Linearno programiranje i simpleks algoritam

(*Linear Programing and Simplex Algorithm*)

Linearno programiranje

Općeniti problem optimizacije s ograničenjima:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizirati} & f(x_1, x_2, \ldots, x_\mathrm{n}) \\ \text{uz uvjet} & h_i(x_1, x_2, \ldots, x_\mathrm{n}) = 0 \;\; ; \;\; i = 1,\ldots,m \\ & g_j(x_1, x_2, \ldots, x_\mathrm{n}) \leq 0 \;\; ; \;\; j = 1,\ldots,p \end{array}$$

pri čemu $x_1, x_2, \ldots, x_\mathrm{n} \in \mathrm{R}$ i $m \leq n$.

Funkcija f se naziva ciljna funkcija ili funkcija koštanja (*objective function*, *cost function*).

Varijable x_i se različito nazivaju, ovisno o disciplini u kojoj se problem pojavio. Najčešći su nazivi kontrolne varijable, strukturne varijable ili varijable odluke (*control*, *structural*, *decision variables*).

Uvjeti h_i i g_j se još nazivaju i ograničenja (*constraints*).

U vektorskom (matričnom) zapisu:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizirati} & f(\mathbf{x}) \\ \text{uz uvjet} & \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \le \mathbf{0} \end{array}$$

Podebljana (bold) slova označavaju vektore, matrice i vektorske funkcije!

pri čemu $\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n$, $f\colon \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$, $\mathbf{h}\colon \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m$, $\mathbf{g}\colon \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^p$
i $m \le n$.

Maksimizaciji se pristupa na isti način jer se minimizacija i maksimizacija uvijek lako zamjenjuju:

$$\text{maksimizirati } f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \text{minimizirati } -f(x) \quad .$$

Linearno programiranje rješava poseban slučaj:

- sve funkcije $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ i $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ su linearne po x_i
- sve $x_i \ge 0$, dakle sve varijable moraju biti nenegativne

Standardni ili kanonski linearni problem (LP) je optimizacijski problem matričnog zapisa:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizirati} & \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ \text{uz uvjet} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

pri čemu je: $\mathbf{c}\in \mathrm{R}^{n\times 1}$, $\mathbf{b}\in \mathrm{R}^{m\times 1}$ i $\mathbf{b} \geq 0$, matrica $\mathbf{A}\in \mathrm{R}^{m\times n}$, $rang(\mathbf{A}) = m$ i $m < n$.

Svi drugi oblici linearnog problema, s uvjetima $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ i $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$, mogu se prevesti u kanonski oblik.

Najjednostavnije je riješiti negativnost koeficijenta b $\leftrightarrow$ dovoljno je pomnožiti tu jednadžbu s -1.

Primjer 1: raspodjela proizvodnje s obzirom na narudžbe i transportne troškove

Problem: tvrtka ima proizvodne pogone u tri mjesta T1, T2 i T3, kapaciteta c1=32, c2=38 i c3=35. Naručitelji su iz četiri mjesta O1, O2, O3 i O4, a narudžbe su redom n1=20, n2=20, n3=25 i n4=35. Transportni troškovi, po jedinici proizvoda, od pojedinih tvornica do naručitelja navedeni su u tablici.

Pitanje je koliko u kojoj tvornici proizvoditi i koliko iz koje tvornice isporučivati pojedinom naručitelju, a da sve narudžbe budu zadovoljene uz najmanje moguće troškove transporta.

Transportni troškovi

	O1	O2	O3	O4
T1	10	9	14	8
T2	7	11	9	11
T3	8	12	12	9

Rješenje: formulacija linearnog problema

Označimo s x_{ij} količinu isporučenu iz *i*-te tvornice *j*-tom naručitelju i s t_{ij} trošak tog transporta.

Tražimo minimum

$$\min\left(\sum_{i,j} t_{ij} x_{ij}\right)$$

uz uvjete

$$\sum_{j} x_{ij} \leq \mathrm{c}(T_i) \quad ; \quad i = 1, 2, 3$$

$$\sum_{i} x_{ij} = \mathrm{n}_j \quad ; \quad j = 1, 2, 3, 4$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad .$$

▲

<u>Primjer 2:</u> raspodjela proizvodnje s ciljem maksimiziranja brzine dobivanja svih vrsta proizvoda

Problem: tvrtka ima S strojeva i svaki može proizvesti svih D različitih dijelova nekog proizvoda. No, strojevi su različiti i ne proizvode svi sve dijelove jednako brzo. Brzina proizvodnje pojedinih dijelova na svim strojevima je poznata, a pitanje je na kojem stroju proizvoditi koji dio da bi se najbrže dobili svi potrebni dijelovi za konačni proizvod.

Rješenje: jedno je rješenje očito – ispitati sve kombinacije stroj-dio i tako odrediti najbolju. Međutim, za prvi stroj imamo D izbora (dijelova), za drugi D–1, treći D–2 itd., dakle ukupno moramo ispitati D! kombinacija (ako je S = D).

Bolje je pokušati zadani problem formulirati kao linearni optimizacijski problem (problem linearnog programiranja). Označimo s x_{ij} broj j-tih dijelova proizvedenih na i-tom stroju, a s t_{ij} trajanje te proizvodnje. Cilj je minimizirati ukupno vrijeme:

$$\min\left(\sum_{i,j} t_{ij} x_{ij}\right)$$

uz uvjete

$$\sum_i \sum_j x_{ij} = \mathrm{D} \qquad ; \quad i = 1, \ldots, \mathrm{S}$$

$$\sum_i x_{ij} = 1 \qquad ; \quad j = 1, \ldots, \mathrm{D}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad .$$

▲

<u>Primjer 3:</u> optimiranje potrošnje energije u komunikacijskom sustavu

Problem: centralna postaja treba ostvariti pouzdanu komunikaciju s N rubnih postaja. Rubne postaje napajaju se solarnom energijom i važno je smanjiti njihovu potrošnju koliko je god moguće. Signal i-te rubne postaje do centralne postaje stiže prigušen pa ako i-ta rubna postaja emitira snagom p_i, centralna postaja prima signal snage $\lambda_i \cdot p_i$. Tijekom komunikacije s i-tom rubnom postajom, signali svih drugih rubnih postaja koji dolaze u centralnu postaju predstavljaju smetnju i komunikacija je moguća samo ako je omjer signal/smetnje najmanje ρ_i. Pitanje je kolike trebaju biti emitivne snage rubnih postaja, a da se ostvari pouzdana komunikacija uz najmanju moguću potrošnju energije.

Rješenje: formulacija linearnog problema

Ukupna potrošnja energije bit će najmanja kad je najmanja ukupna snaga, dakle trebamo minimizirati

$$\min\left(\sum_{i=1}^{N} p_i\right)$$

uz uvjete

$$\frac{\lambda_i p_i}{\sum_{j\neq i} \lambda_j p_j} \geq \rho_i \qquad ; \qquad i, j = 1, \ldots, N$$

$$p_k \geq 0 \qquad ; \qquad k = 1, \ldots, N \quad .$$

Budući da uvjetne (ne)jednadžbe moraju biti linearne po p_i, prevodimo ih u oblik

$$\lambda_i p_i - \rho_i \sum_{j\neq i} \lambda_j p_j \geq 0 \quad . \qquad \blacktriangle$$

Pretvorbe u kanonski oblik

Nejednakosti $\geq$ ("veći od") među uvjetima rješavamo oduzimanjem pomoćnih (dopunskih) varijabli y_i (*surplus variables*) tako da problem postane

minimizirati $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$

uz uvjet $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n - y_i = b_i \;;\; i = 1, \dots, m$

$x_i \geq 0 \;; \qquad y_i \geq 0$

ili u matričnom zapisu

minimizirati $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$

uz uvjet $\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{I}_m\mathbf{y} = [\mathbf{A} \;\; -\mathbf{I}_m]\cdot[\mathbf{x} \;\; \mathbf{y}]^{\mathrm{T}} = \mathbf{b}$

$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \;; \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$.

Nejednakosti $\leq$ ("manji od") među uvjetima rješavamo dodavanjem pomoćnih (dopunskih) varijabli y_i (*slack variables*) tako da problem postane

minimizirati $\quad \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$

uz uvjet $\quad a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + y_i = b_i \; ; \; i = 1, \ldots , m$

$x_i \geq 0 \; ; \qquad y_i \geq 0$

ili u matričnom zapisu

minimizirati $\quad \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$

uz uvjet $\quad \mathbf{Ax} + \mathbf{I}_m\mathbf{y} = [\mathbf{A} \;\; \mathbf{I}_m]\cdot[\mathbf{x} \;\; \mathbf{y}]^{\mathrm{T}} = \mathbf{b}$

$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \; ; \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \quad .$

Primjer 4: prevođenje linearnog problema u kanonski oblik

maksimizirati $x_2 - x_1$

uz uvjet $3 \cdot x_1 - x_2 = -5$

$| x_2 | \leq 2$

$x_1 \leq 0$.

1. Maksimizaciju pretvaramo u minimizaciju

   minimizirati $-(x_2 - x_1) = x_1 - x_2$

2. Zbog uvjeta $x_1 \leq 0$ uvodimo zamjensku varijablu $x_1' = -x_1$ pa taj uvjet postaje $x_1' \geq 0$.

3. Kanonski oblik zahtijeva $b \geq 0$, stoga prvu uvjetnu funkciju pišemo kao $-3 \cdot x_1 + x_2 = 5$.

4. Najveći je problem uvjet $|x_2| \leq 2$. Ne spada među uvjete na varijable (koji moraju biti oblika $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$) pa ga smatramo uvjetnom funkcijom.
Prvo moramo „osloboditi" varijablu, tj. riješiti se apsolutne vrijednosti njezinim raspisivanjem u dva uvjeta

$$x_2 \leq 2 \quad \text{i} \quad -x_2 \leq 2,$$

odnosno $$x_2 \leq 2 \quad \text{i} \quad x_2 \geq -2 .$$

5. Oba novonastala uvjeta su nejednadžbe pa ih prevodimo u jednadžbe uvođenjem dopunskih varijabli. U ovom slučaju dvije: x_3 i x_4.

$$x_2 + x_3 = 2 \qquad ; \quad x_3 \geq 0$$

$$x_2 - x_4 = -2 \quad \leftrightarrow \quad -x_2 + x_4 = 2 \qquad ; \quad x_4 \geq 0$$

6. Sada imamo sve uvjete u pravilnom obliku i problem s varijablama x_1', x_2, x_3 i x_4 za koje vrijedi $x_1', x_3, x_4 \geq 0$.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -x_1' - x_2 \\
\text{uz} \quad & 3 \cdot x_1' + x_2 = 5 \\
& x_2 + x_3 = 2 \\
& -x_2 + x_4 = 2 \\
& x_1', x_3, x_4 \geq 0 \\
& x_2 \in [-2,2]
\end{aligned}
$$

A što je s x_2?

Varijabla x_2 može biti u intervalu $x_2 \in [-2,2]$, zbog čega ovako zadani problem još uvijek nije u kanonskom obliku.

