

1. (1 pkt.) Rozważmy relację $R(A, B, C)$. Napisz wyrażenie algebry relacji, które zwróci pusty wynik wtedy i tylko wtedy gdy atrybut A jest kluczem w obecnym stanie relacji R .
2. (1 pkt.) Rozważmy relacje $R(A, B, C)$ oraz $S(X, Z)$. Napisz zapytanie rrk lub rrd, które zwróci pusty wynik wtedy i tylko wtedy jeśli w obecnym stanie relacji R i S atrybut Z relacji S spełnia własność klucza obcego wskazującego na atrybut A relacji R .
3. (2 pkt.) Rozważmy skierowany graf acykliczny (DAG) potomków *Bolesława Chrobrego* reprezentowany przez relację $E(X, Y)$. Relacja E zawiera takie pary (a, b) , że a jest dzieckiem b . Dostępna jest stała 'Chrobry' oznaczająca wierzchołek reprezentujący Bolesława Chrobrego, który jako jedyny w grafie nie posiada rodzica oraz jest przodkiem wszystkich.

Napisz następujące zapytania w datalogu:

- a) (0.5 pkt.) $\text{sibling}(X, Y)$ – X i Y mają wspólnego rodzica.
 - b) (0.5 pkt.) $\text{cousin}(X, Y)$ – X i Y są kuzynami (tzn. ich rodzice są rodzeństwem).
 - c) (0.5 pkt.) $\text{same-generation}(X, Y)$ – istnieje ścieżka z X do 'Chrobry' o tej samej długości co pewna ścieżka z Y do 'Chrobry'.
 - d) (0.5 pkt.) $\text{anc2}(X, Y)$ – X jest takim przodkiem Y , że w bazie istnieją ścieżki z X do Y o różnych długościach.
-
4. (2 pkt.) Rozważmy pewien skierowany graf reprezentowany przez relację $E(X, Y, Z)$. Relacja E zawiera krotkę (s, t, l) wtedy i tylko wtedy gdy w grafie istnieje krawędź z s do t etykietowana symbolem $l \in \{a, b\}$. Napisz następujące zapytania w datalogu jeśli to możliwe lub uzasadnij dlaczego dane zapytanie nie istnieje.
 - a) (0.5 pkt.) Zwróć zbiór wszystkich wierzchołków grafu.
 - b) (0.5 pkt.) Czy wszystkie wierzchołki grafu są osiągalne z ustalonego wierzchołka n ścieżkami składającymi się z krawędzi etykietowanych a ?
 - c) (0.5 pkt.) Czy w grafie istnieje ścieżka taka, że etykiety kolejnych jej krawędzi tworzą palindrom?
 - d) (0.5 pkt.) Zwróć wszystkie trójki wierzchołków s, t, n takie, że istnieje ścieżka z s do t , taka, że z każdego jej wierzchołka istnieje ścieżka o krawędziach etykietowanych symbolami a do wierzchołka n .

Definicja. Graf jest k -kolorowalny jeśli każdemu wierzchołkowi tego grafu możemy przyporządkować jeden z k kolorów w taki sposób aby każde dwa wierzchołki połączone krawędzią miały różne kolory.

5. (1 pkt.) Wiadomo, że graf jest 2-kolorowalny wtedy i tylko wtedy gdy nie zawiera cyklu o nieparzystej długości. Napisz zapytanie datalogowe $Q()$ spełnione w grafach, które nie są 2-kolorowalne.
6. (1 pkt.) Dla danego grafu G skonstruuj takie zapytanie koniunkcyjne $Q()$ oraz bazę danych D , że $Q()$ jest prawdziwe w bazie D wtw gdy graf G jest 3-kolorowalny.
- Wiadomo, że problem istnienia 3-kolorowania grafu jest trudny obliczeniowo. Tymczasem problem ewaluacji zapytań koniunkcyjnych (a nawet zapytań rrk/rrd) nie jest uznawany za szczególnie trudny. Spróbuj wyjaśnić dlaczego.
7. (3 pkt., zadanie dla chętnych) Rozważmy graf reprezentowany przez relację binarną $E(\text{src}, \text{dest})$. Dowiedz się co to są gry Ehrenfeuchta-Fraïssé i pokaż z ich pomocą, że w logice pierwszego rzędu nie da się wyrazić zapytania $\text{path}_*(X, Y)$ spełnionego gdy istnieje jakakolwiek ścieżka z X do Y .