Interaktivna računalna grafika - zadaci s ferka

Autor: Cvija

August 19, 2020

Uvod

Neslužbeni studentski dokument.

Napravio student s ciljem lakšeg prolaska predmeta Interaktivna računalna grafika na Fakultetu Elektrotehnike i Računarstva i učenja Latex-a.

Svi zadaci su riješeni i objašnjeni redom kako su i zadani na ferku, a u dokumentu nisu navedeni jedini načini rješavanja zadataka, postoje i drugi.

Ako želite pokušati zadatke napisane Java appletima rješavati na Chromeu, posjetite ovu web stranicu:
https://www.lifewire.com/how-to-enable-java-in-chrome-4770854

Za ostale pretraživače:
https://java.com/en/download/help/enable_browser.xml

Chrome i ostali pretraživači ne garantiraju da će vam se rješenja upisati u sustav ferko, jedini pretraživač koji vam to omogućuje je **Internet Explorer** na Windows 7 i starijima.

Službena literatura: Knjiga M. Čupić, Ž. Mihajlović, *Interaktivna Računalna Grafika Kroz Primjere u OpenGL-u*, 17. listopad 2018.
http://www.zemris.fer.hr/predmeti/irg/knjiga.pdf

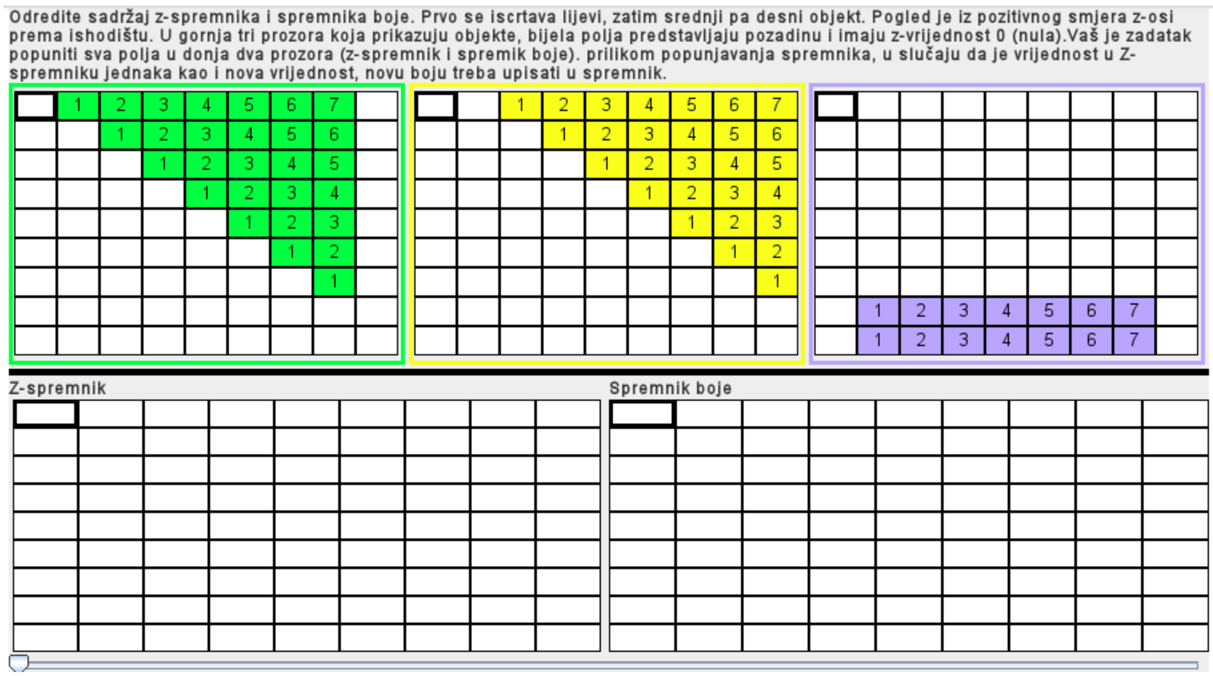
1 Rad s matricama i vektorima na Casio-fx-991EX

Rad s vektorima: https://www.youtube.com/watch?v=-e9rMLADtpE
Ako je potrebno izračunati normu (duljinu) vektora, može se pritisnuti "**SHIFT** + **(**" da se dobije apsolutna vrijednost i unijeti željeni vektor.

Rad s matricama: https://www.youtube.com/watch?v=bF024pVvYPQ

2 Računalna grafička oprema

2.1 Popunjavanje Z-spremnika

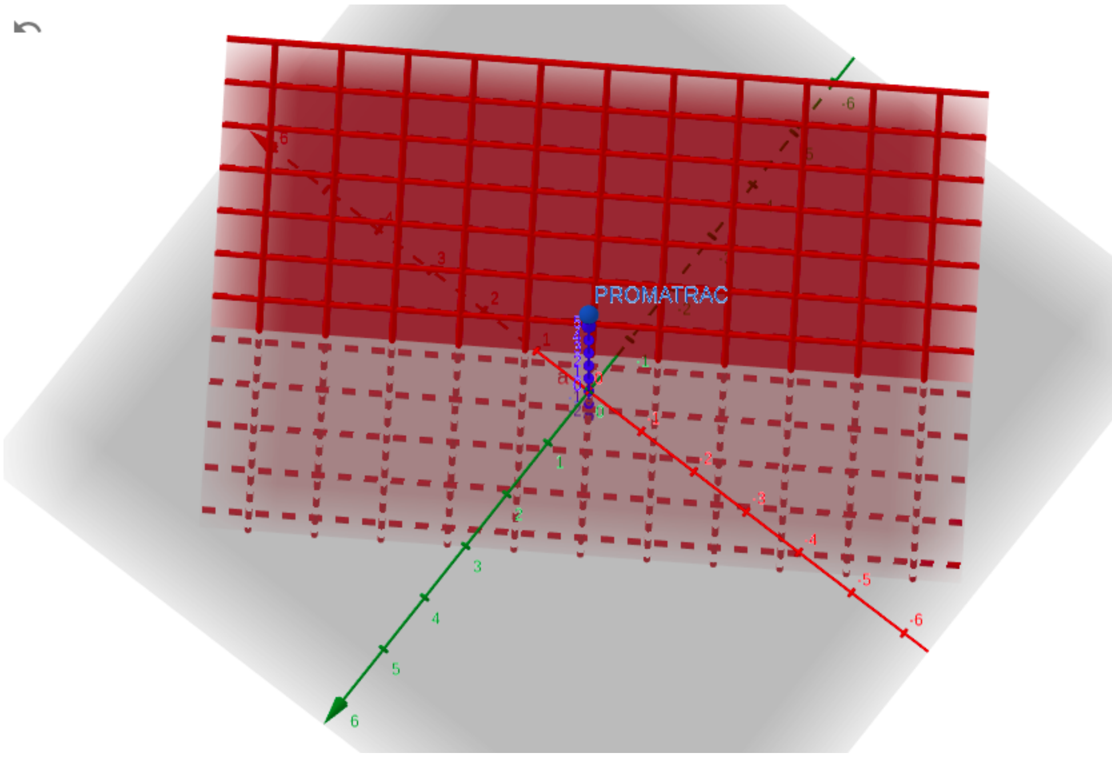


Slika 1: Zadatak

Z-buffer radi na način da gleda koji objekti su bliži promatraču, a koji dalji i na temelju toga iscrtava sliku na zaslon. Odličan dvominutni video će vrlo jednostavno objasniti o čemu se radi:
https://www.youtube.com/watch?v=yhwg_O5HBwQ

Prva stvar koju je potrebno primijetiti u zadatku je ta da je pogled usmjeren iz pozitivnog smjera z-osi prema ishodištu. To je malo drugačije nego je objašnjeno u videu.

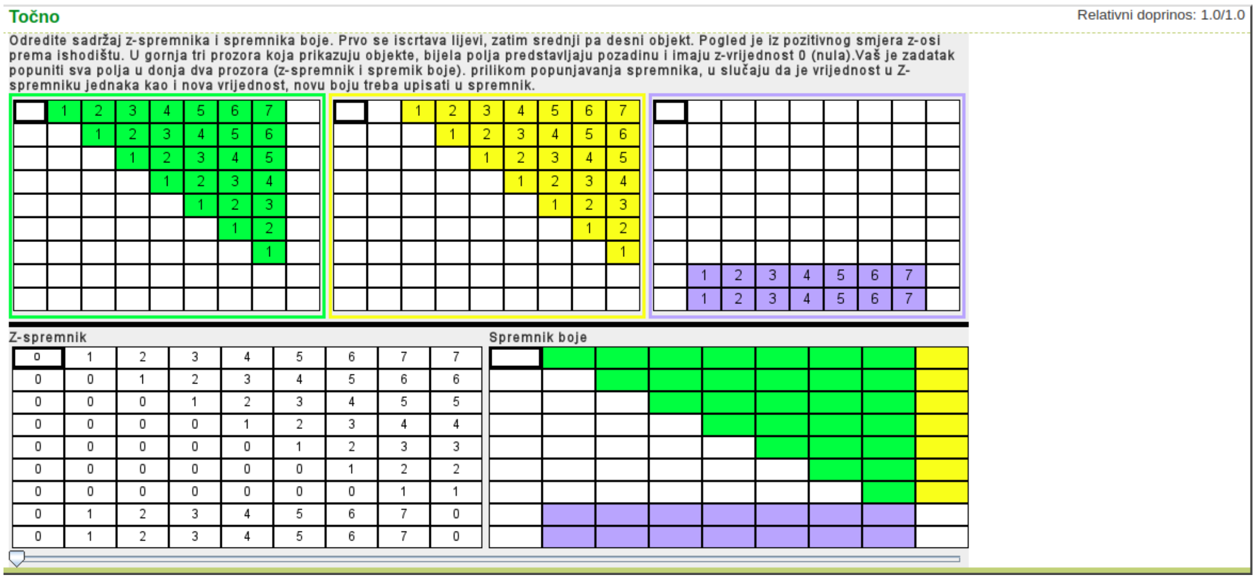
Na Slici 2. je vidljivo da se promatrač nalazi na pozitivnom dijelu Z-osi (u ovom slučaju točka (0, 0, 6)) i gleda prema ishodištu. Iscrtkane linije plohe predstavljaju manju vrijednost z koordinate, a pune linije veću. Iz razloga što se promatrač nalazi u pozitivnom dijelu z-osi, u Z-buffer će se spremati veće vrijednosti z koordinate preko manjih, a ne obrnuto.



Slika 2: Tijela i promatrač u koordinatnom sustavu

Znači, ako se dogodi da nam se dvije boje preklapaju, u z spremnik će se upisati veća vrijednost z koordinate od te dvije.
Što se tiče spremnika boje, ako se dvije boje preklapaju u vrijednostima z-koordinate, ona desnija se upisuje u spremnik boje (piše u zadatku).

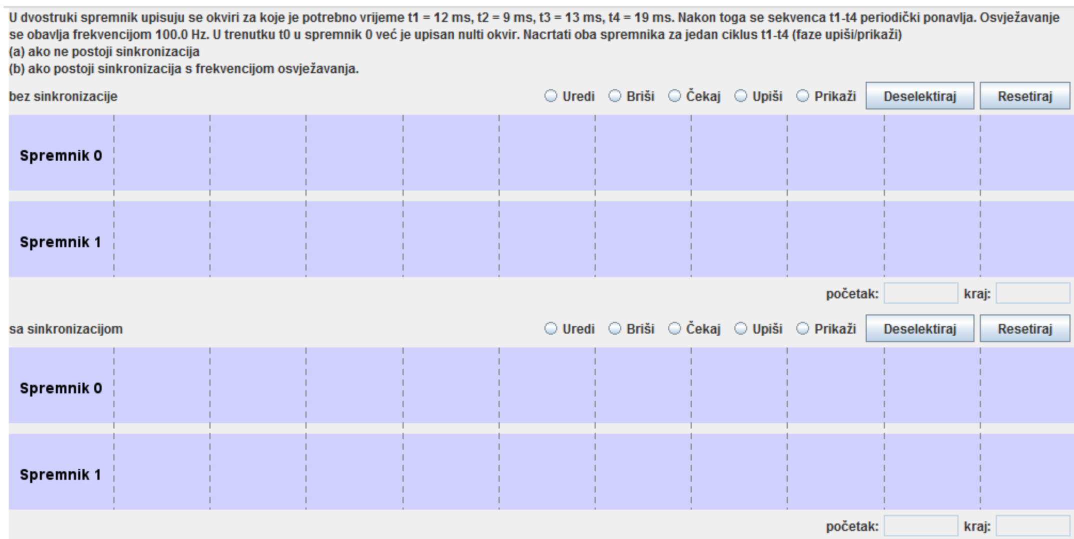
Rješenje zadatka je na Slici 3.



Slika 3: Rješenje zadatka

2.2 Popunjavanje dvostrukog spremnika

Petminutni video koji pojašnjava ukratko rad dvostrukog spremnika:
https://www.youtube.com/watch?v=7cRRxlWRl8g



Slika 4: Zadatak

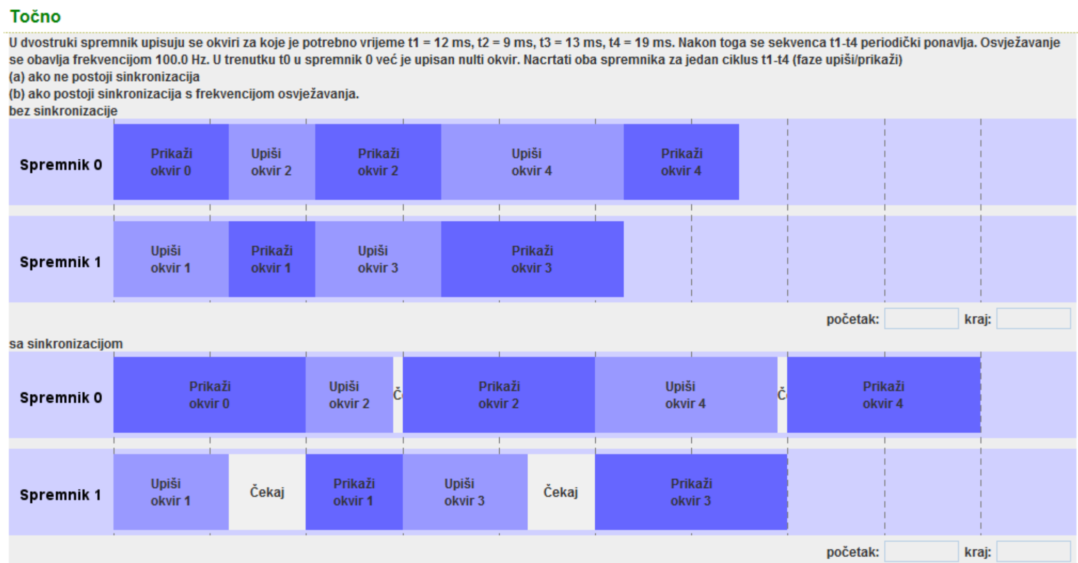
U zadatku je potrebno nacrtati rad oba **spremnika** bez sinkronizacije i sa sinkronizacijom. Rad bez sinkronizacije se izvodi na sljedeći način:
Jedan **spremnik** je zaslužan za prikaz sadržaja (*okvira*), a drugi za upis. Npr. ako je u nultom **spremniku** prikazan nulti *okvir*, u prvom **spremniku** se mora izvršavati upis prvog *okvira*. Onoliko dugo koliko se prvi *okvir* upisuje, toliko je nulti *okvir* prikazan na ekranu.

Nakon toga se događa zamjena **spremnika**, to jest, u nulti **spremnik** se sad upisuje sljedeći (drugi) *okvir*, a u prvom **spremniku** se vrši prikaz prethodnog (prvog) *okvira* onoliko dugo koliko je drugom *okviru* potrebno da se upiše i tako dalje.

Rad sa sinkronizacijom je dosta sličan prethodno opisanom postupku, uz malu razliku. Ta razlika je što svaki *okvir* mora biti prikazan na ekranu brojem milisekundi koji je višekratnik vremena osvježavanja. U zadatku je specificirano da je frekvencija osvježavanja 100 Hz, recipročna vrijednost će dati vrijeme, jer:

$$T = 1/f \tag{1}$$

Iz toga se dobije da je T=0.01 sekundi. Pomnoži se s 1000 i dobije se T=10 ms. To jest svaki se *okvir* mora prikazati 10, 20, 30 ili neki višekratnik broja 10 ms.
To znači da prilikom upisivanja *okvira* u **spremnik** se mora dogoditi čekanje da bi isteklo vrijeme osvježavanja, a to je predstavljeno okvirom **Čekaj**.
Nakon toga se vrši zamjena **spremnika** i proces se nastavlja.



Slika 5: Rješenje

3 Grafičke primitive

3.1 Dvodimenzijske

3.1.1 Sjecište dva pravca - implicitni i matrični oblik

Homogeni prostor se koristi kako bi se točke u beskonačnosti mogle prikazati na računalu. Točnije, ako je homogena koordinata jednaka 0, točka se nalazi u beskonačnosti. Homogena jednadžba se može prikazati kao:

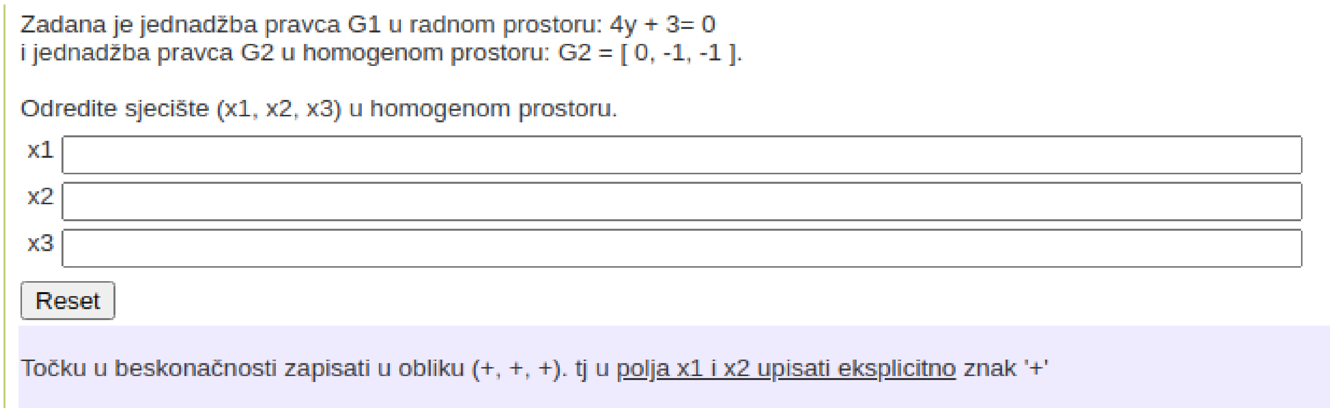
$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \tag{2}$$

ili matrično (točka X skalarno sa koeficijentima jednadžbe G):

$$X \cdot G = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \tag{3}$$

Implicitni oblik (radni prostor) jednadžbe je oblika:

$$ax + by + c = 0 \tag{4}$$



Zadana je jednadžba pravca G1 u radnom prostoru: 4y + 3= 0
i jednadžba pravca G2 u homogenom prostoru: G2 = [0, -1, -1].

Odredite sjecište (x1, x2, x3) u homogenom prostoru.

x1

x2

x3

Reset

Točku u beskonačnosti zapisati u obliku (+, +, +). tj u polja x1 i x2 upisati eksplicitno znak '+'

Slika 6: Zadatak

Kako bi se riješio zadatak potrebno je riješiti dvije jednadžbe s dvije nepoznanice. To se može matrično ili klasičnim pristupom.
Prva stvar koju je potrebno napraviti je izjednačiti h koordinatu s 1, a samim time i koeficijente pravca G_2. To jest:

$$G_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot (-1)$$

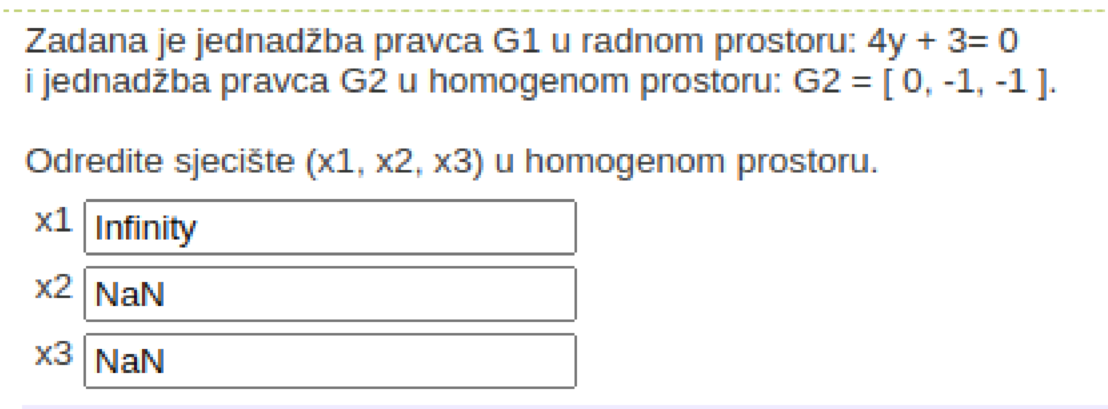
$$G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sada imamo dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$4y + 3 = 0$$

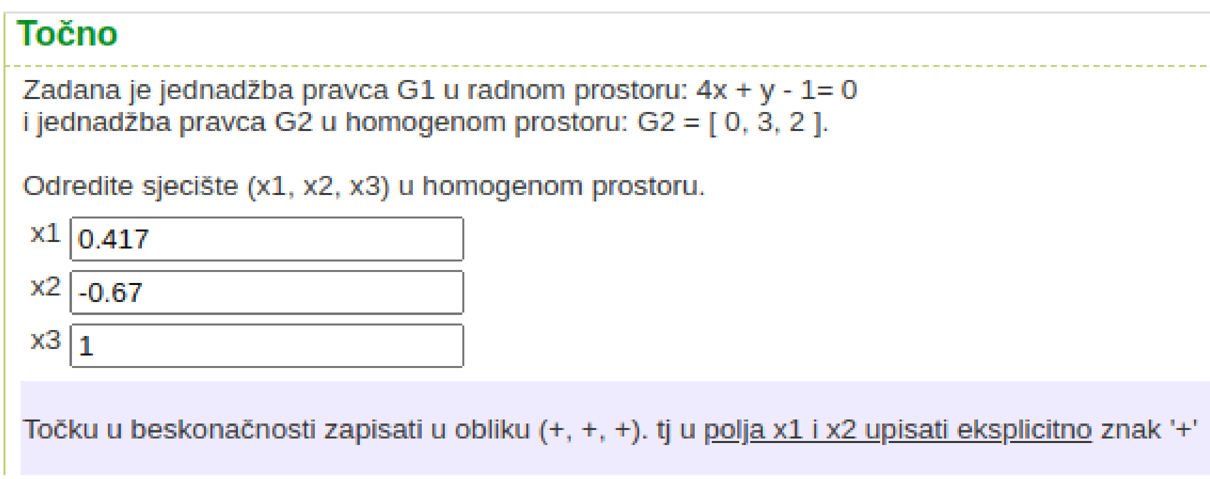
$$y + 1 = 0$$

Druga jednadžba se dobije iz homogene jednadžbe pravca ($x_2 = y$). Ove jednadžbe nemaju rješenja pa se stoga ovako upisuje u ferko:



Slika 7: Zadatak riješen

A sada jedan normalan zadatak i rješenje:



Slika 8: Normalan zadatak riješen

Ako koristite ovakav pristup, x_3 će uvijek biti jednak 1. Još jedno od mogućih rješenja je npr. $x_1 = 0.833, x_2 = -1.333, x_3 = 2$. Iz ovoga se može vidjeti utjecaj h koordinate.

3.1.2 Sjecište dva pravca - parametarski oblik

Kod parametarskog oblika, svaku koordinatu prikazujemo pomoću jednog parametra t. Može se zamisliti kao da svaka koordinata postaje funkcija po

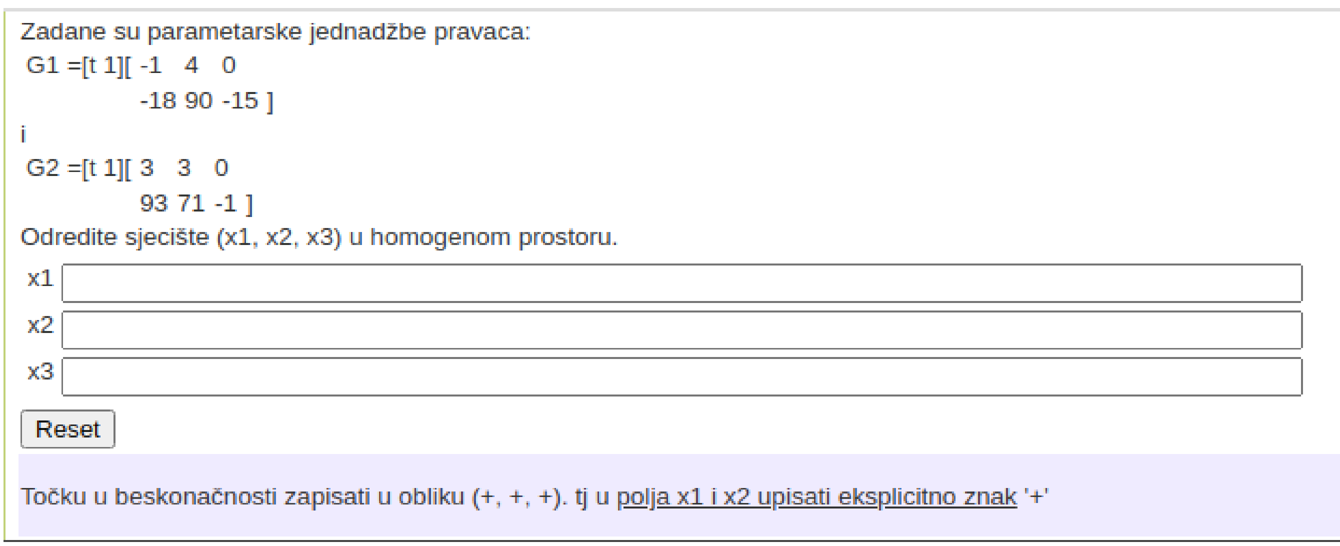
parametru t.
Matrično se to zapisuje ovako:

$$p = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 - V_0 \\ V_0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

ili

$$p = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & 0 \\ x_0 & y_0 & h \end{bmatrix} \tag{6}$$

gdje V_1 i V_0 predstavljaju dvije točke kroz koje pravac prolazi, a h je homogena koordinata. Zadatak:



Slika 9: Zadatak

Prva stvar koju je potrebno napraviti u zadatku je izjednačiti sve homogene koordinate s 1. To znači da G_1 sada izgleda ovako:

$$G_1 = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ \frac{-18}{-15} & \frac{90}{-15} & 1 \end{bmatrix}$$

G_2 izgleda ovako:

$$G_2 = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ \frac{93}{-1} & \frac{71}{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

Iz te dvije matrice se dobije kako izgledaju x-evi i y-oni pojedinih pravaca. Parametar prvog pravca je označen s t, a parametar drugog pravca sa s kako ne bi došlo do zabune. Pravac G_1:

$$x_1 = -t + \frac{6}{5}$$

$$y_1 = 4t - 6$$

$$h_1 = 1$$

Pravac G_2:

$$x_2 = 3s - 93$$

$$y_2 = 3s - 71$$

$$h_2 = 1$$

Sljedeći korak je izjednačiti x-eve i y-one:

$$x_1 = x_2 \quad => \quad -t + \frac{6}{5} = 3s - 93$$

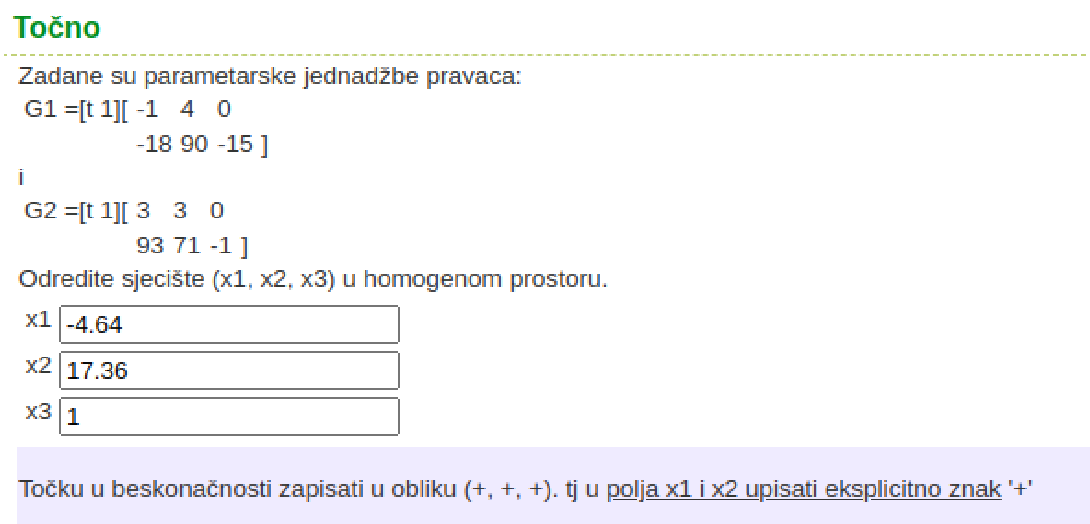
$$y_1 = y_2 \quad => \quad 4t - 6 = 3s - 71$$

Riješe se navedene jednadžbe i dobiju se rješenja $t = 5.84$ i $s = 29.453$. Da bismo dobili točku sjecišta, dovoljno je uvrstiti t u jednadžbu prvog pravca ili s u jednadžbu drugog. Npr. uvrstimo t u jednadžbu prvog i presjecište je:

$$x_1 = x = -4.64$$

$$x_2 = y = 17.36$$

$$x_3 = h = 1$$



Slika 10: Zadatak riješen

3.1.3 Ispitivanje je li točka u trokutu

Za ispitivanje odnosa točke i trokuta, najlakše je koristiti baricentrične koordinate. U knjizi na stranici 39. i nadalje su izvrsno objašnjene. Formula (3D) koju je dobro zapamtiti je oblika:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t_1 \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + t_2 \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} + t_3 \cdot \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Što znači => točka za koju promatramo nalazi li se unutar trokuta = prva baricentrična koordinata puta prvi vrh trokuta + druga baricentrična koordinata puta drugi vrh trokuta + treća baricentrična koordinata puta treći vrh trokuta.

Još jedna bitna stvar je da je zbroj sve tri baricentrične koordinate jednake jedan:

$$t_1 + t_2 + t_3 = 1 \tag{8}$$

Ako su baricentrične koordinate:

$$\forall i, t_i \in < 0, 1 > \quad => \quad Tocka \quad T \quad je \quad unutar \quad trokuta$$

$$\forall i, t_i \in [0, 1] \wedge \exists j, t_j = 1 \quad => \quad Tocka \quad T \quad je \quad na \quad rubu \quad trokuta$$

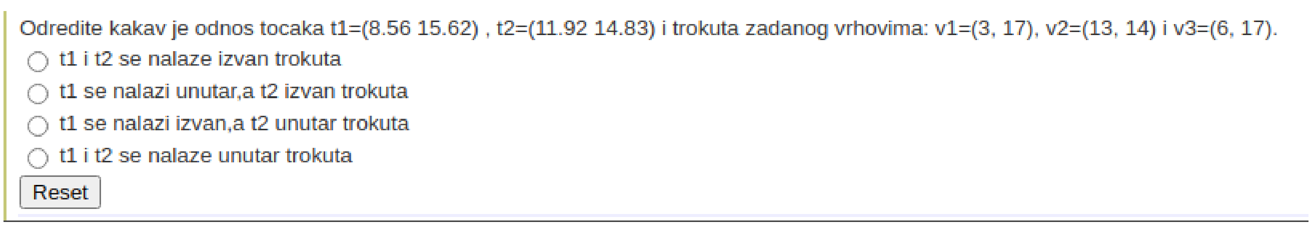
$$\exists i, t_i \notin [0, 1] \quad => \quad Tocka \quad T \quad je \quad izvan \quad trokuta$$

Što ukratko prevedeno znači:

ako su sve baricentrične koordinate između 0 i 1, točka je unutar trokuta;

ako su sve koordinate između 0 i 1 te postoji barem jedna od njih koja je jednaka 1, točka se nalazi na trokutu;

ako postoji jedna baricentrična koordinata koja nije između 0 i 1, točka je izvan trokuta.


Odredite kakav je odnos tocaka t1=(8.56 15.62) , t2=(11.92 14.83) i trokuta zadanog vrhovima: v1=(3, 17), v2=(13, 14) i v3=(6, 17).

- t1 i t2 se nalaze izvan trokuta
- t1 se nalazi unutar,a t2 izvan trokuta
- t1 se nalazi izvan,a t2 unutar trokuta
- t1 i t2 se nalaze unutar trokuta

Reset

Slika 11: Zadatak

Prvo je bitno razlikovati t1 (točka za koju promatramo odnos s trokutom) i t_1 (baricentričnu koordinatu).Krenemo redom, prvo uvrstimo točku t1 i vrhove u jednadžbu 7:

$$\begin{bmatrix} 8.56 \\ 15.62 \end{bmatrix} = t_1 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 17 \end{bmatrix} + t_2 \cdot \begin{bmatrix} 13 \\ 14 \end{bmatrix} + t_3 \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Iz čega dobijemo dvije jednadžbe s tri nepoznanice:

$$8.56 = 3t_1 + 13t_2 + 6t_3$$

$$15.62 = 17t_1 + 14t_2 + 17t_3$$

Treća jednadžba koju ćemo iskoristiti je 8, tj.:

$$t_1 + t_2 + t_3 = 1$$

Kad se riješe jednadžbe, dobiju se rješenja:

$$t_1 = 0.22$$

$$t_2 = 0.46$$

$$t_3 = 0.32$$

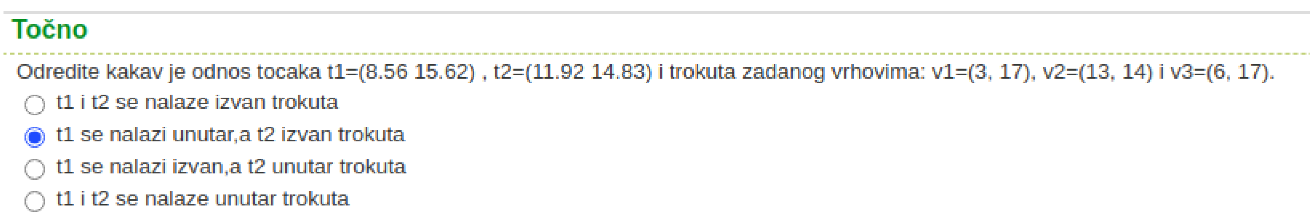
Sve tri točke su između 0 i 1 te zaključuje se da je t1 unutar trokuta. Ista stvar se napravi i za t2 i dobije se:

$$t_1 = -0.2856$$

$$t_2 = 0.72$$

$$t_3 = 0.5622$$

Iz čega vidimo da je t_1 negativan, tj. nije između 0 i 1 te se zaključuje da je točka t2 izvan trokuta.


Točno

Odredite kakav je odnos tocaka t1=(8.56 15.62) , t2=(11.92 14.83) i trokuta zadanog vrhovima: v1=(3, 17), v2=(13, 14) i v3=(6, 17).

- ○ t1 i t2 se nalaze izvan trokuta
- ◉ t1 se nalazi unutar,a t2 izvan trokuta
- ○ t1 se nalazi izvan,a t2 unutar trokuta
- ○ t1 i t2 se nalaze unutar trokuta

Slika 12: Zadatak riješen

3.1.4 Određivanje odnosa točke i poligona (trokuta, četverokuta) - trokut, koveksan i konkavan četverokut

Općenito za sve točke pravca vrijedi jednadžba pravca:

$$ax + by + c = 0 \tag{9}$$

Ili matrično:

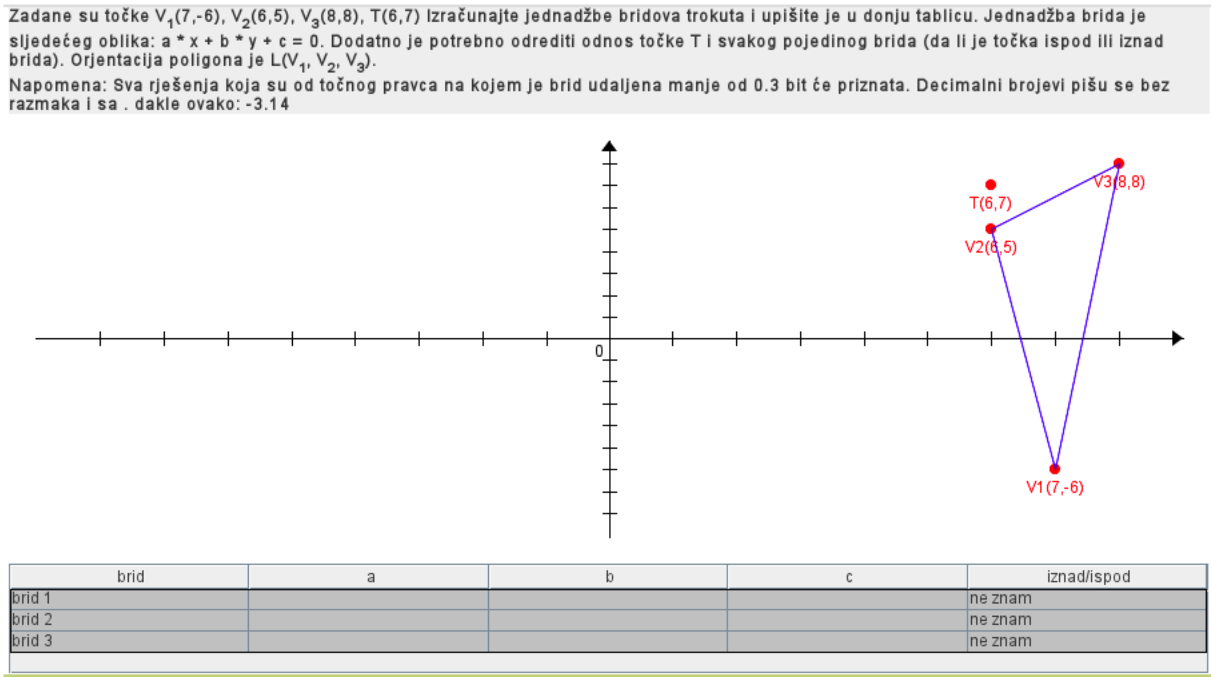
$$\begin{bmatrix} x & y & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \tag{10}$$

Ako bismo uvrstili točku koja se nalazi na pravcu, jednadžba bi valjala. No ako uvrstimo točku koja se ne nalazi na pravcu, vrijede sljedeća opažanja (knjiga stranica 32.):

$$\begin{bmatrix} x & y & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \quad => \quad Tocka \quad je \quad na \quad pravcu$$

$$\begin{bmatrix} x & y & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} > 0 \quad => \quad Tocka \quad je \quad iznad \quad pravca$$

$$\begin{bmatrix} x & y & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} < 0 \quad => \quad Tocka \quad je \quad ispod \quad pravca$$



Slika 13: Zadatak

Može se primijetiti da je u zadatku zadana orijentacija bridova. Ona će nam reći u kojem smjeru gledaju normale bridova trokuta te koja točka je iznad, a koja ispod pojedinog brida. Odlično objašnjenje je u knjizi na stranici 32.

Ukratko: Zamislimo da se krećemo od početne točke do krajnje točke brida, sve lijevo od nas je iznad pravca, a sve desno ispod.

Najjednostavniji izračun jednadžbe pravca je vektorski umnožak. Naime, vektorski umnožak dviju točaka će dati matricu koeficijenata pravca bez greške o orijentaciji pravca:

$$T_1 \times T_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ h \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \tag{11}$$

Za brid V_1V_2 vrijedi da množimo vrh V_1 s vrhom V_2 zbog orijentacije vrhova:

$$V_1 \times V_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -1 \\ 71 \end{bmatrix}$$

tj. jednadžba brida V_1V_2 je

$$-11x - y + 71 = 0$$

Uvrstimo li točku T u jednadžbu brida V_1V_2 dobije se:

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -11 \\ -1 \\ 71 \end{bmatrix} = -2$$

tj. $T \cdot (V_1 \times V_2) < 0$ odnosno, točka T je ispod brida V_1V_2. To se može vidjeti i na slici 13 jer je točka T desno od pravca na kojem je brid V_1V_2.

Ostali bridovi:

$$V_2 \times V_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$T \cdot (V_2 \times V_3) = 4 \quad tj. \quad iznad \quad pravca$$

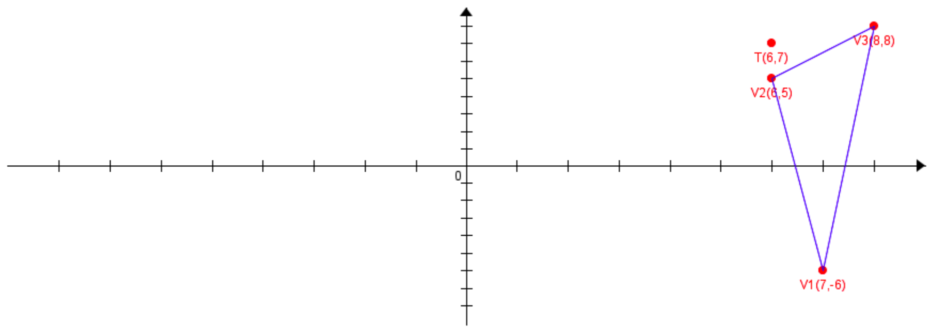
$$V_3 \times V_1 = \begin{bmatrix} 14 \\ -1 \\ -104 \end{bmatrix}$$

$$T \cdot (V_3 \times V_1) = -27 \quad tj. \quad ispod \quad pravca$$

Isti postupci vrijede i za zadatke s konveksnim i konkavnim četverokutom.