7. Svaku varijablu koja “prirodno” nije nenegativna zamjenjujemo dvjema pomoćnim varijablama *u* i *v* za koje zahtijevamo $u,v \geq 0$, a kojima izrazimo stvarnu varijablu kao $(u–v) \in R$. U ovom primjeru postavimo $x_2 = u – v$ i dobivamo kanonski linearni problem

$$
\begin{array}{ll}
\min & -x_1' - x_2 \\
\text{uz} & 3 \cdot x_1' + x_2 = 5 \\
& x_2 + x_3 = 2 \\
& -x_2 + x_4 = 2 \\
& x_1', x_3, x_4 \geq 0 \\
& x_2 \in [-2,2]
\end{array}
\quad \Leftrightarrow \quad
\boxed{
\begin{array}{l}
-x_1' - u + v \\
3 \cdot x_1' + u - v = 5 \\
u - v + x_3 = 2 \\
v - u + x_4 = 2 \\
x_1', u, v, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
}
$$

▲

Znači, problem oblika npr.

$$\begin{array}{ll} \text{minimizirati} & \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ \text{uz uvjet} & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

prevodimo u

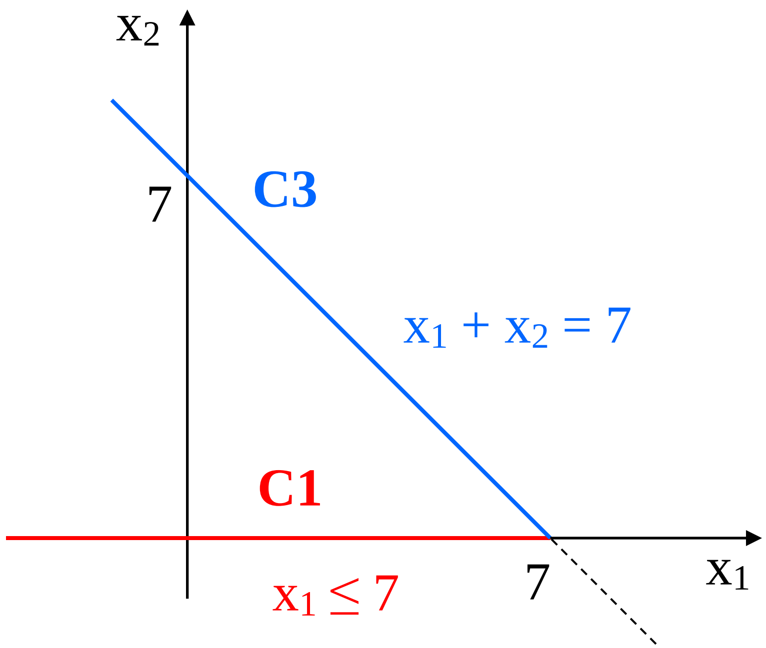
$$\begin{array}{ll} \text{minimizirati} & \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ \text{uz uvjet} & \mathbf{Ax} - \mathbf{I}_m\mathbf{y} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \ \ ; \ \ \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \quad . \end{array}$$

Hmm, ... Jesu li to isti problemi?

Naravno, nisu! U prvome se radi o presjecima poluprostora u n-dimenzionalnom prostoru, dok su u drugome presjeci poluprostora i hiperravnina u $(n+m)$-dimenzionalnom prostoru. Pa ipak, ...

Ti problemi nisu isti, ali jesu srodni, a rješenje stvarnog problema (s nejednakostima) je podskup rješenja kanonskog (proširenog) problema jer je kanonski problem u prostoru višeg reda (više dimenzija) od prostora polaznog problema i taj prostor višeg reda sadrži prostor polaznog problema.

Primjer 5: razmotrimo rješenja nejednadžbe $x_1 \leq 7$.



$C1 = \{x_1 \colon x_1 \leq 7\} \in R^1$

$C3 = \{[x_1 \;\; x_2]^T \colon$

$x_1 + x_2 = 7;\; x_2 \geq 0\} \in R^2$

$C2 = \{x_1 \colon x_1 + x_2 = 7;\; x_2 \geq 0\} \in R^1$

Očito je

$C1 = \{x_1 \colon [x_1 \;\; x_2]^T \in C3\} = C2.$

Rješenje polaznog problema je skup

$$C1 = \{x_1 : x_1 \leq 7\} \text{ u prostoru } R^1.$$

Riješimo li prošireni kanonski problem, dobit ćemo skup C3 parova x_1 i x_2, tj. skup vektora $[x_1 \;\; x_2]^T$ u prostoru R^2 definiran relacijom

$$C3 = \{[x_1 \;\; x_2]^T : x_1 + x_2 = 7;\ x_2 \geq 0\}.$$

Ako iz C3 uzmemo samo x_1 dobivamo skup C2

$$C2 = \{x_1 : [x_1 \;\; x_2]^T \in C3\} = \{x_1 : x_1 + x_2 = 7;\ x_2 \geq 0\},$$

a iz grafa je razvidno da su x_1 iz C2 jednaki x_1 iz C3.

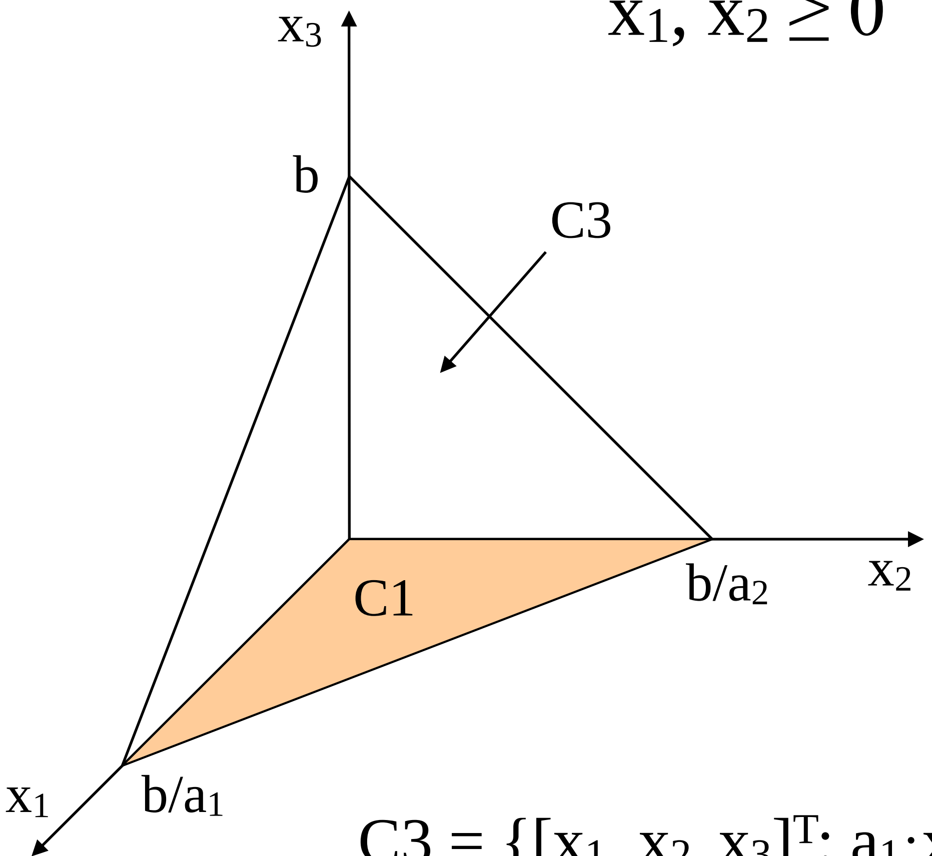
Rješenje polaznog problema je C1, a to je skup koji se dobiva ortogonalnom projekcijom $C3 \in R^2$ na prostor R^1 skupa C1, odnosno $C1 = \{x_1 : [x_1 \;\; x_2]^T \in C3\}$.

Slijedi $\quad C1 = \{x_1 : [x_1 \;\; x_2]^T \in C3\} = C2. \quad$ ▲

Primjer 6: razmotrimo rješenja sustava nejednadžbi

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 \leq b$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0 \quad .$$



$C1 = \{[x_1\ \ x_2]^T$:

$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 \leq b;\ x_1, x_2 \geq 0\}$

Uvodimo x_3:

$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + x_3 = b$

$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \quad .$

$C3 = \{[x_1\ \ x_2\ \ x_3]^T: a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + x_3 = b;\ \ x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$

$C2 = \{[x_1\ \ x_2]^T: a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + x_3 = b;\ \ x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$

$C1 = \{[x_1\ \ x_2]^T: [x_1\ \ x_2\ \ x_3]^T \in C3\} = C2$ ▲

Komentar i zaključak:

kad nađemo rješenja proširenog (kanonskog) linearnog problema (skup C3 u prostoru dimenzija uvećanih za broj dopunskih varijabli), dakle optimalne vrijednosti svih varijabli (i polaznih i dopunskih), rješenja polaznog problema (skup C1) dobivamo uzimajući iz C3 samo one varijable koje postoje u polaznom problemu.

Geometrijski, C1 je ortogonalna projekcija C3 na prostor skupa C1. Ortogonalna projekcija se dobiva postavljanjem svih dopunskih ("umjetnih") varijabli na =0
(sve koordinate u dimenzijama višim od dimenzija prostora stvarnog problema $\rightarrow 0$) i ta "ortogonalna veza" jamči jednakost zajedničkog (pod)prostora u kojem su rješenja polaznog problema.

Grafičko rješavanje linearnog problema u prostoru R^2

Grafički prikaz rješavanja linearnog problema moguć je do tri dimenzije. Problem s više varijabli (dimenzija) postaje logička apstrakcija, ali vrijede iste zakonitosti i zaključci. Najzornije je razmotriti grafičko rješavanje dvodimenzionalnog linearnog problema.

