Lista nr 4 z matematyki dyskretnej

1. Niech s, n, k oznaczają pewne liczby naturalne. Pokaż, że jakkolwiek wrzucimy $s > nk$ kulek do k szuflad, któraś szuflada będzie zawierać co najmniej $n + 1$ kulek.
2. (D) Udowodnij, że jeśli $a > b$ oraz a i b są względnie pierwsze, to dla $0 \leq m < n$ zachodzi: $NWD(a^n - b^n, a^m - b^m) = a^{NWD(m,n)} - b^{NWD(m,n)}$.
3. Udowodnij, że dla dowolnych naturalnych m, n takich, że $m \perp n$, zachodzi $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.
4. Pokaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n, funkcja Eulera dla n dana jest wzorem $\varphi(n) = n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\dots(1-\frac{1}{p_k})$, gdzie $p_1, p_2, \dots, p_k$ są wszystkimi czynnikami pierwszymi liczby n liczonymi bez powtórzeń.
5. Oblicz dwie ostatnie cyfry w rozwinięciu dziesiętnym liczby 76^{76}.
6. (D) Rozwiąż układ kongruencji:

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv 3 \pmod{7} \\ x \equiv 4 \pmod{13} \end{cases}$$

7. (D) Wykaż, że jeśli $2^n - 1$ jest liczbą pierwszą, to n jest liczbą pierwszą (por. liczby Mersenne'a).
8. Wykaż, że jeśli $a^n - 1$ jest liczbą pierwszą, to $a = 2$ (por. liczby Mersenne'a).
9. Wykaż, że jeśli $2^n + 1$ jest liczbą pierwszą, to n jest potęgą liczby 2 (por. liczby Fermata).
10. (D) Określ liczbę podzielną przez 7, która leży najbliżej liczby 10^{100000}.
11. Opisz postać liczb podzielnych przez 13, które leżą najbliżej liczby utworzonej z jedynki i miliona zer. A może ta liczba jest podzielna przez 13?
12. Podaj dwie ostatnie cyfry liczby $9^{8^{7^{6^{5^{4^{3^{2^{1}}}}}}}}$ w rozwinięciu dziesiętnym.

Katarzyna Paluch