Wyznaczniki

Wyznacznik macierzy kwadratowej i jego własności.

Definicja. Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $A = \left[a_{ij}\right]_{i,j=1,...n}$ nazywamy liczbę

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11} & \text{dla} \quad n = 1 \\ \sum\limits_{p} (-1)^{inv(p)} a_{1p_1} \cdot a_{2p_2} \cdot \dots \cdot a_{np_n} & \text{dla} \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Suma jest brana po wszystkich $n!$ - permutacjach $p = \left(p_1, p_2, ..., p_n\right)$ ciągu $(1,2,...,n)$
inv(p) - liczba inwersji w permutacji *p*, gdzie inwersja oznacza nieporządek tzn. sytuację, w której liczba większa poprzedza liczbę mniejszą.

Powyższa definicja jest bardzo niepraktyczna w zastosowaniach, to znaczy w obliczeniach wyznacznika macierzy.

Jeśli macierz oznaczamy: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$,

to jej wyznacznik zapisujemy: $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$

Metody obliczania wyznaczników

1. Wyznacznik stopnia drugiego

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ to } \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

2. Wyznacznik stopnia trzeciego. Dopisujemy z prawej strony dwie pierwsze kolumny,
lub poniżej – dwa pierwsze wiersze

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Ta metoda nazywa się metodą Sarrusa

Własności wyznaczników:

1. Wyznacznik macierzy diagonalnej jest iloczynem wyrazów głównej przekątnej.
2. Wyznacznik macierzy, w której jeden wiersz lub kolumna składa się z samych zer jest równy 0.
3. Wyznacznik macierzy jest równy wyznacznikowi jej macierzy transponowanej.
4. Jeśli macierz B powstaje z macierzy A przez zamianę miejscami 2 wierszy lub 2 kolumn to *det(B)= – det(A).*
5. Jeśli w macierzy 2 wiersze lub 2 kolumny są identyczne lub proporcjonalne to jej wyznacznik jest równy 0.
6. Jeśli macierz B powstaje z macierzy A przez pomnożenie wszystkich elementów jednego wiersza lub jednej kolumny przez liczbę c to $\det(B) = c \cdot \det(A)$
7. Wyznacznik nie zmienia wartości, gdy do wiersza (lub kolumny) dodamy odpowiedni elementy innego wiersza (lub kolumny) pomnożone przez dowolną stałą.

Minor macierzy. Dopełnienie algebraiczne

***Definicja** 2.d.4.* Niech będzie dana macierz *A* [$n \times m$] i niech $p \leq min\{m,n\}$. Jeżeli w macierzy A skreślimy *m – p* wierszy i
n – p kolumn to powstanie macierz kwadratowa, której wyznacznik nazywamy ***minorem*** stopnia *p* macierzy *A*.

***Definicja** 2.d.5.* Niech będzie dana macierz kwadratowa *A* stopnia $n \times n$. Dla dowolnego, ustalonego elementu a_{ij} tej macierzy, skreślamy *i* – ty wiersz i *i* – tą kolumnę w macierzy *A*. Niech M_{ij} będzie minorem macierzy *A*, czyli wyznacznikiem tak właśnie utworzonej macierzy kwadratowej. Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} macierzy A nazywamy liczbę $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Rozwinięcie Laplace'a.

Twierdzenie** 2.t.3 **Twierdzenie Laplace'a .
Niech będzie dana macierz kwadratowa *A* stopnia $n \times n$. Wyznacznik macierzy *A* jest równy sumie wszystkich iloczynów dowolnego, ustalonego wiersza (kolumny) i odpowiadającego temu elementowi dopełnienia algebraicznego, to znaczy:

a) $\det(A) = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + ... + a_{in} \cdot A_{in}$ - rozwinięcie według *i* – tego wiersza;
b) $\det(A) = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + ... + a_{nj} \cdot A_{nj}$ - rozwinięcie według *j* – tej kolumny.

Przykład Wyliczyć wyznacznik

a) $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 3(-4) - (-5)(-1) = -17.$

b) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ = 10 -(-12) =22.

c) $\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}$ = 5 - 21 = -16

Przykład Wyliczyć wyznacznik, stosując metodę Sarrusa

a)
$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-1)(-4)(-3) + 310 + (-2)24 - 0(-4)(-2) - 41(-1) - (-3)23 = -6$$
$$\begin{matrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 4 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -4+18-(-3)-16-(-6) = -4+18-4+3-16+6 = 27-24 = 3.$$

b)

$$\begin{matrix} 2 & -1 & -3 \\ -3 & 1 & 4 \end{matrix}$$

Przykład Wyliczyć wyznacznik stosując rozwinięcie Laplace'a według czwartego wiersza

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$2\cdot(-1)^{4+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^{4+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{4+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{4+4}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$(-2)\cdot(-32)+5\cdot(-6)+0\cdot 18+1\cdot(-34) = 64-30-34 = 0$$

Wyznaczniki trzeciego stopnia otrzymane z rozwinięcia danego wyznacznika obliczamy metodą Sarrusa.

