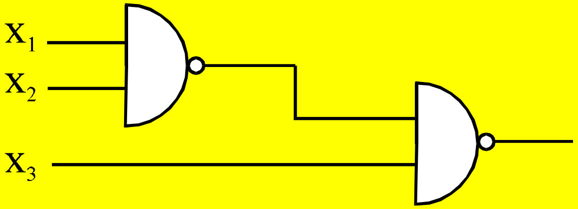
$$x_1 \uparrow x_1 = \overline{x_1\, x_1} = \overline{x}_1 \quad \text{ili} \quad x_1 \uparrow 1 = \overline{x_1\, 1} = \overline{x}_1$$

$$(x_1 \mid x_1) \mid (x_2 \mid x_2) = \overline{x}_1 \mid \overline{x}_2 = \overline{\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2} = \overline{\overline{x}}_1 \vee \overline{\overline{x}}_2 = x_1 \vee x_2$$

$$(x_1 \mid x_2) \mid (x_1 \mid x_2) = \overline{x_1 \mid x_2} = \overline{\overline{x_1\, x_2}} = x_1\, x_2$$

problem zapisa:





$$x_1 \mid x_2 \mid x_3 = \overline{x_1\, x_2\, x_3}$$

$$(x_1 \mid x_2) \mid x_3 = \overline{\overline{x_1\, x_2}\, x_3} \qquad \Rightarrow \qquad x_1 \mid x_2 \mid x_3 \neq (x_1 \mid x_2) \mid x_3$$

koristimo sustav (&,-) i svojstvo asocijativnosti konjunkcije

BOOLEOVE FUNKCIJE

NILI operator, Pierce (NOR) je <u>potpun</u>:

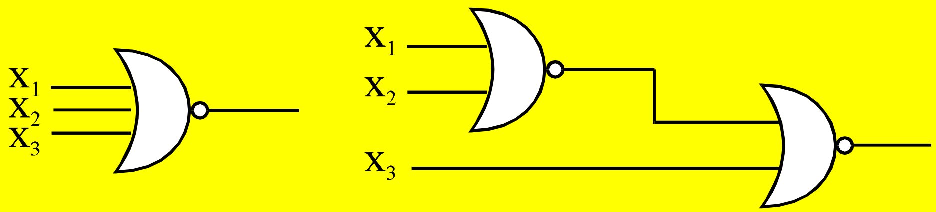
$\{\downarrow\}$, PIERCE, NILI, $\overline{x_1 \vee x_2}$;

$$x_1 \downarrow x_1 = \overline{x_1 \vee x_1} = \overline{x}_1 \quad \text{ili} \quad x_1 \downarrow 0 = \overline{x_1 \vee 0} = \overline{x}_1$$

$$(x_1 \downarrow x_1) \downarrow (x_2 \downarrow x_2) = \overline{x}_1 \downarrow \overline{x}_2 = \overline{\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2} = \overline{\overline{x}}_1 \cdot \overline{\overline{x}}_2 = x_1\, x_2$$

$$(x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2) = \overline{x_1 \downarrow x_2} = \overline{\overline{x_1 \vee x_2}} = x_1 \vee x_2$$

problem zapisa:



$$x_1 \downarrow x_2 \downarrow x_3 = \overline{x_1 \vee x_2 \vee x_3}$$

$$(x_1 \downarrow x_2) \downarrow x_3 = \overline{\overline{x_1 \vee x_2} \vee x_3}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 \downarrow x_2 \downarrow x_3 \neq (x_1 \downarrow x_2) \downarrow x_3$$

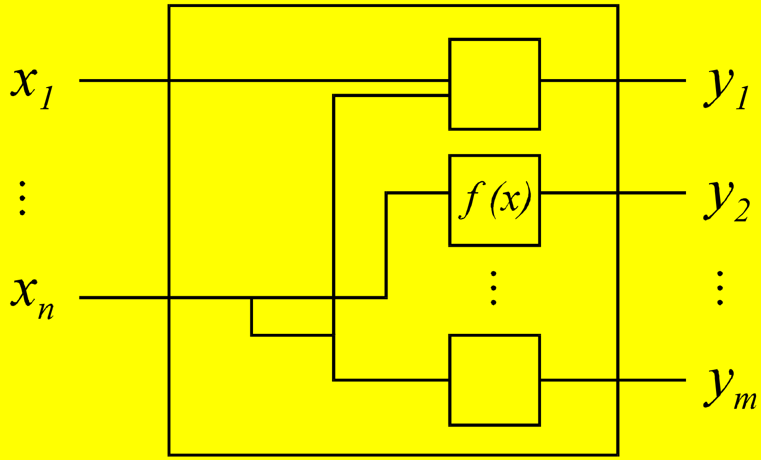
koristimo sustav (V,-) i svojstvo asocijativnosti disjunkcije

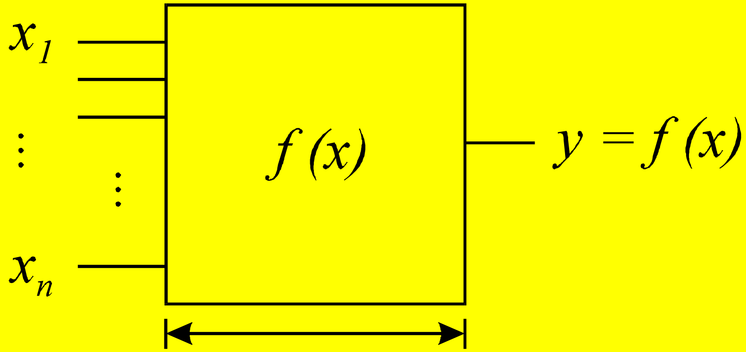
2.3. MINIMIZACIJA BOOLEOVIH F.

I SINTEZA SKLOPOVA PRIMJENOM LOGIČKIH VRATA

U praksi, imamo složeni sklop s više ulaza i izlaza:

$$x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$





a zapravo se sastoji od više sklopova s jednim izlazom

svaki je opisan jednom Booleovom funkcijom!

Osim što realizira funkciju, stvarni sklop ima i neko kašnjenje.

MINIMIZACIJA BOOLEOVIH FUNKCIJA

Želimo da sklop bude:

- ekonomičan u proizvodnji i eksploataciji
  $\Rightarrow$ minimalan
- brz $\Rightarrow$ minimalno i jednoliko kašnjenje
- dizajn $\Rightarrow$ postupci, prijelaz na NI i NILI vrata

Minimalnost ?!:

- minimalan broj (diskretnih) komponenti
- minimalan broj integriranih krugova
- **minimalan broj logičkih vrata**
- minimalna površina štampane pločice
- minimalna potrošnja energije

MINIMIZACIJA BOOLEOVIH FUNKCIJA

Već smo pokazali proceduru:

Booleova funkcija (algebarski oblik)

$\Rightarrow$ Logički dijagram $\Rightarrow$ Shema sklopa

Želimo da Booleova funkcija bude napisana na način:

- minimalan oblik
- osigurava minimalno i jednoliko kašnjenje
- omogućava postupke minimizacije
- omogućava prijelaz na NI i NILI vrata

Optimalni su MINIMALNI NORMALNI OBLICI

- Minimalni disjunktivni normalni oblik (MDNO)
- Minimalni konjunktivni normalni oblik (MKNO)

MINIMIZACIJA NORMALNIH OBLIKA

NORMALNE OBLIKE MINIMIZIRAMO:

- algebarski
- nekim postupkom na osnovu algebarskog:
  - metoda Veitchevog dijagrama (ručno)
  - Quinne-McClusky metoda
  - Harvardska metoda (računalom)

Algebarski oblik minimizacije

- korištenjem svojstava algebre logike (postulati, teoremi)
- transformiramo PDNO u MDNO, (ili PKNO u MKNO)

Razlikujemo

- osnovni algebarski postupak minimizacije
- pomoćni algebarski postupak minimizacije (proširenje)

MINIMIZACIJA NORMALNIH OBLIKA

OSNOVNI ALGEBARSKI POSTUPAK MINIMIZACIJE:

U PDNO (PKNO) pronalazimo susjedne članove:
susjedni su članovi oni kojima su pripadne kodne riječi susjedne

Korištenjem svojstava asocijativnosti i komutativnosti:
- izdvojimo zajednički dio

Korištenjem svojstva distributivnosti:
- izlučimo (izvučemo) zajednički dio
- u zagradama ostane oblik $x_1 \vee \bar{x}_1$ ili $x_1 \,\&\, \bar{x}_1$

Korištenjem svojstva komplementiranja:
- ostatak je jednak konstanti 1 ili 0

Korištenjem svojstva neutralnog elementa:
- konstantu 1 ili 0 eliminiramo (brišemo)

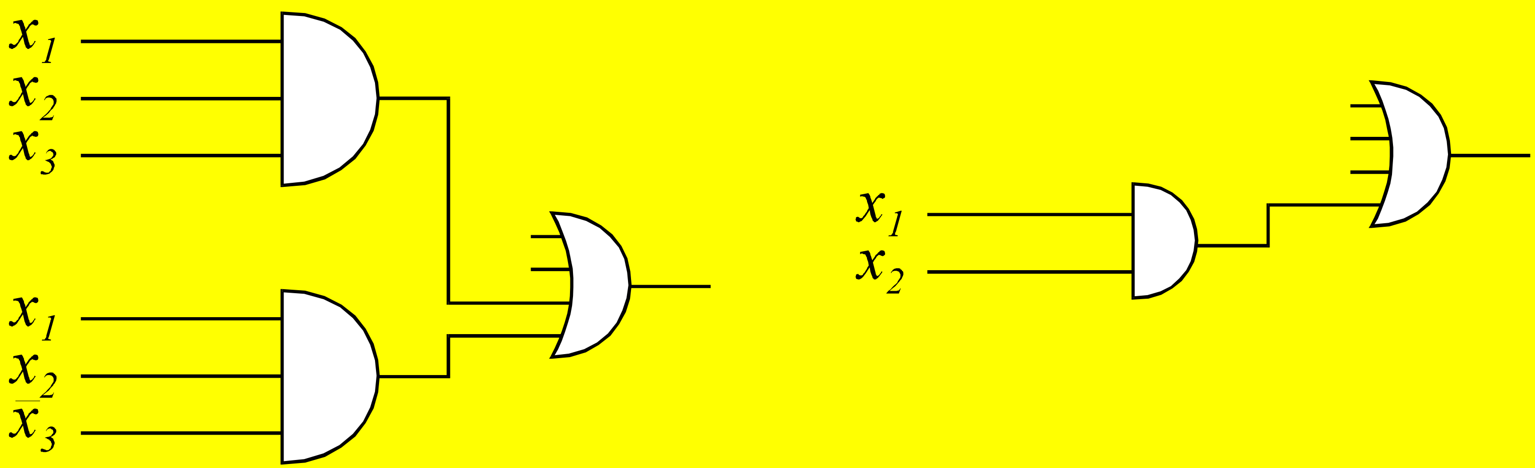
MINIMIZACIJA NORMALNIH OBLIKA

Primjer za PDNO:

$$x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \ldots \underset{P_{4b}}{=}$$

$$x_1 x_2 \left(x_3 \vee \bar{x}_3\right) \vee \ldots \underset{P_{5a}}{=} x_1 x_2 \cdot 1 \vee \ldots \underset{P_{2b}}{=} x_1 x_2 \vee \ldots$$

Što rezultira uštedama u sklopu:



UŠTEDIMO: jedna logička vrata i jedan ulaz na prvoj razini
+ jedan ulaz na drugoj razini logičkih vrata

MINIMIZACIJA NORMALNIH OBLIKA

Slično za PKNO:

$$\left(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3\right)\cdot\left(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3\right)\cdot\left(\ldots\right) \underset{P_{3a}}{=}$$

$$= \left(\overline{x}_2 \vee x_3 \vee x_1\right)\cdot\left(\overline{x}_2 \vee x_3 \vee \overline{x}_1\right)\cdot\left(\ldots\right) \underset{P_{4a}}{=}$$

$$= \left(\overline{x}_2 \vee x_3 \vee \left(x_1 \cdot \overline{x}_1\right)\right)\cdot\left(\ldots\right) \underset{P_{5b}}{=}$$

$$= \left(\overline{x}_2 \vee x_3 \vee 0\right)\cdot\left(\ldots\right) \underset{P_{2a}}{=}$$

$$= \left(\overline{x}_2 \vee x_3\right)\cdot\left(\ldots\right)$$

ISTA UŠTEDA!

MINIMIZACIJA NORMALNIH OBLIKA

POMOĆNI ALGEBARSKI POSTUPAK MINIMIZACIJE:

- proširenje postojećim članom
  (Teorem o idempotentnosti):

$$x_1 \vee x_1 = x_1 \qquad x_1 \,\&\, x_1 = x_1$$

- proširenje redundantnim članom:
  izvorište nikad neće poslati kodnu riječ
  koja nema značenja
  $\Rightarrow$ za tu kodnu riječ sklop može obaviti
  proizvoljno preslikavanje

Uštedimo jedan ulaz na prvoj razini (može biti značajno)!

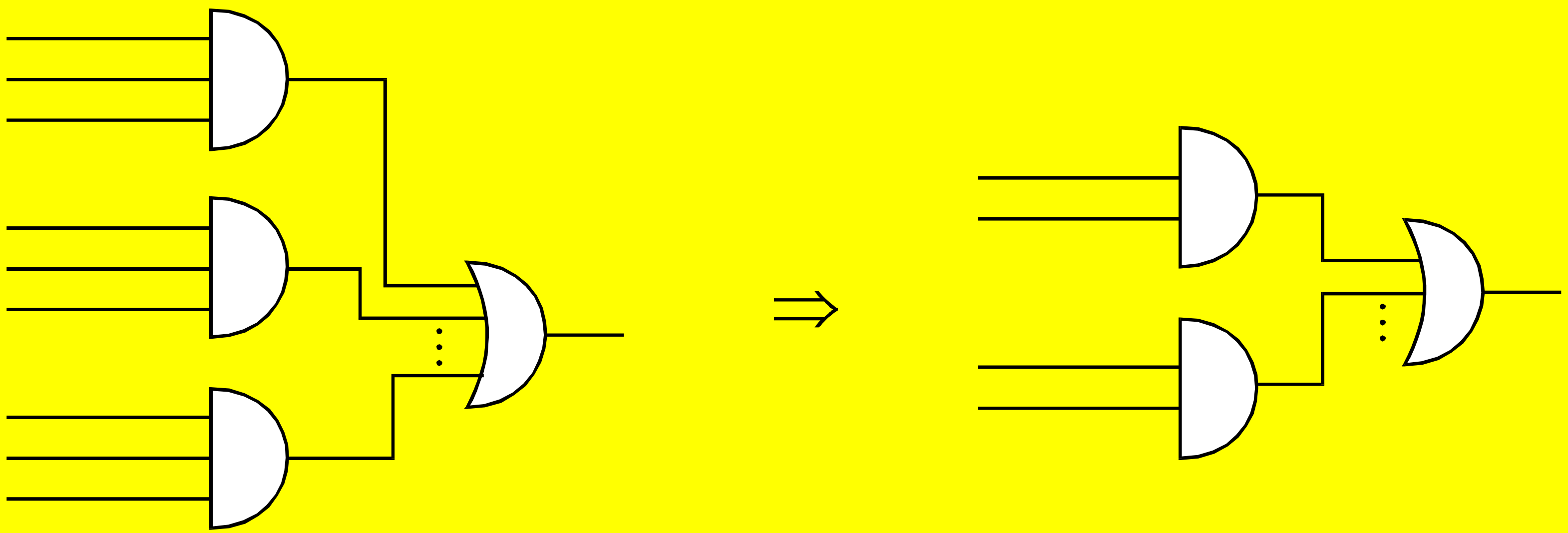
MINIMIZACIJA NORMALNIH OBLIKA

PROŠIRENJE POSTOJEĆIM ČLANOM:

$$x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x}_3 \vee x_1 \overline{x}_2 x_3 \vee \ldots =$$

$$\underset{T_2}{=} x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x}_2 x_3 \vee \ldots =$$

$$= x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee \ldots$$

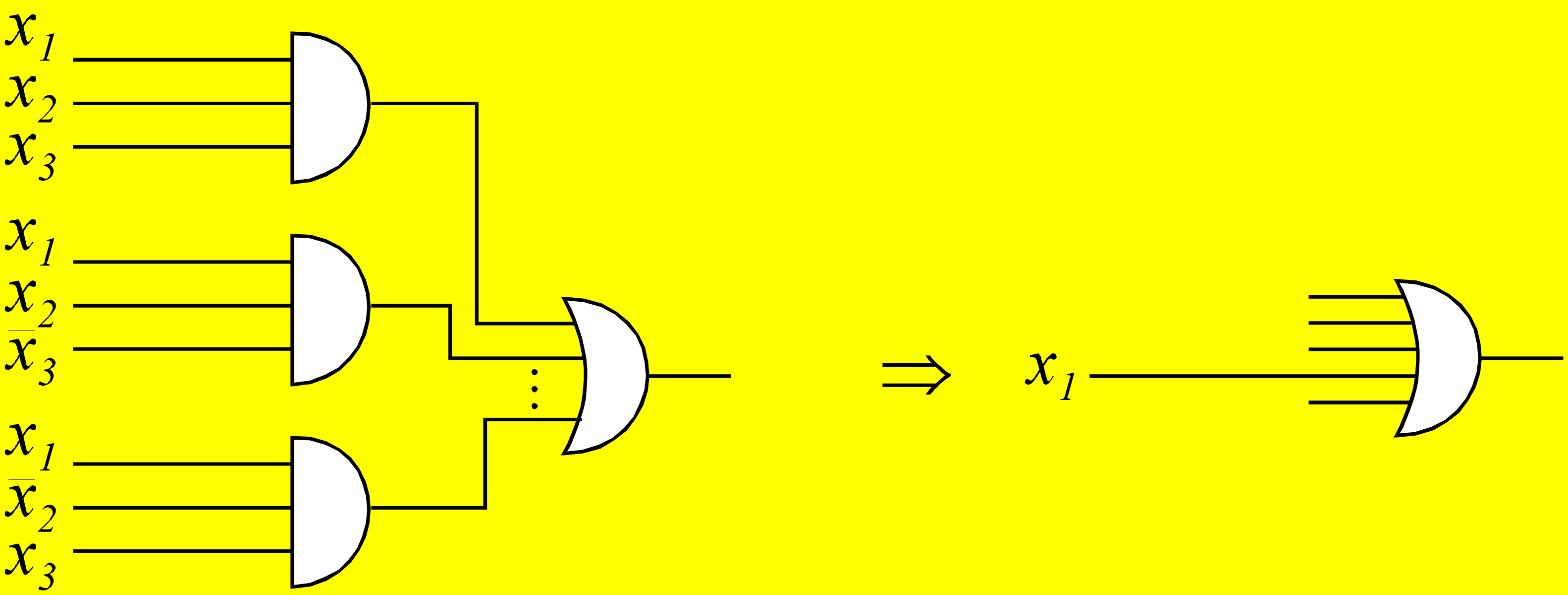


MINIMIZACIJA NORMALNIH OBLIKA

PROŠIRENJE REDUNDANTNIM ČLANOM:

$$x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \cdot R^{=1} \vee \ldots =$$

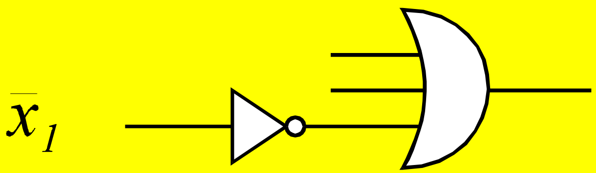
$$= x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee \ldots = x_1 (x_2 \vee \bar{x}_2) \vee \ldots = x_1 \cdot 1 \vee \ldots = x_1 \vee \ldots$$



Ovdje je u dva koraka član reduciran na jednu varijablu!

MINIMIZACIJA NORMALNIH OBLIKA

PROBLEM JEDNOLIKOG KAŠNJENJA:



koristimo pojačala ili invertore

(teorem o dvostrukoj negaciji)

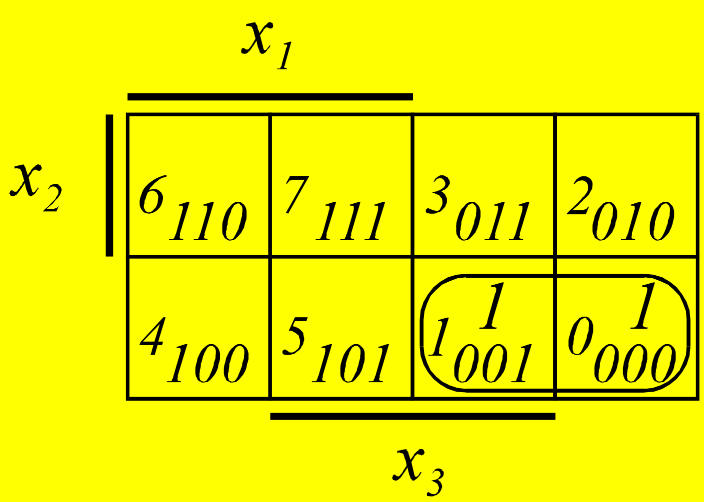
MINIMIZACIJA VEITCHEVIM DIJAGRAMOM

UPISUJEMO FUNKCIJU U VEITCHEV DIJAGRAM:

- ZA PDNO UPISUJEMO 1 i R
- ZA PKNO UPISUJEMO 0 i R

npr: $\overline{x}_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\,\overline{x}_2\,x_3 = \overline{x}_1\,\overline{x}_2$

$n=3$



Susjednim mintermima odgovaraju susjedna područja!

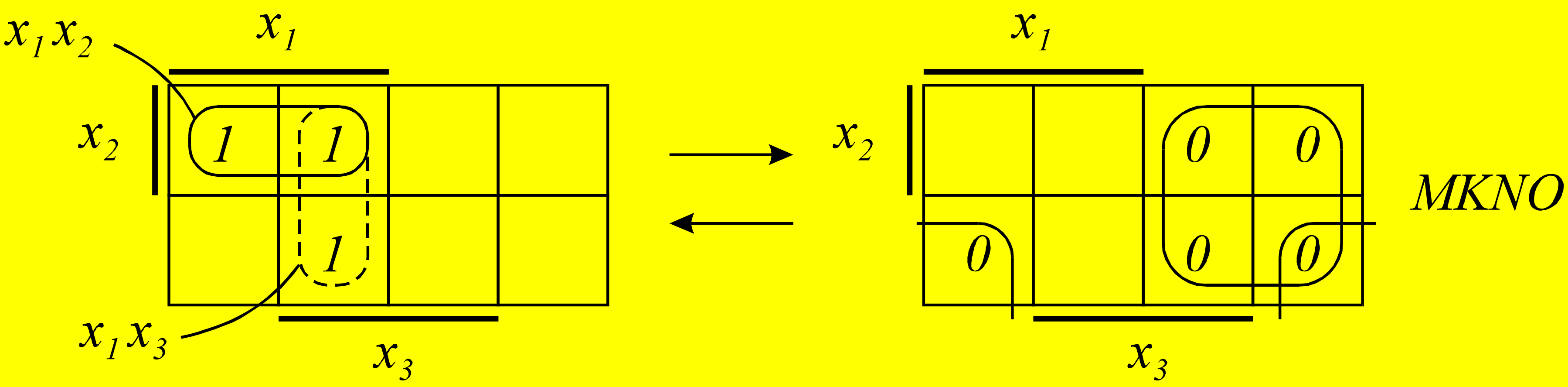
Rezultat minimizacije je ekvivalentan ujedinjavanju područja!

MINIMIZACIJA VEITCHEVIM DIJAGRAMOM

PRIMJER:

$$f(x) = x_1\, x_2\, \bar{x}_3 \vee x_1\, x_2\, x_3 \vee x_1\, \bar{x}_2\, x_3$$

PDNO: **PKNO:**



$$f(x) = x_1\, x_2 \vee x_1\, x_3$$

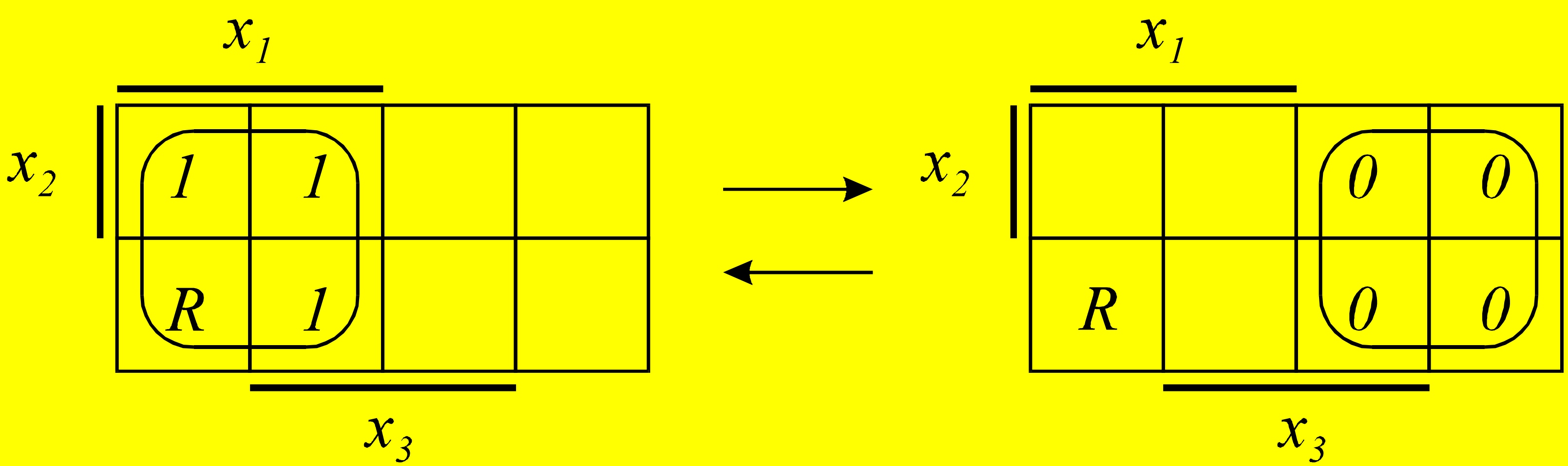
$$f(x) = x_1 \cdot (x_2 \vee x_3)$$

MINIMIZACIJA VEITCHEVIM DIJAGRAMOM

PRIMJER:

$$x_1 x_2 \overline{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x}_2 x_3 \vee x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 R = x_1 x_2 \vee x_1 \overline{x}_2 = x_1$$

PDNO: **PKNO:**



$$f(x) = x_1$$

(iznimno)

MINIMIZACIJA VEITCHEVIM DIJAGRAMOM

MINIMIZACIJA PDNO u MDNO:

- u Veitchev dijagram upišemo 1 i R
- zaokružimo **sve** jedinice
  što manjim brojem što većih površina
- ispišemo MDNO na osnovu "koordinata površina"
- **dvostruko zaokruživanje** jedinice znači
  proširenje postojećim članom
- **zaokruživanje redundantnog** člana znači **proširenje** izraza
  tim članom i time sklop obavlja preslikavanje u 1
- **ne-zaokruživanje redundantnog** člana znači **izostavljanje**
  tog člana i time sklop obavlja preslikavanje u 0

MINIMIZACIJA VEITCHEVIM DIJAGRAMOM

DEFINIRAMO MDNO:

Minimalni disjunktivni normalni oblik je disjunkcija nužnih elementarnih članova tipa minterma.

Član tipa minterma je konjunkcija nekih ili svih varijabli, negiranih prema pravilu pisanja minterma.

Elementarni član je onaj koji nema susjeda.

Nužni elementarni član je onaj, bez kojeg bi vrijednost funkcije bila poremećena.

MINIMIZACIJA VEITCHEVIM DIJAGRAMOM

DEFINIRAMO MKNO:

Minimalni konjunktivni normalni oblik je konjunkcija nužnih elementarnih članova tipa maksterma.

Član tipa maksterma je disjunkcija nekih ili svih varijabli, negiranih prema pravilu pisanja maksterma.

Elementarni član je onaj koji nema susjeda.

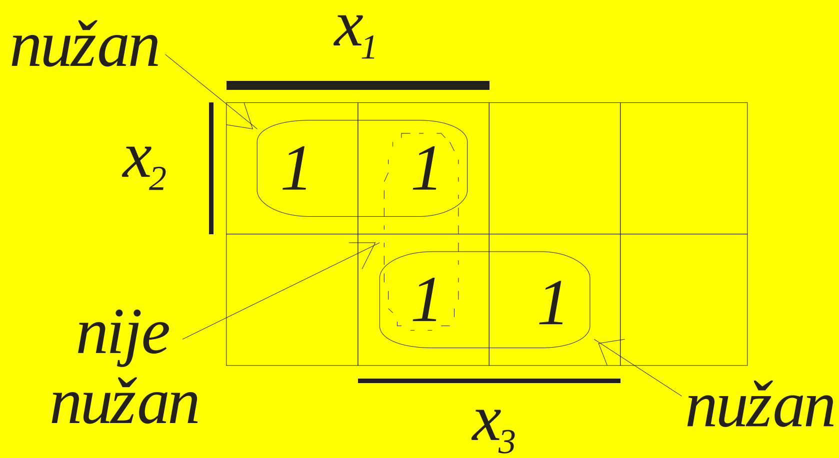
Nužni elementarni član je onaj, bez kojeg bi vrijednost funkcije bila poremećena.

