Lista nr 3 z matematyki dyskretnej

1. Wykaż, że wśród $n + 1$ różnych liczb naturalnych wybranych spośród $2n$ kolejnych liczb naturalnych (począwszy od 1) istnieje przynajmniej jedna para liczb, z których jedna dzieli drugą.

2. (D) Na kartce w kratkę zaznaczono 5 punktów kratowych (czyli punktów o obu współrzędnych całkowitoliczbowych). Wykaż, że środek odcinka łączącego pewne dwa spośród tych punktów jest także punktem kratowym.

3. (D) Dany jest ciąg liczb naturalnych $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pokaż, że istnieją takie i oraz j, $i \leq j$, że suma $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_j$ jest podzielna przez n.

4. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba podzielna przez n, której zapis dziesiętny złożony jest tylko z zer i jedynek.

5. Czy dla dowolnych naturalnych a, b zachodzi $NWD(a, b) = NWD(a-b, b)$? Odpowiedź uzasadnij.

6. (D) Niech a i b będą dowolnymi liczbami naturalnymi takimi, że $a+b > 0$. Pokaż, że liczby $\frac{a}{NWD(a,b)}, \frac{b}{NWD(a,b)}$ są względnie pierwsze.

7. Jak znaleźć $NWW(a, b)$ znając liczby naturalne a, b oraz $NWD(a, b)$?

8. (D) Oblicz $NWD(8, 13)$ oraz całkowite liczby x, y takie, że $8x + 13y = NWD(8, 13)$.

9. Niech a, b, n będą dodatnimi liczbami naturalnymi. Pokaż, że jeśli $a \perp n$ i $b \perp n$, to $ab \perp n$.

10. Pokaż, że dowolny wspólny dzielnik liczb naturalnych a i b dzieli $NWD(a, b)$.

11. Udowodnij dla dowolnych liczb całkowitych a, b, c:

    (a) $a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c$

    (b) $a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid (b + c) \wedge a \mid (b - c)$

12. (D) Napisz w wybranym języku programowania rozszerzony algorytm Euklidesa. Oszacuj jego złożoność obliczeniową.

13. Jeśli m i n są parzyste, to $NWD(m,n) = 2NWD(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})$. Korzystając z podobnych zależności dla pozostałych par parzystości liczb m i n, podaj algorytm obliczania $NWD(m,n)$ i oszacuj jego złożoność obliczeniową.

14. (D) Udowodnij, że jeśli $(m_1, m_2, \ldots)_p$ i $(n_1, n_2, \ldots)_p$ są reprezentacjami liczb naturalnych m i n względem układu kolejnych liczb pierwszych, to:

    (a) $k = NWD(m,n) \Leftrightarrow k_i = \min\{m_i, n_i\}$ dla każdego $i = 1, 2, \ldots,$

    (b) $k = NWW(m,n) \Leftrightarrow k_i = \max\{m_i, n_i\}$ dla każdego $i = 1, 2, \ldots,$

    gdzie $(k_1, k_2, \ldots)_p$ jest rozkładem liczby k.

15. Czy po usunięciu z szachownicy 8×8 jednego pola czarnego i jednego białego zawsze można pokryć resztę szachownicy kostkami domina? Jedna kostka ma rozmiar dwóch pól. Usunięte pola nie muszą ze sobą sąsiadować.

Katarzyna Paluch