ZBIRKA RIJEŠENIH ZADATAKA SA 2. MEĐUPITA I 2. DOMAĆE ZADAĆE AK.GOD. 2007./2008.

iz

INTERAKTIVNE RAČUNALNE GRAFIKE

Hrvoje Gradečak
Tomislav Lugarić
Goran Narančić
Zvonimir Pavlić

Predgovor

Ovu zbirku riješenih zadataka iz IRG-a sa drugog međuispita i sa druge domaće zadaće odlučili smo napraviti kako bismo svima olakšali pripremu za završni ispit.
No budući da sada pred kraj svi imamo jako puno obaveza na fakultetu, nismo ju uspjeli dovršiti.
Nadamo se da će vam i ovo što smo do sada napravili pomoći u pripremi za završni ispit i da će vam olakšati polaganje ovog predmeta.
Dat ćemo sve od sebe da preko ljeta dovršimo ovu zbirku, kako bi idućim generacijama bilo lakše položiti ovaj predmet i pritom nešto i naučiti.
Sretno svima na završnom ispitu!

Zvonimir Pavlić
Goran Narančić
Tomislav Lugarić
Hrvoje Gradečak

2. Međuispit

Grupa B

II Među-ispit iz Interaktivne računalne grafike

1. Zadana je dužina točkama u radnom prostoru V_1=(100 0 20) t=0 i V_2=(500 0 50) t=1. Odrediti perspektivno ispravnu z-koordinatu točke čija je vrijednost parametra u=0,8 u prostoru projekcije. Centar projekcije je u ishodištu, udaljenost do ravnine projekcije je H=20.

a) 37,46 b) 31,25 c) 38,46 d) 44 e) ništa od navedenog

2. Zadane su početna i završna točka. V_0=(10 20 10), V_2=(5 30 10), Bezierove krivulje u radnom prostoru i derivacija u završnoj točki V_2'=(5 10 0). Odrediti kvadratnu aproksimacijsku Bezier-ovu krivulju upotrebom Bernstein-ovih težinskih funkcija. Odrediti točku krivulje za iznos parametra t=0.3. $b_{i\,n}(t)=\dfrac{n!}{i!(n-i)!}t^i(1-t)^{n-i}$

a) P(6,4 22 10) b) P(7,4 22 10) c) P(6,4 23,5 15) d) P(6,4 23 10) e) ništa od navedenog

3. Poligonalni objekt je zadan strukturom krilatog brida. Koji su susjedni bridovi vrhu V_2?

Tablica vrhova		
V1	x y z	e1
V2	x y z	e1
V3	x y z	e3
V4	x y z	e3

Tablica bridova								
e1	V2	V1	P4	P1	e6	e2	e4	e5
e2	V2	V3	P1	P3	e1	e6	e5	e3
e3	V3	V4	P2	P3	e5	e2	e4	e6
e4	V4	V1	P2	P4	e3	e6	e5	e1
e5	V3	V1	P1	P2	e2	e3	e1	e4
e6	V4	V2	P4	P3	e4	e3	e1	e2

Tablica poligona	
P1	e1
P2	e3
P3	e3
P4	e1

a) e1, e2, e3 b) e1, e4, e5 c) e1, e3, e6 d) e1, e2, e6 e) ništa od navedenog

4. Zadan je pravac p točkama V_0=(10 10 10) i V_1=(50 40 20). Odrediti rotiranu točku T' koju dobijemo rotacijom točke T= (0 10 10) oko pravca p za +30° (+ znači suprotno smjeru kazaljke na satu) gledano iz V_1 u V_0.

a) T'(1,9 6 14,3) b) T'(0,5 8,4 12,7) c) T'(0,5 9,4 9,1) d) T'(1,9 9,4 4,1) e) ništa od navedenog

5. Napisati jednadžbu u parametarskom obliku za bilinearnu interpolaciju kroz 4 točke. Odrediti parametarski oblik bilinearne interpolacije V(u,v) ako su poznate vrijednosti u točkama V(0,0) = 2, V(0,1) = 3, V(1,0) = 5, V(1,1) = 4. Kolika je vrijednost za V(1.5, 1.5)?

a) 4,5 b) 3 c) 5 d) 3,5 e) ništa od navedenog

6. Kronološki poredati sljedeće aktivnosti koje se pojavljuju u stvaranju i prikazu jednog okvira 3D scene (nanižite redne brojeve slijeva nadesno): **1.** pozivanje OpenGL funkcija iz procesa operacijskog sustava; **2.** preslikavanje teksture na poligone **3.** pretvorba informacije iz slikovne prikazne memorije u analogni oblik; **4.** FSAA (engl. *full screen anti aliasing*); **5.** projekcija 3D prostora na 2D ravninu.

a) 1 5 4 3 2 b) 1 2 5 4 3 c) 5 2 4 1 3 d) 1 5 2 4 3 e) ništa od navedenog

7. Neka je očište (kamera) u točki O = (0, 0, 0) radnog 3D prostora, os kamere usmjerena prema pozitivnom dijelu z-osi, a projekcijska ravnina kamere $z = 4$. Izračunati *xy* koordinate točke koja se dobije perspektivnom projekcijom točke T = (8, 3, 7).

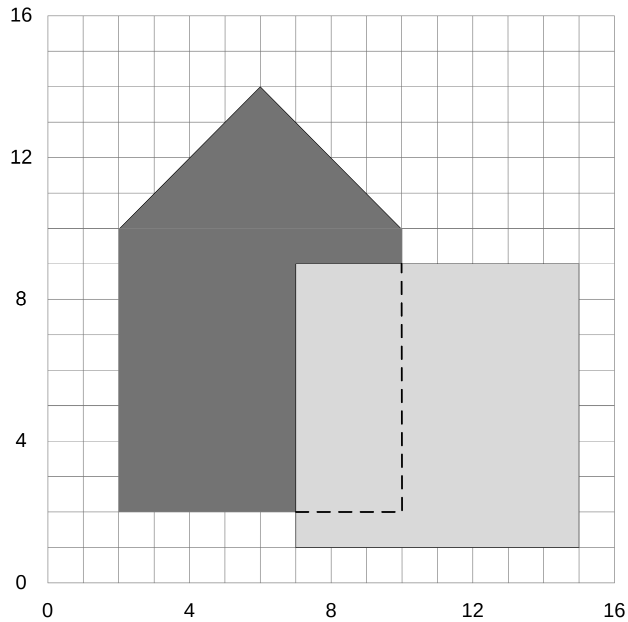
a) (7/32, 7/12) b) (12/7, 32/7) c) (32/7, 12/7) d) (7/32, 12/7) e) ništa od navedenog

