

Plane Elastiske Rammer

Niels Holck

Jørgen Juncher Jensen

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET
INSTITUT FOR MEKANISK TEKNOLOGI
SKIBE, KYSTER OG KONSTRUKTIONER
2. REV. UDGAVE 2011

Publiseret i Danmark af
Danmarks Tekniske Universitet
All rights reserved

Skibe, Kyster og Konstruktioner
Institut for Mekanisk Teknologi
Danmarks Tekniske Universitet
Nils Koppels All, Bygning 403, 2800 Kgs. Lyngby, Denmark
Tlf.: 4525 1360, Fax: 4588 4325
e-mail: info.skk@mek.dtu.dk, Internet: www.mek.dtu.dk

Publikations reference data
Holck, N. Jensen, J
Plane Elastiske Rammer.
2. rev. udgave, 2011.

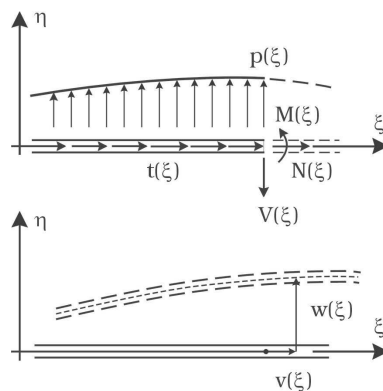
Indholdsfortegnelse

Indholdsfortegnelse	i
1 Grundlag	1
2 Problemformulering	3
3 Elementegenskaber	5
3.1 Bøjningspåvirkninger	7
3.2 Aksialpåvirkninger	11
3.3 Stivhedsmatricen	13
3.4 Indføring af hængsel i et knudepunkt	14
3.5 Koordinattransformation	17
4 Systemopbygning	21
4.1 Geometrisk betingelse	21
4.2 Statisk betingelse	23
4.3 Grundligning	25
5 Systemanalyse	27
5.1 Randbetingelser	27
5.2 Resultater	29

Kapitel 1

Grundlag

Beregningsmodellen for en plan elastisk bjælke kan, i et retvinklet ξ, η -koordinatsystem hvor ξ -aksen er sammenfaldende med den udeformerede bjælkes tyngdepunktsakse (se Figur 1.1), udtrykkes ved følgende statiske, geometriske og fysiske betingelsesligninger. Det er her forudsat, at de statiske betingelser (ligevægtsligningerne) kan baseres på den udeformerede bjælkes geometri, hvilket forudsætter at bjælken deformationer er ”små”. Senere betragtes også tilfælde, hvor de statiske betingelser må opstilles i det korrekte, dvs deformede, koordinatsystem for at få en brugbar løsning. Dette gælder specielt, når man ønsker at se på stabilitetssvigt af bjælker (bjælke-søjle problemer).



Figur 1.1: Fortegnskonventioner

Statiske betingelser:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV}{d\xi} &= P \\ \frac{dM}{d\xi} &= V \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d^2 M}{d\xi^2} = p \quad ; \quad \frac{dN}{d\xi} = -t$$

Geometriske betingelser:

$$\kappa = \frac{d^2 w}{d\xi^2} \quad ; \quad \epsilon = \frac{dv}{d\xi}$$

Fysiske betingelser:

$$M = EI\kappa \quad ; \quad N = EA\epsilon$$

Følgende betegnelser er anvendt:

p	: Lastintensitet i η -retningen
t	: Lastintensitet i ξ -retningen
V	: Forskydningskraft
M	: Moment
N	: Normalkraft
w	: Flytning i η -aksens retning
v	: Flytning i ξ -aksens retning
κ	: Bjælkeaksens krumning
ϵ	: Bjælkeaksens længdetøjning
EI	: Bjælkens bøjningsstivhed
EA	: Bjælkens aksialstivhedsstivhed

Alle ovennævnte størrelser er i princippet funktioner af ξ .

Indsættes de geometriske og fysiske betingelser i de statiske betingelser fås:

Grundligningerne:

$$\frac{d^2 \left(EI \frac{d^2 w}{d\xi^2} \right)}{d\xi^2} = p \quad ; \quad \frac{d \left(EA \frac{dv}{d\xi} \right)}{d\xi} = -t$$

Forudsættes det, at EI og EA er uafhængige af ξ , kan grundligningerne skrives på formen:

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} = w'''' = \frac{p}{EI} \quad , \quad \frac{d^2 v}{d\xi^2} = v'' = - \frac{t}{EA}$$

Det skal bemærkes, at der er tale om 2 sæt størrelser, der kan behandles uafhængigt af hinanden. Det ene sæt knytter sig til den transversale påvirkning (bøjningspåvirkningen) og omfatter størrelserne p , M , V , κ og w . Det andet sæt knytter sig til den aksiale påvirkning og omfatter t , N , ϵ og v .

Det er beregningsmodellens forudsætning om, at ligevægtsligningerne kan opstilles på basis af den udeformerede bjælkes geometri, der medfører at bøjningspåvirkning og aksialpåvirkning kan behandles uafhængigt af hinanden. Til gengæld vil beregningsmodellen ikke kunne anvendes til at beskrive f.eks. stabilitetsproblemer.

Kapitel 2

Problemformulering

Vi betragter en plan rammekonstruktion opbygget af elastiske bjælker. I det følgende vil der blive refereret til den samlede rammekonstruktion som *systemet* og til de enkelte bjælker som *elementer*. De punkter, hvor elementerne er samlet samt de punkter hvor rammen er understøttet, betegnes under et som *systemknuder* eller *globale knuder*. Systemknuderne nummereres fortløbende fra 1 til n_k . Disse numre benævnes de *globale knudenumre*. Elementerne tildeles ligeledes fortløbende numre fra 1 til n_e .

Som basis for systembeskrivelsen indlægges et retvinkelt xy-koordinatsystem, kaldet det *globale koordinatsystem*.

Det forudsættes, at de enkelte elementer har konstant tværsnit og at de er stift forbundet til systemknuderne. Dermed vil alle bjælker, der mødes i et knudepunkt få samme vinkel-drejning, når rammen påføres en belastning. (Indflydelsen af eventuelle indre charnierer vil blive knyttet til elementegenskaberne).

Systemet kan dels være belastet med enkeltkræfter og momenter i knuderne og dels med fordelte belastninger på de enkelte bjælker. For at opnå en rimelig enkel model vil en koncentreret belastning udenfor systemknuderne ikke blive taget i betragtning. Dette indebærer, at der må etableres ekstra knuder i alle de punkter, hvor der virker koncentreret last. Den lokale lastvektor vil derfor i det efterfølgende alene indeholde bidrag fra de fordelte belastninger.

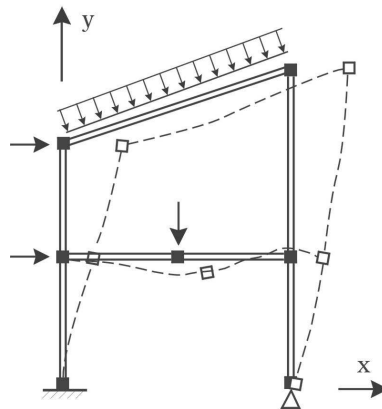
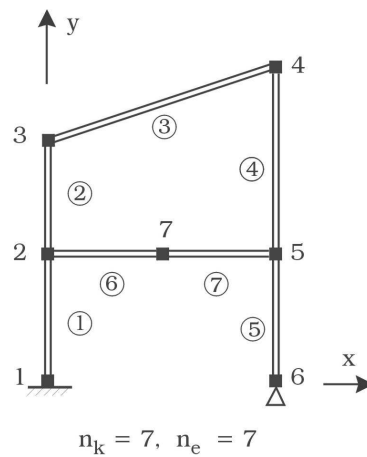
Når rammen belastes vil de enkelte knuder forskyde og dreje sig samtidig med, at de enkelte bjælker deformeres. Forskydningen (translationen) samt drejningen af den enkelte systemknode vil vi under et kalde knudens *flytning*. Vi vil i det følgende opstille en sammenhæng mellem belastningen på rammen og knudelflytningerne. Denne sammenhæng ønskes formuleret på formen:

$$f = Ka$$

Her repræsenterer søjlevektoren f belastningen på systemet i form af såvel den ydre belastning og reaktionerne, medens vektor a indeholder de dermed optrædende knudflytninger. Den kvadratiske matrix K udtrykker den ønskede sammenhæng. For de nævnte størrelser vil følgende betegnelser blive benyttet:

- f : Systemets *lastvektor*
- a : Systemets *responsvektor*
- K : *Systemstivhedsmatricen* eller den *Globale stivhedsmatrix*

I første omgang vil stivhedsmatricen for et system bestående af et enkelt element blive bestemt. Herefter vil det blive vist, at systemstivhedsmatricen kan opfattes som en sum af sådanne elementstivhedsmatricer.

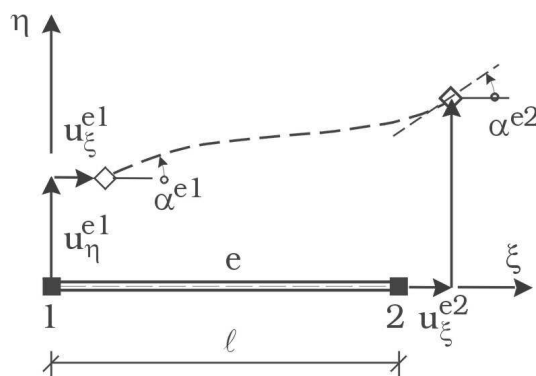


Figur 2.1: Eksempel på plan rammekonstruktion

Kapitel 3

Elementegenskaber

Det enkelte bjælkeelement beskrives mest bekvemt i et *lokalt $\xi\eta$ -koordinatsystem*, hvor ξ -aksen er sammenfaldende med det udeformerede elements tyngdepunktsakse. Bjælkeaksens endepunkter betegnes elementets *lokale knuder* og tildeles de *lokale knudenumre* 1 og 2. Idet l betegner elementets længde, orienteres ξ -aksen således, at knude 1 får koordinaten $\xi = 0$ og knude 2 koordinaten $\xi = l$. (se Figur 3.1)



Figur 3.1: Definition af lokale knudeflytninger

Af systematiske grunde samles flytningerne af de lokale knuder i søjlevektorerne u_L^{e1} og u_L^{e2} , der igen samles *elementets responsevektor* a_L^e , som vist nedenfor. Fortegnskonventionen for flytningerne fremgår af Figur 3.1

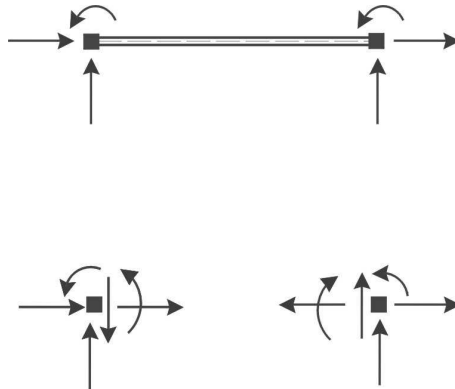
$$u_L^{e1} = \begin{bmatrix} u_\xi^{e1} \\ u_\eta^{e1} \\ \alpha^{e1} \end{bmatrix} \quad ; \quad u_L^{e2} = \begin{bmatrix} u_\xi^{e2} \\ u_\eta^{e2} \\ \alpha^{e2} \end{bmatrix} \quad ; \quad u_L^e = \begin{bmatrix} u_L^{e1} \\ u_L^{e2} \end{bmatrix}$$

Index e på en størrelse angiver her og i det følgende, at den pågældende størrelse refererer til bjælkeelement nr. e , medens index $_L$ angiver, at størrelsen er beskrevet i elementets lokale koordinatsystem. Numrene 1 og 2 refererer naturligvis til de lokale knuder.

De kræfter (dvs. reaktioner), som omgivelserne påvirker elementet med i knuderne, samles i søjlevektorerne r_L^{e1} og r_L^{e2} , der igen samles i *elementets knudelastvektor* r_L^e . Fortegnskonventionen for kræfterne fremgår af den øverste figur i Figur 3.2.

$$r_L^{e1} = \begin{bmatrix} r_\xi^{e1} \\ r_\eta^{e1} \\ m^{e1} \end{bmatrix} \quad ; \quad r_L^{e2} = \begin{bmatrix} r_\xi^{e2} \\ r_\eta^{e2} \\ m^{e2} \end{bmatrix} \quad ; \quad r_L^e = \begin{bmatrix} r_L^{e1} \\ r_L^{e2} \end{bmatrix}$$

Sammenhængen mellem kræfterne r_L^e og snitkræfterne N, V, M i bjælkeelementets endepunkter indses ved at betragte ligevægten af den enkelte knude som illustreret i den nederste figur i Figur 3.2:



Figur 3.2: Fortegnskonvention for endepunktkræfterne

$$r_\xi^{e1} = -N(0) \quad ; \quad r_\xi^{e2} = N(\ell)$$

$$r_\eta^{e1} = V(0) \quad ; \quad r_\eta^{e2} = -V(\ell)$$

$$m^{e1} = -M(0) \quad ; \quad m^{e2} = M(\ell)$$

Opgaven er nu at etablere en sammenhæng mellem knudelflytningerne a_L^e og de tilsvarende kræfter r_L^e .

Udgangspunktet er beregningsmodellen for en plan elastisk bjælke udtrykt ved grundligningerne:

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} = w'''' = \frac{p}{EI} \quad ; \quad \frac{d^2 v}{d\xi^2} = v'' = -\frac{t}{EA}$$

Strategien er at bestemme flytningsfunktionerne v og w for et *vilkårligt* sæt knudeflytninger. Herefter kan de tilsvarende snitkraftfordelinger og dermed kræfterne r_L^e bestemmes af modellens geometriske og fysiske betingelser:

$$M = EI\kappa = EIw'' \quad ; \quad N = EA\epsilon = EA v'$$

Den fuldstændige løsning til grundligningerne vil for v 's vedkommende indeholde 2 integrationskonstanter og for w 's vedkommende 4 integrationskonstanter, svarende til de respektive differentiaalligningers orden. Integrationskonstanterne bestemmes ved hjælp af de randbetingelser, der nytter sig til v og w . Typen af disse randbetingelser afhænger af, hvilke geometriske frihedsgrader elementet er forsynet med. Vi vil her alene se på et bjælkeelement, hvor endepunktsflytningerne er givet. Til håndregning er det også nyttigt at bruge et bjælkeelement, som har et charnier i den ene ende, da det ofte kan reducere størrelsen af det resulterende ligningssystem. Det er dog en unødigt komplikation ved computerbaserede beregninger, og vil derfor ikke blive medtaget her.

Da vi ønsker løsninger for vilkårlige sæt af knudeflytninger, er det hensigtsmæssigt at lade knudeflytningerne fungerer som integrationskonstanter i løsningerne. Dette kan opnås ved at udtrykke v og w på formen:

$$\begin{aligned} v &= \psi_0(\xi) + u_\xi^{e1}\psi_1(\xi) + u_\xi^{e2}\psi_2(\xi) \\ w &= \varphi_0(\xi) + u_\eta^{e1}\varphi_1(\xi) + \alpha^{e1}\varphi_2(\xi) + u_\eta^{e2}\varphi_3(\xi) + \alpha^{e2}\varphi_4(\xi) \end{aligned}$$

Som omtalt tidligere kan aksial- og bøjningspåvirkninger behandles uafhængigt af hinanden, hvilket vil blive udnyttet i det følgende.

3.1 Bøjningspåvirkninger

Flytningsfunktionen $w(\xi)$ skal som tidligere nævnt opfylde differentiaalligningen (grundligningen).

$$w'''' = \frac{p}{EI}$$

samt randbetingelserne

$$w(0) = u_\eta^{e1} \quad , \quad w'(0) = \alpha^{e1} \quad , \quad w(\ell) = u_\eta^{e2} \quad , \quad w'(\ell) = \alpha^{e2}$$

Det bør bemærkes, at vinkeldrejningen α er sat lig med tangenthældningen $w' = \tan \alpha$. Dette hænger - som sædvanlig - sammen med, at vi har forudat ”små” deformationer - dvs. $|\alpha| \ll 1, \Rightarrow \alpha \approx \tan \alpha \approx \sin \alpha, \cos \alpha \approx 1$

Ved indsættelse af udtrykket

$$w = \varphi_0(\xi) + u_\eta^{e1} \varphi_1(\xi) + \alpha^{e1} \varphi_2(\xi) + u_\eta^{e2} \varphi_3(\xi) + \alpha^{e2} \varphi_4(\xi)$$

i differentiaalligningen og randbetingelserne indsættes, at disse er tilfredsstillet såfremt $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ og φ_4 opfylder nedenstående betingelser.

$$\varphi_0'''' = \frac{P}{EI} \quad ; \quad \varphi_0(0) = \varphi_0(\ell) = \varphi_0'(0) = \varphi_0'(\ell) = 0$$

$$\varphi_1'''' = 0 \quad ; \quad \varphi_1(0) = 1, \varphi_1(\ell) = \varphi_1'(0) = \varphi_1'(\ell) = 0$$

$$\varphi_2'''' = 0 \quad ; \quad \varphi_2'(0) = 1, \varphi_2(0) = \varphi_2(\ell) = \varphi_2'(\ell) = 0$$

$$\varphi_3'''' = 0 \quad ; \quad \varphi_3(\ell) = 1, \varphi_3(0) = \varphi_3'(0) = \varphi_3'(\ell) = 0$$

$$\varphi_4'''' = 0 \quad ; \quad \varphi_4'(\ell) = 1, \varphi_4(0) = \varphi_4'(0) = \varphi_4(\ell) = 0$$

φ_0 repræsenterer således udbøjningsfunktionen for en indspændt bjælke påvirket af lasten p , medens $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ og φ_4 kan tolkes som udbøjningsfunktioner for en ubelastet bjælke hvor en af knudflytningerne $u_\eta^{e1}, \alpha^{e1}, u_\eta^{e2}$ eller α^{e2} er 1, medens de resterende 3 flytninger er 0. (Se Figur 3.3)

Da $\varphi_1 - \varphi_4$ er uafhængige af belastningen, kan disse funktioner bestemmes en gang for alle:

$$\varphi_1 = \frac{1}{\ell^3} (2\xi^3 - 3\ell\xi^2 + \ell^3) \quad ; \quad \varphi_1' = \frac{6\xi}{\ell^3} (\xi - \ell)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{\ell^2} (\xi^3 - 2\ell\xi^2 + \ell^2\xi) \quad ; \quad \varphi_2' = \frac{1}{\ell^2} (3\xi^2 - 4\ell\xi + \ell^2)$$

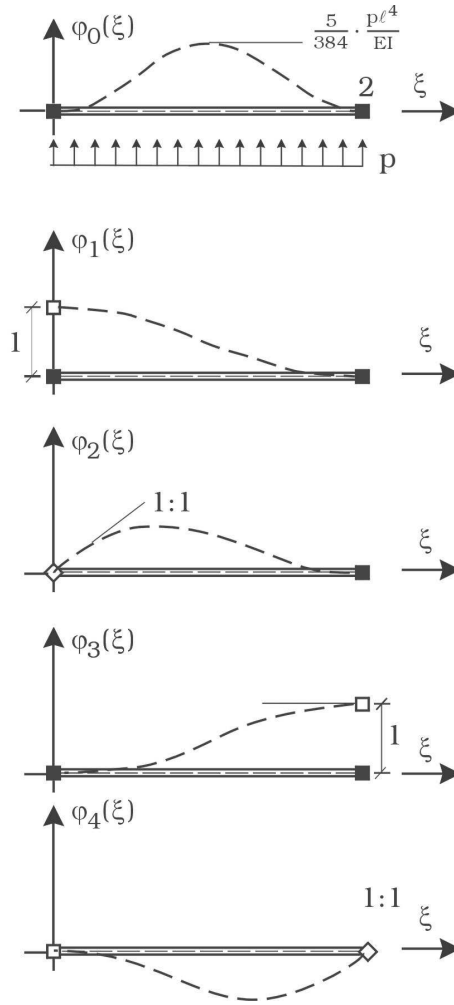
$$\varphi_3 = \frac{1}{\ell^3} (-2\xi^3 + 3\ell\xi^2) \quad ; \quad \varphi_3' = \frac{6\xi}{\ell^3} (-\xi + \ell)$$

$$\varphi_4 = \frac{1}{\ell^2} (\xi^3 - \ell\xi^2) \quad ; \quad \varphi_4' = \frac{1}{\ell^2} (3\xi^2 - 2\ell\xi)$$

For konstant linielast p fås endvidere:

$$\varphi_0 = \frac{p}{24EI} (\xi^4 - 2\xi^3\ell + \xi^2\ell^2)$$

$$\varphi_0' = \frac{p}{24EI} (4\xi^3 - 6\xi^2\ell + 2\xi\ell^2)$$



Figur 3.3: Flytningsvariationer for konstant linielast og enhedsknudepunktsflytninger

Det skal bemærkes at ovenstående formulering af udbøjningsfunktionen som en linearkombination af de elementære udbøjningsfunktioner $\varphi_0 - \varphi_4$ er et udtryk for superpositionsprincippet anvendt på deformationsstørrelser.

