Ciągi liczbowe

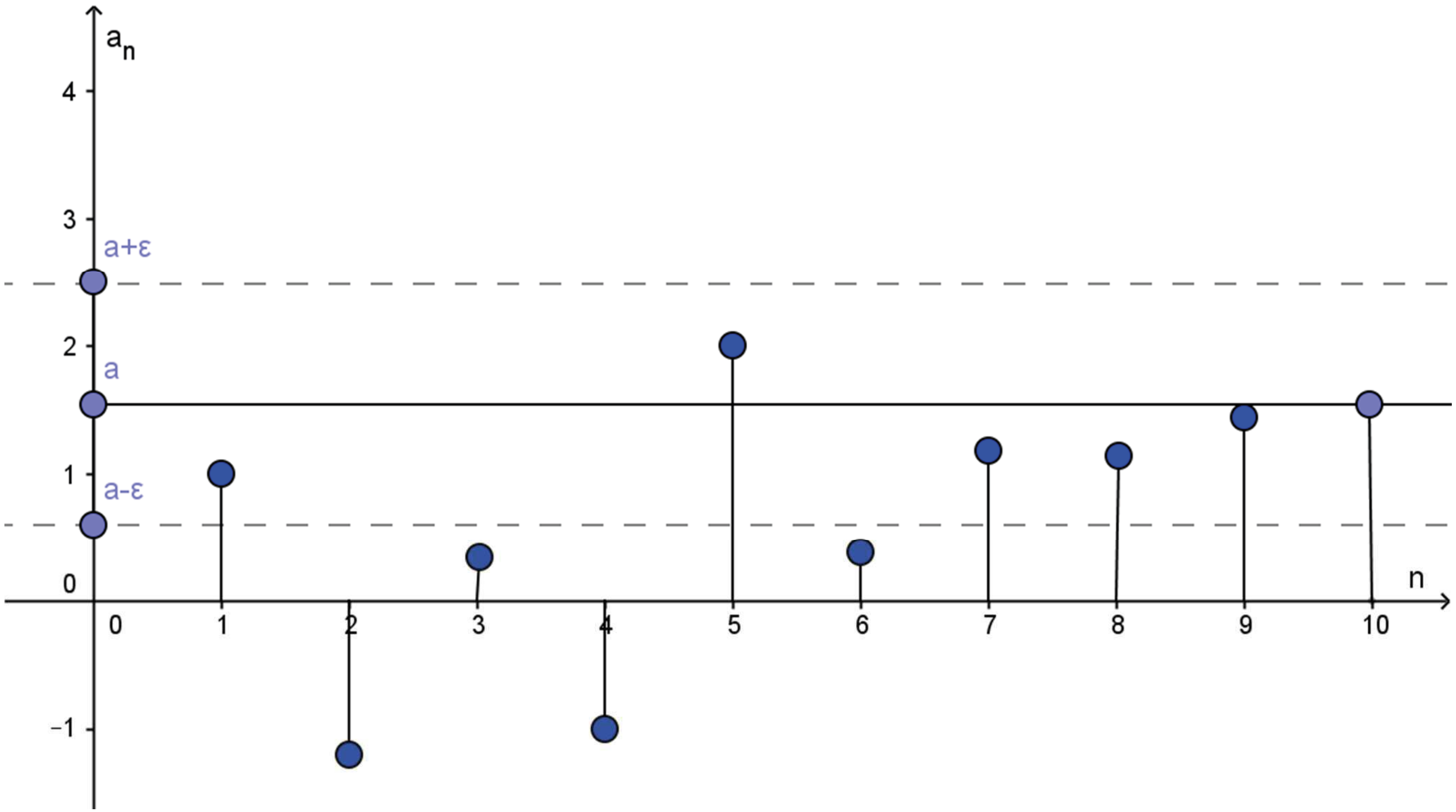
Definicja (ciąg liczbowy, *n*-ty wyraz ciągu). Funkcję odwzorowującą zbiór liczb naturalnych w zbiór liczb rzeczywistych nazywamy ciągiem liczbowym. Wartość tej funkcji dla liczby naturalnej n nazywamy n-tym wyrazem ciągu. Jeśli a_n oznacza n-ty wyraz ciągu, to ciąg oznaczamy symbolem (a_n).

Uwaga. Dla uproszczenia zapisu w dalszej części wykładu przez $\{a_n\}$ oznaczać będziemy zbiór wyrazów ciągu (a_n), tj. zbiór $\{a_n : n \in N\}$.

Definicja (granica ciągu, ciąg zbieżny i rozbieżny). Liczba $a \in R$ jest granicą właściwą ciągu (a_n), co zapisujemy, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{n_0 \in N} \ \forall_{n>n_0} \ |a_n - a| < \varepsilon .$$

Ciąg, który ma granicę a, nazywamy ciągiem zbieżnym.
Ciąg, który nie ma granicy, nazywamy rozbieżnym. Wśród ciągów rozbieżnych wyróżniamy ciągi rozbieżne do $+\infty$ i do $-\infty$.



a_n
4
3
$a+\varepsilon$
2
a
1
$a-\varepsilon$
0
−1
n
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Twierdzenia o ciągach

Twierdzenie. Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

Twierdzenie (o 3 ciągach). Niech istnieje taka liczba n_0, że dla każdego $n > n_0$ spełniona jest nierówność $a_n \le b_n \le c_n$. Ponadto niech $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g$. Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} b_n = g.$$

Twierdzenie (o 2 ciągach). Niech istnieje taka liczba n_0, że dla każdego $n > n_0$ spełniona jest nierówność $a_n \le b_n$. Ponadto niech $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty.$$

Twierdzenie (warunek Cauchy'ego zbieżności ciągu) .

$$(a_n) \ \textit{jest zbieżny} \iff \forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{m,n>n_0} |a_m - a_n| < \varepsilon .$$

Twierdzenie. Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

Granice wybranych ciągów liczbowych

$\lim_{n\to\infty} \frac{c}{n} = 0$ dla $c = const.$,

$\lim_{n\to\infty} c^n = 0$ dla $0 < c < 1$,

$\lim_{n\to\infty} c^n = \infty$ dla $c > 1$,

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$,

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$ dla $c > 0$,

$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$,

$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$, przy czym $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$.

Twierdzenie (o arytmetyce granic ciągów). Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne to:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,
- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, $\quad b_n \neq 0$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.