Produto Escalar, Produto Vetorial e Produto Misto

Produto Escalar

O produto escalar (ou produto interno) entre dois vetores, resulta em um escalar.

Considere os seguintes vetores

$$\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

representamos $\vec{u} \cdot \vec{v}$, ao número real

$$\boldsymbol{\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$$

O produto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ também é indicado por $< \vec{u} \cdot \vec{v} >$ e se lê “ $\vec{u}$ escalar $\vec{v}$ ”.

Exercícios

1. Dados os vetores $\vec{u} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 8\vec{k}$ e $\vec{v} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$. Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

2. Sejam os vetores $\vec{u} = (3, 2, 1)$ e $\vec{v} = (-1, -4, -1)$. Calcular:

a) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (2\vec{u} - \vec{v})$

b) $\vec{u} \cdot \vec{u}$

c) $\vec{0} \cdot \vec{u}$

3. Dados os vetores $\vec{u} = (4, \alpha, -1)$ e $\vec{v} = (\alpha, 2, 3)$ e os pontos $A(4, -1, 2)$ e $B(3, 2, -1)$, determinar o valor de α tal que $\vec{u} \cdot \left(\vec{v} + \overrightarrow{BA}\right) = 5$.

Propriedades do Produto Escalar

Para quaisquer vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ e o número real α, é fácil verificar que:

I. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

II. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ e $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

III. $\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v})$

IV. $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$ se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ se $\vec{u} = \vec{0} = (0, 0, 0)$.

V. $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$

Exercícios

1) Sendo $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 2$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$, calcular $(3\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (-\vec{u} + 4\vec{v})$

2) Mostrar que:

a) $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$

b) $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$

c) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2$

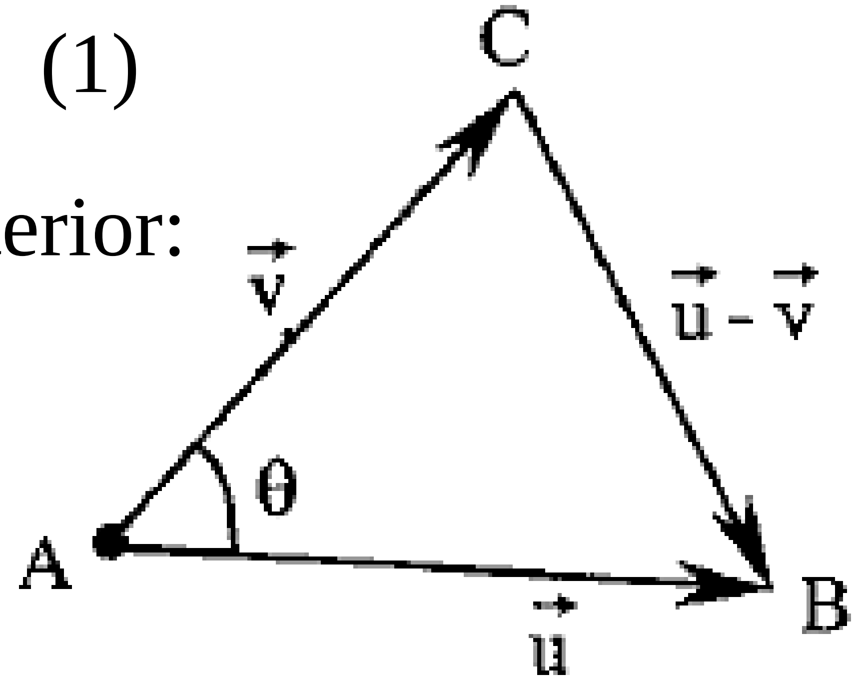
Definição Geométrica de Produto Escalar

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores não nulos e θ o ângulo entre eles, então

$$\boldsymbol{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta}$$

Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo ABC da figura, temos

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\,|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta \qquad (1)$$



Por outro lado, de acordo com o exercício anterior:

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 \qquad (2)$$

Comparando as igualdades (1) e (2):

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\,|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

Daí

$$\boldsymbol{\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta\,, \quad 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ}$$

O produto escalar de dois vetores não nulos é igual ao produto de seus módulos pelo cosseno do ângulo por eles formado.

Observações

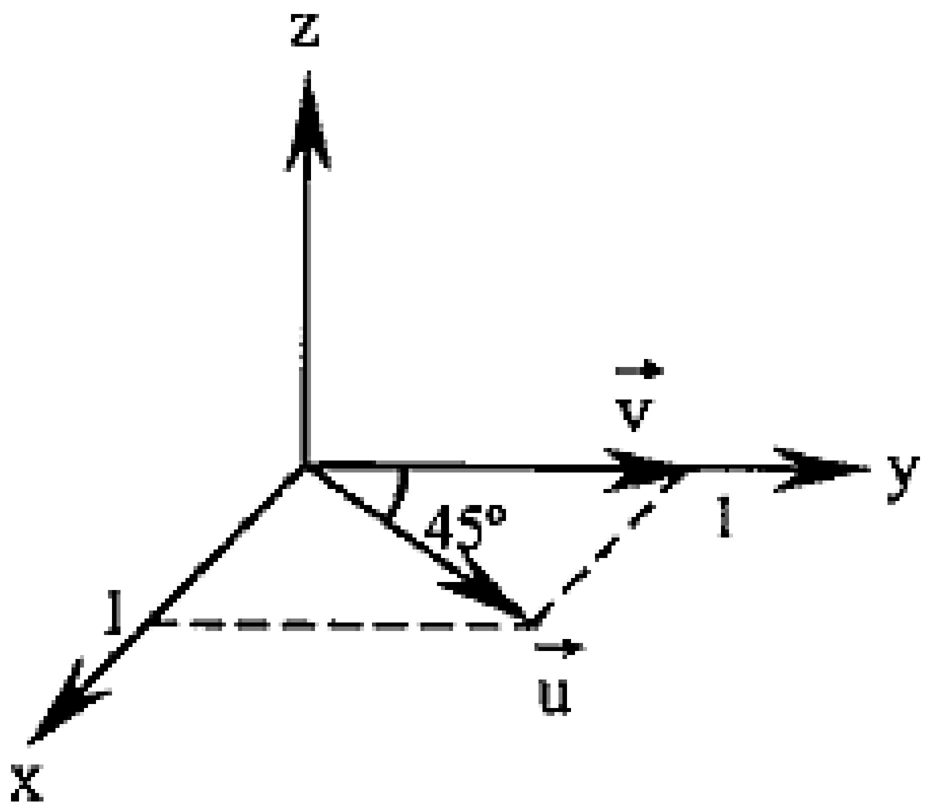
a) Equivalência entre as expressões

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \qquad (1)$$

e

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta \qquad (2)$$

Dados os vetores $\vec{u} = (1, 1, 0)$ e $\vec{v} = (0, 1, 0)$ e $\theta = 45°$ o ângulo entre eles, como na figura:



Então, por (1), temos

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1(0) + 1(1) + 0(0) = 1$$

e, por (2)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos 45° = (\sqrt{2})(1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$$

