Uniwersytet
Wrocławski

Analiza numeryczna (L). Wykład I.

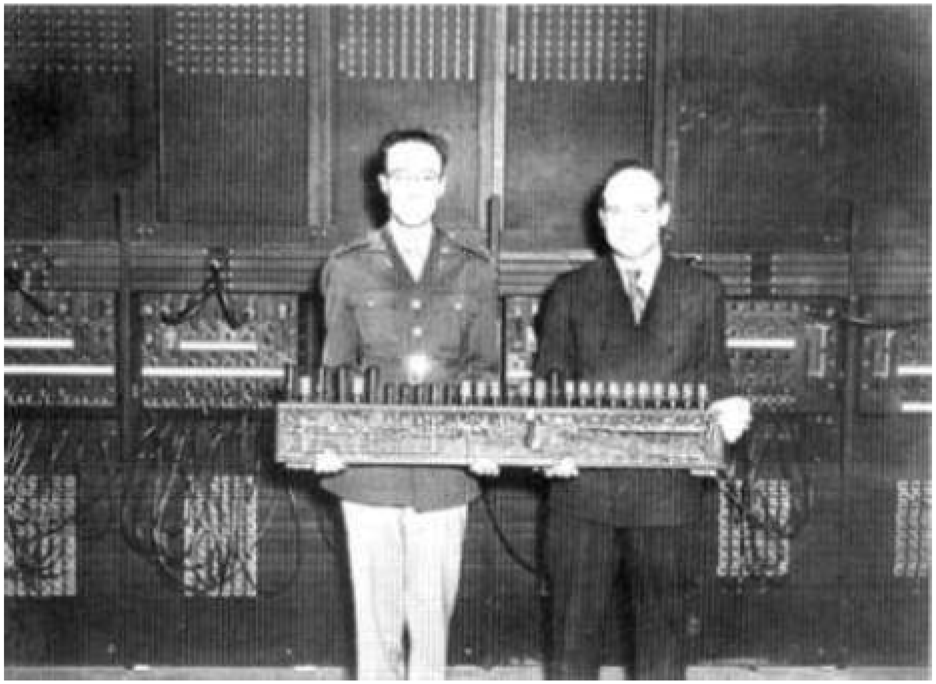
DZIWNE RZECZY!

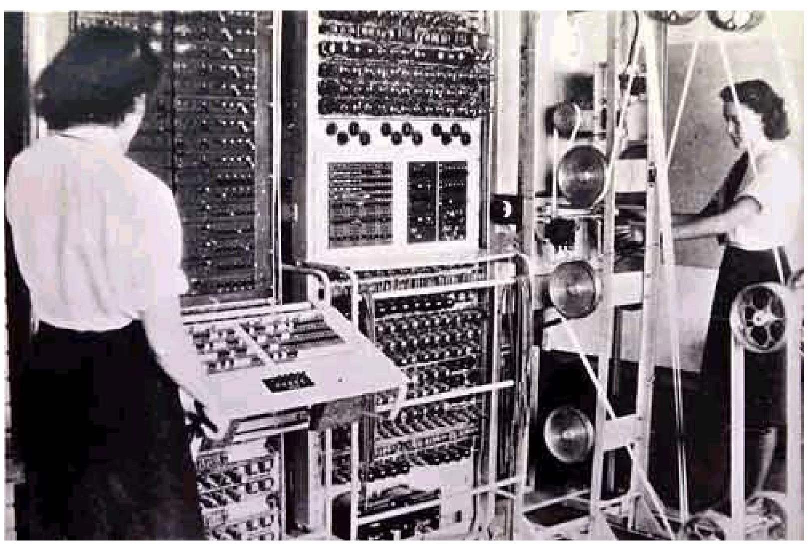
Paweł Woźny

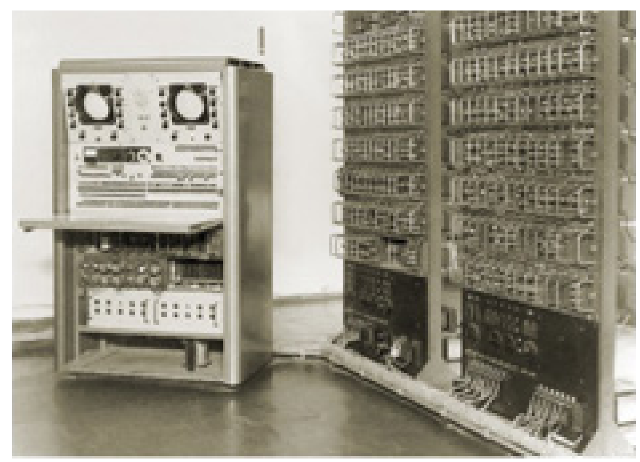
Wrocław, 3 października 2017 r.

Wstęp, czyli trochę historii. . .

