1 Operaciones con matrices y determinantes

1.1 Encuentre la inversa de la siguiente matriz y verifique su resultado

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

1.1.1 Solución:

Encontramos los valores que satisfacen la siguiente ecuación

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_7 \\ a_2 & a_5 & a_8 \\ a_3 & a_6 & a_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dividamos la matriz para hacer los cálculos mas fácilmente

- Ec. 1 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
- Ec. 2 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
- Ec. 3 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Resolvamos el sistema de la Ec. 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calculamos $R_3 = -5R_1 + R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & -5 \end{array}\right)$$

Ahora $R_1 = -2R_2 + R_1$ y $R_3 = 4R_2 + R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

Ahora $R_2 = -4R_3 + R_2$ y $R_1 = 5R_3 + R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

Ahora ya tenemos

$$a_1 = -24$$

$$a_2 = 20$$

$$a_3 = -5$$

Resolvamos el sistema de la Ec. 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calculamos $R_3 = -5R_1 + R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -15 & 0 \end{array}\right)$$

Ahora $R_1 = -2R_2 + R_1$ y $R_3 = 4R_2 + R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Ahora $R_2 = -4R_3 + R_2$ y $R_1 = 5R_3 + R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 1 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Ahora ya tenemos

$$a_4 = 18$$

$$a_5 = -15$$

$$a_6 = 4$$

Resolvamos el sistema de la Ec. 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Calculamos $R_3 = -5R_1 + R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora $R_1 = -2R_2 + R_1$ y $R_3 = 4R_2 + R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora $R_2 = -4R_3 + R_2$ y $R_1 = 5R_3 + R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora ya tenemos

$$a_7 = 5$$

$$a_8 = -4$$

$$a_9 = 1$$

1.2 Demuestre la propiedad de que el determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes

1.2.1 Solucion

Calculemos el determinante del producto de dos matrices

$$Det[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}]$$

Primeros calculemos el producto

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

Ahora su determinante

$$Det\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} = (ae+bg)(cf+dh) - (ce+dg)(af+bh)$$

Ahora comparemos haciendo multiplicando el determinante de cada matriz

$$Det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * Det\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

Hagamos la primer determinante

$$Det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb$$

Ahora el segundo determinante

$$Det\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = eh - gf$$

Su producto seria

$$(ad-cb)(eh-gf)$$

Como podemos ver

$$(ad-cb)(eh-gf) \neq (ae+bg)(cf+dh) - (ce+dg)(af+bh)$$

Por lo que la propiedad no se cumple

2 Sistemas de ecuaciones lineales

2.1 Resuelva el siguiente sistema por el método de Gauss-Seidel

$$\begin{cases} 4x - y + z = 7 \\ -2x + 4y - 2z = 1 \\ x - y + 3z = 5 \end{cases}$$

2.1.1 Solución

Verificamos que la diagonal sea estrictamente dominante

$$|4| > -1 \quad , \quad |4| > 1 \quad , \quad |4| > -2 \quad , \quad |4| > 1$$

$$|4| > -2 \quad , \quad |4| > -1 \quad , \quad |4| > -1 \quad , \quad |4| > -2$$

$$|4| > 1 \quad , \quad |4| > -1 \quad , \quad |4| > 1 \quad , \quad |4| > -2$$

Despejamos para cada variable

$$x = \frac{7 + y - z}{4}$$
$$y = \frac{1 + 2x + 2z}{4}$$
$$z = \frac{5 - x + y}{3}$$

Ahora comenzamos con las iteraciones
Iteración 1. Comenzamos con

$$x^{(0)} = 0 \quad , \quad y^{(0)} = 0 \quad , \quad z^{(0)} = 0$$

$$x^{(1)} = \frac{7 + y^{(0)} - z^{(0)}}{4} = \frac{7 + 0 + 0}{4} = \frac{7}{4}$$

$$y^{(1)} = \frac{1 + 2x^{(1)} + 2z^{(0)}}{4} = \frac{1 + 2(\frac{7}{4}) + 2(0)}{4} = \frac{9}{8}$$

$$z^{(1)} = \frac{5 - x^{(1)} + y^{(1)}}{3} = \frac{5 - \frac{7}{4} + \frac{9}{8}}{3} = \frac{35}{24}$$

Iteración 2.

$$x^{(1)} = \frac{7}{4} \quad , \quad y^{(1)} = \frac{9}{8} \quad , \quad z^{(1)} = \frac{35}{24}$$

$$x^{(2)} = \frac{7 + y^{(1)} - z^{(1)}}{4} = \frac{7 + \frac{9}{8} - \frac{35}{24}}{4} = \frac{5}{3}$$

$$y^{(2)} = \frac{1 + 2x^{(2)} + 2z^{(1)}}{4} = \frac{1 + 2(\frac{5}{3}) + 2(\frac{35}{24})}{4} = \frac{29}{16}$$

$$z^{(2)} = \frac{5 - x^{(2)} + y^{(2)}}{3} = \frac{5 - \frac{5}{3} + \frac{29}{24}}{3} = \frac{109}{72}$$

Podemos dejar la aproximación como

$$x \approx \frac{5}{3} = 1.\overline{6}$$

$$y \approx \frac{29}{16} = 1.8125$$

$$z \approx \frac{109}{72} = 1.513\overline{8}$$

2.2 Encuentre todas las soluciones del sistema homogéneo

2.2.1 Solucion

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ 3x + 6y + 9z = 0 \end{cases}$$

Las ecuaciones no son Linealmente independientes, por lo que hay un numero de soluciones infinitas
Pero serán soluciones solo si (Despejando para x)

$$x = 2y - 3z$$

3 Espacios vectoriales y auto-valores/auto-vectores

3.1 Encuentre la base y la dimensión del subespacio generado por los vectores { (1,2,3),(2,4,6),(3,6,9), }

3.1.1 Solución

La base es $(1,2,3)$ ya que los demás vectores dependen de este mismo vector, su subespacio seria algo como $k(1,2,3)$ $k \in \mathbb{R}$

4 Aplicaciones en IA: reducción de dimensionalidad

4.1 Explique como el PCA (Analisis de Componentes Principales) utiliza el álgebra lineal para reducir dimensiones

El PCA utiliza el álgebra lineal representar datos en espacios de dimensiones menores, usando técnicas como el calculo de la matriz de varianza, la cual mide la relación lineal entre variables, descomposición en valores y vectores ademas de una representación matricial de los datos.

4.2 Analice el uso del álgebra lineal en el aprendizaje profundo con redes neuronales

Al igual que en el PCA, el algebra lineal es muy importante en el aprendizaje con redes neuronales ya que podemos optimizar y representar los datos de una forma mas optima, un ejemplo del uso del algebra lineal es las propias redes neuronales, las cuales consisten de capas de neuronas que realizan transformaciones lineales y activaciones no lineales.

4.3 Impacto de los Espacios Vectoriales en la Representación de Datos en Inteligencia Artificial

Su impacto en la IA es bastante fuerte, ya que gracias a los espacios vectoriales podemos representar y unificar diferentes tipos de información, como el texto, las imágenes, el audio, etc. en una misma estructura matemática.