8. Odredite kakav je odnos točaka T_1=(1 3 7) , T_2=(-1 4 5) i trokuta zadanog vrhovima: V_1=(-3 5 3), V_2=(-2 6 3) i V_3=(8 -5 17).

a) T_1 nije u ravnini trokuta, T_2 je unutar trokuta, u ravnini trokuta
b) T_1 je izvan trokuta, u ravnini trokuta, T_2 nije u ravnini trokuta
c) T_1 je izvan trokuta, u ravnini trokuta, T_2 je unutar trokuta, u ravnini trokuta
d) T_1 je unutar trokuta, u ravnini trokuta, T_2 nije u ravnini trokuta
e) ništa od navedenog

9. Napraviti podjelu prostora Warnock-ovim postupkom (quadtree) za poligone prikazane na slici. Dubina rekurzije je 4. Nacrtati sliku i označiti dobivene prozore sa
(1) poligon je izvan prozora
(2) poligon siječe prozor ili je u prozoru
(3) poligon prekriva prozor
(4) više poligona prekriva prozor

Površina označena brojem 3 je:
a) 21
b) 35
c) 29
d) 47
e) ništa od navedenog




```
GLint faces [6][4] = {
  {0, 1, 2, 3}, {3, 2, 6, 7}, {7, 6, 5, 4},
  {4, 5, 1, 0}, {5, 6, 2, 1}, {7, 4, 0, 3} };
GLfloat v[8][3] = {
  {0.0, 0.0, 0.0}, {1.0, 0.0, 0.0}, {1.0, 1.0, 0.0}, {0.0, 1.0, 0.0},
  {0.0, 0.0, 1.0}, {1.0, 0.0, 1.0}, {1.0, 1.0, 1.0}, {0.0, 1.0, 1.0}
};
void display (void)
{
  int i;
  for (i = 0; i < 3; i++) {
    glBegin(GL_QUADS);
    glVertex3fv(&v[faces[i][0]][0]);
    glVertex3fv(&v[faces[i][1]][0]);
    glVertex3fv(&v[faces[i][2]][0]);
    glVertex3fv(&v[faces[i][3]][0]);
    glEnd();
  }
}
```

10. Što će biti nacrtano na ekranu, izvršavanjem slijedećeg programskog odsječka

a) 3 kocke
b) 3 kvadrata koji imaju zajednički vrh
c) 3 odvojena kvadrata
d) 3 povezana kvadrata
e) ništa od navedenog

+++2. Domaća Zadaća+++

1. Zadane su dvije dužine u ravnini. Dužina p1 zadana je točkama V1(-7.19 , 7.25) i V2(-9.65 , 5.66), a dužina p2 točkama V3(-5.32 , -18.75) i V4(0.35 , -20.29). Dužina p1 preslikava se u p2 translacijom,rotacijom i jednolikim skaliranjem (tim redosljedom). Naći matricu transformacije.

2. Za pravac G1 zadan u parametarskom obliku te ravninu R u imlpicitnom obliku, odredite sjecište u homogenom prostoru:

$$G1 = [t\ 1]\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

R = [-2, 1, 1, 1]Odredite sjecište (x1, x2, x3, x4) u homogenom prostoru.

3. Zadani su centar projekcije C(43, 36, 41), dužina V1(34, 17, 27) - V2(28, 30, 18) te ravnina projekcije R: $16x + 4y + 14z + 6 = 0$. Odrediti perspektivnu projekciju dužine na ravninu.

4. Odredite koje su transformacije obavljene i tablicu upišite parametre tih transformacija! Ako je broj transformacija manji od broja redaka u tablici, preostale retke ostavite prazne. Retci se ne smiju preskakati! Originalni objekt iscrtan je crnom bojom, a objekt dobiven transformacijama kombinacijom boja. U slučaju rotacije, kut upisivati u treći stupac tablice, a četvrti ostaviti prazan! Nakon unosa svakog retka tablice kliknite na prvi stupac iste.

5. Izgradite BSP stablo

6. Odaberite redoslijed iscrtavanja

7. Izaberite čvor u kojem se nalazi očište

8. Zadana je pravac s karakterističnom matricom G i točka T: (0, -15, 14). Odredite udaljenost d točke T od pravca p.

$$G = \begin{bmatrix} -15 & 6 & -12 & 0 \\ -6 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

9. Odredite parametarski oblik bilinearne interpolacije V(u, v), ako su poznate vrijednosti u točkama:

V(0.00,0.00)=14.00
V(1.00,1.00)=14.00
V(0.00,1.00)=15.00
V(1.00,0.00)=17.00

Kolika je vrijednost za V(0.75, 0.23)?

10. DDA algoritmom nacrtati liniju na rasteru između zadanih točaka T0 i T1. U kućice upisati vrijednost parametra Xf iz algoritma. Vrijednost u kućici mora biti jednaka vrijednosti Xf prije "IF" grananja. Podatke za T0 i T1 nije potrebno unositi.
NAPOMENE: 1) u svakom RETKU između zadanih točaka smije postojati TOČNO JEDAN slikovni element!
2) Ishodište (točka (0, 0)) se nalazi u gornjem lijevom kutu prikaza, a y koordinata RASTE prema dolje
3) Točnost rješenja provjerava se na dvije decimale. Decimalne brojeve pisati s decimalnom točkom.

