4.3 Problemas Propostos — pag 211

1. Considerando a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (3x - 2y,\ x + 4y)$. Utilizar os vetores $u = (1,2)$ e $v = (3,-1)$ para mostrar que $T(3u + 4v) = 3T(u) + 4T(v)$

$$T(3u + 4v) = T(3(1,2) + 4(3,-1))$$
$$T(3u + 4v) = T((3,6) + (12,-4))$$
$$T(3u + 4v) = T(15,2)$$
$$T(3u + 4v) = (3.15 - 2.2,\ 15 + 4.2)$$
$$T(3u + 4v) = (41, 23) \quad (\mathrm{I})$$

$$3T(u) + 4T(v) = 3(3.1 - 2.2,\ 1 + 4.2) + 4(3.3 - 2.-1,\ 3 + 4.-1)$$
$$3T(u) + 4T(v) = 3(3 - 4,\ 1 + 8) + 4(9 + 2,\ 3 - 4)$$
$$3T(u) + 4T(v) = 3(-1, 9) + 4(11, -1)$$
$$3T(u) + 4T(v) = (-3 + 44,\ 27 - 4)$$
$$3T(u) + 4T(v) = (41, 23) \quad \boxed{\mathrm{II}}$$

2. Dada a transformação linear $T: V \to W$, tal que $T(u) = 3u$ e $T(v) = u - v$, calcular em função de u e v:

a. $T(u + v) = T(u) + T(v)$
$$T(u + v) = 3u + u - v$$
$$T(u + v) = 4u - v$$

b. $T(3v) = 3T(v)$
$$T(3v) = 3(u - v)$$
$$T(3v) = 3u - 3v$$

c. $T(4u - 5v) = T(4u) - T(5v)$
$T(4u - 5v) = 4Tu - 5Tv$
$T(4u - 5v) = 4 \cdot 3u - 5(u - v)$
$T(4u - 5v) = 12v - 5u - 5v$
$T(4u - 5v) = 7v - 5u$

3. Dentre as transformações $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definidas pelas seguintes leis, verificar quais são lineares:

c. $T(x, y) = (x^2, y^2)$
Pela definição sabemos que não é linear, pois é exponencial. Mas vamos à prova.
Seja $u = (x, y)$ e $v = (a, b)$

① $T(u+v) = Tu + Tv$
$T(x+a, y+b) = T(x, y) + T(a, b)$
$[(x+a)^2, (y+b)^2] = (x^2, y^2) + (a^2, b^2)$
$[(x+a)^2, (y+b)^2] = (x^2 + a^2, y^2 + b^2)$

$(x+a)^2 \neq x^2 + a^2$
$\therefore$ Não é transformação linear.

d. $T(x, y) = (x+1, y)$
Pela definição já sabemos que não é linear, pois $T(0) = 0$

$T(0) = (0+1, 0)$
$T(0, 0) = (1, 0)$

tilibra

g. $T(x,y) = (\text{sen}\,x, y)$

Pela definição já sabemos que não é linear, mas vamos à prova

Seja $u = (x,y)$ e $v = (a,b)$

① $T(u+v) = T(u) + T(v)$

$T(x+a, y+b) = T(x,y) + T(a,b)$

$(\text{sen}(x+a), y+b) = (\text{sen}\,x, y) + (\text{sen}\,a, b)$

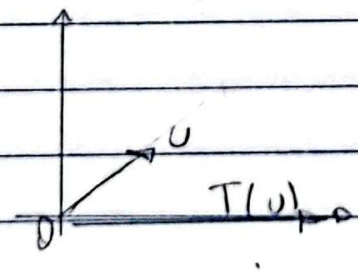
$(\text{sen}(x+a), y+b) = (\text{sen}\,x + \text{sen}\,a, y+b)$