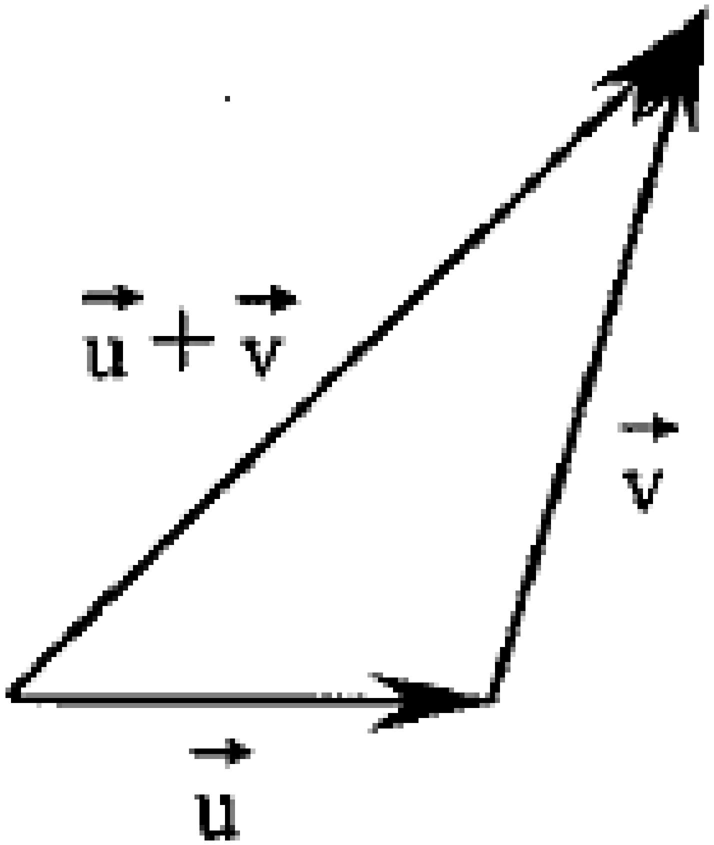
b) Para todos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vale:

i. $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}||\vec{v}|$ (*Desigualdade de Schwartz*)

ii. $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$ (*Desigualdade Triangular*)

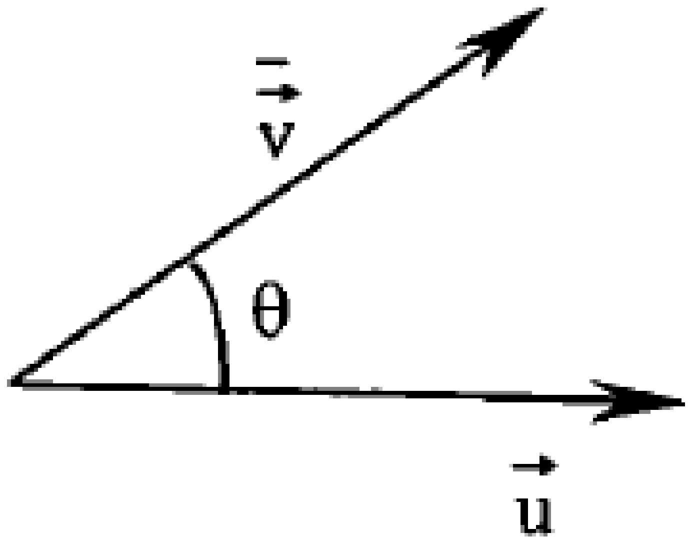
A segunda desigualdade confirma a propriedade geométrica segundo a qual, em um triângulo, *a soma dos comprimentos de dois lados* $(|\vec{u}| + |\vec{v}|)$ *é maior do que o comprimento do terceiro lado* $(|\vec{u} + \vec{v}|)$.

A igualdade ocorre somente quando $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem paralelos e de mesmo sentido .

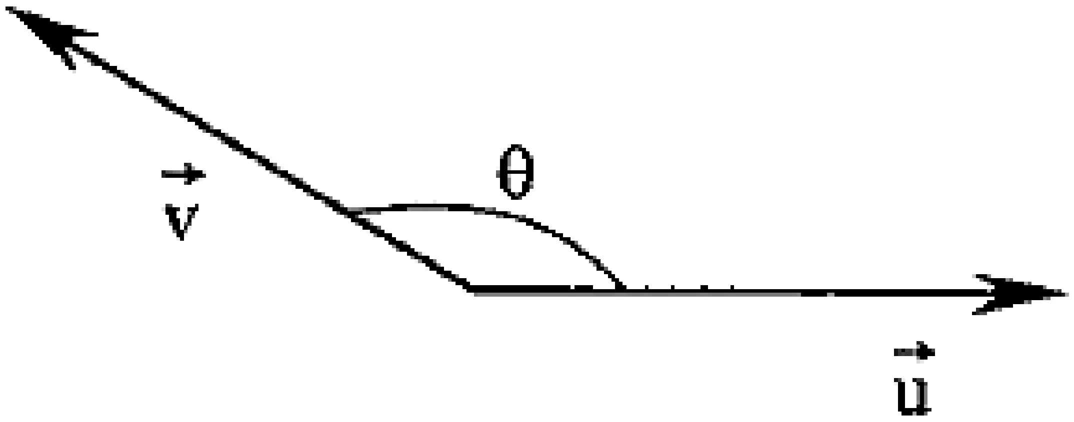


c) Como em $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta$ o sinal de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ é o mesmo de $\cos\theta$ conclui-se que:

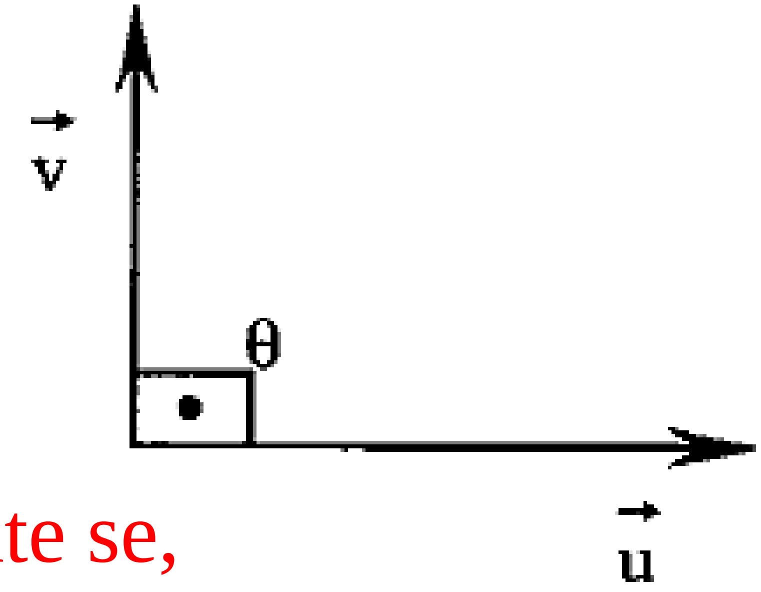
1º) $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \iff \cos\theta > 0 \iff 0° \leq \theta < 90°$



2º) $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \iff \cos\theta < 0 \iff 90° < \theta \leq 180°$



3º) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \cos\theta = 0 \iff \theta = 90°$



Essa afirmação estabelece a condição de ortogonalidade de dois vetores:

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais se, e somente se,

$$\boldsymbol{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$$

Exercícios

1) Mostrar que os seguintes pares de vetores são ortogonais:

a) $\vec{u} = (1, -2, 3)$ e $\vec{v} = (4, 5, 2)$

b) $\vec{i}$ e $\vec{j}$

2) Provar que o triângulo de vértices A(2, 3, 1), B(2, 1, -1) e C(2, 2, -2) é um triângulo retângulo.

