Oznaczenia podstawowe

N - zbiór liczb naturalnych

Z - zbiór liczb całkowitych

Q - zbiór liczb wymiernych

R - zbiór liczb rzeczywistych

C - zbiór liczb zespolonych

$\forall$ - kwantyfikator ogólny (dla każdego)

$\exists$ - kwantyfikator szczegółowy (istnieje)

$a = \inf A \Leftrightarrow \underset{x \in A}{\forall} x \geq a$ oraz $\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \underset{x_0 \in A}{\exists} x_0 < a + \varepsilon$ - kres dolny (infimum) zbioru

$b = \sup A \Leftrightarrow \underset{x \in A}{\forall} x \leq b$ oraz $\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \underset{x_0 \in A}{\exists} x_0 > a - \varepsilon$ - kres górny (supremum) zbioru

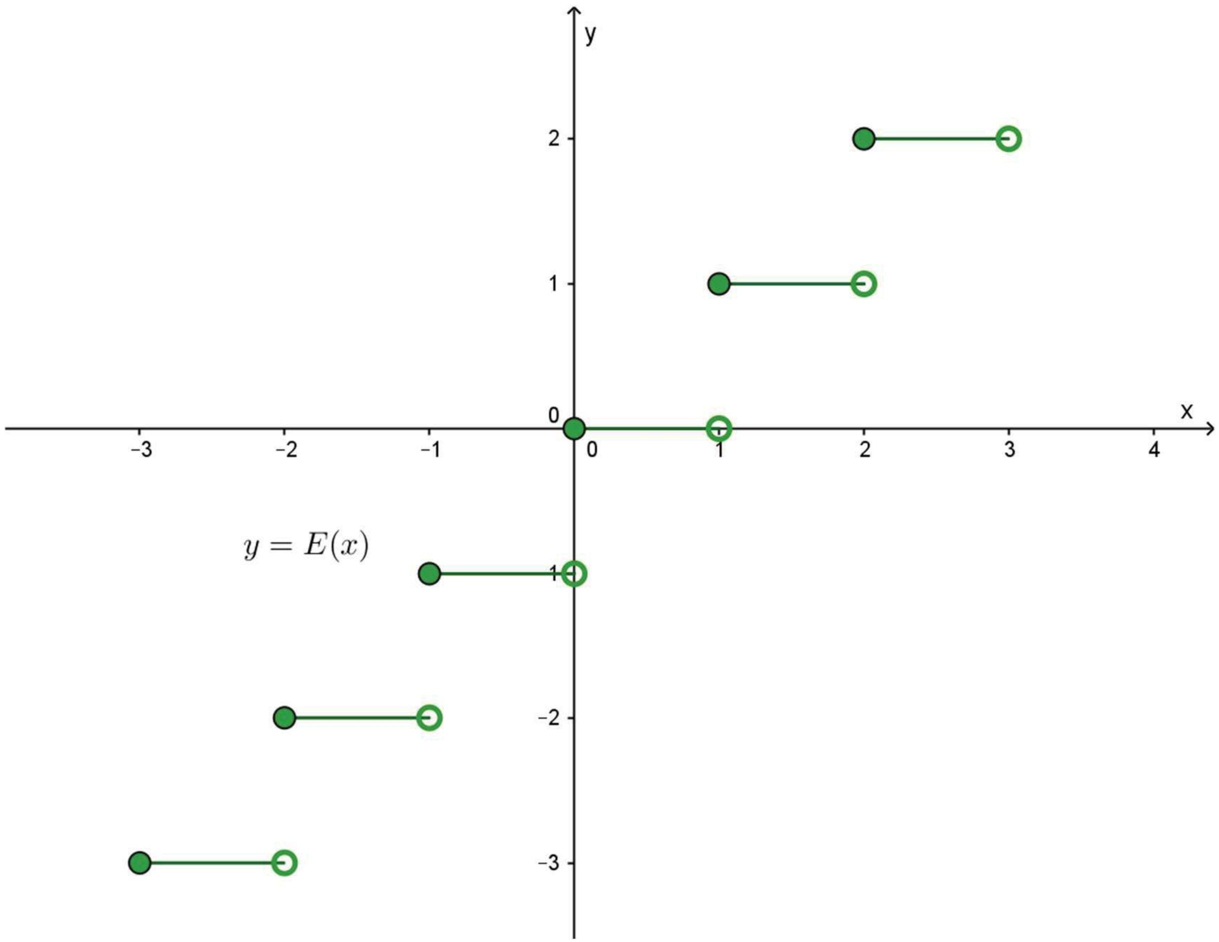
Funkcje – informacje podstawowe

Definicja (funkcja, dziedzina, przeciwdziedzina i zbiór wartości funkcji). Funkcją określoną na zbiorze $X \subset R$ o wartościach w zbiorze $Y \subset R$ nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi $x \in X$ dokładnie jednego elementu $y \in Y$, co zapisujemy $f : X \to Y$.

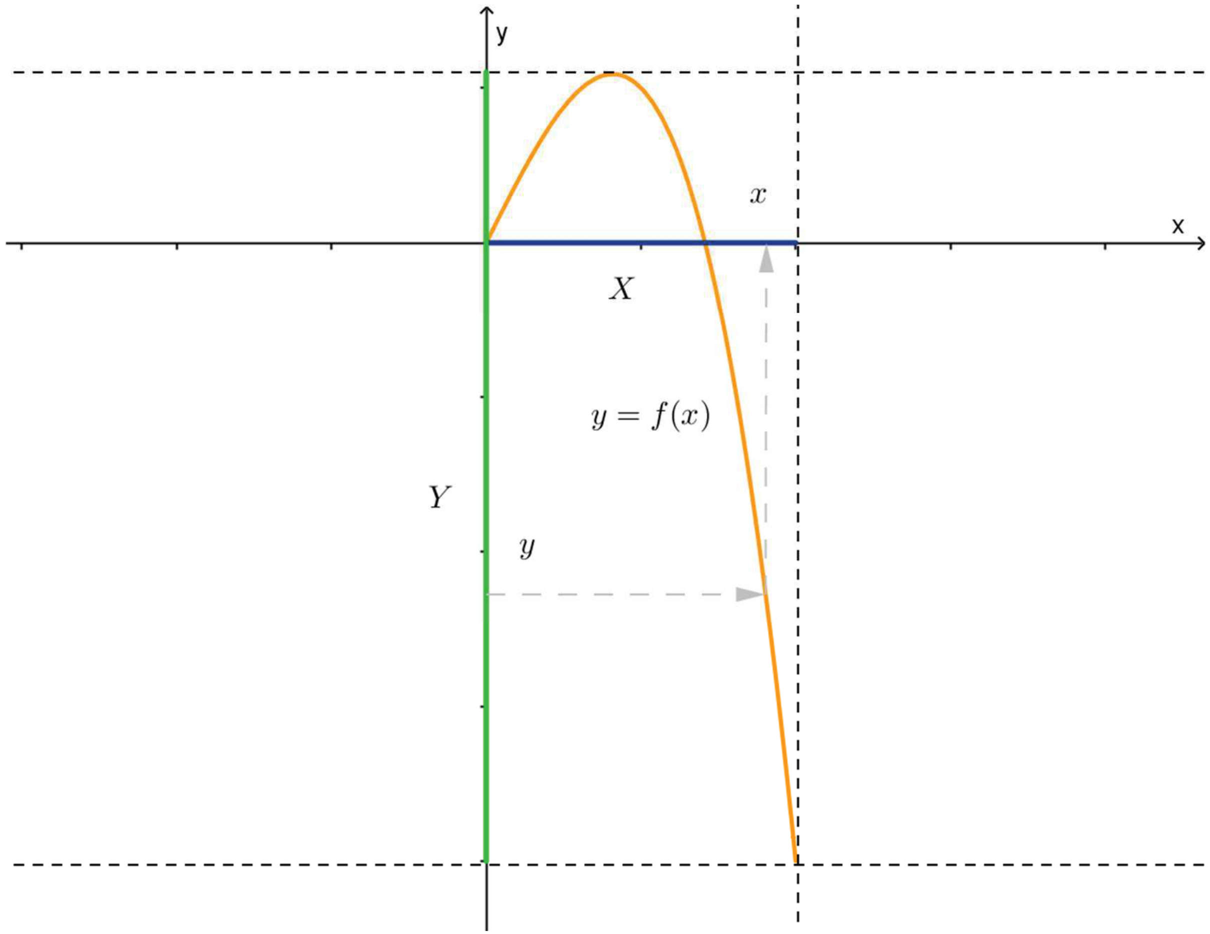
Zbiór X nazywamy dziedziną funkcji f $\left(D_f\right)$, zbiór Y jej przeciwdziedziną, a $\left\{f(x) \in Y : x \in D_f\right\}$ nazywamy zbiorem wartości funkcji f $\left(W_f\right)$.

Definicja (wykres funkcji). Wykresem funkcji $f : X \to Y$ to zbiór $\left\{(x, y) \in R^2 : x \in X, y = f(x)\right\}$.

Przykład. $y = E(x) = [x] = a$ dla $a \le x < a+1,\ a \in Z$
(funkcja część całkowita)



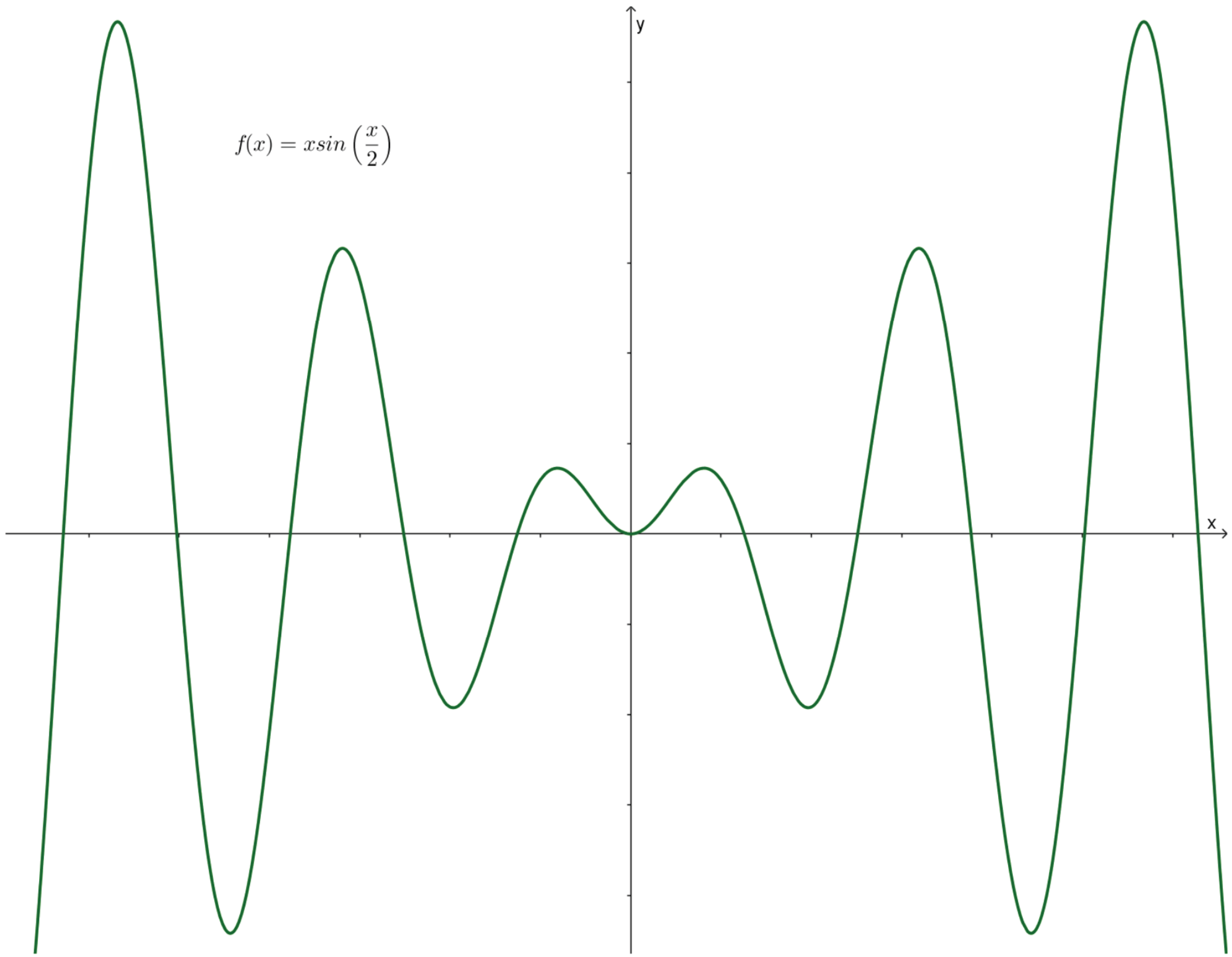
Definicja (odwzorowanie „na" (suriekcja)). Jeżeli $W_f = Y$, to mówimy, że funkcja f odwzorowuje zbiór X na zbiór Y, co zapisujemy $f : X \xrightarrow{na} Y$.