W wyliczonym przykładzie można zauważyć, że rozwijanie wyznacznika względem wiersza lub kolumny zawierającej "zero" jest korzystne, ponieważ zmniejsza ilość wyliczanych wyznaczników (gdyż pomnożenie zera przez dowolną liczbę daje w wyniku zero).

Rada: .Aby ułatwić obliczanie wyznaczników należy w wybranym wierszu lub kolumnie utworzyć maksymalnie dużo zer (najlepiej – same zera z wyjątkiem jednego elementu).

Przykład Wylicz wyznacznik z uwzględnieniem własności wyznaczników

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 24 & -3 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} \qquad \begin{aligned} k_1' &= k_1 \\ k_2' &= k_2 + (-3)\cdot k_6 \\ k_3' &= k_3 \\ k_4' &= k_4 \\ k_5' &= k_5 + (-4)\cdot k_6 \\ k_6' &= k_6 \end{aligned}$$

$$=\begin{vmatrix} 2 & -8 & 1 & -1 & -10 & 3 \\ -1 & 30 & -3 & 1 & 7 & -2 \\ 1 & -4 & 2 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=$$

$$(-1)\cdot(-1)^{12}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -8 & 1 & -1 & -10 \\ -1 & 30 & -3 & 1 & 7 \\ 1 & -4 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & 9 \end{vmatrix}= \qquad \begin{matrix} w_1' = w_1 + (-1)\cdot w_4 \\ w_2' = w_2 + 3\cdot w_4 \\ w_3' = w_3 + (-2)\cdot w_4 \\ w_4' = w_4 \\ w_5' = w_5 + w_4 \end{matrix}$$

przekształcony wyznacznik rozwinięto względem szóstego wiersza, a w otrzymanym wyznaczniku znowu „tworzymy zera” - otrzymamy nowy wyznacznik, który rozwijamy względem trzeciej kolumny

$$= -1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -7 & 0 & 0 & -7 \\ -4 & 27 & 0 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & 0 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ -2 & 4 & 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1\cdot(-1)^7\cdot\begin{vmatrix} 3 & -7 & 0 & -7 \\ -4 & 27 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & 4 & 3 \\ -2 & 4 & -2 & 6 \end{vmatrix}=$$

teraz przed wyznacznik wyłączymy 2 , bo wszystkie elementy czwartego wiersza są liczbami parzystymi

$$=2\begin{vmatrix} 3 & -7 & 0 & -7 \\ -4 & 27 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}= \quad \begin{matrix} w_1' = w_1 \\ w_2' = w_2 + (-2)\cdot w_4 \\ w_3' = w_3 + 4\cdot w_4 \\ w_4' = w_4 \end{matrix} \quad =2\cdot\begin{vmatrix} 3 & -7 & 0 & -7 \\ -2 & 23 & 0 & -8 \\ -1 & 6 & 0 & 15 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=$$

otrzymany wyznacznik rozwijamy względem trzeciej kolumny i otrzymamy

$$=2\cdot(-1)\cdot(-1)^7\cdot\begin{vmatrix}3 & -7 & -7\\ -2 & 23 & -8\\ -1 & 6 & 15\end{vmatrix}= \qquad \begin{matrix}w_1'=w_1+3\cdot w_3\\ w_2'=w_2+(-2)\cdot w_3\\ w_3'=w_3\end{matrix} \qquad =2\cdot\begin{vmatrix}0 & 11 & 38\\ 0 & 11 & -38\\ -1 & 6 & 15\end{vmatrix}=$$

otrzymany wyznacznik rozwijamy względem pierwszej kolumny, otrzymamy

$$=2\cdot(-1)\cdot(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}11 & 38\\ 11 & -38\end{vmatrix}= -2\cdot 11\cdot 38\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=1672.$$

Zadania do samodzielnego wyliczenia.

Zadanie Obliczyć wyznacznik

a) $\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ -2 & -2 & 1\\ 2 & 3 & 2\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ -2 & -2 & -3\\ 3 & 9 & 2\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ -2 & 1 & 2\end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix}-2 & 2 & 3\\ -2 & 3 & 3\\ 2 & -2 & -2\end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix}2 & 1 & 2 & 1\\ -1 & -2 & 0 & -1\\ 2 & 2 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix}1 & 3 & 1 & -1 & 1\\ -2 & -5 & -3 & 3 & 0\\ -1 & -3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 6 & 2 & -1 & 1\\ -2 & -6 & -2 & 2 & -1\end{vmatrix}$.

