Vetores – O Tratamento Algébrico

- Igualdade de Vetores
- Operações com Vetores
- Vetor Definido por Dois Pontos
- Ponto Médio
- Paralelismo de Dois Vetores
- Módulo de Um Vetor

Vetores no Plano

Dados dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, não colineares, qualquer vetor $\vec{v}$ (coplanar com $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$) pode ser decomposto segundo as direções de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ e cuja soma seja $\vec{v}$. Em outras palavras, iremos determinar dois números reais a_1 e a_2 tais que:

$$\boldsymbol{\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2} \qquad (1)$$

Quando o vetor $\vec{v}$ estiver representado como em (1) dizemos que $\boldsymbol{\vec{v}}$ é **combinação linear** de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

O par de vetores $\boldsymbol{\vec{v}_1}$ **e** $\boldsymbol{\vec{v}_2}$, não colineares, é chamado **base do plano**.

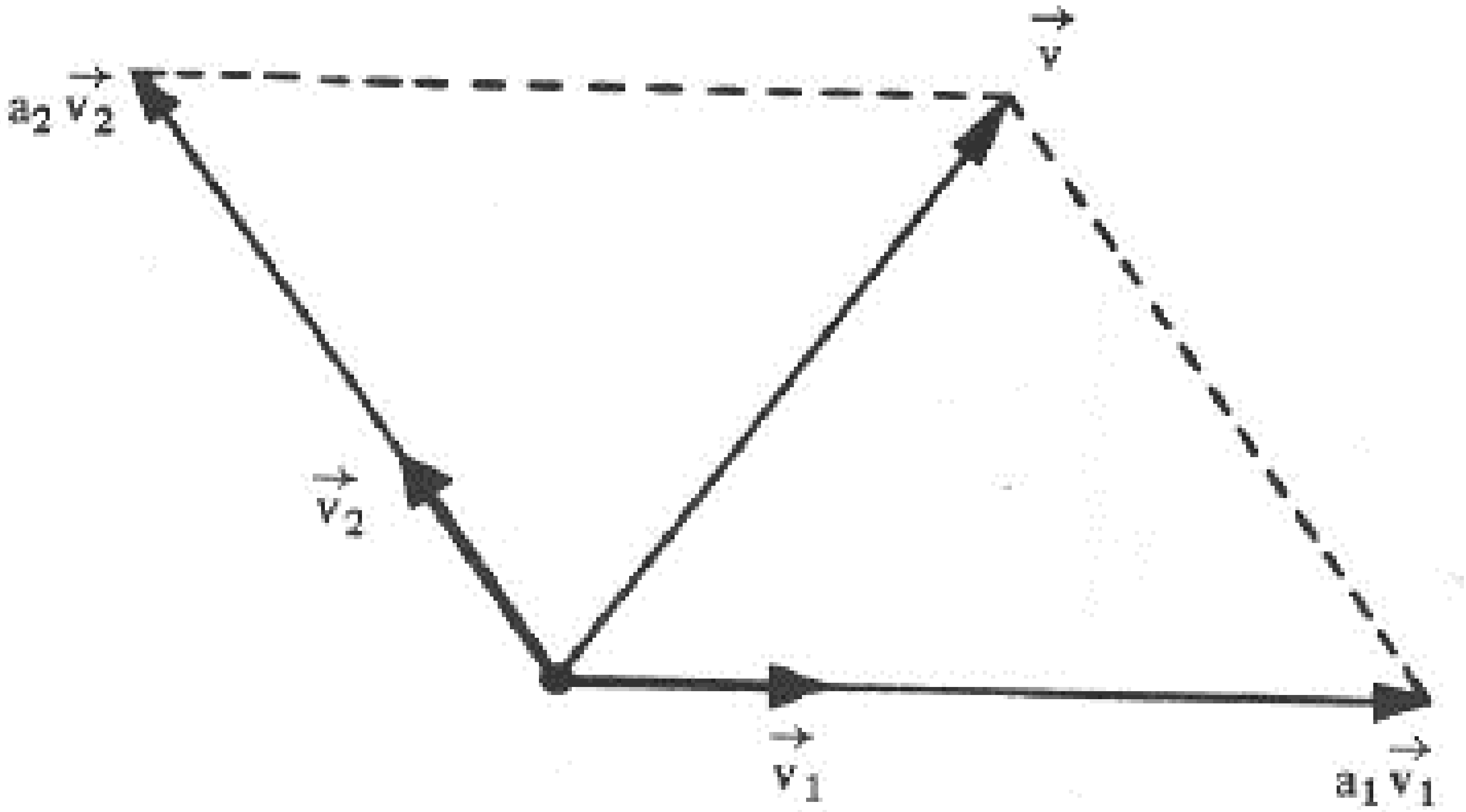
Aliás, qualquer conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ de vetores não colineares constitui uma base no plano.

Os números a_1 e a_2 da representação $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$ são chamados componentes ou coordenadas de $\vec{v}$ em relação à base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

O vetor $a_1\vec{v}_1$ é chamado *projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{v}_1$* segundo a

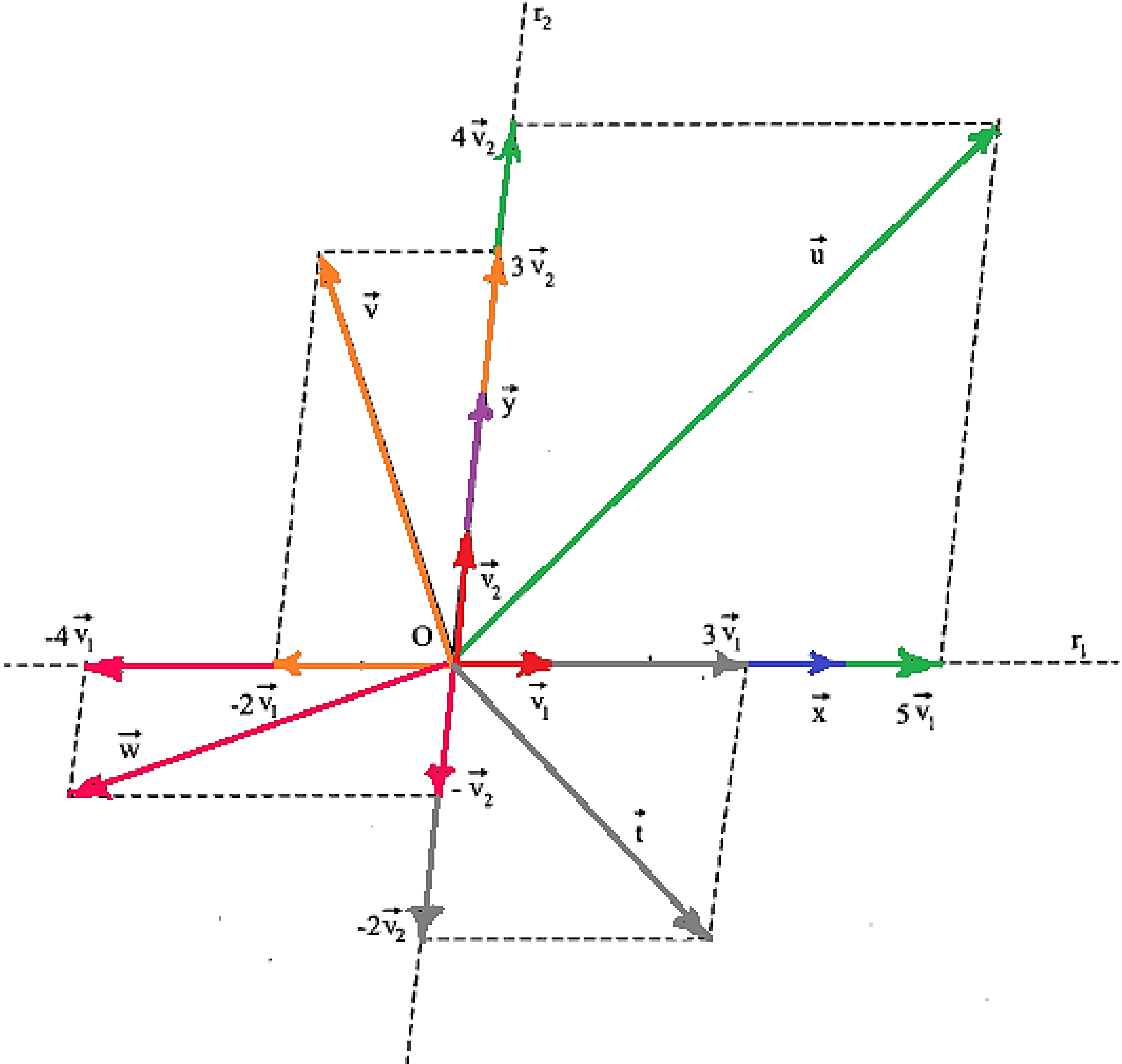
direção de $\vec{v}_1$.

Do mesmo modo, $a_2\vec{v}_2$ é chamado *projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{v}_2$* segundo a direção de $\vec{v}_2$.


$a_2\vec{v}_2$
$\vec{v}$
$\vec{v}_2$
$\vec{v}_1$
$a_1\vec{v}_1$

Exemplos

Consideremos dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não paralelos, representados com a origem no mesmo ponto O, sendo r_1 e r_2 retas contendo estes representantes, respectivamente.



Os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}, \vec{x}$ e $\vec{y}$ representados na figura, são expressos em função de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ por:

$$\vec{u} = 5\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2$$

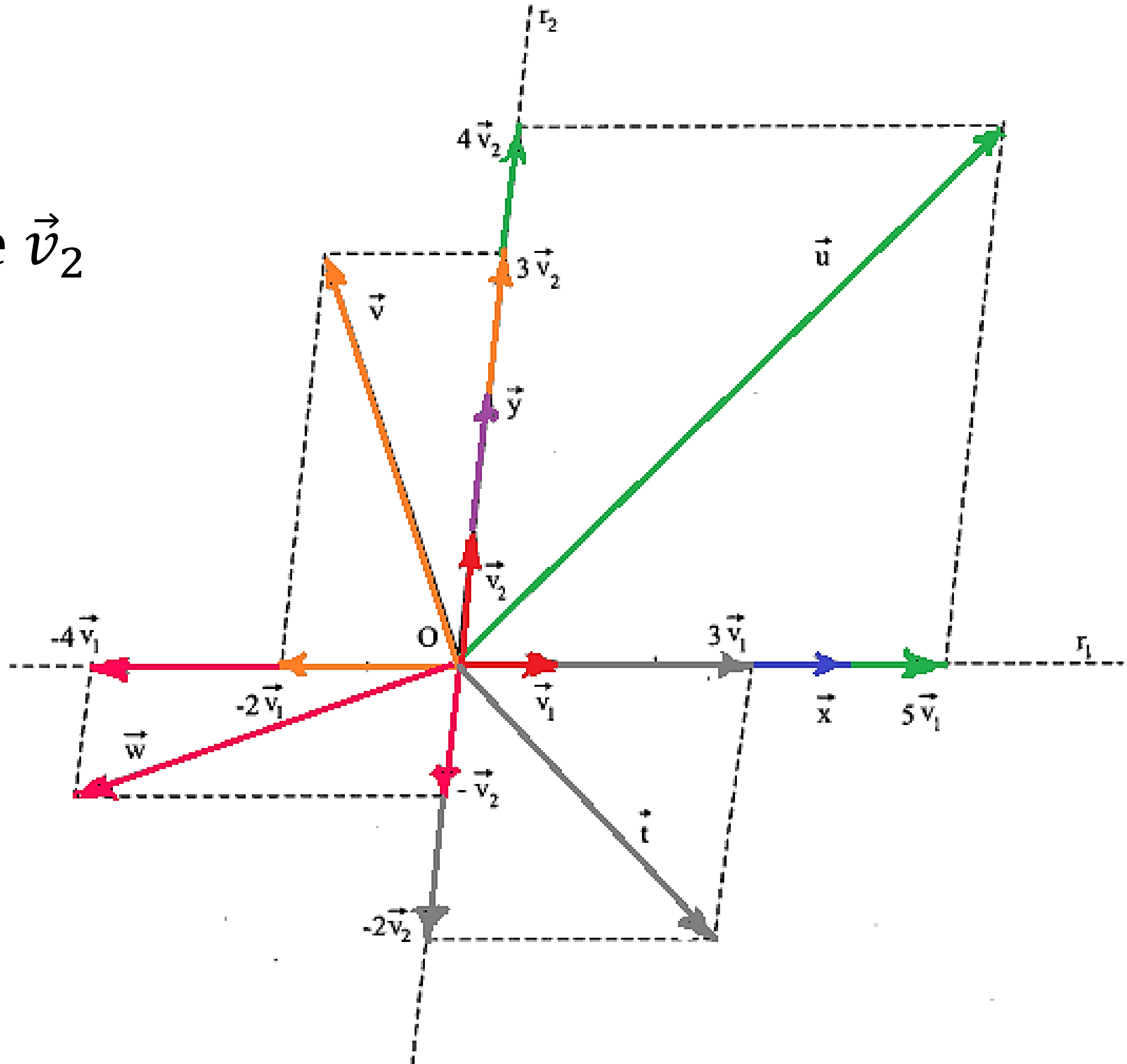
$$\vec{v} = -2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$$

$$\vec{w} = -4\vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

$$\vec{t} = 3\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2$$

$$\vec{x} = 4\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2$$

$$\vec{y} = 0\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$$



Na prática, as bases mais utilizadas são as *bases ortonormais*.

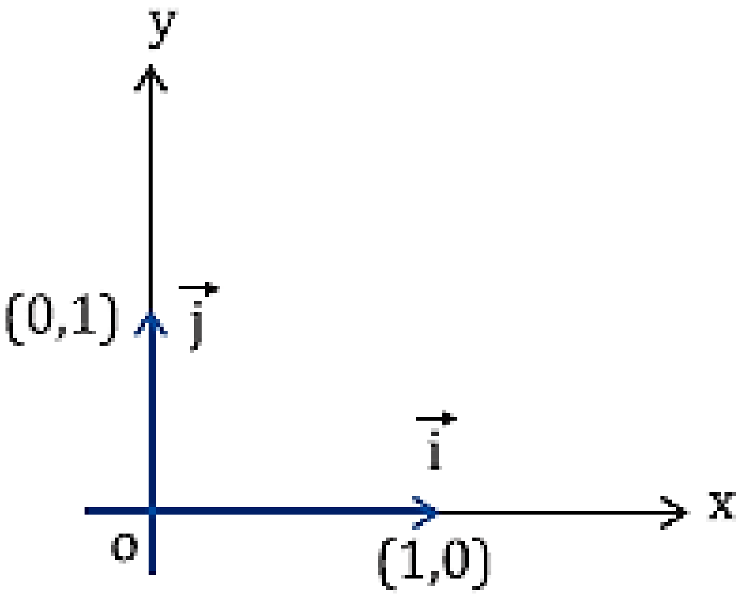
Uma base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ é dita ortonormal se os seus vetores forem ortogonais e unitários, isto é, $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ e $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$.

Dentre as infinitas bases ortonormais no plano, uma delas é particularmente importante. Trata-se da base que *determina o conhecido sistema cartesiano ortogonal* xOy.

Os vetores ortogonais e unitários, neste caso, são simbolizados por $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$, ambos com origem em O e extremidades em $(1, 0)$ e $(0, 1)$, respectivamente, sendo a base $C = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ chamada canônica.

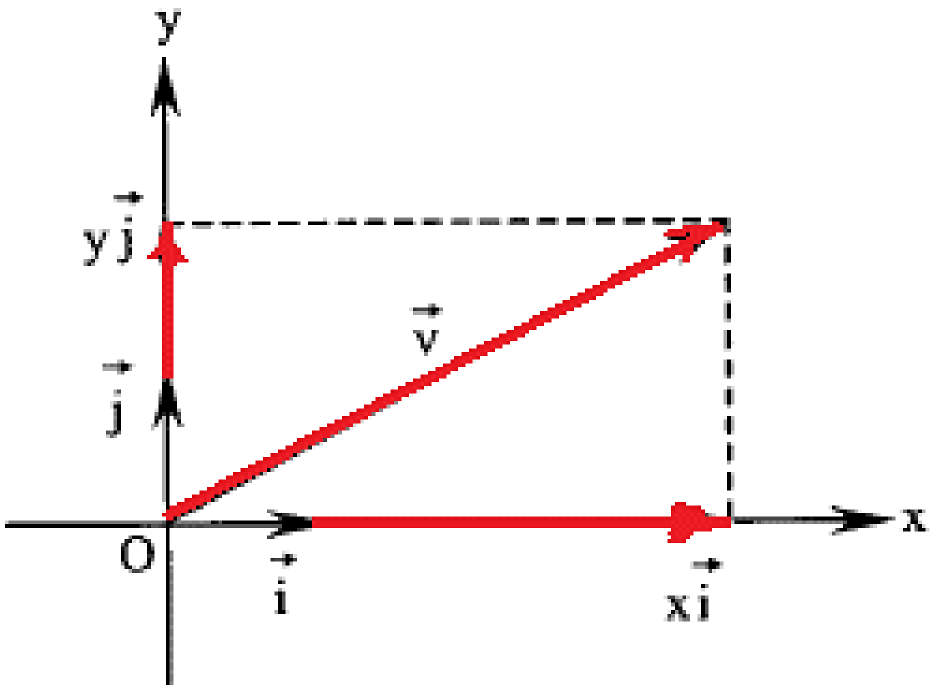
Portanto, $\vec{i} = (1, 0)$ e $\vec{j} = (0, 1)$.

Daqui por diante, trataremos somente da base canônica.



Dado um vetor $\vec{v}$ qualquer do plano, existe uma só dupla de números x e y tal que

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$$



Os números x e y são as componentes de $\vec{v}$ na base canônica.

A primeira componente é chamada *abscissa* de $\vec{v}$ e a segunda componente é a *ordenada* de $\vec{v}$.

O vetor $\vec{v}$ é representado também por $\vec{v} = (x, y)$ dispensando-se a referência à base canônica C.

Definição:

Vetor no plano é um par ordenado (x, y) *de números reais.*

O par (x, y) é chamado *expressão analítica* de $\vec{v}$.

Para exemplificar, veja alguns vetores e suas correspondentes expressões analíticas:

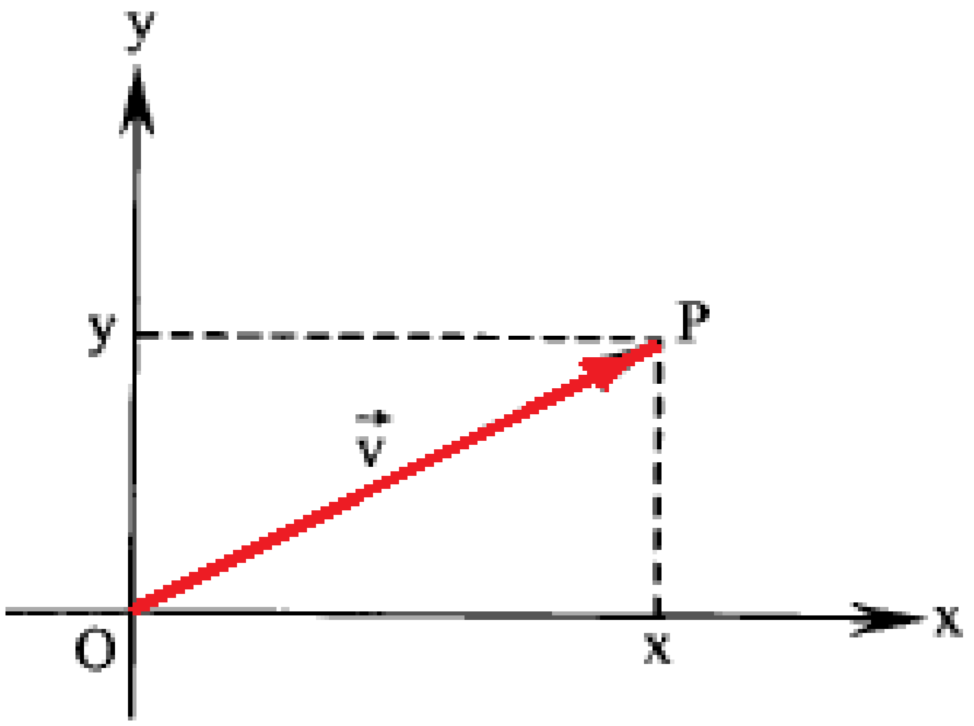
$3\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} = (3, -5)$ $\quad$ $3\vec{\jmath} = (0, 3)$

$-4\vec{\imath} = (-4, 0)$ $\quad$ $\vec{0} = (0, 0)$

Observação

A escolha proposital da base $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ deve-se exclusivamente à simplificação.

A cada ponto $P(x, y)$ do plano xOy corresponde o vetor $\vec{v} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.



Quer dizer, as coordenadas do ponto extremo P são as próprias componentes do vetor $\overrightarrow{OP}$ na base canônica.

Em geral, deixa-se de indicar nos eixos os vetores $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$ como se vê na figura.

Igualdade de Vetores

Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$, escrevendo-se $\vec{u} = \vec{v}$.

Exemplo

O vetor $\vec{u} = (x + 1, 4)$ é igual ao vetor $\vec{v} = (5, 2y - 6)$ se

$$x + 1 = 5 \ \text{ e } \ 2y - 6 = 4 \ \text{ ou } \ x = 4 \ \text{ e } \ y = 5.$$

Assim, se $\vec{u} = \vec{v}$, então $x = 4$, $y = 5$ e $\vec{u} = \vec{v} = (5, 4)$.

