# Ćwiczenia
# z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 2

10 października 2017 r.

Zajęcia 18 października 2017 r.
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

**L2.1.** 1 punkt Ustalmy liczbę $B \in \{2, 3, 4, \ldots\}$. Pokaż, że każda niezerowa liczba rzeczywista $x$ ma jednoznaczne przedstawienie w postaci $x = smB^c$, gdzie $s = \operatorname{sgn} x$, $c \in \mathbb{Z}$, $m \in [\frac{1}{B}, 1)$.

**L2.2.** 1 punkt Podaj wszystkie liczby zmiennopozycyjne, które można przedstawić w postaci

$$x = \pm(0.1e_{-2}e_{-3}e_{-4})_2 \cdot 2^{\pm c}, \qquad e_{-2}, e_{-3}, e_{-4}, c \in \{0, 1\}, \tag{1}$$

gdzie $(\ldots)_2$ oznacza zapis dwójkowy. Jaki jest najmniejszy przedział $[A, B]$, zawierający te liczby? Jak liczby (1) rozkładają się w $[A, B]$ (wykonaj odpowiedni rysunek)? Co z tego wynika?

**L2.3.** 1 punkt *Zaokrągleniem* niezerowej liczby rzeczywistej $x = sm2^c$, gdzie $s = \operatorname{sgn} x$, $c$ jest liczbą całkowitą, a $m \in [\frac{1}{2}, 1)$, jest liczba zmiennopozycyjna $\mathrm{rd}\,(x) = sm_t 2^c$, gdzie $m_t \in [\frac{1}{2}, 1)$ oraz $| \, m - m_t \, | \le \frac{1}{2} 2^{-t}$. Wykaż, że

$$\frac{|\mathrm{rd}\,(x) - x|}{|x|} \le 2^{-t}.$$

**L2.4.** 1 punkt Zapoznaj się ze standardem IEEE 754[1] reprezentacji liczb zmiennopozycyjnych. Omówi go krótko i podaj główne różnice w stosunku do modelu teoretycznego reprezentacji liczb maszynowych przedstawionego na wykładzie.

**L2.5.** 1 punkt Załóżmy, że $x, y$ są liczbami maszynowymi. Podaj przykład pokazujący, że przy obliczaniu wartości $d := \sqrt{x^2 + y^2}$ algorytmem postaci

```
u:=x*x;
u:=u+y*y;
d:=sqrt(u)
```

może wystąpić zjawisko nadmiaru, mimo tego, że szukana wielkość $d$ należy do zbioru $X_{\mathrm{fl}}$. Następnie zaproponuj `algorytm` wyznaczania $d$ pozwalający unikać zjawiska nadmiaru, jeśli $\sqrt{2}\max(|x|, |y|) \in X_{\mathrm{fl}}$. Na koniec podaj skuteczną metodę wyznaczania długości euklidesowej wektora $v \in \mathbb{R}^n$.

[1] Patrz np. http://en.wikipedia.org/wiki/IEEE_754-2008

**L2.6.** $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wytłumacz dokładnie kiedy występuje i na czym polega zjawisko utraty cyfr znaczących wyniku.

**L2.7.** $\boxed{\text{1 punkt}}$ Można wykazać, że przy $x_1 = 2$ ciąg

$$x_{k+1} = 2^k \sqrt{2\left(1 - \sqrt{1 - (x_k/2^k)^2}\right)} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

jest zbieżny do $\pi$. Czy podczas obliczania kolejnych wyrazów tego ciągu przy pomocy komputera może wystąpić zjawisko utraty cyfr znaczących? Jeśli tak, to zaproponuj inny sposób wyznaczania wyrazów ciągu (2) pozwalający uniknąć wspomnianego zjawiska.

**L2.8.** $\boxed{\text{2 punkty}}$ Dla jakich wartości $x$ obliczanie wartości wyrażeń

**a)** $x^3 + \sqrt{x^6 + 2017}$, **b)** $1 - x^5 - e^{(-x)^5}$, **c)** $\log_3 x - 5$,

**d)** $\sin(x/3) - x/3 + x^3/162 - x^5/29160$

może wiązać się z utratą cyfr znaczących wyniku? Zaproponuj sposób obliczenia wyniku dokładniejszego.

*(–) Paweł Woźny*