Točno

Zadane su točke $V_1(7,-6)$, $V_2(6,5)$, $V_3(8,8)$, $T(6,7)$ izračunajte jednadžbe bridova trokuta i upišite je u donju tablicu. Jednadžba brida je sljedećeg oblika: a * x + b * y + c = 0. Dodatno je potrebno odrediti odnos točke T i svakog pojedinog brida (da li je točka ispod ili iznad brida). Orjentacija poligona je $L(V_1, V_2, V_3)$.
Napomena: Sva rješenja koja su od točnog pravca na kojem je brid udaljena manje od 0.3 bit će priznata. Decimalni brojevi pišu se bez razmaka i sa . dakle ovako: -3.14

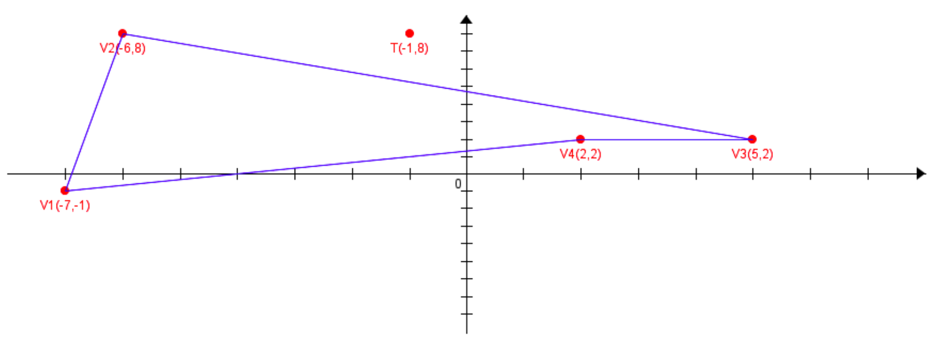


brid	a	b	c	iznad/ispod
brid 1	-11.0	-1.0	71.0	ispod
brid 2	-3.0	2.0	8.0	iznad
brid 3	14.0	-1.0	-104.0	ispod

Slika 14: Zadatak riješen trokut

Točno

Zadane su točke $V_1(-7,-1)$, $V_2(-6,8)$, $V_3(5,2)$, $V_4(2,2)$, $T(-1,8)$ izračunajte jednadžbe bridova četverokuta i upišite je u donju tablicu. Jednadžba brida je sljedećeg oblika: a * x + b * y + c = 0. Dodatno je potrebno odrediti odnos točke T i svakog pojedinog brida (da li je točka ispod ili iznad brida). Orjentacija poligona je $L(V_1, V_2, V_3, V_4)$.
Napomena: Sva rješenja koja su od točnog pravca na kojem je brid udaljena manje od 0.3 bit će priznata. Decimalni brojevi pišu se bez razmaka i sa . dakle ovako: -3.14



brid	a	b	c	iznad/ispod
brid 1	-9.0	1.0	-62.0	ispod
brid 2	6.0	11.0	-52.0	iznad
brid 3	0.0	-3.0	6.0	ispod
brid 4	3.0	-9.0	12.0	ispod

Slika 15: Zadatak riješen konkavan četverokut

3.1.5 Afina transformacija koja preslikava jednu dužinu u drugu

Sve o afinim transformacijama se može pronaći u knjizi na stranici 89. Ovdje će biti navedene formule za svaku od dvodimenzionalnih afinih transformacija.

Translacija:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \Delta x & \Delta y & 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Inverzna translacija:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\Delta x & -\Delta y & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Rotacija - za kut suprotan smjeru kazaljke na satu (CCW - *Counter Clockwise*):

$$R = \begin{bmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) & 0 \\ -sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Inverz rotacije - za kut u smjeru kazaljke na satu (CW) ili (CCW za -α):

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Skaliranje - povećanje:

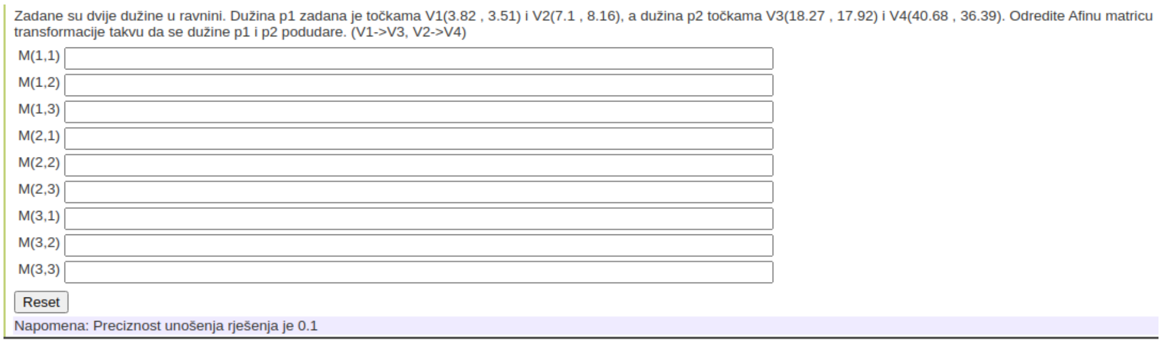
$$S = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Inverzno skaliranje - umanjenje:

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

Uniformno skaliranje - jednoliko povećanje:

$$S = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix} \tag{18}$$

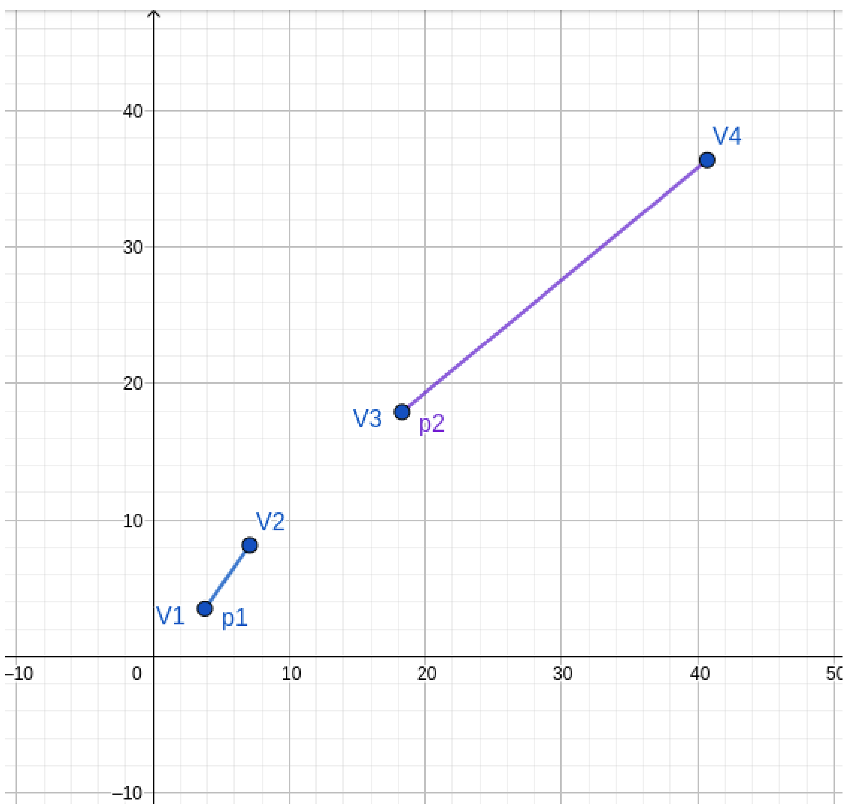

Zadane su dvije dužine u ravnini. Dužina p1 zadana je točkama V1(3.82 , 3.51) i V2(7.1 , 8.16), a dužina p2 točkama V3(18.27 , 17.92) i V4(40.68 , 36.39). Odredite Afinu matricu transformacije takvu da se dužine p1 i p2 podudare. (V1->V3, V2->V4)

M(1,1)
M(1,2)
M(1,3)
M(2,1)
M(2,2)
M(2,3)
M(3,1)
M(3,2)
M(3,3)

Reset

Napomena: Preciznost unošenja rješenja je 0.1

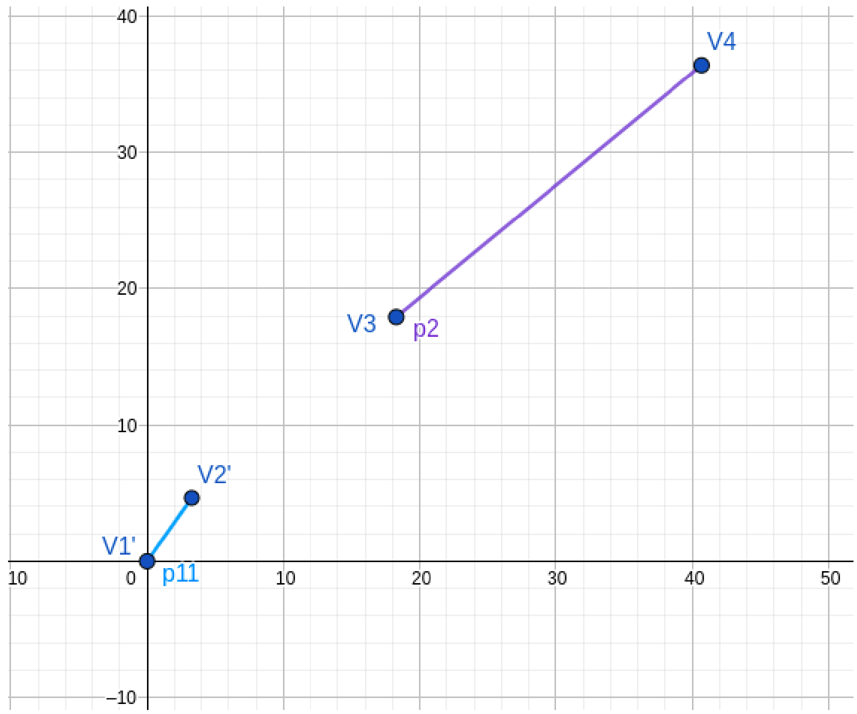
Slika 16: Zadatak



Slika 17: Dvije dužine u koordinatnom sustavu

Prva stvar koju je potrebno primijetiti u zadatku je ta da je potrebno preslikati dužinu $\overline{V_1V_2}$ u dužinu $\overline{V_3V_4}$. Najprije ćemo dužinu $\overline{V_1V_2}$ translatirati u ishodište. To se čini iz razloga što se prilikom rotacije točka rotira oko ishodišta. Korištenjem inverzne translacije ćemo jednu od točaka (V_1) translatirati u ishodište. Ta matrica izgleda ovako:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3.82 & -3.51 & 1 \end{bmatrix}$$



Slika 18: Dužina $\overline{V_1V_2}$ translatirana u ishodište

Sljedeći korak je napraviti potrebne rotacije kako bi se dužine poklopile. Prvo će se dužina $\overline{V_1V_2}$ rotirati za kut α kako bi se poklopila sa x-osi. Nakon toga će se skalirati te potom rotirati za kut β kako bi se kutevi dviju dužina poklopili. Kut α je kut između x-osi i dužine $\overline{V_1V_2}$, a kut β je kut između x-osi i dužine $\overline{V_3V_4}$.

Prvo se dužina $\overline{V_1V_2}$ rotira za kut α u smjeru kazaljke na satu (ili kut $-\alpha$ u smjeru suprotnom od kazaljke na satu). Kut α se dobije pomoću koeficijenta smjera pravca na kojem leži dužina $\overline{V_1V_2}$:

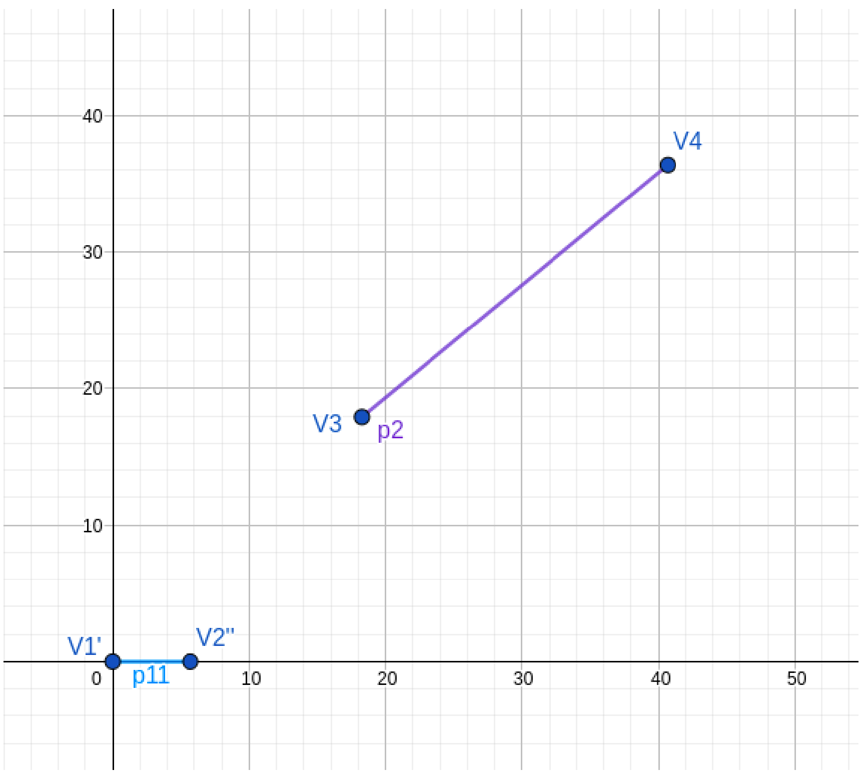
$$tg(\alpha) = k_1 \tag{19}$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{20}$$

$$\alpha = arctg(k_1) \tag{21}$$

Konkretno, pomoću prethodno navedenih formula, $k_1 = 1.4177$, tj. $\alpha = 54.802°$ odnosno, matrica R_1 (15):

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0.5764 & -0.8171 & 0 \\ 0.8171 & 0.5764 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Slika 19: Dužina $\overline{V_1V_2}$ rotirana za kut 54.802° CW

Sada je na redu skaliranje. Kako cijela dužina leži na x-osi, skaliranje je dovoljno provesti po x-u. Matricu skaliranja možemo dobiti iz omjera duljina dužina. Duljina dužine se izračuna prema formuli:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{22}$$

Za dužinu $\overline{V_1V_2}$ se dobije:

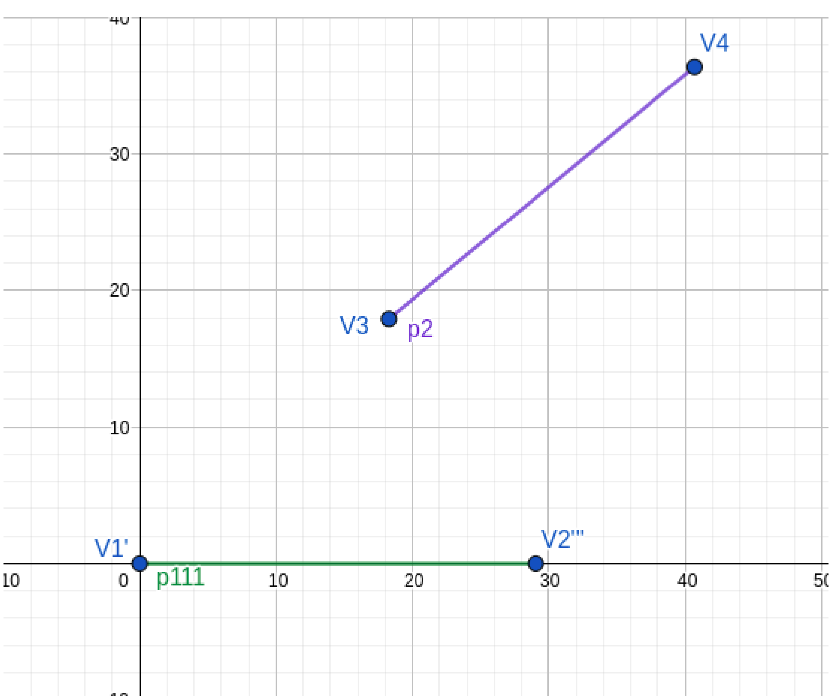
$$d_1 = \sqrt{(7.1 - 3.82)^2 + (8.16 - 3.51)^2} = 5.69$$

Odnosno dužinu $\overline{V_3V_4}$:

$$d_2 = 29.04$$

To znači da dužinu $\overline{V_1V_2}$ treba povećati za $\frac{d_2}{d_1}$:

$$S = \begin{bmatrix} \frac{29.04}{5.69} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Slika 20: Dužina $\overline{V_1V_2}$ skalirana za $\frac{d_2}{d_1}$

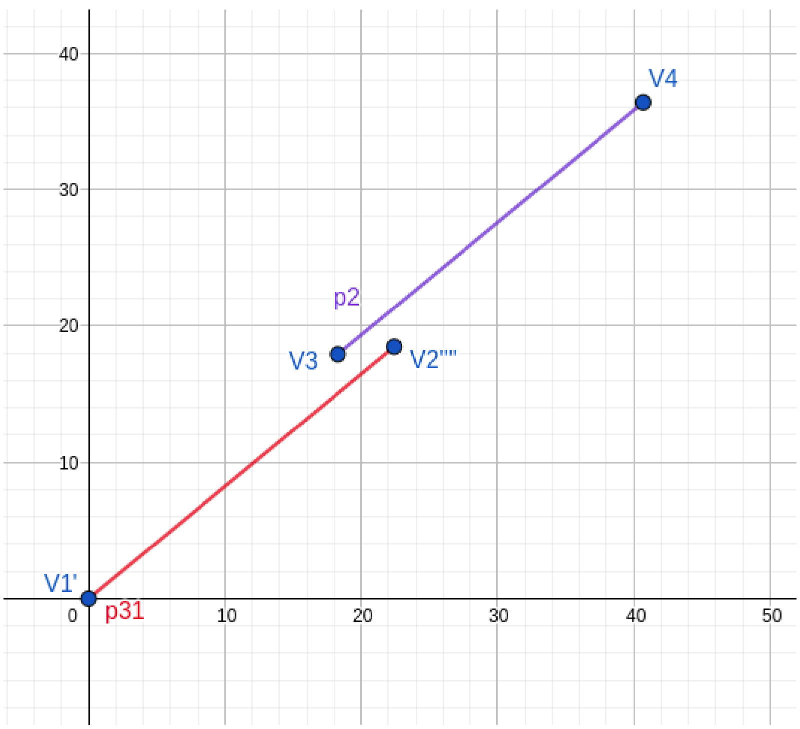
Sada je na redu rotiranje za kut β kako bi se dužine poklopile u kutevima. Kut β se dobije na isti način kao i α.

$$k_2 = \frac{36.39 - 17.92}{40.68 - 18.27} = 0.824$$

$$\beta = arctg(k_2) = 39.49°$$

Rotiramo za kut β CCW:

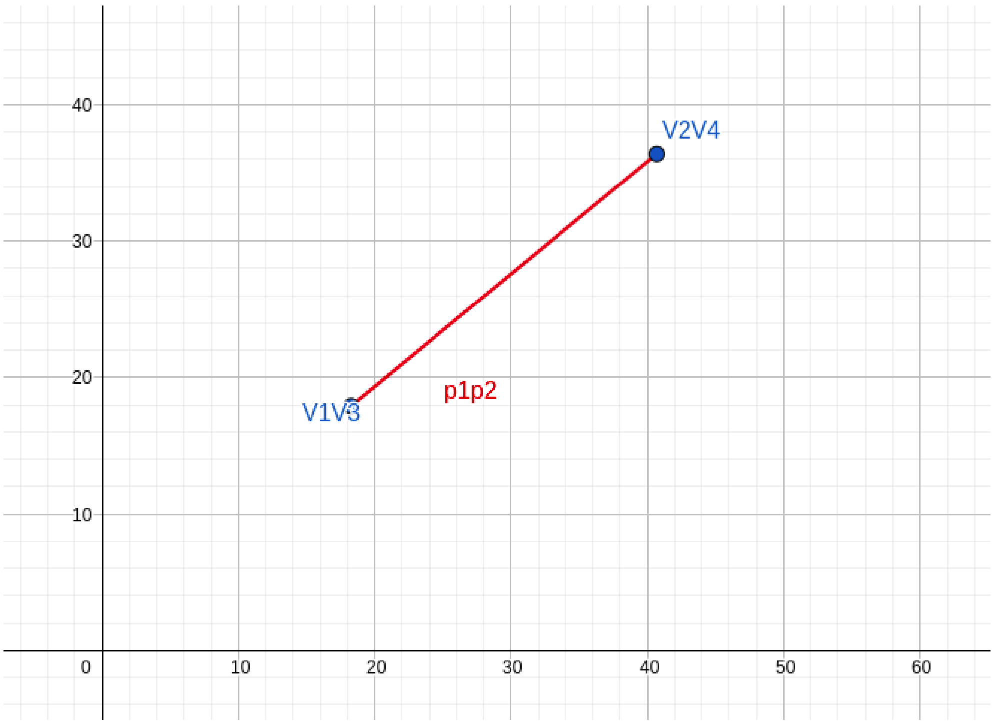
$$R_2 = \begin{bmatrix} 0.7717 & 0.636 & 0 \\ -0.636 & 0.7717 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Slika 21: Dužina $\overline{V_1V_2}$ rotirana za kut 39.49° CCW

Posljednje je potrebno translatirati dužinu $\overline{V_1V_2}$, a to se radi da cijelu dužinu pomaknemo za točku V_3:

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 18.27 & 17.92 & 1 \end{bmatrix}$$

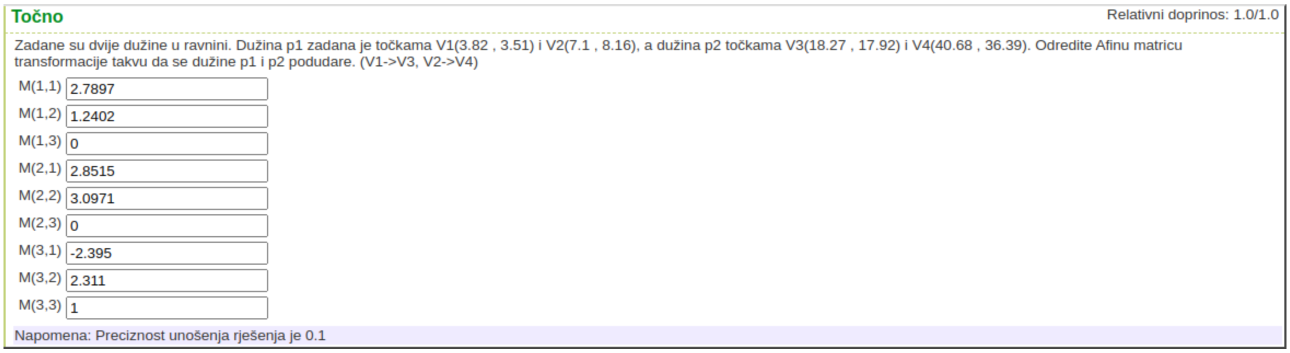


Slika 22: Preklopljene dužine

Konačna afina matrica transformacije se dobije kao umnožak svih matrica:

$$U = T_1 \cdot R_1 \cdot S \cdot R_2 \cdot T_2$$

$$U = \begin{bmatrix} 2.7897 & 1.2402 & 0 \\ 2.8515 & 3.0971 & 0 \\ -2.395 & 2.311 & 1 \end{bmatrix}$$



Točno Relativni doprinos: 1.0/1.0

Zadane su dvije dužine u ravnini. Dužina p1 zadana je točkama V1(3.82 , 3.51) i V2(7.1 , 8.16), a dužina p2 točkama V3(18.27 , 17.92) i V4(40.68 , 36.39). Odredite Afinu matricu transformacije takvu da se dužine p1 i p2 podudare. (V1->V3, V2->V4)

M(1,1)	2.7897
M(1,2)	1.2402
M(1,3)	0
M(2,1)	2.8515
M(2,2)	3.0971
M(2,3)	0
M(3,1)	-2.395
M(3,2)	2.311
M(3,3)	1

Napomena: Preciznost unošenja rješenja je 0.1

Slika 23: Rješenje zadatka

3.1.6 Odrediti potrebne transformacije za kućicu

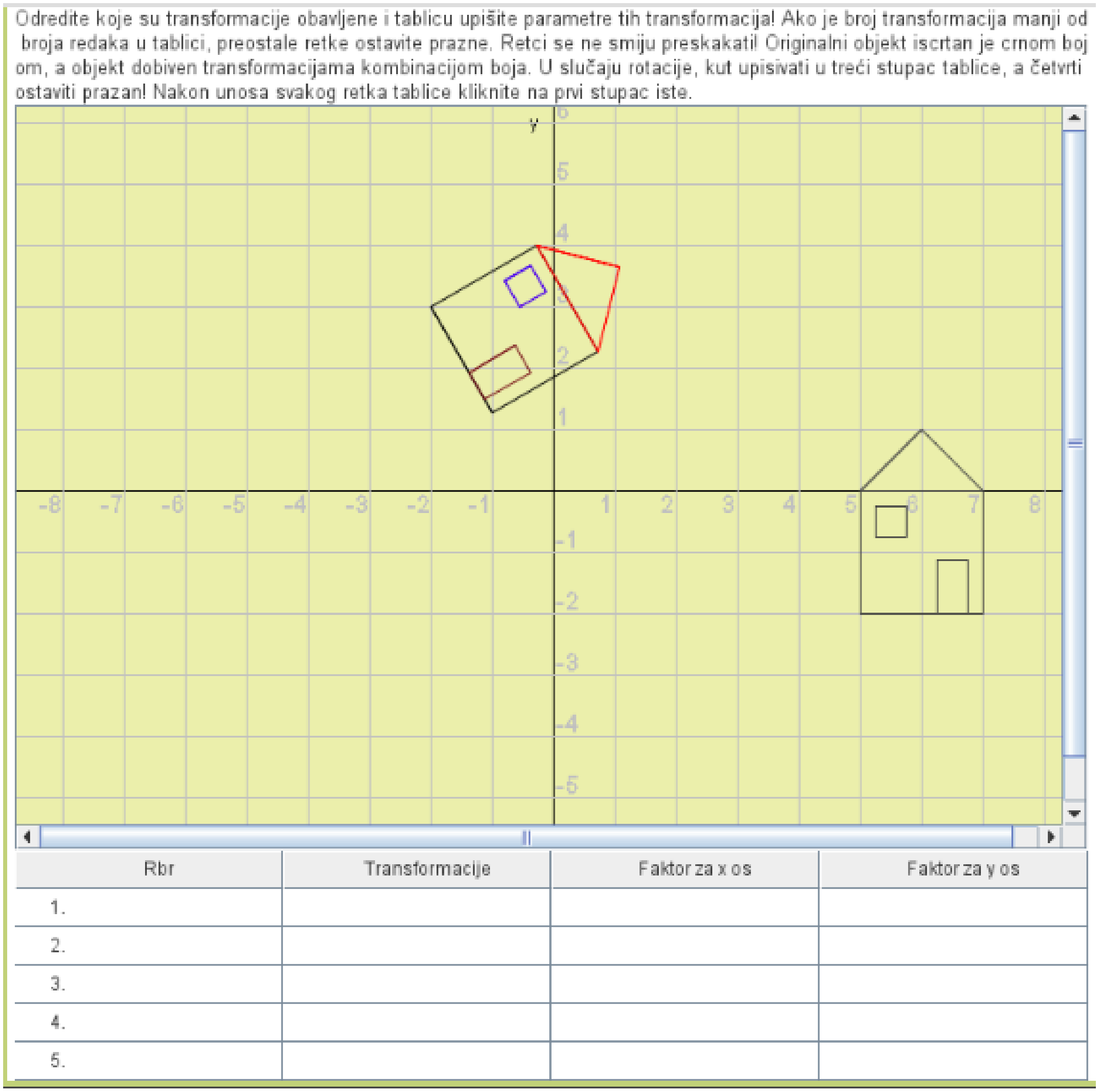
Sličan zadatak je moguće pronaći na sljedećem linku https://www.youtube.com/watch?v=-XEPMgTsZmY&list=PLwCivZFSo4llyk6bsi_m4hQN62P1mueoe&index=3&t=4035s na 58 minuti.

Ovo je malo lakša inačica prethodnog zadatka, stoga ako ste rješavali prethodni zadatak, princip je sličan. Sve transformacije su vidljive sa slike. U ovom zadatku se može pojaviti smik. Iako formula za smik nije potrebna za ovaj zadatak, ona glasi:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & tg(\alpha) & 0 \\ tg(\beta) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{23}$$

Inverz matrice smika:

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-tg(\alpha)\cdot tg(\beta)} & \frac{-tg(\alpha)}{1-tg(\alpha)\cdot tg(\beta)} & 0 \\ \frac{-tg(\beta)}{1-tg(\alpha)\cdot tg(\beta)} & \frac{1}{1-tg(\alpha)\cdot tg(\beta)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{24}$$



Slika 24: Zadatak - rotacija

Najprije je potrebno odabrati točku koja će predstavljati crni objekt. Za odabir točke ćemo uzeti onu točku čije je koordinate najlakše iščitati sa šarenog objekta. U ovom slučaju, točku na šarenom objektu $B(-2, 3)$ je najlakše iščitati. Ekvivalent toj točki na crnom objektu je točka $A(5, -2)$.

To se može zaključiti iz položaja vrata kućice.

Sljedeće promatramo koje transformacije je potrebno učiniti. Sa slike je vidljivo da će biti potrebne dvije translacije i jedna rotacija. Zadaci koji sadrže ostale transformacije će biti prikazani na kraju ovog podpoglavlja.

Sada prvo translatiramo crni objekt u ishodište kako bi rotacija funkcionirala. Stoga u prvi redak odaberemo **Translacija**, faktor za x-os je **-6**, a faktor za y-os je **-2**.

Nakon toga biramo **Rotacija** te u faktor za x-os upisujemo **-60** jer rotiramo u smjeru kazaljke na satu. Faktor za y-os ostavljamo prazno, jer je tako definirano u zadatku. Ako niste sigurni koji je kut, uvijek ga je moguće izračunati "otprilike" pomoću izraza 19, 20 i 21. Potrebno je samo iščitati sa slike dvije točke koje čine bazu kućice i izračunati pod kojim kutem baza leži.

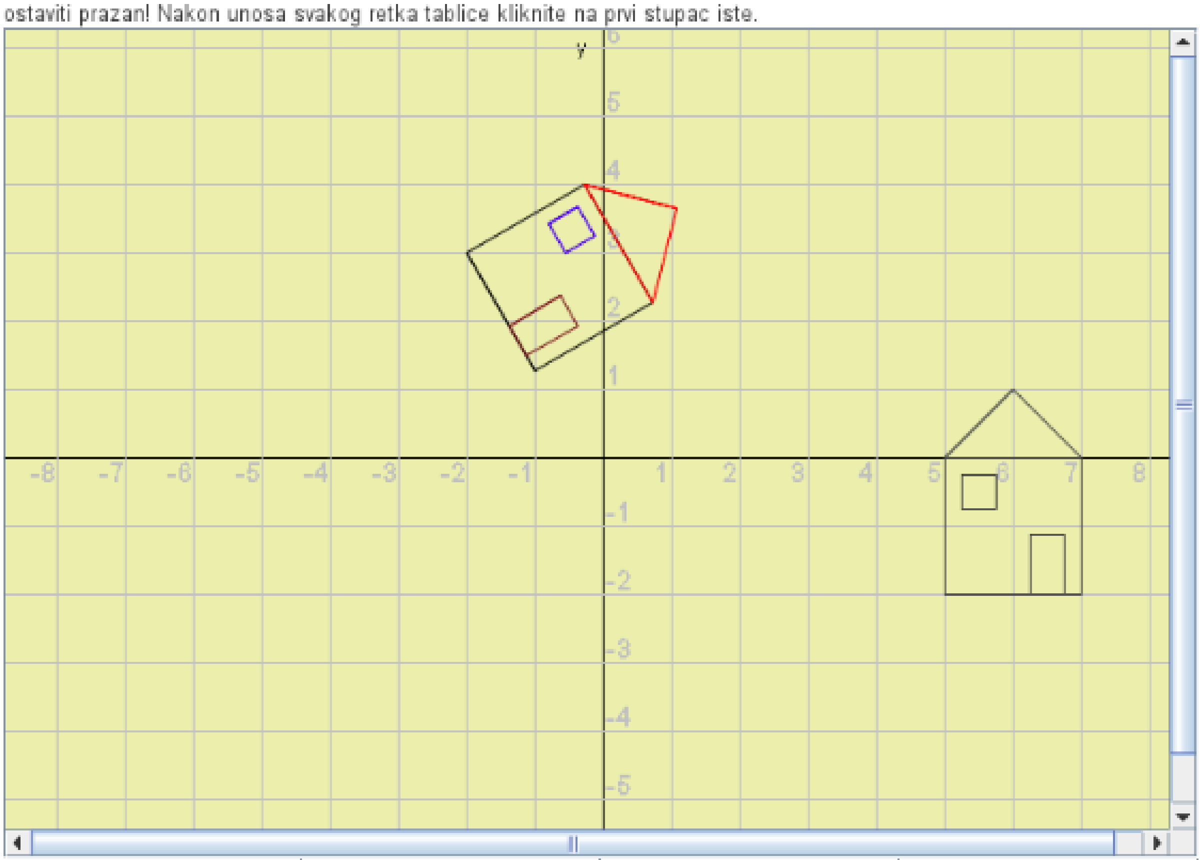
Posljednja stvar je **Translacija** u završni, šareni objekt. Translatiramo za **-2** u smjeru x i **3** u smjeru y.

Ako je zadan smik u zadatku, onda se gleda za koji kut je baza kućice pomaknuta u odnosu na x-os, odnosno, za koji kut je zid kućice pomaknut u odnosu na y-os.

Ako je skaliran objekt, onda je potrebno još provjeriti zrcali li se s obzirom na koju od osi. Ako da, onda je predznak skaliranja negativan s obzirom na os koja objekt zrcali.

Točno

Odredite koje su transformacije obavljene i tablicu upišite parametre tih transformacija! Ako je broj transformacija manji od broja redaka u tablici, preostale retke ostavite prazne. Retci se ne smiju preskakati! Originalni objekt iscrtan je crnom boj om, a objekt dobiven transformacijama kombinacijom boja. U slučaju rotacije, kut upisivati u treći stupac tablice, a četvrti ostaviti prazan! Nakon unosa svakog retka tablice kliknite na prvi stupac iste.

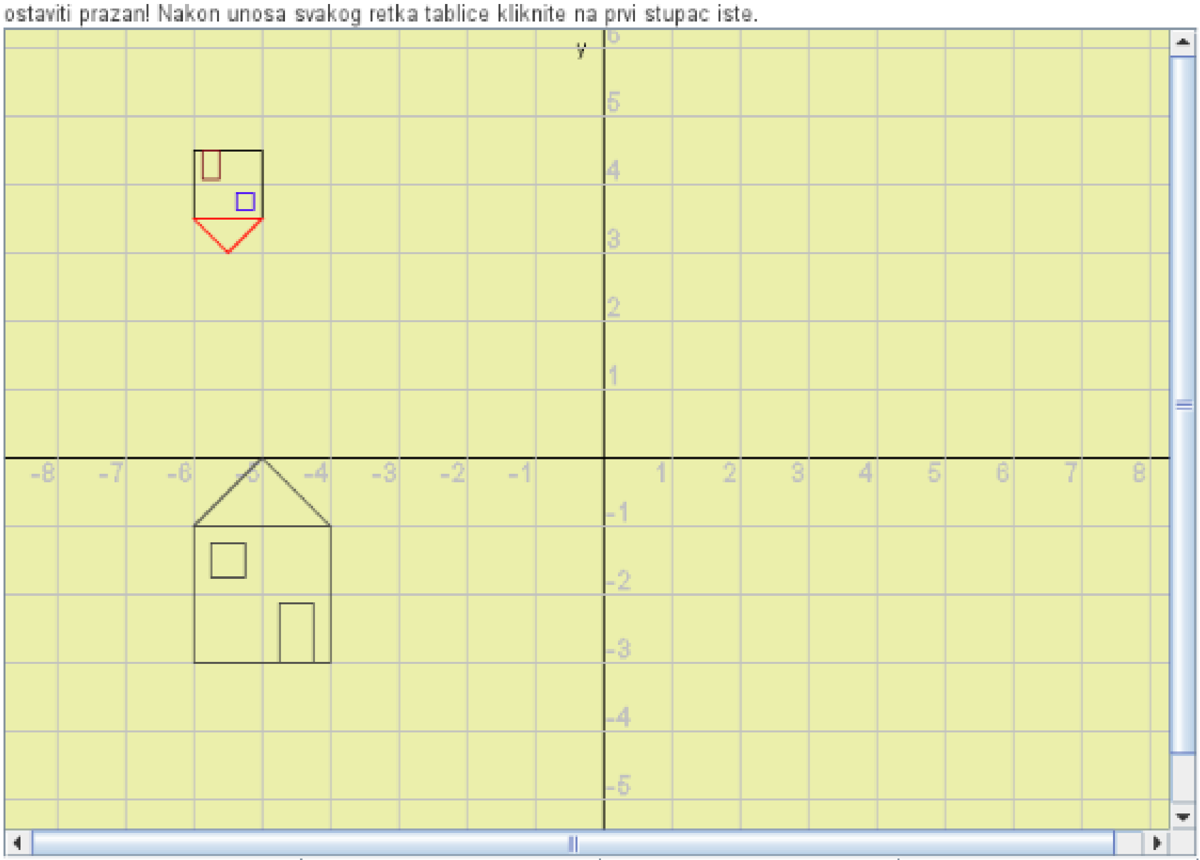


Rbr	Transformacije	Faktor za x os	Faktor za y os
1.	Translacija	-5.0	2.0
2.	Rotacija	-60	
3.	Translacija	-2.0	3.0
4.			
5.			

Slika 25: Zadatak - rotacija riješen

Točno

Odredite koje su transformacije obavljene i tablicu upišite parametre tih transformacija! Ako je broj transformacija manji od broja redaka u tablici, preostale retke ostavite prazne. Retci se ne smiju preskakati! Originalni objekt iscrtan je crnom bojom, a objekt dobiven transformacijama kombinacijom boja. U slučaju rotacije, kut upisivati u treći stupac tablice, a četvrti ostaviti prazan! Nakon unosa svakog retka tablice kliknite na prvi stupac iste.

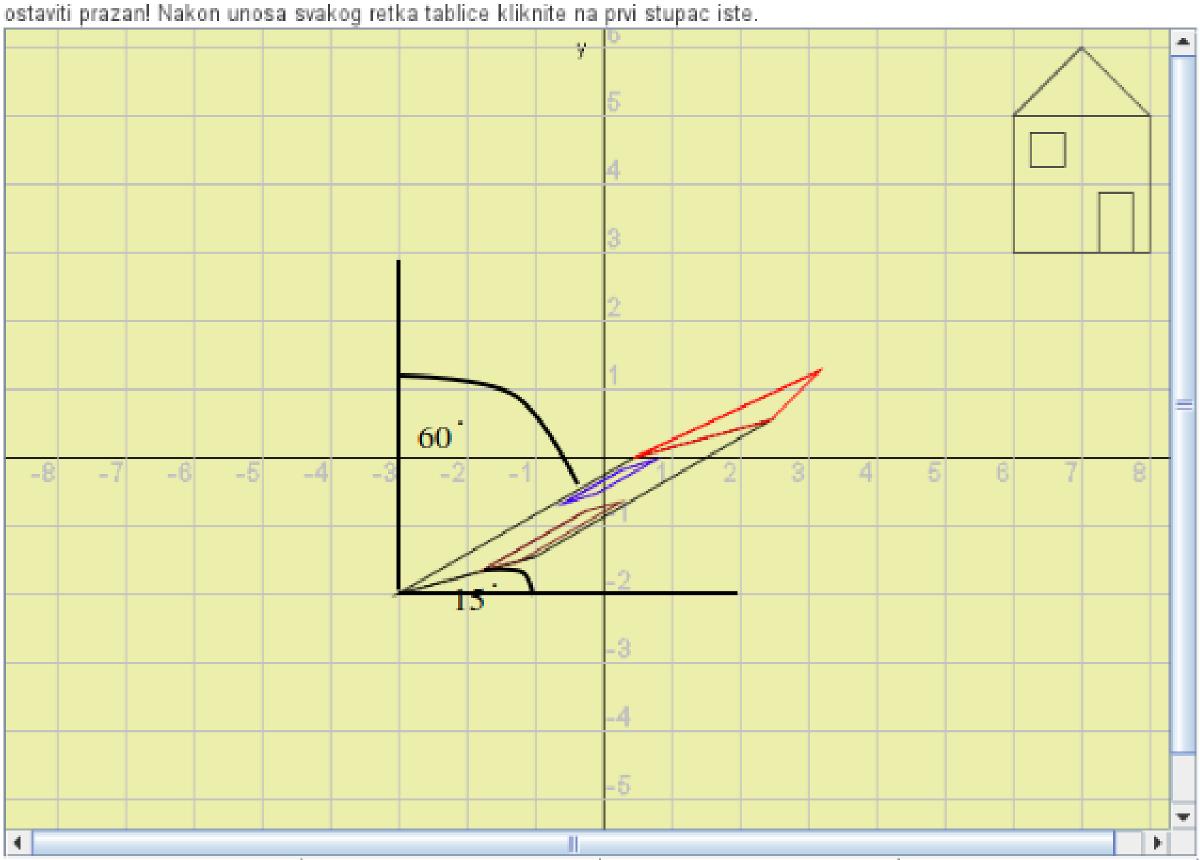


Rbr	Transformacije	Faktor za x os	Faktor za y os
1.	Translacija	6.0	3.0
2.	Skaliranje	-0.5	-0.5
3.	Translacija	-5.0	4.5
4.			
5.			