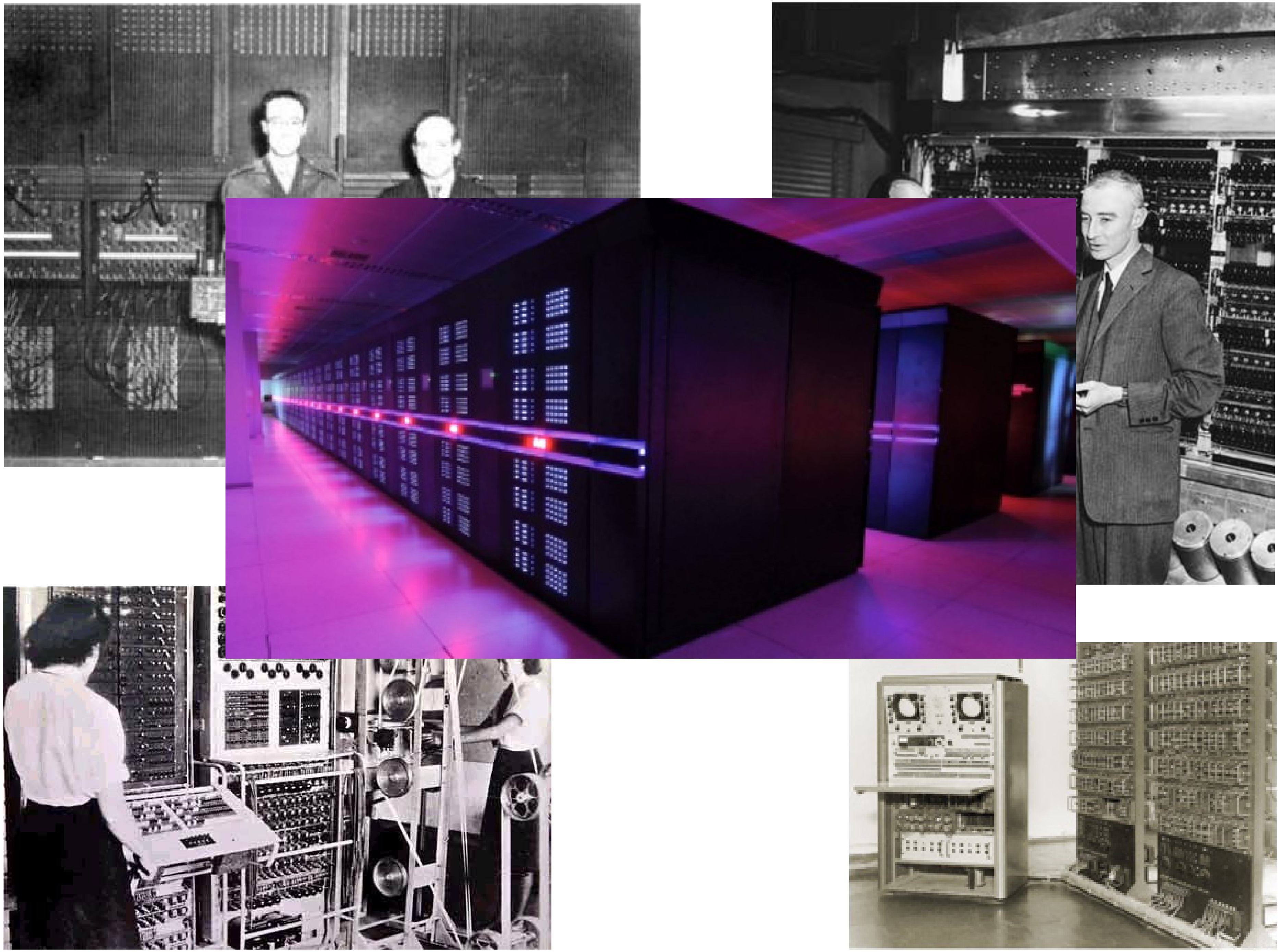
Wstęp, czyli trochę historii. . .







Wstęp, czyli trochę historii. . .



Początki informatyki w Polsce: wybrane wydarzenia

1948 Grupa Aparatów Matematycznych, Państwowy Instytut Matematyczny, Warszawa

Początki informatyki w Polsce: wybrane wydarzenia

1948 Grupa Aparatów Matematycznych, Państwowy Instytut Matematyczny, Warszawa

1958 Pierwszy Polski komputer XYZ

Początki informatyki w Polsce: wybrane wydarzenia

1948 Grupa Aparatów Matematycznych, Państwowy Instytut Matematyczny, Warszawa

1958 Pierwszy Polski komputer XYZ

1959 Wrocławskie Zakłady Elektroniczne Elwro

Początki informatyki w Polsce: wybrane wydarzenia

1948 Grupa Aparatów Matematycznych, Państwowy Instytut Matematyczny, Warszawa

1958 Pierwszy Polski komputer XYZ

1959 Wrocławskie Zakłady Elektroniczne Elwro

1961 Seryjna produkcja ZAM 2

Odra 1001 (Elwro)

Początki informatyki w Polsce: wybrane wydarzenia

1948 Grupa Aparatów Matematycznych, Państwowy Instytut Matematyczny, Warszawa

1958 Pierwszy Polski komputer XYZ

1959 Wrocławskie Zakłady Elektroniczne Elwro

1961 Seryjna produkcja ZAM 2

Odra 1001 (Elwro)

1962 Katedra Metod Numerycznych, Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski (komputer Elliott 803; kierownik: Stefan Paszkowski)

Specjalność maszyny matematyczne, Wydział Łączności Politechniki Wrocławskiej

Początki informatyki w Polsce: wybrane wydarzenia

1948 Grupa Aparatów Matematycznych, Państwowy Instytut Matematyczny, Warszawa

1958 Pierwszy Polski komputer XYZ

1959 Wrocławskie Zakłady Elektroniczne Elwro

1961 Seryjna produkcja ZAM 2

Odra 1001 (Elwro)

1962 Katedra Metod Numerycznych, Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski (komputer Elliott 803; kierownik: Stefan Paszkowski)

Specjalność maszyny matematyczne, Wydział Łączności Politechniki Wrocławskiej

1963 Katedra Budowy Maszyn Matematycznych, Politechnika Warszawska

Katedra Konstrukcji Maszyn Cyfrowych, Politechnika Wrocławska

Odra 1003

Początki informatyki w Polsce: wybrane wydarzenia

1948 Grupa Aparatów Matematycznych, Państwowy Instytut Matematyczny, Warszawa

1958 Pierwszy Polski komputer XYZ

1959 Wrocławskie Zakłady Elektroniczne Elwro

1961 Seryjna produkcja ZAM 2
Odra 1001 (Elwro)

1962 Katedra Metod Numerycznych, Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski (komputer Elliott 803; kierownik: Stefan Paszkowski)
Specjalność maszyny matematyczne, Wydział Łączności Politechniki Wrocławskiej

1963 Katedra Budowy Maszyn Matematycznych, Politechnika Warszawska
Katedra Konstrukcji Maszyn Cyfrowych, Politechnika Wrocławska
Odra 1003

1964 Zakład Obliczeń Numerycznych, Uniwersytet Warszawski

Początki informatyki w Polsce: wybrane wydarzenia

1948 Grupa Aparatów Matematycznych, Państwowy Instytut Matematyczny, Warszawa

1958 Pierwszy Polski komputer XYZ

1959 Wrocławskie Zakłady Elektroniczne Elwro

1961 Seryjna produkcja ZAM 2

Odra 1001 (Elwro)