Ved at udtrykke udbøjningsfunktionen w som en linearkombination af de kendte funktioner $\varphi_0 - \varphi_4$ har vi fået etableret en relation mellem udbøjningen et vilkårligt sted i elementet og flytningerne i elementets lokale knuder. Ved at anvende bjælkens statiske, geometriske og fysiske betingelse er det herefter muligt at etablere en tilsvarende relation mellem snitkræfterne M , V i et vilkårligt snit og knudeflytningerne:

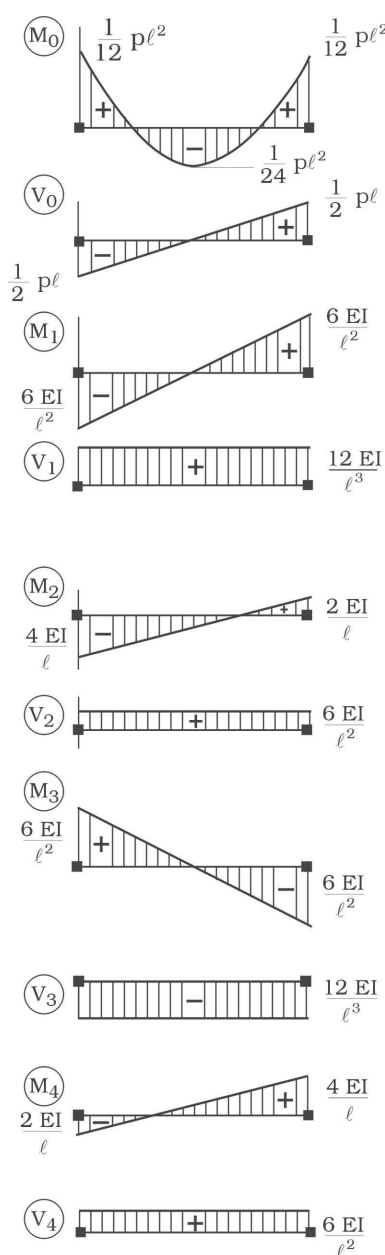
$$\begin{aligned}
 M &= EI\kappa = EIw'' \\
 &= EI(\varphi_0'' + u_\eta^{e1}\varphi_1'' + \alpha^{e1}\varphi_2'' + u_\eta^{e2}\varphi_3'' + \alpha^{e2}\varphi_4'') \\
 &= M_0 + u_\eta^{e1}M_1 + \alpha^{e1}M_2 + u_\eta^{e2}M_3 + \alpha^{e2}M_4
 \end{aligned}$$

og

$$V = M'$$

$$= M'_0 + u_\eta^{e1} M'_1 + \alpha^{e1} M'_2 + u_\eta^{e2} M'_3 + \alpha^{e2} M'_4$$

Her er funktionerne $M_1 - M_4$ defineret ved:



Figur 3.4: M og V fordelinger svarende til flytningerne i Figur 3.3

$$\begin{aligned}
M_1 = EI\varphi_1'' &= \frac{6EI}{\ell^3} (2\xi - \ell) & ; & \quad M_1' = V_1 = \frac{12EI}{\ell^3} \\
M_2 = EI\varphi_2'' &= \frac{EI}{\ell^2} (6\xi - 4\ell) & ; & \quad M_2' = V_2 = \frac{6EI}{\ell^2} \\
M_3 = EI\varphi_3'' &= \frac{6EI}{\ell^3} (-2\xi + \ell) & ; & \quad M_3' = V_3 = \frac{-12EI}{\ell^3} \\
M_4 = EI\varphi_4'' &= \frac{EI}{\ell^2} (6\xi - 2\ell) & ; & \quad M_4' = V_4 = \frac{6EI}{\ell^2}
\end{aligned}$$

Funktionerne $M_0 - M_4$ repræsenterer de momentfordelinger, der svarer til de elementære flytningsfunktioner $\varphi_0 - \varphi_4$, medens $M_0' - M_4'$ repræsenterer de tilsvarende forskydningskraftfordelinger. Moment- og forskydningskraftkurverne er vist på Figur 3.4.

3.2 Aksialpåvirkninger

Flytningsfunktionen $v(\xi)$ skal som nævnt opfylde nedenstående ligning og randbetingelser

$$v'' = -\frac{t}{EA} \quad ; \quad v(0) = u_\xi^{e1} \quad , \quad v(\ell) = u_\xi^{e2}$$

Ved indsættelse af udtrykket:

$$v = \psi_0(\xi) + u_\xi^{e1}\psi_1(\xi) + u_\xi^{e2}\psi_2(\xi)$$

indses det, at dette er tilfældet hvis funktionerne ψ_0, ψ_1 og ψ_2 opfylder nedenstående betingelser:

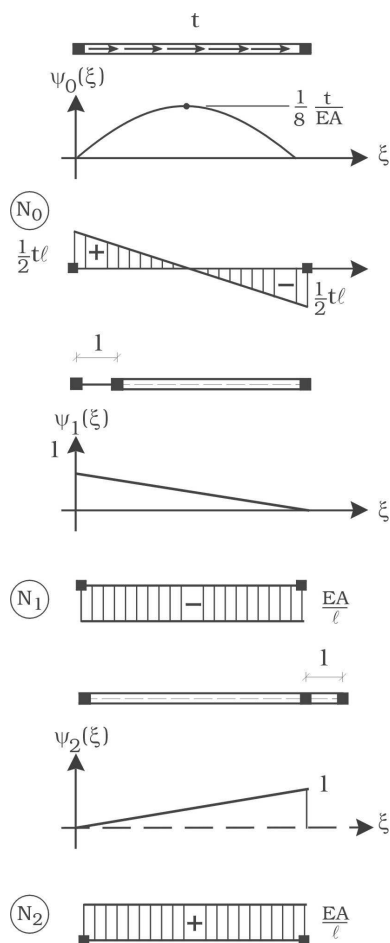
$$\psi_0'' = \frac{EA}{t} \quad ; \quad \psi_0(0) = \psi_0(\ell) = 0$$

$$\psi_1'' = 0 \quad ; \quad \psi_1(0) = 1 \quad , \quad \psi_1(\ell) = 0$$

$$\psi_2'' = 0 \quad ; \quad \psi_2(0) = 0 \quad , \quad \psi_2(\ell) = 1$$

ψ_0 repræsenterer således de aksiale flytninger i et element, der er fastholdt i endepunkterne og belastet med aksiallasten t , medens ψ_1 og ψ_2 kan tolkes som de aksiale flytninger i et ubelastet element, hvor kun knude 1 henholdsvis knude 2 er påtvunget flytningen 1 medens den anden knude fastholdes. (Se Figur 3.5)

Da ψ_1 og ψ_2 ikke afhænger af belastningen, kan disse funktioner bestemmes en gang for alle:



Figur 3.5: Aksial deformation af bjælkeelement

$$\psi_1 = 1 - \frac{\ell}{\xi} \quad ; \quad \psi_2 = \frac{\ell}{\xi}$$

For konstant t fås endvidere:

$$\psi_0 = \frac{t}{2EA} (\ell\xi - \xi^2)$$

Det skal bemærkes at ovenstående formulering af udbøjningsfunktionen v som en linearkombination af de elementære udbøjningsfunktioner ψ_0, ψ_1 og ψ_2 igen er et udtryk for superpositionsprincippet anvendt på deformationsstørrelser.

Anvendes beregningsmodellens fysiske og geometriske betingelse på udtrykket for v får man:

$$\begin{aligned}
N(\xi) &= EA\epsilon = EA v'(\xi) \\
&= EA (\psi'_0(\xi) + u_\xi^{e1} \psi'_1 + u_\xi^{e2} \psi'_2) \\
&= N_0(\xi) + u_\xi^{e1} N_1 + u_\xi^{e2} N_2
\end{aligned}$$

Her er N_1 og N_2 defineret ved:

$$\begin{aligned}
N_1 &= EA \psi'_1 = -\frac{\ell}{EA} \\
N_2 &= EA \psi'_2 = \frac{\ell}{EA}
\end{aligned}$$

3.3 Stivhedsmatricen

Indsættes koordinaterne $\xi = 0$ og $\xi = \ell$ svarende til elementets endepunkter i udtrykkene for snitkræfterne N , V og M og anvendes den tidligere udledte sammenhæng mellem snitkræfter og reaktioner fås endelig den søgte relation mellem reaktioner og knudelflytninger:

$$\begin{aligned}
r_\xi^{e1} &= \frac{EA}{\ell} u_\xi^{e1} - \frac{EA}{\ell} u_\xi^{e2} - N_0(0) \\
r_\eta^{e1} &= \frac{12EI}{\ell^3} u_\eta^{e1} + \frac{6EI}{\ell^2} \alpha^{e1} - \frac{12EI}{\ell^3} u_\eta^{e2} + \frac{6EI}{\ell^2} \alpha^{e2} + M'_0(0) \\
m^{e1} &= \frac{6EI}{\ell^2} u_\eta^{e1} + \frac{4EI}{\ell} \alpha^{e1} - \frac{6EI}{\ell^2} u_\eta^{e2} + \frac{2EI}{\ell} \alpha^{e2} - M_0(0) \\
r_\xi^{e2} &= -\frac{EA}{\ell} u_\xi^{e1} + \frac{EA}{\ell} u_\xi^{e2} + N_0(\ell) \\
r_\eta^{e2} &= -\frac{12EI}{\ell^3} u_\eta^{e1} - \frac{6EI}{\ell^2} \alpha^{e1} + \frac{12EI}{\ell^3} u_\eta^{e2} - \frac{6EI}{\ell^2} \alpha^{e2} - M'_0(\ell) \\
m^{e2} &= \frac{6EI}{\ell^2} u_\eta^{e1} + \frac{2EI}{\ell} \alpha^{e1} - \frac{6EI}{\ell^2} u_\eta^{e2} + \frac{4EI}{\ell} \alpha^{e2} + M_0(\ell)
\end{aligned}$$

Anvendes matrixnotation kan ovenstående formuleres i en enkelt ligning, der benævnes elementets *grundligning*:

$$\begin{aligned}
r_L^e &= K_L^e a_L^e - s_L^e \quad \text{eller} \\
f_L^e &= K_L^e a_L^e \quad , \quad f_L^e = r_L^e + s_L^e
\end{aligned}$$

Her er den kvadratiske matrix K_L^e defineret ved:

$$K_L^e = E \begin{bmatrix} \frac{A}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{A}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12I}{\ell^3} & \frac{6I}{\ell^2} & 0 & -\frac{12I}{\ell^3} & \frac{6I}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6I}{\ell^2} & \frac{4I}{\ell} & 0 & -\frac{6I}{\ell^2} & \frac{2I}{\ell} \\ -\frac{A}{\ell} & 0 & 0 & \frac{A}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12I}{\ell^3} & -\frac{6I}{\ell^2} & 0 & \frac{12I}{\ell^3} & -\frac{6I}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6I}{\ell^2} & \frac{2I}{\ell} & 0 & -\frac{6I}{\ell^2} & \frac{4I}{\ell} \end{bmatrix}$$

K_L^e betegnes bjælkeelementets *stivhedsmatrix* udtrykt i lokale koordinater. Bemærk at matricen er *symmetrisk*.

Søjlevektoren s_L^e er defineret ved:

$$s_L^e = \begin{bmatrix} s_L^{e1} \\ s_L^{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_0(0) \\ -M'_0(0) \\ M_0(0) \\ -N_0(\ell) \\ M'_0(\ell) \\ -M_0(\ell) \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 6t\ell \\ 6p\ell \\ p\ell^2 \\ 6t\ell \\ 6p\ell \\ -p\ell^2 \end{bmatrix}$$

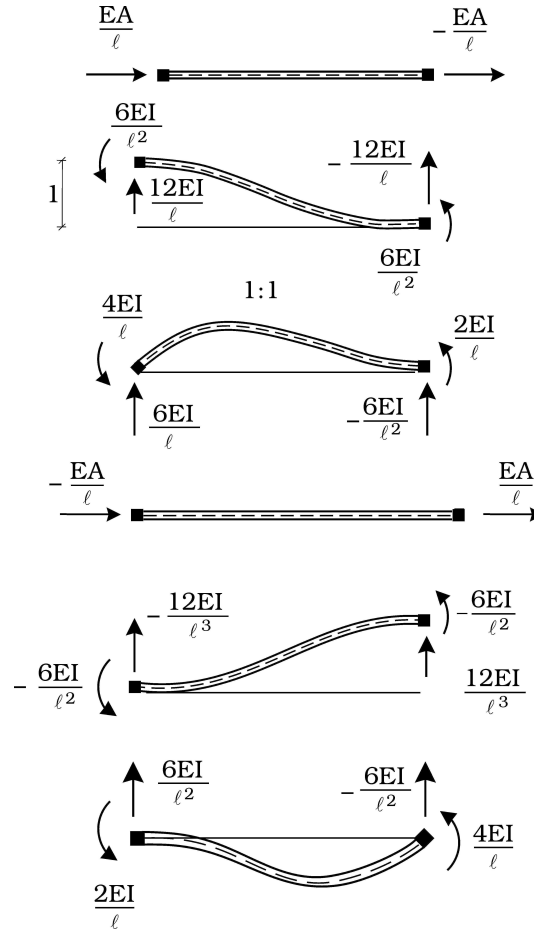
hvor søjlevektoren til højre kun gælder for konstant t, p .

I det følgende benævnes s_L^e som elementets *elementlastvektor* og $f_L^e = r_L^e + s_L^e$ som elementets *lastvektor*. Sidstnævnte består da af såvel bidrag fra elementlaste s_L^e som af de endepunktkræfter r_L^e , der følger af knudflytningerne a_L^e .

Bemærk at søjlerne i stivhedsmatricen udtrykker de kræfter, der skal sættes på elementets knuder for at etablere elementarflytningsfunktionerne $\psi_1, \varphi_1, \varphi_2, \psi_2, \varphi_3, \varphi_4$. Se Figur 3.6.

3.4 Indføring af hængsel i et knudepunkt

I mange statisk ubestemte rammekonstruktioner bruges indre hængsler (charniers) til at reducere bøjningsmomenterne. Derfor er det interessant at se på, hvorledes et hængsel kan



Figur 3.6: Endepunktskræfter svarende til elementarflytningsfunktionerne

indføres i et bjælke knudepunkt. Når der indføres et hængsel betyder det, at der kommer en ekstra ligevægtsligning; men også, at der kommer et ekstra element i responsevektoren a_L^e , idet responsevektoren i knudepunktet med hængslet nu har fire elementer. Ud over de normale tre elementer er der kommet en ekstra vinkeldrejning som følge af, at der kan tillades et knæk i udbøjningskurven hen over hængslet. For at undgå at ændre antallet (3) af elementer i responsevektoren og dermed også elementstivhedsmatricen bruges den ekstra ligevægtsligning direkte til at eliminere vinkeldrejningen ved hængslet. Dermed udgår denne vinkeldrejning helt af den efterfølgende analyse og hængslet medfører blot, at elementstivhedsmatricen K_L^e og lastvektoren s_L^e får en anden form end den, som er givet 3.3; men med samme dimensioner. Udledningen af den nye stivhedsmatrice og lastvektor er givet neden for, hvor der vælges at se på indføring af et hængsel i bjælkens knudepunkt 2.

Da momentet her så er lig med nul, medfører den sidste (dvs 6.) ligning i

$$r_L^e = K_L^e a_L^e - s_L^e$$

at

$$\begin{aligned}
 r_L^e(6) &= \sum_{i=1}^6 K_L^e(6, i) a_L^e(i) - s_L^e(6) = 0 \quad \text{eller} \\
 0 &= \sum_{i=1}^5 K_L^e(6, i) a_L^e(i) + K_L^e(6, 6) a_L^e(6) - s_L^e(6) \quad \text{eller} \\
 a_L^e(6) &= - \left(\sum_{i=1}^5 K_L^e(6, i) a_L^e(i) - s_L^e(6) \right) / K_L^e(6, 6)
 \end{aligned}$$

Dermed kan $a_L^e(6)$ elimineres fra beregningerne:

$$\begin{aligned}
 r_L^e(j) &= \sum_{i=1}^6 K_L^e(j, i) a_L^e(i) - s_L^e(j) \\
 &= \sum_{i=1}^5 K_L^e(j, i) a_L^e(i) + K_L^e(j, 6) a_L^e(6) - s_L^e(j) \\
 &= \sum_{i=1}^5 K_L^e(j, i) a_L^e(i) - K_L^e(j, 6) \left(\sum_{i=1}^5 K_L^e(6, i) a_L^e(i) - s_L^e(6) \right) / K_L^e(6, 6) - s_L^e(j) \\
 &= \sum_{i=1}^5 [K_L^e(j, i) - K_L^e(j, 6) K_L^e(6, i) / K_L^e(6, 6)] a_L^e(i) - [s_L^e(j) - K_L^e(j, 6) s_L^e(6) / K_L^e(6, 6)] \\
 &\equiv \sum_{i=1}^6 K_{L,h}^e(j, i) a_L^e(i) - s_{L,h}^e(j)
 \end{aligned}$$

hvor $K_{L,h}^e$ kan udregnes til ved brug af K_L^e fra 3.3:

$$K_{L,h}^e = E \begin{bmatrix} \frac{A}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{A}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3I}{\ell^3} & \frac{3I}{\ell^2} & 0 & -\frac{3I}{\ell^3} & 0 \\ 0 & \frac{3I}{\ell^2} & \frac{3I}{\ell} & 0 & -\frac{3I}{\ell^2} & 0 \\ -\frac{A}{\ell} & 0 & 0 & \frac{A}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3I}{\ell^3} & -\frac{3I}{\ell^2} & 0 & \frac{3I}{\ell^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

og hvor den nye lastvektor bliver, igen ved brug af K_L^e fra 3.3:

$$s_{L,h}^e = \begin{bmatrix} s_L^e(1) \\ s_L^e(2) - \frac{3s_L^e(6)}{2\ell} \\ s_L^e(3) - \frac{s_L^e(6)}{2} \\ s_L^e(4) \\ s_L^e(5) + \frac{3s_L^e(6)}{2\ell} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4t\ell \\ 5p\ell \\ p\ell^2 \\ 4t\ell \\ 3p\ell \\ 0 \end{bmatrix}$$

hvor søjlevektoren til højre kun gælder for konstant t, p . Den nye stivhedmatrice $K_{L,h}^e$ og lastvektor $s_{L,h}^e$ erstatter da dem fra 3.3:

$$r_L^e = K_{L,h}^e a_L^e - s_{L,h}^e$$

Det ses direkte af udtrykkene for $K_{L,h}^e$ og $s_{L,h}^e$, at r_L^e ikke afhænger af $a_L^e(6)$ og at $r_L^e(6) = 0$, som var forudsætningen.

