

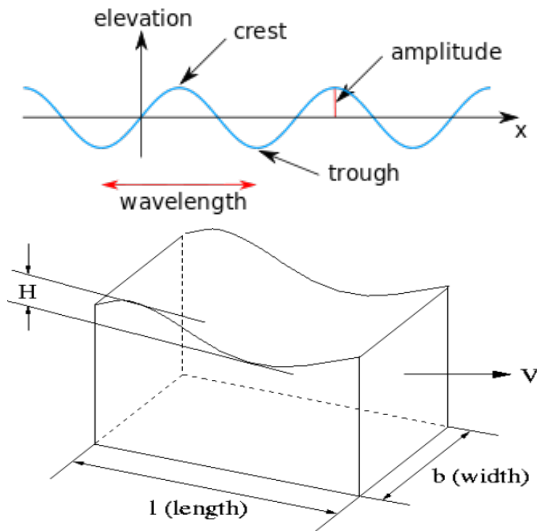
Water wave optimization

Karolina Maczka

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska

March, 2023

Teoria fal wodnych - pierwszy Newton



$$x = A(e^{z_0/c} - e^{-z_0/c}) \sin \frac{x_0}{c} \quad (1)$$

$$z = A(e^{z_0/c} - e^{-z_0/c}) \cos \frac{x_0}{c} \quad (2)$$

- x i z określają odpowiednio poziome i pionowe przemieszczenia poszczególnych cząstek o położeniu początkowym (x_0, z_0)
- A to funkcja czasu
- c to pewna stała

$$z = h + (e^{\alpha z} - e^{-\alpha z}) \sin(\alpha(ct - x)) \quad (3)$$

- $\alpha = 2\pi/\lambda$, gdzie λ to długość fali
- c to predkość fali
- h to głębokość

- pierwsza generacja - lata 60'
- druga generacja - lata 70'
- trzecia generacja - modele WAM (tylko podstawowe równanie transportu widmowego) i SWAN

Równanie modelu SWAN

$$\frac{d}{dt} N(\sigma, \theta) + \nabla_{x,y} (c_{x,y} N(\sigma, \theta)) + \frac{d}{d\sigma} (c_{\sigma} N(\sigma, \theta)) + \frac{d}{d\theta} (c_{\theta} N(\sigma, \theta)) = \frac{S(\sigma, \theta)}{\sigma}$$

Od lewej jest to suma tempa zmian gęstości siły fali w czasie, zmiana gęstości mocy fali na jednostkę powierzchni w danym punkcie przestrzeni, zmiany częstotliwości fali w wyniku jej propagacji w ośrodku, propagacji w przestrzeni θ . Gdzie c_{σ} i c_{θ} to prędkości rozchodzenia się fal w odpowiednio σ -space i θ -space. $S(\sigma, \theta)$ - dodatkowa energia w układzie np. dodana przez wiatr, interakcje fal, stłumiona przez tarcie pomiędzy wodą i dnem

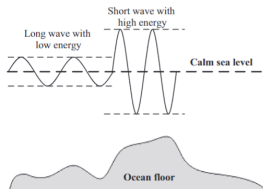
Bez utraty ogólności, załóżmy, że mamy problem maksymalizacji funkcji celu f . W WWO, przestrzeń rozwiązań X jest analogiczna do obszaru dna morskiego, a fitness punktu x należącego do X jest odwrotnie proporcjonalny do jego głębokości wody: im krótsza odległość do poziomu wody, tym wyższy fitness $f(x)$. Analogicznie trójwymiarowa przestrzeń dna morskiego uogólniamy do przestrzeni n -wymiarowej.

Populacja rozwiązań to fala posiadająca wysokość (lub amplitude), długość.

Podczas procesu rozwiązywania problemu rozważamy: rozchodzenie się (propagację), refrakcję i załamanie fal.

