

## Lista nr 12 z matematyki dyskretnej

1. (D) Pokaż, że dla każdego grafu istnieje pewna kolejność wierzchołków, że algorytm zachłanny (sekwencyjny) przy tej kolejności kolorowania wierzchołków działa w sposób optymalny.
2. Znajdź pokolorowanie grafu Mycielskiego  $M_4$  za pomocą algorytmu sekwencyjnego.
3. (D) Niech  $M_k$  będzie  $k$ -tym grafem Mycielskiego. Wykaż, że  $M_k$  nie zawiera trójkątów i  $\chi(M_k) = k$  dla każdego  $k$ .
4. (D) Wykaż, że jeśli w algorytmie sekwencyjnym zostało użytych  $k$  kolorów do pomalowania grafu, to ten graf ma przynajmniej  $k(k-1)/2$  krawędzi. Wykaż stąd, że każdy graf zawiera przynajmniej  $\chi(G)(\chi(G)-1)/2$  krawędzi, gdzie  $\chi(G)$  jest liczbą chromatyczną grafu  $G$ .
5. (D) Wykaż, że liczba chromatyczna grafu, w którym stopień żadnego wierzchołka nie przekracza 3, może być znaleziona w czasie wielomianowym.
6. Dla każdego  $n > 1$  skonstruuj graf dwudzielny na  $2n$  wierzchołkach i uporządkowanie tych wierzchołków, dla których algorytm sekwencyjny używa  $n$  kolorów.
7. Pokaż, jak znaleźć największe skojarzenie w grafie, który jest drzewem.
8. Mając dany graf o nieujemnych wagach na krawędziach, pokaż, jak znaleźć jego drzewo spinające o największej sumarycznej wadze.
9. (D) Mamy daną grupę  $n$  dziewcząt i  $m$  chłopców. Pokaż, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by  $k$  dziewcząt mogło znaleźć męża (wewnątrz grupy), jest to, by każde  $r$  dziewcząt znało przynajmniej  $k + r - n$  chłopców.

*Wskazówka:* Dodaj  $n - k$  chłopców akceptowanych przez wszystkie dziewczyny i zastosuj tw. Halla.

*Katarzyna Paluch*