

# 11 Fraktalni objekti

- Fraktal
  - riječ fraktal - B. B. Mandelbrot 1975. (osnove su dali P. Fatou, G. Julia ranije)
  - skup sličan samom sebi – samosličan (engl. self-similar)
- fraktali u računalnoj grafici i animaciji
  - interesantni za projektiranje vizualno složenih objekata
  - jednostavna pravila + rekurzivna primjena
  - modeliranje (složenih) prirodnih objekata i pojava
- podjela fraktala
  - deterministički
  - stohastički



## Primjena Fraktala u računalnoj grafici – primjeri

- opis biljaka:
  - drveće, cvijeće, grmlje, korijenje
- linija morske obale, munja
- oblaci, snježne pahuljice,
- teren, planine <http://ibiblio.org/e-notes/3Dapp/Mount.htm>
- kompresija slika i video zapisa
- animacija <http://www.kenmusgrave.com/animations.html>



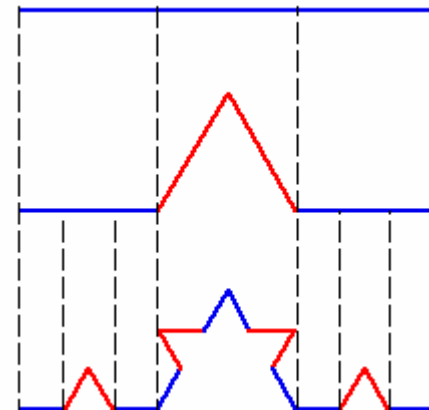
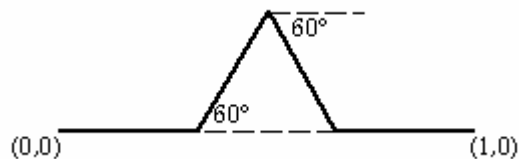
- način generiranja fraktalnih objekata
  - 1 - ugnježđivanje geometrijskih elemenata (rekurzivni pozivi)
    - L-sustavi – zadani gramatikom
  - 2 - IFS iterativni funkcijski sustavi
  - 3 - ispitivanje područja konvergencije niza dobivenog iterativnom primjenom kompleksne funkcije

## 11.1. Ugnježdivanje geometrijskih elemenata (rekurzivni pozivi)

- osnovna transformacija
- rekurzivna primjena

Npr. 1D H.von Koch konstruira krivulju koja  
nema derivaciju niti u jednoj točki  
rezultat je samo-sličan objekt

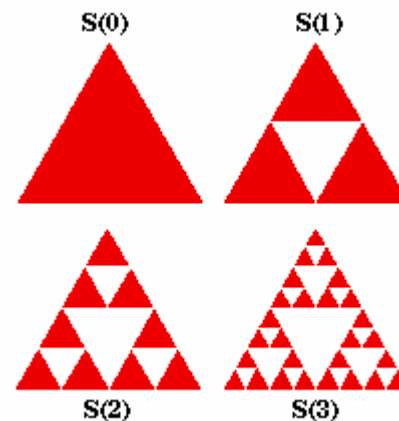
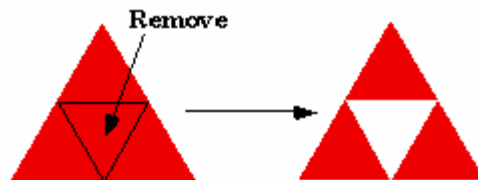
pravilo



Npr. 2D Trokut Sierpinskog

<http://ecademy.agnesscott.edu/~lriddle/ifs/carpet/carpet.htm>

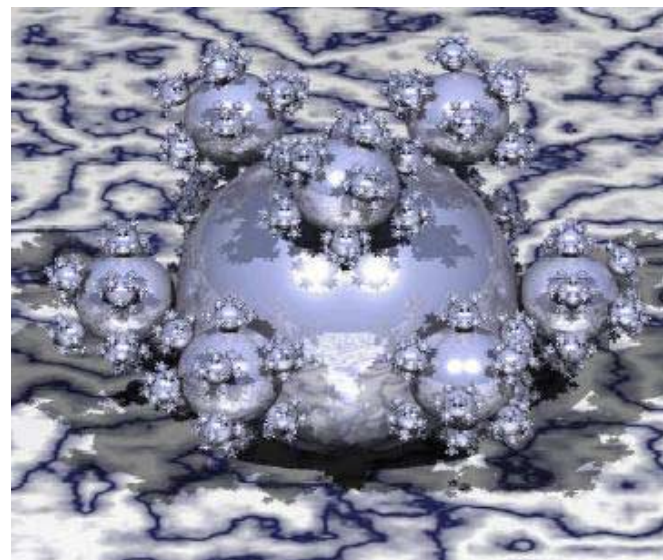
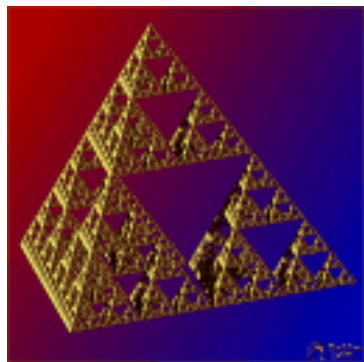
pravilo