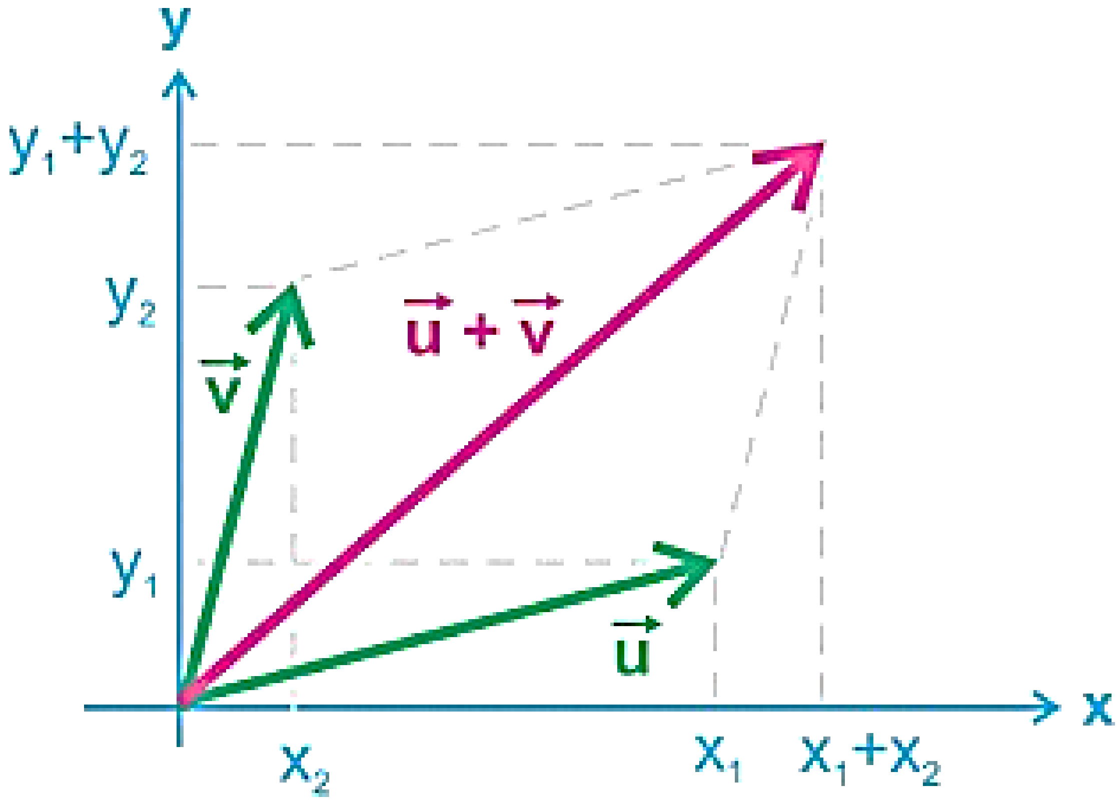
Operações com Vetores

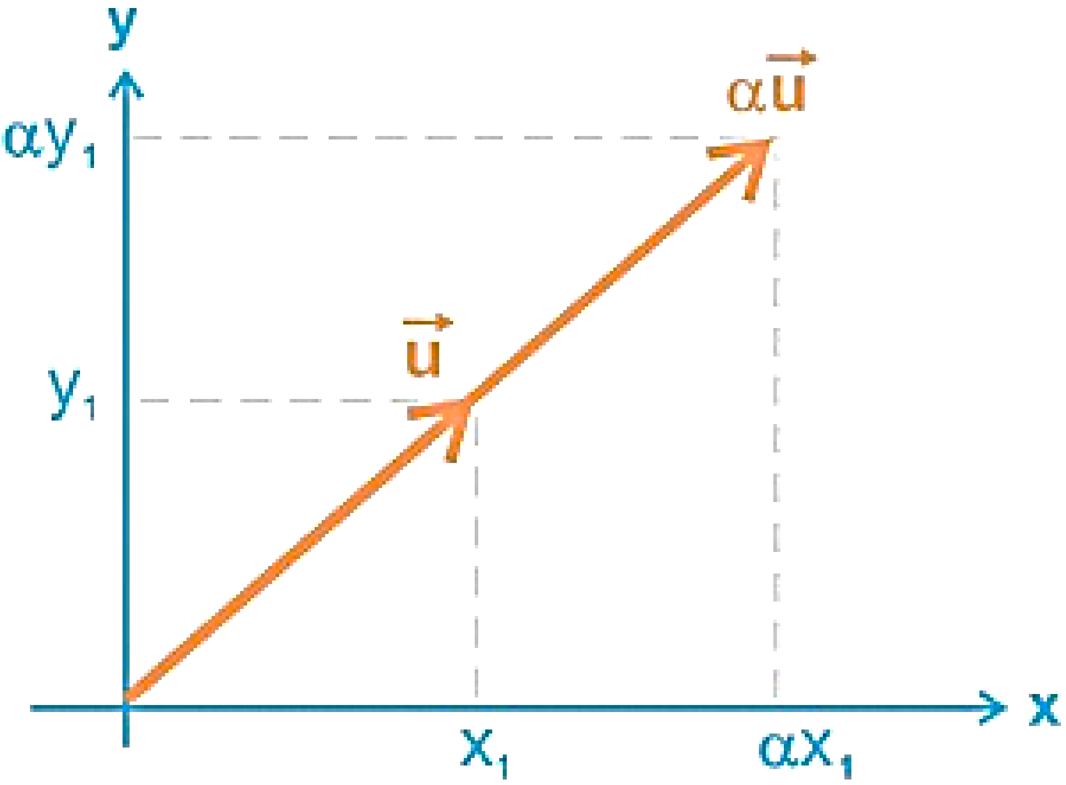
Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Define-se:

1) $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
2) $\alpha\vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1)$

Portanto, para somar dois vetores, somam-se as correspondentes coordenadas, e para multiplicar um número real por um vetor, multiplica-se cada componente do vetor por este número.

Graficamente:





Considerando os mesmos vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, temos:

$$-\vec{\boldsymbol{u}} = (-\mathbf{1})\vec{\boldsymbol{u}} = (-\boldsymbol{x}_1, -\boldsymbol{y}_1)$$

$$\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{u}} + (-\vec{\boldsymbol{v}}) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1) + (-\boldsymbol{x}_2, -\boldsymbol{y}_2) = (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2)$$

Propriedades:

a) Para quaisquer dois vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ tem-se:

i. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

ii. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

iii. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

iv. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

b) Para quaisquer dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e os números reais α e β, tem-se:

i. $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$

ii. $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

iii. $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

iv. $1\vec{v} = \vec{v}$

Exemplos

1) Dados os vetores $\vec{u} = (2, -3)$ e $\vec{v} = (-1, 4)$, determinar $3\vec{u} + 2\vec{v}$ e $3\vec{u} - 2\vec{v}$.

2) Determinar o vetor $\vec{x}$ na igualdade $3\vec{x} + 2\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{x}$, sendo dados $\vec{u} = (3, -1)$ e $\vec{v} = (-2, 4)$.

3) Encontrar os números a_1 e a_2 tais que $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$ sendo $\vec{v} = (10, 2)$, $\vec{v}_1 = (3, 5)$ e $\vec{v}_2 = (-1, 2)$.

Vetor Definido por Dois Pontos:

Consideremos o vetor $\overrightarrow{AB}$ de origem no ponto $A(x_1, y_1)$ e extremidade em $B(x_2, y_2)$.

Os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ tem expressões analíticas:

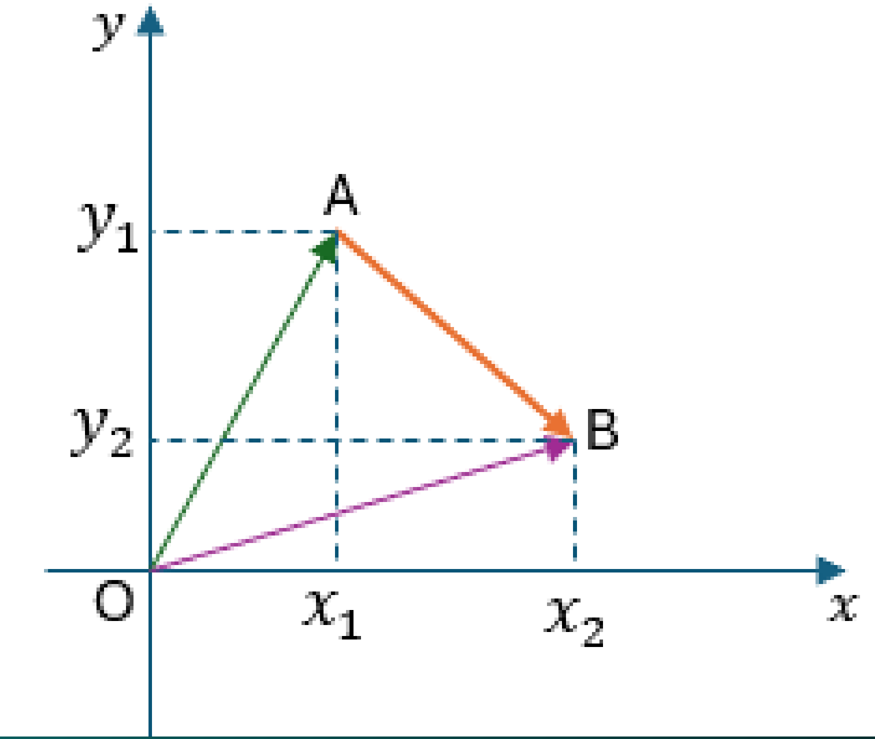
$\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$ e $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$

Por outro lado, do triângulo OAB da figura:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

Donde

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$



ou

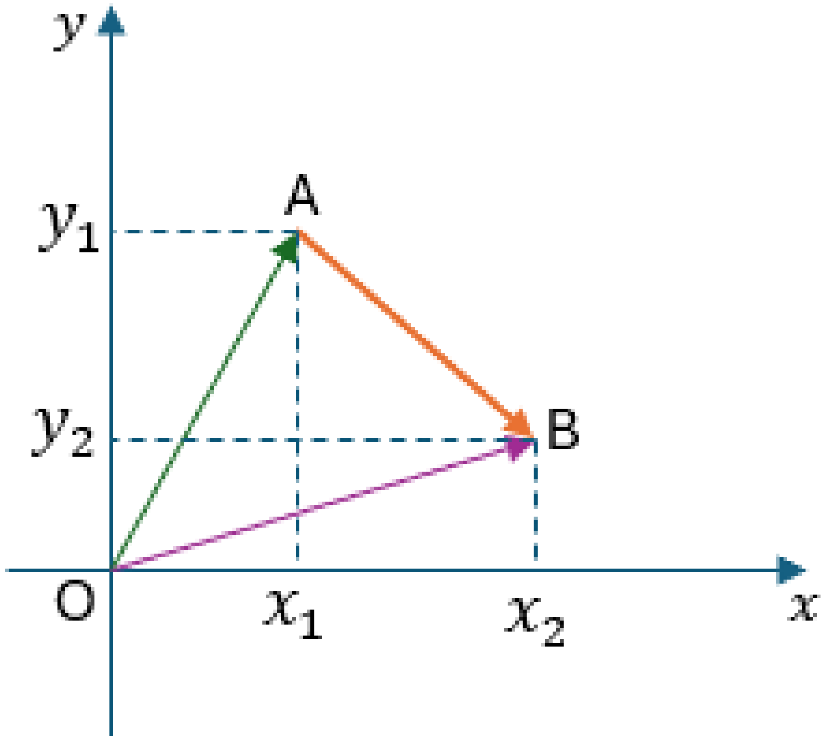
$$\overrightarrow{AB} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1)$$

e

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)}$$

Isto é, as componentes de $\overrightarrow{AB}$ são obtidas subtraindo-se das coordenadas da extremidade B as coordenadas da origem A, razão pela qual escreve

