MATEMATYKA DLA STUDENTÓW POLITECHNIK

Marian Gewert
Zbigniew Skoczylas

# Analiza matematyczna 1

Przykłady i zadania

Wydanie dziesiąte

GiS

MATEMATYKA DLA STUDENTÓW POLITECHNIK

## Semestr pierwszy

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 1. Przykłady i zadania

Oprac. Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 1. Kolokwia i egzaminy

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 1. Laboratorium komputerowe

Teresa Jurlewicz, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa 1. Definicje, twierdzenia, wzory

Teresa Jurlewicz, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa 1. Przykłady i zadania

Oprac. Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa 1. Kolokwia i egzaminy

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa 1. Laboratorium komputerowe

## Semestr drugi

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 2. Definicje, twierdzenia, wzory

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 2. Przykłady i zadania

Oprac. Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 2. Kolokwia i egzaminy

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 2. Laboratorium komputerowe

Teresa Jurlewicz, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa 2. Definicje, twierdzenia, wzory

Teresa Jurlewicz, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa 2. Przykłady i zadania

Teresa Jurlewicz, Algebra liniowa 2. Kolokwia i egzaminy

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa 2. Laboratorium komputerowe

ISBN 83-85941-83-5

9 788385 941835

www.gis.wroc.pl

GiS

# ANALIZA
# MATEMATYCZNA 1

Marian Gewert Zbigniew Skoczylas

# ANALIZA MATEMATYCZNA 1

## Przykłady i zadania

Wydanie dziesiąte zmienione

Oficyna Wydawnicza **GiS**
Wrocław 2001

*Projekt okładki:*
IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej



*Printed in Poland.*

Skład skryptu wykonano w systemie LaTeX.

ISBN 83–85941–83–5

Wydanie X zmienione, Wrocław 2001
Oficyna Wydawnicza **GiS**, s.c.
Druk: TINTA Sp. z o.o.

# Spis treści

# Wstęp

Niniejszy zbiór zadań jest drugą częścią zestawu podręczników do **Analizy matematycznej 1**. Pierwszą częścią tego zestawu jest podręcznik pt. *„Definicje, twierdzenia, wzory"*, zawierający materiał teoretyczny omawiany na wykładach. Z kolei jego trzecia część, pt. *„Kolokwia i egzaminy"*, zawiera zadania z kolokwiów i egzaminów przeprowadzonych w poprzednich latach w Politechnice Wrocławskiej. Podręczniki te są przeznaczone głównie dla studentów politechnik. Mogą z nich korzystać także studenci akademii ekonomicznych i rolniczych oraz niektórych wydziałów uniwersytetów.

Przykłady i zadania z niniejszego zbioru obejmują rachunek różniczkowy i całkowy funkcji jednej zmiennej wraz z zastosowaniami. Ilustrują one materiał omawiany na wykładach. Zbiór ten zawiera przykładowe zadania z pełnymi rozwiązaniami oraz podobne zadania przeznaczone do samodzielnej pracy, przy czym początkowe ćwiczenia są z reguły najprostsze. Do wszystkich zadań podane są odpowiedzi lub wskazówki. Nierozwiązane zadania tworzą tzw. listę zadań*. Lista ta powinna być przerabiana przez studentów samodzielnie lub na ćwiczeniach. Aby to ułatwić podzielono ją na 14 części, przeznaczonych do realizacji w kolejnych tygodniach semestru. Przykłady i zadania z tego podręcznika są podobnych typów oraz mają zbliżony stopień trudności do zadań, które studenci zazwyczaj rozwiązują na kolokwiach i egzaminach. Zadania oznaczone gwiazdką są nieobowiązkowe i przeznaczono je dla studentów, którzy chcą rozszerzyć swoje wiadomości z analizy matematycznej. Podobne zadania pojawiają się zwykle na egzaminach na ocenę celującą.

---

*Lista zadań, program kursu oraz zasady jego zaliczania, zalecane w Politechnice Wrocławskiej, są umieszczone na stronach internetowych Instytutu Matematyki pod adresem
`www.im.pwr.wroc.pl`

Zachęcamy studentów do korzystania z programów komputerowych do obliczeń symbolicznych. Przy pomocy tych programów można sprawdzać poprawność wykonanych obliczeń granic ciągów i funkcji, pochodnych oraz całek. Umożliwiają one także prezentowanie wykresów funkcji. Do najczęściej stosowanych programów komputerowych do obliczeń symbolicznych można zaliczyć Derive, Matlab, Maple, Mathematica. Ogólne zasady korzystania z tych programów będą omówione w przygotowywanej czwartej części podręcznika pt. *„Laboratorium komputerowe"*.

Obecne wydanie zbioru zadań uzupełniono o dalsze przykłady i zadania oraz o kolejne rysunki i wykresy. Poprawiono także zauważone błędy i usterki. Ponadto dołączono repetytorium zawierające przykłady i zadania o zbiorach i funkcjach liczbowych. Są to zagadnienia znane studentom w większości ze szkoły średniej. Zalecamy samodzielne rozwiązanie tych zadań przed rozpoczęciem zajęć.

Dziękujemy Koleżankom i Kolegom z Instytutu Matematyki Politechniki Wrocławskiej oraz naszym Studentom za uwagi o poprzednich wydaniach książki. Uprzejmie prosimy Czytelników o przesyłanie nam uwag o zbiorze zadań oraz informacji o dostrzeżonych błędach i usterkach.

*Marian Gewert*
Instytut Matematyki
Politechnika Wrocławska
gewert@im.pwr.wroc.pl

*Zbigniew Skoczylas*
Instytut Matematyki
Politechnika Wrocławska
z.skoczylas@im.pwr.wroc.pl

# 0

# ZBIORY I FUNKCJE LICZBOWE

## Repetytorium

**Zbiór liczb rzeczywistych (0.1)[#]. Zbiory ograniczone (0.2). Kresy zbiorów (0.3). Funkcje - podstawowe określenia (0.4). Funkcje okresowe, parzyste i nieparzyste (0.5). Funkcje ograniczone (0.6). Funkcje monotoniczne (0.7). Złożenia funkcji (0.8). Funkcje odwrotne (0.9). Funkcje cyklometryczne (0.10). Funkcje elementarne (0.11). Niektóre funkcje nieelementarne (0.12).**

## Przykłady

### • Przykład 0.1

Zbadać, czy podane zbiory są ograniczone z dołu, są ograniczone z góry, są ograniczone:

a) $A = \{\sin p : p \in \boldsymbol{Z}\}$; b) $B = \left\{\frac{n}{m} : n, m \in \boldsymbol{N}\right\}$;

c) $C = \left\{x \in \boldsymbol{R} : x^7 - 15x^2 - 100 = 0\right\}$; d) $D = \{(-3)^n : n \in \boldsymbol{N}\}$.

**Rozwiązanie**

a) Zbiór $A$ jest ograniczony, gdyż dla każdego $p \in \boldsymbol{Z}$ spełnione są nierówności

$$-1 \leqslant \sin p \leqslant 1.$$

b) Zbiór $B$ jest ograniczony z dołu, gdyż dla dowolnych $m, n \in \boldsymbol{N}$ spełniona jest nierówność $0 \leqslant \frac{n}{m}$. Zbiór $B$ nie jest jednak ograniczony z góry. Gdyby bowiem założyć, że zbiór ten jest ograniczony z góry, to mielibyśmy $\frac{n}{m} \leqslant M$ dla pewnego $M > 0$ i dla dowolnych $m, n \in \boldsymbol{N}$. Przyjmując $n = E(M) + 1$ oraz $m = 1$ otrzymamy

$$\frac{n}{m} = E(M) + 1 > M,$$

---

# Liczby w nawiasach oznaczają numery paragrafów pierwszej części podręcznika.

co daje sprzeczność z przyjętym założeniem.

c) Zauważmy najpierw, że zbiór pierwiastków rzeczywistych dowolnego (niezerowego) wielomianu jest skończony. Zauważmy ponadto, że każdy wielomian stopnia nieparzystego ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty. Zatem $C$, jako niepusty zbiór skończony, jest ograniczony.

d) Pokażemy najpierw, że zbiór $D$ nie jest ograniczony z góry. Niech $M$ oznacza dowolną liczbę dodatnią. Wówczas dla liczb parzystych $n$ spełniających warunek $n > \log_3 M$ mamy $(-3)^n > M$. Stąd wynika, że zbiór ten nie jest ograniczony z góry. Przechodzimy do uzasadnienia nieograniczoności zbioru $D$ z dołu. Niech $M$ oznacza teraz dowolną liczbę ujemną. Wówczas dla liczb nieparzystych $n$ spełniających warunek $n > \log_3(-M)$ mamy $(-3)^n < M$, co oznacza, że zbiór $D$ nie jest ograniczony z dołu.

## • Przykład 0.2

Znaleźć kresy dolne i górne podanych zbiorów. Czy w tych zbiorach są elementy najmniejsze i największe?

a) $A = (0,1) \cap \boldsymbol{Q}$; b) $B = \left\{ \frac{n}{2n+1} : n \in \boldsymbol{N} \right\}$; c) $C = \left\{ \frac{1}{x} : x \in (0,1] \right\}$.

**Rozwiązanie**

a) Zbiór $A$ składa się z wszystkich liczb wymiernych z przedziału $(0,1)$. Pokażemy, korzystając z definicji, że $\inf A = 0$. Mamy zatem uzasadnić, że każdy element zbioru $A$ jest nieujemny oraz, że dla dowolnej liczby dodatniej $\varepsilon$ można dobrać taki element $x_0$ ze zbioru $A$, dla którego prawdziwa jest nierówność $x_0 < \varepsilon$. Warunek pierwszy jest oczywisty. Przechodzimy zatem do uzasadnienia warunku drugiego. Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią oraz niech $n_0$ oznacza liczbę naturalną spełniającą nierówność $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Wtedy przyjmując $x_0 = \frac{1}{n_0}$ otrzymamy $x_0 \in A$ oraz $x_0 < \varepsilon$. Podobnie można pokazać, że $\sup A = 1$. W zbiorze $A$ nie ma elementu najmniejszego ani największego.

b) Zauważmy najpierw, że

$$\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)} \quad \text{dla każdego } n \in \boldsymbol{N}.$$

Elementy zbioru $B$ są zatem wyrazami ciągu rosnącego $b_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}$ zbieżnego do $\frac{1}{2}$. Stąd wynika, że

$$\sup B = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad \inf B = b_1 = \frac{1}{3}.$$

W zbiorze $B$ jest element najmniejszy $b_1 = \frac{1}{3}$, ale nie ma elementu największego.

c) Zbiór $C$ jest zbiorem wartości funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ określonej na przedziale $(0,1]$. Zatem $C = [1,\infty)$. Stąd $\inf C = 1$ oraz $\sup C = \infty$. W zbiorze $C$ elementem najmniejszym jest $y = 1$, ale nie ma w nim elementu największego, bo jest nieograniczony od góry.

- **Przykład 0.3**

Określić dziedziny naturalne i zbiory wartości podanych funkcji:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; b) $g(x) = \sqrt{-x^2}$; c) $h(x) = \sin\frac{1}{x}$; d) $p(x) = \log_3|\cos x|$.

**Rozwiązanie**

a) Dla funkcji $f(x) = \sqrt[3]{x}$ mamy $D_f = \boldsymbol{R}$ oraz $W_f = \boldsymbol{R}$.

b) Dziedzina funkcji $g(x) = \sqrt{-x^2}$ jest zbiorem rozwiązań nierówności $-x^2 \geqslant 0$, która jest równoważna warunkowi $x^2 = 0$. Zatem $D_g = \{0\}$ oraz $W_g = \{0\}$.

c) Dla funkcji $h(x) = \sin\frac{1}{x}$ mamy $D_h = \boldsymbol{R}\setminus\{0\}$ oraz $W_h = [-1, 1]$.

d) Dziedzina funkcji $p(x) = \log_3|\cos x|$ jest zbiorem rozwiązań nierówności $|\cos x| > 0$, która jest równoważna warunkowi $\cos x \neq 0$. Zatem $D_p = \boldsymbol{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + n\pi : n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. Ponieważ funkcja $|\cos x|$ dla $x \in D_p$ przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $(0, 1]$ oraz ponieważ zbiorem wartości funkcji $\log_3 u$, gdzie $u \in (0, 1]$, jest przedział $(-\infty, 0]$, więc także $W_p = (-\infty, 0]$.

- **Przykład 0.4**

Zbadać, czy podane funkcje są ograniczone z dołu, są ograniczone z góry, są ograniczone:

a) $f(x) = 2^x$; b) $g(x) = x^3$; c) $h(x) = \cos\frac{1}{x}$; d) $p(x) = 1 - x^4$.

**Rozwiązanie**

a) Funkcja $f(x) = 2^x$ jest ograniczona z dołu, gdyż dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$ mamy $2^x > 0$. Funkcja $f$ nie jest jednak ograniczona z góry, gdyż dla dowolnego $M > 0$ istnieje $x > \log_2 M$ takie, że $2^x > M$.

b) Funkcja $g(x) = x^3$ nie jest ograniczona z góry, gdyż dla dowolnego $M > 0$ istnieje $x > \sqrt[3]{M}$ takie, że $x^3 > M$. Z nieparzystości funkcji $g$ wynika, że nie jest ona także ograniczona z dołu.

c) Funkcja $h(x) = \cos\frac{1}{x}$ jest ograniczona z dołu i z góry, gdyż dla każdego $x \in \boldsymbol{R}\setminus\{0\}$ mamy $-1 \leqslant \cos\frac{1}{x} \leqslant 1$.

d) Funkcja $p(x) = 1 - x^4$ jest ograniczona z góry, gdyż dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$ mamy $1 - x^4 \leqslant 1$. Funkcja ta nie jest jednak ograniczona z dołu, gdyż dla dowolnego $M < 0$ istnieje $x > \sqrt[4]{1 - M}$ takie, że $1 - x^4 < M$.

- **Przykład 0.5**

Korzystając z definicji uzasadnić, że podane funkcje są monotoniczne na wskazanych zbiorach:

a) $f(x) = x^3$, $\boldsymbol{R}$; b) $g(x) = \frac{1}{x}$, $(0, \infty)$; c) $h(x) = x^4 + x^2 + 1$, $(-\infty, 0]$.

**Rozwiązanie**

a) Pokażemy, że funkcja $f(x) = x^3$ jest rosnąca na $\boldsymbol{R}$. Niech $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$ oraz niech

$x_1 < x_2$. Wtedy mamy

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= (x_2)^3 - (x_1)^3 = (x_2 - x_1)\left[(x_2)^2 + x_1x_2 + (x_1)^2\right] \\ &= (x_2 - x_1)\left[\left(x_2 + \frac{x_1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(x_1)^2\right]. \end{aligned}$$

Zauważmy, że pierwszy czynnik otrzymanego iloczynu jest dodatni, a drugi jest nieujemny (równa się 0 tylko dla $x_1 = x_2 = 0$). Zatem

$$f(x_2) - f(x_1) > 0,$$

co oznacza, że funkcja $f$ jest rosnąca na $\boldsymbol{R}$.

b) Pokażemy, że funkcja $g(x) = \dfrac{1}{x}$ jest malejąca na przedziale $(0, \infty)$. Niech $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ oraz niech $x_1 < x_2$. Wtedy

$$g(x_2) - g(x_1) = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 - x_2}{x_1x_2}.$$

Ponieważ licznik ułamka jest ujemny a mianownik dodatni, więc $g(x_2) - g(x_1) < 0$, co oznacza, że funkcja $g$ jest malejąca na rozważanym przedziale.

c) Pokażemy, że funkcja $h(x) = x^4 + x^2 + 1$ jest malejąca na przedziale $(-\infty, 0]$. Niech $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ oraz $x_1 < x_2$. Wtedy

$$\begin{aligned} h(x_2) - h(x_1) &= \left(x_2^4 - x_1^4\right) + \left(x_2^2 - x_1^2\right) \\ &= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)\left(x_2^2 + x_1^2\right) + (x_2 - x_1)(x_2 + x_1). \end{aligned}$$

Ponieważ pierwsze czynniki w obu składnikach są dodatnie a drugie ujemne, więc $h(x_2) - h(x_1) < 0$. Oznacza to, że funkcja $h$ jest malejąca na rozważanym przedziale.

## • Przykład 0.6

Określić funkcje złożone: $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$, jeżeli:
a) $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$; b) $f(x) = 2 + \cos x$, $g(x) = \sqrt{x}$.

**Rozwiązanie**

a) Mamy

$(f \circ f)(x) = f[f(x)] = \left(x^2\right)^2 = x^4$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = (2^x)^2 = 2^{2x}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = 2^{\left(x^2\right)} = 2^{x^2}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

$(g \circ g)(x) = g[g(x)] = 2^{(2^x)} = 2^{2^x}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

b) Mamy

$(f \circ f)(x) = f[f(x)] = 2 + \cos(2 + \cos x)$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = 2 + \cos\sqrt{x}$, gdzie $x \geqslant 0$.

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \sqrt{2 + \cos x}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

$(g \circ g)(x) = g[g(x)] = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$, gdzie $x \geqslant 0$.

## • Przykład 0.7

Uzasadnić, że podane funkcje są różnowartościowe na wskazanych zbiorach:

a) $f(x) = x^5$, $\boldsymbol{R}$; b) $g(x) = x^2$, $(-\infty, 0]$.

**Rozwiązanie**

a) Mamy pokazać, że

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}} \left[ (x_1 \neq x_2) \Longrightarrow \left( x_1^5 \neq x_2^5 \right) \right].$$

Niech $x_1, x_2$ będą dowolnymi różnymi liczbami rzeczywistymi. Nie zmniejszając ogólności rozważań można przyjąć, że $x_1 < x_2$. Możliwe są trzy przypadki: I. $x_1, x_2 \geqslant 0$; II. $x_1 \leqslant 0, x_2 \geqslant 0$; III. $x_1, x_2 \leqslant 0$. W pierwszym przypadku mamy $0 \leqslant x_1 < x_2$. Wtedy

$$x_2^5 - x_1^5 = (x_2 - x_1) \left( x_2^4 + x_2^3 x_1 + x_2^2 x_1^2 + x_2 x_1^3 + x_1^4 \right) > 0,$$

bo oba czynniki są dodatnie. Stąd $x_1^5 \neq x_2^5$. Podobnie przebiega uzasadnienie w trzecim przypadku. W drugim przypadku mamy $x_1 < 0$ i $x_2 \geqslant 0$ lub $x_1 \leqslant 0$ i $x_2 > 0$. Wtedy $x_1^5 < 0$ i $x_2^5 \geqslant 0$ lub $x_1^5 \leqslant 0$ i $x_2^5 > 0$. Stąd $x_1^5 \neq x_2^5$. Funkcja $f$ jest zatem różnowartościowa na $\boldsymbol{R}$.

b) Mamy pokazać, że

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in (-\infty, 0]} \left[ (x_1 \neq x_2) \Longrightarrow \left( x_1^2 \neq x_2^2 \right) \right].$$

Niech $x_1, x_2$ będą dowolnymi różnymi liczbami niedodatnimi. Nie zmniejszając ogólności rozważań można przyjąć, że $x_1 < x_2 \leqslant 0$. Wtedy $x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) < 0$, bo pierwszy czynnik jest dodatni a drugi ujemny. Stąd $x_1^2 \neq x_2^2$. Funkcja $g(x) = x^2$ jest zatem różnowartościowa na przedziale $(-\infty, 0]$.

## • Przykład 0.8

Znaleźć funkcje odwrotne do podanych:

a) $f(x) = 2 - \log_5 x$; b) $g(x) = \dfrac{1}{2^x + 4}$; c) $h(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 27$.

**Rozwiązanie**

a) Dziedziną funkcji $y = f(x) = 2 - \log_5 x$ jest przedział $(0, \infty)$, a zbiorem wartości jest $\boldsymbol{R}$. Funkcja odwrotna do $f$ istnieje, bo funkcja ta jest malejąca, a zatem jest różnowartościowa. Z równości $y = 2 - \log_5 x$ mamy $x = 5^{2-y}$. Stąd

$$x = f^{-1}(y) = 5^{2-y}.$$

b) Dziedziną funkcji $y = g(x) = \dfrac{1}{2^x + 4}$ jest $\boldsymbol{R}$. Zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$. Funkcja odwrotna $g^{-1}$ istnieje, gdyż funkcja $g$ jest malejąca, a zatem także różnowartościowa. Z równości $y = \dfrac{1}{2^x + 4}$ mamy $x = \log_2 \left( \dfrac{1}{y} - 4 \right)$. Stąd

$$g^{-1}(y) = \log_2 \left( \frac{1}{y} - 4 \right).$$

c) Mamy $y = h(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 27 = (x-1)^3 + 28$. Dziedziną i zbiorem wartości funkcji $h$ jest $\mathbb{R}$. Funkcja odwrotna do $h$ istnieje, bo funkcja ta jest rosnąca, a zatem jest różnowartościowa. Z równości $y = (x-1)^3 + 28$ mamy $x = 1 + \sqrt[3]{y-28}$. Stąd

$$x = h^{-1}(y) = 1 + \sqrt[3]{y-28}.$$

## • Przykład* 0.9

Naszkicować wykresy funkcji:

a) $f(x) = \arcsin(\sin x)$; b) $g(x) = \sin(\arcsin x)$.

**Rozwiązanie**

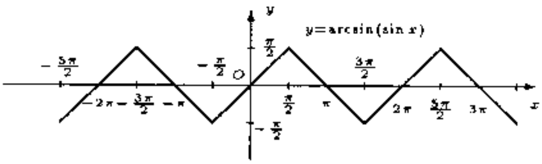
a) Dziedziną funkcji $f(x) = \arcsin(\sin x)$ jest $\mathbb{R}$. Funkcja ta jest okresowa i ma okres $T = 2\pi$ . Wykres funkcji $f$ wystarczy zatem sporządzić np. na przedziale $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ . Dla $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ mamy $f(x) = x$. Równość ta wynika bezpośrednio z definicji funkcji odwrotnej. Dla $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ mamy $x = \pi + u$, gdzie $u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Stąd

$$f(x) = \arcsin(\sin x) = \arcsin\left[\sin(\pi + u)\right] = \arcsin(-\sin u) = -\arcsin(\sin u) = -u = \pi - x.$$

Na przedziale $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ funkcja $f$ jest określona wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ \pi - x & \text{dla} \quad x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

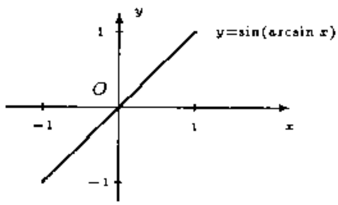
Korzystając teraz z okresowości funkcji $f$ możemy sporządzić jej wykres na $\mathbb{R}$.




b) Dziedziną funkcji $g(x) = \sin(\arcsin x)$ jest przedział $[-1, 1]$. Dla $x \in [-1, 1]$ mamy

$$g(x) = \sin(\arcsin x) = x.$$

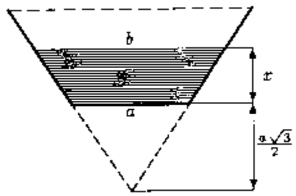
Równość ta wynika bezpośrednio z definicji funkcji odwrotnej. Wykres funkcji $g$ przedstawiono na rysunku.




## • Przykład 0.10

a) Przekrój poprzeczny kanału ma kształt połowy sześciokąta foremnego o boku $a = 3$ m (rysunek).

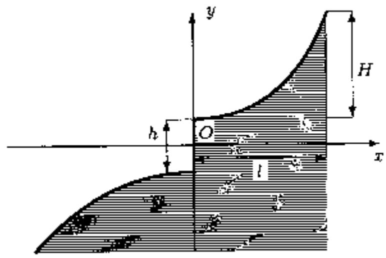
Woda płynie w kanale z prędkością $v = 2$ m/s. Znaleźć funkcję określającą ilość wody, jaka przepływa przez ten przekrój w ciągu sekundy, w zależności od głębokości wody. Narysować wykres tej funkcji;



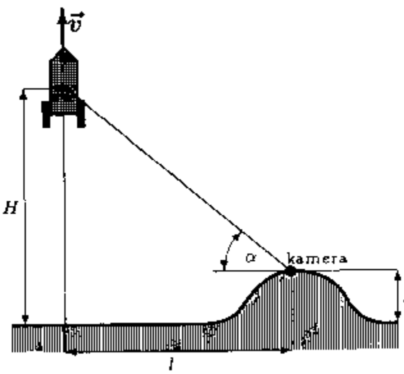

b) Profil skoczni narciarskiej ma w przybliżeniu kształt wykresu funkcji

$$y = a\,\mathrm{sgn}\,(x)\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{b}$$

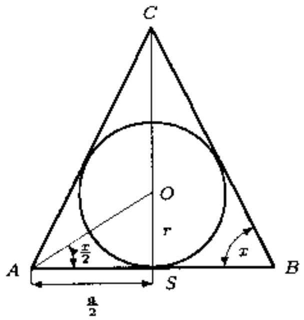
(rysunek). Znaleźć parametry $a$ i $b$ tej funkcji, jeżeli skocznia ma wymiary: wysokość rozbiegu $H = 50$ m, długość rozbiegu u podstawy $l = 30$ m, wysokość progu $h = 6$ m. Opisać, w jaki sposób można otrzymać wykres tej funkcji z wykresu funkcji $y = \mathrm{ch}\,x$.




c) Rakieta od chwili startu porusza się pionowo w górę ze stałą prędkością $v = 900$ m/s. Kamera fotografująca automatycznie lot rakiety znajduje się na wzgórzu o wysokości $h = 200$ m położonym w odległości $l = 3600$ m od miejsca startu (rysunek). Znaleźć funkcję, która opisuje kąt nachylenia osi kamery do poziomu w zależności od czasu. Narysować wykres tej funkcji.




d) W trójkąt równoramienny o podstawie $a = 4$ i kącie $x$ przy podstawie wpisano okrąg. Znaleźć funkcję określającą promień $r$ tego okręgu w zależności od kąta $x$. Narysować wykres tej funkcji.

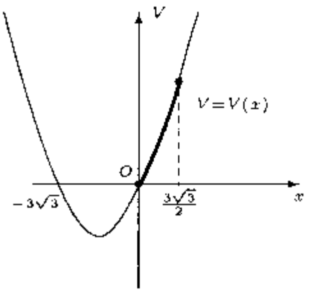



**Rozwiązanie**

a) W rozwiązaniu stosujemy oznaczenia podane na rysunku. Pole przekroju poprzecznego kanału jest określone wzorem $P(x) = \frac{a+b}{2}x$. Korzystając ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego mamy $\frac{a\sqrt{3}}{2} + x = \frac{b\sqrt{3}}{2}$, stąd $b = a + \frac{2}{\sqrt{3}}x$.

Pole przekroju poprzecznego jest zatem równe

$$P(x) = \frac{a + a + \frac{2}{\sqrt{3}}x}{2}x = \frac{x^2}{\sqrt{3}} + ax,$$




gdzie $0 \leqslant x \leqslant \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Ilość wody, jaka przepłynie przez kanał w ciągu sekundy, jest więc równa

$$\begin{aligned} V(x) &= P(x) \cdot v \\ &= \left(\frac{x^2}{\sqrt{3}} + 3x\right) 2 = \frac{2}{\sqrt{3}}x^2 + 6x, \end{aligned}$$

gdzie $0 \leqslant x \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Wykres funkcji $V$ (łuk paraboli) przedstawiono na rysunku.

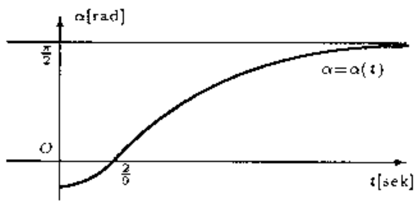
b) Zauważmy najpierw, że $\frac{h}{2} = a \operatorname{ch} \frac{0}{b} = a$. Stąd $a = 3$. Zauważmy ponadto, że $y(l) = H + \frac{h}{2}$. Zatem $\operatorname{ch} \frac{30}{b} = \frac{53}{3}$. Korzystając z tablic funkcji hiperbolicznych lub rozwiązując odpowiednie równanie wykładnicze otrzymamy $b \approx 8.40$. Funkcja określająca profil skoczni ma więc równanie $y = 3 \operatorname{sgn}(x) \operatorname{ch} \frac{x}{8.40}$, gdzie $|x| \leqslant 30$. Wykres tej funkcji dla $x > 0$ można uzyskać z wykresu funkcji $y = \operatorname{ch} x$ po zastosowaniu następujących przekształceń płaszczyzny: powinowactwo względem osi $Oy$ w skali $k = 8.40$; powinowactwo względem osi $Ox$ w skali $k = 3$. Stosując te same przekształcenia do wykresu funkcji $y = -\operatorname{ch} x$ otrzymamy wykres rozważanej funkcji dla $x < 0$.

c) Tangens kąta nachylenia osi kamery do poziomu jest określony przez zależność

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{H - h}{l} = \frac{v \cdot t - h}{l} = \frac{900t - 200}{3600}, \quad \text{gdzie } t \geqslant 0.$$

Stąd

$$\alpha = \alpha(t) = \operatorname{arctg} \frac{9t - 2}{36} = \operatorname{arctg}\left[\frac{1}{4}\left(t - \frac{2}{9}\right)\right].$$

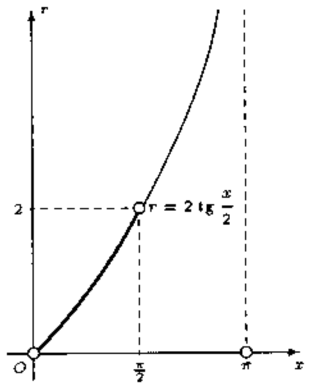



Wykres tej funkcji można uzyskać z wykresu funkcji $\alpha = \operatorname{arctg} t$ po zastosowaniu przekształceń: powinowactwo względem osi $O\alpha$ w skali $k = 4$, przesunięcie o wektor $\vec{w} = \left(\frac{2}{9}, 0\right)$. Wykres funkcji $\alpha$ przedstawiono na rysunku.

d) W trójkącie $ASO$ mamy $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{r}{\frac{a}{2}}$ (rysunek). Zatem

$$r = r(x) = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2},$$

gdzie $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Wykres funkcji $r$ przedstawiono na rysunku. Wykres tej funkcji powstaje z wykresu funkcji $r = \operatorname{tg} x$ przez powinowactwo w skali $k = 2$ względem osi $Or$ oraz powinowactwo w skali $k = 2$ względem osi $Ox$.




- **Przykład 0.11**

a) Na parterze wielopiętrowego budynku z windą jest $m$ mieszkań, a na każdym piętrze jest po $r$ mieszkań. Wykorzystując funkcję część całkowita znaleźć funkcję określającą numer guzika, który trzeba przycisnąć w windzie, aby dojechać do piętra, na którym jest mieszkanie o numerze $n$. Narysować wykres tej funkcji dla $m = 4$ oraz $r = 3$;

b) Podatek VAT jest obliczany następująco: kwota przychodu jest zaokrąglana do pełnych złotych przez odrzucenie groszy. Następnie oblicza się 22% z tej kwoty, a wynik jest zaokrąglany w dół do pełnych złotych. Podać wzór na podatek VAT w zależności od kwoty $x$ przychodu.

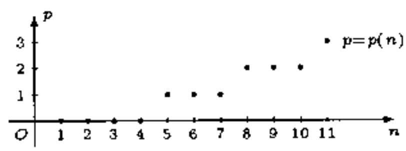
**Rozwiązanie**

a) Funkcja $p$ wskazująca numer piętra, na którym jest mieszkanie o numerze $n$ jest określona wzorem

$$p = p(n) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 1 \leqslant n \leqslant m, \\ E\left(\dfrac{n-m-1}{r}\right) + 1 & \text{dla } n > m, \end{cases}$$

gdzie $E(u)$ oznacza część całkowitą liczby $u$. Dla danych z zadania funkcja ta ma postać

$$p = p(n) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 1 \leqslant n \leqslant 4, \\ E\left(\dfrac{n-5}{3}\right)+1 & \text{dla } n > 4, \end{cases}$$




gdzie $n \in N$. Wykres funkcji $p$ przedstawiono na rysunku.

b) Jeżeli $x$ oznacza wielkość przychodu netto w zł, to $E(x)$ jest przychodem z pominięciem groszy. Podatek VAT jest zatem określony wzorem

$$VAT(x) = E\left[0.22E\left(x\right)\right].$$

## Zadania

### ○ Zadanie 0.1

Zbadać, czy podane zbiory są ograniczone z dołu, są ograniczone z góry, są ograniczone:

a) $A = \{2^z : z \in \boldsymbol{Z}\}$; b) $B = \{x \in \boldsymbol{R} : \sin x < 0\}$;

c) $C = \left\{\dfrac{2n}{n+3} : n \in \boldsymbol{N}\right\}$; d) $D = \{3 - |x| : x \in \boldsymbol{R}\}$.

### ○ Zadanie 0.2

Znaleźć kresy dolne i górne podanych zbiorów. Czy w tych zbiorach są elementy najmniejsze i największe?

a) $A = \left\{\dfrac{7}{10}, \dfrac{77}{100}, \dfrac{777}{1000}, \ldots\right\}$; b) $B = \left\{\dfrac{\sqrt{2}}{n} - \dfrac{\sqrt{3}}{m} : n, m \in \boldsymbol{N}\right\}$;

c) $C = \left\{x \in \boldsymbol{Q} : x^2 \leqslant 3\right\}$; d) $D = \left\{x \in \boldsymbol{R} : x^2 - 5|x| + 4 \leqslant 0\right\}$.

### ○ Zadanie 0.3

Określić dziedziny naturalne i zbiory wartości podanych funkcji:

a) $f(x) = \sqrt{\sin x}$; b) $g(x) = \dfrac{1}{1 + \cos x}$;

c) $h(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$; d) $q(x) = \log_3(1 + |x|)$.

### ○ Zadanie 0.4

Zbadać, czy podane funkcje są ograniczone z dołu, są ograniczone z góry, są ograniczone:

a) $f(x) = 1 + 3^x$; b) $g(x) = 4 - 3\cos x$;

c) $h(x) = \log_2 x$; d) $p(x) = 2 - 3x - x^2$.

### ○ Zadanie 0.5

Korzystając z definicji uzasadnić, że podane funkcje są monotoniczne na wskazanych zbiorach:

a) $f(x) = -4x + 5$, $\boldsymbol{R}$; b) $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $\boldsymbol{R}$;

c) $h(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $(-\infty, 0)$; d) $p(x) = \dfrac{1}{2x+1}$, $[1, \infty)$.

### ○ Zadanie 0.6

Określić funkcje złożone $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$, jeżeli:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x^2$; b) $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = 2^x$.

### ○ Zadanie 0.7

Uzasadnić, że podane funkcje są różnowartościowe na wskazanych zbiorach:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\boldsymbol{R} \setminus \{0\}$; b) $g(x) = x^4$, $[0, \infty)$; c) $h(x) = \sqrt{x}$, $[0, \infty)$.

### ○ Zadanie 0.8

Znaleźć funkcje odwrotne do podanych:

a) $f(x) = 1 - 3^{-x}$;  b) $g(x) = x^5 + \sqrt{3}$;

c) $h(x) = x^6 \operatorname{sgn} x$;  d) $p(x) = 3 - \sqrt[3]{x+2}$.

### ○ Zadanie* 0.9

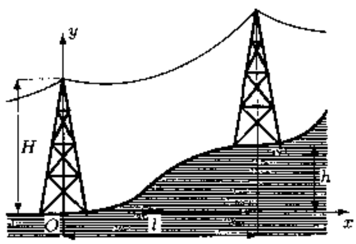
Naszkicować wykresy funkcji:

a) $f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$;  b) $g(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$.

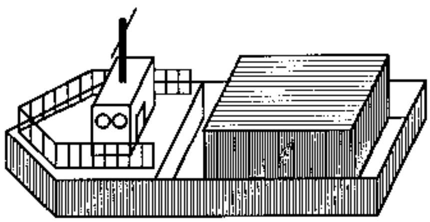
### ○ Zadanie 0.10

a) Zbiornik na paliwo ma kształt walca o osi poziomej. Średnica zbiornika wynosi $d = 4$ m, a długość $l = 10$ m (rysunek). Ilość paliwa w zbiorniku określa się na podstawie pomiaru jego poziomu. Znaleźć funkcję $V$ określającą ilość paliwa w zbiorniku w zależności od jego poziomu $x$. Naszkicować przybliżony wykres tej funkcji;


b) Przewody linii wysokiego napięcia zawieszone między dwoma słupami mają kształt kosinusoidy hiperbolicznej opisanej równaniem $y = \operatorname{ch}(ax+b)$ (rysunek). Znaleźć parametry $a$ i $b$ tej funkcji, jeżeli $H = 20$ m, $l = 100$ m, $h = 10$ m. Opisać, w jaki sposób z wykresu funkcji $y = \operatorname{ch} x$ można otrzymać wykres funkcji $y = \operatorname{ch}(ax+b)$;




c) Barka o masie $M = 20$ t ma powierzchnię $S = 100\,\mathrm{m}^2$ (rysunek). Znaleźć funkcję wyrażającą zanurzenie $z$ barki w zależności od masy $m$ przewożonego ładunku. Określić dziedzinę tej funkcji, jeżeli maksymalne zanurzenie barki wynosi $z_{\max} = 2$ m. Narysować wykres tej funkcji.



### ○ Zadanie* 0.11

a) Bankomat PKO wypłaca pieniądze w banknotach o nominałach 200, 100, 50, 20 oraz 10 zł, przy czym wydaje zawsze minimalną liczbę banknotów. Znaleźć wzory określające liczbę banknotów o nominałach 200 i 100 zł w zależności od wybieranej kwoty;

b) W zegarku elektronicznym impuls jest generowany co sekundę. Korzystając z funkcji część całkowita zapisać aktualny czas w postaci $gg : mm : ss$ w zależności od liczby $x$ impulsów. Rozważyć dwie możliwości i) $00 \leqslant gg \leqslant 24$ oraz ii) $00 \leqslant gg < 12$. Przyjąć, że generowanie impulsów rozpoczęto o północy.

## Odpowiedzi i wskazówki

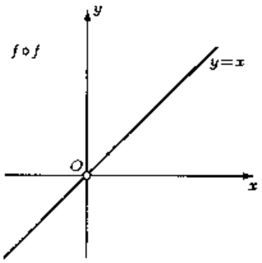
**0.1** **a)** zbiór $A$ jest ograniczony z dołu ($m = 0$), ale nie jest ograniczony z góry; **b)** zbiór $B$ nie jest ograniczony ani z dołu ani z góry; **c)** zbiór $C$ jest ograniczony z dołu $\left(m = \frac{1}{2}\right)$ i z góry ($M = 2$); **d)** zbiór $D$ jest ograniczony z góry ($M = 3$), ale nie jest ograniczony z dołu.

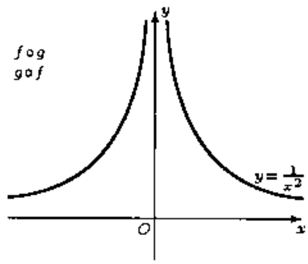
**0.2** **a)** $\inf A = \frac{7}{10}$, $\min A = \frac{7}{10}$, $\sup A = \frac{7}{9}$, w zbiorze $A$ nie ma elementu największego; **b)** $\inf B = -\sqrt{3}$, $\sup B = \sqrt{2}$, w zbiorze $B$ nie ma elementu najmniejszego ani największego; **c)** $\inf C = -\sqrt{3}$, $\sup C = \sqrt{3}$, w zbiorze $C$ nie ma elementu najmniejszego ani największego; **d)** $\inf D = -4$, $\min D = -4$, $\sup D = 4$, $\max D = 4$.

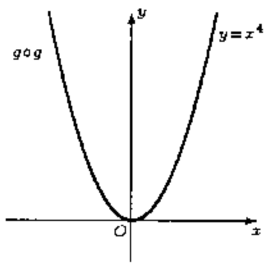
**0.3** **a)** $D_f = \ldots \cup [-2\pi, -\pi] \cup [0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi] \cup \ldots$, $W_f = [0, 1]$;
**b)** $D_g = \boldsymbol{R} \setminus \{\pi + 2k\pi : k \in \boldsymbol{Z}\}$, $W_g = \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$; **c)** $D_h = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, $W_h = \left[\frac{3}{4}, \infty\right)$;
**d)** $D_q = \boldsymbol{R}$, $W_q = [0, \infty)$.

**0.4** **a)** funkcja $f$ jest ograniczona z dołu ($m = 1$), ale nie jest ograniczona z góry;
**b)** funkcja $g$ jest ograniczona z dołu ($m = 1$) i z góry ($M = 7$);
**c)** funkcja $h$ nie jest ograniczona z ani dołu ani z góry;
**d)** funkcja $p$ jest ograniczona z góry $\left(M = \frac{17}{4}\right)$, ale nie jest ograniczona z dołu.

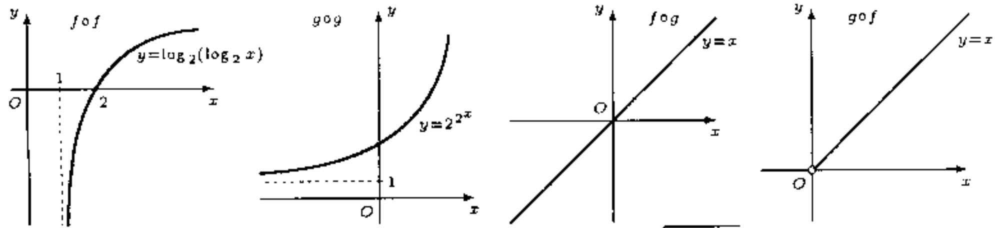
**0.6** **a)** $(f \circ f)(x) = x$ dla $x \neq 0$, $(f \circ g)(x) = \frac{1}{x^2}$ dla $x \neq 0$, $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x^2}$ dla $x \neq 0$, $(g \circ g)(x) = x^4$ dla $x \in \boldsymbol{R}$.



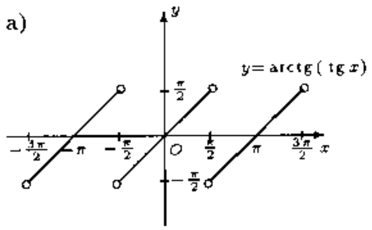

**b)** $(f \circ f)(x) = \log_2(\log_2 x)$ dla $x > 1$, $(f \circ g)(x) = x$ dla $x \in \boldsymbol{R}$, $(g \circ f)(x) = x$ dla $x > 0$, $(g \circ g)(x) = 2^{2^x}$ dla $x \in \boldsymbol{R}$.



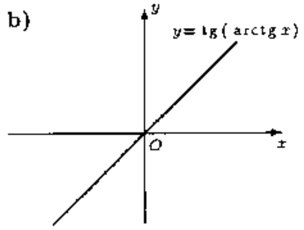

**0.8** **a)** $f^{-1}(y) = -\log_3(1-y)$, gdzie $y < 1$; **b)** $g^{-1}(y) = \sqrt[5]{y - \sqrt{3}}$, gdzie $\in \boldsymbol{R}$;
**c)** $h^{-1}(y) = \operatorname{sgn} y \sqrt[6]{y \operatorname{sgn} y}$, gdzie $y \in \boldsymbol{R}$; **d)** $p^{-1}(y) = (3-y)^3 - 2$, gdzie $y \in \boldsymbol{R}$.

**0.9***

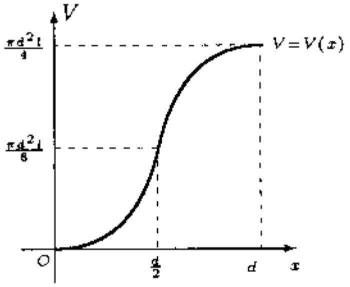
a)

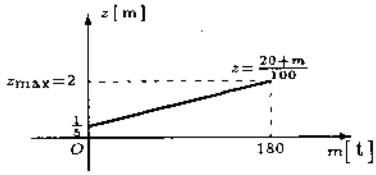



b)




**0.10** **a)** $V(x) = l\left(\frac{\pi d^2}{8} + \left(x - \frac{d}{2}\right)\sqrt{xd - x^2} + \frac{d^2}{4}\arcsin\frac{2x-d}{d}\right)$, gdzie $0 \leqslant x \leqslant d$;
**b)** $b \approx -3.6887$ ($b \approx 3.6887 > 0$ odrzucamy ze względu na kształt linii), $a \approx 0.0777$. Do wykresu funkcji $y = \operatorname{ch} x$ należy zastosować powinowactwo względem osi $Oy$ oraz przesunięcie w prawo wzdłuż osi $Ox$;
**c)** $z = \frac{20+m}{100}$, gdzie $0 \leqslant m \leqslant 180$ oraz $\gamma = 1\left[\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{m}^3}\right]$.




**0.11*** **a)** $b_{200} = E\left(\frac{x}{200}\right)$, $b_{100} = E\left(\frac{x - 200E\left(\frac{x}{200}\right)}{100}\right)$, gdzie $x$ jest wybieraną kwotą;

**b)** i) $\begin{cases} ss &= x - E\left(\frac{x}{60}\right)\cdot 60, \\ mm &= E\left(\frac{x}{60}\right) - E\left(\frac{x}{3600}\right)\cdot 60, \\ gg &= E\left(\frac{x}{3600}\right) - E\left(\frac{x}{86400}\right)\cdot 24; \end{cases}$ ii) $\begin{cases} ss &= x - E\left(\frac{x}{60}\right)\cdot 60, \\ mm &= E\left(\frac{x}{60}\right) - E\left(\frac{x}{3600}\right)\cdot 60, \\ gg &= E\left(\frac{x}{3600}\right) - E\left(\frac{x}{43200}\right)\cdot 12. \end{cases}$

# 1

# CIĄGI LICZBOWE

## Pierwszy tydzień

**Podstawowe określenia (1.1) Granice ciągów (1.2). Twierdzenia o granicach właściwych ciągów (1.3).**

## Przykłady

### • Przykład 1.1

Na podstawie wartości kilku początkowych wyrazów podanych ciągów znaleźć ich wzory ogólne:

a) $(a_n) = (7, 3, -1, -5, \ldots)$; b) $(b_n) = (8, 12, 18, 27, \ldots)$;

c) $(c_n) = (1, 0, 1, 0, \ldots)$; d) $(d_n) = (1, 11, 111, 1111, \ldots)$;

e*) $(e_n) = (7, 7, 9, 9, 7, 7, 9, 9, \ldots)$; f*) $(f_n) = (1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots)$.

**Rozwiązanie**

a) Łatwo zauważyć, że różnice między kolejnymi wyrazami ciągu $(a_n)$ są stałe, zatem jest on ciągiem arytmetycznym. W tym ciągu mamy $a_1 = 7$ oraz $r = -4$. Stąd

$$a_n = a_1 + (n-1)r = 7 + (n-1)(-4) = 11 - 4n, \text{ gdzie } n \in N.$$

b) Zauważmy, że ilorazy kolejnych wyrazów ciągu $(b_n)$ są stałe, zatem jest on ciągiem geometrycznym. W tym ciągu mamy $b_1 = 8$ oraz $q = \frac{3}{2}$. Stąd

$$b_n = b_1 q^{n-1} = 8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}, \text{ gdzie } n \in N.$$

c) Rozważany ciąg jest okresowy o okresie 2. W rozwiązaniu wykorzystamy ciąg

$$\left((-1)^{n+1}\right) = (1, -1, 1, -1, \ldots),$$

który także ma okres 2. Ponieważ $1 = \frac{1+1}{2}$ oraz $0 = \frac{1-1}{2}$, więc poszukiwany wzór ma postać

$$c_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2}, \text{ gdzie } n \in N.$$

d) Kolejne wyrazy ciągu $(d_n)$ są sumami początkowych wyrazów ciągu geometrycznego $(1, 10, 100, 1000, \ldots)$. Rzeczywiście mamy

$$\begin{aligned} d_1 &= 1 = 1, \\ d_2 &= 11 = 1 + 10, \\ d_3 &= 111 = 1 + 10 + 100, \\ d_4 &= 1111 = 1 + 10 + 100 + 1000. \end{aligned}$$

Korzystając ze wzoru na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu geometrycznego otrzymamy

$$d_n = 1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{n-1} = 1 \cdot \frac{1 - 10^n}{1 - 10} = \frac{10^n - 1}{9}, \text{ gdzie } n \in \boldsymbol{N}.$$

e*) Zauważmy najpierw, że liczby 7 i 9 można przedstawić w postaci

$$7 = 8 + (-1)^{2k-1}, \qquad 9 = 8 + (-1)^{2k}.$$

Wystarczy więc znaleźć ciąg, który przyjmuje kolejno dwie wartości nieparzyste, następnie dwie parzyste itd. Takim ciągiem jest np. $E\left(\dfrac{n+1}{2}\right)$. Zatem ostatecznie mamy

$$e_n = 8 + (-1)^{E\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

f*) Dla liczb naturalnych $k = 2, 3, 4, 5, \ldots, n$ obliczamy różnice $f_k - f_{k-1}$. Mamy

$$f_2 - f_1 = 2, \ f_3 - f_2 = 3, \ f_4 - f_3 = 4, \ f_5 - f_4 = 5, \ \ldots, \ f_n - f_{n-1} = n.$$

Dodając stronami te równości otrzymamy

$$f_n - f_1 = 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n.$$

Stąd, ponieważ $f_1 = 1$, mamy

$$f_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**Uwaga.** Każde z zadań ma nieskończenie wiele rozwiązań. Inne wzory określające te ciągi mają postać $h(n) + C(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-8)$, gdzie $C \in \boldsymbol{R}$, a $h(n)$ jest podanym wyżej wzorem określającym ciągi $(a_n)$, $(b_n)$, $(c_n)$, $(d_n)$, $(e_n)$ lub $(f_n)$

## • Przykład 1.2

Dla podanych ciągów napisać wzory określające wskazane wyrazy tych ciągów:

a) $a_n = (n + 10)!$, $a_{n+3}$; b) $b_n = (n+1)^n$, $b_{2n-1}$;

c) $c_n = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n}$, $c_{n^2}$;

d) $d_n = \dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+2)!} + \ldots + \dfrac{1}{(2n)!}$, $d_{n+1}$.

**Rozwiązanie**

a) $a_{n+3} = [(n+3) + 10]! = (n+13)!$.

b) $b_{2n-1} = [(2n-1)+1]^{2n-1} = (2n)^{2n-1}$.

c) $c_{n^2} = \sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n^2-2}+\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2}$.

d)
$$\begin{aligned} d_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{[(n+1)+1]!}+\frac{1}{[(n+1)+2]!}+\ldots+\frac{1}{[2(n+1)]!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}+\ldots+\frac{1}{(2n)!}+\frac{1}{(2n+1)!}+\frac{1}{(2n+2)!}. \end{aligned}$$

## • Przykład 1.3

Zbadać, czy podane ciągi są ograniczone z dołu, z góry, są ograniczone:

a) $a_n = \dfrac{3^n}{3^n+2}$;   b) $b_n = 1000-\sqrt{n}$;   c) $c_n = (-n)^n$;   d) $d_n = \sqrt[4]{n^4+4}$.

**Rozwiązanie**

a) Ciąg $(a_n)$ jest ograniczony z dołu przez liczbę $m = 0$, gdyż dla każdego $n \in N$ spełniona jest nierówność
$$a_n = \frac{3^n}{3^n+2} > 0 = m.$$
Ciąg ten jest ograniczony z góry przez liczbę $M = 1$, gdyż dla każdego $n \in N$ spełniona jest nierówność
$$a_n = \frac{3^n}{3^n+2} < 1 = M.$$
Ciąg $(a_n)$ jest zatem ograniczony.

b) Ciąg $(b_n)$ jest ograniczony z góry przez liczbę $M = 999$, gdyż dla każdego $n \in N$ spełniona jest nierówność
$$b_n = 1000-\sqrt{n} \leqslant 999 = M.$$
Ciąg ten nie jest jednak ograniczony z dołu, gdyż dla każdej liczby rzeczywistej $m$ istnieje liczba naturalna $n_0$ taka, że
$$b_{n_0} = 1000-\sqrt{n_0} < m.$$
Rzeczywiście, wystarczy przyjąć $n_0 = [1001-E(m)]^2$, aby spełniona była powyższa nierówność.

c) Ciąg $(c_n)$ nie jest ograniczony z dołu ani z góry. Wykażemy jego nieograniczoność z góry. Dowód nieograniczoności z dołu jest podobny. Niech $M$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Mamy pokazać, że istnieje liczba naturalna $n_0$, dla której zachodzi nierówność
$$c_{n_0} = (-n_0)^{n_0} > M.$$
Liczbą taką jest np. $n_0 = 2[E(M)+1]$.

d) Ciąg $(d_n)$ jest ograniczony z dołu przez liczbę $m = 1$, gdyż dla każdej liczby naturalnej $n$ spełniona jest nierówność
$$d_n = \sqrt[4]{n^4+4} > \sqrt[4]{n^4} = n \geqslant 1 = m.$$
Ciąg ten nie jest ograniczony z góry, gdyż ciąg $d_n' = n$, o mniejszych wyrazach, nie jest ograniczony z góry.

- **Przykład 1.4**

Zbadać, czy podane ciągi są monotoniczne od pewnego miejsca:

a) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$; b) $b_n = \dfrac{n^2+1}{n!}$; c) $c_n = \sqrt{n^2+4n} - n$;

d) $d_n = \cos\dfrac{\pi}{2n}$; e*) $e_n = \sqrt[n]{5^n+6^n}$; f*) $f_n = \dfrac{n!(2n)!}{(3n)!}$.

**Rozwiązanie**

a) Zbadamy znak różnicy $a_{n+1} - a_n$. Mamy

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0 \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ różnica ta jest dodatnia, więc ciąg $(a_n)$ jest rosnący.

b) Mamy

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\dfrac{(n+1)^2+1}{(n+1)!}}{\dfrac{n^2+1}{n!}} = \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)(n^2+1)} = \frac{n^2+2n+2}{n^3+n^2+n+1}.$$

Zbadamy teraz dla jakich liczb naturalnych iloraz ten jest mniejszy od 1. Mamy

$$\frac{n^2+2n+2}{n^3+n^2+n+1} < 1 \iff n^2+2n+2 < n^3+n^2+n+1 \iff n+1 < n^3 \iff 1+\frac{1}{n} < n^2.$$

Ostatnia nierówność jest spełniona dla liczb naturalnych $n \geqslant 2$. Ponieważ badany ciąg ma wyrazy dodatnie oraz dla $n \geqslant 2$ jego wyrazy spełniają nierówność $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} < 1$, więc jest on malejący od numeru $n_0 = 2$.

c) Mamy

$$c_n = \sqrt{n^2+4n} - n = \frac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n} = \frac{4}{\sqrt{1+\dfrac{4}{n}}+1} \quad \text{oraz} \quad c_{n+1} = \frac{4}{\sqrt{1+\dfrac{4}{n+1}}+1}.$$

Pokażemy bezpośrednio, że $c_{n+1} > c_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Rzeczywiście, wychodząc od oczywistej relacji $n+1 > n$, otrzymamy kolejno równoważne nierówności

$$\frac{4}{n+1} < \frac{4}{n}; \quad 1+\frac{4}{n+1} < 1+\frac{4}{n}; \quad \sqrt{1+\frac{4}{n+1}} < \sqrt{1+\frac{4}{n}}; \quad \sqrt{1+\frac{4}{n+1}}+1 < \sqrt{1+\frac{4}{n}}+1.$$

Stąd mamy

$$c_{n+1} = \frac{4}{\sqrt{1+\dfrac{4}{n+1}}+1} > \frac{4}{\sqrt{1+\dfrac{4}{n}}+1} = c_n,$$

czyli jak żądano. Oznacza to, że ciąg $(c_n)$ jest rosnący.

d) Pokażemy, że ciąg $(d_n)$ jest rosnący. W dowodzie wykorzystamy fakt, że funkcja $f(x) = \cos x$ jest malejąca na przedziale $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Dla $n \in \mathbb{N}$ liczby postaci $\dfrac{\pi}{2n}$ należą do przedziału $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ponieważ $\frac{\pi}{2n} > \frac{\pi}{2(n+1)}$, więc z monotoniczności funkcji $f$ na przedziale $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ wynika nierówność

$$d_n = \cos\frac{\pi}{2n} < \cos\frac{\pi}{2(n+1)} = d_{n+1},$$

czyli ciąg $(d_n)$ jest rosnący.

e*) Mamy

$$e_n = \sqrt[n]{5^n + 6^n} = 6\sqrt[n]{\left(\frac{5}{6}\right)^n + 1}.$$

Zauważmy, że dla $n \in \boldsymbol{N}$ zachodzi nierówność

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n + 1 > \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} + 1.$$

Aby uzasadnić monotoniczność ciągu $(e_n)$ skorzystamy z oczywistej nierówności $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n+1]{a}$ dla ustalonego $a > 1$ oraz monotoniczności funkcji $\sqrt[k]{x}$ dla ustalonego $k \in \boldsymbol{N}$. Dla dowolnej liczby naturalnej $n$ mamy zatem

$$e_{n+1} = 6\sqrt[n+1]{1 + \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}} < 6\sqrt[n]{1 + \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}} < 6\sqrt[n]{1 + \left(\frac{5}{6}\right)^{n}} = e_n.$$

Oznacza to, że ciąg $(e_n)$ jest malejący.

f*) Ponieważ $f_n > 0$ dla $n \in \boldsymbol{N}$, więc, aby zbadać monotoniczność ciągu $(f_n)$ wystarczy porównać iloraz $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ z 1. Mamy

$$\begin{aligned}\frac{f_{n+1}}{f_n} &= \frac{(n+1)!\,[2(n+1)]!}{[3(n+1)]!}\cdot\frac{(3n)!}{n!(2n)!}\\ &= \frac{[n!(n+1)]\,[(2n+2)(2n+1)(2n)!]}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!}\cdot\frac{(3n)!}{n!(2n)!} = \frac{2(n+1)(2n+1)}{3(3n+2)(3n+1)} < 1.\end{aligned}$$

Zatem ciąg $(f_n)$ jest malejący.

## • Przykład 1.5

Korzystając z definicji granicy ciągu uzasadnić podane równości:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1} = 2$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\log_{n+1} 5 = 0$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n+1} = \infty$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}(5 - 2^n) = -\infty$; e) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5} = 1$; f*) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^6 + n^2\right) = \infty$.

**Rozwiązanie**

a) Mamy pokazać, że

$$\bigwedge_{\varepsilon>0}\ \bigvee_{n_0\in N}\ \bigwedge_{n\in N}\left[(n > n_0) \Longrightarrow \left(\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| < \varepsilon\right)\right].$$

Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Musimy znaleźć liczbę $n_0 \in N$ taką, że dla każdego $n > n_0$ spełniona będzie nierówność $\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| < \varepsilon$. Mamy

$$\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| = \frac{2}{n+1} < \varepsilon \iff n > \frac{2}{\varepsilon} - 1.$$

Zatem za $n_0$ można przyjąć dowolną liczbę naturalną większą lub równą $\frac{2}{\varepsilon} - 1$.