RJEŠENJA:

*****1. (2.MI)*****

V1(100, 0, 20) t=0
V2(500, 0, 50) t=1
H=20
Potreban je pravac koji prolazi točkama V1 i V2. On se dobije iz vektora između te dvije točke, te jedne od tih točaka. Za traženu točku V3 znamo da je na tom pravcu.
Xu = xv2 – xv1
Yu = yv2 – yv1

$u = 400\vec{i} + 30\vec{k}$

$$p = \begin{bmatrix} 400 & 0 & 30 & 0 \\ 100 & 0 & 20 & 1 \end{bmatrix}$$

$$u1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{H} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{V3} = (x, y, z, h) = (x, 0, z, 1) = (400t + 100, 0, z, 1)$

V1M1=(100,0,0,

V2M2=(500,0,0,$\frac{5}{2}$) $= (200, 0, 0, 1)$

$\vec{u} = 100\vec{i}$

$$p' = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 100 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$u = 0.8$

$x' = 100u + 100 = 180$

$y' = 0$

$z' = 0$

$h' = 1$

Dvije originalne točke se translatira na zadanu udaljenost. Parametar *u* je zapravo samo parametar *t*, ali u pravcu koji je određen translatiranim točkama. Translatiraju se točke, te se iz njih izračuna pravac p'. Nakon toga se uvrsti parametar *u* i izračunaju se podaci točke koja je ekvivalentna translatiranoj V3.
Sada znamo V3'. V3 znamo u ovisnosti o parametru *t* pomoću jednadžbe pravca između netranslatiranih V1 i V2. Obavi se translacija parametarski ovisne V3, te se translatirane koordinate izjednače s onima koje su izračunate iz jednadžbe translatiranog pravca.

$$x = 400 + 100$$

$$x' = \frac{x}{h'}$$

$$h' = \frac{Z}{H} = \frac{3}{2}t + 1$$

$$180 = \frac{400t}{\frac{3}{2}t + 1}$$

$$270t + 180 = 400t + 100$$

$$130t = 80$$

$$t = \frac{8}{13}$$

$$z = 30t + 20 = 38.46$$

Na kraju se izračuna parametar *t*, a pomoću njega i originalne jednadžbe pravca, tražena perspektivno korektna koordinata z.

*****2. (2.MI)*****

Zadane su početna i završna točka. V_0=(10 20 10), V_2=(5 30 10) , Bezierove krivulje u radnom prostoru i derivacija u završnoj točki V_2'=(5 10 0). Odrediti kvadratnu aproksimacijsku Bezier-ovu krivulju upotrebom Bernstein-ovih težinskih funkcija. Odrediti točku krivulje za iznos parametra t=0.3.

$$b_{i\,n}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i}$$

- krivulja je određena s tri točke (V_0, V_1, V_2) i njezin stupanj (n) = 2
- računamo Bernstein-ove težinske funkcije prema formuli (1)

$$b_{0,2} = \frac{2!}{0!\cdot 2!} \cdot t^0 \cdot (1-t)^2 = (1-t)^2$$

$$b_{1,2} = \frac{2!}{1!\cdot 1!} \cdot t^1 \cdot (1-t)^1 = 2t(1-t)$$

$$b_{2,2} = \frac{2!}{2!\cdot 0!} \cdot t^2 \cdot (1-t)^0 = t^2$$

- pomoću težinskih funkcija određujemo Bezier-ovu funkciju

$\vec{p}(t) = \sum_{i=0}^{n} \vec{r}_i \cdot b_{i,n}(t)$, gdje su:

n – stupanj krivulje

$\vec{r}_i$ – vrhovi kontrolnog poligona (radijus – vektori zadanih točaka)

t – parametar

$\vec{p}(t)$ – točka na krivulji

$$\vec{p}(t) = \sum_{i=0}^{2} \vec{r}_i \cdot b_{i,n}(t) = \vec{r}_0 \cdot (1-t)^2 + \vec{r}_1 \cdot 2 \cdot t \cdot (1-t) + \vec{r}_2 \cdot t^2$$

nepoznanica je $\vec{r}_1$

$$p'(t) = \vec{r}_0 \cdot (-2 + 2\cdot t) + 2 \cdot \vec{r}_1 \cdot (1 - t - t) + \vec{r}_2 \cdot 2 \cdot t$$

završna točka ima parametar t = 1

$$\begin{aligned} \vec{p}\,'(1) &= \vec{r}_0 \cdot (-2+2) + 2\cdot \vec{r}_1 \cdot (-1) + 2 \cdot \vec{r}_2 \\ &= -2\cdot \vec{r}_1 + 2\cdot \vec{r}_2 \\ &= V_2' \end{aligned}$$

$$-2\cdot \vec{r}_1 + 2\cdot(5 \quad 30 \quad 10) = (5 \quad 10 \quad 0)$$

$$\vec{r}_1 = \frac{(5 \quad 10 \quad 0)}{-2} + (5 \quad 30 \quad 10)$$

$$\vec{r}_1 = (2.5 \quad 25 \quad 10)$$

---

kad znamo $\vec{r}_1$, možemo uvrstiti zadani parametar t = 0.3 u jednadžbu

p (0,3) = $(0.7)^2$ (10 20 10) + 2·0.3·0.7 (2.5 25 10) + $(0.3)^2$ (5 30 10)

= (0.7^2 ·10 + 2 ·0.3·0.7 ·2.5 + 0.3^2 ·5 | 0.7^2 ·20 + 2 ·0.3·0.7 ·25 + 0.3^2 ·30 | 0.7^2 ·10 + 0.2 ·0.3·0.7 ·10 + 0.3^2 ·10)

= (6.4 23 10)

3. (2.MI)

Za rješavanje ovog zadatka zapravo nije potrebno znati toliko o krilatim bridovima. Zadatak se može riješiti tako da se pregleda zapis svakog brida, specifično, njegove krajnje točke. Bridovi susjedni zadanom vrhu su oni kojima taj vrh pripada, te je samo potrebno malo pripaziti i izdvojiti te bridove.
Za one koji pak žele znati što je to „krilati brid“, to je način zapisa bridova. Naizgled se čini složenim zapisivati više od osnovnog podatka (dvije rubne točke), ali u praksi se isplati zapisati malo više podataka o susjedima svakog brida.
Svaki brid je određen sa dvije točke, stoga su one zapisane. Uz točke, brid određuju i dva poligona, dio čijih rubova on određuje. U zapis stavljamo i te poligone jer je to koristan podatak u nekim slučajevima.
Iz krajnjih točaka brida izlazi nepoznati broj bridova, ali rubne točke brida također su i vrhovi poligona između kojih se nalazi. Iz svake točke, također, izlaze dva brida, koji dalje određuju poligone. Ako bi njih zapisali, bilo bi moguće pronaći sve bridove nekog poligona krećući se po samo po zapisima bridova, bez potrebe za skakanjem na zapis vrhova i natrag. Stoga se u zapis za trenutni brid se zapisuju i „kazaljke“ na ta četiri brida. Zapis se zove „krilati brid“ jer svaki brid, ako se istaknu ta četiri bridovi zapisana u njegovom opisnom polju, izgleda kao da ima krila.

