3 Grafičke primitive

3.1 2D - DVODIMENZIJSKE PRIMITIVE

– 2D TOČKE

- Homogena koordinata (proizvoljna a obično je 1)
  - sjecište paralelnih pravaca (točka u $\propto$ može se zapisati)
  - jedinstven zapis osnovnih geometrijskih transformacija
  - dodatne mogućnosti kod parametarskog prikaza krivulja

V=(x, y) $\rightarrow$ **X**= (x', y', h) ili **X**= (x_1, x_2, x_3)

$$\rightarrow \quad x = \frac{x_1}{x_3} \qquad y = \frac{x_2}{x_3}$$

$$\leftarrow \quad x_1 = x\, x_3 \qquad x_2 = y\, x_3$$

Točka u $\propto$ je ($\times$, $\times$, 0) . Kombinacija (0, 0, 0) nije dozvoljena.

Npr. (2, 5) $\rightarrow$ (2, 5, 1) preslikavanje iz *n* prostora u *n*+1

$\rightarrow$ (4, 10, 2)

(2, 4) $\leftarrow$ (4, 8, 2)

– 2D PRAVAC

- implicitni oblik $$a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$
- uvođenje homogene koordinate $$a \cdot \frac{x_1}{x_3} + b \cdot \frac{x_2}{x_3} + c = 0$$
- homogena jednadžba $$a\,x_1 + b\,x_2 + cx_3 = 0$$
- matrični zapis

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{G} = a\,x_1 + b\,x_2 + cx_3 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \quad \text{vektor normale}$$
$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix} \quad \text{vektor tangente}$$

- po dogovoru uvodimo:

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{G} \begin{cases} > 0, & \mathbf{X} \text{ je "iznad" pravca} \\ = 0, & \mathbf{X} \text{ je na pravcu} \\ < 0, & \mathbf{X} \text{ je "ispod" pravca} \end{cases}$$

♣ dvije točke određuju pravac (vektorski produkt)

$$\mathbf{X}_1 = (x_1 \quad y_1 \quad h_1)$$
$$\mathbf{X}_2 = (x_2 \quad y_2 \quad h_2)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & h_1 \\ x_2 & y_2 & h_2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 h_2 - y_2 h_1 \\ -(x_1 h_2 - x_2 h_1) \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{G}$$

♣ dva pravca sijeku se u točki (vektorski produkt)

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

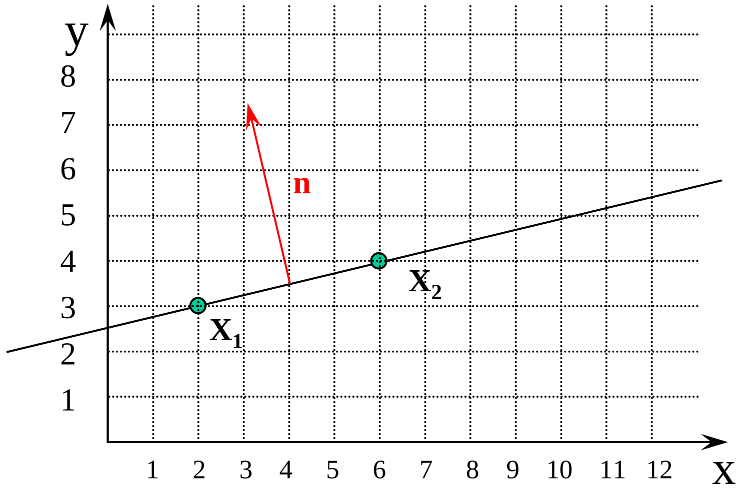
ako je $h = 0 \Rightarrow \mathbf{G}_1 \parallel \mathbf{G}_2$ jer se sijeku u $\propto$

$$x = \frac{x_1}{x_3} = \frac{x_1}{0} \qquad y = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_2}{0}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{G}_1^\tau \times \mathbf{G}_2^\tau = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}^\tau = \left(\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 c_2 - b_2 c_1 \\ -(a_1 c_2 - a_2 c_1) \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} \right)^\tau = \begin{bmatrix} x \\ y \\ h \end{bmatrix}^\tau = \mathbf{X}^\tau$$

NPR:

$$\mathbf{X}_1 = (2 \quad 3 \quad 1)$$
$$\mathbf{X}_2 = (6 \quad 4 \quad 1)$$



$$\mathbf{G} = \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3-4 \\ -(2-6) \\ 8-18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \end{bmatrix}$ vektor normale

$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix}$ vektor tangente

$$-x_1 + 4x_2 - 10x_3 = 0$$

zamjena redoslijeda točaka utječe na orijentaciju pravca

$$\mathbf{X}_1 = (6 \quad 9 \quad 3)$$
$$\mathbf{X}_2 = (24 \quad 16 \quad 4)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 9 & 3 \\ 24 & 16 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -12 \\ 48 \\ -120 \end{bmatrix}$$

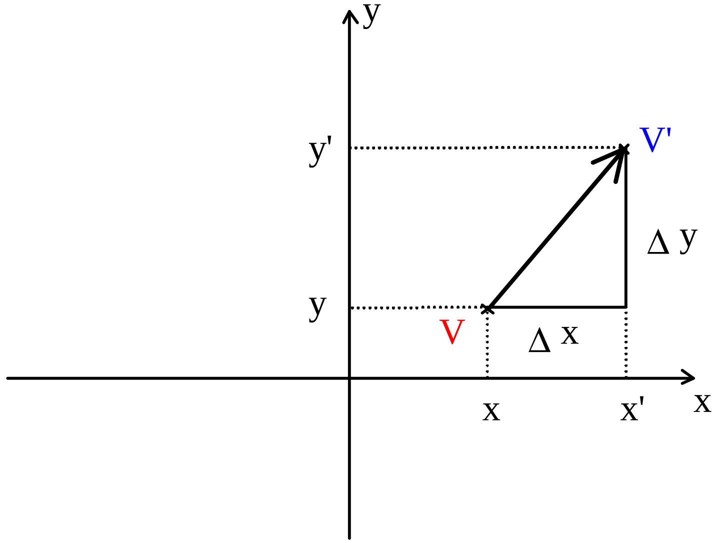
2D TRANSFORMACIJE

- TRANSLACIJA (POMAK) T- matrica translacija

$$x' = x + \Delta x$$

$$y' = y + \Delta y$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \Delta x & \Delta y & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{V'} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{T}$$

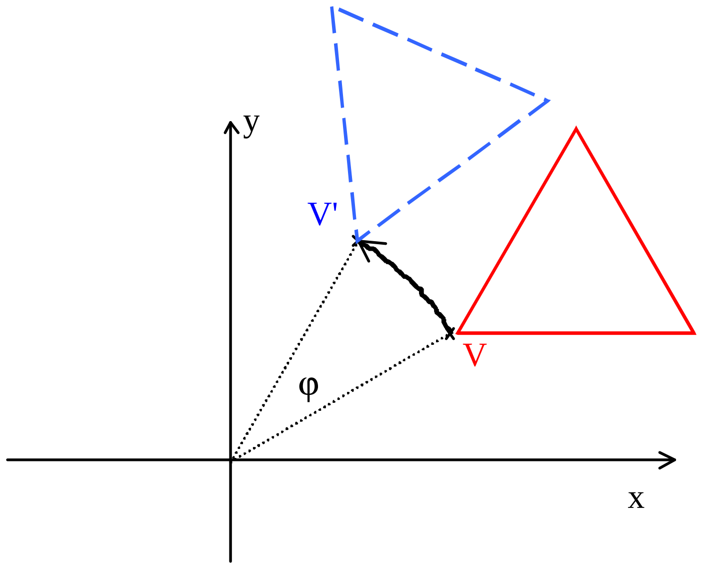


- ROTACIJA oko ishodišta za kut φ suprotno smjeru kazaljke na satu

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi$$

$$y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{V'} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$$



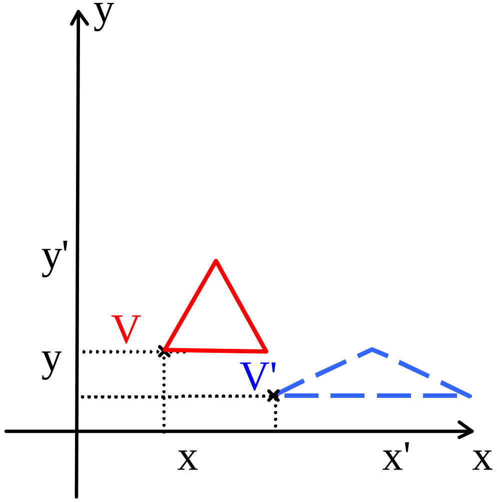
važno je obratiti pažnju da se radi o rotaciji oko ishodišta

- SKALIRANJE (promjena mjerila)

$$x' = x\,s_x \qquad y' = y\,s_y$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{V}' = \mathbf{V} \cdot \mathbf{S}$$

negativan predznak $-s_x$(ili $-s_y$) daje zrcaljenje oko koordinatnih osi x (ili y)



