Conjuntos

Noção de conjunto
Relação de pertinência
Conjuntos importantes
Operações com conjuntos
Partição de Conjunto
Conjuntos Numéricos

Noção de Conjunto

- De uso corrente em Matemática, a noção básica de conjunto não é definida, ou seja, é aceita intuitivamente e, por isso, chamada **noção primitiva.**
- Ela foi utilizada primeiramente por Georg Cantor (1845-1918), matemático nascido em São Petersburgo, Rússia, mas que passou a maior parte da vida na Alemanha.
- Segundo Cantor, a noção de conjunto designa uma coleção de objetos bem definidos e discerníveis, chamados **elementos do conjunto**.
- Intuitivamente, conjunto é o mesmo que agrupamento, classe ou coleção de **elementos**.

Geralmente os conjuntos são designados por uma letra maiúscula (A, B, C, ..., X, Y, Z).

Os elementos são designados, em geral, por uma letra minúscula (a, b, c, ..., x, y, z), entre chaves.

Ex.: $A = \{a, b, c, t, r\}$

Representação:

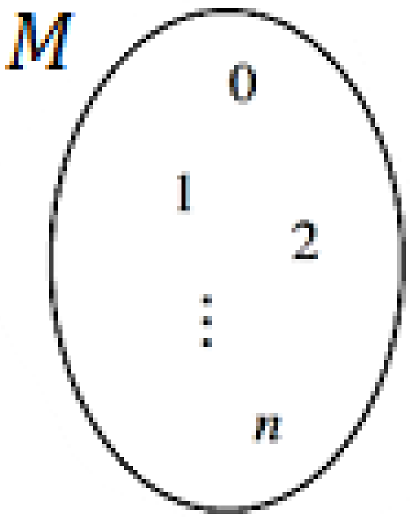
Existem várias formas de apresentar um conjunto.

As representações mais comuns de um conjunto é através de uma propriedade de seus elementos, da enumeração de seus elementos ou apresentando em um diagrama.

Exemplos

$M = \{x \mid x \text{ é o número de erros na página de um livro}\}$ (por uma propriedade)

$M = \{0, 1, 2, 3, \cdots, n\}$ (por enumeração de seus elementos)



(por diagrama)

Pertinência

Em geral usa-se os símbolos $\in$ e $\notin$ para relacionar elementos com conjuntos, que se lê "pertence a" e "não pertence a", respectivamente.

Exemplo:

Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, então

$$1 \in A, \qquad 3 \in A, \qquad 6 \notin A$$

Conjuntos Importantes

Conjunto vazio (ϕ): é aquele que não possui elemento algum.

Ex: $A = \phi$ ou $A = \{\ \}$.

O conjunto $B = \{\phi\}$ não é vazio.

Conjunto unitário: é aquele que possui um único elemento.

Ex_1: $\{\{5\}\}$ (Lê-se: O conjunto unitário formado pelo unitário 5).

Ex_2: $\{\{6, 7\}\}$ (Lê-se: O conjunto unitário formado pelo par não ordenado 6 e 7).

Conjunto universo (U): é um conjunto ao qual pertencem todos os elementos do assunto tratado.

Ex.: A equação $(x-3)(x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)(x^2+1)=0$, tem os seguintes conjuntos soluções:

$S=\{3\}$ se $U=\mathbb{N}$ (conjunto dos números naturais)

$S=\{-2,3\}$ se $U=\mathbb{Z}$ (conjunto dos números inteiros)

$S=\left\{-2,\frac{1}{3},3\right\}$ se $U=\mathbb{Q}$ (conjunto dos números racionais)

$S=\left\{-2,\frac{1}{3},3,-\sqrt{2}\right\}$ se $U=\mathbb{R}$ (conjunto dos números reais)

$S=\left\{-2,\frac{1}{3},3,-\sqrt{2},j,-j\right\}$ se $U=\mathbb{C}$ (conjunto dos números complexos)

Conjuntos iguais: Dois conjuntos A e B são iguais quando todo elemento de A pertence a B e todo elemento de B pertence a A.

Em símbolos, tem-se: $A = B \Leftrightarrow \forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B$

Ex.: $\{0, 3, 10\} = \{0, 10, 3\} = \{3, 0, 10\} = \{3, 10, 0\} = \{10, 0, 3\} = \{10, 3, 0\}$

Observação:

$\forall$ = para todo, qualquer que seja.

Quando se faz $\forall x$ quer-se dizer: "Para todo x do universo em questão".

Subconjunto $(\subset)$**:** Um conjunto A é subconjunto de um conjunto B se e somente se todo elemento de A pertence também a B. Em símbolos, tem-se:

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Com a notação $A \subset B$ indicamos que A é subconjunto de B ou que A está contido em B ou que A é parte de B.

O símbolo $\subset$ é denominado sinal de inclusão. Quando $A \subset B$ também podemos escrever $B \supset A$ que se lê "B contém A".