1962 Katedra Metod Numerycznych, Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski (komputer Elliott 803; kierownik: Stefan Paszkowski)

Specjalność maszyny matematyczne, Wydział Łączności Politechniki Wrocławskiej

1963 Katedra Budowy Maszyn Matematycznych, Politechnika Warszawska

Katedra Konstrukcji Maszyn Cyfrowych, Politechnika Wrocławska

Odra 1003

1964 Zakład Obliczeń Numerycznych, Uniwersytet Warszawski

1967 Seryjna produkcja Odry 1204 (Elwro)

Początki informatyki w Polsce: wybrane wydarzenia

1948 Grupa Aparatów Matematycznych, Państwowy Instytut Matematyczny, Warszawa

1958 Pierwszy Polski komputer XYZ

1959 Wrocławskie Zakłady Elektroniczne Elwro

1961 Seryjna produkcja ZAM 2
Odra 1001 (Elwro)

1962 Katedra Metod Numerycznych, Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski (komputer Elliott 803; kierownik: Stefan Paszkowski)
Specjalność maszyny matematyczne, Wydział Łączności Politechniki Wrocławskiej

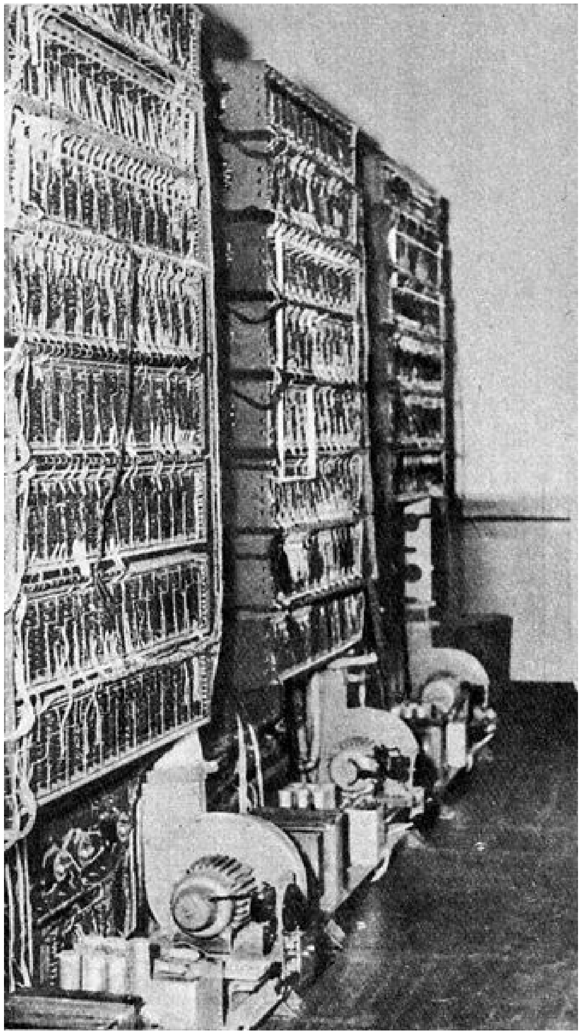
1963 Katedra Budowy Maszyn Matematycznych, Politechnika Warszawska
Katedra Konstrukcji Maszyn Cyfrowych, Politechnika Wrocławska
Odra 1003

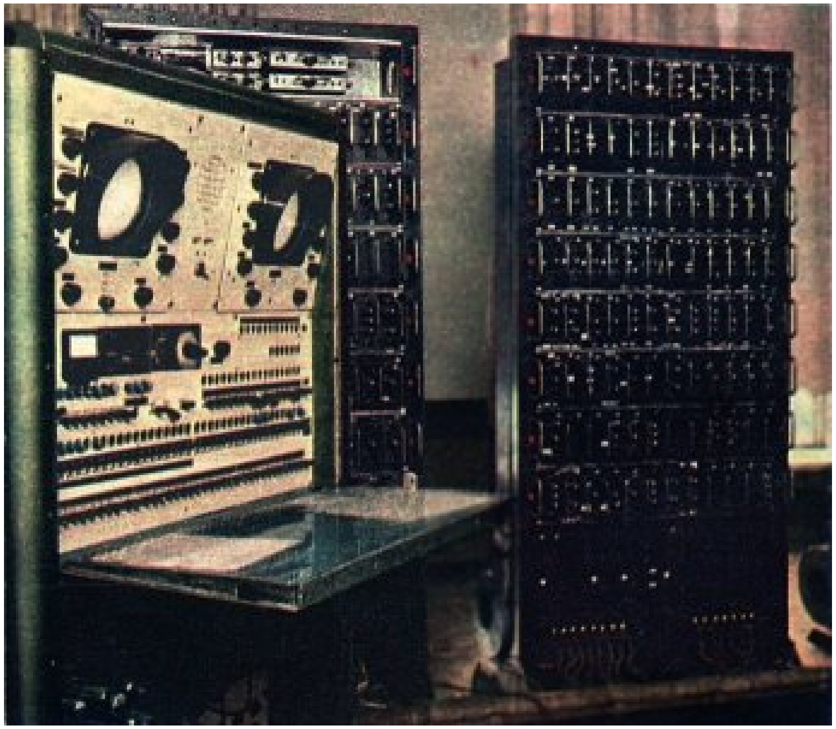
1964 Zakład Obliczeń Numerycznych, Uniwersytet Warszawski

1967 Seryjna produkcja Odry 1204 (Elwro)

1975 Utworzenie Instytutów Informatyki na Uniwersytecie Warszawskim, Uniwersytecie Wrocławskim i Politechnice Warszawskiej