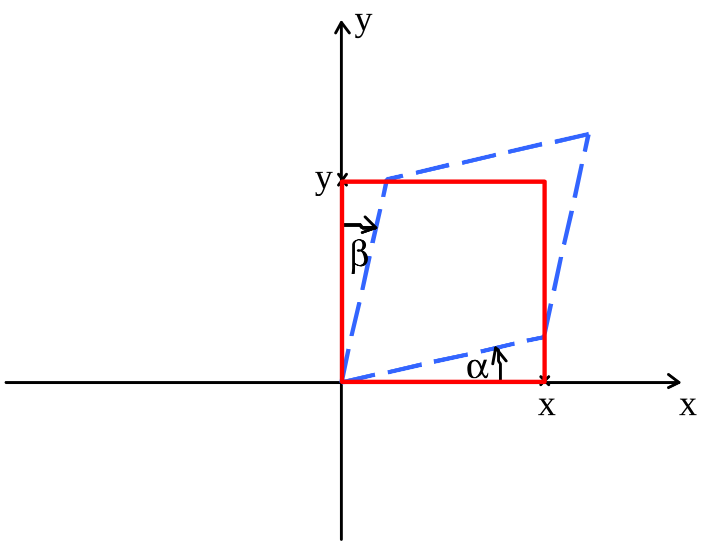
$$\begin{bmatrix} x' & y' & h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{daje isti učinak kao} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

- SMIK - uzdužne transformacije

$$x' = x + y \cdot tg\beta$$
$$y' = y + x \cdot tg\alpha$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & tg\alpha & 0 \\ tg\beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



http://www.hdm-stuttgart.de/~rk020/Files/Computeranimation/affine_transformation/applet/affine_transform_applet.html
http://www.vis.uni-stuttgart.de/~kraus/LiveGraphics3D/cagd/chap2fig4.html

- INVERZNE TRANSFORMACIJE
  - translacija - inverz matrice translacije odgovara inverznoj transformaciji tj. pomaku u suprotnom smjeru

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \Delta x & \Delta y & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\Delta x & -\Delta y & 1 \end{bmatrix}$$

  - rotacija - inverzna matrice rotacije odgovara inverznoj transformaciji tj. rotaciji u suprotnom smjeru

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\varphi) & \sin(-\varphi) & 0 \\ -\sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - skaliranje - inverz matrice skaliranja odgovara
inverznoj transformaciji
tj. povećavanje odgovara smanjivanju

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- TRANSFORMACIJA PRAVCA
  - transformacija točke **V** u **V'** matricom **H** je

$$\mathbf{V'} = \mathbf{V}\,\mathbf{H}$$

  - pravac **G** transformiramo u **G'** inverznom matricom **H**

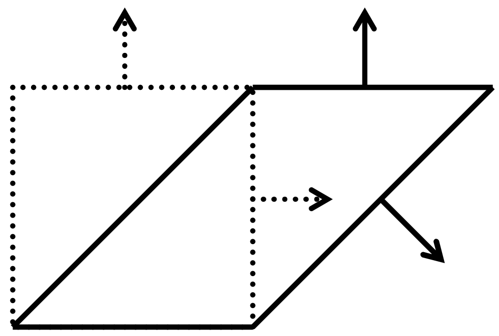
$$\mathbf{G'} = \mathbf{H}^{-1}\,\mathbf{G}$$

neformalni dokaz:

neka je $\mathbf{V}\,\mathbf{G} = 0 \Rightarrow \mathbf{V'}\,\mathbf{G'} = 0$ tj. Ako točka **V** leži na pravcu **G**, slika točke **V'** leži na slici pravca **G'.**

Ako je $\mathbf{V}\,\mathbf{G} = 0 \Rightarrow \mathbf{V}\,\mathbf{H}\,\mathbf{H}^{-1}\,\mathbf{G} = 0 \Rightarrow \mathbf{V'}\,\mathbf{H}^{-1}\,\mathbf{G} = 0 \Rightarrow \mathbf{G'} = \mathbf{H}^{-1}\,\mathbf{G}$

- TRANSFORMACIJA NORMALE
  - treba biti posebno pažljiv - $\mathbf{H}^{-1}$



- VAŽNO
  - operacije su sadržane u *podacima* (matricama),

    a ne u instrukcijama
  - zadnji stupac u navedenim matricama je:

    $$\begin{bmatrix} \times & \times & 0 \\ \times & \times & 0 \\ \times & \times & 1 \end{bmatrix}$$

    što znači da su transformacije AFINE

    t.j. čuvaju *paralelnost* pravaca.
  - transformacije translacije, rotacije i skaliranja (s_x=s_y) čine također ortogonalno preslikavanje

    tj. čuvaju *kuteve*
  - kod korištenja više uzastopnih transformacija bitan je ***redoslijed*** tih transformacija (zato što množenje matrica nije komutativno)

*** http://www.cs.princeton.edu/~min/cs426/jar/transform.html

** http://www.cs.rit.edu/~icss571/clipTrans/transformation.html

***http://www.cs.brown.edu/exploratories/freeSoftware/repository/edu/brown/cs/exploratories/applets/transformationGame/transformation_game_java_browser.html

3.2 3D TRODIMENZIJSKE PRIMITIVE

– 3D TOČKE

- Homogena koordinata (proizvoljna a obično je 1)

  $\mathbf{V}=(x, y, z) \rightarrow \mathbf{X}=(x', y', z', h)$ ili $\mathbf{X}=(x_1, x_2, x_3, x_4)$

  $$\rightarrow \quad x=\frac{x_1}{x_4} \qquad y=\frac{x_2}{x_4} \qquad z=\frac{x_3}{x_4}$$

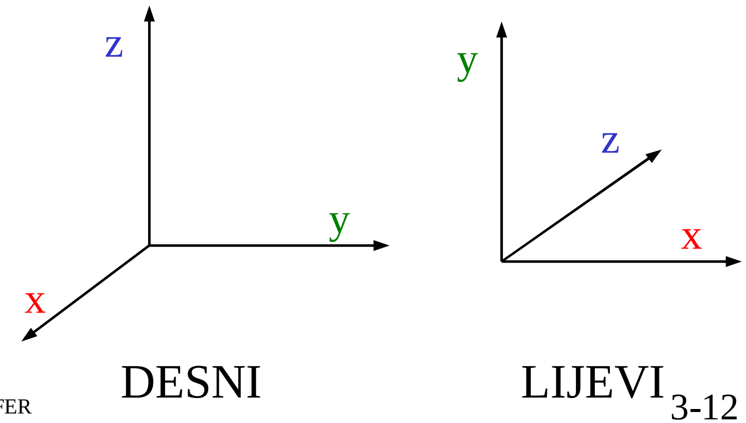
  $$\leftarrow \quad x_1 = x\,x_4 \qquad x_2 = y\,x_4 \qquad x_3 = z\,x_4$$

  Točka u $\propto$ je $(\times, \times, \times, 0)$. Kombinacija (0, 0, 0, 0) nije dozvoljena.

– KOORDINATNI SUSTAV

- Desni (lijevi) koordinatni sustav: kada se gleda iz pozitivnog smjera osi prema ishodištu rotacija za 90° suprotno smjeru (u smjeru) kazaljke na satu daje zakretanje osi.

Gledano iz:	daje zakretanje:
• x	y→z
• y	z→x
• z	x→y



– 3D PRAVAC

- Parametarski prikaz pravca

  – Proširenje eksplicitnog ili implicitnog oblika jednadžbe pravca iz dvodimenzijskog prostora za još jednu koordinatu neće dati pravac u trodimenzijskom prostoru.

$$\begin{aligned} x_1 &= at + x_0 \\ x_2 &= bt + y_0 \\ x_3 &= ct + z_0 \\ x_4 &= dt + h_0 \end{aligned} \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ x_0 & y_0 & z_0 & h_0 \end{bmatrix} = \mathbf{T}\mathbf{L}$$

  – L je karakteristična matrica pravca
  – t je parametar

♣ pravac je određen s dvije točke

$$\mathbf{V}_0 = (x_0 \quad y_0 \quad z_0 \quad h_0), \qquad t_0 = 0$$
$$\mathbf{V}_1 = (x_1 \quad y_1 \quad z_1 \quad h_1), \qquad t_1 = 1$$

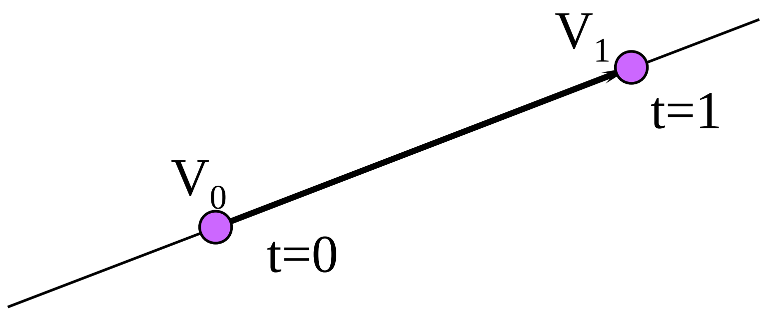
dvije točke uvrstimo u parametarsku jednadžbu pravca:

$$\mathbf{V} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4) = [t \quad 1]\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ x_0 & y_0 & z_0 & h_0 \end{bmatrix} = \mathbf{TL}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_0 & 1 \\ t_1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{L} \;\Rightarrow\; \mathbf{L} = \begin{bmatrix} t_0 & 1 \\ t_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{V} = \mathbf{TL} = [t \quad 1]\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_0 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\mathbf{V} = (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0)\,t + \mathbf{V}_0}$$



