

## Lista nr 7 z matematyki dyskretnej

1. (D) Ile jest wyrazów złożonych z  $n$  liter należących do 25-literowego alfabetu łacińskiego, zawierających parzystą liczbę liter  $a$ ?
2. (D) Znajdź ogólną postać rozwiązań następujących równań rekurencyjnych za pomocą anihilatorów i rozwiąż jedno z równań do końca:
  - (a)  $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3^n - 1$ , gdy  $a_0 = a_1 = 0$ .
  - (b)  $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n2^{n+1}$ , gdy  $a_0 = a_1 = 1$ .
  - (c)  $a_{n+2} = 2^{n+1} - a_{n+1} - a_n$ , gdy  $a_0 = a_1 = 1$ .
3. Niech  $c_n$  oznacza liczbę ciągów długości  $n$  złożonych z  $n$  cyfr ze zbioru  $\{0, 1, 2\}$ , nie zawierających dwóch następujących po sobie zer i dwóch następujących po sobie jedynek. Wyprowadź zależność rekurencyjną, jaką spełniają liczby  $c_n$  przyjmując  $c_0 = 1$ . Rozwiąż otrzymaną zależność rekurencyjną.
4. Na ile sposobów można rozdać  $n$  różnych nagród wśród czterech osób A, B, C, D tak, aby:
  - (a) A dostała przynajmniej jedną nagrodę?
  - (b) A lub B nie dostała nic?
  - (c) Zarówno A jak i B dostała przynajmniej jedną nagrodę?
  - (d) Przynajmniej jedna spośród A, B, C nic nie dostała?
  - (e) Każda z 4 osób coś dostała?
5. (D) Podaj postać funkcji tworzącej dla liczby podziałów liczby naturalnej  $n$  (czyli rozkładów liczby  $n$  na sumę składników naturalnych, gdy rozkładów różniących się kolejnością nie uważamy za różne):
  - (a) na dowolne składniki,
  - (b) na różne składniki nieparzyste,
  - (c) na składniki mniejsze od  $m$ ,
  - (d) na różne potęgi liczby 2.

6. Niech  $A(x)$  będzie funkcją tworzącą ciąg  $a_n$ . Znajdź funkcję tworzącą ciąg  $b_n$  postaci  $(a_0, 0, 0, a_3, 0, 0, a_6, \dots)$ , czyli takiego, że dla każdego naturalnego  $k$ ,  $b_{3k} = a_{3k}$  oraz  $b_{3k+1} = b_{3k+2} = 0$ .

*Wskazówka:* Spróbuj użyć zespolonych pierwiastków stopnia 3 z 1. W podobnym zadaniu na poprzedniej liście używaliśmy dwóch pierwiastków z 1 drugiego stopnia: 1 i  $-1$ , żeby otrzymać funkcję tworzącą ciąg  $(a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, \dots)$ .

*Katarzyna Paluch*