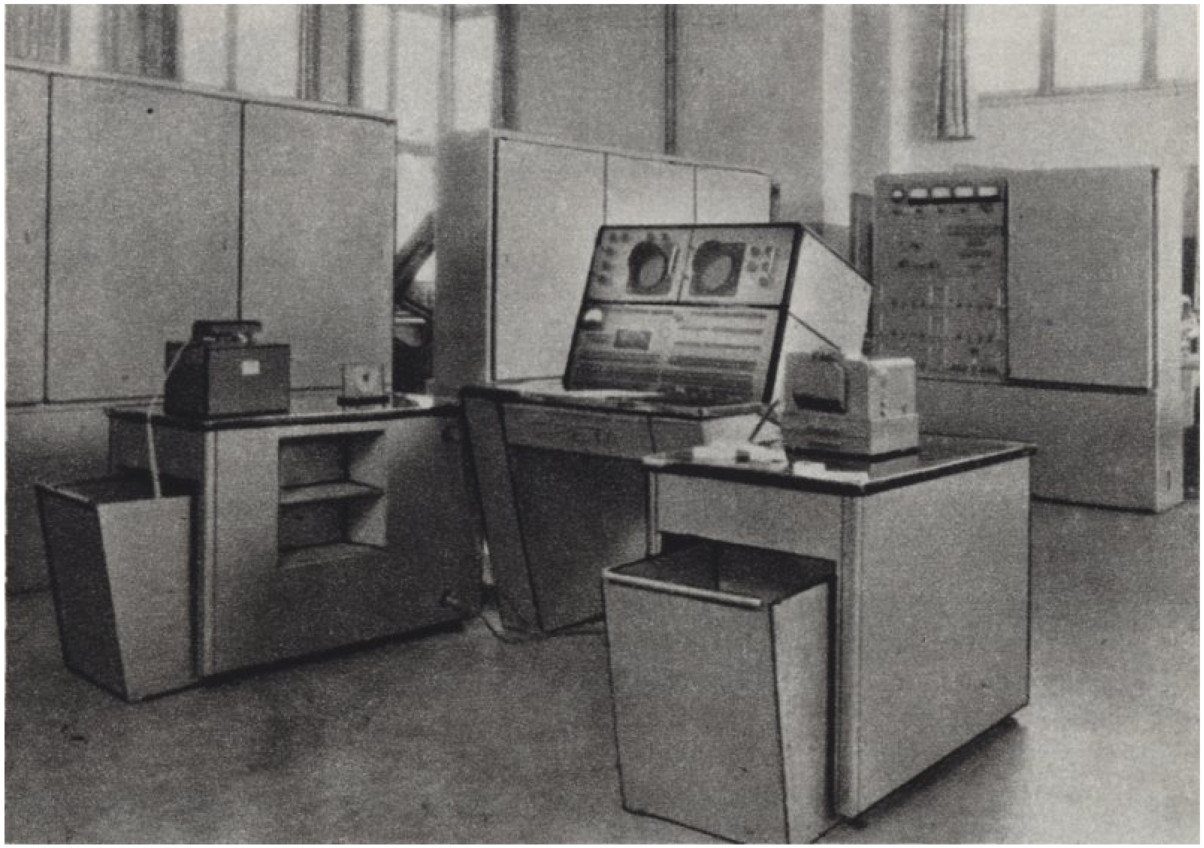
Komputery w Polsce – początki





1958: Pierwszy Polski komputer XYZ

Komputery w Polsce – początki



1961: Seryjna produkcja ZAM 2

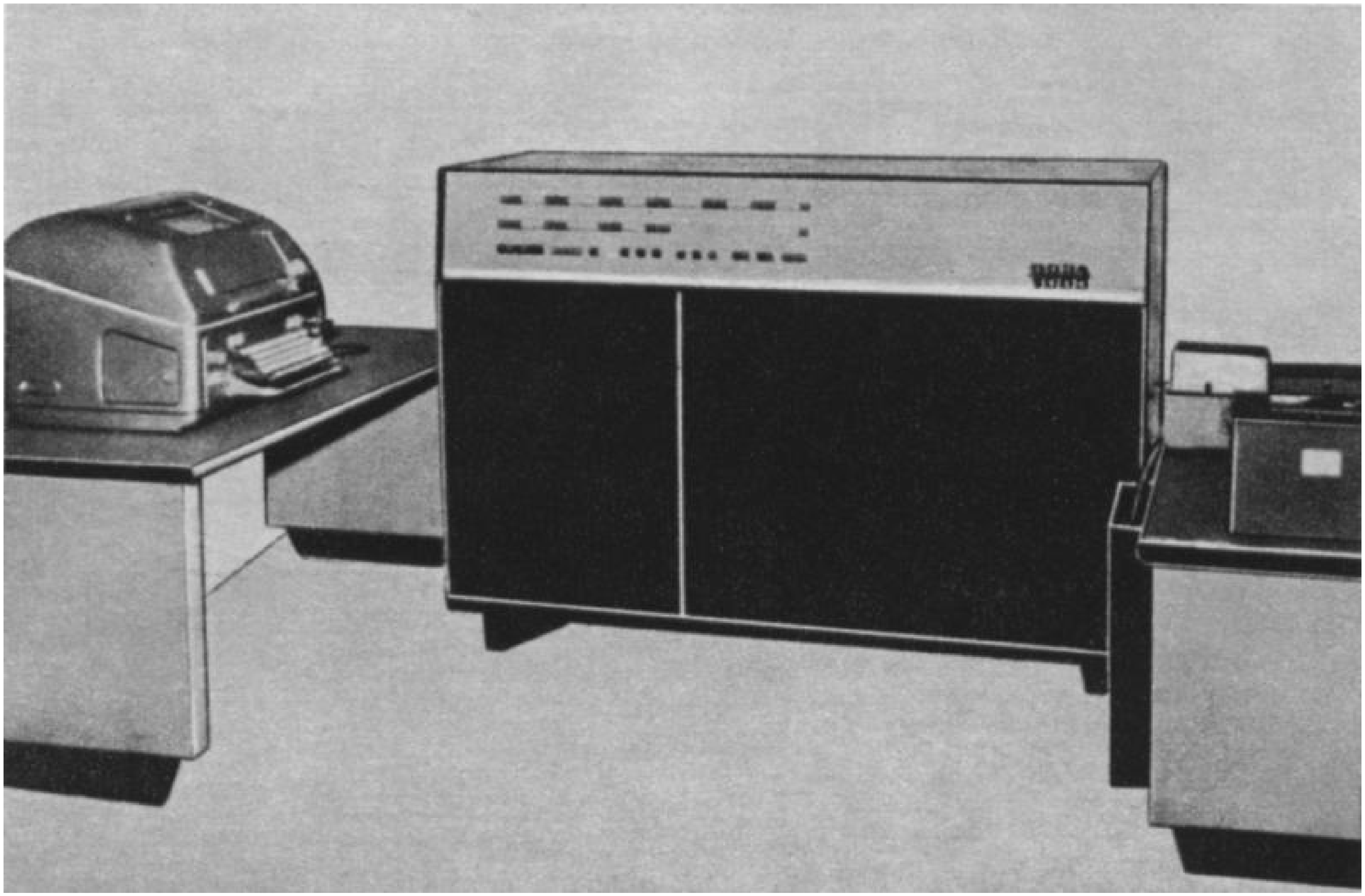
Komputery w Polsce – początki

1962: Komputer Elliott 803 (KMN, IM, UWr)

Komputery w Polsce – początki

1962: Komputer Elliott 803 (KMN, IM, UWr)

Komputery w Polsce – początki



1962: Komputer Odra 1003 (Elwro)

Komputery w Polsce – początki

1967: Seryjna produkcja Odry 1204 (Elwro)

Informatyka w Polsce

- Jan Madey, Maciej M. Sysło, *Początki informatyki w Polsce*, Informatyka, numery 9, 10, rok 2000.
- http://pl.wikipedia.org/wiki/Historia_informatyki_w_Polsce