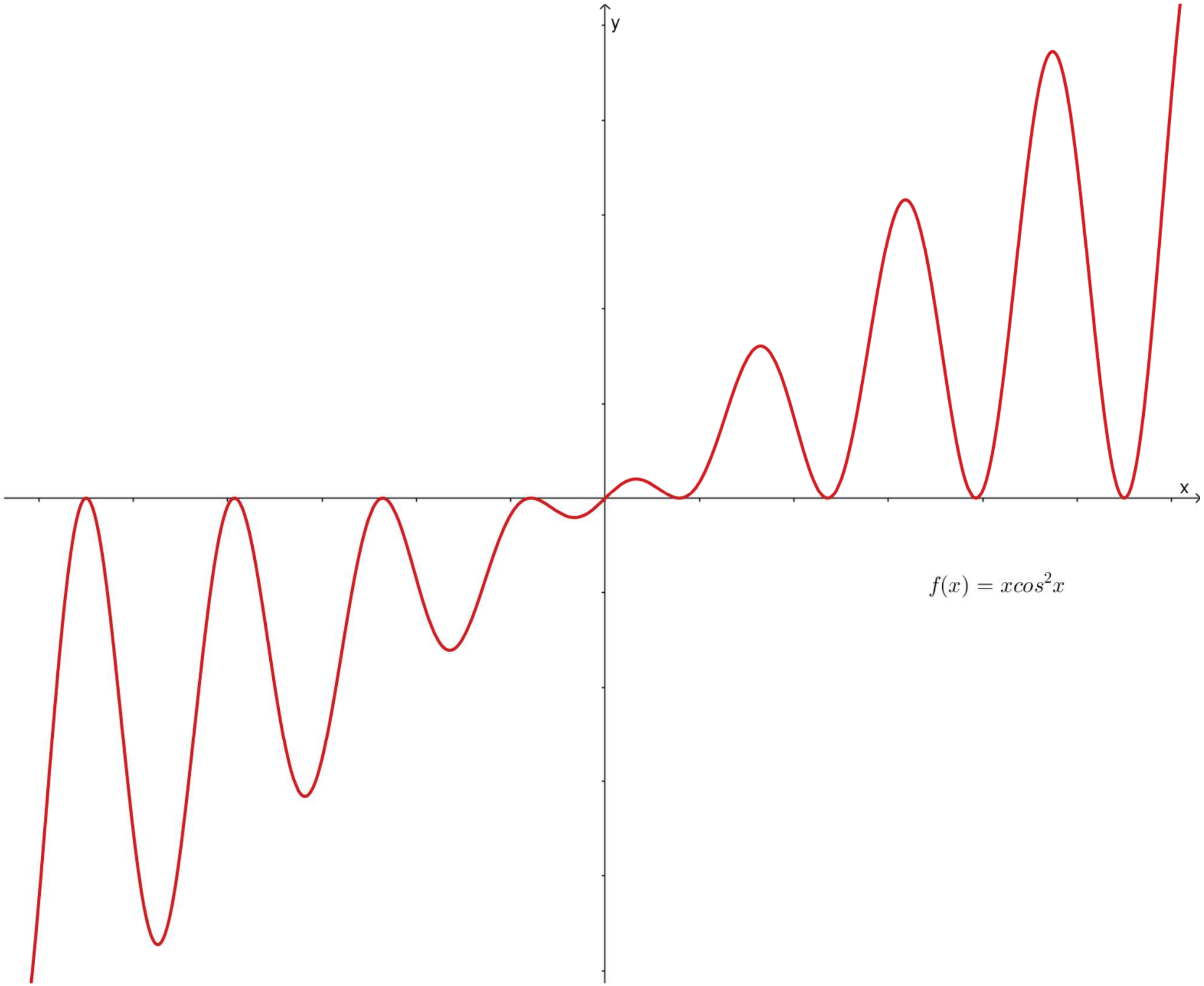
Własności funkcji

Funkcja $f : X \to R$ jest:

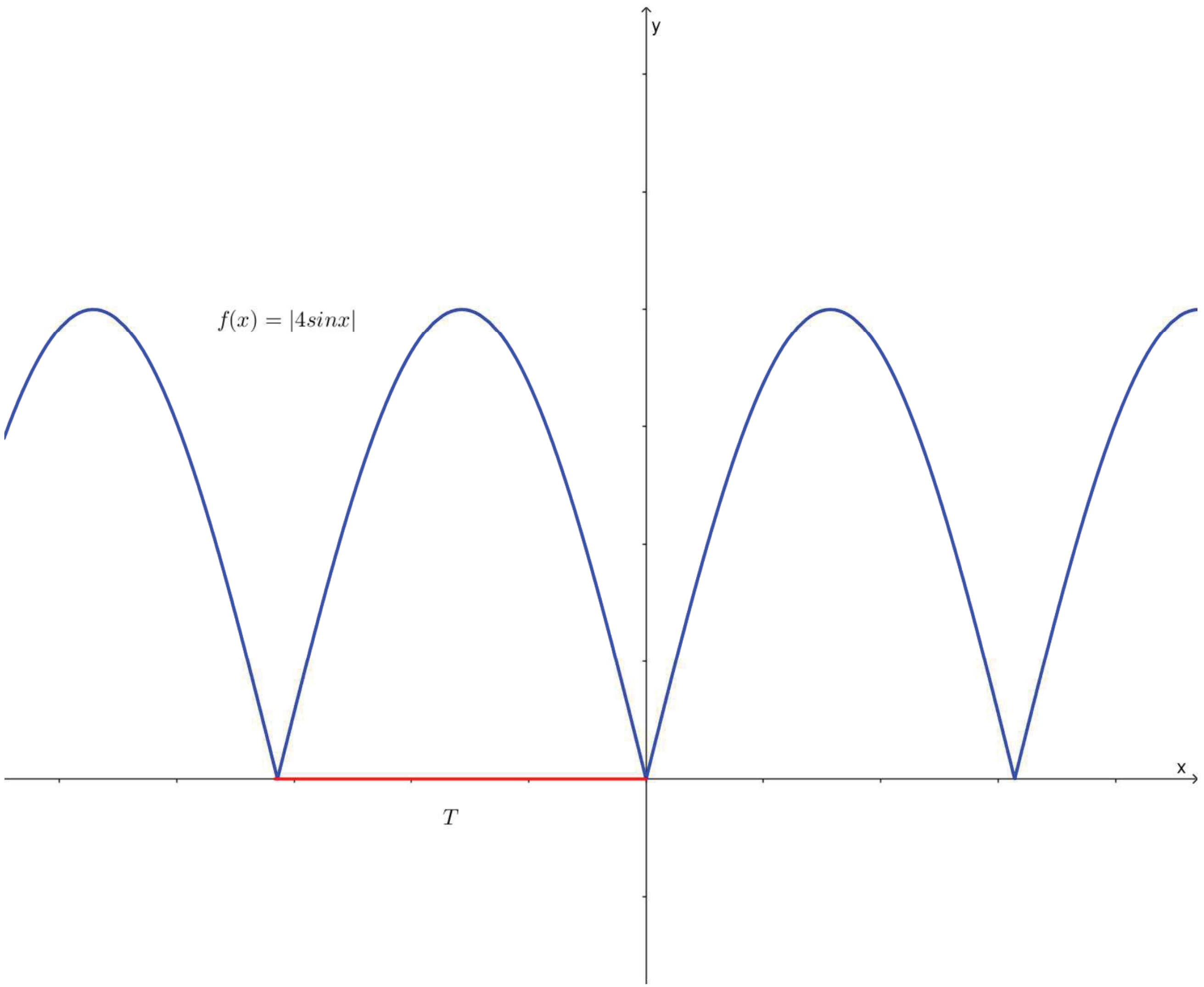
- parzysta, jeżeli $\forall_{x \in X} [-x \in X \quad \text{oraz} \quad f(-x) = f(x)]$,



- nieparzysta, jeżeli $\forall_{x \in X} \left[-x \in X \quad \text{oraz} \quad f(-x) = -f(x) \right]$,

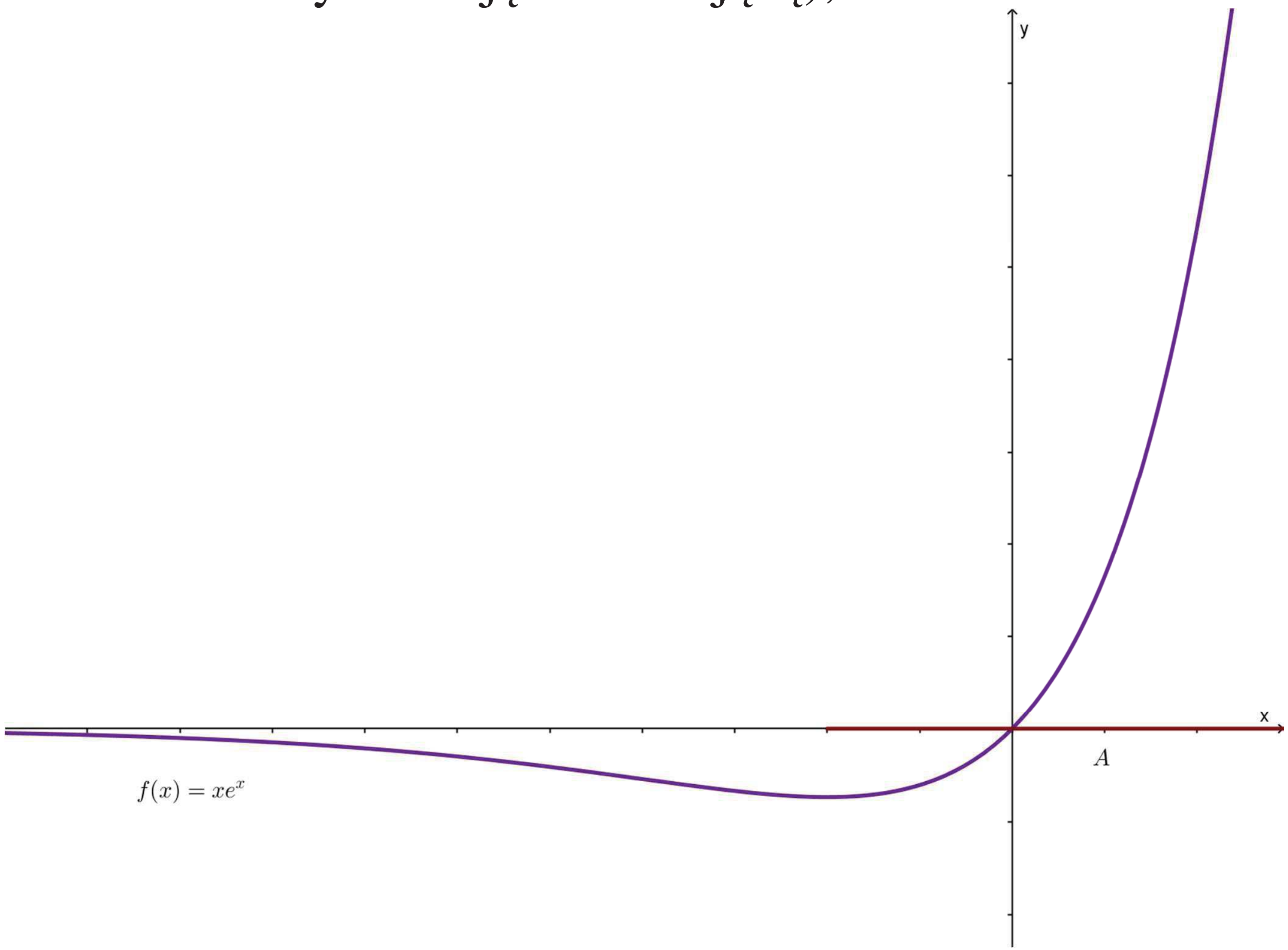


- okresowa, jeżeli $\underset{T>0}{\exists}\ \underset{x\in X}{\forall}\left[x\pm T\in X \quad \text{oraz} \quad f(x+T)=f(x)\right]$,

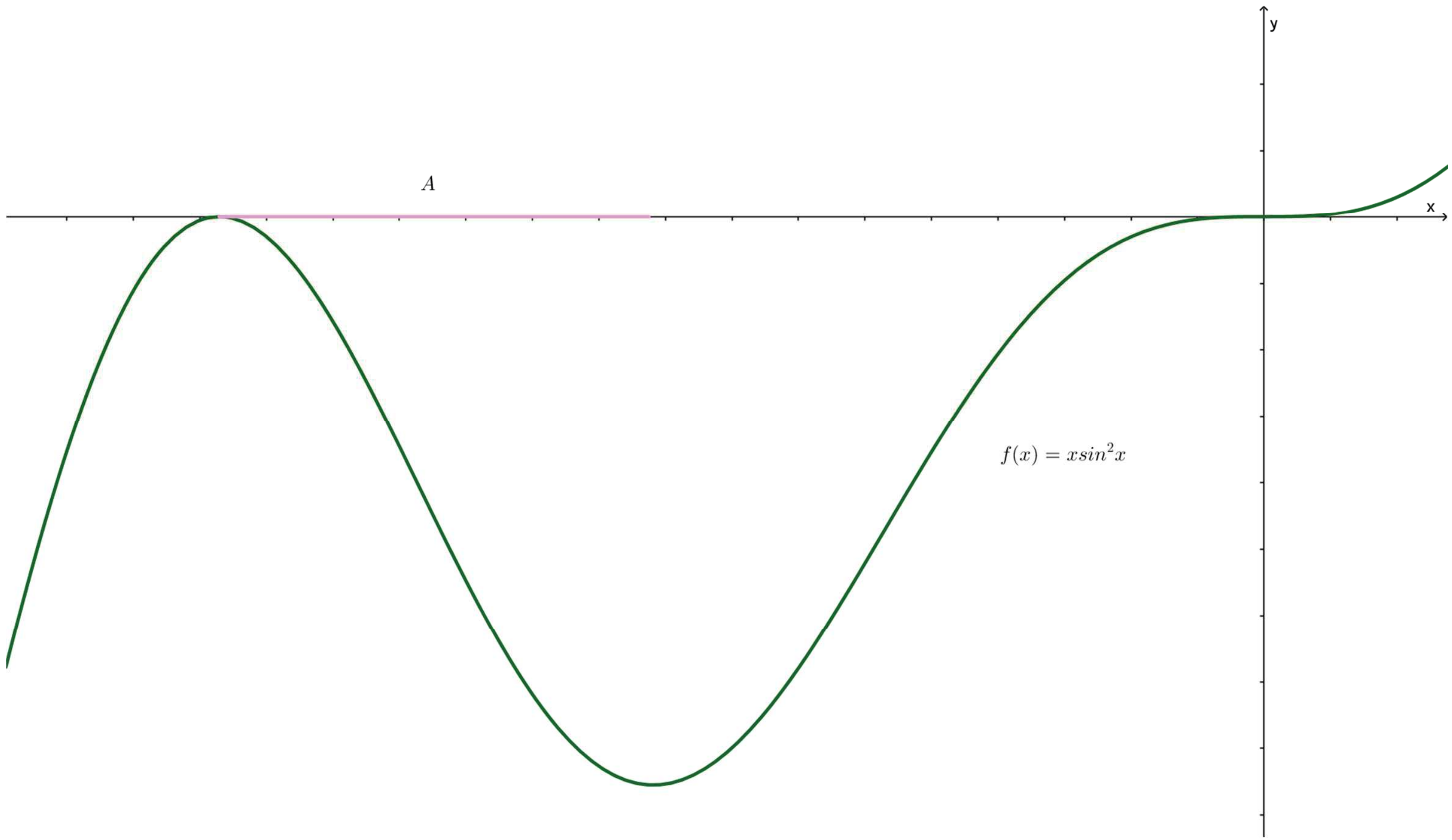


- ograniczona na zbiorze $A\subset D_f$, jeżeli $\underset{m,M\in R}{\exists}\ \underset{x\in A}{\forall}\ m\le f(x)\le M$,