– ovaj oblik vrijedi i u 2D prostoru
– linearna interpolacija
http://www.cs.technion.ac.il/~cs234325/Applets/NewApplets/experiments/interpolation.html

– RAVNINA

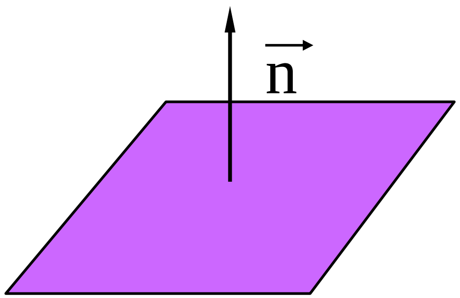
- Jednadžba ravnine u implicitnom obliku

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0 \qquad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \mathbf{VR} = 0$$

$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ normala na ravninu određena je vektorom $\vec{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

- po dogovoru uvodimo:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \begin{cases} > 0, & \mathbf{V} \text{ je "iznad" ravnine } \mathbf{R} \\ = 0, & \mathbf{V} \text{ je na ravnini } \mathbf{R} \\ < 0, & \mathbf{V} \text{ je "ispod" ravnine } \mathbf{R} \end{cases}$$



– RAVNINA

- Jednadžba ravnine u parametarskom obliku

$$x_1 = u\,a_1 + v\,b_1 + c_1$$

$$x_2 = u\,a_2 + v\,b_2 + c_2$$

$$x_3 = u\,a_3 + v\,b_3 + c_3$$

$$x_4 = u\,a_4 + v\,b_4 + c_4$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} u & v & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} u & v & 1 \end{bmatrix} \mathbf{R}$$

– R je karakteristična matrica ravnine

– *u, v* su parametri koji određuju točku u ravnini

♣ ravnina je određena s tri točke (koje nisu kolinearne)

$$\mathbf{V}_0 = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & h_0 \end{pmatrix}, \quad u_0 = 0,\ v_0 = 0,$$
$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & h_1 \end{pmatrix}, \quad u_1 = 1,\ v_1 = 0,$$
$$\mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 & z_2 & h_2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = 0,\ v_2 = 1.$$

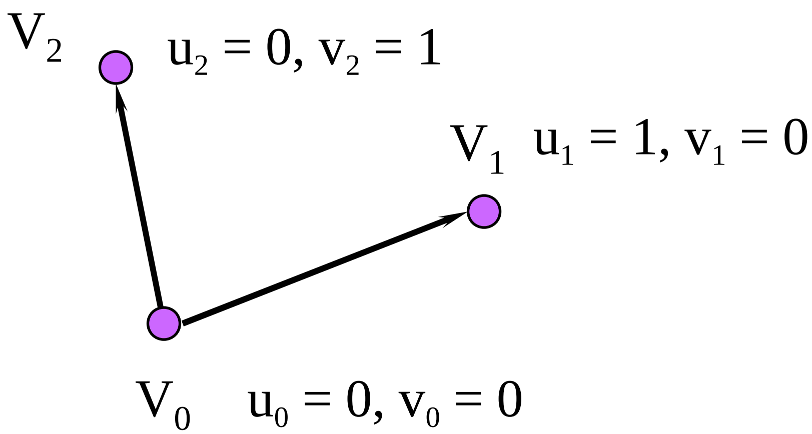
tri točke uvrstimo u parametarsku jednadžbu ravnine:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} u & v & 1 \end{bmatrix} \mathbf{R}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} u_0 & v_0 & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_0 \end{bmatrix}$$

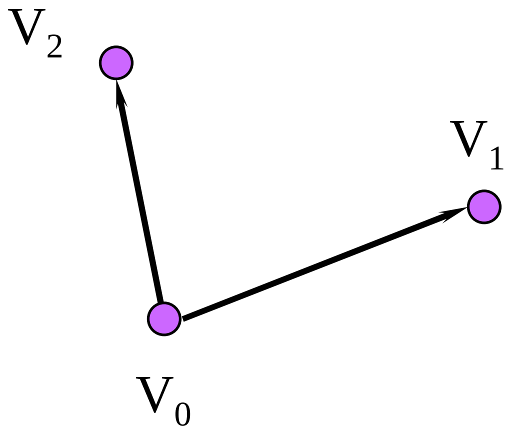
$$\boxed{\mathbf{V} = \begin{bmatrix} u & v & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_0 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\mathbf{V} = \left(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0\right) u + \left(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_0\right) v + \mathbf{V}_0}$$



♣ normala na ravninu

$$\mathbf{n} = (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0) \times (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_0)$$



♣ površina trokuta

$$P_\Delta = \frac{1}{2} \left\| (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0) \times (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_0) \right\|$$

Npr. V_0 = (2, 0, 0) V_1 = (0, 4, 0) V_2 = (0, 0, 3) $\Longrightarrow$ V_0V_1 = (-2, 4, 0), V_0V_2 = (-2, 0, 3)

$$P_\Delta = \frac{1}{2} \left\| (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0) \times (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_0) \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} i & j & k \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right\|$$

$$= \frac{1}{2} \left\| 12\mathrm{i} + 6\mathrm{j} + 8\mathrm{k} \right\| = \left\| 6\mathrm{i} + 3\mathrm{j} + 4\mathrm{k} \right\| = \sqrt{61}$$

♣ jedinična normala na ravninu

$$\mathbf{n}_1 = \frac{(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0) \times (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_0)}{2P_\Delta} = \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|}$$

http://www.phy.syr.edu/courses/java-suite/crosspro.html

http://www.slu.edu/classes/maymk/SketchpadApplets/ProjectionDotCrossProduct.html

♣ presjek tri ravnine je točka (koje nisu koplanarne)

$$\mathbf{V}\,\mathbf{R}_0 = 0,$$
$$\mathbf{V}\,\mathbf{R}_1 = 0,$$
$$\mathbf{V}\,\mathbf{R}_2 = 0.$$

točke leži u sve tri ravnine.

$$\mathbf{V}\begin{bmatrix} & & & 0 \\ [\mathbf{R}_0] & [\mathbf{R}_1] & [\mathbf{R}_2] & 0 \\ & & & 0 \\ & & & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}\,\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}\mathbf{Q}^{-1}$$

♣ presjek dvije ravnine je pravac (koje nisu koplanarne)

3D TRANSFORMACIJE

- TRANSLACIJA (POMAK)   T- matrica translacija

$$x' = x + \Delta x$$

$$y' = y + \Delta y$$

$$z' = z + \Delta z$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \Delta x & \Delta y & \Delta z & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{V}' = \mathbf{V} \cdot \mathbf{T}$$

- ROTACIJA
  - oko x osi za kut α suprotno smjeru kazaljke na satu

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - oko y osi za kut β suprotno smjeru kazaljke na satu

$$\mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - oko z osi za kut γ suprotno smjeru kazaljke na satu

$$\mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- SKALIRANJE (promjena mjerila)

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{V}' = \mathbf{V} \cdot \mathbf{S}$$

- SMIK (uzdužne deformacije) TRANSFORMATION

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & tg\alpha & tg\alpha & 0 \\ tg\beta & 1 & tg\beta & 0 \\ tg\chi & tg\chi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{V}' = \mathbf{V} \cdot \mathbf{D}$$

- INVERZNE TRANSFORMACIJE

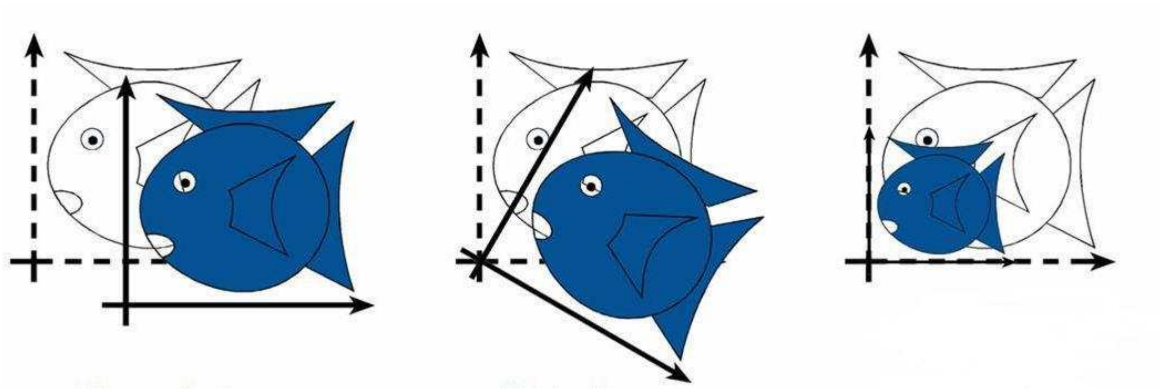
  – translacija - inverzna matrice translacije odgovara inverznoj transformaciji tj. pomaku u suprotnom smjeru, odnosno mijenja se **predznak pomaka** duž pojedinih osi