**Uwaga*.** Korzystając z funkcji część całkowita liczbę $n_0$ można wyrazić wzorem

$$n_0 = \begin{cases} 1 & \text{dla } \varepsilon > 1, \\ E\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) - 1 & \text{dla } 0 < \varepsilon \leqslant 1. \end{cases}$$

b) Mamy pokazać, że

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_0 \in N} \bigwedge_{n \in N} \left[(n > n_0) \implies \left(\left|\log_{n+1} 5 - 0\right| < \varepsilon\right)\right].$$

Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Musimy znaleźć liczbę $n_0 \in N$ taką, że dla każdego $n > n_0$ spełniona będzie nierówność $\left|\log_{n+1} 5\right| < \varepsilon$. Mamy

$$\left|\log_{n+1} 5\right| = \log_{n+1} 5 < \varepsilon \iff n > 5^{\frac{1}{\varepsilon}} - 1.$$

Zatem za $n_0$ można przyjąć dowolną liczbę naturalną większą lub równą $5^{\frac{1}{\varepsilon}} - 1$.

**Uwaga*.** Korzystając z funkcji część całkowita liczbę $n_0$ można wyrazić wzorem

$$n_0 = \begin{cases} 1 & \text{dla } \varepsilon > \log_2 5, \\ E\left(5^{\frac{1}{\varepsilon}}\right) - 1 & \text{dla } 0 < \varepsilon \leqslant \log_2 5. \end{cases}$$

c) Mamy pokazać, że

$$\bigwedge_{\mathcal{E}>0} \bigvee_{n_0 \in N} \bigwedge_{n \in N} \left[(n > n_0) \implies \left(\sqrt[3]{n+1} > \mathcal{E}\right)\right].$$

Niech $\mathcal{E}$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Musimy znaleźć liczbę $n_0 \in N$ taką, że dla każdego $n > n_0$ spełniona będzie nierówność $\sqrt[3]{n+1} > \mathcal{E}$. Mamy

$$\sqrt[3]{n+1} > \mathcal{E} \iff n > \mathcal{E}^3 - 1.$$

Zatem za $n_0$ można przyjąć dowolną liczbę naturalną większą lub równą $\mathcal{E}^3 - 1$.

**Uwaga*.** Korzystając z funkcji część całkowita liczbę $n_0$ można wyrazić wzorem

$$n_0 = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 < \mathcal{E} < \sqrt[3]{2}, \\ E\left(\mathcal{E}^3\right) - 1 & \text{dla } \mathcal{E} \geqslant \sqrt[3]{2}. \end{cases}$$

d) Mamy pokazać, że

$$\bigwedge_{\mathcal{E}<0} \bigvee_{n_0 \in N} \bigwedge_{n \in N} \left[(n > n_0) \implies (5 - 2^n < \mathcal{E})\right].$$

Niech $\mathcal{E}$ będzie dowolną liczbą ujemną. Musimy znaleźć liczbę $n_0 \in N$ taką, że dla każdego $n > n_0$ spełniona będzie nierówność $5 - 2^n < \mathcal{E}$. Mamy

$$5 - 2^n < \mathcal{E} \iff n > \log_2(5 - \mathcal{E}).$$

Zatem za $n_0$ można przyjąć dowolną liczbę naturalną większą lub równą $\log_2(5 - \mathcal{E})$.

**Uwaga*.** Korzystając z funkcji część całkowita liczbę $n_0$ można wyrazić wzorem

$$n_0 = E\left[\log_2(5 - \mathcal{E})\right].$$

e) Mamy pokazać, że

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_0 \in N} \bigwedge_{n \in N} \left[(n > n_0) \implies \left(\left|\sqrt[n]{5} - 1\right| < \varepsilon\right)\right].$$

Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Musimy znaleźć liczbę $n_0 \in N$ taką, że dla każdego $n > n_0$ spełniona będzie nierówność $\left|\sqrt[n]{5} - 1\right| < \varepsilon$. Mamy

$$\left|\sqrt[n]{5} - 1\right| = \sqrt[n]{5} - 1 < \varepsilon \iff 5^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \log_5(1+\varepsilon) \iff n > \frac{1}{\log_5(1+\varepsilon)}.$$

Zatem za $n_0$ można przyjąć dowolną liczbę naturalną większą lub równą $\frac{1}{\log_5(1+\varepsilon)}$.

**Uwaga*.** Korzystając z funkcji część całkowita liczbę $n_0$ można wyrazić wzorem

$$n_0 = \begin{cases} 1 & \text{dla } \varepsilon > 4, \\ E\left(\dfrac{1}{\log_5(1+\varepsilon)}\right) & \text{dla } 0 < \varepsilon \leqslant 4. \end{cases}$$

f*) Mamy pokazać, że

$$\bigwedge_{\mathcal{E}>0} \bigvee_{n_0 \in N} \bigwedge_{n \in N} \left[(n > n_0) \implies \left(n^6 + n^2 > \mathcal{E}\right)\right].$$

Niech $\mathcal{E}$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Musimy znaleźć liczbę $n_0 \in N$ taką, że dla każdego $n > n_0$ spełniona będzie nierówność $n^4 + n > \mathcal{E}$. Mamy

$$n^6 + n^2 > \mathcal{E} \stackrel{\bullet}{\Longleftarrow} n^2 > \mathcal{E} \iff n > \sqrt{\mathcal{E}}.$$

Zatem za $n_0$ można przyjąć dowolną liczbę naturalną większą lub równą $\sqrt{\mathcal{E}}$.

**Uwaga*.** W miejscu oznaczonym $\bullet$ wykorzystaliśmy oczywistą nierówność $n^6 + n^2 > n^2$ dla $n \in N$. Stosując funkcję część całkowita liczbę $n_0$ można wyrazić wzorem

$$n_0 = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 < \mathcal{E} < 1, \\ E\left(\sqrt{\mathcal{E}}\right) & \text{dla } \mathcal{E} \geqslant 1. \end{cases}$$

## • Przykład 1.6

Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic obliczyć podane granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n - 2^n}{4^n - 3^n}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^6 - 3n^4 + 2}{5 - 10n^6}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+1}}{n}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_2(n+1)}{\log_3(n+1)}$; e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt[4]{n^4+1}\right)$; f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^2+1)(2n-1)!}{(2n+1)!+1}$.

**Rozwiązanie**

a) $$\lim_{n\to\infty}\frac{(3^n-2^n)}{(4^n-3^n)} \overset{:4^n}{\underset{:4^n}{==}} \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n-\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n} \overset{*}{=} \frac{0-0}{1-0}=0.$$

W miejscu oznaczonym $*$ korzystaliśmy z równości $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, gdzie $|q| < 1$. Korzystaliśmy także z twierdzeń o granicy różnicy i ilorazu ciągów.

b) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(5n^6-3n^4+2\right)}{\left(5-10n^6\right)} \overset{:n^6}{\underset{:n^6}{==}} \lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^6}}{\frac{5}{n^6}-10}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}5-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^6}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^6}-\lim\limits_{n\to\infty}10} = \frac{5-0+0}{0-10} = -\frac{1}{2}.$$

W rozwiązaniu korzystaliśmy z twierdzeń o granicy sumy, różnicy oraz ilorazu ciągów.

c) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{n} \overset{:n}{\underset{:n}{==}} \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}}{1} = \frac{\sqrt[3]{0+0}}{1} = 0.$$

W powyższym przykładzie korzystaliśmy z twierdzenia o granicy sumy oraz o granicy pierwiastka.

d) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_2(n+1)}{\log_3(n+1)} \overset{*}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\log_2(n+1)}{\frac{\log_2(n+1)}{\log_2 3}} = \lim_{n\to\infty}\log_2 3 = \log_2 3.$$

W miejscu oznaczonym $*$ korzystaliśmy ze wzoru $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

e) W rozwiązaniu wykorzystamy wzory:

$$\sqrt{a} = \sqrt[4]{a^2}, \text{ gdzie } a \geqslant 0;\quad \sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y} = \frac{x-y}{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}, \text{ gdzie } x, y > 0.$$

Stosując te wzory otrzymamy

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^2+n}-\sqrt[4]{n^4+1} &= \sqrt[4]{(n^2+n)^2}-\sqrt[4]{n^4+1} \\
&= \frac{\left(n^2+n\right)^2-\left(n^4+1\right)}{\left(\sqrt[4]{(n^2+n)^2}+\sqrt[4]{n^4+1}\right)\left(\sqrt{(n^2+n)^2}+\sqrt{n^4+1}\right)} \\
&= \frac{2n^3+n^2-1}{\left(\sqrt{n^2+n}+\sqrt[4]{n^4+1}\right)\left(n^2+n+\sqrt{n^4+1}\right)} \\
&\overset{:n^3}{\underset{:n^3}{==}} \frac{\frac{2n^3+n^2-1}{n^3}}{\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt[4]{n^4+1}}{n}\cdot\frac{n^2+n+\sqrt{n^4+1}}{n^2}} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt[4]{1+\frac{1}{n^4}}\right)\left(1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}\right)}.$$

Niech teraz $n \longrightarrow \infty$. Wtedy, stosując do ostatniego wyrażenia twierdzenia o arytmetyce granic, otrzymamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt[4]{1+\frac{1}{n^4}}\right)\left(1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}\right)} = \frac{2+0-0}{\left(\sqrt{1+0}+\sqrt[4]{1+0}\right)\left(1+0+\sqrt{1+0}\right)} = \frac{1}{2}.$$

f) W rozwiązaniu zastosujemy tożsamość

$$n! = k! \cdot (k+1) \cdot \ldots \cdot (n-1)n, \text{ gdzie } 0 \leqslant k < n.$$

Mamy zatem

$$\frac{(n^2+1)(2n-1)!}{(2n+1)!+1} = \frac{(n^2+1)(2n-1)!}{(2n-1)!(2n)(2n+1)+1} \overset{:(2n-1)!}{\underset{:(2n-1)!}{=}} \frac{n^2+1}{2n(2n+1)+\frac{1}{(2n-1)!}}$$

$$\overset{:n^2}{\underset{:n^2}{=}} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{2\left(2+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n^2(2n-1)!}}.$$

Niech teraz $n \longrightarrow \infty$. Wtedy, stosując do ostatniego wyrażenia twierdzenie o arytmetyce granic, otrzymamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{2\left(2+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n^2(2n-1)!}} = \frac{1+0}{2\cdot(2+0)+0} = \frac{1}{4}.$$

## • Przykład 1.7

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach znaleźć granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin^2 n + 4n}{3n-1}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+4^n+5^n}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+3}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n+1}$; e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{n}{n+1}}$; f*) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sin\frac{1}{n}}$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$; h*) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_2(2^n+1)}{\log_2(4^n+1)}$.

**Rozwiązanie**

a) Zauważmy najpierw, że $0 \leqslant \sin^2 n \leqslant 1$ dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$. Stąd

$$\frac{0+4n}{3n-1} \leqslant \frac{\sin^2 n+4n}{3n-1} \leqslant \frac{1+4n}{3n-1} \quad \text{dla każdego } n \in \boldsymbol{N}.$$

Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n}{3n-1} = \frac{4}{3} \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1+4n}{3n-1} = \frac{4}{3},$$

więc z twierdzenia o trzech ciągach otrzymamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin^2 n + 4n}{3n-1} = \frac{4}{3}.$$

b) Zauważmy najpierw, że dla każdego $n \in N$ mamy

$$5 = \sqrt[n]{0+0+5^n} \leqslant \sqrt[n]{3^n+4^n+5^n} \leqslant \sqrt[n]{5^n+5^n+5^n} = 5\sqrt[n]{3}.$$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} 5 = 5$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} 5\sqrt[n]{3} = 5$, więc z twierdzenia o trzech ciągach otrzymamy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+4^n+5^n} = 5.$$

c) Dla każdego $n \geqslant 3$ spełnione są nierówności $1 \leqslant \sqrt[n]{n+3} \leqslant \sqrt[n]{n+n} = \sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}$. Ciągi ograniczające badany ciąg są zbieżne do 1. Zatem z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że ciąg ten jest zbieżny do 1.

d) Dla każdego $n \geqslant 2$ spełnione są nierówności $1 \leqslant \sqrt[n^2]{n+1} \leqslant \sqrt[n^2]{n^2}$. Ciągi ograniczające badany ciąg są zbieżne do 1 . Zatem z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n+1} = 1.$$

e) Zauważmy najpierw, że dla każdego $k \in N$ prawdziwa jest nierówność $\dfrac{k}{k+1} < 1$. Mamy zatem

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt[n]{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{n}{n+1}} \leqslant \sqrt[n]{n\cdot 1} = \sqrt[n]{n}.$$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{2}} = 1$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, więc z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{n}{n+1}} = 1.$$

f*) W rozwiązaniu wykorzystamy nierówność $\sin x \leqslant 1$ dla $x \in R$ oraz $\sin x \geqslant \dfrac{2}{\pi}x$ dla $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Mamy zatem

$$\sqrt[n]{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}} \leqslant \sqrt[n]{\sin\frac{1}{n}} \leqslant \sqrt[n]{1} = 1.$$

Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2}{\pi}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1\cdot 1 = 1,$$

więc z twiedzenia o trzech ciągach wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sin\dfrac{1}{n}} = 1$.

g) Zauważmy najpierw, że $n$-ty wyraz ciągu

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

jest sumą $n$ składników, wśród których najmniejszy jest równy $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$, a największy $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$. Dla każdego $n \in N$ prawdziwe są zatem nierówności

$$n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1 \text{ oraz } \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1,$$

więc z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1.$$

h*) Dla $n \in N$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{\log_2(2^n+1)}{\log_2(4^n+1)} \geqslant \frac{\log_2 2^n}{\log_2(4^n+4^n)} = \frac{n}{2n+1}$$

oraz

$$\frac{\log_2(2^n+1)}{\log_2(4^n+1)} \leqslant \frac{\log_2(2^n+2^n)}{\log_2 4^n} = \frac{n+1}{2n}.$$

Mamy zatem

$$\frac{n}{2n+1} \leqslant \frac{\log_2(2^n+1)}{\log_2(4^n+1)} \leqslant \frac{n+1}{2n}.$$

Ponieważ zachodzą oczywiste równości

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2},$$

więc z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2(2^n+1)}{\log_2(4^n+1)} = \frac{1}{2}.$$

# Zadania

## ○ Zadanie 1.1

Na podstawie wartości kilku początkowych wyrazów podanych ciągów znaleźć ich wzory ogólne:

a) $(a_n) = (1, 4, 7, 10, \ldots)$; b) $(b_n) = (8, -4\sqrt{2}, 4, -2\sqrt{2}, \ldots)$;

c) $(c_n) = (0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots)$; d) $(d_n) = (0, 1, 5, 23, 119, \ldots)$;

e) $(e_n) = (0.7, 0.77, 0.777, 0.7777, \ldots)$; f*) $(f_n) = (0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, \ldots)$.

○ **Zadanie 1.2**

Dla podanych ciągów napisać wzory określające wskazane wyrazy tych ciągów:

a) $a_n = \sqrt[n]{n^2+1}$, $a_{n+1}$; b) $b_n = \frac{1}{(2n)!}$, $b_{3n+2}$;

c) $c_n = 3^n + 3^{n+1} + \ldots + 3^{2n}$, $c_{n^2}$; d) $d_n = (n!)^{n+1}$, $d_{3^n}$.

○ **Zadanie 1.3**

Zbadać, czy podane ciągi są ograniczone z dołu, z góry, są ograniczone:

a) $a_n = \sqrt{n+8} - \sqrt{n+3}$; b*) $b_n = \frac{n^n}{n!}$; c) $c_n = 2^n - 3^n$;

d) $d_n = \frac{1}{4^1+1} + \frac{1}{4^2+2} + \frac{1}{4^3+3} + \ldots + \frac{1}{4^n+n}$; e) $e_n = 2^n \sin \frac{n\pi}{2}$.

○ **Zadanie 1.4**

Zbadać, czy podane ciągi są monotoniczne od pewnego miejsca:

a) $a_n = n^2 - 49n - 50$; b) $b_n = 3^n + (-2)^n$; c) $c_n = \frac{n^2}{2^n}$;

d) $d_n = \frac{5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3+2n)}{4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (1+3n)}$; e) $e_n = \frac{2^n+1}{3^n+1}$; f) $f_n = \sqrt[3]{n^3+2} - n$.

○ **Zadanie 1.5**

Korzystając z definicji granicy ciągu uzasadnić podane równości:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3-n}{n+4} = -1$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_2(n+3) = \infty$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n+5} = 0$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} (10-\sqrt{n}) = -\infty$; e*) $\lim\limits_{n\to\infty} E\left(\frac{3n+1}{n+1}\right) = 2$; f*) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1000}{n!} = 0$.

○ **Zadanie 1.6**

Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic obliczyć podane granice ciągów:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+2n^2+1}{n-3n^3}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+4n+1} - \sqrt{n^2+2n}\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^5+1}+1}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+3+\ldots+(2n-1)}{2+4+\ldots+2n}$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+6\sqrt{n}+1} - \sqrt{n}\right)$; f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$;

g*) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}$; h*) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin \pi\sqrt{n^2+1}$;

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4^n+1}}{\sqrt[3]{8^n+1}}$; j) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arctg}(3n+1)}{\operatorname{arctg}(2n+1)}$.

○ **Zadanie 1.7**

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach znaleźć podane granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+(-1)^n}{3n+2}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3^n+2^n}{5^n+4^n}}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+\sin n!}{4n^2-3\cos n^2}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{E\left(n\sqrt{2}\right)}{E\left(n\sqrt{3}\right)}$; e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{2n+3}$; f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3+\sin n}$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+2]{3^n+4^{n+1}}$; h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2+2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2+n}\right)$;

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+5n^2+3n^5}$; j*) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n^4+1}}+\dfrac{2}{\sqrt{n^4+2}}+\ldots+\dfrac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right)$;

k*) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_n\left(n^4+1\right)}{\log_n\left(n^2+1\right)}$; l) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^3}+\dfrac{4}{n^4}}$.

# Odpowiedzi i wskazówki

**1.1 a)** $a_n = 3n-2$; **b)** $b_n = \dfrac{8}{\left(-\sqrt{2}\right)^{n-1}}$; **c)** $c_n = \sin\dfrac{(n-1)\pi}{2}$; **d)** $d_n = n!-1$;
**e)** $e_n = \dfrac{7}{9}\cdot\left(1-\dfrac{1}{10^n}\right)$; **f*)** $f_n = \left|\cos\left[\dfrac{\pi}{2}E\left(\dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right)\right]\right|$.

**1.2 a)** $a_{n+1} = \sqrt[n+1]{(n+1)^2+1}$; **b)** $b_{3n+2} = \dfrac{1}{(6n+4)!}$;
**c)** $c_{n^2} = 3^{n^2}+3^{n^2+1}+\ldots+3^{2n^2-1}+3^{2n^2}$; **d)** $d_{3^n} = [(3^n)!]^{3^n+1}$.

**1.3 a)** ograniczony z dołu przez $m=0$, z góry przez $M=1$; **b)** ograniczony z dołu przez $m=0$, nieograniczony z góry; **c)** nieograniczony z dołu, ograniczony z góry przez $M=-1$; **d)** ograniczony z dołu przez $m=\dfrac{1}{5}$, z góry przez $M=\dfrac{1}{3}$; **e)** nie jest ograniczony z dołu ani z góry.

**1.4 a)** rosnący od $n_0=25$; **b)** rosnący; **c)** malejący od $n_0=3$; **d)** malejący od $n_0=2$; **e)** malejący; **f)** malejący.

**1.5 e*)** Wskazówka. Wykorzystać nierówność $2 \leqslant \dfrac{3n+1}{n+1} < 3$ oraz fakt, że $E(x)=2$ dla $2\leqslant x<3$; **f*)** Wskazówka. Wykorzystać nierówność $n! \geqslant n$ dla $n\in N$.

**1.6 a)** $-\dfrac{1}{3}$; **b)** 1; **c)** 0; **d)** 1; **e)** 3; **f)** $\dfrac{4}{3}$; **g*)** 1; **h*)** 0; **i)** 1; **j)** 1.

**1.7 a)** $\dfrac{2}{3}$; **b)** $\dfrac{3}{5}$; **c)** $\dfrac{1}{2}$; **d)** $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; **e)** 1; **f)** 1; **g)** 4; **h)** 0; **i)** 1; **j*)** $\dfrac{1}{2}$; **k*)** 2; **l)** 1.

# Drugi tydzień

**Twierdzenia o granicach właściwych ciągów (1.3). Twierdzenia o granicach niewłaściwych ciągów (1.4). Granice dolna i górna ciągów (1.5).**

## Przykłady

- **Przykład 2.1**

Korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym uzasadnić zbieżność podanych ciągów:

a) $x_n = \frac{2^n}{n!}$; b) $y_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{2}{(n+1)!}$;

c) $z_1 = 2, \quad z_{n+1} = \frac{z_n}{1+z_n}$; d*) $v_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

Obliczyć granice ciągów $(x_n)$ i $(z_n)$.

**Rozwiązanie**

a) Mamy

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2}{n+1}.$$

Zauważmy teraz, że $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant 1$ dla $n \geqslant 1$. Oznacza to, że ciąg $(x_n)$ jest nierosnący. Ciąg ten jest ograniczony z dołu, bo dla każdego $n \in N$ mamy $x_n \geqslant 0$. Z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym wynika, że jest on zbieżny. Niech $g$ oznacza granicę tego ciągu. Przechodząc teraz w równości $x_{n+1} = x_n \cdot \frac{2}{n+1}$ z $n$ do nieskończoności otrzymamy równanie $g = g \cdot 0$, stąd $g = 0$.

b) Monotoniczność ciągu $(y_n)$ określimy badając znak różnicy $y_{n+1} - y_n$. Mamy

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{2}{(n+2)!}\right) - \left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{2}{(n+1)!}\right) \\ &= \frac{2}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{-n}{(n+2)!} < 0 \text{ dla każdego } n \in N. \end{aligned}$$

Ciąg $(y_n)$ jest zatem malejący. Ograniczoność tego ciągu z dołu wynika z nierówności $y_n > 0$ dla każdego $n \in N$. Korzystając teraz z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym otrzymamy, że ciąg $(y_n)$ jest zbieżny. Znalezienie granicy tego ciągu wymaga jednak wiadomości z teorii szeregów (ciąg ten jest zbieżny do $e-1$).

c) Zauważmy najpierw, że ciąg $(z_n)$ ma wyrazy dodatnie, a zatem jest ograniczony z dołu. Ponadto dla każdego $n \in N$ mamy

$$z_{n+1} = z_n \cdot \frac{1}{1+z_n} < z_n,$$

co oznacza, że ciąg ten jest malejący. Z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym wynika, że ciąg $(z_n)$ jest zbieżny. Niech $g$ oznacza jego granicę. Przechodząc w równości $z_{n+1} = z_n \cdot \frac{1}{1+z_n}$ z $n$ do nieskończoności otrzymamy warunek $g = \frac{g}{1+g}$, stąd $g = 0$.

d*) Pokażemy, że ciąg $(v_n)$ jest rosnący. Rzeczywiście dla $n \in N$ mamy bowiem

$$v_{n+1} = v_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) > v_n.$$

Uzasadnimy teraz, że ciąg jest ograniczony z góry. W tym celu wykorzystamy nierówność

$$1 + x < e^x \text{ dla } x > 0.$$

Stosując ją do każdego czynnika wyrazu $v_n$ otrzymamy

$$v_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right) < e^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2^2}} \cdot \ldots \cdot e^{\frac{1}{2^n}}$$

Ponieważ

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1$$

oraz wykorzystując fakt, że funkcja $e^x$ jest rosnąca, mamy

$$v_n < e^1 = e.$$

Zatem ciąg $(v_n)$ jest ograniczony z góry przez liczbę $e$. Z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym wynika, że ciąg ten jest zbieżny.

## • Przykład 2.2

Korzystając z definicji liczby $e$ oraz z twierdzenia o granicy podciągu obliczyć podane granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^{6n}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{2n^2+4n}}{(n^2+2n)^{n^2+2n}}$; e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n}{4n+1}\right)^{n}$; f) $\lim\limits_{n\to\infty}(0.\underbrace{99\ldots9}_{n\text{ „dziewiątek"}})^{10^n}$.

### Rozwiązanie

a) Mamy

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^{6n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left[\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^{2n+3}\right]^3}{\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^9} = \frac{e^3}{(1+0)^9} = e^3.$$

b) Niech, w przeprowadzonych niżej obliczeniach, liczba $n$ będzie większa od 1. Wtedy mamy

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)} = \frac{e}{e\cdot 1} = 1.$$

c) Zauważmy najpierw, że ciąg $x_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$ jest podciągiem ciągu $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, dla każdego $n \in N$ spełnia zatem nierówności $2 < x_n < 3$. Nierówności te wynikają z metody dowodu zbieżności ciągu $(e_n)$ do granicy $e$. Ponieważ

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}},$$

więc dla każdego $n \in N$ spełnione są nierówności

$$\sqrt[n]{2} < \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n < \sqrt[n]{3}.$$

Ciągi ograniczające ciąg $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$ są zbieżne do granicy 1. Z twierdzenia o trzech ciągach wynika zatem, że również ciąg $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$ jest zbieżny do granicy 1.

d) Mamy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{2n^2+4n}}{(n^2+2n)^{n^2+2n}} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)^2}{n^2+2n}\right]^{n^2+2n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right]^{n^2+2n} = \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n^2+2n}\right]^{n^2+2n} = e.$$

Ostatnia równość wynika z faktu, że ciąg $\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n^2+2n}$ jest podciągiem ciągu $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, który ma granicę $e$.

e) Mamy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n}{4n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{4n+1}{4n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{4n}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}.$$

W rozwiązaniu korzystaliśmy z faktu, że ciąg $\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{4n}$ jest podciągem ciągu $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ zbieżnego do $e$ oraz z twierdzenia o granicy pierwiastka ciągu, tzn. z równości

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[4]{x_n} = \sqrt[4]{\lim_{n\to\infty} x_n}, \quad \text{gdzie } x_n \geqslant 0 \text{ dla } n \in N.$$

f) Mamy

$$\lim_{n\to\infty}(0,\underbrace{99\ldots 9}_{n\text{ „dziewiątek"}})^{10^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)^{10^n} = \frac{1}{e}.$$

Tutaj korzystaliśmy z równości

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

oraz z faktu, że ciąg $\left(1-\frac{1}{10^n}\right)^{10^n}$ jest podciągiem ciągu $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

- **Przykład 2.3**

Korzystając z twierdzenia o dwóch ciągach znaleźć podane granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n^4+(-1)^n n\right]$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-n^2}{n-\sin n}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[3^n+(-2)^n\right]$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\sin n-n}$; e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{1}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$; f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{E\left(n^3\sqrt{2}\right)}{E\left(\sqrt{n^2+1}\right)}$.

**Rozwiązanie**

a) Pokażemy, że granicą ciągu $a_n=n^4+(-1)^n n$ jest $\infty$. W tym celu wskażemy ciąg $(b_n)$, który spełnia nierówność $b_n\leqslant a_n$ oraz jest zbieżny do $\infty$. Mamy

$$a_n=n^4+(-1)^n n\geqslant n^4-n\geqslant\frac{n^4}{2}\ \text{dla}\ n\geqslant 2$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{2}=\infty.$$

Stosując teraz twierdzenie o dwóch ciągach do ciągów $a_n=n^4+(-1)^n$ oraz $b_n=\dfrac{n^4}{2}$ otrzymamy, że

$$\lim_{n\to\infty}\left[n^4+(-1)^n n\right]=\infty.$$

b) Zauważmy, że dla $n\geqslant 2$ spełniona jest nierówność

$$a_n=\frac{1-n^2}{n-\sin n}\leqslant\frac{1-n^2}{n+1}=1-n.$$

Ponadto $\lim\limits_{n\to\infty}(1-n)=-\infty$. Zatem stosując twierdzenie o dwóch ciągach do ciągów $(a_n)$ i $(b_n)=(1-n)$ otrzymamy, że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-n^2}{n-\sin n}=-\infty.$$

c) Pokażemy, że granicą ciągu $a_n=3^n+(-2)^n$ jest $\infty$. W tym celu wskażemy ciąg $(b_n)$, który ma granicę $\infty$ i wyrazy nie większe od odpowiednich wyrazów ciągu $(a_n)$. Uzasadnimy niżej, że dla każdego $n\geqslant 2$ prawdziwa jest nierówność

$$a_n=3^n+(-2)^n\geqslant\frac{1}{2}\cdot 3^n=b_n.$$

Dla parzystych $n$ nierówność ta jest oczywista. Dla nieparzystych $n$ mamy

$$3^n-2^n\geqslant\frac{1}{2}\cdot 3^n\iff\left(\frac{3}{2}\right)^n\geqslant 2.$$

Przy czym ostatnia nierówność jest prawdziwa dla $n\geqslant 2$, więc uzasadniana nierówność jest również prawdziwa dla $n\geqslant 2$. Ponieważ ciąg $(b_n)$ jest zbieżny do $\infty$, więc z twierdzenia o dwóch ciągach wynika, że również ciąg $(a_n)$ jest zbieżny do $\infty$.

d) Pokażemy, że granicą ciągu $a_n=\sqrt[3]{\sin n-n}$ jest $-\infty$. W tym celu wskażemy ciąg $(b_n)$, który ma granicę $-\infty$ i wyrazy nie mniejsze od odpowiednich wyrazów ciągu $(a_n)$. Pokażemy, że prawdziwa jest nierówność

$$a_n=\sqrt[3]{\sin n-n}\leqslant\sqrt[3]{1-n}=b_n\ \text{dla}\ n\in N.$$

Nierówność ta wynika z oczywistej nierówności $|\sin x| \leqslant 1$ dla $x \in \boldsymbol{R}$. Ponieważ ciąg $(b_n)$ jest zbieżny do $-\infty$, więc z twierdzenia o dwóch ciągach wynika, że ciąg $(a_n)$ także jest zbieżny do $-\infty$.

e) Pokażemy, że granicą ciągu $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ jest $\infty$. Wskażemy ciąg $(b_n)$, który jest zbieżny do $\infty$ i ma wyrazy nie większe od odpowiednich wyrazów ciągu $(a_n)$. Mamy

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \geqslant \underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}_{n-\text{składników}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \sqrt[3]{n^2} = b_n.$$

Ponieważ ciąg $(b_n)$ jest zbieżny do $\infty$, więc z twierdzenia o dwóch ciągch wynika, że ciąg $(a_n)$ także jest zbieżny do $\infty$.

**f)** W rozwiązaniu wykorzystamy nierówność z funkcją część całkowita $x - 1 < E(x) \leqslant x$ dla $x \in \boldsymbol{R}$. Mamy

$$\frac{E\left(n^3\sqrt{2}\right)}{E\left(\sqrt{n^2+1}\right)} \geqslant \frac{n^3\sqrt{2}-1}{\sqrt{n^2+1}} \text{ dla } n \in \boldsymbol{N}.$$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3\sqrt{2}-1}{\sqrt{n^2+1}} = \infty$, więc z twierdzenia o dwóch ciągach wynika, że badany ciąg także ma granicę $\infty$.

- **Przykład 2.4**

Korzystając z tabelki działań z symbolem $\infty$ obliczyć podane granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)^n$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)3^n}{n\left(2^n+1\right)}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+3n}-n\right)$; e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(7^n - 6^n - 5^n\right)$; f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{\sqrt{n}}$.

**Rozwiązanie**

**a)** Zauważmy najpierw, że dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$ spełniona jest nierówność $\cos\frac{1}{n} < 1$. Stąd wynika, że ciąg $1 - \cos\frac{1}{n}$ ma wyrazy dodatnie . Ponadto mamy

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Zatem

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)^n = \left(0^+\right)^\infty = 0.$$

**b)** Mamy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)3^n}{n\left(2^n+1\right)} \overset{:n3^n}{\underset{:n3^n}{=}} \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{2+0}{0^+ + 0^+} = \frac{2}{0^+} = \infty.$$

c) Mamy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}$$
$$\overset{*}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)-n}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} = \frac{3}{\infty} = 0.$$

W miejscu oznaczonym $*$ korzystaliśmy ze wzoru $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

d) Mamy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+3n}-n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{n^3+3n}-n\right)\left(\sqrt[3]{(n^3+3n)^2}+n\sqrt[3]{n^3+3n}+n^2\right)}{\sqrt[3]{(n^3+3n)^2}+n\sqrt[3]{n^3+3n}+n^2}$$
$$\overset{*}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^3+3n\right)-n^3}{\sqrt[3]{(n^3+3n)^2}+n\sqrt[3]{n^3+3n}+n^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\left(\sqrt[3]{(n^3+3n)^2}+n\sqrt[3]{n^3+3n}+n^2\right)}$$
$$\overset{:n}{\underset{:n}{=}} \lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt[3]{n^3+6n+\frac{9}{n}}+\sqrt[3]{n^3+3n}+n} = \frac{3}{\infty} = 0.$$

W miejscu oznaczonym $*$ korzystaliśmy ze wzoru $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$.

e) Mamy

$$\lim_{n\to\infty}\left(7^n-6^n-5^n\right) = \lim_{n\to\infty}\left\{7^n\left[1-\left(\frac{6}{7}\right)^n-\left(\frac{5}{7}\right)^n\right]\right\} = \infty\cdot(1-0-0)=\infty.$$

f) Mamy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}\right)^{\sqrt{n}} = 2^{\infty} = \infty.$$

## • Przykład 2.5

Znaleźć zbiory punktów skupienia (właściwych i niewłaściwych) podanych ciągów:

a) $x_n = 3+2\cdot(-1)^n$; b) $y_n = n\sin\frac{n\pi}{2}$;

c) $z_n = \dfrac{(1+(-1)^n)\,n}{n+1}$; d) $v_n = (-1)^n + 5\cdot(-1)^{E\left(\frac{n}{3}\right)}$.

**Rozwiązanie**

Liczbę $a$ (skończoną lub nieskończoną) nazywamy punktem skupienia ciągu, jeżeli istnieje jego podciąg zbieżny do granicy $a$.

a) Zbiór punktów skupienia ciągu $(x_n)$ ma postać $S=\{1,5\}$. Podciągami ciągu $(x_n)$ o granicach 1 i 5 są odpowiednio:

$$x'_k = x_{2k-1} = 3+2\cdot(-1)^{2k-1} = 3-2 = 1, \qquad x''_k = x_{2k} = 3+2\cdot(-1)^{2k} = 3+2 = 5.$$

Inne podciągi zbieżne ciągu $(x_n)$ różnią się od podciągów $(x'_k)$ i $(x''_k)$ jedynie dla skończonej liczby indeksów $k$ lub też są podciągami tych podciągów. Podciągi te mają oczywiście te same granice: 1 i 5.

b) Zbiór punktów skupienia ciągu $(y_n)$ ma postać $S = \{-\infty, 0, \infty\}$. Podciągami ciągu $(y_n)$ o granicach $-\infty$, 0, $\infty$ są odpowiednio:

$$y'_k = y_{4k-1} = (4k-1)\sin\frac{(4k-1)\pi}{2} = (4k-1)(-1) = 1-4k,$$

$$y''_k = y_{2k} = 2k\sin\frac{(2k)\pi}{2} = 2k\cdot 0 = 0,$$

$$y'''_k = y_{4k-3} = (4k-3)\sin\frac{(4k-3)\pi}{2} = (4k-3)\cdot 1 = 4k-3.$$

Inne podciągi zbieżne ciągu $(y_n)$ różnią się od podciągów $(y'_k)$, $(y''_k)$, $(y'''_k)$ jedynie dla skończonej liczby indeksów $k$ lub też są podciągami tych podciągów. Podciągi te mają oczywiście te same granice: $-\infty$, 0, $\infty$.

c) Zbiór punktów skupienia ciągu $(z_n)$ ma postać $S = \{0, 2\}$. Podciągami ciągu $(z_n)$ o granicach 0 i 2 są odpowiednio:

$$z'_k = z_{2k-1} = \left(1+(-1)^{2k-1}\right)\frac{2k-1}{2k} = 0, \quad z''_k = z_{2k} = \left(1+(-1)^{2k}\right)\frac{2k}{2k+1} = \frac{4k}{2k+1}.$$

Inne podciagi zbieżne ciągu $(z_n)$ różnią się od podciągów $(z'_k)$, $(z''_k)$ jedynie dla skończonej liczby indeksów $k$ lub też są podciągami tych podciągów. Podciągi te mają oczywiście te same granice 0 i 2.

d) Zauważmy najpierw, że ciągi $a_n = (-1)^n$ oraz $b_n = 5\cdot(-1)^{E\left(\frac{n}{3}\right)}$ są okresowe od pewnego miejsca. Ciąg $(a_n)$ ma okres $T_1 = 2$ a ciąg $(b_n)$ okres $T_2 = 6$. Ciąg $(v_n)$, który jest sumą ciągów $(a_n)$ i $(b_n)$, jest także okresowy i ma okres $T = 6$. Obliczymy teraz kilkanaście początkowych wyrazów ciągu $(v_n)$. Mamy

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | $-1$ | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ |
| $b_n$ | 5 | 5 | $-5$ | $-5$ | $-5$ | 5 | 5 | 5 | $-5$ | $-5$ | $-5$ | 5 | 5 |
| $v_n$ | 4 | 6 | $-6$ | $-4$ | $-6$ | 6 | 4 | 6 | $-6$ | $-4$ | $-6$ | 6 | 4 |

itd.

Stąd $S = \{-6, -4, 4, 6\}$.

## • Przykład 2.6

Znaleźć granice dolne i górne podanych ciągów:

a) $x_n = 3^{4+(-1)^n}$; b) $y_n = \left[(-1)^n - 2\right]^{n+1}$;

c) $z_n = \sin\frac{n\pi}{2} + \cos\frac{n\pi}{3}$; d) $w_n = 5^n \operatorname{tg}\frac{n\pi}{3}$.

**Rozwiązanie**

a) Zbiór punktów skupienia ciągu $(x_n)$ ma postać $S = \{3^3, 3^5\}$, zatem

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = 27 \qquad \text{oraz} \qquad \varlimsup_{n\to\infty} x_n = 243.$$

b) Zbiór punktów skupienia ciągu $(y_n)$ ma postać $S = \{-1, \infty\}$, zatem

$$\varliminf_{n\to\infty} z_n = -1 \qquad \text{oraz} \qquad \varlimsup_{n\to\infty} z_n = \infty.$$

c) Zbiór punktów skupienia ciągu $(z_n)$ ma postać $S = \left\{-2, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right\}$, zatem

$$\varliminf_{n\to\infty} z_n = -2 \qquad \text{oraz} \qquad \varlimsup_{n\to\infty} z_n = \frac{3}{2}.$$

d) Zbiór punktów skupienia ciągu $(w_n)$ ma postać $S = \{-\infty, 0, \infty\}$, zatem

$$\varliminf_{n\to\infty} w_n = -\infty \qquad \text{oraz} \qquad \varlimsup_{n\to\infty} w_n = \infty.$$

# Zadania

## ○ Zadanie 2.1

Korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym uzasadnić zbieżność podanych ciągów:

a) $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$; b) $b_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$;

c) $c_n = \dfrac{n^3}{10^n}$; d) $d_n = \dfrac{1}{4^1+1!} + \dfrac{1}{4^2+2!} + \ldots + \dfrac{1}{4^n+n!}$;

e) $e_n = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\ldots\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$;

f*) $f_1 = \dfrac{1}{2}$, $f_{n+1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}(f_n)^2$.

Obliczyć granice ciągów $(a_n)$, $(c_n)$ i $(f_n)$.

## ○ Zadanie 2.2

Korzystając z definicji liczby $e$ oraz z twierdzenia o granicy podciągu obliczyć podane granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{3n+2}\right)^{6n}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3n-2}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+4}{n+3}\right)^{5-2n}$; e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)^{(-1)^n n}$; f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^2-3}$.

## ○ Zadanie 2.3

Korzystając z twierdzenia o dwóch ciągach znaleźć granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^5-10n^6+1\right)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin n-2)\,n^2$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[3+(-1)^n\right]^n$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7^n+5^n}{5^n+3^n}$; e*) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}$; f*) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}\right)$.

## ○ Zadanie 2.4

Korzystając z tabelki działań z symbolem $\infty$ obliczyć podane granice:

a) $a_n = \dfrac{n^2+1}{n}$; b) $b_n = \left(\dfrac{n+1}{2n}\right)^n$; c) $c_n = \dfrac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+3+\ldots+(2n-1)}$;

d) $d_n = \left(\frac{n^2+1}{n}\right)^{\frac{n}{1-n}}$; e) $e_n = 1 + 2^n - 3^n$; f) $f_n = \frac{n+1}{n\left[\ln(n+1) - \ln n\right]}$;

g) $g_n = \left(n^2 - n + 1\right)^{\cos\frac{1}{n}}$; h) $h_n = \left(\frac{2n+1}{n}\right)^{n+1}$; i) $i_n = \sin^n \frac{1}{n}$.

○ **Zadanie 2.5**

Znaleźć zbiory punktów skupienia (właściwych i niewłaściwych) podanych ciągów:

a) $x_n = (-1)^n$; b) $y_n = \cos\frac{n\pi}{3}$; c) $z_n = 2^n + (-2)^n$;

d*) $w_n = \sqrt{n} - E\left(\sqrt{n}\right)$; e*) $v_n = (-1)^{E\left(\frac{n}{2}\right)} + 4\cdot(-1)^{E\left(\frac{n}{3}\right)}$.

○ **Zadanie 2.6**

Znaleźć granice dolne i górne podanych ciągów:

a) $x_n = 2-(-1)^n$; b) $y_n = \left[1+(-1)^n\right]n$; c) $z_n = \sin\frac{n\pi}{4}$; d) $v_n = (-5)^n + 1$;

e*) $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.22$, $w_3 = 0.333, \ldots, w_{15} = 0.\underbrace{1515\ldots15}_{\text{piętnaście „15"}}, \ldots$ .

# Odpowiedzi i wskazówki

**2.1** Wskazówki: **a)** ciąg $(a_n)$ jest malejący i ograniczony z dołu np. przez $m = 0$, granicą tego ciągu jest 0; **b)** ciąg $(b_n)$ jest rosnący i ograniczony z góry np. przez $M = 1$, granicą tego ciągu jest $\ln 2$; **c)** ciąg $(c_n)$ jest malejący i ograniczony z dołu np. przez $m = 0$; **d)** ciąg $(d_n)$ jest rosnący i ograniczony z góry np. przez $M = \frac{1}{3}$; **e)** ciąg $(e_n)$ jest malejący i ograniczony z dołu np. przez $m = 0$; **f*)** 1, ciąg $(f_n)$ jest rosnący i ograniczony z góry przez $M = 1$.

**2.2 a)** $e^{-2}$; **b)** $\frac{1}{e}$; **c)** $e^3$; **d)** $\frac{1}{e^2}$; **e)** $e$; **f)** $e^{-2}$.

**2.3 a)** $-\infty$; **b)** $-\infty$; **c)** $\infty$; **d)** $\infty$; **e*)** $\infty$. Wskazówka. Wykorzystać nierówność $n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n$ dla $n \geqslant 6$; **f*)** $\infty$. Wskazówka. Wykorzystać nierówność $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n} \geqslant 1+\frac{n}{2}$ dla $n \in N$.

**2.4 a)** $\infty$; **b)** 0; **c)** 0; **d)** 0; **e)** $-\infty$; **f)** $\infty$; **g)** $\infty$; **h)** $\infty$; **i)** 0.

**2.5 a)** $S = \{-1, 1\}$; **b)** $S = \left\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$; **c)** $S = \{0, \infty\}$; **d*)** $S = [0, 1]$; **e*)** $S = \{-5, -3, 3, 5\}$.

**2.6 a)** $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 1$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 3$; **b)** $\underline{\lim}_{n\to\infty} y_n = 0$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} y_n = \infty$; **c)** $\underline{\lim}_{n\to\infty} z_n = -1$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} z_n = 1$; **d)** $\underline{\lim}_{n\to\infty} v_n = -\infty$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} v_n = \infty$; **e*)** $\underline{\lim}_{n\to\infty} w_n = 0.1$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} w_n = 1$.

# 2

# GRANICE FUNKCJI

## Trzeci tydzień

| |
|---|
| **Podstawowe określenia (2.1). Twierdzenia o granicach właściwych funkcji (2.2). Twierdzenia o granicach niewłaściwych funkcji (2.3) Asymptoty funkcji (2.4).** |

## Przykłady

### • Przykład 3.1

Korzystając z definicji Heinego granicy funkcji uzasadnić podane równości:

a) $\lim\limits_{x\to 4}(2x-7)=1$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x+1}=2$;

c) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\infty$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-x^2\right)=-\infty$.

**Rozwiązanie**

W rozwiązaniu wykorzystamy definicję Heinego granicy funkcji $f$:

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \overset{def}{\iff} \bigwedge_{\substack{(x_n)\\ \{x_n\}\subset S(a)}} \left[\left(\lim_{n\to\infty} x_n=a\right) \Longrightarrow \left(\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=A\right)\right],$$

gdzie $a$ jest jednym z symboli $x_0$, $x_0^-$, $x_0^+$, $-\infty$, $\infty$, natomiast $A$ jest jednym z symboli $g$, $-\infty$, $\infty$.

a) Mamy pokazać, że

$$\bigwedge_{\substack{(x_n)\\ \{x_n\}\subset S(4)}} \left[\left(\lim_{n\to\infty} x_n=4\right) \Longrightarrow \left(\lim_{n\to\infty}(2x_n-7)=1\right)\right].$$

Niech $(x_n)$ będzie dowolnym ciągiem spełniającym warunki: $\{x_n\}\subset S(4)$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=4$. Wtedy

$$\lim_{n\to\infty}(2x_n-7)=2\cdot\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)-\lim_{n\to\infty} 7=2\cdot 4-7=1.$$

Korzystaliśmy tu z twierdzeń o granicy iloczynu i granicy różnicy ciągów.

b) Mamy pokazać, że

$$\bigwedge_{(x_n)}\left[\left(\lim_{n\to\infty} x_n=\infty\right)\Longrightarrow\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2x_n}{x_n+1}=2\right)\right].$$

Niech $(x_n)$ będzie dowolnym ciągiem spełniającym warunek: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$ Nie zmniejszając ogólności rozważań możemy założyć, że $x_n>0$ dla każdego $n\in\boldsymbol{N}$. Wtedy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2x_n}{x_n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{x_n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2}{\lim\limits_{n\to\infty} 1+\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}}=\frac{2}{1+\frac{1}{\infty}}=\frac{2}{1+0}=2.$$

Korzystaliśmy tu z twierdzeń o granicy sumy oraz granicy ilorazu ciągów, a także ze wzoru: $\frac{a}{\infty}=0$ dla $|a|<\infty$.

c) Mamy pokazać, że

$$\bigwedge_{\substack{(x_n)\\ (x_n)\subset S(0^+)}}\left[\left(\lim_{n\to\infty} x_n=0\right)\Longrightarrow\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x_n}}=\infty\right)\right].$$

Niech $(x_n)$ będzie dowolnym ciągiem spełniającym warunki: $x_n\in S\left(0^+\right)$ dla każdego $n\in\boldsymbol{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$. Wtedy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x_n}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}}=\frac{1}{0^+}=\infty.$$

Korzystaliśmy tu z twierdzenia o granicy ilorazu, granicy pierwiastka oraz ze wzoru: $\frac{a}{0^+}=\infty$ dla $0<a\leqslant\infty$.

d) Mamy pokazać, że

$$\bigwedge_{(x_n)}\left[\left(\lim_{n\to\infty} x_n=-\infty\right)\Longrightarrow\left(\lim_{n\to\infty}\left(1-x_n^2\right)=-\infty\right)\right].$$

Niech $(x_n)$ będzie dowolnym ciągiem spełniającym warunek: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$. Wtedy

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-x_n^2\right)=\lim_{n\to\infty} 1-\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^2=1-(-\infty)^2=1-\infty=-\infty.$$

Korzystaliśmy tu z reguł działań z symbolami nieoznaczonymi.

- **Przykład 3.2**

a) W ostrosłupie czworokątnym prawidłowym krawędź podstawy ma długość $p$, a wysokość długość $x$. Niech $R(x)$ oznacza promień kuli opisanej na tym ostrosłupie. Obliczyć granice $\lim\limits_{x\to 0^+} R(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} R(x)$. Czy można podać te granice nie wyznaczając funkcji $R$?

b) Na prostej położone są ładunki punktowe $q$ i $Q$. Odległość między nimi jest zmienna (oznaczamy ją przez $r$). Wartość siły elektrostatycznej działającej między tymi ładunkami wyraża się wzorem $F(r)=|\vec{F}(r)|=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{qQ}{r^2}$. Obliczyć granice $\lim\limits_{r\to 0^+} F(r)$, $\lim\limits_{r\to\infty} F(r)$. Podać interpretację fizyczną otrzymanych wyników.

c) Równanie $ax^3 + 3x - 6 = 0$ ma dla każdego $a > 0$ dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty $x(a)$. Obliczyć granice $\lim\limits_{a\to 0^+} x(a)$, $\lim\limits_{a\to\infty} x(a)$.

Wskazówka. Narysować wykresy funkcji $y = ax^3$, $y = 6 - 3x$ i zbadać położenie punktu wspólnego obu wykresów, gdy $a \longrightarrow 0^+$ oraz, gdy $a \longrightarrow \infty$.

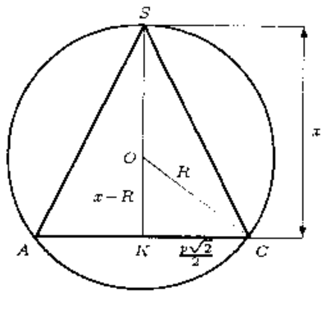
**Rozwiązanie**

a) Na rysunku przedstawiono przekrój poprzeczny ostrosłupa $ABCDS$ płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołki $ACS$. W rozwiązaniu wykorzystamy oznaczenia podane na rysunku. Rozważymy dwa przypadki:

i) trójkąt $ACS$ jest ostrokątny - środek $O$ kuli opisanej na ostrosłupie $ABCDS$ należy wtedy do tego ostrosłupa;

ii) trójkąt $ACS$ jest rozwartokątny - środek $O$ kuli opisanej na ostrosłupie $ABCDS$ nie należy wtedy do tego ostrosłupa. W pierwszym przypadku, stosując twierdzenie Pitagorasa do $\triangle KCO$, otrzymamy

$$(x-R)^2 + \left(\frac{p\sqrt{2}}{2}\right)^2 = R^2.$$




Stąd

$$R = R(x) = \frac{x}{2} - \frac{p^2}{4x} \quad \text{dla} \quad x \geqslant \frac{p\sqrt{2}}{2}.$$

Podobnie

$$R = R(x) = \frac{x}{2} + \frac{p^2}{4x} \quad \text{dla} \quad 0 < x < \frac{p\sqrt{2}}{2}.$$

Zatem

$$\lim_{x\to 0+} R(x) = \lim_{x\to 0+}\left(\frac{x}{2} + \frac{p^2}{4x}\right) = \infty \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to\infty} R(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2} + \frac{p^2}{4x}\right) = \infty.$$

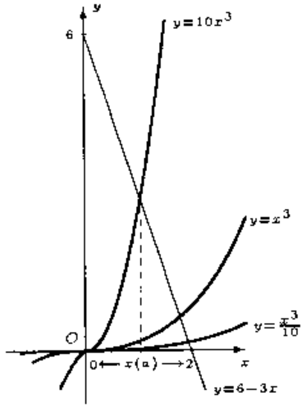
Wynik ten można uzyskać także bez wyznaczania funkcji $R$. Niech punkt $S$ porusza się po symetralnej odcinka $AC$. Wtedy punkt $O$ oddala się nieograniczenie, gdy punkt $S$ oddala się nieograniczenie, tzn. $R(x) \longrightarrow \infty$, gdy $x \longrightarrow \infty$. Podobnie, jeżeli punkt $S$ zbliża się do punktu $K$, to punkt $O$ oddala się nieograniczenie. Oznacza to, że $R(x) \longrightarrow \infty$, gdy $x \longrightarrow 0^+$.

b) Dla funkcji

$$F(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{qQ}{r^2}$$

mamy $\lim\limits_{r\to 0+} F(r) = \infty$ oraz $\lim\limits_{r\to\infty} F(r) = 0$. W interpretacji fizycznej pierwsza równość oznacza, że siła oddziaływania między ładunkami jest dowolnie duża, o ile tylko odległość między nimi jest dostatecznie mała. Natomiast druga równość oznacza, że siła oddziaływania między ładunkami jest dowolnie mała, jeżeli odległość między nimi jest dostatecznie duża.

c) Na rysunku przedstawione są wykresy funkcji $y = ax^3$ dla $a = \frac{1}{10}$, $a = 1$, $a = 10$ oraz wykres funkcji $y = 6 - 3x$. Zauważmy, że gdy $a \longrightarrow 0^+$, to wykres funkcji $y = ax^3$ „zbliża się” do prostej $y = 0$. Podobnie, wykres funkcji $y = ax^3$ „zbliża się” do prostej $x = 0$, gdy $a \longrightarrow \infty$. Zatem $\lim\limits_{a\to 0+} x(a) = 2$ oraz $\lim\limits_{a\to\infty} x(a) = 0$.




## • Przykład 3.3

Uzasadnić, że podane granice nie istnieją:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^3}$; b) $\lim\limits_{x\to 0+} \sin\dfrac{1}{x}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x^2$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$; e) $\lim\limits_{x\to 4} E\left(\sqrt{x}\right)$; f) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}\sin 2x$.

**Rozwiązanie**

W każdym przykładzie wskażemy dwa ciągi zbieżne do granicy właściwej lub niewłaściwej takie, że wartości funkcji na elementach tych ciągów będą miały różne granice.

a) Niech $x_n' = \dfrac{1}{n}$ oraz $x_n'' = -\dfrac{1}{n}$ dla $n \in \boldsymbol{N}$. Wtedy mamy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n' = 0$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n'' = 0$. Ponadto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(x_n'\right)^3} = \lim_{n\to\infty} n^3 = \infty$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(x_n''\right)^3} = \lim_{n\to\infty} \left(-n^3\right) = -\infty.$$

Otrzymaliśmy różne granice, zatem granica $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^3}$ nie istnieje.

b) Niech $x_n' = \dfrac{1}{n\pi}$ oraz $x_n'' = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ dla $n \in \boldsymbol{N}$. Wtedy mamy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n' = 0$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n'' = 0$, przy czym $x_n' > 0$, $x_n'' > 0$ dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$. Ponadto

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n'} = \lim_{n\to\infty} \sin n\pi = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n''} = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Otrzymaliśmy różne granice, zatem granica $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin\frac{1}{x}$ nie istnieje.

c) Niech $x_n' = \sqrt{\frac{\pi}{2}+n\pi}$ oraz $x_n'' = \sqrt{2n\pi}$ dla $n \in N$. Wtedy mamy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n' = \infty$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n'' = \infty$. Ponadto

$$\lim_{n\to\infty} \cos\left(x_n'\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} \cos\left(x_n''\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \cos 2n\pi = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Otrzymaliśmy różne granice, zatem granica $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x^2$ nie istnieje.

d) Niech $x_n' = \frac{1}{n}$ oraz $x_n'' = -\frac{1}{n}$ dla $n \in N$. Wtedy mamy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n' = 0$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n'' = 0$. Ponadto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x_n'}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+e^n} = \frac{1}{1+\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x_n''}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+e^{-n}} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Otrzymaliśmy różne granice, zatem granica $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ nie istnieje.

e) Niech $x_n' = \left(2-\frac{1}{n+1}\right)^2$ oraz $x_n'' = \left(2+\frac{1}{n+1}\right)^2$. Wtedy dla każdej liczby naturalnej zachodzą nierówności $x_n' < 4$ oraz $x_n'' > 4$. Ponadto $\lim\limits_{n\to\infty} x_n' = 4$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n'' = 4$. Obliczając teraz granice wartości funkcji $f(x) = E\left(\sqrt{x}\right)$ dla tych ciągów otrzymamy

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\sqrt{x_n'}\right) = \lim_{n\to\infty} E\left[\sqrt{\left(2-\frac{1}{n+1}\right)^2}\right] = \lim_{n\to\infty} E\left(2-\frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\sqrt{x_n''}\right) = \lim_{n\to\infty} E\left[\sqrt{\left(2+\frac{1}{n+1}\right)^2}\right] = \lim_{n\to\infty} E\left(2+\frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} 2 = 2.$$

Ponieważ otrzymaliśmy różne granice, więc granica $\lim\limits_{x\to 4} E\left(\sqrt{x}\right)$ nie istnieje.

f) Niech $x_n' = -n\pi$ oraz $x_n'' = -n\pi + \frac{\pi}{4}$ dla $n \in N$. Wtedy mamy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n' = -\infty$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n'' = -\infty$. Ponadto

$$\lim_{n\to\infty} e^{-x_n'} \sin 2x_n' = \lim_{n\to\infty} e^{n\pi} \sin(-2n\pi) = 0$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} e^{-x_n''} \sin 2x_n'' = \lim_{n\to\infty} e^{n\pi-\frac{\pi}{4}} \sin\left(-2n\pi+\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} e^{n\pi-\frac{\pi}{4}} = \infty.$$

Otrzymaliśmy różne wartości, zatem granica

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x}\sin 2x$$

nie istnieje.

## • Przykład 3.4

Zbadać, obliczając granice jednostronne, czy istnieją podane granice:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x}}$; c) $\lim\limits_{x\to 0} xE(x)$; d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{sgn}\left(1-x^2\right)}{\operatorname{sgn}\left(x^3-1\right)}$.

**Rozwiązanie**

a) Dla granicy lewostronnej i prawostronnej mamy odpowiednio

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{0^-}=-\infty,\qquad \lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{0^+}=\infty.$$

Ponieważ granice jednostronne są różne, więc badana granica nie istnieje.

b) Dla granicy lewostronnej i prawostronnej mamy odpowiednio

$$\lim_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{0^-}}=e^{-(-\infty)}=e^{\infty}=\infty,\qquad \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{0^+}}=e^{-\infty}=0.$$

Ponieważ granice jednostronne funkcji są różne, więc badana granica nie istnieje.

c) Dla granicy lewostronnej mamy

$$\lim_{x\to 0^-} xE(x)\overset{-1<x<0}{=\!=\!=}\lim_{x\to 0^-}\left[x(-1)\right]=-\lim_{x\to 0^-} x=0.$$

Dla granicy prawostronnej mamy

$$\lim_{x\to 0^+} xE(x)\overset{0\le x<1}{=\!=\!=}\lim_{x\to 0^+}\left[x\cdot 0\right]=\lim_{x\to 0^+} 0=0.$$

Ponieważ granice jednostronne pokrywają się więc badana granica istnieje i jest równa wspólnej wartości granic jednostronnych, czyli 0.

d) Zauważmy najpierw, że dla $0<x<1$ mamy $1-x^2>0$ oraz $x^3-1<0$, zatem $\operatorname{sgn}\left(1-x^2\right)=1$ oraz $\operatorname{sgn}\left(x^3-1\right)=-1$. Podobnie, dla $x>1$ mamy $1-x^2<0$ oraz $x^3-1>0$, zatem $\operatorname{sgn}\left(1-x^2\right)=-1$ oraz $\operatorname{sgn}\left(x^3-1\right)=1$. Przechodzimy teraz do obliczenia granic jednostronnych. Dla granicy lewostronnej mamy

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\operatorname{sgn}\left(1-x^2\right)}{\operatorname{sgn}\left(x^3-1\right)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{-1}=-1,$$

a dla granicy prawostronnej

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\operatorname{sgn}\left(1-x^2\right)}{\operatorname{sgn}\left(x^3-1\right)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-1}{1}=-1.$$

Ponieważ granice jednostronne są jednakowe, więc badana granica jest równa ich wspólnej wartości, tj. $-1$.