MINIMIZACIJA VEITCHEVIM DIJAGRAMOM

NUŽNI ČLANOVI:

Problem nužnih elementarnih članova pojavljuje se zbog tehnike proširenja

Neselektivnim proširenjem dobivamo algebarski izraz koji je točan, ali nije minimalan:



MINIMIZACIJA VEITCHEVIM DIJAGRAMOM

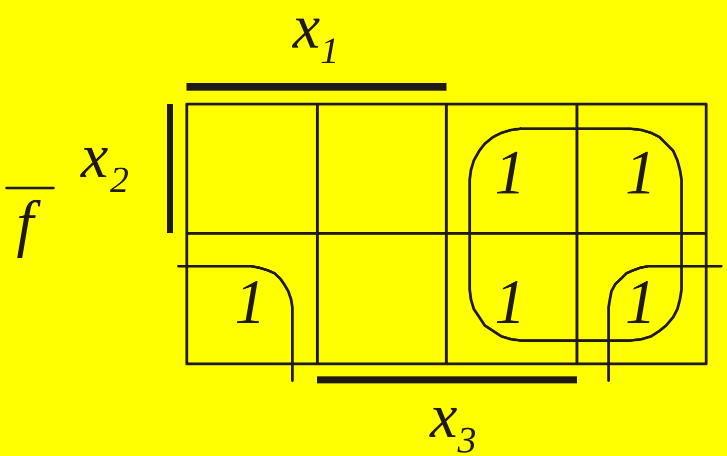
MINIMIZACIJA PKNO u MKNO:

preko PKNO - NE

problem disjunkcija, zagrada i negativne logike

preko NEGIRANE FUNKCIJE:

- negirana ima minterme gdje originalna ima maksterme
- u Veitchev dijagram upišemo PDNO negirane funkcije
- provedemo postupak za MDNO i izračunamo MKNO



$$\overline{f} = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2\,\overline{x}_3$$

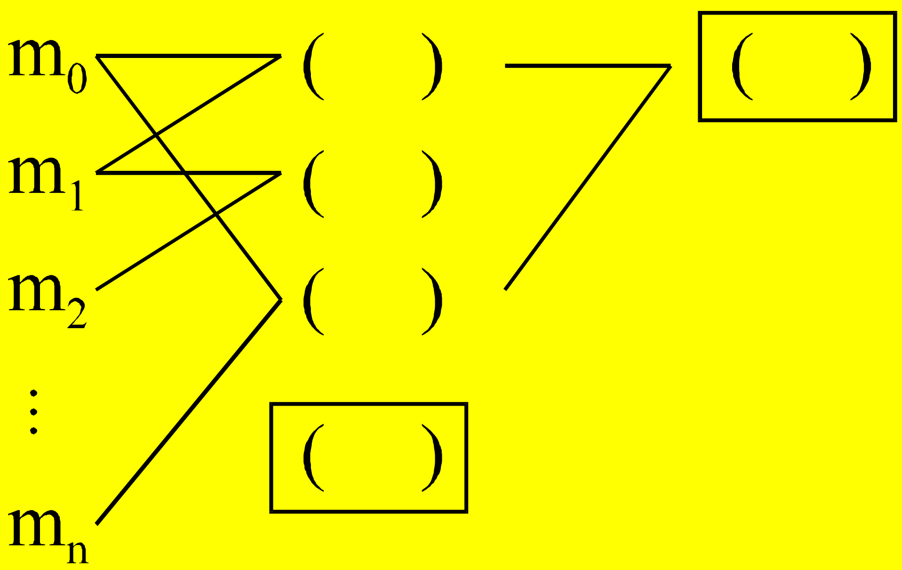
$$\overline{\overline{f}} = f = \overline{\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2\,\overline{x}_3} = \overline{\overline{x}}_1 \cdot \overline{\overline{x}_2\,\overline{x}_3} =$$

$$= x_1 \cdot \left(\overline{\overline{x}}_2 \vee \overline{\overline{x}}_3\right) = x_1\left(x_2 \vee x_3\right)$$

QUINNE-McCLUSKY POSTUPAK

POSTUPAK:

ispitujemo susjednost minterma
i formiramo elementarne članove:



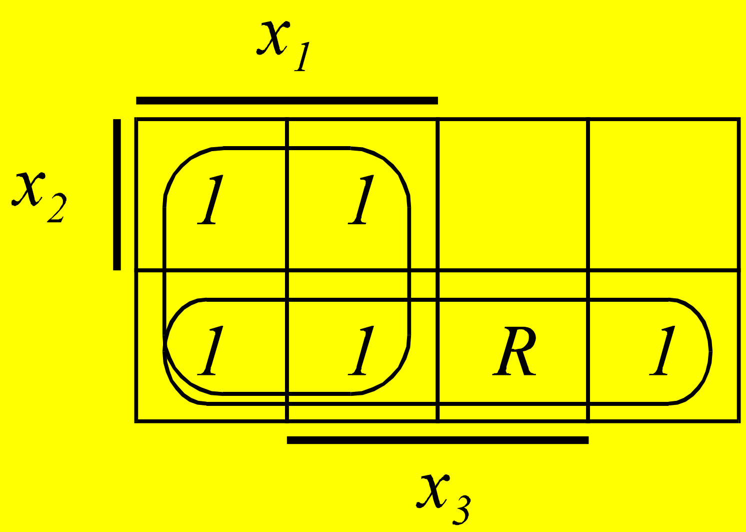
elementarni
član

odaberemo na kraju nužne članove, može za MDNO i MKNO

QUINNE-McCLUSKY POSTUPAK

NPR. ZA RANIJE DEFINIRANU FUNKCIJU:

i	x_1	x_2	x_3	$f(x)$
0	0	0	0	1
1	0	0	1	R
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1



$$f(x) = x_1 \vee \overline{x}_2$$

QUINNE-McCLUSKY POSTUPAK

i	mintermi
0	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$
1	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$
2	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$
3	$\bar{x}_1 x_2 x_3$
4	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$
5	$x_1 \bar{x}_2 x_3$
6	$x_1 x_2 \bar{x}_3$
7	$x_1 x_2 x_3$

R

ne pišemo
jer nije 1

$\bar{x}_1 \bar{x}_2$
$\bar{x}_2 \bar{x}_3$
$\bar{x}_2 x_3$
$x_1 \bar{x}_2$
$x_1 \bar{x}_3$
$x_1 x_3$
$x_1 x_2$

$\bar{x}_2$
$\bar{x}_2$
x_1
x_1

$$f(x) = x_1 \vee \bar{x}_2$$

HARVARDSKA METODA

UNAPRIJED ISPIŠEMO ELEMENTARNE ČLANOVE:

(npr. n=3)

i	x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3$	$f(x)$
0	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \bar{x}_3$	$\bar{x}_2 \bar{x}_3$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$	1
1	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	x_3	$\bar{x}_1 \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 x_3$	$\bar{x}_2 x_3$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$	R
2	$\bar{x}_1$	x_2	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_1 x_2$	$\bar{x}_1 \bar{x}_3$	$x_2 \bar{x}_3$	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$	0
3	$\bar{x}_1$	x_2	x_3	$\bar{x}_1 x_2$	$\bar{x}_1 x_3$	$x_2 x_3$	$\bar{x}_1 x_2 x_3$	0
4	x_1	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$x_1 \bar{x}_2$	$x_1 \bar{x}_3$	$\bar{x}_2 \bar{x}_3$	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$	1
5	x_1	$\bar{x}_2$	x_3	$x_1 \bar{x}_2$	$x_1 x_3$	$\bar{x}_2 x_3$	$x_1 \bar{x}_2 x_3$	1
6	x_1	x_2	$\bar{x}_3$	$x_1 x_2$	$x_1 \bar{x}_3$	$x_2 \bar{x}_3$	$x_1 x_2 \bar{x}_3$	1
7	x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3$	1

HARVARDSKA METODA

ČLANOVE OZNAČIMO BROJEVIMA
(da ne bi ovisili o oznakama varijabli):

i	x_1	x_2	x_3	$x_1\ x_2$	$x_1\ x_3$	$x_2\ x_3$	$x_1\ x_2\ x_3$	$f(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1	R
2	0	1	0	1	0	2	2	0
3	0	1	1	1	1	3	3	0
4	1	0	0	2	2	0	4	1
5	1	0	1	2	3	1	5	1
6	1	1	0	3	2	2	6	1
7	1	1	1	3	3	3	7	1

varijable (sve kombinacije) upišemo u gornjem redu!

HARVARDSKA METODA

PROVODIMO POSTUPAK:

- u gornji red upišemo kombinacije varijabli
- u desni stupac upišemo vrijednost funkcije
- (1) prekrižimo sve redove za koje je vrijednost funkcije 0
- prekrižimo (ravno) sve brojeve koji su prekriženi u (1)
- s desna na lijevo, prekrižimo (koso) sve brojeve koji s lijeve strane imaju neprekrižen kraći broj (član)
- neprekriženi brojevi su elementarni članovi
- izaberemo nužne elementarne članove
- ispišemo MDNO

MKNO dobijemo preko inverzne funkcije

Koristi se često u računalnim programima za minimizaciju.

HARVARDSKA METODA

Za raniji primjer:

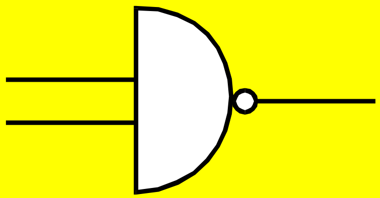
i	x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3$	$f(x)$
0	~~0~~	$\boxed{0}$	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	1
1	~~0~~	0	~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	R
~~2~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~2~~	~~2~~	~~0~~
~~3~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~3~~	~~3~~	~~0~~
4	1	0	~~0~~	~~2~~	~~2~~	~~0~~	~~4~~	1
5	1	0	~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~1~~	~~5~~	1
6	1	~~1~~	~~0~~	~~3~~	~~2~~	~~2~~	~~6~~	1
7	$\boxed{1}$	~~1~~	~~1~~	~~3~~	~~3~~	~~3~~	~~7~~	1

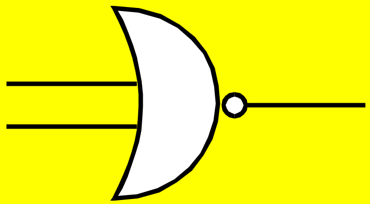
$$f(x) = x_1 \vee \overline{x}_2$$

REALIZACIJA BF NI i NILI VRATIMA

NI I NILI su PSFAL:

- jednim tipom vrata realiziramo proizvoljnu funkciju
- postižemo optimalni (minimalni) broj integriranih krugova





PDNO $\Rightarrow$ MDNO $\Rightarrow$ NI

$\overline{\text{PDNO}} \Rightarrow \overline{\text{MDNO}} \Rightarrow$ NILI

radimo preko negirane funkcije!

REALIZACIJA BF NI i NILI VRATIMA

REALIZACIJA NI (NAND, Shaeffer) vratima

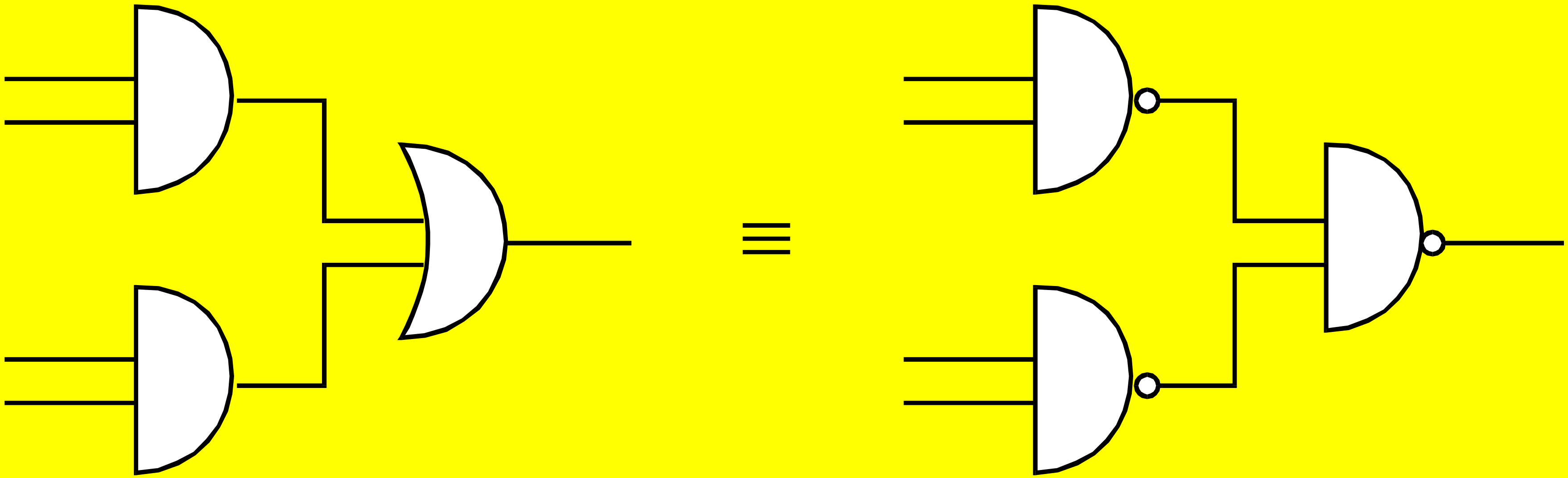
- polazimo do PDNO originalne funkcije
- izračunamo MDNO originalne funkcije
- dvostruko negiramo MDNO (cijeli izraz)
- primjenom DeMorganovih teorema transformiramo za NI

$$f_1(x) = x_1 x_2 \vee x_2 x_3$$

$$f_1(x) = \overline{\overline{x_1 x_2 \vee x_2 x_3}} \underset{\text{DeM.T.}}{=} \overline{\overline{x_1 x_2} \cdot \overline{x_2 x_3}}$$

REALIZACIJA BF NI i NILI VRATIMA

$$f_1(x) = x_1 x_2 \vee x_2 x_3 = \overline{\overline{x_1 x_2} \cdot \overline{x_2 x_3}}$$



REALIZACIJA BF NI i NILI VRATIMA

REALIZACIJA NILI (NOR, Pierce) vratima

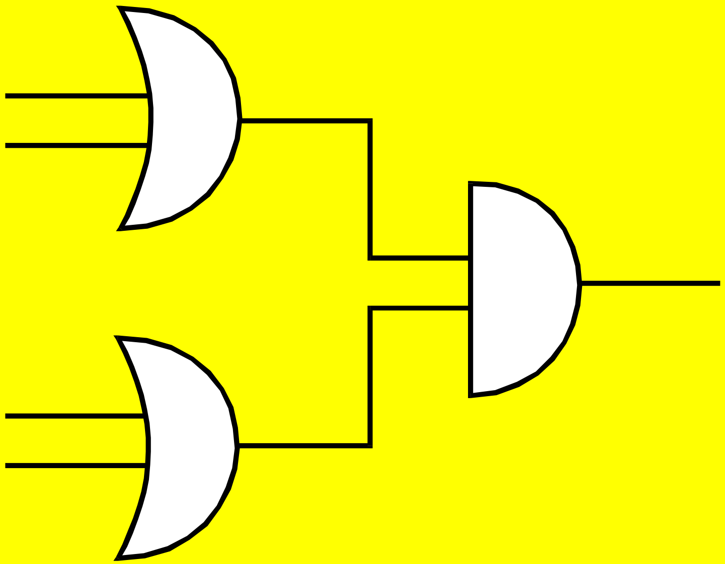
- polazimo do PDNO negirane funkcije
- izračunamo MDNO negirane funkcije
- negiramo obje strane izraza, to je već NILI
- dvostruko negiramo pojedine članove
- primjenom DeMorganovih teorema transformiramo za NILI

$$\bar{f}_2(x) = \bar{x}_2 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3$$

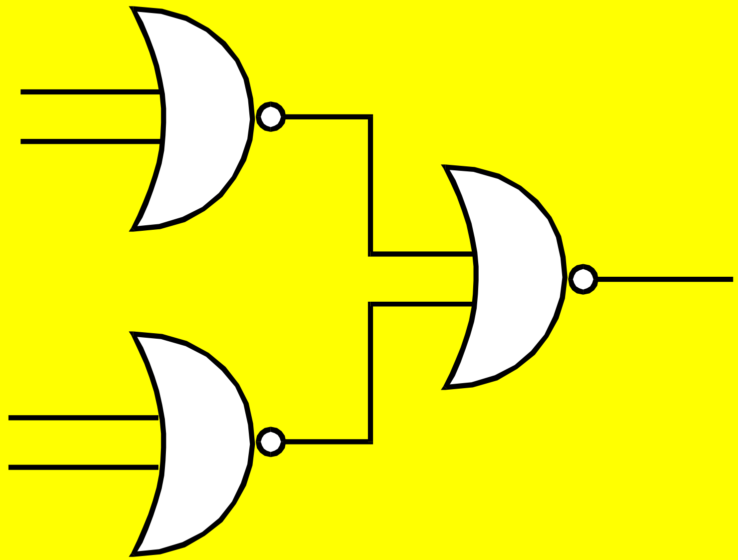
$$\bar{\bar{f}}_2(x) = \overline{\overline{\overline{\bar{x}_2 x_4}} \vee \overline{\overline{\bar{x}_1 \bar{x}_3}}} = \overline{\overline{x_2 \vee \bar{x}_4} \vee \overline{x_1 \vee x_3}}$$

REALIZACIJA BF NI i NILI VRATIMA

$$f_2(x) = (x_2 \vee \bar{x}_4) \cdot (x_1 \vee x_3) = \overline{\overline{x_2 \vee \bar{x}_4} \vee \overline{x_1 \vee x_3}}$$



$\equiv$



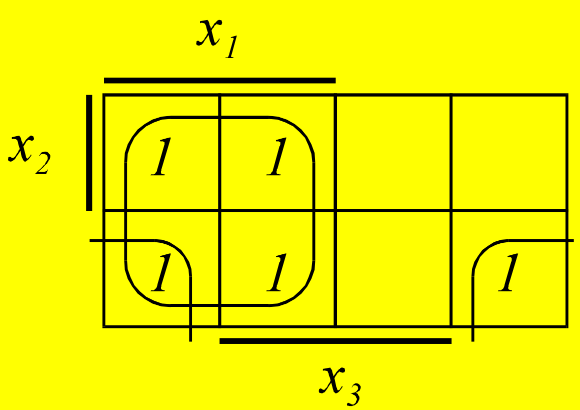
PRIMJER ZA NI VRATA

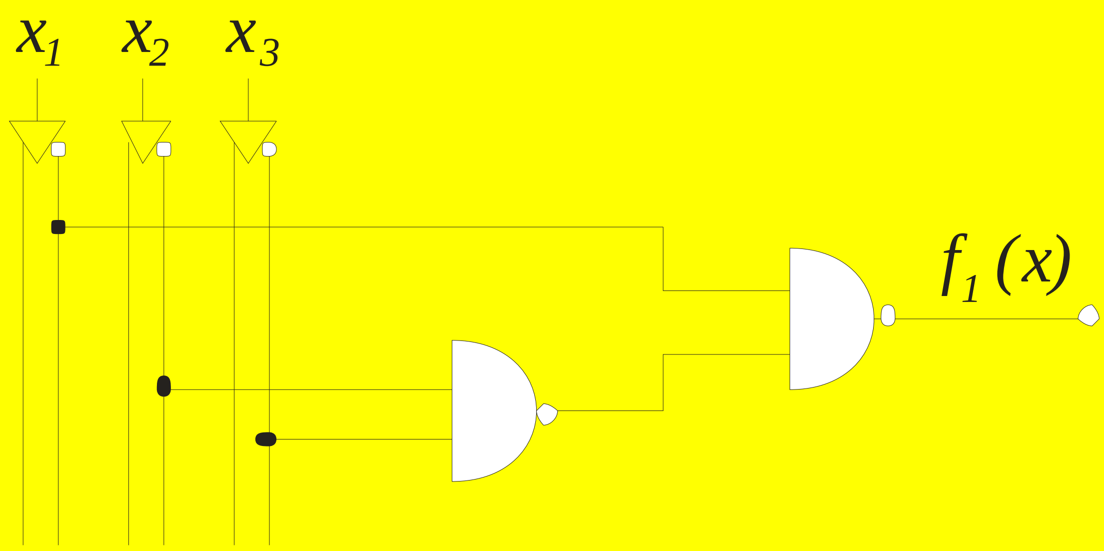
x_1	x_2	x_3	$f(x)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$f_1(x) = x_1 \vee \bar{x}_2\,\bar{x}_3 = \overline{\overline{x_1 \vee \bar{x}_2\,\bar{x}_3}}$$

$$f_1(x) = \overline{\bar{x}_1 \cdot \overline{\bar{x}_2\,\bar{x}_3}}$$

$f_1(x)$:





PRIMJER ZA NILI VRATA

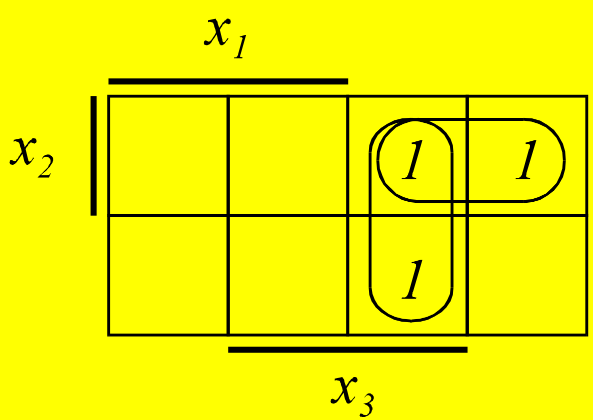
x_1	x_2	x_3	$f(x)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

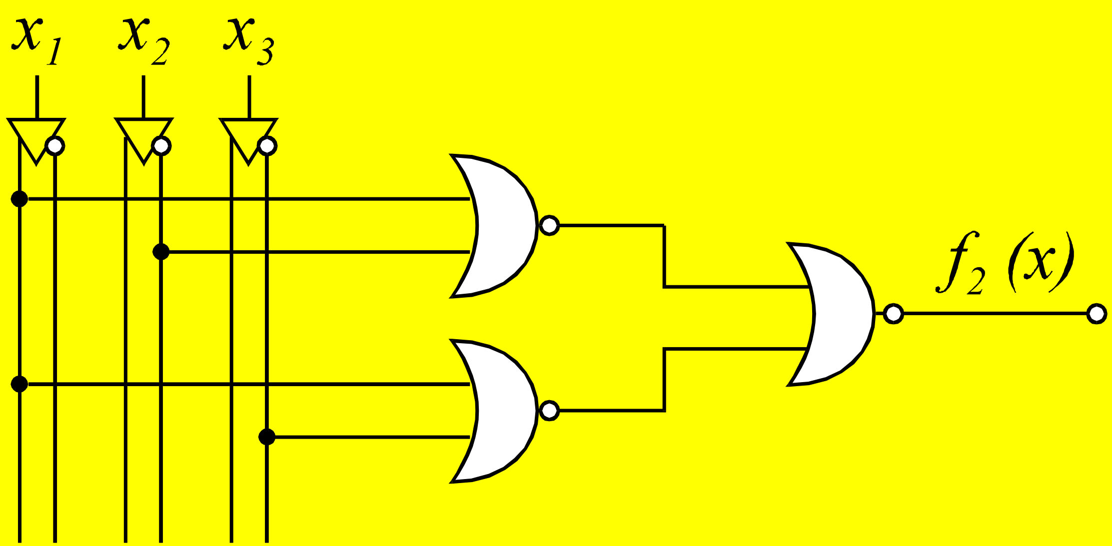
$$\bar{f}_2(x) = \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \qquad / \overline{\;\;}$$

$$f_2(x) = \overline{\overline{\overline{\bar{x}_1 x_2}} \vee \overline{\overline{\bar{x}_1 x_3}}} = \overline{\overline{\bar{\bar{x}}_1 \vee \bar{x}_2} \vee \overline{\bar{\bar{x}}_1 \vee \bar{x}_3}}$$

$$f_2(x) = \overline{\overline{x_1 \vee \bar{x}_2} \vee \overline{x_1 \vee \bar{x}_3}}$$

$f_2(x)$:





SKLOPOVI ZA ZBRAJANJE

Želimo izračunati sumu:

$$a + b = s$$

u binarnom brojevnom sustavu:

$$\begin{array}{rccccccc} & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ + & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_2 & b_1 & b_0 \\ c_{n-1} & c_{n-2} & c_{n-3} & c_{n-4} & \dots & c_2 & c_1 & c_0 \\ \hline & s_{n-1} & s_{n-2} & s_{n-3} & \dots & s_2 & s_1 & s_0 \end{array}$$

SKLOPOVI ZA ZBRAJANJE

Na najmanje značajnom bitu imamo:

b_0	a_0	s_0	c_0
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

gdje s slijedi sumu po modulu, a c konjunkciju

s_0:

	b_0	
a_0		*1*
	1	

c_0:

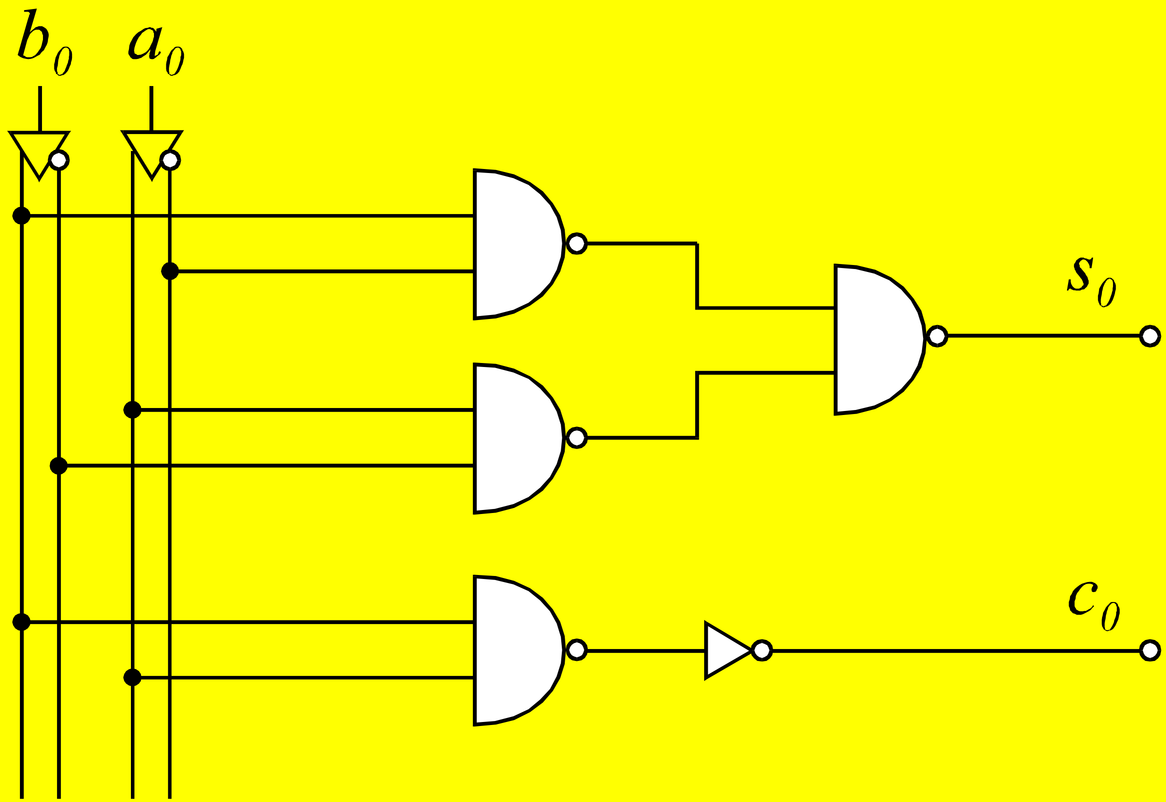
	b_0	
a_0	*1*	

$$s_0 = a_0 \oplus b_0 = \overline{\overline{\bar{b}_0\, a_0}\;\overline{b_0\, \bar{a}_0}}$$

$$c_0 = a_0\, b_0 = \overline{\overline{a_0\, b_0}}$$

SKLOPOVI ZA ZBRAJANJE

Dobijemo sklop:



SKLOPOVI ZA ZBRAJANJE

Obavimo transformaciju:

$$s_0 = b_0\,\overline{a}_0 \vee \overline{b}_0 a_0 \vee 0 \vee 0 =$$

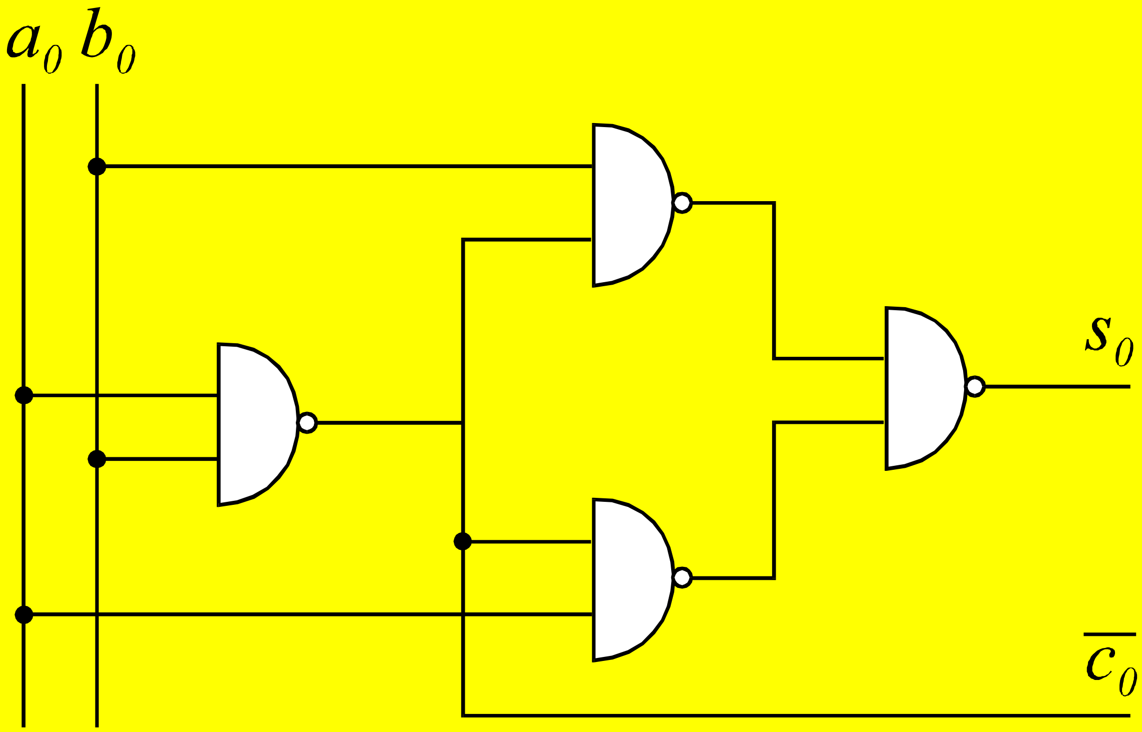
$$= b_0\,\overline{a}_0 \vee \overline{b}_0 a_0 \vee b_0\,\overline{b}_0 \vee a_0\,\overline{a}_0 =$$

$$= \overline{\overline{b_0\left(\overline{\overline{\overline{a}_0 \vee \overline{b}_0}}\right) \vee a_0\left(\overline{\overline{\overline{b}_0 \vee \overline{a}_0}}\right)}} =$$

$$= \overline{\overline{b_0\left(\overline{a_0\,b_0}\right)} \cdot \overline{a_0\left(\overline{a_0\,b_0}\right)}}$$

SKLOPOVI ZA ZBRAJANJE

I dobijemo sklop koji zovemo POLUSUMATOR:



Uštedjeli smo ulazne invertore.

Uočimo da sklop daje negirani pretek!