Dla każdej nowej generacji:

$$x'(d) = x(d) + \text{rand}(-1, 1) \cdot \lambda L(d)$$

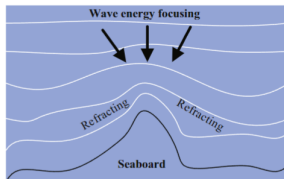


Długość fali aktualizuje się w następujący sposób:

$$\lambda = \lambda \cdot \alpha^{-(f(x) - f_{min} + c) / (f_{max} - f_{min} + c)}$$

Pozycja po refrakcji

$$x'(d) = N\left(\frac{x^*(d)+x(d)}{2}, \frac{|x^*(d)-x(d)|}{2}\right)$$



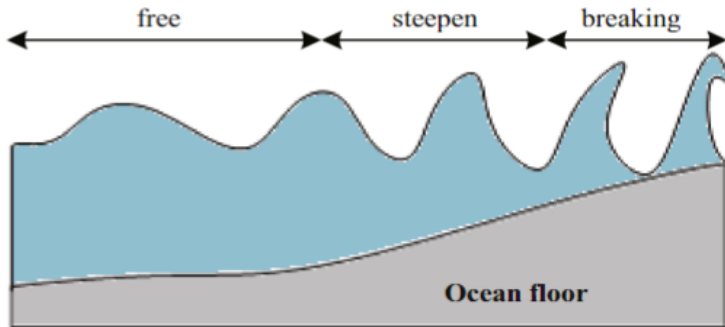
Długość fali aktualizuje się w następujący sposób:

$$\lambda' = \lambda \frac{f(x)}{f(x')}$$

Załamanie się fali

Pozycja po załamaniu

$$x'(d) = x(d) + N(0, 1) \cdot \beta L(d)$$



Algorithm 1. The WWO algorithm.

```
1  Randomly initialize a population  $P$  of  $n$  waves (solutions);
2  while stop criterion is not satisfied do
3    for each  $\mathbf{x} \in P$  do
4      Propagate  $\mathbf{x}$  to a new  $\mathbf{x}'$  based on Eq. (6);
5      if  $f(\mathbf{x}') > f(\mathbf{x})$  then
6        if  $f(\mathbf{x}') > f(\mathbf{x}^*)$  then
7          Break  $\mathbf{x}'$  based on Eq. (10);
8          Update  $\mathbf{x}^*$  with  $\mathbf{x}'$ ;
9          Replace  $\mathbf{x}$  with  $\mathbf{x}'$ ;
10     else
11       Decrease  $\mathbf{x}.h$  by one;
12       if  $\mathbf{x}.h = 0$  then
13         Refract  $\mathbf{x}$  to a new  $\mathbf{x}'$  based on Eq. (8) and (9);
14     Update the wavelengths based on Eq. (7);
15 return  $\mathbf{x}^*$ .
```

[1]

- dobrze sobie radzi z małą populacją (5-10 fal)
- im większa jest wysokość fali tym dłuższy jest średni czas życia fali
- mała wysokość powoduje, że fale będą często zastępowane - zwiększy się różnorodność rozwiązań
- duże α powoduje, że algorytm bada duży obszar, a im jest mniejsze, tym dokładniej bada określony teren

Funkcje unimodalne

Comparative results on unimodal benchmark functions.