Ex.: Dado o conjunto P = $\{1,\ 2,\ \{1, 3\},\ \{\{5\}\}\}$, tem-se:

$\{1\} \subset$ P, pois $1 \in$ P;

$\{1, 2\} \subset$ P, pois $1 \in$ P e $2 \in$ P;

$P = \{ 1, 2, \{1, 3\}, \{\{5\}\} \}$

$\{1, 3\} \not\subset P$, pois $3 \notin P$;

$\phi \subset P$, pois pode-se provar que $\phi \subset A$, qualquer que seja o conjunto A;

$\{ \{\{5\}\} \} \subset P$, pois $\{\{5\}\} \in P$;

$\{5\} \not\subset P$, pois $5 \notin P$;

$P \subset P$.

Observação: Sendo A, B e C três conjuntos arbitrários, tem-se:

a) $(A \subset B$ e $B \subset A) \Rightarrow A = B$ (propriedade anti-simétrica da inclusão)

b) $(A \subset B$ e $B \subset C) \Rightarrow A \subset C$ (propriedade transitiva da inclusão)

Conjunto das partes ($\mathcal{P}(A)$): Dado um conjunto A, define-se *conjunto das partes de A* ao conjunto formado por todos os subconjuntos de A.

Em símbolos, tem-se: $\mathcal{P}(A) = \{X \,/\, X \subset A\}$.

Exemplo:

Escreva o conjunto das partes do conjunto A = {a, b, c} e a seguir determine a quantidade de elementos desse conjunto.

Com nenhum elemento: $\emptyset$

Com um elemento: {a}, {b}, {c}

Com dois elementos: {a, b}, {a, c}, {b, c}

Com três elementos: {a, b, c} = A

$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, A\}$

O conjunto das partes de A tem 8 elementos.

Chamamos de $P(A)$ o conjunto das partes de A.

A quantidade de elementos do conjunto $P(A)$ é dado por 2^n onde n é q quantidade de elementos de A.

Conjuntos disjuntos: Dois conjuntos A e B são denominados *conjuntos disjuntos* quando não possuírem elemento comum.

Exemplo:

Sejam os conjuntos $A = \{1, 3, 4, 5\}$ e $B = \{6, 7, 8, 9\}$

A e B são disjuntos, pois não possuem nenhum elemento em comum.

Operações com Conjuntos

União ($\cup$)**:** Dados dois conjuntos A e B, define-se a *união* de A e B como o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B.

Assim: $A \cup B = \{x \,/\, x \in A \;\text{ ou }\; x \in B\}$.

Exemplo:

Sejam os conjuntos $A = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$$A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Interseção ($\cap$): Dados dois conjuntos A e B, define-se a *interseção* de A e B como o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e a B.

Assim: $A \cap B = \{x \,/\, x \in A \;\text{ e }\; x \in B\}$.

Exemplo:

Sejam os conjuntos $A = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$$A \cap B = \{4, 5, 6\}$$

Diferença (–): Dados dois conjuntos A e B, define-se a *diferença* entre A e B como o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B.

Assim: $A - B = \{ x / x \in A \text{ e } x \notin B \}$

Exemplo:

Sejam os conjuntos $A = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$$A - B = \{1, 3\}$$

Complementar de B em relação a A (B_A^C): Dados dois conjuntos A e B, tal que $B \subset A$, define-se o *complementar* de B em relação a A como o conjunto $A - B$, isto é, o conjunto dos elementos de A que não pertencem a B.

Assim: $B_A^C = A - B$.

A notação B^C representa o complementar de B em relação ao conjunto universo U, ou seja, $B^C = U - B$.

Alguns autores denotam o complementar de B em relação ao conjunto universo U por $\overline{B}$.

Exemplo:

Sejam os conjuntos $A = \{1, 3, 4, 5, 6,7,8,9\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$$B_A^C = \{1, 3\}$$

Produto cartesiano: Dados A e B dois conjuntos não vazios. Define-se o *produto cartesiano de A por B* como o conjunto $A \times B$ (lê-se: A cartesiano B ou produto cartesiano de A por B) cujos elementos são todos pares ordenados (x, y), onde o primeiro elemento x pertence a A e o segundo elemento y pertence a B.

Em símbolos: $A \times B = \{(x, y) \,/\, x \in A \text{ e } y \in B\}$.

Ex.: Dados $S = \{a, 3, \{1, 2\}\}$ e $T = \{5, \{6\}\}$, tem-se:

a) $S \times T = \{ (a, 5), (a, \{6\}), (3, 5), (3, \{6\}), (\{1,2\}, 5), (\{1,2\}, \{6\}) \}$

b) $T \times S = \{ (5, a), (5, 3), (5, \{1,2\}), (\{6\}, a), (\{6\}, 3), (\{6\}, \{1,2\}) \}$

Se A ou B for o conjunto vazio, define-se o produto cartesiano de A por B como sendo o conjunto vazio.