Przykład 1. Co się do licha dzieje. . .

- Przeanalizujmy następujący program:

```
x:=1.0:

  while 1<>1+x
    do
      x:=x/2.0
    od:
```

Przykład 1. Co się do licha dzieje. . .

- Przeanalizujmy następujący program:

```
x:=1.0:

  while 1<>1+x
    do
      x:=x/2.0
    od:

print(x); print(1+x);

  if x<>0 then print("TAK!!!") fi;

  if 1=1+x then print("TAK!!!") fi;
```

Przykład 1. Co się do licha dzieje. . .

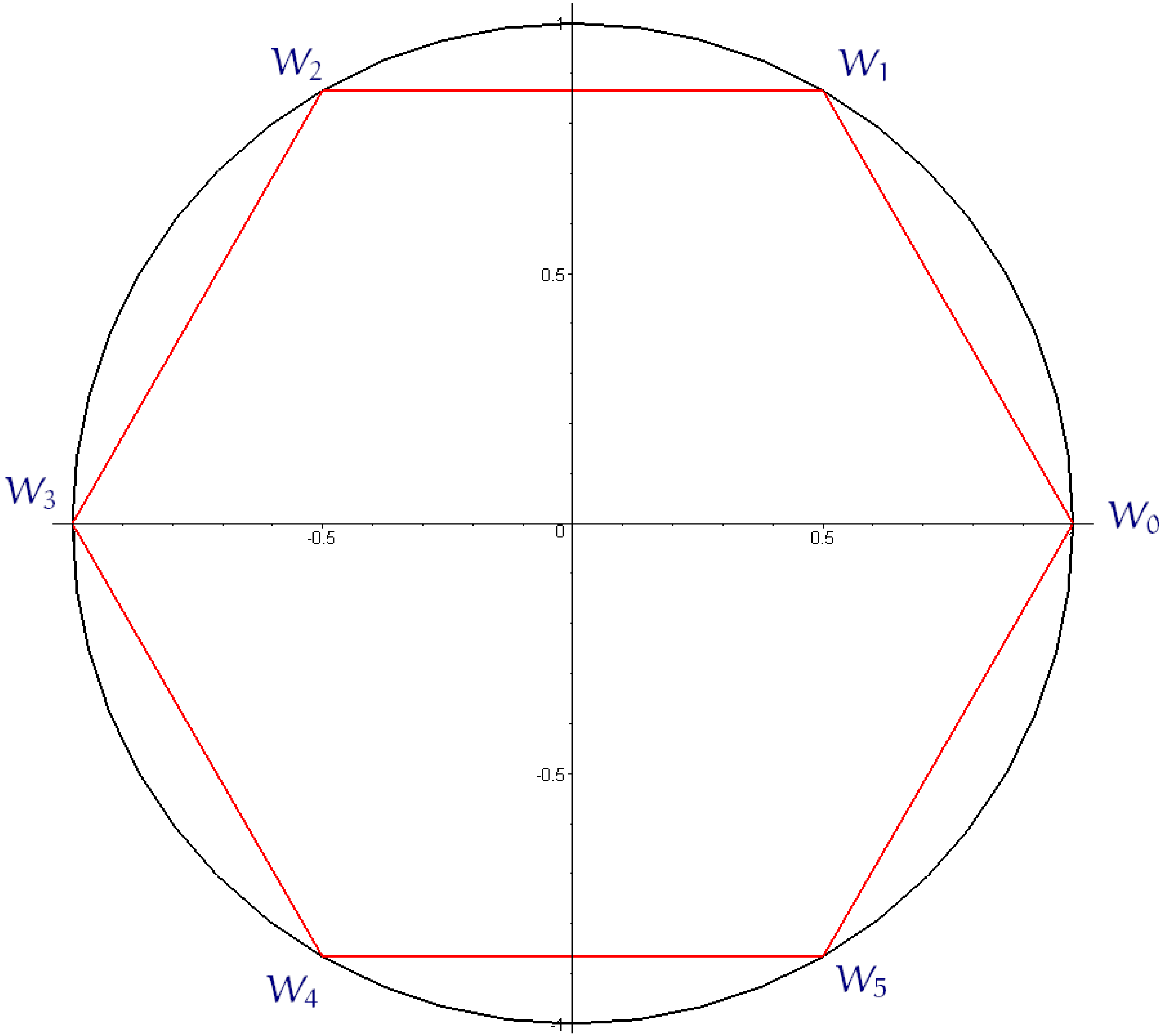
- Przeanalizujmy następujący program:

```
x:=1.0:

  while 1<>1+x
    do
      x:=x/2.0
    od:

print(x); print(1+x);

  if x<>0 then print("TAK!!!") fi;

  if 1=1+x then print("TAK!!!") fi;
```