SKLOPOVI ZA ZBRAJANJE

Na bilo kojem bitu (osim LSB) imamo:

c_{j-1}	a_j	b_j	s_j	c_j
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

SKLOPOVI ZA ZBRAJANJE

Pokušajmo minimizirati:

s_j:

c_{j-1} (columns 2–3), a_j (row 1), b_j (columns 3–4)

	1		1
1		1	

c_j:

c_{j-1} (columns 2–3), a_j (row 1), b_j (columns 3–4)

1	1	1	
	1		

Transformiramo:

$$s_j = a_j \bar{b}_j \bar{c}_{j-1} \vee a_j b_j c_{j-1} \vee \bar{a}_j \bar{b}_j c_{j-1} \vee \bar{a}_j b_j \bar{c}_{j-1}$$

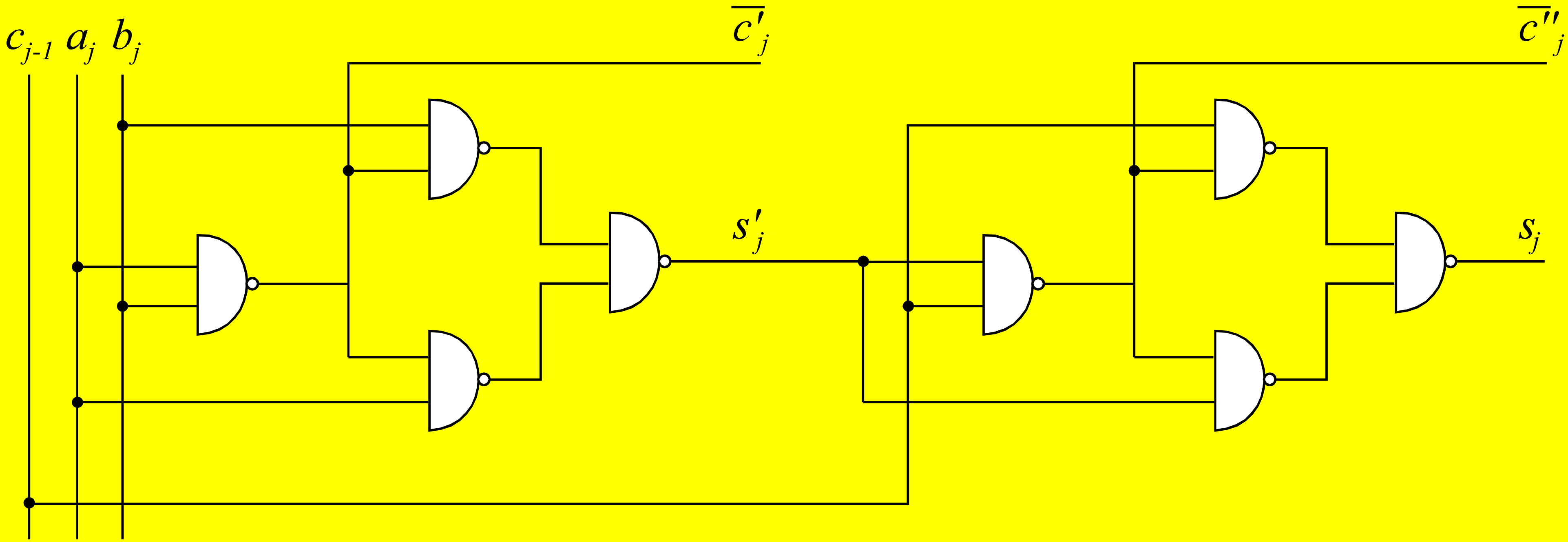
$$s_j = c_{j-1} \left(a_j b_j \vee \bar{a}_j \bar{b}_j \right) \vee \bar{c}_{j-1} \left(a_j \bar{b}_j \vee \bar{a}_j b_j \right)$$

$$s_j = c_{j-1} \overline{a_j \oplus b_j} \vee \bar{c}_{j-1} \left(a_j \oplus b_j \right)$$

$$s_j = c_{j-1} \oplus \left(a_j \oplus b_j \right)$$

SKLOPOVI ZA ZBRAJANJE

Nacrtamo korištenjem dva polusumatora:



SKLOPOVI ZA ZBRAJANJE

Potrebno je generirati pretek:

$$c_j = a_j b_j \vee b_j c_{j-1} \vee a_j c_{j-1}$$

proširimo:

$$c_j = a_j b_j \vee (a_j \vee \bar{a}_j) b_j c_{j-1} \vee a_j (b_j \vee \bar{b}_j) c_{j-1}$$

$$c_j = a_j b_j \vee a_j b_j c_{j-1} \vee a_j \bar{b}_j c_{j-1} \vee a_j b_j c_{j-1} \vee \bar{a}_j b_j c_{j-1}$$

kako je:

$$a_j b_j \vee a_j b_j c_{j-1} = a_j b_j (1 \vee c_{j-1}) = a_j b_j$$

slijedi:

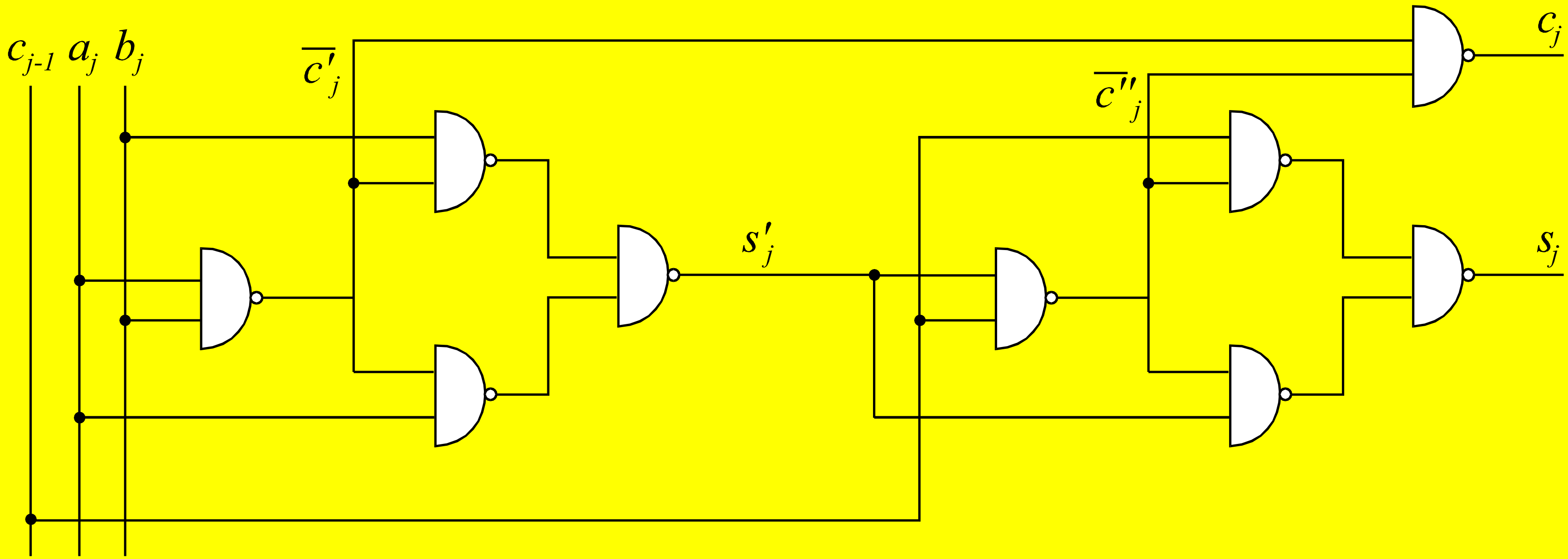
$$c_j = a_j b_j \vee c_{j-1} (a_j \bar{b}_j \vee \bar{a}_j b_j)$$

SKLOPOVI ZA ZBRAJANJE

i konačno:

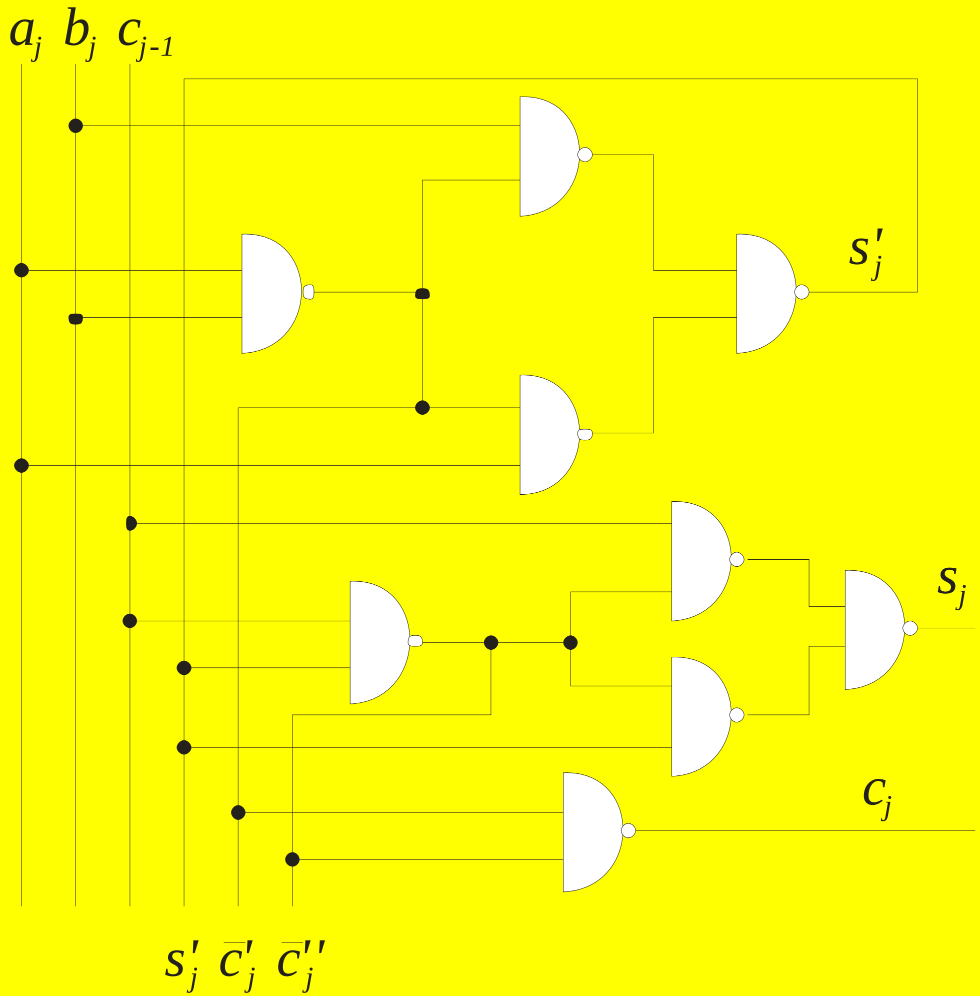
$$c_j = a_j b_j \vee c_{j-1}\left(a_j \oplus b_j\right) = a_j b_j \vee c_{j-1} s'_j = \overline{\overline{c'_j \vee c''_j}} = \overline{\overline{c'_j}\,\overline{c''_j}}$$

Ili korištenjem preteka koje generiraju dva polusumatora, i to bez invertora:



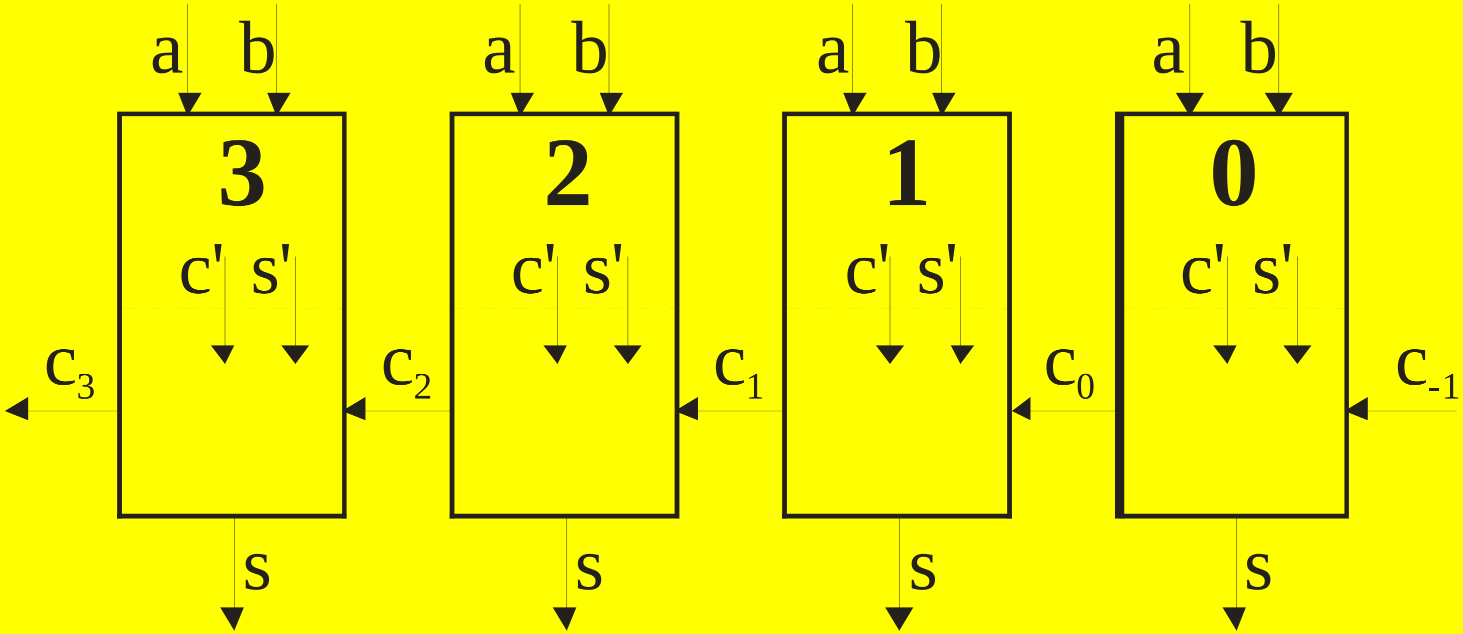
SKLOPOVI ZA ZBRAJANJE

Sklop bi izgledao:



SKLOPOVI ZA ZBRAJANJE

4-bitni sumator:



- broj logičkih vrata je 9n
- vidimo da je kašnjenje (4+2n)Td
- optimizirati brzinu brzim generiranjem preteka
- optimizirati arhitekturu korištenjem 2 i 4 bitnih sumatora

2.4. SINTEZA SKLOPOVA PRIMJENOM MULTIPLEKSERA I DEMULTIPLEKSERA

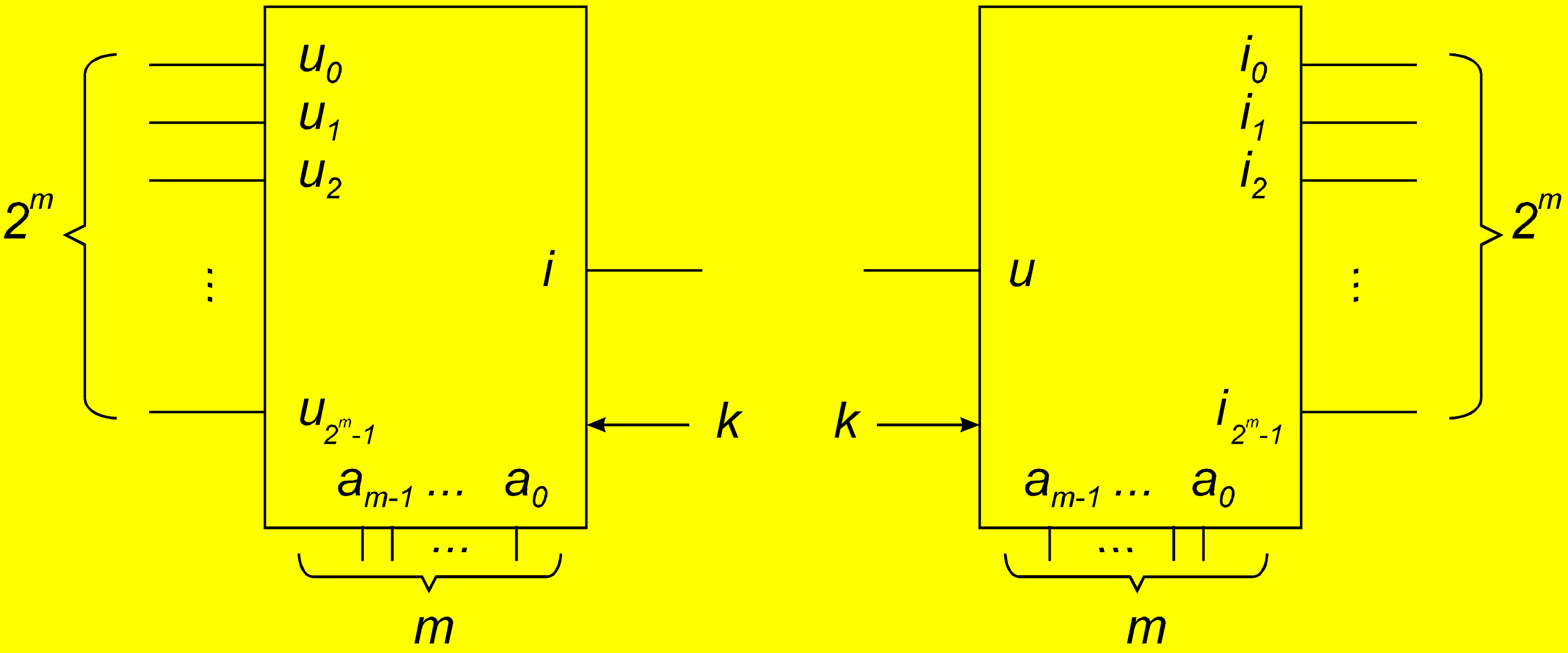
Minimizacija BF: sklopove realiziramo logičkim vratima

- **ograničenje broja izvoda (nožica) integriranog kruga**
- **ograničenje na niski stupanj integracije**

ŽELIMO KORISTITI TEHNOLOGIJU SREDNJEG STUPNJA INTEGRACIJE

- **umjesto odvojenih logičkih vrata koristimo složenije strukture - funkcionalne blokove**
- **ostvarujemo mogućnost korištenja više logičkih vrata po izvodu integriranog kruga**
- **interesantni su MULTIPLEKSER, DEMULTIPLEKSER i ENKODER PRIORITETA**

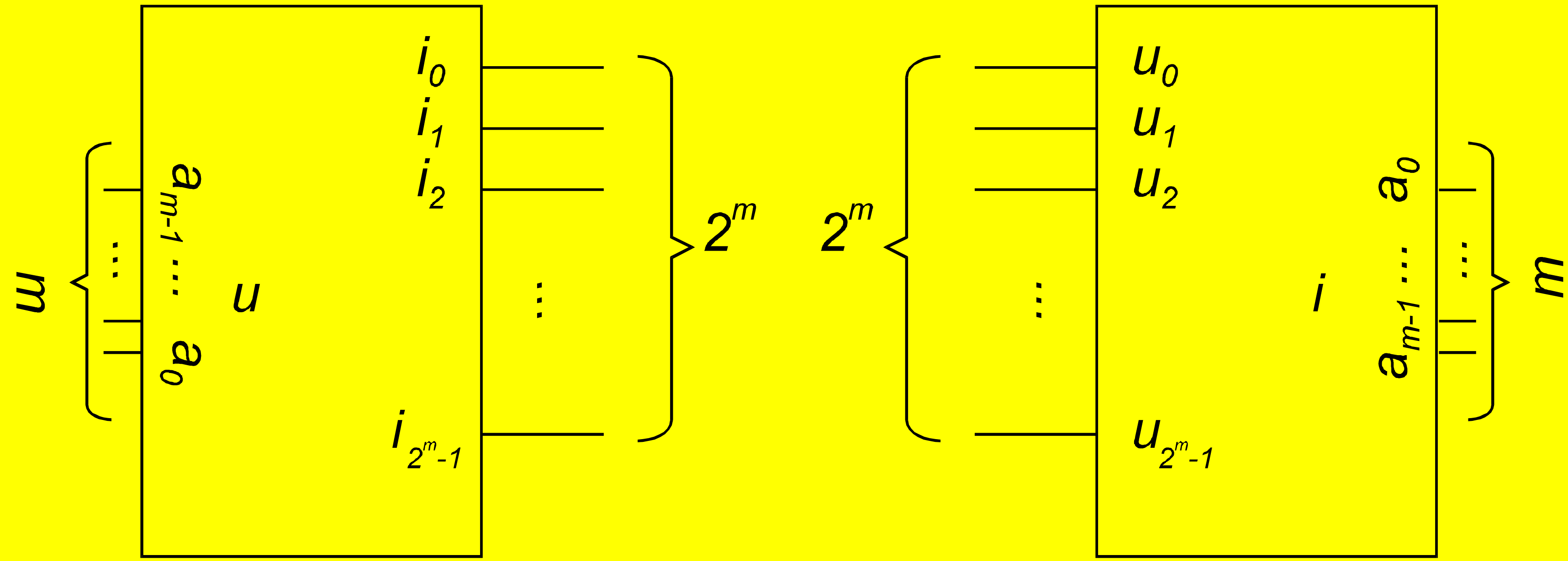
MULTIPLEKSER, DEMULTIPLEKSER I ENKODER PRIORITETA



selektor/multiplekser

dekoder/demultiplekser

MULTIPLEKSER, DEMULTIPLEKSER I ENKODER PRIORITETA



dekoder

enkoder prioriteta

MULTIPLEKSER

<u>MULTIPLEKSER</u> je sklop koji ima

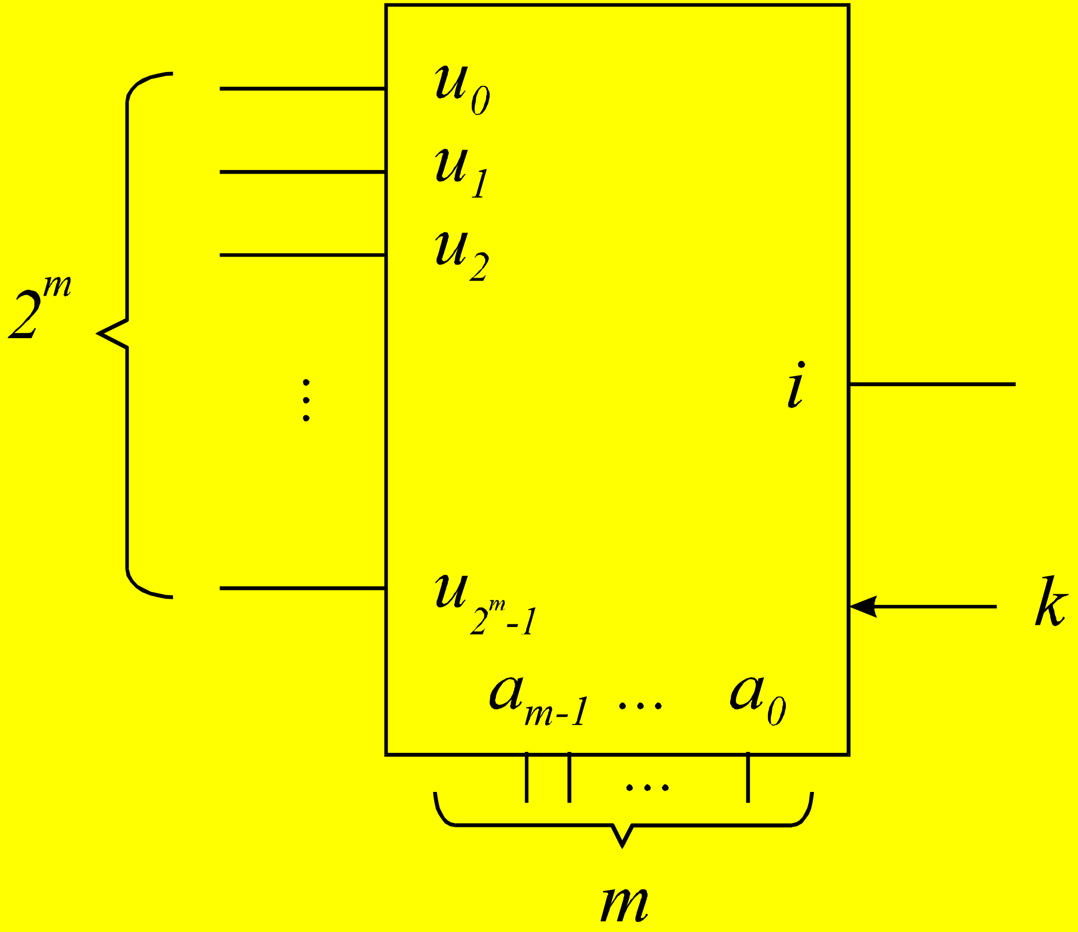
- **m adresnih ulaza $a_{m-1...,}$ a_1, a_0**
- **2^m informacijskih ulaza u_{2^n-1}, …, u_1, u_0**
- **1 informacijski izlaz “i”**
- **kontrolne ulaze “k” (ne u školskom modelu)**

MULTIPLEKSER na izlaz “i” dovodi vrijednost sa onog informacijskog ulaza u_j, čiji je redni broj “j” u prirodnom binarnom obliku, kao kodna riječ, prisutan na adresnim ulazima $a_{m-1...,}$ a_1, a_0.

Kontrolni ulaz “k” isključuje sklop postavljajući izlaz u logičku “0” ili u stanje visoke impedancije.

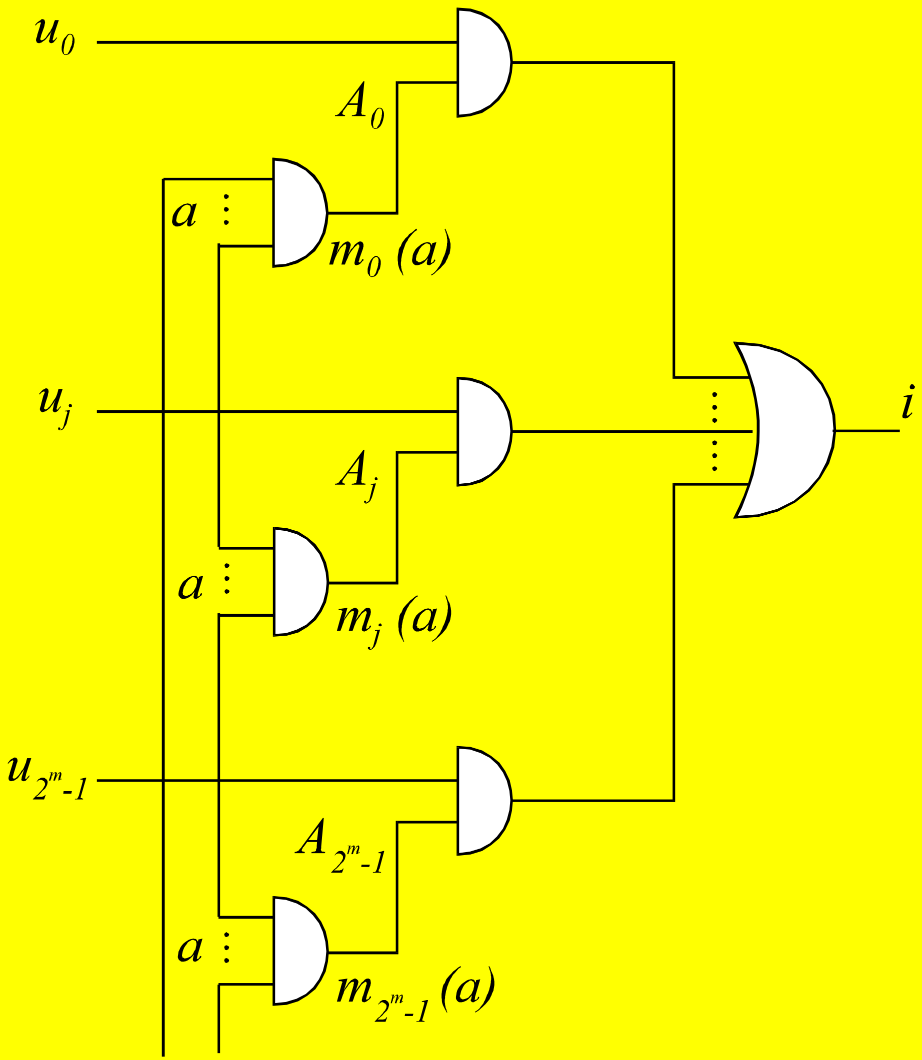
MULTIPLEKSER

Multiplekser sa m adresnih ulaza:



MULTIPLEKSER

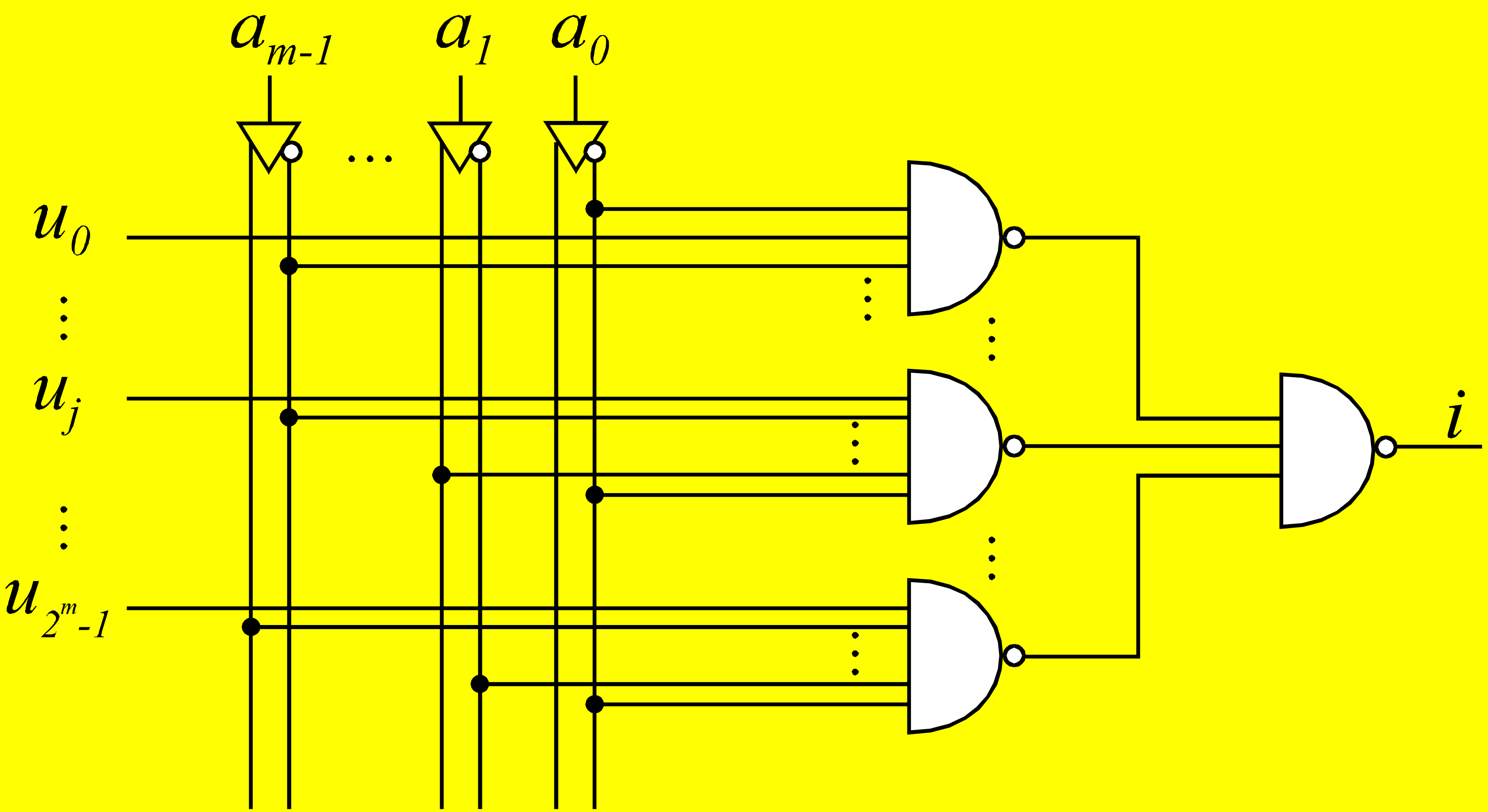
Pokušajmo na osnovu definicije nacrtati shemu i formulu:



$$i = \bigvee_{j=0}^{2^m-1} m_j(a)u_j = \overline{\overline{\bigvee_{j=0}^{2^m-1} m_j(a)u_j}} = \overline{\mathop{\&}_{j=0}^{2^m-1} \overline{m_j(a)u_j}}$$

MULTIPLEKSER

Multiplekser realiziramo NI vratima:



MULTIPLEKSER

Multiplekser koristimo:

Ako su informacijski ulazi slobodno promjenljivi, a adresa stacionarna, izlaz će slijediti vrijednost sa odabranog ulaza. Obavili smo <u>selektiranje</u> ulaza na izlaz.