- rekurzivna priroda – vodi na samo-sličnost (fraktalni oblici)

Npr. proširivanje pravila na 3D prostor - 3D piramida

<http://www.houseof3d.com/pete/applets/wireframe/fractal/>



# L-sustavi

- Astrid Lindenmayer (biolog) 1968
- opis razgranatih prirodnih objekata – modeliranje biljaka

G gramatika (vrlo slična Chomsky-evoj gramatici)

V (varijable) skup nezavršnih simbola

S (konstante) skup završnih simbola

$\omega$  početni simbol (niz) iz skupa V

P skup produkcijskih pravila

} pridjeljujemo **geometrijsku** interpretaciju

$$G = \{V, S, \omega, P\}$$

npr. Fibonacci-jevi brojevi - gramatika:

– V : A B

– S : nijedna

–  $\omega$  : A

– P : (A  $\rightarrow$  B), (B  $\rightarrow$  AB)

$n = 0 : 1: A$  - broj znakova

$n = 1 : 1: B$

$n = 2 : 2: AB$

$n = 3 : 3: BAB$

$n = 4 : 5: ABBAB$

$n = 5 : 8: BABABBBAB$

$n = 6 : 13: ABBABBBABABBAB$

$n = 7 : 21: BABABBBABABBABABBAB$

# L - sustavi

- u svakom koraku kod primjene produkcijskih pravila cilj je primijeniti što je moguće više pravila istovremeno (zamjenjujemo sve nezavršne simbole) – po ovom se L-sustav razlikuje od formalnog jezika, odnosno L-sustav je podskup formalnog jezika
- može biti
  - kontekstno neovisan sustav – pravilo se odnosi na simbol, susjedi ne utječu
  - kontekstno ovisan sustav
- determinizam
  - deterministički - za svaki nezavršni simbol točno jedna produkcija
  - nedeterministički – više pravila (vjerojatnost primjene pravila)
    - kontinuirana promjena neke transformacije npr. rotacije

npr:

F/f – crtaj tako da je pero spušteno/dignuto

+/- – rotiraj za +60/-60

Koch – pahuljica:

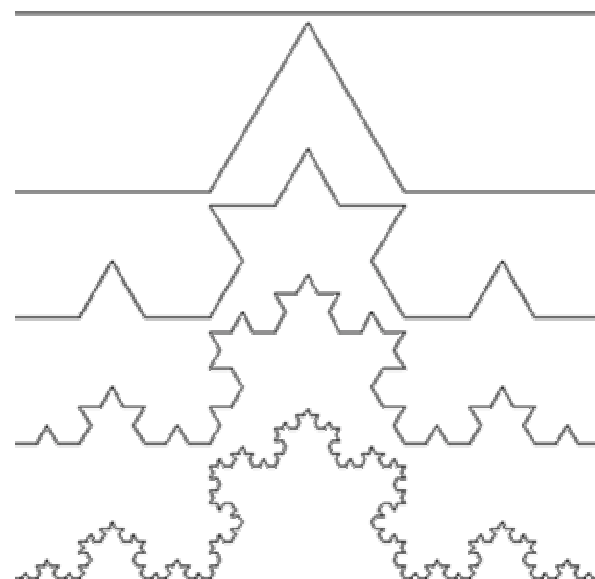
V: F

S: -, +

$\omega$ : F

P: p1:  $F \rightarrow F+F--F+F$ ,

pravilo  $p_1$   
se primjeni k-puta:



<http://www.gris.uni-tuebingen.de/edu/projects/grdev/doc/html/Overview.html>  
<http://classes.yale.edu/Fractals/Software/lssystem.html>

