Szymon Pilawka
Karol Krzekotowski

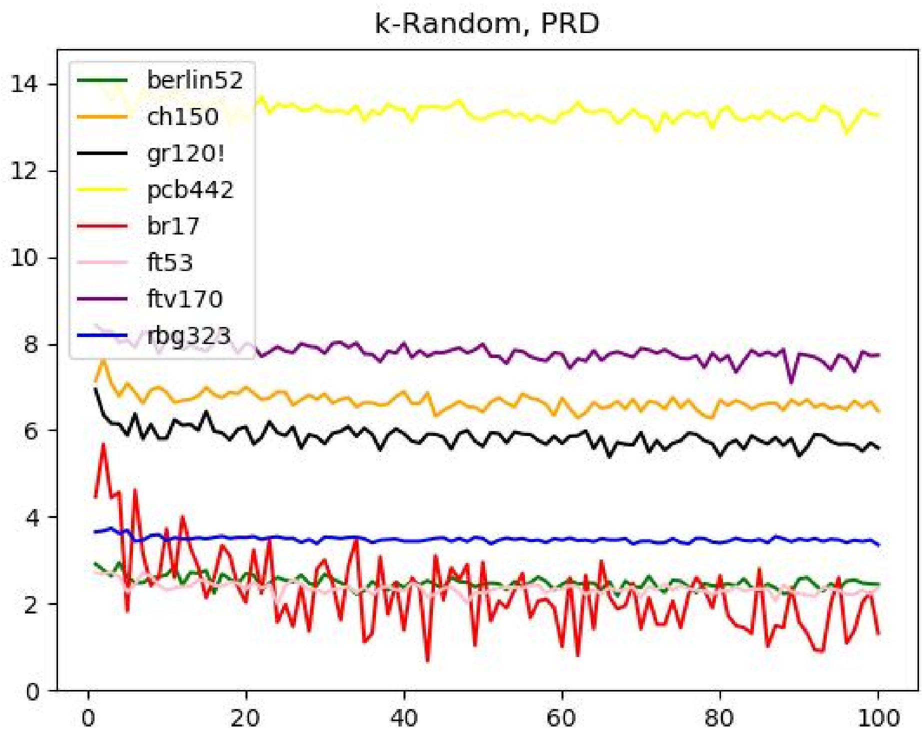
Określenie Problemu

Znalezienie optymalnej ścieżki, **Travelling Salesman Problem**, problem komiwojażera. Dla dowolnego grafu istnieje droga o minimalnym koszcie jednak znalezienie takiej drogi stanowi wyzwanie. Badanie n! rozwiązań jest zadaniem nieosiągalnym nawet dla nowoczesnych komputerów dla wysokich n. Dlatego naszym celem staje się znalezienie rozwiązania możliwie bliskiego optimum znacznie mniejszym kosztem.

Test 1 – k w krandom

Celem testu jest zbadanie wpływu ilości liczby prób na poprawę wyniku algorytmu **krandom**, tzn. jak bardzo większa ilość prób poprawia wynik. Ze swojej natury algorytm jest bardzo nieprzewidywalny, raz może nam się bardzo poszczęścić, i otrzymamy rozwiązanie optymalne (przy takim szczęściu polecam zagranie w totka), z drugiej strony możemy losować rozwiązania bardzo dalekie od optimum. Losowość ma zagwarantować nam, iż średnia rozwiązań krandom będzie bliska faktycznej średniej długości możliwych ścieżek. Dlatego w rzeczywistym przypadku możemy spodziewać się rozwiązania lepszego od średniej ze wszystkich możliwych ścieżek.
Dzięki swojej prostocie i szybkości wykonanie wielu prób nie jest czasochłonne, jednak jak bardzo zwiększona ilość próbek daje nam poprawę wyników?

Testy wykonane dla macierzy z TSPLIB. Dla każdego k mamy uśrednione 10 prób.