Ako su informacijski ulazi stacionarni, a adrese mijenjamo u prirodnom binarnom nizu nekim ritmom, na izlazu će se pojaviti niz bita ulazne kodne riječi.
Obavili smo <u>paralelno-serijsku pretvorbu</u>.

Multiplekser se često još naziva i SELEKTOR, ili kombinirano multiplekser-selektor.

DEMULTIPLEKSER

<u>DEMULTIPLEKSER</u> je sklop koji ima

- **m adresnih ulaza $a_{m-1...,}$ a_1, a_0**
- **2^m informacijskih izlaza i_{2^n-1}, …, i_1, i_0**
- **1 informacijski ulaz "u"**
- **kontrolne ulaze "k" (ne u školskom modelu)**

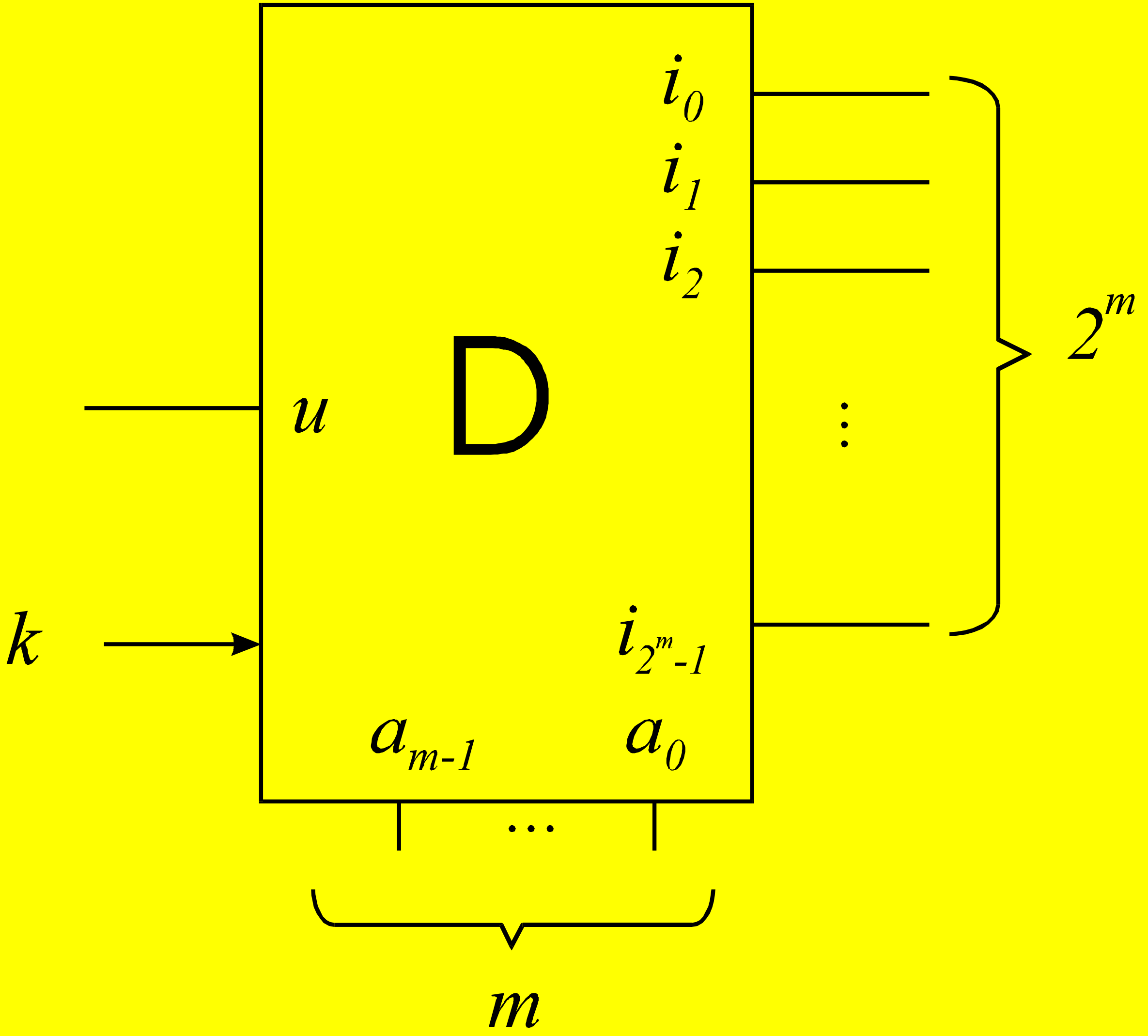
DEMULTIPLEKSER dovodi vrijednost sa informacijskog ulaza "u" na onaj informacijski izlaz "i_j", čiji je redni broj "j" u prirodnom binarnom obliku, kao kodna riječ, prisutan na adresnim ulazima $a_{m-1...,}$ a_1, a_0.

Kontrolni ulaz "k" isključuje sklop postavljajući izlaze u logičku "0" ili u stanje visoke impedancije.

Stvarni demultiplekseri imaju često INVERTIRANE izlaze.

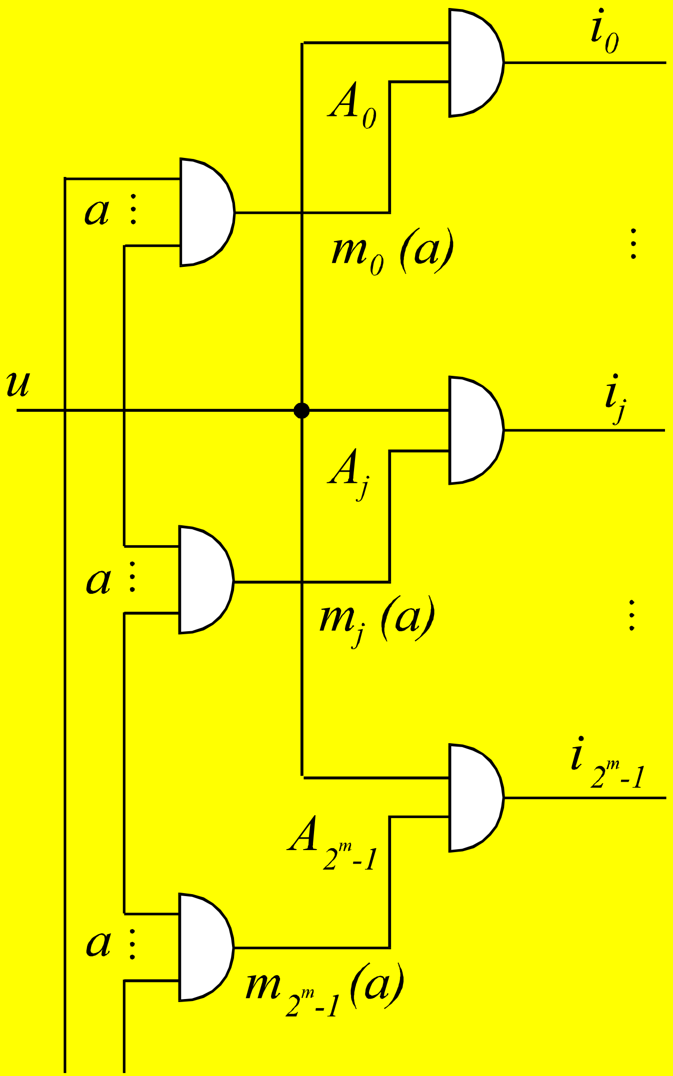
DEMULTIPLEKSER

Demultiplekser sa m adresnih ulaza:



DEMULTIPLEKSER

Pokušajmo na osnovu definicije nacrtati shemu i formulu:



$$i_j = m_j(a)u$$

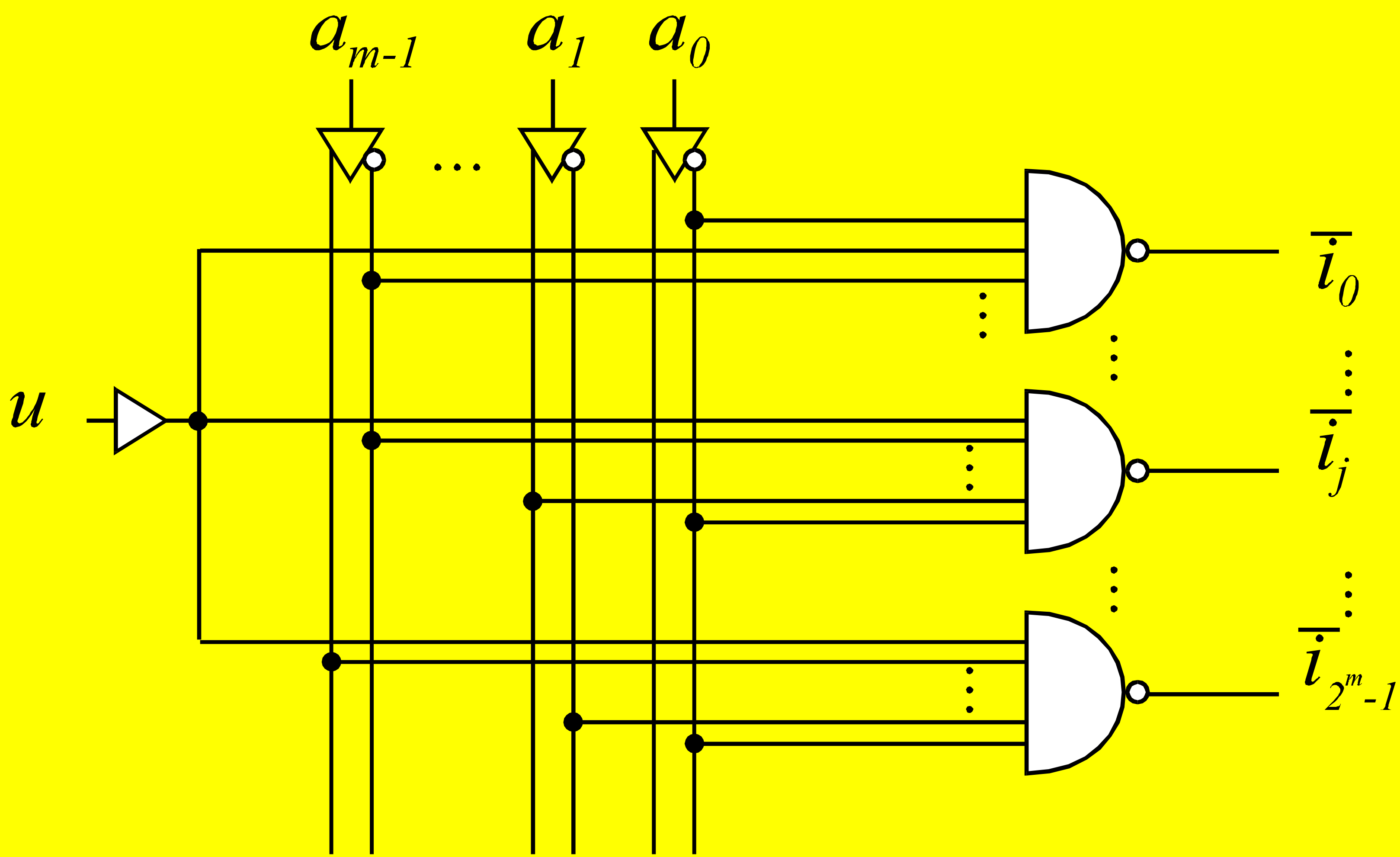
$$j = 0 \ldots 2^m - 1$$

$$\bar{i}_j = \overline{m_j(a)u}$$

$$j = 0 \ldots 2^m - 1$$

DEMULTIPLEKSER

Demultiplekser realiziramo NI vratima (invertirani izlazi):



DEMULTIPLEKSER

Demultiplekser koristimo:

Ako je informacijski ulaz slobodno promjenljiv, a adresa stacionarna, odabrani izlaz će slijediti vrijednost sa ulaza. Obavili smo <u>razvođenje</u> ulaza na odabrani izlaz.

Ako se informacijski ulaz mijenja istovremeno (sinkrono) sa adresama, a adrese mijenjamo u prirodnom binarnom nizu, na izlazima će se pojaviti niz bita sa ulaza.
Obavili smo <u>serijsko-paralelnu pretvorbu</u>.

Ako na ulaz trajno dovedemo 1, adresom biramo jedan od izlaza. Demultiplekser preuzima funkciju DEKODERA.

Demultiplekser se često zove DEKODER ili kombinirano dekoder-demultiplekser.

ENKODER S PRIORITETOM

<u>ENKODER (S PRIORITETOM)</u> je sklop koji ima

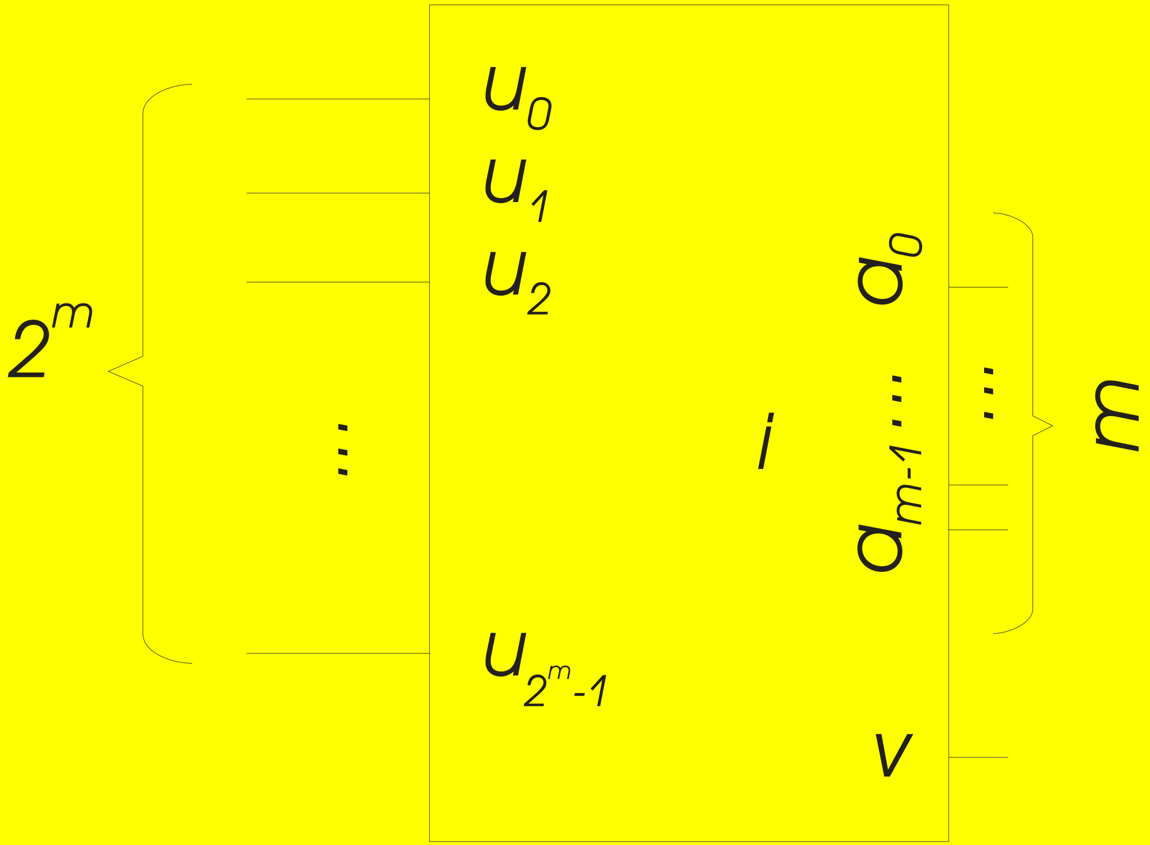
- **2^m informacijskih ulaza u_{2^n-1}, …, u_1, u_0**
- **m adresnih izlaza a_{m-1}..., a_1, a_0**
- **kontrolni izlaz “v” koji označava da je izlazni kod valjan**

ENKODER na adresne izlaze a dovodi u prirodnom binarnom obliku redni broj “j” onog informacijskog ulaza u_j koji je trenutno aktivan. Enkoder dakle transformira redundantni kod “1 od 2^n” (jedan od 2^n bita u jedinici) u koncentrirani prirodni binarni kod.

ENKODER S PRIORITETOM na adresne izlaze a dovodi u prirodnom binarnom obliku redni broj “j” onog najprioritetnijeg informacijskog ulaza u_j koji je trenutno aktivan. Time se razrješava problem rada običnog enkodera kada je aktivno više ulaza istovremeno.

ENKODER S PRIORITETOM

Enkoder sa m adresnih izlaza:



ENKODER S PRIORITETOM

Sistematizacija enkodera s prioritetom:

Enkodere s prioritetom možemo sistematizirati po tri parametra:

- aktivna razina ulaza:
  - jedinica – pozitivna logika (P)
  - nula – negativna logika (N)
- redoslijed prioriteta:
  - rastući – najznačajniji je ulaz najvišeg indeksa (A)
  - padajući – najznačajniji je ulaz najnižeg indeksa (D)
- broj adresnih ulaza “m”

NPR. PA2 je enkoder s m=2 adresna izlaza, s aktivnom razinom jedinice na ulazu i s najprioritetnijim ulazom najvišeg indeksa.

ENKODER S PRIORITETOM

Zadavanje enkodera s prioritetom:

Problem zadavanja je veliki broj ulaza, te je potpuna tablica istine prevelika. Stoga enkodere s prioritetom zadajemo skraćenom tablicom, npr. za enkoder PA2:

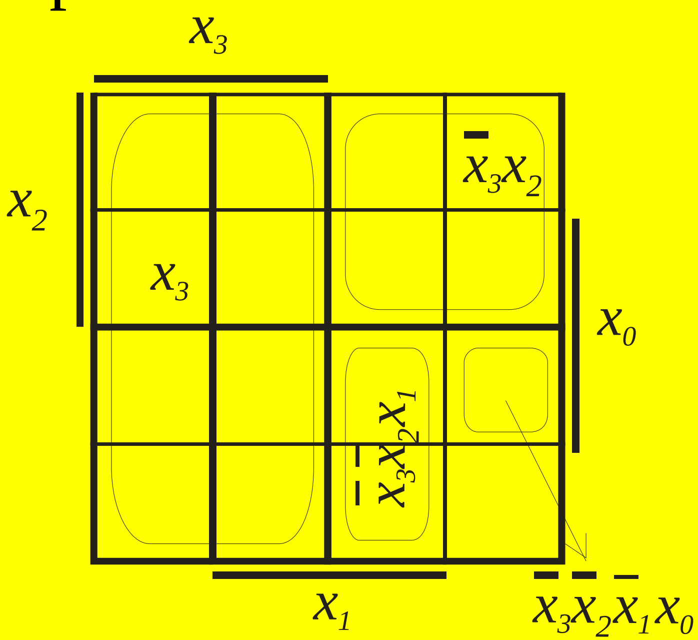
x_3	x_2	x_1	x_0	a_1	a_0	v
1	R	R	R	1	1	1
0	1	R	R	1	0	1
0	0	1	R	0	1	1
0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	R	R	0

Oznaka “R” u ovom slučaju znači da kad je neki prioritetniji ulaz aktivan, vrijednost tog ulaza nije od značaja.

ENKODER S PRIORITETOM

Zadavanje enkodera s prioritetom:

Prvi redak gornje tablice odnosi se očito na kodne riječi kod kojih je najznačajniji bit u jedinici, dakle 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110 i 1111. Tako smo jednim retkom nadomjestili osam (8) redaka potpune tablice istine. Na Veitchevom dijagramu to bi izgledalo:

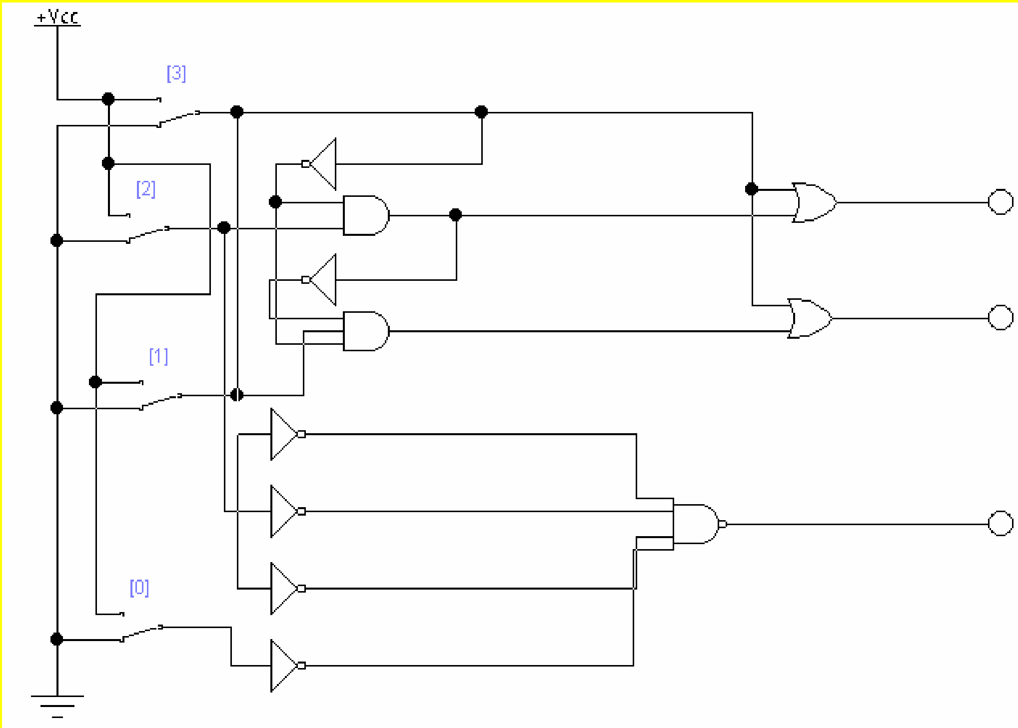


Vidimo da je korištenjem skraćene tablice obavljena djelomična minimizacija funkcija enkodera.

ENKODER S PRIORITETOM

Konstruiranje enkodera s prioritetom:

Shemu enkodera s prioritetom PA2 možemo nacrtati neposredno iz skraćene tablice istine:



$$v = x_3 V x_2 V x_1 V x_0$$

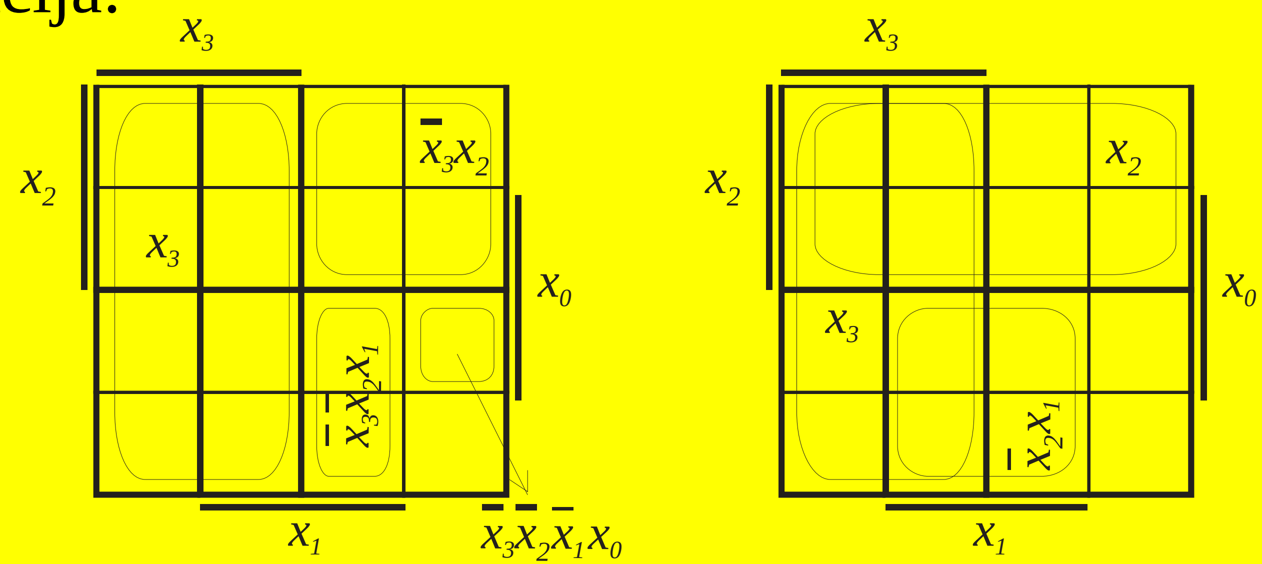
$$= \overline{\bar{x}_3 \& \bar{x}_2 \& \bar{x}_1 \& \bar{x}_0}$$

Logika rada je da prioritetniji ulaz blokira manje prioritetne, a ILI vratima se formiraju adresni izlazi prema tablici istine.

ENKODER S PRIORITETOM

Konstruiranje enkodera s prioritetom:

Iz Veitchevog dijagrama očito je da je moguća dodatna minimizacija:



Koristimo opći oblik teorema o apsorpciji:

$$x_1 x_2 \vee x_1 x_2 x_3 = x_1 x_2 \cdot 1 \vee x_1 x_2 x_3 = x_1 x_2 (1 \vee x_3) = x_1 x_2 \cdot 1 = x_1 x_2$$

ENKODER S PRIORITETOM

Konstruiranje enkodera s prioritetom:

Slijedi za PA2:

$$a_1 = x_3 V \overline{x}_3 x_2 = x_3 1 V \overline{x}_3 x_2 = x_3 (1 V x_2) V \overline{x}_3 x_2 = x_3 1 V x_3 x_2 V \overline{x}_3 x_2 =$$

$$= x_3 V x_2 (x_3 V \overline{x}_3) = x_3 V x_2 1 = x_3 V x_2$$

$$= \overline{\overline{x}_3 \,\&\, \overline{x}_2}$$

$$a_0 = x_3 V \overline{x}_3 \overline{x}_2 x_1 = x_3 V \overline{x}_2 x_1$$

$$= \overline{\overline{x}_3 \,\&\, \overline{\overline{x}_2 x_1}}$$

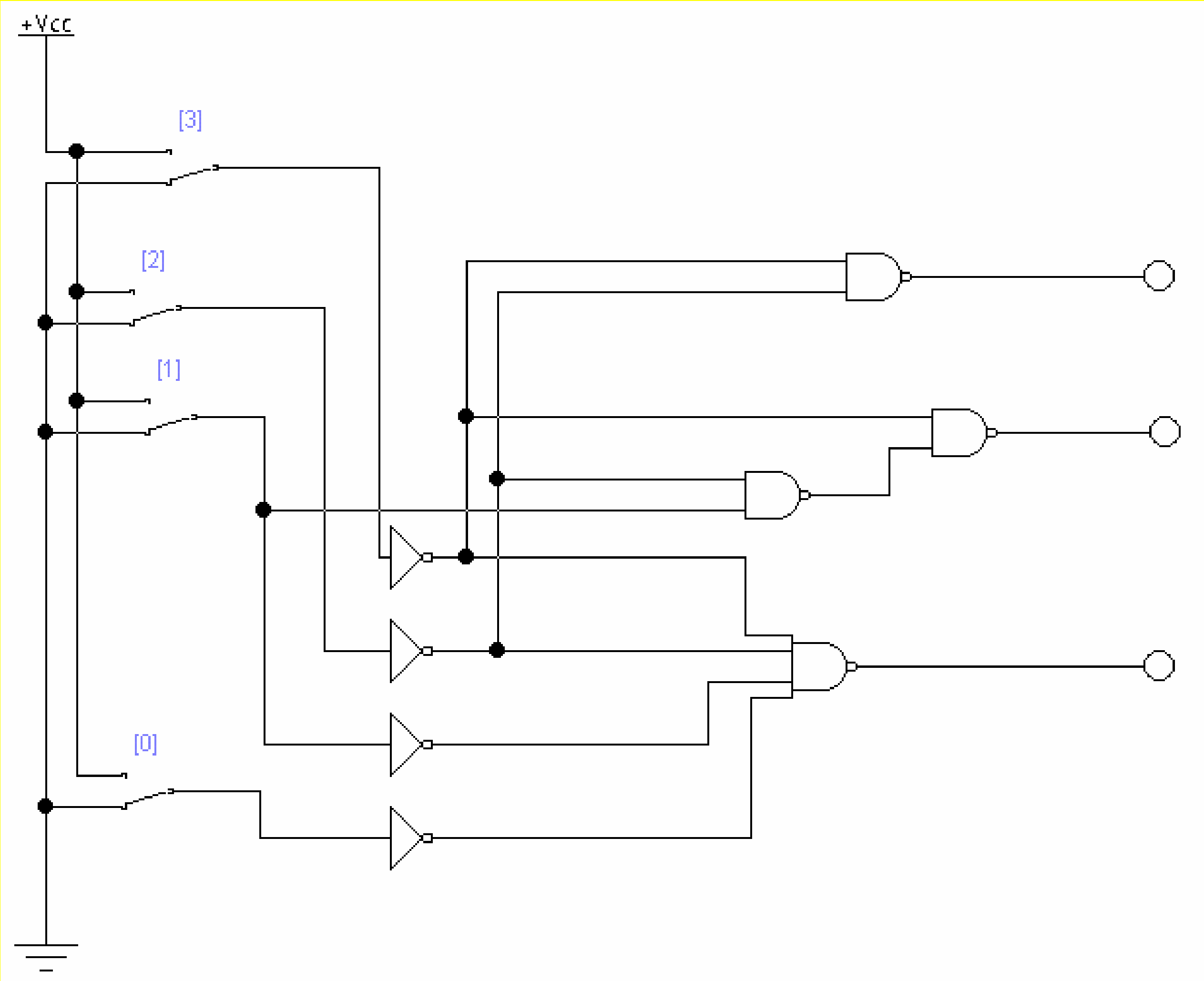
Možemo ustanoviti pravilo:

Ako postoji kratki član koji sadrži x_1 on apsorbira sve članove $\overline{x}_1$ unutar dužih članova.