$\therefore \text{sen}(x+a) \neq \text{sen}\,x + \text{sen}\,a$

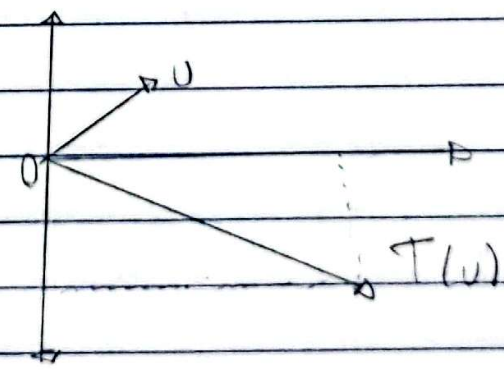
Não é transformação linear

4. Seja $V = \mathbb{R}^2$. Fazer um gráfico do vetor genérico $v = (x,y)$ do domínio e de uma imagem $T(v)$ sob a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por:

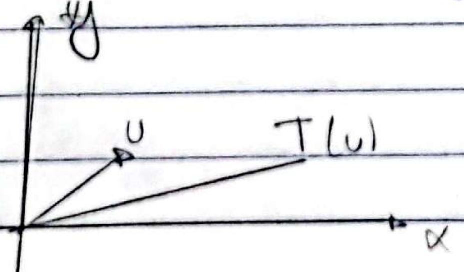
a. $T(x,y) = (2x, 0)$



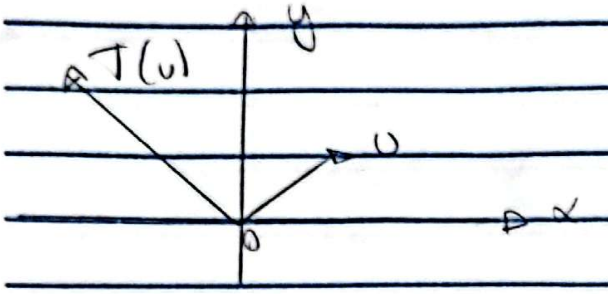
d. $T(x,y) = (3x, -2y)$



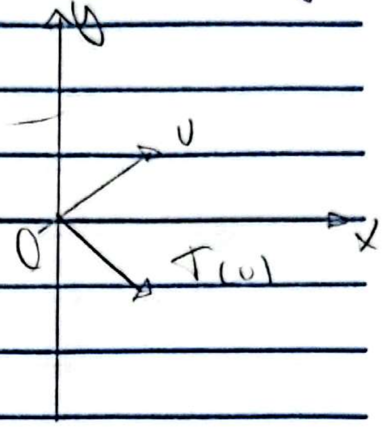
b. $T(x,y) = (2x, y)$



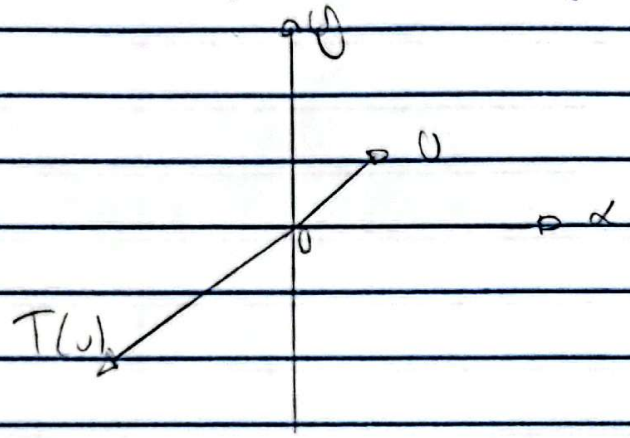
i. $T(x,y) = (-2x, 2y)$



f. $T(x,y) = (x, -y)$



e. $T(x,y) = -2(x,y)$



5. Dentre as seguintes funções, verificar quais são lineares:

a. $T: \mathbb{R}^3$; $T(x,y) = (x-y, 3x, -2y)$

Seja $u = (x,y)$ e $v = (a,b)$

(I) $T(u+v) = T(u) + T(v)$

$T(x+a, y+b) = (x+a-y-b, 3x+3a, -2y-2b)$

$T(x+a, y+b) = (x-y, 3x, -2y) + (a-b, 2a, -2b)$

$T(u+v) = T(u) + T(v)$

$\rightarrow T(\alpha u) = \alpha T(u)$

$\therefore$ É transformação linear

(II) $T(\alpha u) = \alpha T(u)$

$T(\alpha u) = T(\alpha x, \alpha y)$

$T(\alpha u) = (\alpha x - \alpha y, 3\alpha x, -2\alpha y)$

$T(\alpha u) = \alpha(x-y, 3x, -2y)$

b. $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x+y, x-y, 0)$
Seja $u = (x, y)$ e $v = (a, b)$

(I) $T(u+v) = T(u) + T(v)$
$T(u+v) = T(x+a, y+b)$
$T(u+v) = (x+a+y+b, x+a-y-b, 0)$
$T(u+v) = (x+y, x-y, 0) + (a+b, a-b, 0)$
$T(u+v) = T(u) + T(v)$

(II) $T(\alpha u) = \alpha T(u)$
$T(\alpha u) = T(\alpha x, \alpha y)$
$T(\alpha u) = (\alpha x + \alpha y, \alpha x - \alpha y, 0)$