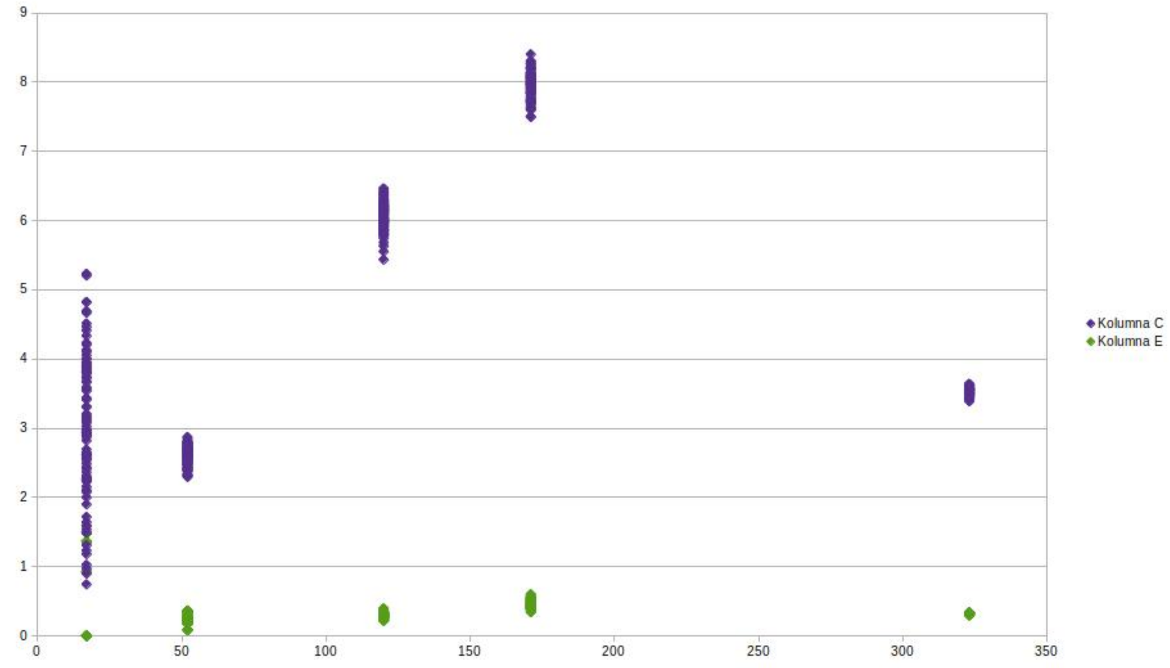
Czytając wykres, poza oczywistym rozproszeniem wyników widać, że średnie wyniki polepszają się ze wzrostem k ale bardzo nieznacznie. Największą różnicę widać dla małego grafu br17, gdzie zwiększona liczba iteracji znacząco poprawia wynik. Przez mały rozmiar mamy większą szansę na trafienie na rozwiązanie optymalne.

Jako że czas działania krandom rośnie asymptotycznie liniowo, optymalne k nie powinno być zbyt duże, dobrym kandydatem byłoby k z zakresu 10-20, dzięki większej liczbie powtórzeń mamy pewność że nie trafimy na najgorsze rozwiązanie (tzn zawsze istnieje szansa wylosowania najgorszego rozwiązania k razy, jednak w rzeczywistości jest to nie prawdopodobne)