Slika 26: Zadatak - skaliranje riješen

Točno

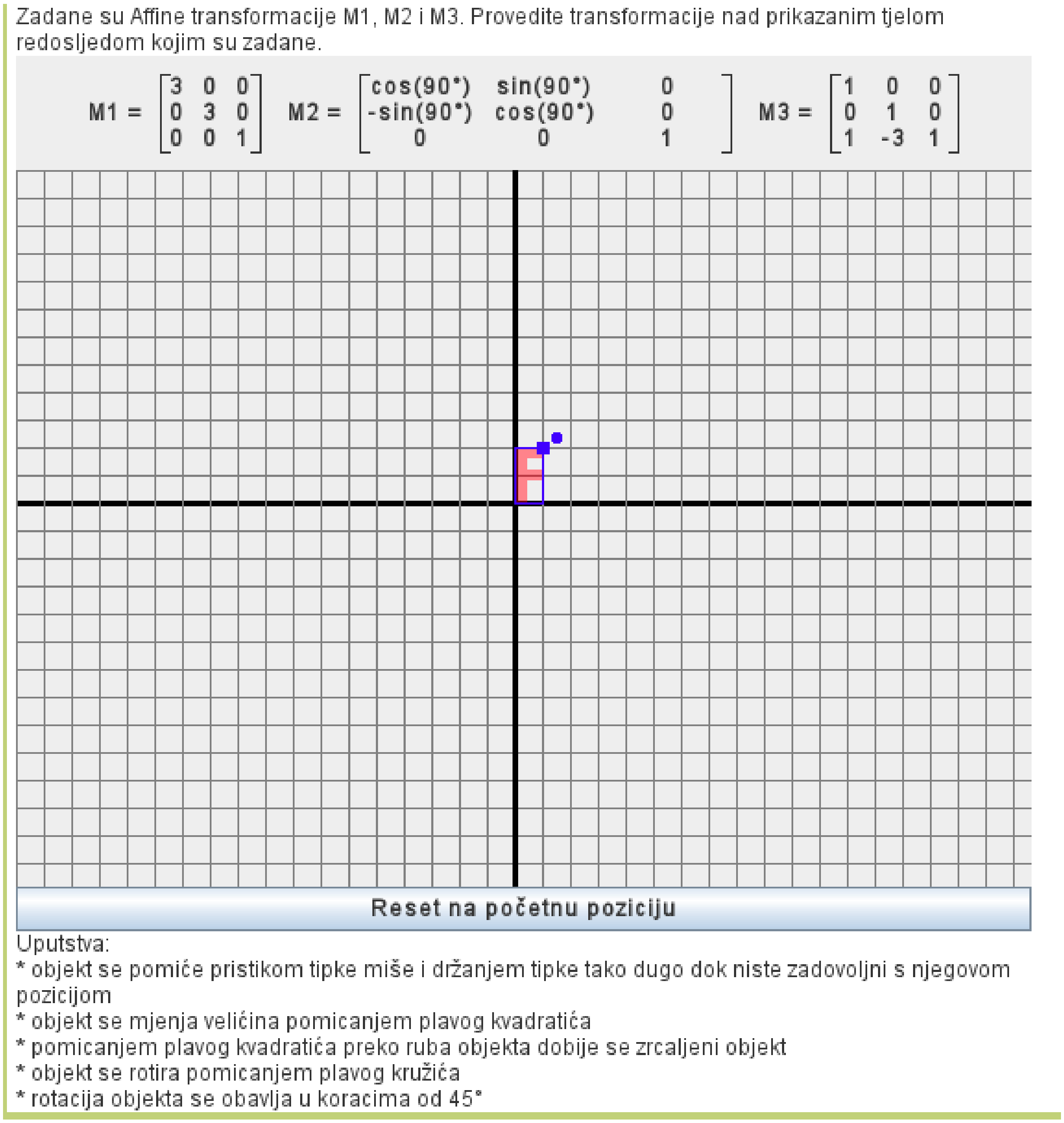
Odredite koje su transformacije obavljene i tablicu upišite parametre tih transformacija! Ako je broj transformacija manji od broja redaka u tablici, preostale retke ostavite prazne. Retci se ne smiju preskakati! Originalni objekt iscrtan je crnom bojom, a objekt dobiven transformacijama kombinacijom boja. U slučaju rotacije, kut upisivati u treći stupac tablice, a četvrti ostaviti prazan! Nakon unosa svakog retka tablice kliknite na prvi stupac iste.



Rbr	Transformacije	Faktor za x os	Faktor za y os
1.	Translacija	-6.0	-3.0
2.	Smik	15	60
3.	Translacija	-3.0	-2.0
4.			
5.			

Slika 27: Zadatak - smik riješen

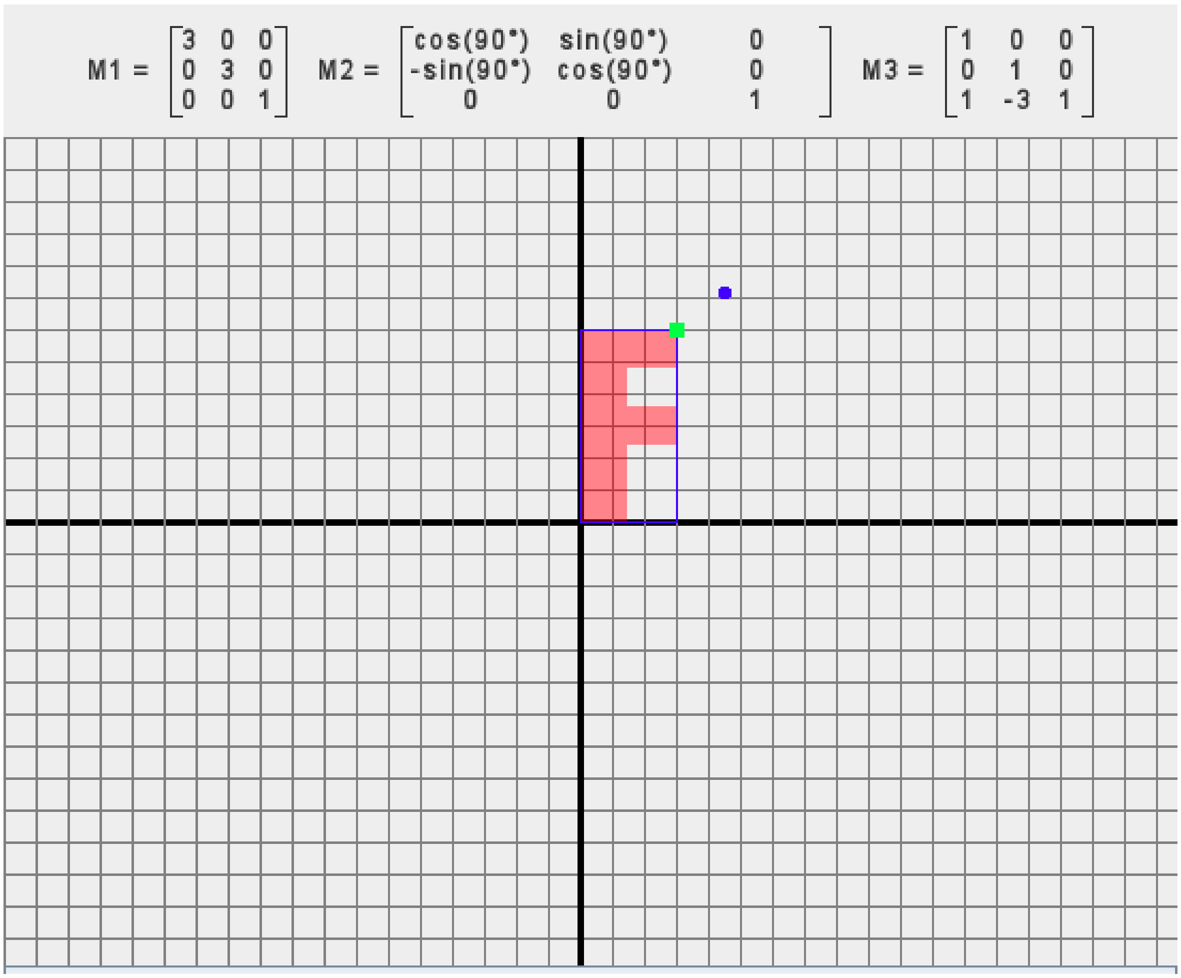
3.1.7 Odrediti transformiranu poziciju za slovo F



Slika 28: Zadatak

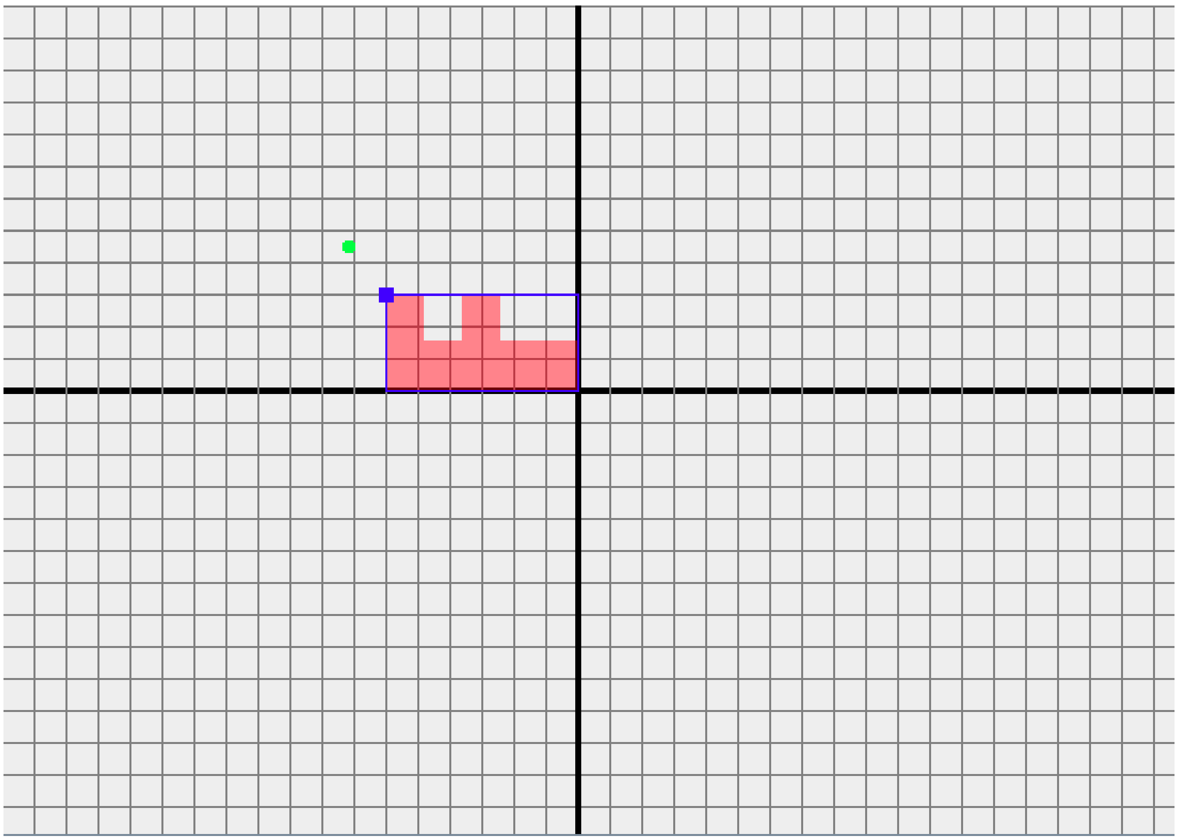
U ovom zadatku je potrebno identificirati koje matrice se koriste. Formule za matrice možete pronaći u poglavlju 3.1.5.

Prvo radimo po matrici M_1, a ona predstavlja skaliranje za 3 po x-u i y-u.



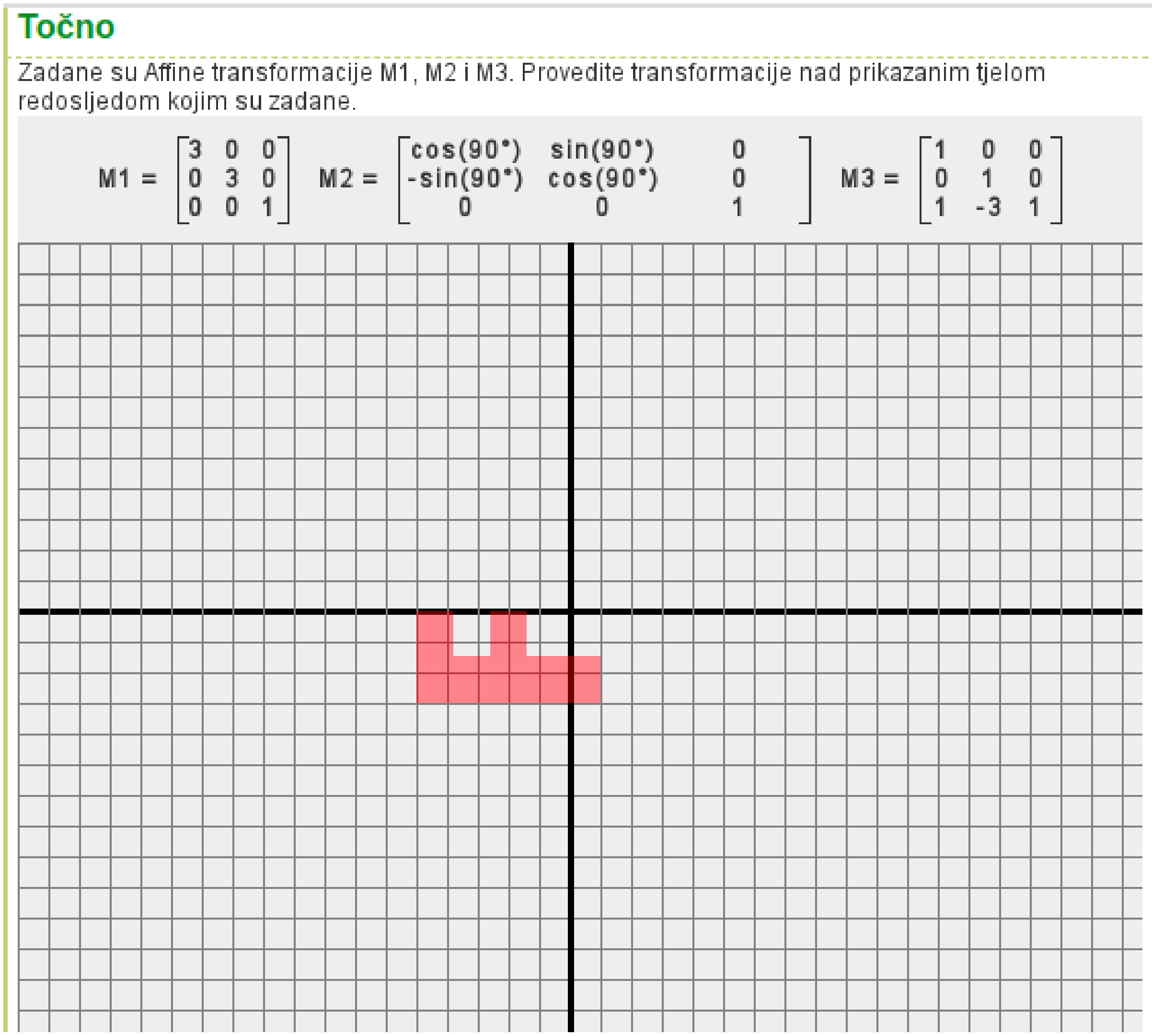
Slika 29: Skaliranje po M_1

Nakon toga rotiramo za 90° u smjeru suprotnom od kazaljke na satu jer tako piše u matrici M_2.



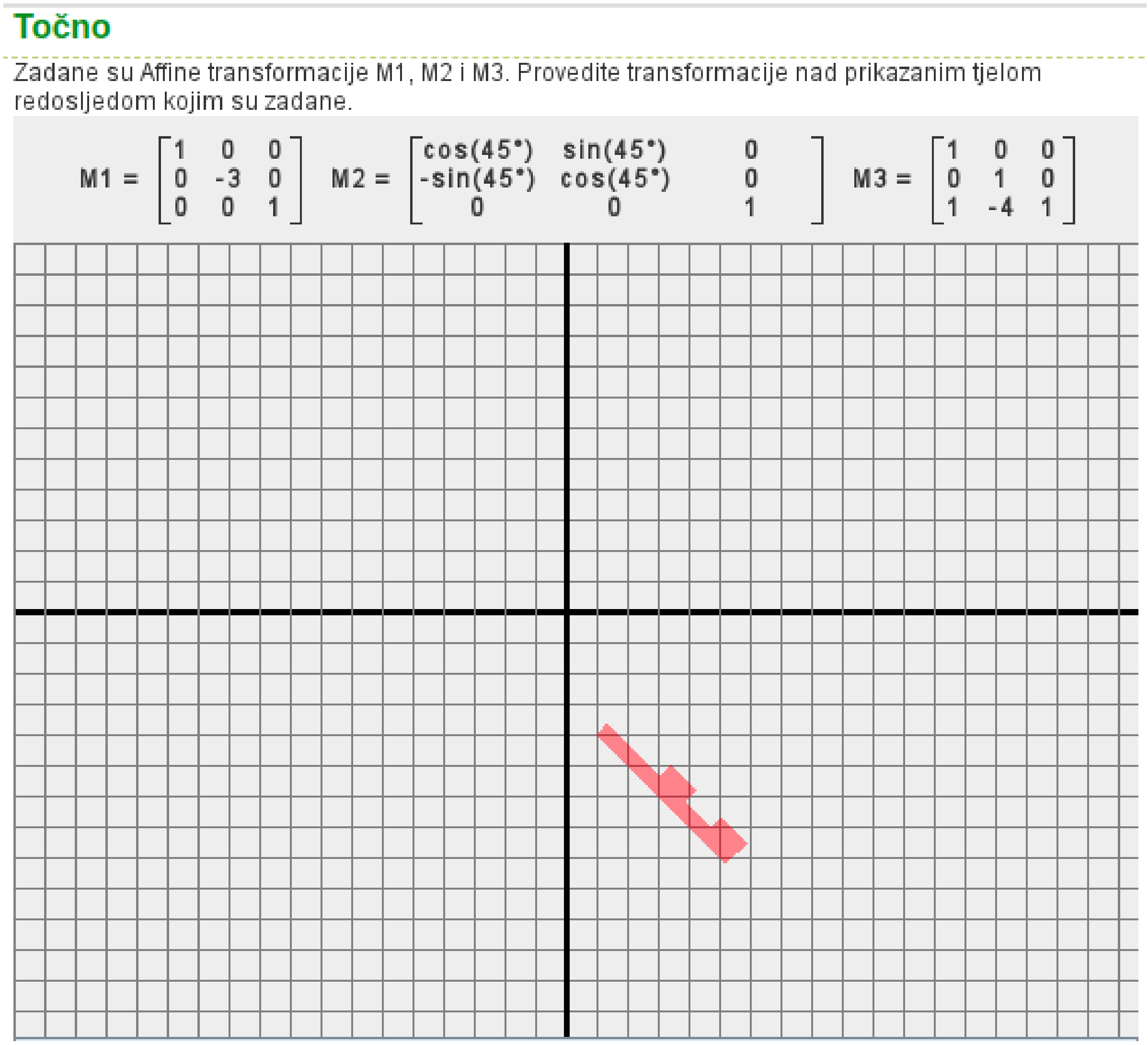
Slika 30: Rotacija po M_2

Te na kraju pomičemo za 1 udesno po x-u i za 3 prema dolje po y-onu.



Slika 31: Zadatak riješen

Još jedan sličan:



Slika 32: Zadatak riješen 2

3.1.8 Veza dva koordinatna sustava - Transformacija iz globalnog u lokalni koordinatni sustav

Pazite da su vam kutevi namješteni na radijane u kalkulatoru.

Veza između dva koordinatna sustava je lijepo objašnjena u knjizi na stranici 106. Ukratko je dobro za zapamtiti da ako je točka zadana u lokalnom koordinatnom sustavu, a nama treba u globalnom, radimo uobičajene transformacije, to jest, one koje nisu inverzne. U slučaju da je točka zadana u globalnom koordinatnom sustavu, a nas zanimaju koordinate u lokalnom, radimo inverzne transformacije.

Ili još jedan način kako lakše zapamtiti, ako je točka zadana u lokalnom koordinatnom sustavu, cilj nam je globalni koordinatni sustav podudariti sa lokalnim. U drugom slučaju, da nam je točka zadana u globalnom koordinatnom sustavu, cilj nam je lokalni koordinatni sustav podudariti sa globalnim. Odnosno, sustav u kojem je točka je statičan, ovaj drugi se prilagođava.

Što se tiče složenijih transformacija, shema je ista. U slučaju da je točka u lokalnom koordinatnom sustavu, radimo normalnim redoslijedom transformacije (translacija, rotacija, ...). U drugom slučaju radimo inverze, a samim time i inverze složenijih matrica. Točnije, iz lokalnog u globalni bi složena matrica mogla izgledati:

$$M = V \cdot R \cdot T$$

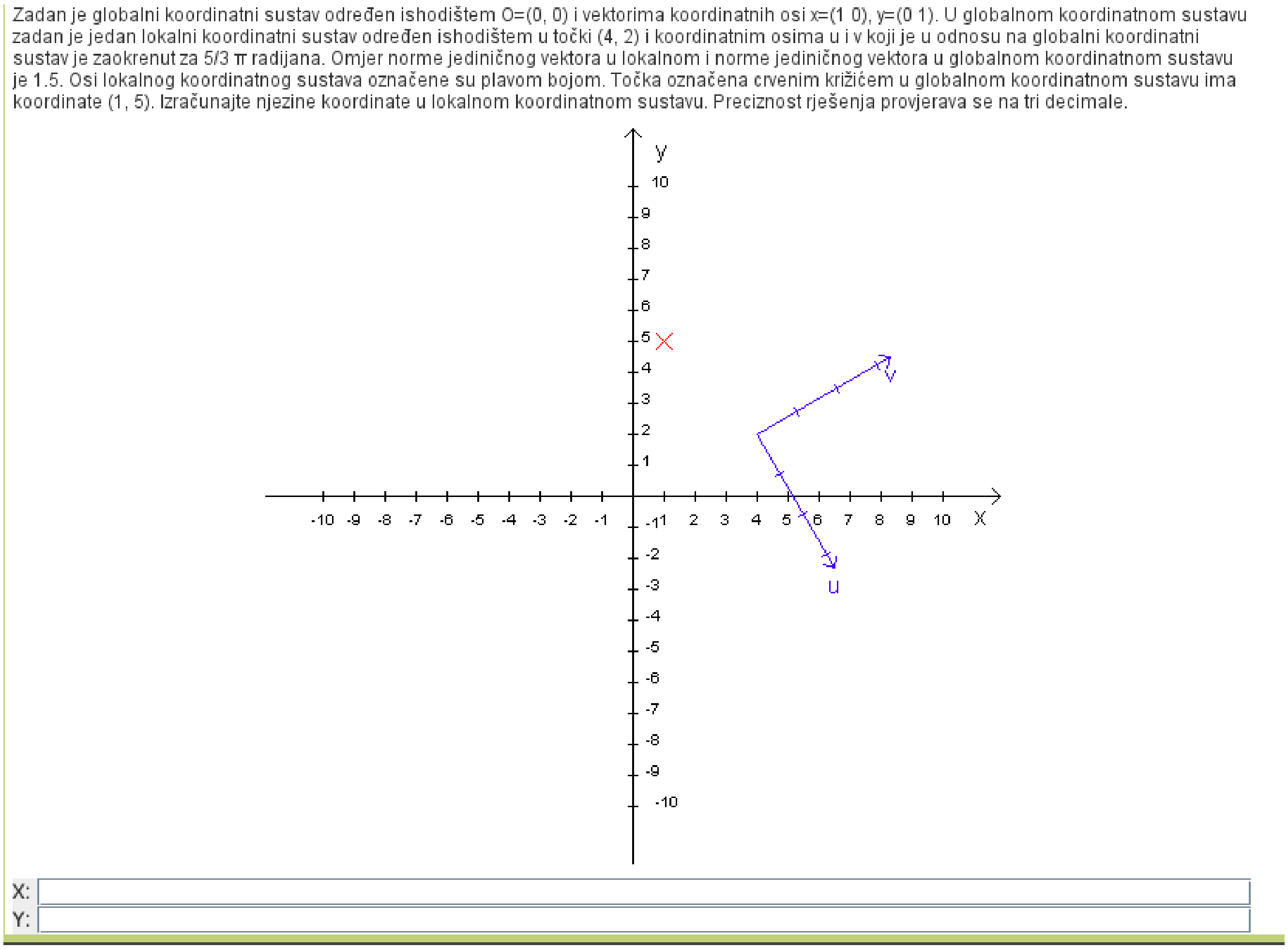
, a iz globalnog u lokalni:

$$M = V \cdot (R \cdot T)^{-1} = V \cdot T^{-1} \cdot R^{-1}$$

gdje M predstavlja ukupnu matricu, V predstavlja točku koja se promatra, T je matrica translacije, a R je matrica rotacije. Sve formule koje se koriste u zadatku su navedene u poglavlju 3.1.5.

Ako promatramo na način da jedan sustav podudaramo s drugim, vidjet će se da ima smisla. Naime, u slučaju iz lokalnog u globalni, globalni sustav prvo rotiramo (jer za rotaciju je bitno da se rotira oko ishodišta, tako su izvedene formule u knjizi), a nakon toga translatiramo. U drugom slučaju, kad lokalni treba podudariti sa globalnim, prvo translatiramo u ishodište kako bismo mogli rotirati da bi se podudarili.

Skaliranje i smik se izvode dok je ijedan od sustava u ishodištu. Znači u slučaju lokalni-globalni -> skaliranje, rotacija pa translacija (ili rotacija, skaliranje, translacija). U slučaju globalni-lokalni -> translacija, rotacija pa skaliranje (ili translacija, skaliranje, rotacija).



Slika 33: Zadatak

U zadatku je potrebno odrediti koordinate točke u lokalnom koordinatnom sustavu, ako su njene koordinate zadane u globalnom. Koordinata x se podudara sa koordinatom u lokalnog sustava, a y s v.

Znači, globalni sustav je statičan, a lokalni mijenjamo. Prvo će se napraviti translacija ishodišta lokalnog koordinatnog sustava u ishodište globalnog koordinatnog sustava:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Nakon toga ga je potrebno zarotirati za $\frac{5\pi}{3}$ radijana u smjeru kazaljke na satu (ili $\frac{\pi}{3}$ CCW):

$$R = \begin{bmatrix} cos(\frac{5\pi}{3}) & -sin(\frac{5\pi}{3}) & 0 \\ sin(\frac{5\pi}{3}) & cos(\frac{5\pi}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Te na kraju još skalirati:

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{1.5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1.5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

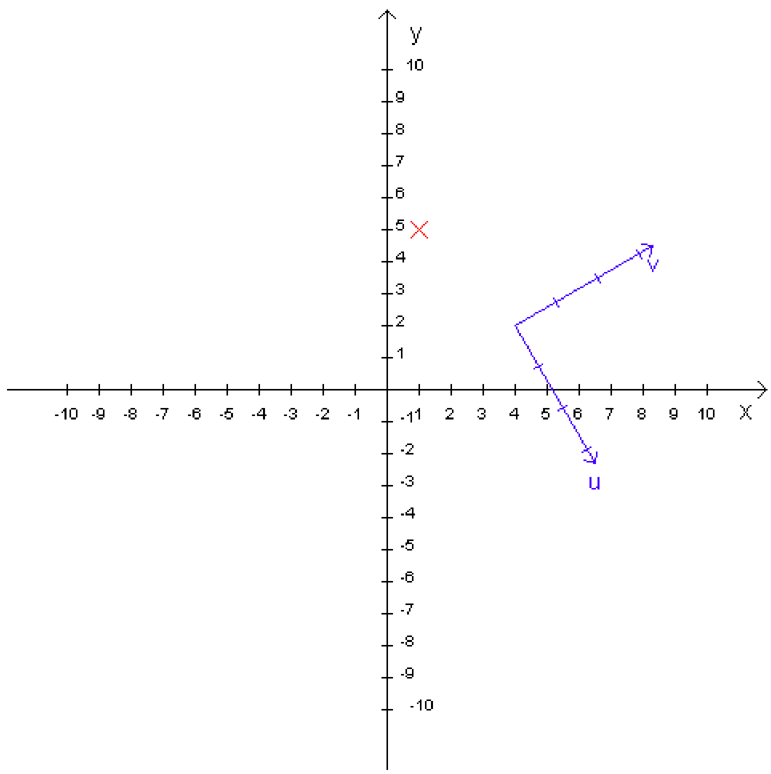
Točka $V(1,5)$ globalnog koordinatnog sustava u lokalnom iznosi:

$$V_l = V \cdot T \cdot R \cdot S = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{1.5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1.5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2.732 & -0.732 & 1 \end{bmatrix}$$

Točno

Zadan je globalni koordinatni sustav određen ishodištem O=(0, 0) i vektorima koordinatnih osi x=(1 0), y=(0 1). U globalnom koordinatnom sustavu zadan je jedan lokalni koordinatni sustav određen ishodištem u točki (4, 2) i koordinatnim osima u i v koji je u odnosu na globalni koordinatni sustav je zaokrenut za 5/3 π radijana. Omjer norme jediničnog vektora u lokalnom i norme jediničnog vektora u globalnom koordinatnom sustavu je 1.5. Osi lokalnog koordinatnog sustava označene su plavom bojom. Točka označena crvenim križićem u globalnom koordinatnom sustavu ima koordinate (1, 5). Izračunajte njezine koordinate u lokalnom koordinatnom sustavu. Preciznost rješenja provjerava se na tri decimale.



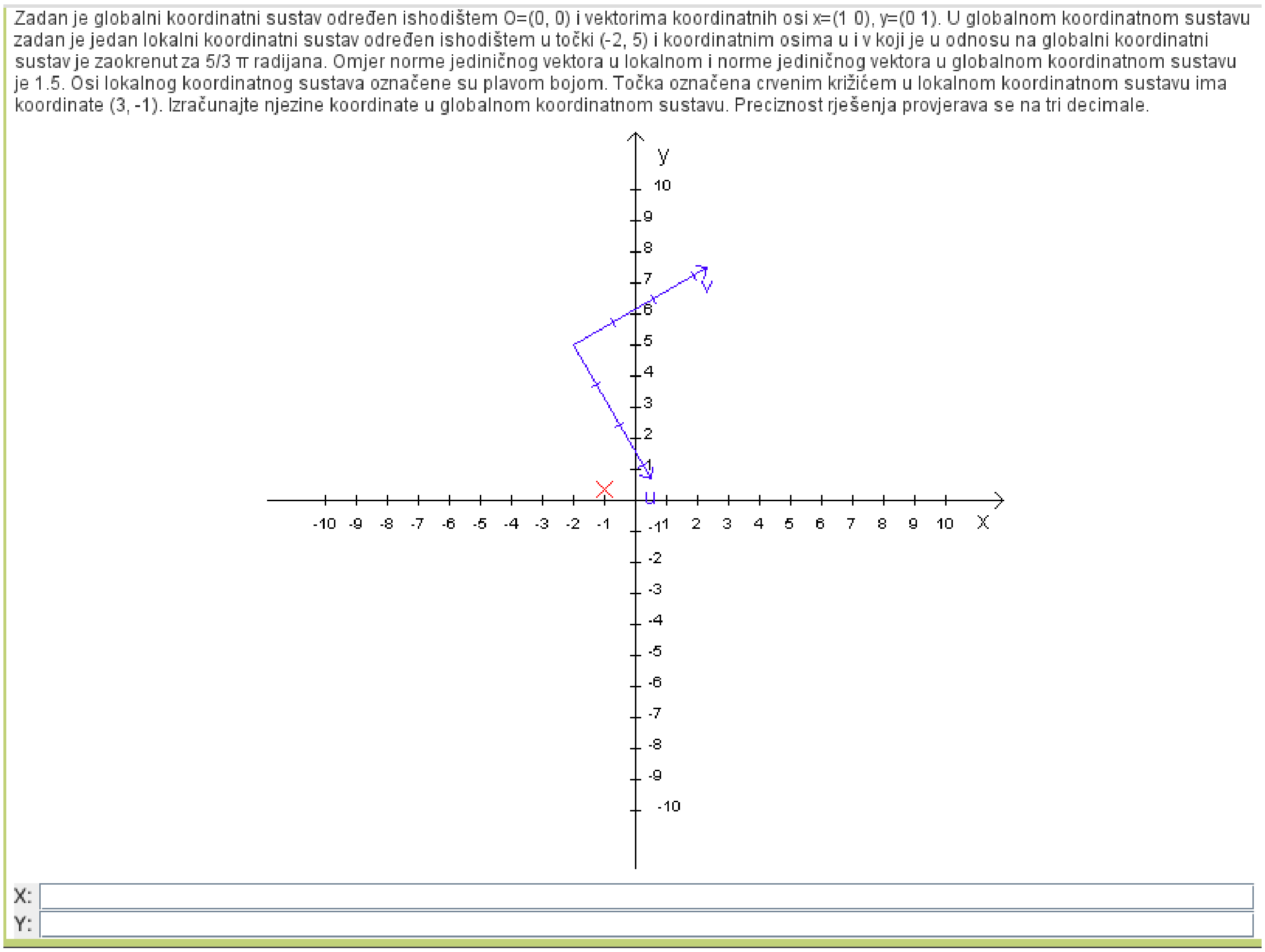
X: -2.732

Y: -0.732

Slika 34: Zadatak riješen

3.1.9 Veza dva koordinatna sustava - Transformacija iz lokalnog u globalni koordinatni sustav

Za detaljnija objašnjenja, pogledajte poglavlje 3.1.8.



Slika 35: Zadatak

Pošto je točka zadana u lokalnom koordinatnom sustavu, on je statičan. Tj. globalni ćemo prilagoditi lokalnom. Prva stvar koju je potrebno napraviti je rotacija ili skaliranje. Neka bude skaliranje - globalnom koordinatnom sustavu treba povećati normu 1.5 puta:

$$S = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nakon toga je na redu rotacija za $\frac{5\pi}{3}$ radijana u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu:

$$R = \begin{bmatrix} cos(\frac{5\pi}{3}) & sin(\frac{5\pi}{3}) & 0 \\ -sin(\frac{5\pi}{3}) & cos(\frac{5\pi}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

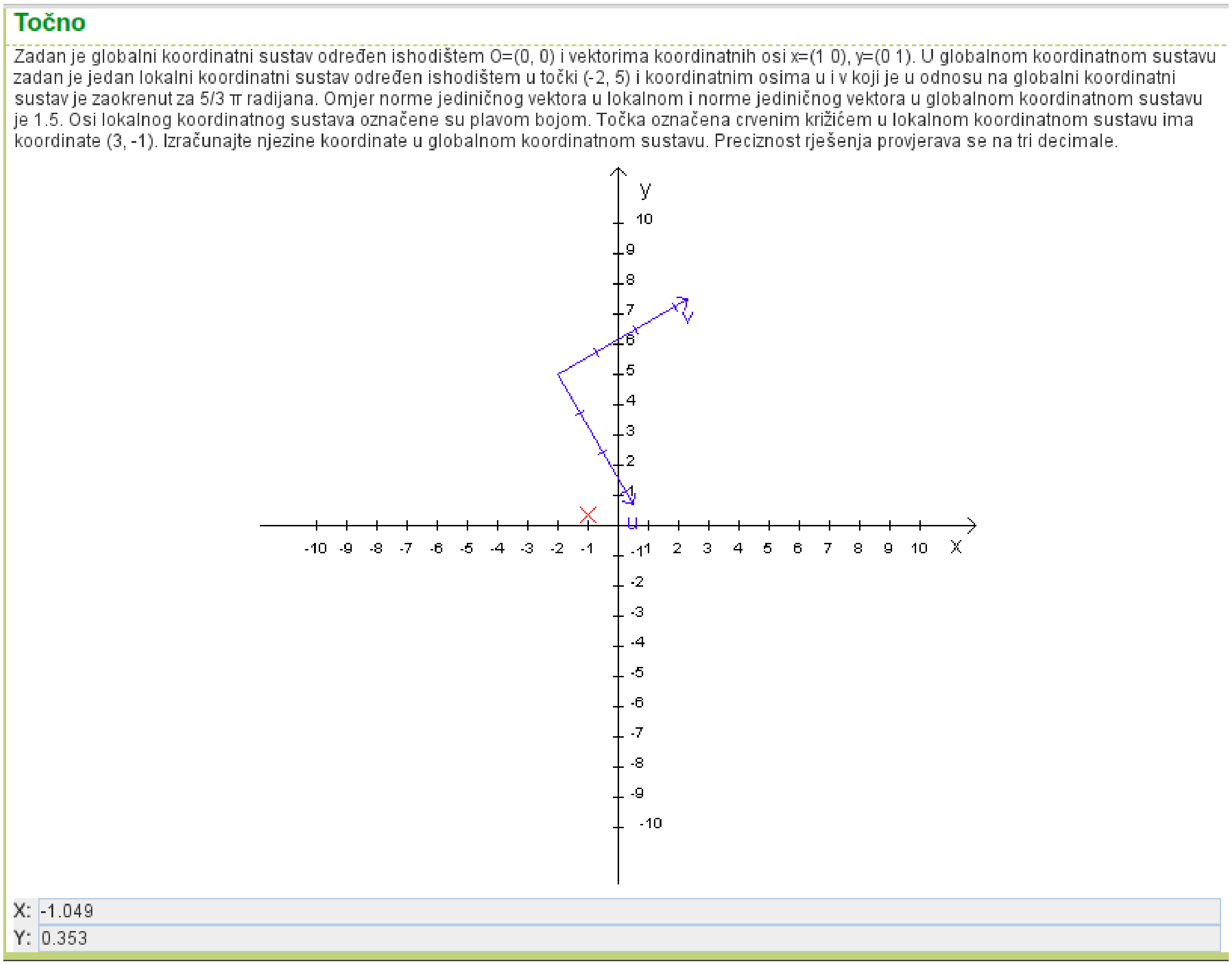
Te na kraju je translacija ishodišta globalnog koordinatnog sustava u ishodište lokalnog koordinatnog sustava:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Konačno, točka u globalnom koordinatnom sustavu iznosi:

$$V_g = V \cdot S \cdot R \cdot T = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1.049 & 0.353 & 1 \end{bmatrix}$$



Točno

Zadan je globalni koordinatni sustav određen ishodištem O=(0, 0) i vektorima koordinatnih osi x=(1 0), y=(0 1). U globalnom koordinatnom sustavu zadan je jedan lokalni koordinatni sustav određen ishodištem u točki (-2, 5) i koordinatnim osima u i v koji je u odnosu na globalni koordinatni sustav je zaokrenut za 5/3 π radijana. Omjer norme jediničnog vektora u lokalnom i norme jediničnog vektora u globalnom koordinatnom sustavu je 1.5. Osi lokalnog koordinatnog sustava označene su plavom bojom. Točka označena crvenim križićem u lokalnom koordinatnom sustavu ima koordinate (3, -1). Izračunajte njezine koordinate u globalnom koordinatnom sustavu. Preciznost rješenja provjerava se na tri decimale.

X: -1.049

Y: 0.353

Slika 36: Zadatak riješen

3.2 Trodimenzijske

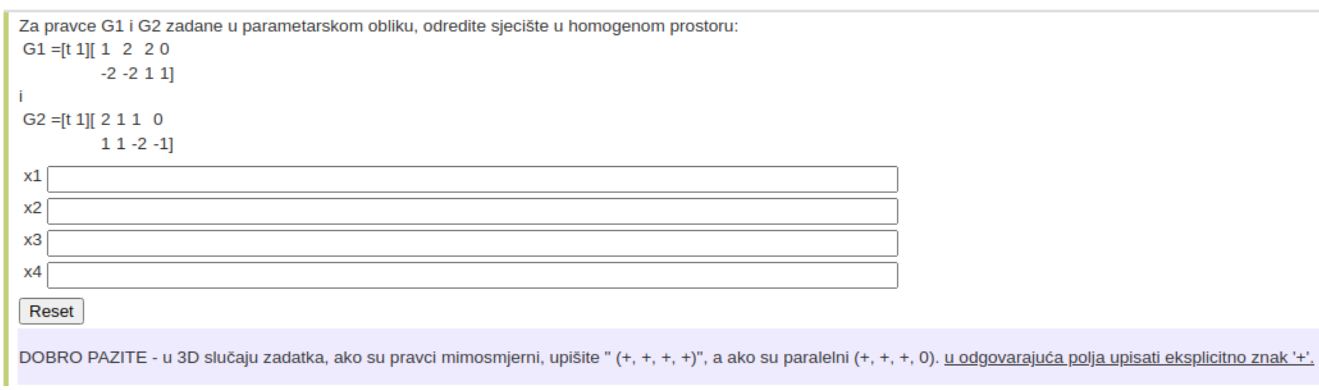
3.2.1 Sjecište dva pravca u parametarskom obliku

Kao i u 2D slučaju, parametarski oblik u 3D slučaju je predstavljen pomoću jednog parametra t kojim su opisane sve tri koordinate.

$$p = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 - V_0 \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 & 0 \\ x_0 & y_0 & z_0 & h \end{bmatrix} \tag{25}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b & c & 0 \\ x_0 & y_0 & z_0 & h \end{bmatrix}$$

gdje V_0 i V_1 predstavljaju dvije točke kroz koje pravac prolazi. Ukratko se parametarski oblik može opisati kao oblik koji se sastoji od koeficijenata smjera pravca (gornji redak matrice) i točke kroz koju prolazi (donji redak matrice).


