RPiS – Kolokwium — Zestaw A

15 kwietnia 2016

1	2	3	4	KR1	KR2

- Proszę podpisać wszystkie kartki.
- 1 zadanie ≡ 1 kartka.

1. **15p.** Rozpatrujemy losowanie 6 spośród 49 liczb (Toto-Lotek). Każdy układ (zbiór 6 liczb) jest losowany z tym samym prawdopodobieństwem.
   (a) Niech X będzie zmienną losową zdefiniowaną jako średnia arytmetyczna wylosowanych liczb. Obliczyć wartość oczekiwaną $\mathrm{E}(X)$.
   (b) Niech Y będzie zmienną losową zdefiniowaną jako maksimum z wylosowanych liczb. Podać gęstość zmiennej Y.

[Do zadań 2–3] Zmienna losowa (X,Y) podlega rozkładowi o gęstości określonej wzorem: $f(x,y) = \frac{3}{2}\exp(-(x+y))$, gdzie $0 < y < 2x < \infty$.

2. **15p.** Obliczyć gęstość zmiennej (Z,W), gdzie $Z = \frac{X+Y}{2}$, $W = \frac{X-Y}{2}$.

3. **15p.** Wyznaczyć gęstość brzegową zmiennej Z.

4. **15p.** Dana jest ustalona liczba a oraz dwie niezależne zmienne losowe X i Y przyjmujące wartości z przedziału $(0,1)$. Rozkład zmiennej X ma gęstość daną wzorem postaci $c - ax$. Zmienna Y ma rozkład jednostajny. Parę wartości (X,Y) tych zmiennych interpretujemy jako współrzędne losowego punktu na płaszczyźnie.
   (a) Podać warunki, jakie muszą byc spełnione, aby funkcja $c - ax$ mogła byc gęstością zmiennej X.
   (b) Znaleźć prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowany punkt (X,Y) jest odległy od początku układu współrzędnych o mniej niż 1.

5. **Zadanie KR1 – 8p.** (X,Y) jest ciągłą zmienną losową o gęstości $f(x,y)$. Podać szkic dowodu twierdzenia: $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$.

6. **Zadanie KR2 – 8p.** Wykazać, że wariancja różnicy dwóch niezależnych zmiennych losowych X, Y jest równa sumie wariancji tych zmiennych, a więc

$$\mathrm{V}(X-Y) = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y).$$

   Czemu jest równa wariancja sumy dwóch takich zmiennych?

Witold Karczewski

RPiS – Kolokwium Zestaw CK

20 kwietnia 2017

1	2	3	4	KR1	KR2
Imię i nazwisko					

- Proszę podpisać wszystkie kartki.
- 1 zadanie ≡ 1 kartka.
- Rozwiązujemy 4 zadania z 6.

1. **15p.** Niezależne zmienne $X_1, \ldots, X_n$ mają ten sam rozkład o wartościach dodatnich. Obliczyć
$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i / \sum_{m=1}^{n} X_m\right), \text{ dla } k \le n.$$

[**Zadania 2–3**] Rozważamy określony pierwiastek promieniotwórczy. Atomy takiego pierwiastka ulegają samorzutnemu rozpadowi w losowym momencie. Możemy obserwować atom tego pierwiastka (od pewnego momentu) i rozważać zmienną losową X, której wartością jest czas, jaki upłynął od rozpoczęcia obserwacji do rozpadu atomu. Zmienna ta ma rozkład wykładniczy z parametrem λ. Parametr rozkładu zależy od badanego pierwiastka, jest taki sam dla różnych atomów tego pierwiastka i nie zależy od momentu rozpoczęcia obserwacji. Różne atomy rozpadają się w zasadzie niezależnie od siebie.

2. **15p.**
   (a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że rozpad atomu nastąpił w n-tej godzinie obserwacji. (czyli oblicz prawdopodobieństwo tego, że zmienna X o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ przyjmuje wartość z przedziału $[n-1, n)$.)
   (b) Niech Y będzie zmienną losową przyjmującą dodatnie wartości naturalne, taką że $Y = n$ wtedy i tylko wtedy, gdy rozpad obserwowanego atomu nastąpił w n-tej godzinie obserwacji (gdy $X \in [n-1, n)$, X taka, jak wyżej). Pokaż, że Y ma rozkład geometryczny z pewnym parametrem p. Jaki jest ten parametr?

3. **15p.**
   (a) Przypuśćmy, że obserwujemy 100 atomów naszego pierwiastka. Z jakim prawdopodobieństwem w czasie t od momentu rozpoczęcia obserwacji rozpadnie się dokładnie 50 atomów? (czyli rozpatrujemy 100 niezależnych zmiennych losowych o rozkładach wykładniczych z tym samym parametrem λ. Z jakim prawdopodobieństwem dokładnie 50 tych zmiennych przyjmuje wartość $< t$.)

(b) Znajdź t, dla którego prawdopodobieństwo rozpadu w czasie t dokładnie połowy ze 100 atomów jest największe. Jak zmienią się obliczenia, gdy zamiast 100 atomów będziemy rozważać ich 1000 lub innych (parzystą) ich liczbę.

4. **15p.** Zmienna losowa (X, Y) podlega rozkładowi o gęstości określonej wzorem:
$f(x,y) = \dfrac{3}{2}\exp(-(x+y))$, gdzie $0 < x < 2y < \infty$.
Obliczyć gęstość zmiennej (Z, W), gdzie $Z = \dfrac{X+Y}{2}$, $W = \dfrac{X-Y}{2}$.