- **Przykład 3.5**

Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic obliczyć podane granice:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^3+x^2-x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+x}+2}{\sqrt{1+x^2}}$;

d) $\lim\limits_{x\to 10^6}\dfrac{\sqrt{x}-10^3}{\sqrt[3]{x}-10^2}$; e) $\lim\limits_{x\to 0^-} x^3\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}2x}{\operatorname{sh}x}$.

**Rozwiązanie**

a) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x^3+x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)+(x-1)}{x\left(x^2-1\right)+\left(x^2-1\right)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2+1\right)}{(x-1)(x+1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{(x+1)^2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}\right)\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right)}{x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-(1-x)}{x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right)}=\frac{2}{1+1+1}=\frac{2}{3}.$$

Korzystaliśmy tutaj ze wzoru $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$, z twierdzeń o granicy sumy, iloczynu, ilorazu oraz o granicy pierwiastka funkcji.

c) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x}+2}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}}+\dfrac{2}{x}}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}}=\frac{0}{1}=0.$$

d) W rozwiązaniu wykorzystamy twierdzenie o granicy funkcji złożonej. Dokonując podstawienia $x=t^6$ otrzymamy

$$\lim_{x\to 10^6}\frac{\sqrt{x}-10^3}{\sqrt[3]{x}-10^2}\overset{x=t^6}{=\!=}\lim_{t\to 10}\frac{\sqrt{t^6}-10^3}{\sqrt[3]{t^6}-10^2}=\lim_{t\to 10}\frac{t^3-10^3}{t^2-10^2}=\lim_{t\to 10}\frac{(t-10)\left(t^2+10t+10^2\right)}{(t-10)(t+10)}$$
$$=\lim_{t\to 10}\frac{t^2+10t+10^2}{t+10}=\frac{3\cdot 10^2}{2\cdot 10}=15.$$

e) Zauważmy najpierw, że

$$\lim_{x\to 0^-}\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}\overset{u=\frac{1}{x}}{=\!=}\lim_{u\to-\infty}\operatorname{arcctg}u=\pi.$$

Zatem

$$\lim_{x\to 0^-}x^3\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}=0\cdot\pi=0.$$

f) W rozwiązaniu wykorzystamy definicję funkcji sinus hiperboliczny. Mamy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}2x}{\operatorname{sh}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}}{\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{x}+e^{-x}\right)\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{e^{x}-e^{-x}}=\lim_{x\to 0}\left(e^{x}+e^{-x}\right)=1+1=2.$$

- **Przykład 3.6**

Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach uzasadnić podane równości:

a) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+\sin x}{x^2-\cos x}=1$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{E(x)}{x+1}=1$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(2^x+1\right)}{\ln\left(3^x+1\right)}=\log_3 2$; e) $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)^3E(x)$; f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{E(3x)}{E(x)}=3$.

**Rozwiązanie**

a) Dla każdego $x\neq 0$ mamy $-|x|\leqslant x\sin\frac{1}{x}\leqslant|x|$. Funkcje ograniczające spełniają warunki: $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$ . Zatem z twierdzenia o trzech funkcjach wynika, że

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

b) Dla każdego $x>1$ spełnione są nierówności

$$\frac{x^2-1}{x^2+1}\leqslant\frac{x^2+\sin x}{x^2-\cos x}\leqslant\frac{x^2+1}{x^2-1}.$$

Funkcje ograniczające spełniają warunki:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=1,\qquad\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=1.$$

Z twierdzenia o trzech funkcjach wynika zatem, że

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+\sin x}{x^2-\cos x}=1.$$

c) Dla każdego $x>0$ mamy

$$\frac{x-1}{x+1}\leqslant\frac{E(x)}{x+1}\leqslant\frac{x}{x+1}.$$

Funkcje ograniczające spełniają warunki:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1}=1,\qquad\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}=1.$$

Z twierdzenia o trzech funkcjach wynika zatem, że $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{E(x)}{x+1}=1$.

d) Dla każdego $x>0$ spełnione są nierówności:

$$\frac{x\ln 2}{(x+1)\ln 3}=\frac{\ln 2^x}{\ln\left(3^x+3^x+3^x\right)}\leqslant\frac{\ln\left(2^x+1\right)}{\ln\left(3^x+1\right)}\leqslant\frac{\ln\left(2^x+2^x\right)}{\ln 3^x}=\frac{(x+1)\ln 2}{x\ln 3}.$$

Funkcje ograniczające spełniają warunki:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\ln 2}{(x+1)\ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)\ln 2}{x\ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

Z twierdzenia o trzech funkcjach wynika zatem, że

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2^x+1)}{\ln(3^x+1)} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = \log_3 2.$$

e) W rozwiązaniu wykorzystamy nierówność

$$1 \leqslant E(x) \leqslant 2 \ \text{ dla } x \in (1,3).$$

Zatem mamy

$$(x-2)^3 \leqslant (x-2)^3 E(x) \leqslant 2(x-2)^3 \ \text{ dla } x \in (1,3).$$

Funkcje ograniczające spełniają warunki:

$$\lim_{x\to 2} (x-2)^3 = 0, \qquad \lim_{x\to 2} 2(x-2)^3 = 0.$$

Z twierdzenia o trzech funkcjach wynika zatem, że

$$\lim_{x\to 2} (x-2)^3 E(x) = 0.$$

f) Dla $x \in \boldsymbol{R}$ spełnione są nierówności:

$$x-1 < E(x) \leqslant x, \qquad 3x-1 < E(3x) \leqslant 3x.$$

Zatem dla $x<0$ zachodzą nierówności

$$\frac{3x}{x-1} \leqslant \frac{E(3x)}{E(x)} \leqslant \frac{3x-1}{x}.$$

Ponieważ funkcje ograniczające spełniają warunki:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{x-1} = 3, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{3x-1}{x} = 3,$$

więc z twierdzenia o trzech funkcjach wynika, że

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{E(3x)}{E(x)} = 3.$$

## • Przykład 3.7

Korzystając z twierdzenia o dwóch funkcjach uzasadnić podane równości:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} (2\sin x - x) = -\infty$; b) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-x}} = \infty$; c) $\lim\limits_{x\to 3^-} E\left(\dfrac{x^2}{3-x}\right) = \infty$.

**Rozwiązanie**

a) Dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$ prawdziwa jest nierówność $2\sin x - x \leqslant 2 - x$. Funkcja ograniczająca z góry spełnia równość $\lim\limits_{x\to\infty}(2-x)=-\infty$. Z twierdzenia o dwóch funkcjach wynika zatem, że

$$\lim_{x\to\infty}(2\sin x - x) = -\infty.$$

b) Zauważmy, że dla każdego $-1<x<0$ spełniona jest nierówność

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-x}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{0-x}} = \frac{1}{\sqrt{-x}}.$$

Funkcja ograniczająca z dołu spełnia warunek $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{\sqrt{-x}}=\infty$. Zatem żądana równość wynika z twierdzenia o dwóch funkcjach.

c) W rozwiązaniu wykorzystamy nierówność $E(x)>x-1$ dla $x\in\boldsymbol{R}$. Mamy zatem

$$E\left(\frac{x^2}{3-x}\right) \geqslant \frac{x^2}{3-x}-1=\frac{x^2+x-3}{3-x} \qquad \text{dla } 2<x<3.$$

Ponieważ

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x^3+x-3}{3-x}=\frac{9}{0^+}=\infty,$$

więc z twierdzenia o dwóch funkcjach wynika, że

$$\lim_{x\to 3^-}E\left(\frac{x^2}{3-x}\right)=\infty.$$

## • Przykład 3.8

Korzystając z granic podstawowych wyrażeń nieoznaczonych obliczyć podane granice:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$; b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\pi-2x}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{2x}}{\operatorname{tg} x}$; e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x+7}\right)^{x+1}$; f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^5 5x\cdot\cos^{17}17x}{\cos^9 9x\cdot\cos^{13}13x}$;

g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(2^x+1)}{\ln(3^x+1)}$; h) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\operatorname{tg}^3\sqrt{x}}{x}$; i*) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x-x^2}{x-2}$.

**Rozwiązanie**

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\dfrac{\sin 5x}{5x}}{3\cdot\dfrac{\sin 3x}{3x}}=\frac{5\cdot 1}{3\cdot 1}=\frac{5}{3}$$

Korzystaliśmy tutaj z równości $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1$.

b) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x}\ \boxed{\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+u\\ u\longrightarrow 0\end{array}}=\lim_{u\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+u\right)}{\pi-2\left(\frac{\pi}{2}+u\right)}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{-\sin u}{-2u}=\frac{1}{2}\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

c) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)-\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}.$$

d) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{2x}}{\operatorname{tg} x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot 2}{\frac{\operatorname{tg} x}{x}}=-\frac{1\cdot 2}{1}=-2.$$

Korzystaliśmy tutaj z równości: $\lim\limits_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}=1$, $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\operatorname{tg} u}{u}=1$.

e) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5}{3x+7}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{3x+7}{3x+5}\right)^{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left[\left(1+\frac{1}{\frac{3x+5}{2}}\right)^{\frac{3x+5}{2}}\right]^{\frac{2(x+1)}{3x+5}}}=\frac{1}{e^{\frac{2}{3}}}=e^{-\frac{2}{3}}.$$

Korzystaliśmy tutaj z równości $\lim\limits_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u=e$ oraz twierdzenia o granicy potęg.

**f)** Aby uprościć obliczenia granicy dokonamy zmiany punktu granicznego z $\frac{\pi}{2}$ na 0. Mamy

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^5 5x\cdot\cos^{17}17x}{\cos^9 9x\cdot\cos^{13}13x}\xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-t}\lim_{t\to 0}\frac{\left[\cos\left(\frac{5\pi}{2}-5t\right)\right]^5\cdot\left[\cos\left(\frac{17\pi}{2}-17t\right)\right]^{17}}{\left[\cos\left(\frac{9\pi}{2}-9t\right)\right]^9\cdot\left[\cos\left(\frac{13\pi}{2}-13t\right)\right]^{13}}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{(\sin 5t)^5\cdot(\sin 17t)^{17}}{(\sin 9t)^9\cdot(\sin 13t)^{13}}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\left(\frac{\sin 5t}{5t}\right)^5\cdot(5t)^5\cdot\left(\frac{\sin 17t}{17t}\right)^{17}\cdot(17t)^{17}}{\left(\frac{\sin 9t}{9t}\right)^9\cdot(9t)^9\cdot\left(\frac{\sin 13t}{13t}\right)^{13}\cdot(13t)^{13}}$$
$$=\frac{5^5\cdot 17^{17}}{9^9\cdot 13^{13}}\lim_{t\to 0}\frac{\left(\frac{\sin 5t}{5t}\right)^5\left(\frac{\sin 17t}{17t}\right)^{17}}{\left(\frac{\sin 9t}{9t}\right)^9\left(\frac{\sin 13t}{13t}\right)^{13}}$$
$$=\frac{5^5\cdot 17^{17}}{9^9\cdot 13^{13}}\cdot\frac{1^5\cdot 1^{17}}{1^9\cdot 1^{13}}=\frac{5^5\cdot 17^{17}}{9^9\cdot 13^{13}}.$$

g) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(2^x+1)}{\ln(3^x+1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\ln(1+2^x)}{2^x}}{\frac{\ln(1+3^x)}{3^x}}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{1}{1}\cdot\infty=\infty.$$

Korzystaliśmy tutaj z równości:

$$\lim_{x\to-\infty}2^x=\lim_{x\to-\infty}3^x=0,\quad \lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u}=1\quad\text{oraz}\quad\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x=\infty.$$

h) Mamy

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{tg}^3 \sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0+} \left[\operatorname{tg}\sqrt{x} \cdot \left(\frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2\right] = 0 \cdot 1 = 0.$$

i*) Mamy

$$\lim_{x\to 2} \frac{2^x - x^2}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(2^x - 4) - (x^2 - 4)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{2^x - 4}{x-2} - \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$$

$$= 4 \cdot \lim_{x\to 2} \frac{2^{x-2} - 1}{x-2} - \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = 4 \cdot \ln 2 - 4 = 4(\ln 2 - 1).$$

- **Przykład 3.9**

Znaleźć asymptoty pionowe i ukośne podanych funkcji:

a) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$; b) $g(x) = \dfrac{x^3-1}{|x-1|}$; c) $h(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$; d) $p(x) = e^{-x}\sin x + x$.

**Rozwiązanie**

Funkcja elementarna może mieć asymptoty pionowe jedynie w skończonych „krańcach" swej dziedziny, które do niej nie należą. Funkcja może mieć asymptoty ukośne w $-\infty$ lub w $\infty$ tylko wtedy, gdy jej dziedzina jest nieograniczona odpowiednio z dołu lub z góry.

a) Dziedziną funkcji $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ jest zbiór $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Obliczamy zatem granice:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sin x}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Z powyższego wynika, że prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą funkcji $f$ w $-\infty$ i w $\infty$, a prosta $x = 0$ nie jest asymptotą pionową tej funkcji (nawet jednostronną).

b) Dziedziną funkcji $g(x) = \dfrac{x^3-1}{|x-1|}$ jest zbiór $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. Obliczamy zatem granice:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3-1}{|x-1|} = -\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3-1}{x-1} = -\lim_{x\to -\infty} \left(x^2 + x + 1\right) = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3-1}{|x-1|} = -\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3-1}{x-1} = -\lim_{x\to 1^-} \left(x^2 + x + 1\right) = -3;$$

$$\lim_{x\to 1+} \frac{x^3-1}{|x-1|} = \lim_{x\to 1+} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \left(x^2 + x + 1\right) = 3;$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^3-1}{|x-1|} = \lim_{x\to \infty} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to \infty} \left(x^2 + x + 1\right) = \infty$$

Z powyższego wynika, że prosta $x = 1$ nie jest asymptotą pionową (nawet jednostronną) funkcji $g$. Ponieważ granice funkcji $g$ w obu nieskończonościach są niewłaściwe, więc funkcja ta może mieć tam ewentualnie asymptoty ukośne. Współczynnik $A_\pm$ asymptoty ukośnej $y = A_\pm x + B_\pm$ obliczamy ze wzoru:

$$A_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-1}{x|x-1|} = \pm \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-1}{x(x-1)} = \pm \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+x+1}{x} = \infty.$$

Ponieważ współczynnik $A_{\pm}$ nie jest skończony, więc funkcja $g$ nie ma asymptot ukośnych w obu nieskończonościach.

c) Dziedziną funkcji $h(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ jest zbiór $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$. Ponieważ funkcja $h$ jest parzysta, więc wystarczy obliczyć tylko granice:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{0^+} = \infty; \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{0^-} = -\infty; \qquad \lim_{x\to \infty} \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{-\infty} = 0.$$

Z powyższego i z parzystości funkcji $h$ wynika, że proste $x = 1$ oraz $x = -1$ są asymptotami pionowymi obustronnymi funkcji $h$ oraz, że prosta $y = 0$ jest jej asymptotą poziomą w obu nieskończonościach.

d) Dziedziną funkcji $p(x) = e^{-x}\sin x + x$ jest $\boldsymbol{R}$. Obliczamy zatem granice:

$$\lim_{x\to -\infty} \left(e^{-x}\sin x + x\right); \qquad \lim_{x\to \infty} \left(e^{-x}\sin x + x\right).$$

Pierwsza z tych granic nie istnieje, a druga równa się $\infty$. Oznacza to, że funkcja $p$ nie ma asymptoty ukośnej w $-\infty$ oraz, że może mieć ewentualnie asymptotę ukośną w $\infty$. Współczynniki asymptoty ukośnej $y = A_+ x + B_+$ obliczamy ze wzorów:

$$A_+ = \lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}\sin x + x}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{xe^x}\right) = 1;$$

$$B_+ = \lim_{x\to\infty} \left[p(x) - A_+ x\right] = \lim_{x\to\infty} \left[\left(e^{-x}\sin x + x\right) - x\right] = \lim_{x\to\infty} e^{-x}\sin x = 0.$$

Zatem prosta $y = x$ jest asymptotą ukośną funkcji $p$ w $\infty$.

## • Przykład 3.10

Narysować wykresy funkcji spełniających wszystkie podane warunki:

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 3$, funkcja $f$ jest parzysta;

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to \infty} \left(g(x) + x\right) = 0$;

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 4^-} h(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 4^+} h(x) = 0$;

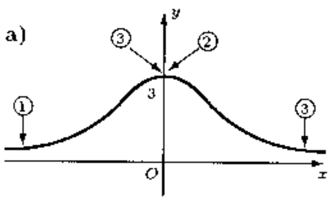
d) funkcja $p$ jest nieparzysta, $\lim\limits_{x\to \infty} p(x)$ nie istnieje, $\lim\limits_{x\to 1} p(x) = -\infty$.

Na rysunkach wskazać fragmenty wykresów spełniające poszczególne warunki.

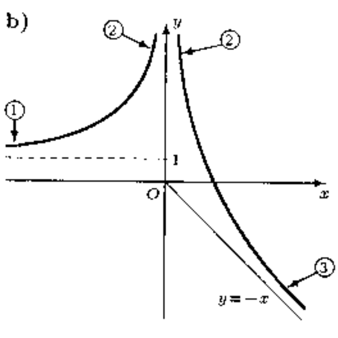
**Rozwiązanie**

Przykładowe wykresy funkcji spełniających podane warunki przedstawiono na rysunkach. Liczba w kółku oznacza numer kolejnego warunku, który spełnia funkcja.

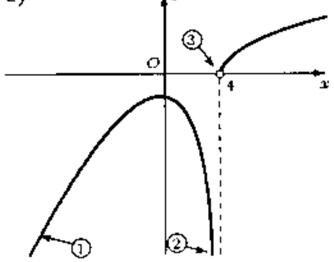
a)



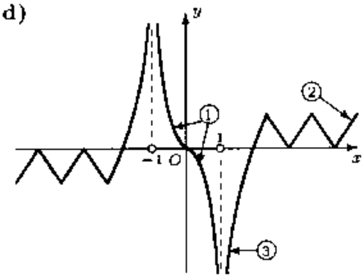

b)



c)




d)




# Zadania

○ **Zadanie 3.1**

Korzystając z definicji Heinego granicy funkcji uzasadnić podane równości:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(3+2x^3\right)=5$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3^{-x}+1\right)=1$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(5-x^7\right)=-\infty$;

d) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2}=\infty$; e) $\lim\limits_{x\to -3^-}\sqrt{x^2-9}=0$; f) $\lim\limits_{x\to -\pi}E(x)=-4$.

○ **Zadanie 3.2**

a) W ostrosłupie trójkątnym prawidłowym krawędź podstawy ma długość $b$, a kąt nachylenia krawędzi bocznej do podstawy ma miarę $x$, gdzie $0<x<\dfrac{\pi}{2}$. Niech $r(x)$ oznacza promień kuli wpisanej w ten ostrosłup. Obliczyć granice $\lim\limits_{x\to 0^+} r(x)$, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} r(x)$. Czy można podać te granice nie wyznaczając funkcji $r$?

b) Cząstka pewnego układu drgającego porusza się po osi $Ox$. Położenie tej cząstki w chwili $t>0$ jest opisane wzorem $x(t)=5-4^{-3t}\cos(2t+1)$. Znaleźć jej graniczne położenie, gdy $t\longrightarrow\infty$. Co oznacza otrzymany wynik?

c) Równanie $ax^4-2x-8=0$ ma dla parametru $a>0$ dwa pierwiastki rzeczywiste $x_1(a)$, $x_2(a)$. Obliczyć granice $\lim\limits_{a\to 0^+}x_1(a)$, $\lim\limits_{a\to 0^+}x_2(a)$, $\lim\limits_{a\to\infty}x_1(a)$, $\lim\limits_{a\to\infty}x_2(a)$.

Wskazówka. Narysować wykresy funkcji $y=ax^4$ oraz $y=2x+8$. Następnie zbadać położenie punktów wspólnych obu wykresów, gdy $a\to 0^+$ oraz, gdy $a\to\infty$.

○ **Zadanie 3.3**

Uzasadnić, że podane granice funkcji nie istnieją:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{4-x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\sqrt{x}$; c) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1}{\sin x}$; d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^{E(x)}}{2^x}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0^-}\cos\dfrac{1}{x^2}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sgn}x}{\operatorname{sgn}(x+1)}$; g) $\lim\limits_{x\to\infty}e^x(1+\sin x)$; h) $\lim\limits_{x\to 5}\Big[x-E(x)\Big]$.

○ **Zadanie 3.4**

Zbadać, obliczając granice jednostronne, czy istnieją podane granice:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{|x-1|^3}{x^3-x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to -1}\operatorname{sgn}\left[x\left(1-x^2\right)\right]$; c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{|2x-\pi|}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{E(x)}{x}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{|x|}$; f) $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

○ **Zadanie 3.5**

Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic obliczyć podane granice:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^6-1}{1-x^2}$; c) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+4}{x(x-5)}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$; f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg} x-\frac{1}{\cos x}\right)$;

g) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$; h) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x+3^x}{3^x+1}$; i) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt[3]{1-x^3}}$.

○ **Zadanie 3.6**

Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach uzasadnić podane równości:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\cos\frac{1}{x^2}=0$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\sin x}{x^2}=0$; c) $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{x+\sin^2 x}=0$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{E\left(3e^x\right)+2}{E\left(2e^x\right)+1}=\frac{3}{2}$; e) $\lim\limits_{x\to 0} x^3 E\left(\frac{1}{x}\right)=0$; f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)-\sin x\right]=0$.

○ **Zadanie 3.7**

Korzystając z twierdzenia o dwóch funkcjach uzasadnić podane równości:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^5-\sin x\right)=\infty$; b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{2x-\sin x}=\infty$; c) $\lim\limits_{x\to\infty} 2^x\left(2+\cos x\right)=\infty$.

○ **Zadanie 3.8**

Korzystając z granic podstawowych wyrażeń nieoznaczonych obliczyć podane granice:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 5x}{\cos 3x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\sin 2x}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{3}}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}{\operatorname{tg}\frac{2}{x}}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^3\sin x^7}{\sin x^4\sin x^6}$; f) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{tg} 3x}{x^3}$;

g) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$; h) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}$; i*) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(2+e^{3x}\right)}{\ln\left(3+e^{2x}\right)}$;

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{2x-1}$; k) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}{x}$; l*) $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x^3-3}{x-e}$.

○ **Zadanie 3.9**
Znaleźć asymptoty pionowe i ukośne podanych funkcji:

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$; b) $g(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$; c) $h(x) = x - \operatorname{arctg} x$;

d) $p(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}$; e) $q(x) = \dfrac{1-x^2}{x+1}$; f) $r(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x^3}$.

○ **Zadanie 3.10**
Narysować wykresy funkcji spełniających wszystkie podane warunki:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 5$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -4$, $\lim\limits_{x\to -1} h(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 4$;

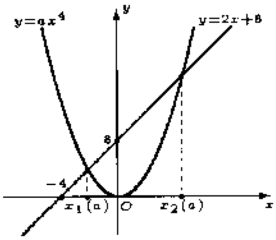
d) $\lim\limits_{x\to 1} p(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 2} p(x) = 0$, funkcja $p$ jest okresowa i ma okres $T = 3$;

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} q(x) = 4$, $\lim\limits_{x\to 1} q(x) = \infty$, funkcja $q$ jest nieparzysta;

f) $\lim\limits_{x\to 0^-} r(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} [r(x) - x] = -1$, funkcja $r$ jest parzysta.

Na rysunkach wskazać fragmenty wykresów spełniające poszczególne warunki.

# Odpowiedzi i wskazówki




**3.2 a)** $\lim\limits_{x\to 0^+} r(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} r(x) = \dfrac{b\sqrt{3}}{6}$;

**b)** $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 5$. Wynik ten oznacza, że cząstka wykonując drgania tłumione względem punktu $x_0 = 5$ zbliża się do niego, gdy $t \longrightarrow \infty$;

**c)** $\lim\limits_{a\to 0^+} x_1(a) = -4$, $\lim\limits_{a\to 0^+} x_2(a) = \infty$, $\lim\limits_{a\to\infty} x_1(a) = 0$, $\lim\limits_{a\to\infty} x_2(a) = 0$.

**3.3** Wskazówka. Rozważyć ciągi: **a)** $x_n' = \sqrt{4 - \dfrac{1}{n}}$, $x_n'' = \sqrt{4 + \dfrac{1}{n}}$; **b)** $x_n' = n^2\pi^2$, $x_n'' = \left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^2$; **c)** $x_n' = \pi + \dfrac{1}{n}$, $x_n'' = \pi - \dfrac{1}{n}$; **d)** $x_n' = n$, $x_n'' = n + \dfrac{1}{2}$; **e)** $x_n' = \dfrac{-1}{\sqrt{2n\pi}}$, $x_n'' = \dfrac{-1}{\sqrt{\pi + 2n\pi}}$; **f)** $x_n' = -\dfrac{1}{n}$, $x_n'' = \dfrac{1}{n}$; **g)** $x_n' = 2n\pi$, $x_n'' = \dfrac{3}{2}\pi + 2n\pi$;

**h)** $x_n' = 5 - \dfrac{1}{n+1}$, $x_n'' = 5 + \dfrac{1}{n+1}$.

**3.4 a)** 0; **b)** nie istnieje, bo $\lim\limits_{x\to -1^-} \operatorname{sgn}\left[x\left(1-x^2\right)\right] = 1$, $\lim\limits_{x\to -1^+} \operatorname{sgn}\left[x\left(1-x^2\right)\right] = -1$;

**c)** $-\infty$; **d)** nie istnieje, bo $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{E(x)}{x} = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{E(x)}{x} = 0$; **e)** nie istnieje, bo $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin x}{|x|} = -1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{|x|} = 1$; **f)** 0.

**3.5 a)** $\dfrac{1}{2}$; **b)** $-3$; **c)** $\dfrac{1}{4}$; **d)** 1; **e)** 2; **f)** 0; **g)** 0; **h)** 1; **i)** $-1$.

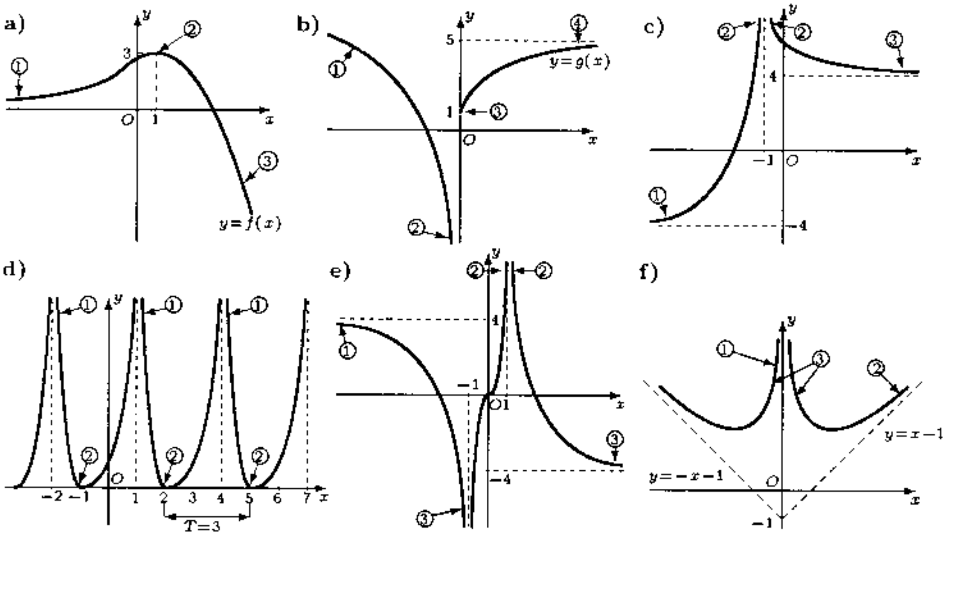
**3.6** Wskazówka. Przyjąć następujące funkcje ograniczające z dołu (d) lub z góry (g) funkcję, której granicę obliczamy: **a)** $d(x) = -\sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x}$; **b)** $d(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \frac{3}{x^2}$; **c)** $d(x) = e^x$, $g(x) = e^{x+1}$; **d)** $d(x) = \frac{3e^x + 1}{2e^x + 1}$, $g(x) = \frac{3e^x + 2}{2e^x}$; **e)** $d(x) = x^3\left(\frac{1}{x} - 1\right)$, $g(x) = x^2$; **f)** $d(x) = -\frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$.

**3.7** Ograniczenia dolne funkcji mają postać: **a)** $d(x) = x^5 - 1$; **b)** $d(x) = \frac{1}{2x}$; **c)** $d(x) = 2^x$.

**3.8** **a)** $-\frac{5}{3}$; **b)** $\frac{3}{2}$; **c)** $\frac{3}{2}$; **d)** $\frac{1}{2}$; **e)** 1; **f)** $\infty$; **g)** 5; **h)** 20; **i*)** $\frac{3}{2}$; **j)** $e^2$; **k)** $\infty$; **l*)** $\frac{3}{e}$.

**3.9** **a)** Prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową obustronną funkcji $f$, prosta $y = -1$ jest asymptotą poziomą tej funkcji w $-\infty$, a prosta $y = 1$ jest jej asymptotą poziomą w $\infty$; **b)** Prosta $x = -1$ jest asymptotą pionową obustronną funkcji $g$, prosta $y = x - 2$ jest asymptotą ukośną tej funkcji w $-\infty$ oraz w $\infty$; **c)** Funkcja $h$ nie ma asymptot pionowych. Prosta $y = x + \frac{\pi}{2}$ jest asymptotą ukośną funkcji $h$ w $-\infty$, a prosta $y = x - \frac{\pi}{2}$ w $\infty$; **d)** Prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową obustronną funkcji $p$, prosta $y = -1$ jest asymptotą poziomą tej funkcji w $-\infty$, a prosta $y = 0$ w $\infty$; **e)** Prosta $y = -x + 1$ jest asymptotą ukośną funkcji $q$ w $-\infty$ oraz w $\infty$. Uwaga. Prosta $x = -1$ nie jest asymptotą pionową tej funkcji (nawet jednostronną); **f)** Prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową obustronną funkcji $r$, a prosta $y = 0$ jest jej asymptotą poziomą w $-\infty$ oraz $\infty$.

**3.10** Przykładowe wykresy funkcji spełniających podane warunki przedstawiono na rysunkach. Liczba w kółku oznacza numer kolejnego warunku, który spełnia funkcja.



# 3

# FUNKCJE CIĄGŁE

## Czwarty tydzień

| |
|---|
| **Ciągłość funkcji (3.1). Nieciągłość funkcji (3.2). Działania na funkcjach ciągłych (3.3). Twierdzenia o funkcjach ciągłych (3.4).** |

### Przykłady

● **Przykład 4.1**

Korzystając z definicji Heinego uzasadnić ciągłość podanych funkcji na $\boldsymbol{R}$ :

a) $f(x) = 2x^3 - 3x + 5$; b) $g(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+1}$; c) $h(x) = \sqrt{x^4+2}$; d) $p(x) = \cos x$.

**Rozwiązanie**

W rozwiązaniach wykorzystamy definicję ciągłości funkcji:
funkcja $f$ jest ciągła na $\boldsymbol{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{x_0 \in \boldsymbol{R}} \bigwedge_{(x_n)} \left[ \left( \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \right) \Longrightarrow \left( \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \right) \right].$$

a) Mamy pokazać, że

$$\bigwedge_{x_0 \in \boldsymbol{R}} \bigwedge_{(x_n)} \left[ \left( \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \right) \Longrightarrow \left( \lim_{n\to\infty} \left( 2x_n^3 - 3x_n + 5 \right) = 2x_0^3 - 3x_0 + 5 \right) \right].$$

Niech $x_0$ będzie dowolną liczbą rzeczywistą oraz niech $(x_n)$ będzie dowolnym ciągiem zbieżnym do $x_0$. Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} \left( 2x_n^3 - 3x_n + 5 \right) = 2 \left( \lim_{n\to\infty} x_n \right)^3 - 3 \left( \lim_{n\to\infty} x_n \right) + \lim_{n\to\infty} 5 = 2x_0^3 - 3x_0 + 5.$$

Korzystaliśmy tutaj z twierdzeń o granicy sumy, różnicy oraz iloczynu ciągów.

b) Mamy pokazać, że

$$\bigwedge_{x_0 \in \boldsymbol{R}} \bigwedge_{(x_n)} \left[ \left( \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \right) \Longrightarrow \left( \lim_{n\to\infty} \frac{2x_n + 3}{x_n^2 + 1} = \frac{2x_0 + 3}{x_0^2 + 1} \right) \right].$$

Niech $x_0$ będzie dowolną liczbą rzeczywistą oraz niech $(x_n)$ będzie dowolnym ciągiem zbieżnym do $x_0$. Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2x_n+3}{x_n^2+1} = \frac{2\lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} 3}{\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)^2 + \lim\limits_{n\to\infty} 1} = \frac{2x_0+3}{x_0^2+1}.$$

Korzystaliśmy tutaj z twierdzeń o granicy sumy, iloczynu oraz ilorazu ciągów

c) Mamy pokazać, że

$$\bigwedge_{x_0\in R}\ \bigwedge_{(x_n)} \left[\left(\lim_{n\to\infty} x_n = x_0\right) \Longrightarrow \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt{(x_n)^4+2} = \sqrt{(x_0)^4+2}\right)\right].$$

Niech $x_0$ będzie dowolną liczbą rzeczywistą oraz niech $(x_n)$ będzie dowolnym ciągiem zbieżnym do $x_0$. Wtedy, korzystając z twierdzeń o granicy ciągów dla potęgi, sumy i pierwiastka, otrzymamy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{(x_n)^4+2} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} (x_n)^4+2} = \sqrt{(x_0)^4+2},$$

co należało pokazać.

d) Mamy pokazać, że

$$\bigwedge_{x_0\in R}\ \bigwedge_{(x_n)} \left[\left(\lim_{n\to\infty} x_n = x_0\right) \Longrightarrow \left(\lim_{n\to\infty} \cos x_n = \cos x_0\right)\right].$$

Niech $x_0$ będzie dowolną liczbą rzeczywistą oraz niech $(x_n)$ będzie dowolnym ciągiem zbieżnym do $x_0$. Pokażemy, że

$$\lim_{n\to\infty} (\cos x_n - \cos x_0) = 0.$$

Stąd wynikać będzie żądana równość. Korzystając z tożsamości

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

oraz nierówność $|\sin\gamma| \leqslant |\gamma|$ mamy

$$0 \leqslant |\cos x_n - \cos x_0| = 2\left|\sin\frac{x_n-x_0}{2}\right| \cdot \left|\sin\frac{x_n+x_0}{2}\right| \leqslant 2\cdot\left|\frac{x_n-x_0}{2}\right| \cdot 1 = |x_n - x_0|.$$

Ostatecznie

$$0 \leqslant |\cos x_n - \cos x_0| \leqslant |x_n - x_0|.$$

Dla $n \longrightarrow \infty$ obie strony ostatniej nierówności dążą do 0. Zatem z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} |\cos x_n - \cos x_0| = 0.$$

Stąd

$$\lim_{n\to\infty} (\cos x_n - \cos x_0) = 0.$$

- **Przykład 4.2**

Określić zbiory punktów ciągłości podanych funkcji:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x^2}{|x-1|} & \text{dla } x \neq 1, \\ 1 & \text{dla } x = 1; \end{cases}$ b) $g(x) = E(x)$;

c) $h(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0; \end{cases}$ d) $p(x) = \dfrac{\operatorname{sgn}(x^2)}{\operatorname{sgn}(x-3)}$.

**Rozwiązanie**

a) Funkcja $f$ jest określona wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^3 - x^2}{x-1} & \text{dla } x < 1, \\ 1 & \text{dla } x = 1, \\ \dfrac{x^3 - x^2}{x-1} & \text{dla } x > 1. \end{cases}$$

Funkcja $f$ jest ciągła na przedziałach $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$, bo jest tam funkcją elementarną. Ciągłość funkcji w punkcie $x_0 = 1$ zbadamy z definicji. Mamy

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \overset{x<1}{=\!=} -\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3 - x^2}{x-1} = -\lim_{x\to 1^-} x^2 = -1$$

oraz

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) \overset{x>1}{=\!=} \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3 - x^2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} x^2 = 1.$$

Zatem $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ nie istnieje, co oznacza, że funkcja $f$ nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 1$.

b) Funkcja $g$ jest określona wzorem: $g(x) = k$ dla $k \leqslant x < k+1$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Funkcja ta jest ciągła na każdym przedziale postaci $(k, k+1)$, bo jest tam funkcją elementarną. Ciągłość funkcji w punktach $x_0 = k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, zbadamy z definicji. Niech punkt $k \in \mathbb{Z}$ będzie ustalony. Wtedy

$$g(x) = \begin{cases} \vdots & \vdots & \vdots \\ k-1 & \text{dla} & k-1 \leqslant x < k, \\ k & \text{dla} & k \leqslant x < k+1, \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{cases}.$$

Stąd

$$\lim_{x\to k^-} g(x) \overset{x<k}{=\!=} \lim_{x\to k^-} (k-1) = (k-1), \qquad \lim_{x\to k^+} g(x) \overset{x>k}{=\!=} \lim_{x\to k^+} k = k.$$

Ponadto $g(k) = k$. Zatem funkcja $g$ nie jest ciągła w punktach $x_0 = k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Ostatecznie funkcja $g$ jest ciągła na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

c) Funkcja $h$ jest ciągła na przedziałach $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$, bo jest tam funkcją elementarną. Ciągłość funkcji $h$ w punkcie $x_0 = 0$ zbadamy korzystając z definicji. Mamy $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$ (zobacz **Przykład 3.6 a)**) oraz $h(0) = 0$. Zatem funkcja $h$ jest ciągła także w punkcie $x_0 = 0$.

**d)** Dziedziną funkcji $p$ jest zbiór $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$. Ponieważ funkcja $\operatorname{sgn}\left(x^2\right)$ jest ciągła na zbiorze $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, więc funkcja $p$ jest ciągła na przedziałach $(-\infty, 0)$, $(0, 3)$, $(3, \infty)$. Zbadamy teraz ciągłość tej funkcji w punkcie $x_0 = 0$ (nie badamy ciągłości funkcji w punkcie 3, bo nie należy on do dziedziny). Mamy $p(0) = 0$ oraz

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sgn}\left(x^2\right)}{\operatorname{sgn}(x-3)} = \frac{1}{-1} = -1.$$

Zatem funkcja $p$ nie jest ciągła w tym punkcie. Ostatecznie funkcja $p$ jest ciągła na zbiorze $(-\infty, 0) \cup (0, 3) \cup (3, \infty)$.

## • Przykład 4.3

Dobrać parametry $a, b \in \mathbf{R}$ tak, aby podane funkcje były ciągłe we wskazanych punktach:

a) $f(x) = \begin{cases} ax + 1 & \text{dla } x \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ \sin x + b & \text{dla } x > \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$ $\quad x_0 = \dfrac{\pi}{2}$;

b) $g(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{a}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ b & \text{dla } x = 0, \end{cases}$ $\quad x_0 = 0$.

**Rozwiązanie**

**a)** Funkcja $f$ jest ciągła lewostronnie w punkcie $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$, bo jest funkcją liniową na przedziale $\left(-\infty, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Obliczamy granicę prawostronną funkcji $f$ w punkcie $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Mamy

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} f(x) \overset{x > \frac{\pi}{2}}{=\!=\!=} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} (\sin x + b) = 1 + b.$$

Ponieważ $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = a\dfrac{\pi}{2} + 1$, więc funkcja $f$ będzie ciągła w punkcie $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$, gdy

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} f(x)$$

czyli, gdy $1 + b = a\dfrac{\pi}{2} + 1$. Zatem funkcja $f$ jest ciągła w punkcie $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$, gdy liczby rzeczywiste $a, b$ spełniają warunek $b = a\dfrac{\pi}{2}$.

**b)** Ciągłość funkcji $g$ w punkcie $x_0 = 0$ zbadamy z definicji. Rozważymy trzy przypadki: I. $a > 0$; II. $a < 0$; III. $a = 0$. W pierwszym przypadku mamy:

$$\lim_{x \to 0-} g(x) = \lim_{x \to 0-} \operatorname{arctg} \frac{a}{x} = -\frac{\pi}{2} \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \to 0+} g(x) = \lim_{x \to 0+} \operatorname{arctg} \frac{a}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Zatem dla żadnego $a > 0$ funkcja $g$ nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$. Rozumując podobnie otrzymamy, że funkcja $g$ nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$ także dla żadnego $a < 0$. Gdy $a = 0$, wtedy mamy $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0$. Ponieważ $g(0) = b$, więc funkcja $g$ jest ciągła tylko wtedy, gdy $b = 0$. Ostatecznie, funkcja $g$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$ tylko dla $a = 0$ i $b = 0$.

**Przykład 4.4**

Uzasadnić ciągłość podanych funkcji na $\boldsymbol{R}$:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-1}{|x|-1} & \text{dla } |x|\neq 1,\\ 4 & \text{dla } |x|=1;\end{cases}$ ; b) $g(x)=E(x)\sin\pi x$.

**Rozwiązanie**

a) Zauważmy najpierw, że dla $|x|\neq 1$ mamy

$$\frac{x^4-1}{|x|-1}=\frac{|x|^4-1}{|x|-1}=\frac{(|x|-1)(|x|+1)\left(|x|^2+1\right)}{|x|-1}=(|x|+1)\left(x^2+1\right).$$

Pokażemy, że funkcja $f$ jest ciągła w punkcie $x_0$, spełniającym warunek $|x_0|\neq 1$. Mamy bowiem

$$f(x_0)=\frac{x_0^4-1}{|x_0|-1} \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to x_0}\frac{x^4-1}{|x|-1}=\frac{x_0^4-1}{|x_0|-1}.$$

Co oznacza, że funkcja $f$ jest ciągła w $x_0$. Niech teraz $x_0$ będzie liczbą spełniającą warunek $|x_0|=1$. Wówczas mamy

$$f(x_0)=4 \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to x_0}\frac{x^4-1}{|x|-1}=\lim_{x\to x_0}\left[(|x|+1)\left(x^2+1\right)\right]=(|x_0|+1)\left(x_0^2+1\right)=4.$$

Oznacza to, że funkcja $f$ jest ciągła także w tym punkcie. Zatem badana funkcja jest ciągła na $\boldsymbol{R}$.

b) Najpierw pokażemy ciągłość funkcji $g$ w punktach zbioru

$$\ldots\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,2)\cup(2,3)\cup\ldots\ .$$

Niech $x_0$ będzie dowolnym punktem tego zbioru, tzn. niech $x_0\in(k,k+1)$ dla pewnego $k\in\boldsymbol{Z}$. Wtedy mamy $g(x_0)=E(x_0)\sin\pi x_0=k\sin\pi x_0$. Ponadto

$$\lim_{x\to x_0}g(x)=\lim_{x\to x_0}E(x)\sin\pi x\ \overset{k<x<k+1}{=\!=\!=\!=}\ \lim_{x\to x_0}k\sin\pi x=k\sin\pi x_0.$$

Zatem funkcja $g$ jest ciągła w punkcie $x_0$ i w konsekwencji we wszystkich punktach wskazanego zbioru. Przechodzimy teraz do zbadania ciągłości funkcji $g$ w punktach zbioru $\boldsymbol{Z}$. Niech $x_0=k$, gdzie $k\in\boldsymbol{Z}$. Wtedy mamy

$$g(x_0)=E(k)\sin\pi k=k\cdot 0=0.$$

Ponadto

$$\lim_{x\to x_0^-}g(x)=\lim_{x\to x_0^-}E(x)\sin\pi x\ \overset{k-1<x<k}{=\!=\!=\!=}\ \lim_{x\to k^-}(k-1)\sin\pi x=(k-1)\cdot 0=0.$$

oraz

$$\lim_{x\to x_0^+}g(x)=\lim_{x\to x_0^+}E(x)\sin\pi x\ \overset{k<x<k+1}{=\!=\!=\!=}\ \lim_{x\to k^+}k\sin\pi x=k\cdot 0=0.$$

Zatem funkcja $g$ jest ciągła także w punkcie $x_0$ i w konsekwencji w punktach zbioru $\boldsymbol{Z}$. Ostatecznie funkcja $g$ jest ciągła na $\boldsymbol{R}$.

- **Przykład 4.5**

Określić rodzaje nieciągłości podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$;

b) $g(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$;

c) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{|x-2|} + x & \text{dla } x \neq 2, \\ 1 & \text{dla } x = 2, \end{cases}$ $x_0 = 2$;

d) $p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{E(x)} & \text{dla } x < 0, \\ 1 & \text{dla } x = 0, \\ E\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{dla } x > 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$.

**Rozwiązanie**

a) Mamy $f(0) = 0$ oraz

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}.$$

Zatem funkcja $f$ ma w punkcie $x_0 = 0$ nieciągłość pierwszego rodzaju typu „luka".

b) Ponieważ granica

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \left( x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right)$$

nie istnieje, więc funkcja $g$ ma w punkcie $x_0 = 0$ nieciągłość drugiego rodzaju.

c) Mamy $h(2) = 1$. Ponadto

$$\lim_{x\to 2^-} h(x) = \lim_{x\to 2^-} \left( \frac{x-2}{|x-2|} + x \right) \stackrel{x<2}{=\!=} \lim_{x\to 2^-} (-1+x) = 1$$

oraz

$$\lim_{x\to 2+} h(x) = \lim_{x\to 2+} \left( \frac{x-2}{|x-2|} + x \right) \stackrel{x>2}{=\!=} \lim_{x\to 2+} (1+x) = 3.$$

Z równości tych wynika, że funkcja $h$ ma w punkcie $x_0 = 2$ nieciągłość pierwszego rodzaju typu „skok".

d) Mamy $p(0) = 1$. Ponadto

$$\lim_{x\to 0^-} p(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{E(x)} \stackrel{-1<x<0}{=\!=\!=} \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{-1} = -1 \text{ oraz } \lim_{x\to 0+} p(x) = \lim_{x\to 0+} E\left(\frac{1}{x}\right) = \infty.$$

Ostatnia równość wynika z nierówności $\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right)$ i twierdzenia o dwóch funkcjach. Ponieważ jedna z granic jednostronnych jest niewłaściwa, więc funkcja $p$ ma w punkcie $x_0 = 0$ nieciągłość drugiego rodzaju.

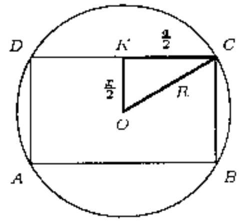
- **Przykład 4.6**

Korzystając z twierdzenia Weierstrassa o przyjmowaniu kresów przez funkcję ciągłą na przedziale domkniętym uzasadnić, że podane zagadnienia ekstremalne mają rozwiązania:

a) wśród prostokątów wpisanych w koło o promieniu $R$ jest ten, który ma największą objętość;
b) wśród walców wpisanych w stożek o promieniu podstawy $R$ i wysokości $H$ istnieje ten, który ma największą objętość.

**Rozwiązanie**

a) Niech jeden z boków prostokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg o promieniu $R$ ma długość $x$, a drugi $a$ (rysunek). Wtedy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa do trójkąta $OKC$, mamy



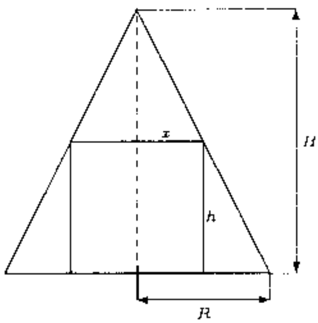

$$\frac{a}{2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}},$$

gdzie $0 < x < 2R$. Stąd pole prostokąta $ABCD$ wyraża się wzorem

$$S(x) = xa = x\sqrt{4R^2 - x^2},$$

gdzie $0 < x < 2R$. Przyjmując teraz dodatkowo $S(0) = 0$ oraz $S(2R) = 0$, otrzymujemy funkcję ciągłą na przedziale domkniętym $[0, 2R]$. Z twierdzenia Weierstrassa wynika zatem, że w pewnym punkcie przedziału domkniętego $[0, 2R]$ funkcja $S$ osiąga wartość największą. Ponieważ na końcach przedziału $[0, 2R]$ funkcja ta ma wartość 0, a we wnętrzu przyjmuje wartości dodatnie, więc jej wartość największa jest osiągnięta w punkcie przedziału otwartego $(0, 2R)$, co należało pokazać.

b) Niech $x$ oznacza promień walca wpisanego w stożek, a $h$ jego wysokość (rysunek). Wtedy z podobieństwa odpowiednich trójkątów mamy




$$h = H\left(1 - \frac{x}{R}\right),$$

gdzie $0 < x < R$. Stąd objętość rozważanego walca wyraża się wzorem

$$V(x) = \pi x^2 h = \pi H x^2 \left(1 - \frac{x}{R}\right).$$

Przyjmując teraz dodatkowo $V(0) = 0$ oraz $V(R) = 0$, otrzymujemy funkcję ciągłą na przedziale domkniętym $[0, R]$. Z twierdzenia Weierstrassa wynika zatem, że funkcja ta przyjmuje w pewnym punkcie przedziału domkniętego $[0, R]$ wartość największą. Ponieważ na końcach przedziału $[0, R]$ funkcja $V$ ma wartość 0, a we wnętrzu przyjmuje wartości dodatnie, więc jej wartość największa jest zrealizowana w punkcie przedziału otwartego $(0, R)$, co należało uzasadnić.

- **Przykład 4.7**

Uzasadnić, że podane równania mają jednoznaczne rozwiązania we wskazanych przedziałach:

a) $4^x = x^2$, $(-1, 0)$; b) $e^x = \frac{1}{x}$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$; c) $\operatorname{ctg} x = x$, $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$.

Znaleźć rozwiązanie równania a) z dokładnością $\frac{1}{8}$.

**Rozwiązanie**

W rozwiązaniu wykorzystamy twierdzenie Darboux o miejscach zerowych funkcji ciągłych.

a) Niech $f(x) = 4^x - x^2$. Funkcja $f$ jest ciągła na przedziale $[-1, 0]$ oraz $f(-1) = -\frac{3}{4} < 0$, $f(0) = 1 > 0$. Zatem z twierdzenia Darboux wynika, że istnieje liczba $c \in (-1, 0)$ taka, że $f(c) = 0$, a to oznacza, że równanie $4^x = x^2$ ma pierwiastek w przedziale $(-1, 0)$. Zauważmy teraz, że funkcje $4^x$ i $-x^2$ są rosnące na przedziale $[-1, 0]$, zatem także funkcja $f(x) = 4^x + (-x^2)$ jest rosnąca na tym przedziale. Z monotoniczności funkcji $f$ wynika, że równanie $4^x = x^2$ ma dokładnie jeden pierwiastek ujemny. Dzieląc teraz na połowę kolejne przedziały, na końcach których funkcja $f$ ma wartości różnych znaków, obliczymy pierwiastek równania $4^x = x^2$ z żądaną dokładnością. Dokładność tę osiągniemy, gdy dokonamy $n$ podziałów odcinka $[-1, 0]$, gdzie $n$ jest najmniejszą liczbą naturalną spełniającą nierówność $\frac{0-(-1)}{2^n} \leqslant \frac{1}{8}$ Rozwiązując tę nierówność otrzymamy $n = 3$. Zatem przedział $[-1, 0]$ wystarczy podzielić 3 razy. Obliczamy wartość funkcji $f$ w środku przedziału $[-1, 0]$, tj. w punkcie $x_1 = \frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2}$, mamy $f\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$. Funkcja $f$ ma zatem wartości różnych znaków na końcach przedziału $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$. Następnie obliczamy wartość funkcji $f$ w środku przedziału $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$, tj. w punkcie $x_2 = \frac{-1+\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = -\frac{3}{4}$, mamy $f\left(-\frac{3}{4}\right) < 0$. Funkcja $f$ ma zatem wartości różnych znaków na końcach przedziału $\left[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right]$. Ponieważ przedział ten ma długość $\frac{1}{4}$, więc za rozwiązanie równania z dokładnością $\frac{1}{8}$ wystarczy przyjąć jego środek, tj. liczbę $-\frac{5}{8} = -0.625$.

**Uwaga.** Dokładnym rozwiązaniem równania $4^x = x^2$ w przedziale $(-1, 0)$ jest $-0.641185\ldots$.

b) Niech $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$. Funkcja $f$ jest ciągła na przedziale $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ oraz spełnia nierówności

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - 2 < 0, \quad f(1) = e - 1 > 0.$$

Zatem z twierdzenia Darboux wynika istnienie punktu $c \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ takiego, że $f(c) = 0$. Ponieważ funkcje $e^x$ oraz $-\frac{1}{x}$ są rosnące na przedziale $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, więc ich suma także jest tam funkcją rosnącą. Stąd wynika, że w przedziale $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ istnieje tylko jedno takie $c$. Tak więc równanie $e^x = \frac{1}{x}$ ma w przedziale $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ tylko jedno rozwiazanie.

c) Niech $f(x) = \operatorname{ctg} x - x$. Funkcja $f$ jest ciągła na przedziale $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ oraz spełnia warunki

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{6} > 0, \qquad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{3} < 0.$$

Zatem z twierdzenia Darboux wynika istnienie punktu $c \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ takiego, że $f(c) = 0$. Ponieważ funkcje $\operatorname{ctg} x$ oraz $-x$ są malejące na przedziale $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$, więc także ich suma, tj. funkcja $f$, jest tam malejąca. Tak więc równanie $\operatorname{ctg} x = x$ ma dokładnie jedno rozwiązanie w tym przedziale.

## • Przykład 4.8

Korzystając z twierdzenia Darboux o przyjmowaniu wartości pośrednich przez funkcję ciągłą uzasadnić następujące stwierdzenia:

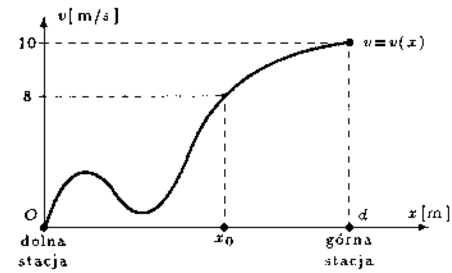
a) jeżeli na dolnej stacji wyciągu było bezwietrznie, a na górnej stacji wiał wiatr z prędkością 10 m/s, to jadąc wyciągiem natrafimy na miejsce, gdzie wiatr wieje z prędkością 8 m/s (w pewnym kierunku);

b) jeżeli we Wrocławiu i Gdańsku jest temeratura 20° C, a w Bydgoszczy temperatura 25° C, to jadąc z Wrocławia do Gdańska przez Bydgoszcz co najmniej dwukrotnie będziemy w miejscach, w których panuje temperatura 22° C;

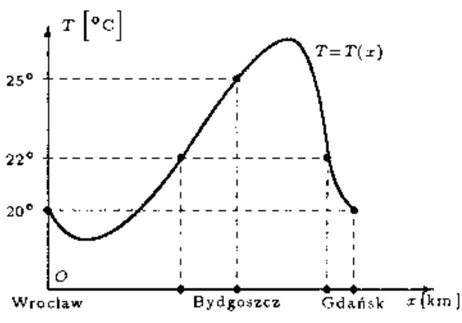
c*) przez dowolny punkt wewnętrzny wielokąta wypukłego można przeprowadzić sieczną w ten sposób, aby punkt ten był jej środkiem.

**Rozwiązanie**

a) Niech $x$ oznacza odległość punktu wyciągu od dolnej stacji oraz niech $v(x)$ oznacza prędkość wiatru w tym miejscu. Funkcja $v$ jest ciągła na przedziale $[0, d]$, gdzie $d$ oznacza długość wyciągu (rysunek). Z danych zadania mamy warunki: $v(0) = 0$, $v(d) = 10$ oraz $v(0) < 8 < v(d)$. Stosując twierdzenie Darboux o przyjmowaniu wartości pośrednich do funkcji $v$ na przedziale $[0, d]$ i wartości $v_0 = 8$ otrzymamy, że dla pewnego $x_0 \in (0, d)$ mamy $v(x_0) = 8$. Oznacza to, że w odległości $x_0$ od dolnej stacji wieje wiatr z prędkością 8 m/s.

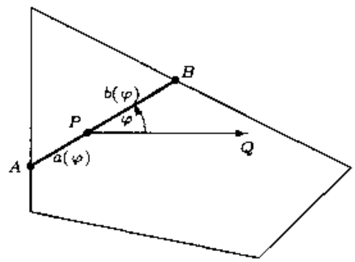



b) Niech $x$ oznacza odległość punktu trasy od Wrocławia oraz niech $T(x)$ oznacza temperaturę panującą w tym miejscu (rysunek). Funkcja $T$ jest ciągła na przedziale $[0, 450]$ (odległość Wrocław – Gdańsk jest równa 450 km, a Wrocław - Bydgoszcz 270 km). Z danych zadania wynika, że $T(0) = 20°$ C, $T(270) = 25°$ C, $T(450) = 20°$ C. Stosując twierdzenie Darboux do funkcji $T$, wartości $T_0 = 22°$ C oraz przedziałów $[0, 270]$, $[270, 450]$ wnioskujemy, że we wnętrzu każdego z nich są punkty, w których funkcja $T$ przyjmuje wartość 22° C. Oznacza to, że między Wrocławiem i Bydgoszczą oraz między Bydgoszczą i Gdańskiem będą miejsca, w których jest tempertura 22° C.



**Uwaga.** W rozważaniach przyjęto, że temperatura w punktach trasy nie zmieniła się w czasie, gdy trwała podróż.

c*) Niech $P$ będzie dowolnym punktem wewnętrznym wielokąta wypukłego. Ponadto niech $PQ$ będzie ustaloną półprostą, względem której będziemy mierzyli kąt $\varphi$ z sieczną $AB$ (rysunek). Dla ustalonego kąta $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ niech $a(\varphi)$ i $b(\varphi)$ oznaczają odpowiednio długości odcinków $AP$ i $PB$ cięciwy, tworzącej kąt $\varphi$ z półprostą $PQ$. Rozważmy funkcję




$$f(\varphi) = a(\varphi) - b(\varphi).$$

Funkcja ta jest ciągła na przedziale $[0, \pi]$ oraz spełnia warunki

$$f(0) = a(0) - b(0), \qquad f(\pi) = a(\pi) - b(\pi) = b(0) - a(0) = -[a(0) - b(0)].$$

Ponieważ funkcja $f$ w punktach $\varphi = 0$ i $\varphi = \pi$ przyjmuje wartości różnych znaków, więc z twierdzenia Darboux wynika, że $f(\varphi_0) = 0$ dla pewnego $0 \leqslant \varphi_0 \leqslant \pi$. Oznacza to, że punkt $P$ jest środkiem cięciwy $AB$ tworzącej kąt $\varphi_0$ z półprostą $PQ$.

# Zadania

### ○ Zadanie 4.1

Korzystając z definicji Heinego uzasadnić ciągłość podanych funkcji na $\boldsymbol{R}$ :

a) $f(x) = 2x - 5$; b) $g(x) = \sin x$; c) $h(x) = \sqrt[3]{x}$; d) $p(x) = e^x$.

### ○ Zadanie 4.2

Określić zbiory punktów ciągłości podanych funkcji:

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x = k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ \dfrac{x}{\sin x} & \text{dla } x \neq k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}; \end{cases}$ b) $g(x) = E(x)(x-1)$;

c) $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leqslant 0, \\ \sqrt{x}\cos\dfrac{1}{x^2} & \text{dla } x > 0; \end{cases}$ d) $p(x) = \operatorname{sgn}\left(x^2\right)\cos\dfrac{\pi}{2}x$.