*****4. (2.MI) – PRVI NAČIN*****

V_0 (10 20 10)
V_1 (50 40 20) zadaju P

T (0 10 10) → oko P za +30 (counter clockwise)

<u>IDEJA:</u>
1. dovesti pravac u ishodište (V_0 u ishodište)
2. poklopiti pravac sa x-osi (točka T leži u ravnini zy)
3. rotacija oko x-osi za 30˚
4. obrni 2 i 1
5. izmnoži sve matrice

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & -10 & -10 & 1 \end{pmatrix}$$ → pomak pravca u ishodište

2. Rotiramo pravac oko z-osi da dođe iznad x-osi, a zatim oko y-osi da se poklopi sa x-osi.

Određujemo kut rotacije oko z-osi:
(gledamo samo x i y koordinate)

$V_0' = V_0T_1 = (0, 0, 0)$
$V_1' = V_1T_1 = (40, 30, 10)$

negativan smjer!
$\alpha = -\ \text{arctg}\ 30/40$
$\alpha = -\ 36{,}86$
$\sin\alpha = -\ 3/5$
$\cos\alpha = 4/5$
sliku gledamo iz -z

$$T_2 = \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 & 0 & 0 \\ 3/5 & 4/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ → rotacija u smjeru kazaljke na satu za $\alpha = -36{,}87^\circ$ (suprotno -36,87)

Određujemo kut rotacije oko y-osi:
(gledamo x i z koordinate)

$V_0'' = V_0'T_2$
$V_0'' = (0, 0, 0)$ (zanemarujemo y kasnije)

$V_1'' = V_1'T_2$
$V_1 = 50\ \ 0\ \ 10\ \ 1$

Kut:

$\beta = \text{arctg}\ 10/50$
$\beta = +\ 11{,}31$ (smjer suprotno od kazaljke na satu je pozitivan!)
$\sin\beta = 0{,}196$
$\cos\beta = 0{,}98$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 0.98 & 0 & -0.196 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.196 & 0 & 0.98 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ → rotacija oko y za -11,31 (11,31° u smjeru kazaljke na satu)

cos 30 = 0,866 sin 30 = 0,5

$$T_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.866 & 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ → rotacija oko x-osi za 30° (x se sada poklapa s pravcem)

$$T_5 = \begin{pmatrix} 0.98 & 0 & 0.196 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.196 & 0 & 0.98 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ → oko y za -11,31°

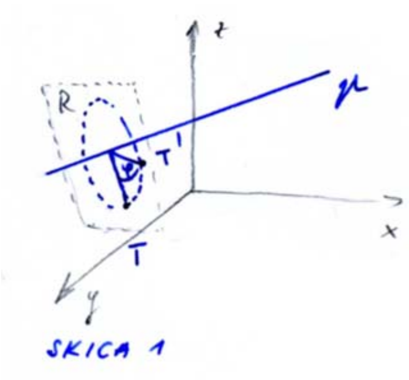
$$T_6 = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 & 0 & 0 \\ -3/5 & 4/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ → oko z za +36,87°

$$T_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 10 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$ → T_5, T_6, T_7 obrću T_3, T_2, T_1

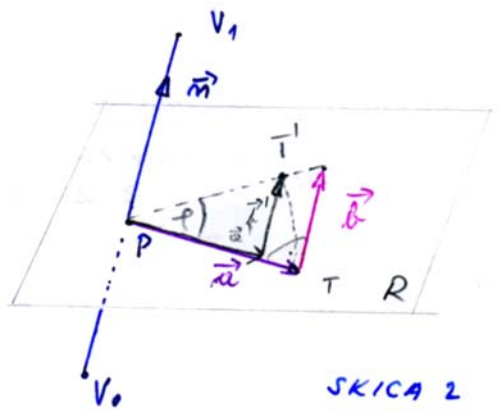
*****4. (2.MI) – DRUGI NAČIN*****

Zadan je pravac p točkama $V_0 = (10\ \ 10\ \ 10)$ i $V_1 = (50\ \ 40\ \ 20)$. Odrediti rotiranu točku T' koju dobijemo rotacijom točke $T = (0\ \ 10\ \ 10)$ oko pravca p za $+30^\circ$ (+ znači suprotno smjeru kazaljke na satu) gledano iz V_1 u V_0.

VELIKA mana prethodnog postupka je u tome što se mora računati 3 inverza matrice i potom množiti 7 matrica; drugi postupak je malo kompliciraniji za shvatiti, ali zato iziskuje mnogo manje računa.



Rotirati točku oko pravca je isto što i rotirati točku u ravnini oko neke druge točke, s time da se radi o ravnini kojoj pripada točka T (koju želimo rotirati) i proizvoljna točka pravca p, s time da je pravac okomit na ravninu



- vektor normale odredimo iz točaka V_0 i V_1

$\vec{n} = \overrightarrow{(V_1\text{-}V_0)} = (40\ \ 30\ \ 10) = (4\ \ 3\ \ 1)$

- odredimo ravninu R pomoću vektora normale $\vec{n}$ i točke T

R ... 4x + 3y + z + D = 0
T = (0 10 10)
30 + 10 + D = 0
D = - 40
R ... 4x + 3y + z - 40 = 0

- odredimo jednadžbu pravca p

$$p ... \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 10 & 10 & 10 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{ vektor nosioc pravca} \\ \rightarrow \text{ jedna točka pravca} \end{array}$$

Sada možemo odrediti točku p koja je zajednička pravcu p i ravnini R
4 (4t + 10) + 3 (3t + 10) + t + 10 – 40 = 0
26 t = – 40

x = 4t + 10 = 50/13   y = 3t + 10 = 70/13   z = t + 10 = 110/13   n = 1

$$P = \begin{pmatrix} \frac{50}{13} & \frac{70}{13} & \frac{110}{13} \end{pmatrix}$$

---

2. Odredimo vektor $\vec{a} = \overrightarrow{(PT)} = \begin{pmatrix} -\frac{50}{13} & \frac{60}{13} & \frac{20}{13} \end{pmatrix}$

4. Radi lakšeg izračuna normiramo vektor n da bude jedinični

$$\vec{n}_a = \frac{\vec{n}}{|n|} = \frac{\vec{n}}{\sqrt{4^2+3^2+1^2}} = \frac{\vec{n}}{\sqrt{26}}$$

