

## Lista nr 4 z matematyki dyskretnej

1. Niech  $s, n, k$  oznaczać pewne liczby naturalne. Pokaż, że jakkolwiek wrzucimy  $s > nk$  kulek do  $k$  szuflad, któraś szuflada będzie zawierać co najmniej  $n + 1$  kulek.
2. (D) Udowodnij, że jeśli  $a > b$  oraz  $a$  i  $b$  są względnie pierwsze, to dla  $0 \leq m < n$  zachodzi:  $NWD(a^n - b^n, a^m - b^m) = a^{NWD(m,n)} - b^{NWD(m,n)}$ .
3. Udowodnij, że dla dowolnych naturalnych  $m, n$  takich, że  $m \perp n$ , zachodzi  $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ .
4. Rozwiąż układ kongruencji:

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv 3 \pmod{7} \\ x \equiv 4 \pmod{13} \end{cases}$$

5. (D) Wykaż, że jeśli  $2^n - 1$  jest liczbą pierwszą, to  $n$  jest liczbą pierwszą (por. liczby Mersenne'a).
6. Wykaż, że jeśli  $a^n - 1$  jest liczbą pierwszą, to  $a = 2$  (por. liczby Mersenne'a).
7. Wykaż, że jeśli  $2^n + 1$  jest liczbą pierwszą, to  $n$  jest potęgą liczby 2 (por. liczby Fermata).
8. (D) Określ liczbę podzielną przez 7, która leży najbliżej liczby  $10^{100000}$ .
9. Opisz postać liczb podzielnych przez 13, które leżą najbliżej liczby utworzonej z jedynek i miliona zer. A może ta liczba jest podzielna przez 13?
10. Podaj dwie ostatnie cyfry liczby  $9^{8^7 6^5 4^3 2^1}$  w rozwinięciu dziesiętnym.
11. Oblicz, ile jest liczb naturalnych między 1 i  $n$  (włącznie z tymi liczbami), które są podzielne przez 2 lub 3, ale nie dzielą się ani przez 5, ani przez 7.

12. (D) Wśród liczb naturalnych  $1, 2, \dots, 800$ , ile jest takich, które nie są podzielne przez 7, ale są podzielne przez 6 lub przez 9.
13. (D) *Nieporządkiem* nazywa się taką permutację elementów, w której żaden element nie znajduje się na swoim miejscu. Niech  $d_n$  oznacza liczbę nieporządków utworzonych z  $n$  kolejnych liczb naturalnych. Wyprowadź wzór na  $d_n$  stosując zasadę włączania i wyłączania.
14. Wykaż, że dwie kolejne liczby Fibonacciego są względnie pierwsze. Wskazówka: Skorzystaj z algorytmu Euklidesa.

*Katarzyna Paluch*