3) Determinar um vetor ortogonal aos vetores $\vec{v}_1 = (1, -1, 0)$ e $\vec{v}_2 = (1, 0, 1)$.

Cálculo do Ângulo de Dois Vetores

Da igualdade

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta$$

temos

$$\boldsymbol{\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}}$$

fórmula a partir da qual se calcula o ângulo θ entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos.

Exercícios

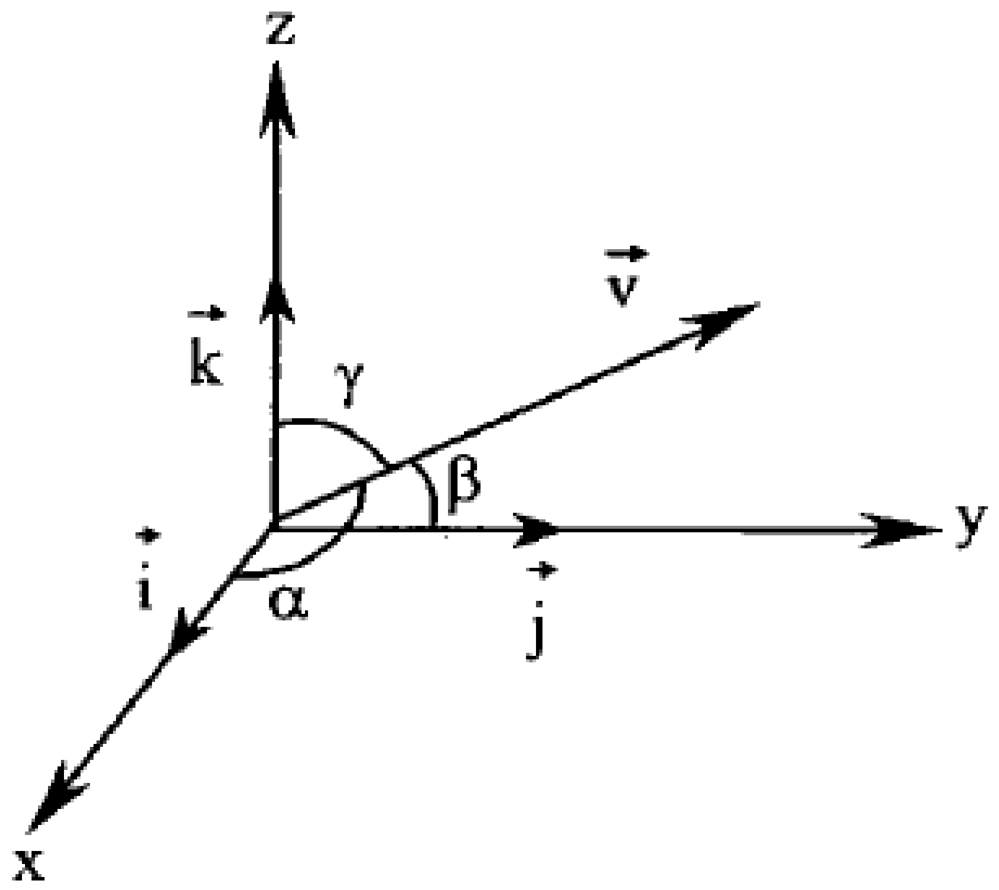
1) Calcular o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1, 1, 4)$ e $\vec{v} = (-1, 2, 2)$.

2) Sabendo que o vetor $\vec{v} = (2, 1, -1)$ forma ângulo de 60° com o vetor $\overrightarrow{AB}$ determinado pelos pontos A(3, 1, -2) e B(4, 0, m), calcular m.

3) Determinar os ângulos internos ao triângulo ABC, sendo A(3, -3, 3), B(2, -1, 2) e C(1, 0, 2).

Ângulos Diretores e Cossenos Diretores de um Vetor

Seja $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ não nulo.



Ângulos diretores de $\vec{v}$ são ângulos α, β e γ que $\vec{v}$ forma com os vetores $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$, respectivamente.

Cossenos diretores de $\vec{v}$ são os cossenos de seus ângulos diretores, isto é, $\cos\alpha$, $\cos\beta$ e $\cos\gamma$.

Para o cálculo destes valores utilizaremos a fórmula $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{i}}{|\vec{v}||\vec{j}|} = \frac{(x, y, z)\cdot(1, 0, 0)}{|\vec{v}|(1)} = \frac{x}{|\vec{v}|}$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{j}}{|\vec{v}||\vec{j}|} = \frac{(x, y, z)\cdot(0, 1, 0)}{|\vec{v}|(1)} = \frac{y}{|\vec{v}|}$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{j}}{|\vec{v}||\vec{j}|} = \frac{(x, y, z)\cdot(0, 1, 0)}{|\vec{v}|(1)} = \frac{y}{|\vec{v}|}$$

Observação

Note que os cossenos diretores de $\vec{v}$ são precisamente as componentes do versor de $\vec{v}$:

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(x, y, z)}{|\vec{v}|} = \left(\frac{x}{|\vec{v}|}, \frac{y}{|\vec{v}|}, \frac{z}{|\vec{v}|}\right) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

