

Lista nr 3 z matematyki dyskretnej

1. Wykaż, że wśród $n + 1$ różnych liczb naturalnych wybranych spośród $2n$ kolejnych liczb naturalnych (począwszy od 1) istnieje przynajmniej jedna para liczb, z których jedna dzieli drugą.
2. Na kartce w kratkę zaznaczono 5 punktów kratowych (czyli punktów o obu współrzędnych całkowitoliczbowych). Wykaż, że środek odcinka łączącego pewne dwa spośród tych punktów jest także punktem kratowym.
3. Dany jest ciąg liczb naturalnych a_1, a_2, \dots, a_n . Pokaż, że istnieją takie i oraz j , $i \leq j$, że suma $a_i + a_{i+1} + \dots + a_j$ jest podzielna przez n .
4. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba podzielna przez n , której zapis dziesiętny złożony jest tylko z zer i jedynek.
5. Czy po usunięciu z szachownicy 8×8 jednego pola czarnego i jednego białego zawsze można pokryć resztę szachownicy kostkami domina? Jedna kostka ma rozmiar dwóch pól. Usunięte pola nie muszą ze sobą sąsiadować.
6. Czy dla dowolnych naturalnych a, b zachodzi $NWD(a, b) = NWD(a - b, b)$? Odpowiedź uzasadnij.
7. Niech a i b będą dowolnymi liczbami naturalnymi takimi, że $a + b > 0$. Pokaż, że liczby $\frac{a}{NWD(a,b)}$, $\frac{b}{NWD(a,b)}$ są względnie pierwsze.
8. Jak znaleźć $NWW(a, b)$ znając liczby naturalne a, b oraz $NWD(a, b)$?
9. Niech a, b, n będą dodatnimi liczbami naturalnymi. Pokaż, że jeśli $a \perp n$ i $b \perp n$, to $ab \perp n$.
10. Pokaż, że dowolny wspólny dzielnik liczb naturalnych a i b dzieli $NWD(a, b)$.
11. Napisz w wybranym języku programowania rozszerzony algorytm Euklidesa. Oszacuj jego złożoność obliczeniową.
12. Jeśli m i n są parzyste, to $NWD(m, n) = 2NWD(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})$. Korzystając z podobnych zależności dla pozostałych par parzystości liczb m i n , podaj algorytm obliczania $NWD(m, n)$ i oszacuj jego złożoność obliczeniową.

13. Oblicz $NWD(8, 13)$ oraz całkowite liczby x, y takie, że $8x + 13y = NWD(8, 13)$.

14. Udowodnij dla dowolnych liczb całkowitych a, b, c :

(a) $a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c$

(b) $a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid (b + c) \wedge a \mid (b - c)$

Zadania domowe: 5 zadań, z których co najmniej dwa z zadań 1 – 5 i co najmniej dwa z 6 – 12.

Katarzyna Paluch