Actividad 2
Péndulo doble

Carlos Muñoz
Departemento De Físca
Univesidad De Sonora

13 de Septiembre del 2018

1 Introduction

En físca y matemáticas, en el área de sistemas dinámicos, el péndulo doble es un péndulo con otro péndulo atado al final del primero y, es un sistema físico simple que exhibe un rico comportamiento dinámico con una fuerte sensibilidad a las condiciones iniciales. El movimiento del péndulo doble está regido por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas y es caótico.

2 Análisis e interpretación

Algunas variables deben ser consideradas en el péndulo doble. Las dos extremidades pueden ser de igual o diferente longitud y masas y la manera en que se mueven puede ser representada en tres dimensiones o restringida a un plano vertical al movimiento. En el siguiente análisis las extremidades de los dos péndulos son tomadas como si fueran iguales, es dicir, tienen la misma masa y longitud entre ellos y el movimiento está restringido a dos dimensiones.

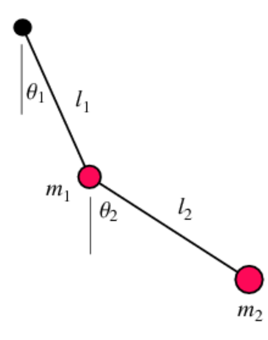

Figure 1: Péndulo doble

Para el análisis utilizaremos la figura 1 como guia.

Entonces para el primer segmento del péndulo tenemos las componentes cartesianas

$$x_1 = l_1 sen(\theta_1) \tag{1}$$

$$y_1 = -l_1 cos(\theta_1) \tag{2}$$

Y para el segundo segmento entonces sería

$$x_2 = l_1 sen(\theta_2) + l_2 sen(\theta_2) \tag{3}$$

$$y_2 = -l_1 cos(\theta_1) - l_2 cos(\theta_2) \tag{4}$$

La energía potencial del sistema está dada por

$$V = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \tag{5}$$

$$= -(m_1 + m_2) g l_1 cos\theta_1 \tag{6}$$

Y la energía cinética por

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \tag{7}$$

$$= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 cos(\theta_1 - \theta_2)] \tag{8}$$

La lagrangiana entonces es

L = Energia cinética - energía potencial

$$L = \frac{1}{2}(m_1+m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \theta_2^2 + \dot{m}_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1+m_2) g l_1 cos(\theta_1) + m_2 g l_2 cos(\theta_2) \tag{9}$$

También para θ_1,

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -l_1 g(m_1 + m_2) sen\theta_1 - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 sen(\theta_1 - \theta_2) \tag{10}$$

Entonces la suma para θ_1 ecuación diferencial de Euler-Lagrange

$$(m_1+m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 sen(\theta_1 - \theta_2) + g(m_1 + m_2) sen\theta_1 = 0 \tag{11}$$

Similar para θ_2

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 sen(\theta 1 - \theta_2) - l_2 m_2 g sen\theta_2 \tag{12}$$

Entonces para θ_2 la ecuación diferencial de Euler-Lagrange es

$$m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 sen(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g sen\theta_2 = 0 \tag{13}$$

Las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden acopladas pueden ser resueltas numéricamente para $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ como es ilustrado enseguida para una particular selección de parametros y condiciones iniciales.

Imprimeindo las soluciones resultantes rápidamente revela un movimiento complicado Las ecuaciones del movimiento pueden ser escritas en un formilismo Hamiltoniano. Computando el momento generalizado da

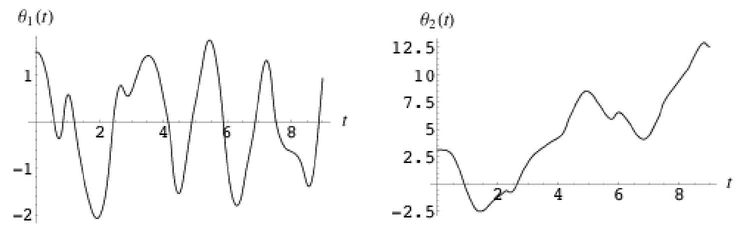

Figure 2:

$$p_{\theta_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta_1}} = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 cos(\theta_1 - \theta_2) \tag{14}$$

$$p_{\theta_2} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta_2}} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 cos(\theta_1 - \theta_2) \tag{15}$$

3 Conclusión

El péndulo doble a bajas energías se comporta de manera similar a lo que ocurre con un péndulo sencillo, por otra parte a altas energías se comporta como un objeto en revolución. El problema real del péndulo doble radica cuando se aplica una fuerza tal que se perturba el sitema regularmente esto da pie a un comportamiento caótico pues el simple hecho de cambiar un poco las condiciones iniciales modifica el sistema de gran manera. Para entender mejor el péndulo doble puede visitarse las siguientes páginas:

Video:https://www.youtube.com/watch?v=TmlpDO3LcOs

Simulador:https://www.myphysicslab.com/pendulum/double-pendulum-en.html

4 Bibliogrfía

Wolfram

http://scienceworld.wolfram.com/physics/DoublePendulum.html

Wikipedia

https://en.wikipedia.org/wiki/Double$_pendulum$

5 Apéndice

¿Cuál es tu primera impresión de LaTeX?

-Extremadamente útil, bonito y no me perece complicado de usar, solo se ocupa práctica y lo que no se sepa hacer se busca en internet y ya.

Comenta la sobre la funcionalidad de LaTeX para escribir ecuaciones.

-Al principio iba un poco lento pero fui mejorando mientas mas lo usaba. Me parece genial que pueda acomodar bien las ecucaciones automáticamente.

¿Qué se te dificultó más en el uso de LaTeX?

-Realmente nada, a lo mucho insertar las imágenes.

¿Qué cosas podrías hacer en Word y no en LaTeX?

-En word podía mover las imágnes a mi gusto solo con el ratón.

¿Qué cosas podrías hacer en LaTeX y no en Word?

-Las ecuaciones se volvieron muy sencillas con LaTeX.

¿Podrías diferenciar la forma de trabajar en Fortran y en LaTeX? ¿Qué diferencias hay?¿Qué similitudes encuentras?

-Principalmente LaTeX es muy explícito con los errores que tienes y hasta aveces te dice como corregirlos.

¿Qué cambiarías en esta actividad para mejorarla?

-Almenos yo tomé esta práctica para aprender a usar LaTeX, quizá un tema donde se puedan expresar más cosas.