1 Zad 1

Dla każdej z poniższych funkcji znajdź najmniejszą liczbę k taką, że $f(n) = O(n^k)$

1. $f(n) = 13n^2 + 4n - 73$
2. $f(n) = (n^2 + 1)(2n^4 + 3n - 8)$
3. $f(n) = (n^3 + 3n - 1)^4$
4. $f(n) = \sqrt{(n + 1)}$

2 Zad 2

Sprawdź, czy każda z poniższych równości jest prawdziwa czy fałszywa. Uzasadnij.

1. $2^{n+1} = O(2^n)$
2. $(n + 1)^2 = O(n^2)$
3. $2^{2n} = O(2^n)$
4. $(200n)^2 = O(n^2)$

3 Zad 3

Dla każdej relacji z poprzedniego zadania sprawdź kótre własności spełnia.

1 Zad 1

Definiujemy funkcje $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ w następujący sposób
x^3 jeśli $x \geq 1$
x jeśli $0 \leq x < 1$
$-x^3$ jeśli $x < 0$

1. oblicz $f(3)$, $f(1/3)$,$f(-1/3)$, $f(-3)$
2. naszkicuj wykres
3. znajdź przeciwdziedzinę

2 Zad 2

Niech $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, a $T = \{a, b, c, d\}$. Dla każdego z poniższych pytań podaj przykład, jeśli odpowiedź brzmi TAK; podaj krößkie wyjaśnienie jeśli odpowiedź brzmi NIE.

- czy istnieją funkcje różnowartościowe z S w T?
- czy istnieją funkcje różnowartościowe z T w S?
- czy istnieją funkcje przekształcające S na T?
- czy istnieją funkcje przekształcające T na S?
- czy istnieją przekształcenia wzajemnie jednoznaczne z S na T?

3 Zad 3

Niech $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i weźmy następujące funkcje ze zb. S w zb. S: $f(n) = n$, $g(n) = 6 - n$, $h(n) = max\{3, n\}$,$i(n) = min\{1, n - 1\}$

- zapisz każdą z tych funkcji jako ziór par uporządkowanych
- naszkicuj wykres każdej z tych funkcji
- które z tych funkcji są jednocześnie różnowartościowe i na?

4 Zad 4

Weźmy następujące funkcje ze zbioru $\mathbb{N}$: $f(n) = n$, $g(n) = 3n$,$h(n) = n + (-1)^n$,$i(n) = min\{n, 100\}$, $j(n) = max\{0, n - 5\}$

1. które z tych funkcji są różnowartościowev
2. które z tych funkcji przekształćają zbiór $\mathbb{N}$ na zbiór $\mathbb{N}$

5 Zad 5

Niech $\Sigma = a, b, c$ i niech Σ^* będzie zbiorem wszystkich słów ω utworzonych za pomocą liter ze zbioru Σ. Określmy $L(\omega)$ =długość(ω) dla wszystkich $\omega \in \Sigma^*$

1. oblicz $L(\omega)$ dla słów $\omega_1 = cab$,$\omega_2 = ababac$ oraz $\omega_3 = \lambda$
2. czy L jest funkcją różnowartościową? Uzasadnij.
3. funkcja L przekształca Σ^* w zbiorze $\mathbb{N}$. Czy L przekształca Σ^* na zbiór $\mathbb{N}$
4. znajdź wszytskie słowa ω takie, że $L(\omega) = 2$

6 Zad 6

Znajdź funckje odwrotne do następujących funkcji przekształcających $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$

1. $f(x) = 2x + 3$
2. $g(x) = x^3 - 2$
3. $h(x) = (x - 2)^3$
4. $k(x) = \sqrt[3]{x} + 7$

1 Zad 1

Dla następujących relacji w zbiorze $S = \{0, 1, 2, 3\}$ określ, które z własnośći: zwrotność(Z), przeciwzwrotność (PZ), symetryczność(S), antysymetryczność(AS), przechodniość(P), spełniają te relacje:

przykład $(m, n) \in R_1$, jeśli $m + n = 3$
Pary spełniające relacje : (0,3),(3,0),(2,1),(1,2)

Zwrotność $\forall_{x \in S} xRx$ - NIE JEST ZWRTOTNA
(0,0),(1,1),(2,2),(3,3) - aby relacja była zwrotna wszystkie pary odpowiadające relacji z samym sobą powinny wystąpić w zbiorze par spełniających relację