# L - sustav - primjer

jednostavniji – kontekstno neovisni, deterministički

Sierpinski Arrowhead Curve

V: X, Y

S: F, -, +

$\omega$ : YF

P: p1:  $X \rightarrow YF+XF+Y$

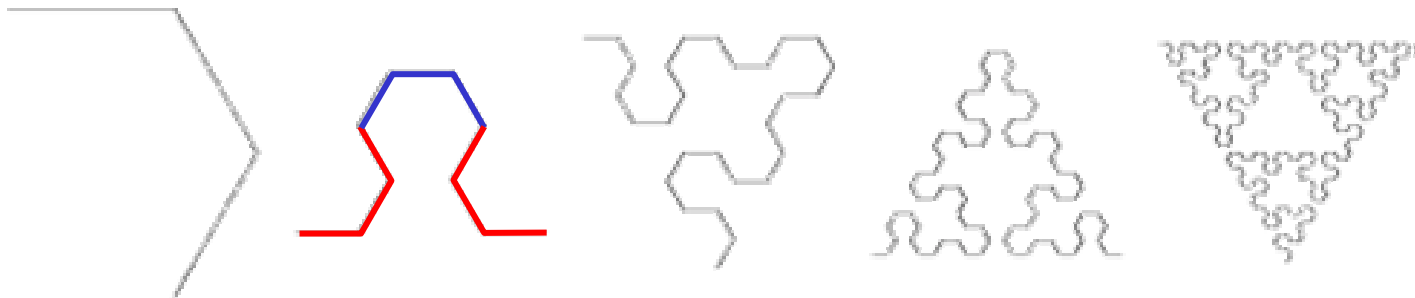
p2:  $Y \rightarrow XF-YF-X$

u završnom koraku  $X \rightarrow \epsilon$ ,  $Y \rightarrow \epsilon$



<http://www.ibiblio.org/e-notes/VRML/Web3D/Tree3.wrl>

<http://www.ibiblio.org/e-notes/VRML/Web3D/BirchL.wrl>



- geometrijska interpretacija završnih simbola:

Character	Meaning
F	Move forward by line length drawing a line
f	Move forward by line length without drawing a line
+	Turn left by turning angle
-	Turn right by turning angle
	Reverse direction (ie: turn by 180 degrees)
[	Push current drawing state onto stack
]	Pop current drawing state from the stack
#	Increment the line width by line width increment
!	Decrement the line width by line width increment
@	Draw a dot with line width radius
{	Open a polygon
}	Close a polygon and fill it with fill colour
>	Multiply the line length by the line length scale factor
<	Divide the line length by the line length scale factor
&	Swap the meaning of + and -
(	Decrement turning angle by turning angle increment
)	Increment turning angle by turning angle increment



- primjeri iz botanike:
  - biljke
    - sadrže stabljiku drvenastu ili zelenu
    - određen broj grananja (2, 3 ... 5 ..), često pravilne rotacije na stabljici
    - cvjetovi (pupovi lisni, cvjetni) – prethodi im kontekst čašice i listići
  - rast biljke
    - utjecaj genetske informacije (opis pojedine biljke)
    - vanjski utjecaji (vjetar, sunce/sjena, prepreke – detekcija i zaobilaženje, položaj vode – jezero, okolne biljke, životinje)
    - slučajni utjecaji
  - u gramatici
    - pravila (genetski opis, hormoni rasta, inhibitori)
    - kontekstno ovisna gramatika
      - kombinacija stabljike i lista
      - cvjetovi
    - vanjski utjecaji

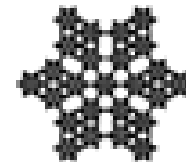


## Generiranje prirodnih objekata



# Primjena pravila u generiranju fraktala

- zadana je gramatika – crtamo fraktal  
<http://robotics.ee.uwa.edu.au/lgrammar/java/>
- sekvencijski - grafika kornjače (turtle graphics) – promatramo trenutnu točku i primjenjujemo pravila
  - trenutni kontekst je određen: pozicijom, orijentacijom i skalom  
<http://kaminari.scitec.kobe-u.ac.jp/java/logo/>
- paralelno - rekurzivno umatanje geometrijskih primitiva
  - affine transformacije: pojedini segment (određuje poziciju i orijentaciju) zamjenjujemo izvornim elementom koji je skaliran (sažimanje)
  - što ako nisu transformacije sažimanja, ili ako nisu affine
- promatranje u vremenu - možemo simulirati rast biljke (kontinuirana promjena između pojedinih koraka)
- fraktalna glazba



## Određivanje pravila za generiranje fraktala – inverzan postupak

- zadan je objekt – tražimo gramatiku
- određujemo uzorak/uzorke (završni simboli)
- određujemo produkcijska pravila (pravilnost)
  - određujemo genetsku informaciju, sjeme procesa
- složeni objekti i ponašanje (u prostoru i vremenu)
  - pojava pravilnosti kod biljaka, morske obale, munje, položaji planeta, zvijezda, galaksija, pahuljica snijega, DNK
  - <http://micro.magnet.fsu.edu/primer/java/scienceopticsu/powersof10/>
  - kapanje kiše, širenje gripe, učestalost paketa u mreži računala
  - postavljanje zakonitosti u procesima koje smatramo “slučajnim”
  - teorija kaosa

(nelinearni dinamički sustav,  
ponašanje na predvidivo nepredvidivi način)



