Instituto Federal de Goiás
CURSO: Bacharelado em Ciência da Computação
TURMA: 1° período
Disciplina: Fundamentos Matemáticos

Lista de Exercícios – Vetores

I – Tratamento Geométrico:

4) O paralelogramo ABCD (Figura 1.30) é determinado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$, sendo M e N pontos médios dos lados DC e AB, respectivamente. Determinar:

a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$
b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}$
c) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$
d) $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BC}$
e) $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB}$
f) $\overrightarrow{BM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

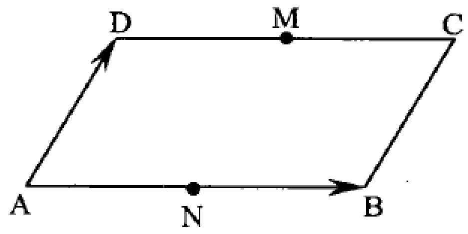
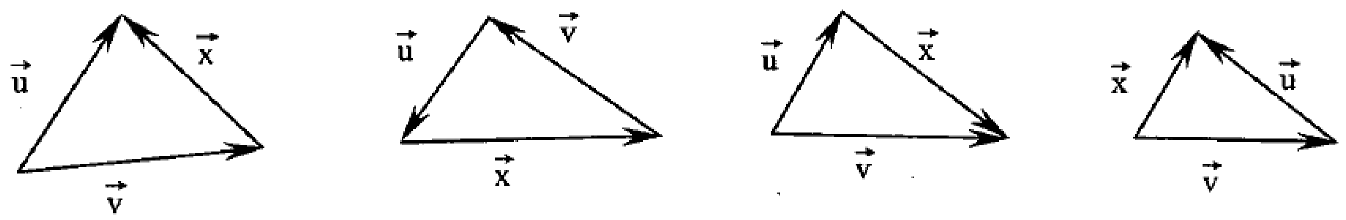


Figura 1.30

6) Determinar o vetor $\vec{x}$ nas figuras:



(a) (b) (c) (d)

11) Na Figura 1.35 estão representados os vetores coplanares $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Indicar, na própria figura, os vetores

a) $a\vec{v}$ e $b\vec{w}$ tal que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$
b) $\alpha\vec{u}$ e $\beta\vec{w}$ tal que $\vec{v} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{w}$

Teria sido possível realizar este exercício no caso de os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ serem *não*-coplanares?

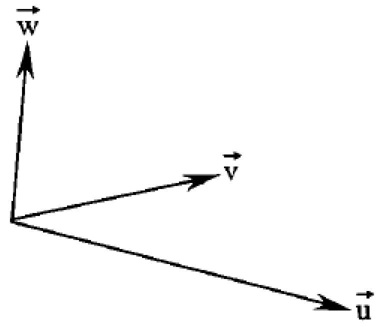


Figura 1.35

12) Sabendo que o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de 60°, determinar o ângulo formado pelos vetores

a) $\vec{u}$ e $-\vec{v}$ b) $-\vec{u}$ e $2\vec{v}$ c) $-\vec{u}$ e $-\vec{v}$ d) $3\vec{u}$ e $5\vec{v}$

II – Tratamento Algébrico

1) Dados os vetores $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ e $\vec{w} = -2\vec{i} + \vec{j}$, determinar

a) $2\vec{u} - \vec{v}$

b) $\vec{v} - \vec{u} + 2\vec{w}$

c) $\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v} - \vec{w}$

d) $3\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}$

3) Dados os pontos A(-1, 3), B(2, 5), C(3, -1) e O(0, 0), calcular

a) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{BC}$ c) $3\overrightarrow{BA} - 4\overrightarrow{CB}$

5) Dados os pontos A(3, -4) e B(-1, 1) e o vetor $\vec{v} = (-2, 3)$, calcular

a) $(B - A) + 2\vec{v}$

b) $(A - B) - \vec{v}$

c) $B + 2(B - A)$

d) $3\vec{v} - 2(A - B)$

16) Dados os vetores $\vec{u} = (1, -1)$, $\vec{v} = (-3, 4)$ e $\vec{w} = (8, -6)$, calcular

a) $|\vec{u}|$

b) $|\vec{v}|$

c) $|\vec{w}|$

d) $|\vec{u} + \vec{v}|$

e) $|2\vec{u} - \vec{w}|$

f) $|\vec{w} - 3\vec{u}|$

g) $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

h) $\left|\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right|$

17) Calcular os valores de *a* para que o vetor $\vec{u} = (a, -2)$ tenha módulo 4.

