zespolone

Karolina Paradysz

February 2024

1 Introduction

Aksjomat determinacji (AD) jest podstawową zasadą teorii mnogości, która potwierdza istnienie zwycięskich strategii w pewnych nieskończonych grach dwuosobowych z doskonałymi informacjami. Oto formalne stwierdzenie aksjomatu determinacji dla gier na liczbach rzeczywistych:

Niech A będzie zbiorem liczb rzeczywistych. Gra dla dwóch graczy $G(A)$ jest zdefiniowana w następujący sposób:

- Gracze I i II na zmianę grają elementami zbioru A.
- Każdy gracz musi w swojej turze wybrać element zbioru A.
- Gra toczy się w nieskończoność, generując nieskończoną sekwencję $x_0, x_1, x_2, \ldots$ elementów A.

Określony jest warunek wygrywający W, który jest podzbiorem zbioru wszystkich nieskończonych ciągów elementów ze zbioru A.

Aksjomat determinacji (AD) stwierdza, że dla każdego zbioru A liczb rzeczywistych i każdego warunku wygranej W związanego z grą $G(A)$, albo gracz I, albo gracz II ma zwycięską strategię dla warunku W.

Formalnie aksjomat determinacji można sformułować następująco:

Dla każdego zbioru A liczb rzeczywistych i każdego warunku wygranej W powiązanego z grą $G(A)$ istnieje funkcja $f : A^{\mathbb{N}} \to A$ taka, że dla każdy nieskończony ciąg $x_0, x_1, x_2, \ldots$ w A, jeśli $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ spełnia warunki W, to $f(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ jest ruchem wygrywającym dla gracza I i jeśli $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ nie spełnia warunków W, wtedy $f(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ jest ruchem wygrywającym dla gracza II.

To stwierdzenie oddaje istotę aksjomatu determinacji dla gier na liczbach rzeczywistych. Zapewnia to, że określone typy nieskończonych gier przyniosą określone wyniki, niezależnie od strategii zastosowanych przez graczy.

Aksjomat determinacji (AD) można sformułować dla zbiorów liczb zespolonych, tak samo jak dla zbiorów liczb rzeczywistych. Pojęcie wyznaczalności nie ogranicza się wyłącznie do liczb rzeczywistych. Zdefiniujmy AD dla zbiorów liczb zespolonych:

1. Struktura gry: Rozważmy zbiór A liczb zespolonych. Podobnie jak w przypadku liczb rzeczywistych, możemy zdefiniować grę dwuosobową na zbiorach liczb zespolonych. Gracze I i II na zmianę rozgrywają elementy A, wybierając liczby zespolone ze zbioru A. Gra toczy się w nieskończoność, generując nieskończoną sekwencję $z_0, z_1, z_2, ...$ liczb zespolonych ze zbioru A.

2. Warunek zwycięstwa: Tak jak poprzednio, z każdą rozgrywką związany jest warunek wygranej, oznaczony jako W. W jest podzbiorem zbioru wszystkich nieskończonych ciągów liczb zespolonych z A. Warunek wygranej W określa kryteria decydujące o tym, czy grę wygra Gracz I, czy Gracz II.

3. Aksjomat wyznaczalności liczb zespolonych (AD): Aksjomat wyznaczalności liczb zespolonych stwierdza, że dla każdego zbioru A liczb zespolonych i każdego warunku wygrywającego WW związanego z grą $G(A)$, Gracz I lub Gracz II ma zwycięską strategię dla warunku wygrywającego W. Formalnie dla każdego zbioru A liczb zespolonych i każdego warunku wygrywającego WW związanego z grą $G(A)$ istnieje funkcja $f : A^{\mathbb{N}} \to A$ taka, że:

   - Jeżeli nieskończony ciąg $(z_0, z_1, z_2...)$ spełnia W, to $f(z_0, z_1, z_2...)$ jest zwycięskim posunięciem dla Gracza I.
   - Jeżeli nieskończony ciąg $(z_0, z_1, z_2...)$ nie spełnia WW, to $f(z_0, z_1, z_2...)$ jest zwycięskim posunięciem dla Gracza II.

4. Implikacje: Podobnie jak w przypadku liczb rzeczywistych, aksjomat wyznaczalności liczb zespolonych gwarantuje, że określone typy nieskończonych gier na liczbach zespolonych mają określone wyniki. Stanowi podstawową zasadę teorii mnogości i ma implikacje dla różnych dziedzin matematyki, w tym analizy złożonej, topologii i opisowej teorii mnogości.

Rozważmy prosty przykład ilustrujący, jak spostrzeżenia wynikające z aksjomatu wyznaczalności (AD) dla zbiorów liczb zespolonych mogą przyczynić się do głębszego zrozumienia struktur matematycznych, w ramach których działają funkcje holomorficzne.

Przykład: Załóżmy, że mamy zbiór A liczb zespolonych zdefiniowany jako okrąg jednostkowy na płaszczyźnie zespolonej, tj. $A = \langle z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \rangle$.

Rozważyć można tu grę dla dwóch graczy $G(A)$ rozgrywaną na okręgu jednostkowym:

- Gracze I i II na zmianę wybierają liczby zespolone z okręgu jednostkowego A.
- Gra toczy się w nieskończoność, generując nieskończoną sekwencję $z_0, z_1, z_2, ...$ liczb zespolonych z A.