  – rotacija – inverzna matrice rotacije odgovara inverznoj transformaciji tj. rotaciji u suprotnom smjeru, odnosno mijenja se **predznak kuta** rotacije

  – skaliranje - inverzna matrice skaliranja odgovara inverznoj transformaciji tj. povećavanje odgovara smanjivanju, odnosno mijenja se faktor skaliranja u **recipročnu** vrijednost

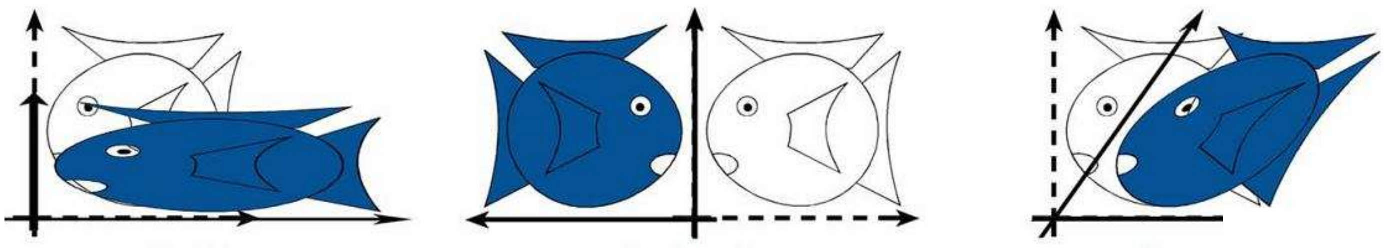
PODJELA TRANSFORMACIJA

- transformacije čvrstog tijela (engl. rigid body) - čuva *udaljenosti*
  - translacija, rotacija
- transformacije sličnosti (engl. similarity) - čuva *kutove*
  - jednoliko skaliranje,

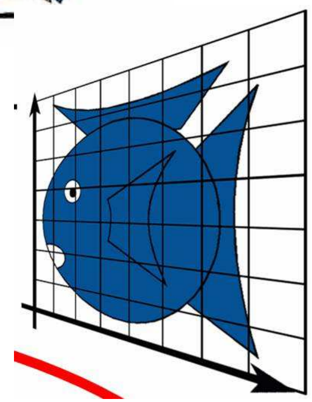


PODJELA TRANSFORMACIJA

- Afine - čuva *paralelnost* pravaca
  - nejednoliko skaliranje $s_x \neq s_y$,
  - zrcaljenje
  - smik – uzdužne transformacije



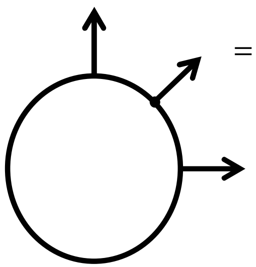
- projektivne - *linije* ostaju linije
  - perspektivna projekcija



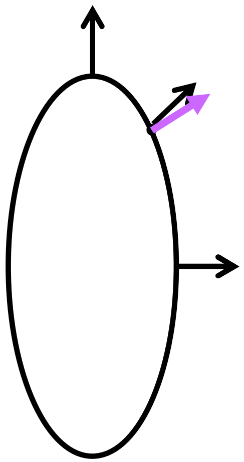
- nelinearne - linije postaju krivulje
  - uvijanje
    http://www.cs.brown.edu/exploratories/freeSoftware/repository/edu/brown/cs/exploratories/applets/coordinateTransformations/coordinate_transformations_java_browser.html

$$L(P+Q)=L(P)+L(Q)$$
$$L(\alpha P)=\alpha L(P)$$

* kod nerigidnih transformacija treba paziti na normale i njihovu transformaciju
Npr. skaliranje po *y* osi za 2 utjecat će na normalu,
ako smo ju prije izračunali mort ćemo ju transformirati sa $\mathbf{S}^{-1}$
(u 3D posebno treba paziti u kojem prostoru koristimo normale)



$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{n}' = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 \end{pmatrix} - \text{nije normiran}$$

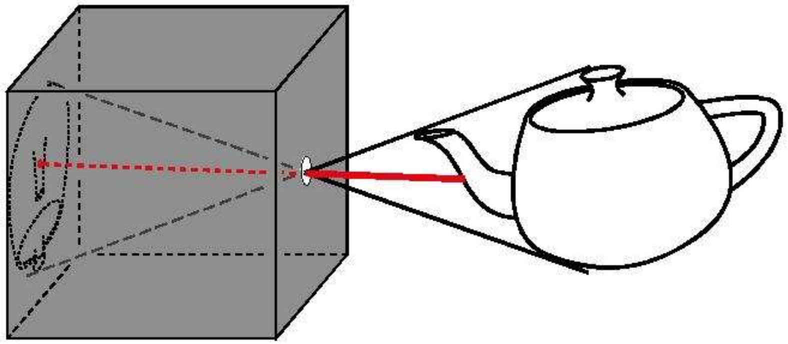
za čvrsta tijela vrijedi:

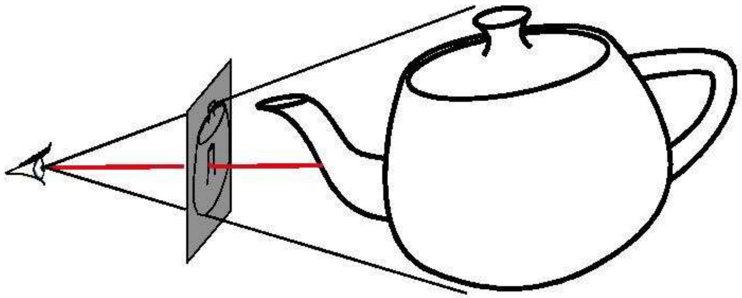
$$(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2)^{-1} = \mathbf{S}_2^{-1} \cdot \mathbf{S}_1^{-1}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