$T(\alpha u) = \alpha(x+y, x-y, 0)$
$T(\alpha u) = \alpha T(u)$

c. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x^2 + y^2, x)$
Pela definição já sabemos que é uma transformação exponencial, e não quadrática; mas vamos à prova.
Seja $u = (x, y)$ e $v = (a, b)$, temos:

(I) $T(u+v) = T(u) + T(v)$
$T(u+v) = T(x+a, y+b)$
$T(u+v) = [(x+a)^2 + (y+b)^2, x+a]$

$T(u) + T(v) = (x^2+y^2, x) + (a^2+b^2, a)$
$T(u) + T(v) = (x^2+y^2+a^2+b^2, x+a)$

$\therefore (x+a)^2 + (y+b)^2 \neq x^2+y^2+a^2+b^2$
Não é transformação linear

6. Seja a aplicação $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y) = (x + ky, x + k, y)$. Verificar em que casos T é linear:

a. $k = x$

$T(x,y) = (x + xy, x + x, y)$

Seja $u = (x,y)$ e $v = (a,b)$

(1) $T(u+v) = T(u) + T(v)$

$T(u+v) = T(x+a, y+b)$

$T(u+v) = (x+a + (x+a)(y+b), x+a+x+a, y+b)$

$T(u+v) = (x+a+xy+xb+ay+ab, x+a+x+a, y+b)$

$T(u+v) \neq (x+xy+xb, 2x, y) + (a+ay+ab, 2a, b)$

Não é transformação linear

b. $k = 1$

$T(x,y) = (x + 1 \cdot y, x + 1, y)$

$T(0,0) = (0 + 1 \cdot 0, 0 + 1, 0)$

$T(0,0) = (0, 1, 0)$

$\therefore$ Não é transformação linear.

c. $k = 0$

$T(x,y) = (x + 0 \cdot y, x + 0, y)$

$T(x,y) = (x, x, y)$

É transformação linear.

7. Determine a transformação linear
$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(-1,1) = (3,2,1)$
$T(0,1) = (1,1,0)$

$A = \{(-1,1), (0,1)\}$

$(x,y) = a(-1,1) + b(0,1)$
$(x,y) = (-a,a) + (0,b)$

$\begin{cases} -a + 0 = x \Rightarrow \underline{a = -x} \\ a + b = y \end{cases}$