Wniosek. W komputerze istnieje przynajmniej jedna taka liczba $x \neq 0$, dla której

$$1 + x = 1.$$

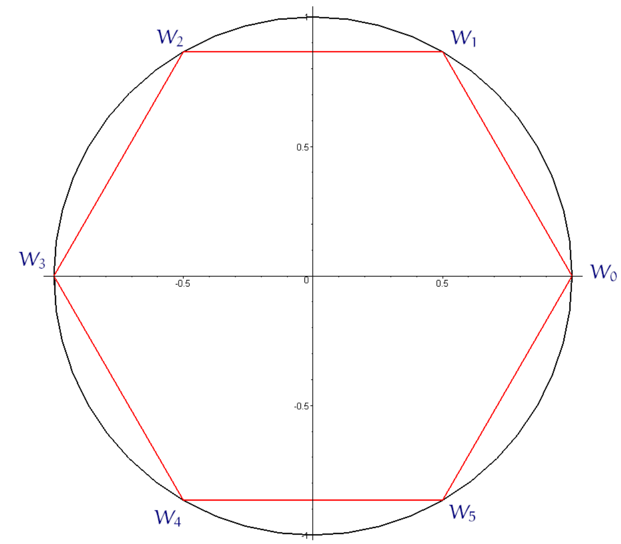
Przykład 2. Wielokąty foremne



Przykład 2. Wielokąty foremne

- Można wykazać, że wierzchołki $W_0, W_1, \ldots, W_{N-1}$ N-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu $r = 1$, gdzie $W_0 = (1, 0)$, mają współrzędne

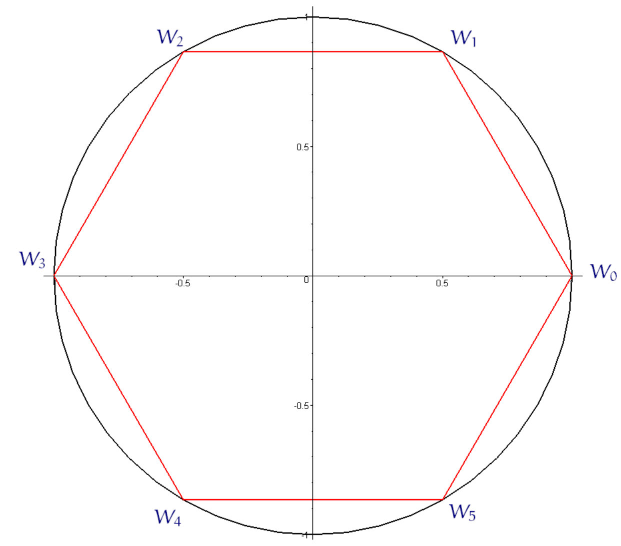
$$W_i = \left(\cos\left(2\pi\frac{i}{N}\right), \sin\left(2\pi\frac{i}{N}\right)\right).$$



Przykład 2. Wielokąty foremne

- Można wykazać, że wierzchołki $W_0, W_1, \ldots, W_{N-1}$ N-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu $r = 1$, gdzie $W_0 = (1, 0)$, mają współrzędne

$$W_i = \left(\cos\left(2\pi\frac{i}{N}\right), \sin\left(2\pi\frac{i}{N}\right)\right).$$



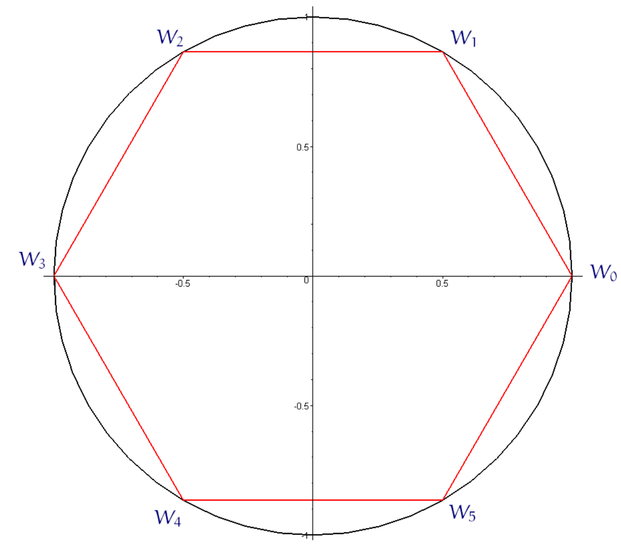
- Program:

```
kat:=0.0: krok:=2*Pi/N:

W[0]:=[1.0,0.0]:

  for i from 1 to N-1
    do
      kat:=kat+krok;
      W[i]:=[cos(kat),sin(kat)]
    od:
```

Przykład 2. Wielokąty foremne

- Można wykazać, że wierzchołki $W_0, W_1, \ldots, W_{N-1}$ N-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu $r = 1$, gdzie $W_0 = (1, 0)$, mają współrzędne

$$W_i = \left(\cos\left(2\pi\frac{i}{N}\right), \sin\left(2\pi\frac{i}{N}\right)\right).$$



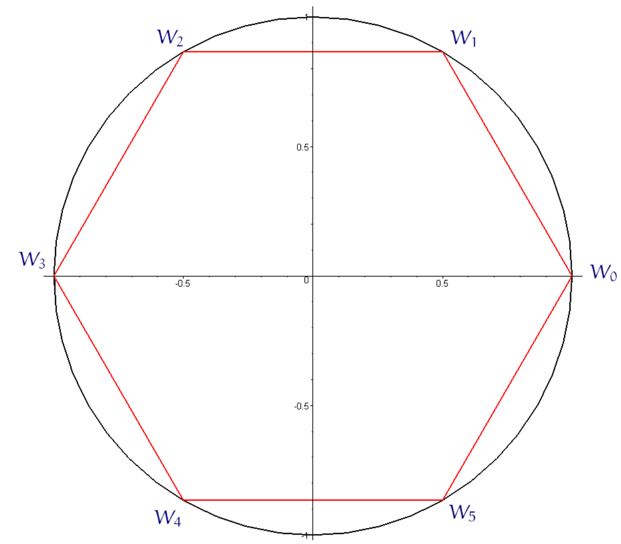
- Program:

```
kat:=0.0: krok:=2*Pi/N:

W[0]:=[1.0,0.0]:

  for i from 1 to N
    do
      kat:=kat+krok;
      W[i]:=[cos(kat),sin(kat)]
    od:
```