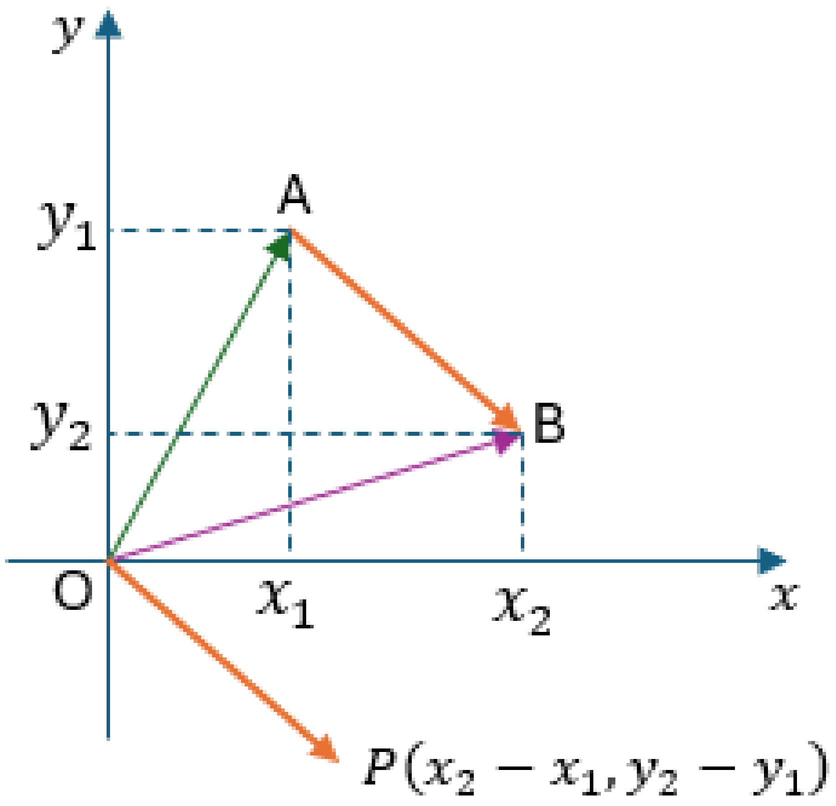
$$\boldsymbol{\overrightarrow{AB} = B - A}$$



Um vetor tem infinitos **representantes** que são os segmentos orientados de **mesmo comprimento**, **mesma direção** e **mesmo sentido**.

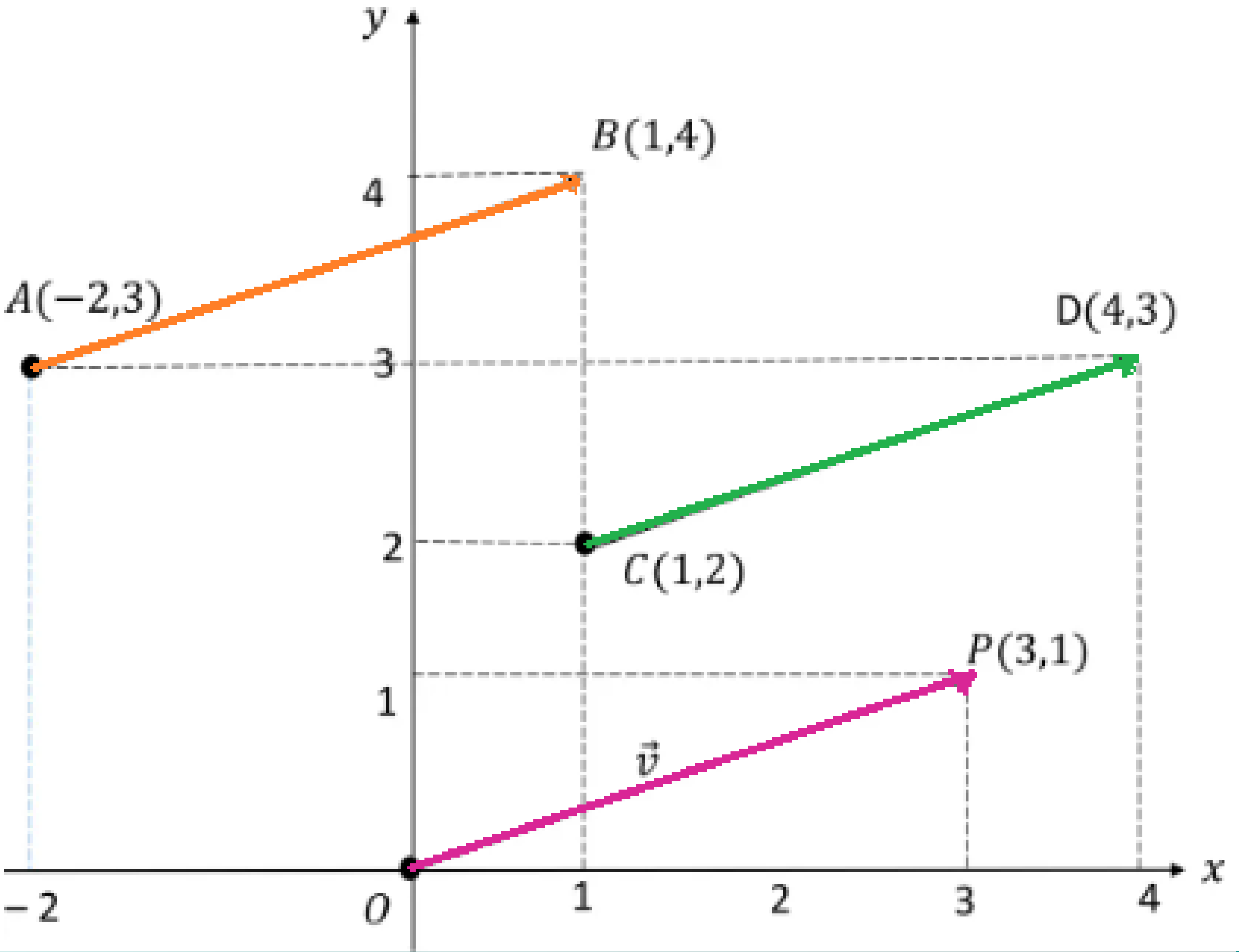
Dentre os infinitos representantes do vetor $\overrightarrow{AB}$, o que melhor o caracteriza é aquele que tem origem em $O(0,0)$ e extremidade em $P(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

O vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ é chamado **vetor posição** ou **representante natural** de $\overrightarrow{AB}$.



Na figura ao lado, o segmentos orientados OP, AB e CD representam o mesmo vetor

$$\vec{v} = P - O = B - A =$$
$$= D - C = (3,1).$$



Sempre que tivermos

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} \text{ ou } \vec{v} = B - A$$

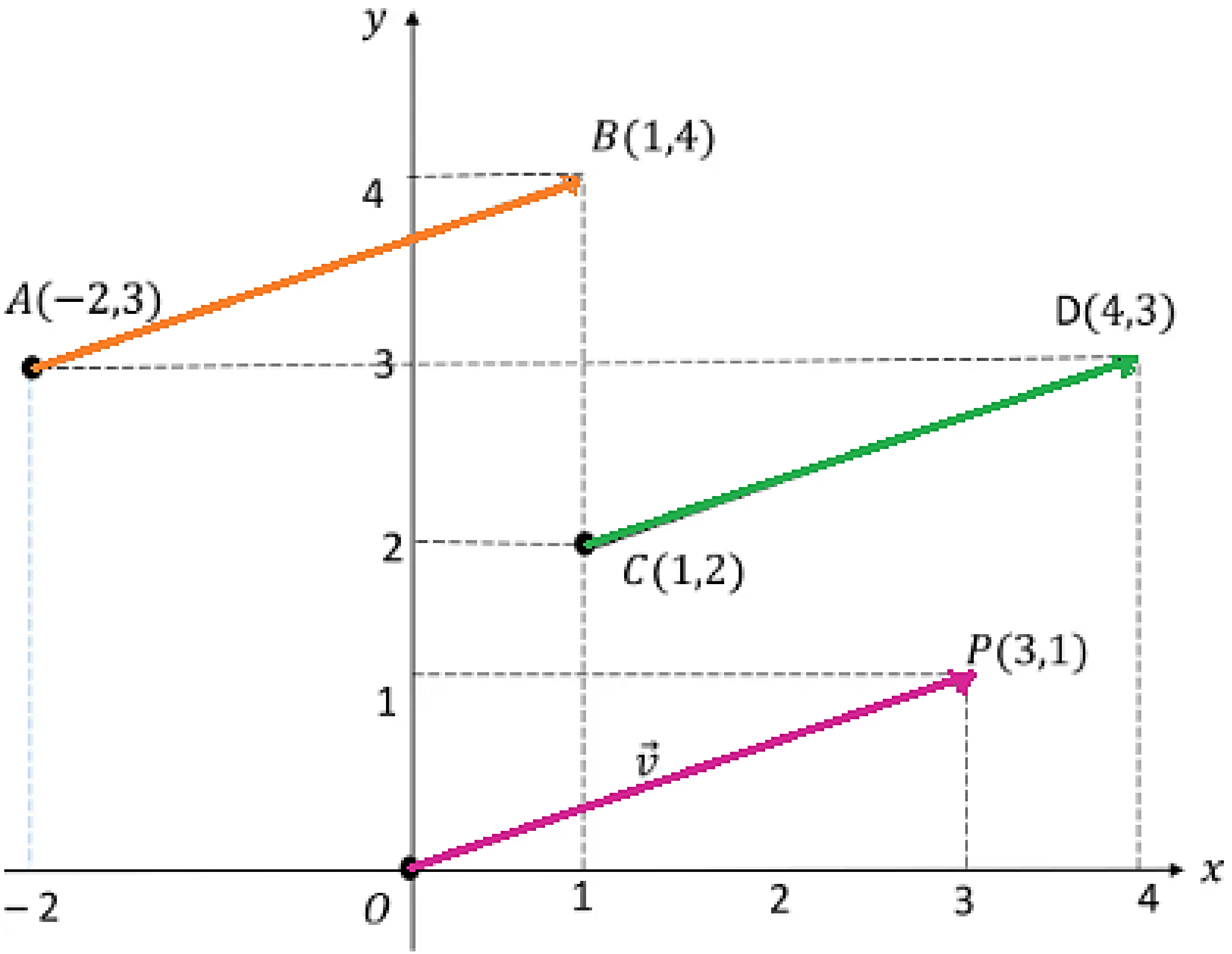
podemos também concluir que

$$B = A + \vec{v}$$

ou

$$B = A + \overrightarrow{AB},$$

isto é, o vetor $\vec{v}$ “transporta" o ponto inicial A para o ponto extremo B.



