

Lista nr 2 z matematyki dyskretnej

1. Wykaż prawdziwość tożsamości Cauchy'ego:

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{i=0}^r \binom{m}{i} \binom{n}{r-i}.$$

Czy potrafisz udowodnić ją kombinatorycznie?

2. (D) Udowodnij przez indukcję, że dla każdego naturalnego n zachodzi:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

3. (D) Oblicz liczbę funkcji niemalejących postaci
 $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$.
4. (D) Udowodnij, że $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ równa się liczbie dróg, po których wieża może przejść z lewego dolnego rogu do prawego górnego rogu szachownicy $(n+1) \times (n+1)$ poruszając się wyłącznie do góry lub na prawo.
Czy potrafisz zwinąć tę sumę?
5. Dwoje dzieci zebrało 10 rumianków, 16 bławatków i 14 niezapominajek.
Na ile sposobów mogą się podzielić kwiatkami?
6. Ile jest podzbiorów zbioru n kolejnych liczb naturalnych, w których nie występują dwie kolejne liczby?
7. (D) Niech Z będzie dowolnym skończonym zbiorem. Zbuduj bijekcję między zbiorami jego podzbiorów parzystych i nieparzystych. (Podzbiór jest parzysty, jeśli ma parzystą moc.)
8. Podaj warunek konieczny i dostateczny na to, aby $\lfloor nx \rfloor = n \lfloor x \rfloor$, gdzie n jest liczbą naturalną.
Podpowiedź: Warunek powinien zawierać funkcję część ułamkowa $\{x\}$.
9. Podaj w terminach funkcji podłoga i sufit oraz udowodnij, ile liczb całkowitych znajduje się w przedziałach $[a, b)$ oraz $(a, b]$, gdzie a i b są dwoma dowolnymi liczbami.

10. Niech n będzie liczbą całkowitą. Ile rozwiązań ma równanie $\lfloor nx \rfloor + 3x = 5$?
11. (D) Pokaż, że $\lceil \sqrt{\lceil x \rceil} \rceil = \lceil \sqrt{x} \rceil$ dla dowolnego nieujemnego rzeczywistego x . Czy zachodzi analogiczna zależność dla podłogi?

Katarzyna Paluch