Como o versor é um vetor unitário, decorre imediatamente

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

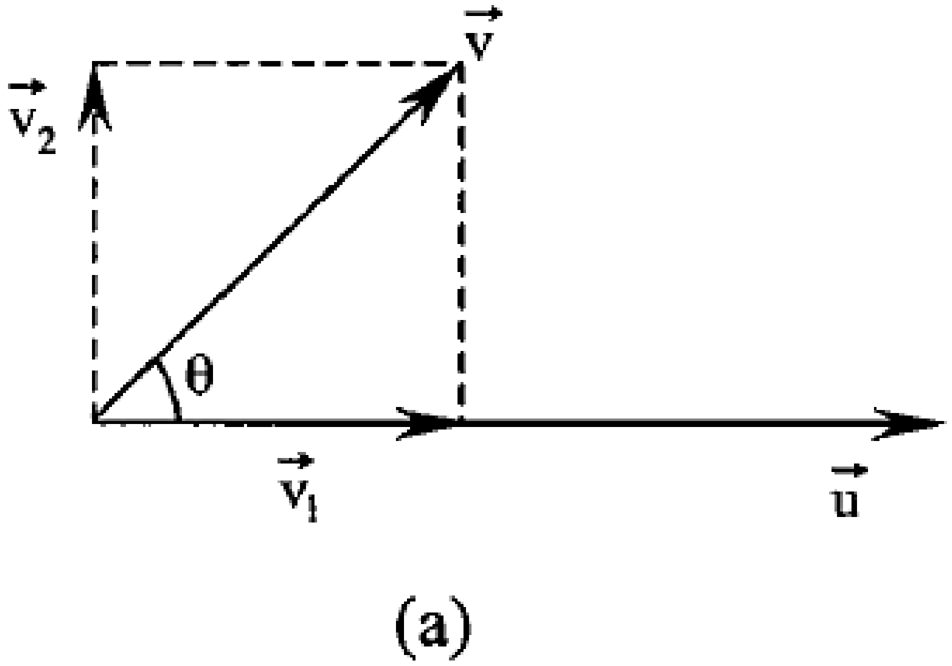
Exercícios

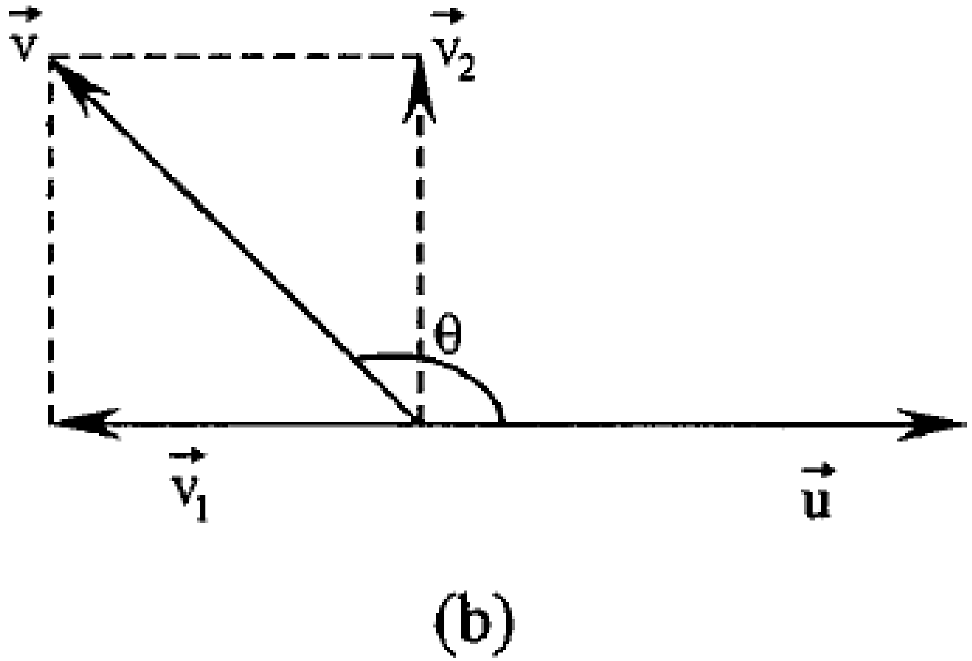
1) Calcular os ângulos diretores de $\vec{v} = (1, -1, 0)$.

2) Os ângulos diretores de um vetor são α, 45° e 60°.
Determinar α.

Projeção de um Vetor sobre o Outro

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos e θ o ângulo entre eles. Suponha que $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, sendo $\vec{v}_1 // \vec{u}$ e $\vec{v}_2 \perp \vec{u}$.





O vetor $\vec{v}_1$ é chamado **projeção ortogonal de** $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ e indicado por

$$\vec{v}_1 = proj_u\vec{v}$$

Além disso, sendo $\vec{v}_1 = \alpha\vec{u}$, conclui-se que,

$$proj_u\vec{v} = \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)\vec{u}.$$

Exercícios

1) Determinar o vetor projeção de $\vec{v} = (2, 3, 4)$ sobre $\vec{u} = (1, -1, 0)$.

2) Dados os vetores $\vec{v} = (1, 3, -5)$ e $\vec{u} = (4, -2, 8)$, decompor $\vec{v}$ como $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, sendo $\vec{v}_1 // \vec{u}$ e $\vec{v}_2 \perp \vec{u}$.

Produto Vetorial

Chama-se **produto vetorial** de dois vetores $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, se representa por $\vec{u} \times \vec{v}$, ao vetor

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

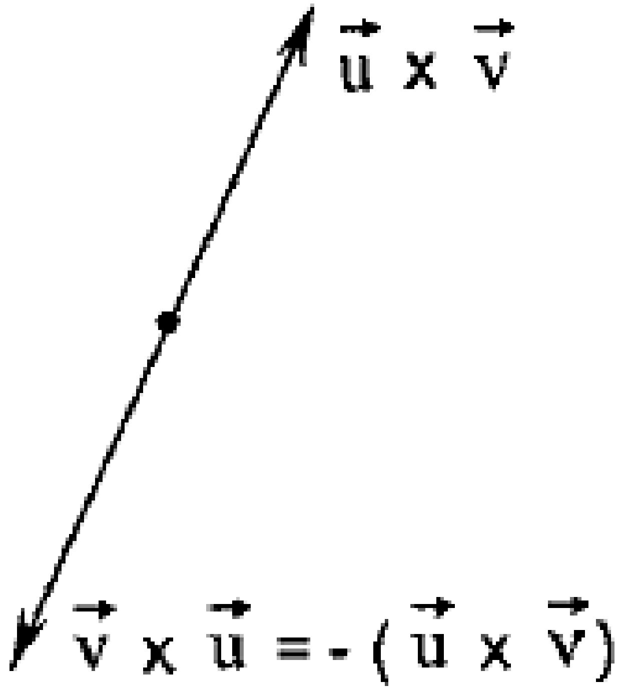
Obs: o produto vetorial é um vetor, diferentemente do produto escalar, no qual tínhamos um numero real.

Exercício

Calcular $\vec{u} \times \vec{v}$ para $\vec{u} = 5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} + \vec{k}$.

Observações

- $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$, logo o produto vetorial não é comutativo, assim, a ordem dos fatores é importante.



- $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ se, e somente se, $\vec{u} // \vec{v}$.

Características do Produto Vetorial

Considere os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$.