## 11.2. IFS Iterativni funkcijski sustavi (engl. Iterative Function Systems)

- na slučajan način s vjerojatnošću  $p_i$ ,  
odabire se preslikavanje (transformacija)  $w_i$ ,  
koja se primjenjuje na prethodno dobivenu točku

$$\mathbf{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}, \quad \sum_i p_i = 1 \quad \mathbf{W} = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$$

$$\begin{bmatrix} x'_1 & x'_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11}s_1 & r_{12} & 0 \\ r_{21} & r_{22}s_2 & 0 \\ t_1 & t_2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}' = \mathbf{V} \cdot w_i$$

$r_{ij}$  rotacija

$s_i$  skaliranje, faktor sažimanja

$t_j$  translacija

<http://online.redwoods.cc.ca.us/instruct/darnold/ifs/>



## IFS primjer 1D:

- Cantor-ova prašina <http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Hangar/7959/fractalapplet.html>

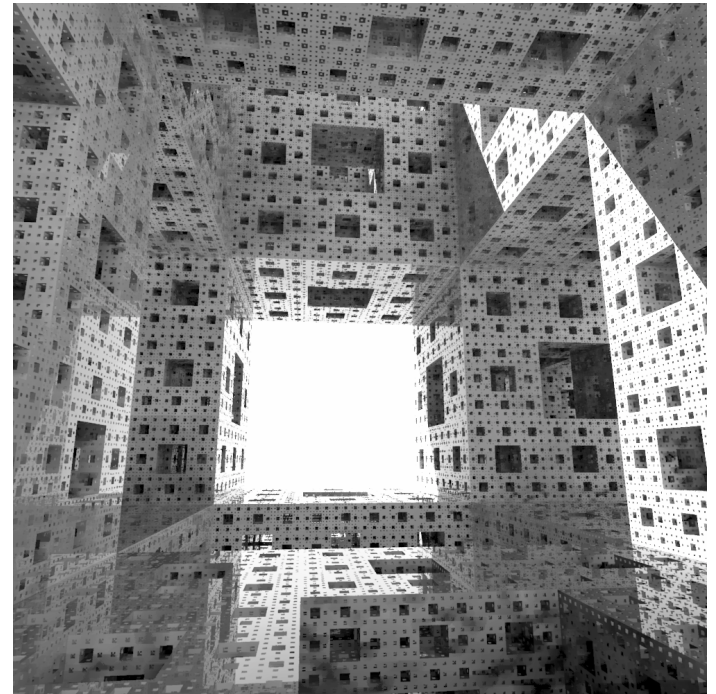
$$\mathbf{W} = \{w_1, w_2\} \quad w_1(x) = \frac{1}{3}x, \quad w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \quad x \in [0, 1], \quad \mathbf{P} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\},$$

- područje privlačenja “atraktor”
- usporedba s geometrijski generiranim skupom

$$B_0 = [0, 1],$$

$$B_1 = w_1(B_0) \cup w_2(B_0) = \left[ 0, \frac{1}{3} \right] \cup \left[ \frac{2}{3}, 1 \right],$$

$$B_2 = w_1(B_1) \cup w_2(B_1) = \left[ 0, \frac{1}{9} \right] \cup \left[ \frac{2}{9}, \frac{3}{9} \right] \cup \left[ \frac{6}{9}, \frac{7}{9} \right] \cup \left[ \frac{8}{9}, 1 \right],$$



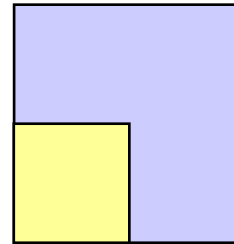
## IFS primjer 2D:

- trokut Sierpinskog <http://members.lycos.co.uk/ququqa2/fractals/index.html>

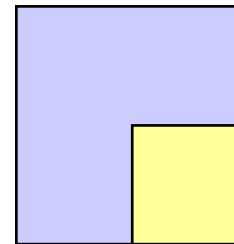
$$\mathbf{W} = \{w_1, w_2, w_3\}$$

$$\mathbf{P} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\},$$

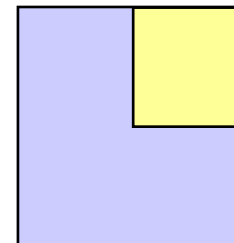
$$w_1(x, y) = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$



$$w_2(x, y) = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 50 & 1 \end{bmatrix},$$



$$w_3(x, y) = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 50 & 50 & 1 \end{bmatrix}.$$