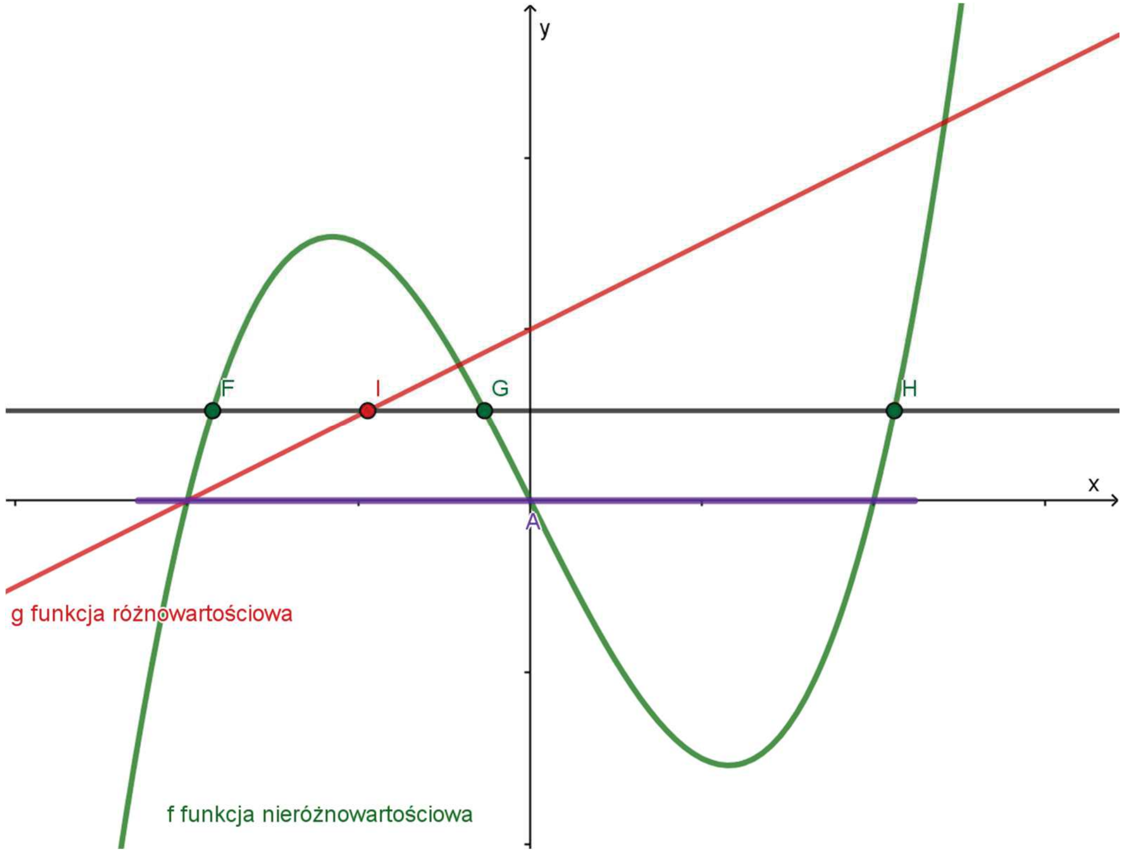
- rosnąca na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli $\underset{x_1, x_2 \in A}{\forall}\left[(x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) < f(x_2))\right]$ (podobnie określamy funkcję niemalejącą),



- malejąca na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli $\underset{x_1, x_2 \in A}{\forall} \left[(x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) > f(x_2)) \right]$, (podobnie określamy funkcję nierosnącą),

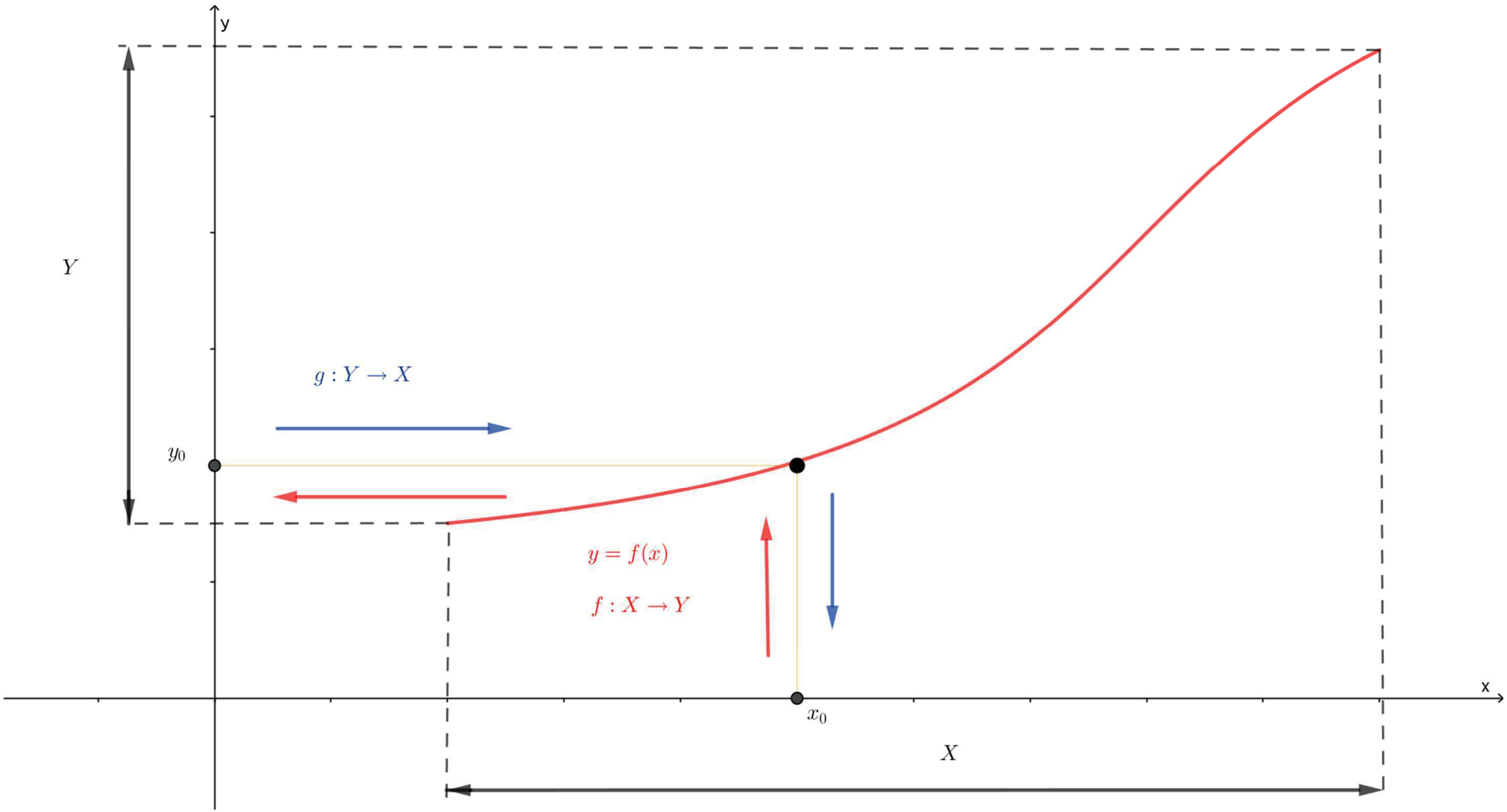


- monotoniczna na zbiorze, jeżeli jest rosnąca, malejąca, nierosnąca lub niemalejąca na tym zbiorze,
- różnowartościowa (iniekcja) na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli $\underset{x_1, x_2 \in A}{\forall} \left[(x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2)) \right] \left(\underset{x_1, x_2 \in A}{\forall} \left[(f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2) \right] \right)$.



Definicja (złożenie (superpozycja) funkcji). Niech $f : X \to Y$, $g : Z \to W$, przy czym X, Y, Z, W są podzbiorami liczb rzeczywistych spełniającymi warunek $Y \subset Z$. Złożeniem funkcji g i f nazywamy funkcję $g \circ f : X \to W$ określoną wzorem

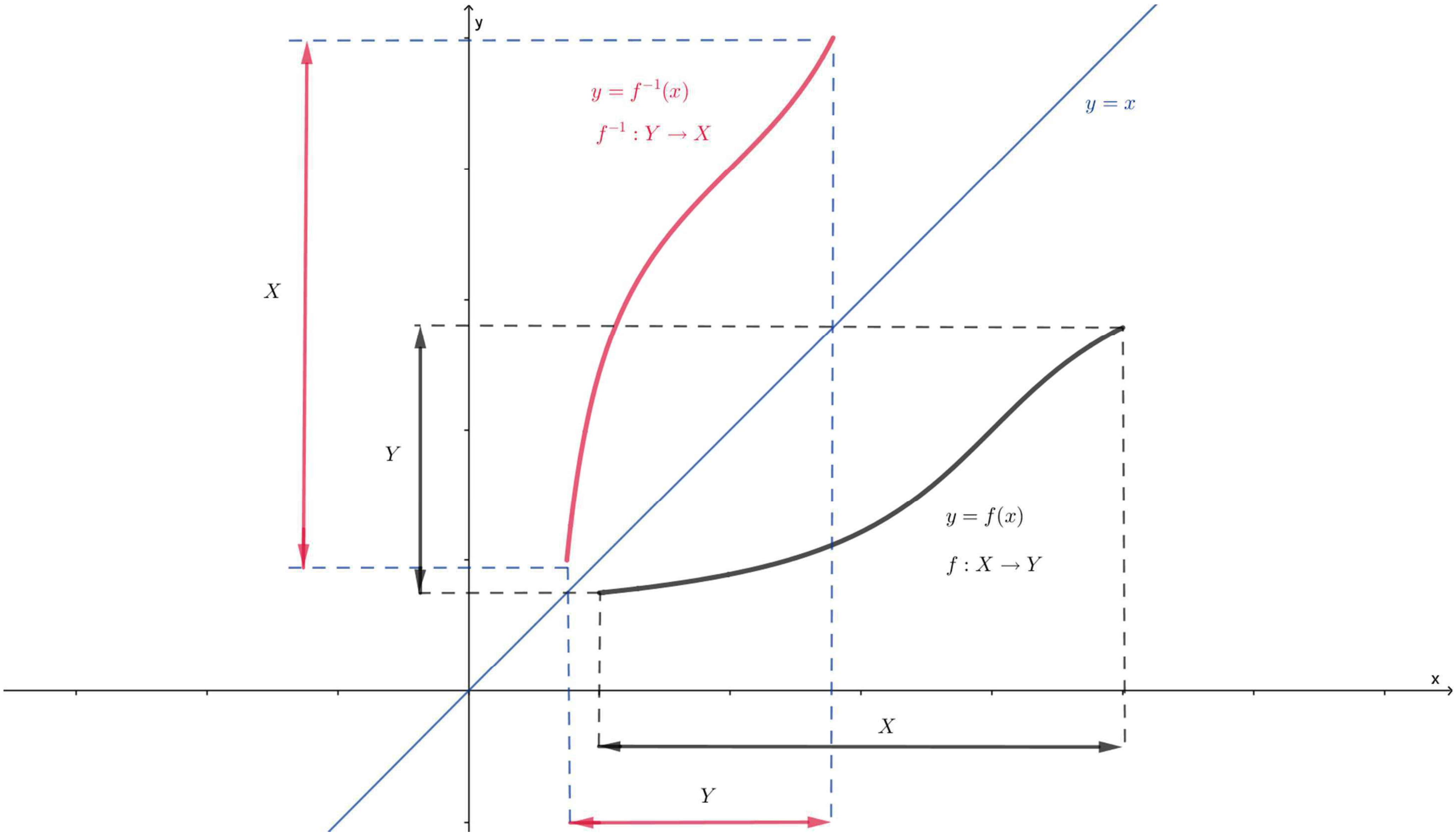
$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) \text{ dla } x \in X .$$



y
Y
$g : Y \to X$
y_0
$y = f(x)$
$f : X \to Y$
x
x_0
X

Definicja (funkcja odwrotna). Załóżmy, że funkcja $f : X \xrightarrow{na} Y$ jest różnowartościowa na dziedzinie. Funkcja odwrotna do f to funkcja $f^{-1} : Y \to X$ określona przez warunek

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x) \text{ dla } x \in X,\ y \in Y.$$