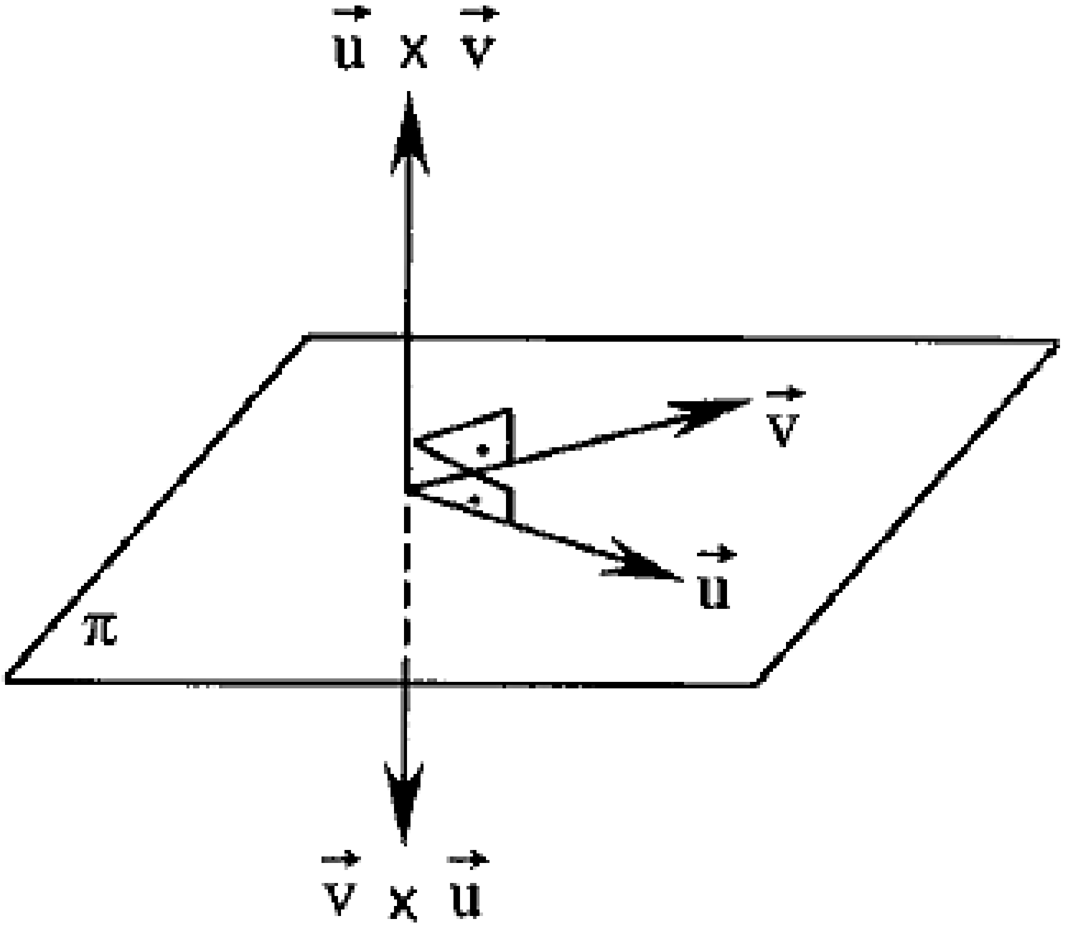
Direção de $\vec{u} \times \vec{v}$: o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Para **provar** isso basta mostrar que

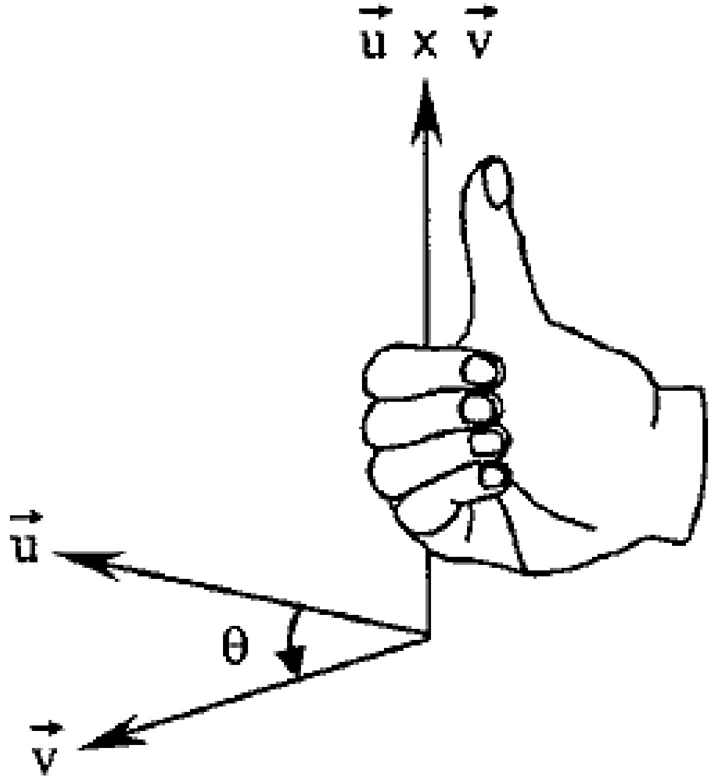
- $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0$

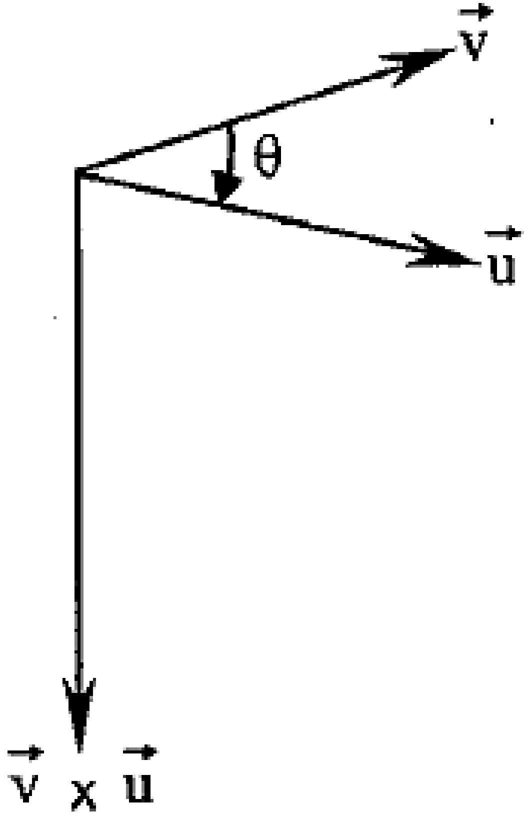
e

- $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$



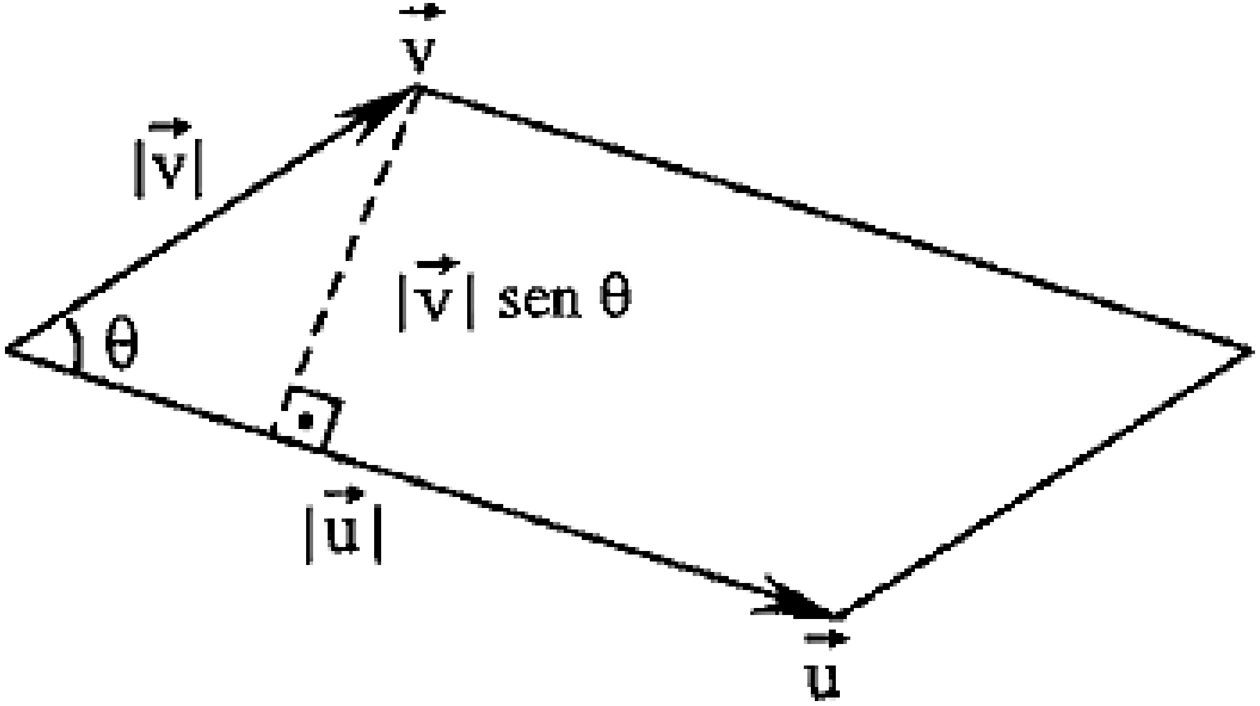
Sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$: o sentido do vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ pode ser determinado utilizando a “regra da mão direita”. Sendo θ o ângulo entre os vetores, suponha que $\vec{u}$ sofra rotação de ângulo até $\vec{v}$.