		IWO	BBO	GSA	HuS	BA	WWO
f_1	max	2.77E+06	8.09E+07	5.31E+07	1.26E+07	5.51E+08	1.17E+06
	min	3.44E+05	5.75E+06	4.56E+06	1.61E+06	1.18E+08	1.44E+05
	median	² 1.42E+06	⁵ 2.14E+07	⁴ 8.37E+06	³ 5.10E+06	⁶ 3.10E+08	¹ 6.26E+05
	std	5.72E+05	1.67E+07	1.32E+07	2.62E+06	1.05E+08	2.45E+05
f_2	max	4.06E+04	8.04E+06	1.61E+04	2.41E+04	6.35E+09	1.48E+03
	min	6.09E+03	1.15E+06	3.47E+03	3.09E+02	1.13E+09	2.00E+02
	median	⁴ 1.52E+04	⁵ 3.95E+06	² 8.38E+03	³ 9.09E+03	⁶ 2.49E+09	¹ 2.68E+02
	std	8.67E+03	1.55E+06	2.90E+03	6.01E+03	7.55E+08	2.02E+02
f_3	max	1.50E+04	5.07E+04	7.58E+04	3.36E+03	1.11E+05	1.32E+03
	min	3.50E+03	5.92E+02	2.04E+04	3.00E+02	3.44E+04	3.15E+02
	median	⁷ 2.29E+03	⁴ 7.65E+03	⁵ 4.51E+04	¹ 3.02E+02	⁶ 7.19E+04	² 4.87E+02
	std	2.69E+03	1.28E+04	1.04E+04	5.41E+02	1.75E+04	1.85E+02

[1]

Funkcje multimodalne cz.1

Comparative results on multimodal benchmark functions.

		IWO	BBO	GSA	HuS	BA	WWO
f_4	max	5.45E+02	6.54E+02	8.49E+02	5.64E+02	1.26E+04	5.42E+02
	min	4.02E+02	4.23E+02	5.73E+02	4.04E+02	2.01E+03	4.00E+02
	median	³ 5.11E+02	⁴ 5.42E+02	³ 6.82E+02	² 5.03E+02	⁶ 3.05E+03	¹ 4.02E+02
	std	2.88E+01	3.84E+01	5.15E+01	3.66E+01	1.97E+03	3.64E+01
f_5	max	5.20E+02	5.20E+02	5.20E+02	5.21E+02	5.21E+02	5.20E+02
	min	5.20E+02	5.20E+02	5.20E+02	5.21E+02	5.21E+02	5.20E+02
	median	³ 5.20E+02	⁴ 5.20E+02	¹ 5.20E+02	⁵ 5.21E+02	⁶ 5.21E+02	² 5.20E+02
	std	3.77E-03	4.22E-02	6.47E-04	7.83E-02	4.81E-02	6.98E-04
f_6	max	6.05E+02	6.18E+02	6.24E+02	6.29E+02	6.39E+02	6.13E+02
	min	6.00E+02	6.08E+02	6.17E+02	6.19E+02	6.32E+02	6.01E+02
	median	¹ 6.02E+02	³ 6.14E+02	⁴ 6.20E+02	⁵ 6.23E+02	⁶ 6.37E+02	² 6.06E+02
	std	1.12E+00	2.35E+00	1.83E+00	2.18E+00	1.56E+00	2.62E+00
f_7	max	7.00E+02	7.01E+02	7.00E+02	7.00E+02	9.63E+02	7.00E+02
	min	7.00E+02	7.01E+02	7.00E+02	7.00E+02	8.19E+02	7.00E+02
	median	⁴ 7.00E+02	⁵ 7.01E+02	¹ 7.00E+02	³ 7.00E+02	⁶ 9.12E+02	¹ 7.00E+02
	std	1.21E-02	2.64E-02	9.55E-04	5.56E-02	3.23E-01	6.26E-03
f_8	max	8.75E-02	9.39E+02	8.01E+02	9.75E+02	1.12E+03	8.15E+02
	min	8.27E+02	8.39E+02	8.00E+02	9.10E+02	9.76E+02	8.00E+02
	median	³ 8.43E+02	⁴ 8.79E+02	² 8.00E+02	⁵ 9.40E+02	⁶ 1.07E+03	¹ 8.00E+02
	std	1.01E+01	2.07E+01	2.06E-01	1.27E+01	2.56E+01	2.34E+00
f_9	max	9.78E+02	9.84E+02	1.10E+03	1.09E+03	1.34E+03	9.84E+02
	min	9.30E+02	9.35E+02	1.02E+03	9.59E+02	1.15E+03	9.35E+02
	median	¹ 9.46E+02	² 9.49E+02	⁵ 1.06E+03	⁴ 1.01E+03	⁶ 1.25E+03	³ 9.61E+02
	std	1.14E+01	1.14E+01	1.74E+01	2.60E+01	4.41E+01	1.11E+01
f_{10}	max	3.57E+03	1.00E+03	5.25E+03	3.21E+03	7.45E+03	2.71E+03
	min	1.59E+03	1.00E+03	3.45E+03	1.36E+03	5.26E+03	1.02E+03
	median	⁴ 2.58E+03	¹ 1.00E+03	⁵ 4.37E+03	³ 2.17E+03	⁶ 6.47E+03	² 1.49E+03
	std	3.80E+02	6.80E-01	3.61E+02	4.33E+02	5.19E+02	3.62E+02

