Lista zadań. Nr 4. 3 kwietnia 2018

Algorytmy i Struktury Danych

IIUWr. II rok informatyki.

1. (0pkt) Rozwiąż wszystkie zadania dodatkowe.
2. (1pkt) Ułóż algorytm znajdujący najtańszą drogę przejścia przez tablicę, w którym oprócz ruchów dopuszczalnych w wersji problemu prezentowanej na wykładzie, dozwolone są także ruchy w górę i w dół tablicy.
3. (2pkt) Rozważmy następujące operacje na ciągach:
   - *insert(x,i,a)* - wstawienie a pomiędzy i-tym i $(i+1)$-szym elementem x-a;
   - *delete(x,i)* - usunięcie i-tego elementu x-a;
   - *replace(x,i,a)* - zastąpienie i-tego elementu x-a przez a.

   Jak łatwo zauważyć, dla każdych dwóch ciągów x i y istnieją sekwencje powyższych operacji przekształcające x w y. Jeśli każdej operacji przypiszemy koszt (nieujemną liczbę rzeczywistą) możemy mówić o minimalnym koszcie przekształcenia x w y (koszt ten nazywa się *odległością edycyjną* ciągów x i y).

   Ułóż algorytm, który dla danych dwóch ciągów znajdzie ich odległość edycyjną.
4. (1pkt) Zbiór $I \subseteq V$ zbioru wierzchołkow w grafie $G = (V, E)$ nazywamy *zbiorem niezależnym*, jeśli żadne dwa wierzchołki z I nie są połączone krawędzią. Ułóż algorytm, który dla zadanego drzewa T znajduje najliczniejszy zbiór niezależny jego wierzchołków.
5. (2pkt) Na trzyelementowym zbiorze $A = \{a, b, c\}$ określono operację $\odot$. Nie jest ona ani przemienna ani łączna. Ułóż algorytm, który dla danego ciągu $x_1 \odot x_2 \odot \ldots \odot x_n$, gdzie x_i są symbolami ze zbioru A, rostrzyga, czy można w nim tak rozstawić nawiasy, by wartość otrzymago wyrażenia wynosiła a.
6. (2pkt) Dany jest graf pełny $G = (V, E)$ z nieujemnymi wagami na krawędziach oraz ciąg wszystkich jego wierzchołków $C = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$. Początkowo w wierzchołku v_1 znajdują się dwa pionki. W kolejnych ruchach masz przesunąć pionki według następujących zasad:
   - w każdym ruchu przesuwasz jeden pionek,
   - pionek stojący w wierzchołku v_i możesz być przesunąć do wierzchołka v_j jedynie wtedy, gdy $j > i$ (czyli do wierzchołka znajdującego się dalej w ciągu C),
   - wszystkie wierzchołki grafu muszą być odwiedzone przez co najmniej jeden pionek,
   - po ostatnim ruchu obydwa pionki znajdują się w wierzchołku v_n.

   Ułóż algorytm obliczający ciąg ruchów pionków minimalizujący sumę długości dróg przebytych przez pionki (przez długość drogi rozumiemy sumę wag jej krawędzi).
7. (1pkt) Rozważmy następujący problem *3-podziału*. Dla danych liczb całkowitych $a_1, \ldots, a_n \in \langle -C..C \rangle$ chcemy stwierdzić, czy można podzielić zbiór $\{1, 2, \ldots, n\}$ na trzy rozłączne podzbiory I, J, K, takie, że
   $$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} a_j = \sum_{k \in K} a_k.$$
8. (1pkt) Na każdym polu szachownicy o wymiarach $4 \times n$ znajduje się jedna liczba naturalna. Ułóż algorytm, który umieszcza na szachownicy kamyki w taki sposób, że:

- na każdym polu znajduje się co najwyżej jeden kamień,
- jeśli na polu P znajduje się kamyk, to na polach mających wspólny bok z P nie ma kamyków,
- suma liczb z pól, na których leżą kamyki jest maksymalna.

9. (2pkt) Nad pewną rzeką płynącą ze wschodu na zachód zamieszkały bobry: na południowym brzegu - panowie; na północnym - panie. Tak się złożyło, że panów bobrów jest tyle samo co pań i ponadto każdy pan zapałał uczuciem do jednej pani (szczęśliwie każdy do innej). Każdy z panów chce zbudować groblę prowadzącą z jego żeremia do żeremia wybranki. Problem w tym, że groble nie mogą się krzyżować. Rada starszych postanowiła ustalić, ile maksymalnie grobli może powstać. Ułóż algorytm, który wykona to zadanie.

10. (2pkt) Ułóż algorytm rozwiązujący poniższy problem triangulacji wielokąta wypukłego:

    PROBLEM:
    Dane: ciąg par liczb rzeczywistych $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, określających kolejne wierzchołki n-kąta wypukłego P
    ZAŁOŻENIE: dane są określone poprawnie.
    Zadanie: Znaleźć zbiór S nieprzecinających się przekątnych, które dzielą P na trójkąty, taki, że długość najdłuższej przekątnej w S jest możliwie najmniejsza.

