

Lista nr 2 z matematyki dyskretnej

1. (D) Dla $k \geq 1$ wykaż tożsamość absorbcyjną:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}.$$

Czy potrafisz udowodnić ją kombinatorycznie?

2. Podaj interpretację następującej tożsamości w terminach zbiorów:

$$\binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \binom{n-k}{n-k-m}.$$

3. Wykaż prawdziwość tożsamości Cauchy'ego:

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{i=0}^r \binom{m}{i} \binom{n}{r-i}.$$

Czy potrafisz udowodnić ją kombinatorycznie?

4. (D) Udowodnij przez indukcję, że dla każdego naturalnego n zachodzi:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

5. (D) Pokaż, że liczba przedstawień liczby naturalnej n w postaci sumy k liczb naturalnych (różnych od zera) wynosi $\binom{n-1}{k-1}$, jeśli przedstawienia różniące się kolejnością składników uważamy za różne. Ile jest przedstawień liczby n w postaci sumy dowolnej ilości liczb naturalnych?

6. (2p) (D) Oblicz liczbę funkcji niemalejących postaci
 $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$.

7. (2p) Udowodnij, że $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ równa się liczbie dróg, po których wieża może przejść z lewego dolnego rogu do prawego górnego rogu szachownicy $(n+1) \times (n+1)$ poruszając się wyłącznie do góry lub na prawo.

Czy potrafisz zwinąć tę sumę?

8. Dwoje dzieci zebrało 10 rumianków, 16 bławatków i 14 niezapominajek.
Na ile sposobów mogą się podzielić kwiatkami?
9. (D) Ile jest podzbiorów zbioru n kolejnych liczb naturalnych, w których nie występują dwie kolejne liczby?

Katarzyna Paluch