5. **Zadanie KR1 – 12p.** Niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_N$ mają rozkład $N(\mu, \sigma^2)$. Wiadomo, że $M_{X_k}(t) = \mathrm{e}^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$. Jaki rozkład ma zmienna Z?

$$Z = \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2.$$

6. **Zadanie KR2 – 8p.** Wykazać, że wariancja sumy dwóch niezależnych zmiennych losowych X, Y jest równa sumie wariancji tych zmiennych, a więc

$$\mathrm{V}(X+Y) = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y).$$

Witold Karczewski

RPiS – Kolokwium **Zestaw NC**

20 kwietnia 2017

1	2	3	4	KR1	KR2
Imię i nazwisko					

- Proszę podpisać wszystkie kartki.
- 1 zadanie ≡ 1 kartka.
- Rozwiązujemy 4 zadania z 6.

1. **15p.** Niezależne zmienne $X_1, \ldots, X_n$ mają ten sam rozkład o wartościach dodatnich. Obliczyć
$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i / \sum_{m=1}^{n} X_m\right), \text{ dla } k \leq n.$$

2. **15p.** Zmienna losowa (X, Y) podlega rozkładowi o gęstości określonej wzorem: $f(x,y) = \frac{3}{2}\exp(-(x+y))$, gdzie $0 < x < 2y < \infty$.
Obliczyć gęstość zmiennej (Z, W), gdzie $Z = \frac{X+Y}{2}$, $W = \frac{X-Y}{2}$.

3. **15p.** Niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_N$ mają rozkład $N(\mu, \sigma^2)$. Wiadomo, że $M_{X_k}(t) = \mathrm{e}^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$. Jaki rozkład ma zmienna Z?
$$Z = \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right).$$

4. **15p.** Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy, tzn. $f(x) = \lambda\exp(-\lambda x)$, dla $x \in (0, \infty)$.
   (a) Wyznaczyć postać funkcji tworzącej momenty $M_X(t)$.
   (b) Obliczyć $\mathrm{E}(X)$ i $\mathrm{V}(X)$.

5. **Zadanie KR1 – 8p.** (X, Y) jest dyskretną zmienną losową o prawdopodobieństwach p_{ij} $(i = 1, \ldots, I;\ j = 1, \ldots, J)$. Podać szkic dowodu twierdzenia:
$\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$.

6. **Zadanie KR2 – 8p.** Wykazać, że wariancja sumy dwóch niezależnych zmiennych losowych X, Y jest równa sumie wariancji tych zmiennych, a więc

$$\mathrm{V}\left(X+Y\right)=\mathrm{V}\left(X\right)+\mathrm{V}\left(Y\right).$$

Czemu jest równa wariancja różnicy dwóch takich zmiennych?

Witold Karczewski

RPiS – Kolokwium **Zestaw OM**

17 kwietnia 2018

1	2	3	4	KR1	KR2

- Proszę podpisać wszystkie kartki (numerem indeksu lub nazwiskiem – czytelnie).
- 1 zadanie ≡ 1 kartka (lub więcej).
- Na zakończenie – w powyższej tabelce przekreślić znakiem **X** zadania "do sprawdzenia".

[Do zadań 1–2] Niezależne zmienne losowe X_1, X_2 mają rozkład o gęstości $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$, dla $x > 0$.

1. **15p. Obliczyć**
   (a) $\mathrm{E}(X_1)$ i $\mathrm{E}(1/X_1)$.
   (b) $P(X_1 > 2X_2)$.
   (c) Niech $Y_1 = X_1 + X_2,\ Y_2 = \dfrac{X_1}{X_2}$. Obliczyć gęstość $g(y_1, y_2)$.

2. **15p.** Załóżmy, że $g(y_1, y_2) = \dfrac{y_1^3 y_2}{(y_2+1)^4}\mathrm{e}^{-y_1}$.
   (a) Wyznaczyć gęstości brzegowe $g_1(y_1), g_2(y_2)$.
   (b) Czy zmienne Y_1, Y_2 są niezależne?
   (c) Obliczyć (w możliwie krótki sposób) $\mathrm{E}(Y_2)$.

3. **15p.** Załóżmy, że niezależne zmienne losowe mają rozkład $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2), (i = 1, \ldots, n)$. Obliczamy $S^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2$. Jak obliczyć $\mathrm{E}(X), \mathrm{V}(X)$?
   Wskazówki: $\mathrm{Gamma}\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right) \equiv \chi^2(n); \quad M_{\mathrm{Gamma}(b,p)}(t) = \left(1 - \frac{t}{b}\right)^{-p}$.

4. **15p.** Nieprawdopodobne lecz prawdziwe. Grupa n studentów napisała kolokwium i nikt nie podpisał się. Początkowo rozwiązania przydzielono losowo do piszących. Wartością zmiennej losowej X jest liczba piszących ocenionych na podstawie swojej pracy. Obliczyć $\mathrm{E}(X)$.

5. **Zadanie KR1 – 8p.** (X, Y) jest ciągłą zmienną losową o gęstości $f(x, y)$. Zmienne X, Y są niezależne. Podać (szkic) dowód twierdzenia: $\mathrm{E}(X \cdot Y) = \mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(Y)$.

6. **Zadanie KR2 – 8p.** X jest zmienną losową o rozkładzie dyskretnym. Udowodnić, że $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}\,X)^2$

Witold Karczewski