3.5 Koordinattransformation

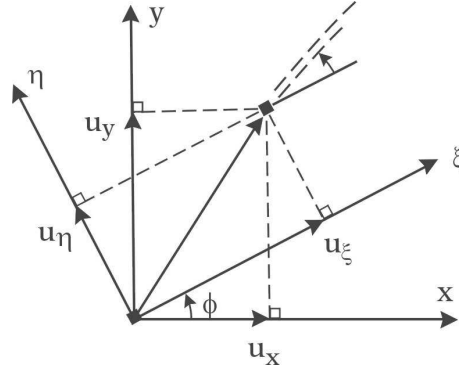
For at kunne benytte de netop udledte elementegenskaber i forbindelse med opbygningen af det samlede system er det nødvendigt, at disse egenskaber udtrykkes i et koordinatsystem, der er fælles for samtlige elementer - dvs. det globale koordinatsystem.

Vi betragter et element hvis lokale koordinatsystem danner en vinkel ϕ (regnet positiv mod uret) med det globale koordinatsystem. Fokuseres i første omgang på flytningen af den ene af elementets lokale knuder, udgøres denne flytning dels af en vinkeldrejning og dels af en forskydning (translation). Vinkeldrejningen α er (så længe vi betragter en plan konstruktion) en skalar, medens forskydningen må beskrives som en vektor. Vi har hidtil beskrevet denne vektor ved hjælp af dens koordinater u_ξ og u_η i elementets lokale koordinatsystem; men for at sammensætte bjælker med forskellig retninger i det globale system må forskydningsvektorerne opløses efter det fælles globale xy-system. I det globale xy-system benævnes de tilsvarende koordinater u_x og u_y . Ved at betragte Figur 3.7 ses, at sammenhængen mellem koordinaterne i de to systemer kan udtrykkes ved nedenstående ligninger.

$$u_\xi = u_x \cos \phi + u_y \sin \phi$$

$$u_\eta = -u_x \sin \phi + u_y \cos \phi$$

Vinkeldrejningen α har, som skalar, samme værdi i de to systemer.



Figur 3.7: Koordinattransformation

Da flytningerne af elementets to knuder transformeres ens, kan vi på matrixform opskrive følgende relation mellem elementets responsvektor i lokale og globale koordinater:

$$\begin{bmatrix} u_{\xi}^{e1} \\ u_{\eta}^{e1} \\ \alpha^{e1} \\ u_{\xi}^{e2} \\ u_{\eta}^{e2} \\ \alpha^{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x^{e1} \\ u_y^{e1} \\ \alpha^{e1} \\ u_x^{e2} \\ u_y^{e2} \\ \alpha^{e2} \end{bmatrix}$$

eller på kompakt form

$$a_L^e = L a^e$$

Matricen L kaldes elementets *Transformationsmatrix* og a^e er elementets responsvektor i globale koordinater. Det skal i øvrigt bemærkes, at elementerne i L matricen kan bestemmes direkte ud fra bjælkens endepunktskoordinater (x^{e1}, y^{e1}) , (x^{e2}, y^{e2}) i det globale xy-koordinatsystem:

$$\cos\phi = \frac{x^{e2} - x^{e1}}{\ell} \quad ; \quad \sin\phi = \frac{y^{e2} - y^{e1}}{\ell}$$

Det lader sig let verificere, at transformationsmatricen besidder følgende særlige egenskab:

$$L^T L = I$$

hvor I er en 6x6 enhedsmatrix.

Da søjlevektorerne r_L^e og s_L^e har samme struktur som responsvektoren a_L^e , må de transformere på samme måde. Altså gælder også følgende:

$$r_L^e = L r^e \quad ; \quad s_L^e = L s^e$$

Vi kan dermed transformere elementets grundligning

$$r_L^e + s_L^e = K_L^e a_L^e$$

til globale koordinater.

Indsættes de netop bestemte transformationsrelationer og multipliceres på begge sider af lighedstegnet fra venstre med den transponerede L matrix: L^T fås

$$L^T L r^e + L^T L s^e = L^T K_L^e L a^e$$

Da $L^T L = I$ fås som slutresultatet *elementets grundligning i globale koordinater*:

$$f^e = r^e + s^e = K^e a^e$$

$$\text{hvor } K^e = L^T K_L^e L$$

K^e betegnes elementstivhedsmatricen i *globale* koordinater. Da K_L^e er symmetrisk, ses det af beregningsudtrykket for K^e , at det samme gælder for denne matrix.

Det bemærkes til slut, at

$$s^e = L^T s_L^e$$

som følge af

$$L^T L = I$$

Denne side er bevidst efterladt blank.

Kapitel 4

Systemopbygning

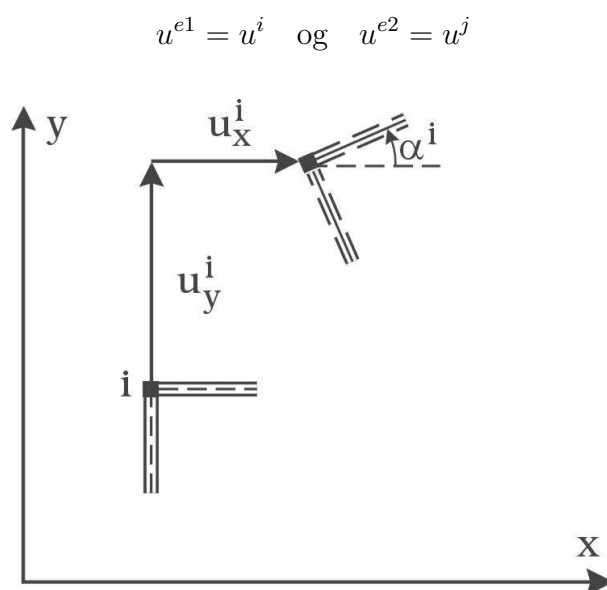
Opgaven er nu at opbygge systemstivhedsmatricen K på basis af de enkelte elementers stivhedsmatricer K^e . I den forbindelse er det hensigtsmæssigt at betragte systemet som bestående af et antal (materielle) systemknuder, indbyrdes forbundet v.h.a. elementer.

Analogt til de betegnelser, der blev indført for flytningerne af - og kræfterne på - et elements lokale knuder indføres betegnelserne u^i og r^i for henholdsvis flytningen af og kræfterne på systemknuderne. Her refererer indeks i til den aktuelle systemknodes globale knudenummer. Tilsvarende indføres betegnelserne a for *systemets responsvektor* og r for *systemets knudelastvektor*.

$$u^i = \begin{bmatrix} u_x^i \\ u_y^i \\ \alpha^i \end{bmatrix} ; a = \begin{bmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^i \\ \vdots \\ u^{n_k} \end{bmatrix} ; r^i = \begin{bmatrix} r_x^i \\ r_y^i \\ m^i \end{bmatrix} ; r = \begin{bmatrix} r^1 \\ \vdots \\ r^i \\ \vdots \\ r^{n_k} \end{bmatrix}$$

4.1 Geometrisk betingelse

Lad nu element e gå fra systemknode i til systemknode j . Elementets lokale knudenumre 1 og 2 kommer således til at svare til de globale knudenumre i og j . Betingelsen for at element e er stift forbundet til systemknuderne i og j kan nu udtrykkes ved, at lokale og globale knuder "følges ad" når systemet belastes. Det vil sige at, se Figur 4.1:



Figur 4.1: Stift forbundne bjælker

At denne betingelse også kan formuleres som en sammenhæng mellem elementets og systemets responsevektorer indses ved at betragte følgende udtryk:

$$\begin{bmatrix} u^{e1} \\ u^{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & I & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & I & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^i \\ \vdots \\ u^j \\ \vdots \\ u^{n_k} \end{bmatrix}$$

På (endnu mere) kompakt form fås:

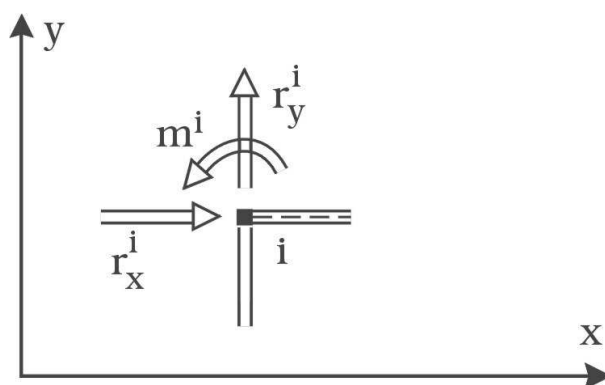
$$a^e = T^e a$$

Matricen T^e , der udtrykker sammenhængen mellem element e og systemknuderne, kaldes elementets *topologimatrix*.

T^e er karakteriseret ved at indeholde lutter nulmatricer (af dimension 3×3), bortset fra, at der i første række på plads nr. i , og i anden række på plads nr. j er indsat en 3×3 enhedsmatrix.

4.2 Statisk betingelse

Systemets statiske betingelse udtrykker, at de enkelte systemknuder skal være i ligevægt. Betragtes f.eks. knude nr. i skal belastningen r^i således være i ligevægt med de kræfter, som de tilstødende elementer påvirker knuden med. Lad igen element nr. e gå fra knude i til knude j .



Figur 4.2: Knudepunktskræfter

Med de tidligere indførte betegnelser er r^{e1} åbenbart et udtryk for de kræfter, som knude i påvirker elementet med. Omvendt vil elementet påvirke knude i med lige så store; men modsat rettede kræfter. Dertil kommer bidrag fra eventuelt andre bjælker, som har knudepunkt i knude i . Ligevægt af knude i kan derfor udtrykkes ved:

$$r^i = r^{e1} + \text{bidrag fra andre elementer}$$

På samme måde fås for knude nr. j

$$r^j = r^{e2} + \text{bidrag fra andre elementer}$$

Ligevægten af samtlige knuder kan nu udtrykkes på formen:

$$r = \begin{bmatrix} r^1 \\ \vdots \\ r^i \\ \vdots \\ r^j \\ \vdots \\ r^{n_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ r^{e1} \\ \vdots \\ r^{e2} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \text{bidrag fra andre elementer}$$

Med anvendelse af den netop introducerede topologimatrix kan bidraget fra element nr. e (vektoren på højre side af lighedstegnet) også skrives på formen:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ n_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ r^{e1} \\ \vdots \\ r^{e2} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ I & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & I \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r^{e1} \\ r^{e2} \end{bmatrix} = T^{eT} r^e$$

Da bidragene fra de resterende elementer må kunne skrives på samme form, kan ligevægten af samtlige knuder udtrykkes ved:

$$r = \sum_{e=1}^{n_e} T^{eT} r^e$$

4.3 Grundligning

Indsættes elementets grundligning $r^e = K^e a^e - s^e$ og systemets geometriske betingelse $a^e = T^e a$ i den statiske betingelse fås:

$$\begin{aligned} r &= \sum_{e=1}^{n_e} T^{eT} (K^e a^e - s^e) \\ &= \sum_{e=1}^{n_e} T^{eT} K^e T^e a - \sum_{e=1}^{n_e} T^{eT} s^e \\ &= \left(\sum_{e=1}^{n_e} T^{eT} K^e T^e \right) a - \sum_{e=1}^{n_e} T^{eT} s^e \end{aligned}$$

idet responsvektoren a er den samme for alle leddene i summationen, og derfor kan sættes uden for summationstegnet.

Indføres *systemets elementlastvektor* s og *systemstivhedsmatricen* K ved nedenstående udtryk

$$S = \sum_{e=1}^{n_e} T^{eT} s^e \quad ; \quad K = \sum_{e=1}^{n_e} T^{eT} K^e T^e$$

kan *systemets grundligning* endeligt skrives på den ønskede form:

$$f = r + s = K a$$

Til sidst skal bemærkes, at eventuelle koncentrerede kræfter (opløst i globale retninger) og momenter i knudepunkterne direkte adderes til lastvektoren s på de relevante pladser.

Denne side er bevidst efterladt blank.

Kapitel 5

Systemanalyse

5.1 Randbetingelser

Vi har indtil nu betragtet responsvektoren a som ukendt og lastvektoren $f = r + s$ som kendt. Når konstruktionen er understøttet, er det imidlertid ensbetydende med, at nogle af knudflytningerne er kendte. Dette forhold omtales som problemets *geometriske* eller *essentielle randbetingelser*. Bemærk, at der til enhver kendt knudflytning svarer netop en ukendt knudelast (reaktion) således, at det samlede antal ubekendte altid svarer til dimensionen af stivhedsmatricen. I princippet kan man derfor reorganisere grundligningerne som vist nedenfor.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + s_1 \\ r_2 + s_2 \end{bmatrix}$$

Her repræsenterer a_1 , r_1 søjlevektorer med de ukendte flytninger og de tilsvarende kendte knudelaste, medens a_2 , r_2 er søjlevektorer, der repræsenterer de kendte knudflytninger og de tilsvarende ukendte reaktioner. Elementlastbidragene, s , må anses for at være kendte. $K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22}$ er de tilhørende delmatricer, taget direkte fra den globale stivhedsmatrix K . Herefter kan de ukendte flytninger a_1 bestemmes af ligningsystemet:

$$K_{11} a_1 = r_1 + s_1 - K_{12} a_2$$

Endelig kan de ukendte reaktioner bestemmes af:

$$r_2 = K_{21} a_1 + K_{22} a_2 - s_2$$

Af programmeringstekniske grunde foretrækker man dog ofte at introducere de geometriske randbetingelser ved følgende metode, der har den fordel, at man ikke skal flytte rundt på elementer i stivhedsmatricen som gjort lige ovenfor. Ulempen er, at ligningssystemet, som skal løses, bevarer sin oprindelige dimension og ikke får den lidt mindre dimension, som K_{11} har. Det har dog mindre betydning med dagens computerkraft.

Lad a_k være en kendt flytning (ikke nødvendigvis $=0$). Den k 'te grundligning erstattes da af $a_k = a_k$, dvs

$$K_{M,ki} = 0 \quad (i \neq k) \quad , \quad K_{M,kk} = 1 \quad , \quad f_{M,k} = a_k$$

hvor M betegner modificerede størrelser. For at bevare en symmetrisk stivhedmatrice udføres desuden følgende modifikationer:

$$K_{M,ik} = 0 \quad , \quad f_{M,i} = f_i - K_{ik}a_k \quad (i \neq k)$$

Grundligningen modificeres på denne måde for alle de kendte flytninger. Til slut udnyttes, at hvis a_i er ukendt, så er $r_i = 0$, og dermed $f_i = s_i$. Resultatet er et nyt ligningssystem:

$$K_M a = f_M$$

På matrixform kan ovenstående transformation af stivhedsmatricen og lastvektoren skrives (efter lidt omskrivning):

$$K_M = (A^T K A + B) \quad , \quad f_M = B f + (B - A^T K B) a$$

hvor $A (= A^T)$ og $B = (I - A)$ matricerne begge er diagonalmatricer med 0, henholdsvis 1 på de pladser (k), hvor a_k er kendt og omvendt. Denne formulering kan være en fordel, hvis f.eks. Maple bruges til matrixmultiplikationerne.

Da højresiden f_M er kendt og såfremt den understøttede konstruktion ikke er bevægelig (og dermed, at K_M har determinanten nul), kan det modificerede ligningssystem løses ved standard numeriske metoder. Løsningsvektoren a kommer til at indeholde samtlige knudeflytninger inklusive de på forhånd kendte. Reaktionen kan derefter bestemmes ved at indsætte a i ligningen $r = K a - s$. Den derved beregnede knudelastvektor r indeholder nu reaktionerne ved alle de understøttede knuder.

