Lista nr 7 z matematyki dyskretnej

1. Rozwiąż równanie rekurencyjne $a_n + 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 3n^2$, jeśli $a_0 = 1, a_1 = 4$.

2. Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu a_n. Pokaż, że funkcją tworząca ciągu b_n postaci $(0, 0, \ldots, 0, a_0, a_1, a_2, \ldots)$, takiego, że $b_{k+i} = a_i$ oraz $b_0 = \ldots = b_{k-1} = 0$ jest funkcja $x^k A(x)$.

   A jak otrzymać funkcję tworzącą ciągu c_n postaci $(a_k, a_{k+1}, \ldots,)$, czyli takiego, że $c_i = a_{k+i}$?

3. (D) Wyznacz funkcje tworzące ciągów:

   (a) $a_n = n^2$

   (b) $a_n = n^3$

   (c) $\binom{n+k}{k}$

   Wskazówka: Wszędzie przyda się funkcja tworząca $\frac{1}{1-x}$. W ostatnim podpunkcie będzie to odpowiednia potęga tej funkcji.

4. (D) Oblicz funkcje tworzące ciągów:

   (a) $a_n = n$ dla parzystych n i $a_n = 1/n$ dla nieparzystych n

   (b) $H_n = 1 + 1/2 + \ldots + 1/n$ $(H_0 = 0)$.

5. (D) Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu a_n. Podaj postać funkcji tworzących dla następujących ciągów:

   (a) $b_n = na_n$

   (b) $c_n = a_n/n$

   (c) $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

   Wskazówka: Rozważ różniczkowanie i całkowanie funkcji tworzących.

6. Podaj funkcję tworzącą dla ciągu $(0, 0, 0, 1, 3, 7, 15, 31, \ldots)$.

7. (D) Ile jest wyrazów złożonych z n liter należących do 25-literowego alfabetu łacińskiego, zawierających parzystą liczbę liter a? Rozwiązanie powinno być w postaci jawnej i zwiniętej.

8. Znajdź ogólną postać rozwiązań następujących równań rekurencyjnych za pomocą anihilatorów i rozwiąż jedno z równań do końca:

   (a) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3^n - 1$, gdy $a_0 = a_1 = 0$.

   (b) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n2^{n+1}$, gdy $a_0 = a_1 = 1$.

   (c) $a_{n+2} = 2^{n+1} - a_{n+1} - a_n$, gdy $a_0 = a_1 = 1$.

9. Niech c_n oznacza liczbę ciągów długości n złożonych z n cyfr ze zbioru $\{0, 1, 2\}$, nie zawierających dwóch następujących po sobie zer i dwóch następujących po sobie jedynek. Wyprowadź zależność rekurencyjną, jaką spełniają liczby c_n przyjmując $c_0 = 1$. Rozwiąż otrzymaną zależność rekurencyjną.

10. (D) Podaj postać funkcji tworzącej dla liczby podziałów liczby naturalnej n (czyli rozkładów liczby n na sumę składników naturalnych, gdy rozkładów różniących się kolejnością nie uważamy za różne):

    (a) na dowolne składniki,

    (b) na różne składniki nieparzyste,

    (c) na składniki mniejsze od m,

    (d) na różne potęgi liczby 2.

W ramach zadania domowego można zrobić wymiennie jedno spośród zadań niezaznaczonych.

Katarzyna Paluch