ENKODER S PRIORITETOM

Konstruiranje enkodera s prioritetom:

Shema za PA2 je:



ENKODER S PRIORITETOM

Konstruiranje enkodera s prioritetom:

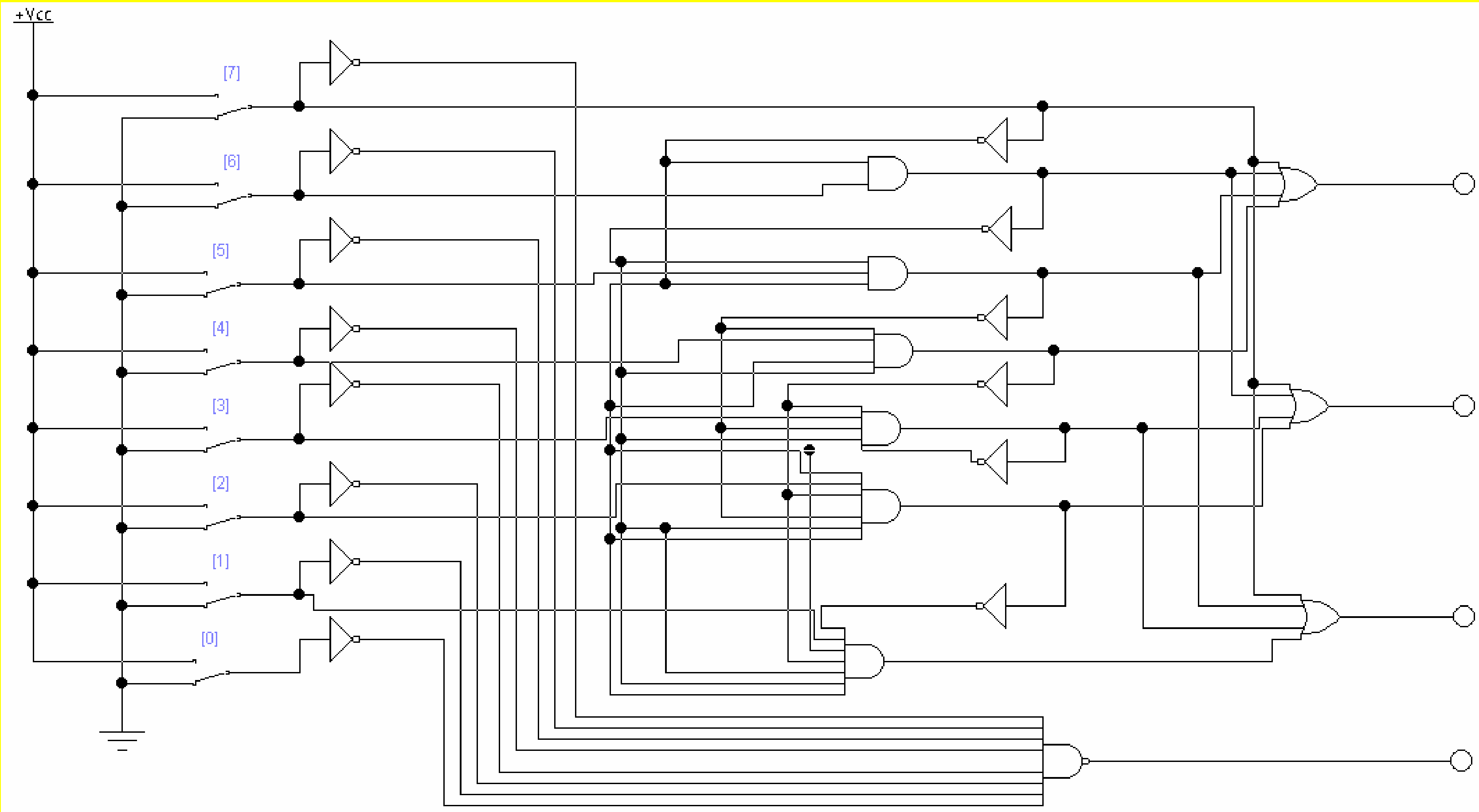
Za enkoder PA3 tablica istine je:

x_7	x_6	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1	x_0	a_2	a_1	a_0	v
1	R	R	R	R	R	R	R	1	1	1	1
0	1	R	R	R	R	R	R	1	1	0	1
0	0	1	R	R	R	R	R	1	0	1	1
0	0	0	1	R	R	R	R	1	0	0	1
0	0	0	0	1	R	R	R	0	1	1	1
0	0	0	0	0	1	R	R	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	1	R	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	R	R	R	0

ENKODER S PRIORITETOM

Konstruiranje enkodera s prioritetom:

Neposredno možemo nacrtati shemu za PA3:



ENKODER S PRIORITETOM

Konstruiranje enkodera s prioritetom:

Minimizacija temeljem teorema o apsorpciji daje za PA3:

$$a_2 = x_7 \vee \bar{x}_7 x_6 \vee \bar{x}_7 \bar{x}_6 x_5 \vee \bar{x}_7 \bar{x}_6 \bar{x}_5 x_4$$

$$= x_7 \vee x_6 \vee x_5 \vee x_4$$

$$= \overline{\bar{x}_7 \,\&\, \bar{x}_6 \,\&\, \bar{x}_5 \,\&\, \bar{x}_4}$$

$$a_1 = x_7 \vee \bar{x}_7 x_6 \vee \bar{x}_7 \bar{x}_6 \bar{x}_5 \bar{x}_4 x_3 \vee \bar{x}_7 \bar{x}_6 \bar{x}_5 \bar{x}_4 \bar{x}_3 x_2$$

$$= x_7 \vee x_6 \vee \bar{x}_5 \bar{x}_4 x_3 \vee \bar{x}_5 \bar{x}_4 x_2$$

$$= \overline{\bar{x}_7 \,\&\, \bar{x}_6 \,\&\, \overline{\bar{x}_5 \bar{x}_4 x_3} \,\&\, \overline{\bar{x}_5 \bar{x}_4 x_2}}$$

$$a_0 = x_7 \vee \bar{x}_7 \bar{x}_6 x_5 \vee \bar{x}_7 \bar{x}_6 \bar{x}_5 \bar{x}_4 x_3 \vee \bar{x}_7 \bar{x}_6 \bar{x}_5 \bar{x}_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 x_1$$

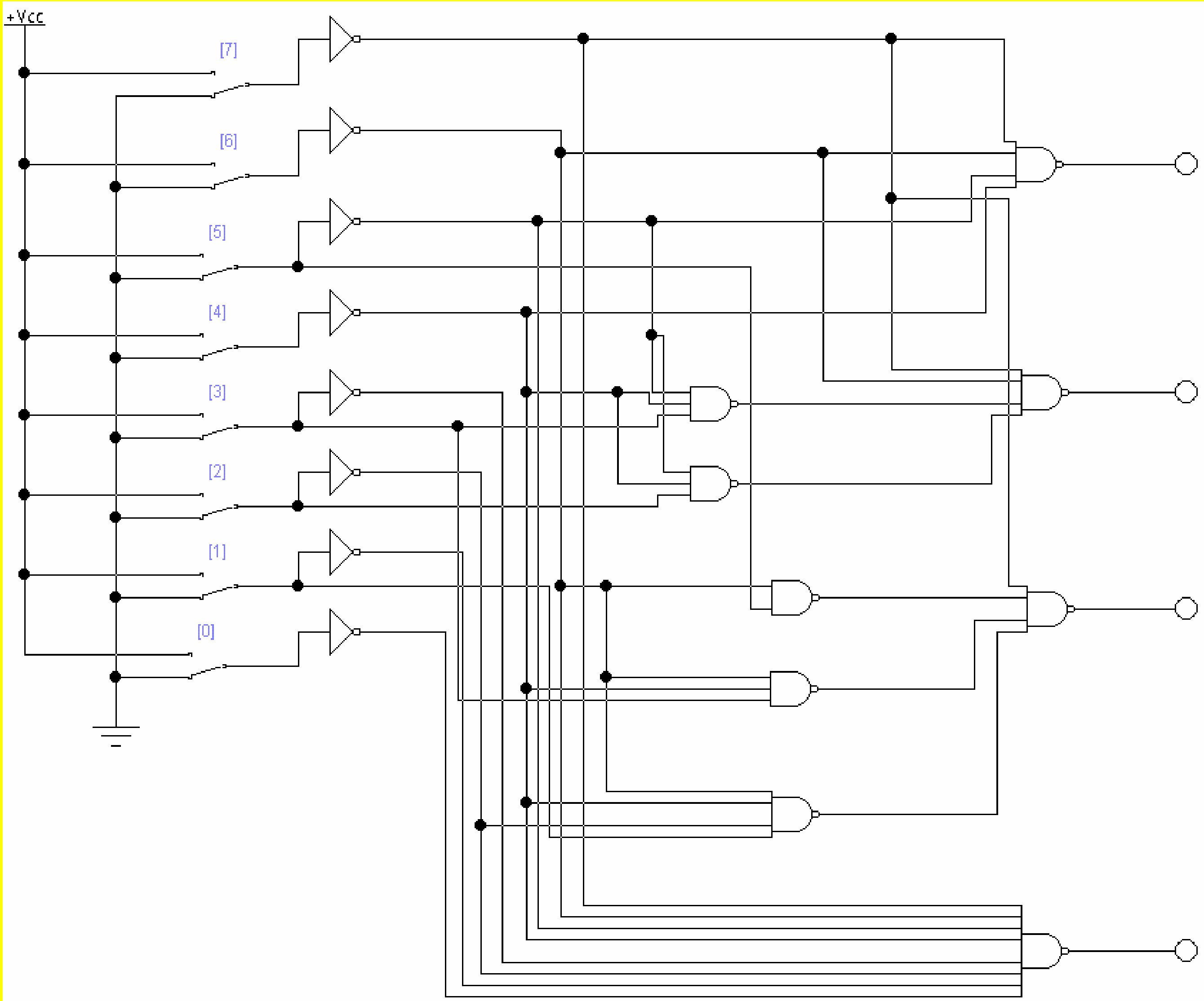
$$= x_7 \vee \bar{x}_6 x_5 \vee \bar{x}_6 \bar{x}_4 x_3 \vee \bar{x}_6 \bar{x}_4 \bar{x}_2 x_1$$

$$= \overline{\bar{x}_7 \,\&\, \overline{\bar{x}_6 x_5} \,\&\, \overline{\bar{x}_6 \bar{x}_4 x_3} \,\&\, \overline{\bar{x}_6 \bar{x}_4 \bar{x}_2 x_1}}$$

ENKODER S PRIORITETOM

Konstruiranje enkodera s prioritetom:

Shema PA3 je:



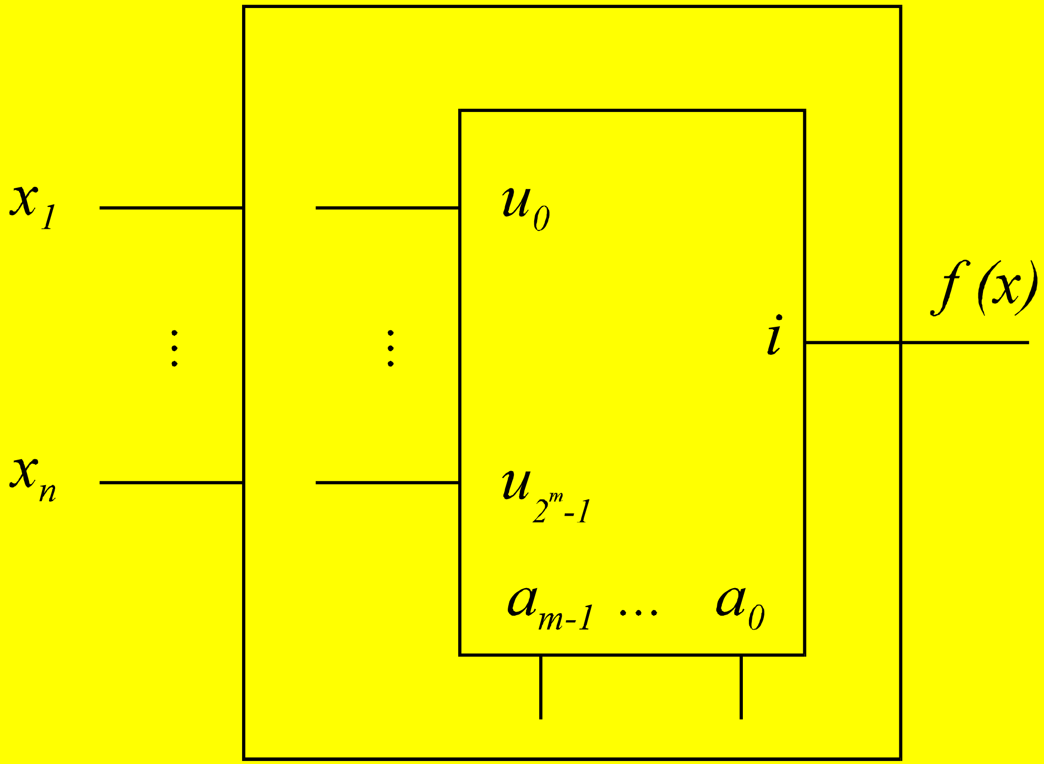
ENKODER S PRIORITETOM

Enkoder s prioritetom koristimo:

- Za prekodiranje 1 od 2n u prirodni binarni kod,
- za realizaciju malih tastatura,
- kod mikroprocesora za detekciju najprioritetnijeg od trenutno aktivnih prekidnih zahtjeva (interrupt request), a prirodni binarni kod zahtjeva se koristi za izračun adrese servisnog potprograma (pomakom u lijevo ili čitanjem iz tablice adresa).

REALIZACIJA BF MULTIPLEKSEROM

Realizirajmo Booleovu funkciju pomoću multipleksera:



Vrijednost funkcije se može pojaviti samo na izlazu multipleksera:

$$i = f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$$

REALIZACIJA BF MULTIPLEKSEROM

Slijedi:

$$\bigvee_{j=0}^{2^m-1} m_j\left(a_{m-1},\ldots,a_0\right)u_j = \bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i\left(x_1,\ldots,x_n\right)T_i$$

Imamo jednu jednadžbu, a trebamo spojiti m+2^m ulaza!

U posebnom slučaju, m=n:

$$\bigvee_{j=0}^{2^m-1} m_j(a)u_j = \bigvee_{j=0}^{2^m-1} m_j(x)T_j$$

pa je lijeva strana strukturno identična desnoj.

REALIZACIJA BF MULTIPLEKSEROM

Običnu jednakost zamijenimo identitetom, te izjednačimo po dijelovima! Tako dobijemo potrebnih m+ m+2^{m} jednadžbi.

$$u_j = T_j$$

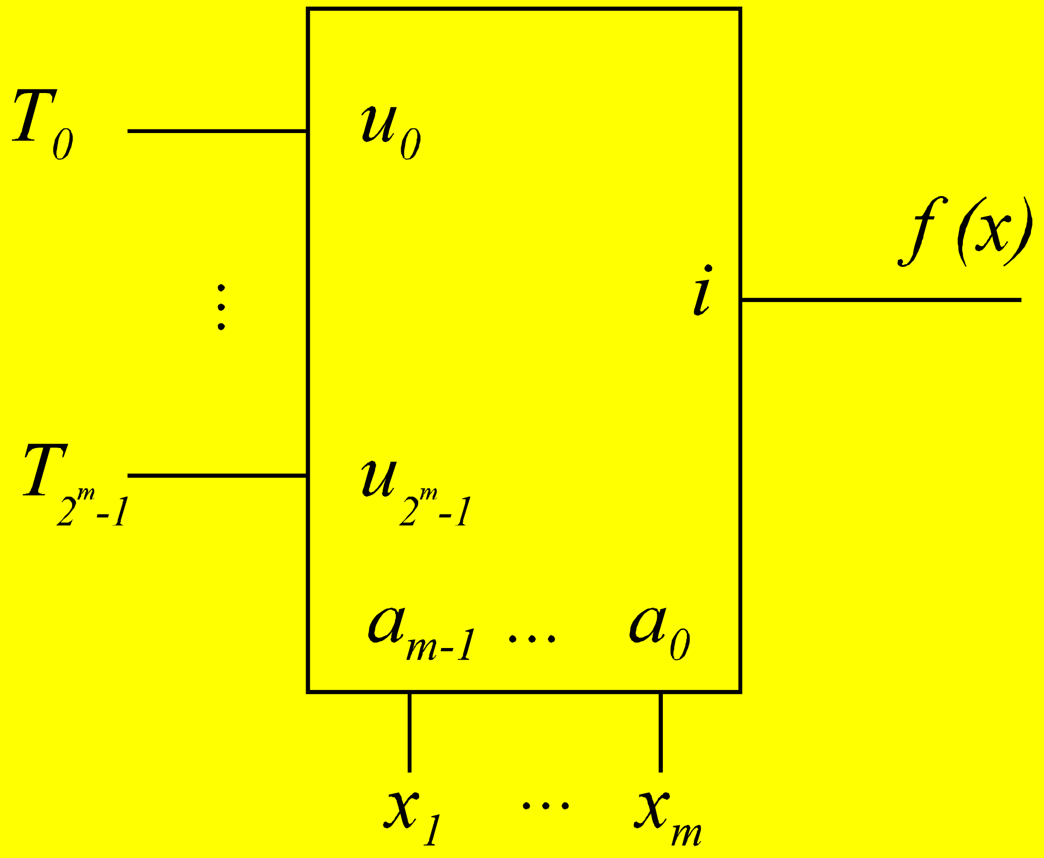
$$m_j(a) = m_j(x) \quad \Rightarrow \qquad a_e = x_{m-e}$$

$$\begin{array}{ccccc} a_{m-1} & a_{m-2} & \ldots & a_1 & a_0 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_{m-1} & x_m \end{array}$$

Ili: na adresne ulaze dovedemo varijable funkcije x_j redom, a na informacijske ulaze dovedemo vrijednost funkcije T_j

REALIZACIJA BF MULTIPLEKSEROM

Struktura sklopa je:



REALIZACIJA BF MULTIPLEKSEROM

Za općeniti slučaj n>m gubimo strukturni identitet.

$$\bigvee_{j=0}^{2^m-1} m_j(a)u_j = \bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i(x)T_i$$

Pokušajmo transformirati desnu stranu.

Rastavimo m_i na osnovu svojstva asocijativnosti konjunkcije:

$$m_i : \qquad (x_1 x_2 \ldots x_m)\cdot(x_{m-1} \ldots x_n)$$

$$m_i(x_1 \ldots x_n) = m_j(x_1 \ldots x_m)m_k(x_{m+1} \ldots x_n)$$

REALIZACIJA BF MULTIPLEKSEROM

U PDNO funkcije grupiramo minterme sa zajedničkim prvim dijelom, te korištenjem svojstva distributivnosti izlučimo prvi, zajednički dio:

$$f(x) = \bigvee_{j=0}^{2^m-1} m_j(x_1 \ldots x_m)\Big[m_0(x_{m+1} \ldots x_n)T_{j2^{n-m}+0} \vee \ldots$$
$$\ldots \vee m_{2^{n-m}-1}(x_{m+1} \ldots x_n)T_{j2^{n-m}+2^{n-m}-1}\Big]$$

Izraz u zagradi je PDNO preostale funkcije (vidi razbijanje funkcije na parcijalne funkcije)!

$$\bigvee_{j=0}^{2^m-1} m_j(a)u_j = \bigvee_{j=0}^{2^m-1} m_j(x_1 \ldots x_m)\cdot f_j(x_{m+1} \ldots x_n) = \bigvee_{j=0}^{2^m-1} m_j(x)f_j(x)$$

Uočimo da su sve preostale funkcije, funkcije istih varijabli!

REALIZACIJA BF MULTIPLEKSEROM

Opet je uspostavljen strukturni identitet!

$$m_j(a) = m_j(x) \qquad a_e = x_{m-e} \qquad u_j = f_j$$

Ili: na adresne ulaze dovedemo m izabranih varijabli funkcije redom, pa ih zovemo adresne varijable.

Na informacijske ulaze dovedemo preostale funkcije f_j redom, a to su funkcije preostalih varijabli.

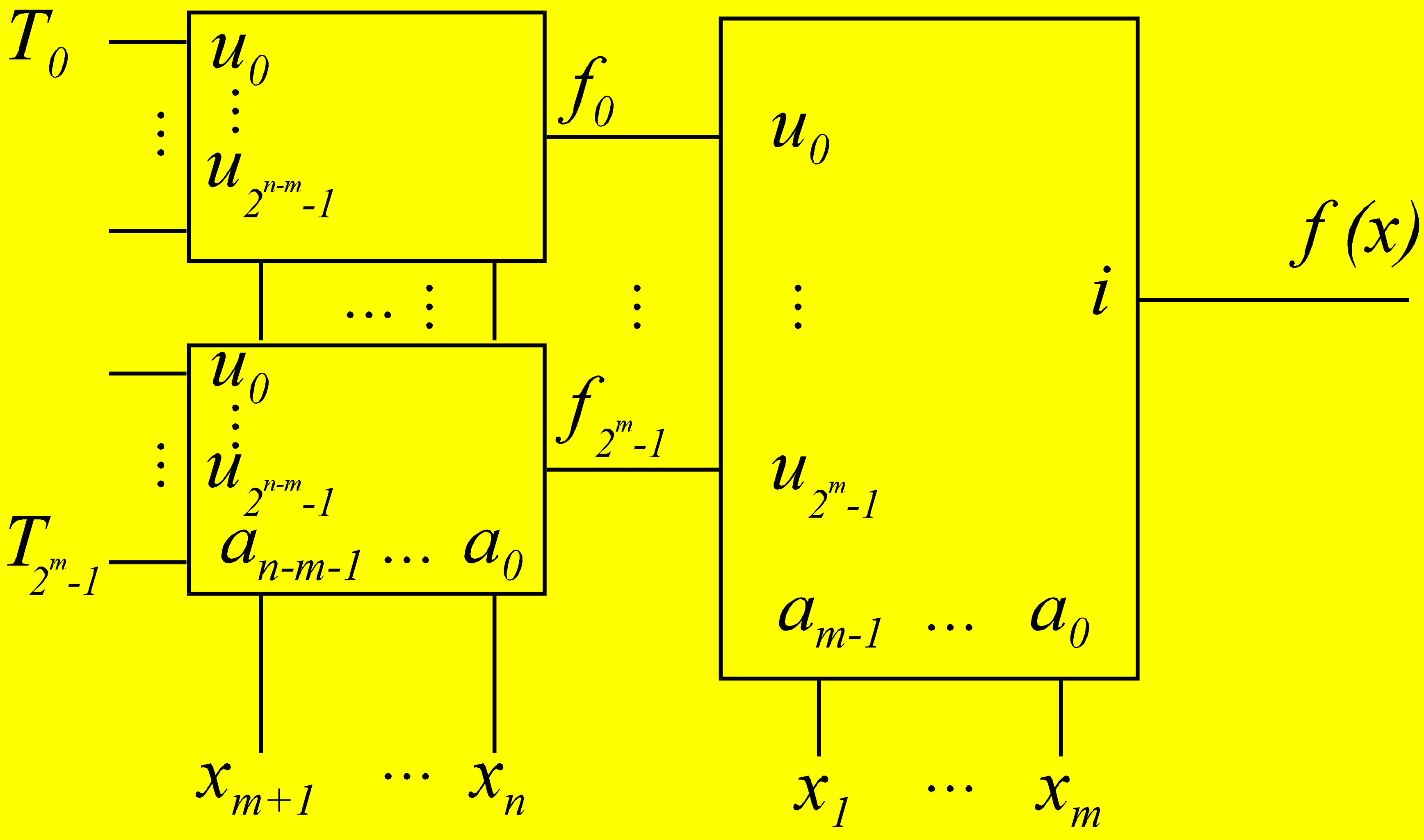
<u>Preostale funkcije</u> treba realizirati nekim sklopovima, uporabom logičkih vrata ili multipleksera.

Tada imamo MULTIPLEKSERSKO STABLO.

Potpuno stablo ekvivalentno je jednom multiplekseru.

REALIZACIJA BF MULTIPLEKSEROM

Sad je struktura sklopa:



REALIZACIJA BF MULTIPLEKSEROM

Kod algebarske analize uzimali smo prvih m varijabli.

Znamo da možemo izabrati bilo kojih m varijabli.

Varijable biramo po kriteriju minimalnosti sklopa!

Za slučaj korištenja LOGIČKIH VRATA

> **adresne varijable za osnovni multiplekser biramo tako da ukupna struktura bude minimalna**

Za slučaj korištenja MULTIPLEKSERSKOG STABLA

> **adresne varijable za osnovni multiplekser biramo tako da što veći broj grana stabla bude eliminiran**
>
> **što veći broj preostalih funkcija mora biti FUNKCIJA JEDNE VARIJABLE**

REALIZACIJA BF MULTIPLEKSEROM

SPECIJALNI SLUČAJ: n=m+1

Sve preostale funkcije su funkcije jedne varijable

Multiplekserom s m adresnih ulaza možemo realizirati funkciju s m+1 varijabli.

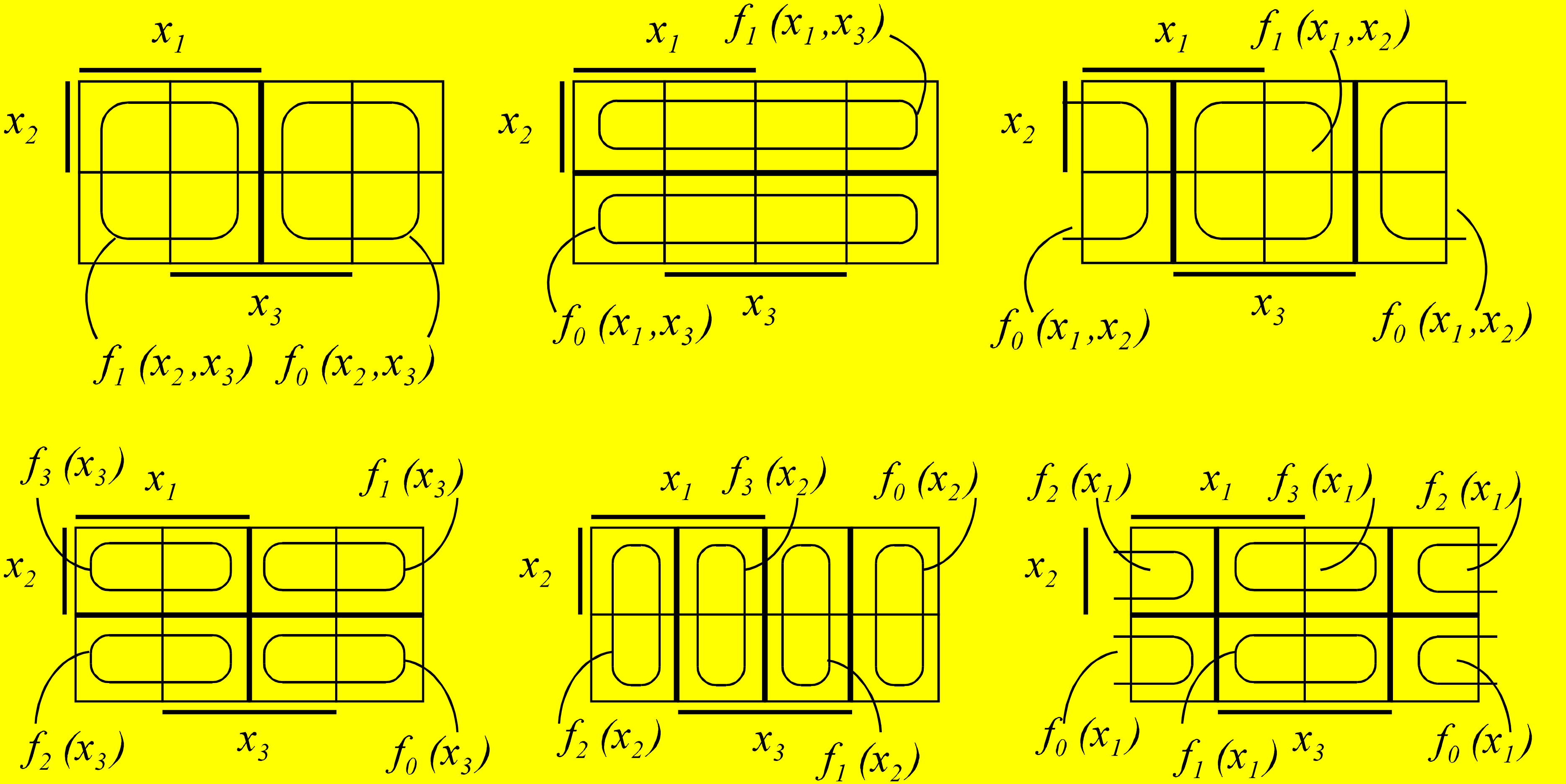
Multiplekser neposredno realizira PDNO funkcije, bilo u osnovnom obliku ili nakon razbijanja na parcijalne funkcije.

Preostale funkcije računamo korištenjem metode Veitchevog dijagrama.

Veitchev dijagram se izborom adresne varijable raspada na dijelove, od kojih svaki predstavlja jednu preostalu funkciju!