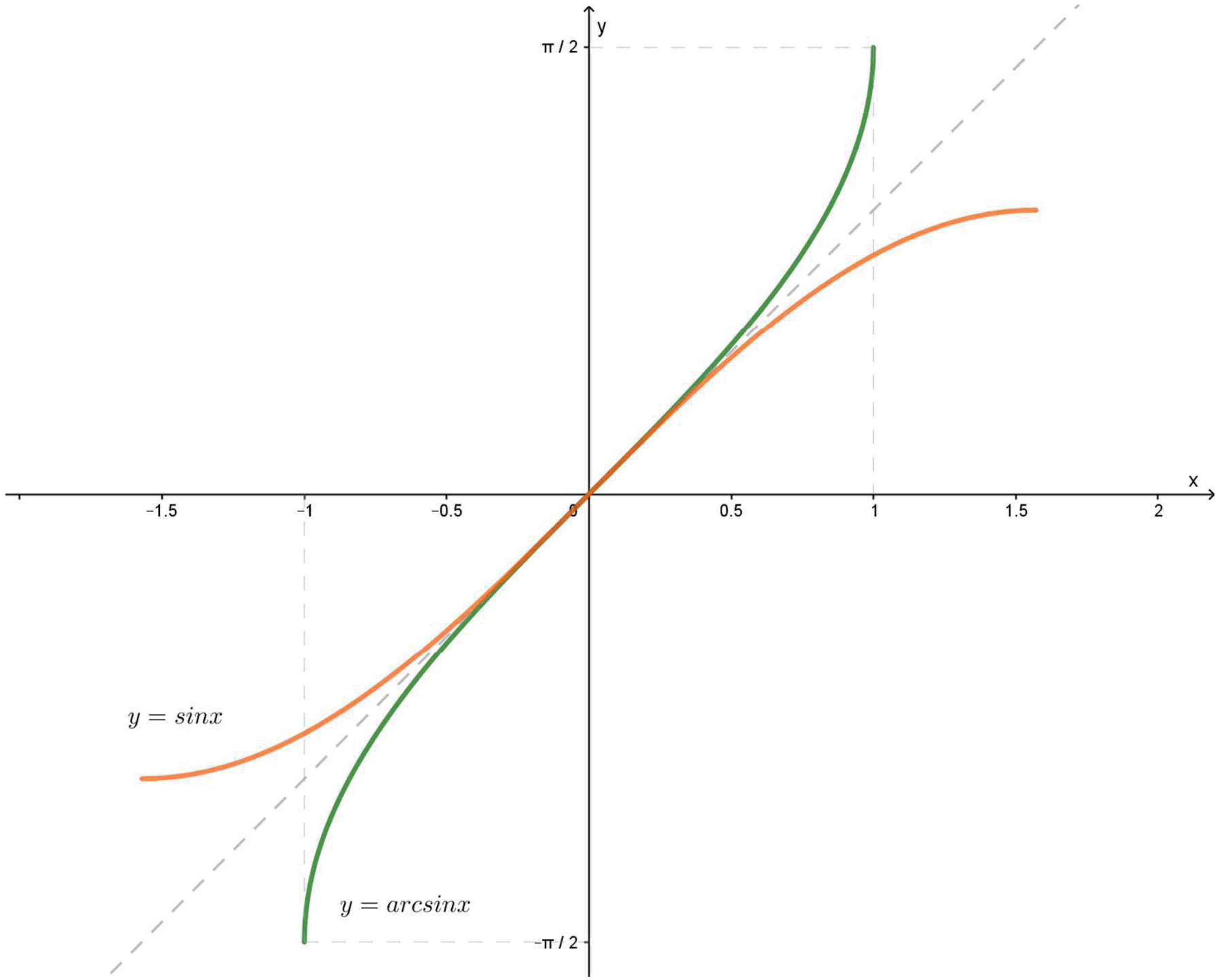


y
x
$y = f^{-1}(x)$
$f^{-1} : Y \to X$
$y = x$
X
Y
$y = f(x)$
$f : X \to Y$
X
Y

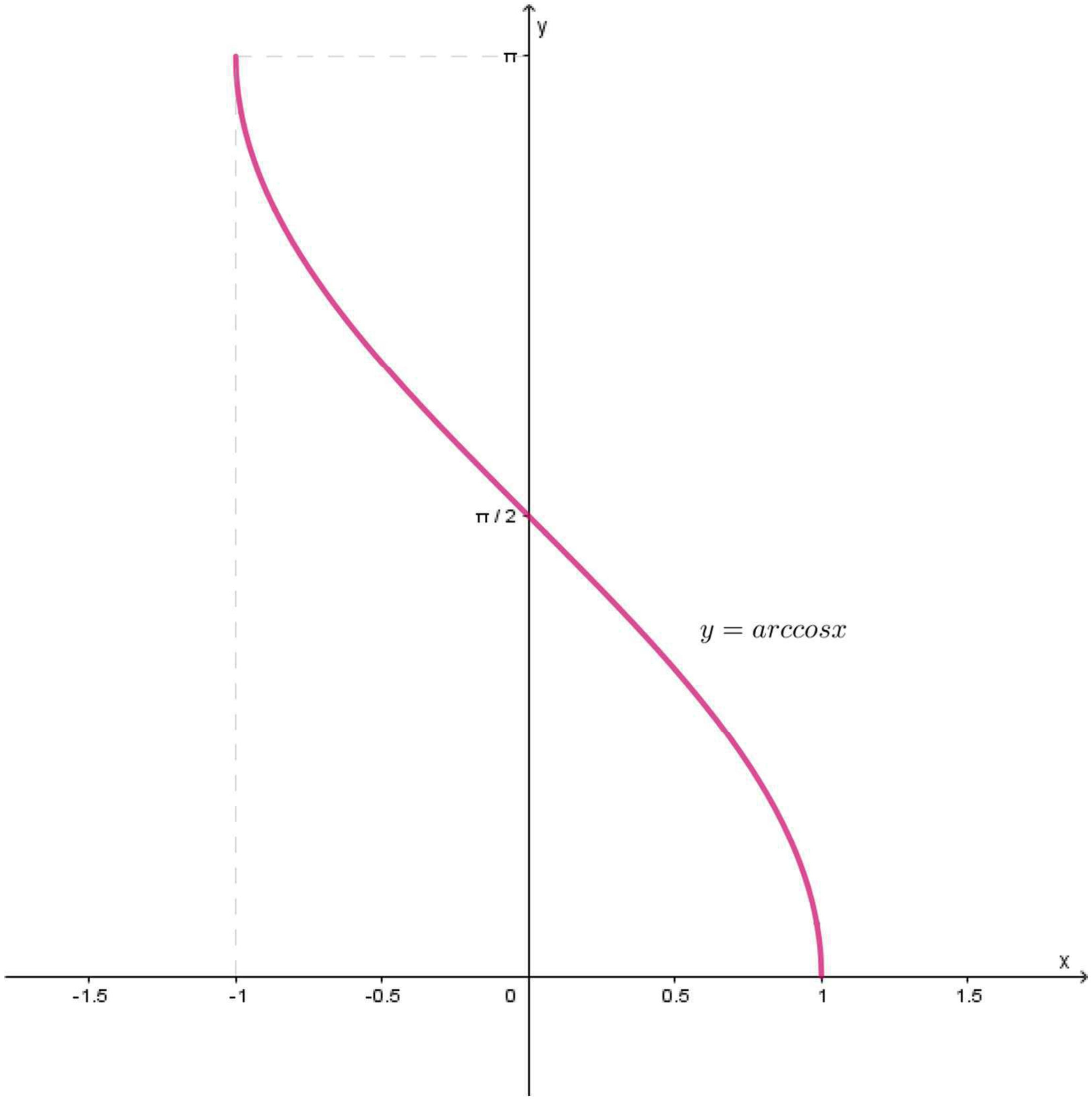
Podstawowe funkcje elementarne: stałe, potęgowe, wykładnicze, logarytmiczne, trygonometryczne oraz cyklometryczne.

Funkcje cyklometryczne (kołowe)

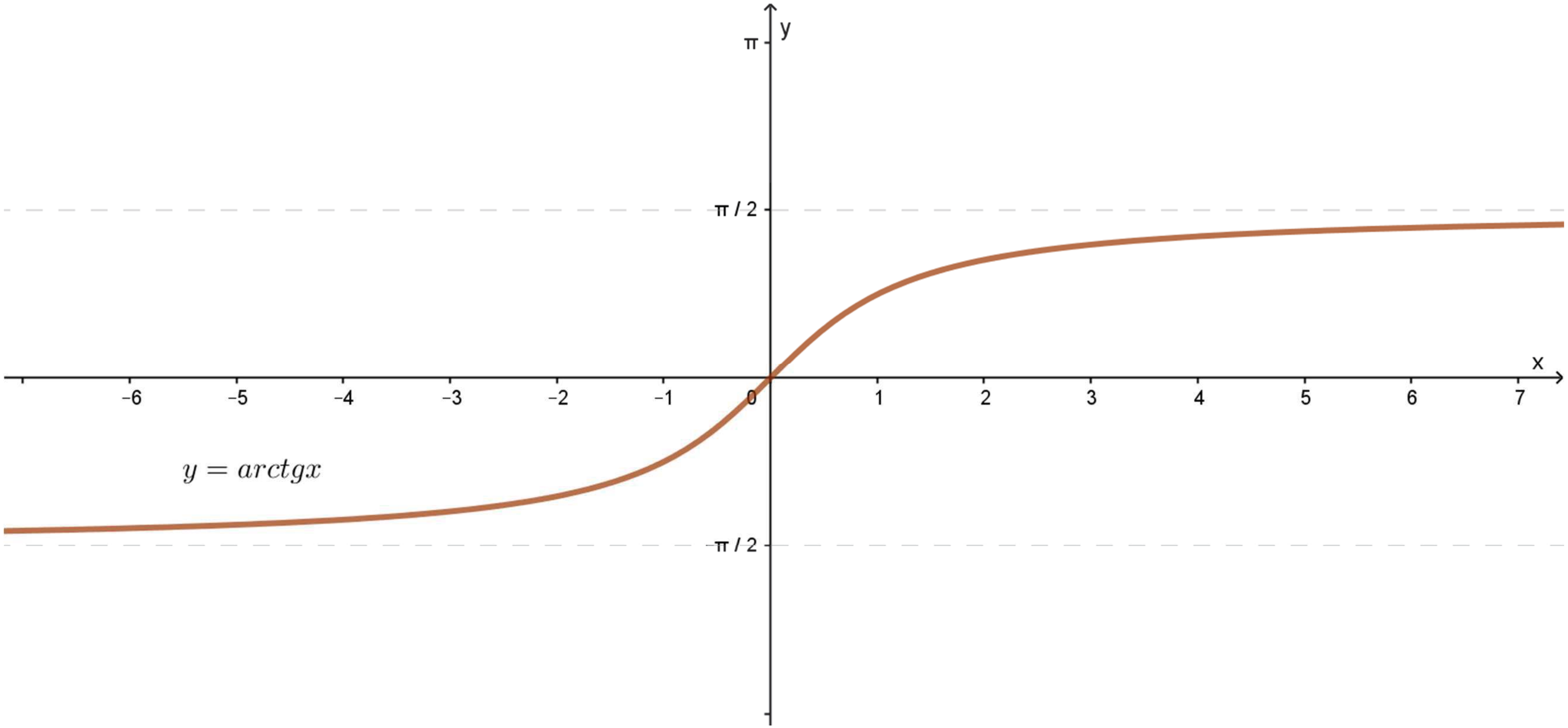
$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y,\ x \in \langle -1,1 \rangle,\ y \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle,$$



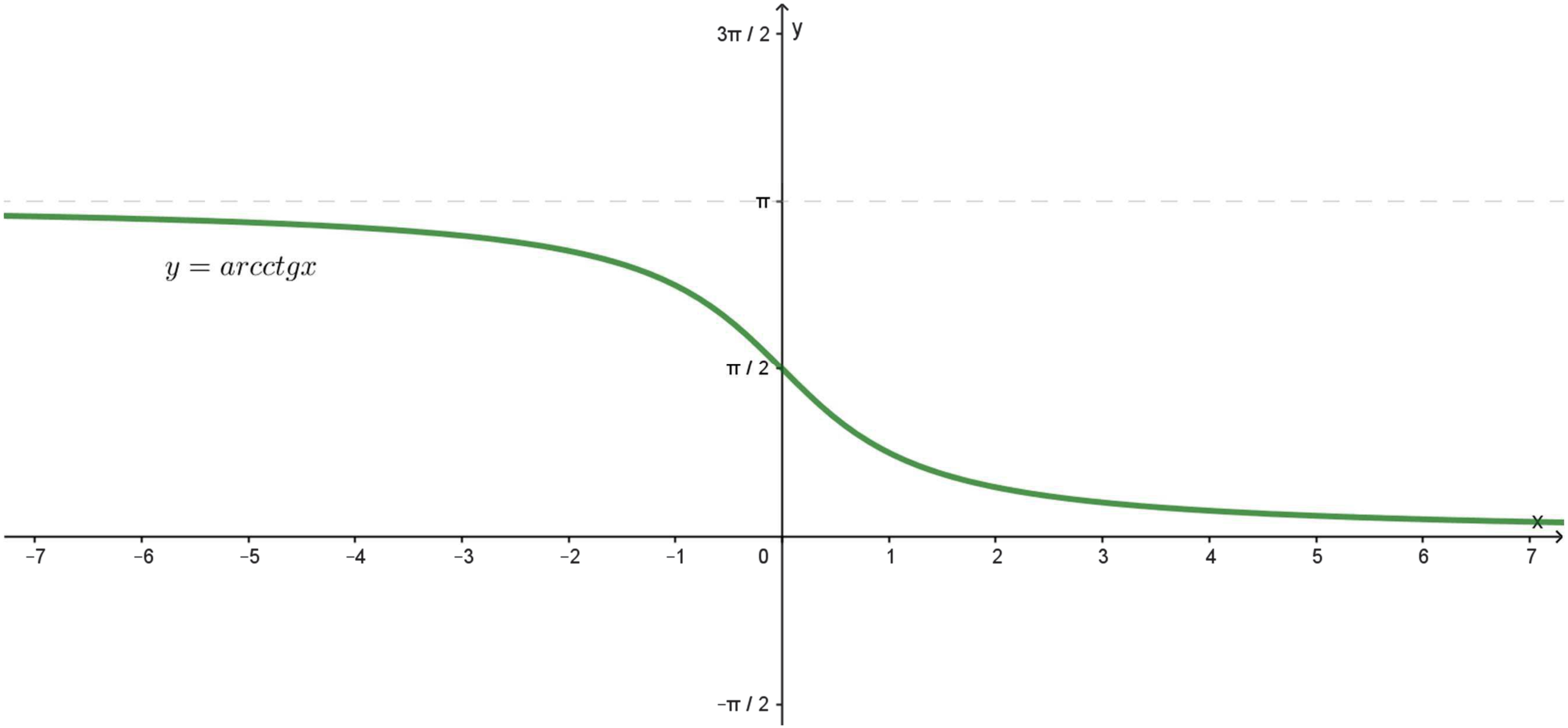
$$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y,\ x \in \langle -1,1 \rangle,\ y \in \langle 0, \pi \rangle,$$



$$y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y,\ x \in R,\ y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$



$$y = \operatorname{arcctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{ctg} y,\ x \in R,\ y \in (0, \pi).$$



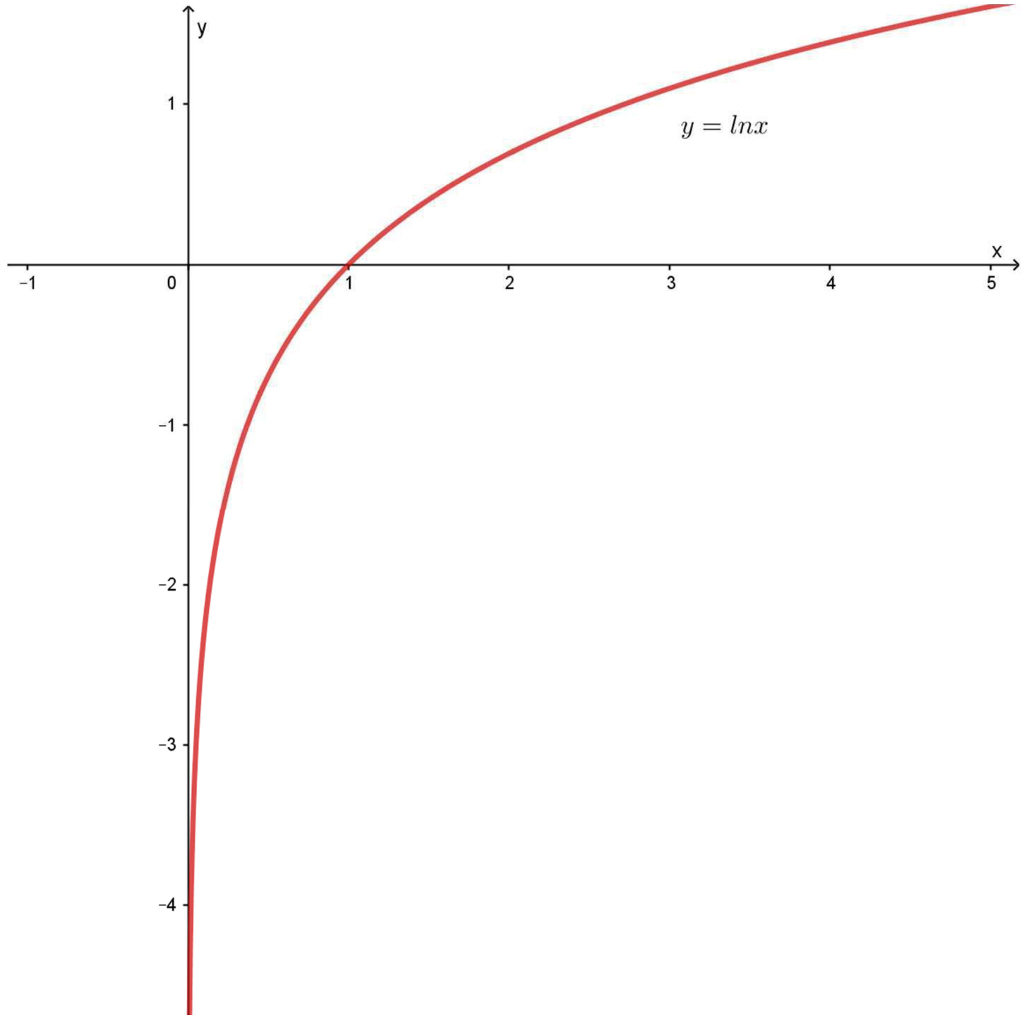
Tożsamości z funkcjami cyklometrycznymi

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},\ x \in [-1,1],$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2},\ x \in R.$$

