L3.1.

L3.2.

Jeśli ac jest bardzo, bardzo, bardzo małe a b bardzo duże (co do modułu), wtedy mamy odejmowanie bliskich sobie liczb (w zależności od tego jaki znak ma b to inny wzór będzie nieprawidłowy).

Żeby to naprawić użyjemy wzorów Vietta. Mając a, b i x_1 możemy obliczyć $x_2 = -\frac{b}{a} - x_1$ czy coś. Zrobienie testów w swoim ulubionym języku pozostawiam jako proste ćwiczenie.

TODO: przeprowadzić obliczenia w Julii

L3.3.

TODO: przeparsować https://math.stackexchange.com/a/1980721

L3.4.

Wyprowadź wzór na wskaźnik uwarunkowania zadania obliczania wartości funkcji f w punkcie x.

Względna zmiana danych:

$$\left|\frac{(x+h)-x}{x}\right| = \left|\frac{h}{x}\right|$$

Względna zmiana wyniku:

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}\right|$$

Względna zmiana wyniku/Względna zmiana danych:

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}\right| \cdot \left|\frac{x}{h}\right| = \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \left|\frac{h}{f(x)}\right| \left|\frac{x}{h}\right| = \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \left|\frac{x}{f(x)}\right| = |f'(x)| \left|\frac{x}{f(x)}\right| = \left|\frac{f'(x)x}{f(x)}\right|$$

Pochodna bierze się dlatego ze gdy h jest bardzo małe, to moduł jest porównywalny z pochodną.

L3.5.

Do każdego podpunktu aplikujemy wskaźnik z zadania L3.4. i patrzymy na limesy w punkcie, w którym może się popsuć.

a) $f(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = -\frac{1}{\cancel{2}}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-\cancel{2})x = x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\left|\frac{f'(x)\,x}{f(x)}\right| = \left|\frac{x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\,x}{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}\right| = \left|x^2(1-x^2)^{-1}\right| = \frac{x^2}{|1-x^2|}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2}{|1-x^2|} = \infty$$

b) $f(x) = x^{-1}\sin(x)$

$$f'(x) = (-x^{-2})\cdot\sin(x) + x^{-1}\cdot\cos(x) = x^{-1}\cos(x) - x^{-2}\sin(x)$$

$$\left|\frac{f'(x)\,x}{f(x)}\right| = \left|\frac{[x^{-1}\cos(x) - x^{-2}\sin(x)]x}{x^{-1}\sin(x)}\right| = \left|\frac{\cos(x) - x^{-1}\sin(x)}{x^{-1}\sin(x)}\right| = \left|x\frac{\cos(x)}{\sin(x)} - 1\right| =$$

$$= |x\,\mathrm{ctg}(x) - 1|$$

$$\lim_{x\to\pi}|x\,\mathrm{ctg}(x) - 1| = \infty$$

c) $g(x) = \cos(3x)$

$$g'(x) = -3\sin(3x)$$

$$\left|\frac{g'(x)\,x}{g(x)}\right| = \left|\frac{-3\sin(3x)\cdot x}{\cos(3x)}\right| = \left|\frac{-3x\sin(3x)}{\cos(3x)}\right| = |-3x\,\mathrm{tg}(3x)|$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(-3x\,\mathrm{tg}(3x)) = -\infty$$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2017} - x$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+2017}^{-1} \cdot 2x - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+2017}} - 1$$

$$\left|\frac{f'(x)\,x}{f(x)}\right| = \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2017}} - 1\right)\cdot x}{\sqrt{x^2+2017}} = \left|\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2017}} - x\right)\cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+2017}}\right| =$$

$$= \left|\frac{x^2}{x^2+2017} - \frac{x}{\sqrt{x^2+2017}}\right|$$

$\to 1$ 1 lub -1

$$0 < \left|\frac{x^2}{x^2+2017} - \frac{x}{\sqrt{x^2+2017}}\right| < 2$$

$x \to -\infty$

$\frac{x^2}{x^2+2017} \to 1$ a $\frac{x}{\sqrt{x^2+2017}} = -1$

$\downarrow$

1

$x \to \infty$

$\frac{x^2}{x^2+2017} \to 1$ a $\frac{x}{\sqrt{x^2+2017}} \to 1$

L3.6.