REALIZACIJA BF MULTIPLEKSEROM

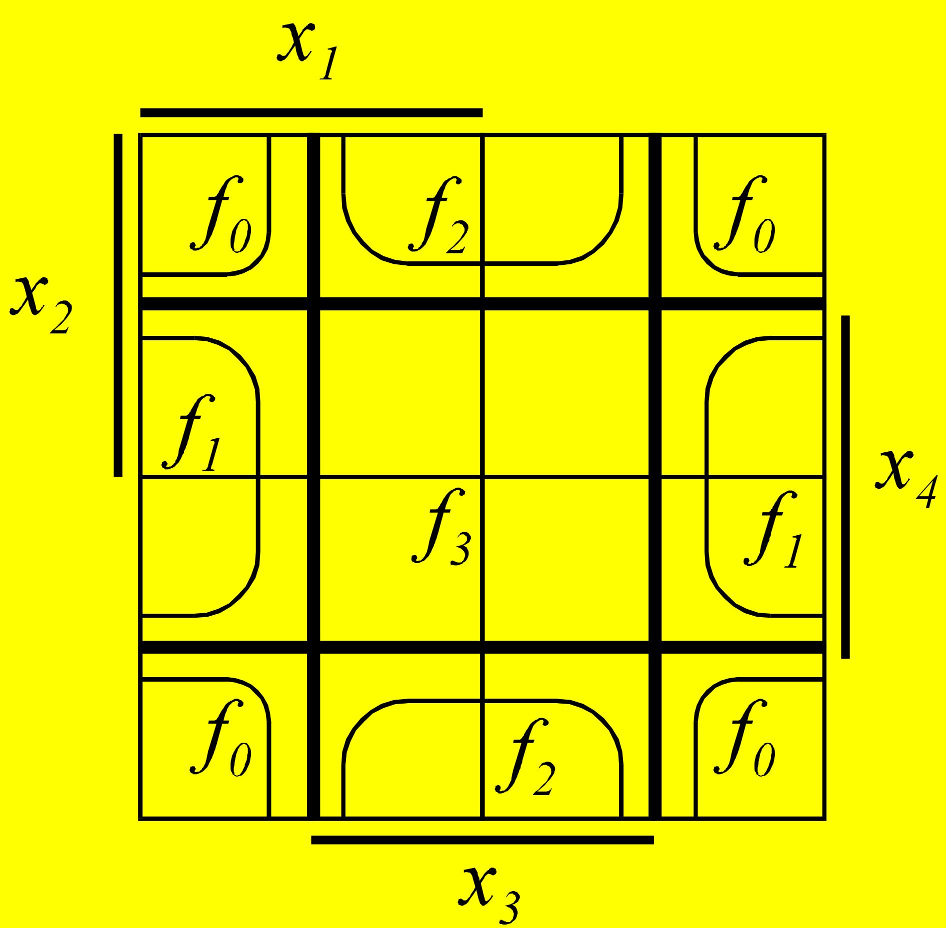
Prisjetimo se, za n=3, m=1 i 2:



REALIZACIJA BF MULTIPLEKSEROM

Ili npr. Za n=4, m=2:

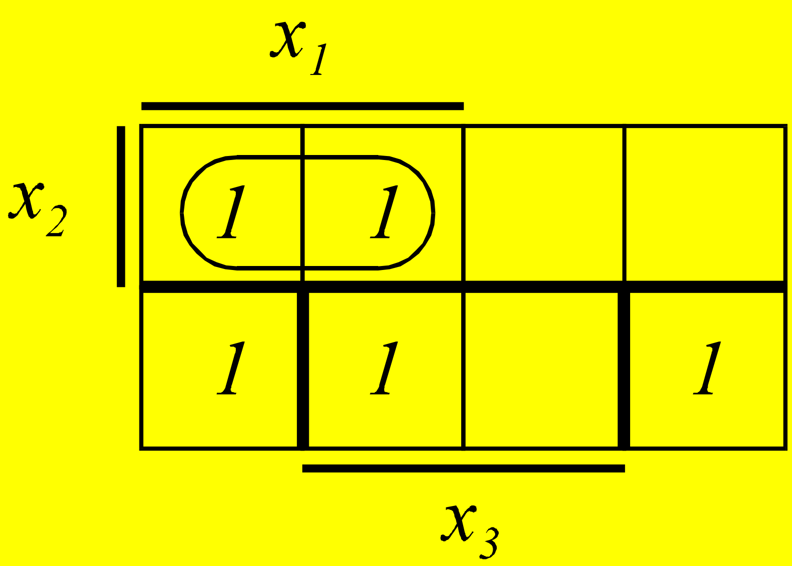
$x_3\ x_4$



REALIZACIJA BF MULTIPLEKSEROM

Primjer za ranije zadanu funkciju, m=1:

x_1	x_2	x_3	$f(x)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

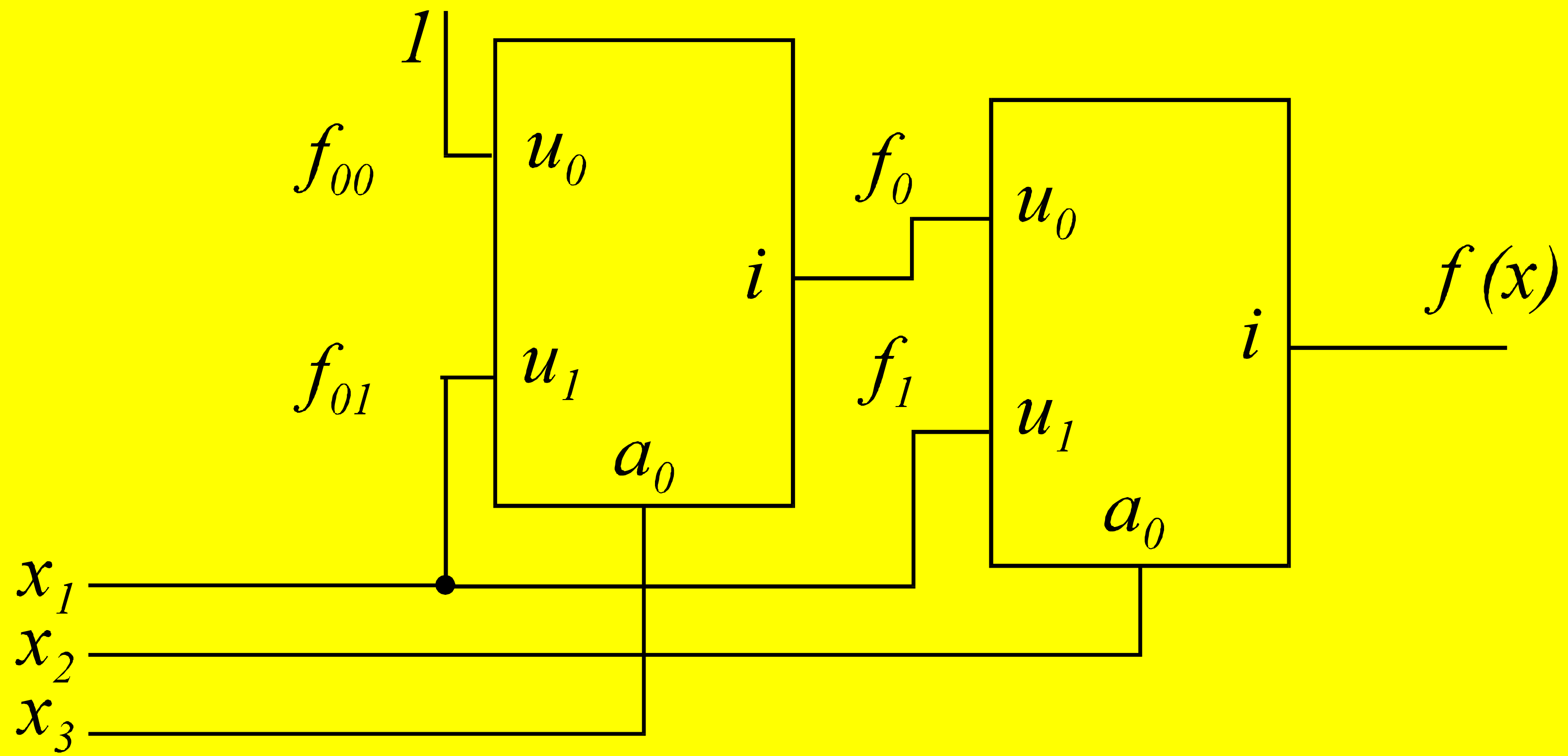


$x_2 :$ $\qquad f_0 \rightarrow x_2\, x_3 :$ $\qquad f_{00} = 1$

$\qquad f_1 = x_1$ $\qquad f_{01} = x_1$

REALIZACIJA BF MULTIPLEKSEROM

Nacrtamo shemu:



REALIZACIJA BF DEMULTIPLEKSEROM

Realizirajmo Booleovu funkciju pomoću demultipleksera:

Demultiplekser koristimo u sklopu DEKODERA:

$$u = 1$$

$$i_j = m_j(a) \cdot 1 = m_j(a)$$

$$j = 0 \ldots 2^m - 1$$

Vidimo da realizira sve minterme od m varijabli.
Dovoljno je dodati ILI vrata, te direktno realizirati PDNO funkcije.

REALIZACIJA BF DEMULTIPLEKSEROM

Za n=m:

$$f(x) = \bigvee_{j=0}^{2^m-1} m_j(x)\,T_j \qquad \Rightarrow \qquad i_j = m_j(a)$$

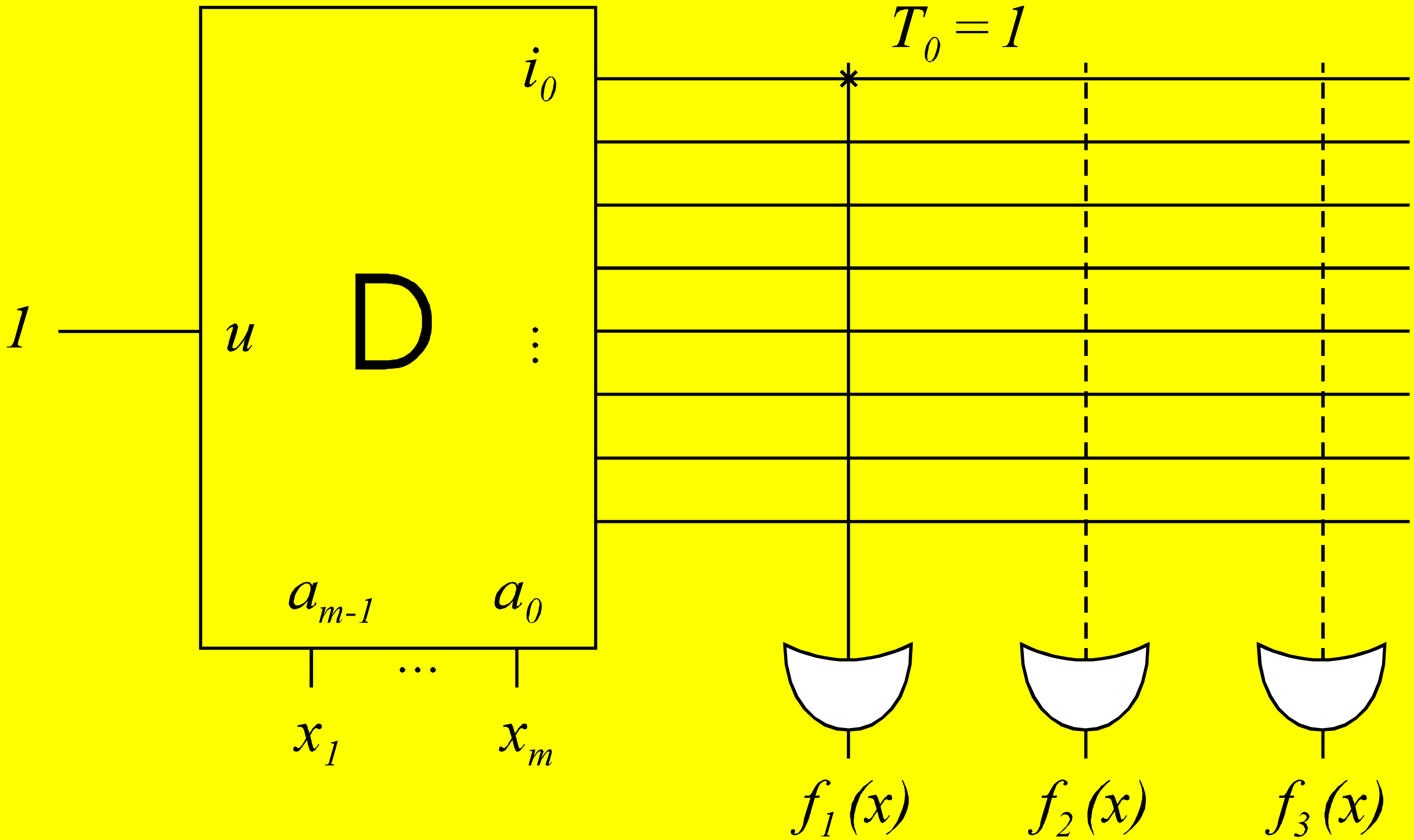
$$\begin{array}{cccc} a_{m-1}, & \ldots, & a_1, & a_0 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x_1, & \ldots, & x_{m-1}, & x_m \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_e = x_{m-e} \\ e = 0 \ldots m-1 \end{array}\right\} m_j(a) = m_j(x) = i_j$$

$$\Rightarrow \qquad f(x) = \bigvee_{j=0}^{2^m-1} i_j\,T_j$$

REALIZACIJA BF DEMULTIPLEKSEROM

Na ILI vrata spojimo samo one izlaze, za koje je vrijednost funkcije jednaka jedinici (simbolički prikaz):



Mana: realizira PDNO, nema minimizacije

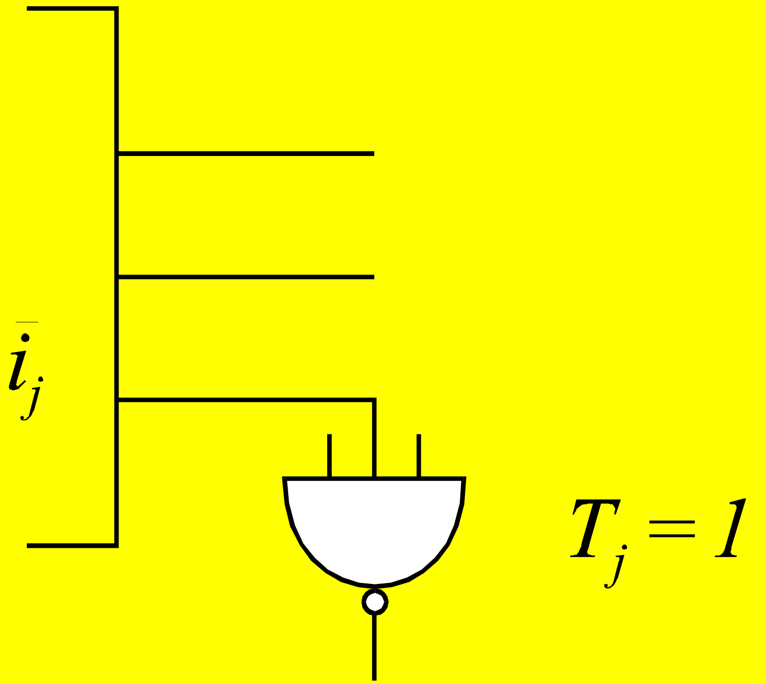
Prednost: realizira više funkcija istih varijabli

REALIZACIJA BF DEMULTIPLEKSEROM

Ako dvostruko negiramo izraz:

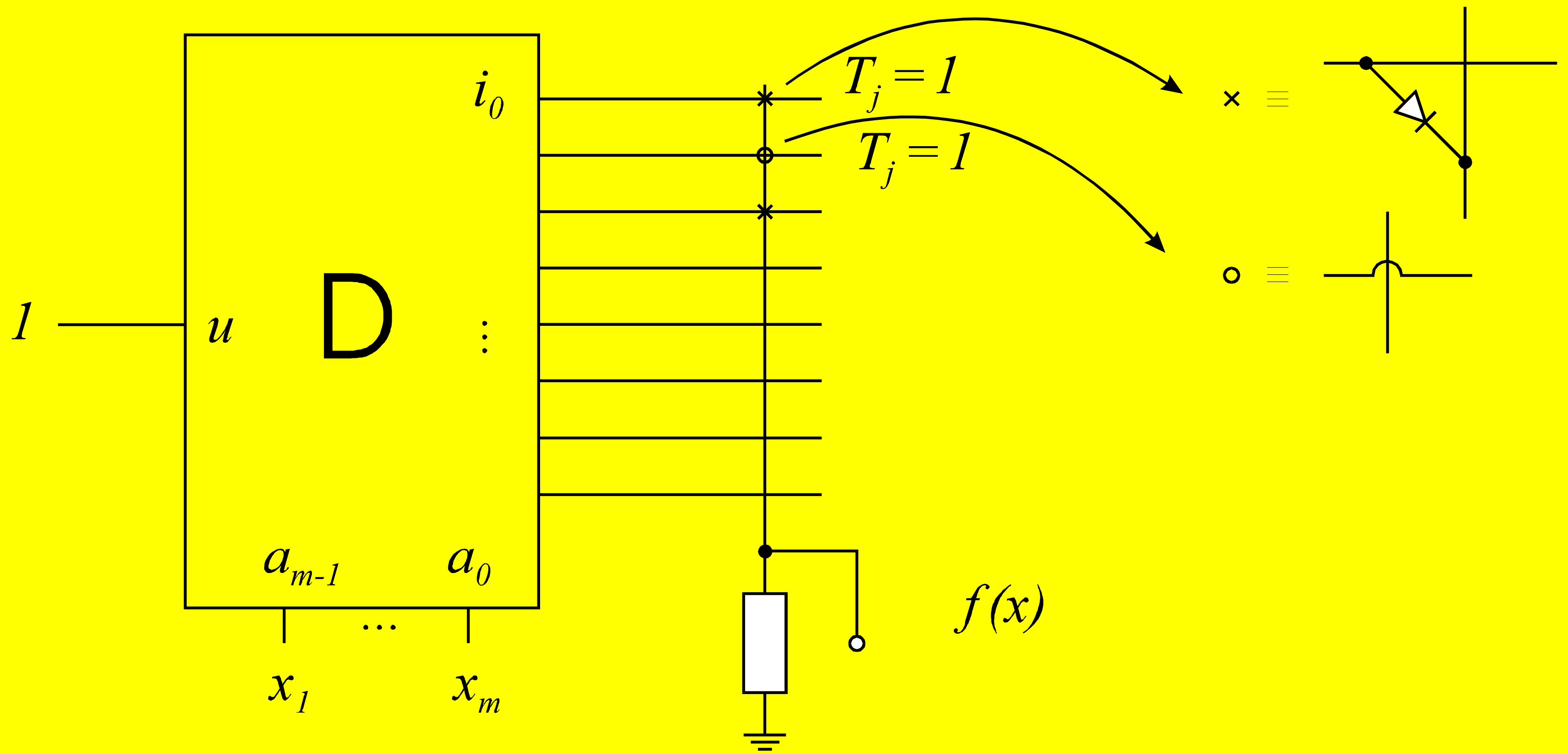
$$f(x) = \bigvee_{j=0}^{2^m-1} i_j T_j = \overline{\overline{\bigvee_{j=0}^{2^m-1} i_j T_j}} = \overline{\mathop{\&}_{j=0}^{2^m-1} \overline{i_j T_j}}$$

možemo koristiti demultiplekser s negiranim izlazima i NI vrata:



REALIZACIJA BF DEMULTIPLEKSEROM

Umjesto ILI odnosno NI vrata koristimo <u>diodnu logiku</u>:



i realiziramo ILI vrata s potrebnim brojem ulaza.

REALIZACIJA BF DEMULTIPLEKSEROM

Za n>m pokušamo transformirati PDNO funkcije:

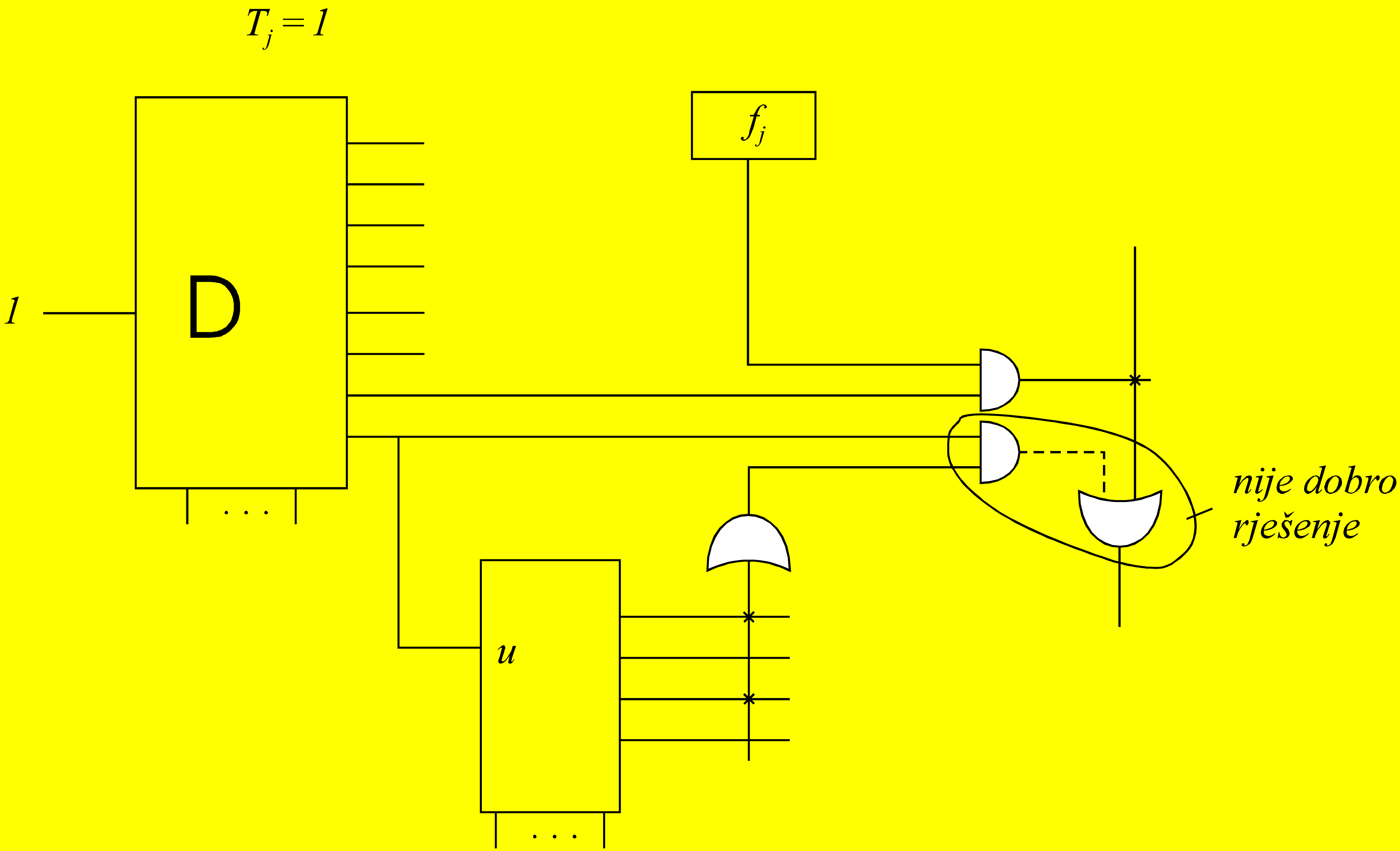
$$f(x) = \bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i(x) T_i = \bigvee_{j=0}^{2^m-1} m_j(x_1, \ldots, x_m) f_j(x_{m+1}, \ldots, x_n)$$

$$\Rightarrow f(x) = \bigvee_{i=0}^{2^m-1} i_j f_j(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = \bigvee_{i=0}^{2^m-1} i_j \bigvee_{k=0}^{2^{n-m}-1} m_k(x) T_{2^{n-m}\cdot j+k}$$

REALIZACIJA BF DEMULTIPLEKSEROM

Rješenje rezultira nezgrapnim sklopom:



REALIZACIJA BF DEMULTIPLEKSEROM

Ako preostalu funkciju realiziramo demultiplekserom možemo koristiti ulaz, koji je konjunktivno vezan sa izlazima, a ranije smo ga isključili:

$$f(x) = \bigvee_{i=0}^{2^m-1} i_j \bigvee_{k=0}^{2^{n-m}-1} u \cdot i_k(x) T_{2^{n-m}\cdot j+k}$$

na način da izlaz glavnog demultipleksera dovedemo na ulaz demultipleksera preostale funkcije.

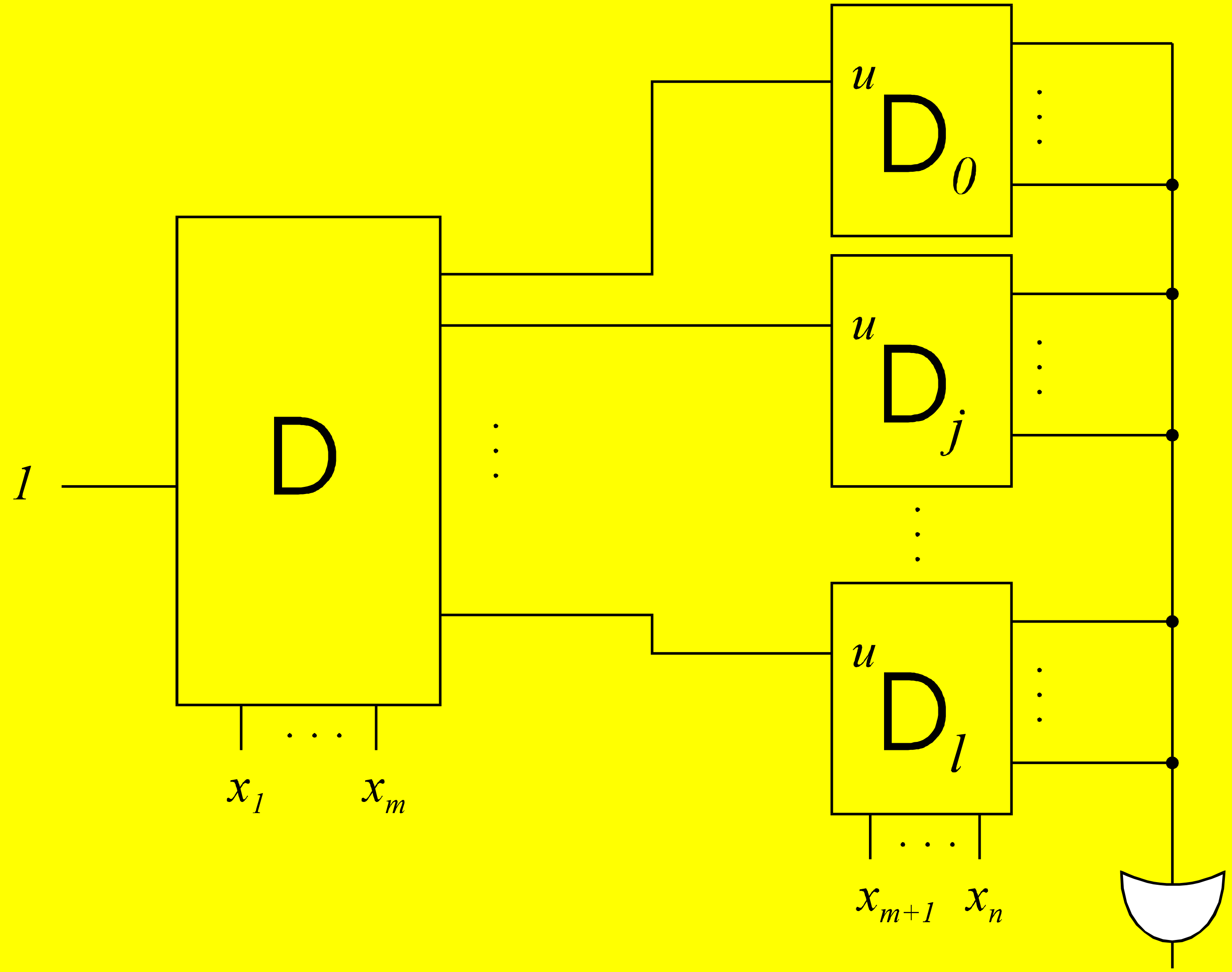
Dobili smo DEMULTIPLEKSERSKO STABLO!

Potpuno stablo ekvivalentno je jednom demultiplekseru.

Izborom adresnih varijabli eliminiramo grane stabla, kad je preostala funkcija jednaka KONSTANTI 0 ili 1.