Ex.: $A \times \phi = \phi$, $\phi \times B = \phi$, $\phi \times \phi = \phi$.

Observações:

- $A \neq B \Rightarrow A \times B \neq B \times A$.
- Se A e B são conjuntos finitos com m e n elementos respectivamente, então $A \times B$ é um conjunto finito com mn elementos.
- Se A ou B for infinito e nenhum deles for vazio, então $A \times B$ é um conjunto infinito.

Conjunto *finito* é um conjunto que tem n elementos, sendo n um número natural.

Um conjunto X é dito *infinito* se admitir subconjunto Y, com $X \neq Y$, tal que X e Y possam ser colocados em correspondência biunívoca, isto é, $f : X \to Y$ é uma bijeção.

Um conjunto infinito pode ser enumerável ou não. Um conjunto é dito *contável* ou *enumerável* se puder ser colocado em correspondência biunívoca com o conjunto dos números naturais, caso contrário, o conjunto é *não contável* ou *não enumerável*. O conjunto dos naturais N é infinito, pois por exemplo considere o subconjunto $\{0,2,4,6,...\}$ de N. (Cf. SANT'ANNA, Adonai S. *O que é um conjunto*. Barueri: Manole (*no prelo*)).

Propriedades das operações com conjuntos:

Sendo A, B e C três conjuntos arbitrários e U o conjunto universo, tem-se:

i) $A \cup A = A$

ii) $A \cup \phi = A$

iii) $A \cup U = U$

iv) $A \cap A = A$

v) $\mathrm{A} \cap \phi = \phi$

vi) $A \cap U = A$

vii) $A \cup B = B \cup A$ (comutativa em relação à união)

viii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$ (associativa em relação à união)

ix) $A \cap B = B \cap A$ (comutativa em relação à interseção)

x) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$ (associativa em relação à interseção)

xi) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributiva da união em relação à interseção)

xii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributiva da intersecção em relação à união)

xiii) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$ (distributiva da interseção em relação à diferença)

xiv) $A^C \cap A = \phi$, onde A^C é o complementar de A em relação ao conjunto universo U.

xv) $U^C = \phi$ e $\phi^C = U$

xvi) $(A^C)^C = A$

xvii) $A - B = A \cap B^C$

xviii) $A - B = B^C - A^C$

xix) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ (Primeira Lei de Morgan)

Generalização: $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)^C = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)^C = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^C = A_1^C \cap A_2^C \cap \ldots \cap A_n^C$

xx) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ (Segunda Lei de Morgan)

Generalização: $(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)^C = \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right)^C = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^C = A_1^C \cup A_2^C \cup \ldots \cup A_n^C$

xxi) $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$

xxii) $A \cup B = A \cup (B - (A \cap B) = A \cup (A^c \cap B)$

xxiii) $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$

xxiv) A= $A \cup (A \cap B)$

xxv) A= $A \cap (A \cup B)$

xxvi) $A = (A \cap B) \cup (A - B)$

xxvii) A= $(A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

xxviii) $A \subset B \Rightarrow A^c \supset B^c \vee B^c \subset A^c$ Obs.: $\vee$ = ou

xxix) $A \subset B$ e $C \subset D \Rightarrow (A \mathrm{X} C) \subset (B \mathrm{X} D)$, onde X = produto cartesiano.

xxx) $A \ \mathrm{X} \ (B \cup C) = (A \mathrm{X} B) \cup (A \mathrm{X} C)$ (distributiva do produto cartesiano em relação à união)

xxxii) $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow A \subset C$. Obs.: $\wedge$ = e