18) Calcular os valores de *a* para que o vetor $\vec{u} = (a, \frac{1}{2})$ seja unitário.

22) Encontrar o vetor unitário que tenha (I) o mesmo sentido de $\vec{v}$ e (II) sentido contrário a $\vec{v}$, nos casos:

a) $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j}$

b) $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j}$

c) $\vec{v} = (1, \sqrt{3})$

d) $\vec{v} = (0, 4)$

23) Dado o vetor $\vec{v} = (1, -3)$, determinar o vetor paralelo a $\vec{v}$ que tenha:

a) sentido contrário ao de $\vec{v}$ e duas vezes o módulo de $\vec{v}$;

b) o mesmo sentido de $\vec{v}$ e módulo 2;

c) sentido contrário ao de $\vec{v}$ e módulo 4.

28) Calcular a distância do ponto A(3, 4, -2)

a) ao plano xy;
b) ao plano xz;
c) ao plano yz;
d) ao eixo dos x;
e) ao eixo dos y;
f) ao eixo dos z.

51) Determinar o valor de a para que $\vec{u} = (a, -2a, 2a)$ seja um versor.

56) Dado o vetor $\vec{v} = (2, -1, -3)$, determinar o vetor paralelo a $\vec{v}$ que tenha

a) sentido contrário ao de $\vec{v}$ e três vezes o módulo de $\vec{v}$;

b) o mesmo sentido de $\vec{v}$ e módulo 4;

c) sentido contrário ao de $\vec{v}$ e módulo 5.

Produto Escalar

1) Dados os vetores $\vec{u} = (2, -3, -1)$ e $\vec{v} = (1, -1, 4)$, calcular

a) $2\vec{u} \cdot (-\vec{v})$
b) $(\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (\vec{v} - 2\vec{u})$
c) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$
d) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - \vec{u})$

3) Dados os pontos A (4, 0, -1), B (2, -2, 1) e C (1, 3, 2) e os vetores $\vec{u} = (2, 1, 1)$ e $\vec{v} = (-1, -2, 3)$, obter o vetor $\vec{x}$ tal que

a) $3\vec{x} + 2\vec{v} = \vec{x} + (\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u})\vec{v}$
b) $(\overrightarrow{BC} \cdot \vec{v})\vec{x} = (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{v} - 3\vec{x}$.

5) Determinar o vetor $\vec{v}$, sabendo que $|\vec{v}| = 5$, $\vec{v}$ é ortogonal ao eixo Ox, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 6$ e $\vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j}$.

12) Calcular $|\vec{u} + \vec{v}|$, $|\vec{u} - \vec{v}|$ e $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$, sabendo que $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 3$ e o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de 60°.

20) Encontrar os vetores unitários paralelos ao plano yOz e que são ortogonais ao vetor $\vec{v} = (4, 1 -2)$.

21) Determinar o vetor $\vec{u}$ tal que $|\vec{u}| = 2$, o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v} = (1,-1, 0)$ é 45° e $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{w} = (1, 1, 0)$.

22) Seja o vetor $\vec{v} = (2, -1, 1)$. Obter

a) um vetor ortogonal a $\vec{v}$;

b) um vetor unitário ortogonal a $\vec{v}$;

c) um vetor de módulo 4 ortogonal a $\vec{v}$.

23) Sendo $\vec{a} \perp \vec{b}$, $|\vec{a}| = 6$ e $|\vec{b}| = 8$, calcular $|\vec{a} + \vec{b}|$ e $|\vec{a} - \vec{b}|$.

25) Determinar o ângulo entre os vetores

a) $\vec{u} = (2, -1, -1)$ e $\vec{v} = (-1, -1, 2)$.

b) $\vec{u} = (1, -2, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 1, 0)$.

26) Seja o triângulo de vértices A(3, 4, 4), B(2, -3, 4) e C(6, 0, 4). Determinar o ângulo interno ao vértice B. Qual o ângulo externo ao vértice B?

32) Calcular os ângulos diretores do vetor $\vec{v} = (6, -2, 3)$.

33) Os ângulos diretores de um vetor $\vec{a}$ são 45°, 60° e 120° e $|\vec{a}| = 2$. Determinar $\vec{a}$.