Przeciwrotność $\nexists_{x \in S} xRx$ - JEST PRZECIWZWROTNA
(0,0),(1,1),(2,2),(3,3) - żaden nie powinien wystąpić w zbiorze par spełniających relację

Symetryczność $\forall_{x,y \in S} xRy \implies yRx$ - JEST SYMETRYCZNA
Nie istnieje taka para dla której implikacja zwracałaby wartość fałszywą

Antysymetryczność $\forall_{x,y \in S} xRy \wedge yRx \implies x = y$- NIE JEST ANTYSYMETRYCZNA
n.p. (0,3),(3,0)
$0 + 3 = 3 \wedge 3 + 0 = 3 \implies 0 \neq 3$ - implikacja zwraca fałsz

Przechodność $\forall_{x,y,z \in S} xRy \wedge yRz \implies xRz$- NIE JEST PRZECHODNIA
n.p. (0,3),(3,0)
$0 + 3 = 3 \wedge 3 + 0 = 3 \implies 0 + 0 = 3$ - implikacja zwraca fałsz

- $(m, n) \in R_2$, jeśli $m - n$ jest liczbą parzystą
- $(m, n) \in R_3$, jeśli $m \leq n$
- $(m, n) \in R_4$, jeśli $m + n \leq 4$
- $(m, n) \in R_5$, jeśli $max\{m, n\} = 3$

2 Zad 2

Niech $A = \{0, 1, 2\}$. Każde z poniższych stwierdzeń określa relację σ w zbiroze A w ten sposób, że $(m, n) \in \sigma$, jeśli to stwierdzenie jest prawdziwe dla m i n. Zapisz każðą relację jako zbiór par uporządkowanych.

- $m \leq n$
- $m < n$
- $m = n$
- $mn = 0$
- $mn = m$
- $m + n \in A$
- $m^2 + n^2 = 2$
- $m^2 + n^2 = 3$
- $m = max\{n, 1\}$

3 Zad 3

Które z powyższych relacji są zwrotne a które symetryczne?

4 Zad 4

W zbiorze $\mathbb{N}$ określone są następujące relacje dwuargumentowe:

1. Zapisz relację dwuargumentową R_1 określną wzorem $m + n = 5$ jako zbiór par iporządkowanych
2. Zrób to samo dla relacji R_2 określonej wzorem $max\{m, n\} = 2$
3. Relacja dwuargumentowa R_3 określona wzorem $min\{m, n\} = 2$ zawiera nieskończenie wiele par uporządkowanych. Wypisz 5 z nich.

5 Zad 5

Dla każdej relacji z poprzedniego zadania sprawdź które własności spełnia.

1 Zad 1

W wyborach na stanowisko burmistrza startuje 8 kandydatów partii A i 5 kandydatów partii B.

1. Na ile sposobów może zostać wybrany burmistrz?
2. Jeśli żaden z kandydatów nie uzyska większości i dobędzie się druga tura, na ile sposobów może odbyć się druga tura gdy każdy z kandydatów należy do innej partii?

2 Zad 2

W pewnej fabryce produkowane są 4 modele samochodów, każdy z nich może być wykonany w 12 kolorach, z 3 pojemnościami silnika do wyboru i dwoma rodzajami skrzyni biegów.

- Ile różnych odmian samochodów produkowanych jest w tej fabryce?
- Ile różnych niebieskich odmian samochodów produkowanych jest w tej fabryce?

3 Zad 3

W pewnym fastfoodzie można zamówić hamburgera z 9-cioma rodzajami dodatków (hamburger może zawierać lub nie zawierać każdy z dodatków). Ile różnch rodzajóœ hamburgerów można kupić w tym miejscu?

4 Zad 4

1. Ile istnieje permutacji ośmiu liter a, c, f, g, i, t, w, x?
2. Ile permutacji z poprzedniego punktu zaczyna się na literę t?
3. Ile permutacji z poprzedniego punktu kończy się na c?

5 Zad 5

Na ile sposobów można przejść w prostokątnym układzie współżędnych z punktu (2,1) do punktu (7,4) przemieszczając się krokami o jednostkowej długości w górę lub w prawo?

6 Zad 6

Na ile sposobów litery $a, b, c, d, e, e, e, e, e$ mogą być ułożne tak, by dwie litery e nie sąsiadowały ze sobą?

