Assim, quando os vetores de P_3 são representados como combinação linear dos vetores da base $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, a adição de vetores e a multiplicação por escalar se "comportam" exatamente da mesma forma como se fossem quádruplas do $\mathbb{R}^4$.

Em outras palavras diríamos que a correspondência biunívoca entre P_3 e $\mathbb{R}^4$ preserva as operações de adição de vetores e multiplicação por escalar, isto é:

$$(v + w)_B = v_B + w_B \quad \text{e} \quad (kv)_B = k(v_B)$$

e, nesse caso, dizemos que os espaços P_3 e $\mathbb{R}^4$ são *isomorfos*.

Observemos ainda que o espaço vetorial $M(2, 2)$ é também isomorfo ao $\mathbb{R}^4$.

De forma análoga, prova-se que:

P_2 é isomorfo a $\mathbb{R}^3$

$M(3, 1)$ é isomorfo a $\mathbb{R}^3$

$M(2, 1)$ é isomorfo a $\mathbb{R}^2$

e assim por diante.

De um modo geral, tem-se:

"Se V *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$ *e* $\dim V = n$, *então* V *e* $\mathbb{R}^n$ *são isomorfos.*"

2.10 PROBLEMAS PROPOSTOS

Nos problemas 1 a 7 apresenta-se um conjunto com as operações de adição e multiplicação por escalar nele definidas. Verificar quais deles são espaços vetoriais. Para aqueles que não são espaços vetoriais, citar os axiomas que não se verificam.

1) $\mathbb{R}^3$, $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$

$$k(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

2) $\{(x, 2x, 3x);\ x \in \mathbb{R}\}$ com as operações usuais

3) $\mathbb{R}^2$, $(a, b) + (c, d) = (a, b)$ e $\alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$

4) $\mathbb{R}^2$, $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ e $\alpha(x, y) = (\alpha^2 x, \alpha^2 y)$

5) $\mathbb{R}^2$, $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ e $\alpha(x, y) = (\alpha x, 0)$

6) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 5x\}$ com as operações usuais

7) $A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \in M(2, 2)/a, b \in \mathbb{R} \right\}$ com as operações usuais

Nos problemas 8 a 13 são apresentados subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. Verificar quais deles são subespaços vetoriais do $\mathbb{R}^2$ relativamente às operações de adição e multiplicação por escalar usuais.

8) $S = \{(x, y)/y = -x\}$

9) $S = \{(x, x^2);\ x \in \mathbb{R}\}$

10) $S = \{(x, y)/x + 3y = 0\}$

11) $S = \{(y, y);\ y \in \mathbb{R}\}$

12) $S = \{(x, y)/y = x + 1\}$

13) $S = \{(x, y)/x \geqslant 0\}$

Nos problemas 14 a 25 são apresentados subconjuntos de $\mathbb{R}^3$. Verificar quais são seus subespaços em relação às operações de adição e multiplicação por escalar usuais. Para os que são subespaços, mostrar que as duas condições estão satisfeitas. Caso contrário, citar um contra-exemplo.

14) $S = \{(x, y, z)/x = 4y \text{ e } z = 0\}$

15) $S = \{(x, y, z)/z = 2x - y\}$

16) $S = \{(x, y, z)/x = z^2\}$

17) $S = \{(x, y, z)/y = x + 2 \text{ e } z = 0\}$

18) $S = \{(x, x, x); x \in \mathbb{R}\}$

19) $S = \{(x, x, 0)/x \in \mathbb{R}\}$

20) $S = \{(x, y, z)/xy = 0\}$

21) $S = \{(x, y, z)/x = 0 \text{ e } y = |z|\}$

22) $S = \{(x, -3x, 4x); x \in \mathbb{R}\}$

23) $S = \{(x, y, z)/x \geqslant 0\}$

24) $S = \{(x, y, z)/x + y + z = 0\}$

25) $S = \{(4t, 2t, -t); t \in \mathbb{R}\}$

26) Verificar se os subconjuntos abaixo são subespaços de $M(2, 2)$:

a) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; \; c = a + b \text{ e } d = 0 \right\}$

b) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}; \; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ (matrizes triangulares superiores)

c) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}; \; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ (matrizes simétricas)

d) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & a + b \\ a - b & b \end{bmatrix}; \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$