Karol Josafat Cisneros Suárez

Ejercicios de Probabilidad

Ejercicio 1.1

1.- Representación por números reales. Indica el poder asignar números reales a los grados de plausibilidad, y así ser comparables.

2.- Correspondencia cualitativa al sentido común. El razonamiento debe ser similar al razonamiento humano sensato, donde, si la plausibilidad de "A implica B" se mantiene constante, y la de A aumenta, la plausibilidad de B debe aumentar como reflejo de la nueva información.

3.- Consistencia. Se divide en 3 sentidos: primero, el estructural indica que si la conclusión es alcanzable por varios caminos, todos deben dar el mismo resultado; segundo, lógica, que indica que el razonamiento debe hacer uso de toda la información relevante; tercero, consistencia bajo cambio de representación, donde, como el nombre lo indica, 2 problemas equivalentes pero con distinta representación deben tener la misma respuesta.

Ejercicio 1.2

El enfoque frecuentista define a la probabilidad como el límite de la frecuencia relativa de un evento tras repeticiones infinitas.

El enfoque Bayesiano responde a grados de creencia personales/individuales, dependiendo del sujeto y su juicio.

El enfoque Jaynes/Cox cuenta con un enfoque objetivo-racional, definiendo a la probabilidad como una herramienta de inferencia lógica, más allá de algo subjetivo. Su ventaja es la consistencia en la asignación de probabilidad entre sujetos con la misma cantidad de información.

Ejercicio 1.3

Se dice que es una extensión de la lógica pues va más allá de resultados booleanos [0,1], es decir, llena el espacio entre el 0 y el 1 para asignar una mayor gama de grados de plausibilidad.

Cuando $P(A)=1$ ó $P(A)=0$, es equivalente a la lógica booleana en cuanto a que:

$P(A)=1$, indica que A es cierta, tautología

$P(A)=0$, indica que A es falsa, contradicción.

Ejercicio 1.4

Se escribe $P(A|I)$ y no $P(A)$ pues I representa la información de fondo o contexto. No puede hablarse de un solo evento A sin considerar supuestos, observaciones previas y contexto.

Problema 1.5

Se tienen inicialmente 2 eventos: H (hipótesis), D (datos) I (información contextual)

- $P(H|D,I)$: indica la probabilidad de la hipótesis dado los datos observados (y la información contextual).

- $P(D|H,I)$: indica la probabilidad de que los datos sean ciertos dado que la hipótesis es cierta.
- $P(H|I)$: indica la probabilidad de la hipótesis independientemente a los datos, o antes de verlos.

- $P(D|I)$: indica la probabilidad general o total de los datos, sin saber nada sobre la hipótesis.

Problema 1.6

Según Jaynes, las reglas del producto y suma no son convenciones elegidas al azar, sino que son consecuencias necesarias de la consistencia racional, los cuales surgen de los Axiomas de Cox.

~ La regla del producto se deriva del desiderata II, el cual relaciona el sentido común con que la plausibilidad de A y B depende de qué tan plausibles es B dado C y qué tan plausible es A dado B y C. También se deriva del desiderata III (consistencia.

~ La regla de la suma se deriva específicamente del desiderata II y del desiderata III, al explicar cómo se relaciona $\mathbb{P}(A|C)$ y $\mathbb{P}(\neg A|C)$, tal que

$$\mathbb{P}(A|C) + \mathbb{P}(A^c|C) = 1$$

Parte II : Probabilidad Básica

Ejercicio 2.1

a) $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6}$ ← Pares, ← # total de resultados $= \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{\{4, 6\}}{\{1,2,3,4,5,6\}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

b) No, pues si $A \perp B$ debería cumplirse que:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Pero

$$\frac{1}{3} \neq \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ A no es independiente a B.

Ejercicio 2.2

a) $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \mathbb{P}(R_1) \cdot \mathbb{P}(R_2 | R_1)$

donde R_1, R_2 son ~~eltra~~ los eventos de obtener una roja en la primer y segunda posición, respectivamente.