### ○ Zadanie 4.3

Dobrać parametry $a, b \in \boldsymbol{R}$ tak, aby podane funkcje były ciągłe we wskazanych punktach:

a) $f(x) = \begin{cases} bx & \text{dla } x < \pi, \\ \dfrac{\sin x}{ax} & \text{dla } x \geqslant \pi, \end{cases}$ $x_0 = \pi$; b) $g(x) = \begin{cases} bx + 3 & \text{dla } x < 1, \\ 2x^2 + x + a & \text{dla } x \geqslant 1, \end{cases}$ $x_0 = 1$;

c) $h(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & \text{dla } x \leqslant 0, \\ ax + b & \text{dla } 0 < x < 1, \\ \sqrt{x} & \text{dla } x \geqslant 1, \end{cases}$ $x_1 = 0,\ x_2 = 1$; d) $p(x) = \begin{cases} x & \text{dla } |x| \leqslant 1, \\ x^2 + ax + b & \text{dla } |x| > 1, \end{cases}$ $x_1 = -1,\ x_2 = 1$.

○ **Zadanie 4.4**
Uzasadnić ciągłość podanych funkcji na $\mathbb{R}$:
a) $f(x) = \dfrac{x}{|x|+1}$; b) $g(x) = \sqrt{e^x + x^2}$.

○ **Zadanie 4.5**
Określić rodzaje nieciągłości podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x) = \operatorname{sgn}\left[x(x-1)\right]$, $x_0 = 1$; b) $g(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{dla } x = 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$;

c) $h(x) = \begin{cases} xE\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$; d) $p(x) = \begin{cases} 1 - \cos \dfrac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$.

○ **Zadanie 4.6**
Korzystając z twierdzenia Weierstrassa o przyjmowaniu kresów przez funkcję ciągłą na przedziale domkniętym uzasadnić, że podane zagadnienia ekstremalne mają rozwiązania:
a) wśród prostokątów wpisanych w trójkąt równoboczny o boku $a$ istnieje ten, który ma największe pole (założyć, że dwa wierzchołki prostokąta należą do boku trójkąta);
b) wśród granastosłupów prawidłowych o podstawie sześciokątnej wpisanych w kulę o promieniu $R$ istnieje ten, który ma największą objętość;
c*) wśród trójkątów równoramiennych opisanych na kole o promieniu $R$ istnieje ten, który ma najmniejsze pole.

○ **Zadanie 4.7**
Uzasadnić, że podane równania mają jednoznaczne rozwiązania we wskazanych przedziałach:

a) $1 = \dfrac{\sin x}{2} + x$, $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$; b) $\operatorname{arctg} x = \dfrac{1}{x^2}$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right)$; c) $3^x + x = 3$, $(0,1)$;

d) $\ln x + 2x = 1$, $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$; e) $x^{100} + x - 1 = 0$, $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$; f) $x2^x = 1$, $(0, \infty)$.

Wyznaczyć rozwiązanie równania c) z dokładnością 0.125.

○ **Zadanie 4.8**
Korzystając z twierdzenia Darboux o przyjmowaniu wartości pośrednich przez funkcję ciągłą uzasadnić następujące stwierdzenia:

a) jeżeli samochód wyruszył z Wrocławia o godz. 8:00 i jadąc ze zmienną szybkością dotarł do Warszawy o godz. 12:00, a następnego dnia o godzinie 8:00 wyruszył z powrotem i jadąc po tej samej drodze wrócił do Wrocławia o godz. 12:00, to jest takie miejsce na tej drodze, w którym był o tej samej godzinie zarówno jadąc do Warszawy jak i wracając z powrotem;

b) jeżeli zegar o północy spóźniał się o 5 min., a po nakręceniu, następnego dnia o północy spieszył się o 10 min., to w pewnej chwili wskazywał właściwy czas;

c*) na Ziemi są dwa miejsca położone symetrycznie względem jej środka, w których panuje ta sama temperatura.

d*) dowolny wielokąt wypukły można podzielić dwiema prostopadłymi do siebie prostymi na cztery części o jednakowych polach.

## Odpowiedzi i wskazówki

**4.2** W odpowiedziach podajemy zbiory, na których rozważane funkcje są ciągłe.
**a)** $\boldsymbol{R} \setminus \{k\pi : k \in \boldsymbol{Z} \setminus \{0\}\}$; **b)** $\ldots \cup (-2,-1) \cup (-1,0) \cup (0,2) \cup (2,3) \cup (3,4) \cup \ldots$;
c) $\boldsymbol{R}$; d) $\boldsymbol{R} \setminus \{0\}$.

**4.3** a) $a \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$, $b = 0$; b) $a = b$; c) $a = 2$, $b = -1$; d) $a = 1$, $b = -1$.

**4.5** a) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -1 \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1$ – nieciągłość pierwszego rodzaju typu „skok"; b) $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = 0 = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) \neq g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ – nieciągłość pierwszego rodzaju typu „luka"; c) $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 1 \neq h(0) = 0$ – nieciągłość pierwszego rodzaju typu „luka";
d) $\lim\limits_{x \to 0^-} p(x)$ nie istnieje – nieciągłość drugiego rodzaju.

**4.7** c) $\frac{5}{8} = 0.625$, dokładne rozwiązanie $0.741552\ldots$ .

# 4

# POCHODNE FUNKCJI

## Piąty tydzień

**Podstawowe pojęcia (4.1). Pochodne jednostronne funkcji (4.2). Twierdzenia o pochodnej funkcji (4.3).**

## Przykłady

● **Przykład 5.1**

Korzystając z definicji zbadać, czy istnieją pochodne podanych funkcji w $x_0 = 0$:

a) $f(x) = x|x|$;

b) $g(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0; \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0; \end{cases}$

d*) $p(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in \boldsymbol{Q}, \\ -x^3 & \text{dla } x \notin \boldsymbol{Q}. \end{cases}$

**Rozwiązanie**

a) Mamy

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} |x| = 0.$$

b) Mamy

$$g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin\dfrac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}.$$

Otrzymana granica nie istnieje (porównaj **Przykład 3.3 b)**). Funkcja $g$ nie ma zatem w punkcie $x_0 = 0$ pochodnej.

c) Mamy

$$h'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin\dfrac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0.$$

Ostatnia równość została uzasadniona w **Przykładzie 3.6 a)**.

d*) Mamy

$$p'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{p(x) - p(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{p(x)}{x}.$$

Gdy $x \longrightarrow 0$ oraz $x \in \boldsymbol{Q}$, to

$$\lim_{x\to 0} \frac{p(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0.$$

Podobnie, gdy $x \longrightarrow 0$ oraz $x \notin \boldsymbol{Q}$, to

$$\lim_{x\to 0} \frac{p(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^3}{x} = \lim_{x\to 0} \left(-x^2\right) = 0.$$

Zatem $p'(0) = 0$.

Uwaga. Warto zwrócić uwagę na to, że 0 jest jedynym punktem, w którym funkcja $p$ ma pochodną. Wynika to z faktu, że po za tym punktem funkcja $p$ jest nieciągła.

## • Przykład 5.2

Korzystając z definicji obliczyć pochodne podanych funkcji:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, gdzie $x \neq 0$; b) $g(x) = \sqrt[3]{x}$, gdzie $x \neq 0$;

c) $h(x) = \dfrac{1}{\sin x}$, gdzie $x \neq k\pi$ dla $k \in \boldsymbol{Z}$; d) $p(x) = e^{-x}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

**Rozwiązanie**

a) Niech $x_0 \neq 0$. Wtedy

$$f'(x_0) \overset{def}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x_0^2}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\left(x_0^2 - x^2\right)}{(x - x_0)\, x^2 x_0^2} = -\lim_{x\to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{(x - x_0)\, x^2 x_0^2}$$

$$= -\lim_{x\to x_0} \frac{x + x_0}{x^2 x_0^2} = -\frac{2x_0}{x_0^4} = -\frac{2}{x_0^3}.$$

b) Niech $x_0 \neq 0$. Wtedy

$$g'(x_0) \overset{def}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}\right)\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x x_0} + \sqrt[3]{x_0^2}\right)}{(x - x_0)\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x x_0} + \sqrt[3]{x_0^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{(x - x_0)}{(x - x_0)\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x x_0} + \sqrt[3]{x_0^2}\right)} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x x_0} + \sqrt[3]{x_0^2}}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}.$$

c) Niech $x_0 \neq k\pi$ dla każdego $k \in \boldsymbol{Z}$. Wtedy

$$h'(x_0) \overset{def}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\sin x_0}}{x - x_0} = -\lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{(x - x_0)\sin x \sin x_0}$$

$$= -\lim_{x\to x_0} \frac{\sin\dfrac{x - x_0}{2}\cos\dfrac{x + x_0}{2}}{\dfrac{x - x_0}{2}\sin x \sin x_0} = -1 \cdot \frac{\cos x_0}{\sin^2 x_0} = -\frac{\cos x_0}{\sin^2 x_0}.$$

d) Niech $x_0 \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\begin{aligned} p'(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{p(x_0 + \Delta x) - p(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{-x_0 - \Delta x} - e^{-x_0}}{\Delta x} = -e^{-x_0} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{-\Delta x} - 1}{-\Delta x} = -e^{-x_0} \cdot 1 = -e^{-x_0}. \end{aligned}$$

## • Przykład 5.3

Badając pochodne jednostronne rozstrzygnąć, czy istnieją pochodne podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{dla } x \geqslant 1, \\ 3x^3 & \text{dla } x < 1, \end{cases}$ $x_0 = 1$;  b) $g(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$.

**Rozwiązanie**

a) Istnienie pochodnej funkcji $f$ w punkcie $x_0 = 1$ zbadamy porównując pochodne jednostronne: $f'_-(1)$, $f'_+(1)$. Mamy

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \stackrel{x<1}{=\!=} \lim_{x \to 1^-} \frac{3x^3 - 3}{x - 1} = 3 \cdot \lim_{x \to 1^-} \left(x^2 + x + 1\right) = 3 \cdot 3 = 9.$$

Funkcja $x^2 + x + 1$ ma pochodną właściwą na przedziale $[1, \infty)$. Zatem

$$f'_+(1) = \left(x^2 + x + 1\right)'\Big|_{x=1} = (2x + 1)\Big|_{x=1} = 3.$$

Ponieważ $f'_-(1) \neq f'_+(1)$, więc $f'(1)$ nie istnieje.

b) Pokażemy, że funkcja $g$ nie ma pochodnej w punkcie $x_0 = 0$. W tym celu obliczymy pochodne jednostronne tej funkcji. Mamy

$$g'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \stackrel{x<0}{=\!=} \lim_{x \to 0^-} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

oraz

$$g'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \stackrel{x>0}{=\!=} \lim_{x \to 0^+} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

Ponieważ pochodne jednostronne funkcji $g$ nie pokrywają się, więc jej pochodna w punkcie $x_0 = 0$ nie istnieje.

## • Przykład 5.4

Znaleźć parametry $a, b, c$, dla których podane funkcje mają pochodne na $\mathbb{R}$ :

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{dla } x \leqslant 2, \\ ax + b & \text{dla } x > 2; \end{cases}$  b) $g(x) = \begin{cases} 4x & \text{dla } x \leqslant 0, \\ ax^2 + bx + c & \text{dla } 1 < x < 1, \\ 3 - 2x & \text{dla } x \geqslant 1. \end{cases}$

**Rozwiązanie**

a) Łatwo zauważyć, że funkcja $f$ ma pochodną na przedziałach $(-\infty, 2)$, $(2, \infty)$. Funkcja ta będzie miała pochodną w punkcie „sklejenia" $x_0 = 2$, gdy będzie tam obustronnie ciągła oraz, gdy obie pochodne jednostronne w tym punkcie będą miały tę samą wartość. Najpierw znajdziemy warunki gwarantujące ciągłość funkcji $f$ w punkcie $x_0 = 2$. Mamy

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \overset{x<2}{=\!=} \lim_{x\to 2^-}\left(x^2-1\right) = 3,\ \ f(2)=3,\ \ \lim_{x\to 2+} f(x) \overset{x>2}{=\!=} \lim_{x\to 2+}(ax+b) = 2a+b.$$

Stąd otrzymujemy równanie $2a+b=3$. Przechodzimy teraz do znalezienia warunków gwarantujących równość pochodnych jednostronnych w punkcie $x_0 = 2$. Załóżmy dalej, że funkcja $f$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 2$. Zatem mamy $b = 3-2a$, stąd $f(x) = ax+3-2a$ dla $x > 2$. Ponadto

$$f'_-(2) = \left(x^2-1\right)'\Big|_{x=2} = 2x\Big|_{x=2} = 4$$

oraz

$$f'_+(2) \overset{def}{=\!=} \lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \overset{x>2}{=\!=} \lim_{x\to 2+}\frac{(ax+3-2a)-3}{x-2} = \lim_{x\to 2+}\frac{a(x-2)}{x-2} = a.$$

Stąd otrzymujemy $a = 4$. Ostatecznie $a = 4$, $b = 3-2a = -5$.

b) Łatwo zauważyć, że funkcja $g$ ma pochodną na przedziałach $(-\infty, 0)$, $(0,1)$ i $(1,\infty)$. Funkcja ta będzie miała pochodną w punktach „sklejenia" $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, gdy będzie tam obustronnie ciągła oraz, gdy obie pochodne jednostronne pokryją się tam. Najpierw znajdziemy warunki gwarantujące ciągłość funkcji w punktach $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Dla punktu $x_1 = 0$ mamy

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) \overset{x<0}{=\!=} \lim_{x\to 0^-} 4x = 0,\ \ g(0)=0,\ \ \lim_{x\to 0+} g(x) \overset{0<x<1}{=\!=\!=} \lim_{x\to 0+}\left(ax^2+bx+c\right) = c.$$

Stąd otrzymujemy warunek $c = 0$. Podobnie dla punktu $x_2 = 1$ mamy

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) \overset{0<x<1}{=\!=\!=} \lim_{x\to 1^-}\left(ax^2+bx+c\right) = a+b+c,\ \ g(1) = a+b+c,$$

$$\lim_{x\to 1+} g(x) \overset{x>1}{=\!=} \lim_{x\to 1+}(3-2x) = 1.$$

Stąd mamy drugi warunek $a+b+c = 1$. Przechodzimy do znalezienia warunków gwarantujących równość pochodnych jednostronnych funkcji $g$ w punktach $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Zakładamy przy tym, że funkacja ta jest już ciągła w obu punktach. Oznacza to, że spełnione są warunki $b = 1-a$, $c = 0$. Stąd $g(x) = ax^2 + (1-a)x$. Ponadto mamy

$$g'_-(0) = (4x)\Big|_{x=0} = 4$$

oraz

$$g'_+(0) \overset{def}{=\!=} \lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} \overset{0<x<1}{=\!=\!=} \lim_{x\to 0+}\frac{ax^2+(1-a)x}{x} = 1-a.$$

Stąd otrzymujemy warunek $1-a = 4$, zatem $a = -3$ i w konsekwencji $b = 4$. Pozostało do sprawdzenia, że dla otrzymanych wartości parametrów funkcja $g$ ma jednakowe pochodne jednostronne także w punkcie $x_2 = 1$. Mamy $g(x) = -3x^2 + 4x$ dla $0 < x < 1$. Zatem

$$g'_-(1) \overset{def}{=\!=} \lim_{x\to 1^-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1} \overset{0<x<1}{=\!=\!=} \lim_{x\to 1^-}\frac{-3x^2+4x-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}(-3x+1) = -2$$

oraz

$$g'_+(1) = (3-2x)\Big|_{x=1} = -2,$$

czyli $g'_-(1) = g'_+(1)$.

**Przykład 5.5**

Zbadać, czy podane funkcje mają pochodne niewłaściwe we wskazanych punktach:

a) $f(x) = \sin\sqrt[5]{x}$, $x_0 = 0$; b) $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $x_0 = 0$; c) $h(x) = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

**Rozwiązanie**

a) Mamy

$$f'(0) \stackrel{def}{=} \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt[5]{x}-0}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} = 1\cdot\infty = \infty.$$

Zatem funkcja $f$ ma w punkcie $x_0 = 0$ pochodną niewłaściwą $\infty$.

b) Mamy

$$g'(0) \stackrel{def}{=} \lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Granica ta nie istnieje, bo

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \infty.$$

Funkcja $g$ nie ma zatem pochodnej niewłaściwej w punkcie $x_0$, ale ma pochodne niewłaściwe jednostronne: $g'_-(0) = -\infty$, $g'_+(0) = \infty$.

c) Mamy

$$h'\left(\frac{\pi}{2}\right) \stackrel{def}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{h(x)-h\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}-0}{x-\frac{\pi}{2}} \stackrel{u=\frac{\pi}{2}-x}{=\!=\!=} -\lim_{u\to 0}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} u}}{u}$$

$$= -\lim_{u\to 0}\sqrt[3]{\frac{\operatorname{tg} u}{u}}\cdot\lim_{u\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{u^2}} = -1\cdot\frac{1}{0^+} = -1\cdot\infty = -\infty.$$

Zatem funkcja $h$ ma w punkcie $\frac{\pi}{2}$ pochodną niewłaściwą $-\infty$.

**Przykład 5.6**

Korzystając z reguł różniczkowania obliczyć pochodne podanych funkcji:

a) $y = \ln\operatorname{tg}\frac{x}{3}$; b) $y = \arcsin\sqrt[4]{1-5x}$; c) $y = \ln\left(e^x + \sqrt{1+e^x}\right)$;

d) $y = x^x$; e) $y = \sin^7\frac{2^x+1}{3^x+1}$; f) $y = \operatorname{arctg} x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

**Rozwiązanie**

a) Niech $\frac{x}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ dla każdego $k \in \mathbb{Z}$ oraz niech $\operatorname{tg}\frac{x}{3} > 0$. Wtedy

$$y' = \left(\ln\operatorname{tg}\frac{x}{3}\right)' = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{3}}\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{x}{3}\right)' = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{3}}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)'$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3\sin\frac{2x}{3}}.$$

b) Niech $1-5x>0$ oraz niech $\sqrt[4]{1-5x}<1$. Wtedy

$$y' = \left(\arcsin\sqrt[4]{1-5x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt[4]{1-5x}\right)^2}}\cdot\left(\sqrt[4]{1-5x}\right)'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{1-5x}}}\cdot\frac{1}{4\sqrt[4]{(1-5x)^3}}\cdot(1-5x)' = -\frac{5}{4\sqrt{1-\sqrt{1-5x}}\,\sqrt[4]{(1-5x)^3}}.$$

c) Niech $x\in\boldsymbol{R}$. Wtedy

$$y' = \left[\ln\left(e^x+\sqrt{1+e^x}\right)\right]' = \frac{1}{e^x+\sqrt{1+e^x}}\cdot\left(e^x+\sqrt{1+e^x}\right)'$$

$$= \frac{1}{e^x+\sqrt{1+e^x}}\left(e^x+\frac{1}{2\sqrt{1+e^x}}(1+e^x)'\right)$$

$$= \frac{e^x\left(2\sqrt{1+e^x}+1\right)}{2\left(e^x+\sqrt{1+e^x}\right)\sqrt{1+e^x}}.$$

d) Niech $x>0$. Wtedy

$$y'=\left(x^x\right)'=\left(e^{x\ln x}\right)'=e^{x\ln x}\cdot(x\ln x)'=x^x\left(1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)=x^x(\ln x+1).$$

e) Niech $x\in\boldsymbol{R}$. Wtedy

$$y'=\left(\sin^7\frac{2^x+1}{3^x+1}\right)' = 7\sin^6\frac{2^x+1}{3^x+1}\left(\sin\frac{2^x+1}{3^x+1}\right)'$$

$$= 7\sin^6\frac{2^x+1}{3^x+1}\cdot\cos\frac{2^x+1}{3^x+1}\cdot\left(\frac{2^x+1}{3^x+1}\right)'$$

$$= 7\sin^6\frac{2^x+1}{3^x+1}\cdot\cos\frac{2^x+1}{3^x+1}\cdot\frac{2^x\ln 2\,(3^x+1)-(2^x+1)\,3^x\ln 3}{(3^x+1)^2}$$

$$= 7\sin^6\frac{2^x+1}{3^x+1}\cdot\cos\frac{2^x+1}{3^x+1}\cdot\frac{6^x\ln\frac{2}{3}+2^x\ln 2-3^x\ln 3}{(3^x+1)^2}.$$

f) Dla $x\neq 0$ mamy

$$y'=\left[(\operatorname{arctg} x)\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)\right]' = (\operatorname{arctg} x)'\operatorname{arctg}\frac{1}{x}+\operatorname{arctg} x\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)'$$

$$= \frac{1}{1+x^2}\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{x}+\operatorname{arctg} x\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}-\operatorname{arctg} x\right).$$

- **Przykład 5.7**

Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej obliczyć:

a) $x'(y)$ dla:

i) $y=e^x$, gdzie $x\in\boldsymbol{R}$; ii) $y=\operatorname{ctg} x$, gdzie $0<x<\pi$;

b) i) $\left(f^{-1}\right)'(3)$, gdzie $f(x) = x^5 + x + 1$;

ii) $\left(g^{-1}\right)'(1)$, gdzie $g(x) = 2e^{3x} - e^{-x}$.

**Rozwiązanie**

a-i) Funkcja odwrotna do funkcji $y = f(x) = e^x$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, ma postać $x = f^{-1}(y) = \ln y$, gdzie $y > 0$. Do funkcji $f^{-1}$ stosujemy twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej:

$$\left[f^{-1}\right]'(y) = \frac{1}{f'(x)},$$

gdzie $y = f(x)$. Zatem

$$(\ln y)' = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

a-ii) Funkcja odwrotna do funkcji $y = f(x) = \operatorname{ctg} x$, gdzie $x \in (0, \pi)$, ma postać $x = f^{-1}(y) = \operatorname{arcctg} y$, gdzie $y \in \mathbb{R}$. Z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej mamy

$$(\operatorname{arcctg} y)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} x)'} = \frac{-1}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = \frac{-1}{1 + y^2}.$$

b-i) Zauważmy najpierw, że funkcja $f$ jest ciągła i rosnąca na $\mathbb{R}$. Ponadto $f(1) = 3$. Stąd wynika, że $x = 1$ jest jedynym rozwiązaniem równania

$$x^5 + x + 1 = 3.$$

Funkcja $f$ spełnia założenia twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej, zatem mamy

$$\left(f^{-1}\right)'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\left.(x^5 + x + 1)'\right|_{x=1}} = \frac{1}{\left.(5x^4 + 1)\right|_{x=1}} = \frac{1}{6}.$$

b-ii) Także w tym przykładzie funkcja $g$ jest ciągła i rosnąca na $\mathbb{R}$. Ponadto $g(0) = 1$. Stąd wynika, że $x = 0$ jest jedynym rozwiązaniem równania

$$2e^{3x} - e^{-x} = 1.$$

Funkcja $g$ spełnia założenia twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej, zatem mamy

$$\left(g^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{g'(0)} = \frac{1}{\left.(2e^{3x} - e^{-x})'\right|_{x=0}} = \frac{1}{\left.(6e^{3x} + e^{-x})\right|_{x=0}} = \frac{1}{7}.$$

## • Przykład 5.8

Zakładając, że funkcje $f$ i $g$ mają pochodne właściwe, obliczyć pochodne funkcji:

a) $y = \log_{f(x)} g(x)$; b) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{f(x)}{g(x)}$; c) $y = \sqrt[3]{f^2(x)+g^2(x)}$; d) $y = \dfrac{\sin f(x)}{\cos g(x)}$.

**Rozwiązanie**

a) $$y'(x) = \left(\log_{f(x)} g(x)\right)' = \left(\frac{\ln g(x)}{\ln f(x)}\right)' = \frac{(\ln g(x))' \ln f(x) - \ln g(x)(\ln f(x))'}{\ln^2 f(x)}$$

$$= \frac{\dfrac{g'(x)}{g(x)} \ln f(x) - \dfrac{f'(x)}{f(x)} \ln g(x)}{\ln^2 f(x)} = \frac{f(x)g'(x) \ln f(x) - f'(x)g(x) \ln g(x)}{f(x)g(x) \ln^2 f(x)}.$$

b) $$y'(x) = \left(\operatorname{arctg}\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$$

$$= \frac{g^2(x)}{f^2(x)+g^2(x)}\,\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

c) $$y'(x) = \left(\sqrt[3]{f^2(x)+g^2(x)}\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{\left(f^2(x)+g^2(x)\right)^2}}\cdot\left(f^2(x)+g^2(x)\right)'$$

$$= \frac{2\left(f(x)f'(x)+g(x)g'(x)\right)}{3\sqrt[3]{\left(f^2(x)+g^2(x)\right)^2}}.$$

d) $$y'(x) = \left(\frac{\sin f(x)}{\cos g(x)}\right)' = \frac{(\sin f(x))'\cos g(x) - \sin f(x)\,(\cos g(x))'}{\cos^2 g(x)}$$

$$= \frac{\cos f(x)\cdot\cos g(x)\cdot f'(x) + \sin f(x)\cdot\sin g(x)\cdot g'(x)}{\cos^2 g(x)}.$$

**• Przykład 5.9**

Napisać równania stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x) = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$, $(-1, f(-1))$; b) $f(x) = x^x$, $(2, f(2))$.

**Rozwiązanie**

Korzystamy z równania stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

a) Mamy

$$f(x) = (x+1)\sqrt[3]{3-x},\ x_0 = -1,\ f(-1) = 0$$

oraz

$$f'(-1) = \left[\sqrt[3]{3-x} - \frac{x+1}{3\sqrt[3]{(3-x)^2}}\right]_{x=-1} = \sqrt[3]{4}.$$

Równanie stycznej ma postać: $y - 0 = \sqrt[3]{4}(x-(-1))$, stąd $y = \sqrt[3]{4}(x+1)$.

b) Mamy

$$f(x) = x^x,\ x_0 = 2,\ f(2) = 4 \text{ oraz } f'(2) = \left[x^x(\ln x + 1)\right]_{x=2} = 4(\ln 2 + 1).$$

Równanie stycznej ma postać: $y - 4 = 4(\ln 2 + 1)(x-2)$, stąd $y = 4\ln(2e)(x-2)+4$.

**• Przykład 5.10**

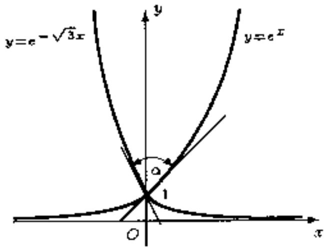
Obliczyć kąt, pod którym:

a) przecinają się wykresy funkcji $y = e^x$, $y = e^{-\sqrt{3}x}$;

b) wykres funkcji $y = 3 + 2\sin x$ przecina oś $Oy$.

**Rozwiązanie**

a) Znajdziemy najpierw punkt, w którym przecinają się wykresy funkcji $y = e^x$, $y = e^{-\sqrt{3}x}$. Mamy $e^x = e^{-\sqrt{3}x} \iff x = 0$. Kąt ostry $\alpha$, pod którym przecinają się wykresy funkcji $y = f(x)$, $y = g(x)$, jest określony zależnością $\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)\,g'(x_0)}\right|$, gdzie $x_0$ jest odciętą punktu przecięcia obu wykresów. Dla funkcji rozważanych w zadaniu mamy




$$(e^x)'\Big|_{x=0} = e^x\big|_{x=0} = 1, \quad \left(e^{-\sqrt{3}x}\right)'\Big|_{x=0} = -\sqrt{3}\,e^{-\sqrt{3}x}\Big|_{x=0} = -\sqrt{3}.$$

Zatem

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right| = 2 + \sqrt{3}.$$

Stąd $\alpha = 75^\circ$.

b) Korzystając z interpretacji geometrycznej pochodnej funkcji wnosimy, że styczna do wykresu funkcji $f(x) = 3 + 2\sin x$ w punkcie $x_0 = 0$ jest nachylona do osi $Ox$ pod kątem

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left[f'(x_0)\right] = \operatorname{arctg}(2\cos 0) = \operatorname{arctg} 2.$$

Zatem kąt $\beta$, pod którym wykres funkcji $f$ przetnie oś $Oy$, jest równy

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} \approx 0.46\,[\,\mathrm{rad}\,].$$

## • Przykład 5.11

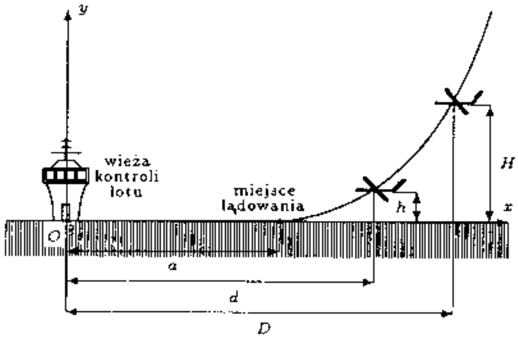
a) Podchodzący do lądowania samolot porusza się po łuku paraboli w ten sposób, że w miejscu lądowania trajektoria lotu jest styczna do płyty lotniska (rysunek). W jakiej odległości od wieży kontrolnej wyląduje samolot, jeżeli w odległości $D = 9$ km znajdował się on na wysokości $H = 400$ m, a w odległości $d = 6$ km był na wysokości $h = 100$ m.

b*) Bilard ma kształt elipsy. Pokazać, że kula wypuszczona z ogniska elipsy po odbiciu sprężystym od brzegu bilardu przejdzie przez drugie ognisko.

**Rozwiązanie**

a) Niech $x = a$ oznacza miejsce lądowania oraz niech łuk paraboli, po którym samolot podchodzi do lądowania, będzie opisany równaniem $y = px^2 + qx + r$, gdzie $x \geqslant a$. W miejscu lądowania musi być spełniony warunek $y(a) = 0$. Zatem $pa^2 + qa + r = 0$. Ponieważ w miejscu lądowania samolot dotyka lotniska stycznie, więc $y'(a) = 0$. Stąd $2pa + q = 0$. Podstawiając ostatni warunek do poprzedniego otrzymamy $r = pa^2$. Zatem łuk paraboli opisany jest równaniem $y = px^2 - 2pax + pa^2 = p(x-a)^2$, gdzie $x \geqslant a$. Parametr $a$ trajektorii lotu obliczymy wykorzystując informacje o położeniu samolotu przed lądowaniem. Mamy $y(d) = h$ oraz $y(D) = H$. Zatem

$$\begin{cases} p(6000 - a)^2 = 100, \\ p(9000 - a)^2 = 400. \end{cases}$$

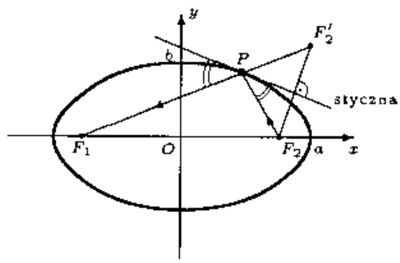



Po podzieleniu równań stronami otrzymamy $\left(\frac{9000-a}{6000-a}\right)^2 = 4$, stąd $a = 3000$ m. Lądowanie samolotu nastąpi w odległości $a = 3$ km od wieży lotniska.

b*) Niech brzeg bilardu będzie elipsą o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

gdzie $0 < b < a$. Wtedy ogniska tej elipsy są w punktach $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, gdzie $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Niech $P = (x_0, y_0)$, gdzie $x_0, y_0 > 0$, będzie punktem elipsy, w który trafi kula wypuszczona z ogniska $F_2$. Wtedy równanie prostej $PF_2$ ma postać




$$y - y_0 = \frac{y_0}{x_0 - c}(x - x_0),$$

a równanie stycznej do elipsy w punkcie $P$ postać

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Pokażemy, że proste $PF_1$, $PF_2$ tworzą jednakowe kąty ze styczną. Oznaczać to będzie, że kula po odbiciu od brzegu przejdzie przez drugie ognisko elipsy. Kąty utworzone przez proste $PF_1$, $PF_2$ ze styczną będą jednakowe wtedy i tylko wtedy, gdy punkty $F_1$, $P$ oraz $F_2'$, gdzie $F_2'$ jest punktem symetrycznym do $F_2$ względem stycznej, będą leżały na jednej prostej. Łatwo obliczyć, że punkt $F_2'$ ma współrzędne

$$(x', y') = \left(\frac{b^2x_0 + a^2x_0 + a^2c}{cx_0 + a^2}, \frac{2a^2y_0}{cx_0 + a^2}\right).$$

Pokażemy, że wektory $\overrightarrow{F_1P}$, $\overrightarrow{PF_2'}$ są proporcjonalne, skąd już będzie wynikać, że punkty $F_1$, $P$, $F_2'$ są współliniowe. Mamy

$$\overrightarrow{F_1P} = (x_0 + c, y_0) \qquad \text{oraz} \qquad \overrightarrow{PF_2'} = \left(\frac{b^2x_0 + a^2c - cx_0^2}{cx_0 + a^2}, \frac{y_0\left(a^2 - cx_0\right)}{cx_0 + a^2}\right).$$

Łatwo teraz sprawdzić, że

$$\overrightarrow{PF_2'} = \frac{a^2 - cx_0}{cx_0 + a^2} \cdot \overrightarrow{F_1P}.$$

Co należało pokazać.

**• Przykład 5.12**

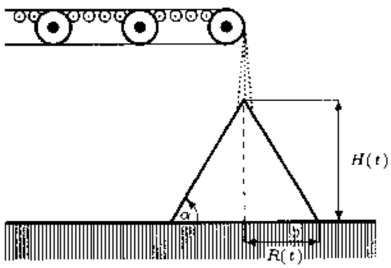
a) Taśmociąg przenosi piasek z wydajnością $w = 1\,\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$. Z piasku tworzy się kopiec w kształcie stożka o kącie $\alpha = \frac{\pi}{4}$ nachylenia tworzącej do podstawy. Obliczyć, z jaką prędkością wzrasta wysokość kopca w chwili, gdy osiągnie wysokość $H = 3\,\mathrm{m}$;

b) Balon wznosi się ze stałą prędkością $v = 3\,\mathrm{m/s}$. Na dnie kosza balonu zamontowany jest aparat do zdjęć kartograficznych. Kąt widzenia aparatu jest równy $2\alpha = 60^\circ$. Obliczyć, z jaką szybkością zmienia się pole fotografowanego obszaru, gdy balon jest na wysokości $H = 300\,\mathrm{m}$;

c) Krawędź sześciennej kostki z miedzi ma długość $a = 5$ cm. Sześcian ten jest przez $t = 10$ min. ogrzewamy równomiernie od temperatury $T_0 = 20^0$ C do temperatury $T_1 = 120^0$ C. Obliczyć, z jaką szybkością będzie zmieniać się objętość tej kostki po $t_0 = 8$ min. ogrzewania. Współczynnik rozszerzalności liniowej miedzi wynosi $\lambda = 16 \cdot 10^{-6}\,1/\mathrm{C}^0$.

**Rozwiązanie**

a) Niech $R(t)$ i $H(t)$ oznaczają odpowiednio promień podstawy i wysokość kopca w chwili $t$ (rysunek). Ilość piasku przeniesiona przez taśmociąg w czasie $t$ [min] jest równa $V = wt$. Z drugiej strony




$$V = \frac{1}{3}\pi R^2(t) H(t).$$

Jednakże $R(t) = H(t)\operatorname{ctg}\alpha$. Stąd otrzymamy

$$wt = \frac{\pi}{3}\operatorname{ctg}^2\alpha H^3(t).$$

Różniczkując obie strony tej równości względem $t$ dostaniemy

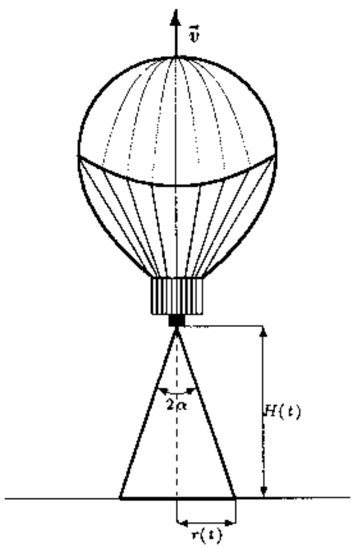
$$w = \pi\operatorname{ctg}^2\alpha H^2(t) H'(t).$$

Zatem

$$v = H'(t) = \frac{w}{\pi\operatorname{ctg}^2\alpha H^2(t)}.$$

Przyjmując w tym wzorze $w = 1\,[\mathrm{m}^3/\mathrm{min}]$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ oraz $H(t) = 3\,\mathrm{m}$ otrzymamy

$$v = \frac{1}{9\pi} \approx 0.035\ [\mathrm{m/min}].$$




b) Niech $r(t)$ oznacza promień fotografowanego obszaru (koło) w chwili $t \geqslant 0$, a $H(t)$ wysokość, na której znajduje się balon w tej chwili (rysunek). Wtedy

$$r(t) = H(t)\operatorname{tg}\alpha.$$

Stąd pole obszaru wyraża się wzorem

$$S(t) = \pi \operatorname{tg}^2 \alpha H^2(t).$$

Różniczkując obie strony tej równości względem $t$ otrzymamy

$$S'(t) = 2\pi \operatorname{tg}^2 \alpha H(t) H'(t).$$

Ponieważ $H'(t) \equiv v$, więc podstawiając $H(t) = 300\,\mathrm{m}$ otrzymamy

$$S'(t) = 2\pi \operatorname{tg}^2 30^\circ \cdot 300 \cdot 3 = 600\pi \left[\mathrm{m}^2/\mathrm{sek}\right].$$

c) Niech $\Delta T(t)$ oznacza przyrost temperatury kostki do chwili $t$. Z warunków zadania wynika, że $\Delta T(t) = \frac{t}{10}(120 - 20) = 10t$, gdzie $0 \leqslant t \leqslant 10$. Ponadto niech $a(t)$ i $V(t)$ oznaczają odpowiednio długość krawędzi i objętość kostki w chwili $t$. Ponieważ przyrost długości krawędzi kostki zależy liniowo od przyrostu temperatury, tj. $\Delta a = a\lambda\Delta T$, więc

$$a(t) = a + a\lambda\Delta T(t) = 5 + 5 \cdot 16 \cdot 10^{-6} \cdot 10t.$$

Stąd

$$V(t) = a^3(t) = \left(5 + 5 \cdot 16 \cdot 10^{-5} t\right)^3, \quad \text{gdzie } 0 \leqslant t \leqslant 10.$$

Szybkość z jaką zmienia się dana wielkość jest pochodną funkcji opisującej tę wielkość. Zatem szybkość zmiany objętości wyraża się wzorem

$$V'(t) = 240 \cdot 10^{-5} \left(5 + 5 \cdot 16 \cdot 10^{-5} \cdot t\right)^2.$$

W chwili $t_0 = 8$ szybkość zmiany objętości będzie więc równa

$$V'(8) = 240 \cdot 10^{-5} \cdot \left(5 + 5 \cdot 16 \cdot 10^{-5} \cdot 8\right)^2 = 0{,}0615\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{min}.$$

## Zadania

### ○ Zadanie 5.1

Korzystając z definicji zbadać, czy istnieją pochodne podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x) = |x - 1|$, $x_0 = 1$;

a) $g(x) = |x - \pi| \sin x$, $x_0 = \pi$;

c) $h(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$;

d) $p(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leqslant 1, \\ \sqrt{x} & \text{dla } x > 1, \end{cases}$ $x_0 = 1$;

e) $q(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+1|}{\ln|x+1|} & \text{dla } x \neq -1, \\ 0 & \text{dla } x = -1, \end{cases}$ $x_0 = -1$;

f*) $r(x) = \begin{cases} e^x & \text{dla } x \in \boldsymbol{Q}, \\ x & \text{dla } x \notin \boldsymbol{Q}, \end{cases}$ $x_0 = 0$.

### ○ Zadanie 5.2

Korzystając z definicji obliczyć pochodne podanych funkcji:

a) $f(x) = x^2 - 3x$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$; b) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$, gdzie $x \neq 0$;

c) $h(x) = 4^x$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$; d) $p(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, gdzie $x \neq 0$;

e) $q(x) = \operatorname{ctg} x$, gdzie $x \neq k\pi$ dla $k \in \boldsymbol{Z}$; f) $r(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

○ **Zadanie 5.3**
Badając pochodne jednostronne rozstrzygnąć czy, istnieją pochodne podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x) = \left|x^5\right|$, $x_0 = 0$; b) $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} - 1 & \text{dla } x \geqslant 1, \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x & \text{dla } x < 1, \end{cases}$ $x_0 = 1$;

c) $h(x) = |\sin x|$, $x_0 = \pi$; d) $p(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}\cos\frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$.

○ **Zadanie 5.4**
Znaleźć parametry $a, b, c$, dla których podane funkcje mają pochodne na $\boldsymbol{R}$ :

a) $f(x) = \begin{cases} ae^x + b & \text{dla } x \leqslant 0, \\ 2 - x & \text{dla } x > 0; \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0, \\ a\sin x + b\cos x + c & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 1 & \text{dla } x > \pi. \end{cases}$

○ **Zadanie 5.5**
Zbadać, czy podane funkcje mają pochodne niewłaściwe w punkcie $x_0 = 0$:

a) $f(x) = \sqrt{|x| + \sqrt{|x|}}$; b) $g(x) = \sqrt[3]{\sin x}$; c*) $h(x) = \begin{cases} |x|^x & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$.

○ **Zadanie 5.6**
Korzystając z reguł obliczania pochodnych obliczyć pochodne podanych funkcji:

a) $y = \dfrac{\arcsin x}{e^x}$; b) $y = \left(1 + \sqrt[3]{x}\right)\operatorname{tg}\left(\sqrt{x}\right)$; c) $y = \sqrt[x]{x}$; d) $y = \dfrac{2^{\sin^2 x}}{3^{\cos^2 x}}$.

○ **Zadanie 5.7**
Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej obliczyć:

a) $x'(y)$ dla:

i) $y = \dfrac{1}{3^x}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$; ii) $y = \cos x$, gdzie $0 < x < \pi$;

iii) $y = \operatorname{th} x$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$; iv) $y = \ln x$, gdzie $x > 0$;

b) i) $\left(f^{-1}\right)'(e+1)$, gdzie $f(x) = x + \ln x$;

ii) $\left(g^{-1}\right)'(1)$, gdzie $g(x) = \cos x - 3x$.

**○ Zadanie 5.8**

Zakładając, że funkcje $f$ i $g$ mają pochodne właściwe, obliczyć pochodne funkcji:

a) $y=\sin[f(x)g(x)]$; b) $y=[f(x)]^{g(x)}$; c) $y=\operatorname{tg}\dfrac{f(x)}{g(x)}$; d) $y=f(x)\operatorname{arctg} g(x)$.

**○ Zadanie 5.9**

Napisać równania stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$, $\left(\sqrt{2}, f\left(\sqrt{2}\right)\right)$; b) $f(x)=\operatorname{arctg} x^2$, $(0, f(0))$;

c) $f(x)=\sqrt[5]{x}$, $(e, f(e))$; d) $f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$, $(1, f(1))$;

e) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $(e, f(e))$; f) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$, $(1, f(1))$.

**○ Zadanie 5.10**

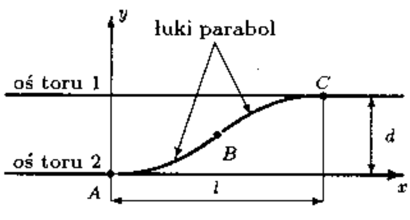
a) Obliczyć kąty, pod jakimi przecinają się wykresy podanych funkcji:

i) $f(x)=x^2$, $g(x)=\sqrt[3]{x}$, $x>0$; ii) $f(x)=4-x$, $g(x)=4-\dfrac{x^2}{2}$, $x>0$;

b) Dla jakich wartości parametru $a\in\boldsymbol{R}$, wykresy funkcji $y=e^{ax}$, $y=e^{-x}$ przetną się pod kątem prostym?

**○ Zadanie 5.11**

a) Tory kolejowe biegnące równolegle trzeba połączyć rozjazdem składającym się z dwóch łuków parabol (rysunek). Odległość między osiami torów wynosi $d=8$ m, a rozjazd ma mieć długość $l=40$ m. Należy go zaprojektować w ten sposób, aby ruch pociągów przebiegał w sposób gładki, tzn. aby w punktach $A$, $B$, $C$ istniały styczne do osi rozjazdu. Podać równania łuków parabol w układzie współrzędnych z rysunku.




b) Punkt materialny porusza się po prostej $y=\dfrac{3}{2}$ w kierunku osi $Oy$. Wyznaczyć tor tego punktu po odbiciu sprężystym (kąt padania równa się kątowi odbicia) od łuku paraboli o równaniu $y=2-\dfrac{x^2}{2}$, gdzie $x\geqslant 0$.

○ **Zadanie 5.12**

a) Gumowy balon ma kształt kuli o objętości $V_0 = 40$ m$^3$. Do balonu wtłacza się powietrze z szybkością $p = 1$ m$^3$/s. Obliczyć, z jaką szybkością powiększać się będzie średnica balonu po 24 sek. Założyć, że ciśnienie powietrza w balonie jest stałe;

b) Drabina składa się z dwóch ramion o długości $l = 2.5$ m. Podstawy ramion są przysuwane do siebie z prędkością $v = 5$ cm/sek. Obliczyć, z jaką prędkością będzie podnosił się wierzchołek drabiny w chwili, gdy podstawy ramion będą oddalone od siebie o $d = 3$ m.

## Odpowiedzi i wskazówki

**5.1 a)** nie istnieje; **b)** $g'(\pi) = 0$; **c)** $h'(0) = \lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} = 0$; **d)** $p'(1) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{p(x)-1}{x-1}$ nie istnieje, bo $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{p(x)-1}{x-1} = 2 \neq \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{p(x)-1}{x-1} = \dfrac{1}{2}$; **e)** $q'(-1) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{|x+1|}{(x+1)\ln|x+1|} = 0$; **f*)** $r'(0) = 1$.

**5.2** Wskazówka. Obliczyć granice: **a)** $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\left(x^2-3x\right)-\left(x_0^2-3x_0\right)}{x-x_0}$, gdzie $x_0 \in \boldsymbol{R}$;
**b)** $g'(x_0) \stackrel{def}{=} \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x_0}}}{x-x_0}$, gdzie $x_0 \neq 0$; **c)** $h'(x_0) \stackrel{def}{=} \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{4^x - 4^{x_0}}{x-x_0}$, gdzie $x_0 \in \boldsymbol{R}$;
**d)** $p'(x_0) \stackrel{def}{=} \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sin\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x_0}}{x-x_0}$, gdzie $x_0 \neq 0$;
**e)** $q'(x_0) \stackrel{def}{=} \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} x_0}{x-x_0}$, gdzie $x_0 \neq k\pi$ dla każdego $k \in \boldsymbol{Z}$;
**f)** $r'(x_0) \stackrel{def}{=} \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x_0^2+1}}{x-x_0}$.

**5.3 a)** $f'(0) = 0$; **b)** $g'(1) = \dfrac{1}{2}$; **c)** $h'(\pi)$ nie istnieje, gdyż $h'_-(\pi) = -1$, $h'_+(\pi) = 1$;
**d)** $p'(0)$ nie istnieje, bo nie istnieje granica $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$.

**5.4 a)** $a = -1$, $b = 3$; **b)** $a = 0$, $b = -1$, $c = 0$.

**5.5 a)** $f'(0)$ nie istnieje, ale $f'_-(0) = -\infty$, $f'_+(0) = \infty$; **b)** $g'(0) = \infty$; **c*)** $p'(0) = -\infty$.

**5.6 a)** $\dfrac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x}{e^x}$, gdzie $|x| < 1$; **b)** $\dfrac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{4\sqrt[4]{x^3}} + \dfrac{1+\sqrt[4]{x}}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$, gdzie $x > 0$ oraz $x \neq \left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)^2$ dla każdego $k \in \boldsymbol{Z}$; **c)** $\sqrt[x]{x}\,\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, gdzie $x > 0$; **d)** $\dfrac{\ln 6 \cdot 6^{\sin^2 x} \cdot \sin 2x}{3}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

**5.7 a-i)** $x'(y) = \dfrac{-1}{y\ln 3}$, gdzie $y > 0$; **a-ii)** $x'(y) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$, gdzie $|y| < 1$;
**a-iii)** $x'(y) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 y}$, gdzie $y \in \boldsymbol{R}$; **a-iv)** $x'(y) = \dfrac{1}{y}$, gdzie $y \neq 0$; **b-i)** $\dfrac{e}{e+1}$; **b-ii)** $-\dfrac{1}{3}$.

**5.8 a)** $\cos[f(x)g(x)] \cdot \big(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\big)$;

b) $y' = [f(x)]^{g(x)} \cdot \left(g'(x) \cdot \ln f(x) + \frac{g(x)}{f(x)} \cdot f'(x)\right)$; c) $y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x) \cos^2 \frac{f(x)}{g(x)}}$;

d) $y' = f'(x) \operatorname{arctg} g(x) + \frac{f(x) \cdot g'(x)}{1 + g^2(x)}$.

**5.9** a) $y = -\frac{2}{9}x + \frac{8}{9}\sqrt{2}$; b) $y = 0$; c) $y = \sqrt[e]{e}$; d) $y = \frac{e}{4}x + \frac{e}{4}$; e) $y = \frac{1}{e}$; f) $y = -\frac{1}{2}(x-1)$.

**5.10** a-i) $\frac{\pi}{4}$; a-ii) $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$; b) $a = 1$.

**5.11** a) $y = \begin{cases} \frac{x^2}{100} & \text{dla} \quad 0 \leqslant x \leqslant 20, \\ 8 - \frac{(x-40)^2}{100} & \text{dla} \quad 20 < x \leqslant 40. \end{cases}$ Zadanie ma nieskończenie wiele rozwiązań; b) Punkt będzie poruszał się po prostej $x = 1$ (w górę).

**5.12** a) $D(t) = \sqrt[3]{\frac{6(V_0 + tp)}{\pi}}$, $D'(t) = \sqrt[3]{\frac{2}{9\pi}} \cdot \frac{p}{\sqrt[3]{(V_0 + tp)^2}}$, $D'(24) \approx 0.0258 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$;

b) $H(t) = \sqrt{l^2 - \frac{d^2(t)}{4}}$, $w = H'(t) = \frac{-d(t)d'(t)}{2\sqrt{4l^2 - d^2(t)}}$, $w \approx 3.75$ [cm/s].

# Szósty tydzień

**Różniczka funkcji (4.4). Pochodne wyższych rzędów (4.5).**

## Przykłady

### • Przykład 6.1

Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżone wartości podanych wyrażeń:
a) $\sin 29^\circ$; b) $\sqrt[3]{63}$; c) $\operatorname{arctg} 1.005$; d) $2^{2.9999}$; e) $\operatorname{ch} 0.07$.

**Rozwiązanie**

W obliczeniach przybliżonych stosujemy wzór: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$.

a) Przyjmujemy $f(x) = \sin x$, $x_0 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$, $\Delta x = -1^\circ = -\frac{\pi}{180}$. Wtedy

$$\sin 29^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin\frac{\pi}{6} + (\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{6}} \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} = 0.4849\ldots.$$

Dokładna wartość $\sin 29^\circ = 0.4848\ldots$.

b) Przyjmujemy $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 64$, $\Delta x = -1$. Wtedy

$$\sqrt[3]{63} \approx \sqrt[3]{64} + \left[\sqrt[3]{x}\right]'_{x=64} \cdot (-1) = 4 - \frac{1}{3 \cdot 16} = 3.9792\ldots.$$

Dokładna wartość $\sqrt[3]{63} = 3.9791\ldots$.

c) Przyjmujemy $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0.005$. Wtedy

$$\operatorname{arctg} 1.005 \approx \operatorname{arctg} 1 + [\operatorname{arctg} x]'_{x=1} \cdot (0.005) = \frac{\pi}{4} + \frac{0.005}{1+1} = 0.7879\ldots.$$

Dokładna wartość arctg 1.005 = 0.7879... .

d) Przyjmujemy $f(x) = 2^x$, $x_0 = 3$ oraz $\Delta x = -0.0001$. Wtedy

$$2^{2.9999} \approx 2^3 + \left(2^x\right)'_{x=3} \cdot (-0.0001) = 8 - 8 \cdot \ln 2 \cdot 0.0001 = 7.9994\ldots .$$

Dokładna wartość $2^{2.9999} = 7.9994\ldots$ .

e) Przyjmujemy $f(x) = \operatorname{ch} x$, $x_0 = 0$ oraz $\Delta x = 0.07$. Wtedy

$$\operatorname{ch} 0.07 \approx \operatorname{ch} 0 + (\operatorname{ch} x)'_{x=0} \cdot 0.07 = 1 + 0 \cdot 0.07 = 1.000.$$

Dokładna wartość ch 0.07 = 1.0025... .

## • Przykład 6.2

a) Krawędź sześcianu zmierzono z dokładnością 1 mm i otrzymano 125 mm. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć pole powierzchni całkowitej tego sześcianu?

b) Do pomiaru wysokości wieży zamkowej zastosowano teodolit, którym można zmierzyć kąty z dokładnością $0.1°$. Teodolit ustawiono w odległości $d = 100$ m od podstawy wieży i wycelowano na brzeg wierzchołka wieży (rysunek). Kąt jaki tworzy oś teodolitu z poziomem wynosi $\alpha = 35.7°$. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć wysokość tej wieży?

c) Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej oraz z różniczki funkcji znaleźć przybliżone rozwiązania równań:

i) $e^x + 2x = 1.03$; ii) $x^7 + 4x^5 + 3x^3 + 2x = 9.9962$.

**Rozwiązanie**

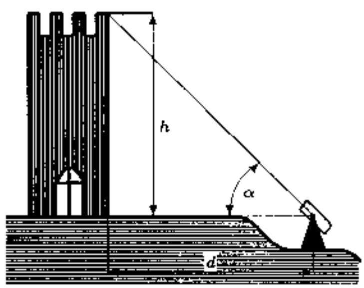
a) Pole powierzchni całkowitej sześcianu o krawędzi $x$ wyraża się wzorem $P(x) = 6x^2$. Dokładność $\Delta_P$, z jaką obliczamy pole powierzchni całkowitej sześcianu wyraża się wzorem przybliżonym

$$|\Delta_P| \approx \left|P'(x)\right| \cdot |\Delta_x|,$$

gdzie $\Delta_x$ oznacza dokładność pomiaru krawędzi sześcianu. Zatem

$$|\Delta_P| \approx [12x]_{x=125} \cdot 1 = 1500\,\text{mm}^2.$$

b) Wysokość wieży zamkowej jest określona wzorem $h(\alpha) = d \operatorname{tg} \alpha$. Dokładność $\Delta_h$ z jaką obliczamy wysokość wieży wyraża się w przybliżeniu wzorem $|\Delta_h| \approx \left|h'(\alpha)\right| \cdot |\Delta_\alpha|$, gdzie $\Delta_\alpha$ oznacza dokładność pomiaru kąta $\alpha$ (w radianach). Zatem




$$|\Delta_h| \approx \left[\frac{100}{\cos^2 \alpha}\right]_{\alpha=35.7°} \cdot \frac{0.1° \cdot \pi}{180°} = 0.26\,\text{m}.$$

Dokładność pomiaru wysokości wieży wynosi około 0.26 m.

c–i) Rozważmy równanie

$$e^x + 2x = p,$$

gdzie $p$ jest parametrem. Ponieważ funkcja $f(x) = e^x + 2x$ jest rosnąca oraz ponieważ $\boldsymbol{R}$ jest jej zbiorem wartości, więc dla każdej wartości parametru $p$ powyższe równanie ma jednoznaczne rozwiązanie

$$x = f^{-1}(p).$$

Ponadto mamy $f^{-1}(1) = 0$. Przyjmując teraz we wzorze przybliżonym

$$f^{-1}(p_0 + \Delta p) \approx f^{-1}(p_0) + \left(f^{-1}\right)'(p_0)\,\Delta p$$

$p_0 = 1$ oraz $\Delta p = 0.03$ otrzymamy przybliżone rozwiązanie równania

$$e^x + 2x = 1.03.$$

Mamy zatem

$$x \approx f^{-1}(1) + \frac{1}{f'(0)} \cdot \Delta p = 0 + \frac{1}{\left(e^x + 2\right)\big|_{x=0}} \cdot 0.03 = 0.01.$$

**Uwaga.** Dokładny pierwiastek tego równania jest równy 0.009983... .

c–ii) Rozważmy równanie

$$x^7 + 4x^5 + 3x^3 + 2x = p,$$

gdzie $p$ jest parametrem. Ponieważ funkcja $g(x) = x^7 + 4x^5 + 3x^3 + 2x$ jest rosnąca oraz ponieważ $\boldsymbol{R}$ jest jej zbiorem wartości, więc dla każdej wartości parametru $p$ powyższe równanie ma jednoznaczne rozwiązanie

$$x = g^{-1}(p).$$

Ponadto mamy $g^{-1}(10) = 1$. Przyjmując teraz we wzorze przybliżonym

$$g^{-1}(p_0 + \Delta p) \approx g^{-1}(p_0) + \left(g^{-1}\right)'(p_0)\,\Delta p$$

$p_0 = 10$ oraz $\Delta p = -0.0038$ otrzymamy przybliżone rozwiązanie rownania

$$x^7 + 4x^5 + 3x^3 + 2x = 9.9962.$$

Mamy zatem

$$x \approx g^{-1}(10) + \frac{1}{g'(1)} \cdot \Delta p = 1 + \frac{1}{\left(7x^6 + 20x^4 + 9x^2 + 2\right)\big|_{x=1}} \cdot (-0.0038) = 0.9999.$$

**Uwaga.** Dokładny pierwiastek tego równania jest równy 0.999899... .

- **Przykład 6.3**

Obliczyć pochodne $f'$, $f''$, $f'''$ dla podanych funkcji:

a) $f(x) = x \ln x$; b) $f(x) = \left(x^2 + x + 1\right)\cos x$; c) $f(x) = e^{\cos x}$.