Przykład 2. Wielokąty foremne

- Można wykazać, że wierzchołki $W_0, W_1, \ldots, W_{N-1}$ N-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu $r = 1$, gdzie $W_0 = (1, 0)$, mają współrzędne

$$W_i = \left(\cos\left(2\pi\frac{i}{N}\right), \sin\left(2\pi\frac{i}{N}\right)\right).$$



- Program:

```
kat:=0.0: krok:=2*Pi/N:

W[0]:=[1.0,0.0]:

  for i from 1 to M*N
    do
      kat:=kat+krok;
      W[i]:=[cos(kat),sin(kat)]
    od:
```

Przykład 3. Obliczanie pochodnej

- Jak wiadomo

$$f'(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Przykład 3. Obliczanie pochodnej

- Jak wiadomo

$$f'(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

- Oznacza to, że

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

dla małych h.

Przykład 3. Obliczanie pochodnej

- Jak wiadomo

$$f'(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

- Oznacza to, że

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

  dla małych h.

- Wykorzystamy powyższą obserwację do numerycznego wyznaczania pochodnej funkcji e^{2x}. Przyjmijmy

$$f(x) := e^{2x}, \qquad x := 0.5, \qquad h \equiv h_i := 2^{-i} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Przykład 4. Związki rekurencyjne

- Rozważmy następujący związek rekurencyjny:

$$x_0 := \frac{1}{3}, \qquad x_1 := -\frac{1}{9}, \qquad x_{n+2} = \frac{8}{3}x_{n+1} + x_n \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Przykład 4. Związki rekurencyjne

- Rozważmy następujący związek rekurencyjny:

$$x_0 := \frac{1}{3}, \qquad x_1 := -\frac{1}{9}, \qquad x_{n+2} = \frac{8}{3}x_{n+1} + x_n \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

- Oczywiście

$$x_2 = \frac{1}{27}, \qquad x_3 = -\frac{1}{81}, \qquad x_4 = \frac{1}{243}, \qquad x_5 = -\frac{1}{729}, \qquad \text{itd.}$$

Przykład 4. Związki rekurencyjne

- Rozważmy następujący związek rekurencyjny:

$$x_0 := \frac{1}{3}, \qquad x_1 := -\frac{1}{9}, \qquad x_{n+2} = \frac{8}{3}x_{n+1} + x_n \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

- Można sprawdzić, że jedynym rozwiązaniem jest

$$x_n = \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}.$$

Przykład 4. Związki rekurencyjne

- Rozważmy następujący związek rekurencyjny:

$$x_0 := \frac{1}{3}, \qquad x_1 := -\frac{1}{9}, \qquad x_{n+2} = \frac{8}{3}x_{n+1} + x_n \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

- Można sprawdzić, że jedynym rozwiązaniem jest

$$x_n = \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}.$$

- Program:

```
x[0]:=1.0/3.0;    x[1]:=-1.0/9.0;

   for n from 2 to N
     do
       x[n]:=8.0*x[n-1]/3.0+x[n-2]
     od
```

Przykład 5. Perfidny wielomian

- Zajmijmy się teraz wielomianem $f(x) := (x-1)^8$.

Przykład 5. Perfidny wielomian

- Zajmijmy się teraz wielomianem $f(x) := (x-1)^8$.
- Jak łatwo sprawdzić dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$f(x) = f_2(x) = f_3(x),$$

gdzie

$$f_2(x) := x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 70x^4 - 56x^3 + 28x^2 - 8x + 1,$$
$$f_3(x) := (((((((x-8)x+28)x-56)x+70)x-56)x+28)x-8)x+1.$$

Przykład 5. Perfidny wielomian

- Zajmijmy się teraz wielomianem $f(x) := (x-1)^8$.
- Jak łatwo sprawdzić dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$f(x) = f_2(x) = f_3(x),$$

gdzie

$$f_2(x) := x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 70x^4 - 56x^3 + 28x^2 - 8x + 1,$$
$$f_3(x) := (((((((x-8)x+28)x-56)x+70)x-56)x+28)x-8)x+1.$$

- Wykorzystamy komputer do obliczenia wartości wielomianów f, f_2 i f_3 w 501 równoodległych punktach przedziału $[0.99, 1.01]$. Wyznaczymy więc liczby $f(x_i)$, $f_2(x_i)$ oraz $f_3(x_i)$ dla

$$x_i := 0.99 + \frac{0.02i}{500} \qquad (i = 0, 1, \ldots, 500).$$

Przykład 6. Równanie kwadratowe

- Rozważmy równanie kwadratowe postaci

$$w(x) = 0, \qquad \text{gdzie} \qquad w(x) := ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0). \tag{1}$$

Przykład 6. Równanie kwadratowe

- Rozważmy równanie kwadratowe postaci

$$w(x) = 0, \qquad \text{gdzie} \qquad w(x) := ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0). \tag{1}$$

- Załóżmy, że $\Delta := b^2 - 4ac > 0$. Wiadomo, że wtedy rozwiązaniami równania (1) są liczby

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Przykład 6. Równanie kwadratowe

- Rozważmy równanie kwadratowe postaci

$$w(x) = 0, \qquad \text{gdzie} \qquad w(x) := ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0). \tag{1}$$

- Załóżmy, że $\Delta := b^2 - 4ac > 0$. Wiadomo, że wtedy rozwiązaniami równania (1) są liczby