Zadania dodatkowe do rozwiązania samodzielnego lub podczas repetytorium

1. (1pkt) Uzupełnij podany na wykładzie algorytm sprawdzający przynależność słowa do języka generowanego przez bezkontekstową gramatykę w normalnej postaci Chomsky'ego tak, by w przypadku pozytywnej odpowiedzi wypisywał jego wyprowadzenie.

2. (1pkt) Jak zmieni się złożoność problemu przynależność słowa do języka generowanego przez bezkontekstową gramatykę w normalnej postaci Chomsky'ego, jeśli gramatyka także będzie daną wejściową?

3. (2pkt) *Gramatyką liniową* nazywamy gramatykę bezkontekstową, w której prawe strony produkcji zawierają co najwyżej jeden symbol nieterminalny. Ułóż algorytm sprawdzający przynależność słowa do języka liniowego, który wykorzystuje pamięć rozmiaru $O(n)$.

4. (2pkt) Dana jest szachownica $n \times n$ i pozycje pionów na niej (może być ich nawet $O(n^2)$). Ułóż algorytm znajdujący prostokątny fragment szachownicy o największym polu, na którym nie znajduje się ani jeden pion. Twój algorytm powinien działać w czasie $O(n^2)$.

5. (2pkt) Napisz w pseudopascalu lub pseudoC++ dwie procedury:

   (a) drukującą ciąg nazw macierzy wraz z poprawnie rozstawionymi nawiasami wyznaczającymi optymalną kolejność mnożenia macierzy,

   (b) drukującą ciąg instrukcji postaci $A \leftarrow B \times C$, prowadzących do obliczenia w optymalny sposób iloczynu macierzy (A jest nazwą macierzy roboczej, a B i C - są nazwami macierzy wejściowych lub wcześniej obliczonych macierzy roboczych).

6. (1pkt) Udowodnij, że liczba wywołań rekurencyjnych w poniższej procedurze obliczającej minimalny koszt pomnożenia macierzy jest $\Theta(3^n)$.

function $minmat(i, j)$
  if $i = j$ **then** **return** 0
  $ans \leftarrow \infty$
  for $k \leftarrow i$ **to** $j - 1$ **do**
    $ans \leftarrow \min(ans,\ \ d_{i-1}d_k d_j + minmat(i, k) + minmat(k + 1, j))$
  return ans

7. (2pkt) Jak wiesz, liczba wszystkich poprawnych rozstawień n par nawiasów (a więc i sposobów pomnożenia n macierzy) jest równa n-tej liczbie Catalana.

   - Wykaż, że liczba ta rośnie szybciej niż 3^n.
   - Czy potrafisz wskazać poprawne rozstawienie nawiasów, które nie jest rozważane przez procedurę *minmat*?

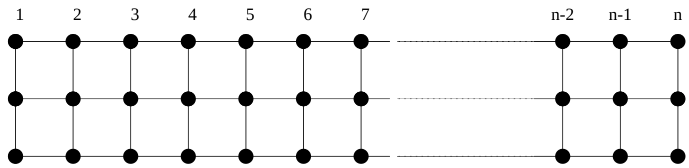
8. (2pkt) Dany jest zbiór n przedmiotów $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Dla każdego przedmiotu znamy jego wagę $w(a_i)$ oraz jego cenę $c(a_i)$; obie te liczby są naturalne a $c(a_i))$ jest nie większe od n^2. Dana jest ponadto liczba naturalna P. Ułóż algorytm znajdujący podzbiór S zbioru przedmiotów, taki, że suma wag przedmiotów z S nie przekracza P, a suma ich cen jest możliwie największa. W jakim czasie działa Twój algorytm?

9. (1pkt) Pokaż jak obliczyć długość elementów LCS używając jedynie $2\min(m, n)$-elementowej tablicy c plus $O(1)$ dodatkowej pamięci. Następnie pokaż, jak to zrobić używając $\min(m, n)$-elementowej tablicy c plus $O(1)$ dodatkowej pamięci

10. (2pkt) Zmodyfikuj algorytm znajdujący najdłuższy wspólny podciąg dwóch ciągów n elementowych, tak by działał w czasie $O(n^2)$ i używał $O(n)$ pamięci.

11. (1pkt) Zmień podany na wykładzie algorytm znajdujący najtańszą drogę przejścia przez tablicę tak, by znajdował drogę o drugim co do wielkości koszcie.

12. (2pkt) Podwójną drabiną rozmiaru n nazywamy graf przedstawiony na poniższym rysunku.



Rysunek 1: *Podwójna drabina n-elementowa*

Uogólnij na podwójne drabiny podany na wykładzie algorytm znajdujący liczbę drzew rozpinających o k krawędziach wyróżnionych.

Krzysztof Loryś