Lista nr 9 z matematyki dyskretnej

1. Przedstaw algorytm, służący do sprawdzania, czy dany graf jest dwudzielny, korzystający z przeglądania grafu metodą w głąb. Złożoność Twojego algorytmu powinna być $O(m+n)$.

2. (D) Niech t_i oznacza liczbę wierzchołków stopnia i w drzewie. Wyprowadź dokładny wzór na t_1, liczbę liści w dowolnym drzewie. Dlaczego ta liczba nie zależy od t_2?

3. Pokaż, że graf G jest drzewem wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnej pary wiezchołków $u, v \in G$ w G istnieje dokładnie jedna ścieżka je łącząca.

4. (D) (2 punkty) Niech $d(u,v)$ oznacza odległość wierzchołków u i v, czyli długość najkrótszej sćieżki łączącej u i v. Dla każdego wierzchołka v grafu G definiujemy $r(v) = \max\{d(v,u) : u \in V(G)\}$. Wierzchołek w, dla którego $r(w) = \min\{r(v) : v \in V(G)\}$ nazywa się *wierzchołkiem centralnym* grafu G, a liczba $r(G) = r(w)$ – *promieniem* grafu G.

   (a) (Jordan) Wykaż, że zbiór wierzchołków centralnych drzewa składa się z jednego wierzchołka albo z pary wierzchołków sąsiednich.

   (b) Podaj algorytm znajdowania wierzchołków centralnych w drzewie, działający w czasie $O(m+n)$.

5. (D) Niech $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ będzie ciągiem liczb naturalnych. Wykaż, że d jest ciągiem stopni wierzchołków pewnego drzewa o n wierzchołkach wtedy i tylko wtedy, gdy: $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$.

6. Udowodnij lub obal: Jeśli T jest minimalnym drzewem spinającym grafu G, to ścieżka łącząca wierzchołki u i v w drzewie T jest minimalną wagowo ścieżką między u i v w grafie G.

7. (D) Przypuśćmy, że w grafie G wszystkie wagi krawędzi są różne. Pokaż, nie używając żadnego algorytmu, że G zawiera tylko jedno minimalne drzewo spinające.

8. Niech T będzie MST grafu G. Pokaż, że dla dowolnego cyklu C grafu G drzewo T nie zawiera jakiejś najcięższej krawędzi z c.

Katarzyna Paluch