Funkcje multimodalne cz.2

f_{11}	max	3.80E+03	4.51E+03	6.35E+03	4.23E+03	8.75E+03	3.89E+03
	min	1.48E+03	2.12E+03	3.70E+03	2.20E+03	7.20E+03	2.49E+03
	median	¹ 2.92E+03	³ 3.32E+03	⁵ 4.99E+03	² 3.24E+03	⁶ 8.24E+03	⁴ 3.38E+03
	std	4.48E+02	5.12E+02	5.67E+02	4.66E+02	3.62E+02	2.89E+02
f_{12}	max	1.20E+03	1.20E+03	1.20E+03	1.20E+03	1.20E+03	1.20E+03
	min	1.20E+03	1.20E+03	1.20E+03	1.20E+03	1.20E+03	1.20E+03
	median	¹ 1.20E+03	¹ 1.20E+03	¹ 1.20E+03	¹ 1.20E+03	¹ 1.20E+03	¹ 1.20E+03
	std	1.48E-02	5.62E-02	1.00E-03	7.77E-02	3.34E-01	5.61E-02
f_{13}	max	1.30E+03	1.30E+03	1.30E+03	1.30E+03	1.30E+03	1.30E+03
	min	1.30E+03	1.30E+03	1.30E+03	1.30E+03	1.30E+03	1.30E+03
	median	² 1.30E+03	⁵ 1.30E+03	³ 1.30E+03	⁴ 1.30E+03	⁶ 1.30E+03	¹ 1.30E+03
	std	6.50E-02	1.06E-01	6.65E-02	6.50E-02	5.48E-01	6.41E-02
f_{14}	max	1.40E+03	1.40E+03	1.40E+03	1.40E+03	1.50E+03	1.40E+03
	min	1.40E+03	1.40E+03	1.40E+03	1.40E+03	1.44E+03	1.40E+03
	median	² 1.40E+03	⁵ 1.40E+03	⁴ 1.40E+03	³ 1.40E+03	⁶ 1.47E+03	¹ 1.40E+03
	std	1.19E-01	1.99E-01	4.23E-02	4.74E-02	1.39E-01	4.41E-02
f_{15}	max	1.51E+03	1.53E+03	1.51E+03	1.52E+03	5.92E+05	1.50E+03
	min	1.50E+03	1.51E+03	1.50E+03	1.51E+03	1.59E+04	1.50E+03
	median	³ 1.50E+03	⁴ 1.51E+03	² 1.50E+03	⁵ 1.52E+03	⁶ 1.55E+05	¹ 1.50E+03
	std	8.48E-01	4.30E+00	7.30E-01	3.27E+00	1.40E+05	7.75E-01
f_{16}	max	1.61E+03	1.61E+03	1.61E+03	1.61E+03	1.61E+03	1.61E+03
	min	1.61E+03	1.61E+03	1.61E+03	1.61E+03	1.61E+03	1.61E+03
	median	³ 1.61E+03	¹ 1.61E+03	⁶ 1.61E+03	⁴ 1.61E+03	⁵ 1.61E+03	² 1.61E+03
	std	6.14E-01	5.92E-01	3.43E-01	7.25E-01	1.90E-01	4.67E-01

On f_{13} - f_{16} , the values in bold are better than those seemingly same values not in bold, because the digits after the second decimal place are omitted.