Za pravce G1 i G2 zadane u parametarskom obliku, odredite sjecište u homogenom prostoru:
G1 =[t 1][1 2 2 0
-2 -2 1 1]
i
G2 =[t 1][2 1 1 0
1 1 -2 -1]
x1
x2
x3
x4
Reset
DOBRO PAZITE - u 3D slučaju zadatka, ako su pravci mimosmjerni, upišite " (+, +, +, +)", a ako su paralelni (+, +, +, 0). u odgovarajuća polja upisati eksplicitno znak '+'.

Slika 37: Zadatak

Prva stvar koju je potrebno napraviti u zadatku je izjednačiti h koordinate. Najjednostavniji način je taj da ih obje postavite na 1. Na prvom pravcu je postavljena na jedinicu, ali na drugom nije:

$$G_2 = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ili jednostavnije rečeno, donji redak matrice pravca G_2 pomnožimo s -1.

Sada kada su h koordinate izjednačene, prvo provjeravamo jesu li pravci paralelni. Paralelnost je najjednostavnije provjeriti tako da koeficijente oba pravca postavimo u omjere te ako su svi jednaki, pravci su paralelni:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \tag{26}$$

U našem slučaju:

$$\frac{1}{2} \neq \frac{2}{1} = \frac{2}{1}$$

Omjer $\frac{a_1}{a_2}$ nije jednak ostalim omjerima te se zaključuje da pravci nisu paralelni.

Sljedeće pokušavamo naći presjek pravaca. Jednostavnosti radi, parametar pravca G_2 će nadalje biti označavan sa s kako ne bi došlo do zabune. Kako bismo pronašli sjecište, potrebno je izjednačiti koordinate oba pravca:

$$x_1 = t - 2 \qquad x_2 = 2s - 1$$

$$y_1 = 2t - 2 \qquad y_2 = s - 1$$

$$z_1 = 2t + 1 \qquad z_2 = s + 2$$

$$x_1 = x_2$$

$$y_1 = y_2$$

$$z_1 = z_2$$

$$t - 2 = 2s - 1$$

$$2t - 2 = s - 1$$

$$2t + 1 = s + 2$$

Nakon što riješimo po dvije od tri jednadžbe s dvije nepoznanice (npr. prva i druga), za rješenje se dobije

$$t = \frac{1}{3}$$

$$s = -\frac{1}{3}$$

Sada ta rješenja uvrstimo u treću jednadžbu (onu koju nismo iskoristili za dobivanje rješenja) i ako se rezultat poklapa, pravci nisu mimosmjerni.

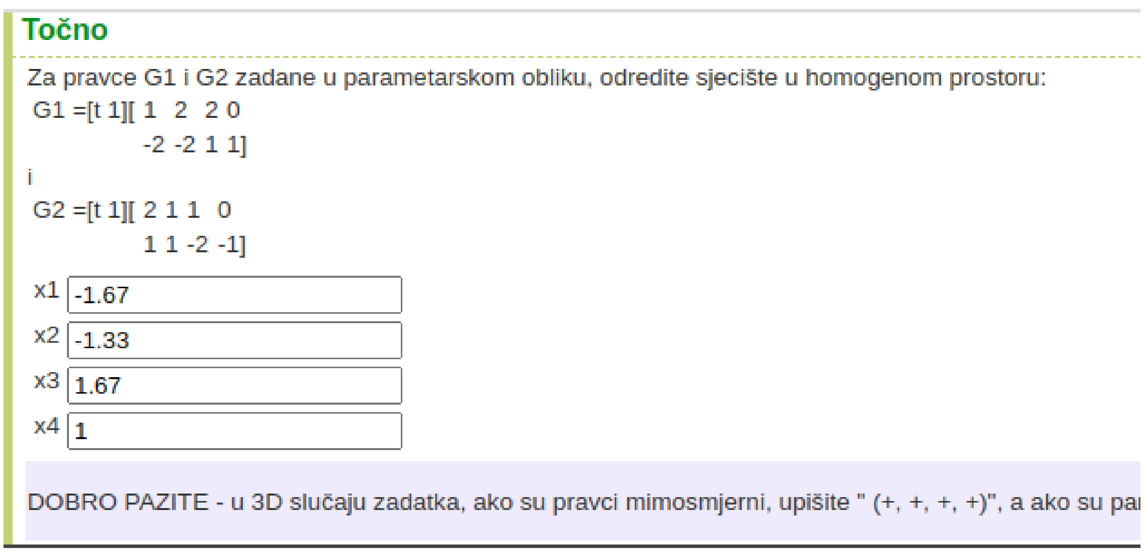
$$2 \cdot \frac{1}{3} + 1 = -\frac{1}{3} + 2 \quad => \quad \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

Pravci nisu mimosmjerni, a njihov presjek se dobije tako da t uvrstimo u jednadžbu prvog pravca ili s u jednadžbu drugog.

$$x_1 = t - 2 = \frac{1}{3} - 2 = -1.67$$

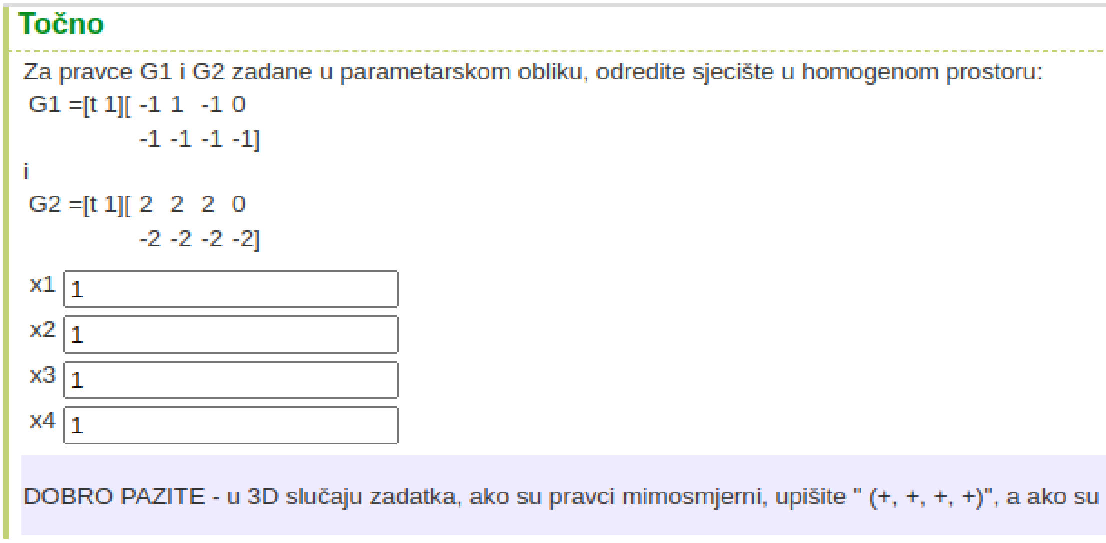
$$y_1 = 2t - 2 = 2 \cdot \frac{1}{3} - 2 = -1.33$$

$$z_1 = 2t + 1 = 2 \cdot \frac{1}{3} + 1 = 1.67$$



Slika 38: Zadatak riješen

Neke zadatke je moguće riješiti nakon izjednačavanja h koordinata



Slika 39: Zadatak riješen 2

Nakon izjednačavanja h koordinata se dobije da oba pravca prolaze kroz točku $T(1, 1, 1, 1)$, ako oba pravca prolaze kroz istu točku, ona im mora biti sjecište. To može uštedjeti veliku količinu vremena.

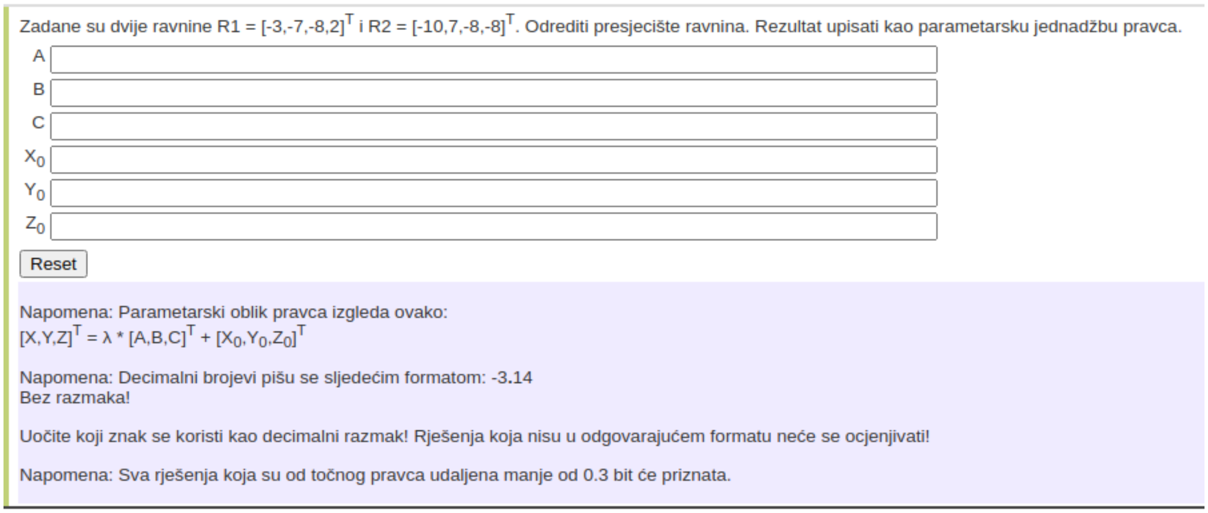
3.2.2 Sjecište dvije ravnine u implicitnom obliku

Jednadžba ravnine glasi:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{27}$$

Detaljnije o ravninama se može pronaći u knjizi na stranici 35. Normala na ravninu (pravac okomit na ravninu) se može iščitati iz jednadžbe ravnine:

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \tag{28}$$



Slika 40: Zadatak

U zadatku su zadane matrice koeficijenata pojedinih matrica. Jednadžbe obje matrice glase:

$$R_1 ... -3x - 7y - 8z + 2 = 0$$

$$R_2 ... -10x + 7y - 8z - 8 = 0$$

Sad zapravo imamo dvije jednadžbe s tri nepoznanice. Kako bismo najlakše našli pravac koji je presjecište ove dvije ravnine, moguće je pronaći dvije točke koje leže na tom pravcu. Na primjer, ako z koordinatu obje ravnine postavimo na 0, dobit ćemo jednu točku koja je zajednička objema ravninama (odnosno leži na pravcu presjecišta). Točnije, dobit ćemo dvije jednadžbe s dvije nepoznanice koje će nam na poslijetku dati x i y odnosno točku koja leži na pravcu i u obje ravnine, a čija je z koordinata jednaka 0. Uz $z = 0$:

$$-3x - 7y + 2 = 0$$

$$-10x + 7y - 8 = 0$$

$$x = -\frac{6}{13}$$

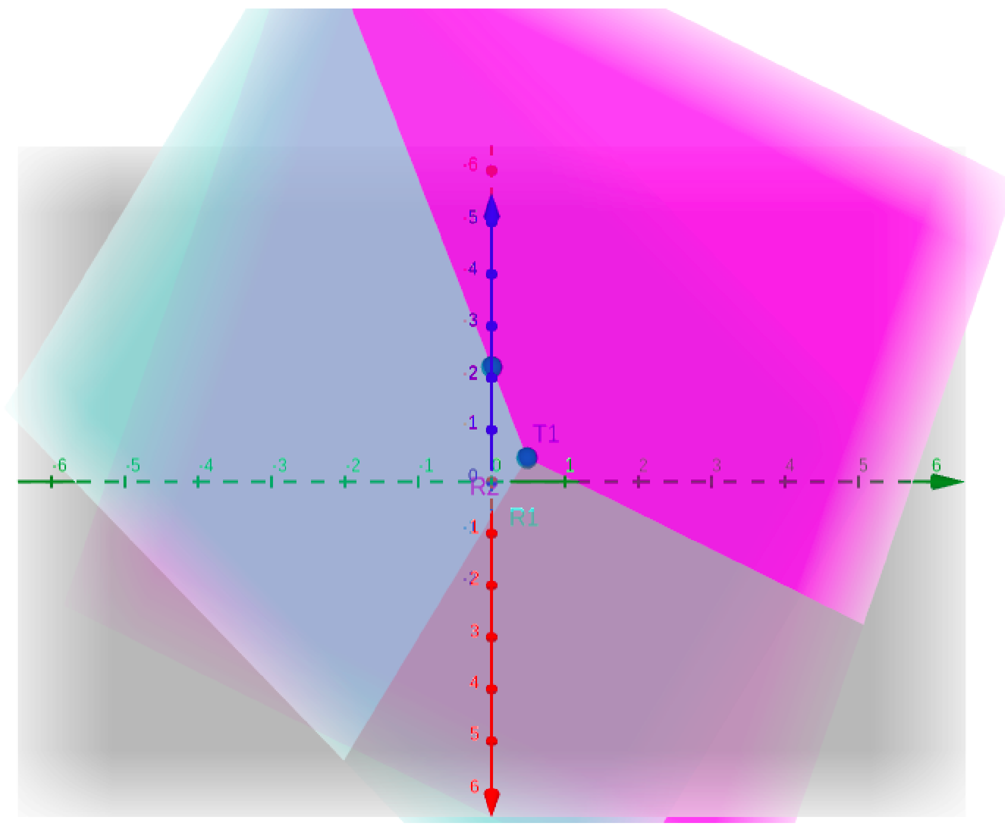
$$y = \frac{44}{91}$$

Ovime je definirana prva točka pravca presjecišta $=> T_1(-\frac{6}{13}, \frac{44}{91}, 0)$. Drugu možemo pronaći na sličan način, samo ovaj put y koordinatu postavimo na nulu.

$$-3x - 8z + 2 = 0$$
$$-10x - 8z - 8 = 0$$
$$x = -\frac{10}{7}$$
$$z = \frac{11}{14}$$

Odnosno $T_2(-\frac{10}{7}, 0, \frac{11}{14})$.

Ako za ijednu od koordinata (y i z) ne dobijemo rješenja dviju jednadžbi s dvjema nepoznanicama, samo pokušajte sa drugom koordinatom (x).



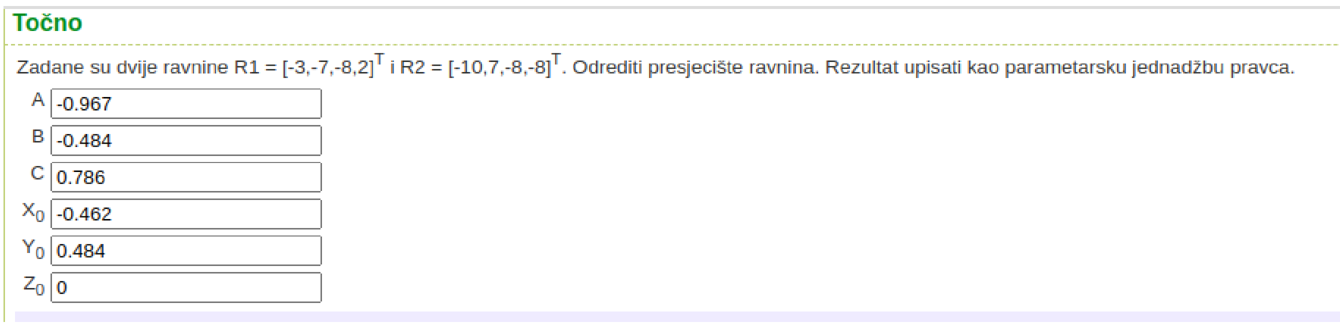
Slika 41: Presjek dviju ravnina i dobivene točke

Sada kada imamo dvije točke, možemo odrediti jednadžbu pravca u parametarskom obliku (formula 25). Znamo da se parametarski oblik sastoji od koeficijenta smjera $(T_2 - T_1)$ i točke kroz koju prolazi:

$$p = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{10}{7} + \frac{6}{13} & 0 - \frac{44}{91} & \frac{11}{14} - 0 \\ -\frac{6}{13} & \frac{44}{91} & 0 \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.967 & -0.484 & 0.786 \\ -0.462 & 0.484 & 0 \end{bmatrix}$$

Gornji stupac su koeficijenti smjera pravca A, B i C, a u donjem stupcu su x_0, y_0 i z_0.



Slika 42: Zadatak riješen

3.2.3 Sjecište implicitne i parametarske ravnine

Poznato je da se jednadžba ravnine može izračunati pomoću tri točke koje ne leže na istom pravcu (nekolinerane). Parametarski se oblik jednadžbe ravnine dobije upravo pomoću tri točke:

$$R = \begin{bmatrix} u & v & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 - V_0 \\ V_2 - V_0 \\ V_0 \end{bmatrix} \tag{29}$$

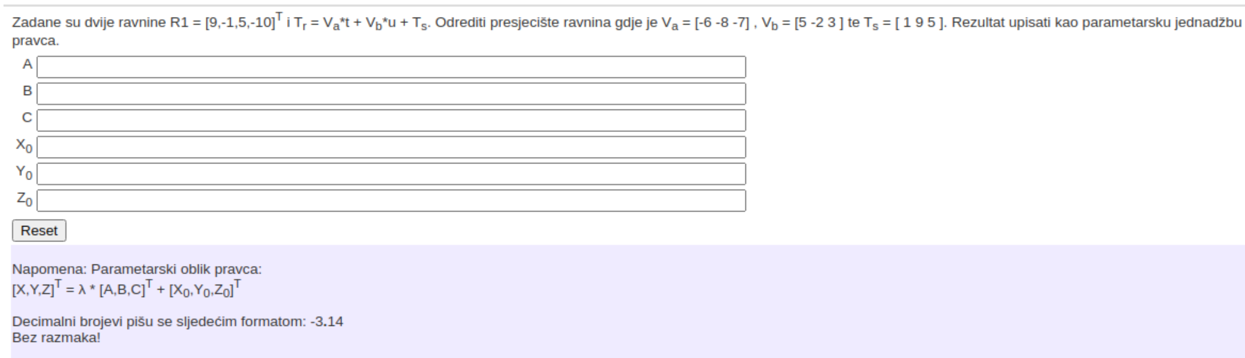
$$= \begin{bmatrix} u & v & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 & 0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 & 0 \\ x_0 & y_0 & z_0 & h \end{bmatrix}$$

ili

$$R = (V_1 - V_0) \cdot u + (V_2 - V_0) \cdot v + V_0 \tag{30}$$

gdje V_0, V_1 i V_2 predstavljaju tri točke. Iz parametarskog oblika normala se može dobiti na sljedeći način:

$$(V_1 - V_0) \times (V_2 - V_0) = \vec{n} \tag{31}$$



Zadane su dvije ravnine R1 = $[9,-1,5,-10]^T$ i $T_r = V_a*t + V_b*u + T_s$. Odrediti presjecište ravnina gdje je V_a = [-6 -8 -7] , V_b = [5 -2 3] te T_s = [1 9 5]. Rezultat upisati kao parametarsku jednadžbu pravca.

A

B

C

X_0

Y_0

Z_0

Reset

Napomena: Parametarski oblik pravca:
$[X,Y,Z]^T = \lambda * [A,B,C]^T + [X_0,Y_0,Z_0]^T$

Decimalni brojevi pišu se sljedećim formatom: -3.14
Bez razmaka!

Slika 43: Zadatak

U ovom zadatku je cilj izjednačiti oba oblika jednadžbi ravnine. Kako smo u prethodnom zadatku imali dvije jednadžbe implicitno zadane, tako ćemo i ovdje parametarski oblik pretvoriti u implicitni. Jednadžba ravnine T_r u parametarskom obliku glasi:

$$T_r = \begin{bmatrix} t & u & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ T_s \end{bmatrix}$$

gdje V_a predstavlja $(V_1 - V_0)$, tj. V_b predstavlja $(V_2 - V_0)$, odnosno T_s je V_0. Kad uvrstimo brojeve:

$$T_r = \begin{bmatrix} t & u & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & -8 & -7 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

Sada ćemo taj oblik pretvoriti u implicitni. Prvo će se izračunati normala prema izrazu 31:

$$V_a \times V_b = \vec{n}$$

$$\begin{bmatrix} -6 \\ -8 \\ -7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38 \\ -17 \\ 52 \end{bmatrix}$$

Sada imamo jednadžbu ravnine T_r:

$$-38x - 17y + 52z + D = 0$$

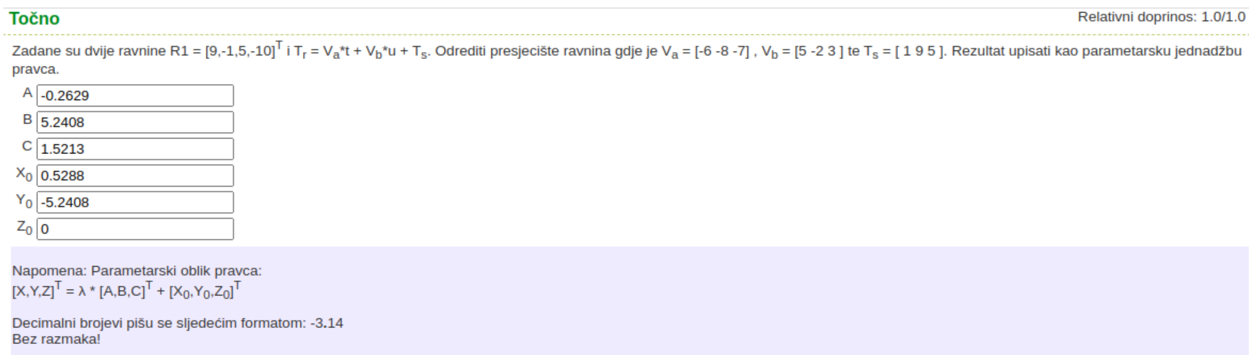
a D ćemo izračunati tako da preostalu točku T_s uvrstimo u novodobivenu jednadžbu:

$$-38 \cdot 1 - 17 \cdot 9 + 52 \cdot 5 + D = 0$$

$$D = -69$$

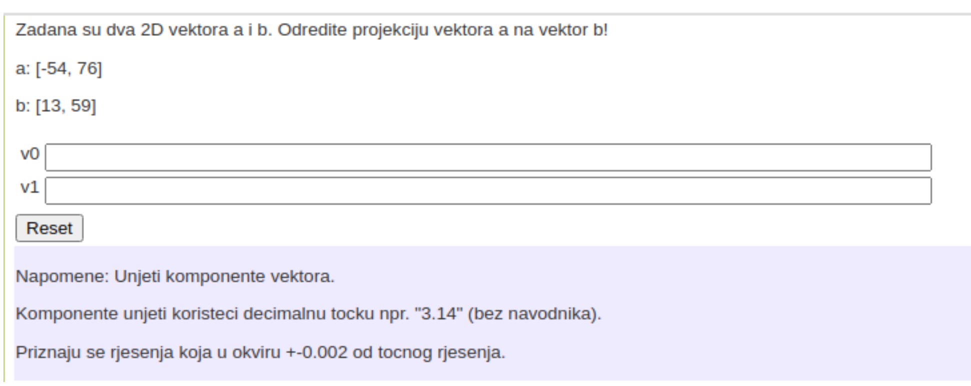
$$T_r ... - 38x - 17y + 52z - 69 = 0$$

Sada kad imamo dvije jednadžbe u implicitnom obliku, zadatak se rješava kao i prethodni (3.2.2).



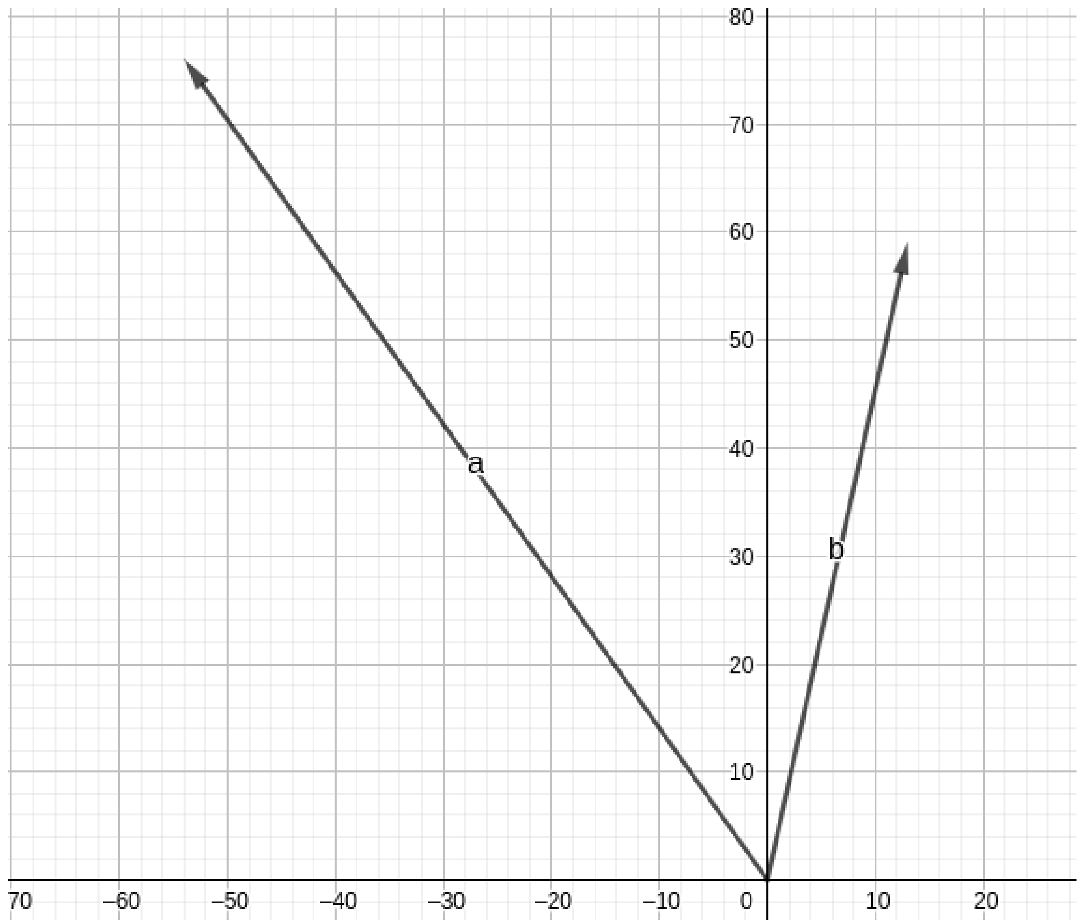
Slika 44: Zadatak riješen

3.2.4 Projekcija vektora na vektor - 2D slučaj



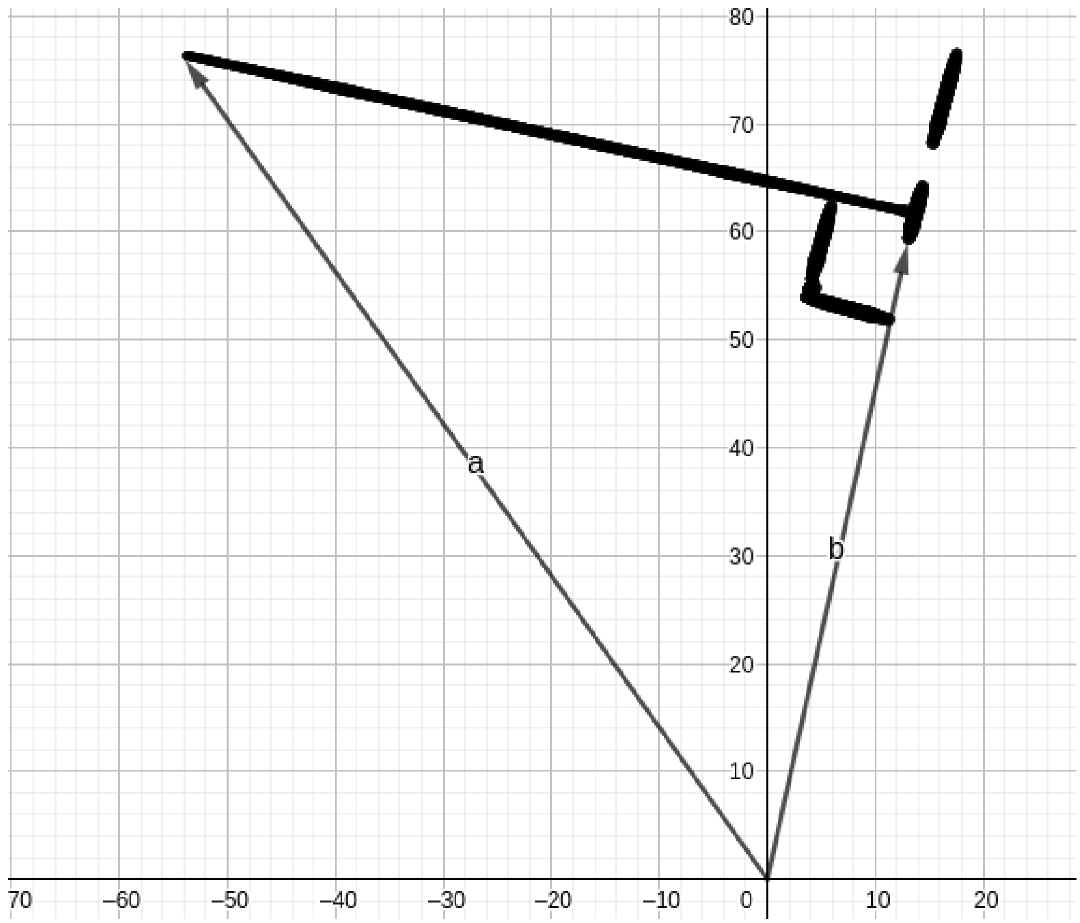
Slika 45: Zadatak

U ravnini ta dva vektora izgledaju:



Slika 46: Oba vektora u ravnini

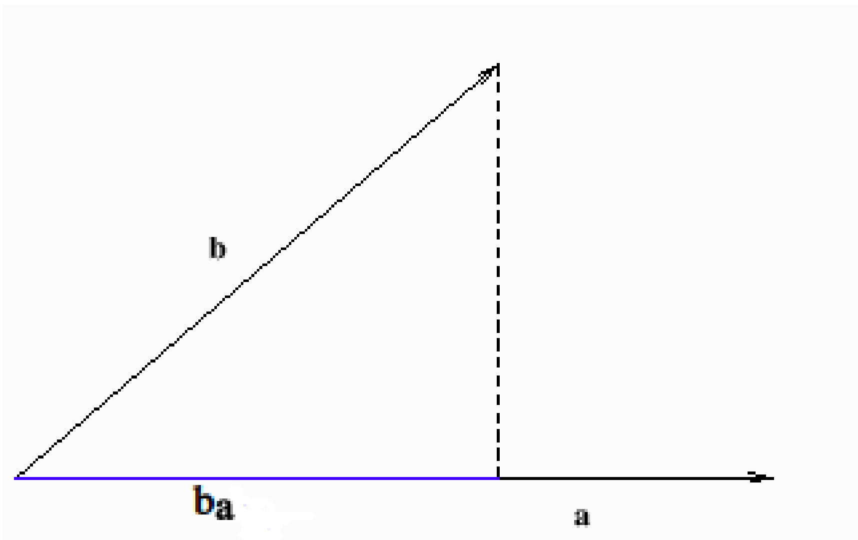
Projekcija jednog vektora na drugi izgleda ovako:



Slika 47: Projekcija vektora $\vec{a}$ na $\vec{b}$

Nadalje, znamo da je formula skalarnog umnoška:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |a| \cdot |b| \cdot cos(\alpha) \tag{32}$$



Slika 48: Skalarni umnožak

Na slici 48 je vidljiva interpretacija skalarnog umnoška:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |a| \cdot |b_a| = |a| \cdot |b| \cdot cos(\alpha)$$

$$|b_a| = |b| \cdot cos(\alpha)$$

$$|b_a| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|a|}$$

Odnosno, b_a je duljina projekcije vektora $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$. Sličnu paralelu možemo povući s ovim zadatkom. Iz zadatka možemo izračunati duljinu projekcije vektora $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$.

$$|a_b| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|b|} \tag{33}$$

Odnosno, kada uvrstimo konkretne vrijednosti:

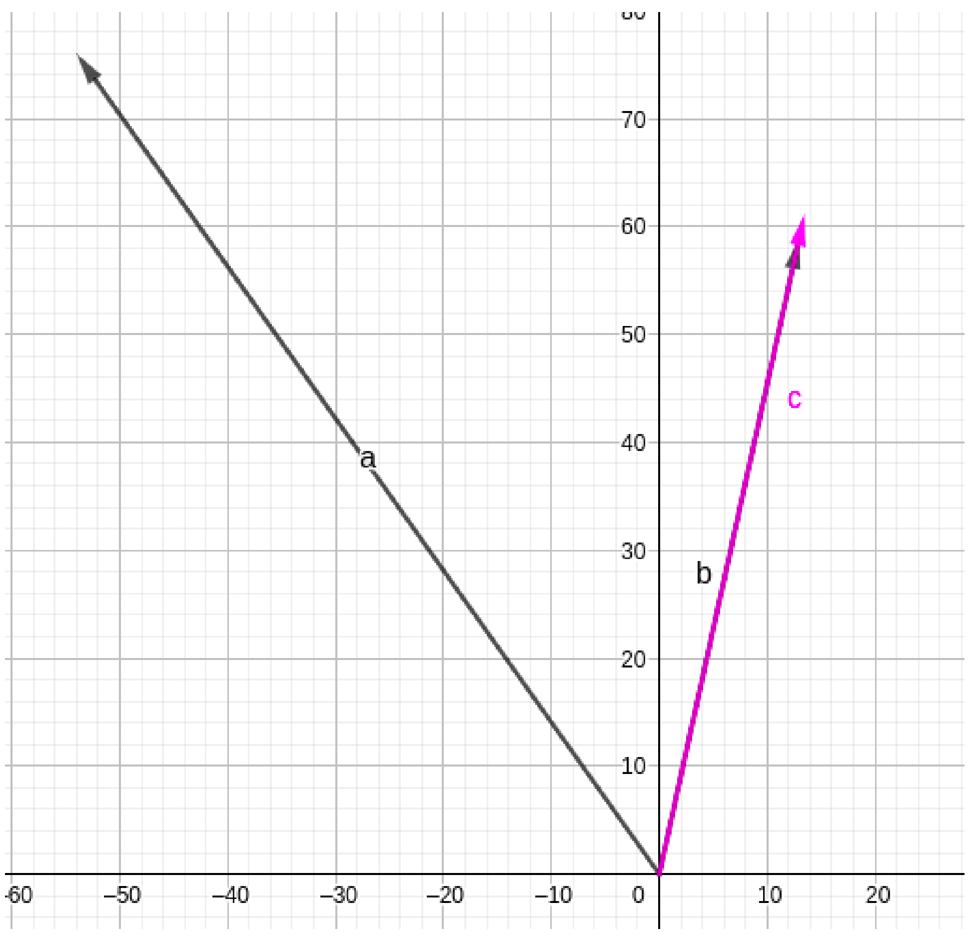
$$|a_b| = \frac{-54 \cdot 13 + 76 \cdot 59}{\sqrt{13^2 + 59^2}} = 62.6$$

Sada kada imamo duljinu projekcije, možemo jednostavno izračunati vektor projekcije. Naime, kako projekcija vektora a_b leži na vektoru $\vec{b}$, dovoljno je duljinu projekcije pomnožiti s normiranim vektorom $\vec{b}$ kako bismo dobili vektor projekcije:

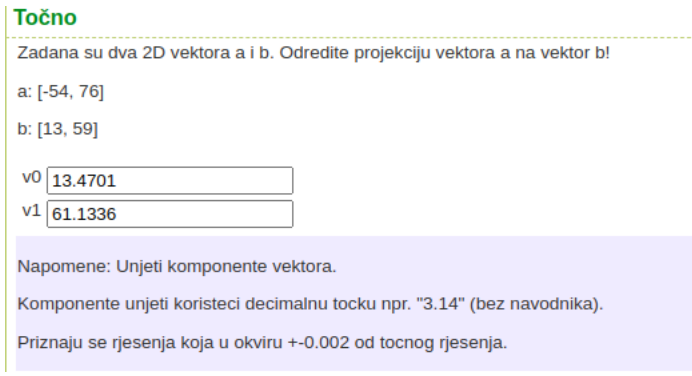
$$\vec{a_b} = |a_b| \cdot \frac{\vec{b}}{|b|}$$

S konkretnim vrijednostima:

$$\vec{a_b} = 62.6 \cdot \frac{\begin{bmatrix} 13 \\ 59 \end{bmatrix}}{\sqrt{13^2 + 59^2}} = \begin{bmatrix} 13.4701 \\ 61.1336 \end{bmatrix}$$



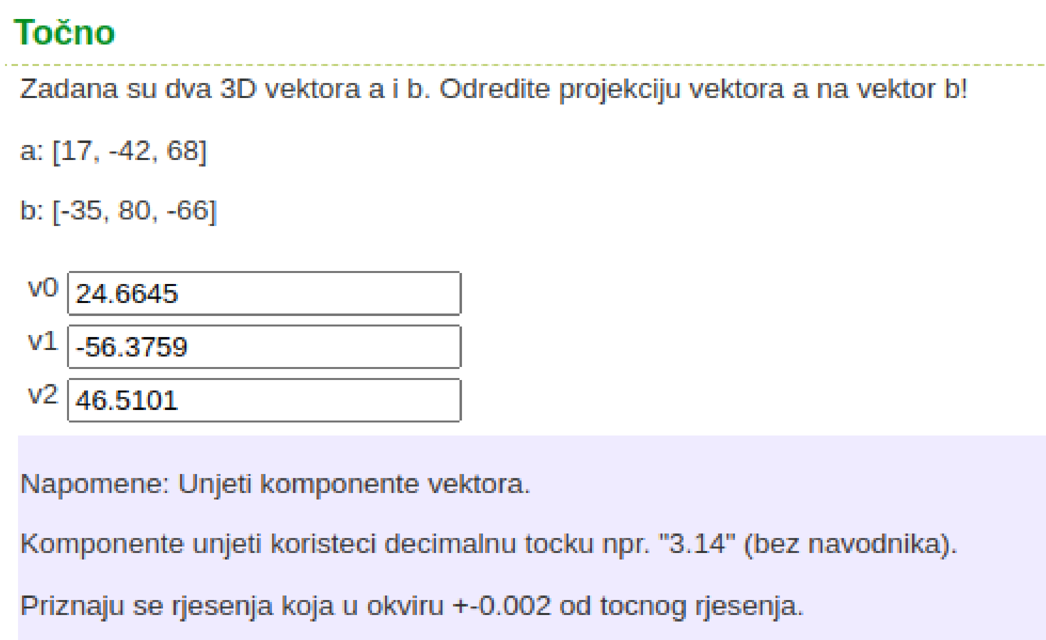
Slika 49: Prikaz projekcije (ružičasto)



Slika 50: Zadatak riješen

3.2.5 Projekcija vektora na vektor - 3D slučaj

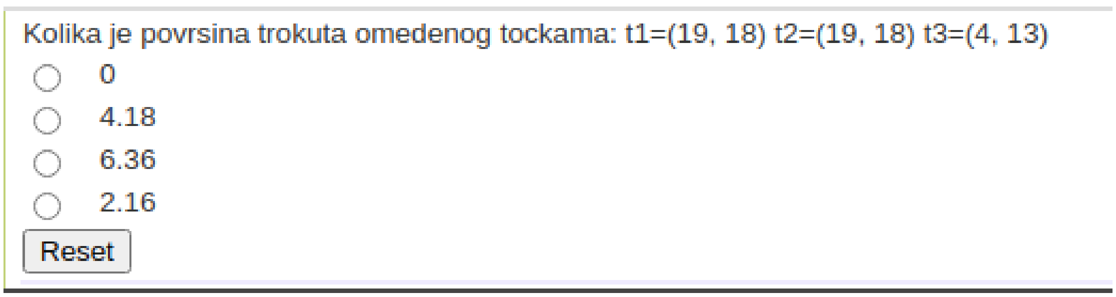
Kao i u 2D slučaju, formule vrijede i za 3D slučaj (3.2.4).



Slika 51: Zadatak riješen

3.2.6 Određivanje površine trokuta - 2D slučaj

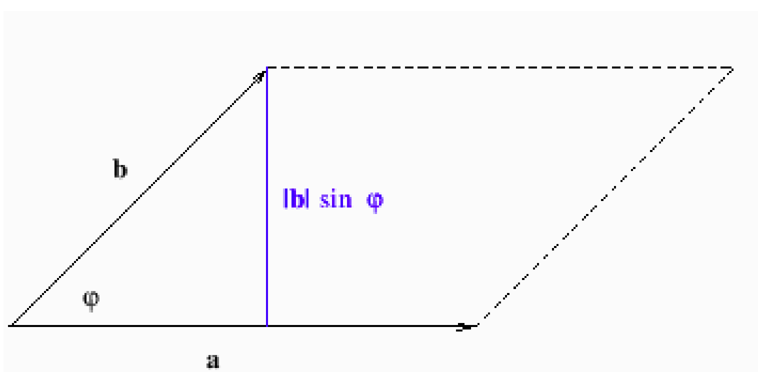
Prije rješavanja zadataka, dobro je znati koristiti kalkulator za računanje vektora (1).



