Actividad 3
Método de Newton-Raphson
y
Método de Bisección

Carlos Muñoz De La Toba

10 de Octubre del 2018

1 Introduction

En este articulo se hablará de dos métodos numéricos que pueden ser utilizados para calcular las racies de una función, por su puesto, cada una con sus limitaciones de las cuales hablaremos en sus respectivas secciones.

1.1 Raices

Podemos hablar de la raíz de una funcion $f(x)$ como un punto o valor en su domino que al evaluarlo en la función este resultará $f(x) = 0$.

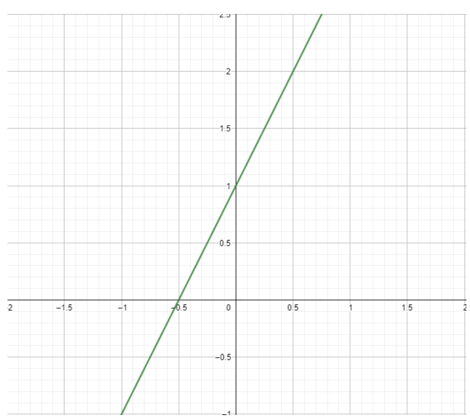

Figure 1: $y = 2x + 1$

Esto tambipen dependerá del grado de la función, por ejemplo, una función lineal o de grado 1 tendrá una raíz; una función de grado 2 o cuadrática tendrá dos raices pudieran ser ambas números reales o complejos conjugados, por otro lado, una de grado 3 o cúbica tendrá una real y dos complejas etc. Usualmente encontrar estas raices puede resultar complicado para ésto existen métodos para el cálculo de ellas. Ejemplos:

$$f(x) = 2x + 1$$

La cual es una ecuación lineal,en este caso es fácil resolverla dando la notación

$$y = 2x + 1$$

Al dar valor x=$-\frac{1}{2}$ y evaluar nos podemos dar cuenta de que $f(x) = 0$ entonces $\frac{1}{2}$ es la raíz.

2 Método de bisección

Este método consiste en encontrar la raíz de una función $f(x)$ continua en un determinado intervalo $[a, b]$ donde se supone que se encuentra la raíz.

2.1 Procedimiento

El método puede es utilizado para resolver numéricamente determinada ecuación $f(x) = 0$ para la variable $x \in \Re$ en el intervalo $[a, b]$ donde la función evaluada en el punto a $(f(a))$ y la función evaluada en b $(f(b))$ tienen signo opuesto. De aquí se procede a encontrar un punto medio de la recta que se forma con los puntos a y b al cual llamaremos c y definiremos de la siguiente forma.

$$c = \frac{a + b}{2}$$

Evaluar la función en el nuevo punto c obtenido pudiendo ser las opciones:
Si $f(c) > 0$ entonces la siguiente interacción será entre $f(c)$ y la f negativa.
Si $f(c) < 0$ entoces la siguiente interacción será entre $f(c)$ y la f positiva.
Si $f(c) = 0$ entonces es raíz.
Para los primeros dos casos hay que seguir haciendo iteraciones hasta que se obtenga un resultado $f(c) = 0$ o un número cercano pues no siempre es posible dar un número fijo.
A continuacion se presenta el código de un programa de bisección en fortran para determinada función.

2.2 Código

A continuación se presenta un código del método de bisección para Fortran

```
    Program Bisection

  Implicit none

  Real :: a,b,c,error,f

  error = 1.0e-06

  write(*,*)"Escribe dos numeros entre los que se encuentra la raiz "

10 read(*,*) a,b
15 if (f(a)*f(b) .lt. 0) then
c=(a+b)/2.0
else
write(*,*)"Intenta con otros valores"
goto 10
end if
if (f(a)*f(c) .lt. 0) then
b=c
else
a=c
end if
if (abs(b-a) .gt. error) goto 15


write(*,*)"la raíz es",c
end program Bisection

real function f(x)
  implicit none
  real :: x
  f =x**3-x-2
  end function
```

3 Newton-Raphson

El método de Newton- Raphson se usa para aproximar raices dando sucesivamente mejores aproximaciones.
La idea del método empieza con dar una aproximación a la raíz x_0 de una función $f(x)$ razonablemente cerca de la raíz real, de ahí hacemos una recta tangente la cual obtenemos primero sacando la pendiente evaluando $f'(x)$ en x_0, entonces podemos obtener la intersección de la recta tangente con el eje x el cual nos dará un nuevo valor al que llamaremos x_1 donde repetiremos el ejercicio cuantas veces se desee aproximando cada vez más la raíz.

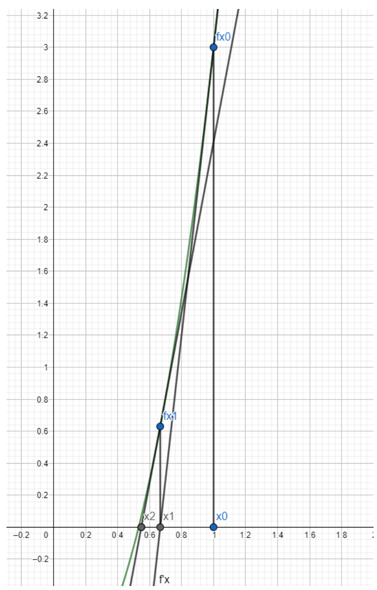

Figure 2: Vista geométrica de Método de Newton

En la figura 2 nos podemos dar una idea de como se vería geométricamente el método para una función cualquiera

3.1 Teorema de Convergencia

3.1.1 Teorema de convergencia local

Sea $f \in \mathrm{C}^2(a,b).Sip\in [a.b]$, $f(p) \neq 0$ f'(p)$\neq 0$ entonces existe un $r > 0$ tal que si $|x_0 - p| < r$ entonces la sucesión x_n con $\setminus \in \mathbb{N}$ verifica que:
$|x_n - p| < r$ y para todo n y x_n tiende a p cuando n tiende a infinito.
Si además $f\in$ $\mathrm{C}^3(a,b)$ entonces la convergencia es cuadrática.

3.1.2 Teorema de convergencia global

Sea $f \in$ C^2[a,b]$verificando:$

1. $f(a)\ f(b) > 0$
2. $f'(x) \neq 0 \forall x \in [a,b]$
3. $f''(x)\ f''(y) \geq \forall x, y \in [a,b]$
4. $max\ \{\frac{|f(a)|}{|f'(a)|}, \frac{|f(b)|}{|f'(b)|}\}$ $\leq$b - a

Entonces existe un único $s \in [a,b]$ tal que $f(s) = 0$ por lo que la sucesión converge a s.

3.2 Error

El error relativo entre dos aproximaciones sucesivas lo podemos denotar como:

$$E = \frac{|X_{k+1} - X_k|}{|X_{k+1}|}$$

Donde X_k es la función evaluada en el punto y X_{k+1} es la derivada de la funcion evaluada en el punto

3.3 Código

A continuación se presenta un código para el método de Newton para Fortran

```
Program N

  Implicit none

  real ::x0,x1,error,f,fp


  Write(*,*) "Escribe un valor de x inicial"

  read(*,*) x0

    do
     x1=x0-(f(x0)/fp(x0))
     error = 100*abs( (x1-x0)/x1)
     x0=x1

     write(*,*) "x0 = ", x1, " % error = ", error

     if (error < 0.0000001) exit

  end do
```

```
end program N

!Aquí se declara la función
real function f(x)
  implicit none
  real :: x
  f = x**2-2.0
end function f

!Aquí se declara la derivada de la función
real function fp(x)
  implicit none
  real :: x
  fp = 2*x
end function fp
```