2. Układy równań liniowych..

2. 1. Układ Cramera. Wzory Cramera.

Równaniem liniowym z n niewiadomymi nazywamy równanie postaci $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$. Jeżeli $b = 0$ to równanie liniowe nazywamy równaniem jednorodnym (ma ono zawsze co najmniej jedno rozwiązanie: $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$).

Układem n równań liniowych z n niewiadomymi nazywamy układ:

$$(*) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Macierzą współczynników układu (*) n równań liniowych z n niewiadomymi (czasem: macierzą układu) nazywamy macierz: $A = \left[a_{jk}\right]_{j,k=1,\ldots,n}$; jest to macierz kwadratowa.

Układ (*) nazywamy układem Cramera, jeśli A^{-1} istnieje (wyznacznik det (A) $\neq 0$).
Układ (*) można zapisać w postaci równania macierzowego: $A \cdot X = Y$, gdzie:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Wzory Cramera
Metoda Cramera - Niech A_i będzie macierzą ($n \times n$) powstającą z macierzy A przez zastąpienie w niej i-tej kolumny wektorem kolumnowym Y.

Twierdzenie. *2.t.1.*

Układ Cramera ma dokładnie jedno rozwiązanie: $x_i = \dfrac{\det A_i}{\det A}$ i = 1,2,...,n

2. 2. Macierz uzupełniona układu równań. Twierdzenie Kroneckera – Capelli'ego. Liczba rozwiązań układu równań liniowych.

Układem m równań liniowych z n niewiadomymi nazywamy układ:

$$(**) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{mn1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Macierzą uzupełnioną układu równań liniowych nazywamy macierz A^u - powstałą z macierzy A (macierzy współczynników układu) przez dopisanie (n +*1*)-szej kolumny wyrazów wolnych.

$$A^u = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Twierdzenie *2.t.2.* **(Twierdzenie Kroneckera-Capelliego).**

Na to, aby układ równań liniowych miał rozwiązanie potrzeba i wystarcza, aby rząd macierzy A był równy rzędowi macierzy uzupełnionej A^u:

$$R(A) = R(A^u)$$

Liczba rozwiązań układu równań liniowych

Niech układ (**) spełnia twierdzenie Kroneckera-Capelliego i niech $r = R(A) = R(A^u)$.

Jeśli $r = n$, to licząc rząd macierzy A, wykreślono $m - n$ (czyli $m - r$) wierszy, a każdy z nich reprezentował określone równanie układu. Po wykreśleniu odpowiadających tym (wykreślonym) wierszom równań, otrzymujemy układ Cramera.

Jeśli $r < n$, to licząc rząd macierzy A, wykreślono $m - r$ wierszy i $n - r$ kolumn. Każdy z wykreślonych wierszy reprezentował określone równanie układu, a każda z wykreślonych kolumn – określoną zmienną. Wykreślamy odpowiadające tym wierszom równania, natomiast zmienne odpowiadające wykreślonym kolumnom traktujemy jako parametry rozwiązania. Jeśli teraz w każdym (nieskreślonym) równaniu przeniesiemy owe zmienne na drugą stronę znaku równości (pamiętając o zmianie znaku na przeciwny), to otrzymamy układ Cramera ($r \times r$). Stosowanie przy dwóch i więcej parametrach wzorów Cramera jest jednak bardzo kłopotliwe dlatego **usilnie** proponuję stosowanie metody opisanej w następnym punkcie.

Rzędy macierzy	Nazwa układu równań	Liczba rozwiązań	Komentarz
$R(A) = R(A^u) = r$ oraz $r = n$	Układ niezależny	Jedno	Obliczając rząd macierzy A, wykreślono $m - n$ (czyli $m - r$) wierszy, a każdy z nich reprezentował określone równanie układu. Po wykreśleniu odpowiadających tym (wykreślonym) wierszom równań, otrzymujemy układ Cramera.
$R(A) = R(A^u) = r$ oraz $r < n$	Układ zależny	Nieskończenie wiele	Obliczając rząd macierzy A, wykreślono $m - r$ wierszy i $n - r$ kolumn. Każdy z wykreślonych wierszy reprezentował określone równanie układu, a każda z wykreślonych kolumn – określoną zmienną. Wykreślamy odpowiadające tym wierszom równania, natomiast zmienne odpowiadające wykreślonym kolumnom traktujemy jako parametry rozwiązania. Jeśli teraz w każdym (nieskreślonym) równaniu przeniesiemy owe zmienne na drugą stronę znaku równości (pamiętając o zmianie znaku na przeciwny), to otrzymamy układ Cramera ($r \times r$).
$r = R(A) < R(A^u)$	Układ sprzeczny	Brak	Nie są spełnione założenia twierdzenia Kroneckera-Capelliego