## IFS primjer list paprati:

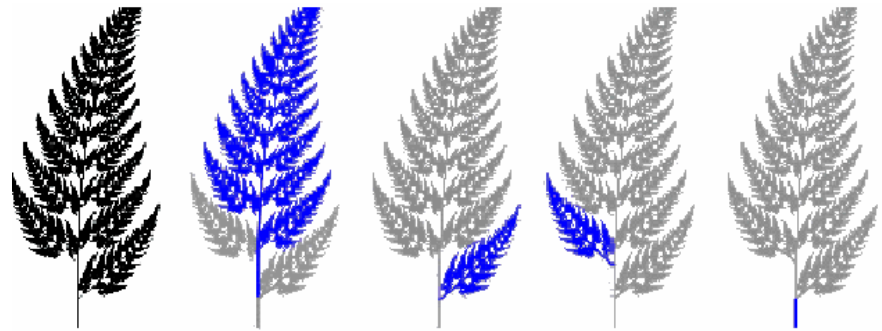
– 4 transformacije

$$w_1(x, y) = [x \ y \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 0,85 & -0,04 & 0 \\ 0,04 & 0,85 & 0 \\ 0 & 1,6 & 1 \end{bmatrix},$$

$$w_2(x, y) = [x \ y \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 0,2 & 0,23 & 0 \\ -0,26 & 0,22 & 0 \\ 0 & 1,6 & 1 \end{bmatrix},$$

$$w_3(x, y) = [x \ y \ 1] \cdot \begin{bmatrix} -0,15 & 0,26 & 0 \\ 0,28 & 0,24 & 0 \\ 0 & 0,44 & 1 \end{bmatrix},$$

$$w_4(x, y) = [x \ y \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,16 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$



$$\mathbf{P} = \{0,07, 0,07, 0,85, 0,01\},$$

- <http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Hangar/7959/fractalapplet.html>



## Određivanje matrica za IFS – inverzan postupak

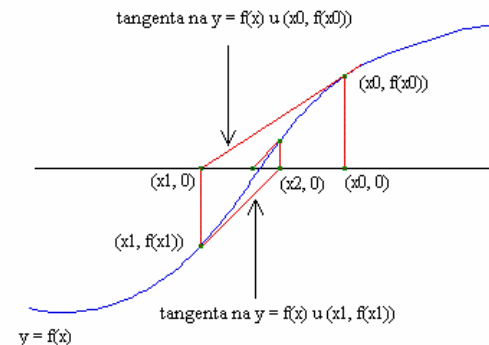
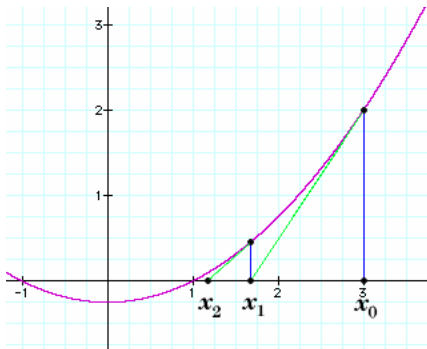
- zadana je slika (objekt) – tražimo IFS koji će generirati tu sliku
- Barnsley (1987 – fraktalna kompresija)
  - postupak kompresije traje – dekompresija je brza
  - kompresija s gubitkom, definiramo željenu kvalitetu rezultata
  - visok stupanj do 50:1 za slike, video 170:1,
  - dekompresija na proizvoljnu veličinu (fraktalna interpolacija ako je broj uzoraka manji od broja slikovnih elemenata u rezultatu)
  - (koristi - Encarta Microsoft)
  - slično kao DCT (Jpeg), valići (wavelet)

# Atraktor

- atraktor je područje kojem se rješenja sustava asimptotski približavaju, može biti točka, krivulja ili kompleksan skup
- slično kao kod funkcije promatramo da li funkcija konvergira (jedna vrijednost), oscilira između dvije, tri ili više vrijednosti
- ovdje promatramo red (svojstva tog reda) koji dobijemo iterativnim postupkom za nelinearne sustave –  $f$  je nelinearna funkcija

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{za neku početnu vrijednost } x_0$$

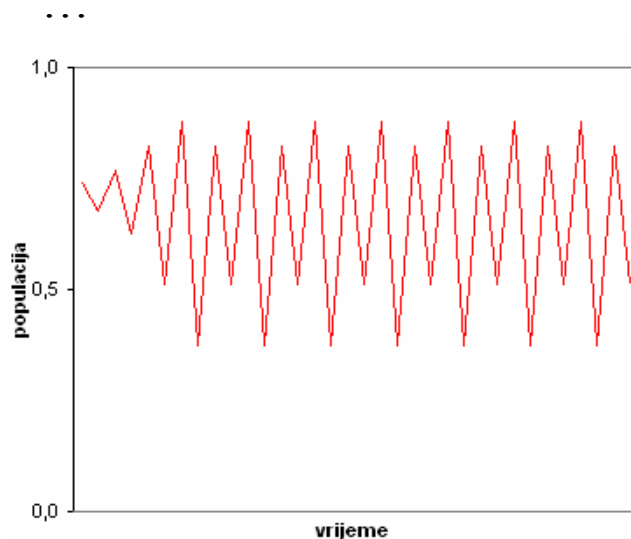
- ovu pojavu možemo promatrati u
  - 1D prostoru (odnosno kao elemente u ovisnosti o koraku iteracije), npr. numerički postupci *Newton-Raphsonova metoda* određuju  $x$  za  $f(x) = 0$ , odnosno računamo  $x_1 = x_0 - f(x_0) / f'(x_0)$