**Rozwiązanie**

a) Dla $x > 0$ mamy $f'(x) = \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$ oraz

$$f''(x) = \left[f'(x)\right]' = (\ln x + 1)' = \frac{1}{x}; \qquad f'''(x) = \left[f''(x)\right]' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

b) Mamy

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (2x+1)\cos x + \left(x^2+x+1\right)(-\sin x) = (2x+1)\cos x + \left(-x^2-x-1\right)\sin x;\\
f''(x) &= [f'(x)]'\\
&= \left[(2x+1)\cos x + \left(x^2+x+1\right)(-\sin x)\right]'\\
&= 2\cos x + (2x+1)(-\sin x) + (-2x-1)\sin x + \left(-x^2-x-1\right)\cos x\\
&= (-4x-2)\sin x + \left(-x^2-x+1\right)\cos x
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
f'''(x) &= [f''(x)]'\\
&= \left[(-4x-2)\sin x + \left(-x^2-x+1\right)\cos x\right]'\\
&= -4\sin x + (-4x-2)\cos x + (-2x-1)\cos x + \left(-x^2-x+1\right)(-\sin x)\\
&= \left(x^2+x-5\right)\sin x - (6x+3)\cos x.
\end{aligned}$$

c) Mamy

$$f'(x) = \left(e^{\cos x}\right)' = -e^{\cos x}\sin x.$$

Dalej

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left[f'(x)\right]' = -\left[e^{\cos x}\sin x\right]'\\
&= -\left[e^{\cos x}\left(-\sin^2 x\right) + e^{\cos x}\cos x\right] = e^{\cos x}\left(\sin^2 x - \cos x\right).
\end{aligned}$$

Następnie

$$\begin{aligned}
f'''(x) &= [f''(x)]' = \left[e^{\cos x}\left(\sin^2 x - \cos x\right)\right]'\\
&= e^{\cos x}(-\sin x)\left(\sin^2 x - \cos x\right) + e^{\cos x}(2\sin x\cos x + \sin x)\\
&= e^{\cos x}\left(3\sin x\cos x - \sin^3 x + \sin x\right) = e^{\cos x}\left(3\sin x\cos x + \sin x\cos^2 x\right)\\
&= e^{\cos x}\sin x\cos x\,(3+\cos x).
\end{aligned}$$

## • Przykład 6.4

Zbadać, czy istnieje $f'''(0)$, jeżeli:

a) $f(x) = |x|^3$; b) $f(x) = \begin{cases} x^4 & \text{dla } x \leqslant 0,\\ \sin^4 x & \text{dla } x > 0.\end{cases}$

**Rozwiązanie**

a) Mamy

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{dla } x < 0,\\ 0 & \text{dla } x = 0,\\ x^3 & \text{dla } x > 0.\end{cases}$$

Pochodne $f'$, $f''$ w punktach $x \neq 0$ obliczamy korzystając z reguł różniczkowania, a pochodne $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ korzystając z definicji. Mamy $\left(-x^3\right)' = -3x^2$ oraz $\left(x^3\right)' = 3x^2$. Ponadto

$$f'_-(0) \stackrel{def}{=} \lim_{x\to 0_-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \stackrel{x<0}{=} \lim_{x\to 0^-}\frac{-x^3-0}{x} = -\lim_{x\to 0^-} x^2 = 0,$$

oraz

$$f'_+(0) \stackrel{def}{=} \lim_{x\to 0_+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \stackrel{x>0}{=\!=} \lim_{x\to 0+} \frac{x^3-0}{x} = \lim_{x\to 0+} x^2 = 0,$$

stąd $f'(0) = 0$. Mamy zatem

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 & \text{dla } x < 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \\ 3x^2 & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

Postępując podobnie z $f'$ otrzymamy

$$f''(x) = \begin{cases} -6x & \text{dla } x < 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \\ 6x & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

Pochodna $f'''(0)$ nie istnieje, bo pochodne jednostronne $f'''_-(0)$, $f'''_+(0)$ nie pokrywają się. Mamy bowiem

$$f'''_-(0) \stackrel{def}{=} \lim_{x\to 0_-} \frac{f''(x)-f''(0)}{x-0} \stackrel{x<0}{=\!=} \lim_{x\to 0^-} \frac{-6x-0}{x} = -\lim_{x\to 0^-} 6 = -6,$$

oraz

$$f'''_+(0) \stackrel{def}{=} \lim_{x\to 0_+} \frac{f''(x)-f''(0)}{x-0} \stackrel{x>0}{=\!=} \lim_{x\to 0+} \frac{6x-0}{x} = \lim_{x\to 0+} 6 = 6.$$

b) Mamy

$$f(x) = \begin{cases} x^4 & \text{dla } x < 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \\ \sin^4 x & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

Pochodne $f'$, $f''$ w przedziałach $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ obliczamy korzystając z reguł różniczkowania. Dla $x < 0$ mamy zatem

$$f'(x) = 4x^3, \qquad f''(x) = 12x^2,$$

a dla $x > 0$

$$f'(x) = 4\sin^3 x \cos x, \quad f''(x) = 12\sin^2 x \cos^2 x - 4\sin^4 x.$$

Ponadto mamy

$$f'_-(0) \stackrel{def}{=} \lim_{x\to 0_-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \stackrel{x<0}{=\!=} \lim_{x\to 0^-} \frac{x^4-0}{x} = \lim_{x\to 0^-} x^3 = 0,$$

oraz

$$f'_+(0) \stackrel{def}{=} \lim_{x\to 0_+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \stackrel{x>0}{=\!=} \lim_{x\to 0+} \frac{\sin^4 x - 0}{x} = \lim_{x\to 0+} \sin^3 x \cdot \frac{\sin x}{x} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Mamy zatem

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 & \text{dla } x < 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \\ 4\sin^3 x \cos x & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

Postępując podobnie otrzymamy

$$f''(x) = \begin{cases} 12x^2 & \text{dla } x < 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \\ 12\sin^2 x\cos^2 x - 4\sin^4 x & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

Obliczymy teraz $f'''_-(0)$ oraz $f'''_+(0)$. Mamy

$$f'''_-(0) \stackrel{def}{=} \lim_{x\to 0_-} \frac{f''(x) - f''(0)}{x-0} \stackrel{x<0}{=\!=} \lim_{x\to 0^-} \frac{12x^2 - 0}{x} = 12 \lim_{x\to 0^-} x = 0,$$

oraz

$$f'''_+(0) \stackrel{def}{=} \lim_{x\to 0_+} \frac{f''(x) - f''(0)}{x-0} \stackrel{x>0}{=\!=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(12\sin^2 x\cos^2 x - 4\sin^4 x\right) - 0}{x}$$

$$= 4 \lim_{x\to 0^+} \left[3\left(\frac{\sin x}{x}\right)\sin x\cos^2 x - \left(\frac{\sin x}{x}\right)\sin^3 x\right] = 0.$$

Ponieważ $f'''_-(0) = f'''_+(0) = 0$, więc także $f'''(0) = 0$.

## • Przykład 6.5

Funkcja $f$ ma pochodne do trzeciego rzędu włącznie. Obliczyć $y', y'', y'''$ dla podanych funkcji:

a) $y = f\left(x^2\right)$; b) $y = f\left(e^x\right)$; c) $y = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$; d) $y = f(\ln x)$.

**Rozwiązanie**

a) Mamy $y'(x) = \left[f\left(x^2\right)\right]' = f'\left(x^2\right)\cdot 2x$ oraz

$$\begin{aligned} y''(x) &= \left[2xf'\left(x^2\right)\right]' = 2\left[f'\left(x^2\right) + xf''\left(x^2\right)\cdot 2x\right]; \\ y'''(x) &= 2\left[f'\left(x^2\right) + 2x^2 f''\left(x^2\right)\right]' \\ &= 2\left[f''\left(x^2\right)\cdot 2x + 4xf''\left(x^2\right) + 2x^2 f'''\left(x^2\right)\cdot 2x\right] \\ &= 4x\left[3f''\left(x^2\right) + 2x^2 f'''\left(x^2\right)\right]. \end{aligned}$$

b) Mamy $y'(x) = \left[f\left(e^x\right)\right]' = f'\left(e^x\right)\cdot e^x$ oraz

$$\begin{aligned} y''(x) &= \left[e^x f'\left(e^x\right)\right]' = e^x f'\left(e^x\right) + e^x f''\left(e^x\right)e^x = e^x\cdot f'\left(e^x\right) + e^{2x} f''\left(e^x\right); \\ y'''(x) &= \left[e^x f'\left(e^x\right) + e^{2x} f''\left(e^x\right)\right]' \\ &= e^x f'\left(e^x\right) + e^x f''\left(e^x\right)e^x + 2e^{2x} f''\left(e^x\right) + e^{2x} f'''\left(e^x\right)e^x \\ &= e^x f'\left(e^x\right) + 3e^{2x} f''\left(e^x\right) + e^{3x} f'''\left(e^x\right). \end{aligned}$$

Z postaci kilku początkowych pochodnych funkcji $h$ można wysnuć hipotezę:

$$g^{(n)}(x) = \left(-\frac{1}{3}\right)^n e^{-\frac{x}{3}}.$$

Dowód indukcyjny tej hipotezy pomijamy.

c) Przed przystąpieniem do obliczeń kolejnych pochodnych wygodnie będzie rozłożyć funkcję wymierną $h$ na ułamki proste. Mamy

$$h(x) = \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1}.$$

Zatem

$$h'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}, \qquad h''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{-2}{(x+1)^3},$$

$$h'''(x) = \frac{-2\cdot 3}{(x-1)^4} + \frac{2\cdot 3}{(x+1)^4}, \qquad h^{(4)}(x) = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{(x-1)^5} + \frac{-2\cdot 3\cdot 4}{(x+1)^5}.$$

Z postaci początkowych czterech pochodnych można wysunąć hipotezę o postaci $n$-tej pochodnej:

$$h^{(n)}(x) = n!\left(\frac{(-1)^n}{(x-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{(x-1)^{n+1}}\right) = \frac{n!(-1)^n\left[(x+1)^n - (x-1)^n\right]}{(x^2-1)^{n+1}}.$$

Indukcyjny dowód tej hipotezy pozostawiamy Czytelnikowi.

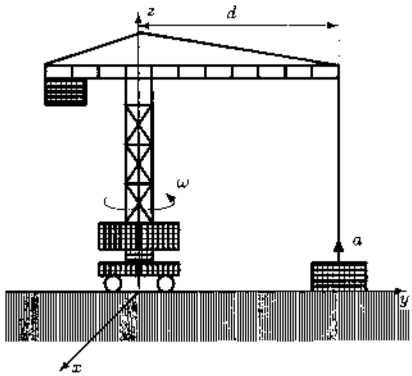
## • Przykład 6.7

a) Punkt materialny porusza się wzdłuż osi $Ox$ pod wpływem zmiennej siły. Położenie $x(t)$ tego punktu w chwili $t$ jest opisane wzorem

$$x(t) = t^3 - 3t^2 + t + 5.$$

Znaleźć położenie punktu w chwili, w której siła działająca na niego równa się 0;

b) Żuraw budowlany, którego ramię ma długość $d = 20$ m (rysunek), podnosi do góry płytę z przyspieszeniem $a = 0.1$ m/s$^2$. Jednocześnie dźwig obraca się wokół własnej osi z prędkość kątową $\omega = \dfrac{\pi}{50}$ 1/s. Obliczyć prędkość płyty względem otoczenia po czasie $t = 5$ s.




**Rozwiązanie**

a) Siła działająca na punkt materialny jest równa 0, gdy przyspieszenie tego punktu jest równe 0. Przyspieszenie punktu jest drugą pochodną położenia. Zatem $a(t) = x''(t) = 6t - 6$. Stąd $a(t) = 0 \iff t = 1$. Punkt materialny w chwili $t = 1$ ma współrzędną $x = x(1) = 4$.

b) W układzie współrzędnych wprowadzonym na rysunku położenie płyty w chwili $t \geqslant 0$ jest opisane wektorem wodzącym $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, gdzie

$$x(t) = d\sin\omega t = 20\sin\frac{\pi}{50}t, \quad y(t) = d\cos\omega t = 20\cos\frac{\pi}{50}t, \quad z(t) = a\frac{t^2}{2} = 0.05t^2.$$

Prędkość płyty w chwili $t$ jest pochodną jej położenia:

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

Zatem

$$\vec{v}(t) = \left(\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{50}t,\ -\frac{2\pi}{5}\sin\frac{\pi}{50}t,\ 0.1t\right),$$

Stąd $\vec{v}(5) \approx (1.20; 0.38; 0.50)$ oraz

$$v(5) = |\vec{v}(5)| = \sqrt{(1.20)^2 + (0.38)^2 + (0.50)^2} = 1.35 \text{ m/s}.$$

## Zadania

### ○ Zadanie 6.1

Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżone wartości podanych wyrażeń:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3.98}}$; b) $\operatorname{tg} 44°55'$; c) $\arcsin 0.51$; d) $e^{-0.07}$; e) $\ln 0.9993$.

### ○ Zadanie 6.2

a) Średnica kuli zmierzona z dokładnością 0.1 mm wynosi 21,7 mm. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć objętość tej kuli?

b) Przekątna sześcianu zmierzona z dokładnością 1 mm wynosi 14.3 cm. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć pole powierzchni całkowitej tego sześcianu?

c) W biegu na 100 m czas mierzy się z dokładnością 0.01 sek. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć średnią szybkość zawodniczki, jeśli uzyskała ona czas 12.50 sek.?

d) Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej oraz z różniczki funkcji znaleźć przybliżone rozwiązania podanych równań:

i) $\sqrt{x^2+5} + x = 4.95$; ii) $x^x = 28$.

### ○ Zadanie 6.3

Obliczyć pochodne $f'$, $f''$, $f'''$ dla podanych funkcji:

a) $f(x) = 4x^7 - 5x^3 + 2x$; b) $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$;

c) $f(x) = x^3 \ln x$; d) $f(x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh} 2x$.

### ○ Zadanie 6.4

Zbadać, czy istnieje $f^{(n)}(x_0)$ dla podanych funkcji i punktów:

a) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{dla } x < 0, \\ x^3 & \text{dla } x \geqslant 0, \end{cases}$ $x_0 = 0,\ n = 2;$ b) $f(x) = \begin{cases} x^4 \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$ $x_0 = 0,\ n = 3.$

○ **Zadanie 6.5**

Funkcja $f$ ma pochodne do drugiego rzędu włącznie. Obliczyć $y', y''$ dla podanych funkcji:

a) $y = f\left(\sqrt{x}\right)$; b) $y = f\left(3^x\right)$; c) $y = f(\sin x)$; d) $y = f(\operatorname{arctg} x)$.

○ **Zadanie 6.6**

Znaleźć wzory ogólne na pochodną $n$–tego rzędu podanych funkcji:

a) $f(x) = \cos \dfrac{x}{3}$; b) $g(x) = 2^{-x}$; c) $h(x) = \dfrac{x}{e^x}$; d*) $p(x) = \operatorname{tg} x$.

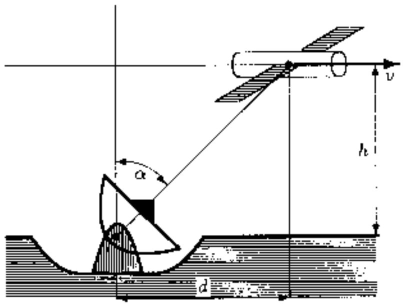
○ **Zadanie 6.7**

a) Punkt materialny porusza się ze zmienną szybkością wzdłuż osi $Ox$. Położenie tego punktu w chwili $t$ jest opisane wzorem

$$x(t) = 3 \cdot 2^t + 2^{-3t}.$$

Obliczyć przyśpieszenie punktu w chwili, w której jego szybkość jest równa 0.

b) Stacja orbitalna porusza się prostoliniowo na wysokości $h = 400$ km nad Ziemią z szybkością $v = 500$ km/godz. Antena odbierająca sygnały znajduje się bezpośrednio pod trajektorią stacji (rysunek). W każdej chwili oś anteny jest skierowana na stację. Obliczyć szybkość kątową anteny w chwili, gdy stacja znajdzie się w odległości $d = 200$ km od anteny.




## Odpowiedzi i wskazówki

**6.1 a)** $\approx 0.50125$; **b)** $\approx 0.99709$; **c)** $\approx 0.53515$; **d)** $\approx 0.93$; **e)** $\approx -0.0007$.

**6.2 a)** $\Delta_V \approx 74$ $\left[\text{mm}^3\right]$; **b)** $\Delta_S \approx 572$ $\left[\text{mm}^2\right]$; **c)** $\Delta_{v_{śr}} \approx 0.0064$ [m/sek]; **d-i)** 1.97 (dokładne rozwiązanie 1.969949...); **d-ii)** $3 + \dfrac{1}{27(\ln 3 + 1)} \approx 3.017648$ (dokładne rozwiązanie 3.017306...).

**6.3 a)** $f'(x) = 28x^6 - 15x^2 + 2$, $f''(x) = 168x^5 - 30x$, $f'''(x) = 840x^4 - 30$; b) $f'(x) = \dfrac{3}{4}(\cos x - \cos 3x) - \dfrac{3}{4}(\sin x + \sin 3x)$, $f''(x) = -\dfrac{3}{4}(\cos x + 3\cos 3x) - \dfrac{3}{4}(\sin x - 3\sin 3x)$,

$f'''(x) = -\frac{3}{4}(\cos x - 9\cos 3x) + \frac{3}{4}(\sin x + 9\sin 3x)$; **c)** $f'(x) = x^2(3\ln x + 1)$, $f''(x) = x(6\ln x + 5)$, $f'''(x) = 6\ln x + 11$; **d)** $f'(x) = \operatorname{sh} 2x + 2\operatorname{ch} 2x$, $f''(x) = 2\operatorname{ch} 2x + 4\operatorname{sh} 2x$, $f'''(x) = 4\operatorname{sh} 2x + 8\operatorname{ch} 2x$.

**6.4 a)** $f''(0)$ nie istnieje, bo $f''_-(0) = -2$ oraz $f''_+(0) = 0$; **b)** $f'''(0) = 0$.

**6.5 a)** $y' = \frac{f'\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$, $y'' = \frac{f''\left(\sqrt{x}\right)\sqrt{x} - f'\left(\sqrt{x}\right)}{4\sqrt{x^3}}$; **b)** $y' = \ln 3 \cdot 3^x \cdot f'(3^x)$, $y'' = \ln^2 3 \cdot 3^x\left(f'(3^x) + 3^x f''(3^x)\right)$; **c)** $y' = \cos x \cdot f'(\sin x)$, $y'' = -\sin x \cdot f'(\sin x) + \cos^2 x \cdot f''(\sin x)$; **d)** $y' = \frac{f'(\operatorname{arctg} x)}{1+x^2}$, $y'' = \frac{f''(\operatorname{arctg} x) - 2xf'(\operatorname{arctg} x)}{(1+x^2)^2}$.

**6.6 a)** $f^{(n)}(x) = \begin{cases} -3^{-n}\sin\frac{x}{3} & \text{dla } n = 4k-3, \\ -3^{-n}\cos\frac{x}{3} & \text{dla } n = 4k-2, \\ 3^{-n}\sin\frac{x}{3} & \text{dla } n = 4k-1, \\ 3^{-n}\cos\frac{x}{3} & \text{dla } n = 4k, \end{cases}$ gdzie $k \in \mathbb{N}$; **b)** $g^{(n)}(x) = (-\ln 2)^n 2^{-x}$; **c)** $h^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}(x-n)$; **d*)** Wskazówka. Wykorzystać wzór $(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.

**6.7 a)** $v(t) = 0 \Longleftrightarrow t = 0$, $a(0) = 12\ln^2 2$; **b)** $\omega(t) = \alpha'(t) = \frac{hv}{h^2 + d^2(t)}$, gdzie $d(t)$ oznacza odległość stacji w chwili $t \geqslant 0$, $\omega = 1\left[\frac{\text{rad}}{\text{godz}}\right]$.

# 5

# TWIERDZENIA O FUNKCJACH Z POCHODNYMI

## Siódmy tydzień

**Twierdzenia o wartości średniej (5.1). Twierdzenia o granicach nieoznaczonych (5.2). Rozwinięcie Taylora funkcji (5.3).**

## Przykłady

- **Przykład 7.1**

Sprawdzić, czy podane funkcje spełniają założenia twierdzenia Rolle'a na przedziale $[-1, 1]$.

a) $f(x) = x\left(x^2 - 1\right)$; b) $g(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$; c) $h(x) = (|x| - 1)^2$.

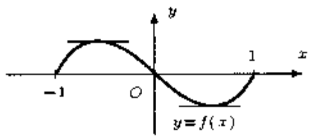
**Rozwiązanie**

a) Funkcja

$$f(x) = x\left(x^2 - 1\right)$$

jest ciągła i ma pochodną właściwą na przedziale $[-1, 1]$, bo jest wielomianem. Ponadto

$$f(-1) = f(1) = 0.$$

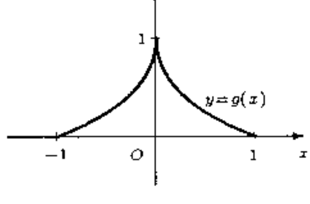



Funkcja $f$ spełnia zatem założenia twierdzenia Rolle'a na przedziale $[-1, 1]$.

b) Funkcja

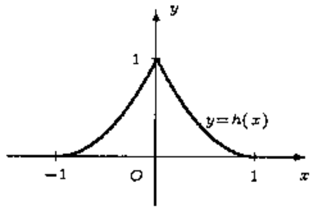
$$g(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$$

jest ciągła na przedziale $[-1, 1]$. Nie ma jednak pochodnej na przedziale $(-1, 1)$, bo $g'(0)$ nie istnieje. Mamy bowiem $g'_+(0) = \infty$, $g'_-(0) = -\infty$. Z powyższych faktów wynika, że funkcja $g$ nie spełnia założeń twierdzenia Rolle'a na przedziale $[-1, 1]$.



c) Funkcja

$$h(x) = (|x| - 1)^2 = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{dla } x < 0, \\ (x-1)^2 & \text{dla } x \geqslant 0 \end{cases}$$




jest ciągła na przedziale $[-1, 1]$. Nie ma jednak pochodnej na przedziale $(-1, 1)$, bo $h'(0)$ nie istnieje. Mamy bowiem

$$h'_+(0) = 2(x-1)|_{x=0} = -2, \quad h'_-(0) = 2(x+1)|_{x=0} = 2.$$

Zatem funkcja $h$ nie spełnia założeń twierdzenia Rolle'a na przedziale $[-1, 1]$.

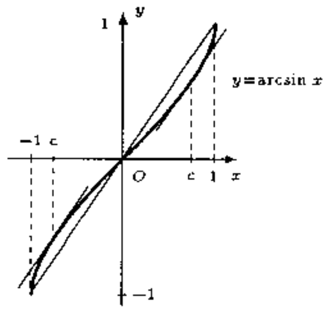
## • Przykład 7.2

Zastosować twierdzenie Lagrange'a do funkcji $f(x) = \arcsin x$ na przedziale $[-1, 1]$. Wyznaczyć odpowiednie punkty.

**Rozwiązanie**

Funkcja $f(x) = \arcsin x$ spełnia założenia twierdzenia Lagrange'a na przedziale $[-1, 1]$. Teza tego twierdzenia dla funkcji $f$ ma postać

$$\bigvee_{c \in (-1,1)} \frac{\arcsin 1 - \arcsin(-1)}{1 - (-1)} = (\arcsin x)'|_{x=c}.$$




Stąd $\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{1-c^2}}$, czyli $c = \pm\sqrt{1 - \dfrac{4}{\pi^2}}$.

## • Przykład 7.3

Korzystając z twierdzenia Lagrange'a uzasadnić podane nierówności:

a) $\dfrac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$ dla $x > 0$; b) $e^x > 1 + x$ dla $x > 0$.

**Rozwiązanie**

a) W twierdzeniu Lagrange'a przyjmujemy $f(x) = \ln(x+1)$, $[a, b] = [0, x]$, gdzie $x > 0$. Wtedy mamy

$$\frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x - 0} = \Big[\ln(1+x)\Big]'_{x=c}, \quad \text{gdzie } 0 < c < x.$$

Stąd $\ln(1+x) = \dfrac{x}{1+c}$, gdzie $0 < c < x$. Zatem

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < \frac{x}{1+0} = x.$$

b) W twierdzeniu Lagrange'a przyjmujemy $f(x) = e^x$, $[a, b] = [0, x]$, gdzie $x > 0$. Wtedy mamy

$$\frac{e^x - e^0}{x - 0} = \Big[e^x\Big]'_{x=c}, \quad \text{gdzie } 0 < c < x.$$

Stąd $e^x - 1 = xe^c$, gdzie $0 < c < x$. Zatem $e^x - 1 > xe^0 = x$, czyli $e^x > 1 + x$.

- **Przykład 7.4**

Znaleźć przedziały monotoniczności podanych funkcji:

a) $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 2$; b) $g(x) = x \ln x$; c) $h(x) = (x-3)\sqrt{x}$;

d) $p(x) = x + \sin x$; e) $q(x) = \frac{x^3}{x-2}$; f) $r(x) = e^x \cos x$.

**Rozwiązanie**

Przedziały monotoniczności podanych funkcji znajdziemy badając znaki pochodnych tych funkcji.

a) Mamy $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 2$, stąd $f'(x) = x^4 - x^2$. Badamy na jakich przedziałach pochodna $f'$ jest dodatnia. Mamy

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^4 - x^2 > 0 \Longleftrightarrow x^2(x-1)(x+1) > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad -\infty < x < -1 \text{ lub } 1 < x < \infty. \end{aligned}$$

Funkcja $f$ jest zatem rosnąca na przedziałach $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$. Podobnie,

$$f'(x) < 0 \Longleftrightarrow -1 < x < 0 \text{ lub } 0 < x < 1.$$

Ponieważ w punkcie $x_0 = 0$ „sklejają" się dwa przedziały, w których pochodna jest ujemna, więc funkcja $f$ jest malejąca na całym przedziale $(-1, 1)$.

b) Dla funkcji $g(x) = x \ln x$ mamy $g'(x) = \ln x + 1$ oraz $D_g = D_{g'} = (0, \infty)$. Szukamy przedziałów, na których pochodna $g'$ jest dodatnia. Mamy

$$g'(x) > 0 \Longleftrightarrow \ln x + 1 > 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{e} < x < \infty.$$

Funkcja $g$ jest zatem rosnąca na przedziale $\left(\frac{1}{e}, \infty\right)$. Podobnie,

$$g'(x) < 0 \Longleftrightarrow 0 < x < \frac{1}{e}.$$

Funkcja $g$ jest zatem malejąca na przedziale $\left(0, \frac{1}{e}\right)$.

c) Dla funkcji $h(x) = (x-3)\sqrt{x}$ mamy $h'(x) = \sqrt{x} + (x-3)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-3}{2\sqrt{x}}$ oraz $D_h = [0, \infty)$, $D_{h'} = (0, \infty)$. Szukamy przedziałów, na których pochodna $h'$ jest dodatnia. Mamy

$$h'(x) > 0 \Longleftrightarrow \frac{3x-3}{2\sqrt{x}} > 0 \Longleftrightarrow 3(x-1) > 0 \Longleftrightarrow 1 < x < \infty.$$

Funkcja $h$ jest zatem rosnąca na przedziale $(1, \infty)$. Podobnie,

$$h'(x) < 0 \Longleftrightarrow 0 < x < 1.$$

Funkcja $h$ jest zatem malejąca na przedziale $(0, 1)$.

d) Dla funkcji $p(x) = x + \sin x$ mamy $p'(x) = 1 + \cos x$. Szukamy przedziałów, na których pochodna $p'$ jest dodatnia. Mamy

$$p'(x) > 0 \Longleftrightarrow 1 + \cos x > 0 \Longleftrightarrow x \neq \pi + 2n\pi, \text{ gdzie } n \in \mathbb{Z}.$$

Ponieważ w punktach postaci $x = \pi + 2n\pi$ „sklejają" się przedziały, na których pochodna jest dodatnia, więc funkcja $p$ jest rosnąca na całej prostej.

e) Dziedziną funkcji $q$ i jej pochodnej jest $D_q = D_{q'} = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$. Ponadto mamy

$$q'(x) = \frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2}.$$

Badamy, na których przedziałach pochodna $q'$ jest dodatnia. Dla $x \in D_q$ mamy

$$q'(x) > 0 \iff \frac{2x^2(x-3)}{(x-1)^2} > 0 \iff x^2(x-3) > 0 \iff 3 < x < \infty.$$

Zatem funkcja $q$ jest rosnąca na przedziale $(3, \infty)$. Ponieważ w punkcie $x_0 = 0$ „sklejają" się przedziały, na których pochodna $q'$ jest ujemna, więc funkcja $q$ jest malejąca na przedziałach $(-\infty, 2)$, $(2, 3)$.

f) Dziedziną funkcji $q$ i jej pochodnej jest $\boldsymbol{R}$. Dla $x \in \boldsymbol{R}$ mamy

$$r'(x) = e^x(\cos x - \sin x).$$

Badamy, na których przedziałach pochodna jest dodatnia. Mamy

$$r'(x) > 0 \iff e^x(\cos x - \sin x) > 0 \iff \cos x > \sin x \iff x \in \bigcup_{k \in Z}\left(-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right).$$

Zatem funkcja $r$ jest rosnąca na przedziałach postaci

$$\left(-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \quad \text{gdzie } k \in \boldsymbol{Z}.$$

Funkcja $r$ jest natomiast malejąca na przedziałach postaci

$$\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right), \quad \text{gdzie } k \in \boldsymbol{Z}.$$

## • Przykład 7.5

Narysować wykresy funkcji $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$, które spełniają wszystkie podane warunki:

a) $f'(x) > 0$ dla każdego $x \neq 2$, $f'(2) = \infty$.;

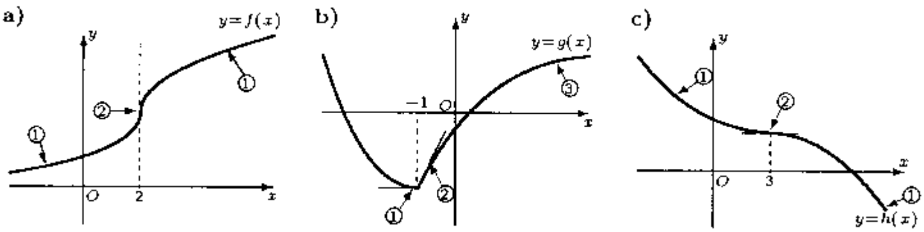
b) $g'_-(-1) = 0$, $g'_+(-1) = 2$, $\lim\limits_{x\to\infty} g'(x) = 0$;

c) $h'(x) < 0$ dla każdego $x \neq 3$, $h'(3) = 0$.

Na rysunku zaznaczyć fragmenty wykresów, które spełniają poszczególne warunki.

### Rozwiązanie

Liczba w kółku oznacza kolejny numer warunku, który spełnia wskazany fragment wykresu funkcji.



- **Przykład 7.6**

Uzasadnić podane tożsamości:

a) $\arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ dla każdego $x \in [0,\infty)$;

b) $\operatorname{arctg} x = \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} \dfrac{2x}{1-x^2}$ dla każdego $x \in (-1,1)$.

**Rozwiązanie**

Wystarczy pokazać, że pochodne funkcji po obu stronach tożsamości są jednakowe oraz sprawdzić, że wartości tych funkcji w pewnym punkcie rozważanego przedziału pokrywają się.

a) Dla $x \in [0,\infty)$ mamy

$$\left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} - x\cdot \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

oraz

$$\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = \frac{1}{1+x^2}$$

Ponadto $\arcsin \dfrac{0}{\sqrt{1+0^2}} = 0$ oraz $\arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+0^2}} = 0$. Zatem tożsamość jest prawdziwa na przedziale $[0,\infty)$.

b) Dla $x \in (-1,1)$ mamy $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ oraz

$$\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}\right)' = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)^2} \cdot \frac{2\left(1-x^2\right) - 2x(-2x)}{\left(1-x^2\right)^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Ponadto $\operatorname{arctg} 0 = 0$ oraz $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2\cdot 0}{1-0^2} = 0$. Zatem tożsamość jest spełniona na przedziale $(-1,1)$.

- **Przykład 7.7**

Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć podane granice:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{\ln \sin x}$; c) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2^x - 2^{2-x}}{(x-1)^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left[x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)\right]$; e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{\ln(x+1) - \ln x}$; f) $\lim\limits_{x\to 1^-} \cos\dfrac{\pi}{2x}\ln(1-x)$;

g) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$; h) $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\sin x}$; i) $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$;

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$; k) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$; l) $\lim\limits_{x\to\infty} (x+1)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

**Rozwiązanie**

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}\ \boxed{\frac{0}{0}}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}}{1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+x}=1.$

b) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{\ln\sin x}\ \boxed{\frac{-\infty}{-\infty}}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{\cos x}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right)=1\cdot 1=1.$

c) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2^x-2^{2-x}}{(x-1)^2}\ \boxed{\frac{0}{0}}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\left(2^x+2^{2-x}\right)\ln 2}{2(x-1)}=\dfrac{4\ln 2}{0^-}=-\infty.$

Uwaga. Jeżeli $x\longrightarrow 1$, to rozważana granica nie istnieje.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\ \boxed{\frac{0}{0}}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x}}=1.$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\ \boxed{\frac{0}{0}}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-\frac{2}{1+x^2}}{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\left(x^2+x\right)}{x^2+1}=2.$

f) $\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\cos\dfrac{\pi}{2x}\ln(1-x)\right]=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2x}}}\ \boxed{\frac{\infty}{\infty}}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\frac{-1}{1-x}}{\frac{\sin\frac{\pi}{2x}}{\cos^2\frac{\pi}{2x}}\cdot\left(-\frac{\pi}{2x^2}\right)}$

$$=\left[\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2}{\pi\sin\frac{\pi}{2x}}\right]\cdot\lim_{x\to 1^-}\frac{\cos^2\frac{\pi}{2x}}{1-x}.$$

Pierwsza z tych granic jest oznaczona i równa się $\frac{2}{\pi}$. Druga jest nieoznaczona i obliczymy ją za pomocą reguły de L'Hospitala:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\cos^2\frac{\pi}{2x}}{1-x}\ \boxed{\frac{0}{0}}\overset{H}{=}\lim_{x\to 1^-}\frac{-2\cos\frac{\pi}{2x}\sin\frac{\pi}{2x}\cdot\left(\frac{-\pi}{2x^2}\right)}{-1}=0.$$

Ostatecznie szukana granica jest równa $\frac{2}{\pi}\cdot 0=0.$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2\sin x}\ \boxed{\frac{0}{0}}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{2x\sin x+x^2\cos x}\ \boxed{\frac{0}{0}}$

$$\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\sin x+4x\cos x-x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+4\frac{x}{\sin x}\cos x-x^2}$$

$$=\frac{1}{2+4\cdot 1\cdot 1-0}=\frac{1}{6}.$$

h) $\lim\limits_{x\to 0+}x^{\sin x}\overset{*}{=}\lim\limits_{x\to 0+}e^{\ln x\sin x}\overset{**}{=}e^{\lim\limits_{x\to 0+}(\ln x\sin x)}$

Obliczymy teraz granicę w wykładniku. Mamy

$$\lim_{x\to 0+}(\ln x \sin x) = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} \boxed{\frac{-\infty}{\infty}}$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = -\lim_{x\to 0+}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\right) = (-1)\cdot 0 = 0.$$

Ostatecznie szukana granica równa się $e^0 = 1$. W miejscu oznaczonym $*$ korzystaliśmy z tożsamości $a^b = e^{b\ln a}$, a w miejscu oznaczonym $**$ korzystaliśmy z ciągłości funkcji exp.

i) $\displaystyle \lim_{x\to 1^-}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}} \stackrel{*}{=} \lim_{x\to 1^-} e^{\cos\frac{\pi x}{2}\ln(1-x)} \stackrel{**}{=} e^{\lim\limits_{x\to 1^-}\cos\frac{\pi x}{2}\ln(1-x)}$.

Obliczymy teraz granicę w wykładniku. Mamy

$$\lim_{x\to 1^-}\cos\frac{\pi x}{2}\ln(1-x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\cos\frac{\pi x}{2}}} \boxed{\frac{\infty}{\infty}}$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x\to 1^-}\frac{-\frac{1}{1-x}}{-\frac{-\sin\frac{\pi x}{2}\cdot\frac{\pi}{2}}{\cos^2\frac{\pi x}{2}}} = \frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1^-}\frac{\cos^2\frac{\pi x}{2}}{x-1}\cdot\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\sin\frac{\pi x}{2}}.$$

Druga z granic jest oznaczona i równa się 1 . Pierwsza z granic jest nieoznaczona i obliczymy ją za pomocą reguły de L'Hospitala. Mamy

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\cos^2\frac{\pi x}{2}}{x-1} \boxed{\frac{0}{0}} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to 1^-}\frac{-2\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi x}{2}\cdot\frac{\pi}{2}}{1} = 0.$$

Zatem granica wykładnika równa się $\frac{2}{\pi}\cdot 0\cdot 1 = 0$. Ostatecznie szukana granica równa się $e^0 = 1$. Symbole $*$, $**$ oznaczają tutaj to samo, co w przykładzie h).

j) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^x \stackrel{*}{=} \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\cos\frac{1}{x}} \stackrel{**}{=} e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\cos\frac{1}{x}}$.

Obliczymy teraz granicę w wykładniku. Podstawiając $u = \frac{1}{x}$ mamy $x \longrightarrow \infty \Longleftrightarrow u \longrightarrow 0^+$ oraz

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\cos\frac{1}{x} = \lim_{u\to 0+}\frac{\ln\cos u}{u} \boxed{\frac{0}{0}} \stackrel{H}{=} \lim_{u\to 0+}\frac{\frac{-\sin u}{\cos u}}{1} = -\lim_{u\to 0+}\frac{\sin u}{\cos u} = 0.$$

Ostatecznie szukana granica jest równa $e^0 = 1$. Symbole $*$, $**$ oznaczają tutaj to samo, co w przykładzie h).

k) $\displaystyle \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\sin x)^{\operatorname{tg} x} \stackrel{*}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} e^{\operatorname{tg} x\ln\sin x} \stackrel{**}{=} e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\operatorname{tg} x\ln\sin x}$

Obliczymy teraz granicę w wykładniku. Mamy

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x \ln\sin x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \frac{\ln\sin x}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} \boxed{\frac{0}{0}} \overset{H}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \sin x\cos x = 0.$$

Ostatecznie szukana granica wynosi $e^0 = 1$. Symbole $*$, $**$ oznaczają tutaj to samo, co w przykładzie h).

l) $\lim\limits_{x\to\infty} (x+1)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \overset{*}{=} \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}} \overset{**}{=} e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}}$.

Obliczamy teraz granicę w wykładniku. Mamy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x+1} = 0.$$

Zatem poszukiwana granica równa się $e^0 = 1$. Symbole $*$, $**$ również tutaj oznaczają to samo, co w przykładzie h).

## • Przykład 7.8

Obliczyć podane granice. Czy można tu zastosować regułę de L'Hospitala?

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$.

**Rozwiązanie**

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right) = 1\cdot 0 = 0$

(zobacz **Przykład 3.6 a)**). W tym przykładzie nie można stosować reguły de L'Hospitala, bo nie jest spełnione założenie o istnieniu granicy ilorazu pochodnych. Rzeczywiście mamy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x}.$$

Ostatnia granica nie istnieje, bo przyjmując $x_n' = \dfrac{1}{2n\pi}$ otrzymamy $x_n' \longrightarrow 0$ oraz

$$\frac{2x_n'\sin\frac{1}{x_n'} - \cos\frac{1}{x_n'}}{\cos x_n'} \longrightarrow -1, \text{ gdy } n \longrightarrow \infty.$$

Przyjmując natomiast $x_n'' = \dfrac{1}{\pi + 2n\pi}$ otrzymamy $x_n'' \longrightarrow 0$ oraz

$$\frac{2x_n''\sin\frac{1}{x_n''} - \cos\frac{1}{x_n''}}{\cos x_n''} \longrightarrow 1, \text{ gdy } n \longrightarrow \infty.$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x}{x-\sin x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+\dfrac{\sin x}{x}}{1-\dfrac{\sin x}{x}} = \dfrac{1+0}{1-0} = 1.$

Także w tym przypadku nie można stosować reguły de L'Hospitala, bo nie jest spełnione założenie o istnieniu granicy ilorazu pochodnych. Rzeczywiście

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+\sin x)'}{(x-\sin x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\cos x}{1-\cos x}.$$

Granica ta nie istnieje, bo przyjmując $x_n' = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$ otrzymamy $x_n' \longrightarrow \infty$ oraz

$$\frac{1+\cos x_n'}{1-\cos x_n'} \longrightarrow 1, \text{ gdy } n \longrightarrow \infty.$$

Przyjmując natomiast $x_n'' = \pi + 2n\pi$ otrzymamy $x_n'' \longrightarrow \infty$ oraz

$$\frac{1+\cos x_n''}{1-\cos x_n''} \longrightarrow 0, \text{ gdy } n \longrightarrow \infty.$$

## • Przykład 7.9

Napisać wzór Taylora z resztą Lagrange'a dla podanej funkcji, wskazanego punktu oraz $n$ :

a) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$, $x_0 = 2$, $n = 3$; b) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $n = 3$.

**Rozwiązanie**

a) Dla $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ mamy

$$f'(x) = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}, \quad f'''(x) = \frac{-6}{(x-1)^4}.$$

Stąd $f(2) = 2$, $f'(2) = -1$, $f''(2) = 2$. Wzór Taylora dla funkcji $f = \dfrac{x}{x-1}$ , punktu $x_0 = 2$ oraz $n = 3$ przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \frac{x}{x-1} &= 2 + \frac{-1}{1!}(x-2) + \frac{2}{2!}(x-2)^2 + \frac{\dfrac{-6}{(c-1)^4}}{3!}(x-2)^3 \\ &= 2 - (x-2) + (x-2)^2 - \frac{(x-2)^3}{(c-1)^4}, \end{aligned}$$

gdzie $c$ jest pewną liczbą między 2 i $x$.

b) Dla $f(x) = \sqrt{x}$ mamy

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}, \quad f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}.$$

Stąd

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = \frac{1}{2}, \quad f''(1) = -\frac{1}{4}.$$

Wzór Taylora przyjmuje zatem postać

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!}(x-1)^1 + \frac{-\frac{1}{4}}{2!}(x-1)^2 + \frac{\frac{3}{8\sqrt{c^5}}}{3!}(x-1)^3 = 1 + \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(x-1)^3}{16\sqrt{c^5}},$$

gdzie $c$ jest pewną liczbą między 1 i $x$.

**• Przykład 7.10**

Napisać wzory Maclaurina dla podanych funkcji z resztą $R_n$ :

a) $f(x) = \sin 2x$; b) $f(x) = xe^x$; c) $f(x) = \operatorname{sh} x$.

**Rozwiązanie**

a) Dla funkcji $f(x) = \sin 2x$ mamy

$$f'(x) = 2\cos 2x,\ f''(x) = -4\sin 2x,\ f'''(x) = -8\cos 2x,\ f^{(4)}(x) = 16\sin 2x.$$

Możemy na tej podstawie wysunąć hipotezę o postaci $k$–tej pochodnej funkcji $f$ :

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} 2^k \sin 2x & \text{dla } k = 4p, \\ 2^k \cos 2x & \text{dla } k = 4p+1, \\ -2^k \sin 2x & \text{dla } k = 4p+2, \\ -2^k \cos 2x & \text{dla } k = 4p+3. \end{cases}$$

Powyższa hipoteza powinna być uzasadniona przez indukcję matematyczną. Nieskomplikowany dowód pozostawiamy Czytelnikowi. Korzystając teraz z tego wzoru mamy

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{dla } k = 4p, \\ 2^k & \text{dla } k = 4p+1, \\ 0 & \text{dla } k = 4p+2, \\ -2^k & \text{dla } k = 4p+3 \end{cases}$$

dla $k = 0, 1, 2, \ldots$ . Podstawiając te pochodne do wzoru Maclaurina otrzymamy

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 0 + \frac{2}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{8}{3!}x^3 + \frac{0}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \begin{cases} 2^n \sin 2c & \text{dla } n = 4p, \\ 2^n \cos 2c & \text{dla } n = 4p+1, \\ -2^n \sin 2c & \text{dla } n = 4p+2, \\ -2^n \cos 2c & \text{dla } n = 4p+3 \end{cases} \\ &= 2x - \frac{4}{3}x^3 + \ldots + \frac{x^n}{n!} \begin{cases} 2^n \sin 2c & \text{dla } n = 4p, \\ 2^n \cos 2c & \text{dla } n = 4p+1, \\ -2^n \sin 2c & \text{dla } n = 4p+2, \\ -2^n \cos 2c & \text{dla } n = 4p+3, \end{cases} \end{aligned}$$

gdzie $c$ jest pewną liczbą między 0 i $x$.

b) Dla funkcji $f(x) = xe^x$ mamy

$$f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x, \qquad f''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x,$$

$$f'''(x) = e^x + (x+2)e^x = (x+3)e^x.$$

Łatwo teraz zauważyć, że $f^{(k)}(x) = (x+k)e^x$ dla $k = 0, 1, \ldots$ . Oczywiście powyższa hipoteza wymaga dowodu indukcyjnego. Jednak ten prosty dowód pomijamy. Zatem $f^{(k)}(0) = k$ dla $k = 0, 1, \ldots$ . Tak więc wzór Maclaurina dla funkcji $f(x) = xe^x$ ma postać

$$\begin{aligned} xe^x &= 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 + \ldots + \frac{n-1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{(c+n)e^c}{n!}x^n \\ &= x + \frac{x^2}{1!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-2)!} + \frac{(c+n)e^c}{n!}x^n, \end{aligned}$$

gdzie $c$ jest pewną liczbą między 0 i $x$.

c) Dla funkcji $f(x) = \operatorname{sh} x$ mamy

$$f'(x) = \operatorname{ch} x, \quad f''(x) = \operatorname{sh} x, \quad f'''(x) = \operatorname{ch} x \text{ itd.}$$

Zatem

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \operatorname{sh} x & \text{dla } n \text{ parzystego,} \\ \operatorname{ch} x & \text{dla } n \text{ nieparzystego.} \end{cases}$$

Stąd

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \text{ parzystego,} \\ 1 & \text{dla } n \text{ nieparzystego.} \end{cases}$$

Wzór Maclaurina przyjmie więc postać

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &= 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{x^n}{n!} \begin{cases} \operatorname{sh} c \text{ dla } n \text{ parzystego,} \\ \operatorname{ch} c \text{ dla } n \text{ nieparzystego} \end{cases} \\ &= x + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \begin{cases} \operatorname{sh} c \text{ dla } n \text{ parzystego,} \\ \operatorname{ch} c \text{ dla } n \text{ nieparzystego,} \end{cases} \end{aligned}$$

gdzie $c$ jest pewną liczbą między 0 i $x$.

# Zadania

## ○ Zadanie 7.1

Sprawdzić, czy podane funkcje spełniają założenia twierdzenia Rolle'a na przedziale $[-1, 1]$. Narysować wykresy tych funkcji.

a) $f(x) = \sin \pi x$; b) $g(x) = \sqrt{|x|} - 1$; c) $h(x) = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} |x|$.

## ○ Zadanie 7.2

Zastosować twierdzenie Lagrange'a do funkcji $f(x) = \operatorname{arctg} x$ na przedziale $[-1, \sqrt{3}]$. Wyznaczyć odpowiednie punkty.

## ○ Zadanie 7.3

Korzystając z twierdzenia Lagrange'a uzasadnić podane nierówności:

a) $n(b-a)a^{n-1} < b^n - a^n < n(b-a)b^{n-1}$ dla $0 < a < b$ oraz $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$;

b) $e^x > ex$ dla $x > 1$; c) $x \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ dla $0 \leqslant x < 1$.

○ **Zadanie 7.4**
Znaleźć przedziały monotoniczności podanych funkcji:

a) $f(x) = x^3 - 30x^2 + 225x + 1$; b) $g(x) = xe^{-3x}$; c) $h(x) = \dfrac{x^3}{3-x^2}$;

d) $p(x) = \dfrac{x}{\ln x}$; e) $q(x) = 4x + \dfrac{1}{x}$; f) $r(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$.

○ **Zadanie 7.5**
Narysować wykresy funkcji $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$, które spełniają wszystkie podane warunki:

a) $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$, $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$;

b) $f'(x) < 0$ dla każdego $x < 1$, $f'(x) > 0$ dla każdego $x > 1$, $f'(1)$ nie istnieje;

c) $f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = \infty$;

d) $f'(x) < 0$ dla każdego $x \in \boldsymbol{R} \setminus \{-2\}$, $f'(-2) = 0$.

Na rysunkach zaznaczyć fragmenty wykresów, które spełniają poszczególne warunki.

○ **Zadanie 7.6**
Uzasadnić podane tożsamości:

a) $\operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \dfrac{1-x}{1+x}$ dla każdego $x \in (-1, \infty)$;

b) $\arcsin x = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ dla każdego $x \in (-1, 1)$.

○ **Zadanie 7.7**
Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć podane granice:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{10} - 10x + 9}{x^5 - 5x + 4}$; c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x$;

d) $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{1}{x} - \operatorname{ctg} x\right)$; e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{\ln\cos 3x}$; f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x\right)^x$;

g) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+x)^{\ln x}$; h) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$; i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - 1}{\ln x}$;

j) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{arcctg} 3x}{\operatorname{arcctg} x}$; k) $\lim\limits_{x\to\pi^-} (\pi - x) \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$; l*) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{(x+1)^x}{x^x e}\right)^x$.

○ **Zadanie 7.8**
Obliczyć podane granice. Czy można tu zastosować regułę de L'Hospitala?

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 \sin\frac{1}{x}}{\sin^2 x}$; b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x + \cos 3x}{x - \cos 2x}$.

○ **Zadanie 7.9**
Napisać wzory Taylora z resztą Lagrange'a dla podanych funkcji $f$, punktów $x_0$

oraz $n$ :

a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 2$, $n = 3$; b) $f(x) = \ln x$, $x_0 = e$, $n = 4$;

c) $f(x) = e^{\cos x}$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $n = 2$; d) $f(x) = \operatorname{ch} x$, $x_0 = \ln 2$, $n = 3$;

e) $f(x) = \sqrt[5]{1+x}$, $x_0 = -2$, $n = 3$; f) $f(x) = x^3$, $x_0 = 1$, $n = 5$.

○ **Zadanie 7.10**

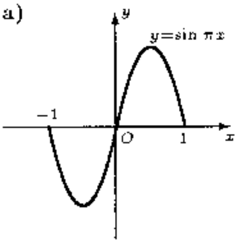
Napisać wzór Maclaurina dla podanej funkcji ze wskazaną resztą:

a) $f(x) = \cos x$, $R_n$; b) $f(x) = \frac{x}{e^x}$, $R_n$; c) $f(x) = e^{\operatorname{tg} x}$, $R_2$.

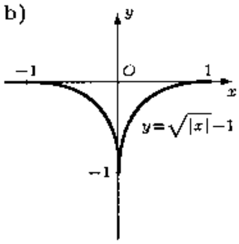
# Odpowiedzi i wskazówki

**7.1** a) Funkcja $f$ spełnia założenia twierdzenia Rolle'a; b) funkcja $g$ nie spełnia założeń tego twierdzenia, bo nie istnieje $g'(0)$; c) funkcja $h$ nie spełnia założeń tego twierdzenia, bo nie istnieje $h'(0)$.

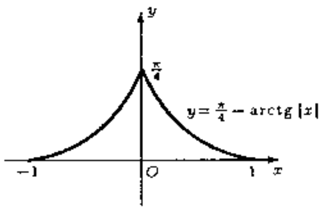
a)




b)




c)

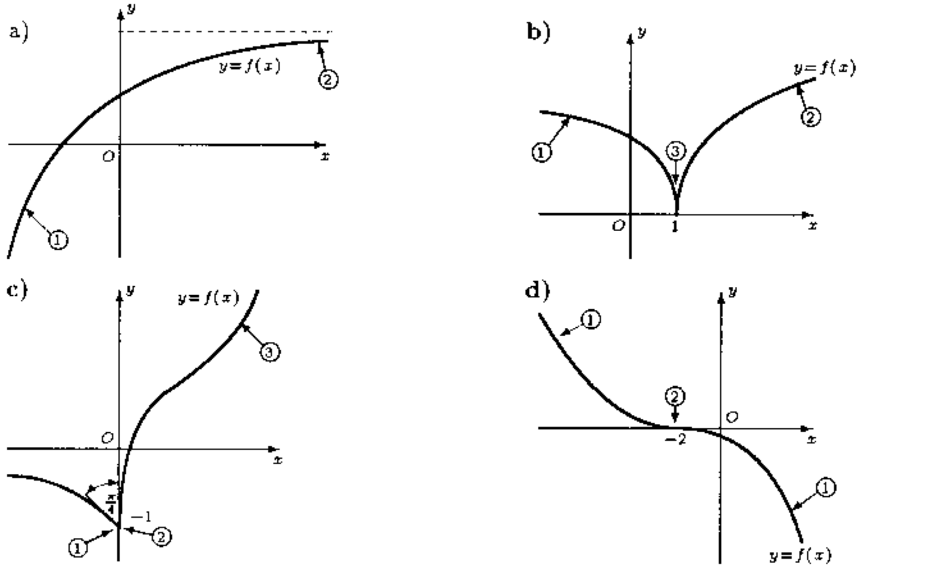



**7.2** $\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg}(-1)}{\sqrt{3}+1} = \frac{1}{1+c^2}$, $c = \pm\sqrt{\frac{12(\sqrt{3}+1)}{7\pi} - 1}$.

**7.3** Wskazówka. Zastosować twierdzenie Lagrange'a: a) do funkcji $f(x) = x^n$ na przedziale $[a,b]$; b) do funkcji $f(x) = e^x$ na przedziale $[1,x]$; c) do funkcji $f(x) = \arcsin x$ na przedziale $[0,x]$.

**7.4** a) funkcja $f$ jest malejąca na przedziale $[5,15]$ oraz rosnąca na przedziałach $(-\infty,5)$, $[15,\infty)$; b) funkcja $g$ jest malejąca na przedziale $\left[\frac{1}{3},\infty\right)$ oraz rosnąca na przedziale $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$; c) funkcja $h$ jest malejąca na przedziałach $(-\infty,-3]$, $[3,\infty)$ oraz rosnąca na przedziałach $\left[-3,-\sqrt{3}\right)$, $\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$, $\left(\sqrt{3},3\right]$; d) funkcja $p$ jest malejąca na przedziałach $(0,1)$, $(1,e]$ oraz rosnąca na przedziale $[e,\infty)$; e) funkcja $q$ jest malejąca na przedziałach $\left(-\frac{1}{2},0\right)$, $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ oraz rosnąca na przedziałach $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$; f) funkcja $r$ jest malejąca na przedziałach $\left(\frac{1}{e},1\right)$, $(1,\infty)$ oraz rosnąca na przedziale $\left(0,\frac{1}{e}\right)$.

**7.5** Liczba w kółku oznacza kolejny numer warunku, który spełnia wskazany fragment wykresu funkcji.




**7.7** **a)** 0; **b)** $\frac{9}{2}$; **c)** 0; **d)** 0; **e)** $\frac{1}{9}$; **f)** $e^{-\frac{2}{\pi}}$; **g)** 1; **h)** 1; **i)** 1; **j)** 3; **k)** 2; **l*)** $e^{-\frac{1}{2}}$.

**7.8** **a)** 1; **b)** 1. Do obu granic nie można stosować reguły de L'Hospitala, gdyż nie istnieją granice ilorazów pochodnych.

**7.9** **a)** $\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 + R_3(x)$, gdzie $R_3(x) = -\frac{(x-2)^3}{c^4}$, przy czym $c$ jest liczbą zawartą między 2 i $x$;
**b)** $\ln x = 1 + \frac{1}{e}(x-e) - \frac{1}{2e^2}(x-e)^2 + \frac{1}{3e^3}(x-e)^3 + R_4(x)$, gdzie $R_4(x) = -\frac{1}{4c^4}(x-e)^4$, przy czym $c$ jest liczbą zawartą między $e$ i $x$;
**c)** $e^{\cos x} = 1 - \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + R_2(x)$, gdzie $R_2(x) = \frac{\sin^2 c - \cos c}{2} e^{\cos c}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$, przy czym $c \in \left(\frac{\pi}{2}, x\right)$, gdy $x > \frac{\pi}{2}$ lub $c \in \left(x, \frac{\pi}{2}\right)$, gdy $x < \frac{\pi}{2}$;
**d)** $\operatorname{ch} x = \frac{5}{4} + \frac{3}{4}(x - \ln 2) + \frac{5}{8}(x - \ln 2)^2 + R_3(x)$, gdzie $R_3(x) = \frac{\operatorname{sh} c}{6}(x - \ln 2)^3$, przy czym $c \in (\ln 2, x)$, gdy $x > \ln 2$ lub $c \in (x, \ln 2)$, gdy $x < \ln 2$;
**e)** $\sqrt[5]{1+x} = -1 + \frac{1}{5}(x+2) + \frac{2}{25}(x+2)^2 + R_3(x)$, gdzie $R_3(x) = \frac{6}{125}(1+c)^{-\frac{14}{5}}(x+2)^3$, przy czym $c \in (-2, x)$;
**f)** $x^3 = 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3 + R_5(x)$, gdzie $R_5(x) \equiv 0$.

**7.10** **a)** $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + R_n(x)$, gdzie $R_n(x) = \pm\frac{x^n}{n!}\left\{\begin{matrix}\sin c\\ \cos c\end{matrix}\right\}$, przy czym $c$ liczbą zawartą między 0 i $x$. Znak ($\pm$) oraz funkcją $\left\{\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\}$ dobieramy w zależności od $n$; **b)** Wskazówka. $f^{(n)}(x) = (-1)^n(x-n)e^{-x}$.
$\frac{x}{e^x} = \frac{1}{1!}x - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{3}{3!}x^3 + \ldots + R_n(x)$, gdzie $R_n(x) = \frac{(-1)^n(c-n)}{n!e^c}x^n$, przy czym $c$ jest liczbą zawartą między 0 i $x$; **c)** $e^{\operatorname{tg} x} = 1 + x + R_2(x)$, gdzie $R_2(x) = \frac{1 + \sin 2c}{2\cos^4 c}e^{\operatorname{tg} c}x^2$, przy czym $c \in (0, x)$, gdy $x > 0$ albo $c \in (x, 0)$, gdy $x < 0$.

# 6

# BADANIE FUNKCJI

## Ósmy tydzień

**Ekstrema funkcji (6.1). Funkcje wypukłe i wklęsłe (6.2). Punkty przegięcia wykresu funkcji (6.3).**

## Przykłady

• **Przykład 8.1**

Oszacować dokładność podanych wzorów przybliżonych:

a) $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ dla $|x| \leqslant \frac{\pi}{6}$; b) $e^{-x} \approx 1 - x + \frac{x^2}{2}$ dla $0 < x \leqslant \frac{1}{10}$.

**Rozwiązanie**

a) Aby oszacować dokładność podanego wzoru wykorzystamy wzór Maclaurina dla funkcji $f(x) = \cos x$ oraz $n = 6$. Ponieważ $f(x) = \cos x$, więc $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x$, $f^{(4)}(x) = \cos x$, $f^{(5)}(x) = -\sin x$, $f^{(6)}(x) = -\cos x$. Stąd $f(0) = 1$, $f'(0) = f'''(0) = f^{(5)}(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 1$. Tak więc wzór Maclaurina dla funkcji $f$ ma postać

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{-\cos c}{6!}x^6 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{-\cos c}{720}x^6,$$

gdzie $c$ jest pewną liczbą między 0 i $x$. Stąd

$$\left|\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)\right| = \left|-\frac{\cos c}{720}x^6\right|.$$

Ponieważ $|x| \leqslant \frac{\pi}{6}$, więc

$$\left|-\frac{\cos c}{720}x^6\right| = \frac{\cos c}{720}x^6 < \frac{\cos 0}{720}\left(\frac{\pi}{6}\right)^6 = \frac{1}{720}\left(\frac{\pi}{6}\right)^6 < 0.000029.$$

Zatem błąd jaki popełniamy obliczając wartości $\cos x$ dla $|x| \leqslant \frac{\pi}{6}$ ze wzoru przybliżonego

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

jest mniejszy niż 0.000029.

b) Aby oszacować dokładność podanego przybliżenia wykorzystamy wzór Maclaurina dla funkcji $f(x) = e^{-x}$. Mamy

$$f'(x) = -e^{-x},\ f''(x) = e^{-x},\ f'''(x) = -e^{-x}, \quad \text{stąd} \quad f(0) = 1,\ f'(0) = -1,\ f''(0) = 1.$$

Wzór Maclaurina przyjmie zatem postać

$$e^{-x} = 1 + \frac{-1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{-e^{-c}}{3!}x^3 = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6e^c},$$

gdzie $c \in (0, x)$. Błąd jaki popełnimy stosując to przybliżenie spełnia nierówność

$$\max_{0<x\leqslant\frac{1}{10}} \left|-\frac{x^3}{6e^c}\right| \leqslant \frac{1}{10^3} \cdot \frac{1}{6e^0} = \frac{1}{6000}.$$

**• Przykład 8.2**

Stosując wzór Maclaurina do funkcji:

a) $f(x) = e^x$ obliczyć $e$ z dokładnością $10^{-6}$;

b) $f(x) = \sqrt{1+x}$ obliczyć $\sqrt{1.01}$ z dokładnością $10^{-4}$.