REALIZACIJA BF DEMULTIPLEKSEROM

Sklop sada ima strukturu:

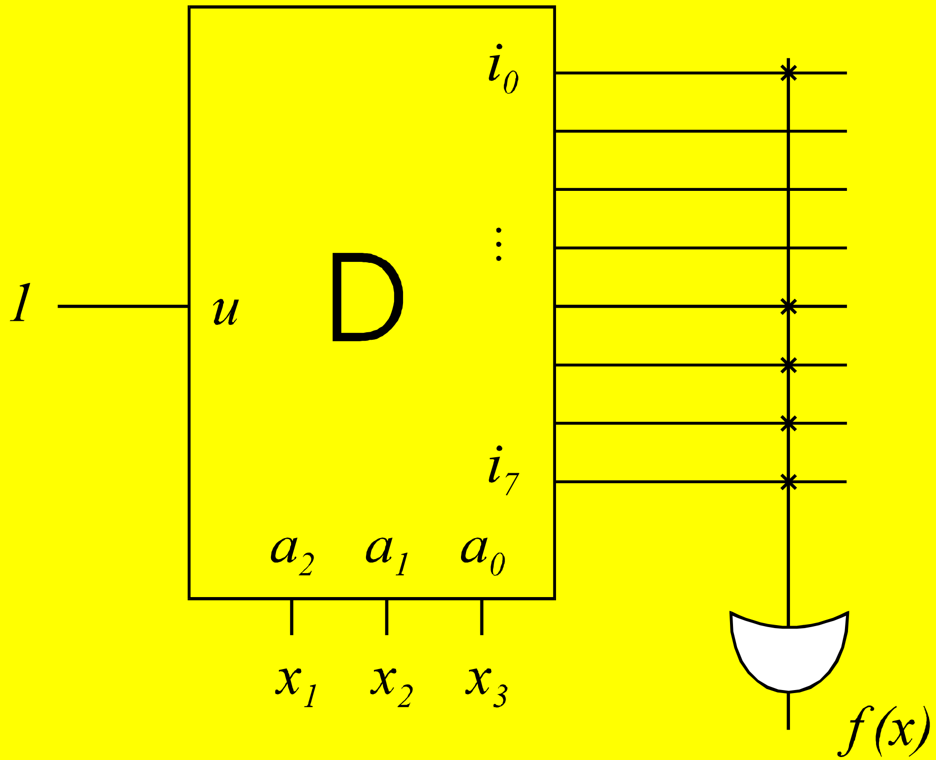


REALIZACIJA BF DEMULTIPLEKSEROM

Primjer za ranije zadanu funkciju, m=3:

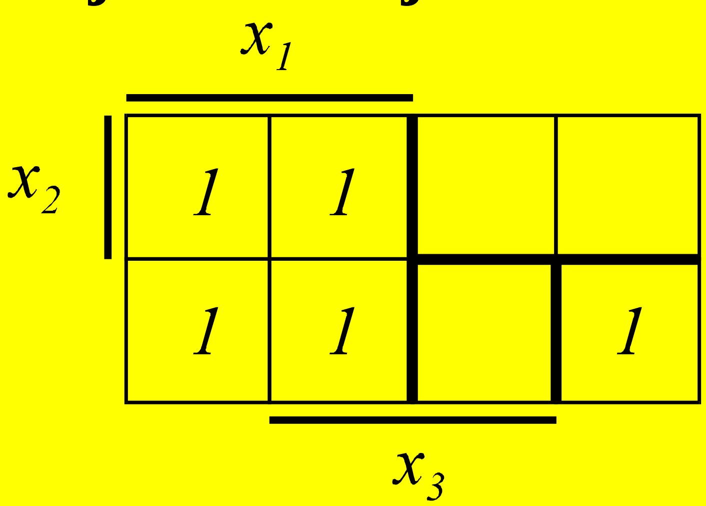
Direktno realiziramo PDNO. Pazimo na REDOSLIJED:

x_1	x_2	x_3	$f(x)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



REALIZACIJA BF DEMULTIPLEKSEROM

Primjer za ranije zadanu funkciju, m=1:



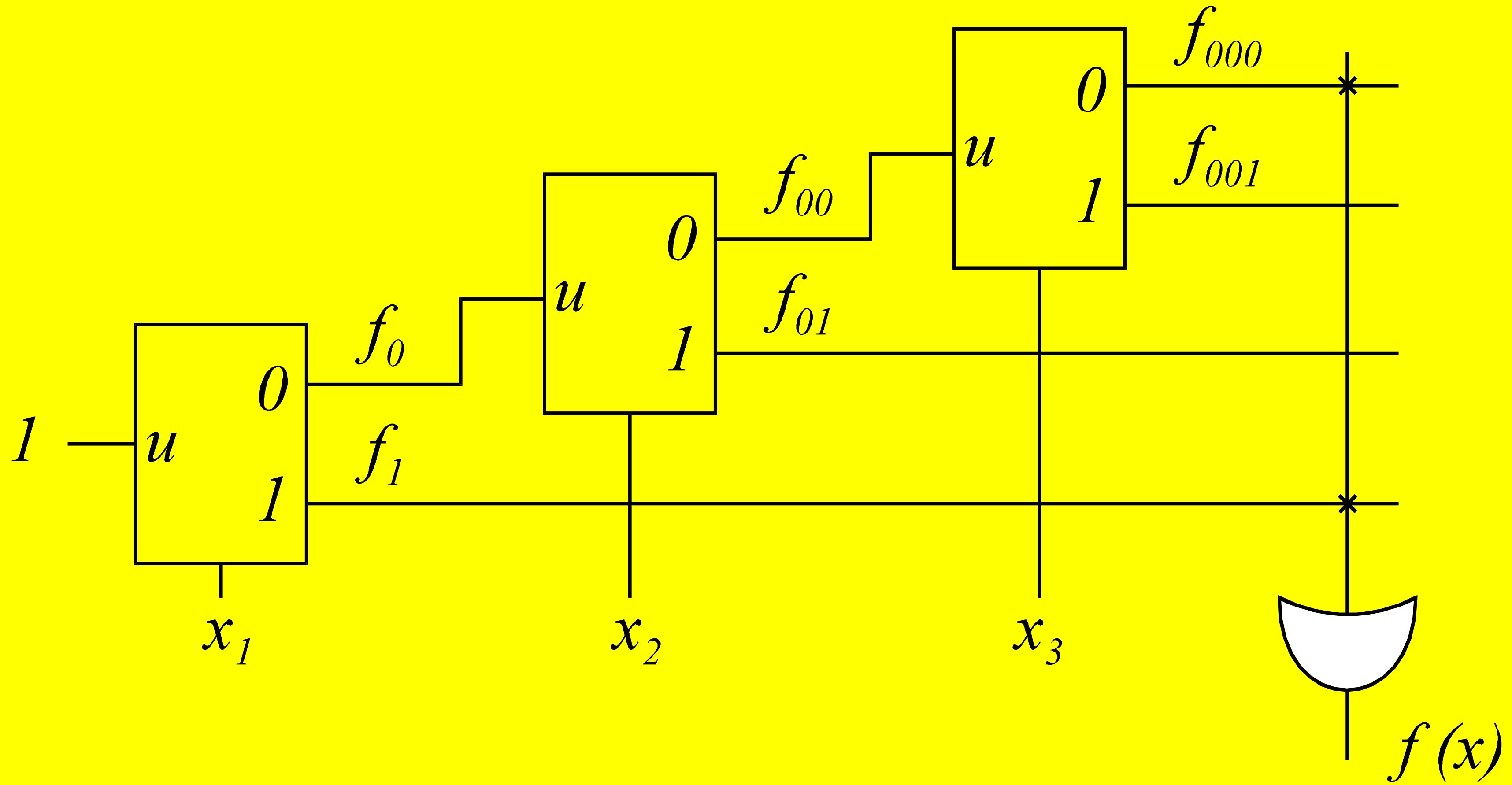
$$x_1: \qquad f_1 = 1$$

$$f_0 \Rightarrow x_1 x_2 : f_{00} \Rightarrow x_1 x_2 x_3 : f_{000} = 1$$

$$f_{01} = 0 \qquad\qquad f_{001} = 0$$

REALIZACIJA BF DEMULTIPLEKSEROM

Crtamo shemu:



REALIZACIJA BF DEMULTIPLEKSEROM

Primjetimo da osnovni demultiplekser nije potreban:

$$f(x) = \bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i(x) T_i =$$

$$= \bigvee_{j=0}^{1} m_j(x_1) f_j(x_2 \ldots x_m) =$$

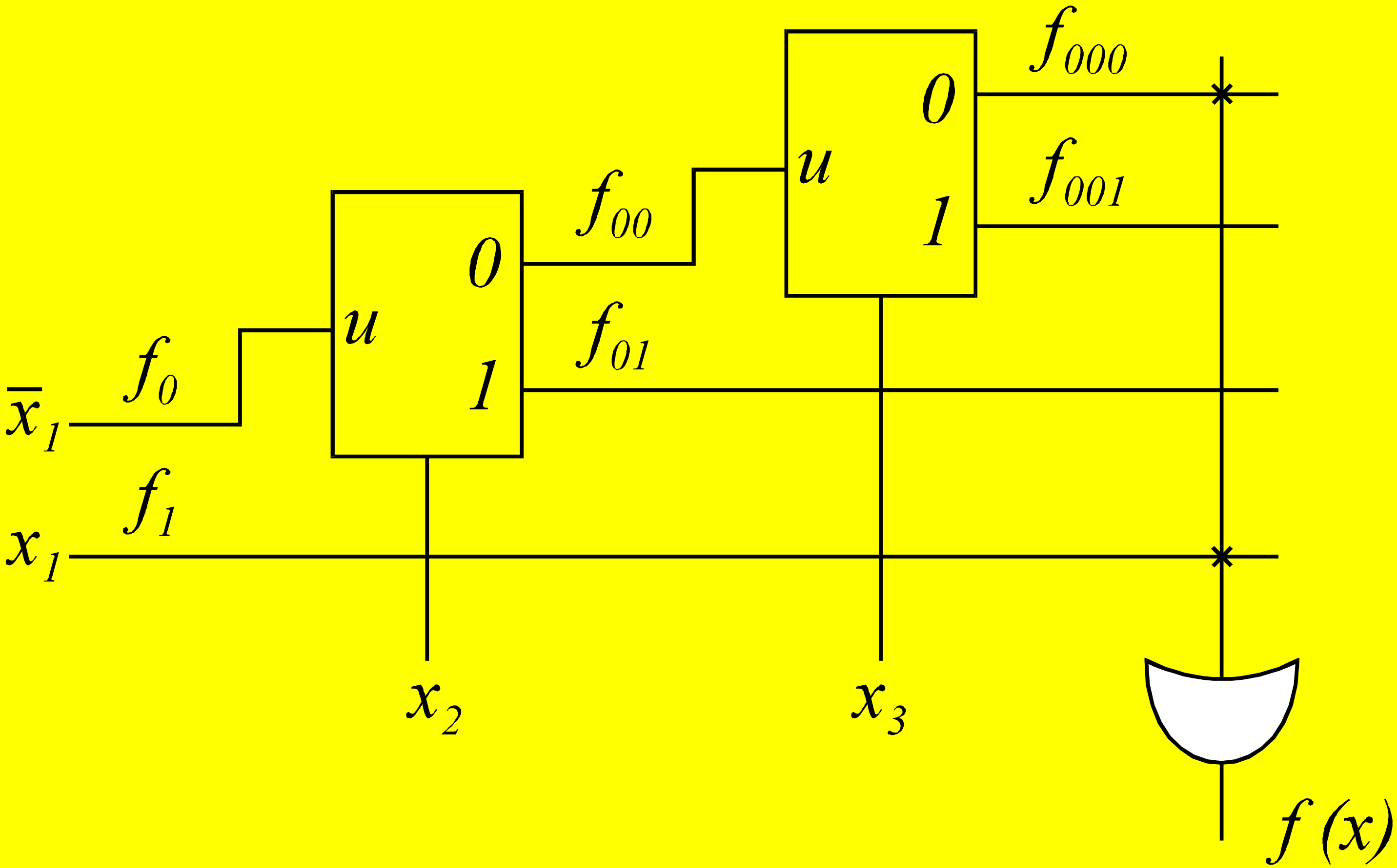
$$= m_0(x_1) f_0(x) \vee m_1(x_1) f_1(x) =$$

$$= \overline{x}_1 f_0(x) \vee x_1 f_1(x) =$$

$$= i_0 f_0(x) \vee i_1 f_1(x)$$

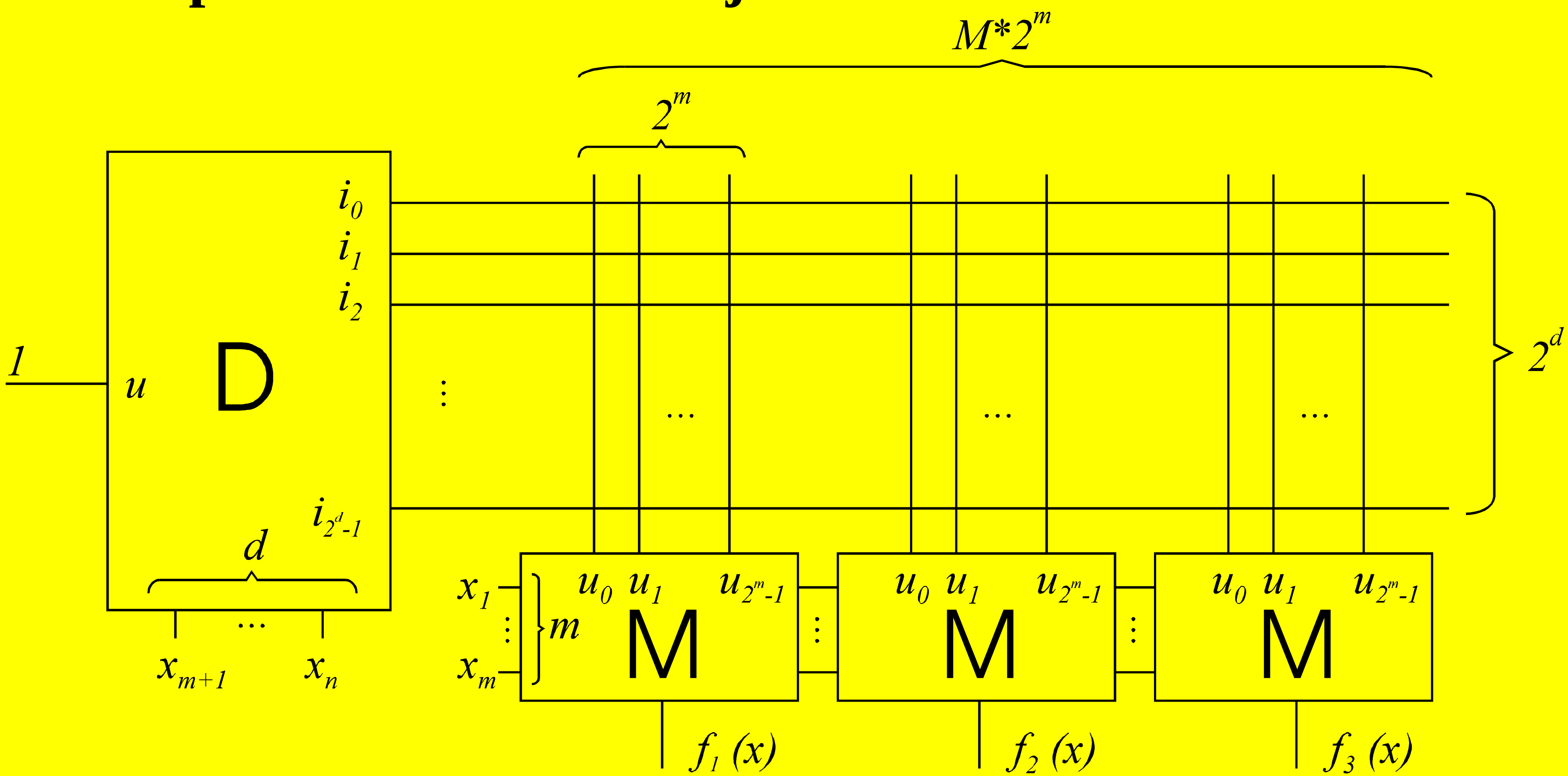
REALIZACIJA BF DEMULTIPLEKSEROM

Za gornji primjer:



MULTIPLEKSERSKO-DEMULTIPLEKSERSKA STRUKTURA

Demultiplekserom realizirajmo preostale funkcije multipleksera, ili multiplekserom razbijmo ILI vrata demultipleksera na više manjih:



MULTIPLEKSERSKO-DEMULTIPLEKSERSKA STRUKTURA

Težimo da matrica bude kvadratična:

$$f\left(x_1, \ldots, x_n\right) \qquad m + d = n \qquad M \cdot 2^m \approx 2^d$$

(M je broj multipleksera)

Broj logičkih vrata:

$$L = 2^m + 2^d$$

je minimalan kad je matrica kvadratična!

Ovu strukturu integriramo i dobijemo ROM (Read Only Memory),

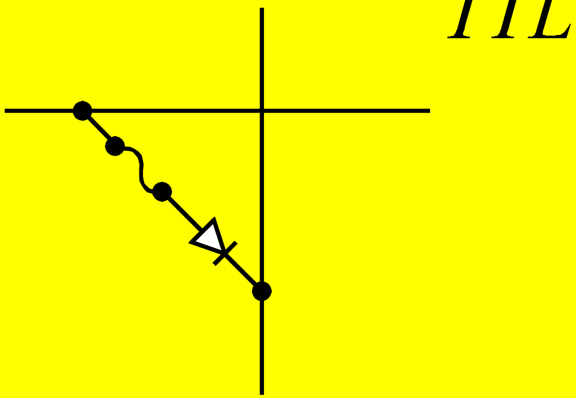
m	d	2^m	2^d	L
1	9	2	512	514
2	8	4	256	260
3	7	8	128	136
4	6	16	64	80
5	5	32	32	64
6	4	64	16	80
7	3	128	8	136

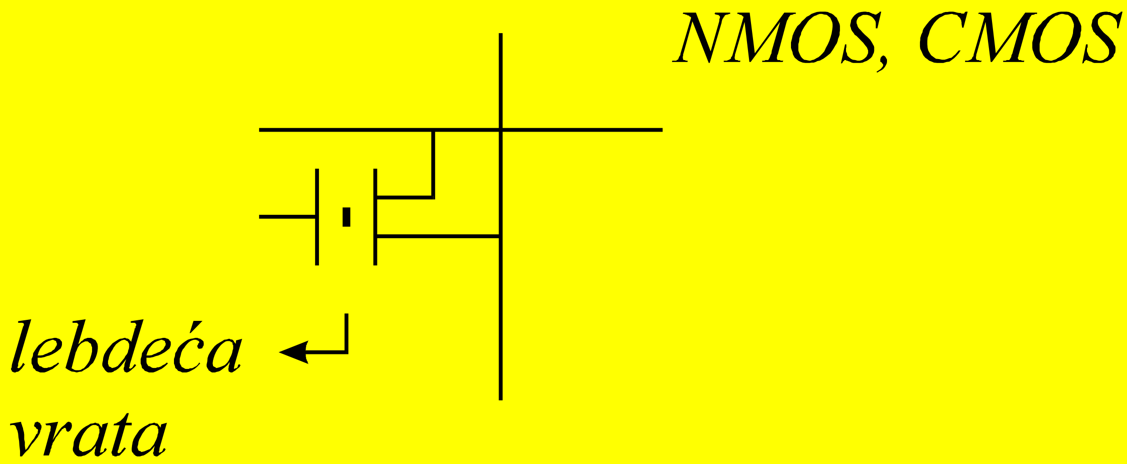
MULTIPLEKSERSKO-DEMULTIPLEKSERSKA STRUKTURA

odnosno varijante:

PROM, EPROM, EEPROM, Flash-EPROM

PROM: **EPROM, EEPROM, Flash:**

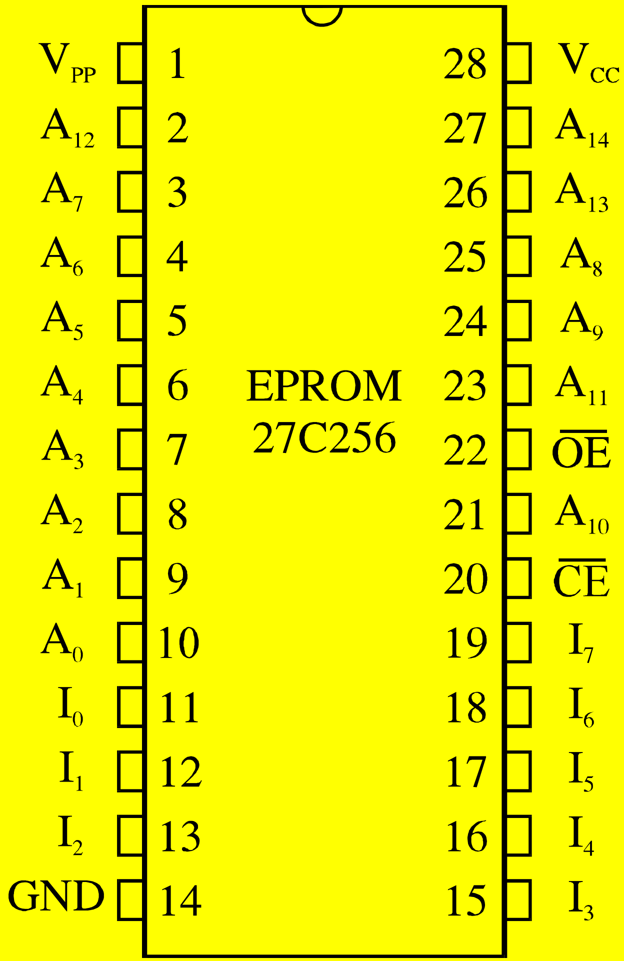


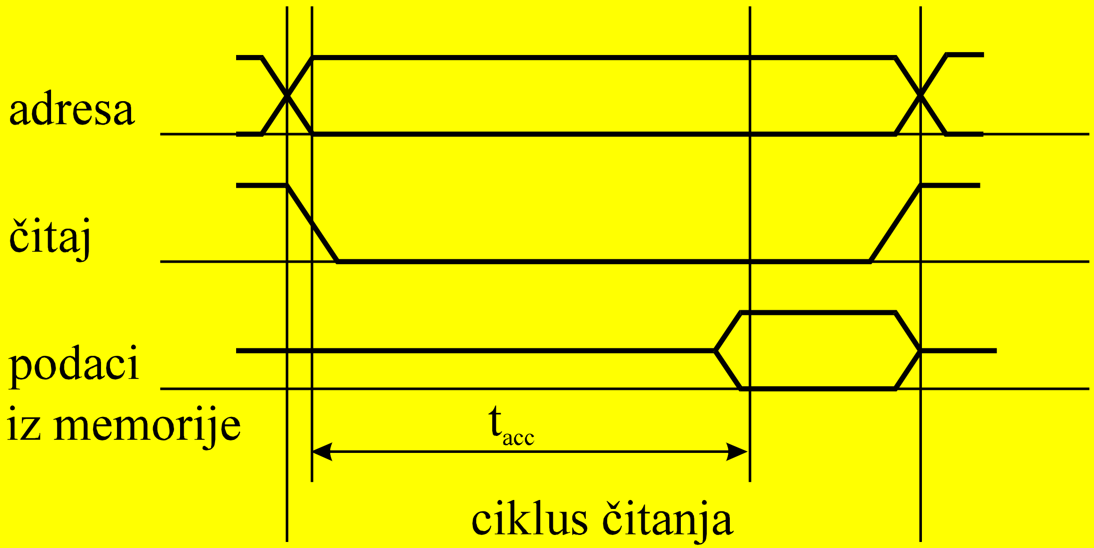


Ili RAM (Random Access Memory)
i varijante SRAM i DRAM (bistabili, parazitni kapaciteti).

MULTIPLEKSERSKO-DEMULTIPLEKSERSKA STRUKTURA

EPROM 27256:

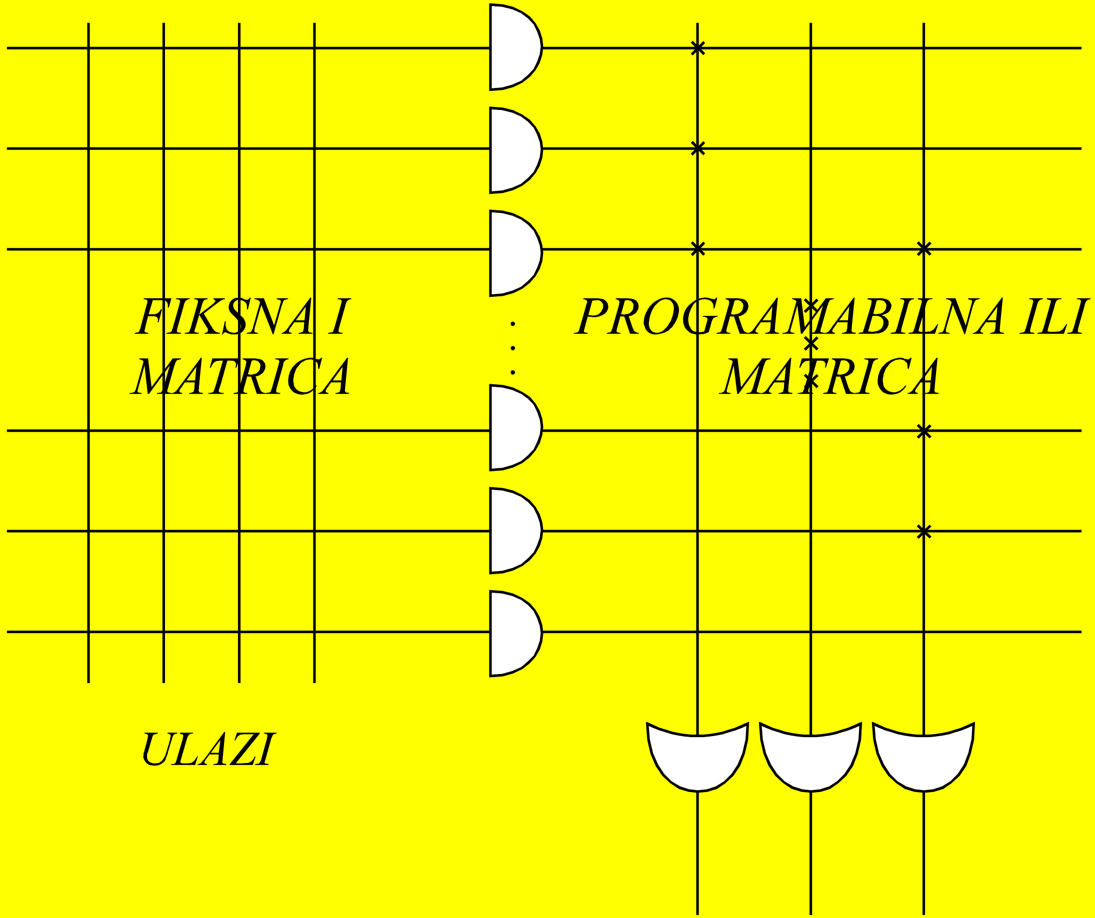




PROGRAMABILNE LOGIČKE STRUKTURE

Demultiplekser i ROM:

- **programabilna ILI matrica,**
- **demultiplekser realiziran I vratima - FIKSNA I matrica**

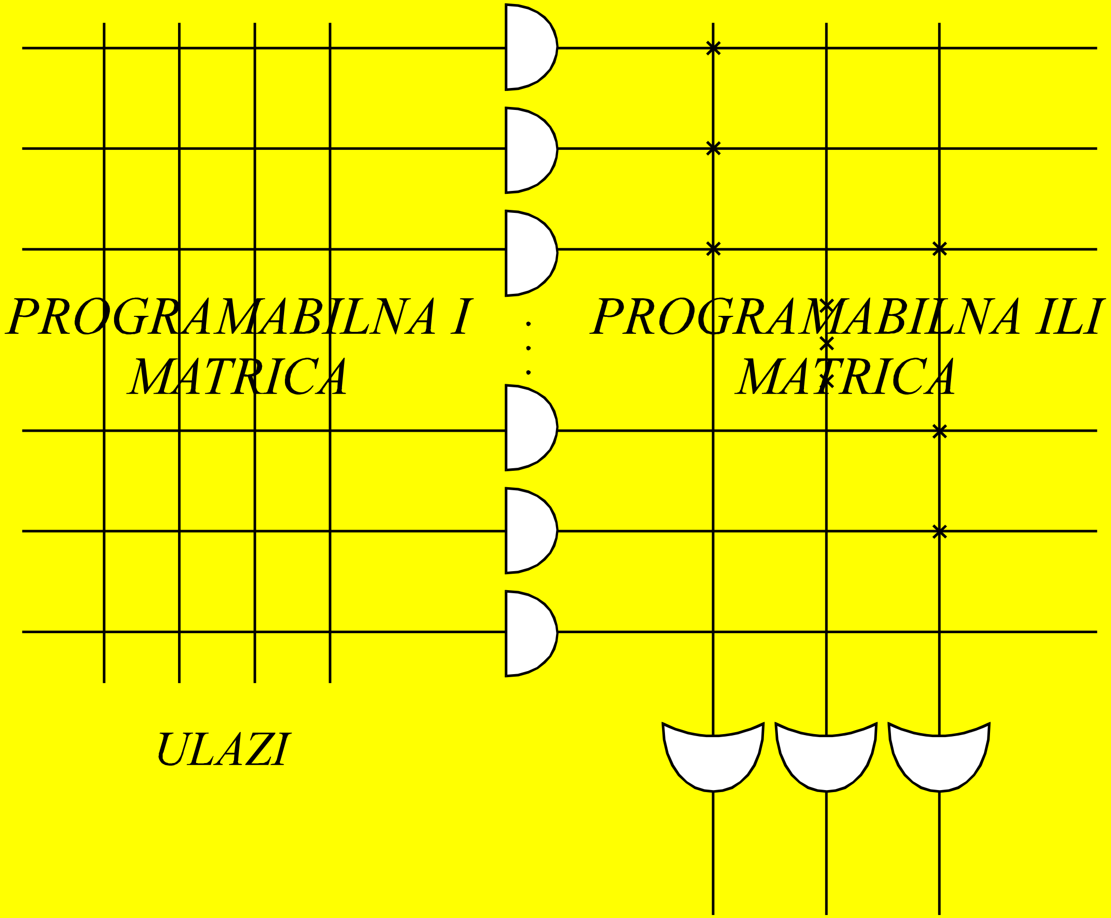


Broj redaka = 2^n

PROGRAMABILNE LOGIČKE STRUKTURE

Ideja: PROGRAMABILNE OBJE MATRICE - FPLA

- **omogućiti minimizaciju pojedine funkcije,**
- **omogućiti izbor elementarnih članova**

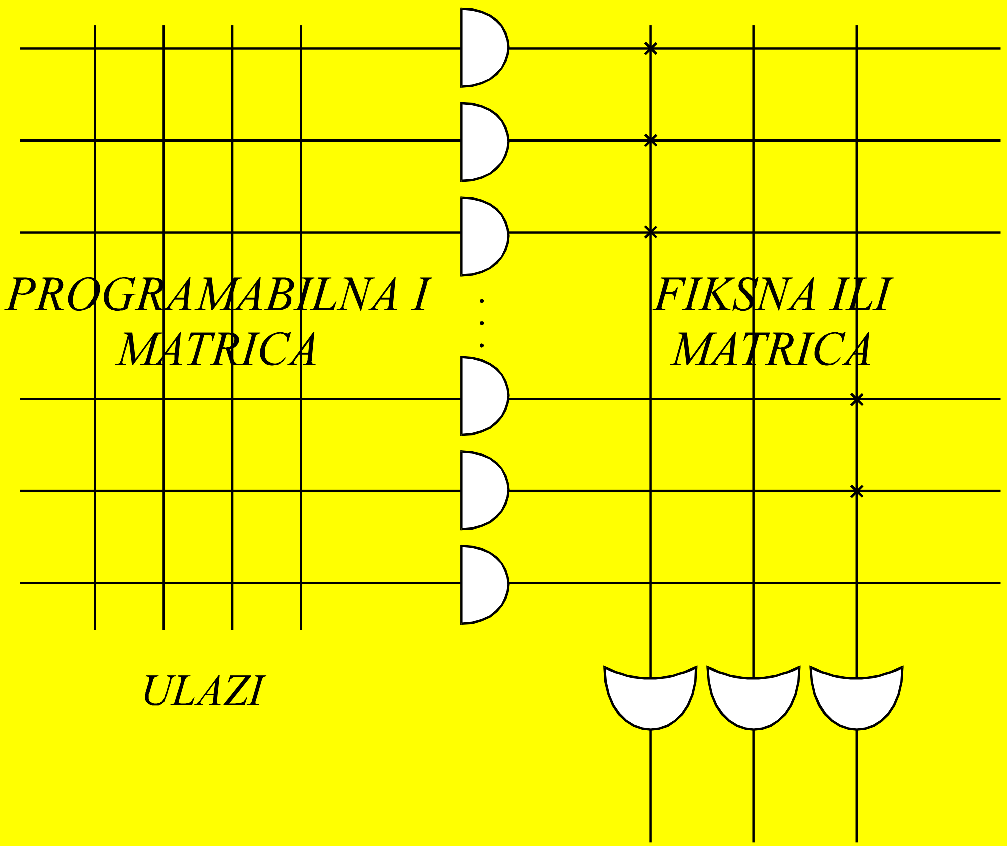


Broj redaka < 2^n

PROGRAMABILNE LOGIČKE STRUKTURE

Praksa: PAL, GAL

- **FPLA kompliciran zbog dvije programabilne matrice,**
- **dovoljna je programabilna I matrica**