5.2 Resultater

Efter systemets responsvektor er bestemt, kan det enkelte elements responsvektor i lokale koordinater bestemmes af:

$$a_L^e = La^e = LT^e a$$

hvor L er elementets transformationsmatrix og T^e elementets topologimatrix. Herefter kan snitkræfter og udbøjninger bestemmes ud fra de i Kapitlet "Elementegenskaber" opstillede formeludtryk:

$$w(\xi) = \varphi_0(\xi) + u_\eta^{e1}\varphi_1(\xi) + \alpha^{e1}\varphi_2(\xi) + u_\eta^{e2}\varphi_3(\xi) + \alpha^{e2}\varphi_4(\xi)$$

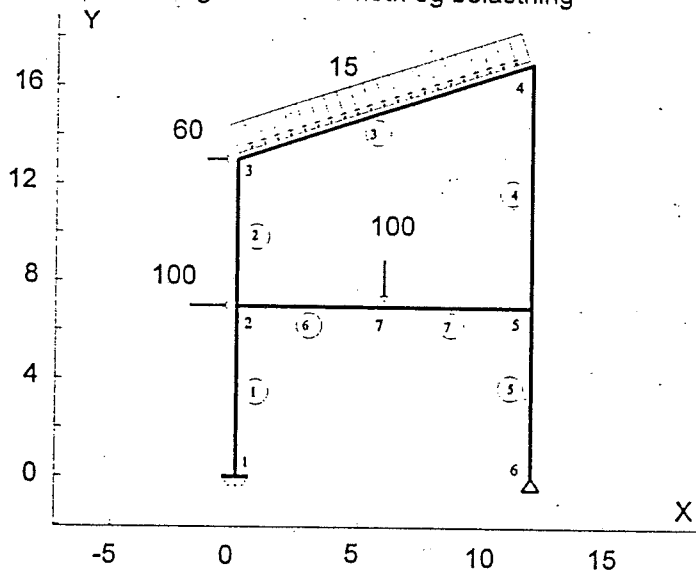
$$v(\xi) = \psi_0(\xi) + u_\xi^{e1}\psi_1(\xi) + u_\xi^{e2}\psi_2(\xi)$$

$$M(\xi) = M_0(\xi) + u_\eta^{e1}M_1(\xi) + \alpha^{e1}M_2(\xi) + u_\eta^{e2}M_3(\xi) + \alpha^{e2}M_4(\xi)$$

$$V(\xi) = M'_0(\xi) + u_\eta^{e1}M'_1(\xi) + \alpha^{e1}M'_2(\xi) + u_\eta^{e2}M'_3(\xi) + \alpha^{e2}M'_4(\xi)$$

$$N(\xi) = N_0(\xi) + u_\xi^{e1}N_1 + u_\xi^{e2}N_2$$

Figur 2 Geometri og belastning



```

% ~~~~~
%                               KNUDEPUNKTSKOORDINATER
% ~~~~~
%      _X-koordinat
%      | _Y-koordinat
%      | | _Underforstaaet
%      | | | _knudenummer.
%
X=[ 0  0      % 1
    0  7      % 2
    0 13      % 3
   12 17      % 4
   12  7      % 5
   12  0      % 6
    6  7] ; % 7

% ~~~~~
%                               ELEMENTDEFINITIONER. (Topologitabel)
% ~~~~~
%      _k1 Knudenummer i elementets ene ende
%      | _k2 Knudenummer i elementets anden ende
%      | | _elementtype ( Se nedenfor.)
%      | | | _ref Referancenr. til elementegenskaber (Prop)
%      | | | | _Underforstaaede
%      | | | | | _elementnumre.
%
TT=[1  2  0  1      % 1
    2  3  0  1      % 2
    3  4  0  2      % 3
    4  5  0  1      % 4
    5  6  0  1      % 5
    2  7  0  2      % 6
    7  5  0  2] ; % 7

% Element-typer: X ~ stiv forbindelse, O ~ charnier.
%
% type 0 : k1 X-----X k2
% type 1 : k1 O-----X k2
% type 2 : k1 X-----O k2
% type 3 : k1 O-----O k2
    
```

```

%-----
%                               ELEMENTEGENSKABER
%-----
%      _E: Elasticitetskoefficient
%      |  _A: Tvaersnitsareal
%      |  |  _I: Inertimoment
%      |  |  |  _Underforstaaet
%      |  |  |  |  referancenr.
%
Prop=[1 100000 1      % 1
      1 100000 2];    % 2

%-----
%                               GEOMETRISKE RANDBETINGELSER. (Kendte flytninger.)
%-----
%      _Knudenummer.
%      |  _Retning (1: X   2: Y   3: drejning)
%      |  |  _Stoerrelse
%      |  |  |
%
Bc=[ 1 1 0
     1 2 0
     1 3 0
     6 1 0
     6 2 0 ];

%-----
%                               KNUDELASTE
%-----
%      _Knudenummer.
%      |  _Retning (1: X   2: Y   3: moment)
%      |  |  _Stoerrelse
%      |  |  |
%
Nload=[2  1  100
        3  1  60
        7  2 -100] ;

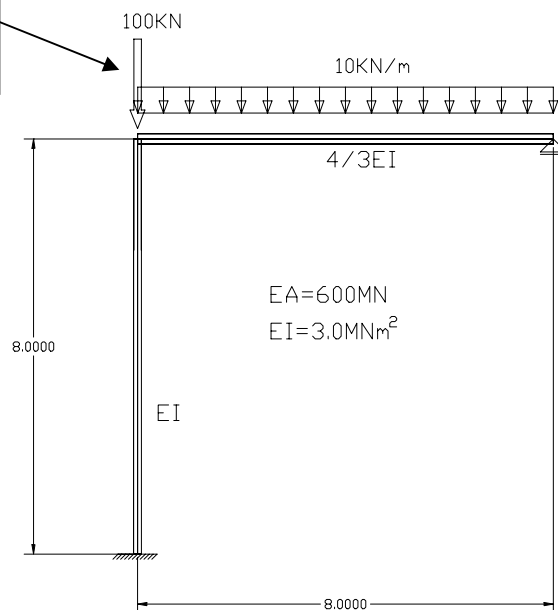
%-----
%                               ELEMENTLASTE
%-----
%      _Elementnummer.
%      |  _Retning (1: X   2: Y   4: x(lokal) 5: y(lokal) )
%      |  |  _Stoerrelse
%      |  |  |
%
Eload=[ 3  5 -15] ;

%-----
%                               DATA SLUT

```

41235 Bygningsteknik II
Opgave 1

Der ses bort fra
enkeltkraften 100kN i
denne opgave



1. Opstil manuelt systemets stivhedsmatrix og lastvektor. For hvert element bestemmes:
 - a. Stivhedsmatricen i lokale koordinater
 - b. Lastvektoren i lokale koordinater
 - c. Transformation fra lokale til globale koordinater
 - d. Indsættelse i den globale stivhedsmatrix og -lastvektor
2. Indførelse af randbetingelser ved sletning af rækker/søjler
3. Sammenligning med resultatet fra deformationsmetoden

Opgave 1 spørgsmål 1

Den vandrette bjælke betegnes i det følgende for bjælke 1 og den lodrette for bjælke 2.

a) Lokale stivhedmatricer

$$K_L^e = \frac{EI}{\ell} \begin{bmatrix} \frac{A}{I} & 0 & 0 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{\ell^2} & \frac{6}{\ell} & 0 & -\frac{12}{\ell^2} & \frac{6}{\ell} \\ 0 & \frac{6}{\ell} & 4 & 0 & -\frac{6}{\ell} & 2 \\ -\frac{A}{I} & 0 & 0 & \frac{A}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{\ell^2} & -\frac{6}{\ell} & 0 & \frac{12}{\ell^2} & -\frac{6}{\ell} \\ 0 & \frac{6}{\ell} & 2 & 0 & -\frac{6}{\ell} & 4 \end{bmatrix}$$

eller, for håndregning bedre i følgende underopdeling i fire 3x3 undermatricer:

$$K_L^e \equiv \begin{bmatrix} K_{L11}^e & K_{L12}^e \\ K_{L21}^e & K_{L22}^e \end{bmatrix}$$

Dette gælder direkte for bjælke 2 medens I erstattes med $4I/3$ for bjælke 1.

b) Lastvektor: For bjælke 1 med konstant linielast $-p$ (fortegnet er -, da modsat rettet den lokale koordinatakse η):

$$[s_L^1] = \begin{bmatrix} N_0(0) \\ -M'_0(0) \\ M_0(0) \\ -N_0(l) \\ M'_0(l) \\ -M_0(l) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -pl/2 \\ -p\ell^2/12 \\ 0 \\ -pl/2 \\ p\ell^2/12 \end{bmatrix}}_{\substack{p=\text{constant} \\ t=0}}$$

medens lastvektoren er nul for bjælke 2 (ingen ydre last). Bemærk i øvrigt, at s-vektoren har modsat fortegn i forhold til fortegnskonventionen, når man bruger deformationsmetoden (der formelt kan skrives $r = Ka + s$)

c)

Lokal stivhedmatrice K^1 i **globale koordinater** for den vandrette bjælke (bjælke 1) er lig med (bøjningsstivhed $4EI/3$):

$$K^1 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16EI}{\ell^3} & \frac{8EI}{\ell^2} & 0 & -\frac{16EI}{\ell^3} & \frac{8EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{8EI}{\ell^2} & \frac{16EI}{3\ell} & 0 & -\frac{8EI}{\ell^2} & \frac{8EI}{3\ell} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{16EI}{\ell^3} & -\frac{8EI}{\ell^2} & 0 & \frac{16EI}{\ell^3} & -\frac{8EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{8EI}{\ell^2} & \frac{8EI}{3\ell} & 0 & -\frac{8EI}{\ell^2} & \frac{16EI}{3\ell} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 \end{bmatrix}$$

hvor undermatricen K_{ij}^e betegner den 3x3 undermatrice for element e, der sammenknytter deformationen i det lokale knudepunkt j med reaktionerne (tvangskræfterne) i det lokale knudepunkt i (i og j kan kun have værdierne 1 og 2).

Den lokale stivhedmatrice K^2 i **globale koordinater** for den lodrette bjælke (bjælke 2) er lig med $K^2 = L^T K_L^2 L$, hvor, idet $\phi=90$ grader:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} d & \underline{0} \\ \underline{0} & d \end{bmatrix}$$

hvor

$$d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrixmultiplikation giver efter nogen regning:

$$K^2 = L^T K_L^2 L = \begin{bmatrix} d^T & 0 \\ 0 & d^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{L11}^2 & K_{L12}^2 \\ K_{L21}^2 & K_{L22}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^T K_{L11}^2 d & d^T K_{L12}^2 d \\ d^T K_{L21}^2 d & d^T K_{L22}^2 d \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{12EI}{\ell^3} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & -\frac{12EI}{\ell^3} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 \\ -\frac{6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{4EI}{\ell} & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{2EI}{\ell} \\ -\frac{12EI}{\ell^3} & 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{12EI}{\ell^3} & 0 & \frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 \\ -\frac{6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{2EI}{\ell} & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} K_{11}^2 & K_{12}^2 \\ K_{21}^2 & K_{22}^2 \end{bmatrix}$$

Lastvektoren for bjælke 1 skal i lighed med stivmatricen ikke transformeres, da det lokale og globale koordinatsystem er det samme.

$$[s^1] = \begin{bmatrix} 0 \\ -pl/2 \\ -p\ell^2/12 \\ 0 \\ -pl/2 \\ p\ell^2/12 \end{bmatrix}$$

d)

Global stivhedsmatrice: Knudepunkterne nummereres globalt således, at venstre og højre endepunkt af den vandrette bjælke er henholdsvis punkt 1 og 2. Dette svarer til, at 1. og 2. endepunkt lokalt af bjælke 1 er sammenfaldende med de globale knudepunkter 1 og 2.

Punktet ved indspændingen af bjælke 2 betegnes knudepunkt 3. Dermed haves, at 1. og 2. endepunkt for bjælke 2 er sammenfaldende med knudepunkt 3 og 1. Rækkefølgen følger af, at bjælken er drejet 90 grader. Hvis man havde valgt -90 grader, så havde det været omvendt.

Topologimatricerne bliver da

$$T^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad T^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

og hermed kan summen af de transformerende stivhedsmatricer beregnes:

$$K = \sum_{e=1}^n T^{e^T} K^e T^e =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} + \frac{12EI}{\ell^3} & 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & 0 & \frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{16EI}{\ell^3} + \frac{EA}{\ell} & \frac{8EI}{\ell^2} & 0 & -\frac{16EI}{\ell^3} & \frac{8EI}{\ell^2} & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 \\ \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{8EI}{\ell^2} & \frac{16EI}{3\ell} + \frac{4EI}{\ell} & 0 & -\frac{8EI}{\ell^2} & \frac{8EI}{3\ell} & -\frac{6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{2EI}{\ell} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{16EI}{\ell^3} & -\frac{8EI}{\ell^2} & 0 & \frac{16EI}{\ell^3} & -\frac{8EI}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8EI}{\ell^2} & \frac{8EI}{3\ell} & 0 & -\frac{8EI}{\ell^2} & \frac{16EI}{3\ell} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{12EI}{\ell^3} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 \\ \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{2EI}{\ell} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix}$$

Det er dog ligesom ved transformationsmatricen L lettere ved håndregning at skrive topologimatricerne ved brug af 3x3 undermatricer:

$$T^1 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \quad T^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dermed bliver matrixmultiplikationerne lettere:

$$T^{1T} K^1 T^1 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T^{2T} K^2 T^2 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11}^2 & K_{12}^2 \\ K_{21}^2 & K_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{12}^2 & 0 & K_{11}^2 \\ K_{22}^2 & 0 & K_{21}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{22}^2 & 0 & K_{21}^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ K_{12}^2 & 0 & K_{11}^2 \end{bmatrix}$$

og dermed

$$K = \left[\begin{array}{c|c|c} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 \\ \hline K_{21}^1 & K_{22}^1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c|c} K_{22}^2 & 0 & K_{21}^2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline K_{12}^2 & 0 & K_{11}^2 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} K_{11}^1 + K_{22}^2 & K_{12}^1 & K_{21}^2 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & 0 \\ K_{12}^2 & 0 & K_{11}^1 \end{bmatrix}$$

hvor K_{ij}^e er givet i c). Resultatet er selvfølgelig det samme.

Lastvektoren s bliver

$$s = \sum_{e=1}^n T^{eT} s^e = T^{1T} s^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -pl/2 \\ -p\ell^2/12 \\ 0 \\ -pl/2 \\ p\ell^2/12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Opgave 1 spørgsmål 2: Randbetingelser indføres som følger:

Eksempel: Flytning a_k kendt, resten ukendte $\rightarrow r_i = 0$ for $i \neq k$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdot & K_{1k} & \cdot & \cdot & K_{1N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{k1} & \cdot & \cdot & K_{kk} & \cdot & \cdot & K_{kN} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{N1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_k \\ \cdot \\ \cdot \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ s_k \\ \cdot \\ \cdot \\ s_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ r_k \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ligningssystemet modificeres :

$$s_i^* = s_i - K_{ik} a_k \Big|_{i=1,2,\dots,n, i \neq k} ; K_{ik}^* = K_{ki}^* = 0 \Big|_{i=1,2,\dots,n, i \neq k} ; K_{kk}^* = 1, s_k^* = a_k, r_k = 0$$

hvor * angiver en modificeret værdi.

I nærværende eksempel er $a_5 = a_7 = a_8 = a_9 = 0$. Dermed haves den modificerede stivhedmatrice for opgave 1:

$$K_M = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} + \frac{12EI}{\ell^3} & 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16EI}{\ell^3} + \frac{EA}{\ell} & \frac{8EI}{\ell^2} & 0 & 0 & \frac{8EI}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{8EI}{\ell^2} & \frac{16EI}{3\ell} + \frac{4EI}{\ell} & 0 & 0 & \frac{8EI}{3\ell} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8EI}{\ell^2} & \frac{8EI}{3\ell} & 0 & 0 & \frac{16EI}{3\ell} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ligningssystemet

$$K_M a = s_M$$

kan nu løses (spørgsmål 5). Her er

$$a = \begin{bmatrix} u_x^1 \\ u_y^1 \\ \alpha^1 \\ u_x^2 \\ u_y^2 \\ \alpha^2 \\ u_x^3 \\ u_y^3 \\ \alpha^3 \end{bmatrix}; \quad s_M = \begin{bmatrix} 0 \\ -pl/2 \\ -p\ell^2/12 \\ 0 \\ 0 \\ p\ell^2/12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

I a -vektoren angiver øvre indeks knudepunktnummer og x, y de globale retninger.

Opgave 1 spørgsmål 3:

For at sammenligne dette ligningssystem med det, som normalt fås ved håndregning ved brug af deformationsmetoden (Opgave 0), så udskrives ligningssystemet:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{EA}{\ell} + \frac{12EI}{\ell^3}\right)u_x^1 + \frac{6EI}{\ell^2}\alpha^1 - \frac{EA}{\ell}u_x^2 &= 0 \\
\left(\frac{16EI}{\ell^3} + \frac{EA}{\ell}\right)u_y^1 + \frac{8EI}{\ell^2}\alpha^1 + \frac{8EI}{\ell^2}\alpha^2 &= -pl/2 \\
\frac{6EI}{\ell^2}u_x^1 + \frac{8EI}{\ell^2}u_y^1 + \left(\frac{16EI}{3\ell} + \frac{4EI}{\ell}\right)\alpha^1 + \frac{8EI}{3\ell}\alpha^2 &= -p\ell^2/12 \\
-\frac{EA}{\ell}u_x^1 + \frac{EA}{\ell}u_x^2 &= 0 \\
\frac{8EI}{\ell^2}u_y^1 + \frac{8EI}{3\ell}\alpha^1 + \frac{16EI}{3\ell}\alpha^2 &= p\ell^2/12
\end{aligned}$$

Dette er 5 ligninger med 5 ubekendte. 4. ligning giver direkte $u_x^1 = u_x^2$. Dermed reduceres 1. ligning til

$$\boxed{\frac{12EI}{\ell^3}u_x^1 + \frac{6EI}{\ell^2}\alpha^1 = 0}$$

Antages som ved håndregningen, at EA er uendelig stor, medfører 2. ligning, at $u_y^1 = 0$. 5. ligning giver dermed

$$\alpha^2 = \frac{p\ell^3}{64EI} - \frac{1}{2}\alpha^1$$

Indsættes dette i 3. ligning fås

$$\boxed{\frac{6EI}{\ell^2}u_x^1 + \frac{8EI}{\ell}\alpha^1 = -\frac{p\ell^2}{8}}$$

De to indrammede ligninger er netop de to ligninger, som fremkom ved deformationsmetoden.

Til slut skal blot illustreres hvorledes indspændingsmomentet i knudepunkt 3 bestemmes. Hertil haves $r_k = \sum_{i=1}^N K_{ki}a_i - s_k$ og dette svarer her til sidste ligning i stivhedsmatricen (før reduktion for randbetingelser):

$$-M_A = r_9 = \frac{6EI}{\ell^2}u_x^1 + \frac{2EI}{\ell}\alpha^1$$

Som jo også er det samme udtrykt som fundet ved deformationsmetoden.

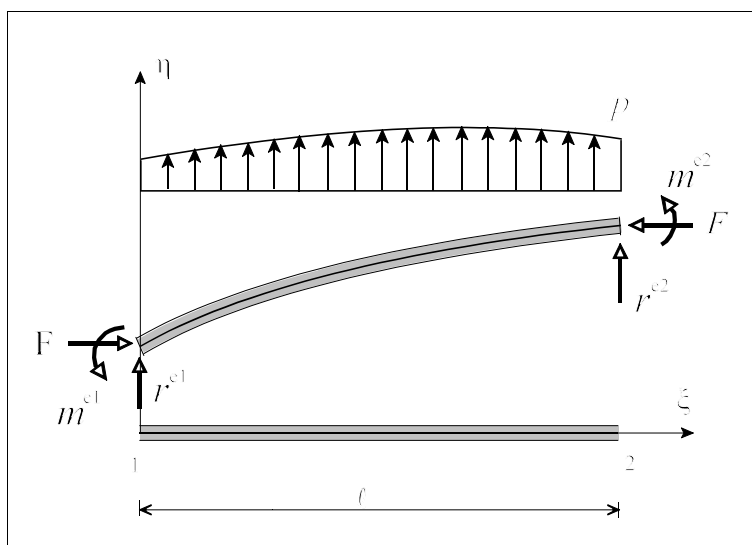
PLANE ELASTISKE BJÆLKESØJLER

Ved en bjælkesøjle forstås i det følgende en bjælke, der er påvirket af en tryknormalkraft af en sådan størrelse, at bjælkens ligevægtsligninger ikke med tilstrækkelig nøjagtighed kan opstilles på basis af den udeformerede bjælkes geometri.

Der vil blive opstillet to beregningsmodeller. Først en traditionel *kontinuert* beregningsmodel udtrykt ved en 4. ordens differentialligning, der for normalkraften nul går over i den sædvanlige bjælkedifferentialligning. På basis af denne model udledes derefter en approksimativ *diskret* beregningsmodel, der for kendt normalkraft resulterer i et sæt lineære ligninger. For normalkraften nul er denne model magen til den sædvanlige diskrete model for bjælker. Grunden, til at en approksimativ model er valgt i stedet for en korrekt model (hvilket havde været en mulighed, da bjælkesøjleens differentialligning kan løses analytisk), er, at den approksimative model skal tjene som introduktion til elementmetoden, der er en generel metode til diskretisering af kontinuerte modeller.

Kontinuert beregningsmodel

Figur 1 viser et bjælkeelement dels i den retliniede, udeformerede tilstand, og dels i den deformede ligevægtstilstand. Bjælkeelementet repræsenterer en bjælkesøjle eller en del af en bjælkesøjle.