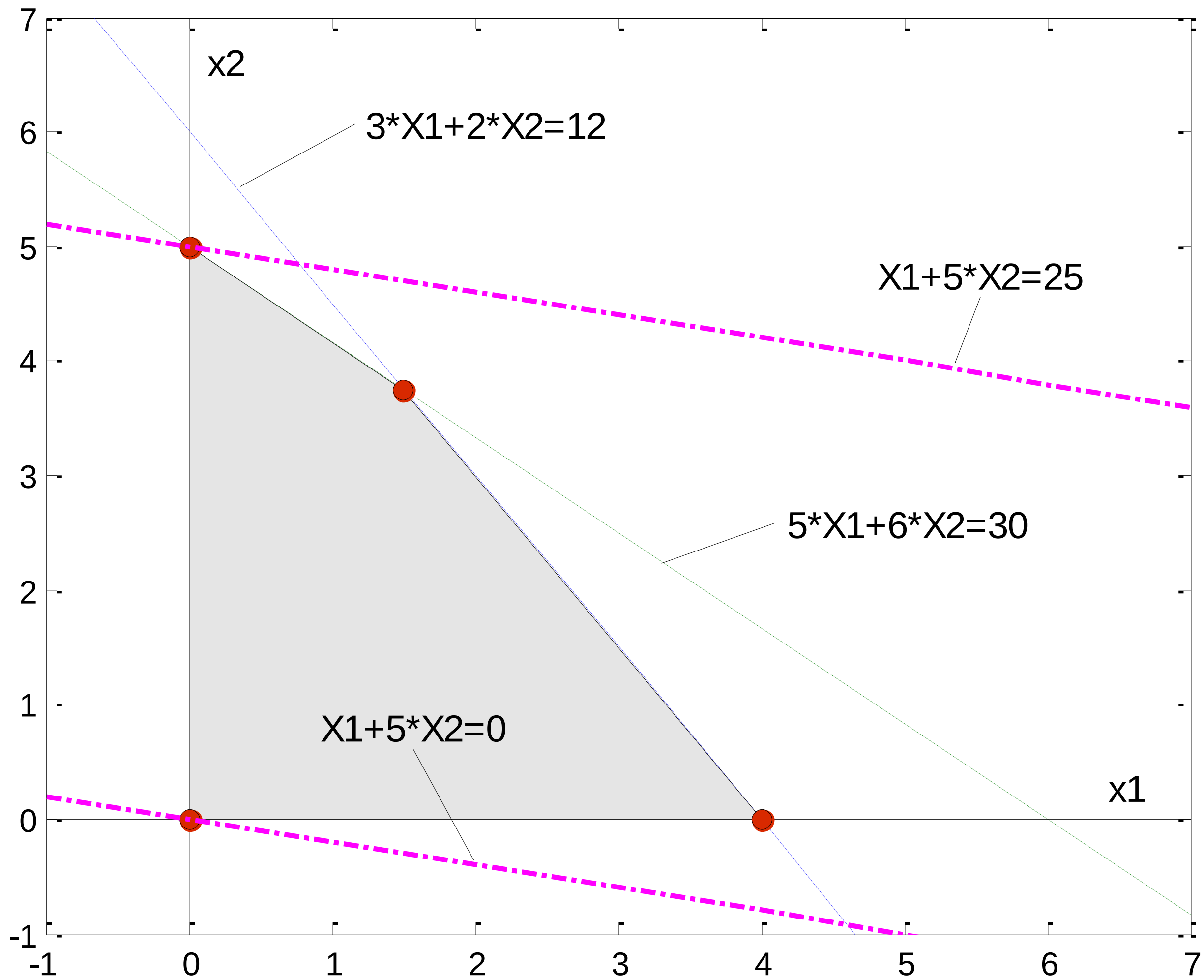
Na primjer, neka je problem zadan s

$$\max \quad x_1 + 5 \cdot x_2$$

uz uvjete

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 30 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$



Rješenje je ono sjecište pravca $x_1 + 5 \cdot x_2 = f$ s prostorom svih mogućih rješenja (sivi poligon na slici) za koje je f najveća. Očito, to je vektor $[0, 5]^T$, a $f_{max} = 25$.

Za vježbu grafički riješite sljedeći problem:

$$\min \quad 5 \cdot x_1 + x_2$$

uz uvjete

$$\begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 2 & 1 \\ 10 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 150 \\ 15 \\ 120 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad .$$

Rješenje: $[0, 50]^T$.

Napomena: u dvije dimenzije prostor mogućih rješenja nije ni zatvoreni ni omeđeni skup, ali problem se grafički ipak može riješiti jer se traži minimum. Zato pokušajte! Numerički se, u načelu, treba rješavati dvofaznim simpleks algoritmom.

Proširenjem opisanog razmatranja na *hiperprostor* (prostor dimenzija >3), jasno je da će prostor mogućih rješenja (*feasible set*) n-dimenzionalnog LP biti k-dimenzionalni poliedar, pri čemu će biti $k \leq n$, a optimalno rješenje će biti negdje na "rubu" tog k-dim prostora. Taj "rub" se naziva lice (*face*) i može biti najviše (k–1)-dimenzionalan.

Preciznije, u n-dimenzionalnom prostoru ciljna funkcija predstavlja klasu "paralelnih" hiperravnina i optimalno rješenje će biti u "diralištu" jedne od tih hiperravnina s prostorom svih mogućih rješenja. Ako taj prostor ima manje od n-dim, njegovo diralište s n-dim hiperravninom bit će on sâm (cijeli prostor mogućih rješenja). Ako je i prostor mogućih rješenja n-dim, diralište je jedno od lica tog prostora, dakle može biti najviše (n–1)-dimenzionalno.

Rješavanje linearnih problema temelji se na rezultatima takvih poopćenih razmatranja.

Definicija: Skup je **zatvoren** ako sadrži svoj rub.

– na primjer, skup (0,1) je otvoren, a [0,1] zatvoren. Drugim riječima, zatvoreni skup ima minimum i maksimum u svim dimenzijama prostora u kojem je definiran.
  (ponoviti definicije infimuma, supremuma, minimuma i maksimuma skupa!)

Definicija: Skup (u našem kontekstu prostor) je **omeđen** ako stane u kuglu konačnog promjera.

Definicija: Skup je **kompaktan** ako je omeđen i zatvoren.

Za linearne probleme (LP) i optimizaciju općenito kompaktni skupovi su posebno važni zbog osebujnog svojstva o kojem govori Weierstrassov teorem.

Teorem (Weierstrass):

Neka je $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ kompaktan skup i neka je nad njim definirana neprekidna funkcija f: $\Omega \to \mathrm{R}$.

Tada postoji točka $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ takva da je

$$f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x}) \text{ za sve } \mathbf{x} \in \Omega. \qquad \square$$

Riječima, u svakom kompaktnom skupu sigurno postoji element (argument) za koji će svaka funkcija definirana nad tim skupom postići svoj minimum.

Dakle, Weierstrassov teorem dokazuje postojanje minimuma, a samim time, zbog veze maksimizacije i minimizacije, i postojanje maksimuma.

Prema tome, ako znamo da je domena funkcije kompaktan skup, znamo i da mora postojati minimum, odnosno maksimum, pa ga ima smisla tražiti.

Da bi optimum uopće postojao, rješenja sustava uvjeta u LP moraju tvoriti kompaktan skup pa ćemo to u daljnjem razmatranju pretpostavljati bez posebnog navođenja.

No, kako naći optimum za linearni problem?

Prvo još malo matematike...

Definicija: konveksni skup je skup u kojemu su sve točke ravne spojnice (linije između) bilo kojih dviju točaka tog skupa opet u promatranom skupu.

Definicija: ekstrem konveksnog skupa Θ je ona točka x tog skupa za koju ne postoje druge dvije različite točke $x_1, x_2 \in \Theta$ takve da je x na ravnoj spojnici x_1 i x_2, tj. takve da je $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$, za $\alpha \in (0,1)$.

Definicija: bazično rješenje sustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ je vektor $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_B^T\ \mathbf{0}]$, gdje je $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, a $\mathbf{B} \in \mathrm{R}^{m\times m}$ odabrana baza (stupci u matrici $\mathbf{A}$) u sustavu od m jednadžbi s n nepoznanica, pri čemu je $m < n$ i $\det(\mathbf{B}) \neq 0$.

Teorem (osnovni teorem linearnog programiranja):
Promatrajmo linearni problem u kanonskom obliku. Vrijedi sljedeće:

1. Ako postoji bilo kakvo rješenje, postoji i bazično rješenje.
2. Ako postoji optimalno rješenje, postoji i bazično optimalno rješenje. □

Osnovni teorem LP daje nam prvu važnu smjernicu – umjesto da pretražujemo cijeli skup svih mogućih rješenja (koji je neprebrojiv) dovoljno je tražiti optimum samo među bazičnim rješenjima sustava uvjeta.

To je važan rezultat jer problem ispitivanja beskonačno mogućih rješenja reducira na ispitivanje konačnog skupa. Međutim, u praksi nailazimo i na probleme s više stotina pa i tisuća varijabli i uvjeta, a ako je broj uvjeta m i broj strukturnih varijabli n, broj načina (kombinacija) na koje možemo odabrati bazu, tj. bazično rješenje, je

$$\frac{n!}{(n-m)!\,m!}$$

dakle još uvijek previše za ispitivanje svih redom.

Pomoć u odabiru rješenja koja imaju veće izglede biti optimalna pruža nam sljedeći teorem.

Teorem: neka je Ω konveksni skup svih mogućih rješenja sustava uvjeta LP u kanonskom obliku, tj. uvjeta

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

gdje su $\mathbf{A} \in \mathrm{R}^{m \times n}$ i $m < n$.

Tada je **x** ekstrem u Ω ako i samo ako je ujedno i bazično rješenje sustava $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. □

Iz ovog i osnovnog teorema LP slijedi da optimalno rješenje treba tražiti među ekstremima (vrhovima) k-dimenzionalnog prostora, $k \leq n$, svih mogućih rješenja LP (to su ujedno i bazična rješenja) i to nam daje novu smjernicu u potrazi. Kako?

Recimo da se nalazimo u nekom od ekstrema prostora mogućih rješenja (tj. znamo jedno bazično rješenje sustava uvjeta). Ako to nije optimum, trebamo prijeći u neki drugi ekstrem, a nasumičnim odabirom mogli bismo otići i u neki koji će čak i povećati vrijednost ciljne funkcije.

No, znamo da je skup mogućih rješenja konveksan, a to pak znači da je u barem jednom od susjednih ekstrema ciljna funkcija manja ili jednaka trenutačnoj vrijednosti. Kad ne bi bilo tako, vrijednost funkcije bi se prilikom napuštanja trenutačnog ekstrema morala povećati pa onda negdje kasnije smanjiti do optimuma, a to bi značilo da prostor mogućih rješenja ima konkavnih predjela, tj. da nije konveksni skup, što je protivno postavkama linearnog problema.

Zaključak: optimum tražimo prelazeći iz jednog ekstrema u neki njemu susjedni. Ako postoji takav u kojem se vrijednost funkcije smanjuje ili ostaje ista, nastavljamo. Ako takvog nema, upravo se nalazimo u optimumu.

Kako odrediti susjedni ekstrem?

