

Lista nr 5 z matematyki dyskretnej

1. Na ile sposobów można ułożyć domina na prostokącie o rozmiarze $2 \times n$?
2. Korzystając z zasady włączania-wyłączania oblicz, ile jest sposobów ustawienia liter $a, a, a, a, b, b, b, c, c$ w taki sposób, aby takie same litery nie stały wszystkie obok siebie, tzn. ustawienie $a, a, a, a, b, c, b, c, b$ jest zakazane, ale ustawienie $a, a, a, b, a, c, b, c, b$ jest dobre.
3. (D) Wyprowadź zależność rekurencyjną dla liczby nieporządków: $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$. Jakie należy przyjąć warunki początkowe dla tej zależności?
4. Ile jest różnych sposobów wejścia po schodach zbudowanych z n stopni, jeśli w każdym kroku można pokonać jeden lub dwa stopnie?
5. Udowodnij indukcyjnie, że $NWD(F_m, F_n) = F_{NWD(m,n)}$.
6. (D)
 - (a) Wykaż, że $F_{2n} = F_n(F_n + 2F_{n-1})$
 - (b) Podaj podobną zależność dla F_{2n+1} zawierającą liczby Fibonacciego o mniejszych indeksach.
7. Podwójna wieża Hanoi składa się z $2n$ krążków n różnych rozmiarów, po 2 krążki każdego rozmiaru. W jednym kroku przenosimy dokładnie jeden krążek i nie możemy kłaść większego krążka na mniejszym. Ile kroków jest potrzebnych, aby przenieść wieżę z palika A na palik B, posługując się przy tym palikiem C, gdy krążki równej wielkości nie są rozróżnialne?
8. (D) Na płaszczyźnie danych jest n okręgów. Jaka jest maksymalna liczba obszarów, na które dzielą one płaszczyznę. Wyprowadź rozwiązanie za pomocą odpowiedniej zależności rekurencyjnej.
9. (*) Na ile maksymalnie obszarów można podzielić trójwymiarową przestrzeń za pomocą n płaszczyzn? Wyprowadź rozwiązanie za pomocą odpowiedniej zależności rekurencyjnej.
10. Stosując metodę podstawiania rozwiąż następujące zależności rekurencyjne

- (a) $t_n = t_{n-1} + 3^n$ dla $n > 1$ i $t_1 = 3$.
 (b) $h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1}n$ dla $n > 1$ i $h_1 = 1$.
11. (D) Rozwiąż następujące zależności rekurencyjne:
 (a) $a_0 = 0$, $a_1 = 4$, $a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}$,
 (b) $b_0 = 1$, $b_1 = 8$, $b_n = b_{n-1} - b_{n-2}$.
12. Udowodnij lub obal następujące stwierdzenie:
 Liczba naturalna n dzieli się przez 3 wtw gdy suma jej cyfr w zapisie dziesiętnym jest podzielna przez 3.
 A gdybyśmy mieli do czynienia z zapisem szesnastkowym?
13. (D) Rozwiąż następujące zależności rekurencyjne:
 (a) $a_{n+1} = \left\lfloor \sqrt{a_n^2 + a_{n-1}^2} \right\rfloor$, $a_0 = a_1 = 1$,
 (b) $b_{n+1} = \left\lfloor \sqrt{b_n^2 + 3} \right\rfloor$, $b_0 = 8$,
 (c) $c_{n+1} = (n+1)c_n + (n^2 + n)c_{n-1}$, $c_0 = 0$, $c_1 = 1$.
- Wskazówka:* zastosuj odpowiednie podstawienie.

Zadanie z * liczy się jak dwa zadania domowe.

Katarzyna Paluch