---

3. Odredimo vektor $\vec{b}$ $\qquad \vec{b} = \vec{n}_a \times \vec{a}$

---

5. $\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{26}} \cdot \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 1 \\ -\frac{50}{13} & \frac{60}{13} & \frac{20}{13} \end{pmatrix} = \frac{10}{13\cdot\sqrt{26}} \cdot \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 1 \\ -5 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \frac{10}{13\cdot\sqrt{26}} \cdot \left(0\cdot\vec{i} - 13\vec{j} + 39\vec{k}\right)$

Prvo definiramo točku T':

$$T' = P + \vec{a}\cdot\cos\varphi + \vec{b}\cdot\sin\varphi = P + \vec{a}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \vec{b}\cdot\frac{1}{2}$$

☼ koga zanima zašto se ovo radi na ovaj način, neka pogleda pojašnjenje, a ostali neka naštrebaju formulu i zapamte sliku 2 da znaju što znači koja oznaka

---

6. Izračun točke T

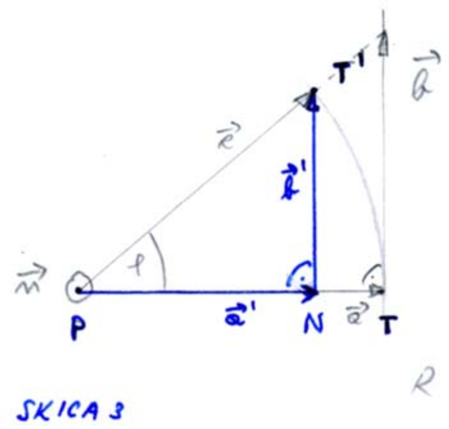
$$T' = \begin{pmatrix} \frac{50}{13} & \frac{70}{13} & \frac{110}{13} \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{50}{13} & \frac{60}{13} & \frac{20}{13} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{13\cdot\sqrt{26}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -13 & 39 \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 5 & 7 & 11 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 6 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\cdot\sqrt{26}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -13 & 39 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{10}{13} \cdot \begin{pmatrix} 0.6696 & 10.9214 & 16.55 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.51 & 8.40 & 12.74 \end{pmatrix}$$

☼ Izvod



U ravnini **R** točka **T** rotira oko točke **P**, zato su vektori $\vec{a}$ i $\vec{c}$ jednake duljine $|\vec{a}| = |\vec{c}|$

Odredimo vektor $\vec{b}$ koji pripada ravnini **R** i okomit je na vektor $\vec{a}$. Kako pripada ravnini, okomit je i na normalu ravnine $\vec{n}$, pa ga možemo dobiti iz vektorskog umnoška istih

$\vec{b} = \vec{a} \times \vec{n}$

Naš cilj je dobiti točku **T'** iz točke **P** kao zbroj vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Međutim, vidimo da nas taj zbroj ne može dovesti u **T'**. Stoga određujemo vektore $\vec{a}\,'$ i $\vec{b}\,'$, $\vec{a}\,' \| \vec{a} \wedge \vec{b}\,' \| \vec{b}$

Promotrimo **Δ PNT'** čije su stranice $|\vec{c}|$, $|\vec{a}|$ i $|\vec{b}|$.

Kako je trokut pravokutan, vrijedi:

$|\vec{a}| = |\vec{c}| \cdot \cos\varphi$ $\quad |\vec{b}\,'| = |\vec{c}| \cdot \sin\varphi$ iz $|\vec{c}| = |\vec{a}|$ => $|\vec{a}\,'| = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi$ $\quad |\vec{b}\,'| = |\vec{a}| \cdot \sin\varphi$

Smjer vektora $\vec{a}\,'$ je isti kao i smjer od $\vec{a}$, pa $\vec{a}\,'$ možemo dobiti kao umnožak njegove duljine i jediničnog vektora u smjeru $\vec{a}$, $\hat{a}$

$$\vec{a}\,' = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi \cdot \hat{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \vec{a} \cdot \cos\varphi$$

slično

$$\vec{b}\,' = |\vec{b}| \cdot \sin\varphi \cdot \vec{b} = \frac{|\vec{a}| \cdot \sin\varphi \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

Da bismo si olakšali račun, pri dobivanju vektora $\vec{b}$ možemo umjesto $\vec{n}$ uzeti $\hat{n}$, tj jedinični vektor u smjeru $\vec{n}$, time će vrijediti:

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \qquad \vec{b} = \hat{n} \times \vec{a} \qquad |\vec{b}| = |\vec{a}|$$

Račun za $\vec{b}\,'$ nam sada glasi:

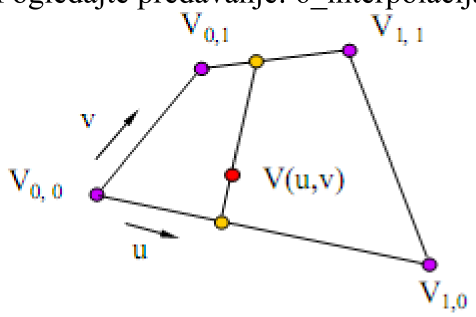
$$\vec{b}\,' = \frac{\vec{b} \cdot |\vec{a}| \cdot \sin\varphi \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \vec{b} \cdot \sin\varphi$$

5. (2.MI)

V(0,0) = 2
V(0,1) = 3
V(1,0) = 5
V(1,1) = 4
V(1.5, 1.5)=?

Postupak:
Blilinearna interpolacija – radimo sa 4 točke.
U svakoj je neka vrijednost
Mozemo ih gledati kao da razapinju neki četverokut (vidi priloženu sliku).
Ovisno o tome gdje se nalazimo u polju oko njih gledamo doprinos pojedine točke
Doprinos se računa po sljedećoj formuli. Potrebno je uočiti da će podebljani članovi formule osigurati da točka V(0,0) daje najveći doprinos kad a se nalazimo blizu nje. Sukladno tome, i ostale tri točke daju najveći doprinos kada smo bliže njima (bliže ovdje znači da su u i v parametri funkcije bliže parametrima zadane točke).
$V(u,v) = (\mathbf{1\text{-}u})*(\mathbf{1\text{-}v})*V(0,0) + (\mathbf{1\text{-}u})*\mathbf{v}*V(0,1) + \mathbf{u}*(\mathbf{1\text{-}v})*V(1,0) + \mathbf{u}*\mathbf{v}*V(1,1)$

Pogledajte predavanje: 6_interpolacija_krivulje, slajd 3. ak.god. 2007/2008



Vrijednost koju funkcija vrati je pozicija na dužini omeđenoj žutim točkama na slici.
Ukratko – za točno riješiti ovaj zadatak na ispitu dovoljno je samo ubaciti zadane podatke u formulu.