Comprimento de $\vec{u} \times \vec{v}$: se θ é o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos, então

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|sen(\theta)$$



A área desse paralelogramo é A=(base)(altura), ou seja

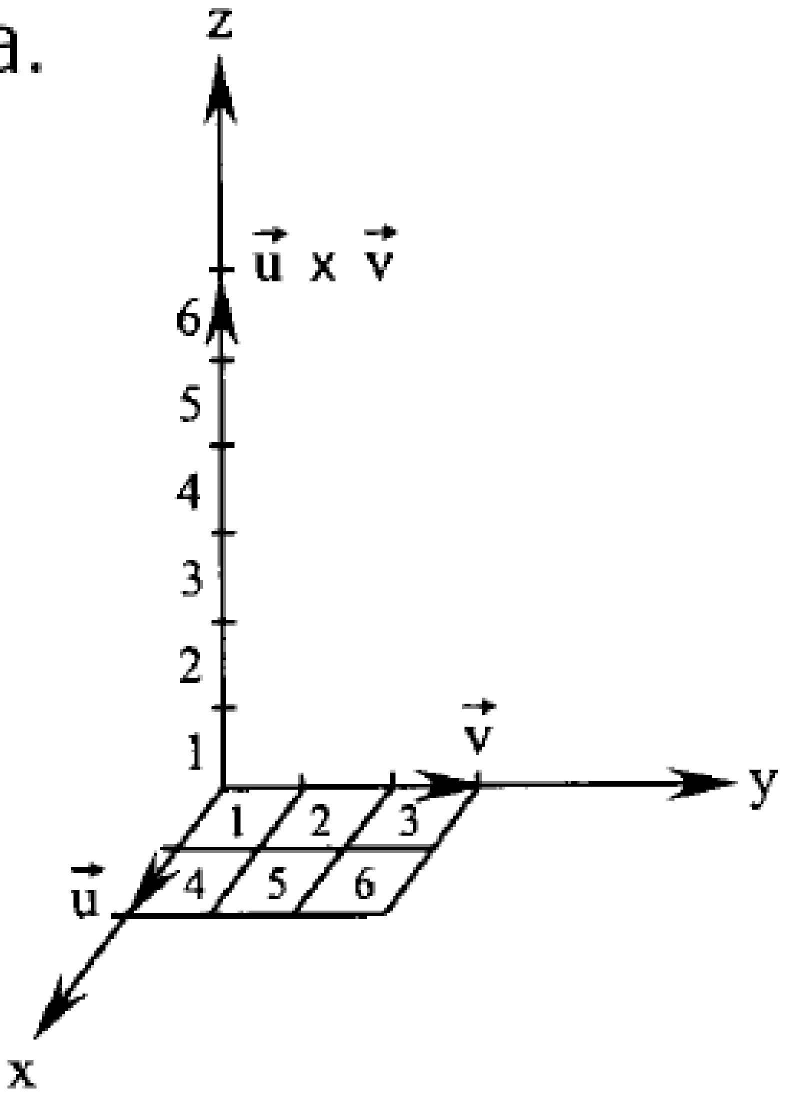
$$A=|\vec{u}||\vec{v}|sen(\theta) = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

Exercício

seja $\vec{u} = (2,0,0)$ e $\vec{v} = (0,3,0)$, calcule a área.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,6)$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = 6$$



Propriedades do Produto Vetorial

- O produto vetorial, em geral, não é associativo:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$$

Propriedades válidas:

- $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$
- $\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

Exercícios

1) Determinar o vetor $\vec{x}$, tal que $\vec{x}$ seja ortogonal ao eixo dos y e $\vec{u} = \vec{x} \times \vec{v}$, sendo $\vec{u} = (1, 1, -1)$ e $\vec{v} = (2, -1, 1)$.

2) Sejam os vetores $\vec{u} = (1, -1, -4)$ e $\vec{v} = (3, 2, -2)$. Determinar um vetor que seja

a) ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

b) ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e unitário;

c) ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e tenha módulo 4;

d) ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e tenha cota igual a 7.

Produto Misto

Chama-se **produto misto** dos vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$, o número real $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$. É também indicado por $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

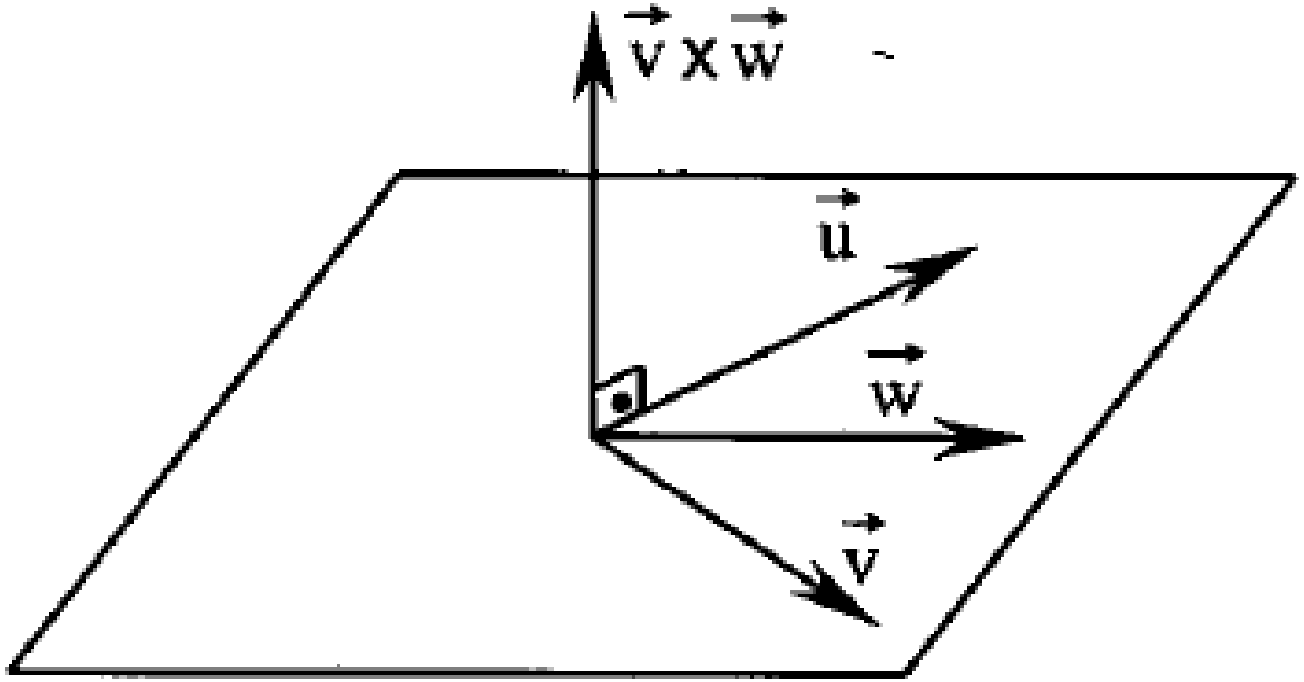
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Exercício