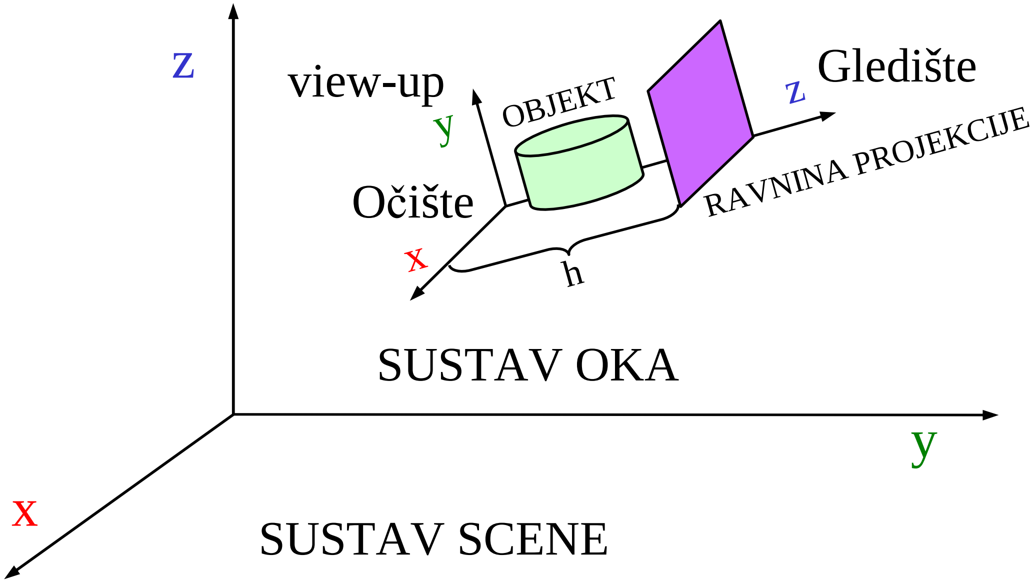
3.3 TRANSFORMACIJA POGLEDA I PROJEKCIJE

– projekcija - kamera



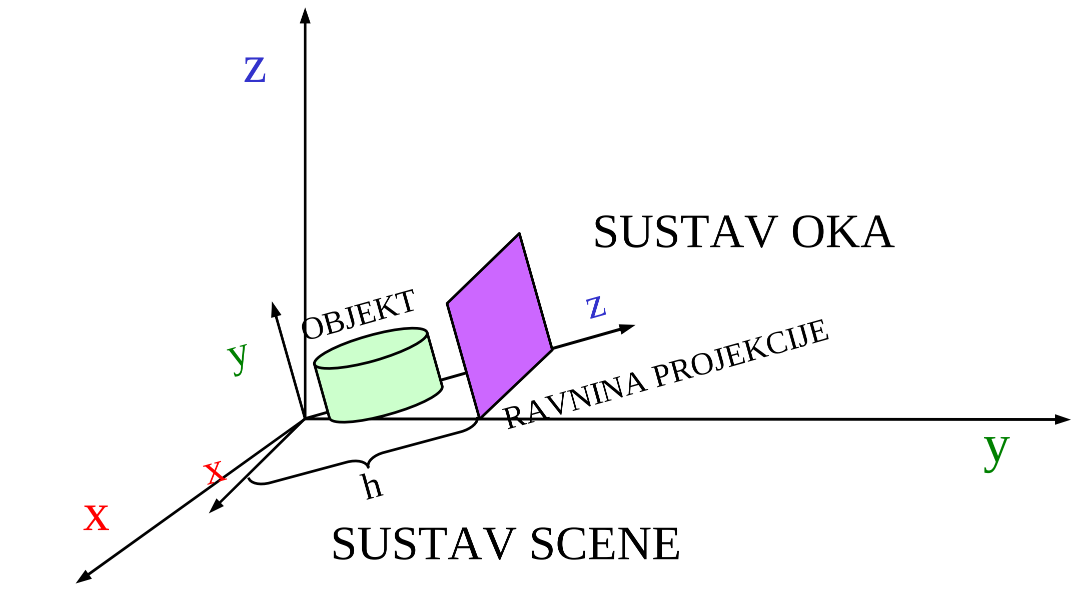


TRANSFORMACIJA POGLEDA

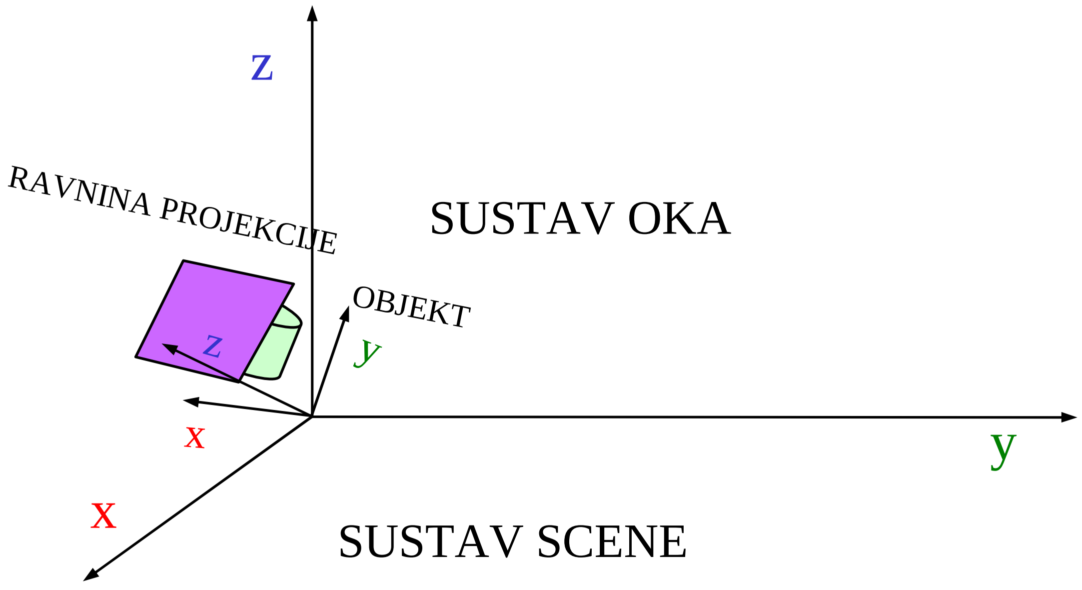


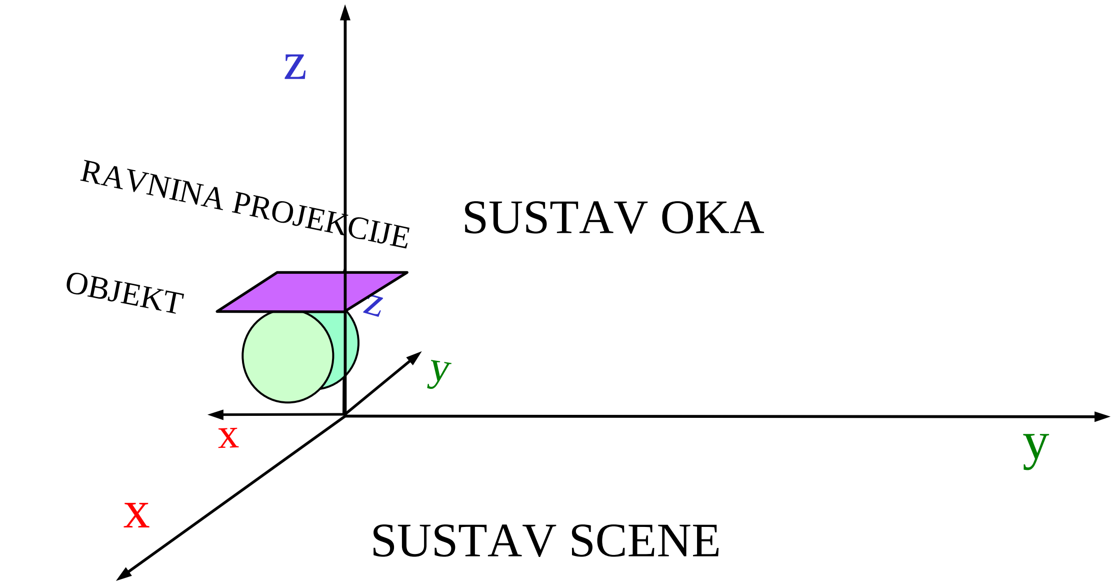
TRANSLACIJA
ROTACIJA OKO Z-osi
ROTACIJA OKO Y-osi
ZRCALJENJE