Partição de um Conjunto

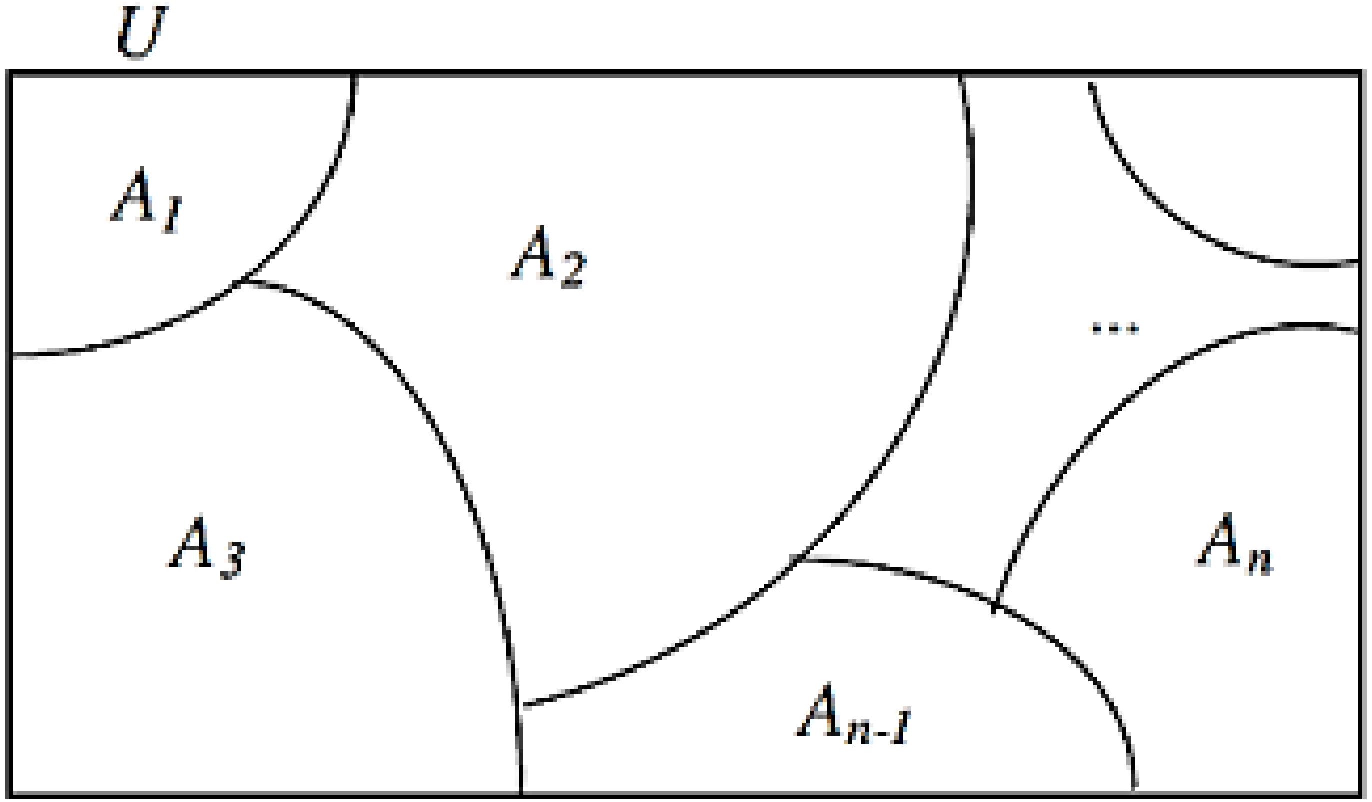
Definição: Os subconjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$ formam uma *partição* do conjunto U se:

i) $A_i \neq \varnothing, \quad \forall \; i = 1, 2, ..., n$

ii) $A_i \cap A_j = \varnothing$, para $i \neq j$ (ou seja, A_i e A_j são conjuntos disjuntos), com $j = 1, 2, ..., n$.

iii) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = U$

Ex:



Em resumo, uma partição de um conjunto U é uma coleção de subconjuntos não-vazios e disjuntos de U, cujas uniões são iguais a U.

Conjuntos Numéricos

Conjunto dos números naturais (N):

$N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ou

$$\begin{array}{cccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet\bullet\bullet \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \end{array}$$

No conjunto dos naturais são definidas duas operações fundamentais: a adição e a multiplicação.

Propriedades:

Sendo a, b e $c \in N$, tem-se:

$(a + b) + c = a + (b + c)$	(associativa da adição)
$a + b = b + a$	(comutativa da adição)
$a + 0 = a$	(elemento neutro da adição)
$(ab)c = a(bc)$	(associativa da multiplicação)
$ab = ba$	(comutativa da multiplicação)
$a.1 = a$	(elemento neutro da multiplicação)
$a(b + c) = ab + ac$	(distributiva da multiplicação em relação à adição)

Observação:

Sendo a e b números naturais, o símbolo a - b não tem significado em N, pois o simétrico de b não existe em N (em símbolos, $-b \notin N$).

Dessa forma, a subtração não é uma operação em N e os demais conjuntos numéricos (Z, Q, R-Q , R e C) constituem ampliações de N, a fim de solucionarem os problemas que motivaram essa ampliação.

Conjunto dos números inteiros (Z):

$$Z = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\} \text{ ou}$$

•••	•	•	•	•	•	•••
	-2	-1	0	1	2	

Subconjuntos de Z:

$Z_+ = \{0, 1, 2, 3, ...\} = N$ (conjunto dos inteiros não negativos)

$Z_- = \{..., -3, -2, -1, 0\}$ (conjunto dos inteiros não positivos)

$Z^* = Z - \{0\} = \{..., -3, -2, -1, 1, 2, 3, ...\}$ (conjunto dos inteiros não nulos)

$Z_+^* = \{1, 2, 3, ...\}$ (conjunto dos inteiros positivos)

$Z_-^* = \{..., -3, -2, -1\}$ (conjunto dos inteiros negativos)

Propriedades:

Sendo a, b e $c \in Z$, tem-se:

$(a + b) + c = a + (b + c)$ (associativa da adição)

$a + b = b + a$ (comutativa da adição)

$a + 0 = a$ (elemento neutro da adição)

$a + (-a) = 0$	(simétrico ou oposto aditivo)
$(ab)c = a(bc)$	(associativa da multiplicação)
$ab = ba$	(comutativa da multiplicação)
$a.1 = a$	(elemento neutro da multiplicação)
$a(b + c) = ab + ac$	(distributiva da multiplicação em relação à adição)

Devido a existência ($\exists = existe$) em Z de elemento simétrico para a adição ($\forall\, a \in Z$, $\exists$ $-a \in Z$ tal que $a + (-a) = 0$) é possível definir em Z a operação de subtração, estabelecendo que $\forall a \in Z, \forall b \in Z$, tem-se $a - b = a + (-b)$.