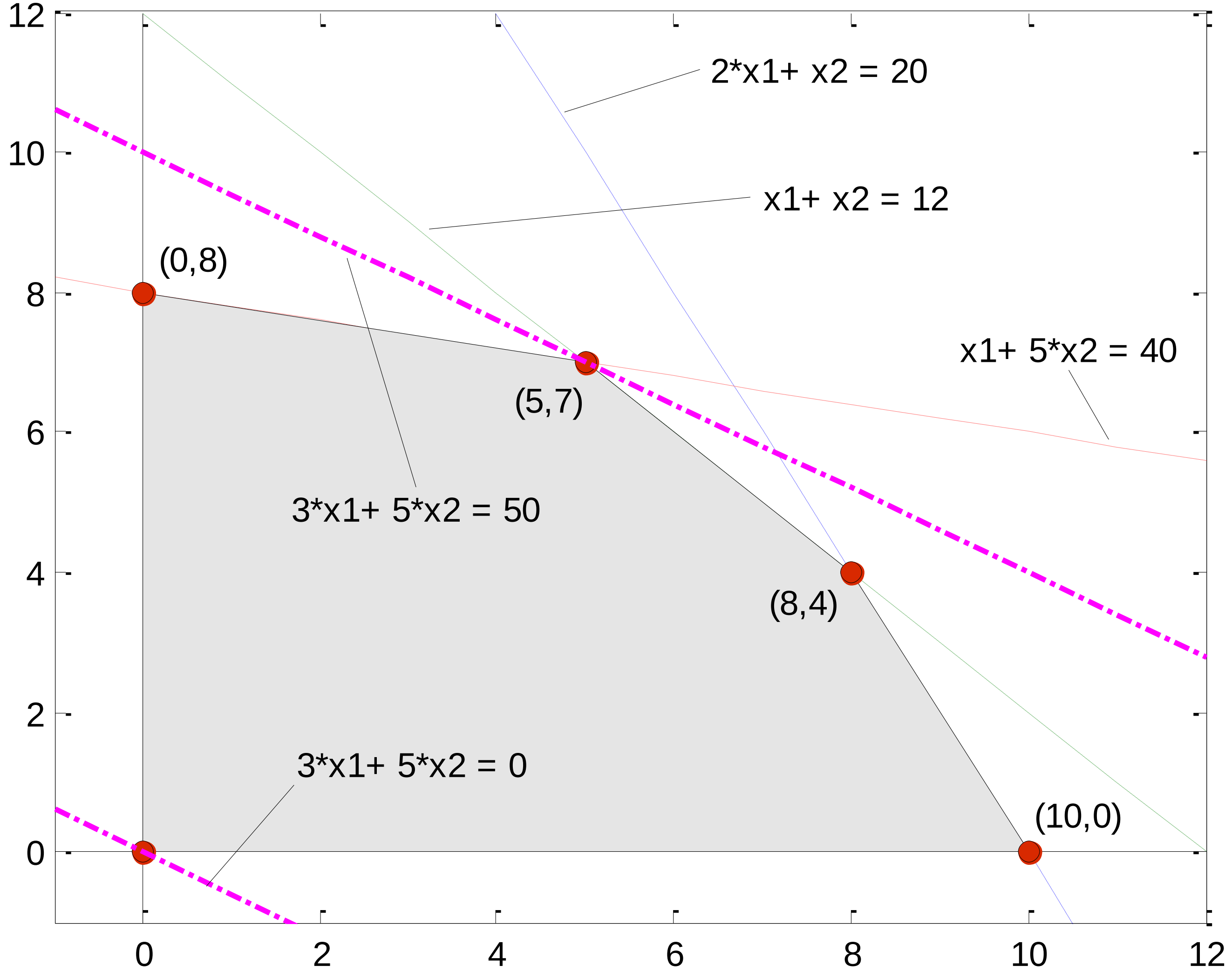
Treba promijeniti bazu prostora mogućih rješenja, ali tako da se nova i stara baza razlikuju samo za jedan vektor.

Primjer 7:

$$
\begin{array}{ll}
\max & 3x_1 + 5x_2 \\
\text{uz} & x_1 + 5x_2 \leq 40 \\
 & 2x_1 + x_2 \leq 20 \\
 & x_1 + x_2 \leq 12 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Grafičko rješenje: $f_{\min} = 0$; $x_1 = 0, x_2 = 0$

$f_{\max} = 50$; $x_1 = 5, x_2 = 7$



Pretvorba u kanonski oblik:

$$
\begin{array}{ll}
\min & -3x_1 - 5x_2 \\
\text{uz} & x_1 + 5x_2 + x_3 = 40 \\
 & 2x_1 + x_2 + x_4 = 20 \\
 & x_1 + x_2 + x_5 = 12 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \quad .
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 & \mathbf{b} \\
x_1\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} + & x_2\begin{bmatrix}5\\1\\1\end{bmatrix} + & x_3\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + & x_4\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + & x_5\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = & \begin{bmatrix}40\\20\\12\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Opći oblik rj.: $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + x_4\mathbf{a}_4 + x_5\mathbf{a}_5 = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq 0$.

Kao polazno uzimamo ekstrem $\mathbf{x}_0 = [0, 0, 40, 20, 12]^T$.

Vrijednost funkcije je nula i znamo da to nije optimalno rješenje. Prelazimo u neki od susjednih ekstrema. To je rješenje koje se od trenutačnog razlikuje za jedan bazni vektor. Uvedimo npr. $\boldsymbol{a}_1 = [1\ \ 2\ \ 1]^T$ u bazu. Jasno je da pritom moramo jedan od $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ ili $\boldsymbol{a}_5$ ukloniti iz baze.

Prvo izrazimo $\boldsymbol{a}_1$ kao linearnu kombinaciju $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ i $\boldsymbol{a}_5$.

$$\mathbf{a}_1 = 1\mathbf{a}_3 + 2\mathbf{a}_4 + 1\mathbf{a}_5$$

Tada je i $\quad \varepsilon_1\mathbf{a}_1 = \varepsilon_1\mathbf{a}_3 + \varepsilon_1 2\mathbf{a}_4 + \varepsilon_1\mathbf{a}_5 \quad ; \quad \varepsilon_1>0,\ \varepsilon_1\in R$.

Trenutačno rješenje je $\ 0\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_2 + 40\mathbf{a}_3 + 20\mathbf{a}_4 + 12\mathbf{a}_5 = \mathbf{b}$.

Kombiniramo (oduzmemo) i grupiramo. Slijedi

$$\varepsilon_1\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_2 + (40 - \varepsilon_1)\mathbf{a}_3 + (20 - 2\varepsilon_1)\mathbf{a}_4 + (12 - \varepsilon_1)\mathbf{a}_5 = \mathbf{b}\ .$$

Sada treba odabrati ε_1 tako da svi koeficijenti ostanu nenegativni, a jedan od onih uz $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ ili $\boldsymbol{a}_5$ mora biti =0.

Odabir $\varepsilon_1 = 10$ odgovara zahtjevima i proizlazi da je

$$10\mathbf{a}_1 + 30\mathbf{a}_3 + 2\mathbf{a}_5 = \mathbf{b} \;,$$

odnosno odgovarajuće bazično rješenje je

$$\mathbf{x}_1 = [10, 0, 30, 0, 2]^T.$$

Vrijednost funkcije =30 što je poboljšanje u odnosu na prethodno rješenje, ali još uvijek nije najbolje moguće.

Nastavljamo u susjedni ekstrem uvodeći $\mathbf{a}_2$ u bazu. Za $\varepsilon_2 = 4$ dobivamo $8\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2 + 12\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$, odnosno rješenje $\mathbf{x}_2 = [8, 4, 12, 0, 0]^T$ koje daje $f = 44$.

Naposljetku, uvodeći $\mathbf{a}_4$ u bazu, za $\varepsilon_3 = 3$ dobivamo $5\mathbf{a}_1 + 7\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_4 = \mathbf{b}$, odnosno rješenje $\mathbf{x}_3 = [5, 7, 0, 3, 0]^T$ za koje je $f = 50$. Dakle, rješenje polaznog problema je $[5, 7]^T$, a najveća moguća vrijednost $f = 50$. ▲

Zorni prikaz u prostoru dimenzija >3 više nije moguć, ali zakonitosti su iste pa tako i postupak rješavanja LP. Potpuni algoritam za rješavanje LP u načelu provodi isti postupak koji smo primijenili u prethodnom primjeru, tj. rješenje traži prelazeći iz jednog ekstrema u neki njemu susjedni, a od opisanog postupka bolji je samo po načinu odabira najprikladnijeg susjednog ekstrema. Mi smo susjeda odabirali zapravo nasumično (slučajnim odabirom), dok dorađeni algoritam to čini po jasnom i matematički utemeljenom kriteriju.

Budući da se prostor svih mogućih rješenja LP naziva simpleks (*simplex*, množina *simplexes* ili *simplices*), algoritam za rješavanje LP naziva se **simpleks algoritam**.

Simpleks algoritam

S obzirom na višedimenzionalnost, rješavanje linearnog optimizacijskog problema i praćenje rada simpleks algoritma je daleko preglednije u matričnom zapisu.

Podsjetimo se: u sustavu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, matrica sustava $\mathbf{A}^{m\times n}$, $m < n$, djeluje na vektor rješenja $\mathbf{x}$ kao linearni operator, a rezultat je neki podprostor $\mathrm{V} \subset \mathrm{R}^m$ u koji se preslikavaju svi $\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n$. Svaki (pod)skup od m linearno nezavisnih stupaca matrice $\mathbf{A}$ čini jednu bazu prostora V.

Zbog jednostavnosti zapisa, pretpostavit ćemo da je upravo prvih m stupaca linearno nezavisno. Tada $\mathbf{A}$ možemo pisati kao $\mathbf{A} = [\mathbf{B}\ \mathbf{D}]$, gdje su $\mathbf{B} \in \mathrm{R}^{m\times m}$ matrica baze i $\mathbf{D} \in \mathrm{R}^{m\times(n-m)}$ matrica preostalih stupaca. Matricu $[\mathbf{A}\ \mathbf{b}] = [\mathbf{B}\ \mathbf{D}\ \mathbf{b}]$ nazivamo proširenom matricom sustava.

Sustav $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A} \in \mathrm{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathrm{R}^{m \times 1}$, $\mathrm{rang}(\mathbf{A}) = m$ i $m < n$ ima beskonačno rješenja, što se vidi ako elementarnim transformacijama (operacijama nad redcima matrice) sustav prevedemo u **kanonski oblik** $[\mathbf{I}_m \ \ \mathbf{Y} \ \ \mathbf{b}']$. Zapišemo li neko rješenje kao $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_\mathrm{B}^\mathrm{T} \ \ \mathbf{x}_\mathrm{Y}^\mathrm{T}]^\mathrm{T}$, pri čemu su $\mathbf{x}_\mathrm{B} \in \mathrm{R}^m$ i $\mathbf{x}_\mathrm{Y} \in \mathrm{R}^{n-m}$, onda je $[\mathbf{I}_m \ \ \mathbf{Y}] \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}_\mathrm{B} + \mathbf{Y} \cdot \mathbf{x}_\mathrm{Y} = \mathbf{b}'$ ili $\mathbf{x}_\mathrm{B} = \mathbf{b}' - \mathbf{Y} \cdot \mathbf{x}_\mathrm{Y}$. Budući da je $\mathbf{x}_\mathbf{Y}$ proizvoljan vektor, jasno je da rješenja ima beskonačno. Za $\mathbf{x}_\mathrm{Y} = \mathbf{0}$ slijedi $\mathbf{x}_\mathrm{B} = \mathbf{b}'$, tj. partikularno rješenje $\mathbf{x} = [\mathbf{b}'^\mathrm{T} \ \mathbf{0}^\mathrm{T}]^\mathrm{T}$, dok se za $\mathbf{b}' = \mathbf{0}$ dobiva rješenje $\mathbf{x}_\mathrm{B} = -(\mathbf{Y} \cdot \mathbf{x}_\mathrm{Y})^\mathrm{T}$ homogenog sustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, tj. $\mathbf{x} = [-(\mathbf{Y} \cdot \mathbf{x}_\mathrm{Y})^\mathrm{T} \ \ \mathbf{x}_\mathrm{Y}^\mathrm{T}]^\mathrm{T}$. Opće rješenje polaznog sustava je

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}' \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{Y} \cdot \mathbf{x}_\mathrm{Y} \\ \mathbf{x}_\mathrm{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}' \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{Y} \\ \mathbf{I}_{n\text{-}m} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_\mathrm{Y} \quad .$$

Radi olakšavanja i jednoobraznosti zapisa, u nastavku ćemo $\mathbf{b}$' označavati s $\mathbf{y}_0$ pa će sustav $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ u kanonskom obliku biti

$$\begin{array}{cccccccccccc}
x_1 & & & & + & y_{1m+1}x_{m+1} & + & \dots & + & y_{1n}x_n & = & y_{10} \\
& x_2 & & & + & y_{2m+1}x_{m+1} & + & \dots & + & y_{2n}x_n & = & y_{20} \\
& & \ddots & & & & & & & & & \vdots \\
& & & x_m & + & y_{mm+1}x_{m+1} & + & \dots & + & y_{mn}x_n & = & y_{m0}
\end{array}$$

ili u matričnom zapisu $[\mathbf{I}_m \ \ \mathbf{Y}_{m,n-m}]\cdot\mathbf{x} = \mathbf{y}_0$.