- $\mathbb{P}(R_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

- $P(R_2 | R_1) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(R_1)\,\mathbb{P}(R_2|R_1) = \frac{2}{15}$

b) Quedan un total de 9 bolas en total, de las cuales 4 son rojas, por lo tanto:

$$\mathbb{P}(R_2 \mid A_1) = \frac{4}{9}$$

Ejercicio 2.3

Dado E el evento de estar enfermo, y P el evento de dar positivo, queremos:

$$\mathbb{P}(E \mid P)$$

Por Bayes:

$$\mathbb{P}(E \mid P) = \frac{\mathbb{P}(P \mid E)\,\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(P)}$$

Usando probabilidad total en el denominador:

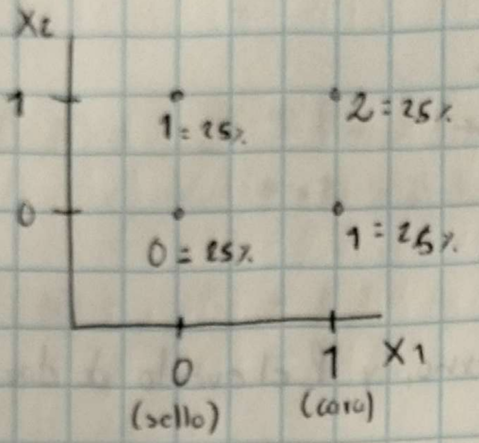
$$= \frac{\mathbb{P}(P \mid E)\,\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(P \mid E)\,\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(P \mid NE)\,\mathbb{P}(NE)}$$

Sustituyo por probabilidades de hipótesis

$$= \frac{(.95)(.02)}{(.95)(.02) + (.10)(.98)} \approx .1624$$

Ejercicio 8.4

a)



	# caras		
	0	1	2
Proba	.25%	.5%	.25%

b)

$$E(x) = .25(0) + .5(1) + .25(2)$$
$$= .5 + .5 = 1$$
$$E(x) = 1$$

c) $Var(x) = E(x^2) - (E(x))^2$

- $E(x^2) = 0^2(.25) + 1^2(.5) + 4(.25)$
  $= .5 + 1 = 1.5$

- $Var(x) = 1.5 - 1^2 = \underline{.5}$

Ejercicio 2.5

a) $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{.2}{.5} = \underline{.4}$

b) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

$= .4 + .5 - .2$

$= .9 - .2 = \underline{.7}$

c) Para ser independientes, debe cumplirse:

$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \Rightarrow .2 = (.4)(.5)$ ✓

ó

$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \Rightarrow .4 = .4$

$\Rightarrow$

Sí, $A \perp B$

Ejercicio 2.6

a) $E(3x+2)$, por linearidad de la esperanza

$= 3E(x) + E(2) = 3(5) + 2 = \underline{17}$

b) $Var(3x+2) = Var(3x)$

$= 9\,Var(x) = 9(4) = \underline{36}$

c) $Var(x+y) = Var(x) + Var(y) + 2cov(x,y)$

si $x \perp y \Rightarrow cov(x,y) = 0$

$\Rightarrow Var(x+y) = Var(x) + Var(y) = 4 + 9 = \underline{13}$

Escaneado con CamScanner

Ejercicio 2.7

$$Var(x) = E((x-\mu)^2)$$

$$= E[x^2 - 2\mu x + \mu^2]$$

Por linearidad de la esperanza

$$= E(x^2) - 2\mu E(x) + E(\mu^2)$$

$$= E(x^2) - 2\mu^2 + \mu^2$$

$$= E(x^2) - \mu^2 = E(x^2) - (E(x))^2$$

Parte III Álgebra Booleana

Ejercicio 3.1

unión de B con el universo = universo

a) $A + AB = A(1+B)$
$= A(1) = A$

b) $A(A+B) = AA + AB$
$= A + AB$
$= A$ por inciso anterior

c) $A + \bar{A}B$, por inciso a), $A = A + AB$

$\Rightarrow A + \bar{A}B = A + AB + \bar{A}B$
$= (A+\bar{A})(A+B)$
$= 1(A+B) = \underline{A+B}$

Ejercicio 3.2

a) $\overline{A+B+C} = \overline{(A+B)+C} = (\overline{A+B})\bar{C}$ aplicando Ley de Morgan

$= (\bar{A}\bar{B})\bar{C} = \bar{A}\bar{B}\bar{C}$

b) $\overline{ABC} = \overline{(AB)C} = \overline{AB} + \bar{C} = (\bar{A}+\bar{B}) + \bar{C}$

$= \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$

Problema 3.3

a) $P(A \cup B) \rightarrow P(A + B)$

b) $P(A \cap B^c) \rightarrow P(A\bar{B})$

c) $P(\bar{A} + B) \rightarrow P(A^c \cup B)$

d) $P(A\bar{B}) \rightarrow P(A \cap B^c)$