Test 2 – krandom vs NN

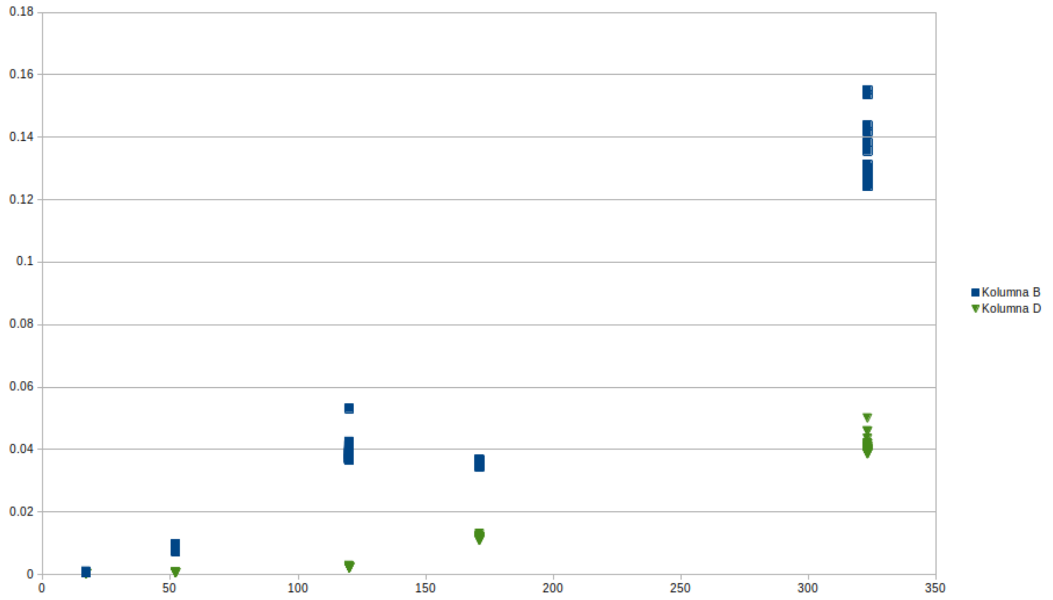
W teście chcemy porównać dwie proste w implementacji oraz szybko działające heurystyki. Zachłanny algorytm NN na pierwszy rzut może wydawać się skuteczny, zawsze wybieramy minimum przy wyborze. W rzeczywistości wczesne, impulsywne wybory mogą nie opłacać się na dłuższą metę, mimo to otrzymujemy akceptowalne rozwiązanie niewielkim kosztem.

Testy PRD dla grafów z TSPLIB (fioletowy – krandom), wykonujemy 10 iteracji krandom dla każdego przypadku, NN losuje punkt początkowy



Dla pięciu losowo wybranych grafów widzimy o wiele lepsze sprawowanie się algorytmu NN. Widzimy również efekt losowości krandom – bardzo duży rozrzut rozwiązań, tym bardziej dla grafu rozmiaru 17.

Zbadamy wymagania czasowe konkretnych algorytmów. Dla przypomnienia, wykonujemy po 10 iteracji dla krandom. Większa ilość iteracji gwarantuje mniejszą szansę na trafienie na rozwiązanie całkowicie nieoptymalne, wybierając 1 iteracje równie dobrze można by zagrać w rosyjską ruletkę. (krandom - niebieski)



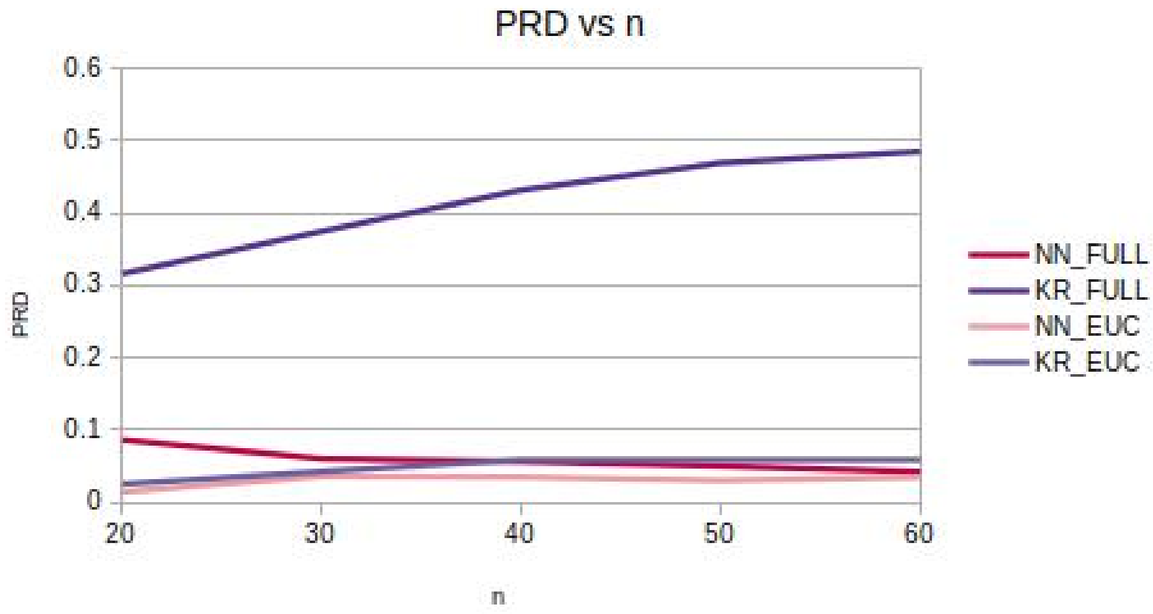
Przez konieczność wykonania wielu iteracji algorytm krandom wypada wolniej od NN. Pojedyncza instancja byłaby oczywiście szybsza.
W teście widzimy dużą przewagę algorytmu NN nad krandom. Zachłanność gwarantuje większą regularność wyników oraz dążenie do rozwiązania optymalnego. Natomiast krandom daje większą różnorodność wyników, co może przydać się w algorytmie optymalizacyjnym 2-Opt.