2.3. Rozwiązanie układu równań liniowych metodą eliminacji Gaussa.

Metoda eliminacji Gaussa jest metodą rachunku macierzy. W sposób oczywisty przypomina metodę obliczania macierzy odwrotnej. Jednak uważny czytelnik bez trudu zrozumie, że w gruncie rzeczy wszystkie operacje odpowiadają znanym ze szkoły średniej (podstawowej ?) działaniom mnożenia równania przez liczbę i dodawania równań stronami.

Opis metody:

i) wypisujemy macierz uzupełnioną układu oddzielając macierz wyrazów wolnych pionową kreską.

ii) wykonując opisane poniżej operacje doprowadzamy macierz układu do postaci macierzy w której poniżej elementów postaci a_{ii} są same zera, a elementy postaci a_{ii} są jedynkami.

*/ Jeżeli w trakcie wykonywanych operacji pojawi się wiersz złożony z samych zer „0” to go wykreślamy.
*/ Jeżeli w trakcie wykonywanych operacji pojawi się wiersz złożony z samych zer z lewej strony kreski i liczby różnej od zera po prawej stronie kreski to układ jest sprzeczny. Stwierdzenie tego faktu kończy rozwiązywanie równania.

Dozwolone operacje:

- działać można tylko na wierszach
- wiersze można zamieniać miejscami
- wiersz można pomnożyć lub podzielić przez dowolną liczbę różną od „0”.
- do danego wiersza można dodać inny wiersz pomnożony przez stałą.

Jeżeli liczba kolumn po lewej stronie kreski jest większa od liczby od liczby wierszy, to różnica między tymi liczbami jest liczbą parametrów równania, a „nadliczbowe” kolumny – reprezentantami zmiennych, które staną się parametrami.

***Przykład** 2.p.13.* Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2\cdot x_2 + 3\cdot x_3 + 4\cdot x_4 = 5 \\ 2\cdot x_1 + x_2 + 2\cdot x_3 + 3\cdot x_4 = 1 \\ 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + x_3 + 2\cdot x_4 = 1 \\ 4\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 2\cdot x_3 + x_4 = -5 \end{cases}$$

Wpisujemy macierz uzupełnioną układu i rozwiązujemy:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & -5 \end{array}\right] \begin{array}{c} w_1' = w_1 \\ w_2' = w_2 + (-2)\cdot w_1 \\ w_3' = w_3 + (-1)\cdot (w_1 + w_2) \\ w_4' = w_4 + (-2)\cdot w_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -4 & -5 & -9 \\ 0 & -1 & -4 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -7 \end{array}\right] \begin{array}{c} w_1' = w_1 + 2\cdot w_3 \\ w_2' = w_4 \\ w_3' = w_3 + w_4 \\ w_4' = w_2 + 3\cdot w_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & -6 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & -6 & -10 & -12 \\ 0 & 0 & -10 & -20 & -30 \end{array}\right] \begin{array}{c} w_1' = w_1 \\ w_2' = w_2 \\ w_3' = \left(-\tfrac{1}{10}\right)\cdot w_4 \\ w_4' = \left(-\tfrac{1}{2}\right)\cdot w_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & -6 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{c} w_1' = w_1 \\ w_2' = w_2 \\ w_3' = w_3 \\ w_4' = w_4 + (-3)\cdot w_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & -6 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{c} w_1' = w_1 \\ w_2' = w_2 \\ w_3' = w_3 \\ w_4' = (-1)\cdot w_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & -6 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Rozwiązujemy układ „od dołu” macierzy. Ostatnie równanie układu zostało przekształcone do postaci: $0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 1\cdot x_4 = 3$, odczytujemy $x_4 = 3$, następnie $x_3 + 2\cdot x_4 = 3$, czyli $x_3 + 2\cdot 3 = 3$, więc $x_3 = -3$.
Z drugiego wiersza mamy: $1\cdot x_2 - 2\cdot x_3 - 5\cdot x_4 = -7$, czyli $1\cdot x_2 - 2\cdot(-3) - 5\cdot 3 = -7$, skąd łatwo wyliczymy $x_2 = 2$. Wreszcie – z pierwszego wiersza macierzy odczytujemy: $x_1 + 0\cdot x_2 - 5\cdot x_3 - 6\cdot x_4 = -5$, podstawiając wyliczone już wartości zmiennych, mamy: $x_1 - 5\cdot(-3) - 6\cdot 3 = -5$, czyli $x_1 = -2$.