TRANSLACIJA

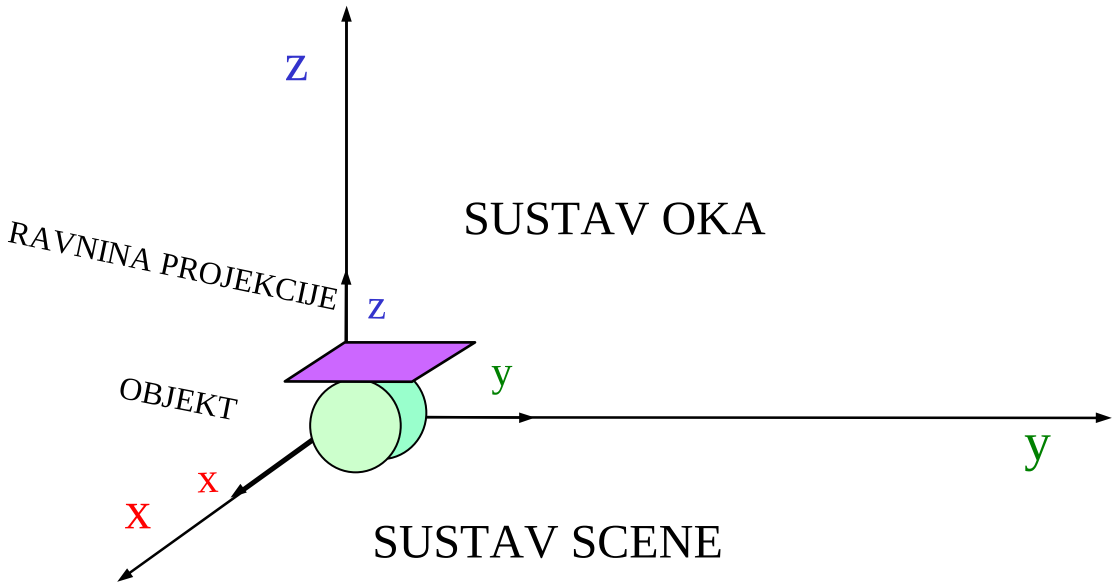


ROTACIJA OKO Z-osi

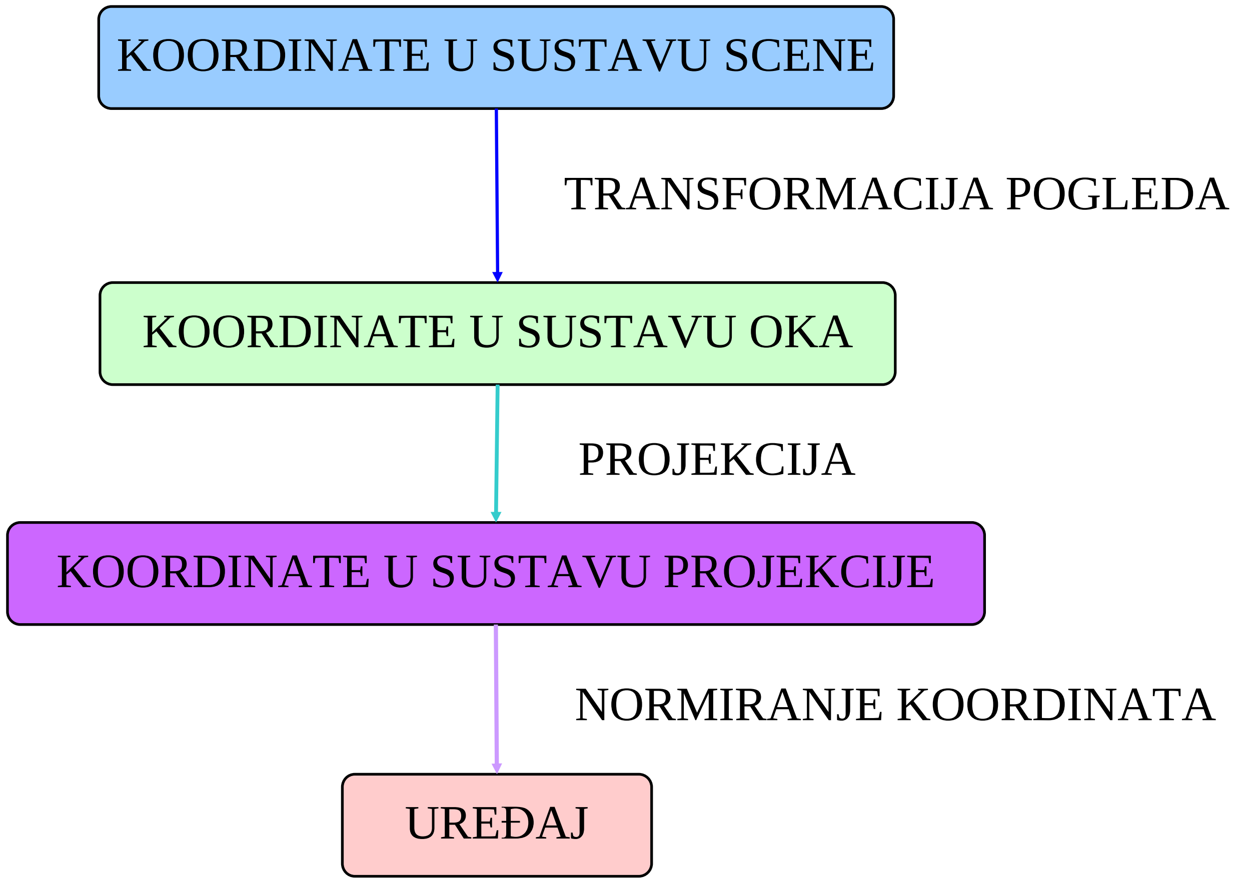




ROTACIJA OKO Y-osi

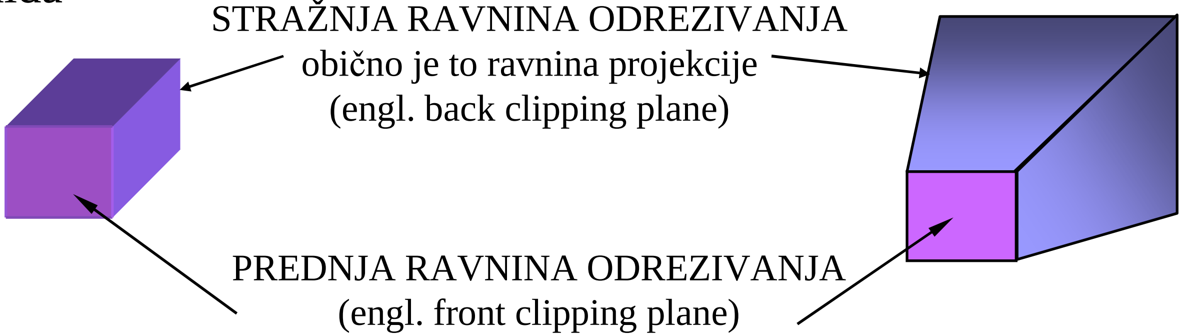


POKLAPANJE osi

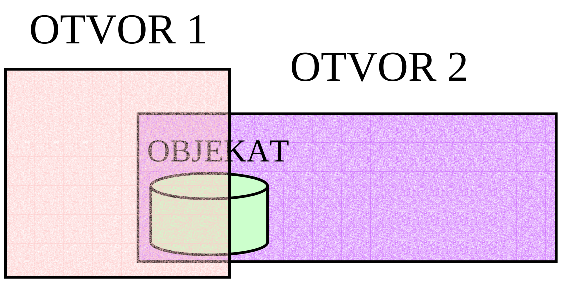

KOORDINATE U SUSTAVU SCENE
TRANSFORMACIJA POGLEDA
KOORDINATE U SUSTAVU OKA
PROJEKCIJA
KOORDINATE U SUSTAVU PROJEKCIJE
NORMIRANJE KOORDINATA
UREĐAJ

- TRANSFORMACIJA POGLEDA
  - postupak kojim koordinatni sustav očišta transformiramo u koordinatni sustav scene kako bi mogli primijeniti transformaciju projekcije
  - ishodište koordinatnog sustava oka - može biti centar projekcije
  - h - udaljenost očišta od ravnine projekcije
  - VIEW UP vektor je vektor okomit na z-os i određuje rotaciju oko vlastite osi promatrača

- ODREZIVANJE OBZIROM NA VOLUMEN POGLEDA (frustum)
  - kvadar
  - piramida



- PROJEKCIJA
  - paralelna http://www.cosc.canterbury.ac.nz/mukundan/cogr/Projns.html
    - ortografska (3 ortogonalne)
    - kosa
  - perspektivna
  - http://olli.informatik.uni-oldenburg.de/Grafiti3/grafitiNav/flow9/page3.html#Ref_ID215
  - http://www.cs.princeton.edu/~min/cs426/jar/threed.html
- NORMIRANJE KOORDINATA U SUSTAVU PROJEKCIJE
  - koordinate u sustavu otvora (engl. viewport)
  - koordinate obzirom na granice prozora
  - normirane koordinate u sustavu uređaja NCD



PROJEKCIJE

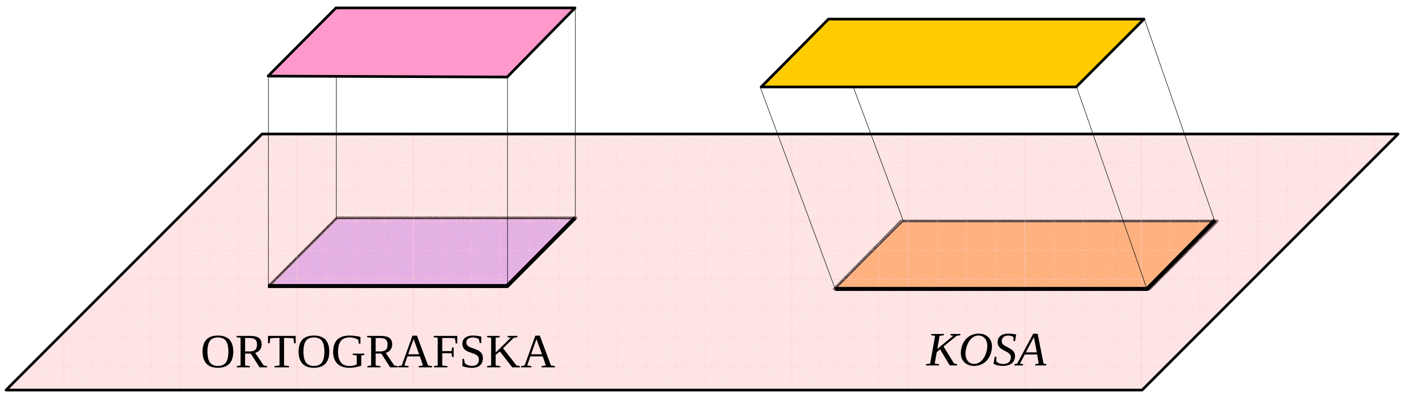
projektori - zrake kojima se obavlja projekcija

– PARALELNA PROJEKCIJA - projektori su paralelni

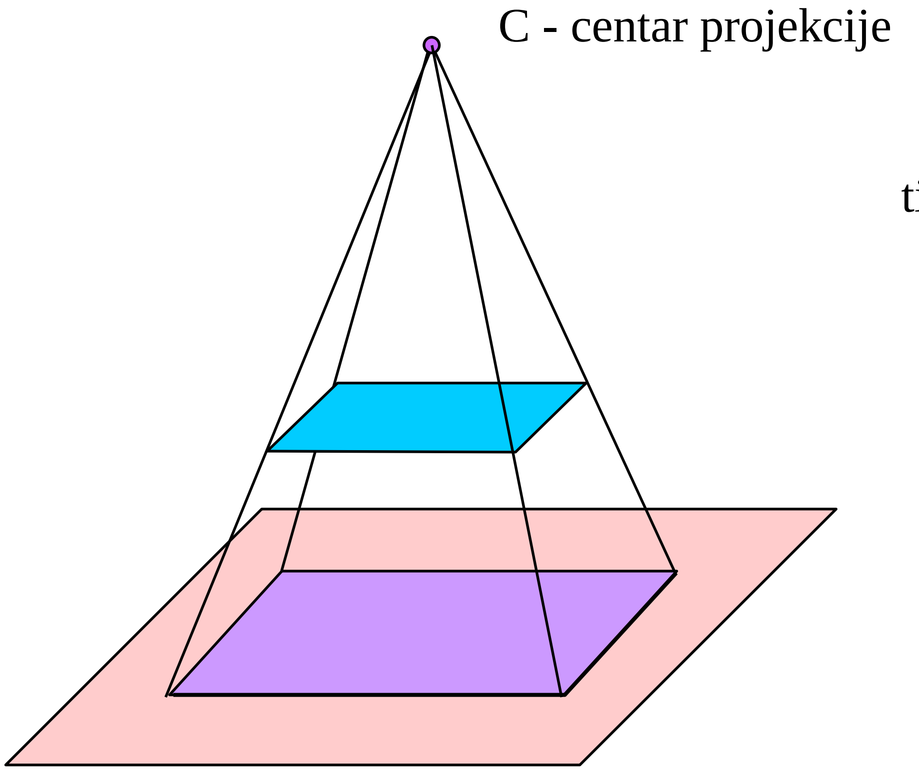
- ortografska - projektori su okomiti na podlogu
  - 3 ortogonalne projekcije na ravnine xy, xz, yz. Npr. xy ravnina.