Figur 1

Som basis for modelbeskrivelsen indlægges et retvinklet $\xi\eta$ -koordinatsystem, hvor ξ -aksen er sammenfaldende med den *udeformerede* bjælkes tyngdepunktsakse. De enkelte materielle punkter på bjælkeaksen kan derfor karakteriseres ved deres ξ -koordinat i den udeformerede situation. Bjælkeaksens endepunkter 1 og 2 er således bestemt ved koordinaterne 0 og ℓ . Bjælken tænkes - ud over den centralt virkende søjlelast F - at være belastet med en fordelt tværlast med intensiteten p . Det forudsættes, at F er uafhængig af tværubøjningen, både hvad angår størrelse og retning. Ud over de nævnte belastninger er elementet i enderne påvirket af kræfterne r^{e1} og r^{e2} samt momenterne m^{e1} og m^{e2} . Disse påvirkninger kan betragtes som snitkræfter, reaktioner eller ydre last afhængigt af elementets understøtningsforhold.

Geometriske forhold

Flytningen af bjælkeaksen i η -retningen beskrives ved funktionen: $w = w(\xi)$
 Det forudsættes, at den deformerede bjælkeakses vinkel α med ξ -aksen er lille,
 eller mere præcist, at: $|\alpha| \ll 1$

Betragtes nedenstående rækkeudviklinger

$$\tan \alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \dots ; \quad \sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \dots ; \quad \cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \dots$$

ses det, at denne forudsætning medfører, at:

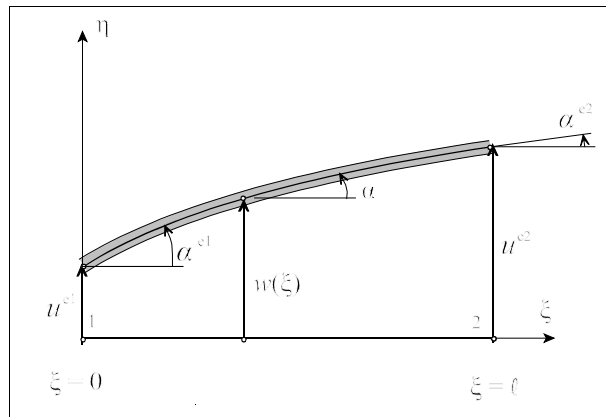
$$w' = \tan \alpha \cong \alpha ; \quad \sin \alpha \cong \alpha \quad \text{og} \quad \cos \alpha \cong 1$$

Vinkeldrejningen α og hældningen w' af bjælkeaksen kan altså betragtes som værende ens.

Da aksialpåvirkningen F forudsættes kendt, har flytningerne i ξ -aksens retning ingen umiddelbar interesse, men det forudsættes dog, at disse er så små, at deres indflydelse på ligevægtsligningerne kan negligeres.

Med de nævnte forudsætninger kan krumningen κ af bjælkeaksen bestemmes af nedenstående udtryk.

$$\kappa = w'' = \frac{d^2 w}{d\xi^2}$$



Figur 2

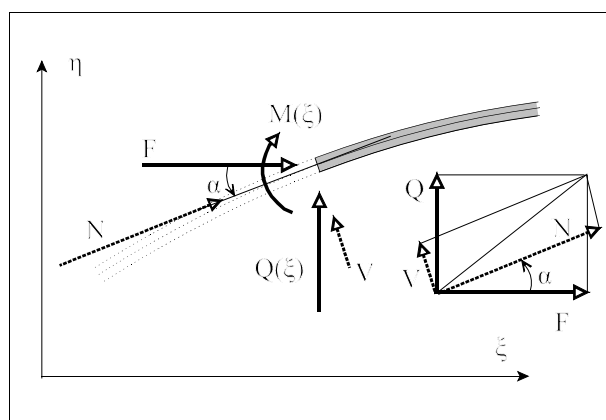
De mulige geometriske randbetingelser er jvf. figur 2

$$w(0) = u^{e1}, \quad w'(0) = \alpha^{e1}, \quad w(l) = u^{e2}, \quad w'(l) = \alpha^{e2}$$

Statiske forhold

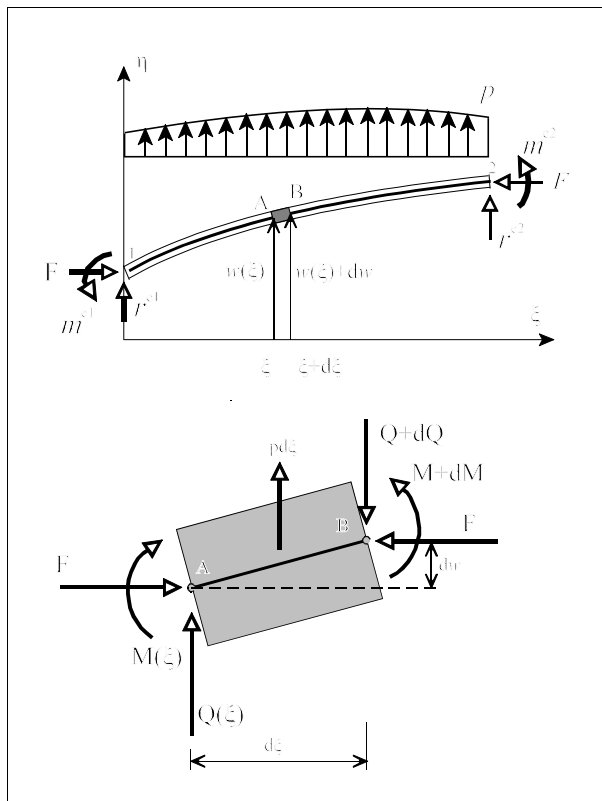
Som udtryk for de indre kræfter i bjælkesøjlen anvendes de på figur 3 viste snitkræfter F , Q og M , hvor F som tidligere nævnt forudsættes konstant, medens Q og M begge kan være funktioner af aksekoordinaten ξ . Bemærk, at F og Q er defineret som værende parallelle med koordinatsystemets akser i modsætning til de sædvanlige snitkræfter N og V , der er defineret som værende parallel med hhv. vinkelret på den deformerede bjælkeakse, som vist på figur 3.

Modellens statiske betingelser opstilles ved at betragte ligevægten af en infinitesimalt bjælkedel i den *deformerede* tilstand.



Figur 3

Betragtes figur 4 ses det, at følgende ligevægtsligninger kan opstilles:



Figur 4

Lodret projektion:

$$pd\xi + Q - (Q + dQ) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dQ}{d\xi} = p \quad \text{eller} \quad Q' = p$$

Moment om B:

$$M + dM - M - Qd\xi + Fdw = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dM}{d\xi} = Q - F \frac{dw}{d\xi} \quad \text{eller} \quad Q = M' + Fw'$$

Da $|w'| \ll 1$, ses det, at leddet Fw' kun har betydning, såfremt $|F| \gg |Q|$. I modsat fald kan leddet bortkastes, hvilket medfører, at modellens statiske betingelser bliver de samme som gælder for den sædvanlige bjælke model, hvor ligevægtsligningerne baseres på den udeformerede bjælkes geometri.

Differentieres ligningen $Q = M' + Fw'$ og indsættes $Q' = p$ ses det, at Q kan elimineres. Herved fås følgende ligning, der betegnes modellens *statisk feltbetingelse*

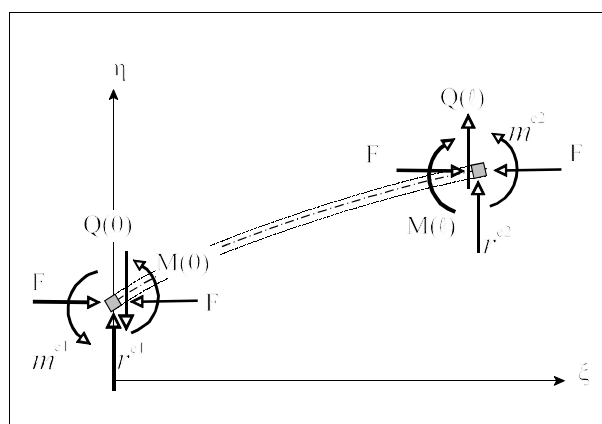
$$M'' + Fw'' - p = 0$$

Betragtes kraftdiagrammet i figur 3 ses det, at der må gælde følgende relationer mellem snitkræfterne F, Q og N, V når som forudsat $|\alpha| \ll 1$

Projektion på bjælkeakse: $N = F \cos \alpha + Q \sin \alpha \cong F$

Projektion vinkelret på bjælkeakse: $V = Q \cos \alpha - F \sin \alpha \cong Q - Fw' = M'$,

hvor leddet Fw' kun medtages, såfremt $|F| \gg |Q|$.



Figur 5

Ved at betragte ligevægten af infinitesimale bjælke dele ved $\xi = 0$ og $\xi = l$ (se figur 5) samt anvende ligevægtsligningen,

$$Q = M' + Fw',$$

kan de *statisk randbetingelser* formuleres således:

$$r^{e1} = Q(0) = M'(0) + Fw'(0)$$

$$m^{e1} = -M(0)$$

$$r^{e2} = -Q(l) = -(M'(l) + Fw'(l))$$

$$m^{e1} = M(l)$$

Det virtuelle arbejdes princip (Arbejdslikningen)

Såfremt de statiske felt- og randbetingelser er opfyldt, må nedenstående ligning gælde for *vilkårligt valgte* funktioner $\delta w = \delta w(\xi)$, idet alle udtrykkene i de kantede parenteser er identisk lig med 0. (NB! δw skal opfattes som ét symbol).

$$\int_0^\ell \delta w [M'' + Fw'' - p] d\xi = \delta w(0)[r^{e1} - M'(0) - Fw'(0)] + \delta w'(0)[m^{e1} + M(0)] \\ + \delta w(\ell)[r^{e2} + M'(\ell) + Fw'(\ell)] + \delta w'(\ell)[m^{e2} - M(\ell)]$$

Omvendt kan man slutte: Hvis ovenstående er opfyldt for **alle** vilkårligt valgte funktioner δw , da er de statiske felt- og randbetingelser opfyldt.

Ved brug af delvis integration foretages følgende to omskrivninger:

$$\int_0^\ell \delta w M'' d\xi = [\delta w M']_0^\ell - \int_0^\ell \delta w' M' d\xi \\ = [\delta w M']_0^\ell - [\delta w' M]_0^\ell + \int_0^\ell \delta w'' M d\xi \\ = \delta w(\ell) M'(\ell) - \delta w(0) M'(0) \\ - \delta w'(\ell) M(\ell) + \delta w'(0) M(0) + \int_0^\ell \delta w'' M d\xi$$

$$\int_0^\ell \delta w F w'' d\xi = F [\delta w w']_0^\ell - F \int_0^\ell \delta w' w' d\xi \quad (F \text{ er konstant !}) \\ = F \delta w(\ell) w'(\ell) - F \delta w(0) w'(0) - F \int_0^\ell \delta w' w' d\xi$$

Indsættes disse omskrivninger i den oprindelige ligning kan nedenstående ligning udledes.

$$\int_0^\ell \delta w'' M d\xi = \delta w(0) r^{e1} + \delta w(\ell) r^{e2} + \delta w'(0) m^{e1} + \delta w'(\ell) m^{e2} + \int_0^\ell \delta w p d\xi + F \int_0^\ell \delta w' w' d\xi$$

Tolkes funktionen δw nu som en virtuel (tænkt) ændring af den til ligevægtssituationen svarende udbøjningsfunktion w (se figur 6), er $\delta w'$ den tilsvarende ændring $\delta \alpha$ af udbøjningsliniens hældning og $\delta w''$ krumningsændringen $\delta \kappa$. Det skulle endvidere fremgå af figur 6, at produktet $\delta w' w' d\xi$ udtrykker ændringen i den vandrette afstand mellem to punkter med den indbyrdes afstand $d\xi$. Integralet af $\delta w' w' d\xi$ over længden ℓ er derfor afstandsændringen mellem bjælkeelementets endepunkter.

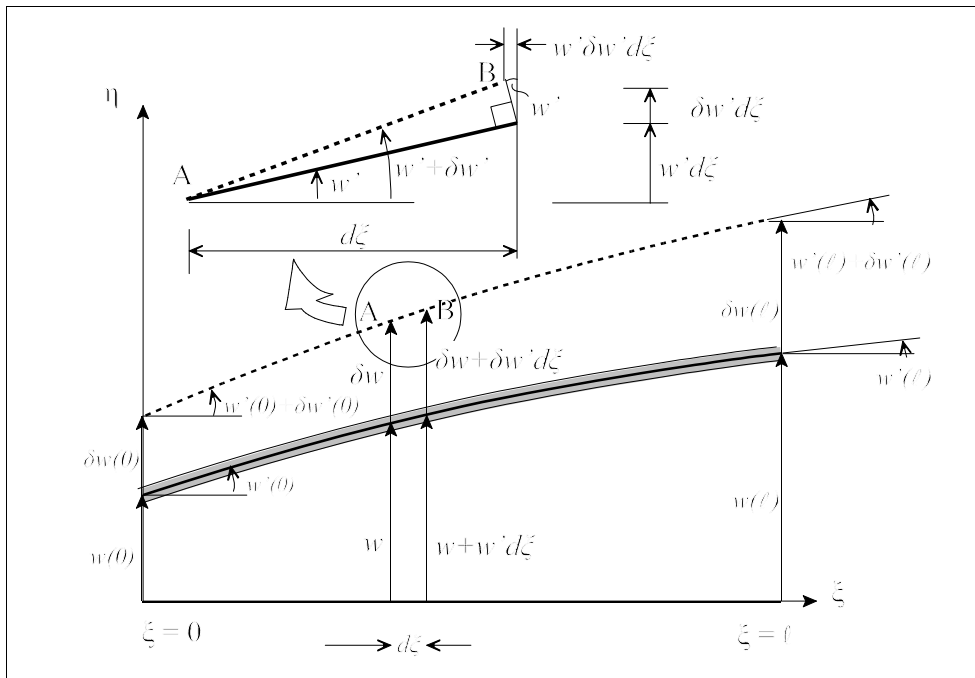
Herefter kan højre side af ovenstående ligning tolkes som det arbejde randkræfterne r og m , den fordelte last p og aksiallasten F ville udføre ved en virtuel flytning δw . Dette arbejde kaldes det virtuelle ydre arbejde og benævnes δA_y . Tilsvarende benævnes venstre side af ligningen det virtuelle indre arbejde δA_i . Vi har altså:

$$\delta A_y = \delta w(0) r^{e1} + \delta w(\ell) r^{e2} + \delta w'(0) m^{e1} + \delta w'(\ell) m^{e2} + \int_0^\ell \delta w p d\xi + F \int_0^\ell \delta w' w' d\xi \\ \delta A_i = \int_0^\ell \delta w'' M d\xi$$

Det virtuelle arbejdes princip kan herefter formuleres som følger:

$$\delta A_i = \delta A_y \text{ for alle virtuelle flytninger} \Leftrightarrow \text{ligevægt}$$

Bemærk, at det virtuelle arbejdes princip er en ren matematisk omskrivning af de statiske felt- og randbetingelser og derfor uafhængigt af beregningsmodellens fysiske forhold.



Figur 6

Fysiske forhold

Det forudsættes i det følgende, at bjælkematerialet er lineær-elastisk med elasticitetsmodul E . Benævnes bjælkets værsnittets inertimoment om tyngdepunktet I , kan den fysiske betingelse udtrykkes ved ligningen:

$$M = EI\kappa$$

Produktet EI benævnes sædvanligvis bjælkens bøjningsstivhed.

Grundligningen

Indsættes den geometriske betingelse $\kappa = w''$ i den fysiske betingelse fås: $M = EIw''$, der ved indsættelse i den statiske feltbetingelse $M'' + Fw'' - p = 0$ fører til *grundligningen*:

$$(EIw'')'' + Fw'' = p$$

I det følgende vil vi forudsætte, at bjælkeelementets bøjningsstivhed EI er konstant. Herved simplificeres grundligningen til: $EIw'''' + Fw'' = p$. Forudsættes endvidere, at F er positiv, dvs. at der er tryk i elementet, kan grundligningen skrives på formen:

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + k^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} = \frac{p}{EI} \quad , \text{hvor } k^2 = \frac{F}{EI}$$

Bemærk, at det ved definitionen af k er forudsat, at F er en tryknormalkraft, dvs $F > 0$.

Den fuldstændige løsning til denne ligning er:

$$w = C_1 \sin(k\xi) + C_2 \cos(k\xi) + C_3 \xi + C_4 + w_p(\xi, p)$$

Her er C_1, C_2, C_3 og C_4 integrationskonstanter, medens w_p er et partikulært integral - dvs. en eller anden funktion, der tilfredsstiller differentilligningen.

For at kunne bestemme en entydig løsning til grundligningen kræves åbenbart kendskab til 4 randbetingelser for at kunne bestemme de 4 integrationskonstanter.

Randbetingelserne deles som sædvanlig op i de geometriske (-eller essentielle) randbetingelser og de statiske (-eller naturlige) randbetingelser.

De geometriske randbetingelser (se side 2) angiver foreskrevne værdier af w og/eller w' og kan derfor anvendes direkte.

De statiske randbetingelser angiver foreskrevne værdier af M og/eller $Q = M' + Fw'$ (se side 3). Ved brug af den fysiske betingelse $M = EIw''$ kan disse betingelser imidlertid udtrykkes ved de afledede af w . Med henvisning til figur 2 og figur 5 fås:

Geom. randbet.		Statisk randbetingelse	
$u^{e1} = w(0)$	∪	$r^{e1} = Q(0) = M'(0) + Fw'(0)$	$= EIw'''(0) + Fw'(0)$
$\alpha^{e1} = w'(0)$	∪	$m^{e1} = -M(0)$	$= -EIw''(0)$
$u^{e2} = w(\ell)$	∪	$r^{e2} = -Q(\ell) = -M'(\ell) - Fw'(\ell)$	$= -EIw'''(\ell) - Fw'(\ell)$
$\alpha^{e2} = w'(\ell)$	∪	$m^{e2} = M(\ell)$	$= EIw''(\ell)$

Bemærk, at der altid vil være netop 2 randbetingelser i hver ende af bjælkeelementet. Er u^{e1} fx kendt vil den tilsvarende reaktion r^{e1} være ukendt og omvendt. Der er altså kun mulighed for én betingelse i hver linie i skemaet ovenfor.

