Lista nr 6 z matematyki dyskretnej

1. Stosując metodę podstawiania rozwiąż następujące zależności rekurencyjne
   (a) $t_n = t_{n-1} + 3^n$ dla $n > 1$ i $t_1 = 3$.
   (b) $h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1}n$ dla $n > 1$ i $h_1 = 1$.
2. (D) Rozwiąż następujące zależności rekurencyjne:
   (a) $a_0 = 0,\ a_1 = 4,\ a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}$,
   (b) $b_0 = 1,\ b_1 = 8,\ b_n = b_{n-1} - b_{n-2}$.
3. (D) Rozwiąż następujące zależności rekurencyjne:
   (a) $a_{n+1} = \left\lfloor \sqrt{a_n^2 + a_{n-1}^2} \right\rfloor,\ a_0 = a_1 = 1$,
   (b) $b_{n+1} = \left\lfloor \sqrt{b_n^2 + 3} \right\rfloor,\ b_0 = 8$,
   (c) $c_{n+1} = (n+1)c_n + (n^2+n)c_{n-1},\ c_0 = 0,\ c_1 = 1$.
4. Rozwiąż zależności rekurencyjne:
   (a) $c_0 = 1, c_n = c_0 + c_1 + \ldots, c_{n-1}$
   (b) $d_0 = 1, d_1 = 2, d_n = d_{n-1}^2 / d_{n-2}$.
5. (D) Wykaż, że iloczyn dowolnych kolejnych k liczb naturalnych jest podzielny przez $k!$.
6. Na ile sposobów można ułożyć domina na prostokącie o rozmiarze $2 \times n$?
7. (D) Udowodnij lub obal następujące stwierdzenie:

   Liczba naturalna n dzieli się przez 3 wtw gdy suma jej cyfr w zapisie dziesiętnym jest podzielna przez 3.

   A gdybyśmy mieli do czynienia z zapisem szesnastkowym?
8. Czy dla podzielności przez 11 istnieje reguła podobnego typu do tej z poprzedniego zadania?

   Czy ma ona coś wspólnego z regułą sprawdzania podzielności przez 3 liczby zapisanej w systemie dwójkowym?

9. (D) Wyprowadź zależność rekurencyjną dla liczby nieporządków: $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$. Jakie należy przyjąć warunki początkowe dla tej zależności?

10. Ile jest różnych sposobów wejścia po schodach zbudowanych z n stopni, jeśli w każdym kroku można pokonać jeden lub dwa stopnie?

11. Rozwiąż zależność rekurencyjną

    $a_n^2 = 2a_{n-1}^2 + 1$ z warunkiem początkowym $a_0 = 2$ i założeniem, że $a_n > 0$ dla każdego naturalnego n.

12. Znajdź wzór jawny na n-ty wyraz ciągu określonego rekurencyjnie: $a_0 = 1, a_1 = 8, a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ dla $n > 1$.

13. (D) Rozwiąż równanie rekurencyjne $a_n + 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 3n^2$, jeśli $a_0 = 1, a_1 = 4$.

14. (D) Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu a_n. Pokaż, że funkcją tworząca ciągu b_n postaci $(0, 0, \ldots, 0, a_0, a_1, a_2, \ldots)$, takiego, że $b_{k+i} = a_i$ oraz $b_0 = \ldots = b_{k-1} = 0$ jest funkcja $x^k A(x)$.

    A jak otrzymać funkcję tworzącą ciągu c_n postaci $(a_k, a_{k+1}, \ldots,)$, czyli takiego, że $c_i = a_{k+i}$?

15. (D) Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu a_n. Podaj postać funkcji tworzących dla następujących ciągów:

    (a) $b_n = na_n$
    (b) $c_n = a_n/n$
    (c) $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

    Wskazówka: Rozważ różniczkowanie i całkowanie funkcji tworzących.

16. Wyznacz funkcje tworzące ciągów:

    (a) $a_n = n^2$
    (b) $a_n = n^3$
    (c) $\binom{n+k}{k}$

    Wskazówka: Wszędzie przyda się funkcja tworząca $\frac{1}{1-x}$. W ostatnim podpunkcie będzie to odpowiednia potęga tej funkcji.

17. Oblicz funkcje tworzące ciągów:

    (a) $a_n = n$ dla parzystych n i $a_n = 1/n$ dla nieparzystych n
    (b) $H_n = 1 + 1/2 + \ldots + 1/n$ $(H_0 = 0)$.

18. Podaj funkcję tworzącą dla ciągu $(0, 0, 0, 1, 3, 7, 15, 31, \ldots)$.

Katarzyna Paluch