Slika 52: Zadatak

Površinu trokuta zadanog točkama je najlakše izračunati koristeći se formulom za duljinu vektorskog umnoška.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |a| \cdot |b| \cdot sin(\varphi) \tag{34}$$



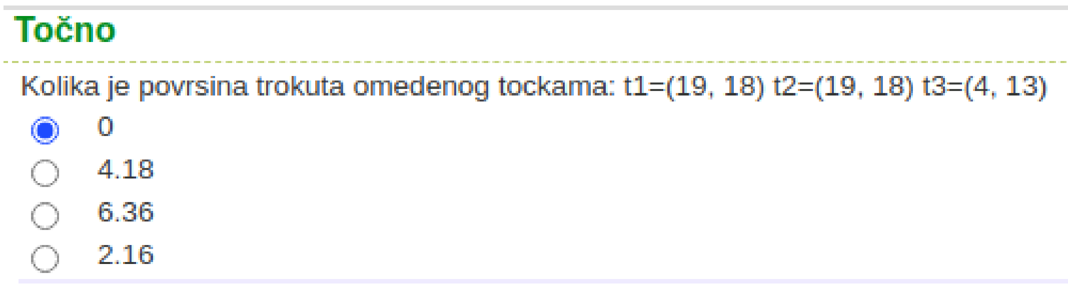
Slika 53: Duljina vektorskog umnoška

Sa slike 53 je vidljivo da norma (duljina) vektorskog umnoška predstavlja površinu paralelograma kojeg dva vektora tvore. Pošto mi u zadatku imamo trokut, tu isti formulu ćemo samo podijeliti sa 2. Konkretna formula za izračun površine trokuta dana je u nastavku:

$$P_{\Delta} = \frac{|(t_2 - t_1) \times (t_3 - t_1)|}{2}$$

S tim da je dobro za napomenuti da nije bitno koja se točka oduzima od koje ili kojim redoslijedom se množe razlike točaka, sve dok razlike točaka čine dva nekolinearna vektora.

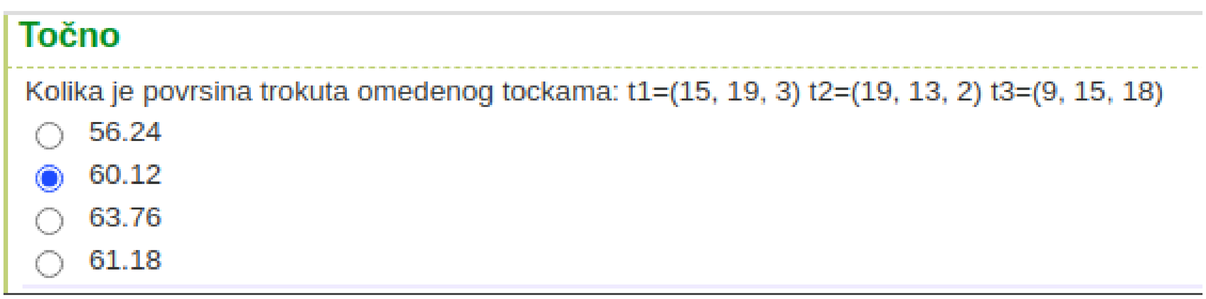
Kad se uvrste konkretne vrijednosti za rješenje se dobije 0.



Slika 54: Zadatak riješen

3.2.7 Određivanje površine trokuta - 3D slučaj

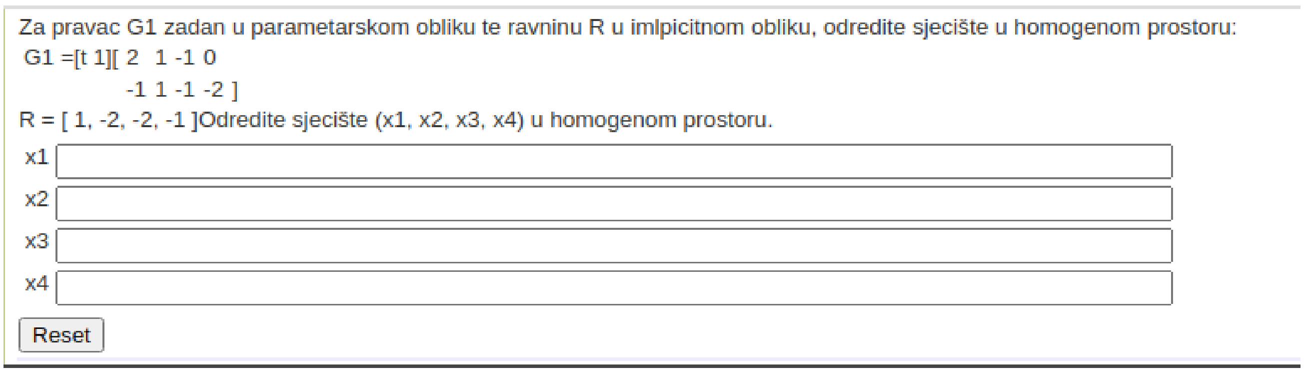
U slučaju 3D trokuta, koriste se isti postupci kao i u 2D slučaju (3.2.6).



Slika 55: Zadatak riješen

3.2.8 Sjecište pravca i ravnine - Ravnina zadana implicitnim oblikom

Za podsjetnik jednadžbe ravnine zadane u implicitnom obliku: 3.2.2.
Za podsjetnik pravca u parametarskom obliku: 3.2.1.


Za pravac G1 zadan u parametarskom obliku te ravninu R u imlpicitnom obliku, odredite sjecište u homogenom prostoru:
G1 =[t 1][2 1 -1 0
-1 1 -1 -2]
R = [1, -2, -2, -1]Odredite sjecište (x1, x2, x3, x4) u homogenom prostoru.
x1
x2
x3
x4
Reset

Slika 56: Zadatak

Prva stvar koju je potrebno napraviti u zadatku je izjednačiti homogenu koordinatu pravca s jedinicom. To ćemo napraviti tako da donji redak matrice podijelimo s -2 u ovom slučaju. Nakon toga, matrica pravca G_1 izgleda ovako:

$$G_1 = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Iz parametarskog oblika znamo da koordinate pravca G_1 izgledaju ovako:

$$x = 2t + \frac{1}{2}$$

$$y = t - \frac{1}{2}$$

$$z = -t + \frac{1}{2}$$

Nadalje, jednadžba ravnine R:

$$x - 2y - 2z - 1 = 0$$

Kako bismo našli točku presjecišta, uvrstimo koordinate pravca G_1 u jednadžbu ravnine R:

$$2t + \frac{1}{2} - 2 \cdot (t - \frac{1}{2}) - 2 \cdot (-t + \frac{1}{2}) - 1 = 0$$

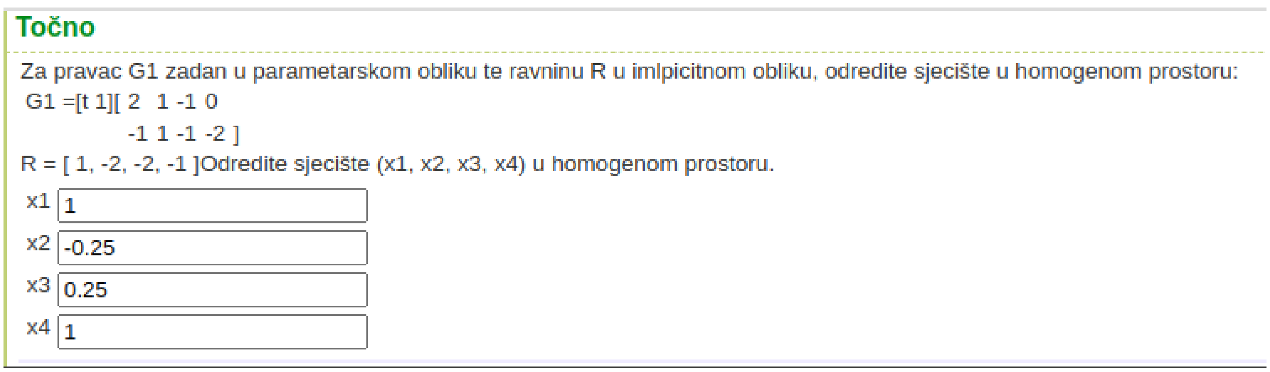
$$t = 0.25$$

Kako bismo dobili točku, dobiveni t uvrstimo u parametarski oblik jednadžbe pravca.

$$x = 2 \cdot 0.25 + \frac{1}{2} = 1$$

$$y = 0.25 - \frac{1}{2} = -0.25$$

$$z = -0.25 + \frac{1}{2} = 0.25$$



Točno

Za pravac G1 zadan u parametarskom obliku te ravninu R u imlpicitnom obliku, odredite sjecište u homogenom prostoru:
G1 =[t 1][2 1 -1 0
-1 1 -1 -2]
R = [1, -2, -2, -1]Odredite sjecište (x1, x2, x3, x4) u homogenom prostoru.

x1 1

x2 -0.25

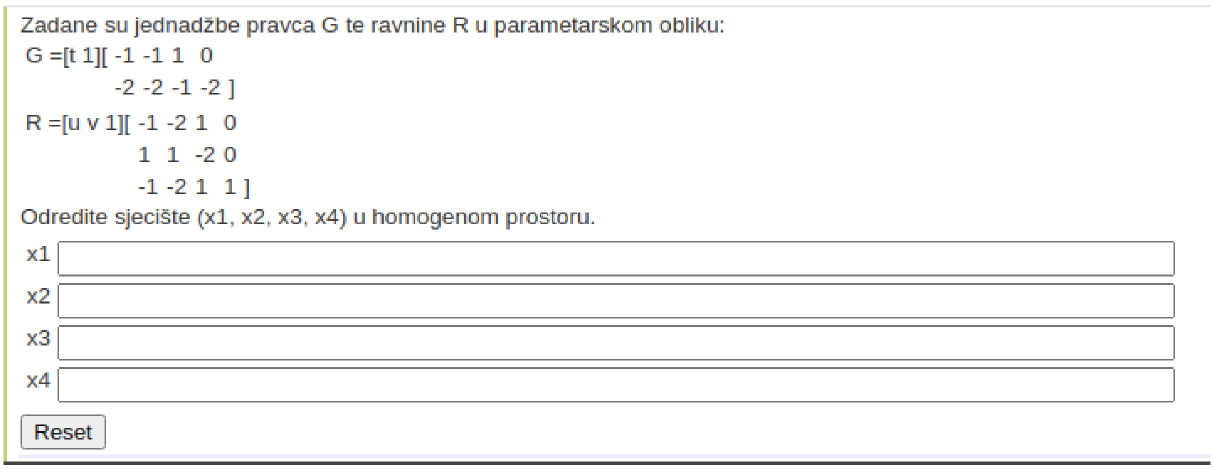
x3 0.25

x4 1

Slika 57: Zadatak riješen

3.2.9 Sjecište pravca i ravnine - Ravnina zadana parametarskim oblikom

Za podsjetnik pravca u parametarskom obliku: 3.2.1.
Za podsjetnik jednadžbe ravnine zadane u parametarskom obliku: 3.2.3.
Prva stvar koju je potrebno napraviti u zadatku je izjednačiti homogene



Zadane su jednadžbe pravca G te ravnine R u parametarskom obliku:
G =[t 1][-1 -1 1 0
-2 -2 -1 -2]
R =[u v 1][-1 -2 1 0
1 1 -2 0
-1 -2 1 1]
Odredite sjecište (x1, x2, x3, x4) u homogenom prostoru.
x1
x2
x3
x4
Reset

Slika 58: Zadatak

koordinate (najdonji reci) pravca i ravnine s jedinicom. Vidimo da je u zadatku homogena koordinata ravnine već 1, ali homogena koordinata pravca nije. Nakon izjednačavanja:

$$G = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Sljedeće, prikažemo x, y i z preko parametara:

$$\begin{array}{cc} \text{pravac:} & \text{ravnina:} \\ x = -t + 1 & x = -u + v - 1 \\ y = -t + 1 & y = -2u + v - 2 \\ z = t + \frac{1}{2} & z = u - 2v + 1 \end{array}$$

Kad izjednačimo x-eve, y-one i z-ove:

$$-t + 1 = -u + v - 1$$

$$-t + 1 = -2u + v - 2$$

$$t + \frac{1}{2} = u - 2v + 1$$

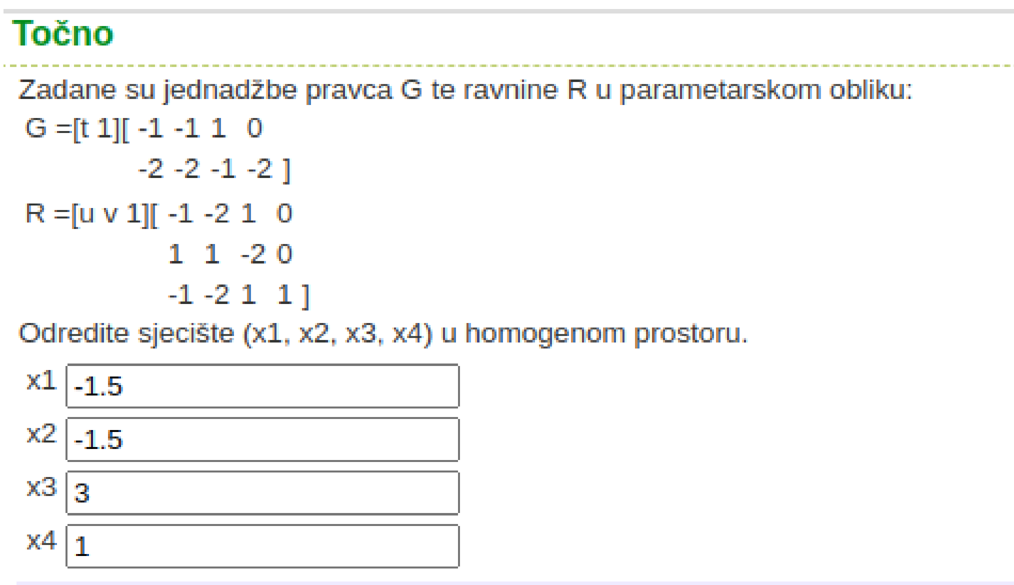
Nakon rješavanja tri jednadžbe s tri nepoznanice, dobije se:

$$t = 2.5$$

$$u = -1$$

$$v = -1.5$$

Kako bismo dobili točku presjecišta uvrstimo t u jednadžbu pravca ili u i v u jednadžbu ravnine te za rješenje se dobije točka $T(-1.5, -1.5, 3)$



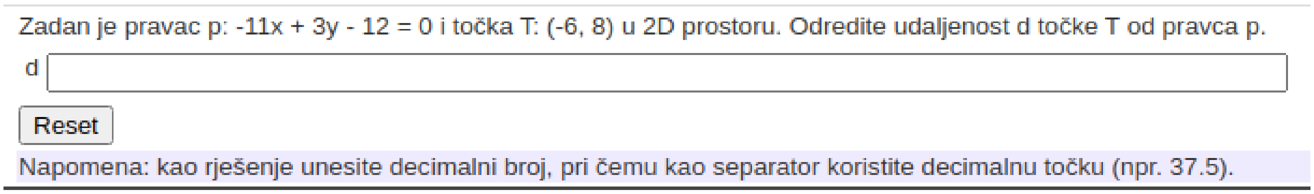
Slika 59: Zadatak riješen

3.2.10 Udaljenost točke do pravca - 2D slučaj

Ako bismo normirali jednadžbu pravca zadanu u implicitnom obliku, uvrštavanjem bilo koje točke u takav oblik, dobili bismo udaljenost točke do pravca (knjiga str. 29).

$$ax + by + c = 0$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot y + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0 \tag{35}$$


Zadan je pravac p: -11x + 3y - 12 = 0 i točka T: (-6, 8) u 2D prostoru. Odredite udaljenost d točke T od pravca p.

d

Reset

Napomena: kao rješenje unesite decimalni broj, pri čemu kao separator koristite decimalnu točku (npr. 37.5).

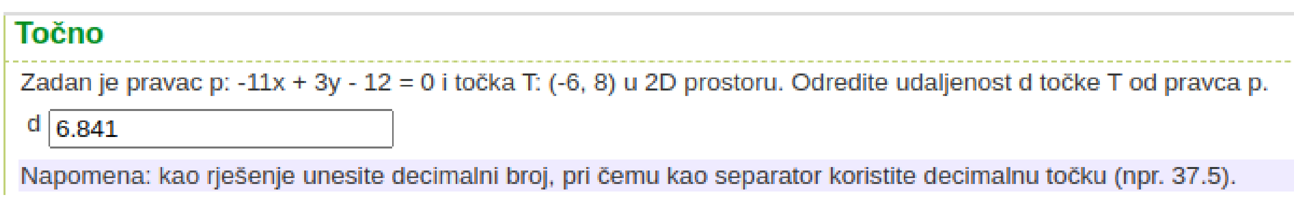
Slika 60: Zadatak

Prvo normirano jednadžbu pravca:

$$-\frac{11}{\sqrt{(-11)^2+3^2}}\cdot x+\frac{3}{\sqrt{(-11)^2+3^2}}\cdot y-\frac{12}{\sqrt{(-11)^2+3^2}}=0$$

Nakon toga, u normiranu jednadžbu, uvrstimo koordinate točke T i dobijemo udaljenost točke od pravca:

$$-\frac{11}{\sqrt{(-11)^2+3^2}}\cdot(-6)+\frac{3}{\sqrt{(-11)^2+3^2}}\cdot 8-\frac{12}{\sqrt{(-11)^2+3^2}}=6.841$$


Točno

Zadan je pravac p: -11x + 3y - 12 = 0 i točka T: (-6, 8) u 2D prostoru. Odredite udaljenost d točke T od pravca p.

d 6.841

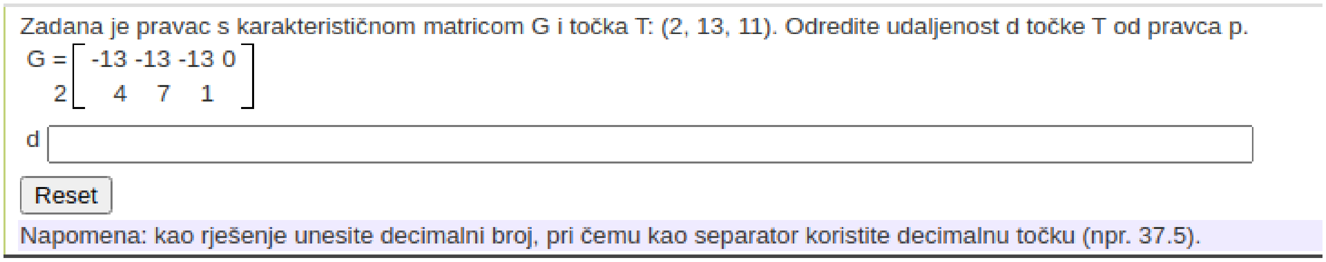
Napomena: kao rješenje unesite decimalni broj, pri čemu kao separator koristite decimalnu točku (npr. 37.5).

Slika 61: Zadatak riješen

3.2.11 Udaljenost točke do pravca - 3D slučaj

Kako u 3D slučaju ne postoji jednadžba pravca u implicitnom obliku, ne možemo se poslužiti trikom kao u 2D slučaju. Rješenje preko skalarnog umnoška se može pronaći na sljedećem linku https://www.youtube.com/watch?v=gFvo82jINqk. A ovdje ćemo riješiti na drugi način. Prvo ćemo se prisjetiti formule za udaljenost dvije točke:

$$d(T_1,T_0)=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2} \tag{36}$$


Zadana je pravac s karakterističnom matricom G i točka T: (2, 13, 11). Odredite udaljenost d točke T od pravca p.

G = [-13 -13 -13 0
2 4 7 1]

d

Reset

Napomena: kao rješenje unesite decimalni broj, pri čemu kao separator koristite decimalnu točku (npr. 37.5).

Slika 62: Zadatak

Karakteristična matrica pravca je malo nespretno zadana, ona zapravo izgleda ovako:

$$G = \begin{bmatrix} -13 & -13 & -13 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Prvo treba provjeriti iznos homogene koordinate, te ako nije 1, izjednačiti s 1. Nekâ točka pravca G ima koordinate:

$$x = -13t + 2$$

$$y = -13t + 4$$

$$z = -13t + 7$$

Kada se uvrsti u formulu za udaljenost, dobije se:

$$d(T_G, T) = \sqrt{(-13t + 2 - 2)^2 + (-13t + 4 - 13)^2 + (-13t + 7 - 11)^2}$$

$$= \sqrt{(-13t)^2 + (-13t - 9)^2 + (-13t - 4)^2}$$

$$= \sqrt{169t^2 + 169t^2 + 234t + 81 + 169t^2 + 104t + 16}$$

$$= \sqrt{507t^2 + 338t + 97}$$

Sada treba razmišljati na način da je potrebna **najmanja** udaljenost točke od pravca, tj. minimum. Imajući to na umu, potrebna je derivacija funkcije udaljenosti, a funkcija postiže minimum kad je derivacija jednaka 0. (Deriviranje funkcije korijena nije potrebno, postoji malo brži način koji će biti objašnjen poslije u tekstu ovdje).

$$\frac{d}{dt}(d(T_G, T)) = 0$$

Po pravilu deriviranja korijena i složene derivacije

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \tag{37}$$

se dobije

$$\frac{1014t + 338}{2\sqrt{507t^2 + 338t + 97}} = 0$$

Kako u jednadžbi koja sadržava nepoznanicu u nazivniku, nazivnik ne smije biti jednak 0, provjeravamo samo brojnik. Sve deriviranje korijena smo mogli izbjeći na način da smo derivirali kvadrat funkcije udaljenosti i izjednačili s 0. Dobili bismo isti rezultat:

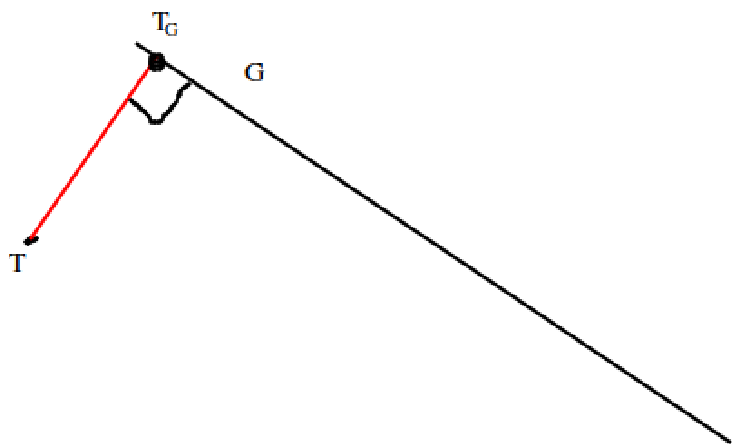
$$\frac{d}{dt}(d(T_G, T)^2) = 0$$

$$1014t + 338 = 0$$

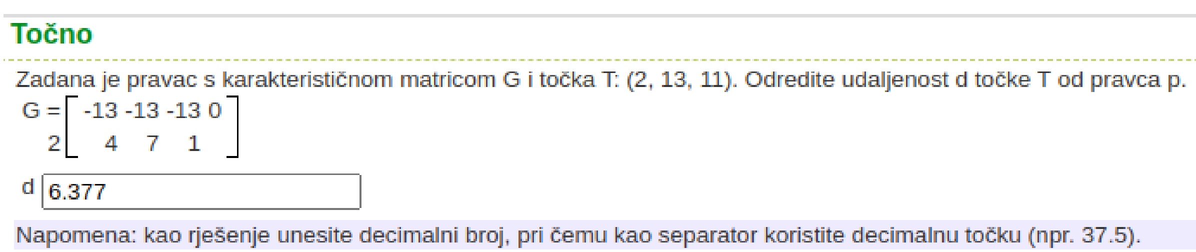
$$t = -0.33$$

Na ovaj način smo dobili parametar t koji daje točku koja leži na pravcu okomitom s obzirom na zadani pravac. Da bismo dobili udaljenost, dobiveni t uvrštavamo u jednadžbu:

$$d(T_G, T) = \sqrt{507t^2 + 338t + 97} = 6.377$$



Slika 63: Skica dobivenog t i točke T_G



Točno

Zadana je pravac s karakterističnom matricom G i točka T: (2, 13, 11). Odredite udaljenost d točke T od pravca p.

$$\begin{array}{r} G = \\ 2 \end{array}\begin{bmatrix} -13 & -13 & -13 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & \end{bmatrix}$$

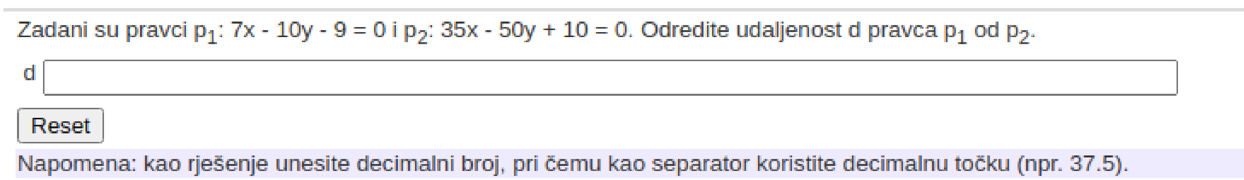
d 6.377

Napomena: kao rješenje unesite decimalni broj, pri čemu kao separator koristite decimalnu točku (npr. 37.5).

Slika 64: Zadatak riješen

3.2.12 Udaljenost dva pravca - 2D slučaj

Što se tiče računanja udaljenosti dva pravca u 2D slučaju, udaljenost se može jedino računati za paralelne pravce.



Slika 65: Zadatak

Ovdje je najprije dobro provjeriti jesu li dva pravca paralelna. To se može provjeriti gledajući omjere koeficijenata oba pravca te ako su oni jednaki, pravci su paralelni.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \tag{38}$$

Konkretno, u zadatku:

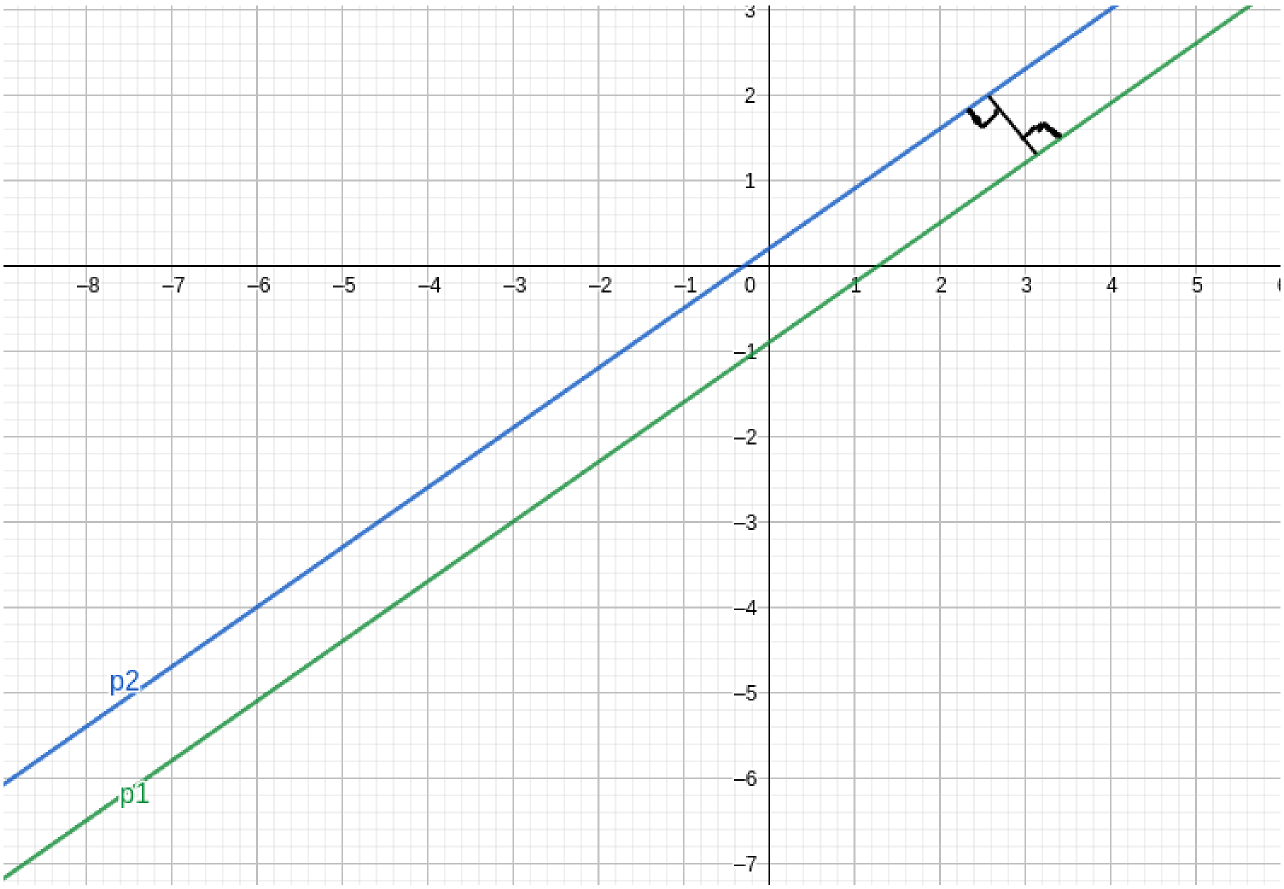
$$\frac{7}{35} = \frac{-10}{-50}$$

Te se zaključuje da su pravci paralelni. Da nisu bili paralelni, njihova udaljenost bi automatski bila 0 jer imaju presjecište. Kako bismo izračunali udaljenost, možemo se poslužiti jednim trikom. To je taj da pronađemo jednu točku na jednom od pravaca, npr. na prvom pravcu. Za x koordinatu prvog pravca uvrstimo 0 i dobijemo:

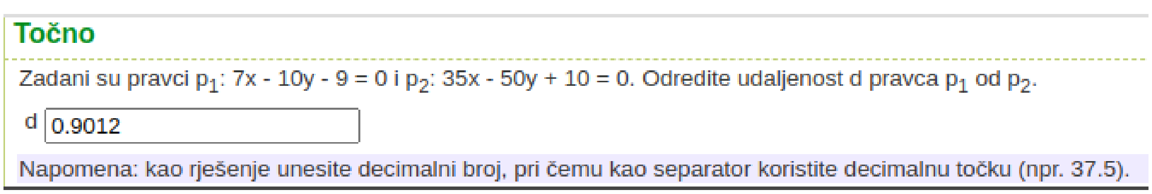
$$-10y = 9$$

$$y = -\frac{9}{10}$$

Te točka $T(0, -\frac{9}{10})$ se nalazi na prvom pravcu. Sad kada imamo točku prvog pravca, uvrstimo ju u normirani oblik jednadžbe drugog pravca i dobijemo udaljenost. Slično kao i u 3.2.10.



Slika 66: Prikaz pravaca u koordinatnom sustavu i najmanje udaljenosti između njih


Točno

Zadani su pravci p_1: $7x - 10y - 9 = 0$ i p_2: $35x - 50y + 10 = 0$. Odredite udaljenost d pravca p_1 od p_2.

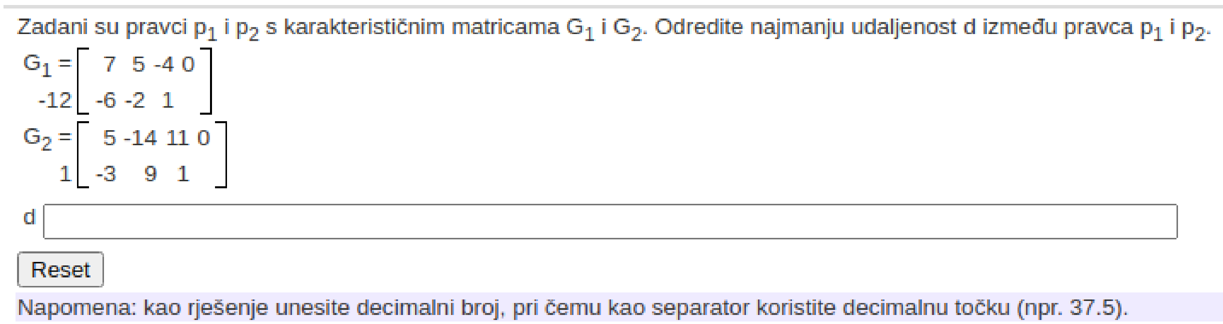
d 0.9012

Napomena: kao rješenje unesite decimalni broj, pri čemu kao separator koristite decimalnu točku (npr. 37.5).

Slika 67: Zadatak riješen

3.2.13 Udaljenost dva pravca - 3D slučaj

Kod 3D slučaja udaljenosti dvaju pravaca, pravci se mogu nalaziti u tri stanja - sjeći se, biti paralelni ili biti mimosmjerni. Udaljenost se računa za paralelne ili mimosmjerne pravce.



Slika 68: Zadatak

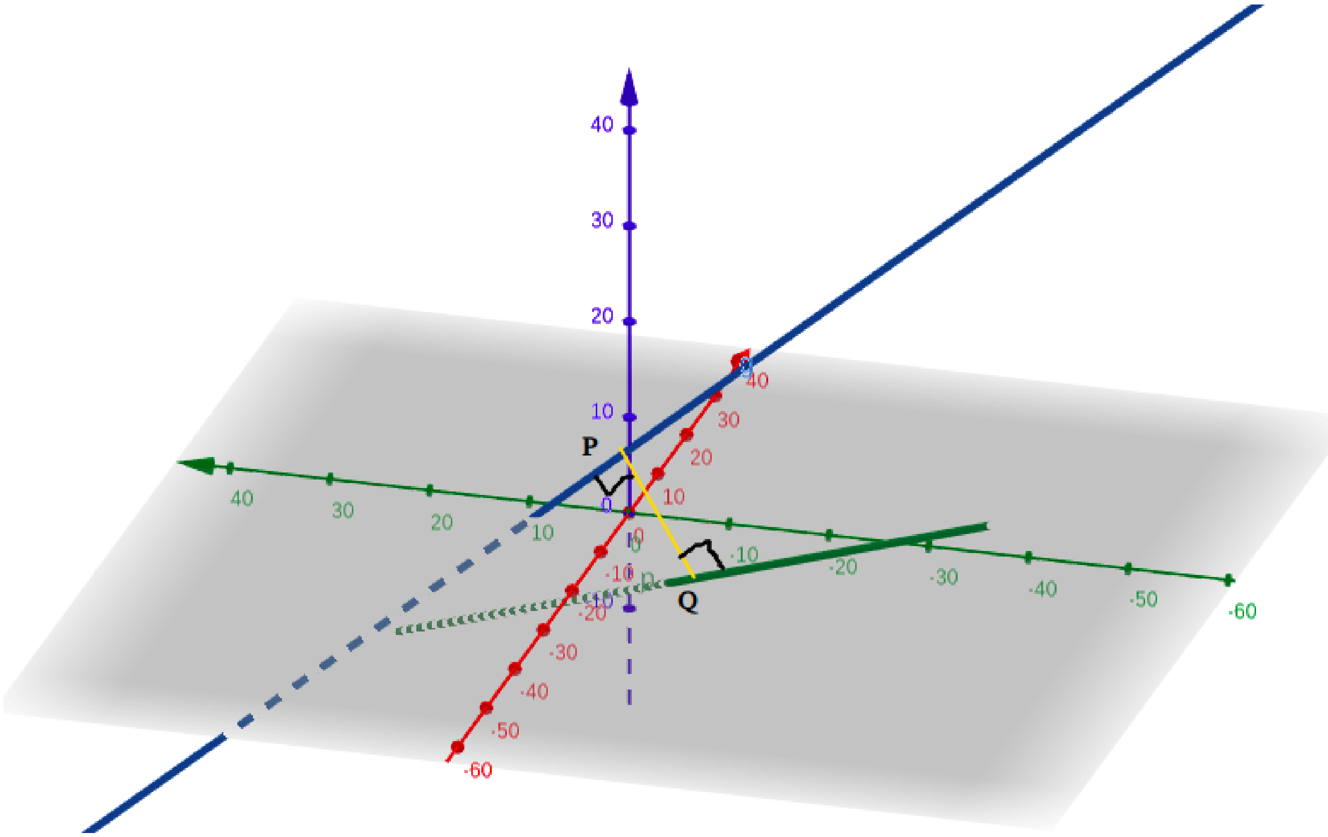
I u ovom zadatku su parametarski oblici jednadžbe pravca čudno zadani, zapravo izgledaju ovako:

$$G_1 = \begin{bmatrix} 7 & 5 & -4 & 0 \\ -12 & -6 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 5 & -14 & 11 & 0 \\ 1 & -3 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

Prva stvar je izjednačavanje h koordinata s 1. U ovom zadatku već jesu pa ne treba.

Ovaj zadatak ćemo riješiti preko vektora. Prvo pitanje na koje ćemo odgovoriti je što je najmanja udaljenost između dva pravca u 3D prostoru. Odgovor na to pitanje je dužina koja spaja dvije točke (jedna na jednom pravcu, druga točka na drugom pravcu) i koja je okomita na oba pravca istovremeno. Okomitost u geometriji predstavlja najmanju udaljenost. Na slici bi to izgledalo ovako:



Slika 69: Oba pravca u koordinatnom sustavu i najmanja udaljenost između njih

Pošto zadatak rješavamo pomoću vektora, zamislit ćemo da se na prvom pravcu nalazi točka P odnosno, na drugom pravcu točka Q. Kada spojimo točke P i Q dobit ćemo vektor $\vec{PQ}$ koji je okomit na oba pravca. Točka $P(x, y, z)$ ima koordinate $P(7t-12, 5t-6, -4t-2)$, a točka Q ima koordinate $Q(5s+1, -14s-3, 11s+9)$. Te koordinate su samo raspisan parametarski oblik jednadžbe oba pravca.

Kako smo zadali da najmanja udaljenost između dva pravca je vektor $\vec{PQ}$ koji je okomit na oba pravca, možemo zaključiti kako je skalarni umnožak vektora $\vec{PQ}$ i vektora smjera oba pravca jednak 0.

$$\vec{PQ} \cdot \vec{g_1} = 0$$

$$\vec{PQ} \cdot \vec{g_2} = 0$$

gdje su g_1 i g_2 vektori smjera pravaca.

Dobro je za prisjetiti se što predstavlja parametarski oblik jednadžbe pravca. On se sastoji od vektora smjera pravca i točke kroz koju prolazi. Na ovaj način imamo sve potrebne podatke za rješavanje zadatka.