Eksempel

Figur 7 viser en lodret søjle AB, der foruden aksiallasten F er belastet med en vandret ensformig fordelt last med intensiteten p . Med det på figuren viste koordinatsystem haves grundligningen:

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + k^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} = \frac{p}{F} k^2 \quad , \text{ hvor } k^2 = \frac{F}{EI}$$

Ved indsættelse i grundligningen ses, at man som partikulært integral kan anvende:

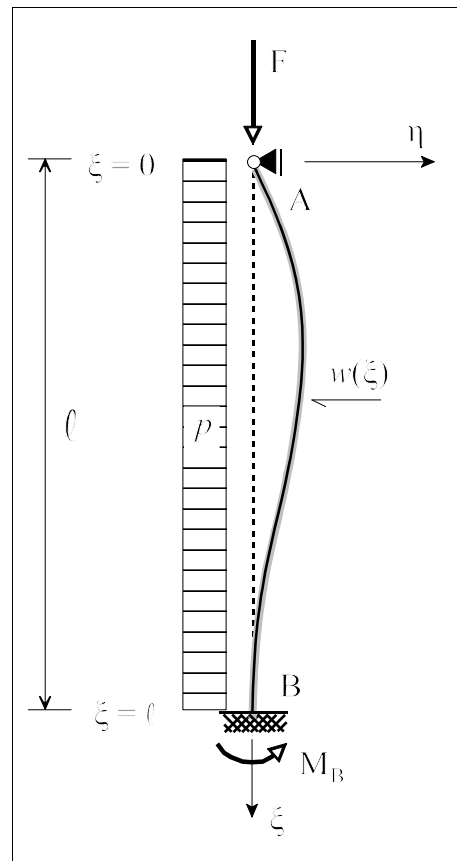
$$w_p = \frac{p}{2F} \xi^2$$

idet p er konstant. Herefter kan den fuldstændige løsning til grundligningen opskrives.

$$w = C_1 \sin(k\xi) + C_2 \cos(k\xi) + C_3 \xi + C_4 + \frac{p}{2F} \xi^2$$

$$w' = C_1 k \cos(k\xi) - C_2 k \sin(k\xi) + C_3 + \frac{p}{F} \xi$$

$$w'' = -C_1 k^2 \sin(k\xi) - C_2 k^2 \cos(k\xi) + \frac{p}{F}$$



Figur 7

De afledede af w skal anvendes i forbindelse med randbetingelserne, der bliver:

$$\text{Ved A: } w(0) = 0 \Rightarrow C_2 + C_4 = 0$$

$$w''(0) = 0 \Rightarrow -k^2 C_2 + \frac{P}{F} = 0 \quad (\text{Da } M(0) = EIw''(0) = 0)$$

$$\text{Ved B: } w(\ell) = 0 \Rightarrow C_1 \sin(k\ell) + C_2 \cos(k\ell) + C_3 \ell + C_4 + \frac{P}{2F} \ell^2 = 0$$

$$w'(\ell) = 0 \Rightarrow C_1 k \cos(k\ell) - C_2 k \sin(k\ell) + C_3 + \frac{P}{F} \ell = 0$$

På matrixform kan dette ligningssystem udtrykkes således:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -k^2 & 0 & 0 \\ \sin(k\ell) & \cos(k\ell) & \ell & 1 \\ k \cos(k\ell) & -k \sin(k\ell) & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \frac{P}{F} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \ell^2 \\ -\ell \end{bmatrix} \quad \text{eller} \quad \mathbf{Ac} = \mathbf{b}$$

Herefter betragtes følgende 2 tilfælde.

$$(1) \quad p = 0 \Rightarrow \mathbf{Ac} = \mathbf{0}. \quad (\text{Centralt belastet søjle})$$

Dette er et homogent ligningssystem og har derfor kun løsninger forskellige fra nulvektoren, når $\det(\mathbf{A}) = 0$. Ved indsættelse ses, at dette er tilfældet, når $\sin(k\ell) = k\ell \cos(k\ell)$. Ved division med $\cos(k\ell)$ fås ligningen $\tan(k\ell) = k\ell$. Denne ligning har uendelig mange løsninger. Den mindste, positive løsning er $k\ell \approx 4.493$ svarende til:

$$F_{kr} = k^2 EI = (k\ell)^2 \frac{EI}{\ell^2} = (4.493)^2 \frac{EI}{\ell^2} \quad \text{eller} \quad F_{kr} = 20.19 \frac{EI}{\ell^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0.699\ell)^2}$$

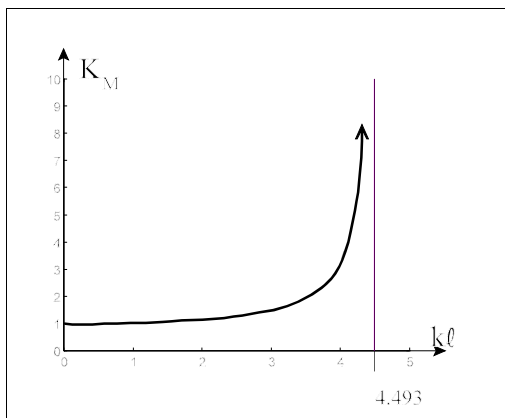
For $F < F_{kr}$ forbliver søjlen altså i sin retlinjede tilstand, medens den for $F = F_{kr}$ kan være i ligevægt i udbøjningstilstand. Udbøjningens størrelse er åbenbart ubestemt.

$$(2) \quad p \neq 0 \Rightarrow \text{Entydig løsning, når } \det(\mathbf{A}) \neq 0, \quad (\text{dvs. i praksis, når } F < F_{kr})$$

Ved løsning af ligningssystemet fås følgende værdier af konstanterne $C_1 - C_4$

$$C_1 = \frac{P}{k^2 F} A, \quad \text{hvor} \quad A = \frac{1 + \frac{1}{2}(k\ell)^2 - k\ell \sin(k\ell) - \cos(k\ell)}{\sin(k\ell) - k\ell \cos(k\ell)}; \quad C_2 = \frac{P}{k^2 F}$$

$$C_3 = \frac{P}{k^2 F} (1 - A - k\ell); \quad C_4 = -\frac{P}{k^2 F}$$



Figur 8

Af $M = EIw''$ fås herefter momentfordelingen i søjlen. Specielt fås for indspændingsmomentet i punkt B:

$$M_B = M(\ell) = EIw''(\ell)$$

$$= EI(-C_1 k^2 \sin(k\ell) - C_2 k^2 \cos(k\ell) + \frac{P}{F})$$

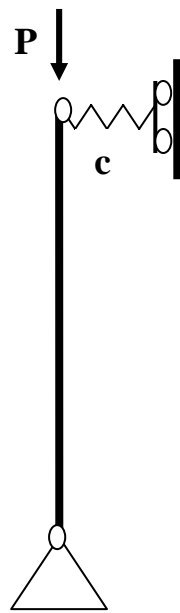
$$= P \frac{EI}{F} (1 - A \sin(k\ell) - \cos(k\ell))$$

$$\text{Indsættes } k^2 = \frac{F}{EI} \Rightarrow \frac{EI}{F} = \frac{1}{k^2} \quad \text{fås:}$$

$$M_B = \frac{1}{8} P \ell^2 \frac{8}{(k\ell)^2} (1 - A \sin(k\ell) - \cos(k\ell)) = M_{0B} K_M$$

Her er $M_{0B} = 1/8 P \ell^2$ det sædvanlige moment, medens momentforøglesesfaktoren K_M er et udtryk for momentforøgelsen grundet aksiallasten F . Ved at betragte grænseovergangen $F \rightarrow F_{kr}$ ($k\ell \rightarrow 4.493$) kan det indses, at $K_M \rightarrow \infty$ når $F \rightarrow F_{kr}$. (Se figur 8).

41235 Bygningsteknik II, Opgave 5a



Ovenstående søjle er simpelt understøttet i nederste punkt og fjedrende fastholdt mod udbøjning i det øverste punkt. Fjederkonstanten er c . Søjlen kan dreje sig frit om det øverste punkt. Søjlenes længde er L og dens bøjningsstivhed EI .

1. Opstil en fjerde orden differentialligning med randbetingelser for ovenstående søjle belastet med en lodret kraft P i øverste punkt.
2. Bestem de værdier af P , som tillader en udbøjning forskellig fra nulløsningen.
3. Vis, at der er to sæt forskellige løsninger, hvoraf det ene afhænger af fjederkonstanten c og det andet af bøjningsstivheden EI .
4. Opstil kriteriet for, hvornår den ene eller den anden løsning er den laveste stabilitetsgrænse.

Løsning

1. Den styrende differentialligning er:

$$EIw'''' + Pw'' = 0$$

idet EI og P er konstant langs søjlens længdeakse. Randbetingelserne er:

$$w(0) = 0$$

$$M(0) = 0 \rightarrow w''(0) = 0$$

$$M(L) = 0 \rightarrow w''(L) = 0$$

$$Q(L) = cw(L) \rightarrow EIw'''(L) + Pw'(L) = cw(L)$$

2. Løsningen til differentialligningen er givet ved ligning (3.11):

$$w(x) = C_1 + C_2 kx + C_3 \cos(kx) + C_4 \sin(kx)$$

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

Indsættes denne løsning i de 4 randbetingelser fås:

$$\left. \begin{aligned} w(0) = 0 &\rightarrow C_1 + C_3 = 0 \\ w''(0) = 0 &\rightarrow C_3 = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow C_1 = C_3 = 0$$

$$w''(L) = 0 \rightarrow C_4 \sin(kL) = 0$$

$$EIw'''(L) + Pw'(L) = cw(L) \rightarrow PC_2k = c(C_2kL + C_4 \sin(kL)) = cC_2kL$$

Skal de 2 sidste ligninger opfyldes uden at både C_2 og C_4 begge er nul; må enten

$$kL = n\pi; \quad n = 1, 2, 3, \dots \rightarrow P = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 EI$$

$$C_2 = 0$$

eller

$$P = cL$$

$$C_4 = 0$$

3. Det ses, at den første løsning alene afhænger af bjælkens bøjningsstivhed. Udbøjningen er givet ved

$$w = C_4 \sin(kx)$$

og således lig med nul ved øvre endepunkt. Derfor er fjederen ikke aktiv. Løsningen er derfor den samme som for en simpelt understøttet søjle.

Den anden løsning, $P = cL$, er løsningen for en uendelig stiv bjælke, understøttet med en fjeder i den ene ende. Derfor indgår bøjningsstivheden ikke i løsningen.

Udbøjningen er en ret linie, givet ved

$$w = C_2 kx$$

4. Den laveste værdi af P , der tillader en løsning for udbøjningen forskellig fra nulløsningen, kaldes stabilitetsgrænsen. Den bliver her

$$P_{stab} = \min \left[cL, \frac{\pi^2 EI}{L^2} \right]$$

Dvs stabiliteten styres af fjederen, hvis

$$c < \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

For større værdier af fjederstivheden vil søjlen bøje ud som en såkaldt Eulersøjle før fjederen deformeres.

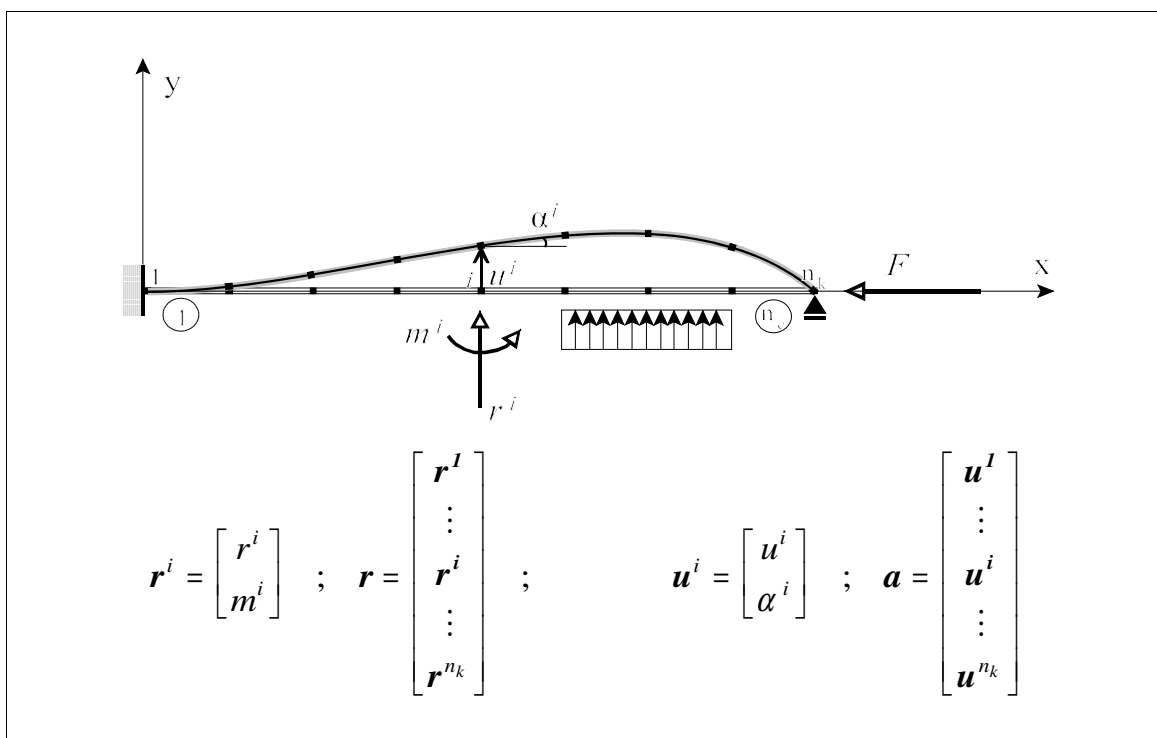
Diskret beregningsmodel - Elementmodel

I det følgende vil en approksimativ beregningsmodel for bjælkesøjler blive opstillet. Modellen er baseret på elementmetoden ("The Finite Element Method").

Elementmetoden er i sin generelle form den altdominerende metode til etablering af edb-baserede beregningsmodeller for bærende konstruktioner (samt for en lang række andre tekniske problemer som varmeledning, strømningsmekanik etc.).

Den foreliggende gennemgang af en elementmodel for bjælkesøjler skal således også tjene som introduktion til nogle af de principper, metoden bygger på, selvom denne først for alvor kommer til sin ret ved anvendelse på problemer, hvor de tilhørende differentialligninger ikke kan løses analytisk (fx skive- og pladeproblemer).

Elementmodellen baseres på, at bjælkesøjlen opdeles i et (stort!) antal elementer. De punkter, hvor elementerne støder op til hinanden samt bjælkesøjlets understøtningspunkter og/eller endepunkter, benævnes globale knuder. Elementer og knuder nummereres som sædvanlig fortløbende fra 1 til hhv. n_e og n_k .



Figur 9

Når søjlen belastes, vil de globale knuder i almindelighed forskydes og drejes som følge af søjlens deformation. Som tidligere nævnt er eventuelle (små!) aksiale flytninger uden interesse, idet aksialkraften F forudsættes kendt.

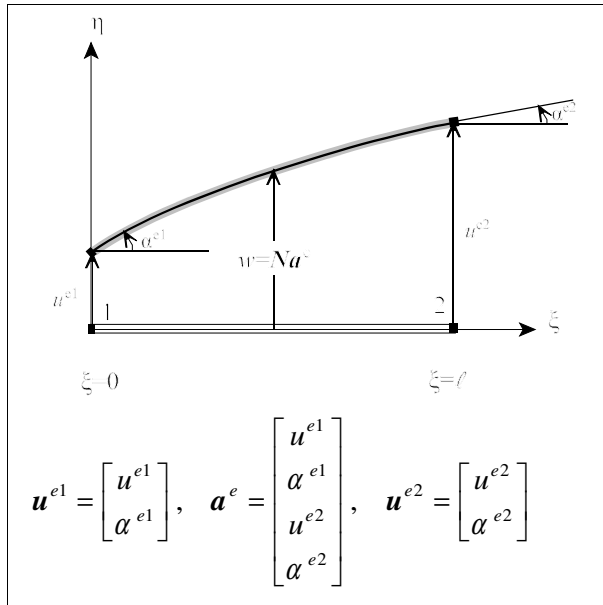
Knudelflytningerne svarende til knude nr i samles i søjlevektoren \mathbf{u}^i , mens eventuelle knudebelastninger samles i vektoren \mathbf{r}^i . Responsvektoren \mathbf{a} indeholder samtlige knudelflytninger, medens knudelastvektoren \mathbf{r} indeholder samtlige knudebelastninger. (se figur 9).

Approximationen kommer nu i stand ved, at udbøjningen af det enkelte element approksimeres med en passende valgt funktionstype - her tredjegradspolynomier - på en sådan måde, at den approksimerende funktions forløb mellem elementets endepunkter er entydigt bestemt af flytningerne, dvs. tværflytningen og vinkeldrejningen i de knuder, der svarer til elementets endepunkter. Herved opnås, at problemet fra at indeholde et uendeligt antal ubekendte repræsenteret ved den søgte udbøjningsfunktion kommer til at indeholde et endeligt antal ubekendte repræsenteret ved knudelflytningerne.

Problemet er med andre ord blevet diskretiseret. Systemets grundligning reduceres samtidig fra en differentialligning til et - som det vil vise sig - lineært ligningssystem.

Når udbøjningsfunktionen approksimeres, vil de tilhørende snitkræfter også være en approksimation, hvilket betyder, at vi ikke kan regne med at kunne opfylde den kontinuerte models ligevægtsligninger til punkt og prikke. Den (i en vis forstand) bedst mulige approksimation opnås ved at udtrykke ligevægten vha. arbejdsligningen, idet vi som virtuelle flytninger anvender funktioner af samme type, som anvendes til approksimation af de virkelige flytninger. Dette betyder, at vi ikke sikrer os, at arbejdsligningen er opfyldt for vilkårlige virtuelle flytninger, men kun for vilkårlige virtuelle knudflytninger. Dette medfører, at vi må tage til takke med en form for gennemsnitlig opfyldelse af ligevægten i det enkelte element.

Elementbeskrivelse



Figur 10

Kun elementer uden indre charnier (type 0) betragtes. Andre elementtyper kan beskrives på tilsvarende måde.

Geometriske forhold

Som tidligere nævnt approksimeres elementets udbøjningsfunktion med et tredjegradspolynomium:

$$w = C_1 \xi^3 + C_2 \xi^2 + C_3 \xi + C_4$$

At netop et tredjegradspolynomium vælges, hænger sammen med, at et vilkårligt tredjegradspolynomium indeholder netop 4 konstanter, som kan bestemmes så w "passer til" elementets knudflytninger, dvs.:

$$w(0) = u^{e1} \quad , \quad w'(0) = \alpha^{e1}$$

$$w(l) = u^{e2} \quad , \quad w'(l) = \alpha^{e2}$$

Da der kun er en løsning på dette problem, må det gælde, at w kan skrives på formen:

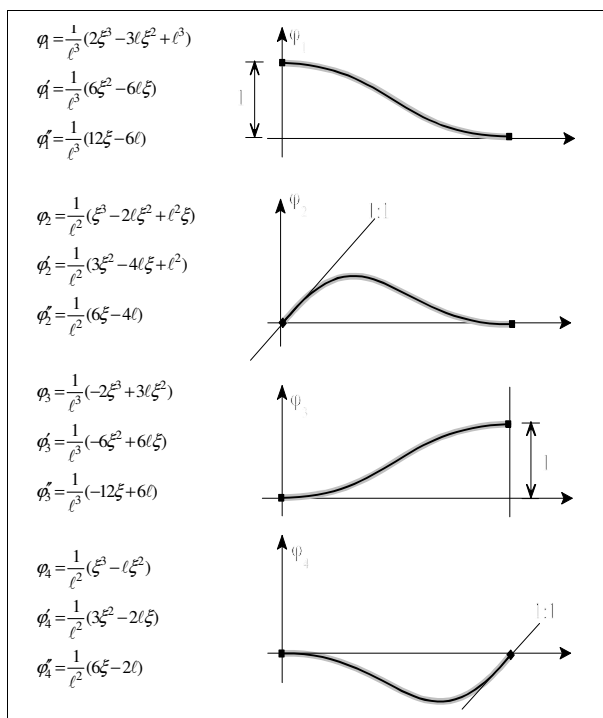
$$w(\xi) = u^{e1} \varphi_1(\xi) + \alpha^{e1} \varphi_2(\xi) + u^{e2} \varphi_3(\xi) + \alpha^{e2} \varphi_4(\xi)$$

hvor φ_1 , φ_2 , φ_3 og φ_4 netop er de basisflytningsfunktioner, der kendes fra det "sædvanlige" bjælkeelement. (Se figur 11.)

