Lista nr 8 z matematyki dyskretnej

1. Niech p_n oznacza liczbę podziałów liczby naturalnej n, w których każdy składnik nieparzysty występuje nieparzystą liczbę razy a każdy parzysty parzystą, np. $p_4 = 2$, bo interesujące nas podziały to $1+3$ i $2+2$. Podaj funkcję tworząca dla ciągu p_n.

2. (D) Udowodnij, że liczba sposobów, w jaki można podzielić $(n+2)$-kąt wypukły na płaszczyźnie na rozłączne trójkąty za pomocą $n-1$ przekątnych, które nie przecinają się wewnątrz tego wielokąta, jest równa n-tej liczbie Catalana.

3. Określ liczbę drzew binarnych, zawierających n wierzchołków wewnętrznych. W drzewie binarnym każdy wierzchołek ma zero lub dwóch synów.

4. (D) Ile nie krzyżujących się uścisków dłoni może wykonać jednocześnie n par osób siedzących za okrągłym stołem?

5. Przekonaj się, że z dokładnością do izomorfizmu, istnieje 11 grafów z czterema wierzchołkami.

6. Niech Q_k oznacza graf k-wymiarowej kostki, tzn. zbiór wierzchołków tego grafu tworzą wszystkie k-elementowe ciągi zer i jedynek i dwa wierzchołki są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im ciągi różnią się dokładnie jedną współrzędną. Oblicz, ile wierzchołków i krawędzi ma graf Q_k.

7. (D) Problem izomorfizmu dwóch grafów jest trudny. Załóżmy natomiast, że w komputerze są dane dwa grafy G i H, określone na tym samym zbiorze wierzchołków $V(G) = V(H) = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Podaj algorytm sprawdzający w czasie $O(m+n)$, czy te grafy są identyczne.

8. Udowodnij, że graf G jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej dwa grafy z rodziny $\{G_v : v \in V\}$ są spójne, gdzie G_v jest grafem powstałym z G przez usunięcie wierzchołka v i incydentnych z nim krawędzi.

9. Udowodnij, że w grafie spójnym każde dwie najdłuższe co do długości ścieżki mają wspólny wierzchołek.

10. (D) Wykaż, że przynajmniej jeden z grafów G i $\bar{G}$ ($\bar{G}$ jest dopełnieniem grafu G) jest spójny.

11. (D) Rozważ reprezentacje grafu G: macierzową, listową. Dla każdej z tych reprezentacji, określ złożoność wykonania na grafie G następujących operacji:

    (a) przeglądnij wszystkich sąsiadów ustalonego wierzchołka,

    (b) przeglądnij wszystkie krawędzie grafu,

    (c) sprawdź, czy krawędź (u, v) należy do grafu G,

    (d) usuń z grafu G krawędź (u, v),

    (e) wstaw do grafu G krawędź (u, v).

12. Niech $d = (d_1, d_2, ..., d_n)$ będzie ciągiem stopni wierzchołków grafu. Podaj algorytm porządkowania ciągu d działający w czasie $O(n)$.

Katarzyna Paluch