Lista nr 13 z matematyki dyskretnej

1. Udowodnij uogólnienie wzoru Eulera dla grafu planarnego z k składowymi spójności.
2. Wykaż, że graf i jego graf dopełniający nie mogą być jednocześnie grafami planarnymi, jeśli graf G ma co najmniej 11 wierzchołków.
3. Dla jakich wartości k, kostka Q_k jest grafem planarnym? Odpowiedź uzasadnij.
4. Na płaszczyźnie narysowano skończoną liczbę przecinających się prostych (nieskończonych). Wykaż, że utworzone obszary mogą być pomalowane dwoma kolorami tak, że żadne dwa obszary mające wspólny odcinek („dłuższy" od punktu) nie są pomalowane tym samym kolorem.
5. Niech G będzie spójnym grafem planarnym o n wierzchołkach ($n \geq 3$) i niech t_i oznacza liczbę wierzchołków stopnia i w grafie G, dla $i \geq 0$.
   (a) Wykaż nierówność: $\sum_{i \in N}(6-i)t_i \geq 12$.
   (b) Wywnioskuj stąd, że graf G ma co najmniej trzy wierzchołki o stopniach 5 lub mniej.
6. Ile jest nieidentycznych digrafów o wierzchołkach $1, 2, \ldots, n$, w których nie ma petli ani krawędzi równoległych i stopnie wchodzący i wychodzący każdego wierzchołka wynosi 1?
7. Mamy $2n$ uczniów, z których każdy ma przynajmniej n przyjaciół. Pokaż, że można ich usadzić w n ławkach tak, by każdy z nich siedział z przyjacielem. Pokaż też, że jeśli $n > 1$, to może być to zrobione na co najmniej dwa sposoby.
8. Naszym zadaniem jest zorganizowanie turnieju szachowego między n zawodnikami. W ciągu ilu najmniej dni można zorganizować ten turniej, jeśli każda para zawodników musi rozegrać partię i żaden zawodnik nie może grać dwukrotnie w ciągu jednego dnia? Odpowiedź uzasadnij pokazując jak uzyskać optymalne rozłożenie.
9. Podaj przykład grafu pokazujący, że założenie $deg(v) \geq n/2$ w twierdzeniu Diraca nie może być zastąpione słabszym założeniem $deg(v) \geq (n-1)/2$.