Funkcje hybrydowe

Comparative results on hybrid benchmark functions.

		IWO	BBO	GSA	HuS	BA	WWO
f_{17}	max	3.50E+05	2.31E+07	1.14E+06	1.10E+06	9.90E+06	6.16E+04
	min	5.37E+03	1.26E+06	1.85E+05	1.43E+04	1.45E+06	6.71E+03
	median	² 6.75E+04	⁵ 3.13E+06	⁴ 5.63E+05	³ 1.51E+05	⁶ 4.24E+06	¹ 2.61E+04
	std	6.85E+04	4.19E+06	2.20E+05	1.61E+05	1.79E+06	1.24E+04
f_{18}	max	1.80E+04	1.03E+05	4.20E+03	1.09E+04	3.64E+08	2.73E+03
	min	2.26E+03	6.74E+03	2.02E+03	2.02E+03	1.33E+07	1.85E+03
	median	⁴ 4.35E+03	⁵ 2.28E+04	² 2.13E+03	³ 2.73E+03	⁶ 8.54E+07	¹ 2.01E+03
	std	3.69E+03	1.97E+04	3.78E+02	2.25E+03	1.00E+08	1.25E+02
f_{19}	max	1.91E+03	1.98E+03	2.00E+03	2.04E+03	2.06E+06	1.91E+03
	min	1.90E+03	1.91E+03	1.91E+03	1.91E+03	1.95E+03	1.90E+03
	median	² 1.91E+03	³ 1.91E+03	⁵ 2.00E+03	⁴ 1.92E+03	⁶ 2.01E+03	¹ 1.91E+03
	std	1.65E+00	2.77E+01	3.43E+01	3.31E+01	2.03E+01	1.38E+00
f_{20}	max	5.34E+03	8.62E+04	6.82E+04	6.03E+04	4.44E+04	1.58E+04
	min	2.30E+03	8.64E+03	2.32E+03	2.22E+04	5.40E+03	2.14E+03
	median	1.74E+03	² 2.72E+04	⁴ 1.77E+04	⁶ 3.68E+04	³ 1.63E+04	² 4.25E+03
	std	7.00E+02	1.76E+04	1.39E+04	8.49E+03	1.03E+04	3.18E+03
f_{21}	max	9.03E+04	1.67E+06	3.09E+05	1.66E+05	3.34E+06	1.76E+05
	min	6.74E+03	6.70E+04	5.87E+04	1.07E+04	1.43E+05	3.70E+03
	median	² 3.35E+04	⁵ 4.22E+05	⁴ 1.71E+05	³ 4.70E+04	⁶ 9.17E+05	¹ 2.92E+04
	std	2.30E+04	3.35E+05	6.53E+04	4.24E+04	7.51E+05	3.50E+04
f_{22}	max	2.52E+03	3.28E+03	3.63E+03	3.67E+03	3.56E+03	2.85E+03
	min	2.23E+03	2.25E+03	2.63E+03	2.37E+03	2.72E+03	2.22E+03
	median	1.236E+03	³ 2.71E+03	⁶ 3.15E+03	⁴ 3.08E+03	⁵ 3.14E+03	² 2.48E+03
	std	7.34E+01	2.34E+02	2.50E+02	2.67E+02	2.05E+02	1.43E+02

On f_{19} , the values in bold are better than those seemingly same values not in bold, because the digits after the second decimal place are omitted.


[1]

Funkcje złożone

Comparative results on composition benchmark functions.