Matrica $[\mathbf{I}_m \ \ \mathbf{Y} \ \ \mathbf{y}_0]$ ima centralnu ulogu u simpleks algoritmu i naziva se **proširena kanonska matrica** (*Canonical Augmented Matrix* = CAM) s obzirom na bazu **B**. Njezina struktura

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & y_{1(m+1)} & \dots & y_{1n} & y_{10} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & y_{2(m+1)} & \dots & y_{2n} & y_{20} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & y_{m(m+1)} & \dots & y_{mn} & y_{m0} \end{bmatrix}$$

jasno pokazuje kako ju treba tumačiti. Prvih m stupaca jesu m jediničnih vektora koji čine kanonsku bazu $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m\}$. Svi ostali stupci su zapisi (koordinate) vektora $\boldsymbol{a}_{m+1}, \dots, \boldsymbol{a}_n$ i $\mathbf{b}$ u bazi $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m\}$.

Rješavanje LP podrazumijeva “preskoke” između susjednih ekstrema, a budući da su ekstremi ujedno i bazična rješenja, prelazak u susjedni ekstrem znači promjenu baze za jedan vektor. Kao osnovna operacija algoritma, promjena baze mora biti što jednostavnija i brža, stoga ćemo izvesti relacije koje omogućuju kvalitetno programsko rješenje.

Recimo da u bazi $\{\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_m\}$ (“stara baza”) želimo vektor $\boldsymbol{a}_p$, $p \in \{1, 2, ... , m\}$, zamijeniti nebazičnim vektorom $\boldsymbol{a}_q$, $q \in \{m+1, m+2, ... , n\}$, i tako dobiti “novu bazu”. To zapravo znači da nizom elementarnih operacija nad CAM trebamo q-ti stupac prevesti u jedinični vektor s p-tom koordinatom $=1$ (sve ostale $=0$). Pitanje je koje će vrijednosti poslije takve pretvorbe imati drugi elementi proširene kanonske matrice.

U staroj bazi $\{\boldsymbol{a}_1, \dots , \boldsymbol{a}_{p-1}, \boldsymbol{a}_p, \boldsymbol{a}_{p+1}, \dots , \boldsymbol{a}_m\}$, vektor $\boldsymbol{a}_q$ je

$$\boldsymbol{a}_q = \sum_{i=1}^{m} y_{iq}\boldsymbol{a}_i = y_{pq}\boldsymbol{a}_p + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq p}}^{m} y_{iq}\boldsymbol{a}_i$$

pa se $\boldsymbol{a}_p$, pomoću vektora $\{\boldsymbol{a}_1, \dots , \boldsymbol{a}_{p-1}, \boldsymbol{a}_q, \boldsymbol{a}_{p+1}, \dots , \boldsymbol{a}_m\}$ koji bi trebali činiti novu bazu, može izraziti kao

$$\boldsymbol{a}_p = \frac{1}{y_{pq}}\boldsymbol{a}_q - \frac{1}{y_{pq}}\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq p}}^{m} y_{iq}\boldsymbol{a}_i = \frac{1}{y_{pq}}\boldsymbol{a}_q - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq p}}^{m} \frac{y_{iq}}{y_{pq}}\boldsymbol{a}_i \quad .$$

Općenito, svaki stupac (vektor) $\boldsymbol{a}_j$ u staroj matrici (bazi) je $\boldsymbol{a}_j = y_{1j}\cdot\boldsymbol{a}_1 + \dots + y_{pj}\cdot\boldsymbol{a}_p + \dots + y_{mj}\cdot\boldsymbol{a}_m$ pa ako se za $\boldsymbol{a}_p$ uvrsti gornji izraz, slijedi

$$\boldsymbol{a}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq p}}^{m} \left(y_{ij} - \frac{y_{pj}}{y_{pq}} y_{iq} \right)\boldsymbol{a}_i + \frac{y_{pj}}{y_{pq}}\boldsymbol{a}_q \quad .$$

Sada su svi vektori izraženi pomoću vektora nove baze pa se vide njihove komponente u novoj bazi. Dakle, elementi y_{ij}' proširene kanonske matrice nakon promjene baze, izraženi pomoću elemenata y_{ij} u staroj bazi, jesu

$$y_{ij}^{'} = y_{ij} - \frac{y_{iq}}{y_{pq}} y_{pj} \qquad ; \quad i \neq p$$

$$y_{pj}^{'} = \frac{y_{pj}}{y_{pq}} \qquad ; \quad i = p \quad .$$

Navedene relacije nazivaju se **stožerne jednadžbe** (*pivot equations*), a postupak njihove primjene za izračunavanje CAM u novoj bazi se naziva **stožerni razvoj oko** (*pivoting about*) **elementa (*p*,*q*)**. Isti se učinak može postići elementarnim operacijama nad redcima CAM...

Vratimo se sada rješavanju LP i osnovnom pitanju odabira nove baze. Prvo smo novu bazu odabirali nasumice i pritom mogli čak i pogoršati rezultat, da bismo potom poboljšali algoritam time da bolje rješenje tražimo samo među susjednim ekstremima. No, idalje je pitanje kojeg od njih odabrati? Želimo uspostaviti neki kriterij odabira novog bazičnog rješenja (susjednog ekstrema) sustava uvjeta $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, kojim bi približavanje optimumu bilo zajamčeno i brže nego nasumičnim odabirom.

Ideja proizlazi iz zapažanja da su u zadnjem stupcu CAM uvijek vrijednosti bazičnih strukturnih varijabli, poredane u redoslijedu bazičnih vektora u CAM. Naime, ako je $\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_m\ 0\ \ldots\ 0]^T$ bazično rješenje, znači da je $x_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 + x_2 \cdot \boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_m \cdot \boldsymbol{a}_m = \mathbf{b} = \mathbf{y}_0$, što znači da su $x_i = y_{i0}$ (jer su $\boldsymbol{a}_i$ jedinični vektori).

Budući da LP još nameće i uvjet $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, otkrili smo novu smjernicu – prilikom promjene baze moramo postići da svi elementi zadnjeg stupca nove CAM budu nenegativni.

Razmotrimo zato još jednom konstrukciju novog bazičnog rješenja. Recimo da već imamo neko početno bazično rješenje $\mathbf{x} = [y_{10}\ y_{20}\ \ldots\ y_{m0}\ 0\ \ldots\ 0]^T$ koje zadovoljava uvjet $y_{i0} \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots , m$, i želimo uvesti q-ti, $q > m$, vektor u bazu. U staroj bazi taj je vektor

$$\boldsymbol{a}_q = y_{1q} \cdot \boldsymbol{a}_1 + y_{2q} \cdot \boldsymbol{a}_2 + \ldots + y_{mq} \cdot \boldsymbol{a}_m \ . \qquad / \cdot \varepsilon\ ,\ \varepsilon > 0$$

Jednako tako vrijedi $y_{10} \cdot \boldsymbol{a}_1 + y_{20} \cdot \boldsymbol{a}_2 + \ldots + y_{m0} \cdot \boldsymbol{a}_m = \mathbf{y}_0$

pa kombiniranjem (oduzimanjem) dobivamo

$$(y_{10} - \varepsilon \cdot y_{1q}) \cdot \boldsymbol{a}_1 + (y_{20} - \varepsilon \cdot y_{2q}) \cdot \boldsymbol{a}_2 + \ldots$$
$$+ (y_{m0} - \varepsilon \cdot y_{mq}) \cdot \boldsymbol{a}_m + \varepsilon \cdot \boldsymbol{a}_q = \mathbf{y}_0 \ .$$

Dobiveni vektor je također rješenje sustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b} = \mathbf{y}_0$.

Za $\varepsilon = 0$ dobivamo prethodno rješenje, ali za sve druge $\varepsilon > 0$ novouvedeni vektor $\boldsymbol{a}_q$ će utjecati na rješenje tako što će se koeficijenti uz vektore stare baze povećavati i smanjivati ovisno o tome kojeg je predznaka y_{iq}.

Općenito, za neki mali ε dobivamo moguće, ali ne i bazično rješenje. No, s porastom ε, neki od koeficijenata uz vektore stare baze postat će $=0$ i dobit ćemo novo bazično rješenje u bazi koja je dobila $\boldsymbol{a}_q$, a ostala bez nekog od starih vektora (recimo $\boldsymbol{a}_p$).

Odabiremo najmanji ε, odnosno njemu odgovarajući indeks p, jer kada bismo odabrali bilo koji veći, barem jedna sastavnica rješenja postala bi negativna, a to nije dozvoljeno. Dakle, odabiremo p koji odgovara faktoru ε takvom da je $\varepsilon = \min_i \{y_{i0}/y_{iq} \; ; \; y_{iq} > 0\}$.

Ako su za neki $\boldsymbol{a}_q$ svi $y_{iq} < 0$, s porastom ε svi će koeficijenti drugih baznih vektora (tj. vrijednosti bazičnih varijabli) rasti i ne možemo naći novo bazično rješenje. To znači da postoje rješenja s beskonačnim vrijednostima strukturnih varijabli, a to pak znači da skup mogućih rješenja nije zatvoren i optimalno rješenje ne postoji. Ovime smo pronašli jednostavnu mogućnost detekcije nepravilno zadanog LP, tj. LP koji nema optimum!

Ako za isti ε dva ili više koeficijenta postanu =0, dobivamo tzv. **degenerirano** (*degenerate*) **rješenje**, dakle rješenje u kojem su koeficijenti uz neke od baznih vektora =0. Takva rješenja mogu dovesti do "kruženja" (*cycling*) među nekoliko bazičnih rješenja, bez da ikada nađemo optimalno rješenje. To se može izbjeći primjenom *Blandovog* pravila...

Sada već znamo puno o promjeni baze, ali još uvijek nemamo odgovor na dva ključna pitanja:

1) koji od nebazičnih vektora $\boldsymbol{a}_q$ odabrati za novu bazu
2) kako prepoznati optimalno rješenje .