Vektor $\vec{PQ}$ se dobije:

$$\vec{PQ} = \begin{bmatrix} x_{G_2} - x_{G_1} \\ y_{G_2} - y_{G_1} \\ z_{G_2} - z_{G_1} \end{bmatrix}$$

odnosno:

$$\vec{PQ} = \begin{bmatrix} 5s + 1 - (7t - 12) \\ -14s - 3 - (5t - 6) \\ 11s + 9 - (-4t - 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5s - 7t + 13 \\ -14s - 5t + 3 \\ 11s + 4t + 11 \end{bmatrix}$$

g_1 i g_2 iščitamo iz parametarskog oblika jednadžbe pravaca (gornji redak matrice):

$$g_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$g_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -14 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Sada rješavamo:

$$\vec{PQ} \cdot \vec{g_1} = \begin{bmatrix} 5s - 7t + 13 \\ -14s - 5t + 3 \\ 11s + 4t + 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix} = 0$$

Iz čega dobijemo:

$$35s - 49t + 91 - 70s - 25t + 15 - 44s - 16t - 44 = 0$$

$$-79s - 90t + 62 = 0$$

Odnosno drugi pravac daje:

$$\vec{PQ} \cdot \vec{g_2} = \begin{bmatrix} 5s - 7t + 13 \\ -14s - 5t + 3 \\ 11s + 4t + 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -14 \\ 11 \end{bmatrix} = 0$$

$$342s + 79t + 144 = 0$$

Kada se riješe dvije jednadžbe s dvije nepoznanice, dobije se:

$$s = -0.7277$$

$$t = 1.3277$$

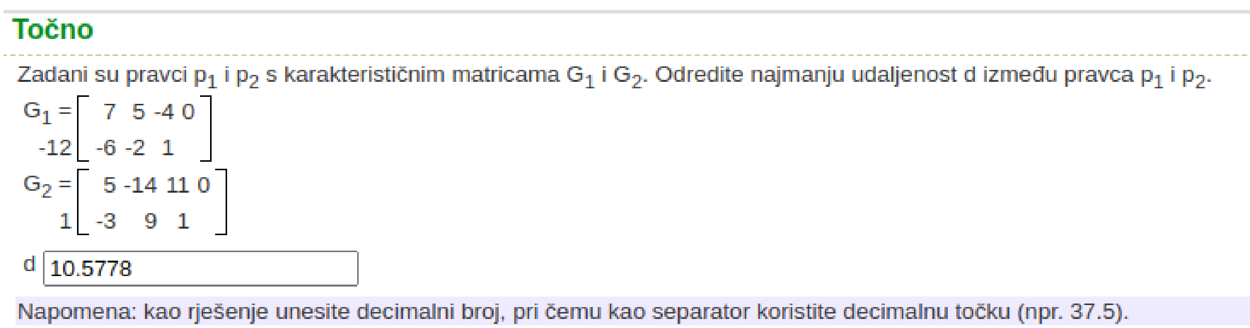
a kako bismo dobili duljinu, dovoljno je izračunati duljinu vektora $\vec{PQ}$.

$$d = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}$$

$$d = \sqrt{(5s - 7t + 13)^2 + (-14s - 5t + 3)^2 + (11s + 4t + 11)^2}$$

Odnosno, kad se uvrste dobiveni s i t, dobije se

$$d = 10.5778$$

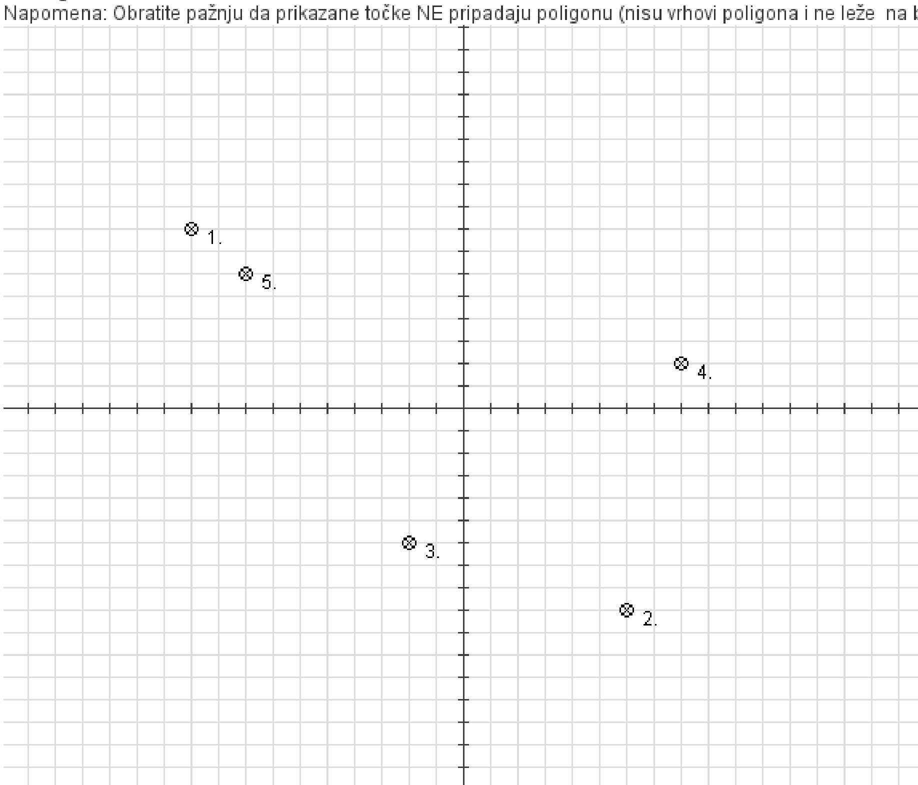


Slika 70: Zadatak riješen

3.2.14 Određivanje poligona za zadani skup točaka i uvjeta

Zamislimo da se krećemo od početne točke brida, do završne točke brida. Sve lijevo od nas je iznad pravca, a sve desno od nas je ispod pravca. Za ovaj zadatak to je jedino bitno.

Za zadane točke nacrtajte poligon čiji će bridovi zadovoljavati uvjete navedene u tablici. Ako poželite zadatak početi rješavati od početka pritisnite desni gumb miša.
Napomena: Obratite pažnju da prikazane točke NE pripadaju poligonu (nisu vrhovi poligona i ne leže na bridovima poligona).

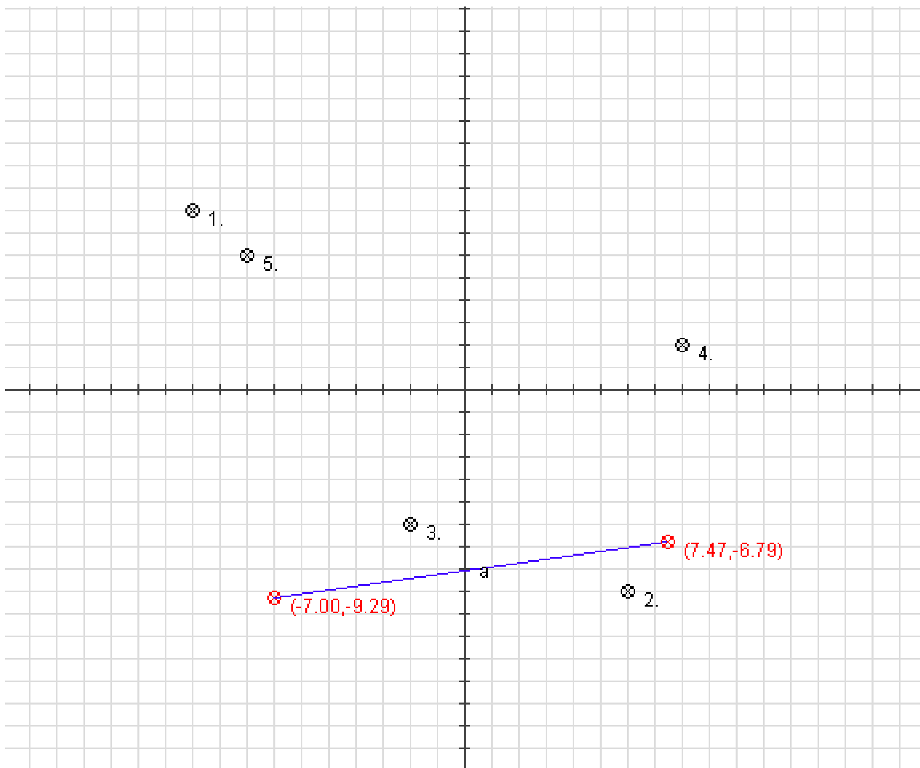


Točka	X	Y
1	-10.0	8.0
2	6.0	-9.0
3	-2.0	-6.0
4	8.0	2.0
5	-8.0	6.0

Brid \ Točka	1	2	3	4	5
a	IZNAD	ISPOD	IZNAD	IZNAD	IZNAD
b	IZNAD	IZNAD	IZNAD	ISPOD	IZNAD
c	ISPOD	IZNAD	IZNAD	IZNAD	ISPOD
d	IZNAD	IZNAD	IZNAD	IZNAD	IZNAD

Slika 71: Zadatak

Ovaj zadatak ima puno rješenja, primjerice, za brid a možemo uzeti za početnu točku $T_1(-7.00, -9.29)$,a za završnu $T_2(7.47, -6.79)$

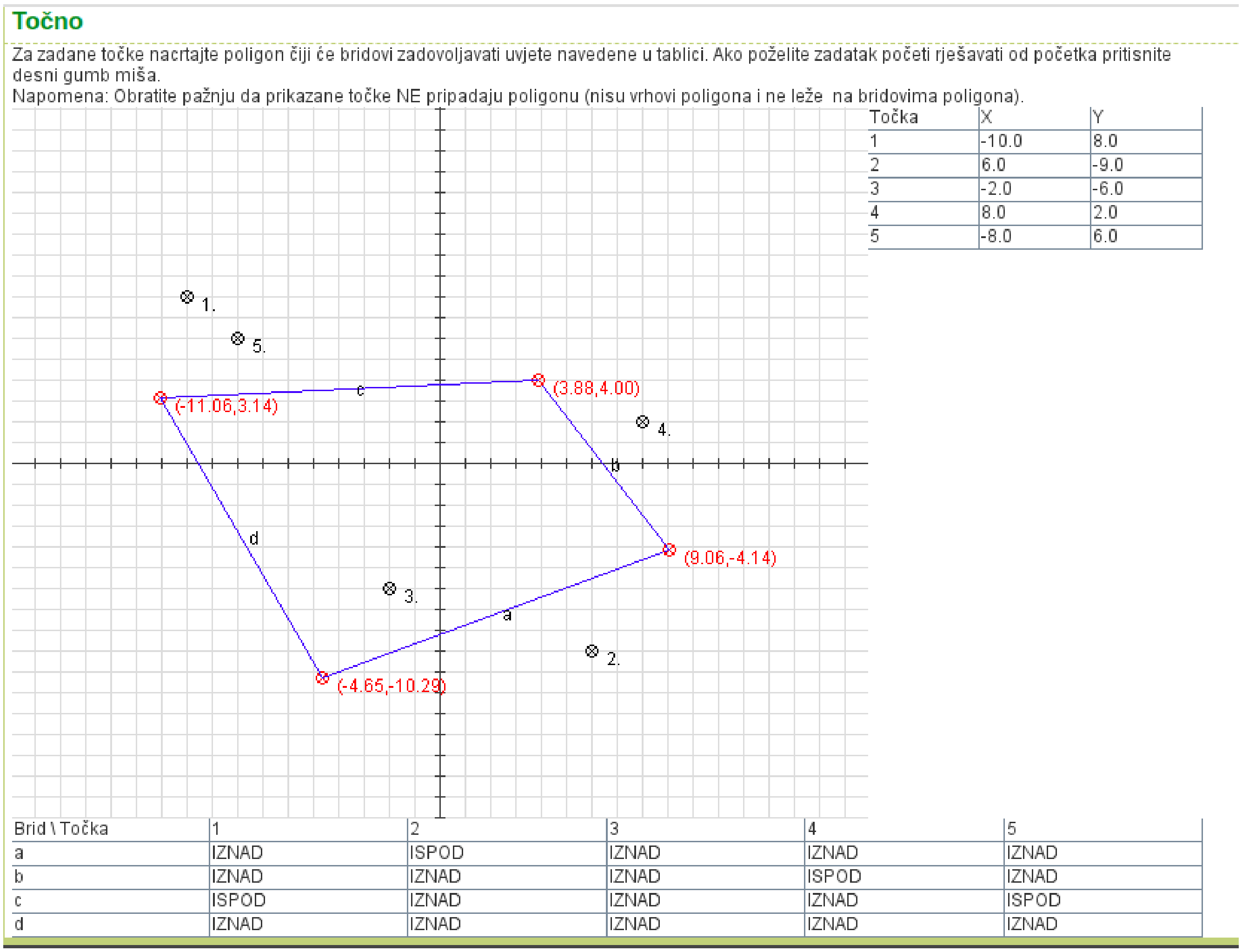


Točka	X	Y
1	-10.0	8.0
2	6.0	-9.0
3	-2.0	-6.0
4	8.0	2.0
5	-8.0	6.0

Brid \ Točka	1	2	3	4	5
a	IZNAD	ISPOD	IZNAD	IZNAD	IZNAD
b	IZNAD	IZNAD	IZNAD	ISPOD	IZNAD
c	ISPOD	IZNAD	IZNAD	IZNAD	ISPOD
d	IZNAD	IZNAD	IZNAD	IZNAD	IZNAD

Slika 72: Brid a koji zadovoljava uvjete dane u tablici

Sve točke su **IZNAD** (lijevo od) brida a, osim točke 2. Konačni poligon bi mogao izgledati:



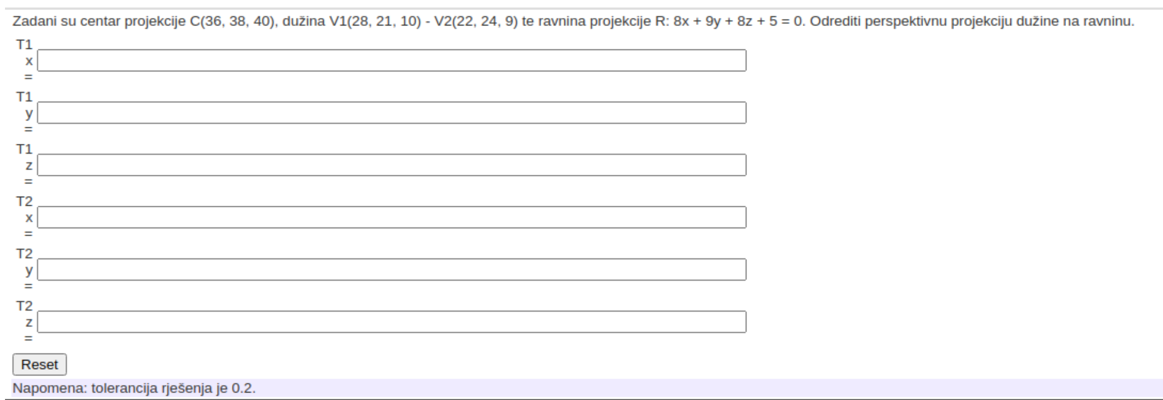
Slika 73: Zadatak riješen

3.3 Transformacija pogleda i projekcije

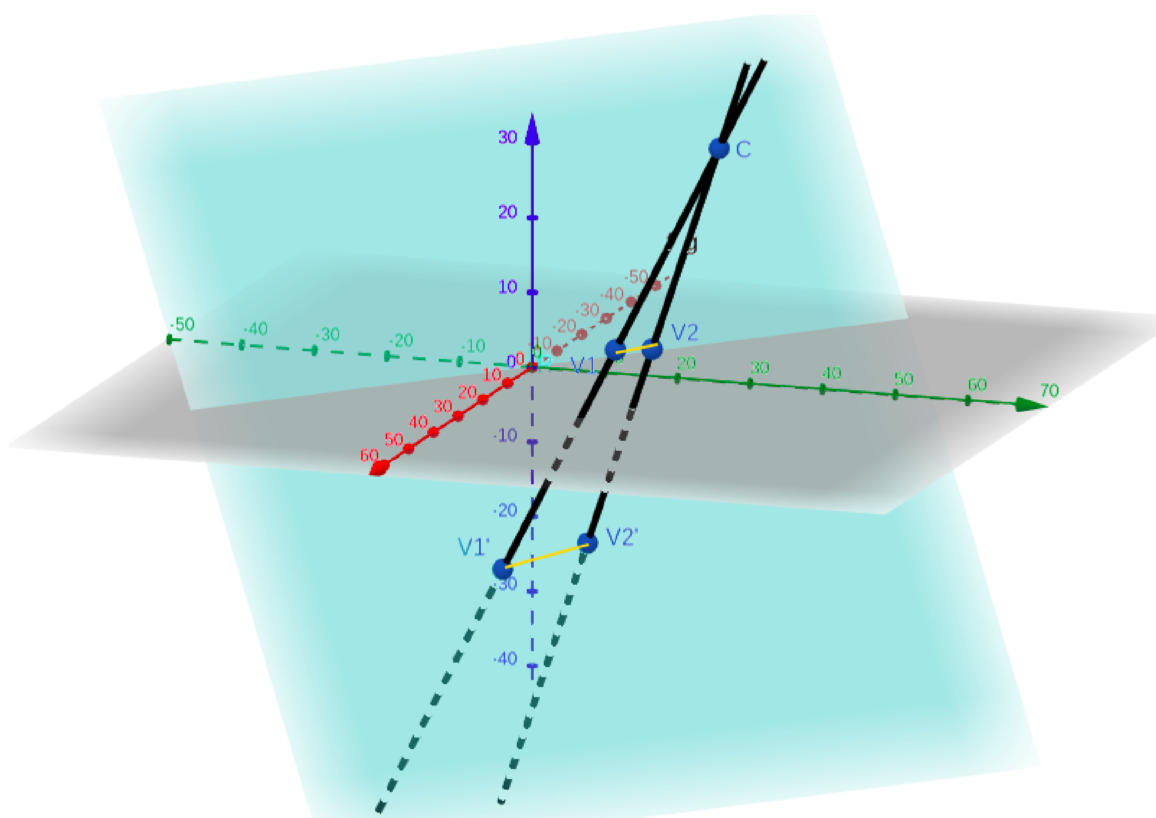
3.3.1 Projekcija dužine na ravninu

Postoje dvije vrste projekcija koje se obrađuju u kolegiju, paralelna i perspektivna. Više o njima u knjizi na stranici 113.

Za perspektivnu projekciju je dobro za zapamtiti da postoji centar projekcije, tzv. očište iz kojeg se vuku pravci u smjeru objekta te ga ocrtavaju na ravnini. Pogledaj sliku 75.



Slika 74: Zadatak



Slika 75: Prikaz perspektivne projekcije dužine na ravninu

Znači ideja bi bila sljedeća - pronaći sjecišta pravaca na kojima leže dužine CV_1 i CV_2 s ravninom R. Najlakše je pronaći sjecište pravca zadanog u parametarskom obliku i implicitno zadane jednadžbe ravnine (podsjetnik 3.2.8). Jednadžbe pravaca:

$$CV_1 = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -8 & -17 & -30 & 0 \\ 36 & 38 & 40 & 1 \end{bmatrix}$$

$$CV_2 = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -14 & -14 & -31 & 0 \\ 36 & 38 & 40 & 1 \end{bmatrix}$$

Kada uvrstimo x, y i z oba pravca u jednadžbu ravnine, dobije se:

$$t_1 = 2.0897$$

$$t_2 = 1.965$$

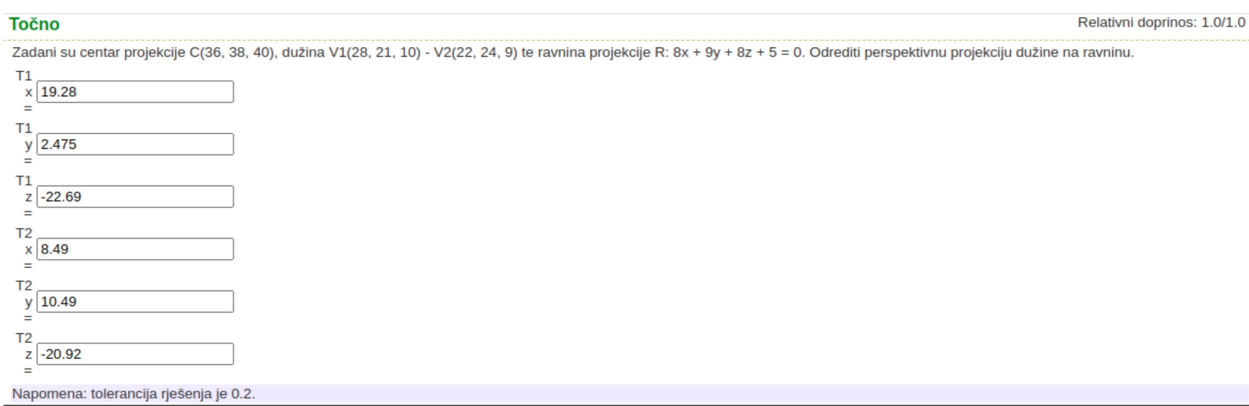
Kada se t-ovi uvrste u jednadžbe pravca, dobije se:

$$x_1 = 19.28 \qquad x_2 = 8.49$$

$$y_1 = 2.475 \qquad y_2 = 10.49$$

$$z_1 = -22.69 \qquad z_2 = -20.92$$

Te to su upravo točke V_1' i V_2'.


Točno Relativni doprinos: 1.0/1.0

Zadani su centar projekcije C(36, 38, 40), dužina V1(28, 21, 10) - V2(22, 24, 9) te ravnina projekcije R: 8x + 9y + 8z + 5 = 0. Odrediti perspektivnu projekciju dužine na ravninu.

T1 x = 19.28

T1 y = 2.475

T1 z = -22.69

T2 x = 8.49

T2 y = 10.49

T2 z = -20.92

Napomena: tolerancija rješenja je 0.2.

Slika 76: Zadatak riješen

3.3.2 Podudaranje dva koordinatna sustava - Jednostavni slučaj

Za ovaj zadatak potrebno je dobro proučiti knjigu od stranice 118. nadalje. Formule koje je dobro znati su:

Translacija

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\Delta x & -\Delta y & -\Delta z & 1 \end{bmatrix} \tag{39}$$

Rotacija oko x-osi CCW

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\alpha) & sin(\alpha) & 0 \\ 0 & -sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{40}$$

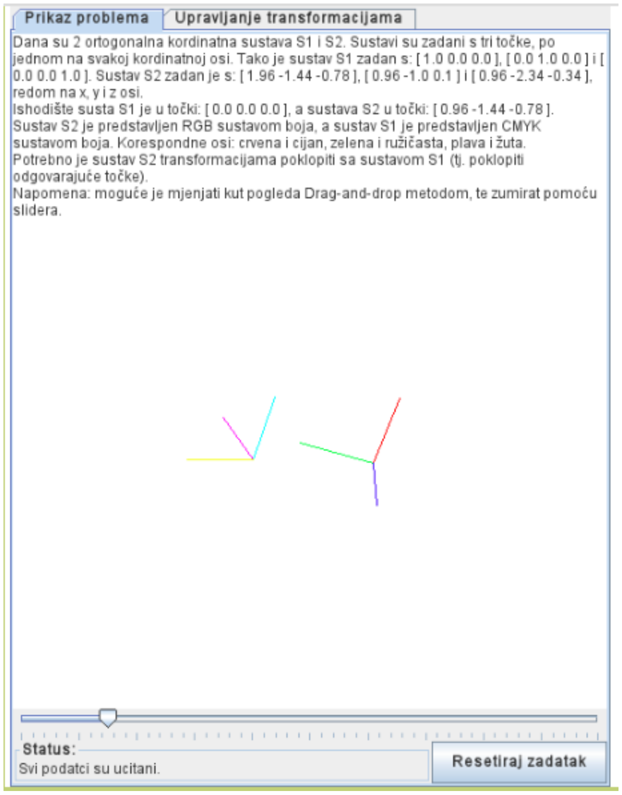
Rotacija oko y-osi CCW

$$R_y = \begin{bmatrix} cos(\beta) & 0 & -sin(\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ sin(\beta) & 0 & cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{41}$$

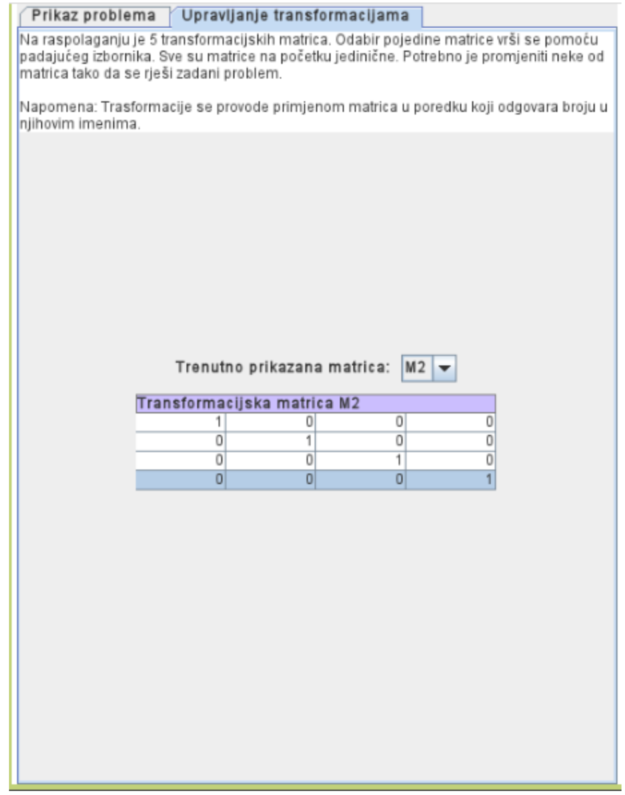
Rotacija oko z-osi CCW

$$R_z = \begin{bmatrix} cos(\gamma) & sin(\gamma) & 0 & 0 \\ -sin(\gamma) & cos(\gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{42}$$

Detaljnija objašnjenja će biti prikazana kroz zadatak.



(a) Prikaz problema

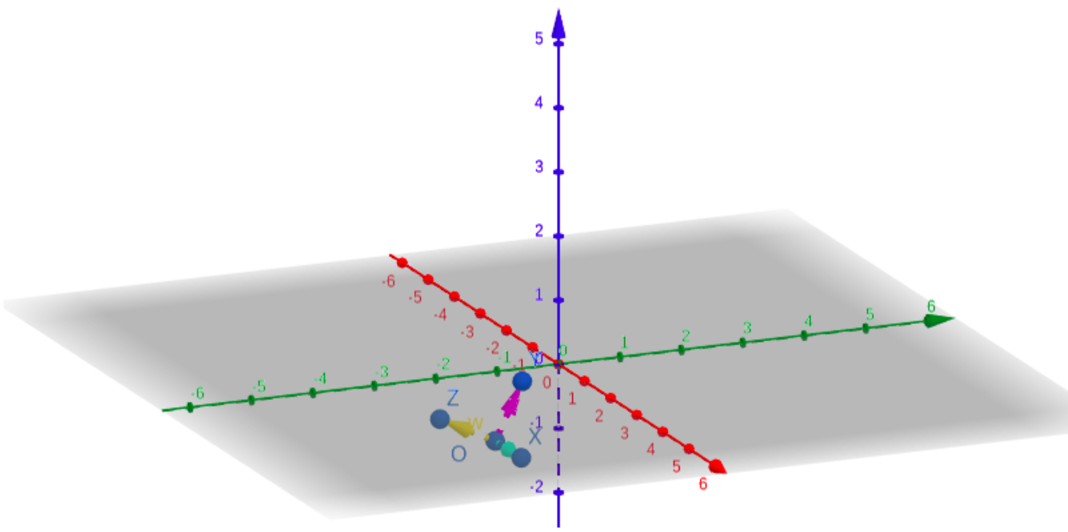


(b) Upravljanje transformacijama

Slika 77: Zadatak

Preporuka je kod ovakvih zadataka raditi vjerodostojne skice koordinatnih sustava, kako nikako ne bi došlo do pogrešnog rezultata.

U malo ljepšem koordinatnom sustavu to bi izgledalo (samo u ovom slučaju su zamijenjene boje - CMYK je sustav nad kojim radimo transformacije):



Slika 78: Ljepši prikaz

Kao i u 2D slučaju, prva stvar koju je potrebno napraviti je podudariti ishodišta zadanih koordinatnih sustava. Nad RGB koordinatnim sustavom se rade transformacije u **zadatku**. To znači da će se ishodište tog sustava poklopiti sa CMYK

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.96 & 1.44 & 0.78 & 1 \end{bmatrix}$$

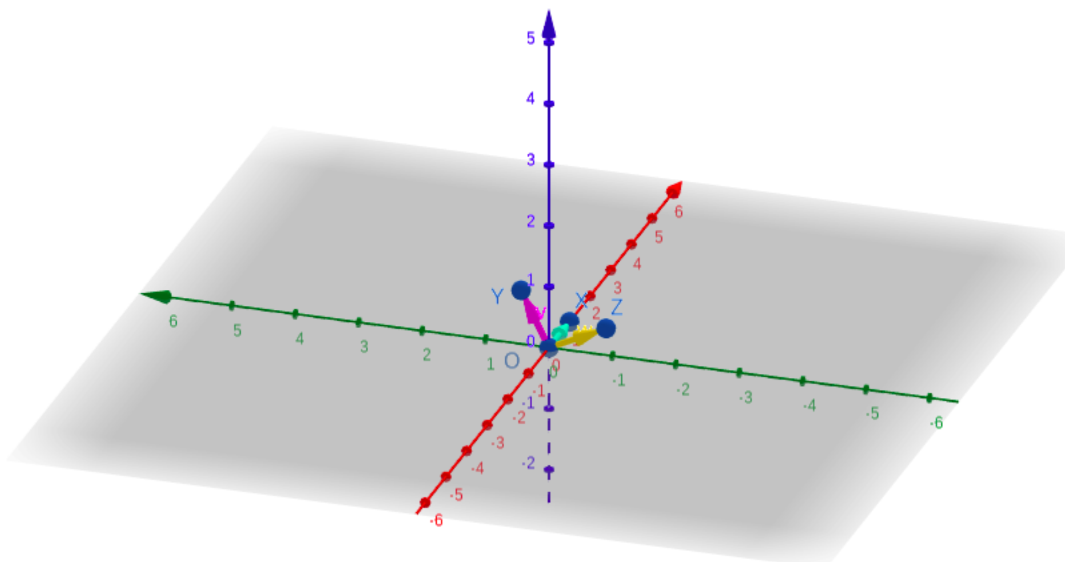
Nakon provedene translacije mijenjaju se osi

$$x = [1, 0, 0]$$

$$y = [0, 0.44, 0.88]$$

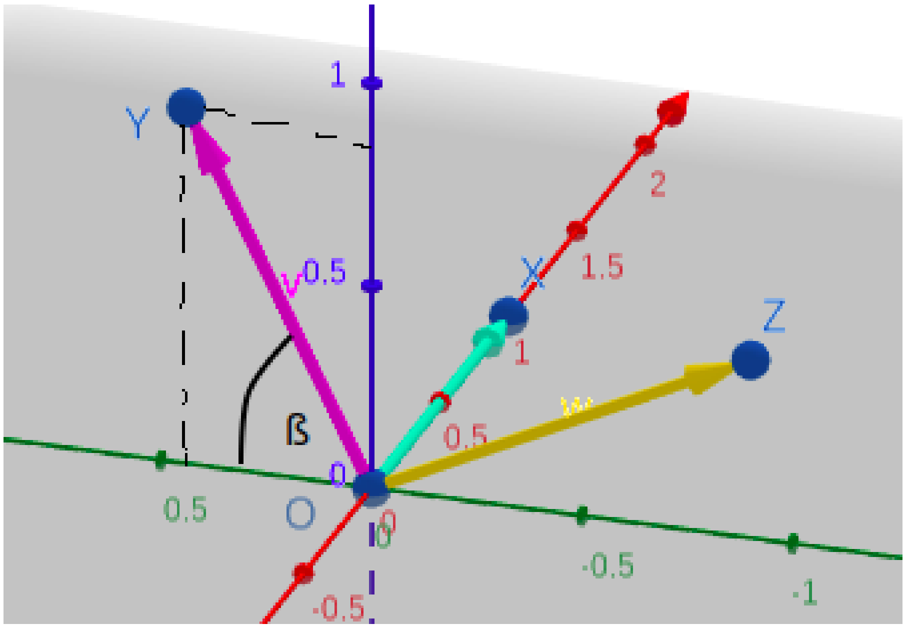
$$z = [0, -0.9, 0.44]$$

A na slici bi to izgledalo



Slika 79: Prikaz nakon translacije

Na slici 79 je vidljivo da su se x-osi već podudarile, sada je potrebno odrediti kut pod kojim je potrebno zarotirati oko x-osi kako bi se poklopile i preostale osi. Promotrimo y-os sustava koji transformiramo i točku Y koja ima koordinate $Y(0, 0.44, 0.88)$



Slika 80: Uvećan prikaz translatiranog koordinatnog sustava

Kako bismo izračunali kut β možemo se poslužiti Pitagorinim poučkom i definicijom kosinusa

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{43}$$

$$sin(\beta) = \frac{nasuprotna \quad kateta}{hipotenuza} \tag{44}$$

$$cos(\beta) = \frac{prilezeca \quad kateta}{hipotenuza} \tag{45}$$

Sada sa slike 80 je vidljivo da je

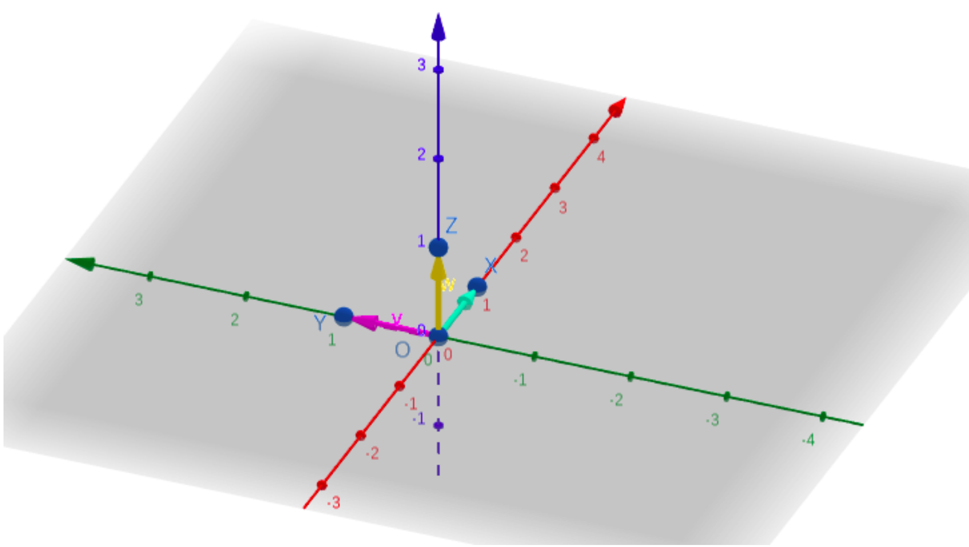
$$cos(\beta) = \frac{y_Y}{\sqrt{y_Y^2 + z_Y^2}} = \frac{0.44}{\sqrt{0.44^2 + 0.88^2}} = 0.4472$$

$$sin(\beta) = \frac{z_Y}{\sqrt{y_Y^2 + z_Y^2}} = \frac{0.88}{\sqrt{0.44^2 + 0.88^2}} = 0.8944$$

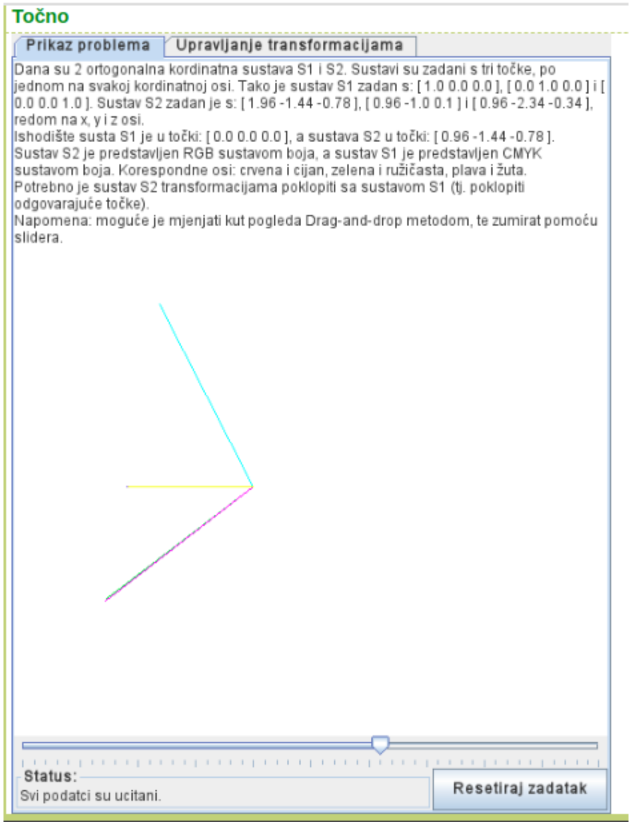
Da bi se y-osi poklopile, potrebno je rotirati za kut β u smjeru suprotnom od kazaljke na satu oko x-osi (formula 40):

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4472 & -0.8944 & 0 \\ 0 & 0.8944 & 0.4472 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

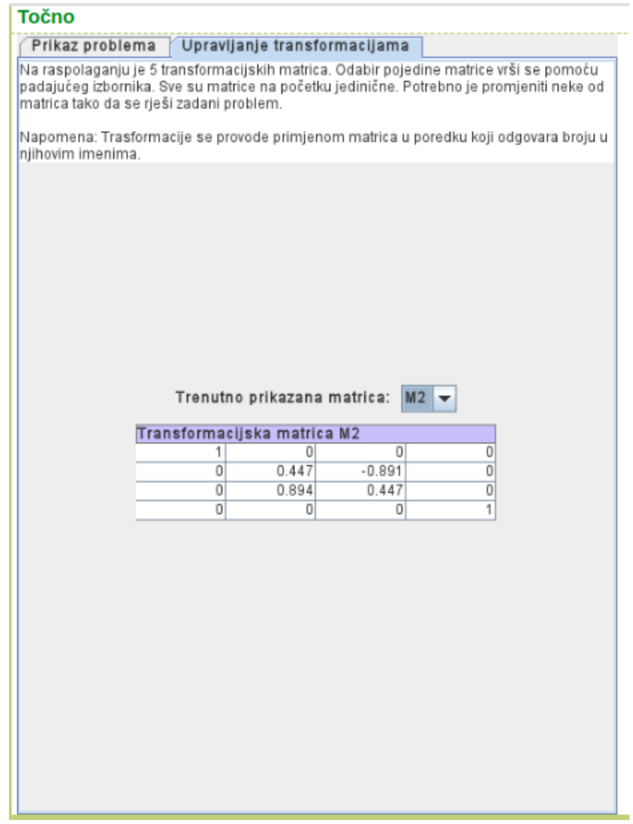
Kada bismo svaku od početnih točaka preko kojih je zadan RGB sustav pomnožili s matricom T pa s matricom R, dobili bismo poklopljene koordinatne sustave. Time je zadatak riješen, tj. to su dvije matrice koje je potrebno upisati u zadatak.



Slika 81: Prikaz nakon obje transformacije



(a) Prikaz problema

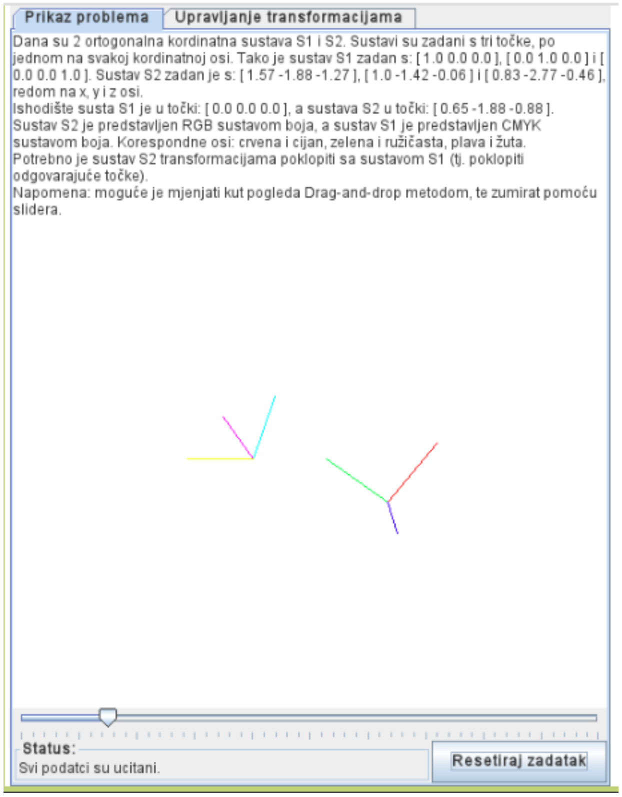


(b) Upravljanje transformacijama

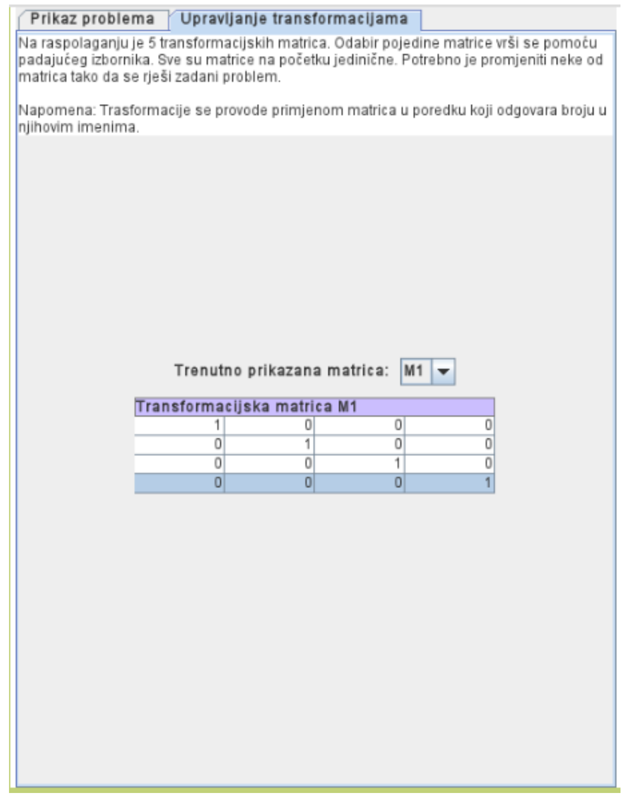
Slika 82: Zadatak riješen

3.3.3 Podudaranje dva koordinatna sustava - Složeniji slučaj

Kod ovog zadatka će se koristiti dosta formula iz prethodnog potpoglavlja 3.3.2. Osim toga, koncept rješavanja je dosta sličan kao u prethodnom potpoglavlju. Jako je bitno koristiti skice, jer je na taj način najlakše odrediti za koje kutove treba rotirati.



(a) Prikaz problema



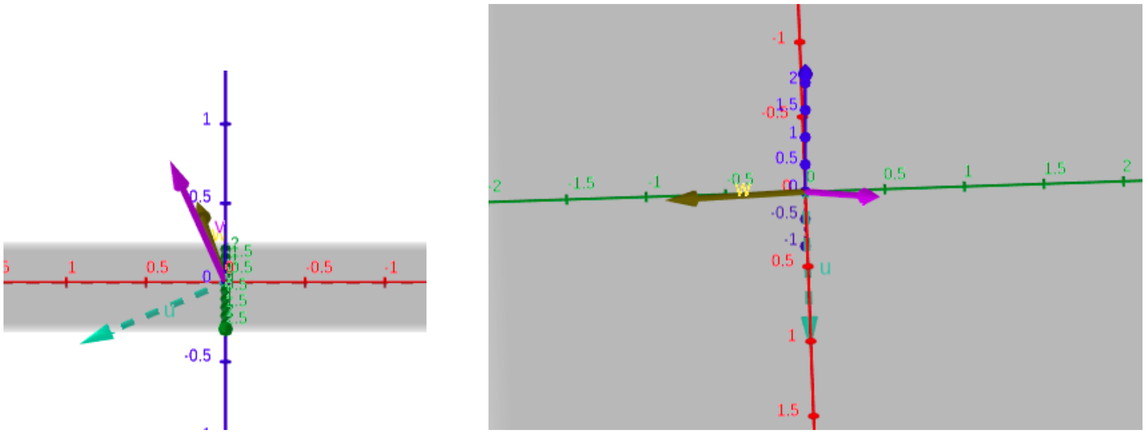
(b) Upravljanje transformacijama

Slika 83: Zadatak

Kao i u prethodnom zadatku, prvo će se koordinatni sustavi poklopiti u ishodištu:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.65 & 1.88 & 0.88 & 1 \end{bmatrix}$$

Nakon što su sustavi poklopljeni u ishodištu, sljedeći korak je pogledati poklapaju li se koje od osi. Ako se ne poklapaju, potrebno ih je poklopiti.