No entanto, o inverso de um número inteiro q, com $q \neq 1$ e $q \neq -1$, não existe em Z, isto é, $\frac{1}{q} \notin Z$ se $q \in Z - \{-1, 1\}$. Por isso não se define em Z a operação de divisão.

O símbolo $\frac{p}{q}$ não tem significado em Z. O conjunto dos racionais supera esta dificuldade.

Conjunto dos números racionais (Q):

$$Q = \left\{ \frac{p}{q}, \text{com } \; \mathrm{p} \in \mathrm{Z} \text{ e } \mathrm{q} \in \mathrm{Z}^* \right\} \text{ ou}$$

$$\cdots \quad -2 \quad -\frac{3}{2} \quad -1 \quad -0{,}1 \quad 0 \quad 0{,}25 \quad 1 \quad 1{,}333\ldots \quad 2 \quad 2{,}004 \quad \cdots$$

No conjunto dos racionais valem as seguintes definições:

(i) igualdade: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

(ii) adição: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

(iii) multiplicação: $\frac{a}{b} . \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Propriedades:

Sendo $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ e $\frac{e}{f} \in Q$, tem-se:

$(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + (\frac{c}{d} + \frac{e}{f})$ (associativa da adição)

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$ (comutativa da adição)

$\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$ (elemento neutro da adição)

$$\frac{a}{b}+(-\frac{a}{b})=0$$ (simétrico ou oposto aditivo)

$$(\frac{a}{b}.\frac{c}{d}).\frac{e}{f}=\frac{a}{b}(\frac{c}{d}.\frac{e}{f})$$ (associativa da multiplicação)

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{c}{d}.\frac{a}{b}$$ (comutativa da multiplicação)

$$\frac{a}{b}.1=\frac{a}{b}$$ (elemento neutro da multiplicação)

$$\frac{a}{b}(\frac{c}{d}+\frac{e}{f})=\frac{a}{b}.\frac{c}{d}+\frac{a}{b}.\frac{e}{f}$$ (distributiva da multiplicação em relação à adição)

$$\frac{a}{b}.\frac{b}{a}=1,\ \text{com}\ \frac{a}{b}\neq 0$$ (simétrico ou inverso para a multiplicação)

Devido à propriedade do simétrico multiplicativo

$$\left(\forall\ \frac{a}{b} \in Q \text{ e } \frac{a}{b} \neq 0,\ \exists\ \frac{b}{a} \in Q \text{ tal que } \frac{a}{b}.\frac{b}{a} = 1\right),$$

define-se em $Q^* = Q - \{0\}$ a operação de divisão, estabelecendo-se que

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b}.\frac{d}{c} \text{ para } \frac{a}{b} \in Q^* \text{ e } \frac{c}{d} \in Q^*.$$

Todo número racional $\frac{a}{b}$ pode ser representado por um número decimal. Para isso, basta dividir o numerador a pelo denominador b.

O número decimal obtido pode ter uma quantidade finita de algarismo (decimal exata) ou ter uma quantidade infinita de algarismos que se repetem periodicamente (dízima periódica).

Todavia, os números decimais com uma quantidade infinita de algarismos não periódicos (dízimas não periódicas) não podem ser obtidos através da divisão de dois números inteiros. Por isso, as dízimas não periódicas não são consideradas números racionais.

Se $\frac{a}{b} \in Q$ e n é um número natural tal que $n \geq 2$, nem sempre $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ é racional.

Assim, a operação de radiciação não pode ser definida em Q. O conjunto dos reais supera este impedimento.

Conjunto dos números irracionais (R - Q):

Os números irracionais são dízimas não periódicas como, por exemplo, $\sqrt{2} = 1{,}4142136...$; $\sqrt[4]{5} = 1{,}495348...$; $\pi = 3{,}141592...$; e $= 2{,}718281...$; $1{,}010010001...$

Se α é um número irracional e r é um número racional, então $\alpha + r$, $\alpha . r$, $\frac{\alpha}{r}$ e $\frac{r}{\alpha}$ são números irracionais.

Conjunto dos números reais (R):

O conjunto dos números reais é formado por todos os números decimais, sejam eles decimais exatos, dízimas periódicas ou dízimas não periódicas, isto é, os números reais são formados pelos racionais e pelos irracionais.