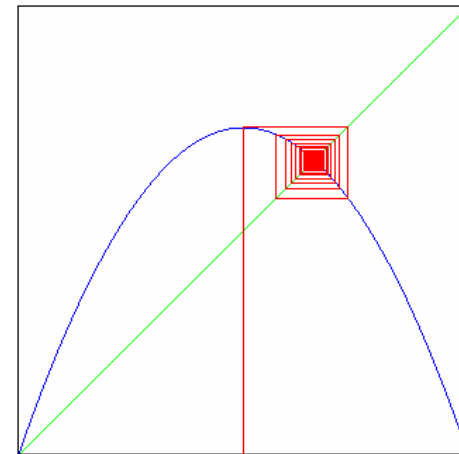
## Npr. Populacijska jednačba

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$

- $x_n$  određuje populaciju ( $x_0$  je početna populacija), broj između 0 i 1
- $r$  određuje uvjete za rast populacije
  - 0 - 1 populacija umire neovisno o početnom broju jedinki
  - 1 - 2 broj jedinki se stabilizira na  $x = (r-1)/r$
  - ako postoji fiksna točka (tada je  $x_n = r x_n (1 - x_n)$  – otuda je rješenje)
  - 2 - 3 nakon oscilacija se isto stabilizira
  - 3 -  $(1+\sqrt{6})$  populacija oscilira između dvije vrijednosti
  - 3.45 - 3.54 populacija oscilira između četiri vrijednosti
- prikaz u paučinastom dijagramu
  - iterativni proces promatramo za neki  $x_0 \rightarrow f(x_0) \rightarrow$  pravac  $x_1 = f(x_0)$  tj.  $x_1 \rightarrow f(x_1)$



Ž. M, ZEMRIS, FER



<http://ibiblio.org/e-notes/MSet/Logistic.htm>

U populacijskoj jednadžbi se javljaju bifurkacije

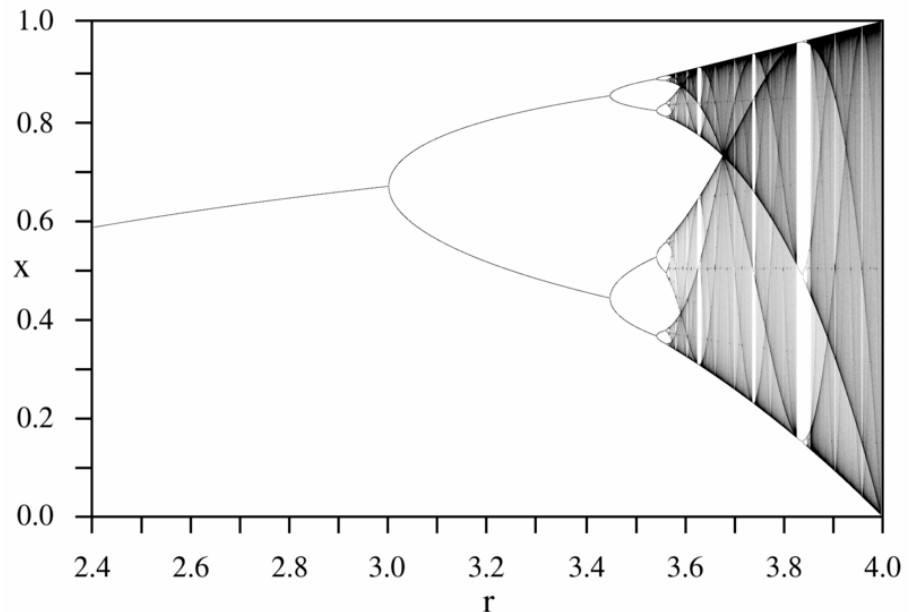
Bifurkacija – za pojedine vrijednost parametra sustava  $r$ , naglo se promijeni broj atraktora npr. od 2 na 4

Bifurkacijski dijagram

- za sustav promatramo obzirom na različite  $r$ -ove (i  $x_0$ ) broj atraktora

[http://web.mst.edu/~vojta/class\\_355/chapter1/logmap\\_bif.html](http://web.mst.edu/~vojta/class_355/chapter1/logmap_bif.html)