40) Dados os vetores $\vec{u} = (3, 0, 1)$ e $\vec{v} = (-2, 1, 2)$, determinar $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$ e $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$.

41) Determinar os vetores projeção de $\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ sobre os eixos cartesianos x, y e z.

42) Para cada um dos pares de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, encontrar a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ e decompor $\vec{v}$ como soma de $\vec{v}_1$ com $\vec{v}_2$, sendo $\vec{v}_1 \parallel \vec{u}$ e $\vec{v}_2 \perp \vec{u}$.

a) $\vec{u} = (1, 2, -2)$ e $\vec{v} = (3, -2, 1)$

b) $\vec{u} = (1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (3, 1, -1)$

49) Determinar o valor de a para que seja 45 ° o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (2, 1)$ e $\vec{v} = (1, a)$.

50) Para cada um dos pares de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, encontrar o vetor projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ e decompor $\vec{v}$ como soma de $\vec{v}_1$ com $\vec{v}_2$, sendo $\vec{v}_1 \parallel \vec{u}$ e $\vec{v}_2 \perp \vec{u}$.

a) $\vec{u} = (1, 0)$ e $\vec{v} = (4, 3)$

b) $\vec{u} = (1, 1)$ e $\vec{v} = (2, 5)$

c) $\vec{u} = (4, 3)$ e $\vec{v} = (1, 2)$

III – Produto Vetorial

1) Se $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{w} = -\vec{i} + \vec{k}$, determinar

a) $|\vec{u} \times \vec{u}|$

b) $(2\vec{v}) \times (3\vec{v})$

e) $(\vec{u} - \vec{v}) \times \vec{w}$

f) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$

i) $\vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

j) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v}$

9) Determinar um vetor simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{u} + 2\vec{v}$ e $\vec{v} - \vec{u}$, sendo $\vec{u} = (-3, 2, 0)$ e $\vec{v} = (0, -1, -2)$.

17) Dados os vetores $\vec{u} = (3, -1, 2)$ e $\vec{v} = (-2, 2, 1)$, calcular

a) a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

b) a altura do paralelogramo relativa à base definida pelo vetor $\vec{v}$.

21) Sabendo que $|\vec{u}| = 6$, $|\vec{v}| = 4$ e $30°$ o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, calcular

   a) a área do triângulo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

   b) a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $(-\vec{v})$;

   c) a área do paralelogramo determinado por $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$.

23) Calcular a distância do ponto P(4, 3, 3) à reta que passa por A(1, 2, -1) e B(3, 1, 1).

24) Calcular a área do triângulo ABC e a altura relativa ao lado BC, sendo dados

   a) A(-4, 1, 1), B(1, 0, 1) e C(0, -1, 3)

   b) A(4, 2, 1), B(1, 0, 1) e C(1, 2, 0)

Produto Misto

1) Dados os vetores $\vec{u} = (3, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, 2)$ e $\vec{w} = (2, 0, -3)$, calcular

   a) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ b) $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$

2) Sabendo que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -5$, calcular

   a) $(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$ b) $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ c) $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$ d) $\vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u})$

3) Sabendo que $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 2$, calcular

   a) $\vec{u} \cdot (\vec{w} \times \vec{v})$ c) $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u}$ e) $\vec{u} \cdot (2\vec{w} \times \vec{v})$

   b) $\vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u})$ d) $(\vec{u} \times \vec{w}) \cdot (3\vec{v})$ f) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{w})$

9) Qual o volume do cubo determinado pelos vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$?

10) Um paralelepípedo é determinado pelos vetores $\vec{u} = (3, -1, 4)$, $\vec{v} = (2, 0, 1)$ e $\vec{w} = (-2, 1, 5)$. Calcular seu volume e a altura relativa à base definida pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

11) Calcular o valor de *m* para que o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{v}_1 = (0, -1, 2)$, $\vec{v}_2 = (-4, 2, -1)$ e $\vec{v}_3 = (3, m, -2)$ seja igual a 33. Calcular a altura deste paralelepípedo relativa à base definida por $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

19) Sendo $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 4$ e $120°$ o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, calcular

   a) $|\vec{u} + \vec{v}|$

   b) $|\vec{u} \times (\vec{v} - \vec{u})|$

   c) o volume do paralelepípedo determinado por $\vec{u} \times \vec{v}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$.