**Rozwiązanie**

a) Dla funkcji $f(x) = e^x$ mamy $f^{(k)}(x) = e^x$, więc $f^{(k)}(0) = 1$ dla $k = 0.1, \ldots$ . Zatem wzór Maclaurina dla funkcji $f(x) = e^x$ ma postać

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^c}{n!}x^n,$$

gdzie $c$ jest pewną liczbą między 0 i $x$ . Przyjmując w powyższym wzorze $x = 1$ otrzymamy

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{e^c}{n!},$$

gdzie $c$ jest pewną liczbą z przedziału $(0, 1)$. Liczbę $e$ obliczymy z dokładnością $10^{-6}$, jeżeli dobierzemy $n$ w ten sposób, aby

$$\left|e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\right)\right| = \left|\frac{e^c}{n!}\right| < 10^{-6}.$$

Dla $c \in (0, 1)$ mamy oczywistą nierówność $e^c < e < 3$. Zatem $\frac{e^c}{n!} < \frac{3}{n!}$. Liczba $n \in N$ powinna spełniać nierówność $n! > 3 \cdot 10^6$. Ponieważ $10! = 3628800 > 3 \cdot 10^6$ oraz $9! = 362880 < 3 \cdot 10^6$, więc dla $n \geqslant 10$ mamy $n! > 3 \cdot 10^6$. Zatem liczba $e$ obliczona z dokładnością $10^{-6}$ jest równa

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{9!} = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}+\frac{1}{5040}+\frac{1}{40320}+\frac{1}{362880} \approx 2.7182815.$$

**Uwaga.** Dokładną wartością liczby $e$ jest $2.718281828\ldots$ .

b) Dla funkcji $f(x) = \sqrt{1+x}$ oraz $k \geqslant 2$ mamy

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-3)}{2^k} \frac{1}{\sqrt{(1+x)^{2k-1}}},$$

więc

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-3)}{2^k}.$$

Wzór Maclaurina dla funkcji $f(x) = \sqrt{1+x}$ ma postać

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-3)}{2^n\cdot n!\cdot \sqrt{(1+c)^{2n-1}}}x^n,$$

gdzie $c$ jest pewną liczbą między 0 i $x$. Aby uzyskać żądaną w zadaniu dokładność wzoru przybliżonego, reszta Lagrange'a we wzorze Maclaurina powinna spełniać nierówność

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n n!\sqrt{(1+c)^{2n-1}}}\cdot\frac{1}{100^n}\right| \leqslant \frac{1}{10^4},\ \text{ gdzie } c \in \left(0, \frac{1}{100}\right).$$

Mamy

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n n!\sqrt{(1+c)^{2n-1}}}\cdot\frac{1}{100^n}\right| \leqslant \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n n!\sqrt{(1+0)^{2n-1}}}\cdot\left(\frac{1}{100}\right)^n \leqslant \frac{1}{10^4}.$$

Łatwo zauważyć, że już dla $n = 2$ ostatnia nierówność jest spełniona. Zatem

$$\sqrt{1.01} \approx 1 + \frac{0.01}{2} = 1.005$$

z dokładnością 0.0001.

**Uwaga.** Dokładna wartość $\sqrt{1.01}$ jest równa 1.004988... .

## • Przykład 8.3

Korzystając z definicji uzasadnić, że podane funkcje mają ekstrema lokalne we wskazanych punktach:

a) $f(x) = 2 + |x-1|,\ \ x_0 = 1;$ b) $g(x) = 4 - 3x^{100},\ \ x_0 = 0;$

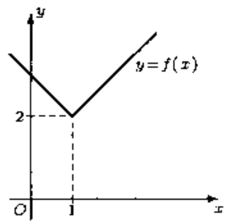
c) $h(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$ $x_0 = 0;$ d) $p(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \leqslant -1, \\ 2 - x & \text{dla } x > -1, \end{cases}$ $x_0 = -1.$

**Rozwiązanie**

a) Wystarczy zauważyć, że

$$f(1) = 2 < 2 + |x-1| = f(x)$$

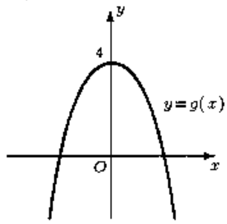
dla wszystkich $x \neq 1$, co oznacza, że funkcja $f$ ma w punkcie $x_0 = 1$ minimum lokalne właściwe.




b) Zauważmy, że $3x^{100} > 0$ dla dowolnego $x \neq 0$. Zatem

$$g(0) = 4 > 4 - 3x^{100}$$

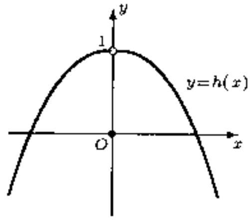
dla każdego $x \neq 0$, co oznacza, że funkcja $g$ ma w punkcie $x_0 = 0$ maksimum lokalne właściwe.



c) Ponieważ $h(0) = 0$, więc

$$h(x) = 1 - x^2 > h(0)$$

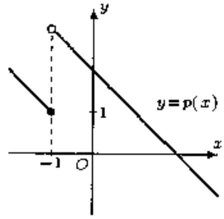
dla każdego $x$ spełniającego nierówność $0 < |x| < 1$, co oznacza, że funkcja $h$ ma w punkcie $x_0 = 0$ minimum lokalne właściwe.




d) Mamy $p(-1) = 1$, więc

$$p(x) = -x > p(-1)$$

dla $x < -1$ oraz $p(x) = 2 - x > p(-1)$ dla $-1 < x < 1$. Zatem $p(x) > p(-1)$ dla $0 < |x - (-1)| < 2$, co oznacza, że funkcja $p$ ma w punkcie $x_0 = -1$ minimum lokalne właściwe.




## • Przykład 8.4

Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne podanych funkcji:

a) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 14$; b) $g(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$;

c) $h(x) = x^x$; d) $k(x) = x^{\frac{1}{x}}$; e) $p(x) = \sin x + \dfrac{\sin 2x}{2}$.

**Rozwiązanie**

a) Dla $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 14$ mamy $f'(x) = 6x^2 - 30x + 36$. Ponieważ badana funkcja ma pochodną w każdym punkcie prostej, więc może mieć ekstrema tylko w tych punktach, w których $f'(x) = 0$. Tak więc

$$f'(x) = 0 \iff 6x^2 - 30x + 36 = 0 \iff 6(x-2)(x-3) = 0 \iff x = 2 \text{ lub } x = 3.$$

Mamy następnie $f''(x) = 12x - 30$, więc $f''(2) = -6 < 0$, $f''(3) > 0$ . Rozważana funkcja ma zatem w punkcie $x = 2$ maksimum lokalne właściwe równe 14, a w punkcie $x = 3$ minimum lokalne właściwe równe 13.

b) Dla $g(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ mamy

$$g'(x) = \frac{x^2 + 4 - x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{4 - x^2}{(x^2+4)^2}.$$

Ponieważ badana funkcja ma pochodną w każdym punkcie prostej, więc może mieć ekstrema jedynie w tych punktach, w których $g'(x) = 0$. Tak więc

$$g'(x) = 0 \iff \frac{4 - x^2}{(x^2+4)^2} = 0 \iff 4 - x^2 = 0 \iff x = -2 \text{ lub } x = 2.$$

Zbadamy teraz znak pochodnej na przedziałach $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$, $(2, \infty)$. Mamy $4 - x^2 > 0$ dla $x \in (-2, 2)$ oraz $4 - x^2 < 0$ dla $x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$. Zatem $g'(x) > 0$ dla $x \in (-2, 2)$ oraz $g'(x) < 0$ dla $x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$. Tak więc w punkcie $-2$ pochodna zmienia znak z ujemnego na dodatni, czyli w punkcie tym funkcja $g$ ma minimum lokalne właściwe równe $-\dfrac{1}{4}$, natomiast w punkcie 2 pochodna zmienia znak z dodatniego na ujemny, czyli w punkcie tym funkcja $g$ ma maksimum lokalne właściwe równe $\frac{1}{4}$.

c) Funkcja $h(x) = x^x$ jest określona dla $x > 0$. Ponadto pochodna $h'(x) = (1 + \ln x)x^x$ (zobacz **Przykład 5.6 d)**) jest również określona dla $x > 0$. Funkcja $h$ może mieć ekstrema tylko w tych punktach, w których $h'(x) = 0$. Tak więc

$$h'(x) = 0 \iff (1 + \ln x)x^x = 0 \iff 1 + \ln x = 0 \iff x = \frac{1}{e}.$$

Mamy następnie

$$h''(x) = (1 + \ln x)'x^x + (1 + \ln x)(x^x)' = \frac{1}{x}x^x + (1 + \ln x)(1 + \ln x)x^x,$$

więc

$$h''\left(\frac{1}{e}\right) = e\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} + (1 + \ln\frac{1}{e})^2\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} = ee^{-\frac{1}{e}} > 0.$$

Oznacza to, że funkcja $h$ ma w punkcie $x = \frac{1}{e}$ minimum właściwe lokalne równe $e^{-\frac{1}{e}}$.

d) Funkcja $k(x) = x^{\frac{1}{x}}$ jest określona dla $x > 0$. Pochodna

$$h'(x) = \left(x^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(e^{\frac{1}{x}\ln x}\right)' = e^{\frac{1}{x}\ln x}\left(-\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x^2}\right) = x^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}(1 - \ln x)$$

jest również określona dla $x > 0$. Funkcja $k$ może mieć ekstrema tylko w tych punktach, w których $k'(x) = 0$. Tak więc

$$k'(x) = 0 \iff x^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}(1 - \ln x) = 0 \iff 1 - \ln x = 0 \iff x = e.$$

Zbadamy teraz znak pochodnej na przedziałach $(0, e)$, $(e, \infty)$. Mamy $1 - \ln x > 0$ dla $x \in (0, e)$ oraz $1 - \ln x < 0$ dla $x \in (e, \infty)$. Stąd mamy $k'(x) > 0$ dla $x \in (0, e)$ oraz $k'(x) < 0$ dla $x \in (e, \infty)$. Tak więc w punkcie $e$ pochodna zmienia znak z dodatniego na ujemny, czyli w punkcie tym funkcja ma maksimum lokalne właściwe równe $e^{\frac{1}{e}}$.

e) Funkcja $p(x) = \sin x + \frac{\sin 2x}{2}$ ma okres podstawowy $T = 2\pi$, zatem jej ekstrema wystarczy znaleźć tylko na przedziale $[0, 2\pi]$. Mamy

$$p'(x) = \cos x + \frac{2\cos 2x}{2} = \cos x + \cos 2x.$$

Ponieważ badana funkcja ma pochodną w każdym punkcie, więc może mieć ekstrema tylko w tych punktach, w których $p'(x) = 0$. Tak więc

$$\begin{aligned}
p'(x) = 0 \quad &\iff \quad \cos x + \cos 2x = 0 \\
&\iff \quad 2\cos\frac{x + 2x}{2}\cos\frac{x - 2x}{2} = 0 \iff \cos\frac{3}{2}x\cos\frac{-1}{2}x = 0 \\
&\iff \quad \cos\frac{3}{2}x = 0 \text{ lub } \cos\frac{1}{2}x = 0 \iff x = \frac{\pi}{3} \text{ lub } x = \pi \text{ lub } x = \frac{5\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Badając teraz znak drugiej pochodnej w otrzymanych punktach ustalimy rodzaj ekstremum. Mamy $p''(x) = -(\sin x + 2\sin 2x)$ oraz $p'''(x) = -(\cos x + 4\cos 2x)$. Stąd $p''\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0$; $p''(\pi) = 0$, ale $p'''(\pi) \neq 0$ oraz $p''\left(\frac{5\pi}{3}\right) > 0$. Z rozważań tych wynika, że funkcja $p$ ma na przedziale $[0, 2\pi]$ ekstrema lokalne tylko w punktach $x = \frac{\pi}{3}$ (maksimum lokalne właściwe), $x = \frac{5\pi}{3}$ (minimum lokalne właściwe). Natomiast punkt $(\pi, 0)$ jest punktem przegięcia wykresu tej funkcji (funkcja $p$ ma także inne punkty przegięcia, których nie szukamy). Ostatecznie funkcja $p$ ma maksima lokalne właściwe w punktach postaci $x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$, gdzie $n \in \mathbf{Z}$, oraz minima lokalne właściwe w punktach postaci $x = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi$, gdzie $n \in \mathbf{Z}$.

## • Przykład 8.5

Znaleźć wartości najmniejsze i największe podanych funkcji na wskazanych przedziałach:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $[-2, 5]$; b) $g(x) = x^2 \ln x$, $[1, e]$;

c) $h(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}$, $[0, 2]$; d) $p(x) = x^2 \left|x^2 - 1\right|$, $[-2, 3]$.

**Rozwiązanie**

a) Dla $f(x) = x^2 - 2x + 3$ mamy $f'(x) = 2x - 2$. Zatem

$$f'(x) = 0 \iff 2x - 2 = 0 \iff x = 1 \in [-2, 5].$$

Ponadto $f(1) = 1 - 2 + 3 = 2$ oraz $f(-2) = 4 + 4 + 3 = 11$, $f(5) = 25 - 10 + 3 = 18$. Zatem funkcja $f$ osiąga najmniejszą wartość 2 w punkcie 1 oraz największą wartość 18 w punkcie 5.

**Uwaga.** Zadanie to można rozwiązać nie odwołując się do rachunku różniczkowego, a wykorzystując jedynie własności funkcji kwadratowej.

b) Dla $g(x) = x^2 \ln x$ mamy

$$g'(x) = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1).$$

Zauważmy teraz, że $g'(x) > 0$ dla $[1, e]$. Zatem funkcja $g$ jest rosnąca na przedziale $[1, e]$. Rozważana funkcja przyjmuje najmniejszą wartość 0 w punkcie 1 oraz największą wartość $e^2$ w punkcie $e$.

c) Dla $h(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}$ mamy

$$h'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{2} = \frac{1 - x^2}{2(1 + x^2)}.$$

Wyznaczamy teraz miejsca zerowe pochodnej należące do przedziału $[0, 2]$. Mamy

$$\begin{aligned}\left(h'(x) = 0 \text{ i } x \in [0, 2]\right) &\iff \left(\frac{1 - x^2}{(1 + x^2)} = 0 \text{ i } x \in [0, 2]\right) \\ &\iff \left(1 - x^2 = 0 \text{ i } x \in [0, 2]\right) \iff x = 1.\end{aligned}$$

Ponieważ $h'(x) > 0$ dla $x \in [0, 1)$ oraz $h'(x) < 0$ dla $x \in (1, 2]$, więc funkcja $h$ jest rosnąca na przedziale $[0, 1]$ i malejąca na przedziale $[1, 2]$. Z powyższego wynika, że funkcja $h$ przyjmuje w punkcie $x = 1$ wartość największą równą $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$. Porównując wartości funkcji $h$ na końcach przedziału, tj. w punktach $x = 0$ oraz $x = 2$, otrzymamy, że najmniejszą wartość równą 0 funkcja $h$ przyjmuje w punkcie $x = 0$.

d) Dla funkcji $p(x) = x^2 \left|x^2 - 1\right|$ mamy

$$p'(x) = \begin{cases} 4x^3 - 2x & \text{dla} \quad |x| > 1, \\ -4x^3 + 2x & \text{dla} \quad |x| < 1. \end{cases}$$

Zauważmy przy tym, że pochodne $p'(-1)$ oraz $p'(1)$ nie istnieją. Wyznaczymy teraz miejsca zerowe pochodnej należące do przedziału $[-2, 3]$. Mamy

$$p'(x) = 0 \Longleftrightarrow \pm 2x\left(2x^2 - 1\right) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ lub } x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ lub } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Obliczymy teraz wartości funkcji w punktach zerowanie się pochodnej, w punktach, w których pochodna nie istnieje oraz na końcach przedziału. Mamy

$$p(0) = 0, \ p\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = p\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{4}, \ p(-1) = p(1) = 0, \ p(-2) = 12, \ p(3) = 72.$$

Zatem najmniejszą wartością funkcji $p(x) = x^2 \left|x^2 - 1\right|$ jest $m = 0$, a największą $M = 72$.

- **Przykład 8.6**

Określić przedziały wypukłości oraz punkty przegięcia podanych funkcji:

a) $f(x) = x^4 - 6x^2 - 6x + 1$; b) $g(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^3}$; c) $h(x) = e^{\sqrt[3]{x}}$.

**Rozwiązanie**

Rodzaj wypukłości funkcji określimy badając znak ich drugich pochodnych.

a) Funkcja $f$ ma pochodne skończone wszystkich rzędów na $\mathbb{R}$. Mamy $f''(x) = 12x^2 - 12$, stąd

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow 12\left(x^2 - 1\right) > 0 \Longleftrightarrow x < -1 \text{ lub } x > 1.$$

Funkcja $f$ jest zatem ściśle wypukła na przedziałach $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$. Podobnie,

$$f''(x) < 0 \Longleftrightarrow -1 < x < 1.$$

Funkcja $f$ jest zatem ściśle wklęsła na przedziale $(-1, 1)$. Ponieważ w punktach $x = -1$, $x = 1$ funkcja $f$ zmienia rodzaj wypukłości, więc punkty $(-1, f(-1)) = (-1, 2)$, $(1, f(1)) = (1, -10)$ są punktami przegięcia jej wykresu.

b) Funkcja $g$ ma pochodne wszystkich rzędów na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Mamy

$$g''(x) = \frac{2\left(x^2 + 4x + 1\right)}{(x-1)^5},$$

stąd

$$\begin{aligned} g''(x) > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (x-1)^5 \left[x - \left(-2 - \sqrt{3}\right)\right] \left[x - \left(-2 + \sqrt{3}\right)\right] > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad -2 - \sqrt{3} < x < -2 + \sqrt{3} \text{ lub } x > 1. \end{aligned}$$

Funkcja $g$ jest zatem ściśle wypukła na przedziałach $\left(-2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}\right)$, $(1, \infty)$. Podobnie,

$$g''(x) < 0 \Longleftrightarrow x < -2 - \sqrt{3} \ \text{ lub } \ -2 + \sqrt{3} < x < 1.$$

Funkcja $g$ jest zatem ściśle wklęsła na przedziałach $(-\infty, -2-\sqrt{3})$, $(-2+\sqrt{3}, 1)$. Z powyższego wynika, że wykres funkcji $g$ ma punkty przegięcia w punktach $x = -2-\sqrt{3}$, $x = -2+\sqrt{3}$. W punkcie $x = 1$ wprawdzie zmienia się rodzaj wypukłości, ale funkcja $g$ nie jest w tym punkcie określona.

c) Funkcja $h$ ma pochodne skończone wszystkich rzędów na $\boldsymbol{R} \setminus \{0\}$. Mamy

$$h''(x) = \frac{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}-2\right)}{9x^2} e^{\sqrt[3]{x}} \quad \text{gdzie } x \neq 0.$$

Stąd

$$h''(x) > 0 \iff x > 8 \text{ lub } x < 0.$$

Funkcja $h$ jest zatem ściśle wypukła na przedziałach $(-\infty, 0)$, $(8, \infty)$. Podobnie,

$$h''(x) < 0 \iff 0 < x < 8.$$

Funkcja $h$ jest zatem ściśle wklęsła na przedziale $(0, 8)$. W punkcie $x = 0$ funkcja $h$ ma pochodną niewłaściwą równą $\infty$ oraz zmienia w tym punkcie rodzaj wypukłości. Zatem wykres funkcji $h$ ma w punkcie $(0, 1)$ punkt przegięcia. Podobnie, w punkcie $x = 8$ funkcja $h$ ma pochodną skończoną oraz zmienia w tym punkcie rodzaj wypukłości, zatem także punkt $\left(8, e^2\right)$ jest punktem przegięcia wykresu funkcji.

# Zadania

## ○ Zadanie 8.1

Oszacować dokładności podanych wzorów przybliżonych na wskazanych przedziałach:

a) $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$, $|x| \leqslant 1$; b) $\cos^2 x \approx 1 - x^2$, $|x| \leqslant \frac{1}{10}$;

c) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$, $|x| \leqslant \frac{1}{4}$; d) $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3}$, $0 < x < \frac{1}{10}$.

## ○ Zadanie 8.2

Stosując wzór Maclaurina obliczyć:

a) $\ln 1,1$ z dokładnością $10^{-4}$; b) $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ z dokładnością $10^{-3}$;

c) $\sqrt[3]{0.997}$ z dokładnością $10^{-3}$; d) $\cos\frac{\pi}{32}$ z dokładnością $10^{-4}$.

## ○ Zadanie 8.3

Korzystając z definicji uzasadnić, że podane funkcje mają ekstrema lokalne we wskazanych punktach:

a) $f(x) = 2 - 2|x+5|$, $x_0 = -5$; b) $g(x) = x^{20} - 3$, $x_0 = 0$;

c) $h(x) = \begin{cases} x+2 & \text{dla } x \neq 1, \\ 2 & \text{dla } x = 1, \end{cases}$ $x_0 = 1$; d) $p(x) = \sqrt[5]{x^2}$, $x_0 = 0$.

## ○ Zadanie 8.4

Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne podanych funkcji:

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x}$; b) $g(x)=x^3-4x^2$; c) $h(x)=2\sin x+\cos 2x$;
d) $p(x)=(x-5)e^x$; e) $q(x)=\dfrac{(x+3)^3}{(x+1)^2}$; f) $z(x)=x^2e^{\frac{1}{x}}$;
g) $k(x)=e^x\sin x$; h) $l(x)=x+\dfrac{1}{x}$; i) $m(x)=2\operatorname{arctg} x-\ln(1+x^2)$.

○ **Zadanie 8.5**
Znaleźć wartości najmniejsze i największe podanych funkcji na wskazanych przedziałach:
a) $f(x)=2x^3-3x^2-36x-8$, $[-3,6]$; b) $g(x)=x-2\sqrt{x}$, $[0,5]$;
c) $h(x)=2\sin x+\sin 2x$, $\left[0,\dfrac{3}{2}\pi\right]$; d) $p(x)=(x-3)^2e^{|x|}$, $[-1,4]$.

○ **Zadanie 8.6**
Określić przedziały wypukłości oraz punkty przegięcia podanych funkcji:
a) $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$; b) $g(x)=\cos x$; c) $h(x)=\operatorname{tg} x$; d) $p(x)=e^{\operatorname{arctg} x}$.

## Odpowiedzi i wskazówki

**8.1** Błąd jest mniejszy od: **a)** $\dfrac{1}{7!}=\dfrac{1}{5040}\approx 0.000198\ldots$ ; **b)** $\dfrac{1}{30000}\approx 0.0000333\ldots$ ;
**c)** $\dfrac{\sqrt{3}}{864}\approx 0.00200\ldots$ ; **d)** $\dfrac{1}{900}\approx 0.00111\ldots$ .

**8.2 a)** $0.0953\ldots$ , we wzorze Maclaurina dla funkcji $f(x)=\ln(1+x)$ przyjąć $x=0.1$;
**b)** $0.716\ldots$ , we wzorze Maclaurina dla funkcji $f(x)=e^x$ przyjąć $x=-\dfrac{1}{3}$;
**c)** $0.999\ldots$ , we wzorze Maclaurina dla funkcji $f(x)=\sqrt{1+x}$ przyjąć $x=-0.003$;
**d)** $0.9952\ldots$ , we wzorze Maclaurina dla funkcji $f(x)=\cos x$ przyjąć $x=\dfrac{\pi}{32}$.

**8.3 a)** maksimum lokalne właściwe; **b)** minimum lokalne właściwe; **c)** minimum lokalne właściwe; **d)** minimum lokalne właściwe.

**8.4 a)** w punkcie $x=\dfrac{1}{2}$ funkcja $f$ ma maksimum lokalne właściwe równe $-4$;
**b)** w punkcie $x=0$ funkcja $g$ ma maksimum lokalne właściwe równe 0, a w punkcie $x=\dfrac{8}{3}$ minimum lokalne właściwe równe $-\dfrac{256}{27}$;
**c)** w punktach $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, $x=\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi$, gdzie $k\in Z$, funkcja $h$ ma minimum lokalne właściwe, w punktach $x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$, gdzie $k\in Z$, maksimum lokalne właściwe;
**d)** w punkcie $x=4$ funkcja $p$ ma minimum lokalne właściwe równe $-e^4$;
**e)** w punkcie $x=3$ funkcja $q$ ma minimum lokalne właściwe równe $13,5$;
**f)** w punkcie $x=\dfrac{1}{2}$ funkcja $z$ ma minimum lokalne właściwe równe $\dfrac{e^2}{4}$;
**g)** w punktach $x=-\dfrac{\pi}{4}+2n\pi$, gdzie $n\in Z$, funkcja $k$ ma minimum lokalne właściwe równe $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}+2n\pi}$, a w punktach $x=\dfrac{3\pi}{4}+2n\pi$, gdzie $n\in Z$ funkcja ta ma maksima

lokalne właściwe równe $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}+2n\pi}$;

h) w punkcie $x = -1$ funkcja $l$ ma maksimum lokalne właściwe równe $-2$, a w punkcie $x = 1$ minimum lokalne właściwe równe 2;

i) w punkcie $x = 1$ funkcja $m$ ma maksimum lokalne właściwe równe $\frac{\pi}{2} - \ln 2$.

**8.5** a) $f_{\min} = f(3) = -89$, $f_{\max} = f(6) = 100$; b) $g_{\min} = g(-1) = -1$, $g_{\max} = g(5) = 5 - 2\sqrt{5}$; c) $h_{\min} = h\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2$, $h_{\max} = h\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$; d) $p_{\min} = p(3) = 0$, $p_{\max} = p(4) = e^4$.

**8.6** a) Funkcja $f$ jest ściśle wypukła na $(-1, 1)$ oraz ściśle wklęsła na $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$. Nie ma punktów przegięcia;

b) Funkcja $g$ jest ściśle wypukła na $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$ oraz ściśle wklęsła na $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$. Punkty przegięcia wykresu tej funkcji to: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$;

c) Funkcja $h$ jest ściśle wypukła na $\left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$, oraz ściśle wklęsła na $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$. Punkty przegięcia wykresu tej funkcji to: $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$;

d) funkcja $p$ jest ściśle wypukła na $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ oraz ściśle wklęsła na $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$. Punkt przegięcia wykresu tej funkcji to $x = \frac{1}{2}$.

# Dziewiąty tydzień

**Badanie funkcji (6.4).**

## Przykłady

### • Przykład 9.1

Zbadać przebieg zmienności podanych funkcji i następnie sporządzić ich wykresy:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$; b) $g(x) = \frac{\ln x}{x}$; c) $h(x) = e^{-x^2}$; d) $p(x) = \frac{x}{1 - x^2}$.

**Rozwiązanie**

a) I. Dziedziną funkcji $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ jest $\mathbf{R}$.

II. Funkcja $f$ jest ciągła na $\mathbf{R}$, bo jest wielomianem. Miejscami zerowymi funkcji $f$ są: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Funkcja $f$ przecina oś $Oy$ w punkcie $y = 4$.

III. Obliczamy granice funkcji $f$ na „krańcach” dziedziny, czyli granice

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x^3 - 3x^2 + 4\right) = \lim_{x \to -\infty} \left[x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3}\right)\right] = (-\infty) \cdot 1 = -\infty;$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(x^3 - 3x^2 + 4\right) = \lim_{x \to \infty} \left[x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3}\right)\right] = \infty \cdot 1 = \infty.$$

IV. Szukamy asymptot funkcji $f$. Ponieważ funkcja $f$ ma w obu nieskończonościach granice niewłaściwe, więc może mieć tam ewentualnie asymptoty ukośne. Z prostych rachunków wynika jednak, że funkcja $f$ nie ma asymptot ukośnych w $-\infty$ ani w $\infty$.
V. Zbadamy teraz pierwszą pochodną funkcji $f$. Mamy $D_{f'} = \boldsymbol{R}$ oraz $f'(x) = 3x^2 - 6x$. Korzystając z warunku koniecznego szukamy punktów, w których funkcja $f$ może mieć ekstrema. Mamy

$$f'(x) = 0 \iff 3\left(x^2 - 2x\right) = 0 \iff x = 0 \text{ lub } x = 2.$$

Przy pomocy pochodnej ustalimy przedziały monotoniczności rozważanej funkcji. Mamy

$$f'(x) > 0 \iff 3x(x-2) > 0 \iff x < 0 \text{ lub } x > 2.$$

Zatem funkcja $f$ jest rosnąca na przedziałach $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$. Podobnie,

$$f'(x) < 0 \iff 0 < x < 2.$$

Funkcja $f$ jest zatem malejąca na przedziale $(0, 2)$. Z powyższych rozważań wynika, że funkcja $f$ ma w punkcie $x = 0$ maksimum lokalne właściwe równe 4, a w punkcie $x = 2$ minimum lokalne właściwe równe 0.
VI. Przechodzimy obecnie do badania drugiej pochodnej. Mamy $D_{f''} = \boldsymbol{R}$ oraz $f''(x) = 6x - 6$. Z warunku koniecznego szukamy punktów, w których funkcja $f$ może mieć punkty przegięcia. Mamy

$$f''(x) = 0 \iff 6(x-1) = 0 \iff x = 1.$$

Przy pomocy drugiej pochodnej ustalimy przedziały wypukłości rozważanej funkcji. Mamy

$$f''(x) > 0 \iff 6(x-1) > 0 \iff x > 1.$$

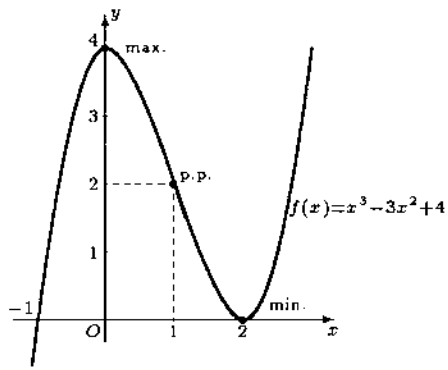
Funkcja $f$ jest zatem ściśle wypukła na przedziale $(1, \infty)$. Ponadto,

$$f''(x) < 0 \iff x < 1.$$

Funkcja $f$ jest zatem ściśle wklęsła na przedziale $(-\infty, 1)$. Z powyższych rozważań wynika, że punkt $(1, 2)$ jest punktem przegięcia wykresu badanej funkcji.
VII. Wyniki uzyskane w punktach I-VI zestawiamy w tabeli:

| $x$ | $-\infty$ | $-\infty<x<0$ | $0$ | $0<x<1$ | $1$ | $1<x<2$ | $2$ | $2<x<\infty$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-\infty$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $\infty$ |
| $f'(x)$ | $\infty$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-3$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\infty$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $2$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\infty$ |
| | | | max. | | p.p. | | min. | | |

VIII. Na podstawie tabeli sporządzamy wykres funkcji.



b) I. Dziedziną funkcji $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ jest przedział $(0, \infty)$.
II. Funkcja $g$ jest ciągła w swojej dziedzinie, bo jest ilorazem funkcji ciągłych. Miejscem zerowym funkcji jest $x = 1$.
III. Obliczamy granice funkcji $g$ na „krańcach" jej dziedziny. Mamy

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \text{ oraz } \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \overset{H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

IV. Na podstawie wartości powyższych granic stwierdzamy, że prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową prawostronną funkcji $g$, a prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą tej funkcji w $\infty$.
V. Zbadamy teraz pierwszą pochodną funkcji $g$. Mamy $D_{g'} = (0, \infty)$ oraz

$$g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Korzystając z warunku koniecznego szukamy punktów, w których funkcja $g$ może mieć ekstrema. Mamy

$$g'(x) = 0 \iff \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \iff x = e.$$

Przy pomocy pochodnej ustalimy teraz przedziały monotoniczności rozważanej funkcji. Mamy

$$g'(x) > 0 \iff \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0 \iff 1 - \ln x > 0 \iff 0 < x < e.$$

Funkcja $g$ jest zatem rosnąca na przedziale $(0, e)$. Podobnie,

$$g'(x) < 0 \iff x > e.$$

Funkcja $g$ jest zatem malejąca na przedziale $(e, \infty)$. Z powyższych rozważań wynika, że funkcja $g$ ma w punkcie $x = e$ maksimum lokalne właściwe równe $e^{-1}$.
VI. Przechodzimy teraz do badania drugiej pochodnej. Mamy $D_{g''} = (0, \infty)$ oraz

$$g''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}.$$

Z warunku koniecznego szukamy punktów, w których funkcja $g$ może mieć punkty przegięcia. Mamy

$$g''(x) = 0 \iff \frac{2 \ln x - 3}{x^3} = 0 \iff 2 \ln x - 3 = 0 \iff x = e^{\frac{3}{2}}.$$

Przy pomocy drugiej pochodnej ustalimy przedziały wypukłości rozważanej funkcji. Mamy

$$g''(x) > 0 \iff \frac{2 \ln x - 3}{x^3} > 0 \iff 2 \ln x - 3 > 0 \iff x > e^{\frac{3}{2}}.$$

Funkcja $g$ jest zatem ściśle wypukła na przedziale $\left(e^{\frac{3}{2}}, \infty\right)$. Ponadto

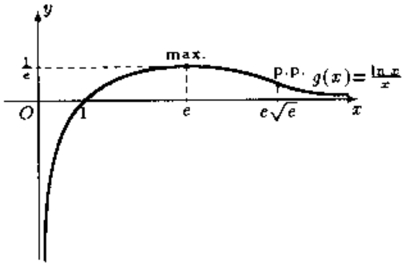
$$g''(x) < 0 \iff 0 < x < e^{\frac{3}{2}}.$$

Badana funkcja jest zatem ściśle wklęsła na przedziale $\left(0, e^{\frac{3}{2}}\right)$. Z powyższych rozważań wynika, że punkt $\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2} e^{-\frac{3}{2}}\right)$ jest punktem przegięcia wykresu funkcji $g$.

VII. Wyniki uzyskane w punktach I-VI zestawiamy w tabeli:

| $x$ | $0$ | $0<x<e$ | $e$ | $e<x<e^{\frac{3}{2}}$ | $e^{\frac{3}{2}}$ | $e^{\frac{3}{2}}<x<\infty$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g''(x)$ | $-\infty$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ |
| $g'(x)$ | $\infty$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-\frac{1}{2}e^{-3}$ | $-$ | $0$ |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $e^{-1}$ | $\searrow$ | $\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}$ | $\searrow$ | $0$ |
| | | | max. | | p.p. | | |

VIII. Na podstawie tabeli sporządzamy wykres funkcji $g$.




c) I. Dziedziną funkcji $h(x) = e^{-x^2}$ jest $\boldsymbol{R}$.
II. Funkcja $h$ jest parzysta i ciągła na $\boldsymbol{R}$. Funkcja $h$ nie ma miejsc zerowych i nie jest okresowa.
III. Obliczamy granice funkcji $h$ na „krańcach" jej dziedziny. Mamy $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2} = e^{-\infty} = 0$. Z parzystości funkcji $h$ wynika, że także $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x^2} = 0$.
IV. Z wartości powyższych granic wynika, że prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą tej funkcji w obu nieskończonościach.
V. Zbadamy teraz pierwszą pochodną funkcji $h$. Mamy $D_{h'} = \boldsymbol{R}$ oraz $h'(x) = -2xe^{-x^2}$. Korzystając z warunku koniecznego szukamy punktów, w których funkcja $h$ może mieć ekstrema. Mamy

$$h'(x) = 0 \iff -2xe^{-x^2} = 0 \iff x = 0.$$

Przy pomocy pochodnej ustalimy teraz przedziały monotoniczności funkcji $h$. Mamy

$$h'(x) > 0 \iff -2xe^{-x^2} > 0 \iff x < 0.$$

Funkcja $h$ jest zatem rosnąca na przedziale $(-\infty, 0)$. Z parzystości funkcji $h$ wynika zatem, że jest ona malejąca na przedziale $(0, \infty)$. Z warunku wystarczającego wynika, że funkcja $h$ ma w punkcie $x = 0$ maksimum lokalne właściwe równe 1.
VI. Przechodzimy teraz do badania drugiej pochodnej. Mamy $D_{h''} = \boldsymbol{R}$ oraz $h''(x) = 2\left(2x^2 - 1\right)e^{-x^2}$. Z warunku koniecznego szukamy punktów przegięcia wykresu funkcji $h$. Mamy

$$h''(x) = 0 \iff 4\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2} = 0 \iff x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ lub } x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Przy pomocy drugiej pochodnej ustalimy przedziały wypukłości rozważanej funkcji. Mamy

$$
\begin{aligned}
h''(x) > 0 &\iff 4\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2} > 0 \\
&\iff \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0 \\
&\iff x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ lub } x > \frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

Funkcja $h$ jest zatem ściśle wypukła na przedziałach $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$. Ponadto

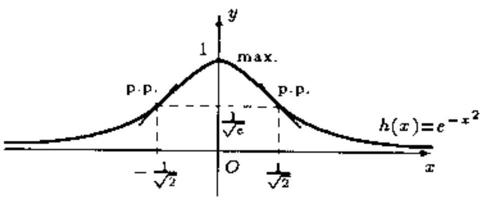
$$h''(x) < 0 \iff -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Zatem badana funkcja jest ściśle wklęsła na przedziale $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Z rozważań tych wynika, że punkty $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ są punktami przegięcia wykresu funkcji $h$.

VII. Wyniki uzyskane w punktach I-VI zestawiamy w tabeli:

| $x$ | $-\infty$ | $-\infty<x<-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<0$ | $0$ | $0<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\infty$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h''(x)$ | 0 | + | 0 | − | − | − | 0 | + | 0 |
| $h'(x)$ | 0 | + | $\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}$ | + | 0 | − | $-\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}$ | − | 0 |
| $h(x)$ | 0 | ↗ | $e^{-\frac{1}{2}}$ | ↗ | 1 | ↘ | $e^{-\frac{1}{2}}$ | ↘ | 0 |
| | | | p.p. | | max. | | p.p. | | |

VIII. Na podstawie tabeli sporządzamy wykres funkcji.




d) I. Dziedziną funkcji $p(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ jest zbiór $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$.

II. Funkcja ta jest ciągła na swojej dziedzinie i ma miejsce zerowe tylko w punkcie $x = 0$.

III. Obliczamy granice funkcji $p$ na „krańcach" jej dziedziny. Mamy

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{1-x^2} = \frac{1}{0^+} = \infty; \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{1-x^2} = \frac{1}{0^-} = -\infty; \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0.$$

Z nieparzystości funkcji $k$ wynika, że

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x}{1-x^2} = \infty; \qquad \lim_{x\to -1^+} \frac{x}{1-x^2} = -\infty; \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0.$$

IV. Z poprzedniego punktu wynika zatem, że proste $x = -1$, $x = 1$ są asymptotami pionowymi obustronnymi tej funkcji oraz, że prosta $y = 0$ jest jej asymptotą poziomą w

obu nieskończonościach.
V. Zbadamy teraz pierwszą pochodną funkcji $p$. Mamy $D_{p'} = D_p$ oraz

$$p'(x) = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}.$$

Funkcja $p$ nie ma ekstremów lokalnych, bo

$$p'(x) = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2} \neq 0, \text{ dla } x \in D_p$$

Funkcja $p$ jest rosnąca na każdym z przedziałów dziedziny, bo

$$p'(x) = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2} > 0 \text{ dla } |x| \neq 1.$$

VI. Przechodzimy teraz do badania drugiej pochodnej. Mamy $D_{p''} = D_p$ oraz

$$p''(x) = \frac{2x\left(x^2+3\right)}{(1-x^2)^3}.$$

Z warunku koniecznego szukamy punktów przegięcia wykresu funkcji $p$. Mamy

$$p''(x) = 0 \iff \frac{2x\left(x^2+3\right)}{(1-x^2)^3} = 0 \iff x = 0.$$

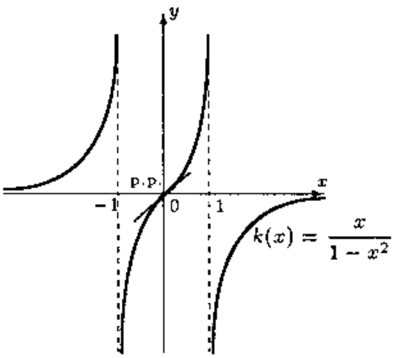
Przy pomocy drugiej pochodnej ustalimy przedziały wypukłości rozważanej funkcji. Mamy

$$p''(x) > 0 \iff x < -1 \text{ lub } 0 < x < 1.$$

Funkcja jest zatem ściśle wypukła na przedziałach $(-\infty, -1)$, $(0, 1)$. Z nieparzystości tej funkcji wynika, że jest ona ściśle wklęsła na przedziałach $(-1, 0)$, $(1, \infty)$. Z rozważań tych wynika dalej, że jedynie punkt $(0, 0)$ jest punktem przegięcia wykresu funkcji $p$. W punktach $x = -1$, $x = 1$ funkcja wprawdzie zmienia rodzaj wypukłości, ale punkty te nie należą do dziedziny funkcji.
VII. Wyniki uzyskane w punktach I-VI zestawiamy w tabeli:

| $x$ | $-\infty$ | $-\infty < x < -1$ | $-1_-$ | $-1_+$ | $-1 < x < 0$ | $0$ | $0 < x < 1$ | $1_-$ | $1_+$ | $1 < x < \infty$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p''(x)$ | 0 | + | | | − | 0 | + | | | − | 0 |
| $p'(x)$ | 0 | + | | | + | 1 | + | | | + | 0 |
| $p(x)$ | 0 | $\nearrow$ | $\infty$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | 0 | $\nearrow$ | $\infty$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | 0 |
| | | | | | | p.p. | | | | | |

VIII. Na podstawie tabeli sporządzamy wykres funkcji.



**• Przykład 9.2**

Do rzeki o szerokości $a = 15$ m dochodzi pod kątem prostym kanał o szerokości $b = 4$ m. Znaleźć długość największej kłody drewna, którą można spławić tym kanałem do rzeki.

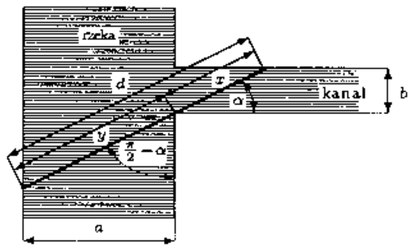
**Rozwiązanie**

Oznaczenia stosowane w rozwiązaniu podajemy na rysunku. Wyznaczymy długość kłody $d$ jako funkcję kąta $\alpha$ jej nachylenia do brzegu kanału. Mamy

$$x = \frac{b}{\sin\alpha},\ y = \frac{a}{\cos\alpha},\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Zatem

$$d = d(\alpha) = x + y = \frac{b}{\sin\alpha} + \frac{a}{\cos\alpha}.$$




Szukamy wartości najmniejszej funkcji $d$ na przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (dlaczego najmniejszej?).

I. Warunek konieczny istnienia ekstremum. Mamy

$$d'(\alpha) = \frac{-b\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{a\sin\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

Stąd

$$d'(\alpha) = 0 \iff \frac{b\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{a\sin\alpha}{\cos^2\alpha} \iff \operatorname{tg}^3\alpha = \frac{b}{a} \iff \alpha = \alpha_0 = \operatorname{arctg}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

II. Warunek wystarczający istnienia ekstremum. Badamy znak pochodnej funkcji $d$ w sąsiedztwie punktu $\alpha_0$. Mamy

$$d'(\alpha) = \frac{-b\cos^3\alpha + a\sin^3\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \frac{a\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}\left(\operatorname{tg}^3\alpha - \frac{b}{a}\right).$$

Ze wzoru określającego pochodną wynika, że

$$d'(\alpha) > 0 \iff \operatorname{tg}\alpha > \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \text{ oraz } d'(\alpha) < 0 \iff 0 < \operatorname{tg}\alpha < \sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

Oznacza to, że funkcja $d$ ma w punkcie $\alpha_0 = \operatorname{arctg}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ minimum lokalne właściwe. Ponieważ funkcja $d$ jest malejąca na przedziale $\left(0, \operatorname{arctg}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)$ oraz rosnąca na przedziale $\left(\operatorname{arctg}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}, \frac{\pi}{2}\right)$, więc funkcja $d$ przyjmuje w punkcie $\alpha_0 = \operatorname{arctg}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ wartość najmniejszą. Obliczymy teraz tę wartość. Z trygonometrii wiadomo, że dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$ mamy

$\sin x = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$ oraz $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$. Zatem

$$d(\alpha_0) = \frac{b}{\sin\alpha_0} + \frac{a}{\cos\alpha_0} = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha_0}\left(\frac{b}{\operatorname{tg}\alpha_0} + a\right).$$

Stąd

$$d_{\min} = d\left(\operatorname{arctg}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right) = \sqrt{1+\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}}\left(\frac{b}{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}} + a\right) = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

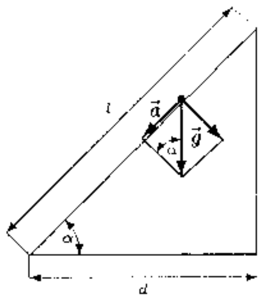
Przyjmując teraz $a = 15$ m i $b = 4$ m otrzymamy $d_{\min} \approx 25.22$ m. Największa kłoda, którą można spławiać tym kanałem ma długość około 25.22 m.

## • Przykład 9.3

Pod jakim kątem powinien być nachylony płaski dach przykrywający dom o ustalonej szerokości, aby krople deszczu spływały po nim najszybciej?

### Rozwiązanie

W rozwiązanie stosujemy oznaczenia podane na rysunku. Ruch kropli deszczu po dachu odbywa się ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem $a$ oraz z szybkością początkową $v_0 = 0$. Czas spływania kropli deszczu po dachu długości $l$ wyraża się wzorem $t = \sqrt{\dfrac{2l}{a}}$. Ponadto $l = \dfrac{d}{\cos\alpha}$ oraz $a = g\sin\alpha$, gdzie $g$ oznacza przyspieszenie ziemskie. Zatem

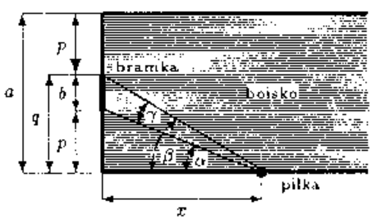



$$t(\alpha) = \sqrt{\frac{2d}{g\cos\alpha\sin\alpha}} = 2\sqrt{\frac{d}{g\sin 2\alpha}},$$

gdzie $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Z postaci funkcji $t$ widać, że czas ruchu kropli będzie najmniejszy, gdy mianownik, tj. $\sin 2\alpha$ będzie miał nawiększą wartość na przedziale $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Łatwo zauważyć, że funkcja $\sin 2\alpha$ przyjmuje największą wartość na tym przedziale dla $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$. Zatem krople deszczu będą spływały najszybciej po dachu, gdy będzie on nachylony pod kątem $\dfrac{\pi}{4}$.

## • Przykład 9.4

W którym miejscu na linii bocznej boiska trzeba ustawić piłkę, aby szansa trafienia nią do bramki była największa? Przyjąć, że szansa trafienia jest największa, gdy kąt widzenia bramki jest największy. Szerokość boiska wynosi $a = 64$ m, a szerokość bramki $b = 7$ m.



**Rozwiązanie**
W rozwiązaniu przyjmujemy oznaczenia podane na rysunku. Mamy

$$\gamma = \beta - \alpha \quad \text{oraz} \quad p = \frac{a-b}{2},\ q = p + b = \frac{a+b}{2}.$$

Ponadto

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{q}{x} = \frac{a+b}{2x}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{p}{x} = \frac{a-b}{2x}.$$

Stąd

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\beta-\alpha) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{a+b}{2x} - \frac{a-b}{2x}}{1+\frac{a-b}{2x}\cdot\frac{a+b}{2x}} = \frac{4xb}{4x^2+a^2-b^2},$$

gdzie $x > 0$. Zauważmy teraz, że kąt $\gamma$ będzie największy, gdy jego tangens będzie największy. Wystarczy zatem znaleźć wartość największą funkcji

$$f(x) = \frac{4bx}{4x^2+a^2-b^2}$$

na przedziale $(0,\infty)$. Z warunku koniecznego szukamy punktów, w których funkcja $f$ może mieć ekstrema (funkcja $f$ ma wszystkie pochodne na przedziale $(0,\infty)$). Mamy

$$f'(x) = \frac{4b\left[4x^2+a^2-b^2\right] - 4bx(8x)}{(4x^2+a^2-b^2)^2} = \frac{4b\left(a^2-b^2\right) - 16bx^2}{(4x^2+a^2-b^2)^2}$$

oraz

$$f'(x) = 0 \iff 4b\left(a^2-b^2\right) - 16bx^2 = 0 \iff x = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2}.$$

Zauważmy jeszcze, że

$$f'(x) > 0 \text{ dla } 0 < x < \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2} \text{ oraz } f'(x) < 0 \text{ dla } \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2} < x < \infty.$$

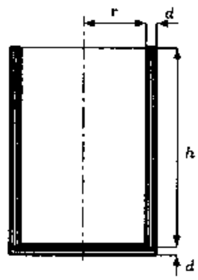
Oznacza to, że funkcja $f$ jest rosnąca na przedziale $\left(0, \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2}\right)$ i malejąca na przedziale $\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2}, \infty\right)$. Z rozważań tych wynika, że funkcja $f$ osiąga w punkcie $x = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2}$ maksimum lokalne właściwe równe $\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}$ i jest to jednocześnie wartość największa tej funkcji na przedziale $(0,\infty)$. Przyjmując teraz $a = 64$ m i $b = 7$ m otrzymamy, że piłkę należy ustawić w odległości $x_{\max} = \frac{\sqrt{4047}}{2} \approx 31.8$ m od linii bramkowej boiska.

## • Przykład 9.5

Jakie powinny być wymiary szklanki o grubości ścianek $d = 2\,\mathrm{mm}$ i pojemności $V = 0.2\ \mathrm{dcm}^3$, aby ilość szkła potrzebnego do jej wytworzenia była najmniejsza?

**Rozwiązanie**
Oznaczenia w rozwiązaniu przyjmujemy jak na rysunku. Ponadto niech $W$ oznacza objętość szkła potrzebnego do wytworzenia szklanki. Wtedy $W = \pi(r+d)^2(h+d) - V$.

Przyjmując teraz $r > 0$ jako zmienną niezależną oraz korzystając z zależności $V = \pi r^2 h$ otrzymamy




$$W(r) = \pi(r+d)^2\left(\frac{V}{\pi r^2}+d\right) - V,$$

gdzie $r > 0$. Z warunku koniecznego szukamy punktów, w których funkcja $W$ może mieć ekstrema (funkcja $W$ ma pochodną na przedziale $(0,\infty)$). Mamy

$$W'(r) = 2\pi(r+d)\left(\frac{V}{\pi r^2}+d\right) + \pi(r+d)^2\left(\frac{-2V}{\pi r^3}\right) = \frac{2d(r+d)\left(\pi r^3 - V\right)}{r^3}$$

oraz

$$W'(r) = 0 \iff r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$$

(pierwiastek $r = -d$ odrzucamy, bo $r$ ma być dodatnie). Zauważmy jeszcze, że

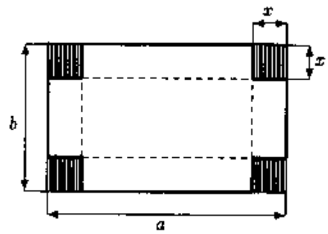
$$W'(r) > 0 \text{ dla } r > \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} \text{ oraz } W'(r) < 0 \text{ dla} 0 < r < \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$$

Oznacza to, że funkcja $W$ jest rosnąca na przedziale $\left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}},\infty\right)$ oraz malejąca na przedziale $\left(0,\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)$. Z rozważań tych wynika, że funkcja $W$ osiąga w punkcie $r_{\min} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ minimum lokalne właściwe i jest to jednocześnie punkt, w którym funkcja $W$ osiąga najmniejszą wartość na przedziale $(0,\infty)$. Wielkość $h_{\min}$ odpowiadająca wartości $r_{\min}$ równa się $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$. Przyjmując teraz $V = 0.2\,\mathrm{dcm}^3 = 200000\,\mathrm{mm}^3$ otrzymamy

$$r_{\min} = 10\sqrt[3]{\frac{200}{\pi}} \approx 40 \text{ mm}, \quad h_{\min} = 10\sqrt[3]{\frac{200}{\pi}} \approx 40 \text{ mm}.$$

## • Przykład 9.6

Jakiej wielkości kwadraty należy wyciąć na rogach prostokątnego arkusza kartonu o wymiarach $a = 30$ cm, $b = 24$ cm, aby pojemność pudełka otrzymanego po sklejeniu kartonu była największa?




**Rozwiązanie**

W rozwiązaniu przyjmujemy oznaczenia podane na rysunku. Niech $V$ oznacza objętość pudełka otrzymanego po sklejeniu kartonu. Wtedy $V(x) = (a-2x)(b-2x)x$, gdzie $b < a$ oraz $0 < x < \frac{b}{2}$. Z warunku koniecznego szukamy punktów, w których funkcja $V$ może mieć ekstrema (funkcja $V$ ma pochodne dowolnego rzędu na przedziale $0 < x < \frac{b}{2}$). Mamy

$$V'(x) = \left[4x^3 - 2x^2(a+b) + abx\right]' = 12x^2 - 4x(a+b) + ab$$

oraz

$$\begin{aligned} V'(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 12x^2 - 4x(a+b) + ab = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x_1 = \frac{(a+b) - \sqrt{a^2+b^2-ab}}{6} \text{ lub } x_2 = \frac{(a+b) + \sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}. \end{aligned}$$

Pierwiastek $x_2$ odrzucamy, bo nie należy do przedziału $\left(0, \frac{b}{2}\right)$. Zauważmy jeszcze, że

$$V'(x) > 0 \text{ dla } 0 < x < x_1 \text{ oraz } V'(x) < 0 \text{ dla } x_1 < x < \frac{b}{2}.$$

Oznacza to, że funkcja $V$ jest rosnąca na przedziale $(0, x_1)$ oraz malejąca na przedziale $\left(x_1, \frac{b}{2}\right)$. Z rozważań tych wynika, że funkcja $V$ osiąga w punkcie $x = x_1$ maksimum lokalne właściwe i jest to jednocześnie punkt, w którym funkcja $V$ przyjmuje największą wartość na przedziale $\left(0, \frac{b}{2}\right)$. Przyjmując $a = 30$ cm oraz $b = 24$ cm otrzymamy $x_{\max} = 9 - \sqrt{21} \approx 4.4$ cm.

- **Przykład 9.7**

W kulę o promieniu $R$ wpisano walec o największej objętości. Znaleźć wymiary tego walca.

**Rozwiązanie**

Niech $r$ oznacza promień walca wpisanego w kulę, a $x$ jego wysokość (rysunek).

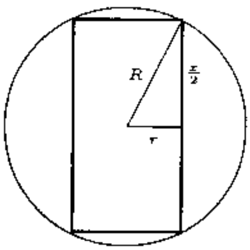
Wtedy $r^2 = R^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2$, gdzie $0 < x < 2R$.

Objętość walca wpisanego w kulę wyraża się wzorem

$$V(x) = \pi r^2 x = \frac{\pi}{4}\left(4R^2 - x^2\right)x,$$

gdzie $0 < x < 2R$. Korzystając z warunku koniecznego znajdziemy punkty, w których funkcja $V$ może mieć ekstrema. Mamy

$$V'(x) = \frac{\pi}{4}\left(4R^2 - 3x^2\right).$$




Stąd

$$V'(x) = 0 \Longleftrightarrow 4R^2 - 3x^2 = 0 \Longleftrightarrow x = x_0 = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

Z postaci pochodnej widać, że funkcja $V$ jest rosnąca na przedziale $\left(0, \frac{2R}{\sqrt{3}}\right)$ i malejąca na przedziale $\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}, 2R\right)$. Oznacza to, że funkcja ta przyjmuje w punkcie $x_0$ maksimum lokalne właściwe równe $V_{\max} = \dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3$ i jest to jednocześnie wartość największa funkcji $V$ na przedziale $(0, 2R)$. Promień walca o największej objętości wynosi $r_{\max} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}R$, a wysokość $x_{\max} = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$.

## • Przykład 9.8

W którym punkcie elipsy $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ należy poprowadzić styczną, aby pole trójkąta ograniczonego tą styczną i dodatnimi półosiami układu współrzędnych było najmniejsze?

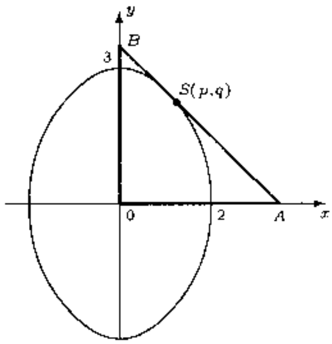
### Rozwiązanie

Niech punkt $S(p, q)$ należy do łuku elipsy $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ leżącego w pierwszej ćwiartce układu (rysunek). Wtedy $0 < p < 2$ oraz $q = 3\sqrt{1 - \dfrac{p^2}{4}}$. Równanie stycznej do elipsy

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

w punkcie $S(p, q)$ ma postać

$$\frac{xp}{4} + \frac{yq}{9} = 1.$$




Styczna ta przecina oś $Ox$ w punkcie $A$ o współrzędnych $\left(\dfrac{4}{p}, 0\right)$ i oś $Oy$ w punkcie $B$ o współrzędnych $\left(0, \dfrac{9}{q}\right)$. Pole $\triangle OAB$ wyraża się wzorem

$$P(p) = \frac{1}{2}|OA| \cdot |OB| = \frac{18}{pq} = \frac{12}{p\sqrt{4 - p^2}},$$

gdzie $0 < p < 2$. Ponieważ funkcja $P$ przyjmuje tylko wartości dodatnie, więc jej wartość najmniejsza będzie realizowana w punkcie, w którym funkcja $f(p) = p^2\left(4 - p^2\right)$, tj. kwadrat wyrażenia z mianownika funkcji $P$, przyjmie wartość największą. Szukamy zatem wartości największej funkcji $f$ na przedziale $(0, 2)$. Podstawiając $u = p^2$, otrzymamy funkcję kwadratową $g(u) = u(4 - u)$, gdzie $0 < u < 4$. Funkcja kwadratowa $g(u) = -u^2 + 4u$ przyjmuje wartość największą na przedziale $(0, 4)$ w punkcie $u = u_0 = \dfrac{-4}{2 \cdot (-1)} = 2$. Stąd wynika, że funkcja $P$ przyjmuje wartość najmniejszą w punkcie $p = p_0 = \sqrt{2}$. Punkt $S$, dla którego $\triangle OAB$ przyjmuje najmniejsze pole, ma współrzędne $\left(\sqrt{2}, \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

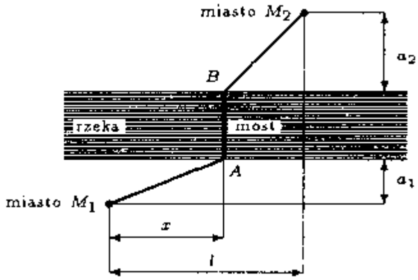
## • Przykład 9.9

Dwa miasta $M_1$, $M_2$ położone po przeciwnych stronach rzeki trzeba połączyć drogą z mostem prostopadłym do brzegów rzeki o prostoliniowych i równoległych brzegach (rysunek). W którym miejscu należy zbudować most, aby droga łącząca te miasta miała najmniejszą długość? Wielkości znane: $l = 21$ km, $a_1 = 2$ km, $a_2 = 12$ km.