Odpowiedź. Rozwiązaniem powyższego układu równań jest: $\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -3 \\ x_4 = 3 \end{cases}$

***Przykład** 2.p.14.* Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} 2\cdot x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3\cdot x_1 - 2\cdot x_2 + 2\cdot x_3 - 3\cdot x_4 = 2 \\ 5\cdot x_1 + x_2 - x_3 + 2\cdot x_4 = -1 \\ 2\cdot x_1 - \cdot x_2 + x_3 - 3\cdot x_4 = 4 \end{cases}$$

Wpisujemy macierz uzupełnioną układu i rozwiązujemy:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} w_1^{'} = w_1 \\ w_2^{'} = w_2 + (-1)\cdot w_1 \\ w_3^{'} = w_3 + (-1)\cdot(w_1 + w_2) \\ w_4^{'} = w_4 + (-1)\cdot w_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} w_1' = w_2 \\ w_2' = w_1 + (-2)\cdot w_2 \\ w_3' = w_3 + w_4 \\ w_4' = \cdot w_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & -7 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 3 \end{array}\right]$$

Z postaci wiersza trzeciego wynika, że układ jest sprzeczny.

Odpowiedź. Powyższy układ jest sprzeczny (rozwiązanie nie istnieje).

***Przykład** 2.p.15.* Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x_1 - 2\cdot x_2 + 3\cdot x_3 - 4\cdot x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3\cdot x_2 - 3\cdot x_4 = 1 \\ -7\cdot x_2 + 3\cdot x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

Wpisujemy macierz uzupełnioną układu i rozwiązujemy:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{c} w_1' = w_1 \\ w_2' = w_2 \\ w_3' = w_3 + (-1)\cdot w_1 \\ w_4' = w_4 + 7\cdot w_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{array}\right] \begin{array}{c} w_1' = w_1 \\ w_2' = w_2 \\ w_3' = w_3 + (-5)\cdot w_2 \\ w_4' = \left(-\tfrac{1}{4}\right)\cdot w_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1^{'} = w_1 \\ w_2^{'} = w_2 \\ \\ w_4^{'} = w_4 \end{array}$$ wiersze w_3 i w_4 są proporcjonalne, skreślamy w_3.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right]$$

Układ równań, po przekształceniach ma mniej równań, niż niewiadomych. Niektóre zmienne będą potraktowane jako parametry, czyli będą przyjmowały dowolną wartość. Musimy te zmienne określić i podać rozwiązanie układu równań. Z postaci macierzy wynika, że wygodnie jest przyjąć zmienną x_4 jako parametr (gdybyśmy przyjęli zamiast x_4 zmienną x_3, to też byłoby dobrze).
Niech więc $x_4 = a$ (jest rzeczą zalecaną, z chwilą podjęcia decyzji – które zmienne będą parametrami – wprowadzenie oznaczenia, wyróżniającego te zmienne).

Z ostatniego wiersza przekształconej macierzy wynika: $x_3 - 2 \cdot a = 6$, stąd $x_3 = 6 + 2 \cdot a$. Z następnego wiersza mamy: $x_2 - x_3 + a = -3$, czyli $x_2 - (6 + 2a) + a = -3$, zatem $x_2 = 3 + a$. Wreszcie – z pierwszego wiersza wynika $x_1 - 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 - 4 \cdot a = 4$, a dalej:
$x_1 - 2 \cdot (3 + a) + 3 \cdot (6 + 2a) - 4a = 4$,
$x_1 - 6 - 2 \cdot a + 18 + 6 \cdot a - 4a = 4$, czyli $x_1 = -8$.

Układ rozwiązań, zawierający wszystkie zmienne i wszystkie parametry oznaczone literami, nazywamy ***ogólnym układem rozwiązań***. Jeżeli wszystkie parametry przyrównamy do zera, to taki układ rozwiązań nosi nazwę ***fundamentalnego układu rozwiązań***, natomiast – jeśli w miejsce parametrów podstawimy dowolną, ustaloną liczbę, to mamy ***szczególny układ rozwiązań***.