Logarytm naturalny

$y = \ln x \;\; (= \log_e x),\; x > 0$, gdzie liczba $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718\ldots$



Podstawowe własności

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y,$$

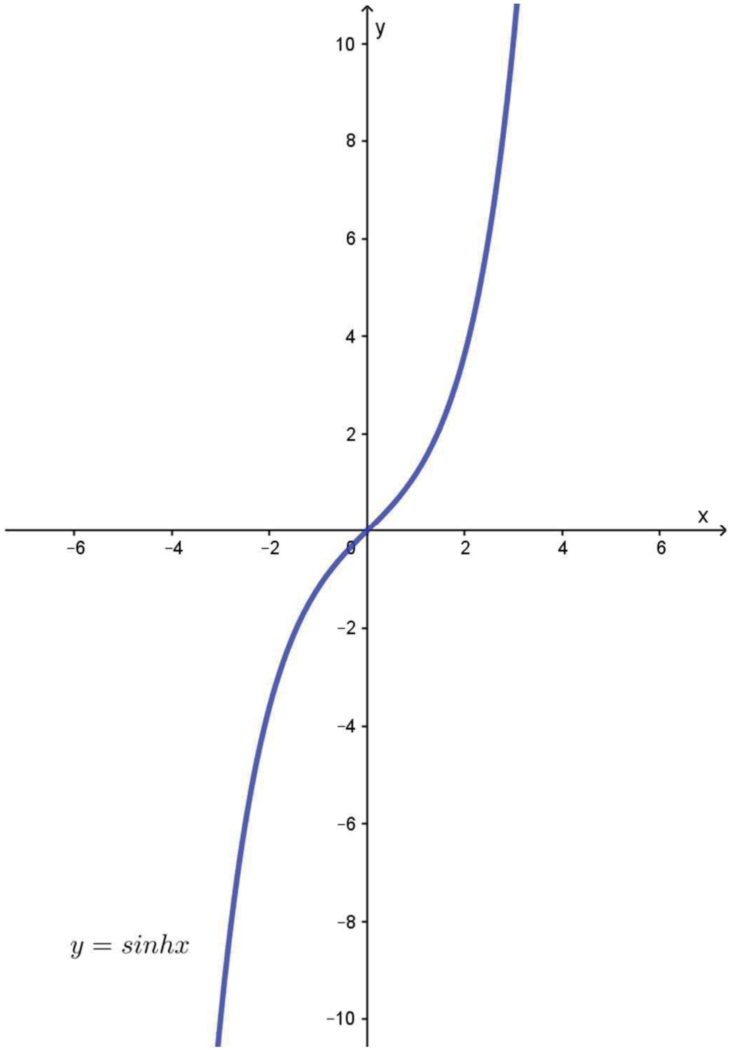
$$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y,$$

$$\ln x^{y} = y \ln x,$$

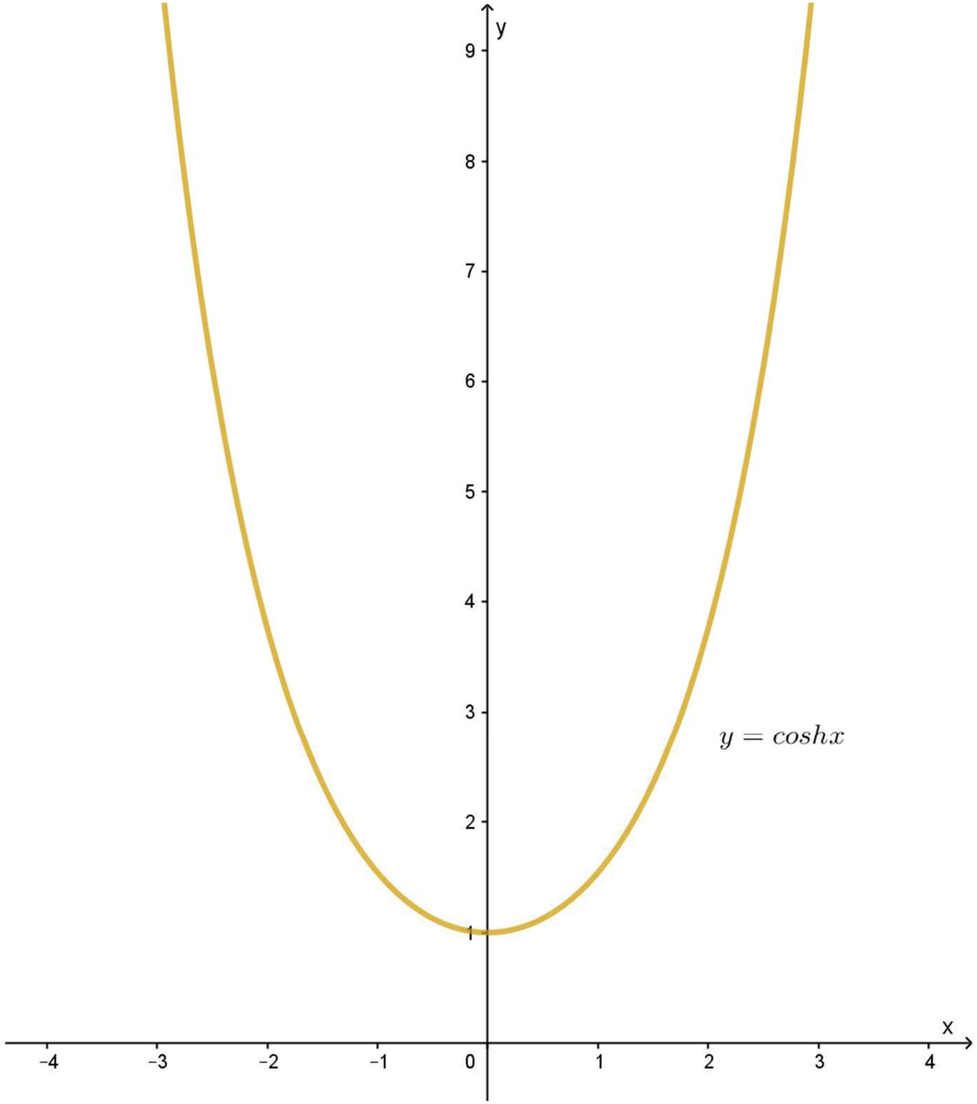
$$x = e^{\ln x}.$$

Funkcje hiperboliczne

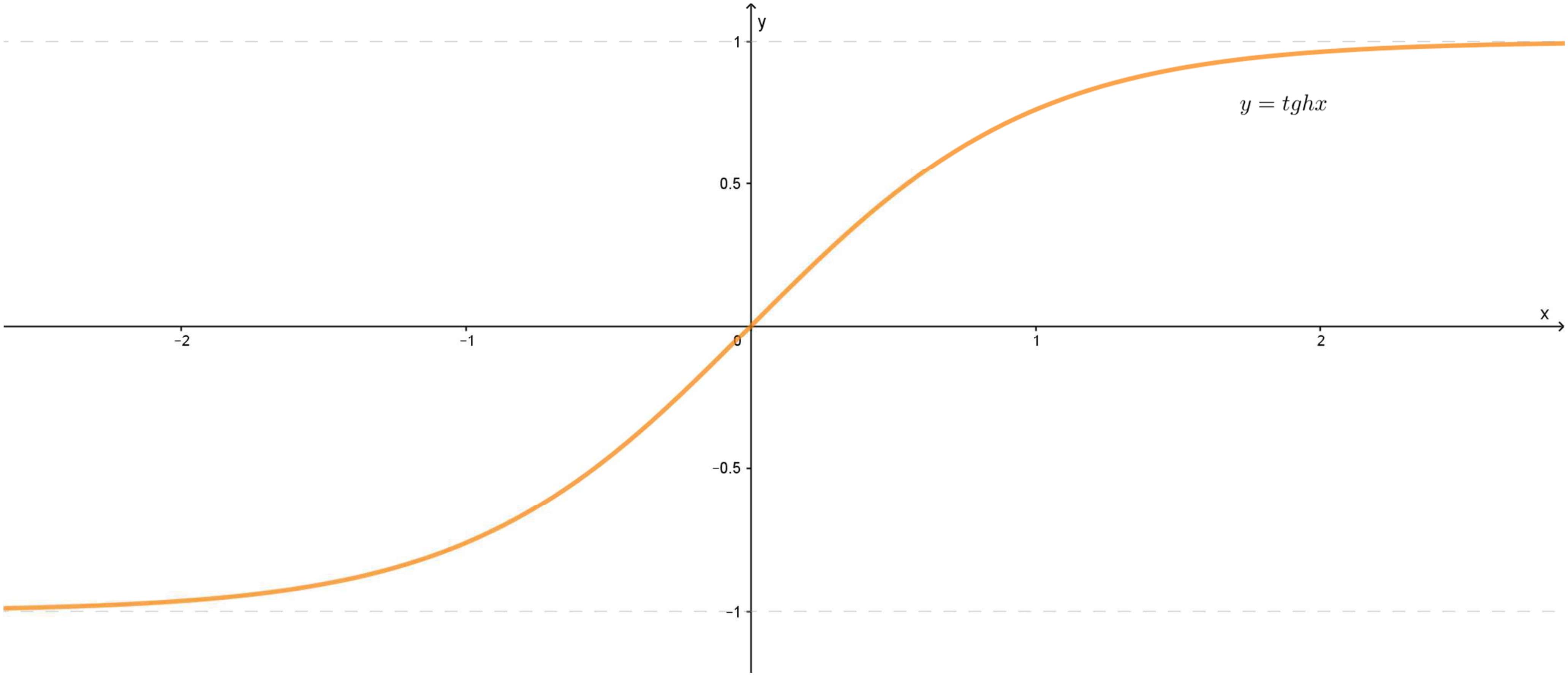
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ x \in R,$$



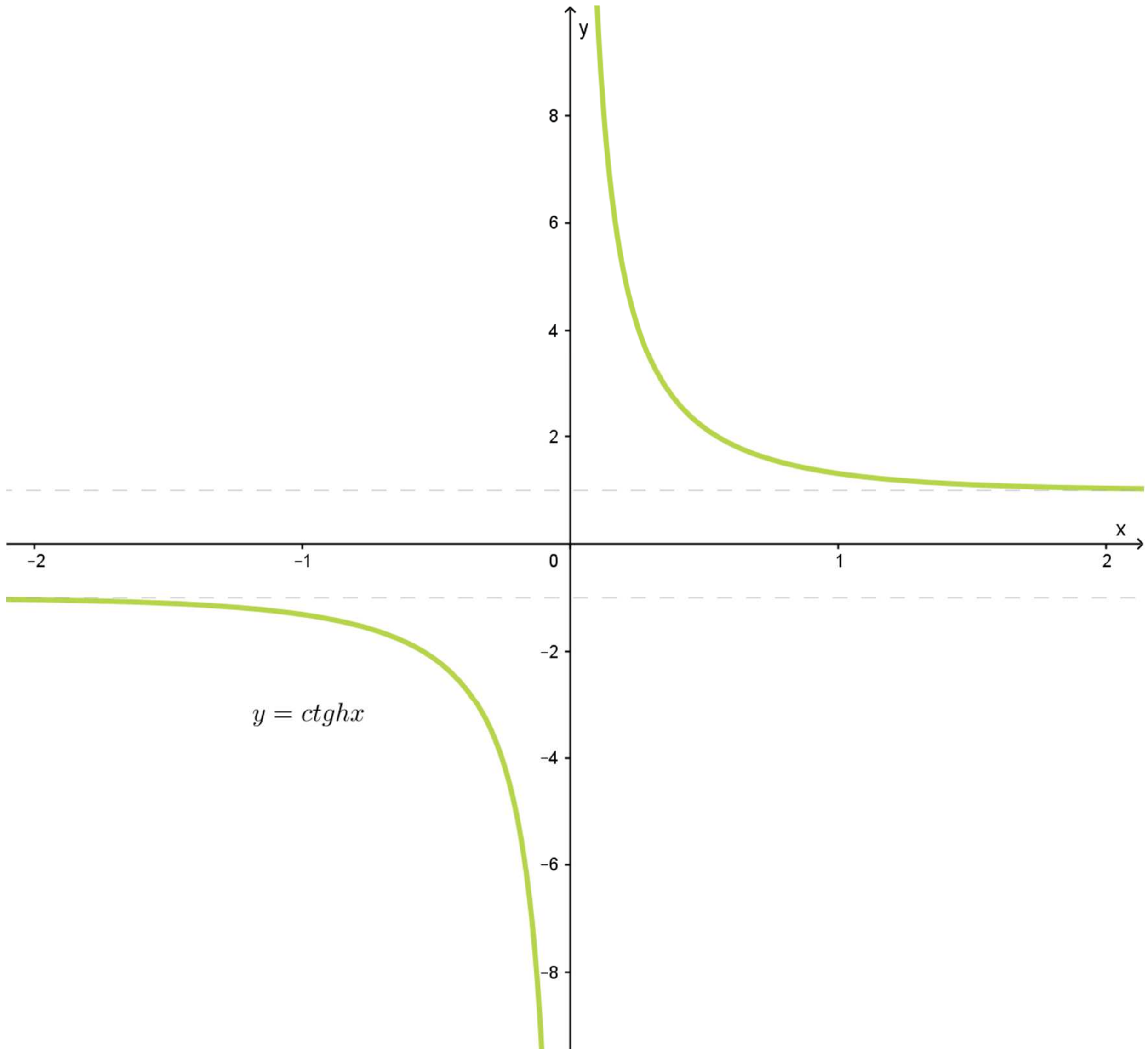
$$\cosh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2},\ x \in R,$$



$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x},\ x \in R,$$



$$\operatorname{ctgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x},\ x \in R \setminus \{0\}.$$