$-x + b = y$
$b = \underline{y + x}$

$(x,y) = -x(-1,1) + (y+x)(0,1)$

$T(x,y) = T(-x(-1,1) + (y+x)(0,1))$
$T(x,y) = T(-x(-1,1)) + T((y+x)(0,1))$
$T(x,y) = -x\,T(-1,1) + (y+x)\,T(0,1)$
$T(x,y) = -x(3,2,1) + (y+x)(1,1,0)$
$T(x,y) = (-3x, -2x, -x) + (x+y, x+y, 0)$
$T(x,y) = (y-2x, y-x, -x)$

b. Encontrar $v \in \mathbb{R}^3$, tal que
$T(v) = (-2, 1, -3)$

$$\begin{cases} -2x + y = -2 \\ -x + y = 1 \\ -x = -3 \end{cases} \rightarrow \underline{x = 3}$$

$$-3 + y = 1$$
$$\underline{y = 4}, \qquad v = (3, 4)$$

8. a. Determinar a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que:

$$T(1,-1,0) = (1,1)$$
$$T(0,1,1) = (2,2)$$
$$T(0,0,1) = (3,3)$$

$$A = \{(1,-1,0), (0,1,1), (0,0,1)\}$$

$$(x,y,z) = a(1,-1,0) + b(0,1,1) + c(0,0,1)$$
$$(x,y,z) = (a,-a,0) + (0,b,b) + (0,0,c)$$

$$\begin{cases} a + 0 + 0 = x \\ -a + b + 0 = y \\ 0 + b + c = z \end{cases} \rightarrow \boxed{a = x}$$

$$-x + b = y \qquad\qquad y + x + c = z$$
$$\underline{b = y + x}, \qquad\qquad \underline{c = z - y - x},$$

$$(x,y,z) = x(1,-1,0) + (x+y)(0,1,1) + (z-y-x)(0,0,1)$$
$$T(x,y,z) = xT(1,-1,0) + (x+y)T(0,1,1) + (z-y-x)T(0,0,1)$$
$$T(x,y,z) = x(1,1) + (x+y)(2,2) + (z-x-y)(3,3)$$
$$T(x,y,z) = (x,x) + (2x+2y, 2x+2y) + 3(z-x-y, z-x-y)$$

$T(x,y,z) = (3x+2y,\ 3x+2y) + (3z-3x-3y, \ldots)$
$T(x,y,z) = (-y+3z,\ -y+3z)$

b. Achar $T(1,0,0)$ e $T(0,1,0)$

$T(1,0,0) = (-0+3.0,\ -0+3.0)$
$T(1,0,0) = (0,0)$

$T(0,1,0) = (-1+3.0,\ -1+3.0)$
$T(0,1,0) = (-1,-1)$

9. Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear definida por ~~[illegible]~~

$T(1,1,1) = (1,2)$
$T(1,1,0) = (2,3)$
$T(1,0,0) = (3,4)$

a. Determinar $T(x,y,z)$
$A = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$

$(x,y,z) = a(1,1,1) + b(1,1,0) + c(1,0,0)$
$(x,y,z) = (a,a,a) + (b,b,0) + (c,0,0)$

$$\begin{cases} a+b+c = x \\ a+b+0 = y \\ a+0+0 = z \end{cases} \to a = z$$

$z + b = y$
$b = y - b$

$a + b + c = x$

$\cancel{z} + y - \cancel{z} + c = x$

$c = x - y$

$(x, y, z) = z(1,1,1) + (y - z)(1,1,0) + (x - y)(1,0,0)$

$T(x, y, z) = zT(1,1,1) + (y - z)T(1,1,0) + (x - y)T(1,0,0)$

$T(x, y, z) = z(1,2) + (y - z)(2,3) + (x - y)(3,4)$

$T(x, y, z) = (z, 2z) + (2y - 2z, 3y - 3z) + \text{ ''}$

$T(x, y, z) = (2y - z, 3y - z) + (3x - 3y, 4x - 4y)$

$T(x, y, z) = (3x - y - z, 4x - y - z)$

6. Determinar $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (-3, -2)$

$$\begin{cases} 3x - y - z = -3 \quad (-1) \\ 4x - y - z = -2 \end{cases}$$

$x = -2 + 3$

$x = 1$

$3.1 - y - z = -3$

$\cancel{3} - y - z = -\cancel{3}$

$y = z$

$4 - y - z = -2$

$-y - z = 6$

$y = 6 - z$

$v = (1, 6 - z, z)$