(a) Sustavi nakon translacije u ishodište

(b) Prikaz kako x-os sustava leži u xz ravnini (y=0)

Slika 84: Ljepši prikaz

Na slikama 84 je CMYK sustav sustav nad kojim vršimo transformacije. (x-osi -> crvena i cijan, y-osi -> zelena i magenta i z-osi -> plava i žuta)

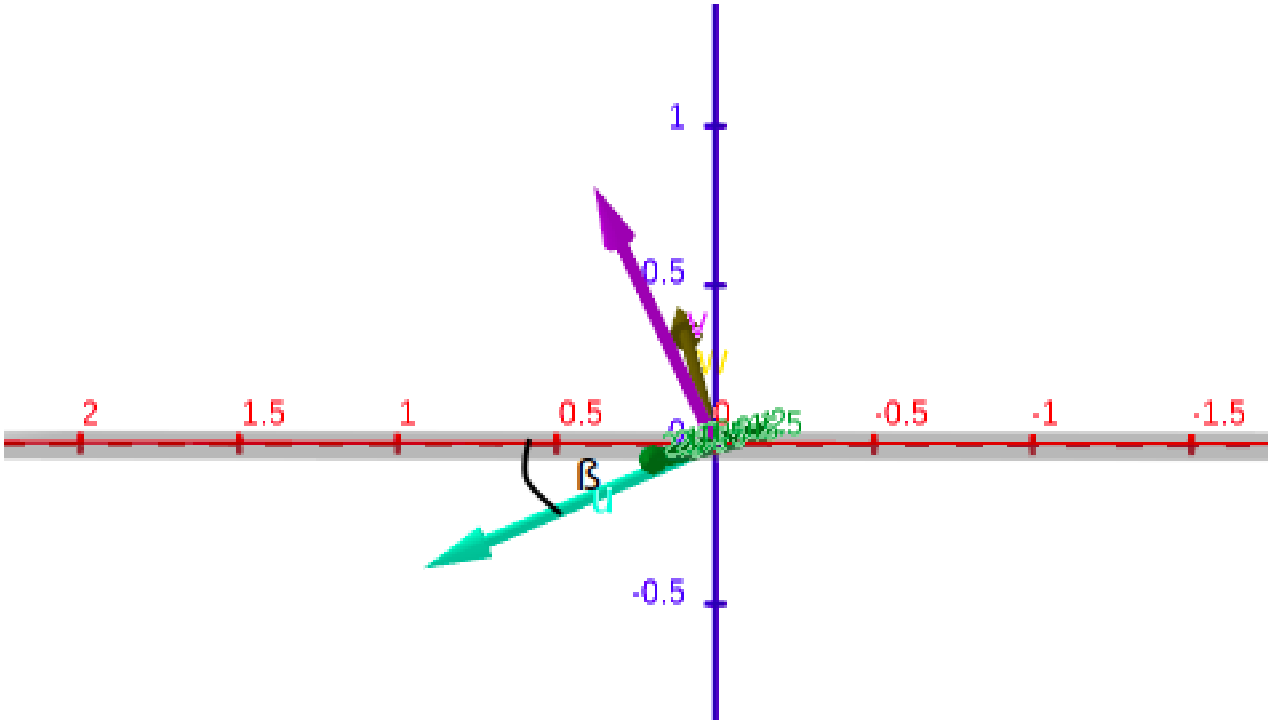
Nakon translacije $(x \cdot T)$, nove vrijednosti točaka sustava koji transformiramo su:

$$x' = [0.92, 0, -0.39]$$

$$y' = [0.35, 0.46, 0.82]$$

$$z' = [0.18, -0.89, 0.42]$$

Sa slike 84 b) je vidljivo kako x-os već leži u ravnini xz pa ćemo od nje krenuti s matricama rotacije.



Slika 85: Odabir kuta rotacije

Cijan os je x-os sustava koji je potrebno rotirati. Sa slike 85 je vidljivo da ju treba rotirati "prema gore" za kut β, odnosno u smjeru CW oko y-osi. U pomoć opet dolaze definicije kuta preko sinusa i kosinusa te Pitagorin poučak. Odnosno

$$cos(\beta) = \frac{|x'_x|}{\sqrt{x'^2_x + x'^2_z}} = \frac{|0.92|}{\sqrt{0.92^2 + 0.39^2}}$$

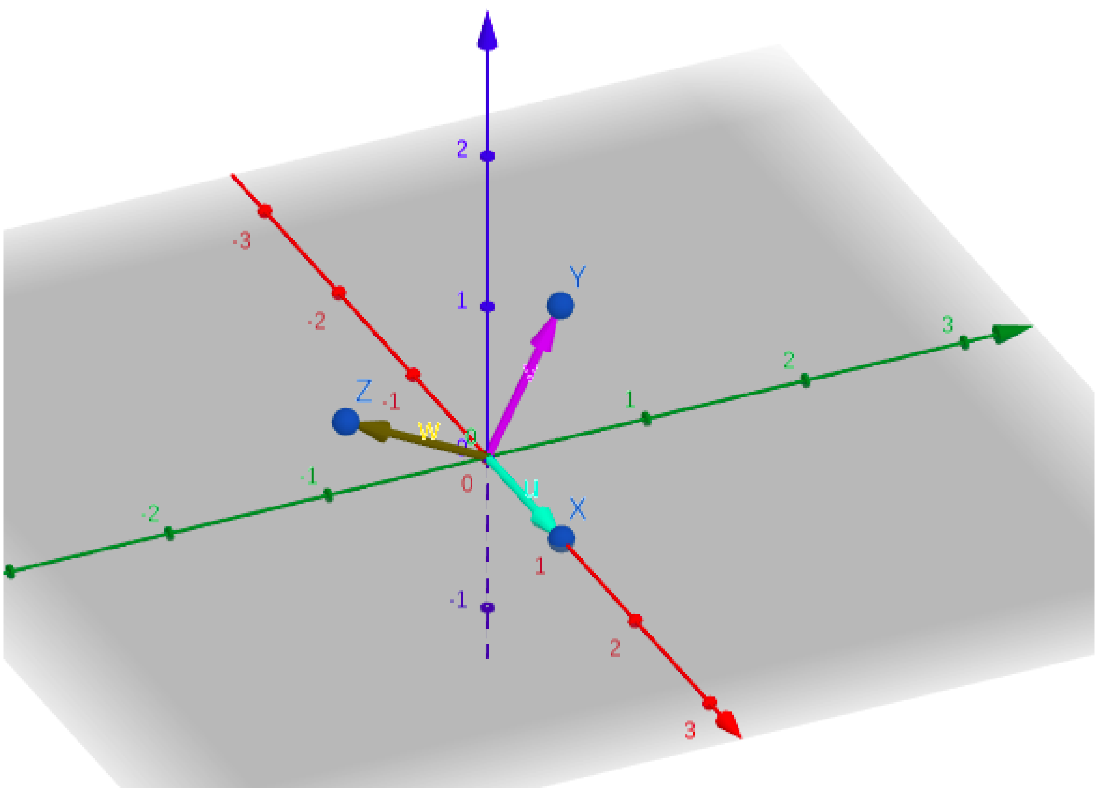
$$sin(\beta) = \frac{|x'_z|}{\sqrt{x'^2_x + x'^2_z}} = \frac{|-0.39|}{\sqrt{0.92^2 + 0.39^2}}$$

Ovdje je bitno za primijetiti da je x'_z zapravo -0.39, ali pošto rotiramo u CW, bitno je da negativnu vrijednost sinusa kuta postavimo u treći redak i prvi stupac kako bismo zadovoljili rotaciju u CW smjeru:

$$R_y = \begin{bmatrix} cos(\beta) & 0 & sin(\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sin(\beta) & 0 & cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9206 & 0 & 0.3903 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.3903 & 0 & 0.9206 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sada kada početne točke sustava pomnožimo s obje dobivene matrice, nove



Slika 86: Sustav nakon rotacije oko y-osi

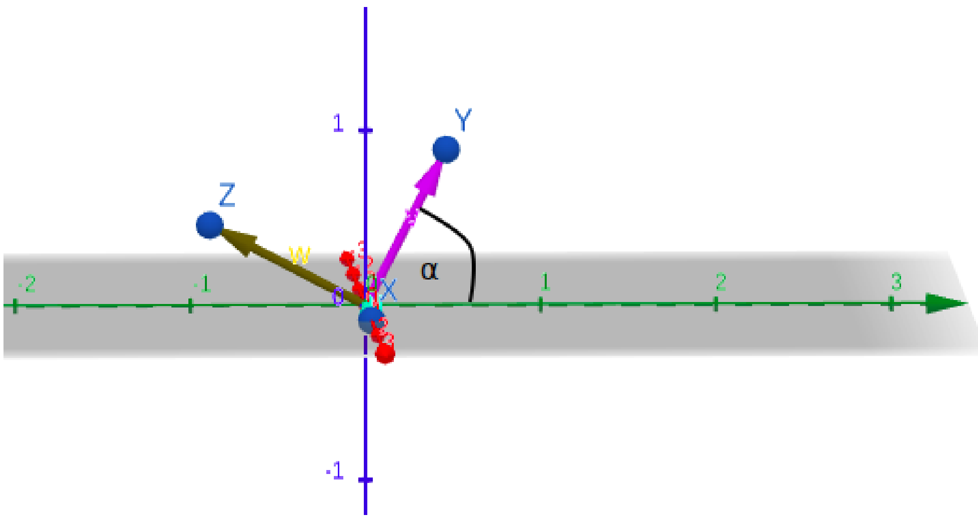
točke glase:

$$x'' = [1, 0, 0]$$

$$y'' = [0, 0.46, 0.89]$$

$$z'' = [0, -0.89, 0.46]$$

Sada sve osi leže u ravninama te ih je još jednom rotacijom potrebno poklopiti. Možemo, primjerice, rotirati oko x-osi u smjeru CW za kut α. Slika:



Slika 87: Odabir kuta druge rotacije

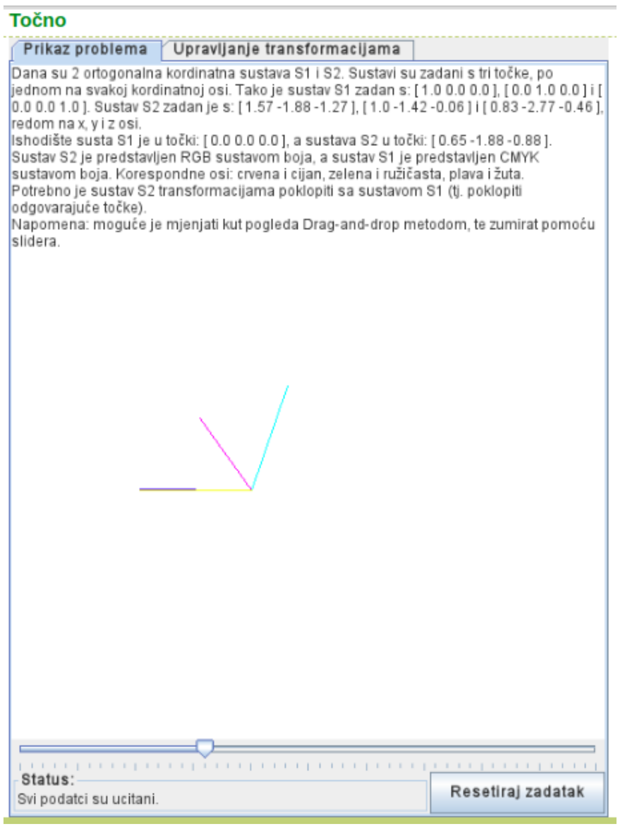
Opet, uz pomoć Pitagorinog poučka i definicije sinusa i kosinusa kuta:

$$cos(\alpha) = \frac{|0.46|}{\sqrt{0.46^2 + 0.89^2}}$$

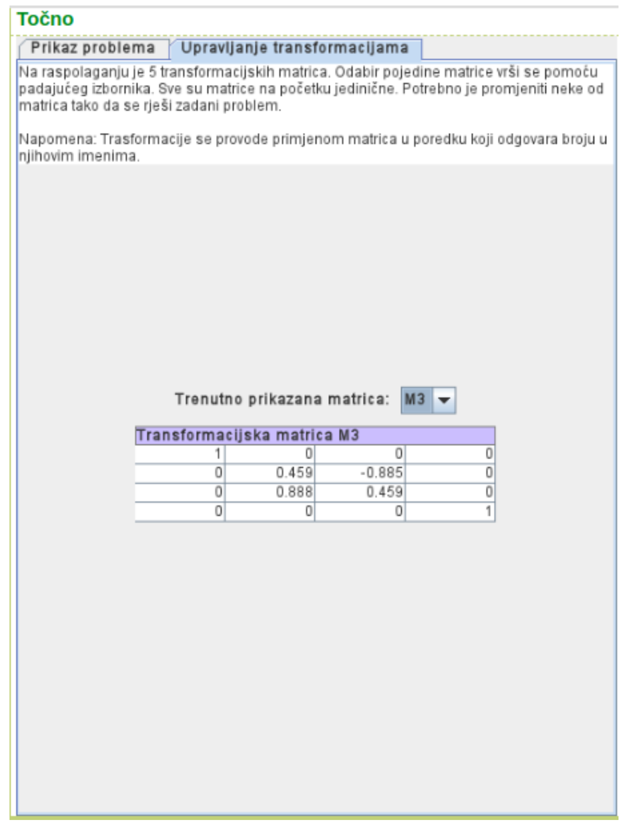
$$sin(\alpha) = \frac{|0.89|}{\sqrt{0.46^2 + 0.89^2}}$$

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4591 & -0.8883 & 0 \\ 0 & 0.8883 & 0.4591 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Te su to tri matrice koje je potrebno iskoristiti kako bi se sustavi poklopili.



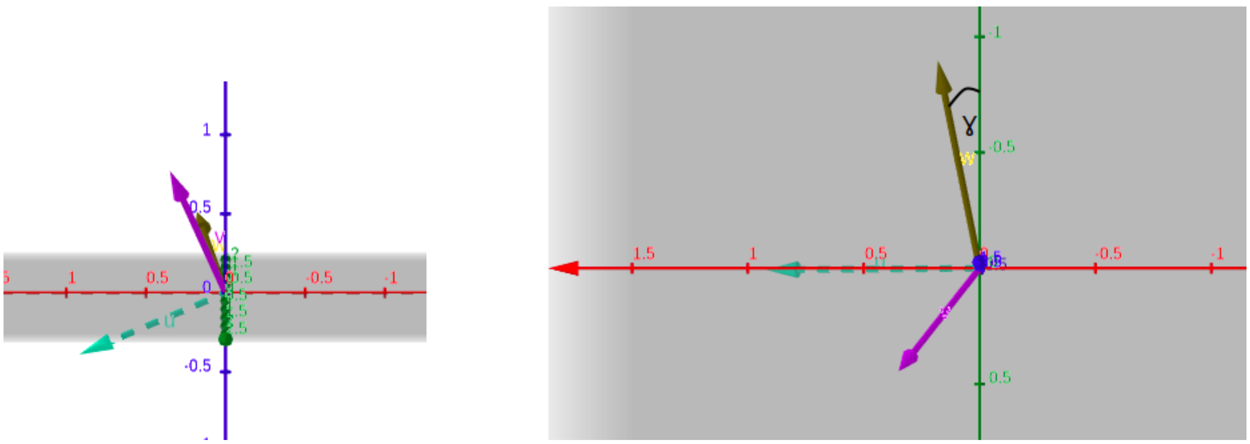
(a) Prikaz problema



(b) Upravljanje transformacijama

Slika 88: Zadatak

Dodatno se u ovom zadatku može pojaviti da niti jedna od osi ne leži niti u jednoj od ravnina. Tada je potrebno prvo jednu od osi zarotirati u pripadajuću ravninu pa onda nastaviti s rješavanjem zadatka. Na primjer, kada bismo u ovom zadatku prvo z-os postavili u yz ravninu. Znači, rotirali



(a) Sustavi nakon translacije u ishodište

(b) Kut za koji bismo rotirali z-os kako bi legla u yz ravninu

Slika 89: Ljepši prikaz

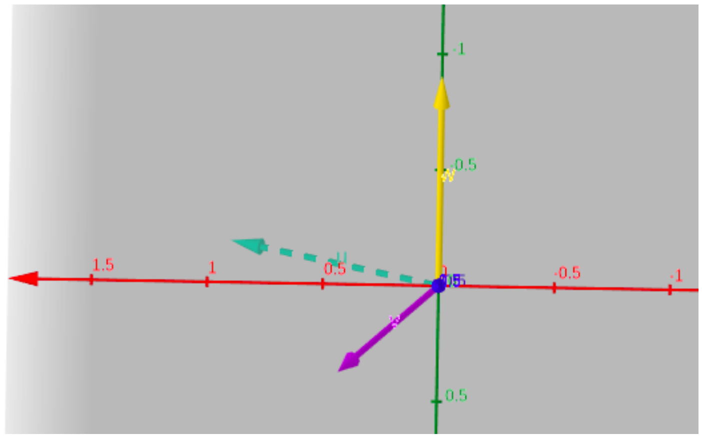
bismo za kut γ u smjeru kazaljke na satu oko z-osi. Žuto je z-os nakon translacije u ishodište, znači promatramo točku $z' = [0.18, -0.89, 0.42]$

$$cos(\gamma) = \frac{|-0.89|}{\sqrt{0.18^2 + 0.89^2}}$$

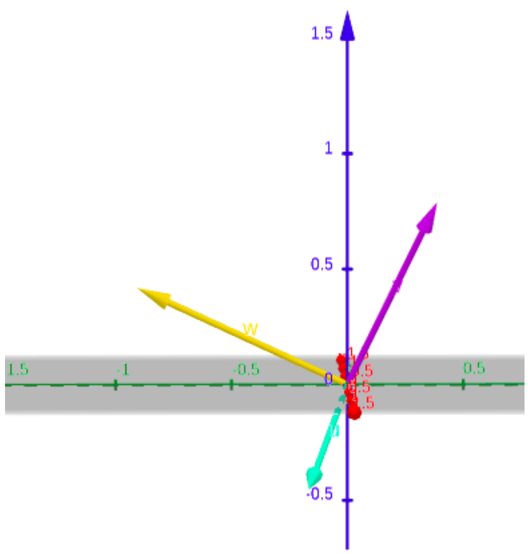
$$sin(\gamma) = \frac{|0.18|}{\sqrt{0.18^2 + 0.89^2}}$$

$$R_z = \begin{bmatrix} 0.9802 & -0.1982 & 0 & 0 \\ 0.1982 & 0.9802 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Odnosno na slici bi to sad izgledalo:



(a) Nakon rotacije oko R_z



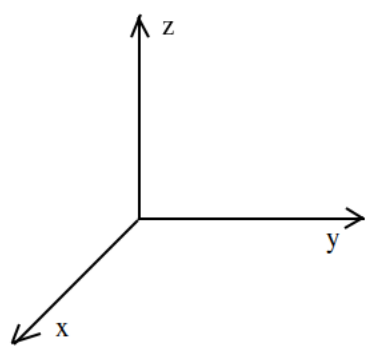
(b) Nakon rotacije oko R_z

Slika 90: Ljepši prikaz

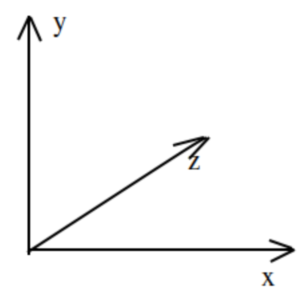
3.3.4 View-up vektor

Prvo treba znati što je View-up vektor. To je vektor koji nam govori koji je smjer prema gore. Točnije, označava smjer y-osi. Kako view-up vektor uglavnom zadaje korisnik, on ne mora uvijek biti točno zadan, nego aproksimativno. Stoga, točan smjer y-osi se određuje uz pomoć vektorskog umnoška što će biti prikazano kroz zadatak. Za dodatna objašnjenja posjetiti knjigu od stranice 128.

Nadalje, treba razlikovati lijevi i desni koordinatni sustav:



(a) Desni koordinatni sustav



(b) Lijevi koordinatni sustav

Slika 91: Koordinatni sustavi

Po pravilu desne ruke za vektorski umnožak se dobije - Desni koordinatni sustav:

$$x = y \times z$$

$$y = z \times x$$

$$z = x \times y$$

Način na koji je ovo moguće lako zapamtiti je sljedeći... Uzmimo xyz ($x = y \times z$) i kružno zarotirajmo, dobijemo zxy ($z = x \times y$), itd...
Lijevi koordinatni sustav:

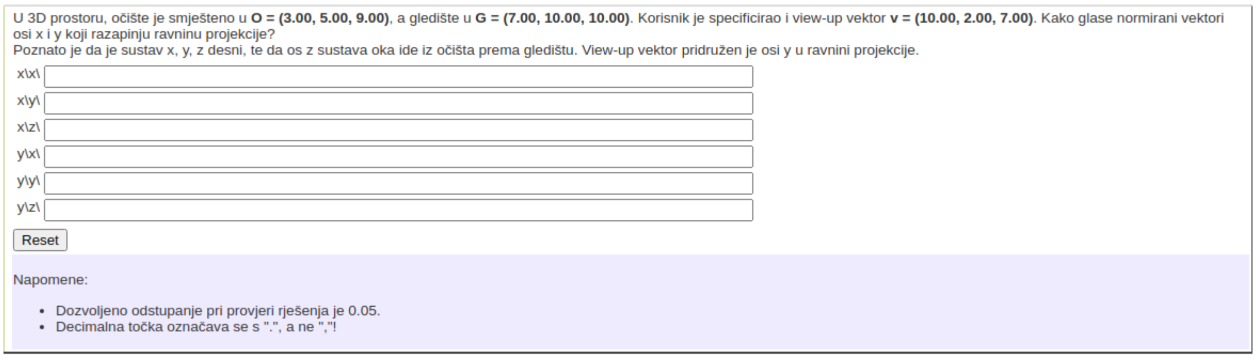
$$x = z \times y$$

$$y = x \times z$$

$$z = y \times x$$

Lijevi koordinatni sustav je samo obrnut od desnog.

Nadalje, treba razlikovati očište i gledište.
Očište -> odakle gledamo
Gledište -> u što gledamo
Ravnina projekcije je ravnina okomita na vektor očište-gledište te točka gledišta leži u toj ravnini. Znači, vektor očište-gledište je normala projekcijske ravnine (lako za dobiti parametarski oblik ravnine 3.2.3).


U 3D prostoru, očište je smješteno u **O = (3.00, 5.00, 9.00)**, a gledište u **G = (7.00, 10.00, 10.00)**. Korisnik je specificirao i view-up vektor **v = (10.00, 2.00, 7.00)**. Kako glase normirani vektori osi x i y koji razapinju ravninu projekcije?
Poznato je da je sustav x, y, z desni, te da os z sustava oka ide iz očišta prema gledištu. View-up vektor pridružen je osi y u ravnini projekcije.

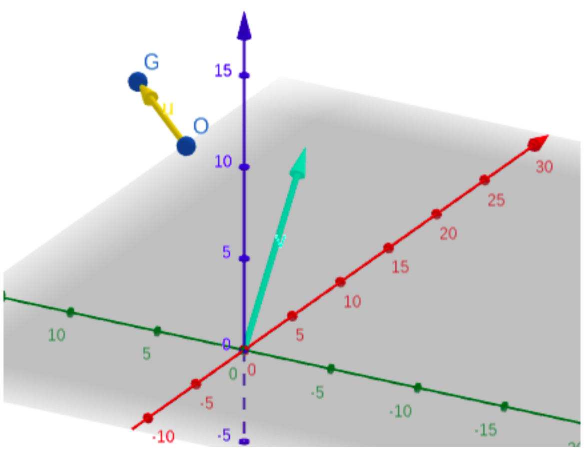
x\x\
x\y\
x\z\
y\x\
y\y\
y\z\

Reset

Napomene:

- Dozvoljeno odstupanje pri provjeri rješenja je 0.05.
- Decimalna točka označava se s ".", a ne ","!

Slika 92: Zadatak



Slika 93: Prikaz view-up vektora i vektora očište-gledište u koordinatnom sustavu

Sa slike 93 je vidljivo da vektori očište-gledište i view-up nisu nikako pod pravim kutom. Odnosno, vektor view-up može biti aproksimativno zadan.

U ovakvim zadacima je bitno za napomenuti da je vektor očište-gledište predstavljen kao konkretna z-os, a view-up kao aproksimativna y-os.

Imamo te dvije osi, treću, x-os možemo dobiti preko vektorskog umnoška (jer vektorski umnožak daje vektor okomit na oba vektora). Ako u obzir uzmemo da je ovo desni koordinanti sustav, x-os glasi:

$$x = y \times z = view - up \times \vec{OG} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -33 \\ 18 \\ 42 \end{bmatrix}$$

Sada kada imamo x-os možemo izračunati pravu vrijednost y-osi opet vektorskim umnoškom:

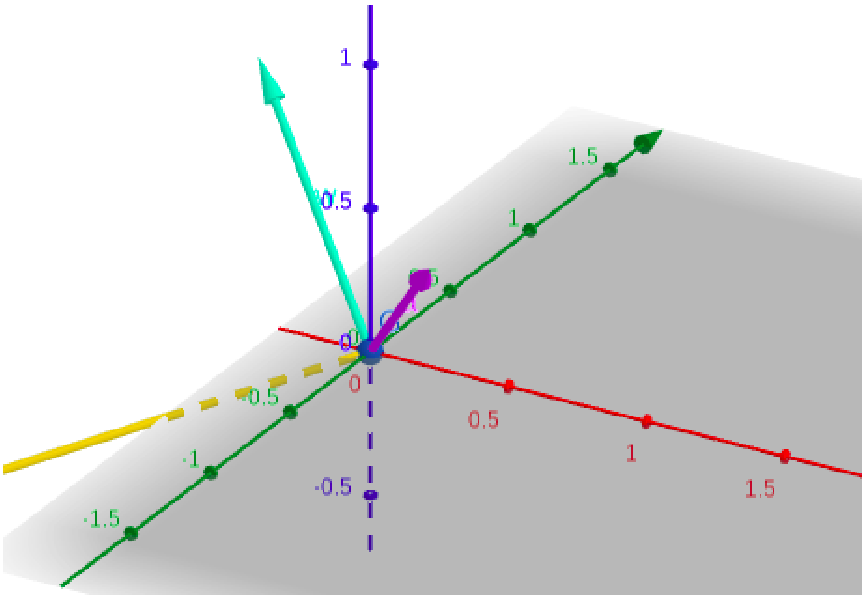
$$y = z \times x = \vec{OG} \times x = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -33 \\ 18 \\ 42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 192 \\ -201 \\ 237 \end{bmatrix}$$

Nakon toga normiramo x i y osi

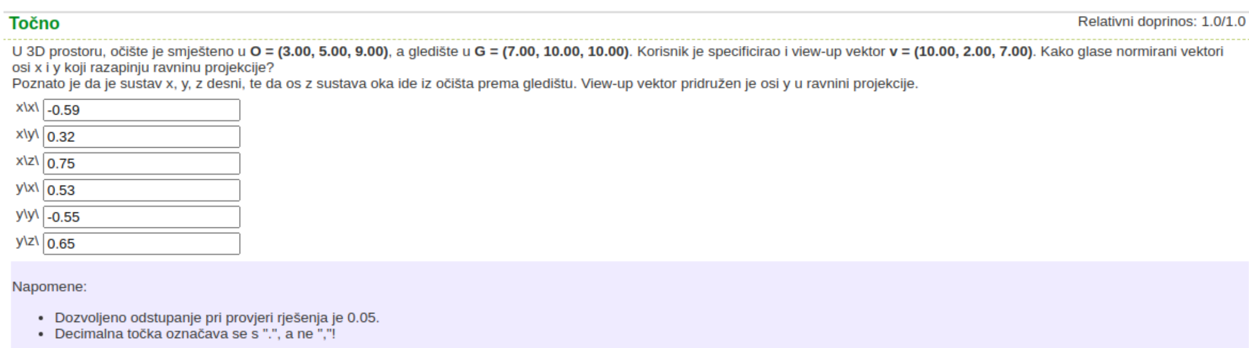
$$\frac{\vec{x}}{|x|} = \frac{-33i + 18j + 42k}{\sqrt{(-33)^2 + 18^2 + 42^2}} = -0.59i + 0.32j + 0.75k = \begin{bmatrix} -0.59 \\ 0.32 \\ 0.75 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\vec{y}}{|y|} = \begin{bmatrix} 0.53 \\ -0.55 \\ 0.65 \end{bmatrix}$$

I to su konačna rješenja zadatka.



Slika 94: Konačni koordinatni sustav koji se dobije kad se vektor očište-gledište translatira u ishodište te okrene mu se smjer (cijan - x-os, magenta - y i žuta - z-os)



Točno Relativni doprinos: 1.0/1.0

U 3D prostoru, očište je smješteno u **O = (3.00, 5.00, 9.00)**, a gledište u **G = (7.00, 10.00, 10.00)**. Korisnik je specificirao i view-up vektor **v = (10.00, 2.00, 7.00)**. Kako glase normirani vektori osi x i y koji razapinju ravninu projekcije?
Poznato je da je sustav x, y, z desni, te da os z sustava oka ide iz očišta prema gledištu. View-up vektor pridružen je osi y u ravnini projekcije.

x\x\	-0.59
x\y\	0.32
x\z\	0.75
y\x\	0.53
y\y\	-0.55
y\z\	0.65

Napomene:

- Dozvoljeno odstupanje pri provjeri rješenja je 0.05.
- Decimalna točka označava se s ".", a ne ","!

Slika 95: Zadatak riješen

4 Rasterska grafika

4.1 Bresenhamov postupak

Za detaljniji opis Bresenhamovog algoritma posjetiti knjigu od stranice 69.

Pseudokod algoritma:

```
//U zadatku se koristi sljedeca verzija pseudokoda
//(koja je podlozna malim modifikacijama ovisno o
//polozaju tocaka):
void bresenham_nacrtaj(int xs, int ys, int xe, int ye){
        //ovdje se vrsi zamjena koordinata
        int x, yc;
        double a, yf;
        a=(ye-ys)/(double)(xe-ye);
        yc=ys; yf=-0.5;

        for(x = xs; x <= xe ;x++ ){
                osvijetli_pixel(x, yc);
                // ili osvijetli_pixel(yc, x) ako je izvrsena
                //zamjena koordinata
                yf=yf+a;
                if(yf >= 0.){
                        yf=yf-1.0;
                        yc=yc+1;
                }
        }
}
```

gdje slovo D predstavlja yf. **Treba paziti odnos točaka T_0 i T_1**, tj. hoće li se koristiti $y_c = y_c + 1.0$ ili $y_c = y_c - 1.0$ te hoće li se vršiti zamjena koordinata točaka te treba li a pomnožiti s -1. Uglavnom, a treba uvijek biti pozitivan i između 0 i 1, a ako je pravac usmjeren prema dolje, y_c treba umanjivati za 1 te ako je kut između $-45°$ i $45°$ ne treba mijenjati koordinate (ako nije između ta dva kuta,onda treba). Ako su kutevi između $45°$ i $90°$ onda je zamjena:

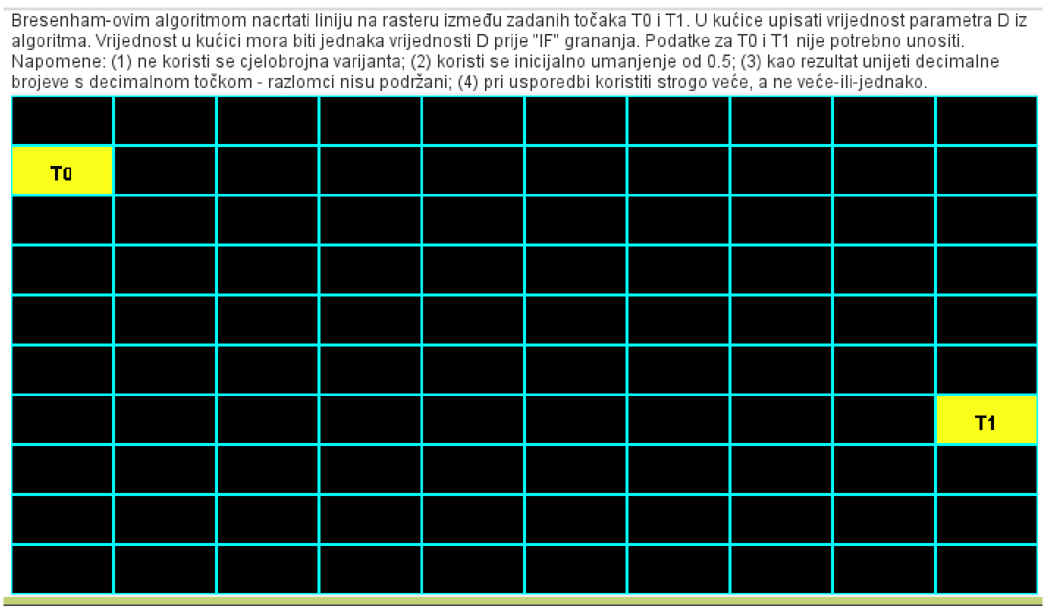
$$x = xe \quad xe = ye \quad ye = x$$

$$y = xs \quad xs = ys \quad ys = y$$

Ako su kutevi između $-45°$ i $-90°$ onda je zamjena:

$$x = xe \quad xe = ys \quad ys = x$$

$$y = xs \quad xs = ye \quad ye = y$$



Slika 96: Zadatak

Slovo D je y_f

Krenimo redom, gledajući odnos točaka T_0 i T_1 vidimo da leže na pravcu koji je pod kutem s obzirom na x-os između $0°$ i $-45°$. To znači da će a biti negativan pa će ga trebati pomnožiti s -1, y_c će se umanjivati za 1 te neće biti potrebna zamjena koordinata.

Ako na prvu to sve ne vidite, kada krenete uvrštavati u algoritam, vidjet će se nedoslijednosti pa ćete znati da je nešto krivo.

Pretpostavimo da donji lijevi crni pravokutnik ima koordinate (x=0, y=0). S obzirom na to, T_0 tada ima koordinate $T_0(0, 8)$, a $T_1(9, 3)$.

Krenimo onda redom s algoritmom 4.1:

$$a = \frac{-(3-8)}{9-0}$$

$$y_c = 8$$

$$y_f = -0.5$$

$$for(x = 0; x <= 9; x++)$$

$$osvijetli\_pixel(0, 9)$$

$$y_f = -0.5 + \frac{5}{9} = \frac{1}{18}$$

Pošto je y_f veći od 0, umanjujemo ga za jedan

$$y_f = \frac{1}{18} - 1 = -\frac{17}{18}$$

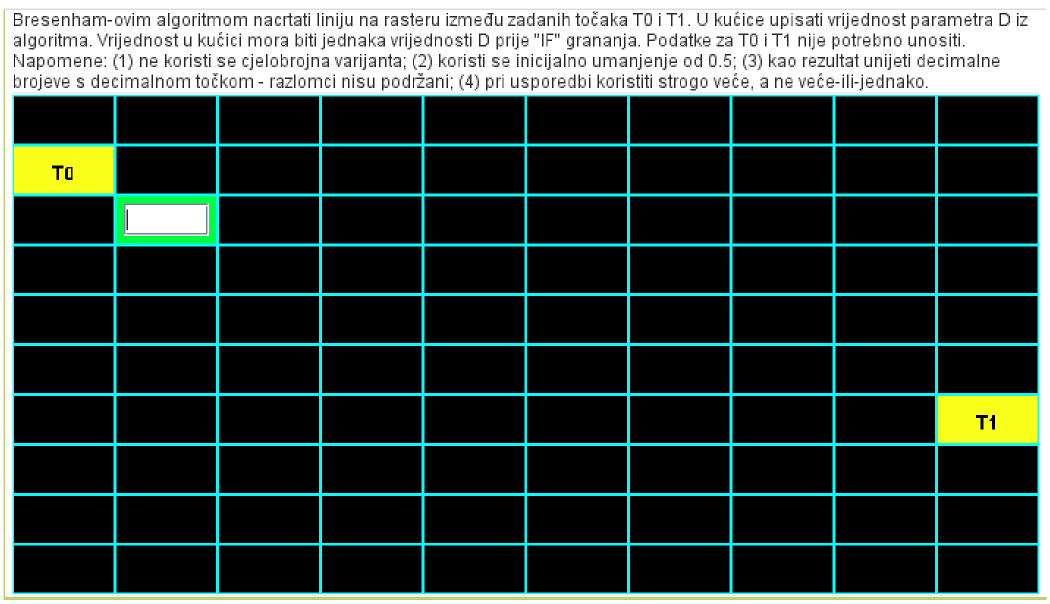
$$y_c = 8 - 1 = 7$$

Time je prva iteracija petlje završena i ona se odnosi na točku T_0. Sada je na redu druga iteracija.

$$x = 1$$

$$osvijetli\_pixel(x, y_c) = osvijetli\_pixel(1, 7)$$

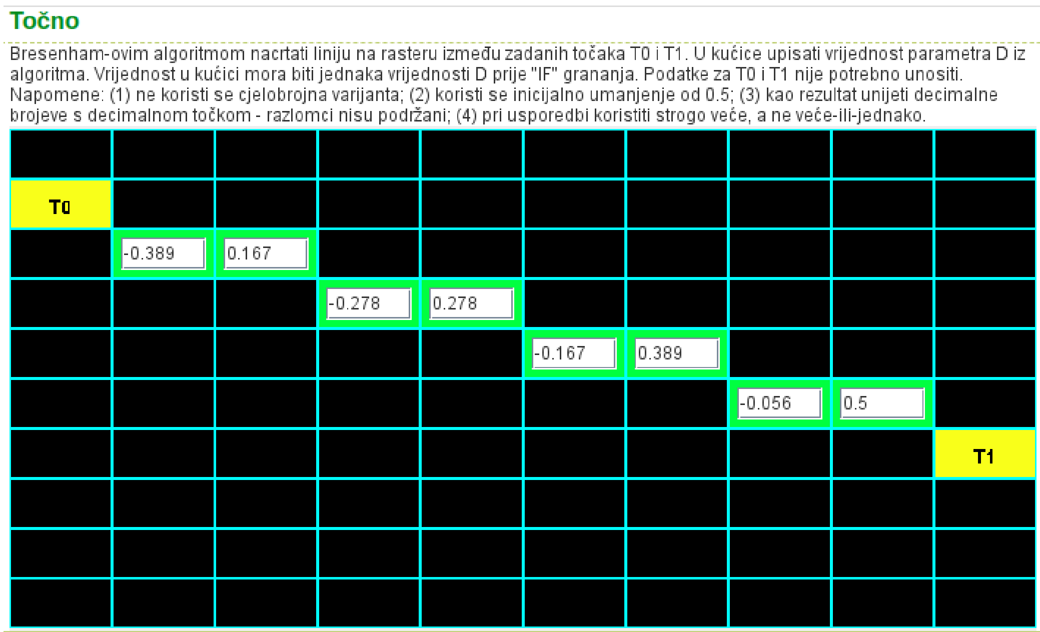
Što znači da prelazimo na sljedeći piksel koji treba osvijetliti



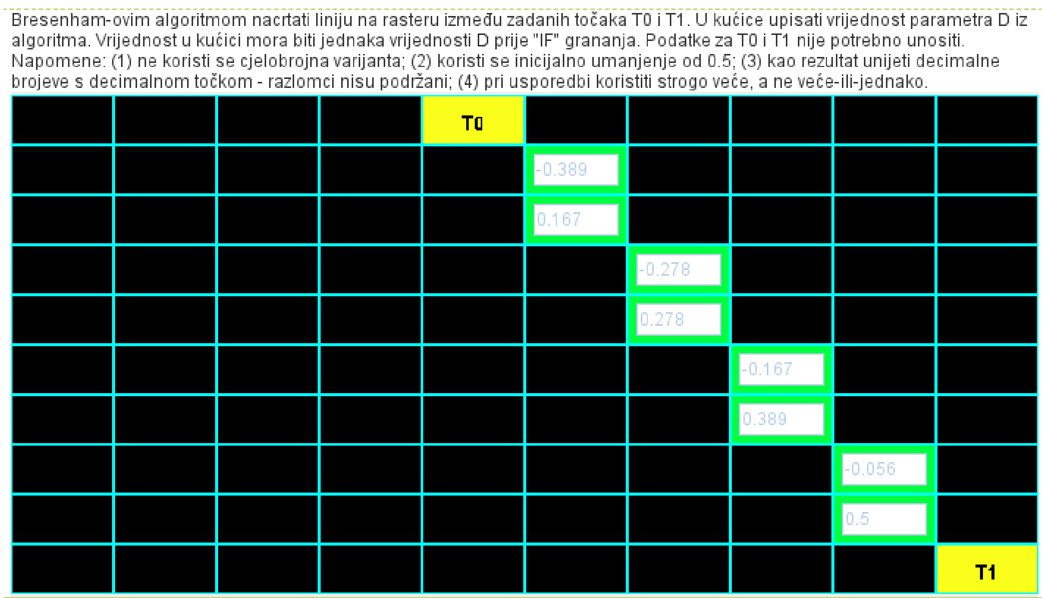
Slika 97: Piksel koji je potrebno kliknuti kako bi se osvijetlio i u njega je potrebno upisati $y_f = -0.389$

$$y_f = -\frac{17}{18} + \frac{5}{9} = -\frac{7}{18} = -0.389$$

Pošto je y_f negativan, prelazimo u sljedeću iteraciju petlje. I prateći algoritam rješavamo zadatak.