Brak pomysłu na rozwiązanie.

L3.7.

Musimy sprawdzić, czy algorytm jest numerycznie poprawny. To jest dosyć łatwe, choć akurat dla mnie nigdy nie było intuicyjne, ale robi się to jakoś tak:
Niech $e_i = (1 + \varepsilon_i)$ a $w_i = (1 + \alpha_i)$

$$S := (de_1 + 1)w_1 = de_1w_1 + w_1$$
$$S := \frac{ce_2}{de_1w_1 + w_1}w_2$$
$$S := (be_3 + \frac{ce_2}{de_1w_1 + w_1}w_2)w_3 = be_3w_3 + \frac{ce_2w_2w_3}{de_1w_1 + w_1}$$
$$S := \frac{ae_4}{be_3w_3 + \frac{ce_2w_2w_3}{de_1w_1+w_1}}w_4 = \frac{ae_4w_4}{be_3w_3 + \frac{ce_2w_2w_3}{de_1w_1+w_1}}$$
$$S := \frac{1}{\frac{ae_4w_4}{be_3w_3+\frac{ce_2w_2w_3}{de_1w_1+w_1}}}w_5 = w_5 \cdot \frac{be_3w_3 + \frac{ce_2w_2w_3}{de_1w_1+w_1}}{ae_4w_4} = w_5 \cdot \frac{\frac{be_3w_3(de_1w_1+w_1)+ce_2w_2w_3}{de_1w_1+w_1}}{ae_4w_4} =$$
$$= \frac{be_3w_3(de_1w_1 + w_1)w_5 + ce_2w_2w_3w_5}{ae_4w_4(de_1w_1 + w_1)} = \frac{be_3w_3de_1w_1w_5 + be_3w_3w_1w_5 + ce_2w_2w_3w_5}{ae_4w_4(de_1w_1 + w_1)} =$$
$$= \frac{be_3w_3w_1w_5 + ce_2w_2w_3w_5 + bde_3w_3e_1w_1w_5}{ae_4w_4(de_1w_1 + w_1)}$$

Niech $E = max\,\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Wtedy:

$$S \leqslant \frac{bE^4 + cE^4 + bdE^5}{aE^2(dE^2 + E)} = \frac{E^4(b + c + bdE)}{E^3(a(dE + 1))} = \frac{(b + c + b\widetilde{d})}{a(\widetilde{d} + 1)}E$$

Mamy więc, że wynik to $\widetilde{S}(a, b, c, d) = S(a, b, c, \widetilde{d})(1+\epsilon)$, czyli lekkie zakłócenie danych i lekkie zakłócenie wyniku. Algorytm jest więc numerycznie poprawny, bo błędy zarówno danych jak i wyniku są na poziomie błędu reprezentacji (bo E było na poziomie błędu reprezentacji).
DYGRESJA
Na wykładzie było coś takiego jak twierdzenie o kumulacji błędów. To chyba leciało jakoś tak, że jeśli mamy jakieś $|\alpha_i| \leqslant 2^{-t}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ to zachodzi $\prod_{i=1}^{n}(1 + \alpha_i) = (1 + \gamma_i)$, gdzie $|\gamma_i| \leqslant n2^{-t}$
W praktyce to oznacza, że możemy jakoś sobie pozwijać błędy. Musimy tylko określić, czy ten skumulowany błąd jest duży, a to jest jakieś machanie rękami. Zazwyczaj jak te błędy się tak skumulują to algorytm jest dobrze uwarunkowany.
To była jednak jakaś dygresja, i nie jest zupełnie potrzebna przy tym zadaniu.