Odpowiedź

W powyższym przykładzie możemy podać wszystkie postaci układów rozwiązań:
układ ogólny: układ fundamentalny: układ szczególny, np. dla $a = 3$

$$\begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 = 3 + a \\ x_3 = 6 + 2 \cdot a \\ x_4 = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 6 \\ x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 = 6 \\ x_3 = 12 \\ x_4 = 3 \end{cases}.$$

***Przykład** 2.p.16*. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2 \cdot x_5 = 0 \\ 3 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 - 3 \cdot x_4 + 4 \cdot x_5 = 2 \\ 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 - 5 \cdot x_3 - 5 \cdot x_4 + 7 \cdot x_5 = 3 \end{cases}$$

Wpisujemy macierz uzupełnioną układu i rozwiązujemy:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{r} w_1' = w_2 \\ w_2' = w_1 + (-2) \cdot w_2 \\ w_3' = w_3 + (-1) \cdot (w_1 + w_2) \\ w_4' = w_4 + (-2) \cdot w_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{r} w_1' = w_1 + \frac{1}{3} \cdot w_2 \\ w_2' = \frac{1}{3} \cdot w_2 \end{array} \quad \text{skreślamy } w_3 \text{ i } w_4$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

Trzy zmienne: x_3, x_4 oraz x_5 określamy, jako parametry, wprowadzając ich nowe oznaczenia: $x_3 = a$, $x_4 = b$, $x_5 = c$.

Otrzymamy wtedy z drugiego wiersza: $0 \cdot x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + \frac{5}{3} \cdot x_5 = \frac{1}{3}$, czyli

$$x_2 = \frac{1 + 3 \cdot a + 3 \cdot b - 5 \cdot c}{3},$$

a z pierwszego wiersza przekształconej macierzy: $x_1 = \dfrac{1+c}{3}$.

Odpowiedź.

układ ogólny: układ fundamentalny: układ szczególny, np. dla a = 1, b = 7, c = 2

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1+c}{3} \\ x_2 = \dfrac{1+3\cdot a+3\cdot b-5\cdot c}{3} \\ x_3 = a \\ x_4 = b \\ x_5 = c \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3} \\ x_2 = \dfrac{1}{3} \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 5 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 7 \\ x_5 = 2 \end{cases}$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

***Zadanie** 3.z.5.* Rozwiązać układ równań metodą eliminacji Gaussa:

$$\text{a)}\begin{cases} x+2y-z=5 \\ 2x+5y+3z=12 \\ x-3y+4z=-5 \end{cases} \quad \text{b)}\begin{cases} x+y+2z=0 \\ x+2y-z=5 \\ 2x-y+z=-3 \end{cases} \quad \text{c)}\begin{cases} x+3y+z=1 \\ 2x+y+3z=4 \\ x+y+2z=3 \end{cases}$$

$$\text{d)}\begin{cases} x-y+z=2 \\ 2x+y-3z=2 \\ x+2y+z=5 \end{cases} \quad \text{e)}\begin{cases} x-2y-z=2 \\ x+y-2z=-6 \\ 2x+y+z=0 \end{cases} \quad \text{f)}\begin{cases} x+y-3z=5 \\ 2x-y+z=0 \\ x+3y+z=3 \end{cases}.$$

$$\text{g)}\begin{cases} x+2y-z+t=3 \\ -x-y+2z-2t=0 \\ 2x+6y+z-t=13 \\ x+y+t=4 \end{cases} \quad \text{h)}\begin{cases} x+2y-z+t=0 \\ 3x+7y-z+4t=1 \\ x+3y+2z+3t=3 \\ 2x+6y+3z+5t=4 \end{cases} \quad \text{i)}\begin{cases} x+2y+z-2t=1 \\ 2x+5y+z+t=3 \\ x+y+3z-t=2 \\ 4x+8y+5z-2t=5 \end{cases}$$

Odpowiedzi.

a) $x = 1, y = 2, z = 0$. b) $x = 0, y = 2, z = -1$. c) $x = -1, y = 0, z = 2$.

d) $x = 2, y = 1, z = 1$. e) $x = 0, y = -2, z = 2$. f) $x = 1, y = 1, z = -1$.

g) $x = 0, y = 2, z = 3, t = 2$. h) $x = -4a + 8$, $y = a - 3$, $z = -a + 2$, $t = a$.

i) układ sprzeczny.