Exemplos

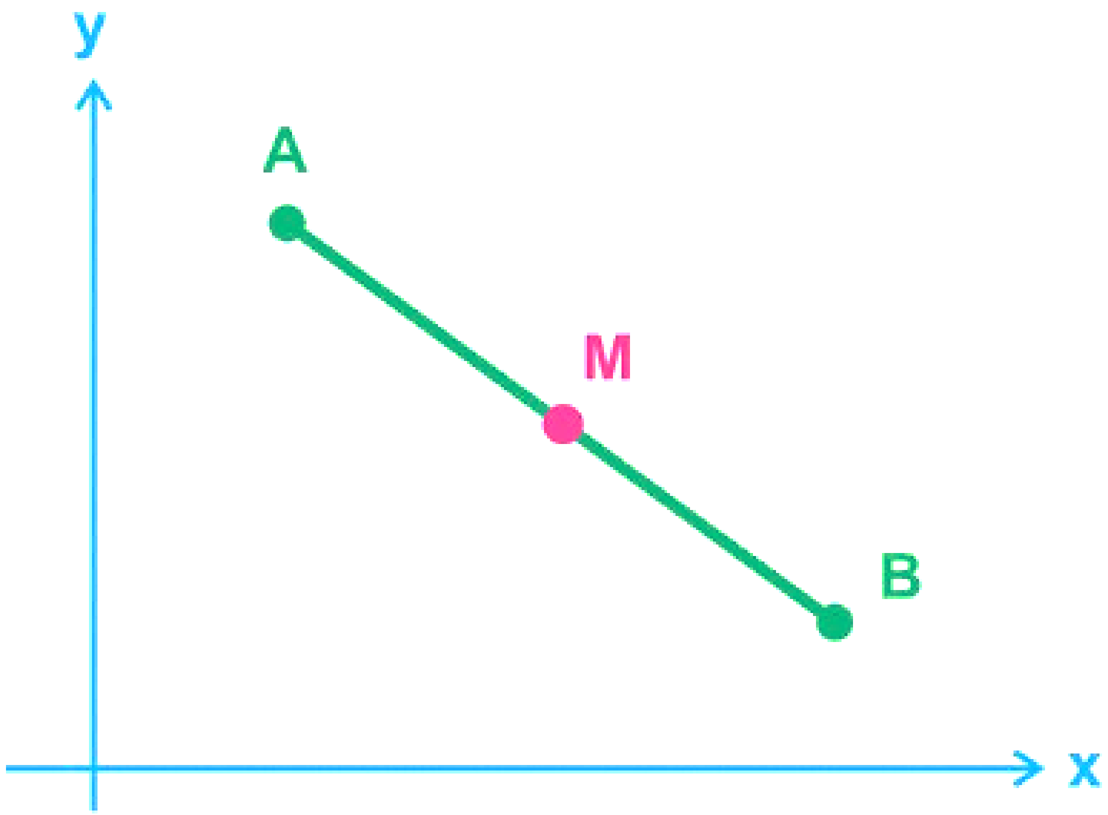
1) Dados os pontos $A(-1, 2), B(3, -1)$ e $C(-2, 4)$, determinar o ponto D de modo que $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
2) Sendo $A(-2, 4)$ e $B(4, 1)$ extremidades de um segmento, determinar os pontos F e G que dividem AB em três segmentos de mesmo comprimento.
3) Sendo $A(2, 1)$ e $B(5, 2)$ vértices consecutivos de um paralelogramo $ABCD$ e $M(4, 3)$ o ponto de interseção das diagonais, determinar os vértices C e D.

Ponto Médio

Seja o segmento de extremos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$.

Sendo $M(x, y)$ o ponto médio de AB, podemos expressar de forma vetorial como

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AM}} = \overrightarrow{\boldsymbol{MB}}$$



Ou

$$(x - x_1, y - y_1) = (x_2 - x, y_2 - y)$$

e daí

$$x - x_1 = x_2 - x \quad \text{e} \quad y - y_1 = y_2 - y$$

Resolvendo em relação a x e y, temos

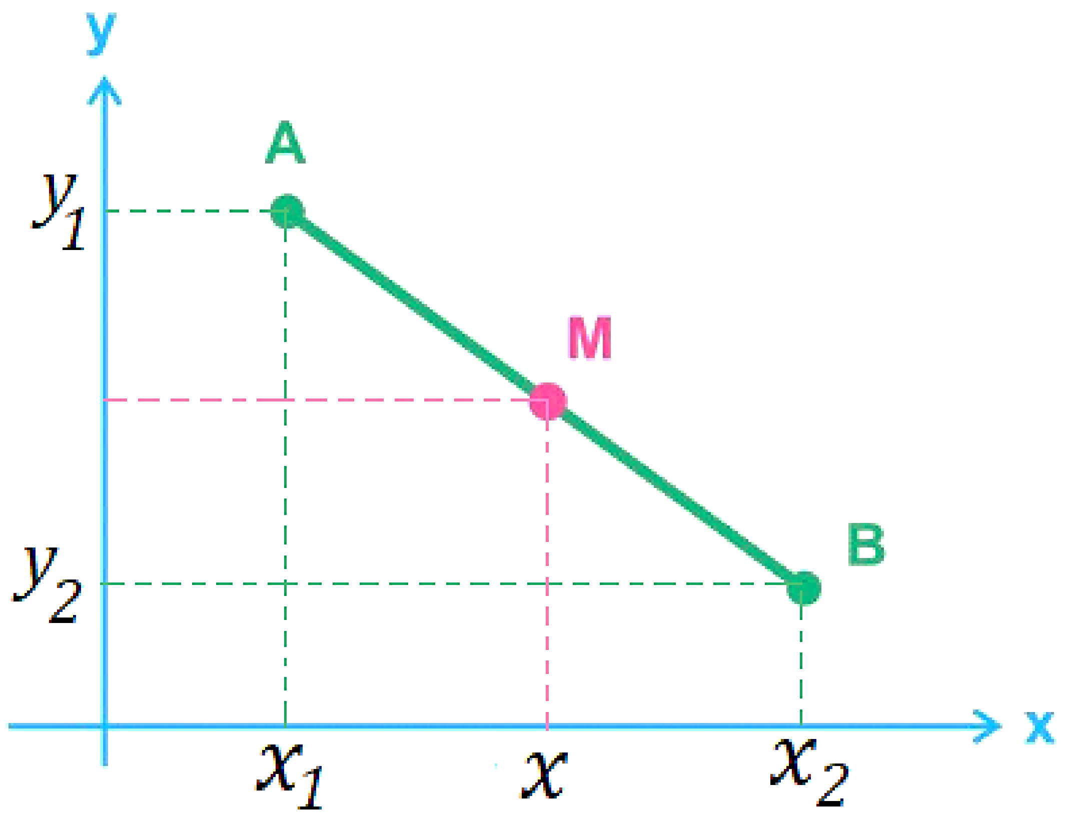
$$2x = x_1 + x_2 \quad \text{e} \quad 2y = y_1 + y_2$$

Ou

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Portanto,

$$\boldsymbol{M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)}$$



Exemplo

O ponto médio do segmento de extremos $A(-2, 3)$ e $B(6, 2)$ é:

$$M = \left(\frac{-2+6}{2}, \frac{3+2}{2}\right)$$

Ou

$$M\left(2, \frac{5}{2}\right)$$

Paralelismo de Dois Vetores

Se dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são **paralelos**, existe um número real α tal que $\boldsymbol{\vec{u} = \alpha\vec{v}}$, ou seja,

$$(x_1, y_1) = \alpha(x_2, y_2)$$

ou

$$(x_1, y_1) = (\alpha x_2, \alpha y_2)$$

que pela condição de igualdade resulta em

$$x_1 = \alpha x_2 \quad \text{e} \quad y_1 = \alpha y_2$$

Daí temos

$$\frac{\boldsymbol{x_1}}{\boldsymbol{x_2}} = \frac{\boldsymbol{y_1}}{\boldsymbol{y_2}} (= \boldsymbol{\alpha})$$

Esta é a condição de paralelismo de dois vetores, isto é, ***dois vetores são paralelos quando suas componentes forem proporcionais.***

Exemplo

Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v} = (-4, 6)$ são paralelos pois

$$\frac{-2}{-4} = \frac{3}{6} = (-2, 3)$$

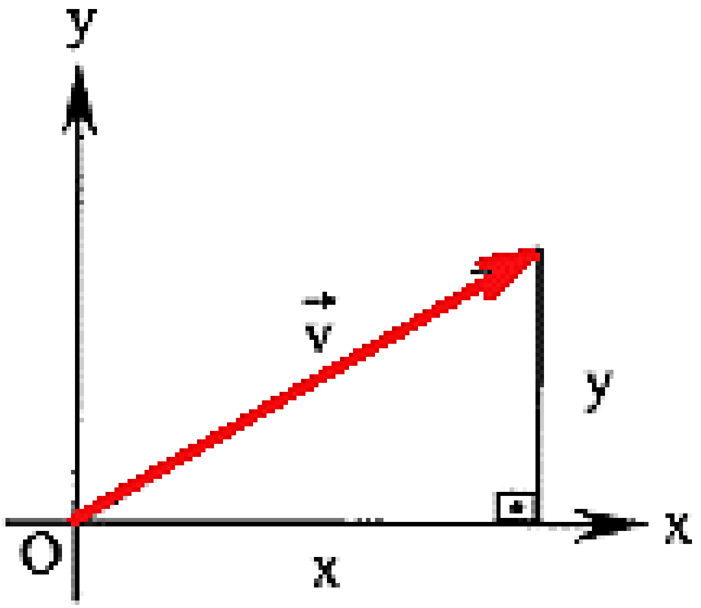
Observações

a) Considera-se o vetor $\vec{0} = (0, 0)$ paralelo a qualquer vetor.

b) Se uma das componentes de um vetor for nula, a componente correspondente de um vetor paralelo também é nula.

Módulo de um Vetor

Seja o vetor $\vec{v} = (x, y)$.



Pelo teorema de Pitágoras, vem

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Exemplo

Se $\vec{v} = (2, -3)$, então

$$|\vec{v}| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

Observações

a) Distância entre dois pontos

A distância entre dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ é o comprimento (módulo) do vetor $\overrightarrow{AB}$, isto é,

$$d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right|$$

Como $\overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, temos

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

b) Vetor Unitário

A cada vetor $\vec{v}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, é possível associar dois vetores unitários paralelos a $\vec{v}$: $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ (é o versor de $\vec{v}$) e o seu oposto $-\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$.

Exemplo

O versor de $\vec{v} = (3, -4)$ é

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(3,-4)}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{(3,-4)}{\sqrt{25}} = \frac{(3,-4)}{5} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

O versor é, na verdade, um vetor unitário, pois

$$\left|\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = 1$$

É importante observar que este versor $\vec{u}$ é também versor de todos os vetores múltiplos de $\vec{v}$ que tiverem o mesmo sentido dele.