**Rozwiązanie**

Droga łącząca miasta $M_1$ i $M_2$ ma długość

$$\begin{aligned} d(x) &= |M_1A| + |AB| + |BM_2| \\ &= \sqrt{x^2+a_1^2} + |AB| + \sqrt{(l-x)^2+a_2^2}, \end{aligned}$$




gdzie $0 \leqslant x \leqslant l$. Ponieważ odcinek $AB$ (most) ma stałą długość, więc wystarczy znaleźć wartość najmniejszą funkcji

$$f(x) = \sqrt{x^2+a_1^2} + \sqrt{(l-x)^2+a_2^2}$$

na przedziale $[0, l]$. Korzystając z warunku koniecznego znajdziemy punkty, w których funkcja $f$ może mieć ekstrema lokalne. Mamy

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+a_1^2}} + \frac{2(l-x)\cdot(-1)}{2\sqrt{(l-x)^2+a_2^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+a_1^2}} - \frac{(l-x)}{\sqrt{(l-x)^2+a_2^2}}.$$

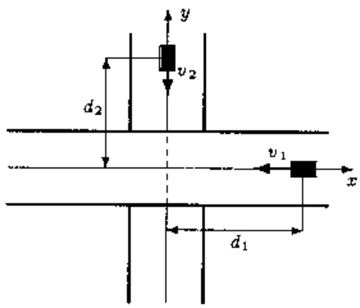
Stąd

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+a_1^2}} = \frac{(l-x)}{\sqrt{(l-x)^2+a_2^2}} \\ &\Longleftrightarrow \quad x^2\left(l^2 - 2xl + x^2 + a_2^2\right) = \left(l^2 - 2xl + x^2\right)\left(x^2 + a_1^2\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(a_2^2 - a_1^2\right)x^2 + 2la_1^2x - l^2a_1^2 = 0 \Longleftrightarrow x = x_0 = \frac{a_1 l}{a_2 + a_1}. \end{aligned}$$

Punkt $x_0 = \dfrac{a_1 l}{a_1 + a_2}$ należy do przedziału $[0, l]$. Ponieważ pochodna $f'$ w punkcie $x_0$ zmienia wartości z ujemnych na dodatnie, więc funkcja $f$ ma w tym punkcie minimum lokalne właściwe. Jest to jednocześnie punkt, w którym funkcja $f$ przyjmuje wartość najmniejszą na przedziale $[0, l]$. Most należy wybudować w odległości $x_0 = 3$ km od miasta $M_1$ (licząc wzdłuż brzegu rzeki).

- **Przykład 9.10**

Dwa samochody poruszają się ze stałymi szybkościami $v_1 = 120$ km/h, $v_2 = 80$ km/h po autostradach przecinających się pod kątem prostym. Położenia początkowe samochodów podano na rysunku: $d_1 = 50$ km, $d_2 = 20$ km. Kiedy odległość między samochodami będzie najmniejsza?



**Rozwiązanie**
Niech $P_1(t)$, $P_2(t)$ oznaczają odpowiednio położenia pierwszego i drugiego samochodu w chwili $t$, gdzie $t \geqslant 0$. Wtedy w układzie współrzędnych przyjętym na rysunku mamy $P_1(t) = (d_1 - v_1 t, 0)$, $P_2(t) = (0, d_2 - v_2 t)$. Odległość między samochodami wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} d(t) = |P_1(t)P_2(t)| &= \sqrt{(d_1 - v_1 t)^2 + (d_2 - v_2 t)^2} \\ &= \sqrt{(v_1^2 + v_2^2)\,t^2 - 2\,(d_1 v_1 + d_2 v_2)\,t + (d_1^2 + d_2^2)} \quad \text{dla } t \geqslant 0. \end{aligned}$$

Z postaci funkcji $d$ wynika, że przyjmuje ona wartość najmniejszą w punkcie, w którym funkcja pod pierwiastkiem jest najmniejsza. Wystarczy zatem określić, gdzie nieujemna funkcja kwadratowa

$$f(t) = at^2 + bt + c = \left(v_1^2 + v_2^2\right) t^2 - 2\,(d_1 v_1 + d_2 v_2)\,t + \left(d_1^2 + d_2^2\right)$$

przyjmuje wartość najmniejszą. Oczywiście

$$t_{\min} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2\,(d_1 v_1 + d_2 v_2)}{2\,(v_1^2 + v_2^2)} = \frac{d_1 v_1 + d_2 v_2}{v_1^2 + v_2^2}.$$

Najmniejsza odległość między samochodami będzie za

$$t_{\min} = \frac{50 \cdot 120 + 20 \cdot 80}{120^2 + 80^2} = \frac{7600}{20800} \approx 0.36 \text{ godz.}$$

# Zadania

## ○ Zadanie 9.1

Zbadać przebieg zmienności podanych funkcji i następnie sporządzić ich wykresy:

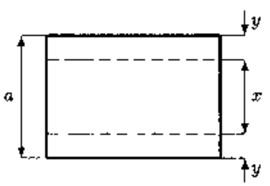
a) $f(x) = (x-1)^2(x+2)$; b) $g(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$;

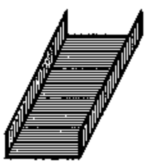
c) $h(x) = \dfrac{x}{\ln x}$; d) $p(x) = x\sqrt{1-x^2}$;

e) $q(x) = x^2 e^{-x}$; f) $r(x) = \sin x - \sin^2 x$.

## ○ Zadanie 9.2

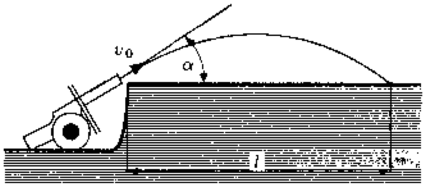
Z prostokątnego kawałka blachy o szerokości $a$ należy wygiąć rynnę o przekroju prostokątnym w ten sposób, aby mogło nią spływać możliwie najwięcej wody (rysunek). Znaleźć wymiary przekroju takiej rynny.



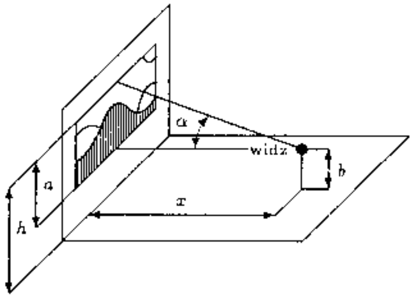
**○ Zadanie 9.3**

Pocisk wylatuje z działa z szybkością $v_0$. Pod jakim kątem powinna być nachylona oś lufy, aby zasięg pocisku był największy (rysunek)? Nie uwzględniać oporu powietrza.



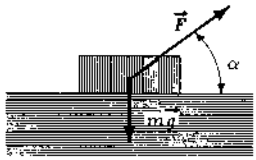

**○ Zadanie 9.4**

Ekran kinowy o szerokości $a = 8$ m jest zawieszony na wysokości $h = 12$ m (rysunek). W jakiej odległości od ekranu powinien usiąść widz, aby oglądać ekran pod największym kątem? Założyć, że oczy widza znajdują się na wysokości $b = 1.5$ m nad podłogą, a widz siedzi w środku rzędu.



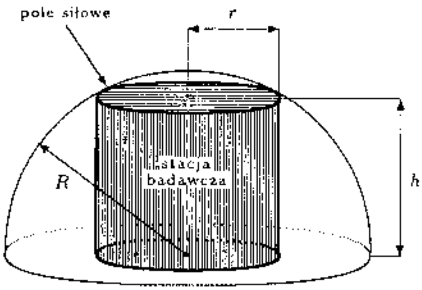

**○ Zadanie 9.5**

Współczynnik tarcia skrzyni o masie $m = 100\,\text{kg}$ o podłogę wynosi $\mu = 0.7$ (rysunek). Pod jakim kątem $\alpha$ należy ciągnąć skrzynię, aby siła $F = |\vec{F}|$ potrzebna do jej ruszenia była najmniejsza?




**○ Zadanie 9.6**

Pola siłowe chroniące stacje badawcze na Marsie mają kształt półsfery o promieniu $R = 50$ m (rysunek). Znaleźć wymiary stacji badawczej w kształcie walca o największej możliwej objętości, którą można chronić tym polem.



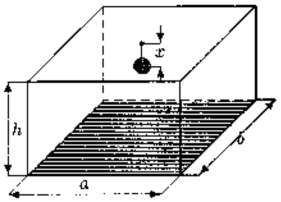

**○ Zadanie 9.7**

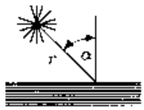
Pewną substancję przechowuje się w kopcach w kształcie stożka. Jaki powinien być kąt nachylenia tworzącej stożka do podstawy, aby powierzchnia parowania tej substancji (tj. powierzchnia boczna stożka) była najmniejsza?

**○ Zadanie 9.8**

Prostopadłościenny pokój ma wymiary: długość $a = 6$ m, szerokość $b = 4$ m, wysokość $h = 3$ m. W jakiej odległości od środka sufitu należy zawiesić lampę, aby oświetlenie pokoju w najciemniejszym miejscu (tj. w rogu przy podłodze) było największe?

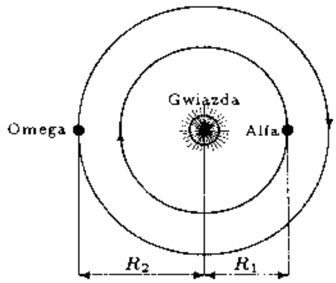
Uwaga. Natężenie światła w punkcie położonym w odległości $r$ od źródła światła wyraża się wzorem $I = k\frac{\cos\alpha}{r^2}$, gdzie $\alpha$ oznacza kąt padania promieni (rysunek), a $k$ jest współczynnikiem zależnym od źródła światła.




## ○ Zadanie 9.9

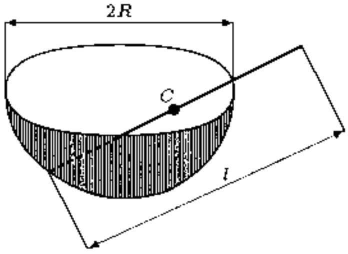
Odległy układ planetarny składa się z gwiazdy i dwóch planet. Planeta Alfa obiega gwiazdę w odległości $R_1 = 3,000,000$ km w ciągu $t_1 = 3$ lat ziemskich, a planeta Omega w odległości $R_2 = 5,000,000$ km w ciągu $t_2 = 4$ lat. Obie planety poruszają się ze stałymi prędkościami w tym samym kierunku i w tej samej płaszczyźnie. Położenie planet 1 stycznia 2001 r. przedstawiono na rysunku. Kiedy będzie najdogodniejszy moment do obserwacji planety Alfa z planety Omega, tzn. kiedy odległość między planetami będzie najmniejsza?




## ○ Zadanie* 9.10

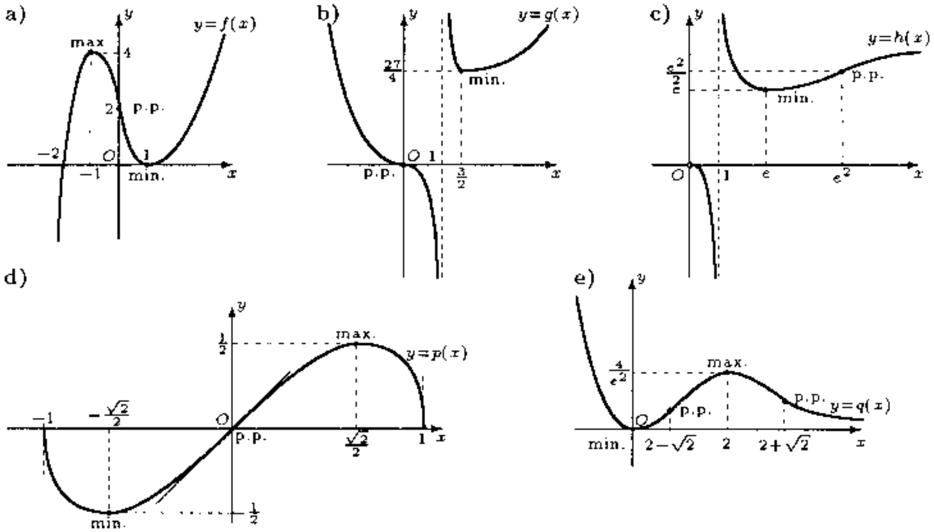
Do kotła w kształcie półsfery o promieniu $R$ włożono jednorodny pręt o długości $l = 3R$. Określić położenie równowagi pręta (nie uwzględniać tarcia pręta o kocioł).

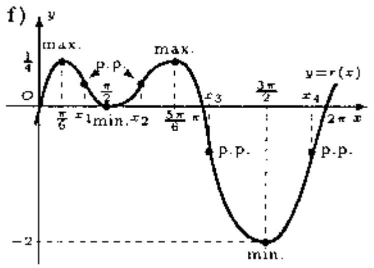
Wskazówka. Pręt będzie w położeniu równowagi, gdy jego środek masy $C$ zajmie najniższe położenie.



# Odpowiedzi i wskazówki

**9.1** Wykresy funkcji przedstawione są na rysunkach poniżej:




$$x_1 = \arcsin \frac{1+\sqrt{33}}{8},$$
$$x_2 = \pi - \arcsin \frac{1+\sqrt{33}}{8},$$
$$x_3 = \pi + \arcsin \frac{\sqrt{33}-1}{8},$$
$$x_4 = 2\pi - \arcsin \frac{\sqrt{33}-1}{8}.$$

**9.2** $x = 0.5a$, $y = 0.25a$.

**9.3** $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

**9.4** $x_{\max} = \sqrt{(h-b-a)(h-b)} = \dfrac{\sqrt{105}}{2} \approx 5.12\,\mathrm{m}$.

**9.5** $\alpha_{\min} = \operatorname{arctg} \mu = \operatorname{arctg} 0.7 \approx 0.61\ [\mathrm{rad}] \approx 35^\circ$.

**9.6** Promień walca $r_{\max} = R\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, wysokość walca $h_{\max} = R\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

**9.7** $\alpha_{\min} = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{3}} \approx 55^\circ$.

**9.8** $x_{\max} = h - \dfrac{\sqrt{2(a^2+b^2)}}{4} = 3 - \dfrac{\sqrt{26}}{2} \approx 0.45\,\mathrm{m}$.

**9.9** Za sześć lat, tj. 1 stycznia 2007 r., $d_{\min} = R_2 - R_1 = 2\,000\,000\,\mathrm{km}$.

**9.10** W położeniu równowagi kąt $\alpha$ nachylenia pręta do poziomu spełnia warunek: $\cos\alpha = \dfrac{3+\sqrt{137}}{16}$, stąd $\alpha \approx 23^\circ$.

# 7

# CAŁKI NIEOZNACZONE

## Dziesiąty tydzień

| |
|---|
| Funkcje pierwotne (7.1). Całki nieoznaczone (7.2). Twierdzenia o całkach nieoznaczonych (7.3). |

### Przykłady

- **Przykład 10.1**

Obliczyć podane całki nieoznaczone:

a) $\int \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$; b) $\int \sqrt[4]{3^x}\,dx$; c) $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$; d) $\int \frac{e^{3x} - 1}{e^x - 1}\,dx$.

**Rozwiązanie**

a) Korzystając z liniowość całki oraz ze wzoru

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,$$

gdzie $\alpha \neq -1$, mamy

$$\int \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int x^{\frac{5}{3}}\,dx - \int x^{\frac{1}{6}}\,dx = \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8} - \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} + C = \frac{3}{8}x^2\sqrt[3]{x^2} - \frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} + C.$$

b) Wykorzystując wzór

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

gdzie $0 < a \neq 1$ otrzymamy

$$\int \sqrt[4]{3^x}\,dx = \int \left(\sqrt[4]{3}\right)^x\,dx = \frac{\left(\sqrt[4]{3}\right)^x}{\ln\sqrt[4]{3}} + C = \frac{4\sqrt[4]{3^x}}{\ln 3} + C.$$

c) Wykorzystując własności funkcji trygonometrycznych, liniowość całki oraz wzór

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

otrzymamy

$$\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -\operatorname{ctg} x - x + C.$$

d) W rozwiązaniu wykorzystamy wzór

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right).$$

Przyjmując w tym wzorze $a = e^x$ oraz $b = 1$ otrzymamy

$$\int \frac{e^{3x}-1}{e^x - 1}\,dx = \int \left(e^{2x} + e^x + 1\right)\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + e^x + x + C.$$

## • Przykład 10.2

Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez części obliczyć podane całki nieoznaczone:

a) $\int x^2 \operatorname{arctg} x\,dx$; b) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$; c) $\int \arcsin x\,dx$; d) $\int x \sin x \cos x\,dx$;

e) $\int x \ln^2 x\,dx$; f) $\int \frac{\ln x\,dx}{x^2}$; g) $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$; h) $\int e^x \cos x\,dx$.

**Rozwiązanie**

a) $\int x^2 \operatorname{arctg} x\,dx$

$$\boxed{\begin{array}{ll} f(x) = \operatorname{arctg} x & g'(x) = x^2 \\ f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} & g(x) = \dfrac{x^3}{3} \end{array}}$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}\int x^3 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}\int x\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{x\,dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}\int x\,dx + \frac{1}{6}\int \frac{2x\,dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}\int \left(\ln\left(1+x^2\right)\right)'\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln\left(1+x^2\right) + C.$$

b) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$

$$\boxed{\begin{array}{ll} f(x) = \operatorname{arctg} x & g'(x) = 1 \\ f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} & g(x) = x \end{array}}$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \int x\frac{1}{1+x^2}\,dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{1+x^2}$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \left(\ln\left(1+x^2\right)\right)'\,dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C.$$

c) $\int \arcsin x \, dx$ $\boxed{\begin{array}{ll} f(x) = \arcsin x & g'(x) = 1 \\ f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & g(x) = x \end{array}}$

$$= x \arcsin x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = x \arcsin x + \int \left(\sqrt{1-x^2}\right)' \, dx$$

$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

d) $\int x \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int x \sin 2x \, dx$ $\boxed{\begin{array}{ll} f(x) = x & g'(x) = \sin 2x \\ f'(x) = 1 & g(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{array}}$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} x \cos 2x - \int -\frac{1}{2} \cos 2x \, dx\right)$$

$$= -\frac{1}{4} x \cos 2x + \frac{1}{8} \sin 2x + C.$$

e) $\int x \ln^2 x \, dx$ $\boxed{\begin{array}{ll} f(x) = \ln^2 x & g'(x) = x \\ f'(x) = \dfrac{2\ln x}{x} & g(x) = \dfrac{x^2}{2} \end{array}}$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x - \int \frac{1}{2} x^2 \frac{2}{x} \ln x \, dx$$

$= \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x - \int x \ln x \, dx$ $\boxed{\begin{array}{ll} f(x) = \ln x & g'(x) = x \\ f'(x) = \dfrac{1}{x} & g(x) = \dfrac{x^2}{2} \end{array}}$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x - \left(\frac{1}{2} x^2 \ln x - \int \frac{1}{2} x^2 \frac{1}{x} \, dx\right)$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x - \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x - \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{4} x^2 + C.$$

f) $\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx$ $\boxed{\begin{array}{ll} f(x) = \ln x & g'(x) = \dfrac{1}{x^2} \\ f'(x) = \dfrac{1}{x} & g(x) = -\dfrac{1}{x} \end{array}}$

$$= -\frac{1}{x} \ln x - \int \left(-\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x} \, dx = -\frac{1}{x} \ln x + \int \frac{1}{x^2} \, dx$$

$$= -\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + C = -\frac{1}{x} (\ln x + 1) + C.$$

g) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$ $\boxed{\begin{array}{ll} f(x)=x & g'(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x} \\ f'(x)=1 & g(x)=-\operatorname{ctg} x \end{array}}$

$$= -x\operatorname{ctg} x + \int \operatorname{ctg} x\,dx = -x\operatorname{ctg} x + \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$

$$= -x\operatorname{ctg} x + \ln|\sin x| + C.$$

h) Ponieważ

$$\int e^x \cos x\,dx \; \boxed{\begin{array}{ll} f(x)=\cos x & g'(x)=e^x \\ f'(x)=-\sin x & g(x)=e^x \end{array}} = e^x\cos x - \int e^x(-\sin x)\,dx =$$

$$= e^x\cos x + \int e^x \sin x\,dx \; \boxed{\begin{array}{ll} f(x)=\sin x & g'(x)=e^x \\ f'(x)=\cos x & g(x)=e^x \end{array}}$$

$$= e^x\cos x + e^x \sin x - \int e^x\cos x\,dx,$$

więc

$$2\int e^x\cos x\,dx = e^x(\cos x + \sin x) + C_1.$$

Stąd

$$\int e^x\cos x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + C.$$

- **Przykład 10.3**

Stosując odpowiednie podstawienia obliczyć podane całki nieoznaczone:

a) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}\,dx}{1+e^{6x}}$; b) $\displaystyle\int x\sqrt{x-3}\,dx$; c) $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$;

d) $\displaystyle\int \frac{\cos\ln x}{x}\,dx$; e) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$; f) $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{3+2\cos x}$;

g) $\displaystyle\int \frac{e^{-4x}\,dx}{\sqrt{4+e^{-4x}}}$; h) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$; i) $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^8}}$.

**Rozwiązanie**

a) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}\,dx}{1+e^{6x}} \; \boxed{\begin{array}{l} e^{3x}=t,\ e^{6x}=t^2 \\ 3e^{3x}dx=dt \end{array}} = \int \frac{\frac{1}{3}\,dt}{1+t^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} e^{3x} + C.$

b) $\displaystyle\int x\sqrt{x-3}\,dx \;\boxed{\begin{array}{l} x-3=t \\ dx=dt \end{array}}$

$$= \int (t+3)\sqrt{t}\,dt = \int t\sqrt{t}\,dt + 3\int \sqrt{t}\,dt = \int t^{\frac{3}{2}}\,dt + 3\int t^{\frac{1}{2}}\,dt$$

$$= \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + 2t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{5}(x-3)^{\frac{5}{2}} + 2(x-3)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{5}(x-3)^2\sqrt{x-3} + 2(x-3)\sqrt{x-3} + C.$$

c) $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \;\boxed{\begin{array}{l} 1-x^2=t,\;\; x^2=1-t \\ -2xdx=dt \end{array}}$

$$= \int \frac{(1-t)\left(-\frac{1}{2}\right)\,dt}{\sqrt{t^3}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^3}} + \frac{1}{2}\int \frac{tdt}{\sqrt{t^3}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{2}}\,dt + \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}(-2)t^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{t}} + \sqrt{t} + C = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} + C.$$

d) $\displaystyle\int \frac{\cos\ln x}{x}\,dx \;\boxed{\begin{array}{l} \ln x=t \\ \frac{1}{x}dx=dt \end{array}} = \int \cos t\,dt = \sin t + C = \sin\ln x + C.$

e) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,dx \;\boxed{\begin{array}{l} x^2+1=t \\ 2xdx=dt \end{array}}$

$$= \int \frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + C = \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1} + C.$$

f) $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{3+2\cos x} \;\boxed{\begin{array}{l} 3+2\cos x=t \\ -2\sin x dx=dt \end{array}}$

$$= \int \frac{-\frac{1}{2}\,dt}{t} = -\frac{1}{2}\ln|t| + C = -\frac{1}{2}\ln(3+2\cos x) + C.$$

g) $\displaystyle\int \frac{e^{-4x}\,dx}{\sqrt{4+e^{-4x}}} \;\boxed{\begin{array}{l} \sqrt{4+e^{-4x}}=t \\ \frac{-2e^{-4x}dx}{\sqrt{4+e^{-4x}}}=dt \end{array}} = -\frac{1}{2}\int dt = -\frac{t}{2} + C = -\frac{\sqrt{4+e^{-4x}}}{2} + C.$

h) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$ $\boxed{\begin{array}{l} \sqrt{x^2-2}=t \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2-2}}\,dx = dt \end{array}}$

$$= \int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x^2-2}{2}} + C.$$

i) $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^8}}$ $\boxed{\begin{array}{l} x^4=t \\ x^3\,dx = \frac{1}{4}dt \end{array}}$ $\displaystyle = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{3}\arcsin t + C = \frac{1}{3}\arcsin x^4 + C.$

## • Przykład 10.4

Obliczyć podane całki nieoznaczone:

a) $\displaystyle\int |\sin x|\,dx,\quad x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$; b) $\displaystyle\int \left|x^2-x\right|dx$; c) $\displaystyle\int |2^x-2|\,dx$.

### Rozwiązanie

a) Zauważmy najpierw, że funkcja $|\sin x|$ jest ciągła na $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, zatem istnieje całka nieoznaczona tej funkcji na powyższym przedziale. Całkę tą obliczamy osobno na każdym z przedziałów $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$, $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, i otrzymane funkcje odpowiednio „sklejamy". Dla $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ mamy

$$\int |\sin x|\,dx = -\int \sin x\,dx = \cos x + C_1,$$

a dla $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$$\int |\sin x|\,dx = \int \sin x\,dx = -\cos x + C_2.$$

Całka nieoznaczona jest funkcją ciągłą na $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Stałe $C_1$, $C_2$ należy zatem dobrać w ten sposób, aby funkcja

$$F(x) = \begin{cases} \cos x + C_1 & \text{dla}\ \ x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right], \\ -\cos x + C_2 & \text{dla}\ \ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

była ciągła w punkcie $x_0=0$. Zauważmy, że z jednej strony $F(0)=1+C_1$, a z drugiej $F(0)=-1+C_2$, zatem $C_2=C_1+2$. Ostatecznie kładąc $C_1=C$ otrzymamy

$$\int |\sin x|\,dx = \begin{cases} \cos x + C & \text{dla}\ \ x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right], \\ -\cos x + C + 2 & \text{dla}\ \ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

b) Zauważmy najpierw, że funkcja $\left|x^2 - x\right|$ jest ciągła na $\boldsymbol{R}$, zatem istnieje całka nieoznaczona tej funkcji na $\boldsymbol{R}$. Całkę tą obliczamy osobno na każdym z przedziałów $(-\infty, 0]$, $[0,1]$, $[1,\infty)$ i otrzymane funkcje odpowiednio „sklejamy". Dla $x \in (-\infty, 0]$ mamy

$$\int \left|x^2 - x\right| dx = \int \left(x^2 - x\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C_1,$$

dla $x \in [0,1]$ mamy

$$\int \left|x^2 - x\right| dx = \int \left(x - x^2\right) dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C_2,$$

a dla $[1,\infty)$ mamy

$$\int \left|x^2 - x\right| dx = \int \left(x^2 - x\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C_3.$$

Całka nieoznaczona jest funkcją ciągłą na $\boldsymbol{R}$. Stałe $C_1$, $C_2$, $C_3$ należy zatem dobrać tak, aby funkcja

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + C_1 & \text{dla } x \in (-\infty, 0], \\ \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + C_2 & \text{dla } x \in [0,1], \\ \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + C_3 & \text{dla } x \in [1,\infty) \end{cases}$$

była ciągła w punktach $x_0 = 0$ , $x_1 = 1$ . Zauważmy, że z jednej strony $F(0) = C_1$ , a z drugiej $F(0) = C_2$. Podobnie $F(1) = \dfrac{1}{6} + C_2$ oraz $F(1) = -\dfrac{1}{6} + C_3$. Zatem $C_2 = C_1$ oraz $C_3 = \dfrac{1}{3} + C_1$. Ostatecznie kładąc $C_1 = C$ otrzymamy

$$\int \left|x^2 - x\right| dx = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + C & \text{dla } x \in (-\infty, 0], \\ \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + C & \text{dla } x \in [0,1], \\ \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{3} + C & \text{dla } x \in [1,\infty). \end{cases}$$

c) Także w tym przykładzie funkcja podcałkowa $|2^x - 2|$ jest ciągła na $\boldsymbol{R}$. Zatem istnieje całka nieoznaczona tej funkcji na $\boldsymbol{R}$. Obliczymy osobno tę całkę na każdym z przedziałów $(-\infty, 1]$, $[1,\infty)$. Po czym, otrzymane funkcje odpowiednio „skleimy" w punkcie $x = 1$. Dla $x \in (-\infty, 1]$ mamy

$$\int |2^x - 2|\, dx = -\int (2^x - 2)\, dx = -\frac{2^x}{\ln 2} + 2x + C_1,$$

a dla $x \in [1,\infty)$ mamy

$$\int |2^x - 2|\, dx = \int (2^x - 2)\, dx = \frac{2^x}{\ln 2} - 2x + C_2.$$

Stałe $C_1$ i $C_2$ należy dobrać w ten sposób, aby funkcja

$$F(x)=\begin{cases} -\dfrac{2^x}{\ln 2}+2x+C_1 & \text{dla } x\in(-\infty,1],\\ \dfrac{2^x}{\ln 2}-2x+C_2 & \text{dla } x\in[1,\infty)\end{cases}$$

była ciągła w punkcie $x=1$ Podstawiając $x=1$ w pierwszym i drugim wzorze otrzymamy odpowiednio

$$F(1)=-\frac{2}{\ln 2}+2+C_1,\qquad F(1)=\frac{2}{\ln 2}-2+C_2.$$

Stąd

$$C_1=\frac{4}{\ln 2}-4+C_2.$$

Ostatecznie kładąc $C_2=C$ dostaniemy

$$F(x)=\begin{cases} -\dfrac{2^x}{\ln 2}+2x+\dfrac{4}{\ln 2}-4+C & \text{dla } x\in(-\infty,1],\\ \dfrac{2^x}{\ln 2}-2x+C & \text{dla } x\in[1,\infty).\end{cases}$$

## Zadania

### ○ Zadanie 10.1

Obliczyć podane całki nieoznaczone:

a) $\displaystyle\int\frac{x^3+\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt{x}}\,dx$; b) $\displaystyle\int\frac{2^x-5^x}{10^x}\,dx$; c) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$; d) $\displaystyle\int\frac{e^{-2x}-4}{e^{-x}+2}\,dx$.

### ○ Zadanie 10.2

Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez części obliczyć całki nieoznaczone:

a) $\displaystyle\int x^2\sin x\,dx$; b) $\displaystyle\int e^{2x}\sin x\,dx$; c) $\displaystyle\int x\ln x\,dx$;

d) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\cos^2 x}$; e) $\displaystyle\int\arccos x\,dx$; f) $\displaystyle\int xe^{-3x}\,dx$;

g) $\displaystyle\int\log_3 x\,dx$; h*) $\displaystyle\int\arccos^2 x\,dx$; i*) $\displaystyle\int x\sin^2 x\,dx$.

### ○ Zadanie 10.3

Stosując odpowiednie podstawienia obliczyć podane całki nieoznaczone:

a) $\displaystyle\int(5-3x)^{10}\,dx$; b) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$; c) $\displaystyle\int x^2\sqrt[5]{5x^3+1}\,dx$;

d) $\displaystyle\int\frac{dx}{2+\sqrt{x}}$; e) $\displaystyle\int\frac{\ln x}{x}\,dx$; f) $\displaystyle\int\frac{x^3\,dx}{x+1}$;

g) $\displaystyle\int\frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1}$; h) $\displaystyle\int\frac{5\sin x\,dx}{3-2\cos x}$; i) $\displaystyle\int\sin^3 x\,dx$;

j) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$; k) $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{(x-1)^{100}}$; l) $\displaystyle\int x^3 e^{x^2}\,dx$.

○ **Zadanie 10.4**

Obliczyć podane całki nieoznaczone:

a) $\displaystyle\int \left|1-x^2\right|\,dx$; b) $\displaystyle\int e^{|x|}\,dx$; c) $\displaystyle\int |\cos x|\,dx,\ x\in[0,\pi]$.

# Odpowiedzi i wskazówki

**10.1 a)** $\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}+\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}-2\sqrt{x}+C$; **b)** $-\frac{5^{-x}}{\ln 5}+\frac{2^{-x}}{\ln 2}+C$; **c)** $\operatorname{tg} x-x+C$;
d) $-\left(e^{-x}+2x\right)+C$.

**10.2 a)** $2x\sin x+\left(2-x^2\right)\cos x+C$; **b)** $\frac{e^{2x}}{5}(2\sin x-\cos x)+C$; **c)** $\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)+C$;
**d)** $x\operatorname{tg} x+\ln|\cos x|+C$; **e)** $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$; **f)** $-e^{-3x}\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{9}\right)+C$;
**g)** $\frac{x}{\ln 3}(\ln x-1)+C$; **h)** $x\arccos^2 x-2\sqrt{1-x^2}\arccos x-2x+C$;
**i)** $\frac{x^2}{4}-\frac{x}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x+C$.

**10.3 a)** $\frac{1}{33}(3x-5)^{11}+C$; **b)** $\frac{1}{2}\arcsin 2x+C$; **c)** $\frac{1}{18}\left(5x^3+1\right)\sqrt[5]{5x^3+1}+C$;
**d)** $2\sqrt{x}-4\ln\left(2+\sqrt{x}\right)+C$; **e)** $\frac{1}{2}\ln^2 x+C$; **f)** $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln|x+1|+C$;
**g)** $\operatorname{arctg} e^x+C$; **h)** $\frac{5}{2}\ln(3-2\cos x)+C$; **i)** $-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+C$;
**j)** $\arcsin\frac{x-2}{2}+C$; **k)** $-\left(\frac{1}{96(x-1)^{96}}+\frac{3}{97(x-1)^{97}}+\frac{3}{98(x-1)^{98}}+\frac{1}{99(x-1)^{99}}\right)+C$;
**l)** $\left(x^2-1\right)e^{x^2}+C$.

**10.4 a)** $\begin{cases}\frac{x^3}{3}-x+C & \text{dla}\quad x<-1,\\ -\frac{x^3}{3}+x+\frac{4}{3}+C & \text{dla}\quad -1\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{x^3}{3}-x+\frac{8}{3}+C & \text{dla}\quad x>1;\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}-e^{-x}+C & \text{dla}\quad x<0,\\ e^x-2+C & \text{dla}\quad x\geqslant 0;\end{cases}$

c) $\begin{cases}\sin x+C & \text{dla}\quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right),\\ 2-\sin x+C & \text{dla}\quad x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right].\end{cases}$

# Jedenasty tydzień

**Całkowanie funkcji wymiernych (7.4). Całkowanie funkcji trygonometrycznych (7.5). Całkowanie funkcji z niewymiernościami (7.6).**

## Przykłady

- **Przykład 11.1**

Obliczyć podane całki z funkcji wymiernych:

a) $\int \frac{(x^2-5x+9)\,dx}{x^2+5x+6}$; b) $\int \frac{x\,dx}{(x^2+2)^2}$; c) $\int \frac{(x^3+x+1)\,dx}{x^4+x^2}$;

d) $\int \frac{x\,dx}{x^3+1}$; e) $\int \frac{dx}{x^4+4}$; f) $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$.

**Rozwiązanie**

a) Najpierw zauważmy, że

$$\frac{x^2-5x+9}{x^2+5x+6} = 1 + \frac{3-10x}{(x+2)(x+3)}.$$

Teraz funkcję wymierną $\frac{3-10x}{(x+2)(x+3)}$ rozkładamy na ułamki proste. Mamy

$$\frac{3-10x}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{(A+B)x+3A+2B}{(x+2)(x+3)}.$$

Współczynniki $A$ i $B$ spełniają zatem układ równań

$$\begin{cases} A+B &= -10, \\ 3A+2B &= \phantom{-1}3. \end{cases}$$

Stąd $A = 23$, $B = -33$. Tak więc przechodząc do całki otrzymamy

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2-5x+9}{x^2+5x+6}\,dx &= \int \left(1 + \frac{23}{x+2} - \frac{33}{x+3}\right) dx \\ &= \int dx + 23\int \frac{dx}{x+2} - 33\int \frac{dx}{x+3} \\ &= x + 23\ln|x+2| - 33\ln|x+3| + C. \end{aligned}$$

b) $$\int \frac{x\,dx}{(x^2+2)^2} \boxed{\begin{matrix} x^2+2=t \\ 2x\,dx = dt \end{matrix}} = \int \frac{\frac{1}{2}\,dt}{t^2} = -\frac{1}{2t} + C = -\frac{1}{2(x^2+2)} + C.$$

c) Najpierw zauważmy, że

$$\frac{x^3+x+1}{x^4+x^2} = \frac{x^3+x+1}{x^2(x^2+1)}.$$

Zatem rozkład na ułamki proste ma postać

$$\begin{aligned}\frac{x^3+x+1}{x^4+x^2} &= \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}\\ &= \frac{A\left(x^2+1\right)x+B\left(x^2+1\right)+(Cx+D)x^2}{x^2\left(x^2+1\right)}\\ &= \frac{(A+C)x^3+(D+B)x^2+Ax+B}{x^2\left(x^2+1\right)}.\end{aligned}$$

Tak więc szukane współczyniki spełniają układ równań postaci

$$\begin{cases} A+C &= 1\\ B+D &= 0\\ A &= 1\\ B &= 1.\end{cases}$$

Stąd $A=1$, $B=1$, $C=0$ i $D=-1$. Wracając do całki otrzymamy

$$\begin{aligned}\int\frac{x^3+x+1}{x^4+x^2}\,dx &= \int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx\\ &= \int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{x^2+1}=\ln|x|-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}x+C.\end{aligned}$$

d) Mianownik funkcji podcałkowej można przedstawić w postaci

$$x^3+1=(x+1)\left(x^2-x+1\right),$$

więc rozkład na ułamki proste jest w postaci

$$\frac{x}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}=\frac{(A+B)x^2+(B+C-A)x+A+C}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}.$$

Zatem szukane współczynniki spełniają układ równań

$$\begin{cases} A+B &= 0,\\ -A+B+C &= 1,\\ A+C &= 0.\end{cases}$$

Stąd otrzymamy $A=-\frac{1}{3}$, $B=\frac{1}{3}$, $C=\frac{1}{3}$. Tak więc mamy

$$\int\frac{x\,dx}{x^3+1}=\int\left(\frac{-\frac{1}{3}}{x+1}+\frac{\frac{1}{3}(x+1)}{x^2-x+1}\right)dx=-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{3}\int\frac{(x+1)\,dx}{x^2-x+1}.$$

Oczywiście

$$\int\frac{dx}{x+1}=\ln|x+1|+C.$$

Natomiast w przypadku drugiej całki zauważmy, że

$$\left(x^2-x+1\right)'=2x-1,$$

więc możemy napisać

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2x-1+3}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-1)\,dx}{x^2-x+1} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1}.$$

W pierwszej całce licznik jest pochodną mianownika, więc

$$\int \frac{(2x-1)\,dx}{x^2-x+1} = \ln\left|x^2-x+1\right| + C.$$

W przypadku drugiej, całki sprowadzając mianownik do postaci kanonicznej, otrzymamy

$$x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Zatem

$$\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{dx}{\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1\right)}$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} \;\boxed{\begin{array}{l}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} = t\\ \frac{2}{\sqrt{3}}dx = dt\end{array}}\; = \frac{4}{3}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,dt}{t^2+1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} t + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Ostatecznie uwzględniając otrzymane wyniki częściowe mamy

$$\int \frac{x\,dx}{x^3+1} = -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln\left|x^2-x+1\right| + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

e) Mianownik funkcji podcałkowej możemy przedstawić w postaci

$$x^4+4 = \left(x^2-2x+2\right)\left(x^2+2x+2\right).$$

Zatem rozkład na ułamki proste ma postać

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^4+4} &= \frac{Ax+B}{x^2-2x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}\\ &= \frac{(Ax+B)\left(x^2+2x+2\right)+(Cx+D)\left(x^2-2x+2\right)}{(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)}\\ &= \frac{(A+C)x^3+(B+2A+D-2C)x^2+(2B+2A-2D+2C)x+2B+2D}{(x^2-2x+2)(x^2-2x+2)}.\end{aligned}$$

Współczynniki $A$, $B$, $C$ i $D$ spełniają układ równań

$$\begin{cases} A+C &= 0\\ 2A+B-2C+D &= 0\\ 2A+2B+2C-2D &= 0\\ 2B+2D &= 1.\end{cases}$$

Stąd po rozwiązaniu powyższego układu otrzymujemy: $A = -\frac{1}{8}$, $B = \frac{1}{4}$, $C = \frac{1}{8}$, $D = \frac{1}{4}$.
Tak więc

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^4+4} &= \int \left( \frac{-\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}}{x^2-2x+2} + \frac{\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}}{x^2+2x+2} \right) dx \\ &= -\frac{1}{8}\int \frac{(x-2)\,dx}{x^2-2x+2} + \frac{1}{8}\int \frac{(x+2)\,dx}{x^2+2x+2}.\end{aligned}$$

Przekształcimy teraz licznik wyrażenia w pierwszej całce tak, aby otrzymać pochodną mianownika. Mamy

$$\int \frac{(x-2)\,dx}{x^2-2x+2} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-2-2)\,dx}{x^2-2x+2} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)\,dx}{x^2-2x+2} - \int \frac{dx}{x^2-2x+2}.$$

W przypadku pierwszej całki mamy

$$\int \frac{(2x-2)\,dx}{x^2-2x+2} = \ln\left|x^2-2x+2\right| + C.$$

W przypadku drugiej całki, sprowadzając mianownik do postaci kanonicznej, mamy $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$. Tak więc możemy napisać

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2-2x+2} &= \int \frac{dx}{(x-1)^2+1} \boxed{\begin{array}{l} x-1=t \\ dx=dt \end{array}} \\ &= \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}(x-1) + C.\end{aligned}$$

Zatem

$$\int \frac{(x-2)\,dx}{x^2-2x+2} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+2\right| - \operatorname{arctg}(x-1) + C.$$

Analogicznie postępując w przypadku całki $\int \frac{(x+2)\,dx}{x^2+2x+2}$ otrzymamy

$$\int \frac{(x+2)\,dx}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| + \operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

Ostatecznie mamy

$$\int \frac{dx}{x^4+4} =$$

$$= -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+2\right| - \operatorname{arctg}(x-1)\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| + \operatorname{arctg}(x+1)\right) + C$$

$$= \frac{1}{16}\left(\ln\left|\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2}\right| + 2\operatorname{arctg}(x+1) + 2\operatorname{arctg}(x-1)\right) + C.$$

f) Funkcja podcałkowa ma rozkład na ułamki proste postaci

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x(x+1)^2} &= \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}\\
&=\frac{Ax^2+2Ax+A+Bx^2+Bx+Cx}{x(x+1)^2}=\frac{(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A}{x(x+1)^2}.
\end{aligned}
$$

Zatem szukane współczynniki spełniają układ równań

$$
\begin{cases}
A+B &= 0\\
2A+B+C &= 0\\
A &= 1.
\end{cases}
$$

Stąd otrzymujemy $A=1$, $B=-1$ oraz $C=-1$. Tak więc

$$
\begin{aligned}
\int\frac{dx}{x(x+1)^2} &= \int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{(x+1)^2}\\
&=\ln|x|-\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+C=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+\frac{1}{x+1}+C.
\end{aligned}
$$

## • Przykład 11.2

Obliczyć podane całki z funkcji trygonometrycznych:

a) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}$; b) $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$;

c) $\displaystyle\int\frac{(2\sin x+3\cos x)\,dx}{\sin^2 x\cos x+2\cos^3 x}$; d) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2\cos x}$.

**Rozwiązanie**

a)
$$
\begin{aligned}
\int\frac{dx}{\sin x} &= \int\frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx=\int\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx\ \boxed{\begin{array}{l} t=\cos x\\ dt=-\sin x\,dx\end{array}}=-\int\frac{dt}{1-t^2}\\
&=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t+1}=\frac{1}{2}\ln|t-1|-\frac{1}{2}\ln|t+1|+C\\
&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.
\end{aligned}
$$

b)
$$
\begin{aligned}
\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}\ &\boxed{\begin{array}{ll} t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} & dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}\\[2mm] \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2} & \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\end{array}}=\int\frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\\
&=\int\frac{2dt}{2+2t}=\int\frac{dt}{1+t}=\ln|t+1|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right|+C.
\end{aligned}
$$

c) $$\int \frac{(2\sin x + 3\cos x)\,dx}{\sin^2 x\cos x + 2\cos^3 x} = \int \frac{2\dfrac{\sin x}{\cos x}+3}{\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+2}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} \boxed{\begin{array}{l} t=\operatorname{tg} x \\ dt=\dfrac{dx}{\cos^2 x}\end{array}}$$

$$= \int \frac{2t+3}{t^2+2}dt = \ln\left(t^2+2\right) + \frac{3\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}t}{2} + C$$

$$= \ln\left(\operatorname{tg}^2 x + 2\right) + \frac{3\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}\operatorname{tg} x}{2}\right) + C.$$

d) $$\int \frac{dx}{\sin^2 \cos x} \boxed{\begin{array}{l} t=\sin x,\ \cos x=\sqrt{1-t^2} \\ dx=\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\end{array}} = \int \frac{\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}}{t^2\sqrt{1-t^2}}$$

$$= \int \frac{dt}{t^2\left(1-t^2\right)} = \int \frac{-dt}{t^2(t-1)(t+1)}$$

$$= \int \left(\frac{1}{t^2} + \frac{\frac{1}{2}}{t+1} + \frac{-\frac{1}{2}}{t-1}\right) dt = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\ln|t+1| - \frac{1}{2}\ln|t-1| + C$$

$$= -\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C = -\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right| + C.$$

- **Przykład 11.3**

Obliczyć podane całki z funkcji niewymiernych:

a) $\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$; b) $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$; c) $\int \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$.

**Rozwiązanie**

a) Podstawiamy $x = 3\sin t$, gdzie $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. Wtedy $\sqrt{9-x^2} = 3\cos t$ oraz $dx = 3\cos t\,dt$. Dalej mamy

$$\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx = \int 9\sin^2 t\cdot 3\cos t\cdot 3\cos t\,dt = \frac{81}{4}\int \sin^2 2t\,dt$$

$$= \frac{81}{4}\int \frac{1-\cos 4t}{2}\,dt = \frac{81}{8}\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right) + C$$

$$= \frac{81}{8}\left[t - \cos t\left(\sin t - 2\sin^3 t\right)\right] + C$$

$$= \frac{81}{8}\left[\arcsin\frac{x}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{9-x^2}\left(\frac{x}{3} - \frac{2x^3}{27}\right)\right] + C.$$

b) Podstawiamy $x = 2\operatorname{sh} t$, gdzie $t \in \boldsymbol{R}$. Wtedy $\sqrt{x^2+4} = 2\operatorname{ch} t$ oraz $dx = 2\operatorname{ch} t\,dt$. Dalej mamy

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\operatorname{sh}^2 t} = -\frac{1}{4}\operatorname{cth} t + C = -\frac{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}}{4\operatorname{sh} t} + C = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + C.$$

c) Podstawiamy $x = \operatorname{ch} t$, gdzie $t \geqslant 0$. Wtedy $\sqrt{x^2-1} = \operatorname{sh} t$ oraz $dx = \operatorname{sh} t\, dt$. Dalej mamy

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx &= \int \frac{\operatorname{sh} t \cdot \operatorname{sh} t\, dt}{\operatorname{ch} t} = \int \frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t}\operatorname{ch} t\, dt \\ &= \int \frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{sh}^2 t + 1}\operatorname{ch} t\, dt \boxed{\begin{array}{c}\operatorname{sh} t = v \\ \operatorname{ch} t\, dt = dv\end{array}} = \int \frac{v^2\, dv}{v^2+1} = v - \operatorname{arctg} v + C \\ &= \operatorname{sh} t - \operatorname{arctg} \operatorname{sh} t + C = \sqrt{x^2-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} + C.\end{aligned}$$

# Zadania

## ○ Zadanie 11.1

Obliczyć podane całki z funkcji wymiernych:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+8}$; b) $\displaystyle\int \frac{2\,dx}{x^2+6x+18}$; c) $\displaystyle\int \frac{(5-4x)\,dx}{x^2-4x+20}$;

d) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^2+2x+5}$; e) $\displaystyle\int \frac{x(x+2)\,dx}{x^2+2x+2}$; f) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\,(x^2+4)}$;

g) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$; h) $\displaystyle\int \frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}\,dx$; i) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-4x}$;

j) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{1-x^4}$; k) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}$; l) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^8+x^6}$.

## ○ Zadanie 11.2

Obliczyć podane całki z funkcji trygonometrycznych:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$; b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$; c) $\displaystyle\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x + 5}$;

d) $\displaystyle\int \cos^4 x\,dx$; e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x}$; f) $\displaystyle\int \sin x \sin 3x\,dx$.

## ○ Zadanie 11.3

Obliczyć podane całki z funkcji niewymiernych:

a) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$; b) $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{25+x^2}}$; c) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-36}\,dx$; d) $\displaystyle\int \sqrt{3+x^2}\,dx$.

# Odpowiedzi i wskazówki

**11.1 a)** $\dfrac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{\sqrt{7}} + C$; **b)** $\dfrac{2}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x+3}{3} + C$;
**c)** $-2\ln\left(x^2-4x+20\right) - \dfrac{3}{4}\operatorname{arctg}\dfrac{x-2}{4} + C$; **d)** $x - \ln\left(x^2+2x+5\right) - \dfrac{3}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{2} + C$;
**e)** $x - 2\operatorname{arctg}(x+1) + C$; **f)** $\dfrac{1}{4}\ln|x| - \dfrac{1}{8}\ln\left(x^2+4\right) + C$;

g) $\frac{1}{12}\ln|x-1| - \frac{3}{4}\ln|x+3| + \frac{2}{3}\ln|x+2| + C;$

h) $\frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + \ln\left(2x^2+2x+1\right) + \operatorname{arctg}(2x+1) + C;$

i) $-\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{1}{8}\ln|x-2| + \frac{1}{8}\ln|x+2| + C;$

j) $-\frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right) + C;$

k) $\frac{16-21x-6x^2}{250(x-2)(x+3)^2} - \frac{3}{625}\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right| + C;$ l) $-\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} - \operatorname{arctg} x + C.$

**11.2** a) $\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + C;$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}}\right| + C = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right| + C;$

c) $-\frac{2}{3+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C;$

d) $\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C;$ e) $\frac{-1}{\cos x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C;$

f) $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x + C.$

**11.3** a) $-\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 2\arcsin\frac{x}{2} + C;$ b) $\frac{\sqrt{\left(25+x^2\right)^3}}{3} - 25\sqrt{25+x^2} + C;$

c) $\frac{x\sqrt{x^2-36}}{2} - 18\ln\left|x + \sqrt{x^2-36}\right| + C;$ d) $\frac{x}{2}\sqrt{3+x^2} + \frac{3}{2}\ln\left|\sqrt{3+x^2} + x\right| + C.$

# 8

# CAŁKI OZNACZONE

## Dwunasty tydzień

| |
|---|
| **Definicja i oznaczenia (8.1). Podstawowe twierdzenia (8.4). Metody obliczania całek oznaczonych (8.5). Własności całki oznaczonej (8.6).** |

## Przykłady

- **Przykład 12.1**

Korzystając z definicji oraz z faktu, że funkcje ciągłe są całkowalne obliczyć podane całki oznaczone:

a) $\int\limits_1^2 x\,dx$; b) $\int\limits_3^5 \frac{dx}{x}$; c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$; d) $\int\limits_0^1 2^x\,dx$.

Wskazówka. b) przedział całkowania podzielić tak, aby punkty podziału tworzyły ciąg geometryczny, c) zastosować wzór: $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha = \dfrac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

**Rozwiązanie**

a) Funkcja $f(x) = x$ jest całkowalna na przedziale $[a,b] = [1,2]$, więc możemy skorzystać ze wzoru

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)\right].$$

Zatem

$$\int\limits_1^2 x\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1\right) + \left(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n} + \frac{n(n+1)}{2n^2}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{n+1}{2n}\right] = \frac{3}{2}.$$

b) Funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest całkowalna na przedziale $[a, b] = [3, 5]$, więc podziałów przedziału całkowania oraz wyborów punktów pośrednich możemy dokonać dowolnie. Niech zatem $x_0 = 3, x_1 = 3q, x_2 = 3q^2, \ldots, x_{n-1} = 3q^{n-1}, x_n = 3q^n = 5$ będą punktami podziału $P_n$ odcinka $[3, 5]$. Wtedy $q = \sqrt[n]{\frac{5}{3}}$. Ponieważ odcinek $[x_{n-1}, x_n]$ jest najdłuższy, więc średnica $\delta(P_n)$ tego podziału jest równa $x_n - x_{n-1} = 3q^{n-1}(q-1)$. Oczywiście

$$\lim_{n\to\infty} \delta(P_n) = \lim_{n\to\infty} \left[ 3 \left( \sqrt[n]{\frac{5}{3}} - 1 \right) \sqrt[n]{\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}} \right] = 0.$$

Jako punkty pośrednie tego podziału przyjmujemy $x_i^* = x_i$, gdzie $1 \leqslant i \leqslant n$. Wtedy

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{\delta(P_n)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\sqrt[n]{\left(\frac{5}{3}\right)^{i+1}} - \sqrt[n]{\left(\frac{5}{3}\right)^{i}}}{\sqrt[n]{\left(\frac{5}{3}\right)^{i}}} \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left( \sqrt[n]{\frac{5}{3}} - 1 \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[ n \left( \sqrt[n]{\frac{5}{3}} - 1 \right) \right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln\frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

W ostatniej granicy wykorzystaliśmy równość $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$. Zatem

$$\int_3^5 \frac{1}{x}\,dx = \ln\frac{5}{3}.$$

c) Funkcja $f(x) = \sin x$ jest całkowalna na przedziale $[a, b] = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, więc możemy skorzystać z tego samego wzoru co w przykładzie a). Zatem

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx &= \lim_{n\to\infty} \left[ \frac{\pi}{2n} \sum_{i=1}^{n} \sin i\frac{\pi}{2n} \right] \overset{*}{=} \lim_{n\to\infty} \left[ \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{\sin\frac{n}{2}\cdot\frac{\pi}{2n} \sin\frac{n+1}{2}\cdot\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{4n}} \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[ \frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}} \cdot 2\sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\pi\frac{n+1}{4n} \right] \overset{**}{=} 1 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.
\end{aligned}$$

W miejscu oznaczonym przez $*$ korzystaliśmy z tożsamości podanej we wskazówce, a w miejscu oznaczonym przez $**$ korzystaliśmy z równości $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ oraz z ciągłości funkcji sinus.

d) Funkcja $f(x) = 2^x$ jest całkowalna na przedziale $[a, b] = [0, 1]$. Możemy więc skorzystać ze wzoru podanego w przykładzie a). Mamy

$$\int_0^1 2^x\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 2^{\frac{i}{n}}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt[n]{2}\right)^i\right]$$

$$\overset{*}{=} \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt[n]{2}}{n}\cdot\frac{\left(\sqrt[n]{2}\right)^n-1}{\sqrt[n]{2}-1}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2}}{\dfrac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\ln 2} = \log_2 e.$$

W miejscu oznaczonym $(*)$ wykorzystaliśmy wzór na sumę $k$ wyrazów ciągu geometrycznego

$$S_k = a_1\frac{q^k-1}{q-1}.$$

## • Przykład 12.2

Korzystając z twierdzenia Newtona-Leibniza obliczyć podane całki:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(x^3-x+1\right)dx$; b) $\displaystyle\int_0^1\left(x+\sqrt[3]{x^2}\right)dx$; c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx$; d) $\displaystyle\int_0^2\frac{3x-1}{3x+1}\,dx$.

**Rozwiązanie**

a) Mamy $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(x^3-x+1\right)dx = \left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{1} = 2.$

b) Mamy $\displaystyle\int_0^1\left(x+\sqrt[3]{x^2}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2}+\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}\right]_0^1 = \frac{11}{10}.$

c) Mamy $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx = \left[\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}.$

d) Mamy $\displaystyle\int_0^2\frac{3x-1}{3x+1}\,dx = \left[x-\frac{2}{3}\ln(3x+1)\right]_0^2 = 2-\frac{2}{3}\ln 7.$

## • Przykład 12.3

Korzystając z definicji całki oznaczonej uzasadnić podane równości:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3} = \frac{1}{3}$;

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right) = \frac{\pi}{4}$;

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right) = \ln 2$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)\right]=2;$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\left(\sqrt[n]{e^2}+\sqrt[n]{e^4}+\ldots+\sqrt[n]{e^{2n}}\right)\right]=\frac{e^2-1}{2}.$

**Rozwiązanie**

W zadaniu wykorzystamy wzór podany na wstępie **Przykładu 12.1 a)**.

a) Mamy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\right].$$

Zatem w podanym wzorze możemy przyjąć $[a,b]=[0,1]$ oraz $f(x)=x^2$. Wzór ten można stosować, bo funkcja $f(x)=x^2$ jest ciągła, a co za tym idzie także całkowalna na $[0,1]$. Stąd

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}=\int_0^1 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}.$$

b) Mamy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{n^2}{n^2+i^2}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\right].$$

Zatem w podanym wzorze możemy przyjąć $[a,b]=[0,1]$ oraz $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$. Wzór ten można stosować, bo funkcja $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ jest ciągła na przedziale $[0,1]$. Stąd

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=[\operatorname{arctg}x]_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

c) Mamy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n+i}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\right].$$

Zatem w podanym wzorze możemy przyjąć $[a,b]=[0,1]$ oraz $f(x)=\frac{1}{1+x}$. Wzór ten można stosować, bo funkcja $f(x)=\frac{1}{1+x}$ jest ciągła na przedziale $[0,1]$. Stąd

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=[\ln(1+x)]_0^1=\ln 2.$$

d) Mamy

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\left(i\frac{\pi}{n}\right)\right].$$

Zatem w podanym wzorze możemy przyjąć $[a,b]=[0,\pi]$ oraz $f(x)=\sin x$. Wzór ten można stosować, bo funkcja $f(x)=\sin x$ jest ciągła na przedziale $[0,\pi]$. Stąd

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)\right]=\int\limits_0^{\pi}\sin x\,dx=[-\cos x]_0^{\pi}=2.$$

e) Rozumując podobnie jak w poprzednich przykładach mamy

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\left(\sqrt[n]{e^2}+\sqrt[n]{e^4}+\ldots+\sqrt[n]{e^{2n}}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{2\frac{i}{n}}\right]=\int\limits_0^1 e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}\left[e^{2x}\right]_0^1=\frac{e^2-1}{2}.$$

## • Przykład 12.4

Obliczyć podane całki oznaczone dokonując wskazanych podstawień:

a) $\displaystyle\int\limits_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{x}},\quad x=t^2;$ b) $\displaystyle\int\limits_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx,\quad e^x-1=z^2.$

**Rozwiązanie**

a) $$\int\limits_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{x}}\ \boxed{\begin{array}{l}x=t^2,\ t\geqslant 0\\ x(0)=0,\ x(2)=4\\ dx=2t\,dt\end{array}}$$

$$=\int\limits_0^2\frac{2t\,dt}{1+t}=2\int\limits_0^2\frac{t+1-1}{t+1}\,dt=2\int\limits_0^2\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=2\int\limits_0^2 dt-2\int\limits_0^2\frac{1}{t+1}\,dt=2\left[t-\ln(t+1)\right]_0^2=2(2-\ln 3).$$

b) $$\int\limits_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx\ \boxed{\begin{array}{l}e^x-1=z^2,\ z\geqslant 0\\ e^0-1=0,\ e^{\ln 2}-1=1\\ e^x dx=2z\,dz,\ dx=\dfrac{2z}{1+z^2}\,dz\end{array}}$$

$$=\int\limits_0^1 z\frac{2z\,dz}{1+z^2}=2\int\limits_0^1\frac{z^2+1-1}{1+z^2}\,dz$$

$$=2\int\limits_0^1\left(1-\frac{1}{1+z^2}\right)dz=2\int\limits_0^1 dz-2\int\limits_0^1\frac{dz}{1+z^2}$$

$$=\left[2z\right]_0^1-2\,\text{arctg}\left[z\right]_0^1=2-2\,\text{arctg}\,1=2-2\frac{\pi}{4}=2-\frac{\pi}{2}.$$

## Przykład 12.5

Metodą całkowania przez części obliczyć podane całki oznaczone:

a) $\int\limits_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx$; b) $\int\limits_0^{\pi} x^2 \cos x \, dx$.