Assim, $R = Q \cup (R - Q)$ e geometricamente a reta dos números reais é a única reta contínua dos conjuntos até aqui estudados.

Os conjuntos N, Z, Q e $(R - Q)$ são representados geometricamente por um conjunto de pontos espaçados entre si.

Você sabe dizer por quê?

A reta dos reais é representada pela figura

e estão localizados sobre essa reta todos os números racionais e irracionais.

Propriedades:

Sendo a, b e $c \in R$, tem-se:

$(a+b)+c=a+(b+c)$	(associativa da adição)
$a+b=b+a$	(comutativa da adição)
$a+0=a$	(elemento neutro da adição)
$a+(-a)=0$	(simétrico ou oposto aditivo)

$(a.b).c = a(b.c)$	(associativa da multiplicação)
$a.b = b.a$	(comutativa da multiplicação)
$a.1 = a$	(elemento neutro da multiplicação)
$a(b+c) = ab + ac$	(distributiva da multiplicação em relação à adição)
$a.\frac{1}{a} = 1$, com $a \neq 0$	(simétrico ou inverso para a multiplicação)

Como $\forall a \in R$, $\forall b \in R$ tem-se $a - b = a + (-b)$, então a operação de subtração está definida em R.

Como $\forall a \in R$, $\forall b \in R^*$ tem-se $a : b = a.\frac{1}{b}$, então a operação de divisão está definida em R^*.

Como os conjuntos Q e $(R - Q)$ são subconjuntos de R, então a radiciação pode ser definida em R_+, isto é, $\sqrt[n]{a} \in R$ para todo $a \in R_+$.

Desde que o índice da raiz (n) seja ímpar, os radicais da forma $\sqrt[n]{-a}$, com $a \in R_+$, também representam números reais.

No entanto, $\sqrt[n]{-a} \notin R$ se $a \in R_+^*$. Por exemplo, $\sqrt{-1} \notin R$, pois $\sqrt{-1} = x \Rightarrow -1 = x^2$ e tal situação é impossível se $x \in R$.

O conjunto dos números complexos dá conta desse impedimento.

Conjunto dos números complexos (C):

Pode-se definir o conjunto dos números complexos como o conjunto dos pares ordenados $(x,\ y)$ de números reais para os quais estão definidas a igualdade, a adição e a multiplicação conforme abaixo.

Tomando dois elementos (a,b) e $(c,d) \in R^2$, com $R^2 = R \text{ X } R$, tem-se:

(i) igualdade: $(a,\ b) = (c,\ d) \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$

(ii) adição: $(a,\ b) + (c,\ d) = (a + c,\ \ b + d)$

(iii) multiplicação: $(a,\ b).(c,\ d) = (ac - bd,\ \ ad + bc)$

Todo número complexo $z = (a,b)$ pode ser escrito sob a *forma algébrica* $z = a + bi$, onde a unidade imaginária i é definida como $i = \sqrt{-1}$, obtendo-se $i^2 = -1$.

É isso que justifica a definição da multiplicação em C como $(a, b).(c, d) = (ac - bd, \ ad + bc)$, uma vez que essa igualdade equivale a

$$
\begin{aligned}
(a+bi).(c+di) &= ac + adi + bci + bdi^2 \\
&= ac - bd + (ad + bc)i = (ac - bd, \ ad + bc)
\end{aligned}
$$

Observações:

- O conjunto C dos números complexos não é igual ao conjunto R^2, uma vez que pela definição de conjuntos iguais os elementos de C e de R^2 não são os mesmos. Por exemplo: $(a, b) \in C$ significa que a componente b está sendo multiplicada pela unidade imaginária, ou seja, (a, b) é apenas uma forma de representar o número complexo $a + bi$.
- Um número complexo $z = a + bi$ pode ser representado ainda na *forma trigonométrica ou polar* $z = \rho(\cos\theta + i.sen\theta)$, bem como na *forma exponencial* $z = \rho.e^{i\theta}$.

Geometricamente, os números complexos são representados num plano denominado *plano de Argand-Gauss.*

Propriedades:

Sendo z_1, z_2 e $z_3 \in C$, tem-se:

$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$	(associativa aditiva)
$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$	(comutativa aditiva)
$z + (0,0) = z$	(elemento neutro aditivo)
$z + (-z) = (0,0)$	(elemento simétrico ou inverso aditivo)

$(z_1 \,.\, z_2) \,.\, z_3 = z_1 \,.\, (\, z_2 \,.\, z_3\,)$ (associativa multiplicativa)

$z_1 \,.\, z_2 = z_2 \,.\, z_1$ (comutativa multiplicativa)

$z.(1,0) = z$ (elemento neutro multiplicativo)

$z.(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}) = (1,0)$ (elemento inverso multiplicativo), com $z = (a, b)$

$z_1.\, (\, z_2 + z_3) = z_1.\, z_2 + z_1\, .z_3\,)$ (distributiva da multiplicação em relação à adição)

Estudo dos números reais:

Valor absoluto ou módulo de um número real:

Definição:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } \ x \geq 0 \\ -x & \text{se } \ x < 0 \end{cases}.$$

De acordo com a definição anterior, para todo $x \in R$ tem-se $|x| \geq 0$.