7 Zad 7

1. Na ile sposobów można ułożyć litery występujące w wyrazie $VISITING$
2. Na ile sposobów można ułożyć litery występujące w wyrazie $VISITING$ tak aby 3 litery I znajdowały się obok siebie.

8 Zad 8

Ile bajtów zawiera...

1. dokładnie dwie jedynki.
2. dokładnie cztery jedynki.
3. dokładnie sześć jedynek.
4. co najmniej sześć jedynek?

9 Zad 9

1. Danych jest 15 punktów na płaszczyźnie, przy czym żadne 3 spośród nich nie eżą na jednej prostej. Ile prostych wyznaczają te punkty?
2. Danych jest 25 punktów w przestrzebu 3-wymiarowej, przy czym żadne 4 spośród nich nie eżą na jednej płaszczyźnie. Ile płaszczyzn wyznaczają te punkty? Ile czworościanów?

10 Zad 10

Na ile sposobów można rozdzielić 10 identycznych bonóœ pomiędzy 5 pracowników, jeżeli...

1. nie ma żadnych ograniczeń co do sposobu rozdziału?
2. każdy pracownik dostaje przynajmniej 1 bon?
3. pracownik o najdłuższym stażu dostabue conajmniej 2 bony?

11 Zad 11

Losowo wybieramy 4-literowe słowa nad alfabetami $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$

1. jakie jest prawdopodobieństwo że w wylosowanym słowie nie będzie powtarzających liter?
2. jakie jest prawdopodobieństwo że w wylosowanym słowie nie będzie samogłosek?
3. jakie jest prawdopodobieństwo że wylosowane słowo zaczyna się od samogłoski?

1 Zad 0

Udowonij, że $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} \ \forall_{n\epsilon\mathbb{P}}$

Teza: $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Warunek początkowy: $S(1) : 1 + 2 + ... + n = 1 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Hipoteza indukcyjna: $S(k) : 1 + 2 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}$

Krok indukcyjny: należy dowieść $S(k+1) : 1+2+...+k+k+1 = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k^2+3k+2)}{2}$
$1 + 2 + ... + k + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{k^2+k}{2} + \frac{2k+2}{2} = \frac{(k^2+3k+2)}{2}$

2 Zad 1

Udowonij, że $\forall_{n\epsilon\mathbb{P}} \ \Sigma_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Teza: $\forall_{n\epsilon\mathbb{P}} \ \Sigma_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Warunek początkowy: $S(1) : 1^2 = \frac{1(1+1)(2*1+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$

Hipoteza indukcyjna: $S(k) : 1^2 + 2^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

Krok indukcyjny: należy dowieść $S(k+1) : 1^2 + 2^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1)}{6}$
$1^2 + 2^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$
$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1)}{6}$
$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$
$\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

3 Zad 2

Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{P}$ suma n początkowych liczb nieparzystych wynosi n^2.

Teza: $\forall_{n\epsilon\mathbb{P}} \ \Sigma_{i=1}^{n}(2i - 1) = n^2$

Warunek początkowy: $S(1) : 2 * 1 - 1 = 1^2$

Hipoteza indukcyjna: $S(k) : 1 + 3 + 5 + ... + (2 * k - 1) = k^2$

Krok indukcyjny: należy dowieść $S(k+1) : 1 + 3 + 5 + ... + (2 * k - 1) + (2 * (k+1) - 1) = (k+1)^2$

4 Zad 3

Udowodnij, że $4 + 10 + 16 + ... + (6n - 2) = n(3n + 1)$ dla każdego $n \in \mathbb{P}$

Teza: $\forall_{n\epsilon\mathbb{P}} \ 4 + 10 + 16 + ... + (6n - 2) = n(3n + 1)$

5 Zad 4

Udowodnij, że $3 + 11 + ... + (8n - 5) = 4n^2 - n$ dla każdego $n \in \mathbb{P}$

Teza: $\forall_{n\in\mathbb{P}}\ 3 + 11 + ... + (8n - 5) = 4n^2 - n$

6 Zad 5

Udowodnij, że $1 * 2 + 2 * 3 + ... + n(n + 1) = \frac{1}{3}n(n + 1_{)}n + 2$ dla każdego $n \in \mathbb{P}$

Teza: $\forall_{n\in\mathbb{P}}\ 1 * 2 + 2 * 3 + ... + n(n + 1) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2)$

7 Zad 6

Udowodnij, że $\frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ dla każdego $n \in \mathbb{P}$

Teza: $\forall_{n\in\mathbb{P}}\ \frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$