- fraktalno ponašanje (ako povećamo neki dio opet ćemo dobiti isti izgled)
- pojava ‘praznina’ u dijagramu



# Atraktor

- 2D točka, linija, ‘bazen’ - područje privlačenja <http://www.falstad.com/vector/>
- 3D točka, linija, područje privlačenja <http://www.falstad.com/vector3d/>
- dinamički, nelinearni sustavi - pojava “čudnih atraktora”

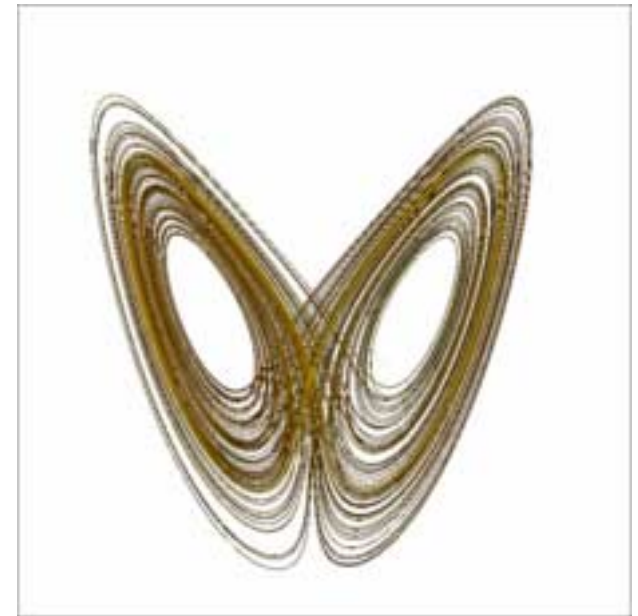
Lorenz (meteorolog) <http://toxi.co.uk/lorenz/>

- sustav diferencijalnih jednažbi:

prati orbitu u 2D prostoru

- <http://www.exploratorium.edu/complexity/java/lorenz.html>

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= s(y - x) & s &= 10 & x_0 &= 0 \\ \frac{dy}{dt} &= r x - y - x z & r &= 28 & y_0 &= 1 \\ \frac{dz}{dt} &= x y - b z & b &= 8/3 & z_0 &= 0\end{aligned}$$



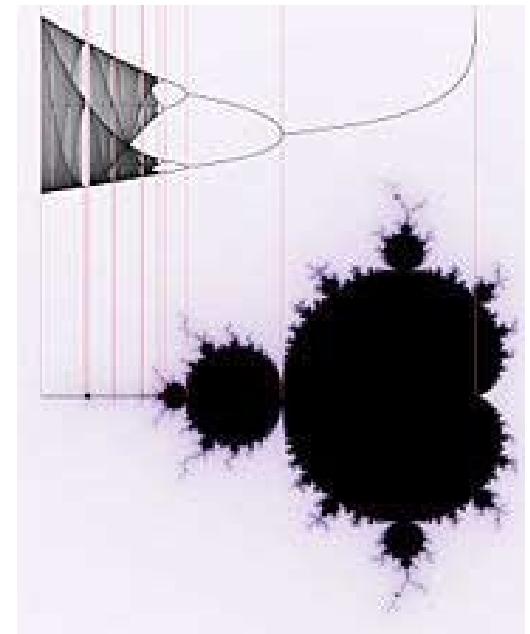
## 11.3. Ispitivanje područja konvergencije

Mandelbrot-ov, Julijev skup

- promatramo kompleksni kvadratni polinom

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad z, c \in \mathbb{C}$$

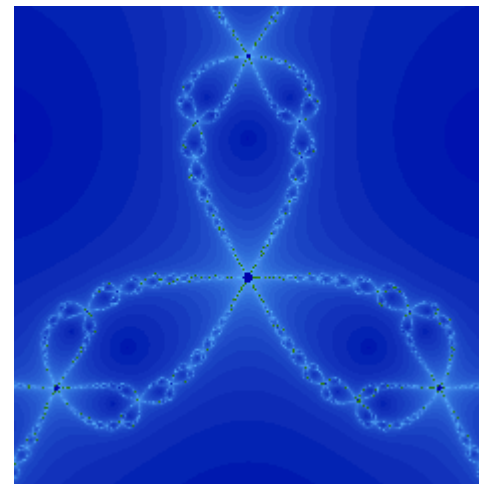
- Mandelbrotov skup je skup točaka kompleksne ravnine  $c$  za koje je sekvenca iz kritične točke  $z_0=0$  ograničena, rub dobivenog područja je fraktal
- duž realne osi – populacijska jednadžba
- za točke Mandelbrot-ovog skupa vrijedi da je Julijev skup povezan