Test 3 – inicjalizacja 2-Opt

Algorytm optymalizujący 2-Opt wyróżnia się na tle pozostałych heurystyk z listy. Jako wejście dostajemy ścieżkę, wygenerowaną w dowolny sposób. Celem jest optymalizacja tej ścieżki do momentu braku możliwych ulepszeń. Zatrzymujemy się w pewnym minimum lokalnym, które w dużym stopniu będzie zależne od ustawienia początkowego. Inicjalizację możemy przeprowadzić na wiele sposobów, w naszym przypadku posłużymy się zaimplementowanymi heurystykami krandom oraz NN do generowania ścieżki wejściowej.

Jak wiemy z poprzednich eksperymentów, algorytm NN średnio znajduje lepsze rozwiązanie niż krandom dla rozsądnych k. Jednak w żadnym stopniu nie gwarantuje to tego, że optymalizując lepsze rozwiązanie otrzymamy lepszy wynik. Możliwe że zaczynając z gorszego położenia osiągniemy lepsze minimum lokalne.

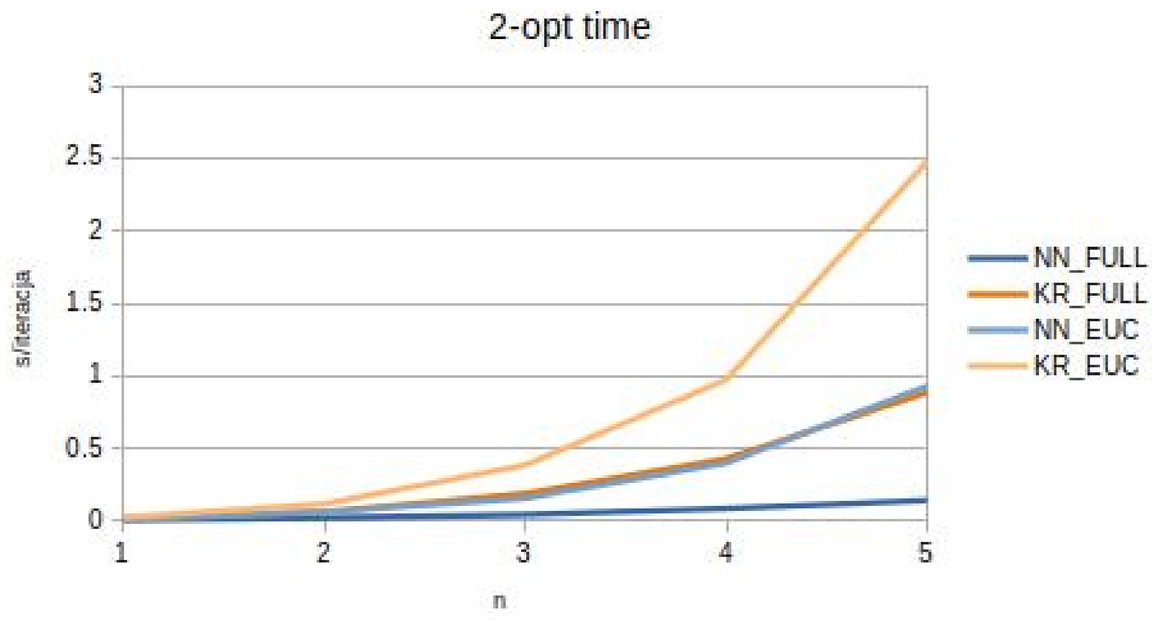
Celem eksperymentu jest porównanie średnich wyników optymalizacji ścieżek pochodzących z algorytmów NN oraz krandom dla grafów TSP oraz ATSP. Dla każdego n – rozmiaru generuję 10 losowych macierzy oraz poddaje je próbom – NN dla każdego wierzchołka (uśrednione) oraz krandom z 50 powtórzeniami.



