Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 1

3 października 2017 r.

Zajęcia 11 października 2017 r.
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

L1.1. **Włącz komputer!** | 1 punkt | Wiadomo, że rozwiązaniem równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ są liczby

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Pokaż na kilku przykładach (innych niż te z wykładu!), że bezpośrednie stosowanie powyższych wzorów w obliczeniach numerycznych może być *niebezpieczne*.

L1.2. **Włącz komputer!** | 1 punkt | Użyj komputera do wyznaczania wartości numerycznych kolejnych elementów ciągu (x_n) zdefiniowanego rekurencyjnie w następujący sposób:

$$x_0 = 1, \qquad x_1 = \frac{1}{5}, \qquad x_{n+2} = \frac{26}{5}x_{n+1} - x_n \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Skomentuj otrzymane wyniki. Czy są one wiarygodne?

L1.3. **Włącz komputer!** | 1 punkt | Wykorzystując własności szeregów naprzemiennych, ustal ilu teoretycznie wyrazów szeregu

$$\pi = 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

należy użyć do obliczenia wartości π z błędem mniejszym niż 10^{-7}. Następnie wykonaj odpowiedni eksperymen obliczeniowy przy pomocy komputera. Co z niego wynika?

L1.4. | 1 punkt | Wykorzystując własności szeregów naprzemiennych, sprawdź, że do obliczenia wartości $\ln 2$ z błędem mniejszym niż $\frac{1}{2}\cdot 10^{-6}$ trzeba użyć ok. dwóch milionów wyrazów szeregu

$$\ln x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(x-1)^k}{k}$$

dla $x = 2$. Wykaż, że zastosowanie prostego związku $\ln 2 = \ln[e(2/e)]$ może znacznie przyspieszyć obliczenia.

L1.5. **Włącz komputer!** | 1 punkt | Wykorzystując jedynie operacje arytmetyczne $(+, -, *, /)$ i stosując pomysł z poprzedniego zadania, zaproponuj szybki `algorytm` obliczania logarytmu naturalnego bardzo dużych liczb. Opracowaną metodę porównaj z funkcją biblioteczną.

L1.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ W języku programowania `PWO++` funkcja `ATan`(x) oblicza z bardzo dużą dokładnością wartość $\operatorname{arctg}(x)$, jednak **tylko wtedy**, gdy $|x| \le 1$. Wykorzystując funkcję `ATan`, zaproponuj szkic `algorytmu` wyznaczającego w języku `PWO++` wartości funkcji arcus tangens z dużą dokładnością także dla $|x| > 1$.

L1.7. $\boxed{\textbf{Włącz komputer!}}\boxed{\text{2 punkt}}$ Sprawdź, że całki

$$I_n := \int_0^1 \frac{x^n}{x+7} \mathrm{d}x \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

spełniają następującą zależność rekurencyjną:

$$I_n + 7I_{n-1} = \frac{1}{n} \qquad \left(n = 1, 2, \ldots;\ I_0 = \ln\frac{8}{7}\right). \tag{1}$$

Następnie wykorzystaj związek (1) do wyznaczenia wartości całek $I_1, I_2, \ldots, I_{20}$ wykonując obliczenia w arytmetyce pojedynczej precyzji (`single`). Czy wyniki są wiarygodne? Odpowiedź uzasadnij.

L1.8. $\boxed{\textbf{Włącz komputer!}}\boxed{\text{2 punkty}}$ Na wykładzie pokazano, że użycie wzoru

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (h \text{ – małe})$$

do przybliżenia wartości $f'(x)$ nie jest dobrym pomysłem. Uzasadnij, że

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h},$$

a następnie zbadaj doświadczalnie przydatność wyrażenia

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \qquad (h \text{ – małe})$$

do wyznaczania przybliżonej wartości pochodnej funkcji f w punkcie x. Czy stosowanie drugiego wzoru coś zmienia? Jak to wytłumaczyć?

(–) Paweł Woźny

– Czyli, że zasadniczo Pan się musi na tym rozeznać całkowicie żeby wiedzieć ile i gdzie...

– Dotychczas tak było, ale teraz mamy komputer. Może Pan pisać co tylko Pan chce to nie ma żadnego znaczenia.

– Komputer?

– Eeee, on się i tak zawsze pomyli przy dodawaniu, proszę pana. Nie było miesiąca, żeby się nie pomylił.

– Czyli, że teraz nie trzeba się tak znać na robocie?

– A teraz już nie. Teraz jest dużo łatwiej, jest proszę pana.

Miś, reż. S. Bareja, 1980.