		IWO	BBO	GSA	HuS	BA	WWO
f_{23}	max	2.62E+03	2.62E+03	2.65E+03	2.62E+03	2.88E+03	2.62E+03
	min	2.62E+03	2.62E+03	2.50E+03	2.62E+03	2.51E+03	2.62E+03
	median	⁴ 2.62E+03	⁶ 2.62E+03	² 2.56E+03	⁵ 2.62E+03	¹2.51E+03	³ 2.62E+03
	std	7.95E-02	1.32E+00	6.45E+01	8.45E-01	1.28E+02	1.45E-01
f_{24}	max	2.63E+03	2.65E+03	2.60E+03	2.71E+03	2.60E+03	2.63E+03
	min	2.60E+03	2.63E+03	2.60E+03	2.63E+03	2.60E+03	2.62E+03
	median	³ 2.62E+03	⁵ 2.63E+03	¹2.60E+03	⁶ 2.66E+03	² 2.60E+03	⁴ 2.63E+03
	std	1.08E+01	5.97E+00	1.71E-02	1.25E+01	1.20E+00	6.89E+00
f_{25}	max	2.71E+03	2.72E+03	2.71E+03	2.75E+03	2.76E+03	2.72E+03
	min	2.70E+03	2.71E+03	2.70E+03	2.71E+03	2.70E+03	2.70E+03
	median	³ 2.70E+03	⁵ 2.71E+03	¹2.70E+03	⁶ 2.72E+03	² 2.70E+03	⁴ 2.71E+03
	std	8.08E-01	3.01E+00	1.32E+00	6.27E+00	1.50E+01	2.00E+00
f_{26}	max	2.70E+03	2.80E+03	2.80E+03	2.80E+03	2.70E+03	2.70E+03
	min	2.70E+03	2.70E+03	2.80E+03	2.70E+03	2.70E+03	2.70E+03
	median	² 2.70E+03	³ 2.70E+03	⁵ 2.80E+03	⁶ 2.80E+03	⁴ 2.70E+03	¹2.70E+03
	std	5.43E-02	2.20E+01	5.43E-03	3.53E+01	5.37E-01	6.50E-02
f_{27}	max	3.10E+03	3.51E+03	4.43E+03	6.47E+03	3.53E+03	3.50E+03
	min	3.01E+03	3.24E+03	3.10E+03	3.57E+03	3.21E+03	3.10E+03
	median	² 3.10E+03	⁴ 3.40E+03	⁵ 3.82E+03	⁶ 4.84E+03	³ 3.31E+03	¹3.10E+03
	std	3.38E+01	6.35E+01	3.51E+02	6.83E+02	6.46E+01	5.90E+01
f_{28}	max	3.85E+03	4.27E+03	6.92E+03	6.65E+03	6.10E+03	5.39E+03
	min	3.56E+03	3.61E+03	3.76E+03	4.70E+03	3.01E+03	3.10E+03
	median	¹3.69E+03	³ 3.79E+03	⁶ 5.43E+03	⁵ 5.36E+03	⁴ 4.52E+03	² 3.78E+03
	std	4.12E+01	9.33E+01	7.15E+02	4.61E+02	5.93E+02	3.61E+02
f_{29}	max	2.79E+04	8.64E+06	2.93E+06	4.11E+07	1.36E+07	5.06E+03
	min	5.37E+03	4.26E+03	3.10E+03	4.81E+03	6.16E+05	3.56E+03
	median	⁵ 1.58E+04	³ 5.26E+03	¹3.10E+03	⁴ 1.54E+04	⁶ 4.21E+06	² 4.02E+03
	std	5.14E+03	1.11E+06	3.78E+05	7.70E+06	2.83E+06	3.60E+02
f_{30}	max	1.69E+04	3.75E+04	1.14E+05	3.74E+04	5.08E+05	7.66E+03
	min	6.05E+03	7.78E+03	1.22E+04	8.27E+03	6.26E+04	4.25E+03
	median	² 8.85E+03	⁵ 1.56E+04	³ 1.46E+04	¹ 1.51E+04	⁶ 1.77E+05	⁴5.63E+03
	std	2.08E+03	6.08E+03	1.84E+04	6.58E+03	9.11E+04	7.38E+02

On f_{24} - f_{27} , the values in bold are better than those seemingly same values not in bold, because the digits after the second decimal place are omitted.

-  Yu-Jun Zheng.
Water wave optimization: A new nature-inspired metaheuristics.