Odp. a) 2 ; b) -2 ; c) -6 ; d) -2 ; e) -1 ; f) 2 .

Osobliwość i nieosobliwość macierzy. Rząd macierzy.

Związek wyznacznika macierzy z jej nieosobliwością
Macierz nieosobliwa to macierz, której wyznacznik jest różny od 0.
Macierz osobliwa to macierz, której wyznacznik jest równy 0.

Definicja *2.d.6.* Mówimy, że macierz $A(m\times n)$ ma ***rząd r***, r = rg(A) jeśli istnieje minor M stopnia r macierzy A który jest różny od 0 ($M \neq 0$), a każdy minor stopnia większego od r (jeśli istnieje) ma wyznacznik równy 0.

Tak sformułowana definicja rzędu macierzy ma tylko jedną pozytywną cechę – jest prawidłowa, niestety jest również **bardzo nieefektywna** w zastosowaniach.
Istnieje bardziej efektywny sposób obliczania rzędu macierzy.

Przykład

Niech będą dane trzy macierze kolumnowe: $a = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ oraz $c = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 16 \end{bmatrix}$.

Zauważmy, że $4 \cdot a + 2 \cdot b = 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 16 \end{bmatrix} = c$. Zatem macierz (wektor kolumnowy) *c* można przedstawić za pomocą sumy macierzy *a* oraz *b*, przy czym każda z nich została uprzednio pomnożona przez pewną (niekoniecznie tę samą) liczbę.
O macierzy *c* mówimy, ze jest ***kombinacją liniową*** macierzy *a* i *b*, lub – że jest ***liniowo zależna*** od macierzy *a* i *b*.

Rozważmy teraz inną trójkę wektorów kolumnowych: $k = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $l = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $m = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.
Zauważmy, ze wektora *m* nie można przedstawić w postaci kombinacji liniowej

wektorów *k* i *l* (np. trzecia współrzędna (liczba 2) nie może być przedstawiona w postaci kombinacji liniowej zer). O wektorze *m* mówimy, że jest ***liniowo niezależny*** od wektorów *k* i *l*.

Każdą macierz prostokątną możemy interpretować, jako „zespół” kolumn lub „zespół” wierszy.

Definicja ***Rzędem macierzy*** prostokątnej $A(m \times n)$ nazywamy maksymalną liczbę jej liniowo niezależnych wierszy lub kolumn.

Obliczanie rzędu macierzy.

1. Wykonujemy operacje elementarne na wierszach lub kolumnach macierzy.
2. Celem operacji jest doprowadzenie macierzy do postaci macierzy jednostkowej. Liczba wierszy (albo kolumn) macierzy jednostkowej jest równa szukanemu rzędowi macierzy.

3. Jeśli w trakcie operacji pojawią się dwa jednakowe lub proporcjonalne wiersze (kolumny), to jeden z nich skreślamy. Jeżeli pojawi się wiersz (kolumna) złożony z samych zer, to go skreślamy.

Przykład Obliczyć rząd macierzy $A=\begin{bmatrix} 7 & 1 & 8 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 7 & -1 \end{bmatrix}$

Rozwiązanie:

$$R(A)=R\begin{bmatrix} 7 & 1 & 8 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 7 & -1 \end{bmatrix}\begin{array}{l} w_1' = w_1 + (-2)\cdot w_2 + (-1)\cdot w_3 \\ w_2' = w_2 + 2\cdot w_4 \\ w_3' = w_3 + 3\cdot w_4 \\ w_4' = (-1)\cdot w_4 \\ w_5' = w_5 + (-1)\cdot w_3 \end{array} =$$

$$R\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -5 \\ 0 & 5 & 5 & -5 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & -5 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ w_2' = \tfrac{1}{5}\cdot w_2 \\ \\ w_4' = w_4 \\ \\ \end{array} \quad \text{(skreślamy } w_1, w_3, w_5\text{)} =$$

$$= R\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{array}{l} k_2' = k_2 + 2\cdot k_1 \\ k_3' = k_3 + k_1 \\ k_4' = k_4 + (-3)\cdot k_1 \end{array} =$$

$$= R\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{array}{l} w_1' = w_2 \\ w_2' = w_1 \end{array} \quad \text{(skreślamy } k_3, k_4\text{)} = R\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie. Wyliczyć rząd macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

Odpowiedzi a) 3 ; b) 4 ; c) 4 .