Budući da prilikom skoka u susjedni ekstrem prostora mogućih rješenja želimo otići u onaj koji je (naj)bliži optimumu, razmotrimo promjenu ciljne funkcije uslijed promjene rješenja. Nakon odabira q i ε, novo rješenje je

$$\left[\begin{array}{c} y_{10}-\varepsilon\cdot y_{1q} \\ \vdots \\ y_{m0}-\varepsilon\cdot y_{mq} \\ 0 \\ \vdots \\ \varepsilon \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ q\text{-ti redak} \\ \\ \\ \end{array}$$

Ciljna funkcija je (**c** je vektor koeficijenata u ciljnoj funkciji)

$$z = c_1 \cdot (y_{10} - \varepsilon \cdot y_{1q}) + c_2 \cdot (y_{20} - \varepsilon \cdot y_{2q}) + \dots + c_m \cdot (y_{m0} - \varepsilon \cdot y_{mq}) + c_q \cdot \varepsilon .$$

$$= z_0 + \varepsilon \cdot [c_q - (c_1 \cdot y_{1q} + \dots + c_m \cdot y_{mq})] \ ,$$

gdje je $z_0 = c_1 \cdot y_{10} + \dots + c_m \cdot y_{m0}$

početna (prethodna) vrijednost ciljne funkcije.

Uz oznaku $z_q = c_1 \cdot y_{1q} + \dots + c_m \cdot y_{mq}$ nova vrijednost ciljne funkcije je

$$z = z_0 + \varepsilon \cdot (c_q - z_q).$$

Da bi novo rješenje bilo bolje od prethodnog, mora biti $z < z_0$, odnosno $(c_q - z_q) < 0$ i to je traženi kriterij odabira $\boldsymbol{a}_q$ za novu bazu. Znači, za sve $q > m$ izračunamo $(c_q - z_q)$ i odaberemo onaj q za koji je $(c_q - z_q)$ najveće apsolutne vrijednosti, a manje od nula (= najnegativnije).

Optimalno rješenje prepoznajemo na temelju sljedeće činjenice: ako je neko bazično rješenje takvo da je za sve

$q > m$ faktor $(c_q - z_q) \geq 0$, onda je trenutačno bazično rješenje ujedno i optimalno rješenje.

Faktor $(c_q - z_q)$ naziva se **faktor redukcije** (*reduced cost coefficient*, *relative cost coefficient*) i označava s $r_q = (c_q - z_q)$.
Za sve bazične varijable u proširenoj kanonskoj matrici (u našem zapisu za stupce indeksa $i \leq m$) bit će $r_i = 0$.

Ovime smo dobili sve tražene odgovore i možemo formulirati simpleks algoritam.

Napomena: $\mathrm{argmin}_i \{ f(i) \}$ znači argument i za koji $f(i)$ postiže minimum.

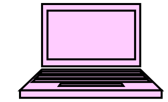
Simpleks algoritam:

1. oformiti proširenu kanonsku matricu koja odgovara početnom bazičnom rješenju (mora biti poznato!)
2. izračunati faktore redukcije r_i za sve nebazične varijable
3. ako su svi $r_i \geq 0 \quad \Rightarrow$ kraj; trenutačno bazično rješenje je ujedno i najbolje moguće (optimalno)
4. odabrati q tako da bude $r_q < 0$ (najčešće onaj q za koji je r_q najmanji)
5. ako su svi $y_{iq} \leq 0$, stop; problem nema optimalno rješenje jer je skup mogućih rješenja neomeđen

   inače: izračunati $p = \mathrm{argmin}_i \{y_{i0}/y_{iq} \; ; \; y_{iq} > 0\}$. Ako je više istih y_{i0}/y_{iq}, odabrati i proizvoljno (najčešće najmanji).
6. izračunati novu CAM (primjenom stožernog razvoja oko elementa (p,q) ili matričnim operacijama)
7. nastaviti od 2. koraka

Primjer 8:

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + 5x_2 \\ \text{uz} & x_1 \le 4 \\ & x_2 \le 6 \\ & x_1 + x_2 \le 8 \\ & x_1,\ x_2 \ge 0 \quad . \end{array}$$



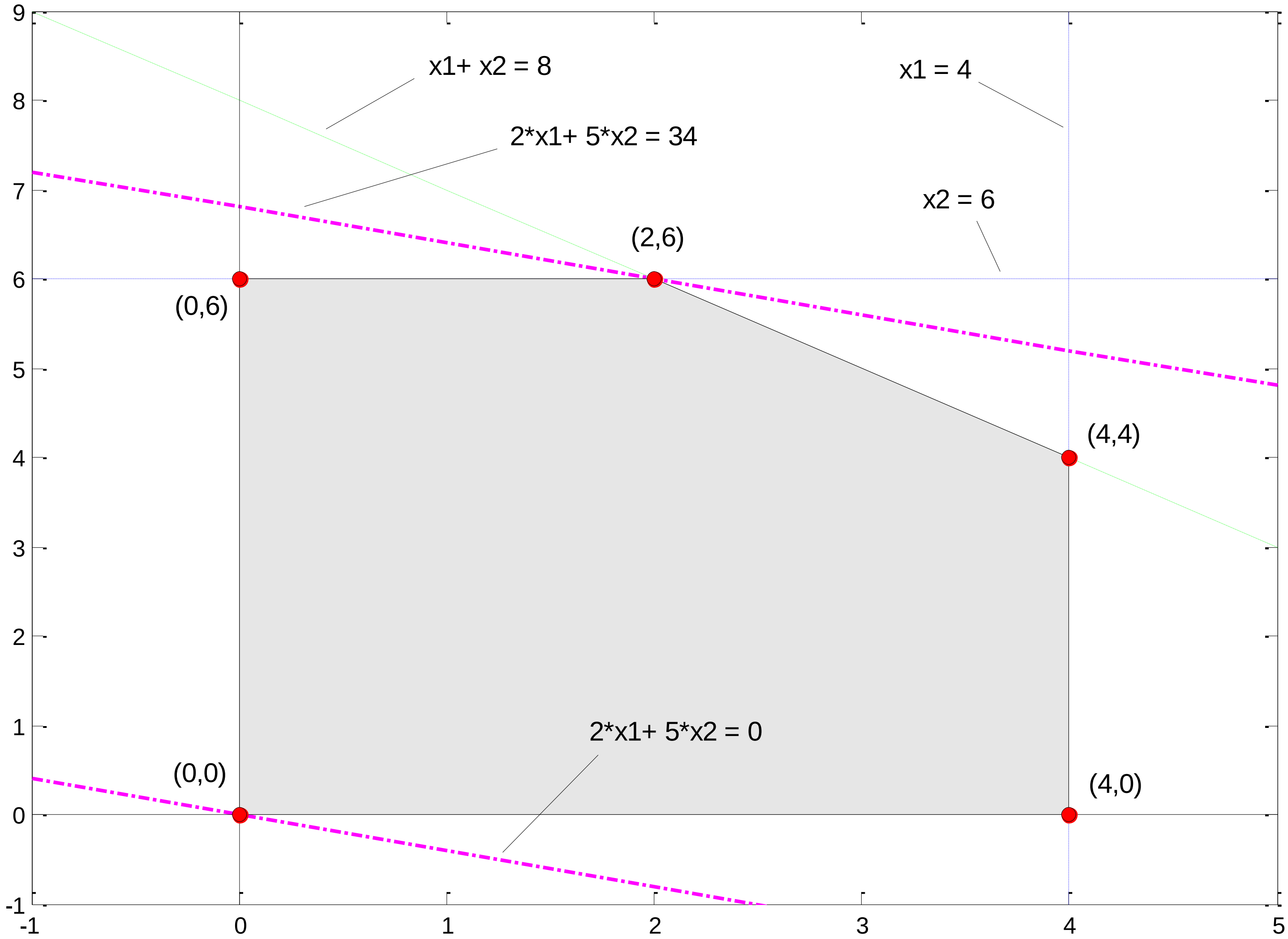
simplex.m

Uvođenjem *slack* varijabli prevodimo problem u

$$\begin{array}{ll} \min & -2x_1 - 5x_2 - 0x_3 - 0x_4 - 0x_5 \\ \text{uz} & \begin{array}{llllll} x_1 & & + \; x_3 & & & = 4 \\ & x_2 \; + & & + \; x_4 & & = 6 \\ x_1 \; + & x_2 & & & + \; x_5 & = 8 \end{array} \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \ge 0 \quad . \end{array}$$

Grafičko rješenje: $f_{min} = 0$; $x_1 = 0, x_2 = 0$

$f_{max} = 34$; $x_1 = 2, x_2 = 6$



Proširena kanonska matrica je (uz $\mathbf{c}^T = [-2 \;\; -5 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0]$)

B	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	$\mathbf{b} = \mathbf{y}_0$
$\boldsymbol{a}_3$	1	0	1	0	0	4
$\boldsymbol{a}_4$	0	1	0	1	0	6
$\boldsymbol{a}_5$	1	1	0	0	1	8

.

Početno bazično rješenje je $\mathbf{x}_0 = [0 \;\; 0 \;\; 4 \;\; 6 \;\; 8]^T$
u bazi $\mathbf{B}_0 = [\boldsymbol{a}_3 \; \boldsymbol{a}_4 \; \boldsymbol{a}_5] = \mathbf{I}_3$.
Ciljna funkcija za to početno rješenje = 0.

Izračunavamo faktore redukcije za nebazične varijable:

$r_1 = (c_1 - z_1) = c_1 - (c_3 y_{11} + c_4 y_{21} + c_5 y_{31}) = -2$

$r_2 = (c_2 - z_2) = c_2 - (c_3 y_{12} + c_4 y_{22} + c_5 y_{32}) = -5$.

Odabiremo $q = 2$.
Slijedi $p = \text{argmin}_i \; \{y_{i0}/y_{i2} \;\; ; \;\; y_{i2} > 0\} = 2$. Pivot(2,2)...

Nova proširena kanonska matrica, u bazi $\mathbf{B}_1 = [\boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_5]$

B	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	**b**
$\boldsymbol{a}_3$	1	0	1	0	0	4
$\boldsymbol{a}_2$	0	1	0	1	0	6
$\boldsymbol{a}_5$	1	0	0	–1	1	2 .

Novo bazično rješenje je $\mathbf{x}_1 = [0\ \ 6\ \ 4\ \ 0\ \ 2]^T$. (Redoslijed!)
Ciljna funkcija za novo rješenje = –30.

Izračunavamo faktore redukcije za nebazične varijable:

$r_1 = (c_1 - z_1) = c_1 - (c_3 y_{11} + c_2 y_{21} + c_5 y_{31}) = -2$

$r_4 = (c_4 - z_4) = c_4 - (c_3 y_{14} + c_2 y_{24} + c_5 y_{34}) = \ \ 5$.

Još ima $r_i < 0$, dakle rješenje nije optimalno.
Odabiremo $q = 1$.
Slijedi $p = \text{argmin}_i\{y_{i0}/y_{i1}\ ;\ y_{i1} > 0\} = 3$. Pivot(3,1)...

Nova proširena kanonska matrica, u bazi $\mathbf{B}_2 = [\boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_1]$

B	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	**b**
$\boldsymbol{a}_3$	0	0	1	1	–1	2
$\boldsymbol{a}_2$	0	1	0	1	0	6
$\boldsymbol{a}_1$	1	0	0	–1	1	2

.