Propriedades

Suponhamos que a e b sejam números reais quaisquer e n um inteiro. Então

1. $|ab| = |a||b|$

2. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$

3. $|a^n| = |a|^n$

Para resolver as equações e as inequações envolvendo valores absolutos, é frequentemente muito útil usar as seguintes afirmações.

Suponha $a > 0$. Então

4. $|x| = a$ se e somente se $x = \pm a$

5. $|x| < a$ se e somente se $-a < x < a$

6. $|x| > a$ se e somente se $x > a$ ou $x < -a$

Por exemplo, a desigualdade $|x| < a$ diz que a distância de x à origem é menor que a, e você pode ver a partir da Figura 7 que isso é verdadeiro se e somente se x estiver entre $-a$ e a.

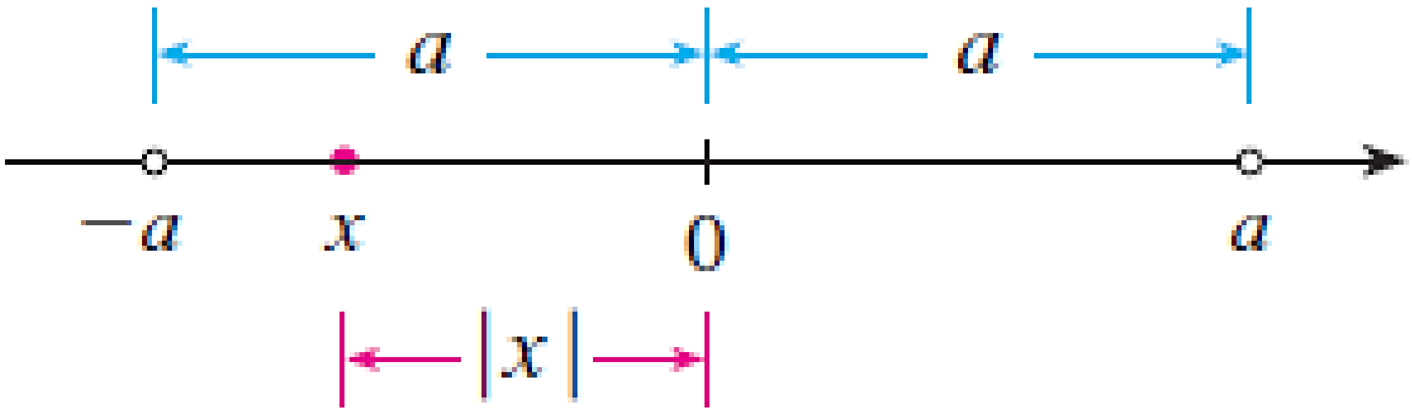


FIGURA 7

Se a e b forem números reais quaisquer, então a distância entre a e b é o valor absoluto da diferença, isto é, $|a - b|$, que também é igual a $|b - a|$. (Veja a Figura 8.)