Dla problemu symetrycznego (euklidesowego) oba algorytmy są asymptotycznie równe, z algorytmem NN średnio dającym widocznie lepsze rozwiązania. Dla problemu asymetrycznego, asymptotyka różni się, NN dąży do poprawy z kolejnymi n natomiast krandom powoli rośnie.

Z danych można jednoznacznie stwierdzić, iż w średnim przypadku połączenie 2-Opt oraz NN jest zdecydowanie skuteczniejsze od używania 2-Opt i krandom. W przypadku TSP, najlepsze wyniki przy wielu iteracjach wypadały podobnie. Jednak dla ATSP pre-processing za pomocą krandom dawał znacznie odbiegające od optimum wyniki. Możemy to wytłumaczyć większym stopniem komplikacji problemu asymetrycznego, oraz z tego powodu większą liczbą ekstremów lokalnych.

Poniżej zamieszczam porównanie czasowe:

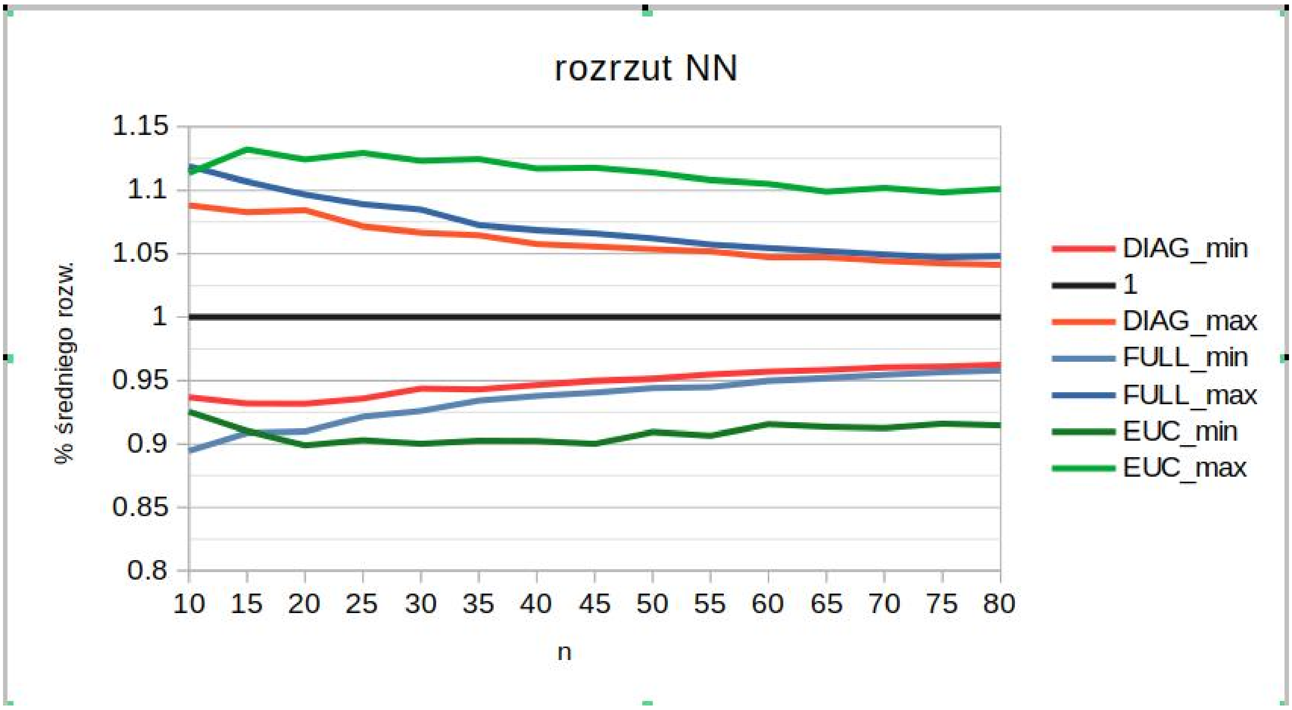


Algorytmy mają podobną asymptotykę, jednak łatwo zauważyć, iż z powodu otrzymania mniej optymalnego rozwiązania na start, 2-Opt+krandom musi mocno się napracować aby dotrzeć do minimum lokalnego, przez co większe wymagania czasowe. Widać również, że ATSP sprawia większe kłopoty dla krandom w porównaniu do TSP.

Test 4 – wierzchołek początkowy w NN

W teście badamy wpływ wyboru wierzchołka początkowego na otrzymywane wyniki w algorytmie Nearest Neighbour. Przez swoją zachłanność różne punkty startowe w algorytmie mogą dawać zupełnie różne wyniki. Ulepszeniem algorytmu jest badanie generowanej ścieżki dla każdego punktu grafu (kNN), jednak jest to problem spowalniający algorytm asymptotycznie do ilości punktów. Zamierzamy sprawdzić. jak bardzo najmniej korzystny przypadek odbiega od średniej. Nie możemy wykluczyć, że nawet najgorszy, lecz szybko znaleziony przypadek daje nam wynik satysfakcjonujący.