Novo bazično rješenje je $\mathbf{x}_2 = [2\ \ 6\ \ 2\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}}$.
Ciljna funkcija za novo rješenje = –34.

Izračunavamo faktore redukcije za nebazične varijable:

$$r_4 = (c_4 - z_4) = c_4 - (c_3 y_{14} + c_2 y_{24} + c_1 y_{34}) = 3$$

$$r_5 = (c_5 - z_5) = c_5 - (c_3 y_{15} + c_2 y_{25} + c_1 y_{35}) = 2 \quad .$$

Svi $r_i \geq 0$, dakle rješenje $\mathbf{x}_2 = [2\ 6\ 2\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}$ je optimalno. Ortogonalna projekcija na prostor polaznog problema daje optimalno rješenje polaznog problema: x_1=2 i x_2=6. ▲

Matrični (tablični) zapis simpleks algoritma

Proširenoj matrici sustava uvjeta dodamo redak s koeficijentima ciljne funkcije (i nulom na kraju)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{c}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} m \times n & m \times (n-m) & m \times 1 \\ 1 \times m & 1 \times (n-m) & 1 \times 1 \end{bmatrix}.$$

Taj se oblik naziva **tablica** (*tableau*), a prikladan je za programiranje jer se matričnim operacijama može prevesti u kanonski oblik.

Prvo se baza pretvara u kanonsku bazu elementarnim matričnim operacijama nad redcima matrice, a to odgovara množenju s lijeva s matricom

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} m \times m & m \times 1 \\ 1 \times m & 1 \times 1 \end{bmatrix} .$$

Rezultat je
$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{c}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} .$$

Sada još treba u zadnjem redku izračunati faktore redukcije, što se postiže množenjem s lijeva s matricom
$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} m \times m & m \times 1 \\ 1 \times m & 1 \times 1 \end{bmatrix}$$

čime se dolazi do konačnog oblika koji se naziva **kanonska tablica** (*canonical tableau*).
$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \mathbf{c}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{T}} - \mathbf{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D} & -\mathbf{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix}$$

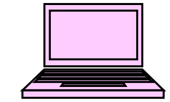
$$= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D} & \mathbf{x}_{\mathrm{B}} \\ \mathbf{r}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{r}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{T}} & -f(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad ; \ \mathbf{x} = [\mathbf{x}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\ \mathbf{x}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$$

Programski, simpleks algoritam se zapravo izvodi nad kanonskom tablicom jer kad se ona izračuna, sve provjere, odluke i zaključivanje o vrijednostima pojedinih varijabli svode se na očitavanje tabličnih elemenata. Naime:

1. vektor $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ (prvih m elemenata zadnjeg stupca) je trenutačno rješenje, tj. njegove sastavnice su bazične varijable $\mathbf{x}_B$ u trenutačnoj bazi $\mathbf{B}$
2. zadnji redak sadrži sve faktore redukcije; za bazične varijable $\mathbf{r}_B^T = \mathbf{0}^T$, a za nebazične $\mathbf{r}_D^T = \mathbf{c}_D^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}$ (ne moraju biti grupirani kao što je napisano, to je samo pregledniji zapis)
3. posljednji element matrice, najdesniji u zadnjem retku, $-\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = -\mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B = -f(\mathbf{x})$ je trenutačna vrijednost ciljne funkcije, samo suprotnog predznaka.

Primjer 9:

$$\begin{aligned} \max \quad & 7x_1 + 6x_2 \\ \text{uz} \quad & 2x_1 + x_2 \le 3 \\ & x_1 + 4x_2 \le 4 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \quad . \end{aligned}$$



simplex.m

Uvođenjem dviju *slack* varijabli x_3 i x_4 prevodimo problem u standardni oblik

$$\begin{aligned} \min \quad & -7x_1 - 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ \text{uz} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1 + 4x_2 + x_4 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \ . \end{aligned}$$

Tablični zapis je

	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\mathbf{b} = \mathbf{y}_0$	
	2	1	1	0	3	
	1	4	0	1	4	
$\mathbf{c}^T$	–7	–6	0	0	0	$= \mathbf{r}^T$.

Budući da je ta tablica već u kanonskom obliku, vrijedi $r_i = c_i$ i možemo nastaviti bez intervencija. Najlakše je odabrati bazu $\mathbf{B}_0 = [\boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4] = \mathbf{I}_2$ kao početnu, a tada je početno bazično rješenje $\mathbf{x}_0 = [0\ 0\ 3\ 4]^T$.
Ciljna funkcija za to početno rješenje je =0.

Zadnji redak sadrži faktore redukcije. Ima negativnih pa znamo da trenutačno rješenje nije optimalno i zato nastavljamo. Odabiremo $q = 1$.
Slijedi $p = \text{argmin}_i\ \{y_{i0}/y_{i1}\ ;\ y_{i1} > 0\} = 1$. Pivot(1,1)...

Nova tablica je

	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\mathbf{b} = \mathbf{y}_0$
	1	1/2	1/2	0	3/2
	0	7/2	–1/2	1	5/2
$\mathbf{r}^T$	0	–5/2	7/2	0	21/2

Očitavamo rješenje $\mathbf{x}_1 = [3/2\ \ 0\ \ 0\ \ 5/2]^T$ u novoj bazi $\mathbf{B}_1 = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_4] = \mathbf{I}_2$.

Ciljna funkcija = –21/2 .

Sada je samo r_2 negativan pa odabiremo $q = 2$.

Slijedi $p = \text{argmin}_i\{y_{i0}/y_{i2}\ \ ;\ \ y_{i2} > 0\} = 2$.

Pivot(2,2)...

Nova tablica, za novu bazu $\mathbf{B}_2 = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2] = \mathbf{I}_2$, je

	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\mathbf{b} = \mathbf{y}_0$	
	1	0	4/7	–1/7	8/7	
	0	1	–1/7	2/7	5/7	
$\mathbf{r}^T$	0	0	22/7	5/7	86/7	.

Više nema negativnih faktora redukcije pa zaključujemo da je trenutačno rješenje optimalno. Dakle, rješenje standardiziranog problema je $\mathbf{x} = [8/7\ \ 5/7\ \ 0\ \ 0]$ i postiže se minimum = –86/7.

Rješenje polaznog problema je $x_1 = 8/7$ i $x_2 = 5/7$, a maksimum ciljne funkcije, uz poštivanje zadanih uvjeta, je = 86/7. ▲

Dvofazni simpleks algoritam

Simpleks algoritam zahtijeva poznavanje nekog početnog baričnog rješenja koje će poslužiti kao polazni ekstrem u skupu mogućih rješenja, a ono redovito nije lako uočljivo. Prva mogućnost je nasumično odabirati bazu, tj. *m* stupaca proširene matrice (ili tablice), prevoditi matricu u kanonski oblik i promatrati zadnji stupac. Ako su svi elementi nenegativni, imamo početno bazično rješenje. No, taj način odabira u najgorem slučaju zahtijeva (n povrh m) = $n!/[m!(n-m)!]$ pokušaja...

Neki problemi imaju očita rješenja. Na primjer, svi koji imaju uvjete oblika $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ nakon uvođenja *m slack* varijabli sigurno imaju rješenje $[\mathbf{0}^T\ \mathbf{b}^T]^T$, dakle prvih n varijabli (varijable izvornog problema) =0, a m dopunskih se postavi na vrijednosti iz vektora **b**.

Općeniti postupak je postaviti **umjetni problem** (*artifical problem*):

$$\begin{array}{ll} \min & y_1 + y_2 + \ldots + y_m \\ \text{uz uvjet} & [\mathbf{A}\ \ \mathbf{I}_m]\cdot[\mathbf{x}\ \ \mathbf{y}]^{\mathrm{T}} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\ \ ;\ \ \ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\quad . \end{array}$$

Umjetni problem je "imitacija" problema s ograničenjima oblika $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ i također ima jedno bazično rješenje jednako $[\mathbf{0}^{\mathrm{T}}\ \mathbf{b}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, gdje $\mathbf{0} \in \mathrm{R}^{n\times 1}$, a $\mathbf{b} \in \mathrm{R}^{m\times 1}$. To rješenje može poslužiti kao polazno za rješavanje umjetnog problema, a rješavanje izvornog problema temelji se na:

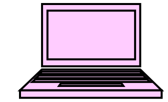
Propozicija: izvorni problem ima bazično rješenje ako i samo ako pridruženi umjetni problem ima optimalno rješenje za koje je umjetna ciljna funkcija jednaka nula. $\square$

Dakle, primijenimo simpleks algoritam na umjetni problem i ako dobijemo rješenje za koje je umjetna ciljna funkcija nula, ono je sigurno takvo da su sve $y_i = 0$. To znači da su bazične varijable među prvih n varijabli, a iz prethodnog postupka točno znamo kojih m od tih n su bazične pa možemo pokrenuti simpleks algoritam za izvorni problem. Prema tome, izvorni problem rješavamo u dvije faze:

1. konstruirati umjetni problem i riješiti ga simpleks algoritmom. Moramo dobiti optimalno rješenje, tj. umjetna ciljna funkcija mora biti =0.
2. bazičnih m od prvih n varijabli optimalnog rješenja umjetnog problema postaviti kao početno bazično rješenje izvornog problema i njime pokrenuti simpleks algoritam nad izvornim problemom.

Primjer 10:

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{uz} \quad & 4x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ & x_1 + 4x_2 \geq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \quad . \end{aligned}$$



p2simplex.m

Uvođenjem dviju *surplus* varijabli x_3 i x_4 problem prevodimo u oblik

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{uz} \quad & 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 12 \\ & x_1 + 4x_2 - x_4 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \quad . \end{aligned}$$

Bazično rješenje nije lako uočljivo pa primjenjujemo dvofazni simpleks algoritam.

1. Faza: uvodimo dvije umjetne varijable x_5 i x_6 i konstruiramo umjetni problem s ciljnom funkcijom $\min\{x_5 + x_6\}$. Tablica je

	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	$\boldsymbol{a}_6$	$\mathbf{b} = \mathbf{y}_0$
	4	2	–1	0	1	0	12
	1	4	0	–1	0	1	6
$\mathbf{c}^T$	0	0	0	0	1	1	0 .

Polazna baza je $\mathbf{B}_0 = [\boldsymbol{a}_5\ \boldsymbol{a}_6] = \mathbf{I}_2$. Pravilna kanonska tablica mora imati sve faktore redukcije (zadnji redak) na mjestima bazičnih varijabli jednake nula, a ova tablica ima jedinice. Pravilnost se postiže množenjem s lijeva matricom

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}_B^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad .$$

Rezultat je pravilna kanonska tablica:

	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	$\boldsymbol{a}_6$	$\mathbf{b} = \mathbf{y}_0$
	4	2	–1	0	1	0	12
	1	4	0	–1	0	1	6
$\mathbf{r}^T$	–5	–6	1	1	0	0	–18 .

Za početno rješenje $\mathbf{x}_0 = [0\ 0\ 0\ 0\ 12\ 6]^T$ umjetna ciljna funkcija =18. Odabiremo $q = 2$ i slijedi $p = 2$, što nakon stožernog razvoja oko (2,2) daje novu kanonsku tablicu:

	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	$\boldsymbol{a}_6$	$\mathbf{b} = \mathbf{y}_0$
	7/2	0	–1	1/2	1	–1/2	9
	1/4	1	0	–1/4	0	1/4	3/2
$\mathbf{r}^T$	–7/2	0	1	–1/2	0	3/2	–9 .