Indføres elementets responsvektor a^e (se figur 10), kan w skrives på formen:

$$w = \mathbf{N} a^e, \quad \text{hvor} \quad \mathbf{N} = [\varphi_1(\xi) \quad \varphi_2(\xi) \quad \varphi_3(\xi) \quad \varphi_4(\xi)]$$

Funktionerne N omtales ofte som elementets interpolationsfunktioner eller formfunktioner.



Figur 11

Ifølge den kontinuerte models geometriske betingelse har man: $\kappa = w''$. Med den valgte approksimation af flytningerne w fås: $\kappa = u^{e1} \varphi_1'' + \alpha^{e1} \varphi_2'' + u^{e2} \varphi_3'' + \alpha^{e2} \varphi_4''$, eller

$$\kappa = \mathbf{B} \mathbf{a}^e, \quad \mathbf{B} = \mathbf{N}'' = [\varphi_1'' \quad \varphi_2'' \quad \varphi_3'' \quad \varphi_4'']$$

\mathbf{B} omtales ofte som krumnings- eller tøjningsfordelingsmatricen.

Statistiske forhold

Som tidligere nævnt formuleres elementmodellens statistiske betingelser vha. det virtuelle arbejdes princip, idet de virtuelle flytninger δw og de tilsvarende hældninger $\delta w'$ og krumninger $\delta \kappa$ ønskes udtrykt på samme form som de virkelige flytninger og tøjninger. Vi har altså:

$$\delta w = \mathbf{N} \delta \mathbf{a}^e, \quad \delta w' = \mathbf{N}' \delta \mathbf{a}^e \quad \text{og} \quad \delta \kappa = \mathbf{B} \delta \mathbf{a}^e$$

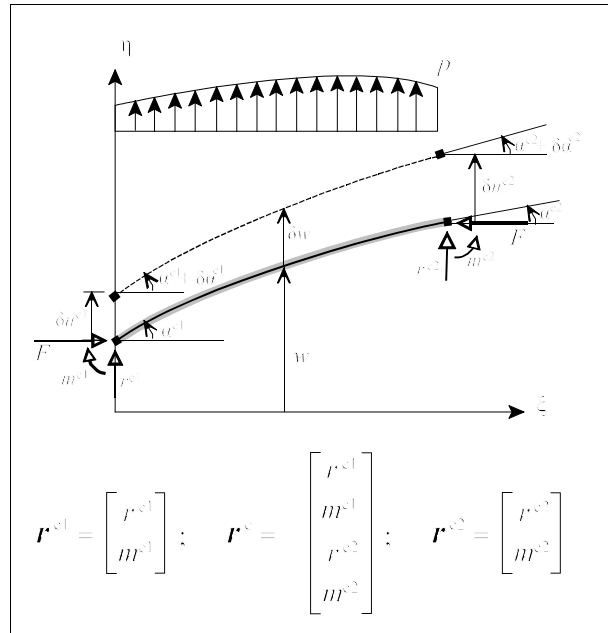
Her er $\delta \mathbf{a}^e$ de til δw svarende virtuelle knudeflytninger. Da δw , $\delta w'$, $\delta \kappa$ er skalarer, må det endvidere gælde, at:

$$\delta w = (\delta \mathbf{a}^e)^T \mathbf{N}^T, \quad \delta w' = (\delta \mathbf{a}^e)^T \mathbf{N}'^T$$

$$\text{og} \quad \delta \kappa = (\delta \mathbf{a}^e)^T \mathbf{B}^T$$

hvilket vil blive udnyttet i det følgende.

Elementets *virtuelle ydre arbejde* kan herefter udtrykkes som følger. (Se side 4)



Figur 12

$$\begin{aligned} \delta A_y^e &= \delta w(0)r^{e1} + \delta w'(0)m^{e1} + \delta w(l)r^{e2} + \delta w'(l)m^{e2} + \int_0^l \delta w p d\xi + F \int_0^l \delta w' w' d\xi \\ &= \delta u^{e1} r^{e1} + \delta \alpha^{e1} m^{e1} + \delta u^{e2} r^{e2} + \delta \alpha^{e2} m^{e2} + \int_0^l (\delta \mathbf{a}^e)^T \mathbf{N}^T p d\xi + F \int_0^l (\delta \mathbf{a}^e)^T \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' \mathbf{a}^e d\xi \\ &= (\delta \mathbf{a}^e)^T \mathbf{r}^e + (\delta \mathbf{a}^e)^T \left(\int_0^l \mathbf{N}^T p d\xi \right) + (\delta \mathbf{a}^e)^T \left(F \int_0^l \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' d\xi \right) \mathbf{a}^e \end{aligned}$$

Defineres *elementlastvektoren* \mathbf{s}^e og den *geometriske stivhedsmatrix* \mathbf{K}_g^e ved:

$$\mathbf{s}^e = \int_0^l \mathbf{N}^T p d\xi \quad (\text{Søjlevektor } 4 \times 1) \quad ; \quad \mathbf{K}_g^e = F \int_0^l \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' d\xi \quad (\text{Matrix } 4 \times 4)$$

Kan det virtuelle ydre arbejde også skrives på formen:

$$\delta A_y^e = (\delta \mathbf{a}^e)^T (\mathbf{r}^e + \mathbf{s}^e + \mathbf{K}_g^e \mathbf{a}^e)$$

Da matricerne \mathbf{N}' og \mathbf{N} indeholder kendte funktionsudtryk kan \mathbf{K}_g^e beregnes en gang for alle, medens \mathbf{s}^e kan beregnes for enhver valgt fordeling af p . Nedenstående udtryk for \mathbf{s}^e gælder således kun når p repræsenterer en *ensformig fordelt last* ($p = \text{konstant}$)

$$\mathbf{K}_g^e = F \ell \begin{bmatrix} \frac{6}{5\ell^2} & \frac{1}{10\ell} & \frac{-6}{5\ell^2} & \frac{1}{10\ell} \\ \frac{1}{10\ell} & \frac{2}{15} & \frac{-1}{10\ell} & \frac{-1}{30} \\ \frac{-6}{5\ell^2} & \frac{-1}{10\ell} & \frac{6}{5\ell^2} & \frac{-1}{10\ell} \\ \frac{1}{10\ell} & \frac{-1}{30} & \frac{-1}{10\ell} & \frac{2}{15} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{s}^e = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} p \ell \\ \frac{1}{12} p \ell^2 \\ \frac{1}{2} p \ell \\ \frac{1}{12} p \ell^2 \end{bmatrix}$$

Det skal bemærkes, at elementlastvektoren \mathbf{s}^e kan betragtes som et sæt koncentrerede knudebelastninger, der er statisk ækvivalente med den fordelte last p , idet $(\delta \mathbf{a}^e)^T \mathbf{s}^e$ er det virtuelle arbejde, der udføres af p . Betydningen af den geometriske stivhedsmatrix vil blive kommenteret senere.

For det virtuelle indre arbejde fås tilsvarende:

$$\delta A_i^e = \int_0^\ell \delta \kappa M d\xi = \int_0^\ell (\delta \mathbf{a}^e)^T \mathbf{B}^T M d\xi = (\delta \mathbf{a}^e)^T \int_0^\ell \mathbf{B}^T M d\xi ,$$

der ved indsættelse af den fysiske betingelse $M = EI \kappa$ og $\kappa = \mathbf{B} \mathbf{a}^e$ giver

$$\delta A_i^e = (\delta \mathbf{a}^e)^T \int_0^\ell \mathbf{B}^T EI \kappa d\xi = (\delta \mathbf{a}^e)^T \int_0^\ell \mathbf{B}^T EI \mathbf{B} \mathbf{a}^e d\xi = (\delta \mathbf{a}^e)^T \left(\int_0^\ell \mathbf{B}^T EI \mathbf{B} d\xi \right) \mathbf{a}^e$$

Defineres matricen \mathbf{K}_0^e ved:

$$\mathbf{K}_0^e = \int_0^\ell \mathbf{B}^T EI \mathbf{B} d\xi \quad (\text{Matrix } 4 \times 4)$$

kan det virtuelle indre arbejde også skrives på formen:

$$\delta A_i^e = (\delta \mathbf{a}^e)^T \mathbf{K}_0^e \mathbf{a}^e$$

Da matricen \mathbf{B} indeholder kendte funktionsudtryk kan \mathbf{K}_0^e beregnes en gang for alle:

$$\mathbf{K}_0^e = \frac{EI}{\ell} \begin{bmatrix} \frac{12}{\ell^2} & \frac{6}{\ell} & -\frac{12}{\ell^2} & \frac{6}{\ell} \\ \frac{6}{\ell} & 4 & -\frac{6}{\ell} & 2 \\ -\frac{12}{\ell^2} & -\frac{6}{\ell} & \frac{12}{\ell^2} & -\frac{6}{\ell} \\ \frac{6}{\ell} & 2 & -\frac{6}{\ell} & 4 \end{bmatrix}$$

Det ses, at \mathbf{K}_0^e er magen til stivhedsmatricen for det "sædvanlige" bjælkeelement, hvilket hænger sammen med, at vi som interpolationsfunktioner ($\varphi_1 \dots \varphi_4$) har valgt funktioner, der svarer til den korrekte løsning til den homogene "sædvanlige" bjælkedifferentiaalligning $w'''' = 0$.

Grundligningen

Anvendes arbejdslikningen for et enkelt element fås:

$$\delta A_y^e = \delta A_i^e \Rightarrow (\delta \mathbf{a}^e)^T (\mathbf{r}^e + \mathbf{s}^e + \mathbf{K}_g^e \mathbf{a}^e) = (\delta \mathbf{a}^e)^T \mathbf{K}_0^e \mathbf{a}^e$$

$$\text{eller } (\delta \mathbf{a}^e)^T [\mathbf{r}^e + \mathbf{s}^e + \mathbf{K}_g^e \mathbf{a}^e - \mathbf{K}_0^e \mathbf{a}^e] = 0$$

For at opnå den bedst mulige opfyldelse af ligevægtslikningerne skal denne ligning som tidligere nævnt være opfyldt for *vilkårlige* virtuelle knudedeflytninger $\delta \mathbf{a}^e$. Dette er kun muligt, såfremt udtrykket i den kantede parentes er lig med 0, hvilket fører til grundligningen:

$$\mathbf{r}^e = (\mathbf{K}_0^e - \mathbf{K}_g^e) \mathbf{a}^e - \mathbf{s}^e$$

Denne ligning er analog til den, der gælder for "sædvanlige" bjælkeelementer blot med den ændring, at den sædvanlige stivhedsmatrix er modificeret med den geometriske stivhedsmatrix. Den geometriske stivhedsmatrix er således et udtryk for den stivhedsreduktion, elementet udviser pga. aksiallasten F .

Systemopbygning

Geometriske forhold

Bjælkesøjlen opfattes som bestående af et antal systemknuder indbyrdes forbundet vha. elementer af den netop beskrevne type. Sammenhængen mellem elementer og systemknuder - eller rettere mellem et elements lokale knudflytninger og de tilsvarende flytninger af systemknuderne - udtrykkes som sædvanlig vha. elementets topologimatrix:

$$\mathbf{a}^e = \mathbf{T}^e \mathbf{a}$$

Denne relation udtrykker, at et elements lokale knuder og de tilsvarende systemknuder får samme tværflytning og samme vinkeldrejning. Vi sikrer altså, at der ikke opstår spring eller knæk i udbøjningslinien.

Statistiske forhold

Ligevægten af systemknuderne udtrykkes som tidligere vist (se notatet "Plane Elastiske Rammer") ved ligningen:

$$\mathbf{r} = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{T}^{eT} \mathbf{r}^e$$

Denne ligning er et udtryk for, at der er ligevægt mellem den ydre last på knuderne og de kræfter, som de enkelte elementer påvirker knuderne med. (Se eksempel figur 13.)

Grundligning

Indsættes det i afsnittet "Elementbeskrivelse" udledte udtryk for \mathbf{r}^e i ovenstående ligevægtsligning fås:

$$\mathbf{r} = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{T}^{eT} [(\mathbf{K}_0^e - \mathbf{K}_g^e) \mathbf{a}^e - \mathbf{s}^e] = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{T}^{eT} (\mathbf{K}_0^e - \mathbf{K}_g^e) \mathbf{a}^e - \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{T}^{eT} \mathbf{s}^e$$

Indsættes endvidere den geometriske betingelse $\mathbf{a}^e = \mathbf{T}^e \mathbf{a}$ fås, idet vektoren \mathbf{a} er fælles for alle leddene i summationen og derfor kan sættes uden for summationstegnet:

$$\mathbf{r} = \left(\sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{T}^{eT} (\mathbf{K}_0^e - \mathbf{K}_g^e) \mathbf{T}^e \right) \mathbf{a} - \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{T}^{eT} \mathbf{s}^e$$

Defineres systemstivhedsmatricerne \mathbf{K}_0 og \mathbf{K}_g samt systemets elementlastvektor \mathbf{s} ved:

$$\mathbf{K}_0 = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{T}^{eT} \mathbf{K}_0^e \mathbf{T}^e, \quad \mathbf{K}_g = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{T}^{eT} \mathbf{K}_g^e \mathbf{T}^e, \quad \mathbf{s} = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{T}^{eT} \mathbf{s}^e$$

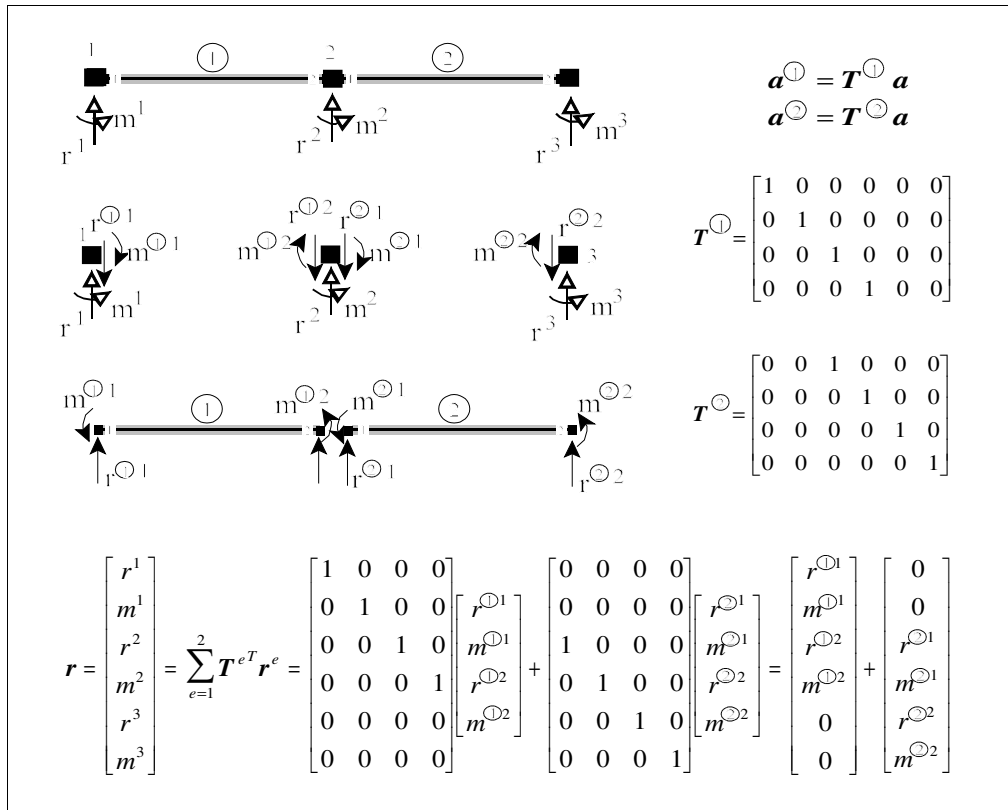
kan systemligevægten udtrykkes ved følgende ligningssystem:

$$\mathbf{r} = (\mathbf{K}_0 - \mathbf{K}_g) \mathbf{a} - \mathbf{s} \quad \text{eller} \quad \mathbf{f} = \mathbf{r} + \mathbf{s} = (\mathbf{K}_0 - \mathbf{K}_g) \mathbf{a}$$

Denne ligning kaldes sædvanligvis *systemets grundligning*.

Det skal bemærkes, at selvom det er forudsat, at aksiallasten F er konstant inden for det enkelte element, er der ikke noget i vejen for, at den kan variere fra element til element.

Det ses, at systemopbygningen foregår efter helt samme recept som den, der kendes fra den diskrete beregningsmodel for plane elastiske rammer, hvorfor der fra et programmeringsmæssigt synspunkt ikke vil være den store forskel på elementmodellen for bjælkesøjlen og den diskrete rammemodel.



Figur 13

Systemanalyse

Før grundligningen kan løses, skal den modificeres mht. de geometriske randbetingelser - dvs. de på forhånd kendte flytninger. Dette kan gøres som fx beskrevet i notatet "Plane Elastiske Rammer". Herefter betragtes følgende to tilfælde:

(1) $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ (Centralt belastet søjle)

Forsynes aksiallasten i de enkelte elementer med en fælles lastfaktor λ , kan den modificerede grundligning skrives på formen:

$$(\mathbf{K}_0 - \lambda \mathbf{K}_g) \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

Denne ligning har den trivielle løsning $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Ikke-trivielle løsninger fås for de værdier af λ , der gør determinanten til koefficientmatricen $(\mathbf{K}_0 - \lambda \mathbf{K}_g)$ lig med nul. Dette er et såkaldt udvidet egen værdiproblem. (I et sædvanligt egen værdiproblem er matricen på \mathbf{K}_g 's plads en enhedsmatrix). Kaldes den laveste egen værdi λ_{kr} , approksimerer aksiallasten $\lambda_{kr} F$ i det enkelte element søjlens kritiske last, medens den tilsvarende egen vektor \mathbf{a}_{kr} er et udtryk for søjlens udbøjning i svigtsituationen.

(2) $\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$ (Tværbelastet søjle)

Det modificerede ligningssystem har netop én løsning såfremt determinanten til ligningssystemets koefficientmatrix er forskellig fra nul (hvilket i praksis vil sige, at aksiallasten skal være mindre end den kritiske last $\lambda_{kr} F$).