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

- Program:

```
x[1]:=(-b+sqrt(b*b-4*a*c))/(2*a);

x[2]:=(-b-sqrt(b*b-4*a*c))/(2*a);
```

Przykład 6. Równanie kwadratowe

- Rozważmy równanie kwadratowe postaci

$$w(x) = 0, \qquad \text{gdzie} \qquad w(x) := ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0). \tag{1}$$

- Załóżmy, że $\Delta := b^2 - 4ac > 0$. Wiadomo, że wtedy rozwiązaniami równania (1) są liczby

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

- Program:

```
x[1]:=(-b+sqrt(b*b-4*a*c))/(2*a);

x[2]:=(-b-sqrt(b*b-4*a*c))/(2*a);
```

- Przeprowadzimy testy dla następujących danych:

1. $a := 1.0, \quad b := 10^9, \quad c := 1.0.$ **2.** $a := 1.0, \quad b := 10^{10}, \quad c := 1.0.$

Przykład 7. Prawo łączności

- Już w szkole podstawowej mówiono nam, że dodawanie jest działaniem przemiennym i łącznym,

$$a+b = b+a, \qquad a+(b+c) = (a+b)+c \qquad (a, b, c \in \mathbb{R}).$$

Przykład 7. Prawo łączności

- Już w szkole podstawowej mówiono nam, że dodawanie jest działaniem przemiennym i łącznym,

$$a+b = b+a, \qquad a+(b+c) = (a+b)+c \qquad (a, b, c \in \mathbb{R}).$$

- Obliczymy zatem wartość sumy

$$S_N := \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)}$$

przy pomocy następujących programów:

```
s:=0.0:

  for k from 1 to N
    do
      s:=s+1/(k*(k+1))
    od:
```

```
s2:=0.0:

  for k from N by -1 to 1
    do
      s2:=s2+1/(k*(k+1))
    od:
```

Przykład 8. Czy bankowcy mogą przypadkiem oszukać?

- Kapitalizacja odsetek:

$$W_n = W_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

- Oznaczenia:

W_0	– wkład początkowy;	n	– tyle razy naliczamy odsetki w ciągu roku;
r	– oprocentowanie;	W_n	– stan konta po roku oszczędzania

Przykład 8. Czy bankowcy mogą przypadkiem oszukać?

- Kapitalizacja odsetek:

$$W_n = W_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

- Oznaczenia:

W_0 – wkład początkowy; n – tyle razy naliczamy odsetki w ciągu roku;

r – oprocentowanie; W_n – stan konta po roku oszczędzania

- Obserwacje:

1. Jeśli $r > 0$, to $W_n > W_0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Przykład 8. Czy bankowcy mogą przypadkiem oszukać?

- Kapitalizacja odsetek:

$$W_n = W_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

- Oznaczenia:

W_0	– wkład początkowy;	n	– tyle razy naliczamy odsetki w ciągu roku;
r	– oprocentowanie;	W_n	– stan konta po roku oszczędzania

- Obserwacje:

1. Jeśli $r > 0$, to $W_n > W_0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

2. Im częściej naliczamy odsetki $(r > 0)$, tym więcej zarabiamy, tzn.

$$W_{n+1} > W_n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Przykład 8. Czy bankowcy mogą przypadkiem oszukać?

- Kapitalizacja odsetek:

$$W_n = W_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

- Oznaczenia:

W_0 – wkład początkowy; n – tyle razy naliczamy odsetki w ciągu roku;

r – oprocentowanie; W_n – stan konta po roku oszczędzania

- Program:

```
w:=1.0

   for i from 1 to n
     do
       w:=w*(1+r/n)
     od:

W[n]:=W[0]*w
```

Wzór i szereg Taylora

- Jeśli $f \in C^n[a,b]$ i jeśli $f^{(n+1)}$ istnieje w przedziale otwartym (a,b), to dla dowolnych punktów c i x z przedziału domkniętego $[a,b]$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + E_n(x),$$

gdzie dla pewnego punktu ξ leżącego między c i x

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{k!}(x-c)^{n+1}.$$

Wzór i szereg Taylora

- Jeśli $f \in C^n[a, b]$ i jeśli $f^{(n+1)}$ istnieje w przedziale otwartym (a, b), to dla dowolnych punktów c i x z przedziału domkniętego $[a, b]$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + E_n(x),$$

gdzie dla pewnego punktu ξ leżącego między c i x

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{k!}(x-c)^{n+1}.$$

- Przy pewnych założeniach dotyczących funkcji f (jakich?) zachodzi wzór

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k.$$

Wzór i szereg Taylora

- Jeśli $f \in C^n[a, b]$ i jeśli $f^{(n+1)}$ istnieje w przedziale otwartym (a, b), to dla dowolnych punktów c i x z przedziału domkniętego $[a, b]$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + E_n(x),$$

gdzie dla pewnego punktu ξ leżącego między c i x

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{k!}(x-c)^{n+1}.$$

- Przy pewnych założeniach dotyczących funkcji f (jakich?) zachodzi wzór

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k.$$

- Przykłady:

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k, \qquad x \in (-1, 1]$$

Wzór i szereg Taylora

- Jeśli $f \in C^n[a,b]$ i jeśli $f^{(n+1)}$ istnieje w przedziale otwartym (a,b), to dla dowolnych punktów c i x z przedziału domkniętego $[a,b]$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + E_n(x),$$

gdzie dla pewnego punktu ξ leżącego między c i x

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{k!}(x-c)^{n+1}.$$

- Przy pewnych założeniach dotyczących funkcji f (jakich?) zachodzi wzór

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k.$$

- Przykłady:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Twierdzenia o szeregu naprzemiennym

- (Kryterium Leibniza) Szereg naprzemienny

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

jest zbieżny, jeśli

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

Twierdzenia o szeregu naprzemiennym

- (Kryterium Leibniza) Szereg naprzemienny

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

jest zbieżny, jeśli

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

- Niech dany będzie zbieżny szereg naprzemienny

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k \qquad (a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots).$$

Zachodzi następujące oszacowanie:

$$|S - S_n| \leq a_{n+1},$$

gdzie

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k.$$