Slika 98: Zadatak riješen



Slika 99: Zadatak u kojem je bila potrebna zamjena koordinata riješen

4.2 DDA algoritam

(Preskoči ovu stranicu ako te ne zanimaju detalji, nije bitno za rješavanje zadatka)
DDA je skraćenica od Digital Diferential Analyzer. Dva kraća videa koja objašnjavaju postupak:
https://www.youtube.com/watch?v=OkH3_GdesKY
https://www.youtube.com/watch?v=Gn-XVhhXLMU
Te jedan duži koji detaljno objašnjava svaki korak:
https://www.youtube.com/watch?v=W5P8GlaEOSI

Pseudokod algoritma:

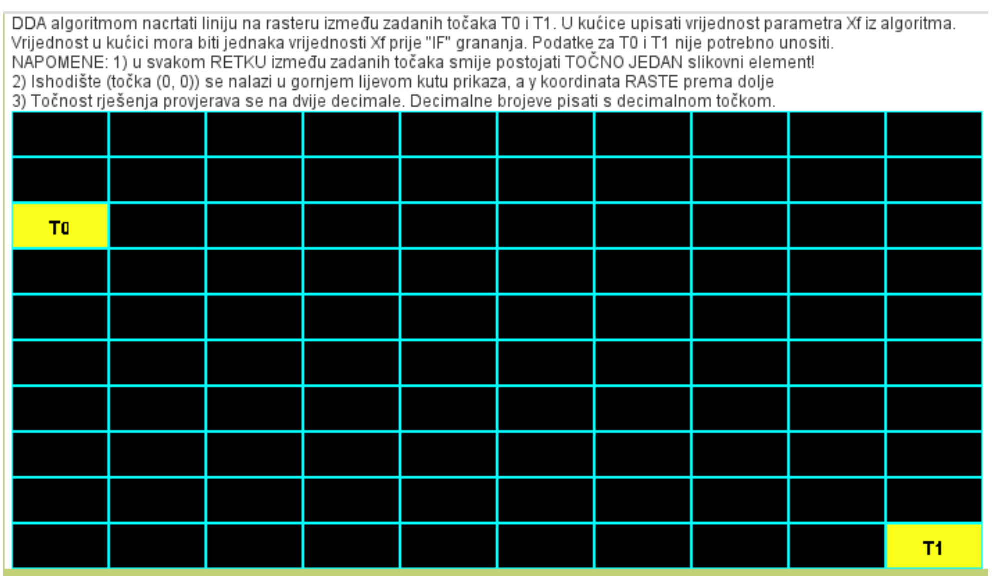
```
void DDA(int xs, int ys, int xe, int ye){
        int dx, dy, step, i;
        double xinc, yinc, x, y;

        dx = xe - xs;
        dy = ye - ys;

        if(|dx| > |dy|){
                step = |dx|;
        }
        else{
                step = |dy|;
        }

        xinc = dx/step;
        yinc = dy/step;
        x = xs;
        y = ys;

        osvijetli_pixel(zaokruzi(x), zaokruzi(y));

        for(i=0;i<step-1;i++){
                x+=xinc;
                y+=yinc;
                osvijetli_pixel(zaokruzi(x), zaokruzi(y));
        }
```

}

Algoritam koji se koristi u zadatku izgleda ovako (http://www.zemris.fer.hr/predmeti/irg/predavanja/4_rasterska.pdf):

```
void DDA(int x0, int y0, int x1, int y1){
        xi = x0;
        xf = -0.5;
        mi = (x1 - x0)div(y1 - y0);
        mf = (x1 - x0)/(y1 - y0)- mi;
        for (y = y0; y <= y1; y=y+1) {
                crtaj (xi,y);
                xi = xi + mi;
                xf = xf + mf;
                if (xf>=0) {
                        xi = xi + 1;
                        xf = xf - 1;
                }
        }
}
```

Gdje funkcija *div* predstavlja cjelobrojno dijeljenje (5 div 2 = 2).



Slika 100: Zadatak

Uzimajući u obzir što zadatak kaže koordinate točaka su $T_0(0,2)$ te $T_1(9,9)$. Sada kad imamo koordinate, samo ih uvrštavamo u algoritam.

$$x_i = 0$$

$$x_f = -0.5$$

$$m_i = (9-0) \quad div \quad (9-2) = 1$$

$$m_f = \frac{9}{7} - 1 = \frac{2}{7}$$

$$for(y = 2; y <= 9; y++)$$

$$crtaj(0,2)$$

$$x_i = 0 + 1 = 1$$

$$x_f = -0.5 + \frac{2}{7} = -\frac{3}{14}$$

Ovo je kraj prve iteracije koja vrijedi za T_0. Sada kreće druga iteracija

$$y = 3$$

$$crtaj(1,3)$$

$$x_i = 1 + 1 = 2$$

$$x_f = -\frac{3}{14} + \frac{2}{7} = \frac{1}{14} = 0.071$$

Pošto je x_f veći od nule, ulazi u if

$$x_i = 2 + 1 = 3$$

$$x_f = \frac{1}{14} - 1 = -\frac{13}{14}$$

I tako dalje prolazimo kroz for petlju.

Slika 101: Zadatak riješen

5 Modeliranje i reprezentacija objekata

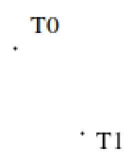
5.1 Reprezentacija objekta

5.1.1 OpenGL strukture podataka - Jednostavniji slučaj

Sve grafičke primitive koji se mogu pojaviti u zadatku i objašnjenja, moguće je pronaći u knjizi na stranici 10. Kratki opis svake:

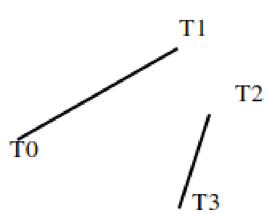
GL_POINTS -> zada li se n točaka toliko će ih se i nacrtati
Pseudokod koji je sličan za sve grafičke primitive:

```
glBegin(GL_POINTS);
        glVertex2i(3, 3)
        glVertex2i(2, 1)
glEnd() //crta dvije tocke
```



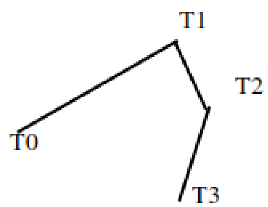
Slika 102: GL_POINTS

GL_LINES -> svake dvije točke se tumače kao jedna linija, n točaka, $n/2$ linija



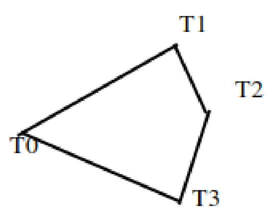
Slika 103: GL_LINES

GL_LINES_STRIP -> n točaka za $n-1$ linija, poluotvoren poligon



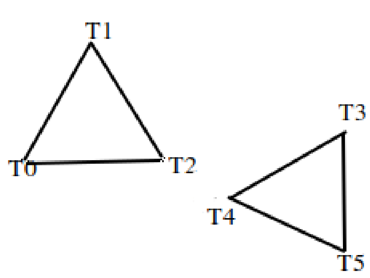
Slika 104: GL_LINE_STRIP

GL_LINE_LOOP -> n točaka daje n linija, zatvoreni poligon



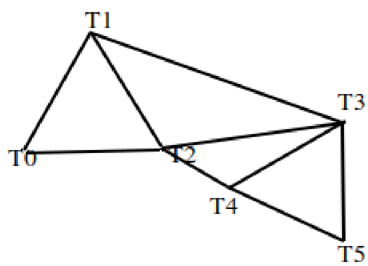
Slika 105: GL_LINE_LOOP

GL_TRIANGLES -> zadane točke se grupiraju po tri te čine trokut, za n točaka se dobije $n/3$ trokuta Za 6 točaka:



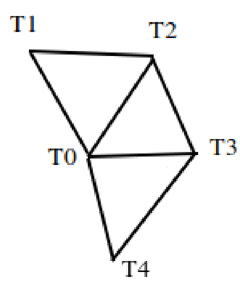
Slika 106: GL_TRIANGLES

GL_TRIANGLE_STRIP -> n točaka za $n-2$ trokuta (T0-T1-T2, T1-T2-T3, T2-T3-T4,...)



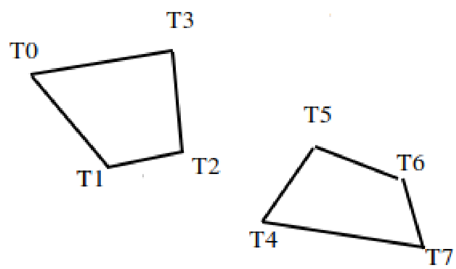
Slika 107: GL_TRIANGLE_STRIP

GL_TRIANGLE_FAN -> n točaka u $n-2$ trokuta koji dijele jedan zajednički (početni) vrh



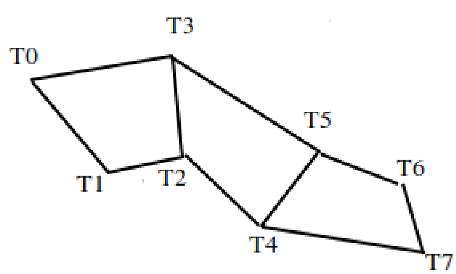
Slika 108: GL_TRIANGLE_FAN

GL_QUADS -> sve točke se grupiraju po 4, n točaka, $n/4$ četverokuta



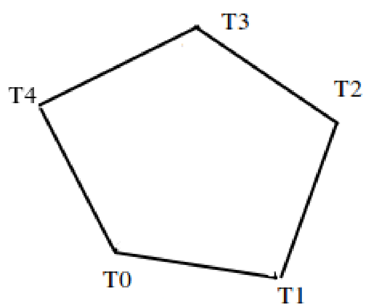
Slika 109: GL_QUADS

GL_QUAD_STRIP -> točke se tumače kao povezani četverokuti (T1-T2-T4-T3, T3-T4-T6-T5, ...), n točaka za $n/2 - 1$ četverokuta

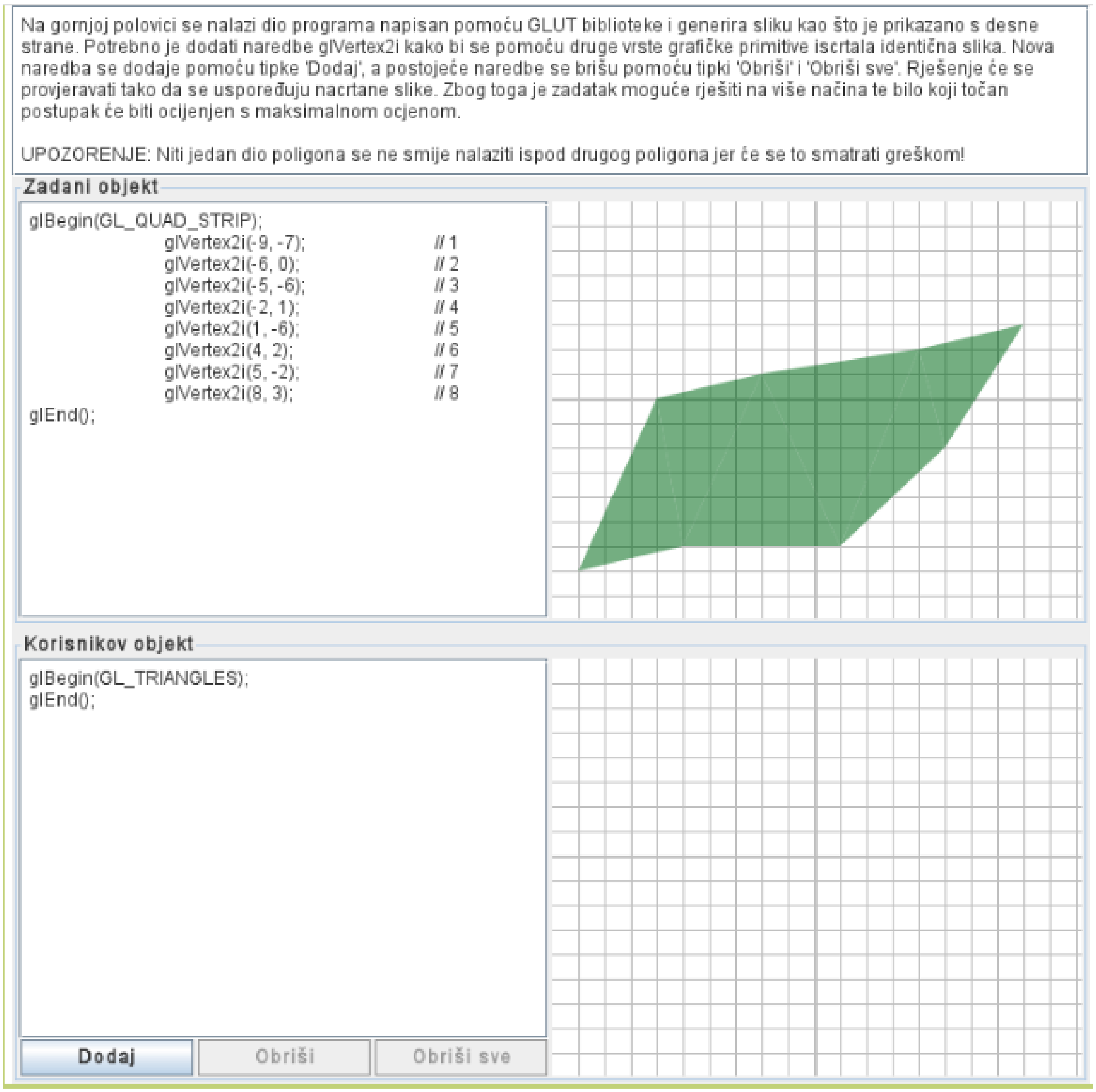


Slika 110: GL_QUAD_STRIP

GL_POLYGON -> crta se jednostavan konveksan poligon zadan točkama. Npr. za 5 točaka:

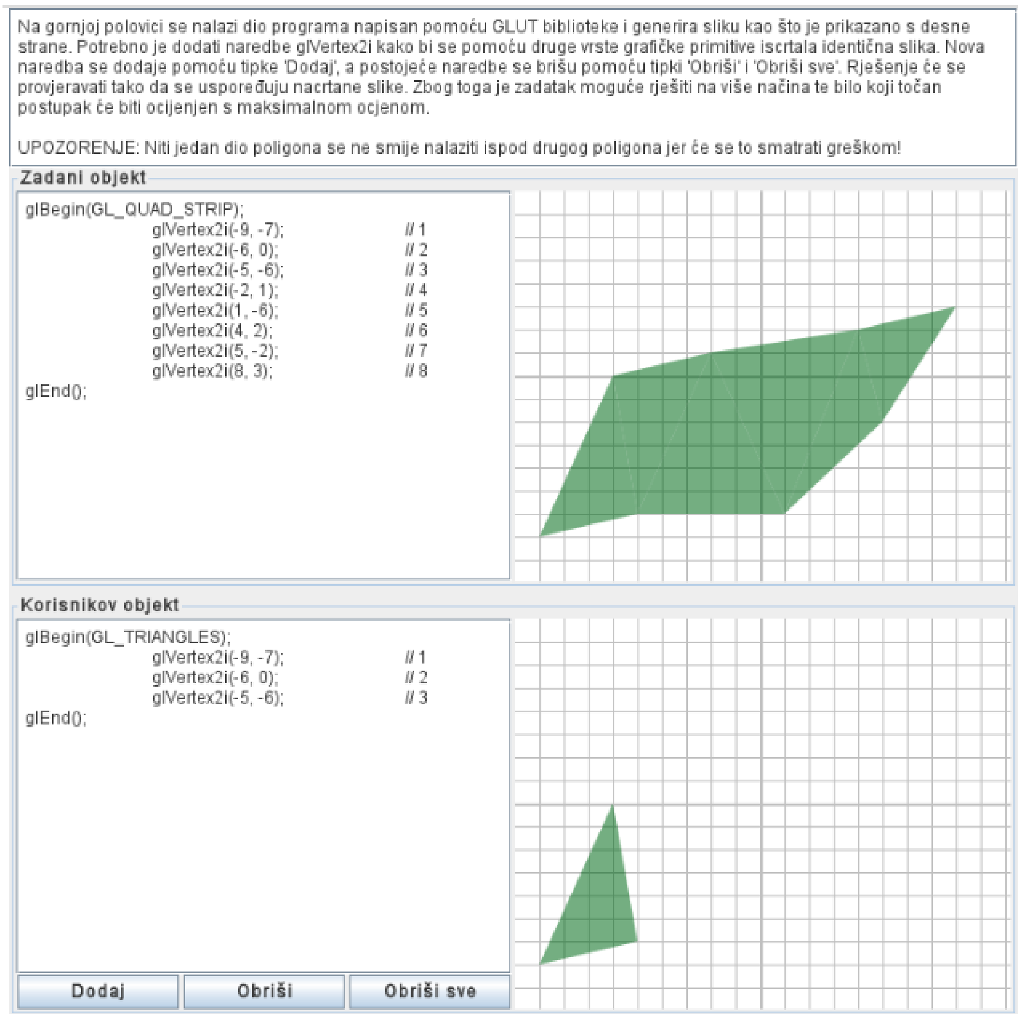


Slika 111: GL_POLYGON



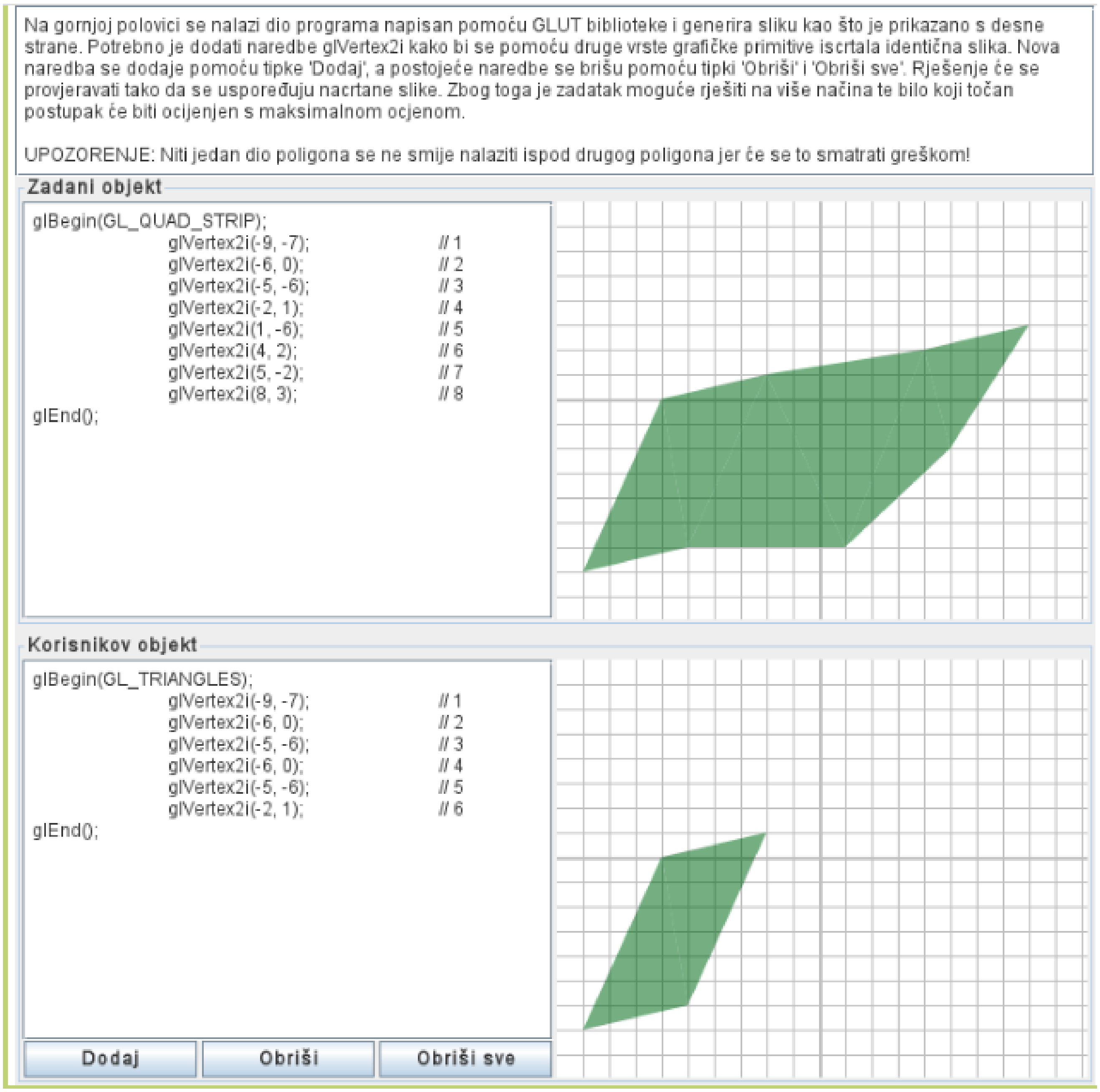
Slika 112: Zadatak

Kako u zadatku imamo zadane GL_QUAD_STRIP znamo da 8 točaka čini $n/2 - 1 = 3$ četverokuta. Tri četverokuta je potrebno prikazati pomoću 6 trokuta. Pošto se radi o GL_TRIANGLES, svaki trokut treba crtati zasebno što znači da će nam za prikaz ovog poligona biti potrebno 18 točaka. Krenimo od prve točke i nacrtajmo prvi trokut, njegovi vrhovi su $T_1(-9, -7), T_2(-6, 0), T_3(-5, -6)$

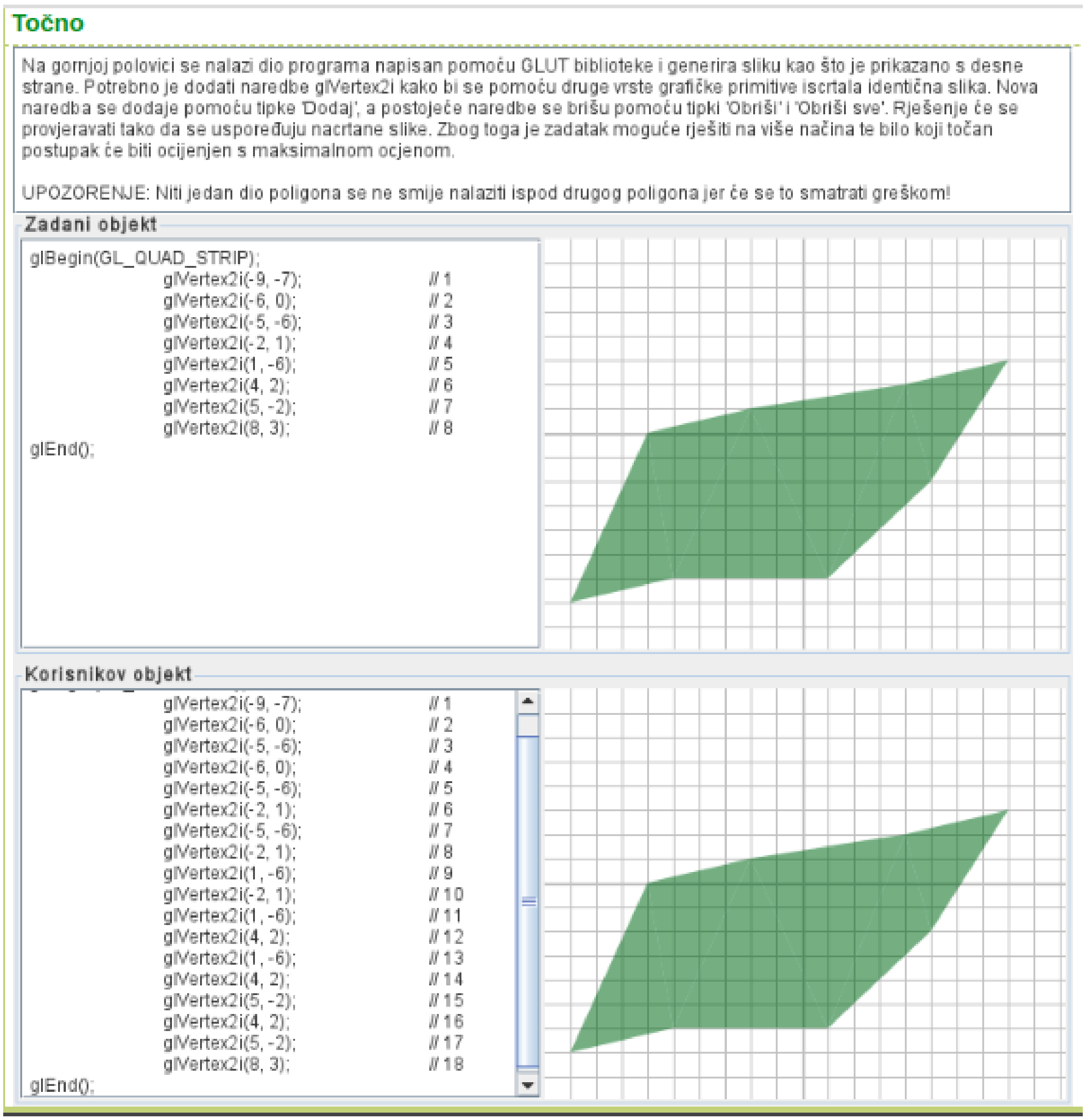


Slika 113: Nacrtan prvi trokut

Kako tijelo treba biti bez prekida i popunjeno, sljedeći trokut glasi $T_2(-6, 0), T_3(-5, -6), T_4(-2, 1)$ I tako nastavljamo dalje...



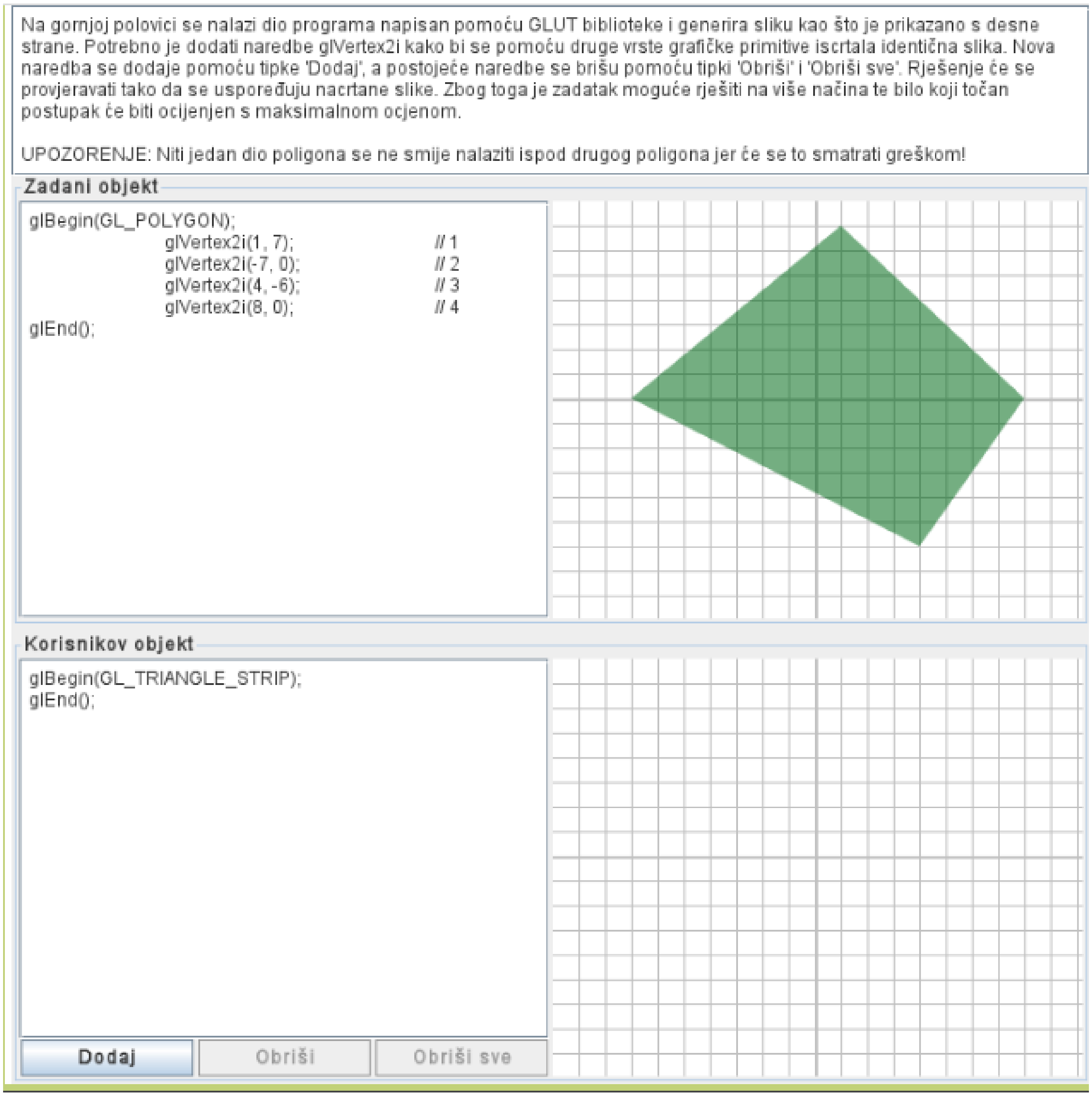
Slika 114: Nacrtan drugi trokut



Slika 115: Zadatak riješen

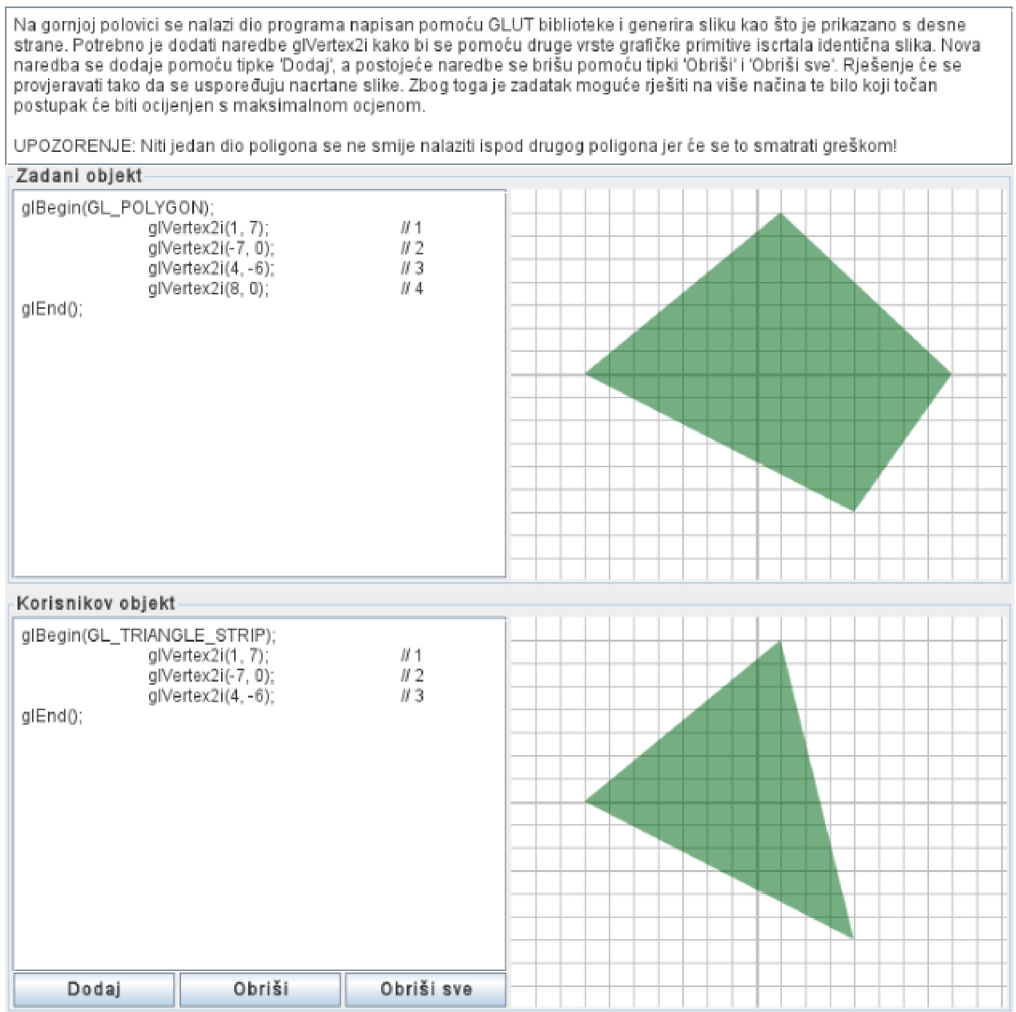
5.1.2 OpenGL strukture podataka - Potencijalno složeniji slučaj

Za definicije primitiva posjetite prethodno potpoglavlje 5.1.1. Krenimo re-



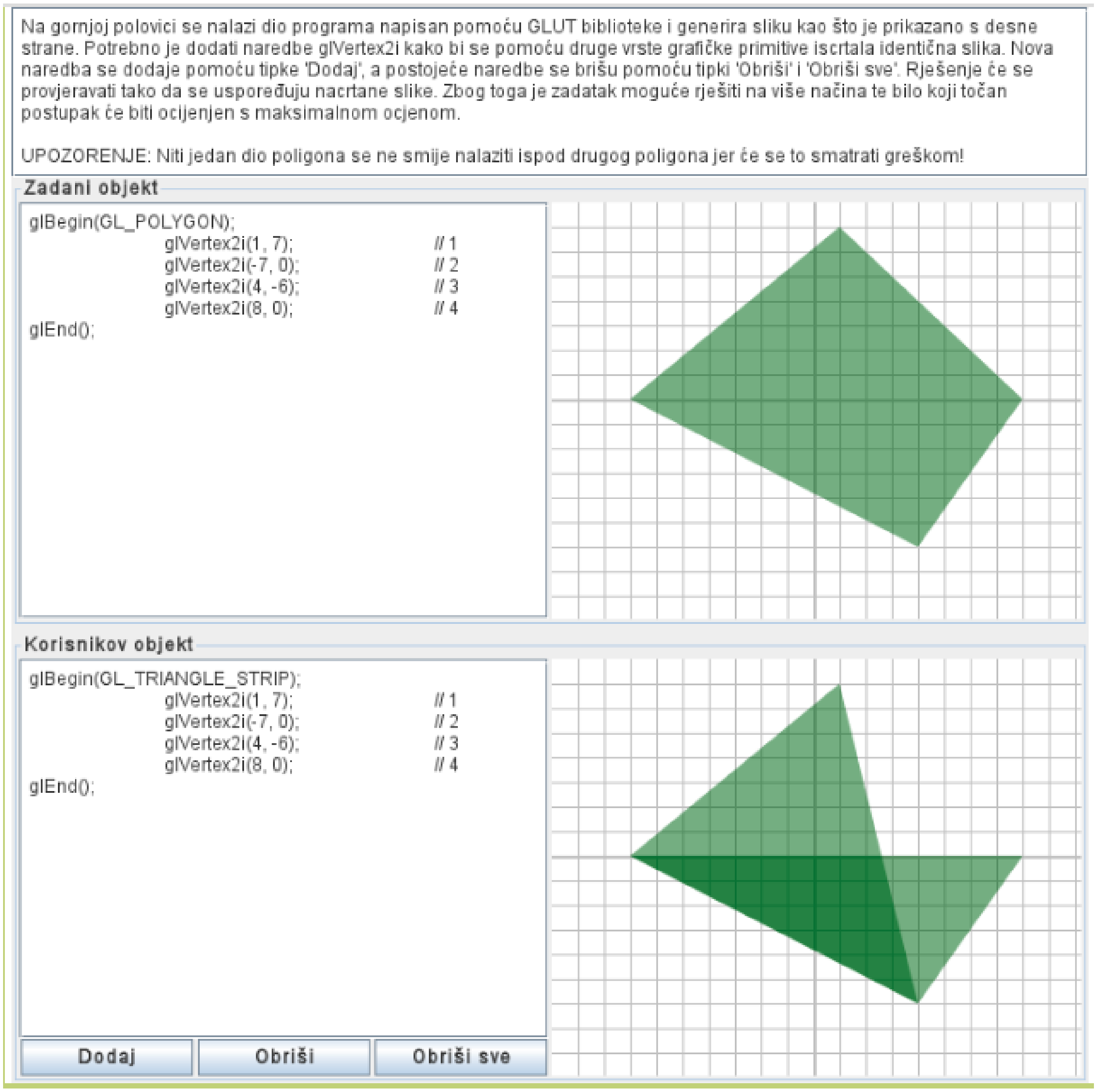
Slika 116: Zadatak

dom, imamo poligoni čiji je $n = 4$, odnosno, četverokut. Četverokut se sastoji od dva trokuta. A kako radi GL_TRIANGLE_STRIP? Zadaju se tri točke za trokut, četvrta točka koja se zada, automatski povezuje prethodne dvije i četvrtu. Stoga, u ovom zadatku treba biti oprezniji. Naime, možete krenuti rješavati redom točke i tako ih i upisati te bi se na prvi pogled dobio korektan rezultat.



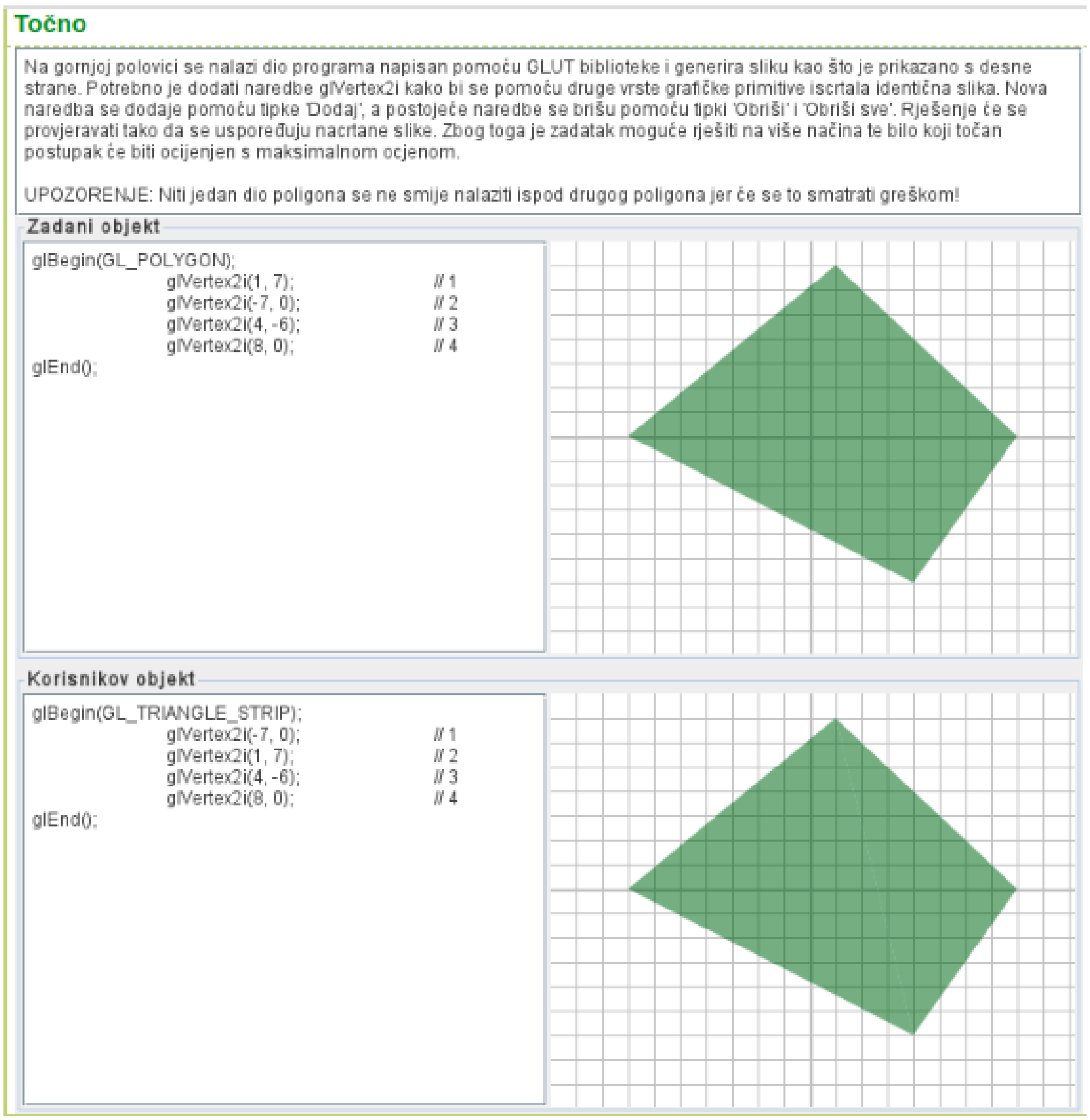
Slika 117: Krivi redoslijed točaka

Ali kada bismo dodali četvrtu točku



Slika 118: GREŠKA!

Korektno rješenje je prikazano u nastavku (obratite pažnju na redoslijd točaka)



Slika 119: Zadatak riješen