V(u,v) = (1-1.5)*(1-1.5)*2 + (1-1.5)*1.5*3 + 1.5*(1-1.5)*5 + 1.5*1.5*4 = 3.5

6. (2.MI)

U IZRADI

7. (2.MI)

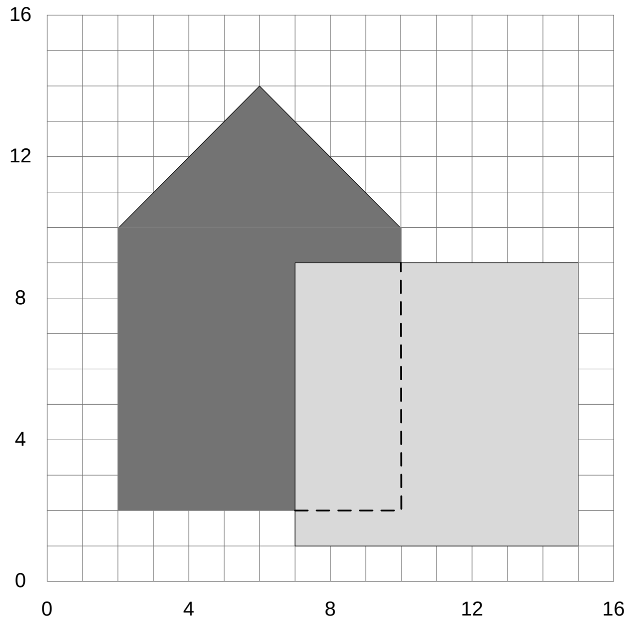
U IZRADI

8. (2.MI)

U IZRADI

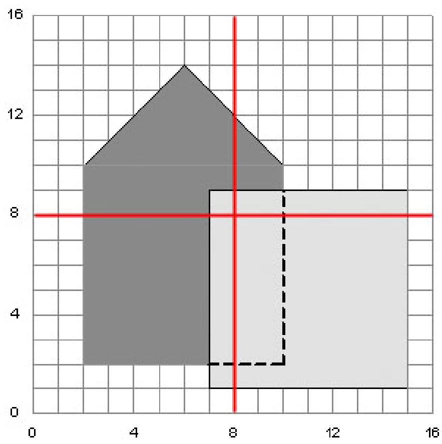
*****9. (2.MI)*****

9. Napraviti podjelu prostora Warnock-ovim postupkom (quadtree) za poligone prikazane na slici. Dubina rekurzije je 4. Nacrtati sliku i označiti dobivene prozore sa
(1) poligon je izvan prozora
(2) poligon siječe prozor ili je u prozoru
(3) poligon prekriva prozor
(4) više poligona prekriva prozor
Odrediti površinu označenu brojem 3.

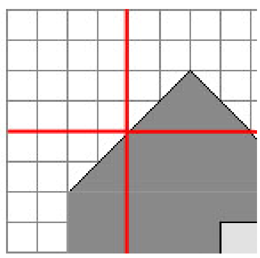


Warnock-ov algoritam je rekurzivan algoritam koji služi uklanjanju skrivenih površina. Može ga se (pojednostavljeno) prikazati ovako:

```
Warnock(kvadrat){
        AKO (uvjet 1) označi kvadrat sa 1;
        INAČE AKO (uvjet 2) označi kvadrat sa 2;
        INAČE AKO (uvjet 3) označi kvadrat sa 3;
        INAČE AKO (uvjet 4) označi kvadrat sa 4;
        INAČE {     podijeli kvadrat na 4 manja;
                    Warnock(kvadrat_1);
                    Warnock(kvadrat_1);
                    Warnock(kvadrat_1);
                    Warnock(kvadrat_1);
              }
        povratak;
}
```

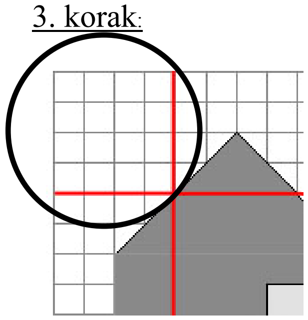


1. korak: Cijeli kvadrat
Nemamo zadovoljene uvjete pa se on dijeli na 4 dijela i rekurzivno se poziva algoritam za svakoga od njih.

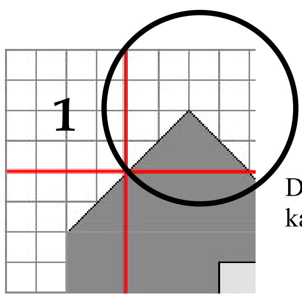


2. korak: Gornji lijevi kvadrat. I ovdje nemamo čistu situaciju pa se kvadrat opet dijeli.

3. korak:

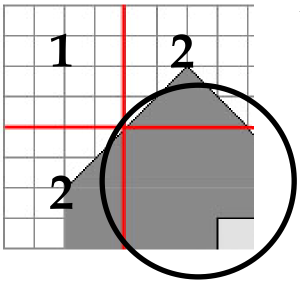


Gornji lijevi kvadrat, poligon izvan prozora (1. uvjet) zapišemo 1

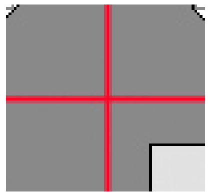


Gornji desni kvadrat, poligon siječe prozor ili je u prozoru (2. uvjet), zapišemo 2.

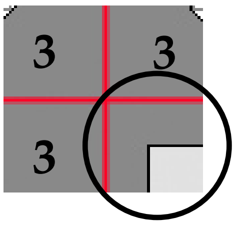
Donji lijevi kvadrat, ista situacija kao i ranije, zapišemo 2.