**Rozwiązanie**

a) $$\int\limits_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx \quad \boxed{\begin{array}{ll} f(x) = \operatorname{arctg} x & g'(x) = x \\ f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} & g(x) = \dfrac{x^2}{2} \end{array}}$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx + \int\limits_0^1 \frac{1}{2}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

b) $$\int\limits_0^{\pi} x^2 \cos x \, dx \quad \boxed{\begin{array}{ll} f(x) = x^2 & g'(x) = \cos x \\ f'(x) = 2x & g(x) = \sin x \end{array}}$$

$$= \left[x^2 \sin x\right]_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} 2x \sin x \, dx$$

$$= -2\int\limits_0^{\pi} x \sin x \, dx \quad \boxed{\begin{array}{ll} f(x) = x & g'(x) = \sin x \\ f'(x) = 1 & g(x) = -\cos x \end{array}}$$

$$= -2\left(\left[-x\cos x\right]_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi} \cos x \, dx\right) = -2\left(-\pi(-1) + \left[\sin x\right]_0^{\pi}\right) = -2\pi.$$

## Przykład 12.6

Obliczyć podane całki oznaczone:

a) $\int\limits_0^3 \operatorname{sgn}\left(x - x^3\right) dx$; b) $\int\limits_0^2 E\left(e^x\right) dx$; c) $\int\limits_0^4 \sqrt{x^2 - 2x + 1}\, dx$.

**Rozwiązanie**

a) Zauważmy, że $x - x^3 = 0$, gdy $x = -1$ lub $x = 0$ lub $x = 1$. Zatem $x - x^3 > 0$ dla $x < -1$ lub $0 < x < 1$ oraz $x - x^3 < 0$ dla $-1 < x < 0$ lub $x > 1$. Tak więc, wobec definicji funkcji signum, mamy

$$\operatorname{sgn}\left(x - x^3\right) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x < -1,\ 0 < x < 1, \\ -1 & \text{dla} \quad -1 < x < 0,\ x > 1, \\ 0 & \text{dla} \quad x = -1,\ x = 0,\ x = 1. \end{cases}$$

Korzystając teraz z własności addytywności całki względem przedziałów całkowania mamy

$$\int_0^3 \operatorname{sgn}\left(x-x^3\right)\,dx = \int_0^1 \operatorname{sgn}\left(x-x^3\right)\,dx + \int_1^3 \operatorname{sgn}\left(x-x^3\right)\,dx$$

$$= \int_0^1 dx + \int_1^3 (-1)\,dx = 1-2=-1.$$

b) Zauważmy, że $e^x$ jest funkcją rosnącą oraz, że $1 \leqslant e^x \leqslant e^2$ dla $0 \leqslant x \leqslant 2$. Zatem na przedziale $[0,2]$ mamy $E\left(e^x\right)=1$ dla $0 \leqslant x < \ln 2$; $E\left(e^x\right)=2$ dla $\ln 2 \leqslant x < \ln 3$; $E\left(e^x\right)=3$ dla $\ln 3 \leqslant x < \ln 4$; $E\left(e^x\right)=4$ dla $\ln 4 \leqslant x < \ln 5$; $E\left(e^x\right)=5$ dla $\ln 5 \leqslant x < \ln 6$; $E\left(e^x\right)=6$ dla $\ln 6 \leqslant x < \ln 7$; $E\left(e^x\right)=7$ dla $\ln 7 \leqslant x \leqslant 2$. Teraz korzystając z własności addytywności całki względem przedziału całkowania mamy

$$\int_0^2 E\left(e^x\right)dx = \int_0^{\ln 2} E\left(e^x\right)dx + \int_{\ln 2}^{\ln 3} E\left(e^x\right)dx + \int_{\ln 3}^{\ln 4} E\left(e^x\right)dx + \int_{\ln 4}^{\ln 5} E\left(e^x\right)dx$$

$$+ \int_{\ln 5}^{\ln 6} E\left(e^x\right)dx + \int_{\ln 6}^{\ln 7} E\left(e^x\right)dx + \int_{\ln 7}^{2} E\left(e^x\right)dx$$

$$= \int_0^{\ln 2} 1\,dx + \int_{\ln 2}^{\ln 3} 2\,dx + \int_{\ln 3}^{\ln 4} 3\,dx + \int_{\ln 4}^{\ln 5} 4\,dx + \int_{\ln 5}^{\ln 6} 5\,dx + \int_{\ln 6}^{\ln 7} 6\,dx + \int_{\ln 7}^{2} 7\,dx$$

$$= \ln 2 + 2(\ln 3-\ln 2) + 3(\ln 4-\ln 3) + 4(\ln 5-\ln 4) + 5(\ln 6-\ln 5)$$

$$+ 6(\ln 7-\ln 6) + 7(2-\ln 7)$$

$$= 14-\ln 7! = 14-\ln 5040.$$

c) Zauważmy najpierw, że $\sqrt{x^2-2x+1}=|x-1|$. Korzystając teraz z określenia wartości bezwzględnej otrzymamy

$$\int_0^4 \sqrt{x^2-2x+1}\,dx = \int_0^4 |x-1|\,dx = \int_0^1 |x-1|\,dx + \int_1^4 |x-1|\,dx$$

$$= \int_0^1 [-(x-1)]\,dx + \int_1^4 (x-1)\,dx = \left[-\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^4 = 5.$$

- **Przykład 12.7**

Oszacować podane całki:

a) $\displaystyle\int_0^{100} \frac{e^{-x}\,dx}{x+100}$; b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^9\,dx}{\sqrt{1+x}}$; c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x}$.

**Rozwiązanie**

a) Zauważmy, że dla każdego $x \in [0, 100]$ prawdziwe jest oszacowanie

$$\frac{e^{-100}}{100+100} \leqslant \frac{e^{-x}}{x+100} \leqslant \frac{e^{0}}{0+100}.$$

Zatem

$$\frac{e^{-100}}{200}(100-0) \leqslant \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100}\,dx \leqslant \frac{1}{100}(100-0),$$

czyli otrzymaliśmy oszacowanie

$$\frac{1}{2e^{100}} \leqslant \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100}\,dx \leqslant 1.$$

b) Dla każdego $x \in [0, 1]$ prawdziwe są nierówności

$$\frac{x^9}{\sqrt{1+1}} \leqslant \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} \leqslant \frac{x^9}{\sqrt{1+0}}.$$

Zatem

$$\frac{1}{10\sqrt{2}} \leqslant \int_0^{1} \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,dx \leqslant \frac{1}{10}.$$

c) Zauważmy najpierw, że dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$ mamy $7 \leqslant 10 + 3\cos x \leqslant 13$, stąd

$$\frac{1}{13} \leqslant \frac{1}{10+3\cos x} \leqslant \frac{1}{7}.$$

Zatem dla rozważanej całki prawdziwe jest oszacowanie

$$\frac{2\pi}{13} \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{1}{10+3\cos x}\,dx \leqslant \frac{2\pi}{7}.$$

# Zadania

## ○ Zadanie 12.1

Korzystając z definicji oraz z faktu, że funkcje ciągłe są całkowalne obliczyć podane całki oznaczone:

$$\text{a) } \int_2^3 x^2\,dx; \quad \text{b) } \int_{-1}^2 e^x\,dx; \quad \text{c) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx; \quad \text{d) } \int_0^1 \frac{dx}{3^x}; \quad \text{e*) } \int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Wskazówka. Ad a). Zastosować wzory

$$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad 1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

Ad b), d), e*). Zastosować wzór na sumę ciągu geometrycznego

$$a + aq + \ldots + aq^{n-1} = a\frac{1-q^n}{1-q}$$

oraz wykorzystać równość $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h} = 1$;

Ad c). Zastosować wzór

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha = \frac{\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

### ○ Zadanie 12.2

Korzystając z twierdzenia Newtona-Leibniza obliczyć podane całki:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} x\left(1+x^3\right)dx$; b) $\displaystyle\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^2}+x^{-4}\right)dx$; c) $\displaystyle\int_{1}^{e} x\ln x\,dx$;

d) $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi}(\sin x+\cos^2 x)\,dx$; e) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,dx$; f) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{x^3\,dx}{x^8+1}$.

### ○ Zadanie 12.3

Korzystając z definicji całki oznaczonej uzasadnić podane równości:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^4} = \frac{1}{4}$;

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\left(\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+\ldots+\cos\frac{n\pi}{2n}\right)\right] = \frac{2}{\pi}$;

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+n}\right) = \ln\frac{4}{3}$;

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right) = \frac{\pi}{6}$;

e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+n)^2}\right)\right] = \frac{1}{2}$.

### ○ Zadanie 12.4

Obliczyć podane całki oznaczone dokonując wskazanych podstawień:

a) $\displaystyle\int_{0}^{1} x\sqrt{1+x}\,dx,\ \sqrt{1+x}=t$; b) $\displaystyle\int_{0}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx,\ x=3\sin t$.

### ○ Zadanie 12.5

Metodą całkowania przez części obliczyć podane całki oznaczone:

a) $\displaystyle\int_{1}^{2}\ln x\,dx$; b) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2x\,dx$; c) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} e^x\cos^2 x\,dx$; d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} xe^{2x}\,dx$.

○ **Zadanie 12.6**
Obliczyć podane całki oznaczone:

a) $\int\limits_{-2}^{2} \operatorname{sgn}\left(x-x^2\right)\, dx$; b) $\int\limits_{1}^{3} xE(x)\, dx$;

c) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} E(\ln x)\, dx$; d) $\int\limits_{0}^{2} \sqrt{x^4-4x^2+4}\, dx$.

○ **Zadanie 12.7**
Oszacować podane całki:

a) $\int\limits_{0}^{1} e^x \sqrt[6]{1+x^3}\, dx$; b) $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{dx}{100-2\sin^2 x}$; c) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{\cos x}{2+x^2}\, dx$; d*) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

# Odpowiedzi i wskazówki

**12.1 a)** $\frac{19}{3}$; **b)** $e^2-\frac{1}{e}$; **c)** 1; **d)** $\frac{3}{3\ln 3}$; **e*)** 4.

**12.2 a)** $\frac{81}{10}$; **b)** $-\frac{1}{3}$; **c)** $\frac{e^2+1}{4}$; **d)** $\frac{\pi}{2}-2$; **e)** $\frac{e^\pi-2}{5}$; **f)** $\frac{\pi}{6}$.

**12.3** Wskazówka. Zobacz **Przykład 12.3**.
**a)** przyjąć $f(x)=x^3$ oraz $[a,b]=[0,1]$; **b)** przyjąć $f(x)=\cos\frac{\pi x}{2}$ oraz $[a,b]=[0,1]$;
**c)** przyjąć $f(x)=\frac{1}{3+x}$ oraz $[a,b]=[0,1]$; **d)** przyjąć $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ oraz $[a,b]=[0,1]$;
**e)** przyjąć $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$ oraz $[a,b]=[0,1]$.

**12.4 a)** $\frac{4\left(\sqrt{2}+1\right)}{15}$; **b)** $\frac{9\pi}{4}$.

**12.5 a)** $\ln 4-1$; **b)** $\frac{1}{4}$; **c)** $\frac{3\left(e^\pi-1\right)}{5}$; **d)** $\frac{e^2+3e^{-2}}{4}$.

**12.6 a)** $-2$; **b)** $\frac{13}{2}$; **c)** $-\frac{1}{2}$; **d)** $\frac{8\sqrt{2}-4}{3}$.

**12.7** W odpowiedziach $m$ oznacza oszacowanie dolne, a $M$ oszacowanie górne rozważanych całek.
**a)** $m=e-1$, $M=\sqrt[6]{2}(e-1)$; **b)** $m=\frac{\pi}{100}$, $M=\frac{\pi}{98}$; **c)** $m=\frac{\sqrt{2}}{3}$, $M=1$; **d*)** $m=\frac{1}{2}$, $M=\frac{\pi}{6}$.

# Trzynasty tydzień

**Własności całki oznaczonej (8.6). Twierdzenia podstawowe rachunku całkowego (8.7).**

## Przykłady

### Przykład 13.1

Obliczyć wartości średnie podanych funkcji na wskazanych przedziałach:
a) $f(x) = \sin^3 x$, $[0, \pi]$; b) $g(x) = e^x$, $[-2, 2]$.

**Rozwiązanie**
a) Wartość średnia funkcji $f$ na przedziale $[a, b]$ wyraża się wzorem

$$f_{śr} \overset{def}{=} \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\, dx.$$

Zatem wartość średnia funkcji $f(x) = \sin^3 x$ na przedziale $[0, \pi]$ jest równa

$$f_{śr} = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi \sin^3 x\ dx.$$

Ponieważ

$$\int \sin^3 x\, dx = \int \sin x \left(1 - \cos^2 x\right) dx \boxed{\begin{array}{c} \cos x = u \\ -\sin x\, dx = du \end{array}}$$
$$= -\int \left(1 - u^2\right) du = -u + \frac{u^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C,$$

więc szukana wartość średnia jest równa

$$f_{śr} = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi \sin^3 x\ dx = \frac{1}{\pi}\left[-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}\right]_0^\pi = \frac{4}{3\pi}.$$

b) Wartość średnia funkcji $g(x) = e^x$ na przedziale $[-2, 2]$ jest równa

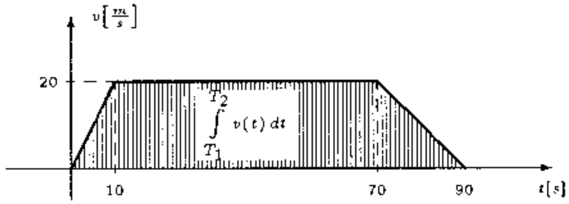
$$g_{śr} = \frac{1}{2-(-2)} \int\limits_{-2}^2 e^x\ dx = \frac{1}{4}\left[e^x\right]_{-2}^2 = \frac{e^4 - 1}{4e^2}.$$

### Przykład 13.2

Samochód od chwili startu poruszał się ruchem jednostajnie przyśpieszonym z przyśpieszeniem $a_1 = 2\ \mathrm{m/s^2}$. Po $t_1 = 10\ \mathrm{s}$ zaczął poruszać się ze stałą szybkością. Po dalszych $t_2 = 60\ \mathrm{s}$ zaczął hamować z opóźnieniem $a_2 = 1\ \mathrm{m/s^2}$ aż do zatrzymania. Obliczyć średnią szybkość tego samochodu.

**Rozwiązanie**
Szybkość w ruchu jednostajnie przyspieszonym (opóźnionym) z przyspieszeniem (opóźnieniem) $a$ rozpoczynającym się z szybkością początkową $v_0$ jest określona wzorem $v(t) = v_0 + at$ $(v(t) = v_0 - at)$. W rozważanym przypadku mamy

$$v(t) = \begin{cases} 2t & \text{dla } 0 \leqslant t \leqslant 10, \\ 20 & \text{dla } 10 < t \leqslant 70, \\ 90 - t & \text{dla } 70 < t \leqslant 90. \end{cases}$$




Szybkość średnią obliczamy ze wzoru

$$\begin{aligned} v_{\text{śr}} &= \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} v(t)\,dt = \frac{1}{90} \int_0^{90} v(t)\,dt \\ &= \frac{1}{90} \left[ \int_0^{10} 2t\ dt + \int_{10}^{70} 20\,dt + \int_{70}^{90} (90 - t)\,dt \right] = \frac{1500}{90} = \frac{50}{3} \approx 16,7 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

- **Przykład 13.3**

Pociąg jadąc ze zmienną szybkością przejechał 400 km w czasie 4 godz. Uzasadnić, że w pewnej chwili szybkość pociągu wynosiła dokładnie 100 km/godz.

**Rozwiązanie**
Niech $s(t)$ oznacza drogę przebytą przez pociąg w czasie $t$. Z warunków zadania mamy $s(0) = 0$, $s(4) = 400$. Szybkość pociągu w chwili $t$ jest równa $s'(t)$. Więc

$$\int_0^4 v(t)\ dt = \int_0^4 s'(t)\ dt = s(4) - s(0) = 400.$$

Z drugiej strony, wobec twierdzenia całkowego o wartości średniej, mamy

$$\int_0^4 v(t)\ dt = v(c)(4 - 0),$$

gdzie $c \in (0, 4)$. Porównując otrzymane wyniki mamy $4v(c) = 400$, czyli $v(c) = 100$. Oznacza to, że w pewnej chwili $c$ szybkość pociągu była równa dokładnie 100 km/godz.

- **Przykład 13.4**

Wykorzystując własności całek z funkcji parzystych lub nieparzystych uzasadnić podane równości:

a) $\displaystyle\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx = 0$; b) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{2x^5-x^3+x}{x^2+1}\,dx = 0$; c) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x\operatorname{tg}^3 x\,dx = 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} x\operatorname{tg}^3 x\,dx$.

**Rozwiązanie**

a) Wystarczy uzasadnić, że funkcja podcałkowa $f(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ jest nieparzysta. Rzeczywiście dla $x \in \boldsymbol{R}$ mamy $-x \in \boldsymbol{R}$ oraz

$$f(-x) = \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = \frac{\dfrac{1}{e^x}-1}{\dfrac{1}{e^x+1}} = -\frac{e^x-1}{e^x+1} = -f(x).$$

Zatem $\displaystyle\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx = 0$.

b) Wystarczy uzasadnić, że funkcja podcałkowa $f(x) = \dfrac{2x^5-x^3+x}{x^2+1}$ jest nieparzysta. Rzeczywiście dla $x \in \boldsymbol{R}$ mamy $-x \in \boldsymbol{R}$ oraz

$$f(-x) = \frac{2(-x)^5-(-x)^3+(-x)}{(-x)^2+1} = -\frac{2x^5-x^3+x}{x^2+1} = -f(x).$$

Zatem $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{2x^5-x^3+x}{x^2+1}\,dx = 0$.

c) Wystarczy pokazać, że funkcja podcałkowa $f(x) = x\operatorname{tg}^3 x$ jest parzysta. Rzeczywiście dla $x \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ mamy $-x \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ oraz

$$f(-x) = (-x)\operatorname{tg}^3(-x) = x\operatorname{tg}^3 x = f(x).$$

Stąd

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x\operatorname{tg}^3 x\,dx = 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} x\operatorname{tg}^3 x\,dx.$$

## • Przykład 13.5

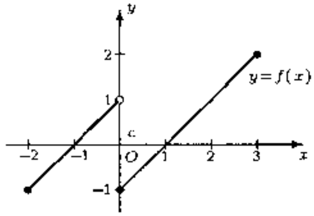
Dla podanych funkcji $f$ całkowalnych na przedziale $[a,b]$ znaleźć funkcje górnej granicy całkowania $F(x) = \displaystyle\int\limits_{c}^{x} f(t)\,dt$, gdzie $c \in [a,b]$. Naszkicować wykresy funkcji $f$ i $F$.

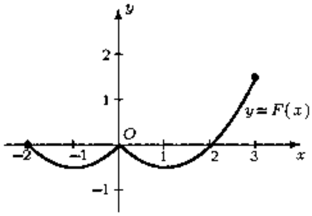
a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla } -2 \leqslant x < 0, \\ x-1 & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 3, \end{cases}$ $[a,b] = [-2,3]$, $c = 0$;

b) $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{dla } 1 < x \leqslant 2, \\ (2-x)^2 & \text{dla } 2 < x \leqslant 3, \end{cases}$ $[a,b] = [0,3]$, $c = 0$.

**Rozwiązanie**
a) Mamy

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x (t+1)\,dt & \text{dla } -2\leqslant x<0,\\[2ex] \displaystyle\int_0^x (t-1)\,dt & \text{dla } 0\leqslant x\leqslant 3\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+x & \text{dla } -2\leqslant x<0,\\[1ex] \dfrac{x^2}{2}-x & \text{dla } 0\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$$

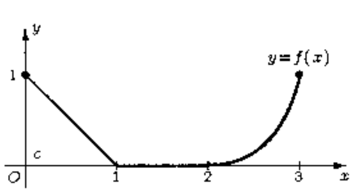


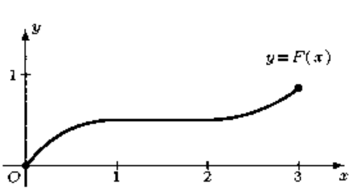



b) Mamy

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x (1-t)\,dt & \text{dla } 0\leqslant x\leqslant 1,\\[2ex] \displaystyle\int_0^1 (1-t)\,dt+\int_1^x 0\,dt & \text{dla } 1<x\leqslant 2,\\[2ex] \displaystyle\int_0^1 (1-t)\,dt+\int_1^2 0\,dt+\int_2^x (2-t)^2\,dt & \text{dla } 2<x\leqslant 3\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x-\dfrac{x^2}{2} & \text{dla } 0\leqslant x\leqslant 1,\\[1ex] \dfrac{1}{2} & \text{dla } 1<x\leqslant 2,\\[1ex] \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}(x-2)^3 & \text{dla } 2<x\leqslant 3.\end{cases}$$






# Zadania

## ○ Zadanie 13.1

Obliczyć wartości średnie podanych funkcji na wskazanych przedziałach:

a) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, $[0,2]$; b) $g(x) = \cos x$, $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$;

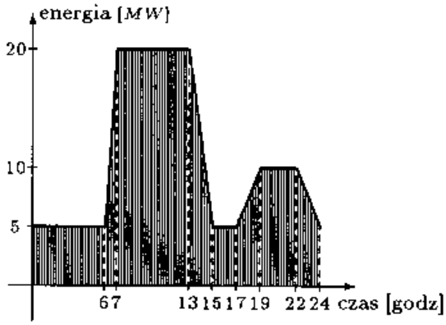
c) $h(x) = x\sin x$, $[0,\pi]$; d) $p(x) = x\sqrt{1-x^2}$, $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

## ○ Zadanie 13.2

Kamień rzucono z wysokości $h = 2$ m pionowo do góry z szybkością początkową $v_0 = 5$ m/s. Obliczyć średnią szybkość kamienia w czasie ruchu (od momentu wyrzucenia do momentu upadku na ziemię). Nie uwzględniać oporu powietrza, przyjąć $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.

## ○ Zadanie 13.3

Zapotrzebowanie na energię elektryczną w Polsce 13 kwietnia 2000 r. przedstawiono na wykresie. Obliczyć średnie zapotrzebowanie na energię w tym dniu.




## ○ Zadanie 13.4

Wykorzystując własności całek z funkcji parzystych lub nieparzystych uzasadnić podane równości:

a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2}\sin x\,dx = 0$; b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^5\,dx}{\sqrt{3-x^2}} = 0$;

c) $\displaystyle\int_{-4}^{4} \sqrt{x^2+1}\cos x\,dx = 2\int_{0}^{4} \sqrt{x^2+1}\cos x\,dx$.

## ○ Zadanie 13.5

Dla podanych funkcji $f$ całkowalnych na przedziale $[a,b]$, znaleźć funkcje górnej granicy całkowania

$$F(x) = \int_{c}^{x} f(t)\,dt, \quad \text{gdzie} \quad c \in [a,b].$$

Naszkicować wykresy funkcji $f$ i $F$.

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ \dfrac{3x}{2} & \text{dla } 0 < x \leqslant 2, \end{cases}$ $[a,b] = [-1,2]$, $c = -1$;

b) $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 2x-4 & \text{dla } 2 < x \leqslant 3, \end{cases}$ $[a,b] = [0,3]$, $c = 1$.

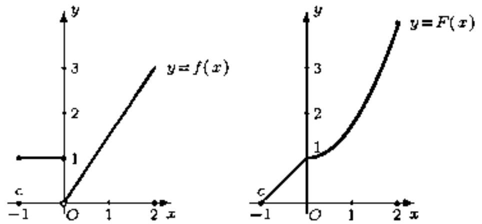
## Odpowiedzi i wskazówki

**13.1** a) $f_{\text{śr}} = \dfrac{\ln 5}{4}$; b) $g_{\text{śr}} = \dfrac{2}{\pi}$; c) $h_{\text{śr}} = 1$; d) $p_{\text{śr}} = \dfrac{2}{3}\left(1 - \dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right)$.

**13.2** $v_{\text{śr}} = \dfrac{45}{5+\sqrt{65}} \approx 3.445 \left[\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right]$.

**13.3** $E_{\text{śr}} = \dfrac{257.5}{24} \approx 10.73$ [MW].

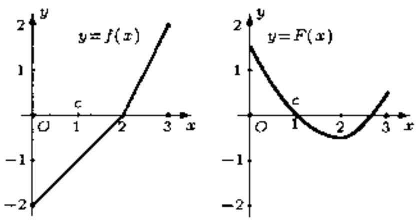
**13.5** a)




$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ \dfrac{3x}{2} & \text{dla } 0 < x \leqslant 2, \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1 + \dfrac{3}{4}x^2 & \text{dla } 0 < x \leqslant 2; \end{cases}$$

b)




$$f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 2x-4 & \text{dla } 2 < x \leqslant 3, \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + \dfrac{3}{2} & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ x^2 - 4x + \dfrac{7}{2} & \text{dla } 2 < x \leqslant 3. \end{cases}$$

# 9

# ZASTOSOWANIA CAŁEK OZNACZONYCH

## Czternasty tydzień

**Zastosowania w geometrii (9.1). Zastosowania w fizyce (9.2).**

### Przykłady

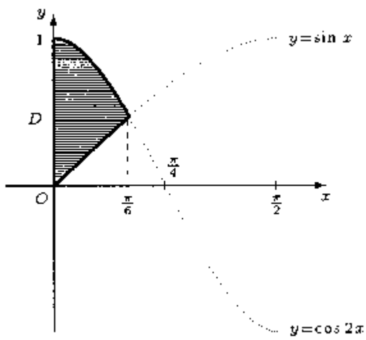
- **Przykład 14.1**

a) Obliczyć pole obszaru $D$ ograniczonego wykresami funkcji $y = \sin x$, $y = \cos 2x$ oraz osią $Oy \, (x \geqslant 0)$;

b) Obliczyć pole obszau $D$ ograniczonego parabolami $y = x^2$, $y = 2x^2$ oraz prostą $y = 8 \, (x \geqslant 0)$;

c) Obliczyć pole obszaru ograniczonego elipsą $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, gdzie $a, b > 0$.

**Rozwiązanie**




a) Współrzędna punktu przecięcia krzywych $y = \sin x$, $y = \cos 2x$ jest najmniejszym dodatnim rozwiązaniem równania $\sin x = \cos 2x$. Stąd $x = \dfrac{\pi}{6}$. Rozważany obszar jest zatem określony przez nierówności:

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6}, \quad \sin x \leqslant x \leqslant \cos 2x.$$

Pole tego obszaru wyraża się wzorem

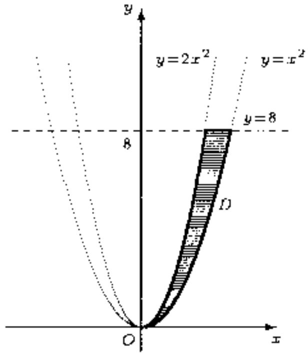
$$|D| = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x - \sin x) \, dx = \left[ \frac{1}{2} \sin 2x + \cos x \right]_{0}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{3\sqrt{3}}{4} - 1.$$

b) Przyjmując $y$ za zmienną niezależną rozważany obszar można opisać przez nierówności:

$$0 \leqslant y \leqslant 8, \quad \sqrt{\frac{y}{2}} \leqslant x \leqslant \sqrt{y}.$$

Pole tego obszaru wyraża się wzorem

$$|D| = \int_0^8 \left(\sqrt{y} - \sqrt{\frac{y}{2}}\right) dy$$
$$= \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \int_0^8 \sqrt{y}\, dy$$
$$= \frac{2-\sqrt{2}}{3} \left[\sqrt{y^3}\right]_0^8 = \frac{2-\sqrt{2}}{3} \cdot 16\sqrt{2}$$
$$= \frac{32\left(\sqrt{2}-1\right)}{3}.$$

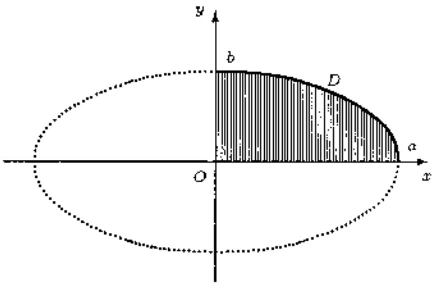



c) Ze względu na symetrię elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

względem obu osi wystarczy obliczyć pole ograniczone osią $Ox$, osią $Oy$ oraz łukiem elipsy $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ gdzie $0 \leqslant x \leqslant a$ i otrzymany wynik pomnożyć przez 4. Zatem szukane pole dane jest wzorem:

$$|D| = 4 \cdot \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$




Wykorzystując podstawienie $x = a \sin t$ w całce nieoznaczonej otrzymamy

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

Tak więc

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}\right]_0^a = \frac{a^2}{2} \arcsin 1 = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Pole elipsy wyraża się zatem wzorem $|D| = 4 \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{\pi a^2}{4} = \pi ab.$

- **Przykład 14.2**

Obliczyć długości łuków podanych krzywych:

a) $y = \sqrt{1-x^2}$, gdzie $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$; b) $y = \ln x$, gdzie $x \in \left[\sqrt{3}, 2\sqrt{2}\right]$.

**Rozwiązanie**

a) Długość krzywej $y = y(x)$, gdzie $x \in [a, b]$, wyraża się wzorem

$$|\Gamma| = \int\limits_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Dla funkcji $y(x) = \sqrt{1-x^2}$ mamy $y'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$. Zatem

$$|\Gamma| = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\, dx = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \Big[\arcsin x\Big]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6}.$$

b) Ponieważ $y'(x) = \dfrac{1}{x}$, więc szukana długość łuku krzywej dana jest wzorem

$$\int\limits_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}\, dx = \int\limits_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{1}{|x|}\sqrt{x^2+1}\, dx = \int\limits_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\, dx.$$

Jeżeli teraz w całce $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\, dx$ dokonamy podstawienia $x = \operatorname{sh} t$, to otrzymamy

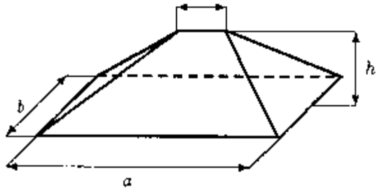
$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\, dx = \sqrt{x^2+1} - \ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right| + C.$$

Zatem

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\, dx &= \left[\sqrt{x^2+1} - \ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|\right]_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \\
&= \sqrt{9} - \ln\frac{1+\sqrt{9}}{2\sqrt{2}} - \left(\sqrt{4}\ \ln\frac{1+\sqrt{4}}{\sqrt{3}}\right) \\
&= 3 - \ln\sqrt{2} - (2 - \ln\sqrt{3}) = 1 + \ln\sqrt{3} - \ln\sqrt{2} = 1 + \ln\sqrt{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

- **Przykład 14.3**

a) Wyprowadzić wzór na objętość pryzmy o wymiarach podanych na rysunku.



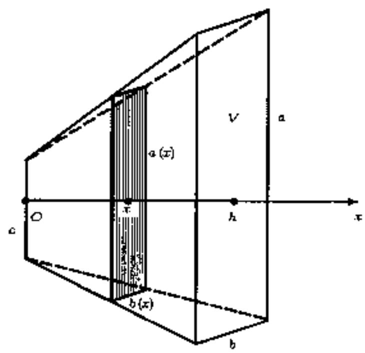
b) Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami $x^2+y^2=R^2$, $x^2+z^2=R^2$.

**Rozwiązanie**

a) Objętość bryły obliczymy korzystając ze wzoru

$$|V|=\int_a^b S(x)\,dx,$$

w którym $S(x)$ oznacza pole przekroju bryły wyznaczonego przez płaszczyznę prostopadłą do ustalonej osi. Niech oś ta będzie prostopadła do podstawy, a jej początek będzie na krawędzi $c$ (rysunek). Przekrój pryzmy płaszczyzną prostopadłą do osi $Ox$ jest prostokątem. Długości boków tego prostokąta oznaczamy przez $a(x)$ i $b(x)$. Z podobieństwa odpowiednich trójkątów wynika, że wyrażają się one wzorami:




$$a(x)=c+\frac{x}{h}(a-c),\quad b(x)=c+\frac{x}{h}b,$$

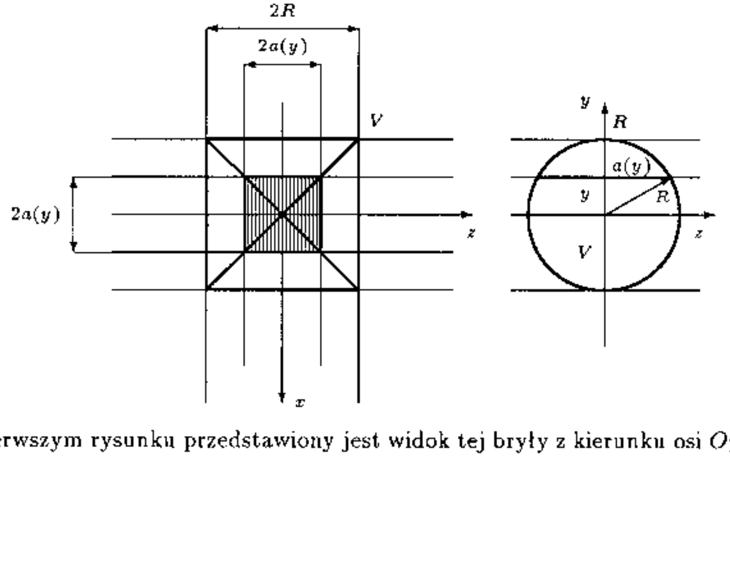
gdzie $0\leqslant x\leqslant h$ Zatem

$$S(x)=a(x)b(x)=\frac{bchx+b(a-c)x^2}{h^2}.$$

Stąd

$$|V|=\int_a^b S(x)\,dx=\frac{b}{h^2}\int_0^h\left(chx+(a-c)x^2\right)\,dx=\frac{b}{h^2}\left[\frac{chx^2}{2}+\frac{(a-c)x^3}{3}\right]_0^h=\frac{bh(c+2a)}{6}.$$

b) Bryła $V$ rozważana w zadaniu jest ograniczona dwiema powierzchniami walcowymi.




Na pierwszym rysunku przedstawiony jest widok tej bryły z kierunku osi $Oy$, a na drugim pokazany jest przekrój bryły płaszczyzną równoległą do płaszczyzny $xOz$ i przecinającą oś $Oy$ w punkcie $y$, gdzie $-R \leqslant y \leqslant R$. Przekrój ten jest kwadratem o boku $2a(y)$, gdzie $a(y) = \sqrt{R^2 - y^2}$. Objętość bryły $V$ obliczamy ze wzoru

$$|V| = \int_a^b S(x)\, dx.$$

Ze względu na symetrię bryły $V$ względem płaszczyzn układu mamy

$$|V| = 8\int_0^R a^2(y)\,dy = 8\int_0^R \left(R^2 - y^2\right)\,dy = 8\left[R^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_0^R = \frac{16}{3}R^3.$$

## • Przykład 14.4

Obliczyć objętości brył powstałych z obrotu podanych figur $T$ wokół wskazanych osi:

a) $T: -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant y \leqslant \cos x,\ Ox$; b) $T: 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant e^{-x},\ Oy$.

**Rozwiązanie**

a) Objętość bryły $V$ powstałej z obrotu wokół osi $Ox$ obszaru $T: a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)$, wyraża się wzorem

$$|V| = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Zatem objętość rozważanej bryły jest równa

$$|V| = \pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\ dx = \pi\left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\pi^2.$$

b) Objętość bryły $V$ powstałej z obrotu wokół osi $Oy$ obszaru $T: 0 \leqslant a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)$ wyraża się wzorem

$$|V| = 2\pi\int_a^b x f(x)\,dx.$$

Zatem objętość rozważanej bryły jest równa

$$|V| = 2\pi\int_0^1 xe^{-x}\,dx = 2\pi\left[-(x+1)e^{-x}\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

## • Przykład 14.5

Obliczyć pola powierzchni powstałych z obrotu wykresów podanych funkcji wokół wskazanych osi:

a) $f(x) = x^3,\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ Ox$; b) $f(x) = 2\sqrt{x},\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ Oy$.

**Rozwiązanie**

a) Pole powierzchni $\Sigma$ powstałej z obrotu wokół osi $Ox$ wykresu funkcji $y = f(x)$, gdzie $a \leqslant x \leqslant b$, wyraża się wzorem

$$|\Sigma| = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Dla powierzchni rozważanej w zadaniu mamy

$$\begin{aligned}|\Sigma| &= 2\pi \int\limits_0^1 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2}\, dx = 2\pi \int\limits_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4}\, dx \\ &= \frac{\pi}{27}\left[\sqrt{(1 + 9x^4)^3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right).\end{aligned}$$

b) Pole powierzchni $\Sigma$ powstałej z obrotu wokół osi $Oy$ wykresu funkcji $y = f(x)$, gdzie $0 \leqslant a \leqslant x \leqslant b$, wyraża się wzorem

$$|\Sigma| = 2\pi \int\limits_a^b x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Dla powierzchni rozważanej w zadaniu mamy

$$\begin{aligned}|\Sigma| &= 2\pi \int\limits_0^1 x\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\, dx = 2\pi \int\limits_0^1 \sqrt{x + x^2}\, dx \\ &= 2\pi\left[\frac{2x + 1}{4}\sqrt{x + x^2} - \frac{1}{8}\ln\left(2\sqrt{x + x^2} + 2x + 1\right)\right]_0^1 \\ &= \pi\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4}\ln\left(2\sqrt{2} + 3\right)\right).\end{aligned}$$

- **Przykład 14.6**

a) Jaką pracę należy wykonać, aby ciało o masie $m$ podnieść z powierzchni Ziemi na wysokość $h$?

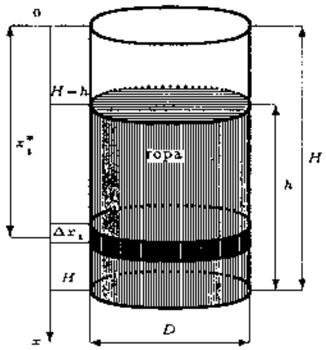
b) Zbiornik na ropę ma kształt walca o osi pionowej. Średnica walca wynosi $D = 2$ m, a wysokość $H = 3$ m. Zbiornik jest napełniony ropą do poziomu $h = 1$ m. Obliczyć pracę jaką trzeba wykonać, aby górą wypompować ropę ze zbiornika. Masa właściwa ropy wynosi $\gamma = 700\ \mathrm{kg/m^3}$.

**Rozwiązanie**

a) Na wysokości $x$ nad powierzchnią Ziemi na ciało o masie $m$ działa siła grawitacyjna $F(x) = \dfrac{GmM}{(R + x)^2}$, gdzie $M$ oznacza masę Ziemi, $R$ jej promień, a $G$ jest stałą grawitacyjną. Zatem praca przy podnoszeniu ciała o masie $m$ na wysokość $h$ wyraża się wzorem

$$W = \int\limits_0^h F(x)\, dx = GmM \int\limits_0^h \frac{dx}{(R + x)^2} = GmM\left[-\frac{1}{R + x}\right]_0^h = GmM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R + h}\right).$$

b) Niech oś $Ox$ będzie skierowana w dół (rysunek). Przedział $[H-h, H]$ dzielimy na $n$ przedziałów o długości $\Delta x_i$. Podział ten (oznaczamy go przez $P$) generuje podział ropy na warstwy walcowe o grubości $\Delta x_i$ i średnicy $D$. W każdym z przedziałów tego podziału wybieramy punkty pośrednie o współrzędnych $x_i^*$. Praca jaką musimy wykonać, aby podnieść $i$-tą warstwę ropy na górę zbiornika jest równa $\Delta W_i = x_i^* \pi \dfrac{D^2}{4} \cdot \gamma \cdot g$, gdzie $g$ oznacza przyspieszenie ziemskie. Całkowita praca, jaką musimy wykonać jest zatem równa




$$W = \lim_{\delta(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i^* \pi \frac{D^2}{4} \cdot \gamma \cdot g = \frac{\pi D^2 \gamma g}{4} \int_{H-h}^{H} x\,dx$$
$$= \frac{\pi D^2 \gamma g}{4} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_{H-h}^{H} = \frac{\pi D^2 \gamma g}{8} \cdot \left(2Hh - h^2\right) = \frac{\pi \cdot 4 \cdot 700 \cdot 9,81}{8} \cdot (6-1)$$
$$\approx 53933 \text{ J}.$$

- **Przykład 14.7**

Ciało wykonuje drgania wzdłuż osi $Ox$ z szybkością $v(t) = v_0 \cos \omega_0 t$, gdzie $v_0$, $\omega_0$ są stałymi. Znaleźć położenie ciała w chwili $t_2$, jeżeli w chwili $t_1$ znajdowało się ono w punkcie $x_1$.

**Rozwiązanie**
Niech $x(t)$ oznacza położenie ciała w chwili $t$. Wtedy

$$x(t) = x_1 + \int_{t_1}^{t} v(\tau)\,d\tau = x_1 + \int_{t_1}^{t} v_0 \cos \omega_0 \tau\,d\tau$$
$$= x_1 + \left[\frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau\right]_{t_1}^{t} = x_1 + \frac{v_0}{\omega_0}\left(\sin \omega_0 t - \sin \omega_0 t_1\right).$$

Podstawiając w tym wzorze $t = t_2$ otrzymamy

$$x(t_2) = x_1 + \frac{v_0}{\omega_0}\left(\sin \omega_0 t_2 - \sin \omega_0 t_1\right).$$

# Zadania

○ **Zadanie 14.1**
Obliczyć pola obszarów ograniczonych podanymi krzywymi:

a) $yx^4 = 1,\ y = 1,\ y = 16$; b) $y = 2x - x^2,\ x + y = 0$;
c) $y = 2^x,\ y = 2,\ x = 0$; d) $y^2 = -x,\ y = x - 6,\ y = -1,\ y = 4$;
e) $x = y^3 - y,\ x = 0$; f) $y = \dfrac{1}{x^2}, y = x, y = 4$.

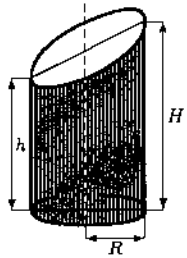
○ **Zadanie 14.2**

Obliczyć długości podanych krzywych:

a) $y = 2\sqrt{x^3}$, gdzie $0 \leqslant x \leqslant 11$; b) $y = \operatorname{ch} x$, gdzie $0 \leqslant x \leqslant 1$;
c) $y = e^x$, gdzie $\frac{1}{2}\ln 2 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\ln 3$; d) $24xy = y^4 + 48$, gdzie $2 \leqslant y \leqslant 4$;
e) $y = \dfrac{x^5}{10} + \dfrac{1}{6x^3}$, gdzie $1 \leqslant x \leqslant 2$; f) $y = 1 - \ln\cos x$, gdzie $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$.

○ **Zadanie 14.3**

a) Wyprowadzić wzór na objętość ostrosłupa prawidłowego o wysokości $H$ i podstawie kwadratowej o boku $a$.
b) Walec o promieniu podstawy $R$ ścięto ukośnie płaszczyzną ( rysunek). Mniejsza wysokość walca wynosi $h$, a większa $H$. Obliczyć objętość tego walca.




○ **Zadanie 14.4**

Obliczyć objętości brył powstałych z obrotu podanych figur $T$ wokół wskazanych osi:

a) $T: 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x^3,\ Oy$; b) $T: 1 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{x},\ Oy$;
c) $T: 1 \leqslant x \leqslant 4,\ \dfrac{4}{x} \leqslant y \leqslant 5 - x,\ Ox$; d) $T: 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leqslant y \leqslant \sin x + \cos x,\ Ox$;
e) Obliczyć objętość stożka ściętego o wysokości $H$ i promieniach podstaw $r, R$, gdzie $r < R$.

○ **Zadanie 14.5**

Obliczyć pola powierzchni powstałych z obrotu wykresów podanych funkcji wokół wskazanych osi:

a) $f(x) = \sqrt{4 - x^2},\ -1 \leqslant x \leqslant 1,\ Ox$; b) $f(x) = \sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{3}x\right),\ 1 \leqslant x \leqslant 3,\ Ox$;
c) $f(x) = \dfrac{x-1}{9},\ 1 \leqslant x \leqslant 10,\ Oy$; d) $f(x) = \dfrac{x^2}{2},\ 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{3},\ Oy$;

○ **Zadanie 14.6**

a) Przy rozciąganiu sprężyny siła rozciągania jest proporcjonalna do wydłużenia sprężyny (współczynnik proporcjonalności wynosi $k$). Obliczyć pracę jaką należy wykonać, aby sprężynę o długości $l$ rozciągnąć do długości $L$ $(l < L)$;

b) Zbiornik ma kształt walca o osi poziomej. Średnica walca $D = 2\,\mathrm{m}$, a długość $L = 6\,\mathrm{m}$. Obliczyć pracę, jaką potrzeba wykonać, aby opróżnić zapełniony całkowicie wodą zbiornik. Otwór do opróżnienia zbiornika znajduje się w jego górnej części. Masa właściwa wody $\gamma = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$.

○ **Zadanie 14.7**

a) Punkt materialny zaczął poruszać się prostoliniowo z szybkością początkową $v_0 = 10$ m/s i przyspieszeniem $a_0 = 2$ m/s$^2$. Po czasie $t_1 = 10$ s punkt ten zaczął poruszać się z opóźnieniem $a_1 = -1$ m/s$^2$. Znaleźć położenie punktu po czasie $t_2 = 20$ s od chwili rozpoczęcia ruchu.

b) Dwie cząstki elementarne $A$ i $B$ położone w odległości $d = 36$ zaczynają zbliżać się do siebie z szybkościami odpowiednio $v_A(t) = 10t + t^3$, $v_B(t) = 6t$, gdzie $t \geqslant 0$. Po jakim czasie nastąpi zderzenie tych cząstek?

○ **Zadanie* 14.8**

Do dwóch jednakowych naczyń w kształcie walca włożono dwie bryły. Do naczyń wlewa się woda z tą samą intensywnością. Pokazać, że jeżeli w każdej chwili poziom wody w obu naczyniach był jednakowy, to pola przekrojów obu brył na tych samych wysokościach są równe.

## Odpowiedzi i wskazówki

**14.1** a) $\frac{56}{3}$; b) $\frac{9}{2}$; c) $2 - \frac{1}{\ln 2}$; d) $\frac{355}{6}$; e) $\frac{1}{2}$; f) $\frac{11}{2}$.

**14.2** a) 74; b) $\frac{e - e^{-1}}{2}$; c) $2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{3}+1}{3\left(\sqrt{3}-1\right)}$; d) $\frac{17}{6}$; e) $\frac{779}{240}$; f) $\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$.

**14.3** a) $\frac{a^2 H}{3}$; b) $\pi R^2 \frac{h+H}{2}$.

**14.4** a) $\frac{2\pi}{5}$; b) $4\pi$; c) $9\pi$; d) $\frac{\pi(\pi+2)}{2}$; e) $|V| = \frac{\pi}{3}H\left(r^2 + rR + R^2\right)$.

**14.5** a) $8\pi$; b) $\frac{16\pi}{9}$; c) $11\pi\sqrt{82}$; d) $\frac{14\pi}{3}$.

**14.6** a) $W = \frac{k}{l}\int\limits_l^k (x - l)\,dx = k\frac{(L-l)^2}{2l}$; b) Wskazówka. $W = 2\gamma g l \int\limits_0^D x\sqrt{Dx - x^2}\,dx$.

**14.7** a) $L = \int\limits_0^{t_2} v(t)\,dt = 350$ [m], gdzie $\begin{cases} 10 + 2t & \text{dla} \quad 0 \leqslant t \leqslant 10, \\ 30 - t & \text{dla} \quad 10 < t \leqslant 20; \end{cases}$

b) Moment zderzenia $T$ spełnia równanie $\int\limits_0^T \left(10t + t^3\right)\,dt + \int\limits_0^T 6t\,dt = 36$, stąd $T = 2$.

**14.8*** Wskazówka. Wykorzystać wzór na objętość bryły oraz twierdzenie o różniczkowaniu funkcji górnej granicy całkowania.

# Zbiory zadań


1. J.Banaś, S.Wędrychowski, *Zbiór zadań z analizy matematycznej,* WNT, Warszawa 1996.
2. G.N.Berman, *Zbiór zadań z analizy matematycznej,* PWN, Warszawa 1966.
3. S.Białynicz, K.Zieliński, *Zadania z matematyki wyższej dla studentów politechnik,* PWN, Warszawa 1963.
4. G.W.Bluman, *Problem Book for First Year Calculus*, Springer–Verlag, New York 1984.
5. K.Borsuk, *Ćwiczenia z analizy matematycznej,* PZWS, Warszawa 1951.
6. J.Czugała, B.Szal, *Zbiór zadań z analizy matematycznej cz. I*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Pedagogicznej, Kielce 1998.
7. S.Fudali, M.Kłeczek, *Matematyka w przykładach i zadaniach*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2001.
8. M.Gewert, *Zbiór zadań z analizy matematycznej, cz. I–II,* Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1992.
9. N.M.Giunter, R.O.Kuźmin, *Zbiór zadań z matematyki wyższej, T. 1–2,* PWN, Warszawa 1957-59.
10. R.Hajłasz, *Metodyka rozwiązywania zadań z analizy matematycznej,* PWN, Warszawa 1988.
11. K.Jankowska, T.Jankowski, *Zbiór zadań z matematyki,* Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 1998.
12. W.Kaczor, M.Nowak, *Zadania z analizy matematycznej, Cz. I, Liczby rzeczywiste, ciągi i szeregi liczbowe*, Wydawnictwo UMCS, Lublin 1996.
13. W.Kaczor, M.Nowak, *Zadania z analizy matematycznej, Cz. II, Funkcje jednej zmiennej - rachunek różniczkowy*, Wydawnictwo UMCS, Lublin 1998.
14. W.Kołodziej *Podstawy analizy matematycznej w zadaniach,* Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1995.
15. T.Kowalski, J.Muszyński, W.Sadkowski, *Zbiór zadań z matematyki, T. I*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1998.

16. W.Krysicki, L.Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach, cz. I–II,* PWN, Warszawa 1993.

17. R.Leitner, W.Matuszewski, Z.Rojek, *Zadania z matematyki wyższej, cz. 1,* WNT, Warszawa 1992.

18. W.Leksiński, I.Nabiałek, W.Żakowski, *Matematyka. Zadania,* WNT, Warszawa 1992.

19. I.A.Maron, *Zadania z rachunku różniczkowego i całkowego. Funkcje jednej zmiennej,* WNT, Warszawa 1974.

20. W.P.Minorski, *Zbiór zadań z matematyki wyższej,* WNT, Warszawa 1974.

21. W.Nikliborc, H.Steinhaus, *Ćwiczenia z rachunku różniczkowego,* Wydawnictwo Zakładu Narodowego im. Ossolińskich, Lwów 1930.

22. R.Rutkowski, *Zbiór zadań z analizy matematycznej,* Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1979.

23. M.Sadowski, T.Spanily, *Matematyka w zadaniach dla studentów kierunków ekonomicznych,* Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk 1999.

24. W.Stankiewicz, J.Wojtowicz, *Zadania z matematyki dla wyższych uczelni technicznych, T. 1–2,* PWN, Warszawa, 1982–83.

25. G.I.Zaporożec, *Metody rozwiązywania zadań z analizy matematycznej,* WNT, Warszawa 1976.

26. W.Żakowski, *Ćwiczenia problemowe dla politechnik,* WNT, Warszawa 1991.

## Księgarnie prowadzące sprzedaż książek naszego wydawnictwa

Księgarnia DOM KSIĄŻKI
Politechnika Białostocka
15-351 **Białystok**, ul. Wiejska 45C

Księgarnia Akademii Bydgoskiej
85-064 **Bydgoszcz**, ul. Chodkiewicza 30

Księgarnia ELEKTRA
Politechnika Częstochowska
42-200 **Częstochowa**, ul. Dekabrystów 26/30

Księgarnia KOLIBER
Wyższa Szkoła Pedagogiczna
42-200 **Częstochowa**, ul. Waszyngtona 4/8

Księgarnia Wydawnictwa PG
Politechnika Gdańska
80-952 **Gdańsk**, ul. Narutowicza 11/12

Księgarnia KALLIMACH
Biblioteka Główna Uniwersytetu Gdańskiego
81-824 **Sopot**, ul. Armii Krajowej 119/121

Księgarnia LITERKA
Uniwersytet Gdański
80-952 **Gdańsk-Oliwa**, ul. Wita Stwosza 55

Księgarnia Wydawnictwa PŚ
Politechnika Śląska
44-100 **Gliwice**, ul. Akademicka 2, 7, 16

Księgarnia Wydawnictwa PŚ
Politechnika Śląska
44-100 **Katowice**, ul. Krasińskiego 8

Księgarnia OR PAN
Uniwersytet Śląski
40-007 **Katowice**, ul. Bankowa 11

Księgarnia STACHURSKI
Politechnika Świętokrzyska
25-314 **Kielce**, al. 1000-lecia P.P. 7b

Księgarnia Akademicka ŚWIATOWID
25-315 **Kielce**, ul. Starodomaszowska 30

Księgarnia Naukowa
Politechnika Koszalińska
75-620 **Koszalin**, ul. Racławicka 15-17

Sprzedaż Uczelnianych Wydawnictw
Akademia Górniczo-Hutnicza
30-059 **Kraków**, al. Mickiewicza 30

Księgarnia
Politechnika Krakowska
31-155 **Kraków**, ul. Warszawska 24

Księgarnia ACADEMICUS
Akademia Pedagogiczna
30-084 **Kraków**, ul. Podchorążych 2

Główna Księgarnia Naukowa
31-118 **Kraków**, ul. Podwale 6

Księgarnia Naukowo-Techniczna
Politechnika Lubelska
20-618 **Lublin**, ul. Nadbystrzycka 36

Księgarnia SINUS
Politechnika Lubelska
20-618 **Lublin**, ul. Nadbystrzycka 40

Księgarnia Uniwersytecka
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej
20-031 **Lublin**, pl. Curie-Skłodowskiej 5

Księgarnia MERITUM
Politechnika Łódzka
90-924 **Łódź**, ul. Żwirki 36

Księgarnia PRUSZYŃSKI BEZ SPÓŁKI
Uniwersytet Łódzki
90-938 **Łódź**, ul. Matejki 34/38

Księgarnia ŻAK
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski
10-718 **Olsztyn**, ul. Oczapowskiego 6

Księgarnia TECHNICZNA
Politechnika Opolska
45-271 **Opole**, ul. Sosnkowskiego 31

Księgarnia AKADEMICKA
Uniwersytet Opolski
45-058 **Opole**, ul. Kośnego 45

Księgarnia Akademicka
Filia Politechniki Warszawskiej
00-271 **Płock**, pl. Łukasiewicza 17

Księgarnia Uniwersytecka
Uniwersytet Adama Mickiewicza
60-813 **Poznań**, ul. Zwierzyniecka 7

Księgarnia Naukowa KAPITAŁKA
61-725 **Poznań**, ul. Mielżyńskiego 27/29

Księgarnia Techniczna DOM KSIĄŻKI
61-888 **Poznań**, ul. Półwiejska 14

Sklep papierniczy
Politechnika Poznańska
61-141 **Poznań**, ul. Kórnicka 30
(osiedle akademickie Piotrowo)

Księgarnia Akademii Ekonomicznej
61-895 **Poznań**, ul. Powstańców Wielkopolskich 16

Księgarnia EKONOMIK
Politechnika Radomska
26-600 **Radom**, ul. Chrobrego 31 i 42

Księgarnia UNKA
Politechnika Rzeszowska
35-329 **Rzeszów**, al. Powstańców Warszawy 8

Księgarnia Akademicka LIBRA
Wyższa Szkoła Pedagogiczna
35-310 **Rzeszów**, ul. Rejtana 16c

Kiosk-Księgarnia
Politechnika Szczecińska
70-311 **Szczecin**, al. Piastów 48

Uniwersytecka Księgarnia Naukowa
Uniwersytet Mikołaja Kopernika
87-100 **Toruń**, ul. Reja 25

Księgarnia Naukowa OR PAN
Pałac Kultury i Nauki
00-901 **Warszawa**

Księgarnia Naukowa OR PAN - BIS
00-818 **Warszawa**, pl. Twarda 51/55

Księgarnia Studencka
Politechnika Warszawska
00-661 **Warszawa**, pl. Politechniki 1

Księgarnia Studencka
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego
02-787 **Warszawa**, ul. Nowoursynowska 161

Księgarnia
Szkoła Główna Handlowa
02-554 **Warszawa**, al. Niepodległości 162

Księgarnia POLITECHNIKA
Politechnika Wrocławska (bud. A-1)
50-370 **Wrocław**, wyb. Wyspiańskiego 27

Księgarnia TECH
Politechnika Wrocławska (bud. D-1)
50-377 **Wrocław**, pl. Grunwaldzki 13

Księgarnia-Ksero ADUŚ
Instytut Matematyczny UWr.
50-384 **Wrocław**, pl. Grunwaldzki 2/4

Kiosk-Księgarnia
Akademia Rolnicza
50-357 **Wrocław**, ul. Grunwaldzka 53

Księgarnia ZETKA
Akademia Ekonomiczna
53-345 **Wrocław**, ul. Komandorska 118/120

Księgarnia Wydawnictwa PŚ
Politechnika Śląska
44-100 **Zabrze**, ul. Roosevelta 26

Księgarnia WSP
Wyższa Szkoła Pedagogiczna
65-625 **Zielona Góra**, al. Wojska Polskiego 69

●

Internetowa Księgarnia Akademicka
**www.ika.edu.pl**

Księgarnia Internetowa MERLIN
**www.merlin.com.pl**

Księgarnia Internetowa UNIVERSITAS
**www.universitas.com.pl**

Księgarnia Internetowa KAPITAŁKA
**www.kapitalka.com.pl**