Calcular o produto misto dos vetores $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{w} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

Propriedades de Produto Misto

- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$=0, se um dos vetores for nulo, ou dois deles são colineares, ou se os três são coplanares.



- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = -(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$

- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + \vec{a}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{u}, \vec{v}, \vec{a})$

- $(\alpha\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \alpha\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \alpha\vec{w}) = \alpha(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

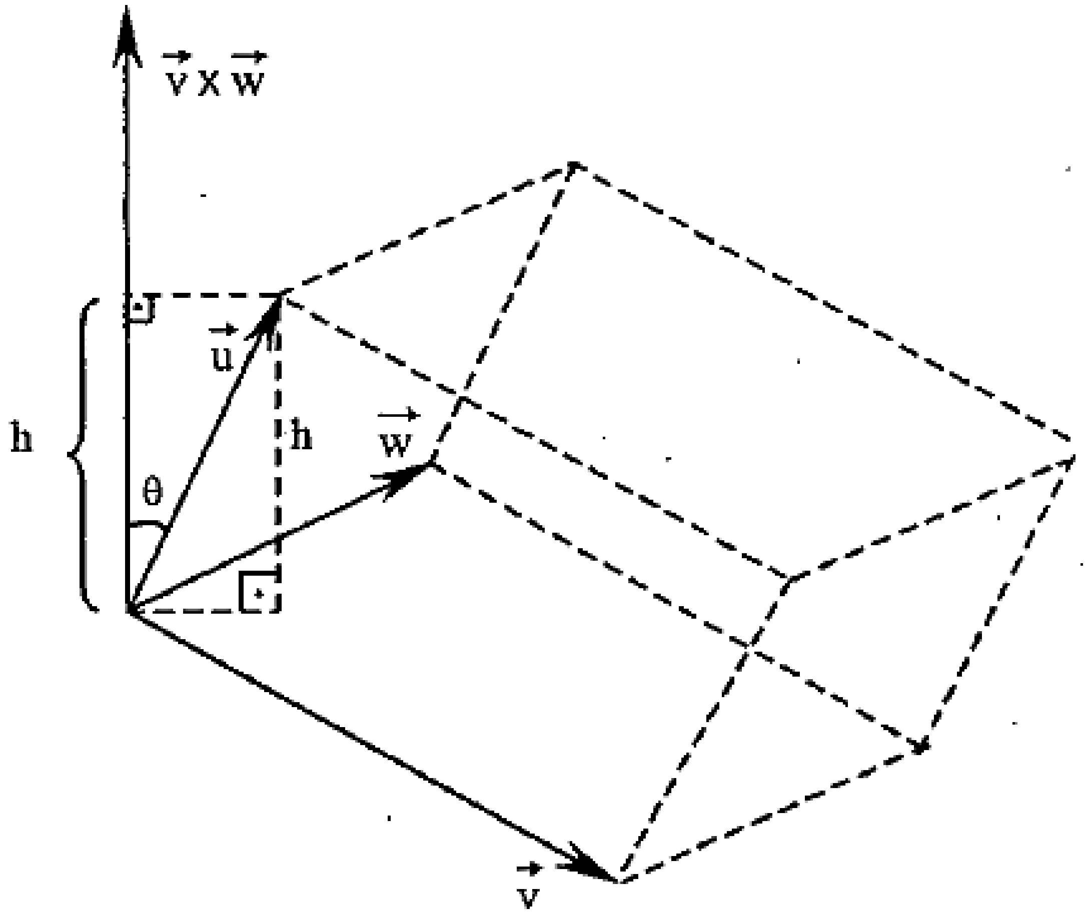
Exercícios

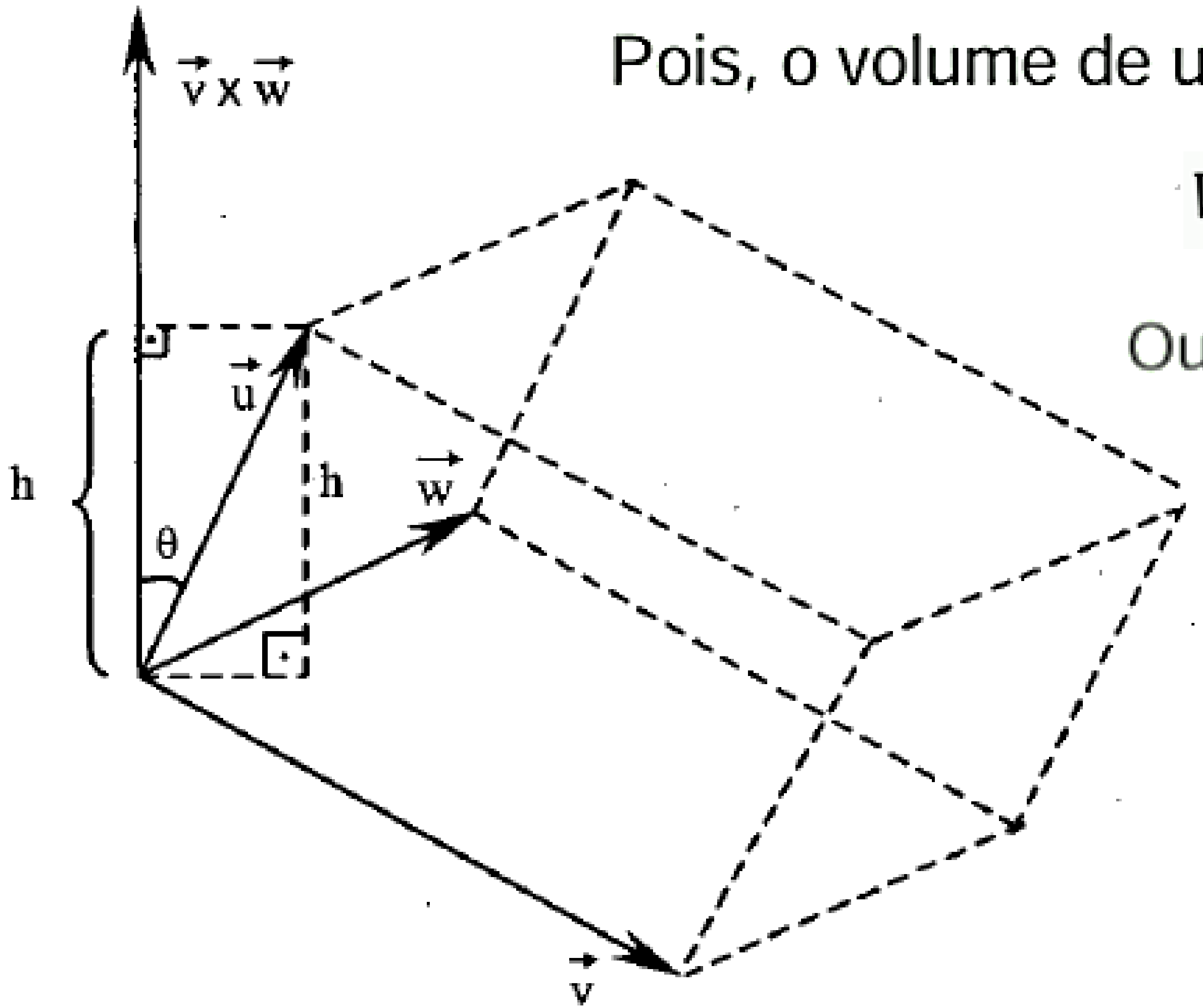
1) Verificar se são coplanares os vetores $\vec{u} = (2, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, 0, -1)$ e $\vec{w} = (2, -1, 4)$.