Tożsamości z funkcjami hiperbolicznymi

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

$$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x,$$

$$\cosh 2x = \sinh^2 x + \cosh^2 x,$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$$

$$\sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y,$$

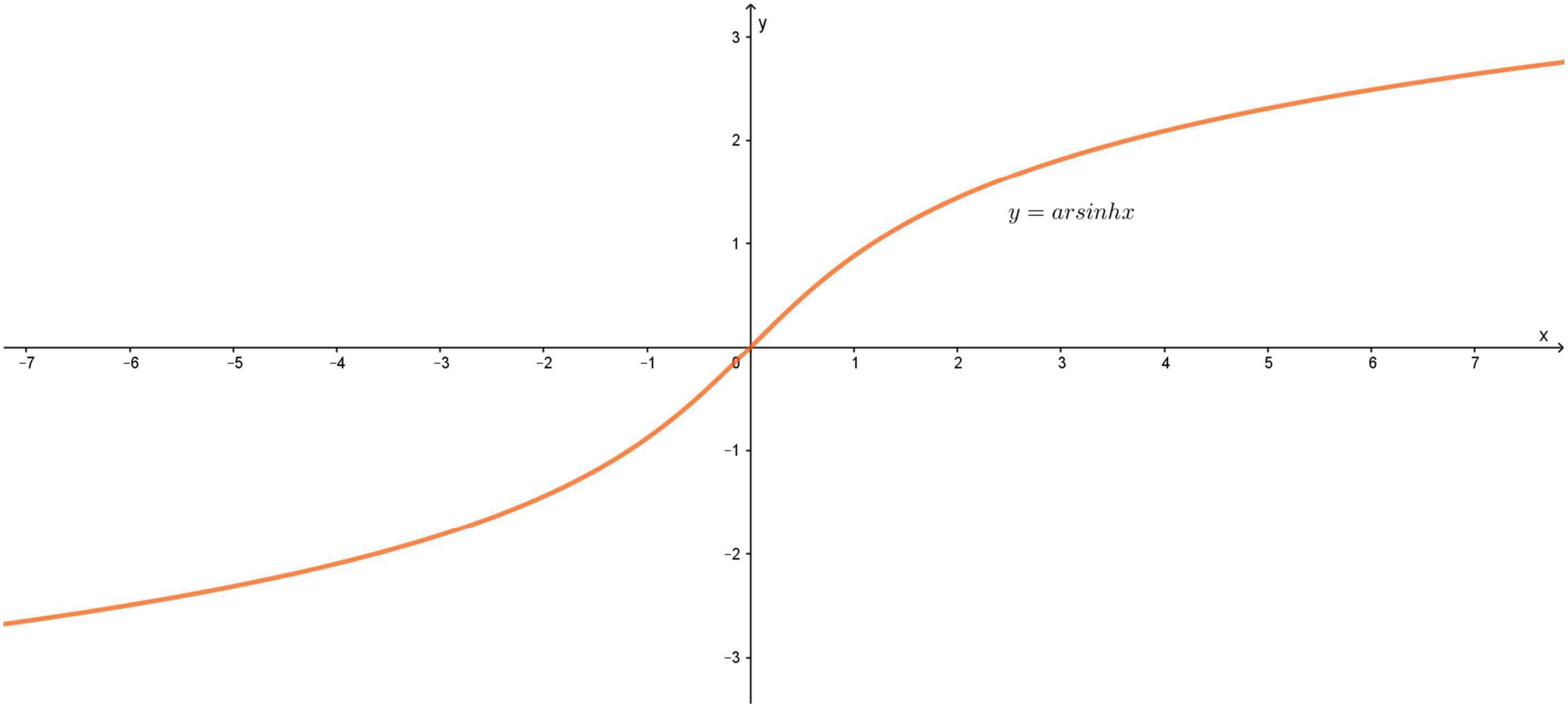
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$

$$\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y.$$

Funkcje area

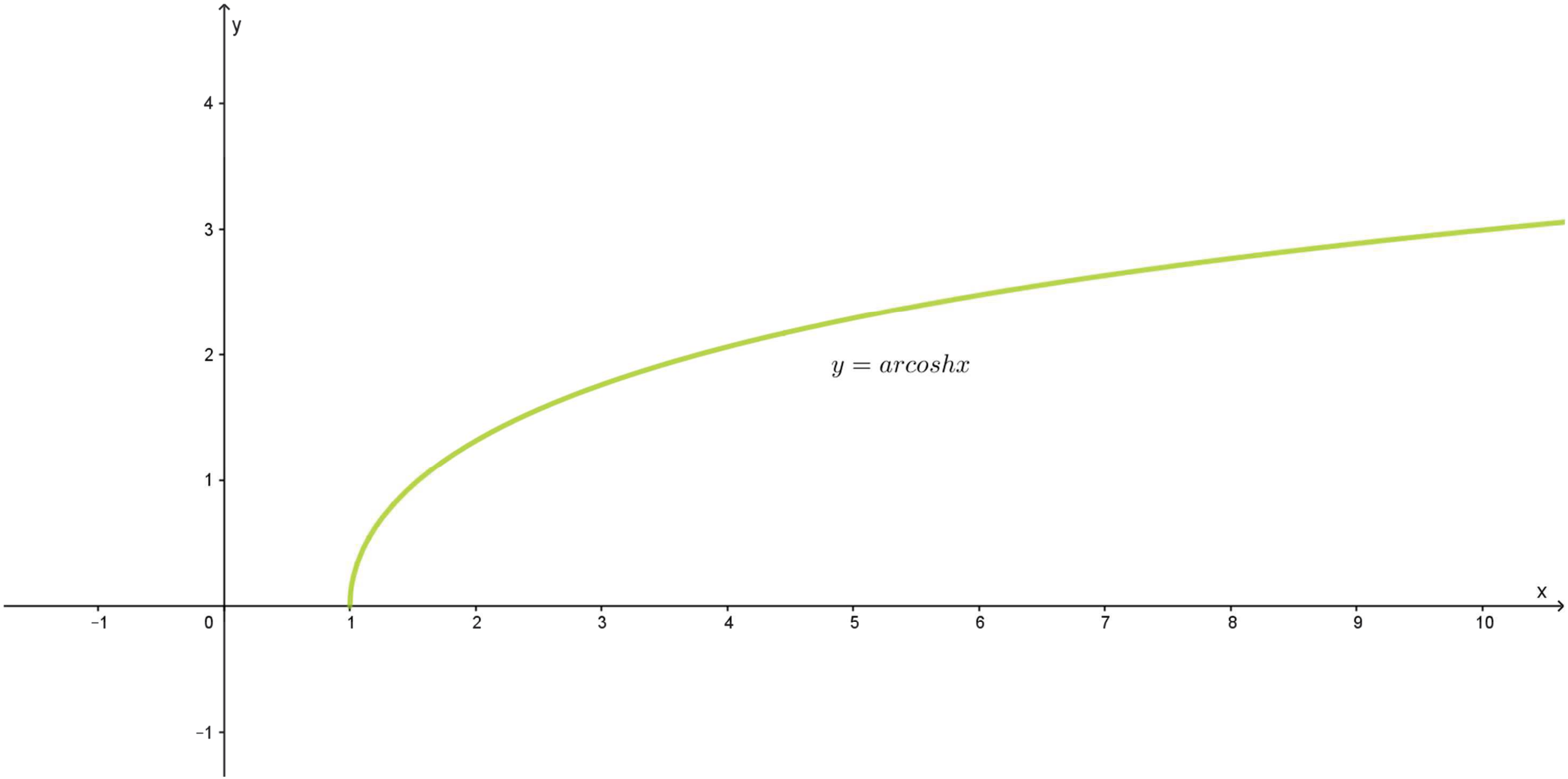
$$y = \operatorname{arsinh} x \Leftrightarrow x = \sinh y,\ x \in R,\ y \in R$$

$$\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$



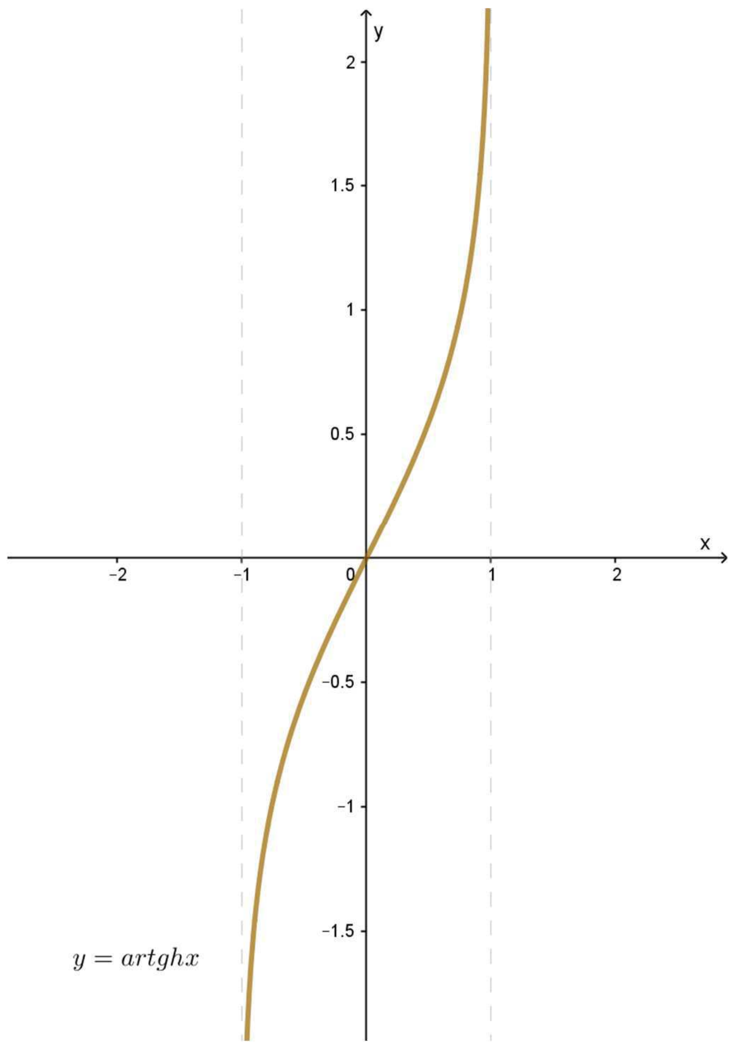
$$y = \operatorname{arcosh} x \Leftrightarrow x = \cosh y,\; x \in \langle 1, +\infty),\; y \in \langle 0, +\infty)$$

$$\operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$



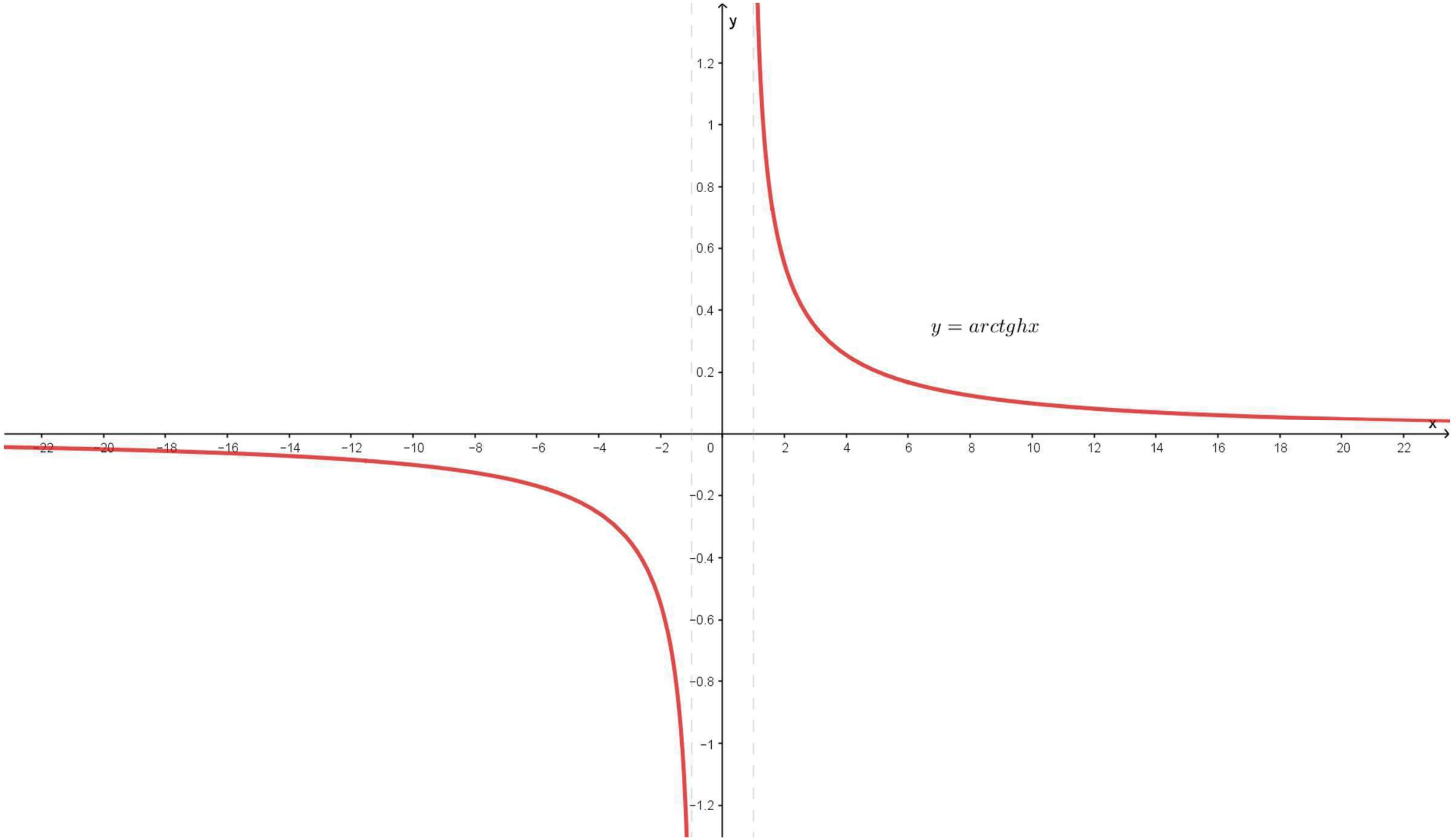
$$y = \operatorname{artgh} x \Leftrightarrow x = \operatorname{tgh} y,\ x \in (-1,1),\ y \in R$$

$$\operatorname{artgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$



$$y = \operatorname{arctgh} x \Leftrightarrow x = \operatorname{ctgh} y,\ x \in (-\infty,-1),\ y \in (-\infty,0);\ x \in (1,\infty),\ y \in (0,\infty)$$

$$\operatorname{arctgh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$$



Funkcja uwikłana

Niech dany będzie przedział X. Funkcją uwikłaną zdefiniowaną przez równość $F(x, y) = 0$ nazywamy funkcję $y = y(x)$ spełniającą warunek $F(x, y(x)) = 0$, $x \in X$.

Analogicznie definiuje się funkcję uwikłaną $x = x(y)$, $y \in Y$.

Funkcja określona parametrycznie

Mówimy, że w zbiorze X jest określona parametrycznie funkcja złożona $y = f(x)$ za pomocą funkcji

$$x = x(t),\ y = y(t) \text{ dla } t \in T,$$

jeżeli funkcje $x = x(t)$ i $y = y(t)$ są określone w przedziale T, a funkcja $x(t)$ jest różnowartościowa w tym przedziale i zbiorem jej wartości jest zbiór X. Zmienną $t \in T$ nazywamy parametrem.