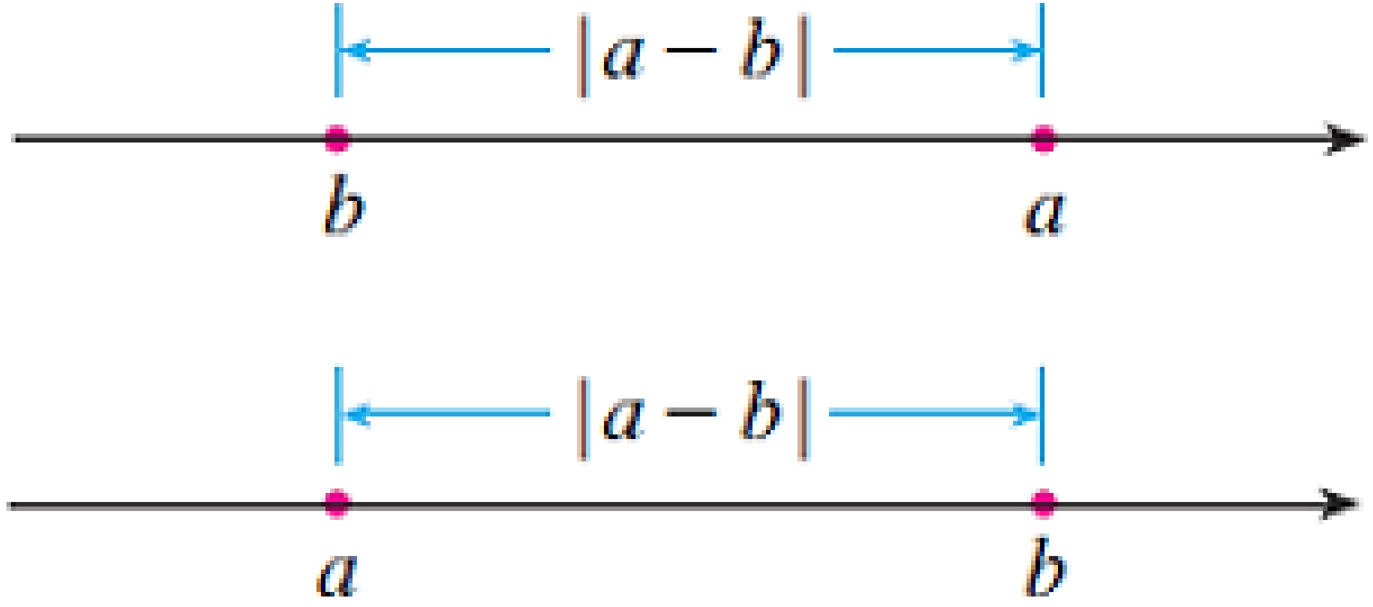


FIGURA 8
Comprimento de um segmento de reta $= |a - b|$

$\boxed{7}$ A Desigualdade Triangular

Se a e b forem quaisquer números reais, então

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

Exemplo

Se $|x - 4| < 0{,}1$ e $|y - 7| < 0{,}2$, use a Desigualdade Triangular para estimar $|(x + y) - 11|$.

A fim de usarmos a informação fornecida, utilizamos a Desigualdade Triangular com $a = x - 4$ e $b = y - 7$:

$$\begin{aligned}|(x+y)-11| &= |(x-4)+(y-7)| \\ &\leqslant |x-4|+|y-7| \\ &< 0{,}1+0{,}2=0{,}3\end{aligned}$$

Logo,

$$|(x+y)-11|<0{,}3$$

Intervalos

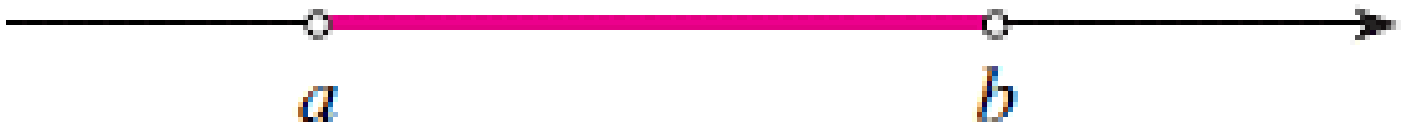
Intervalo é um subconjunto dos números reais.

Por exemplo,

se $a < b$, o **intervalo aberto** de a até b consiste em todos os números entre a e b e é denotado pelo símbolo (a, b).

Usando a notação construtiva de conjuntos, podemos escrever

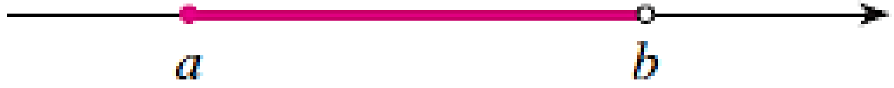
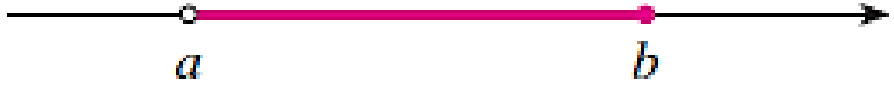
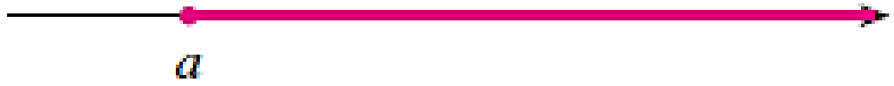
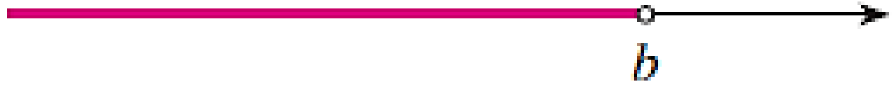
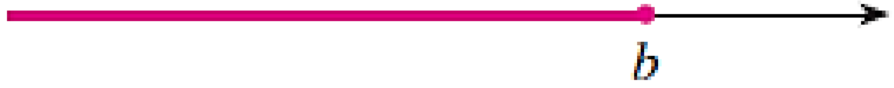
$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$



O intervalo fechado de a até b é o conjunto

$$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

1 Tabela de Intervalos

Notação	Descrição do conjunto	Ilustração
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$	
$[a, b)$	$\{x \mid a \leqslant x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leqslant b\}$	
(a, ∞)	$\{x \mid x > a\}$	
$[a, \infty)$	$\{x \mid x \geqslant a\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leqslant b\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto dos números reais)