U donjem desnom kvadratu nemamo čistu situaciju, moramo opet dijeliti…

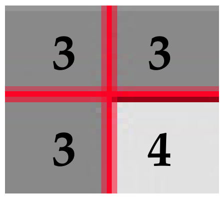


<u>4. korak</u>



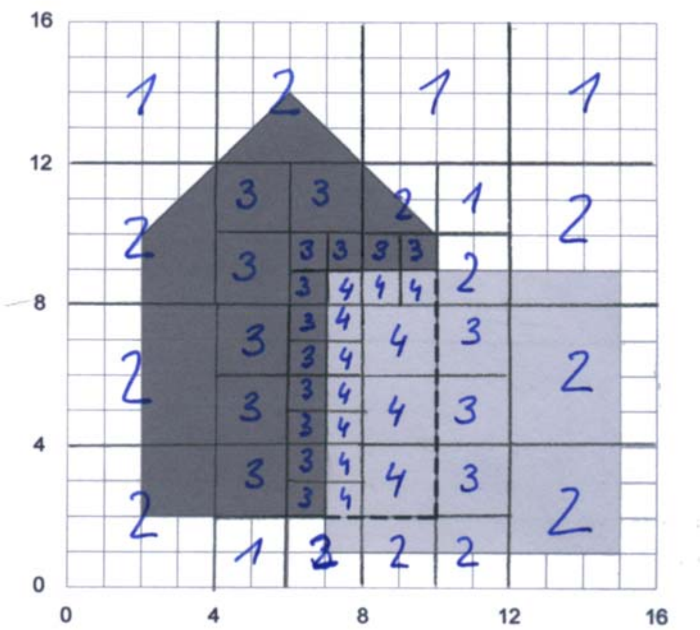
U donjem desnom kvadratu nemamo čistu situaciju, moramo opet dijeliti…

<u>5. Korak</u>



Napokon gotovo. Vraćamo se natrag i započinjemo analizu gornjeg desnog velikog kvadrata…

<u>Konačno rješenje:</u>



Ukupna površina označena brojkom 3 je 47.

*****10. (2.MI)*****

```
GLint faces [6][4] = {
  {0, 1, 2, 3}, {3, 2, 6, 7}, {7, 6, 5, 4},
  {4, 5, 1, 0}, {5, 6, 2, 1}, {7, 4, 0, 3} };
GLfloat v[8][3] = {
  {0.0, 0.0, 0.0}, {1.0, 0.0, 0.0}, {1.0, 1.0, 0.0}, {0.0, 1.0,
0.0},
  {0.0, 0.0, 1.0}, {1.0, 0.0, 1.0}, {1.0, 1.0, 1.0}, {0.0, 1.0,
1.0}
};
void display (void)
{
 int i;
 for (i = 0; i < 3; i++) {
   glBegin(GL_QUADS);
   glVertex3fv(&v[faces[i][0]][0]);
   glVertex3fv(&v[faces[i][1]][0]);
   glVertex3fv(&v[faces[i][2]][0]);
   glVertex3fv(&v[faces[i][3]][0]);
   glEnd();
 }
}
```

Da bismo mogli uspješno i točno riješiti ovaj zadatak, potrebno je razumjeti što radi zadani programski odsječak.
GLint faces je dvodimenzionalno polje. Svaki pojedini član lan tog polja je niz cijelih brojeva, koji predstavljaju redne brojeve vrhova poligona.
GLfloat v je također dvodimenzionalno poje čiji je svaki član niz od tri realna broja.
U funkciji display tri puta se izvodi blok naredbi uokviren s glBegin() i glEnd().
Funkcija glBegin označaa početak zadavanja vertexa (vrhova), koji se upisuju u međuspremnik (buffer). Parametar koji funkcija prima odrđuje način povezanosti zadanih vrhova. (GL_QUADS) označava ispunjene kvadrate, GL_LINES generirao bi žičani oblik. Unutar glBegin i glEnd mogu se zadavati i boje uz pojedine vrhove,
GL_TRIANGLE_STRIP dva trokuta…
Za detaljnu listu svih naredbi koje se mogu zadavati unutar glBegin i glEnd, pogledati dokumentaciju OpenGL-a.

Funkcija glVertex zadaje jednu točku. Sufiks funkcije određuje parametre koje ona prima.
glVertex**abc:**

a: broj parametara koje funkcija prima, ne može se izostaviti
b: tip podataka parametara (i – int, f – float, b – byte…), ne može se izostaviti
c: Ukoliko se ovdje napiše „v“, funkcija umjesto broja parametara određenog brojem a prima polje koje se sastoji od a parametara. Ukoliko se izostavi, prima se a parametara.

Funkcija u ovom zadatku ima sufiks 3fv, što znači da prima 3 elementa, tipa float, kao polje.

Izraz iz programa potrebno je promatrati u nekoliko koraka:

```
for (i = 0; i < 3; i++) {
   glBegin(GL_QUADS);
         glVertex3fv(&v[faces[i][0]][0]);
```

```
        glVertex3fv(&v[faces[i][1]][0]);
        glVertex3fv(&v[faces[i][2]][0]);
        glVertex3fv(&v[faces[i][3]][0]);
    glEnd();
```

U for petlji zadaju se četiri vrha.
faces[i][0] – brojem i adresiramo jednu grupu od četiri elementa unutar polja faces (vidi gore)
v[faces[i][0]][0] adresirati će prvi član jedne od grupa unutar polja v. Redni broj člana biti će određen brijem dobivenim iz polja faces. U konkretnom slučaju, ako je i=1, faces[1][0] iznosi 3 (vidi gore, element je podebljan).
V[3][0] adresira prvi član četvrtog niza float brojeva u polju v (vidi gore, podebljan crveno).
& v[3][0] daje adresu cijelog niza uokvirenog viticama u kojem se taj član nalazi.
Kada se to polje pošalje u glVertex, on ga interpretira kao niz od 3 realna broja, i prema njima odredi koordinate točke.

Iz ovoga se vidi da je smisao polja v određianje vrhova (njih 8), a smisao polja faces određivanje grupa od četiri vrha. U četiri poziva glVertex funkcije ucrtali smo četiri točke zadane u nizu unutar polja faces nizom adresiranim parametrom i. gl_quads govori da se radi o ispunjenim kvadratima.