Para exemplificar, o versor de $2\vec{v} = 2(3,-4) = (6,-8)$ é ainda

$$\vec{u} = \frac{2\vec{v}}{|\overrightarrow{2v}|} = \frac{(6,-8)}{\sqrt{6^2+(-8)^2}} = \frac{(6,-8)}{\sqrt{100}} = \left(\frac{6}{10},-\frac{8}{10}\right) = \left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$$

Exercícios

1) Dadas os pontos $A(2,-1)$ e $B(-1,4)$ e os vetores $\vec{u} = (-1,3)$ e $\vec{v} = (-2,-1)$, determinar:

a) $|\vec{u}|$

b) $|\vec{u} + \vec{v}|$

c) $|2\vec{u} - 3\vec{v}|$

d) a distância entre os pontos A e B

2) Determinar, no eixo Ox, um ponto P que seja equidistante dos pontos $A(-1,-2)$ e $B(5,-4)$.

3) Dado o vetor $\vec{v} = (-2, 1)$, achar o vetor paralelo a $\vec{v}$ que tenha

a) O mesmo sentido de $\vec{v}$ e três vezes o módulo de $\vec{v}$;

b) Sentido contrário ao de $\vec{v}$ e a metade do módulo de $\vec{v}$;

c) O mesmo sentido de $\vec{v}$ e módulo 4;

d) Sentido contrário ao de $\vec{v}$ e módulo 2.

Vetores no Espaço

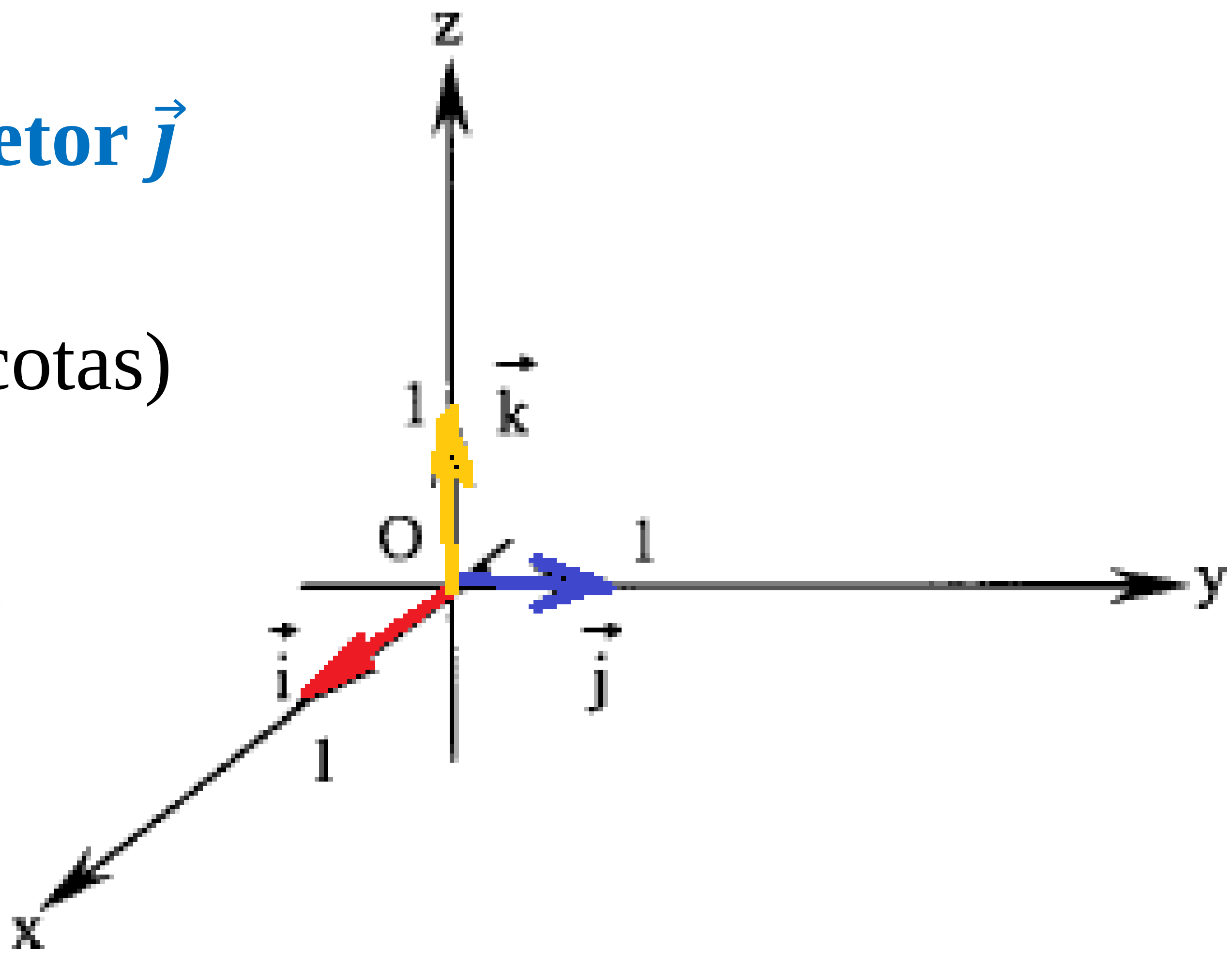
Tudo o que fizemos para vetores em um plano se estende de maneira natural para vetores do espaço, bastando para isso fazer algumas adaptações.

No espaço, de forma análoga, consideraremos a base canônica $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$, onde estes três vetores unitários e dois a dois ortogonais estão representados com origem no ponto O.

Este ponto e a direção de cada um dos vetores da base determinam os três eixos cartesianos:

- o eixo Ox ou **eixo dos x** (das abscissas) **corresponde ao vetor $\vec{i}$**,
- o eixo Oy ou **eixo dos y** (das ordenadas) **corresponde ao vetor $\vec{j}$** e
- o eixo Oz ou **eixo dos z** (das cotas) **corresponde ao vetor $\vec{k}$**.

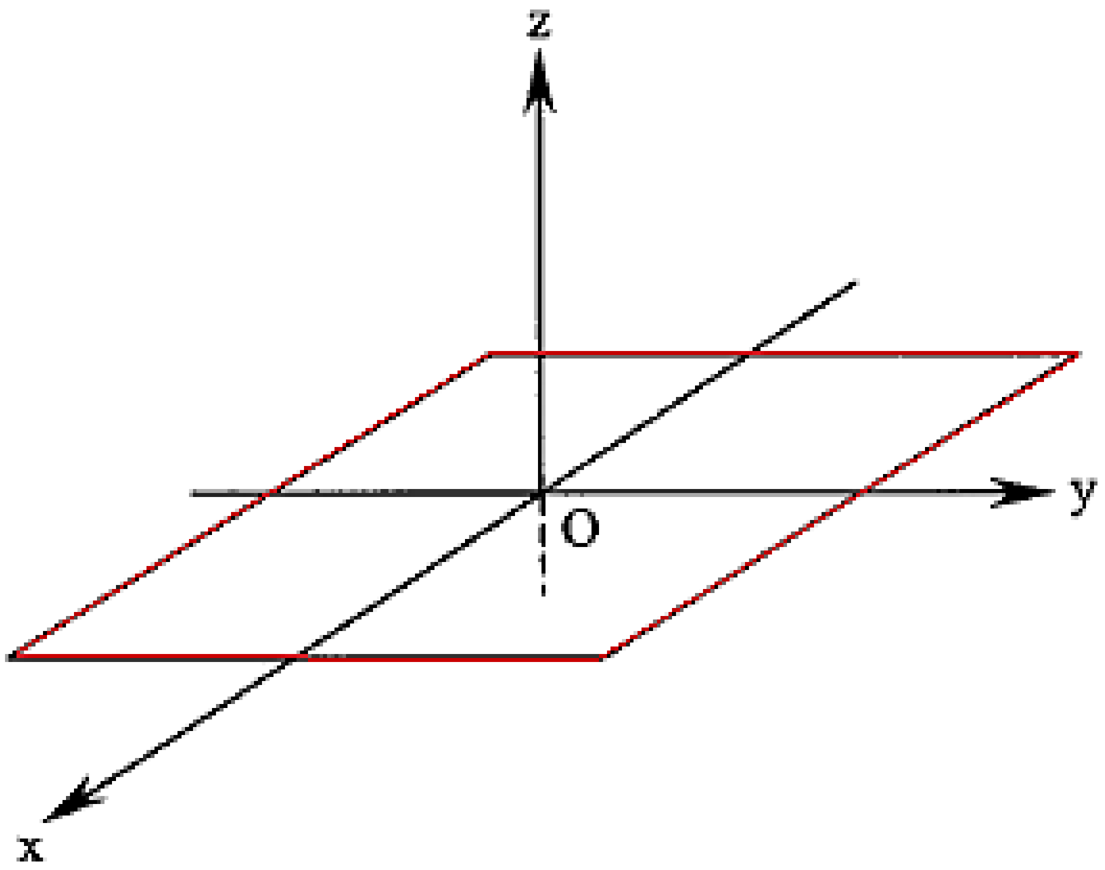
As setas nessa figura indicam o sentido positivo de cada eixo, chamado também de ***eixo coordenado.***



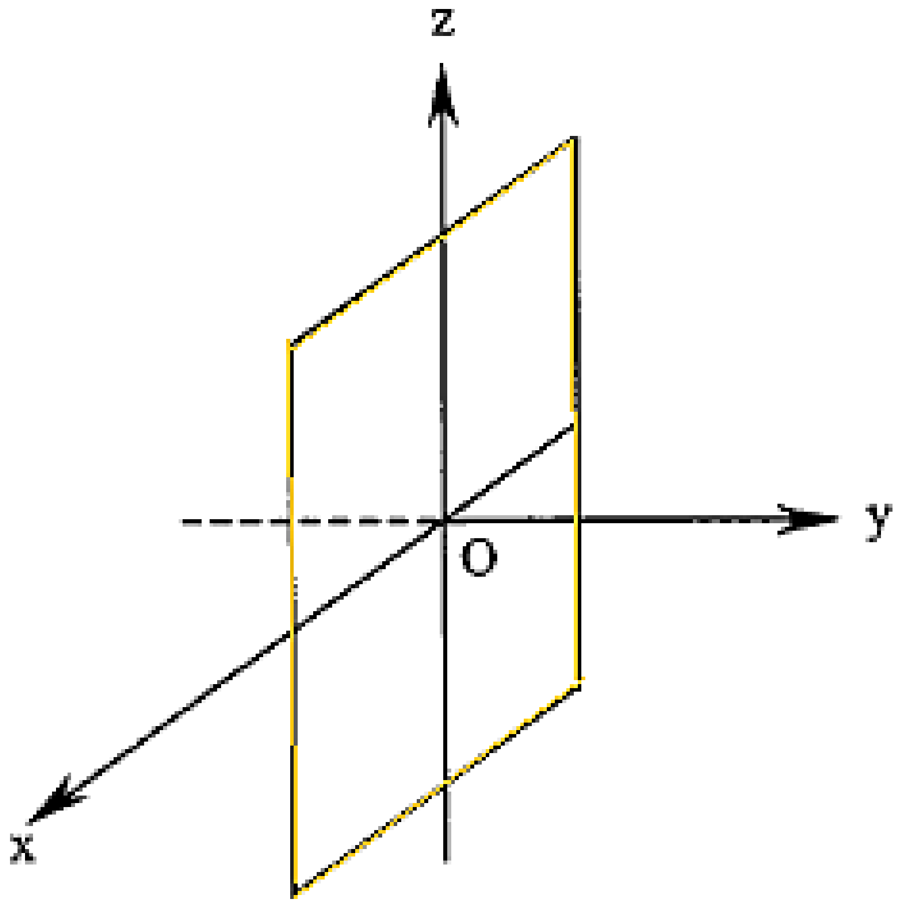
Cada dupla de vetores de base, e, consequentemente, cada dupla de eixos, determina um plano coordenado. Portanto, temos três planos coordenados:

- O plano xOy ou xy
- O plano xOz ou xz
- Plano yOz ou yz .