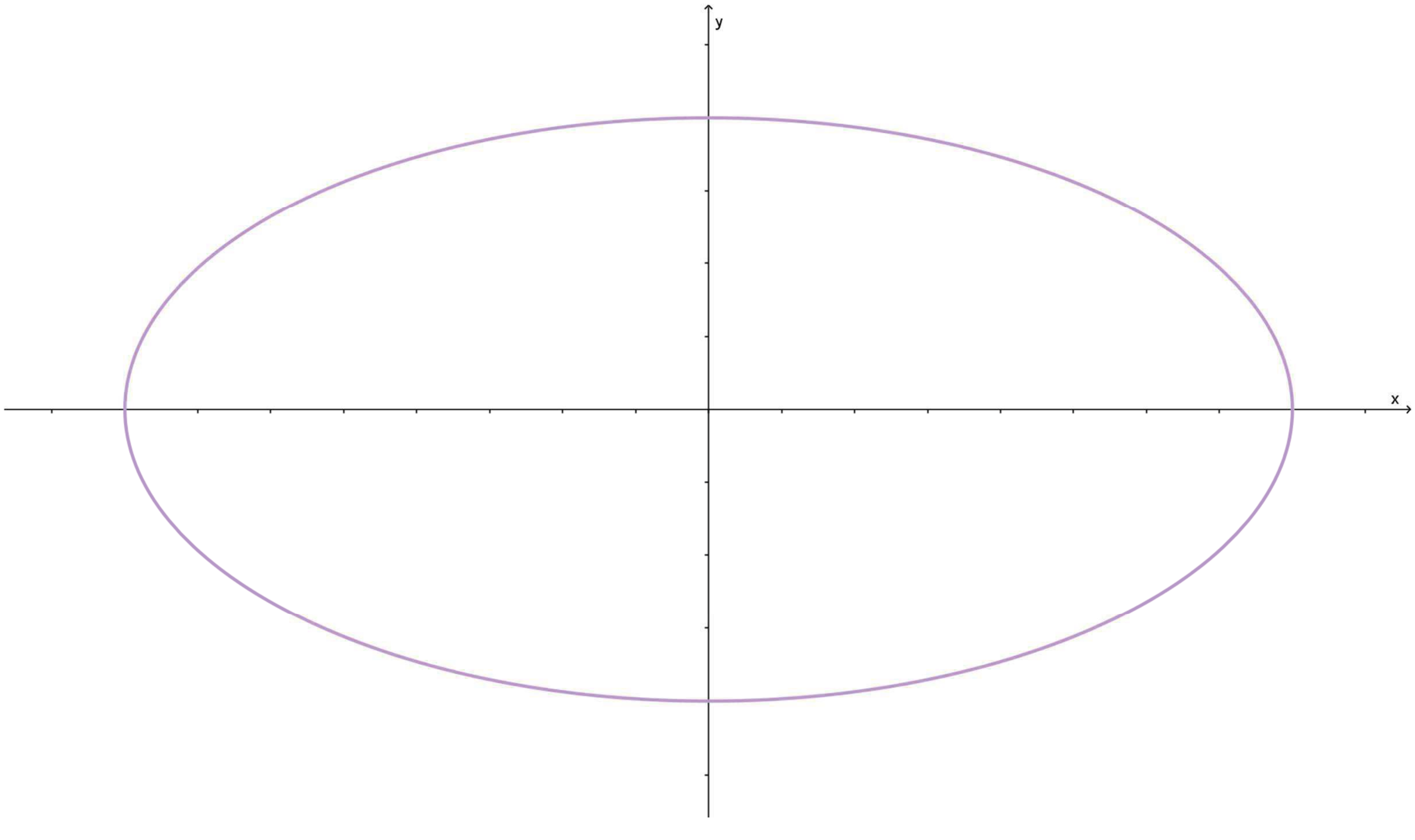
Uwaga. Każdej wartości t, dla której określone są funkcje $x = x(t)$ i $y = y(t)$, odpowiada punkt na płaszczyźnie.

Ta sama funkcja może mieć różne przedstawienia parametryczne.

Wybrane krzywe określone parametrycznie

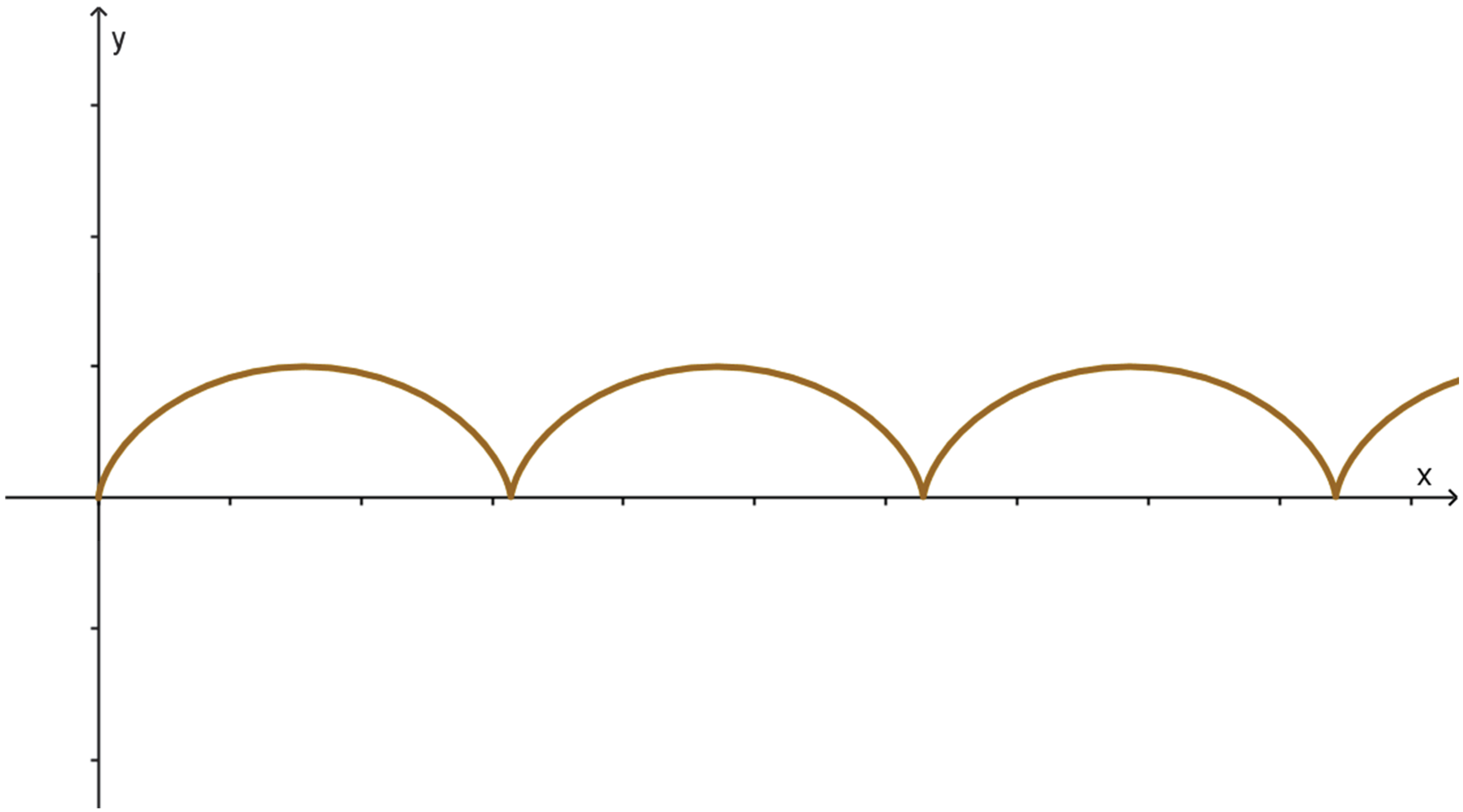
Elipsa

$$x = a\cos t,\ \ y = b\sin t$$



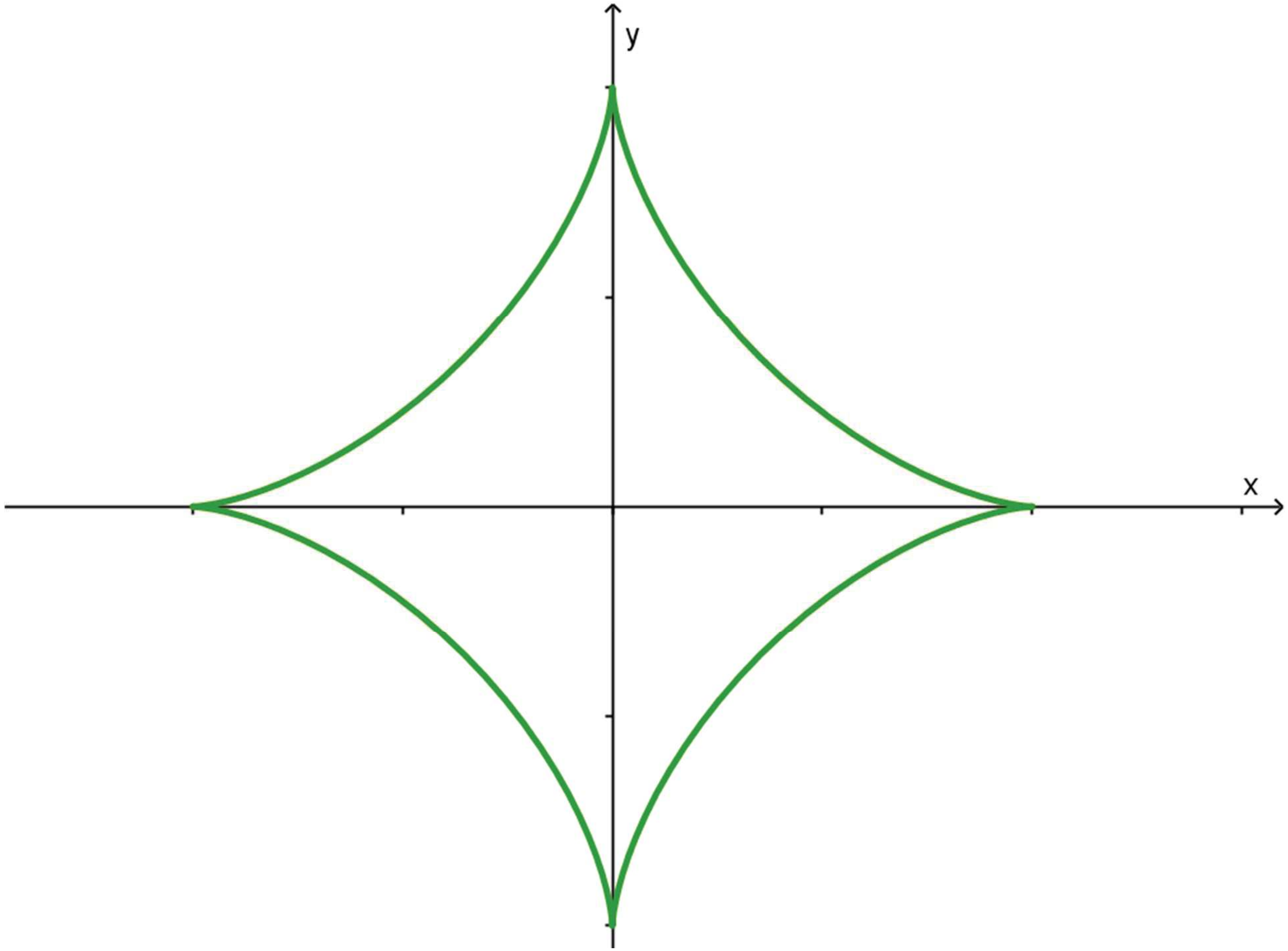
Cykloida

$$x = a(t - \sin t),\ \ y = a(1 - \cos t)$$



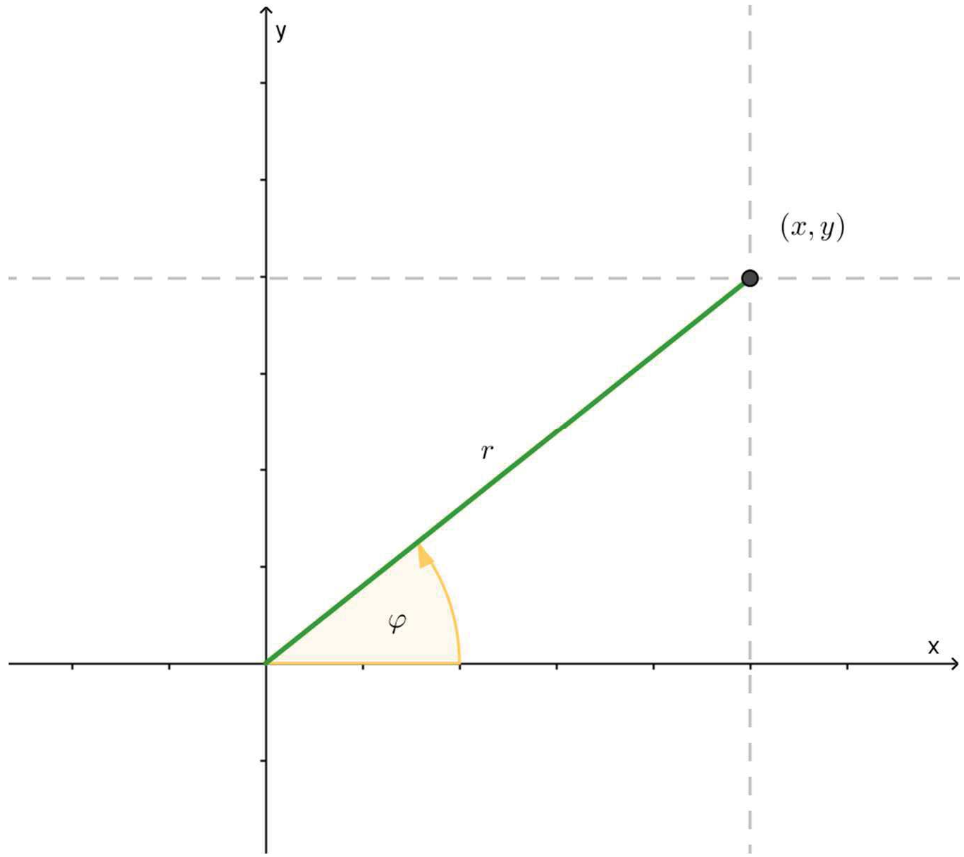
Asteroida

$$x = a\cos^3 t,\ \ y = a\sin^3 t$$



Krzywe we współrzędnych biegunowych

Położenie punktu (x,y) na płaszczyźnie określa także para (r,φ), gdzie r jest odległością tego punktu od początku układu współrzędnych, φ miarą kąta między dodatnią częścią osi OX a promieniem wodzącym tego punktu.