# Numerički postupci nalaženja nul-točke funkcije

Newton – Raphson –ov postupak (Newton-ove funkcije)

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z)}{f'(z)}$$



Fizikalni sustavi su u pravilu nelinearni, dinamički

- fizikalni sustav opisujemo sustavom diferencijalnih jednadžbi
  - mehanički sustavi (opruge) ODE (diferencijalne jednadžbe)  
<http://www.mscs.dal.ca/~selinger/lagrange/doublespring.html>
  - električki RC
  - dinamika fluida – Navier-Stokes- ove jednadžbe sustav zadan PDE (parcijalne diferencijalne jednadžbe)
  - magnetski bazeni
- promatramo za koje početne uvjete će se postići stabilno rješenje (da li divergira i kojom brzinom)
- utjecaj parametara sustava ( $k$ ,  $l_0$ ,  $RC$ ,  $\mu \dots$ ) na promjene stabilnosti sustava

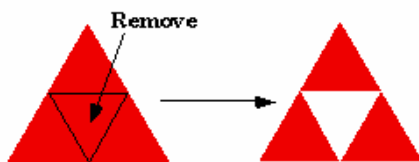


# Fraktalna dimenzija

- vrijednost koja određuje u kolikoj mjeri fraktal ispunjava prostor u kojem se nalazi

npr. Koch-ova pahuljica

npr. trokut Sierpinskog - površina trokuta



$$P_{\Delta} = \frac{a \left( a \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{2} = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

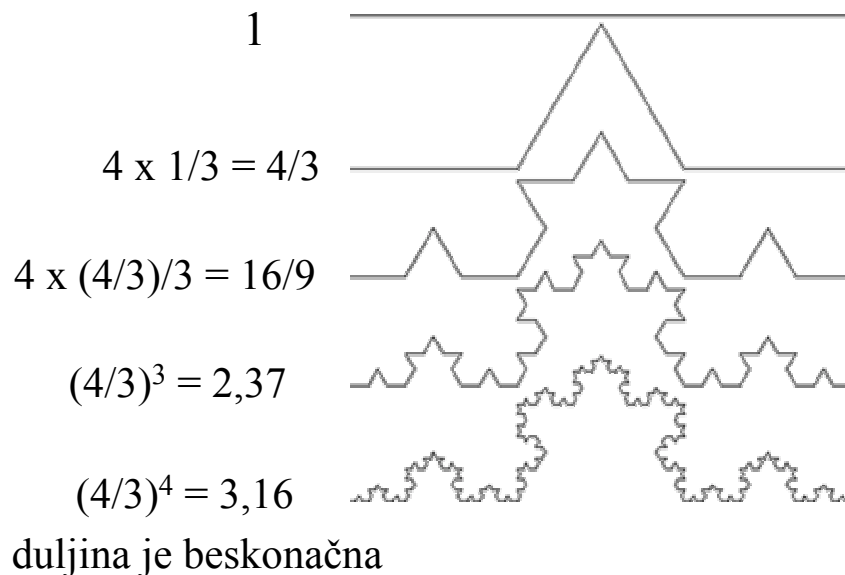
- opseg trokuta

$$O_{\Delta} = 3a$$

$$P_{\Delta}, \quad \frac{3}{4} P_{\Delta}, \quad \left( \frac{3}{4} \right)^2 P_{\Delta}, \quad \left( \frac{3}{4} \right)^3 P_{\Delta} \dots \left( \frac{3}{4} \right)^n P_{\Delta}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0$$

$$O_{\Delta}, \quad \frac{3}{2} O_{\Delta}, \quad \left( \frac{3}{2} \right)^2 O_{\Delta}, \quad \left( \frac{3}{2} \right)^3 O_{\Delta} \dots \left( \frac{3}{2} \right)^n O_{\Delta}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \infty$$

## aproksimacija duljine



# Fraktalna dimenzija

- Hausdorff - ova dimenzija

$$D = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log N(h)}{\log(1/h)}$$

- $N(h)$  – broj kvadratića (linija) stranice  $h$  koji je potreban da prekrijemo lik
- $h$  duljina stranice kvadratića
- $h$  smanjujemo,  $N(h)$  se povećava

Fraktalna dimenzija Kohove pahuljice:

$$\frac{\log 1}{\log 1}, \frac{\log 4}{\log 3}, \frac{\log 16}{\log 9}, \dots, \frac{\log 4^n}{\log 3^n} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,26$$

- znači dimenzija je topološki između 1D i 2D – u kojoj mjeri “popunjava prostor”
- npr. pahuljica i linije morske obale imaju jednaku dimenziju

<http://polymer.bu.edu/java/java/coastline/coastlineapplet.html>