As figuras a seguir dão uma ideia dos planos xy e xz, respectivamente.



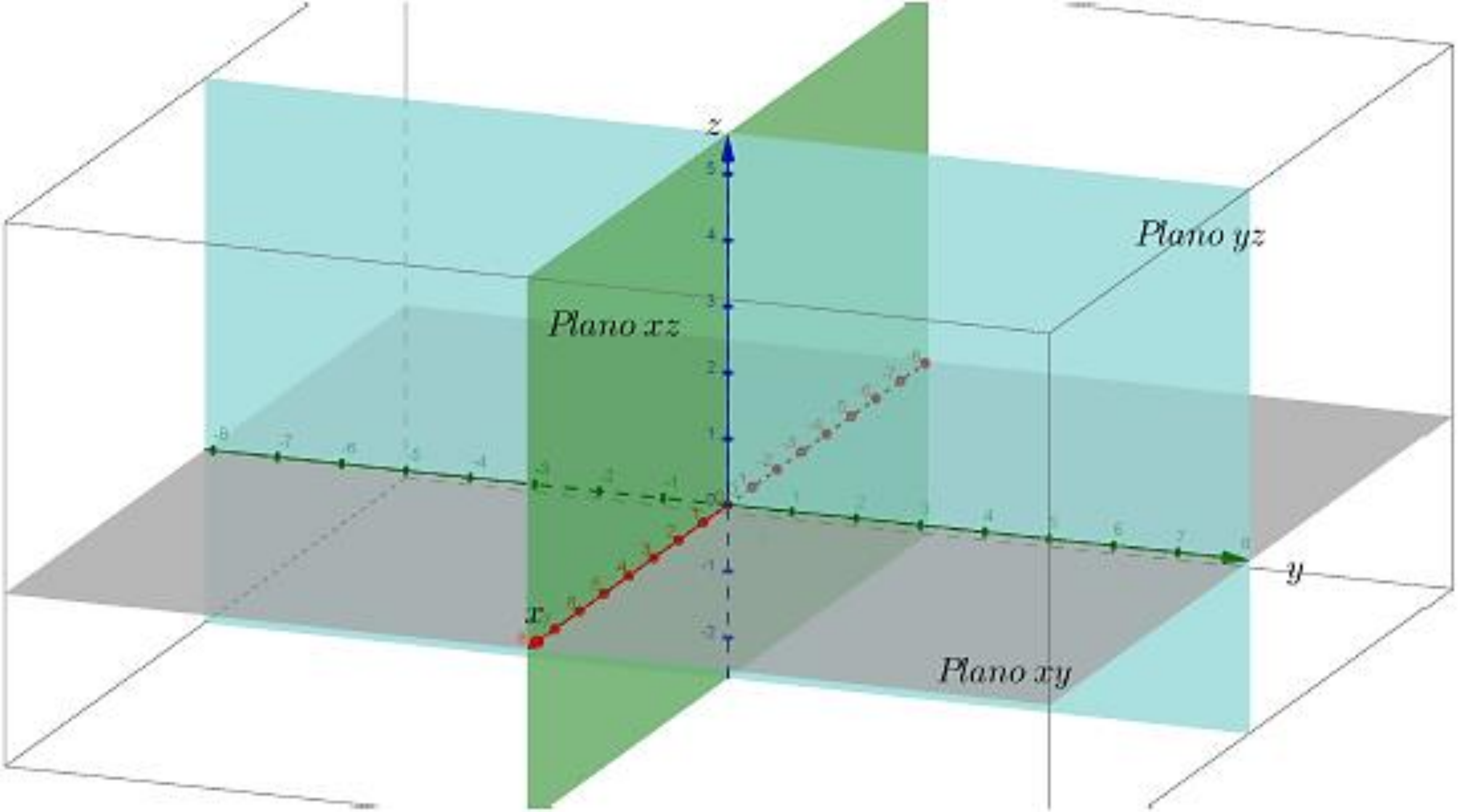
(a)



(b)

Estes três planos dividem o espaço em oito partes, chamadas de octantes:

1. Primeiro octante: (x, y, z)
2. Segundo octante: $(-x, y, z)$
3. Terceiro octante: $(-x, -y, z)$
4. Quarto octante: $(x, -y, z)$
5. Quinto octante: $(x, y, -z)$
6. Sexto octante: $(-x, y, -z)$
7. Sétimo octante: $(-x, -y, -z)$
8. Oitavo octante: $(x, -y, -z)$



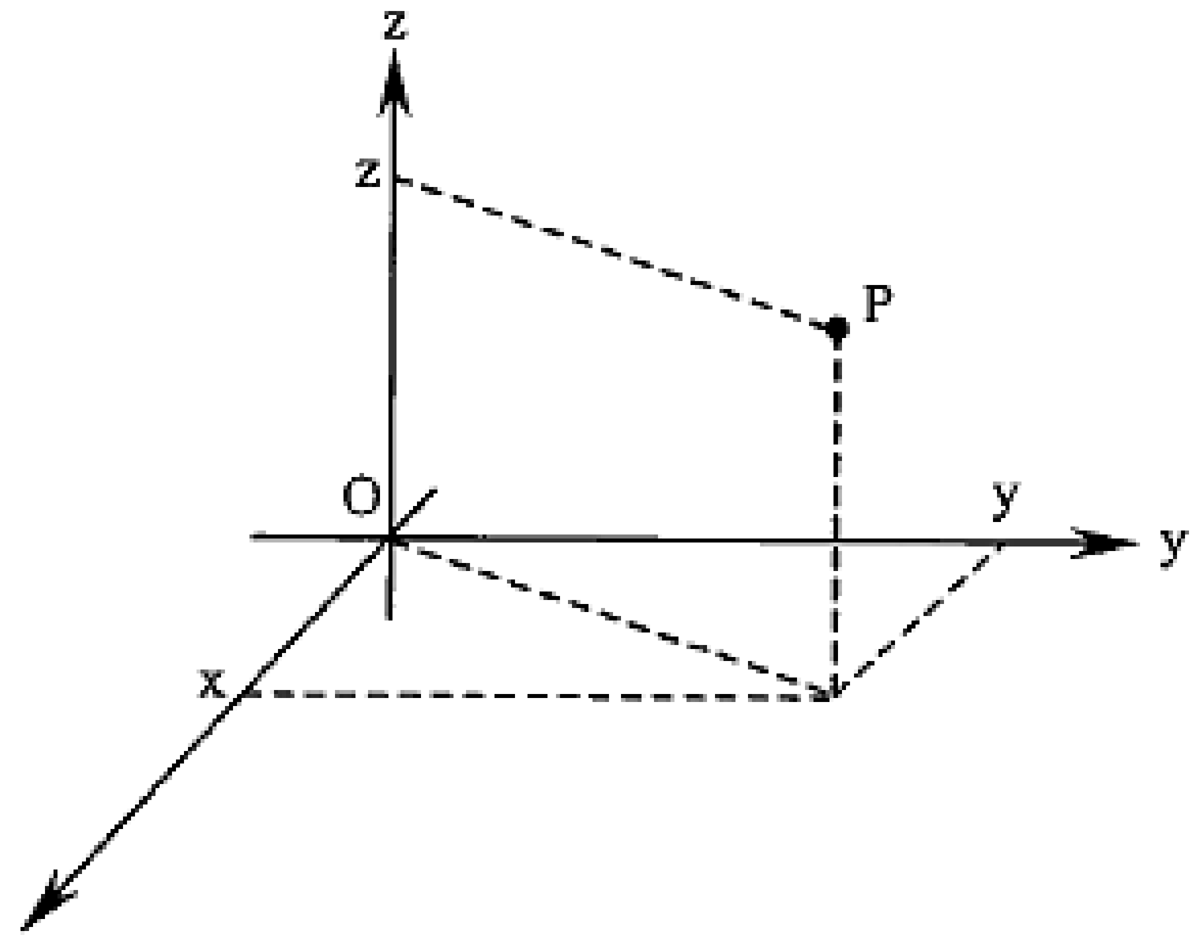
z
Plano xz
Plano yz
x
y
Plano xy

como no plano, a cada ponto $P(x, y, z)$ do espaço irá corresponder o vetor $\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, isto é, as próprias coordenadas x, y e z do ponto P são as componentes do vetor $\overrightarrow{OP}$ na base canônica.

