Lista nr 11 z matematyki dyskretnej

1. (D) Topologiczne porządkowanie wierzchołków acyklicznego digrafu. Niech D będzie digrafem acyklicznym, tzn. D nie zawiera cykli skierowanych. Podaj algorytm, który w czasie $O(m+n)$ porządkuje wierzchołki digrafu w taki sposób, że po uporządkowaniu, jeśli (i,j) jest krawędzią skierowaną w D, to $i < j$.

2. (D) Digraf, w którym każda para różnych wierzchołków jest połączona dokładnie jedną krawędzią skierowaną, nazywamy *turniejem*. Pokaż, że w każdym turnieju istnieje wierzchołek, z którego można dojść do każdego innego wierzchołka po drodze o długości co najwyżej 2.

3. (D) Pokaż, że każdy turniej zawiera (skierowaną) ścieżkę Hamiltona tzn. przechodzącą przez wszystkie wierzchołki.

4. (D) Czy n-wymiarowa kostka zawiera ścieżkę Hamiltona?

5. (D) Niech $G = (A \cup B, E)$ będzie grafem dwudzielnym, a M i N jego dwoma skojarzeniami. Pokaż, że istnieje skojarzenie M' takie, że każdy wierzchołek $a \in A$ skojarzony w M jest również skojarzony w M' oraz każdy wierzchołek $b \in B$ skojarzony w N jest również skojarzony w M'.

6. Pokaż, że skojarzenie największe ma co najważej dwa razy więcej krawędzi od dowolnego skojarzenia maksymalnego względem zawierania.

7. Dana jest kostka sera 3×3. Mysz rozpoczyna jedzenie kostki od dowolnego rogu. Po zjedzeniu jednego pola przenosi się do kolejnego mającego wspólną krawędź z ostatnio zjedzonym. Czy możliwe, aby mysz jako ostatnie zjadła środkowe pole?

8. Pokaż jak znaleźć największe skojarzenie w drzewie T.

Katarzyna Paluch