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- kose - projektori su koso prema podlozi



– PERSPEKTIVNA PROJEKCIJA - projektori idu iz centra projekcije kroz vrhove objekta

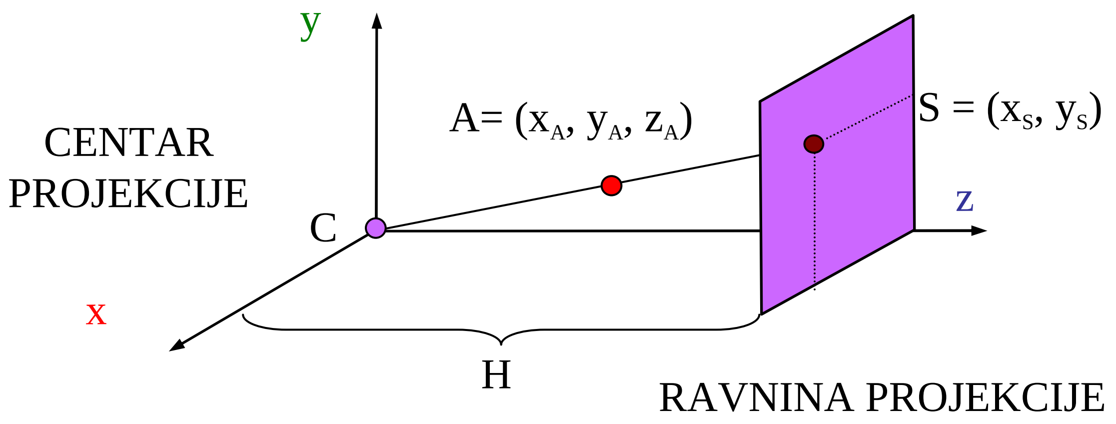


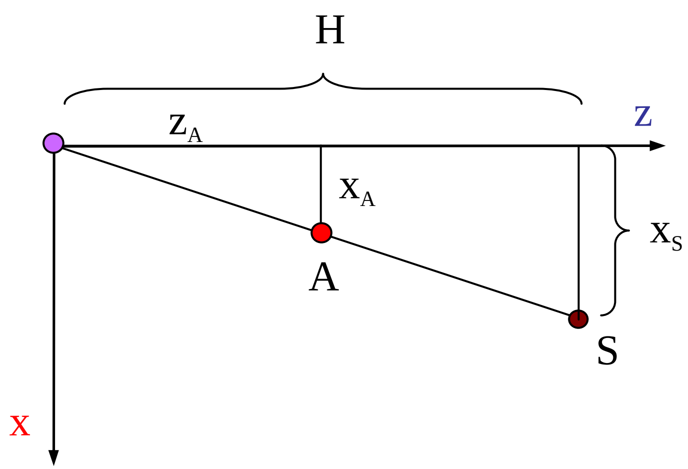
tijela koja su bliže promatraču

veća su u projekciji

PERSPEKTIVNA PROJEKCIJA

- CENTAR PROJEKCIJE JE U ISHODIŠTU





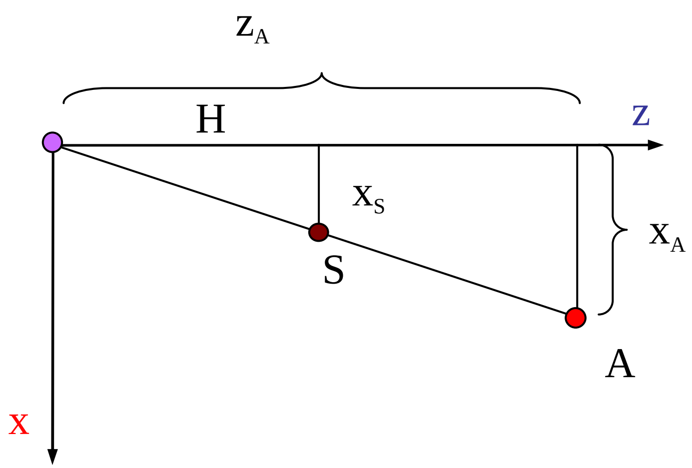
$$\frac{x_S}{H} = \frac{x_A}{z_A} \quad \Rightarrow \quad x_S = \frac{x_A}{z_A}\,H$$

slično

$$\frac{y_S}{H} = \frac{y_A}{z_A} \quad \Rightarrow \quad y_S = \frac{y_A}{z_A}\,H$$

$$z_S = H$$

- ako je tijelo iza ravnine projekcije



$$\frac{x_S}{H} = \frac{x_A}{z_A} \Rightarrow x_S = \frac{x_A}{\left(\frac{z_A}{H}\right)}$$

$$y_S = \frac{y_A}{\left(\frac{z_A}{H}\right)}$$

$$z_S = \frac{z_A}{\left(\frac{z_A}{H}\right)}$$

$$x_S = x_A \quad y_S = y_A \quad z_S = z_A \quad h_S = \frac{z_A}{H}$$

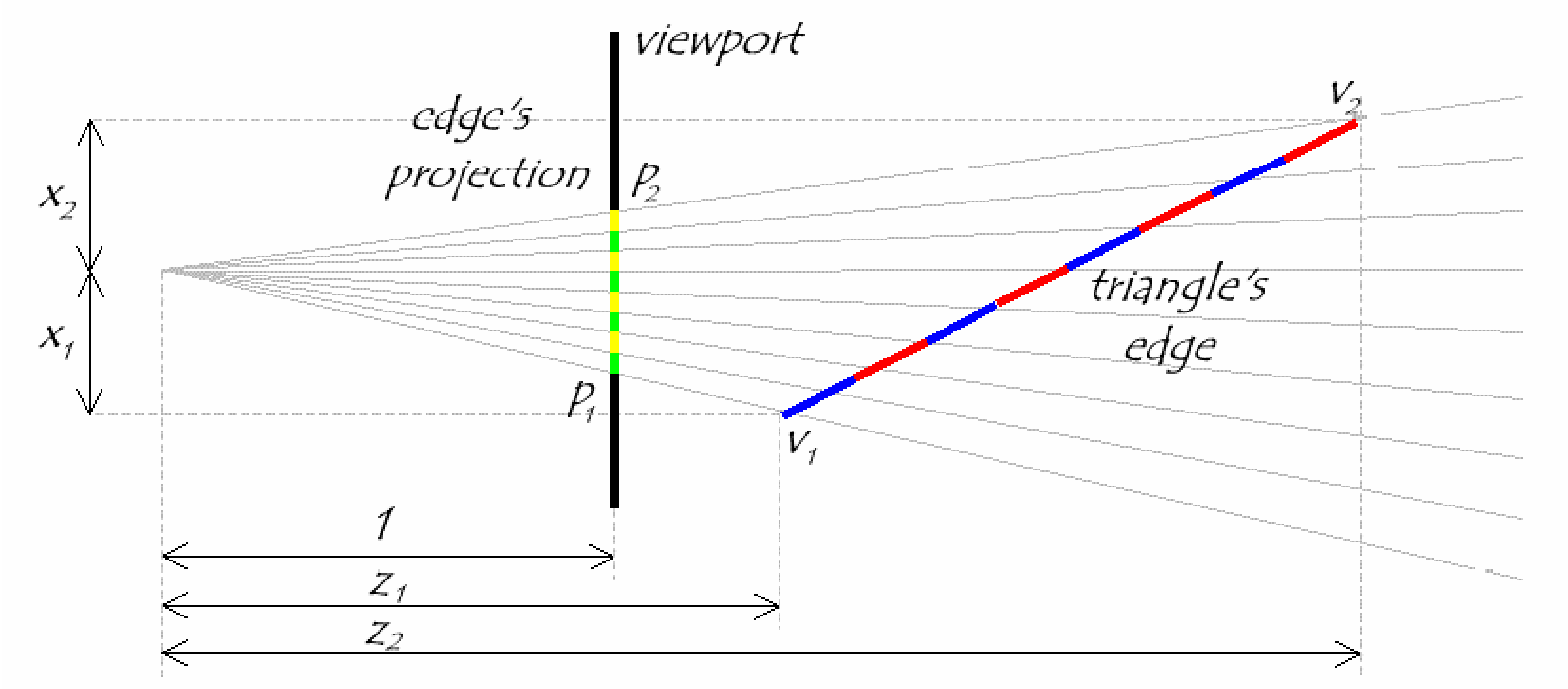
$$x_1' = x_1$$
$$x_2' = x_2$$
$$x_3' = x_3$$
$$x_4' = \frac{x_3}{H}$$

$$\begin{bmatrix} x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{1} & \frac{1}{H} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