Nova baza je $\mathbf{B}_1 = [\boldsymbol{a}_5\ \boldsymbol{a}_2] = \mathbf{I}_2$, a za novo rješenje $\mathbf{x}_1 = [0\ \ 3/2\ \ 0\ \ 0\ \ 9\ \ 0]^T$ umjetna ciljna funkcija je =9.

Dalje odabiremo q = 1 i slijedi p =1, što nakon stožernog razvoja oko (1,1) daje sljedeću kanonsku tablicu:

	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	$\boldsymbol{a}_6$	$\mathbf{b} = \mathbf{y}_0$
	1	0	–2/7	1/7	2/7	–1/7	18/7
	0	1	1/14	–2/7	–1/14	2/7	6/7
$\mathbf{r}^{\mathrm{T}}$	0	0	0	0	1	1	0

.

Dobivena baza je $\mathbf{B}_2 = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2] = \mathbf{I}_2$. Faktori redukcije svih nebazičnih varijabli su nenegativni, što znači da je $\mathbf{x}_2 = [18/7\ \ 6/7\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}}$ optimalno rješenje umjetnog problema. Umjetne varijable su =0 i umjetna ciljna funkcija =0 iz čega slijedi da izvorni problem ima bazično rješenje koje čine varijable uz vektore baze $\mathbf{B}_2$, dakle varijable x_1 i x_2. Time smo završili prvu fazu.

2. Faza: od tablice kojom je završila prva faza odbacujemo stupce uvedene zbog umjetnih varijabli, a u zadnji redak upisujemo koeficijente izvorne ciljne funkcije. Rezultat je

	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\mathbf{b} = \mathbf{y}_0$
	1	0	–2/7	1/7	18/7
	0	1	1/14	–2/7	6/7
$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$	2	3	0	0	0

.

Iz prve faze znamo da je polazna baza za drugu fazu $\mathbf{B}_2 = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2] = \mathbf{I}_2$ i opet moramo ispraviti zadnji redak tako da u bazičnim stupcima u njemu budu nule.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{I}_m = \mathbf{I}_2 \quad , \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{c}_{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Pravilna kanonska tablica kojom započinjemo drugu fazu postupka je:

	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\mathbf{b} = \mathbf{y}_0$
	1	0	–2/7	1/7	18/7
	0	1	1/14	–2/7	6/7
$\mathbf{r}^T$	0	0	5/14	4/7	–54/7

.

Nema negativnih faktora redukcije, što znači da smo slučajno već početnim rješenjem postigli optimum. Rješenje proširenog izvornog problema je $\mathbf{x} = [18/7 \;\; 6/7 \;\; 0 \;\; 0]^T$ pa zaključujemo da je rješenje izvornog problema $\mathbf{x} = [18/7 \;\; 6/7]^T$, pri čemu je minimum izvorne ciljne funkcije 54/7. ▲

Primjer 11: dublja analiza

p2simplex.m

Tvrtka ima dvije tvornice i obje proizvode dva proizvoda (A i B). Dnevna proizvodnja i dnevni trošak proizvodnje su u tablici.

	proizvod A	proizvod B	trošak
tvornica I	10	6	8
tvornica II	8	12	6

Stigla je narudžba za 20 proizvoda A i 16 proizvoda B pa se postavlja pitanje koliko dana treba raditi pojedina tvornica da bi se proizvelo dovoljno oba proizvoda uz najmanje moguće troškove. Pritom je važno zadovoljiti narudžbu pa makar i po cijenu stvaranja viška, tj. zaliha pojedinog proizvoda.

Problem je: $\min \quad 8x_1 + 6x_2$

$$\begin{aligned} \text{uz} \quad & 10x_1 + 8x_2 \geq 20 \\ & 6x_1 + 12x_2 \geq 16 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \quad . \end{aligned}$$

Uvođenjem dviju *surplus* varijabli x_3 i x_4 prevodimo problem u oblik

$$\begin{aligned} \min \quad & 8x_1 + 6x_2 \\ \text{uz} \quad & 10x_1 + 8x_2 - x_3 = 20 \\ & 6x_1 + 12x_2 - x_4 = 16 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \quad . \end{aligned}$$

Bazično rješenje nije lako uočljivo pa primijenjujemo dvofazni simpleks algoritam.

1. Faza: uvodimo dvije umjetne varijable x_5 i x_6 i konstruiramo umjetni problem s ciljnom funkcijom $\min\{x_5 + x_6\}$. Tablica je

	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	$\boldsymbol{a}_6$	$\mathbf{b} = \mathbf{y}_0$
	10	8	–1	0	1	0	20
	6	12	0	–1	0	1	16
$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$	0	0	0	0	1	1	0

.

Polazna baza je $\mathbf{B}_0 = [\boldsymbol{a}_5\ \boldsymbol{a}_6] = \mathbf{I}_2$. Pravilna kanonska tablica mora imati sve faktore redukcije (zadnji redak) na mjestima baričnih varijabli jednake nula, a ova tablica ima jedinice. Pravilnost se postiže množenjem s lijeva matricom

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad .$$

Rezultat je pravilna kanonska tablica:

	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	$\boldsymbol{a}_6$	$\mathbf{b} = \mathbf{y}_0$
	10	8	–1	0	1	0	20
	6	12	0	–1	0	1	16
$\mathbf{r}^T$	–16	–20	1	1	0	0	–36 .

Za početno rješenje $\mathbf{x}_0 = [0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 20\ \ 16]^T$ umjetna ciljna funkcija =36.

Odabiremo $q = 2$ i slijedi $p = 2$, što nakon stožernog razvoja oko (2,2) daje novu kanonsku tablicu:

	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	$\boldsymbol{a}_6$	$\mathbf{b} = \mathbf{y}_0$
	6	0	–1	2/3	1	–2/3	28/3
	1/2	1	0	–1/12	0	1/12	4/3
$\mathbf{r}^T$	–6	0	1	–2/3	0	5/3	–28/3 .

Nova baza je $\mathbf{B}_1 = [\boldsymbol{a}_5\ \boldsymbol{a}_2] = \mathbf{I}_2$, a za novo rješenje $\mathbf{x}_1 = [0\ \ 4/3\ \ 0\ \ 0\ \ 28/3\ \ 0]^T$ umjetna ciljna funkcija je =28/3. Odabiremo $q = 1$ i $p = 1$ pa nakon stožernog razvoja oko (1,1) dobivamo:

	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	$\boldsymbol{a}_6$	$\mathbf{b} = \mathbf{y}_0$
	1	0	–1/6	1/9	1/6	–1/9	14/9
	0	1	1/12	–5/36	–1/12	5/36	5/9
$\mathbf{r}^T$	0	0	0	0	1	1	0

.

Baza je $\mathbf{B}_2 = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2] = \mathbf{I}_2$. Faktori redukcije svih nebazičnih varijabli su nenegativni, dakle $\mathbf{x}_2 = [14/9\ \ 5/9\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^T$ je optimalno rješenje umjetnog problema. Umjetne varijable su =0 i umjetna ciljna funkcija =0 iz čega slijedi da izvorni problem ima bazično rješenje koje čine varijable uz vektore baze $\mathbf{B}_2$, dakle varijable x_1 i x_2.

2. Faza: od tablice kojom je završila prva faza odbacujemo stupce uvedene zbog umjetnih varijabli, a u zadnji redak upisujemo koeficijente izvorne ciljne funkcije. Rezultat je

	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\mathbf{b} = \mathbf{y}_0$
	1	0	–1/6	1/9	14/9
	0	1	1/12	–5/36	5/9
$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$	8	6	0	0	0

.

Iz prve faze znamo da je polazna baza za drugu fazu $\mathbf{B}_2 = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2] = \mathbf{I}_2$ i opet moramo ispraviti zadnji redak tako da u bazičnim stupcima u njemu budu nule.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{I}_m = \mathbf{I}_2 \quad , \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{c}_{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Pravilna kanonska tablica kojom započinjemo drugu fazu postupka je

	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\mathbf{b} = \mathbf{y}_0$
	1	0	–1/6	1/9	14/9
	0	1	1/12	–5/36	5/9
$\mathbf{r}^T$	0	0	5/6	–1/18	–142/9 .

Jedini negativni faktor redukcije je u stupcu $\boldsymbol{a}_4$, a u njemu jedini pozitivni koefcijent u prvom redku, stoga je jedini mogući stožer element (1,4). Nakon stožernog razvoja oko (1,4) imamo

	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\mathbf{b} = \mathbf{y}_0$
	9	0	–3/2	1	14
	5/4	1	–1/8	0	5/2
$\mathbf{r}^T$	1/2	0	3/4	0	–15 .

Baza je $\mathbf{B}_3 = [\boldsymbol{a}_4\ \boldsymbol{a}_2] = \mathbf{I}_2$. Faktori redukcije svih nebazičnih varijabli su nenegativni, dakle $\mathbf{x}_3 = [0\ \ 5/2\ \ 0\ \ 14]^T$ je optimalno rješenje (proširenog) polaznog problema.

Tvornica II bi trebala raditi 5/2 dana, dok tvornica I uopće ne bi trebala sudjelovati u tom poslu.
Najmanji mogući trošak proizvodnje je 15, proizvelo bi se $5/2 \cdot 8 = 20$ proizvoda A, dakle točno koliko je i naručeno, ali i $5/2 \cdot 12 = 30$ proizvoda B, odnosno 14 previše.

Rezultat u kojem sudjeluju *surplus* ili *slack* varijable znači da izvorne varijable nisu dovoljne za postizanje najboljeg mogućeg rješenja (minimuma ciljne funkcije) uz istodobno zadovoljenje svih uvjeta postavljenih u proširenom sustavu uvjeta (ti su uvjeti stroži zbog jednakosti, umjesto nejednakosti), nego je potrebno “povećati dimenzije” prostora u kojem se traži rješenje.

Varijabla x_4 ne postoji u polaznom problemu u kojem minimiziranje troška nužno vodi do stvaranja viška proizvoda B, ali se pojavljuje u višim dimenzijama gdje je točno rješenje moguće. Matematički gledano, njezina je uloga uravnotežiti drugu jednadžbu sustava uvjeta. ▲

Pokušajte za vježbu riješiti primjere s početka priče.

Rješenje za primjer 1:

$x_{12} = 20$, $x_{14} = 12$, $x_{21} = 13$, $x_{23} = 25$, $x_{31} = 7$, $x_{34} = 23$, sve ostale = 0, najmanji mogući trošak = 855.

Ilustrativno rješenje za primjer 2:

Neka je S = D = 3 i vremena izrade pojedinih dijelova u donjoj tablici.

t_{ij}	D1	D2	D3
S1	2	1	3
S2	3	2	1
S3	1	3	2

Rješenje se može naći i napamet jer za svaki dio postoji stroj s vremenom =1:

$x_{12} = 1$, $x_{23} = 1$, $x_{31} = 1$, ostale =0, najbrže za 3 jedinice vremena.