W eksperymencie sprawdzamy po 100 losowo wygenerowanych macierzy z każdego typu (symetryczne – Euklidesowe, Przekątniowe oraz asymetryczne) dla każdego n z zakresu od 10 do 80. Wyniki uśredniam dla każdego n.



Współczynnik prezentuje stosunek rozwiązania najlepszego do średniego dla danej iteracji (grafu).

Dla każdego rodzaju grafu widać, że wraz ze wzrostem rozmiaru dobieranie punktu początkowego ma coraz mniejsze znaczenie. Macierz euklidesowa odbiega od asymetrycznej oraz przekątniowej.

Jeśli zależy nam na jak najszybszym działaniu, oraz jesteśmy skłonni przyjąć odstępstwo od rozwiązania optymalnego (dla danej instancji i metody) rzędu 10%, wtedy wybór wierzchołka początkowego w NN nie ma znaczenia. Jednak w praktyce metoda jest na tyle prosta i szybka, że warto przeznaczyć liniowo więcej czasu na znalezienie lepszego rozwiązania.
Pojedyncza iteracja ma sens dla bardzo dużych grafów, nie dość że współczynnik liniowy będzie większy, to dodatkowo zyskujemy mniejsze rozproszenie od wyniku średniego.

Test 5 – 2-Opt: optymistyczne przypadki

W teście stawiamy hipotezę: Przy pewnej, niewielkiej ilości powtórzeń inicjacja 2-Opt krandom a NN daje takie samo najlepsze rozwiązanie w TSP.

Z testu trzeciego wiemy, że średnio inicjacja NN dawała znacząco lepsze wyniki. Jednak w tym teście chcemy sprawdzić, czy dla małej liczby powtórzeń (m=10) testy zwrócą podobne najlepsze rozwiązania.

Test składa się z 20 macierzy TSP dla każdego rozmiaru: 30,40,50. dla każdej macierzy wykonujemy 10 optymalizacji 2-Opt dla każdego algorytmu.

Tezę: Algorytmy dają takie samo rozwiązanie dla małej liczby powtórzeń, zweryfikujemy za pomocą testu Wilcoxona.

Test daje nam p-wartość równą 0.391, co oznacza że nie możemy jednoznacznie stwierdzić, czy oba algorytmy dają takie same najlepsze rozwiązania. Analizując wyniki dla konkretnych macierzy widać, że zarówno NN jak i krandom mają swoje lepsze i gorsze występy.