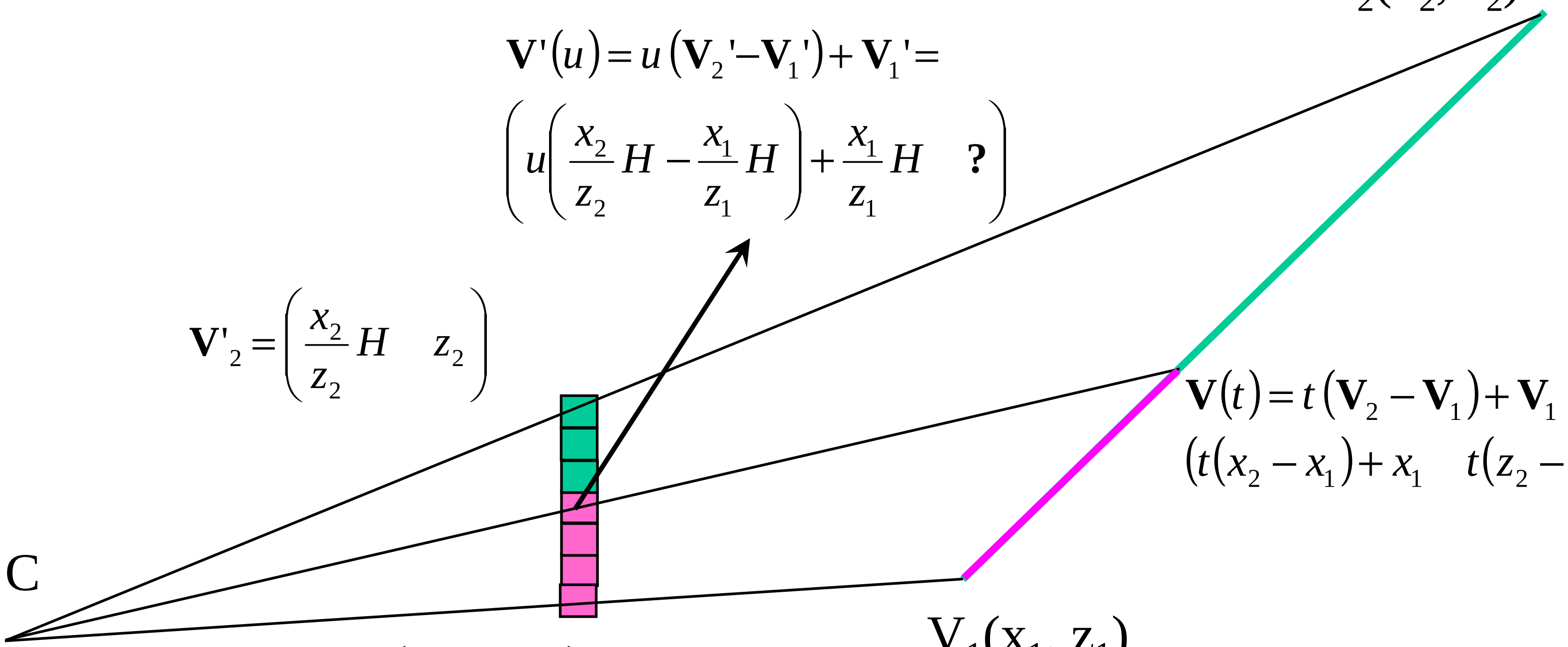
$\tilde{1} \rightarrow z-$koordinatu objekta želimo sačuvati jer daje udaljenost od očista (trebat će nam kasnije za uklanjnane skrivenih linija i površina)

- CENTAR PROJEKCIJE MOŽE BITI NA OSI A RAVNINA PROJEKCIJE U ISHODIŠTU

Perspektivno ispravna interpolacija z-koordinate



Perspektivno ispravna interpolacija z-koordinate



$$\mathbf{V}'(u) = u\left(\mathbf{V}_2' - \mathbf{V}_1'\right) + \mathbf{V}_1' =$$

$$\begin{pmatrix} u\left(\dfrac{x_2}{z_2}H - \dfrac{x_1}{z_1}H\right) + \dfrac{x_1}{z_1}H & \textbf{?} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}'_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{x_2}{z_2}H & z_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}(t) = t\left(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1\right) + \mathbf{V}_1 =$$

$$\begin{pmatrix} t\left(x_2 - x_1\right) + x_1 & t\left(z_2 - z_1\right) + z_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}'_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{x_1}{z_1}H & z_1 \end{pmatrix}$$

za neki parametar t, izjednačit ćemo perspektivno projiciranu točku **V**(t) sa linearno interpoliranom **V'**(u) točkom u prostoru projekcije između točaka $\mathbf{V}_1'$ i $\mathbf{V}_2'$ po x koordinati i odrediti t za koji to vrijedi.

$$\frac{t(x_2 - x_1) + x_1}{t(z_2 - z_1) + z_1} H = u\left(\frac{x_2}{z_2} H - \frac{x_1}{z_1} H \right) + \frac{x_1}{z_1} H$$

$$t = \frac{z_1 u}{z_2 - (z_2 - z_1)u}$$

uvrštavanje dobivenog t u izraz $t\,(z_2 - z_1) + z_1$, daje nelinearnu ovisnost $z(u)$

$$z(u) = \frac{z_1 z_2}{z_2 - (z_2 - z_1)u}$$

provjera za $u = 0$ i $u = 1$

•http://www.neilwallis.com/3d/index2.htm
http://groups.csail.mit.edu/graphics/classes/6.837/F01/Lecture18/Subdvision-Applet.html
•http://www.cs.unc.edu/~andrewz/comp236/hw6/

- NORMIRANJE KOORDINATA – ortografska projekcija

Volumen pogleda određuju

l - lijeva ravnina odsijecanja (min. *x* koordinata) -1

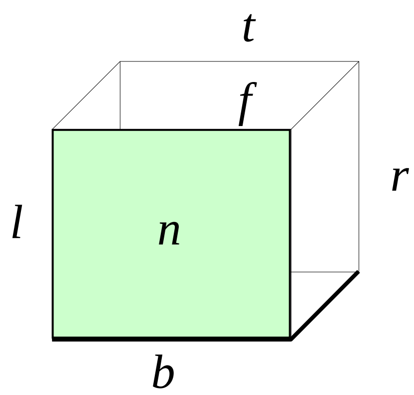
r - desna ravnina odsijecanja (max. *x* koordinata) 1

t - gornja ravnina odsijecanja (min. *y* koordinata) -1

b - donja ravnina odsijecanja (max. *y* koordinata) 1

n - prednja ravnina odsijecanja (min. *z* koordinata) 1

f - stražnja ravnina odsijecanja (max. *z* koordinata) -1



ORTOGRAFSKA PROJEKCIJA

l - lijeva ravnina odsijecanja (min. *x* koordinata)

r - desna ravnina odsijecanja (max. *x* koordinata)

$$\frac{x'-(-1)}{x-l}=\frac{1-(-1)}{r-l} \Rightarrow x'=x\frac{2}{r-l}-\frac{r+l}{r-l}$$

$$R=\begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{f-n} & 0 \\ -\frac{r+l}{r-l} & -\frac{t+b}{t-b} & -\frac{f+n}{f-n} & 1 \end{bmatrix}$$

PROJECTION

Transformacije u OpenGL-u

- Model
  - transformacije se odnose na model, zadnja navedena transformacija se obavlja prva
  - model je inicijalno u svom koordinatnom sustavu – postavljamo ga u sustavu scene ili uspostavljamo hijerarhijski izgrađen model (stog matrica)
- Transformacija pogleda (engl. Viewing)
  - položaj i orijentacija kamere
  - projekcija
- Preslikavanje na zaslon
  - koordinate u sustavu otvora
- Animacija

- Matrice
  - GL_MODELVIEW,
  - GL_PROJECTION,
  - GL_TEXTURE

- Odredimo s kojom matricom radimo – sve daljnje operacije odnose se na tu matricu (inicijalno je GL_MODELVIEW)
    - glMatrixMode (GL_MODELVIEW or GL_PROJECTION)
- Načini rukovanja matricama
  - definiramo svoje matrice
    - glLoadMatrix, glMultMatrix
  - definiramo operaciju (transformaciju) ne moramo znati kako izgledaju neke matrice
    - glRotate, glOrtho
- Brisanje matrice
    - glLoadIdentity()
- Stog matrica
    - glPushMatrix(), glPopMatrix()

- Sustav otvora
  - obično se definira ista veličina kao prozor
    - glViewport (x, y, width, height)
- Transformacija pogleda i projekcije
  - ortografska projekcija
    - glOrtho (left, right, bottom, top, zNear, zFar);
    - gluOrtho2D (left, right, bottom, top) // ako radimo u 2D, isto kao otvor
  - perspektivna projekcija
    - glFrustum (left, right, bottom, top, zNear, zFar)   // zNear $\neq$ 0
    - gluPerspective (fovy, aspect, zNear, zFar)
  - položaj promatrača (kamere u prostoru)

```
gluLookAt( 0.0, 0.0, 5.0,        // očište x, y, z – gdje je kamera
           0.0, 0.0, 0.0,        // gledište – točka u koju je usmjeren pogled
           0.0, 1.0, 0.0 );      // vektor prema gore (view up) x, y, z
```