Zdefiniujmy warunek wygrywający W w następujący sposób:

Jeśli iloczyn liczb zespolonych ciągu $z_0, z_1, z_2, ...$ jest równy 1, wówczas Gracz I wygrywa; w przeciwnym razie Gracz II wygrywa.

W tym przykładzie możemy zastosować zasady AD dla liczb zespolonych do analizy wyniku gry. AD zapewnia, że dla każdego zbioru A liczb zespolonych i każdego warunku wygranej WW związanego z grą $G(A)$, albo Gracz I, albo Gracz II ma zwycięską strategię.

Jak to się ma do funkcji holomorficznych?

- Zrozumienie właściwości strukturalnych: Badając strukturę zbiorów liczb zespolonych i powiązanych z nimi gier, uzyskujemy wgląd w podstawowe struktury matematyczne, w których działają funkcje holomorficzne. W tym przykładzie rozważamy strukturę okręgu jednostkowego i interakcję graczy w tej strukturze.

- Odkrywanie dynamiki: Dynamika gry, na przykład sposób, w jaki ruchy graczy wchodzą w interakcję i wpływają na wynik, może odzwierciedlać pewne właściwości funkcji holomorficznych. Chociaż sama gra może nie obejmować bezpośrednio funkcji holomorficznych, zrozumienie jej dynamiki może zapewnić intuicję dotyczącą zachowania funkcji holomorficznych w przypadku pewnych przekształceń lub transformacji.

- Analiza strategii: AD implikuje istnienie zwycięskiej strategii dla jednego z graczy. Jest to analogiczne do idei strategicznego podejmowania decyzji w matematyce, w tym strategii stosowanych przez funkcje holomorficzne w określonych warunkach lub transformacjach. Przyznaję, że użyłam niezbyt ścisłego sformułowania. Funkcje holomorficzne dostosowują swoje zachowanie w oparciu o zastosowane do nich warunki lub transformacje. Na przykład mogą wykazywać różne właściwości zbieżności poddawane różnym rozwinięciom w szeregi lub mogą zachowywać się inaczej po przekształceniu za pomocą odwzorowań konforemnych.

Przyznaję, że przykład ten może wydawać się nieco abstrakcyjny. Wydaje mi się, że podkreśla jednak, w jaki sposób spostrzeżenia wynikające z aksjomatu determinacji zbioru liczb zespolonych mogą przyczynić się do głębszego zrozumienia struktur matematycznych i dynamiki, w ramach których działają funkcje holomorficzne.

Próbowałam zagadnienie aksjomatu determinacji w powiązaniu z analizą zespoloną zbadać głębiej i odpowiedzieć sobie na pytanie, w jaki sposób ta dynamika gry rozgrywanej na okręgu jednostkowym i właściwości funkcji holomorficznych są ze sobą powiązane. Wydaje mi się, że istotnych jest tutaj kilka elementów:

1. Okrąg jednostkowy na płaszczyźnie zespolonej jest podstawową strukturą matematyczną. Jego właściwości geometryczne, takie jak symetria i okresowość, są głęboko powiązane z zachowaniem funkcji holomorficznych. Funkcje holomorficzne zdefiniowane na okręgu jednostkowym często wykazują okresowość, symetrię i inne właściwości, które odzwierciedlają podstawową strukturę okręgu.

2. Dynamika gry na okręgu jednostkowym polega na interakcji liczb zespolonych podczas wykonywania ruchów przez graczy. Interakcje te mogą odzwierciedlać pewne właściwości funkcji holomorficznych. Rozważmy warunek wygranej, w którym iloczyn liczb zespolonych w ciągu jest równy 1. Warunek ten odzwierciedla ideę równowagi, która jest częstym tematem w dynamice funkcji holomorficznych.

3. Aksjomat determinacji zapewnia istnienie zwycięskiej strategii dla jednego z graczy. W kontekście funkcji holomorficznych może to być analogiczne do identyfikowania optymalnych ścieżek lub zachowań, które maksymalizują pewne właściwości funkcji. Na przykład gracze mogą strategicznie wybierać liczby zespolone, aby albo utrzymać równowagę (iloczyn równy 1), albo zakłócić równowagę na swoją korzyść, odzwierciedlając strategiczne podejmowanie decyzji nieodłącznie związane z zachowaniem funkcji holomorficznych.

4. Weźmy pod uwagę dynamikę gry, w której gracze wybierają liczby zespolone z okręgu jednostkowego. Sekwencja liczb zespolonych generowana podczas rozgrywki może być analogiczna do iteracji funkcji holomorficznej. Tak jak dynamika funkcji holomorficznych może wykazywać zbieżność, rozbieżność, okresowość i inne złożone zachowania, tak dynamika gry na okręgu jednostkowym może wykazywać podobne wzorce w oparciu o strategiczne wybory graczy.

Przykład: Iteracja funkcji wykładniczej: Załóżmy, że rozważamy funkcję wykładniczą $f(z) = e^z$ zdefiniowaną na okręgu jednostkowym. Iteracje tej funkcji wykazują zachowanie okresowe, a punkty zbiegają się do określonych obszarów płaszczyzny zespolonej.

Strategiczne wybory dokonywane przez graczy w grze mogą odzwierciedlać wzorce zaobserwowane w iteracji funkcji wykładniczej. Na przykład gracze mogą próbować poprowadzić sekwencję w stronę obszarów, w których funkcja jest zbieżna lub rozbieżna.