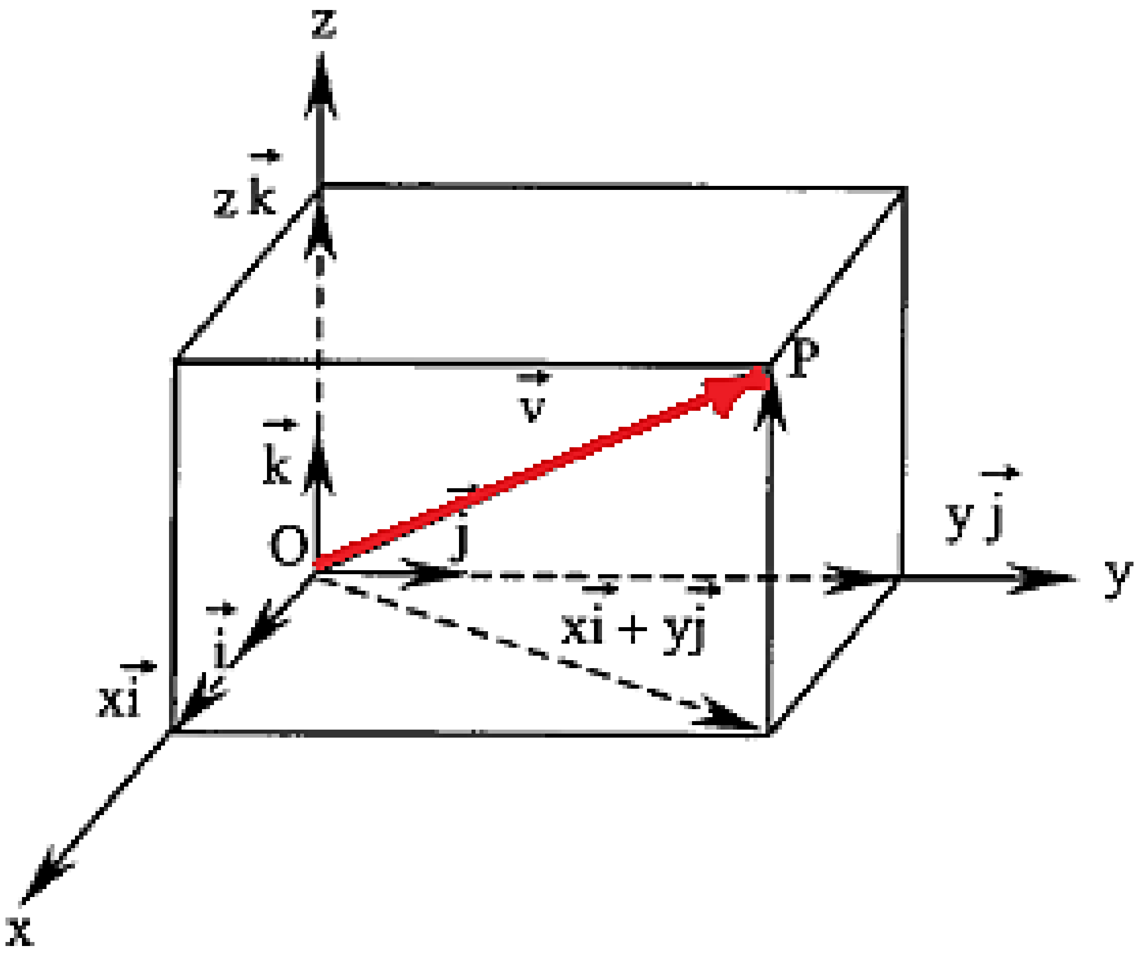
As coordenadas x, y e z são denominadas abscissa, ordenada e cota, respectivamente.

O vetor $\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ também será expresso por $\overrightarrow{OP} = \vec{v} = (x, y, z)$, que é a expressão analítica de $\vec{v}$.

Geometricamente, $\overrightarrow{OP} = \vec{v} = (x, y, z)$ representa a diagonal do paralelepípedo cujas arestas são definidas pelos vetores $x\vec{i}, y\vec{j}$ e $z\vec{k}$.


z
z
P
O
y
y
x
x

(a)


z
$z\vec{k}$
P
$\vec{v}$
$\vec{k}$
O
$\vec{j}$
$y\vec{j}$
y
$\vec{i}$
$x\vec{i}$
$x\vec{i} + y\vec{j}$
x

(b)

Exercício

Considere o paralelepípedo da figura:

Com base nesta figura, determine as coordenadas dos seguintes pontos:

a) A

b) C

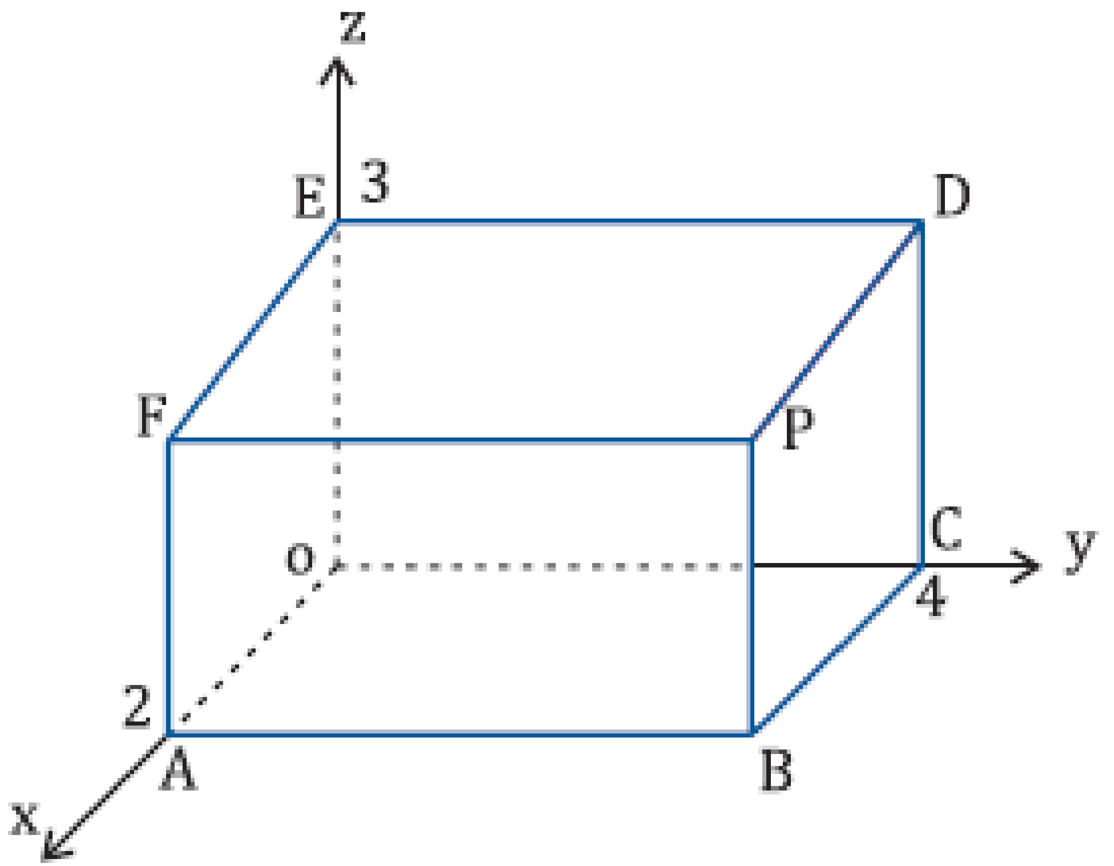
c) E

d) B

e) F

f) D

g) P



Igualdade, Operações, Vetor Definido por Dois Pontos, Ponto Médio, Paralelismo e Módulos de um Vetor

As definições e conclusões no espaço são análogas às do plano:

I. Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são iguais se, e somente se, $\boldsymbol{x_1 = x_2, y_1 = y_2}$ **e** $\boldsymbol{z_1 = z_2}$.

II. Dados os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, define-se:

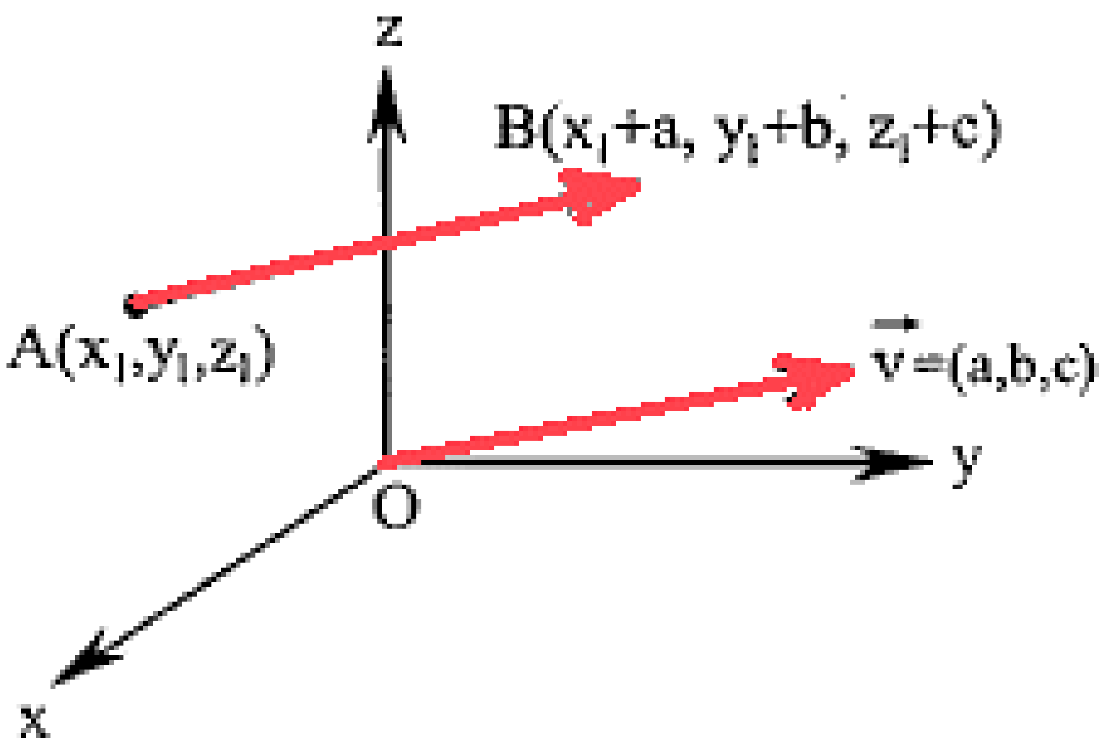
$$\boldsymbol{\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)}$$

$$\boldsymbol{\alpha\vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)}$$

III. Se $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ são dois pontos quaisquer no espaço, então $\overrightarrow{AB} = B - A = (\boldsymbol{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1})$.

Já vimos que: se $\vec{v} = B - A$, então $B = A + \vec{v}$.

A figura indica que para encontrar as coordenadas do ponto extremo B, somam-se ordenadamente as coordenadas do ponto inicial A com as componentes do vetor $\vec{v}$.



IV. Se $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ são pontos extremos de um segmento, o ponto médio M de AB é

$$\boldsymbol{M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)}$$

V. Se os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são paralelos, então

$$\boldsymbol{\vec{u} = \alpha\vec{v}} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}}$$

V. O módulo do vetor $\vec{v} = (x, y, z)$ é dado por

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Observação

No plano, todo conjunto de dois vetores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ *não paralelos* constitui uma de suas bases, isto é, todo vetor desse plano é combinação linear de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

No espaço, todo conjunto de três vetores *não coplanares* constitui uma de suas bases, isto é, todo vetor do espaço pode ser escrito de modo único como combinação linear dos vetores desta base.

Exercícios

1. Dados os pontos $A(0, 1, -1)$ e $B(1, 2, -1)$ e os vetores $\vec{u} = (-2, -1, 1)$, $\vec{v} = (3, 0, -1)$ e $\vec{w} = (-2, 2, 2)$, verificar se existem os números a_1, a_2 e a_3 tais que $\vec{w} = a_1\overrightarrow{AB} + a_2\vec{u} + a_3\vec{v}$.

2. Encontrar o vértice oposto a B no paralelogramo $ABCD$, sendo dados $A(3, -2, 4)$, $B(5, 1, -3)$ e $C(0, 1, 2)$.

3. Sabendo que o ponto $P(-3, m, n)$ pertence à reta que passa pelos pontos $A(1, -2, 4)$ e $B(-1, -3, 1)$, determinar m e n.

4. Seja o triângulo de vértices $A(4, -1, -2)$, $B(2, 5, -6)$ e $C(1, -1, -2)$. Calcular o comprimento da mediana do triângulo relativa ao lado AB.