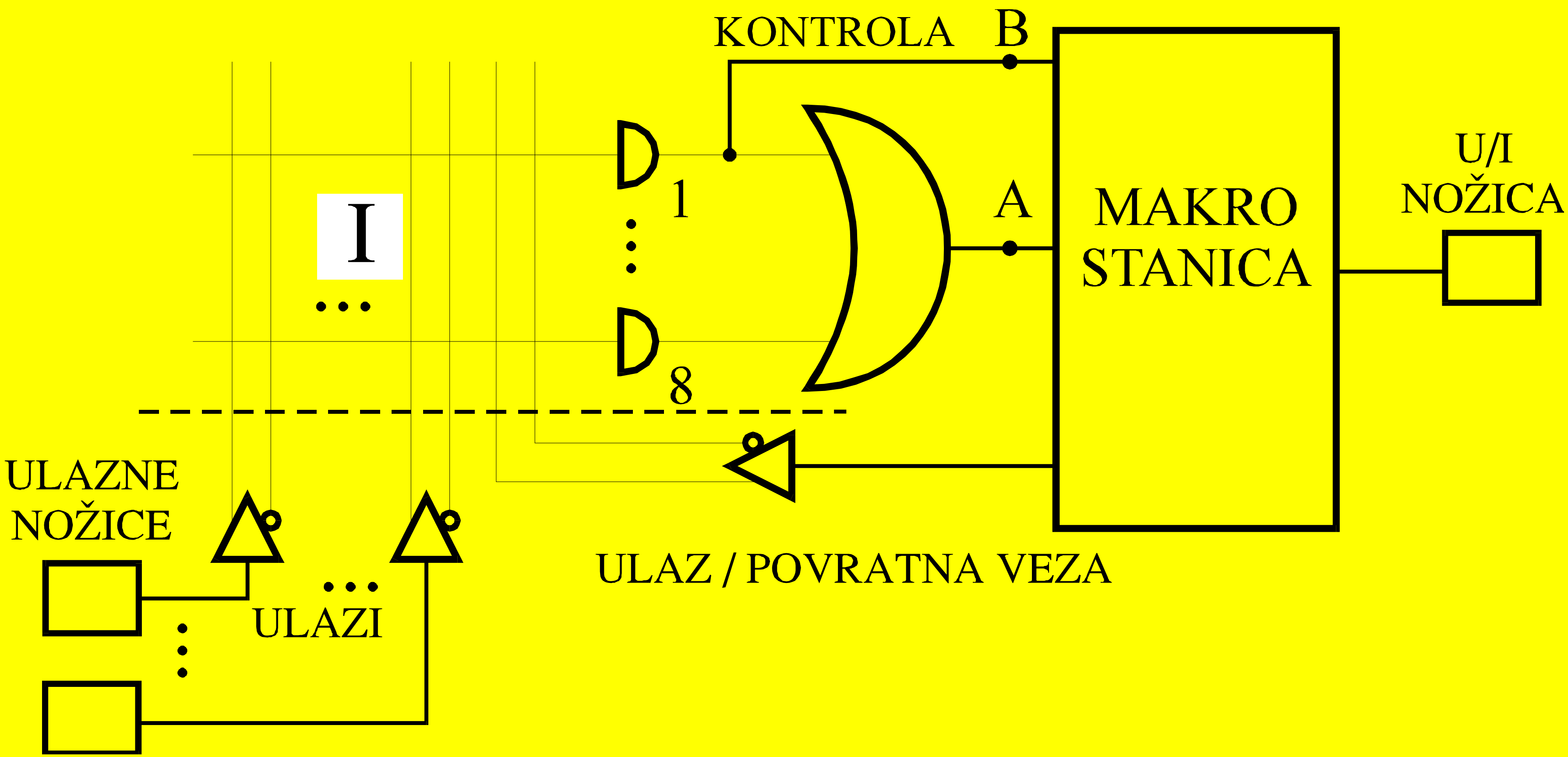


Broj redaka i dalje < 2^n

PROGRAMABILNE LOGIČKE STRUKTURE

Struktura GALa 16V8:

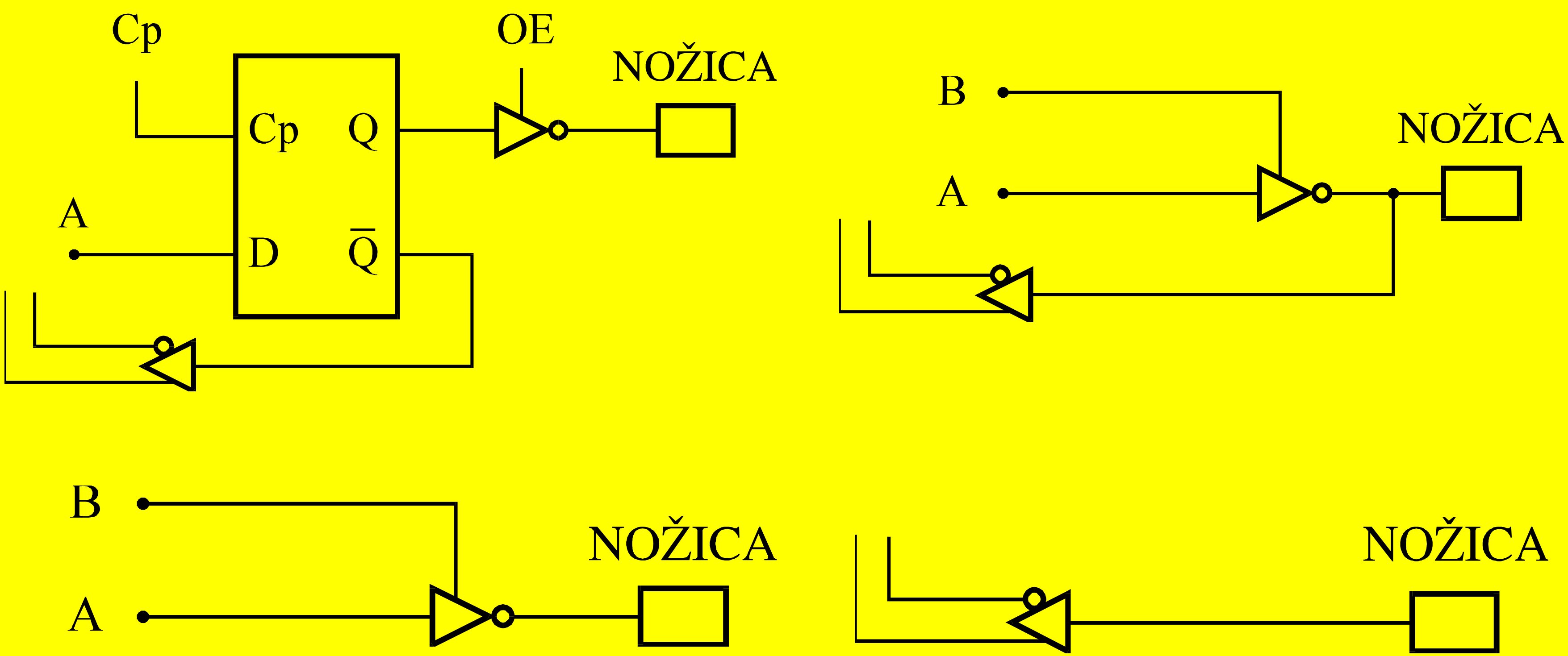
matrica svega 64 retka (8 blokova po 8 redaka)



MULTIPLEKSERSKO-DEMULTIPLEKSERSKA STRUKTURA

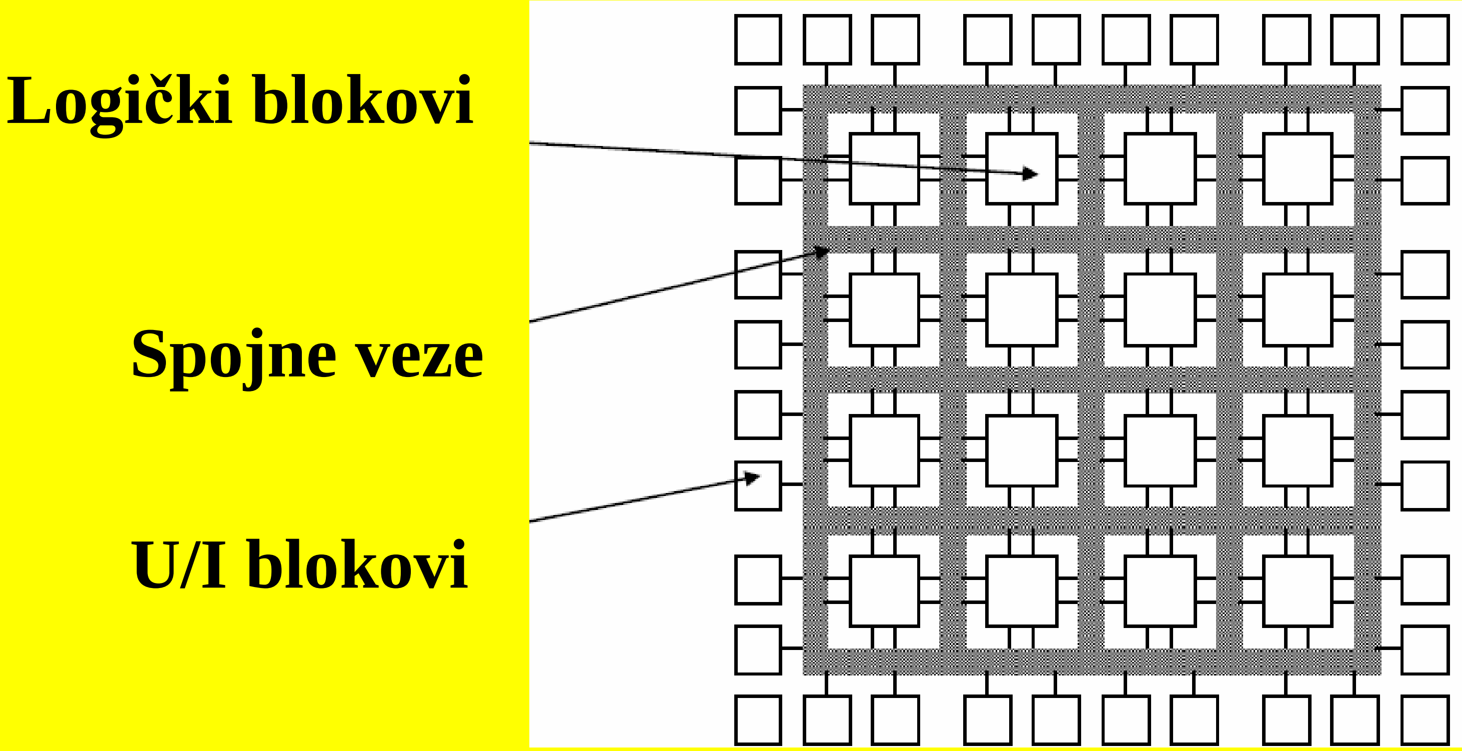
Fleksibilnost:

- **koncept makro ćelije,**
- **povratne veze**



MULTIPLEKSERSKO-DEMULTIPLEKSERSKA STRUKTURA

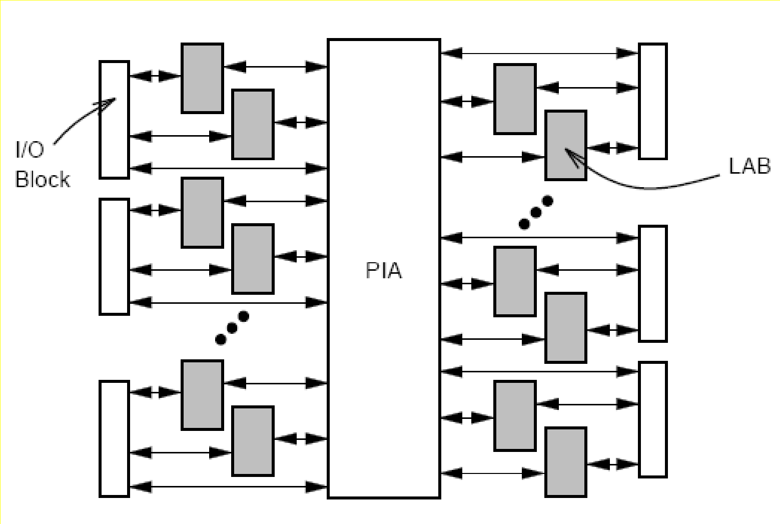
CPLD, FPGA, ASIC

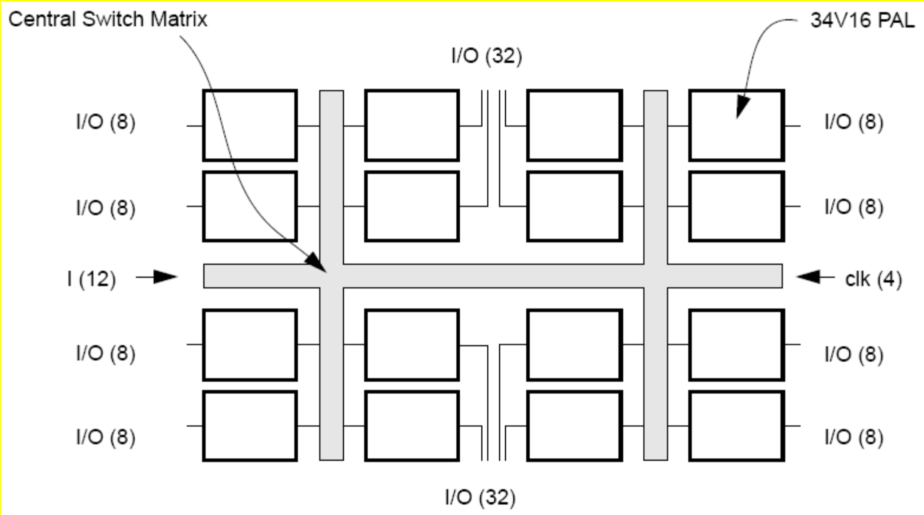


Hardware definition language VHDL, Verilog

Struktura CPLD uređaja

- CPLD (Complex PLD) – arhitektura
  - više SPLD povezanih sabirnicom
    - programabilne veze, problem povezivanja





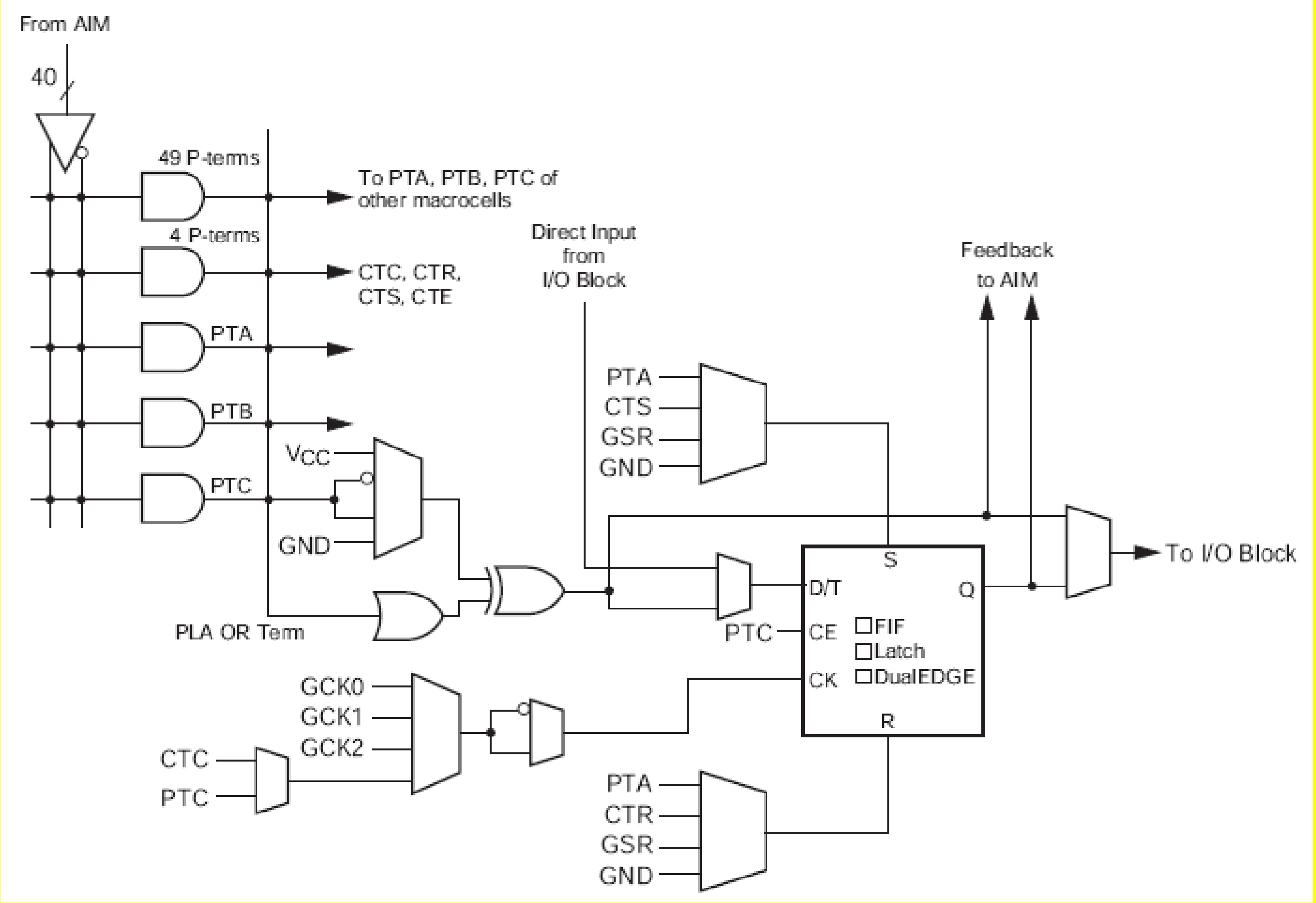
Struktura CPLD uređaja

- Tehnologije matrica

Name	Re-programmable	Volatile	Technology
Fuse	no	no	Bipolar
EPROM	yes out of circuit	no	UVCMOS
EEPROM	yes in circuit	no	EECMOS
SRAM	yes in circuit	yes	CMOS
Antifuse	no	no	CMOS+

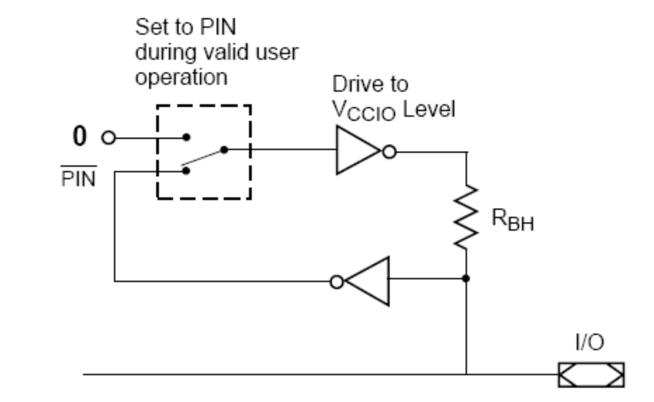
Struktura CPLD uređaja

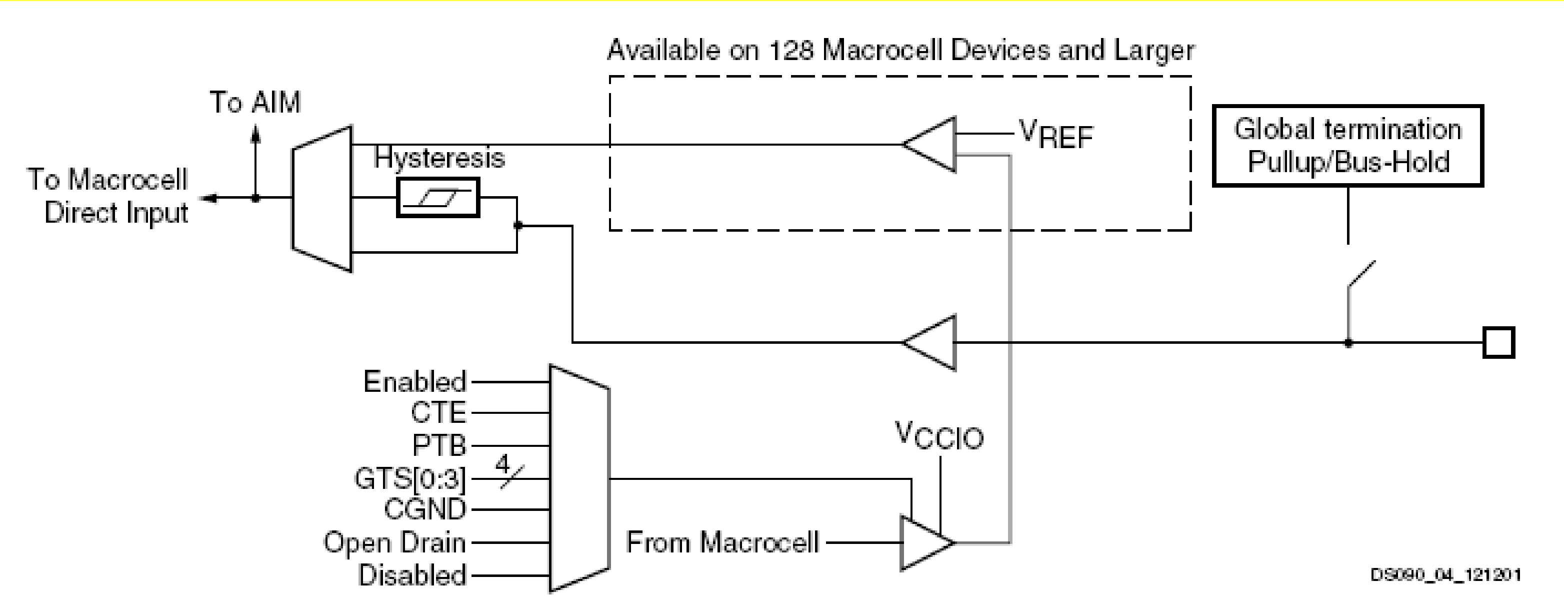
- Makro ćelije



Struktura CPLD uređaja

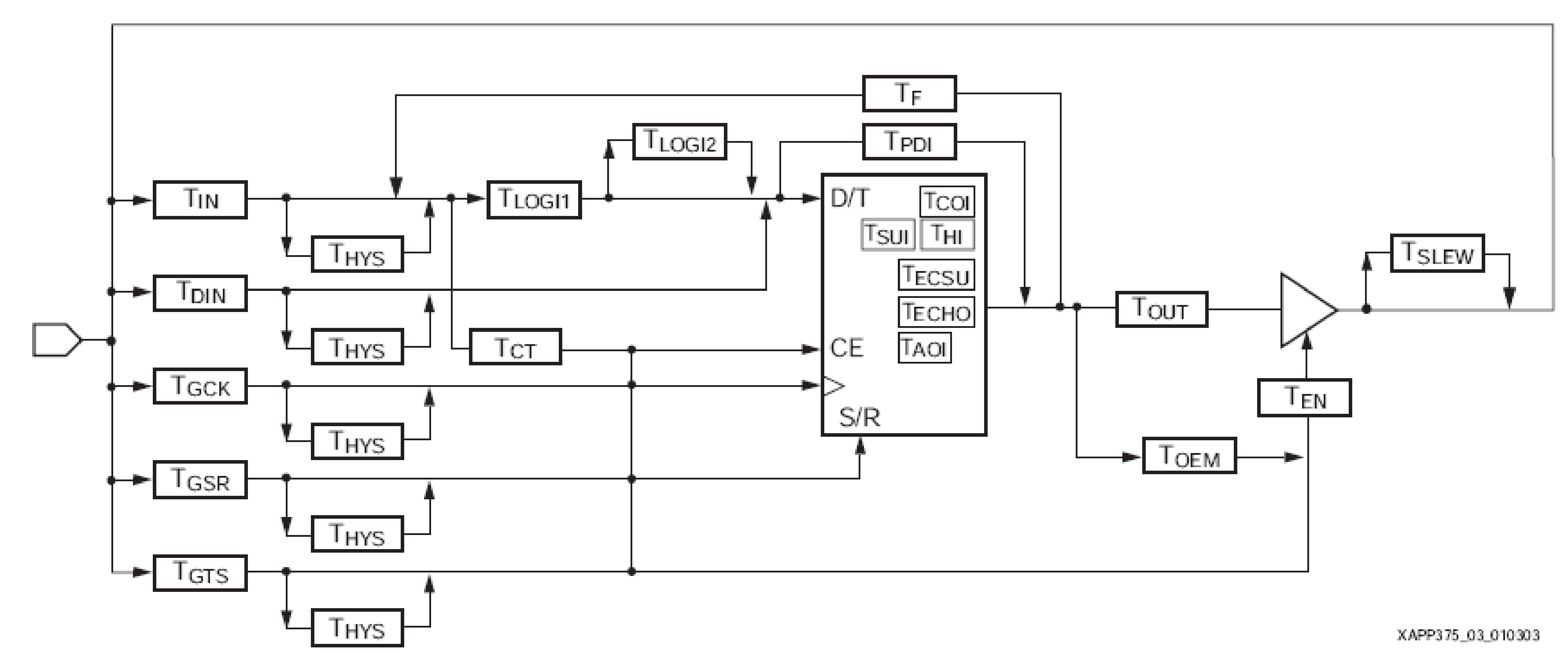
- U/I ćelije





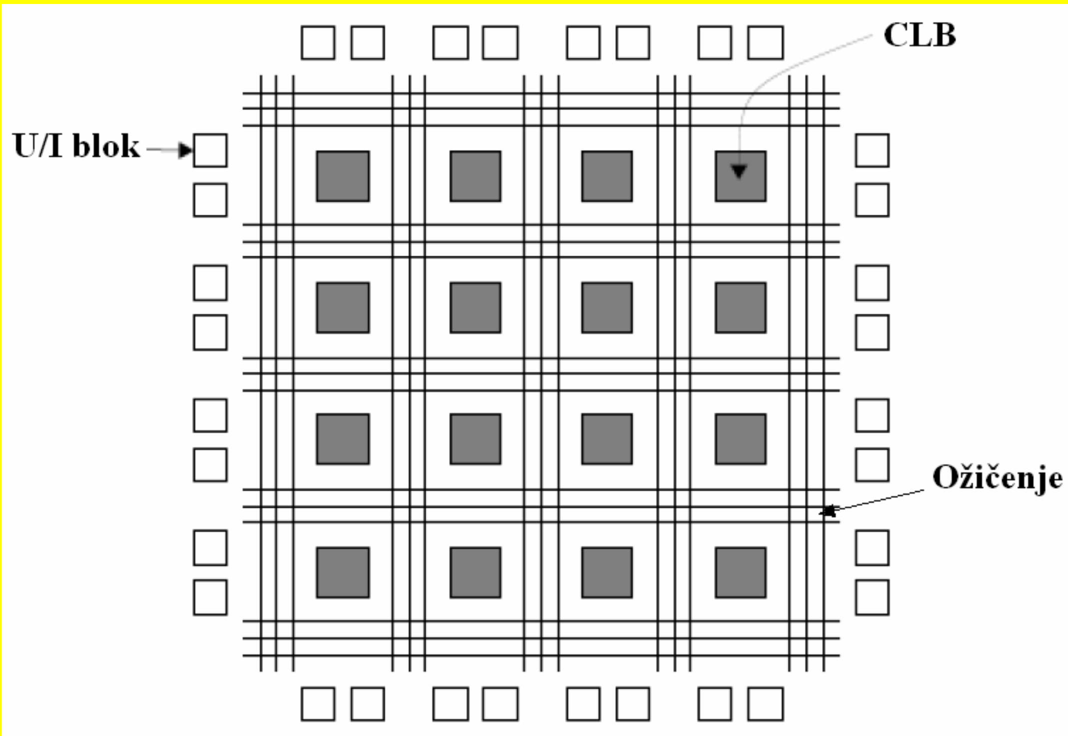
Struktura CPLD uređaja

- CPLD model kašnjenja:



Struktura FPGA uređaja

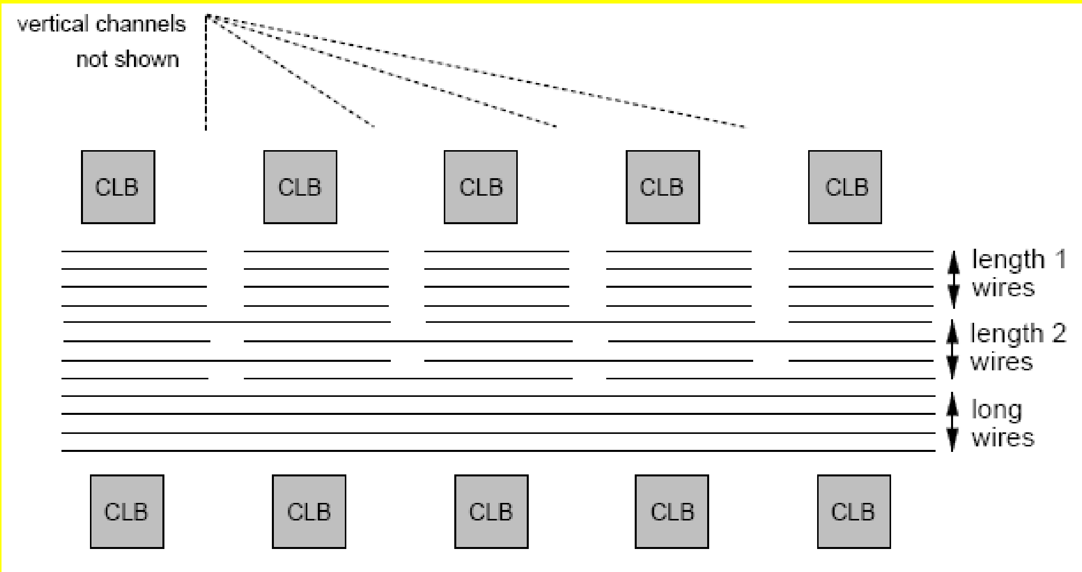
- FPGA (Field Programmable Gate Array)

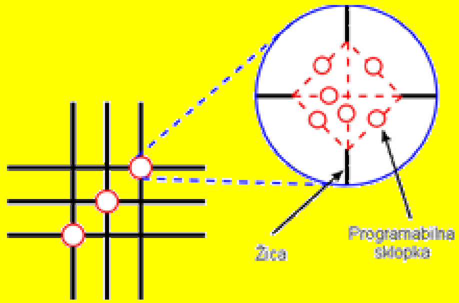


CLB – Complex Logic Block

Struktura FPGA uređaja

- FPGA (Field Programmable Gate Array)
  - povezivanje CLB magistralama





Struktura FPGA uređaja

- Načelna blok shema CLB
  - koncept programabilnih logičkih vrata
  - koristi se tablica istine (Lookup table)