RJEŠENJE:
Prvi kvadrat koristi niz {0, 1, 2, 3} da odredi svoje vrhove. Drugi i treći koriste nizove {3, 2, 6, 7} i {7, 6, 5, 4}. Prvom i drugom kvadratu zajednička je stranica određena vrhovima 2 i 3. drugom i trećem zajednička je dužina određena vrhovima 6 i 7. Iz toga se vidi da se iscrtavaju tri povezana kvadrata

+++1. (2.DZ)+++

$\overline{\text{V1V2}}$
$\overline{\text{V3V4}}$

V1 (-8.32, -9.82)
V2 (7.08, -9.18)
V3 (-22.03, 9.96)
V4 (13.65, -27.56)

afina matrica transformacija, M=? V1 $\rightarrow$ V3; V2 $\rightarrow$ V4

1. Translacija u ishodište

$$M1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_1 & -y_1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Račun kuta rotacije

a) $\overline{\text{V1V2}} \quad \rightarrow \cos\alpha = \dfrac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \rightarrow \alpha$

b) $\overline{\text{V3V4}} \quad \rightarrow \cos\beta = \dfrac{x_4 - x_3}{\sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2}} \rightarrow \beta$

3. Rotacija za $-\alpha = \varphi$

$$M2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Skaliranje u smjeru x-osi

$$M3 = \begin{pmatrix} \dfrac{d_{34}}{d_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Rotacija za $+\beta = \varphi$

$$M4 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Translacija iz ishodišta u (x3, y3)

$$M5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}$$

$d_{12} = 15.41$
$d_{34} = 51.78$

$\alpha = 2.39°$
$\beta = -46.44°$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1611}{2500} & -\frac{37}{50} & 0 \\ \frac{37}{50} & \frac{1611}{2500} & 0 \\ \frac{-146903}{15623} & \frac{1266401}{125000} & 1 \end{pmatrix}$$

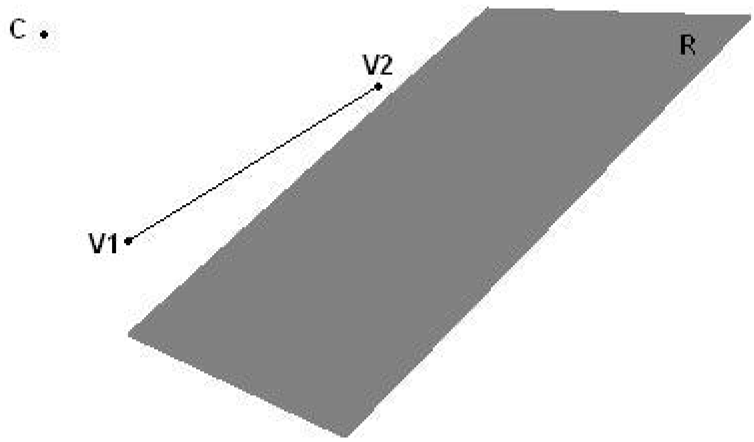
+++2. (2.DZ)+++

$$\left.\begin{array}{l} \text{pravac} \quad G = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ \text{ravnina} \quad R = \begin{bmatrix} u & v & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \text{Računamo presjek}$$

Zbog greške u postupku, biti će objašnjen u kasnijoj verziji zbirke.

+++3. (2.DZ)+++

Zadani su centar projekcije C(43, 36, 41), dužina V1(34, 17, 27) - V2(28, 30, 18) te ravnina projekcije R: 16x + 4y + 14z + 6 = 0. Odrediti perspektivnu projekciju dužine na ravninu.



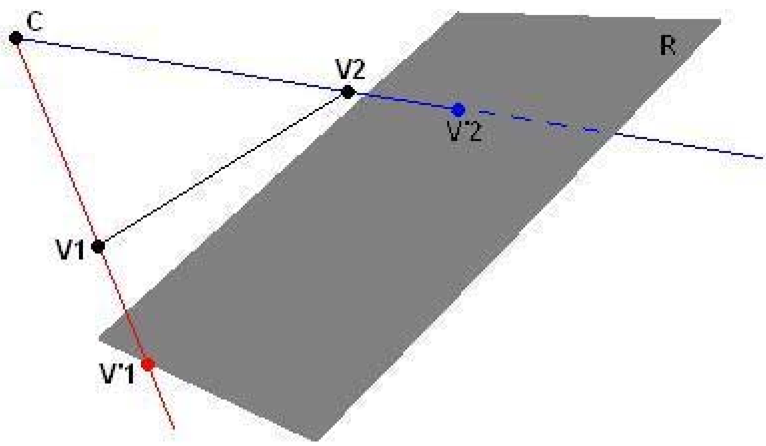
C(43, 36, 41)
V1(34, 17, 27)
V2(28, 30, 18)
R = 16x + 4y + 14z + 6 = 0

$p1 \longleftrightarrow \overrightarrow{V1C} \qquad \vec{u}_{p1} = 9\vec{i} + 19\vec{j} + 14\vec{k}$

$$p1 = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 19 & 14 & 0 \\ 43 & 36 & 41 & 1 \end{bmatrix}$$

$p2 \longleftrightarrow \overrightarrow{V2C} \qquad \vec{u}_{p2} = 15\vec{i} + 6\vec{j} + 23\vec{k}$

$$p2 = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 & 6 & 23 & 0 \\ 43 & 36 & 41 & 1 \end{bmatrix}$$



V1'
16(9t+43)+4(9t+36)+14(14t+41)+6=0
t(144+76+196)+(688+144+574)+6=0

416t=-1412

$t=-\frac{353}{104}$

V1' se izračuna iz jednadžbe pravca sa izračunatim parametrom t.

V1' (12.45, -28.49, -6.52)

Ideja zadatka:

$$\left.\begin{matrix}\text{Centar projekcije}\\ \text{i}\\ \text{Vrhovi dužine}\end{matrix}\right\}\text{pravci}$$

Napraviti 2 pravca

Oba pravca prolaze kroz centar projekcije i jedan kroz jedan vrh duzine, a drugi kroz drugi vrh.

Mjesta proboda tih pravaca i zadane ravnine su točke tražene u zadatku.

$$p2=\begin{bmatrix} t & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}15 & 6 & 23 & 0\\ 43 & 36 & 41 & 1\end{bmatrix}$$

V2'

V2'=(15t+43, 6t+36, 23t+41)

R(V2')=0

16(15t+43)+4(6t+36)+14(23t+41)+6=0

(240t+24t+322t)+(688+144+574+6)=0

586t=-1412

t=-2.409

V2'(6.85, 21.54, -14.42)

+++4. (2.DZ)+++

U IZRADI

+++5. (2.DZ)+++

U IZRADI

+++6. (2.DZ)+++

U IZRADI

+++7. (2.DZ)+++

U IZRADI

+++8. (2.DZ)+++

U IZRADI

+++9. (2.DZ)+++

U IZRADI

-> U biti je identičan 5. zadatku sa 2. međuispita

+++10. (2.DZ)+++

U IZRADI

NADAMO SE DA VAM JE OVA ZBIRKA BAREM DONEKLE POMOGLA U PRIPREMI ZA ZAVRŠNI ISPIT.