2) Qual deve ser o valor de m para que os vetores $\vec{u} = (2, m, 0)$, $\vec{v} = (1, -1, 2)$ e $\vec{w} = (-1, 3, -1)$ sejam coplanares?

Interpretação Geométrica de Produto Misto

O produto misto $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ é igual, em módulo, ao volume do paralelepípedo de arestas determinadas pelos vetores não coplanares $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.





Pois, o volume de um paralelepípedo é dado por

$$V = (\acute{a}rea\ da\ base)(altura)$$

Ou seja,

$$V = (|\vec{v} \times \vec{w}|)(|\vec{u}||\cos(\theta)|)$$

$$V = ||\vec{u}||\vec{v} \times \vec{w}|\cos(\theta)|$$

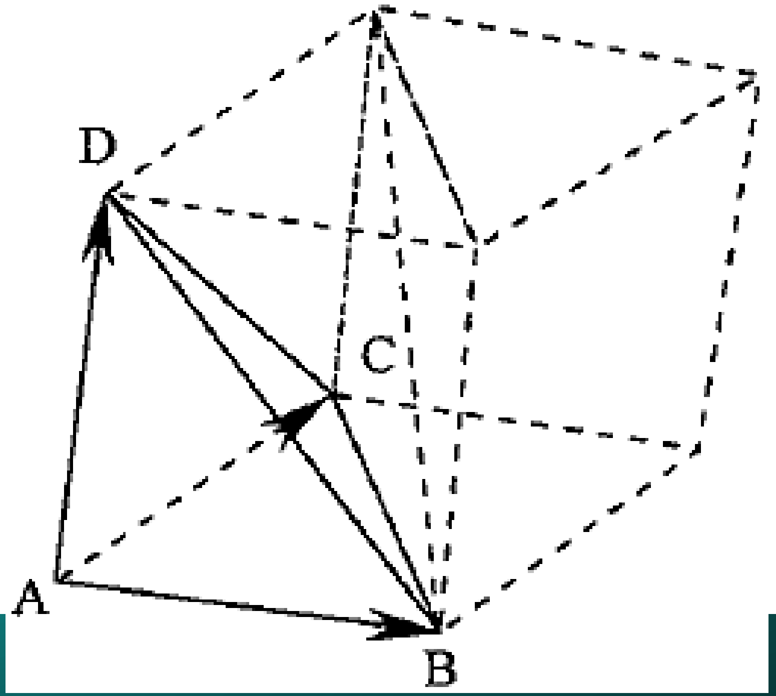
$$V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$$

Volume do Tetraedro

Sejam A, B, C e D pontos não-coplanares. Portanto, os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ também são não-coplanares.

Em conseqüência, estes vetores determinam um paralelepípedo cujo volume é

$$V = |\,(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\,|.$$

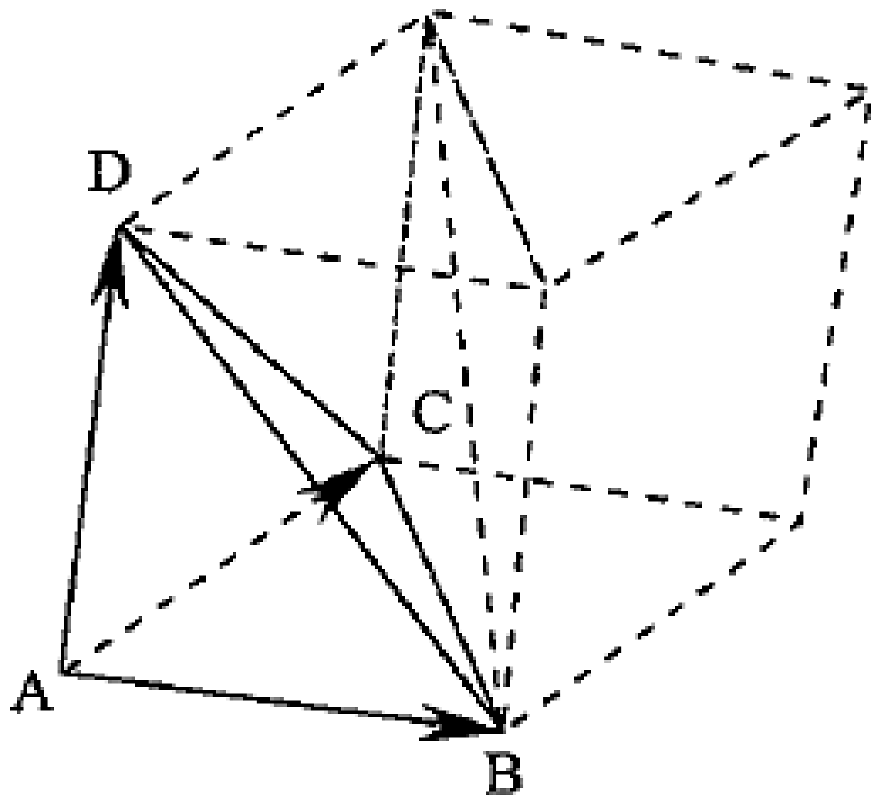


Volume do prisma:

$$V_p = \frac{1}{2}V$$

Volume do tetraedro:

$$V_t = \frac{1}{3}V_p = \frac{1}{6}V$$



Exercícios

1) Sejam os vetores $\vec{u} = (3, m, -2)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$ e $\vec{w} = (2, -1, 2)$. Calcular o valor de m para que o volume do paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ seja 16 u.v. (unidades de volume).

2) Sejam A(1, 2, -1), B(5, 0, 1), C(2, -1, 1) e D(6, 1, -3) vértices de um tetraedro. Calcular

a) o volume deste tetraedro;
b) a altura do tetraedro relativa ao vértice D.