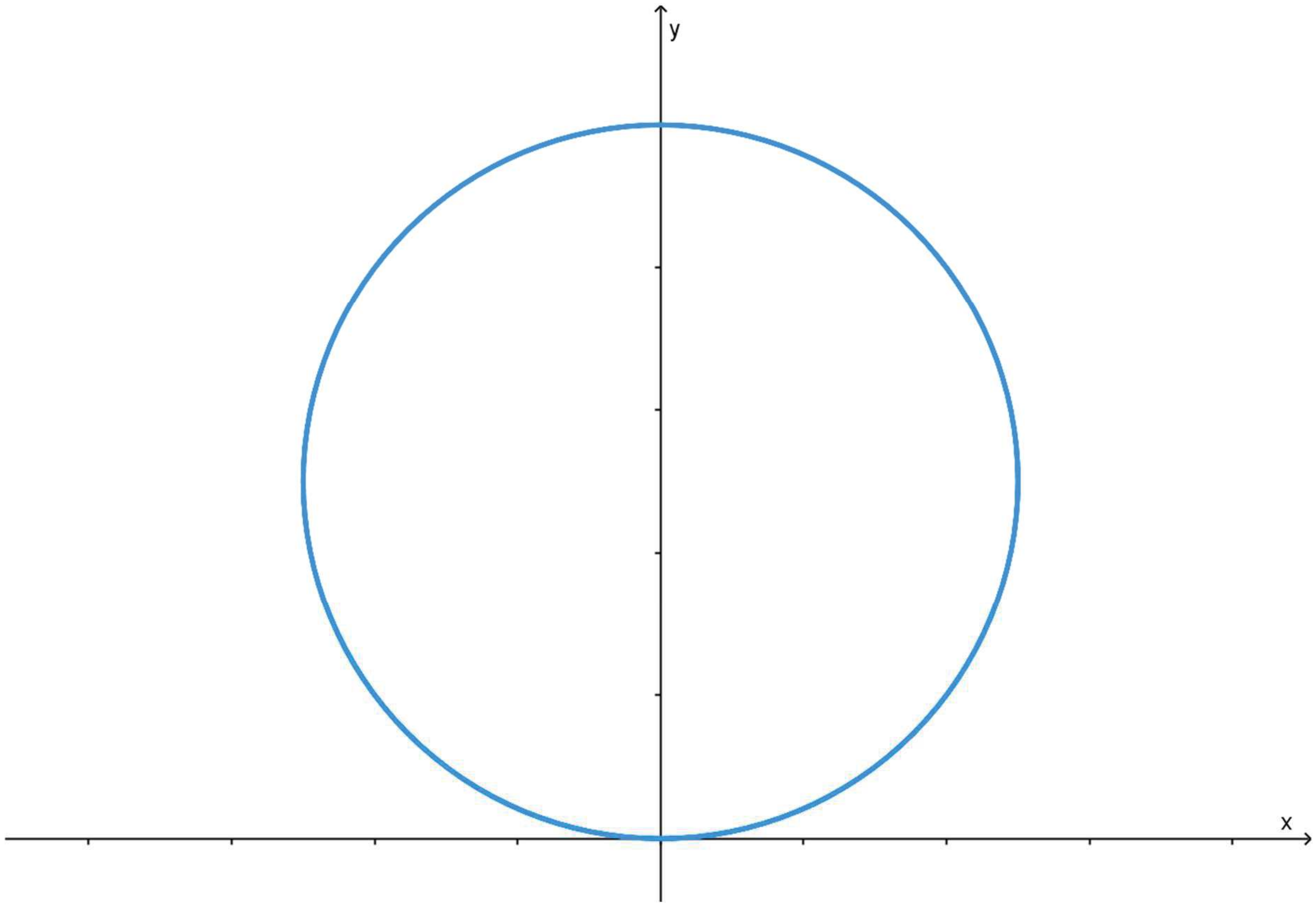


Parę (r,φ) nazywamy współrzędnymi biegunowymi punktu. Związek między współrzędnymi biegunowymi i kartezjańskimi określają zależności $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

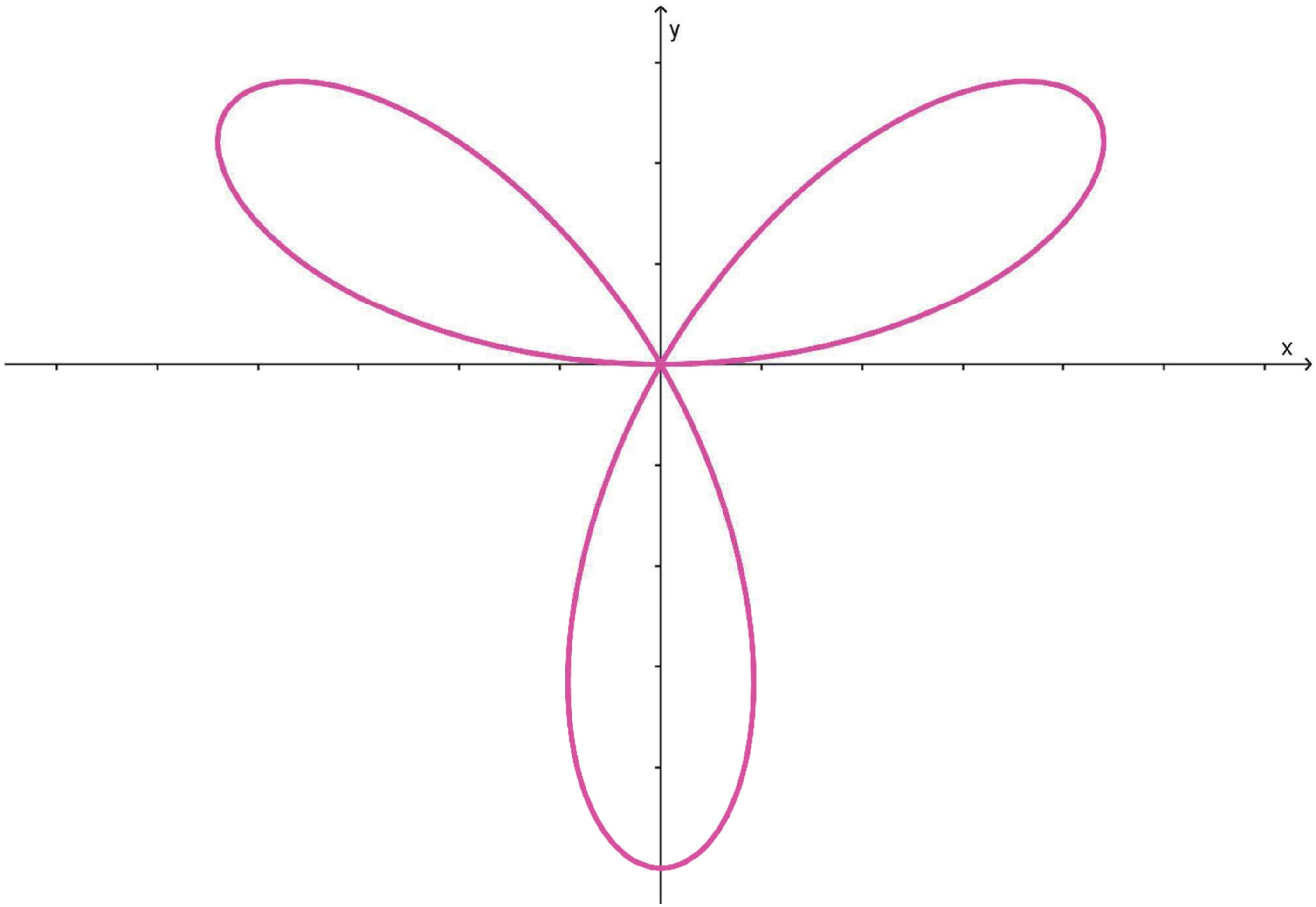
Wybrane krzywe we współrzędnych biegunowych

Krzywa rozetkowa $r = a\sin(n\varphi)$, $n \in N$:

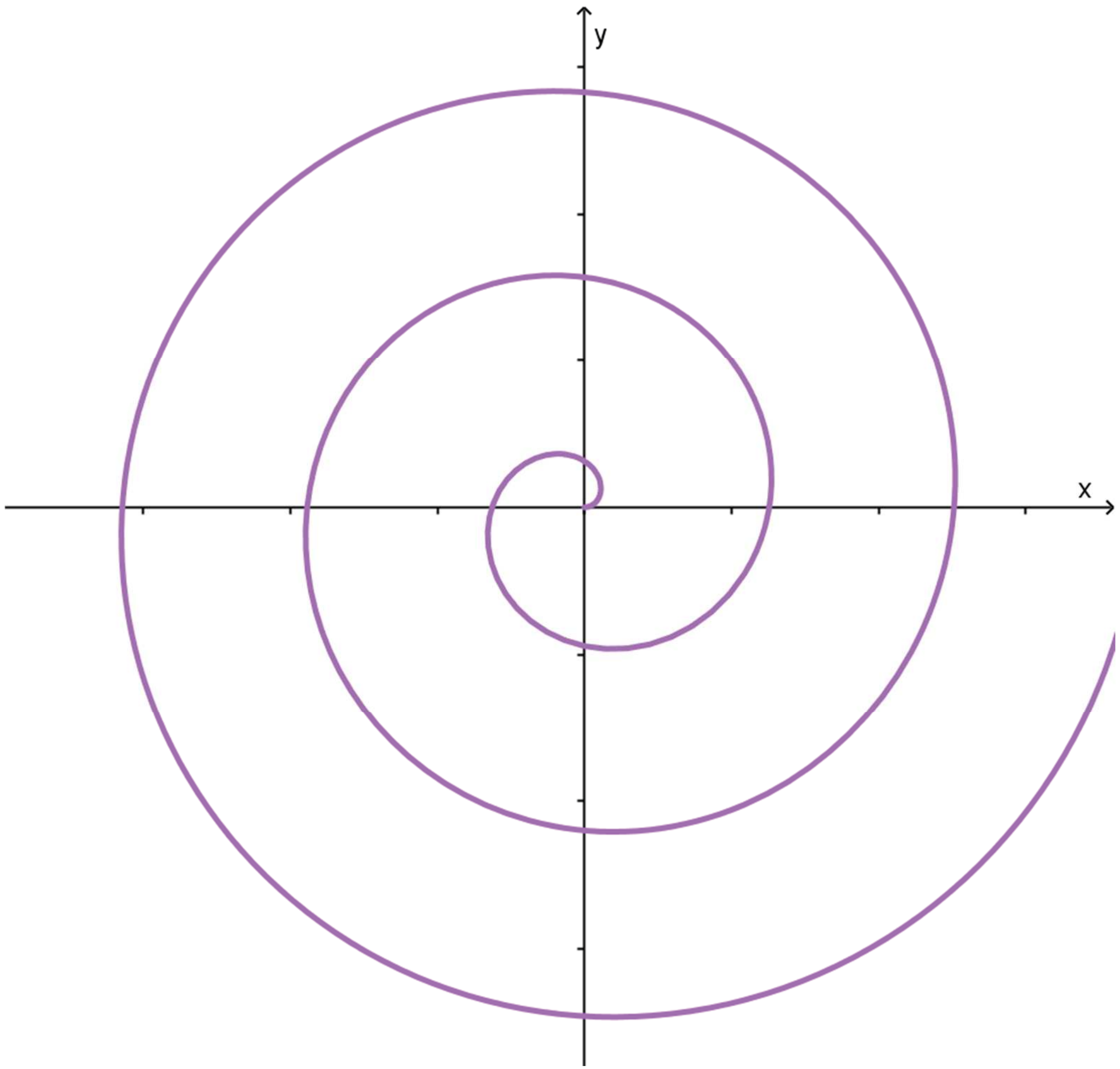
- $n=1$



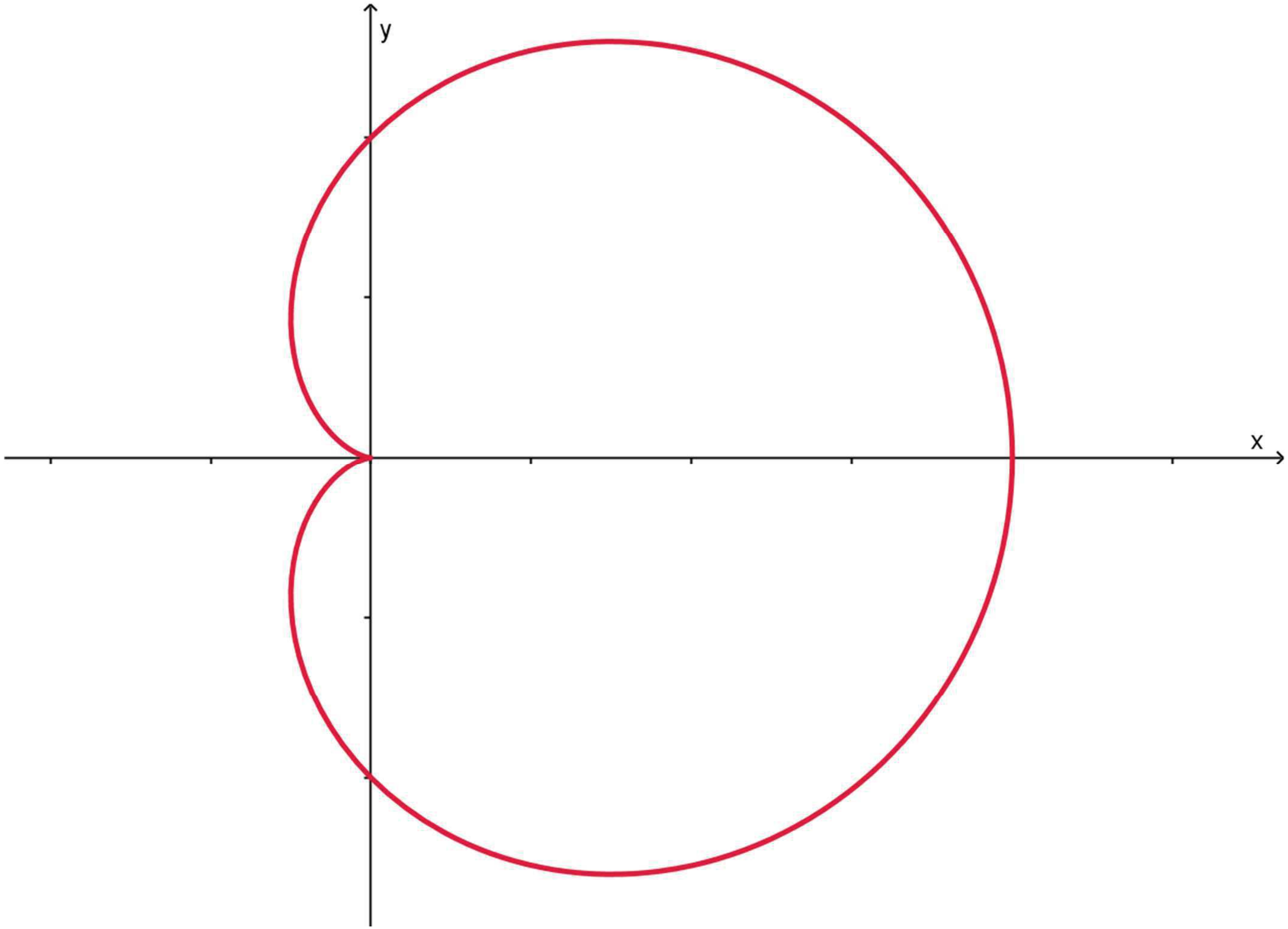
- $n=3$



Spirala Archimedesa $r = a\varphi$



Kardioida $r = a(1 + \cos\varphi)$



Uwaga (parametryzacja krzywej). Jeżeli dane jest równanie krzywej w postaci $y = f(x)$, to równania parametryczne tej krzywej określają wzory

$$x = t,\ \ y = f(t).$$

W przypadku krzywej we współrzędnych biegunowych $r = f(\varphi)$ następujące równania

$$x = r\cos\varphi = f(\varphi)\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi = f(\varphi)\sin\varphi,$$

są jej przedstawieniem parametrycznym.