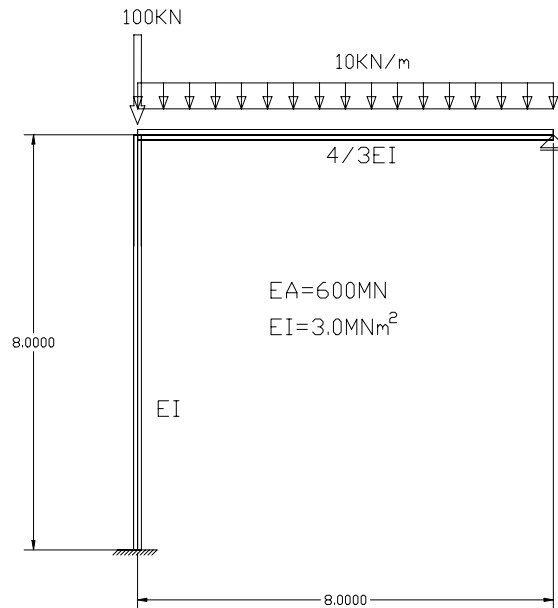
Når de globale knudeflytninger \mathbf{a} er bestemt ved løsning af ligningssystemet, bestemmes de lokale knudeflytninger i hvert element vha. udtrykket $\mathbf{a}^e = \mathbf{T}^e \mathbf{a}$.

Herefter kan momentfordelingen i det enkelte element bestemmes af:

$$\mathbf{M} = EI \boldsymbol{\kappa} = EI \mathbf{B} \mathbf{a}^e = EI (\varphi_1'' u^{e1} + \varphi_2'' \alpha^{e1} + \varphi_3'' u^{e2} + \varphi_4'' \alpha^{e2})$$

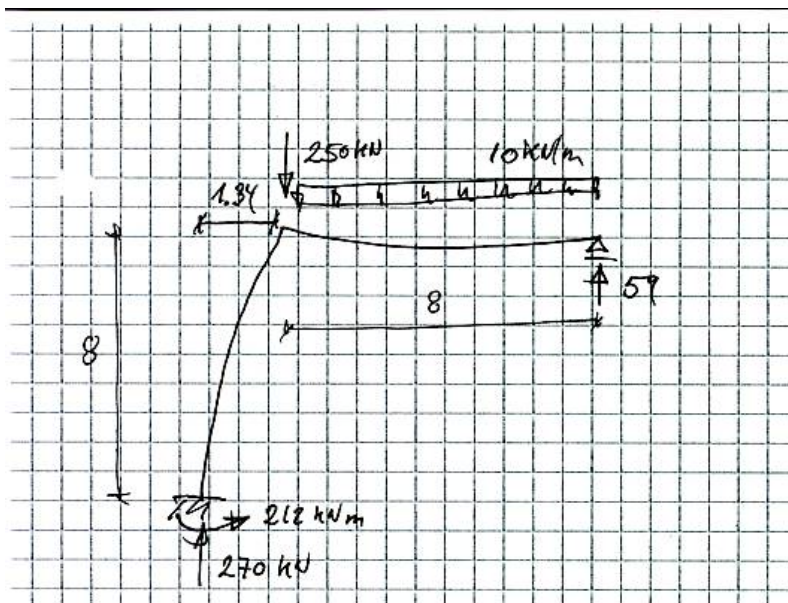
Da interpolationsfunktionerne φ alle er tredjegrads polynomier, bliver momentfordelingen i det enkelte element retlinjet. Bjælkesøjls momentfordeling approksimeres altså med en stykvis retlinjet kurve.

41235 Bygningsmekanik II
Opgave 11



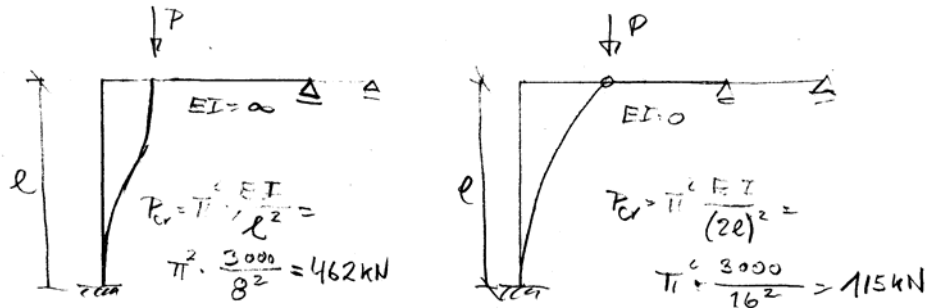
Ovenstående konstruktion skal analyseres for den ensformig fordelte belastning samtidig med en enkeltkraft angribende i søjlens toppunkt. Nedenstående punkter ønskes belyst.

1. Angiv en nedre og en øvre værdi for den kritiske søjlekraft.
2. Opstil det udvidede egenverdiproblem $(K_0 - K_g) \cdot a = 0$ og angiv hvorledes løses.
3. MATLAB rammeprogrammet har bestemt en løsning for $P = 250$ kN. Løsningen er vist i nedenstående figur. Diskuter resultatet og kontroller, at der for den deformerede konstruktion er ligevægt mellem indre og ydre kræfter.



4. MATLAB programmet angiver desuden en kritisk lastfaktor, defineret som den værdi alle de indgående ydre kræfter kan multipliceres med før der kommer stabilitetssvigt. For $P = 250$ kN er den kritiske lastfaktor lig med 1.144. Vis at dette resultat er i god overensstemmelse med den kritiske last på 311 kN, fundet i spørgsmål 2.

1. Nedre og øvre værdi for den kritiske søjlekraft



2. Egenværdiproblem

Den eneste ændring i forhold til opgave 1 er, at der skal tilføjes en geometrisk stivhedsmatrice for bjælke 2 (i opgave 1's notation). Denne er i lokale koordinater, se noter

$$K_g^e = F\ell \begin{bmatrix} \frac{6}{5\ell^2} & \frac{1}{10\ell} & \frac{-6}{5\ell^2} & \frac{1}{10\ell} \\ \frac{1}{10\ell} & \frac{2}{15} & \frac{-1}{10\ell} & \frac{-1}{30} \\ \frac{-6}{5\ell^2} & \frac{-1}{10\ell} & \frac{6}{5\ell^2} & \frac{-1}{10\ell} \\ \frac{1}{10\ell} & \frac{-1}{30} & \frac{-1}{10\ell} & \frac{2}{15} \end{bmatrix}$$

I nærværende opgave er $F = P$ for bjælke 2 og 0 for bjælke 1.

I matricen er deformationerne i aksial retning negligeret. Indsættes disse og transformeres til det globale system fås den lokale geometriske stivhedsmatrice K_g^2 i **globale koordinater** for den lodrette bjælke (bjælke 2): $K_g^2 = L^T K_{gL}^2 L$, hvor, idet $\phi = 90$ grader:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow K_g^2 = L^T K_{gL}^2 L = P\ell \begin{bmatrix} \frac{6}{5\ell^2} & 0 & -\frac{1}{10\ell} & -\frac{6}{5\ell^2} & 0 & -\frac{1}{10\ell} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{10\ell} & 0 & \frac{2}{15} & \frac{1}{10\ell} & 0 & -\frac{1}{30} \\ -\frac{6}{5\ell^2} & 0 & \frac{1}{10\ell} & \frac{6}{5\ell^2} & 0 & \frac{1}{10\ell} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{10\ell} & 0 & -\frac{1}{30} & \frac{1}{10\ell} & 0 & \frac{2}{15} \end{bmatrix}$$

$$K_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{g22}^2 & 0 & K_{g21}^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ K_{g12}^2 & 0 & K_{g11}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{g22}^2 & 0 & K_{g21}^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ K_{g12}^2 & 0 & K_{g11}^2 \end{bmatrix} = P\ell \begin{bmatrix} \frac{6}{5\ell^2} & 0 & \frac{1}{10\ell} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{5\ell^2} & 0 & \frac{1}{10\ell} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10\ell} & 0 & \frac{2}{15} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10\ell} & 0 & -\frac{1}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6}{5\ell^2} & 0 & -\frac{1}{10\ell} & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5\ell^2} & 0 & -\frac{1}{10\ell} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10\ell} & 0 & -\frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10\ell} & 0 & \frac{2}{15} \end{bmatrix}$$

Indføres randbetingelserne ved at fjerne de tilsvarende rækker og søjler som i opgave 1, fås, idet der ikke i K_g skal indsættes 1-taller i diagonalerne:

$$K_g = P\ell \begin{bmatrix} \frac{6}{5\ell^2} & 0 & \frac{1}{10\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10\ell} & 0 & \frac{2}{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Den tilhørende bjælkestivhedsmatrice er fra opgave 1:

$$K_M = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} + \frac{12EI}{\ell^3} & 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16EI}{\ell^3} + \frac{EA}{\ell} & \frac{8EI}{\ell^2} & 0 & 0 & \frac{8EI}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{8EI}{\ell^2} & \frac{16EI}{3\ell} + \frac{4EI}{\ell} & 0 & 0 & \frac{8EI}{3\ell} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8EI}{\ell^2} & \frac{8EI}{3\ell} & 0 & 0 & \frac{16EI}{3\ell} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Herefter kan egenværdierne findes ud fra

$$\det[K_M - K_g] = 0 \rightarrow P = 311 \text{ kN} \quad (\text{og } 2281 \text{ kN})$$

(Der er tale om et EVP, som løses numerisk ved betingelsen, at determinanten skal være nul. Den laveste egenværdi er alene af betydning, da den bestemmer rammens bæreevne).

3. MATLAB

Kontrol af ligevægt:

$$M_y = 250 \cdot 1.34 + 8 \cdot 10 \cdot 5.34 = 59 \cdot 9.34 = 211 \text{ kNm} \quad \checkmark$$

Det meste (ca. 75 %) af linielasten bæres af højre understøtning. Dette skyldes, at den lodrette bjælke har mistet det meste af sin bæreevne pga. aksialkraften på 250 kN.

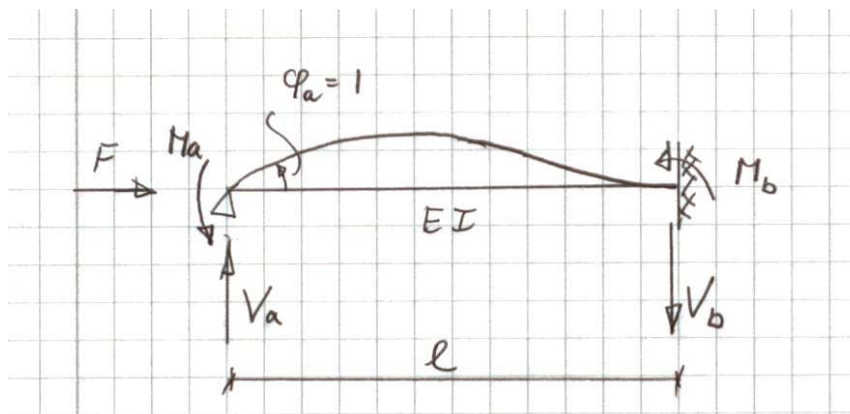
4. Kritisk last

Det ses af figuren, at den resulterende normalkraft i søjlen er $N = 270 \text{ kN}$, dvs. den kritiske værdi (stabilitetsgrænsen) $N_{cr} = 270 \cdot 1.144 = 309 \text{ kN}$ i god overensstemmelse med svaret i spørgsmål 2.

41235 Bygningsteknik II
Opgave 10: Bjælkesøjler

Betragt en bjælke fast indspændt i den ene ende ($x=l$) og simpelt understøttet i den anden ende ($x=0$). Ved den simple understøtning er der påført et moment M_a , som netop giver en enhedsrotationen $w'(0) = \phi_a = 1$ i punktet. Det ønskes eftervist at ovenstående moment M_a kan bestemmes ved :

$$M_a = \alpha \frac{EI}{l}, \quad \text{hvor} \quad \alpha = \frac{(kl) \sin(kl) - (kl)^2 \cos(kl)}{2(1 - \cos(kl)) - (kl) \sin(kl)}$$



Opgaven er relevant idet koefficienterne i stivhedsmatricen som bekendt kan bestemmes ved successivt at bestemme knudekræfterne (snitkræfterne ved bjælkeenderne) for én enhedsdeformation samtidig med at resten af bjælkens knudedeflytninger er nul. Dermed kan resultatet bruges til at opstille stivhedsmatricen for et bjælkeelement, hvori der også tages hensyn til stabilitet.

Ekstra spørgsmål:

- 1) Vis, ved grænseovergang, at for $F \rightarrow 0$ fås $\alpha = 4$. (Hjælp: udtryk \sin og \cos i Taylor serier)
- 2) Vis, at $M_a \rightarrow -\infty$ for $F \rightarrow EI(2\pi/l)^2$ og diskuter resultatet i relation til bjælkens randbetingelser.

Løsning

Løsningen til differentialligningen kan skrives

$$w = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) + C_3 x + C_4 \rightarrow$$

$$w' = -C_1 k \sin(kx) + C_2 k \cos(kx) + C_3$$

$$w'' = -C_1 k^2 \cos(kx) - C_2 k^2 \sin(kx)$$

$$w''' = C_1 k^3 \sin(kx) - C_2 k^3 \cos(kx)$$

Randbetingelser :

$$x = 0: \quad w = 0 = C_1 + C_4$$

$$w' = 1 = C_2 k + C_3$$

$$x = l: \quad w = 0 = C_1 \cos(kl) + C_2 \sin(kl) + C_3 l + C_4$$

$$w' = 0 = -C_1 k \sin(kl) + C_2 k \cos(kl) + C_3$$

Løsning :

$C_4 = -C_1$ og $C_3 = 1 - C_2 k$ fra første to betingelser, indsættes i sidste to :

$$\begin{bmatrix} \cos(kl) - 1 & \sin(kl) - (kl) \\ -k \sin(kl) & k(\cos(kl) - 1) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Det} &= k((\cos(kl) - 1)^2 + \sin(kl) * (\sin(kl) - (kl))) = k(\cos^2(kl) - 2 * \cos(kl) + 1 + \sin^2(kl) - (kl) \sin(kl)) = \\ &= k(2(1 - \cos(kl)) - (kl) \sin(kl)) \end{aligned}$$

Herved fås :

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\text{Det}} \begin{bmatrix} k(\cos(kl) - 1) & -\sin(kl) + (kl) \\ k \sin(kl) & \cos(kl) - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l \\ -1 \end{bmatrix} \text{ eller}$$

$$C_1 = \frac{1}{k} \frac{\sin(kl) - (kl) \cos(kl)}{2(1 - \cos(kl)) - (kl) \sin(kl)}$$

$$C_2 = \frac{1}{k} \frac{-(kl) \sin(kl) + 1 - \cos(kl)}{2(1 - \cos(kl)) - (kl) \sin(kl)}$$

Endelig bestemmes momentet ved

$$M_a = -M(0) = -EI w''(0) = C_1 k^2 EI$$

Derved fås :

$$M_a = \frac{EI}{l} \frac{(kl) \sin(kl) - (kl)^2 \cos(kl)}{2(1 - \cos(kl)) - (kl) \sin(kl)}$$

hvilket skulle vises.



Sammensatte bjælke-søjler: Elementanalyse - eksakt

$$\begin{bmatrix} N_a \\ V_a \\ M_a \\ N_b \\ V_b \\ M_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/l & 0 & 0 & -EA/l & 0 & 0 \\ 0 & \omega EI/l^3 & \gamma EI/l^2 & 0 & -\omega EI/l^3 & \gamma EI/l^2 \\ 0 & \gamma EI/l^2 & \alpha EI/l & 0 & -\gamma EI/l^2 & \beta EI/l \\ -EA/l & 0 & 0 & EA/l & 0 & 0 \\ 0 & -\omega EI/l^3 & -\gamma EI/l^2 & 0 & \omega EI/l^3 & -\gamma EI/l^2 \\ 0 & \gamma EI/l^2 & \beta EI/l & 0 & -\gamma EI/l^2 & \alpha EI/l \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_a \\ w_a \\ \varphi_a \\ u_b \\ w_b \\ \varphi_b \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = l \sqrt{\frac{|N|}{EI}}$$

Tryk

$$\alpha = \frac{\varepsilon \sin \varepsilon - \varepsilon^2 \cos \varepsilon}{2(1 - \cos \varepsilon) - \varepsilon \sin \varepsilon}$$

$$\beta = \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon \sin \varepsilon}{2(1 - \cos \varepsilon) - \varepsilon \sin \varepsilon}$$

$$\omega = 2\gamma - \varepsilon^2$$

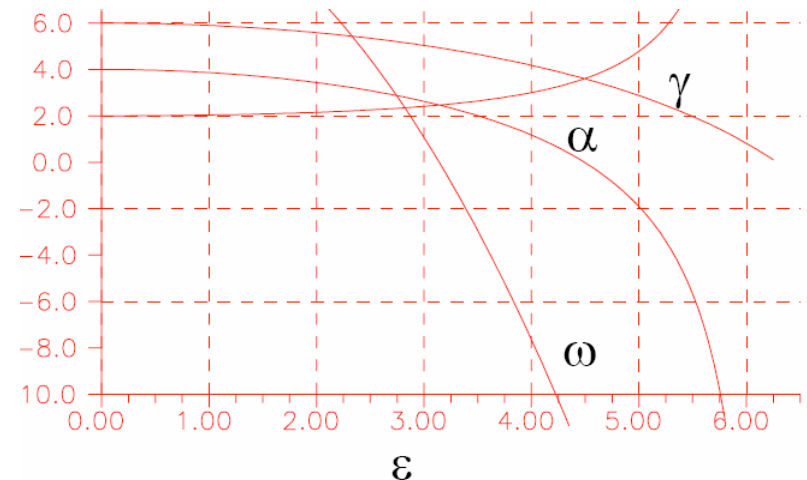
Træk

$$\alpha = \frac{\varepsilon^2 \cosh \varepsilon - \sinh \varepsilon}{2(1 - \cosh \varepsilon) + \varepsilon \sinh \varepsilon}$$

$$\beta = \frac{\varepsilon \sinh \varepsilon - \varepsilon^2}{2(1 - \cosh \varepsilon) + \varepsilon \sinh \varepsilon}$$

$$\gamma = \alpha + \beta$$

$$\omega = 2\gamma + \varepsilon^2$$





Sammensatte bjælke-søjler: Elementanalyse - eksakt

- Belastningsvektor for jævn fordelt belastning:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} pl \\ \frac{pl^2}{2(\alpha + \beta)} \\ 0 \\ \frac{1}{2} pl \\ \frac{pl^2}{2(\alpha + \beta)} \end{bmatrix}$$

Notat om von Mises spændingen

v. Mises referencespænding bruges ofte, når man skal vurdere om et materiale flyder under en fler-akset spændingstilstand.

Udgangspunktet er såkaldte spændingsinvarianter, dvs kombinationer af spændinger, som ikke afhænger af retning på det snit, man ser på. Opskrevet i hovedspændingerne $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ for et rumligt legeme er den mest hyppige invariant

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \quad (1.1)$$

Imidlertid viser forsøg, at flydning af et legeme ikke afhænger af et eventuelt ydre tryk p , svarende til

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p \quad (1.2)$$

Dermed bliver den modificerede invariant

$$\left(\sigma_1 - \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right)^2 + \left(\sigma_2 - \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right)^2 + \left(\sigma_3 - \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right)^2 \quad (1.3)$$

et bedre mål for spændingen i et punkt i forhold til den en-aksede flydespænding f_y . For plane tilstande ($\sigma_3 = 0$) reduceres udtrykket (1.3) til:

$$\frac{2}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2) \quad (1.4)$$

Herudfra defineres v.Mises spændingen for plane tilstande som

$$\sigma_{vMises} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \quad (1.5)$$

Forsøg med metalmaterialer viser, at

$$\sigma_{vMises} = f_y \quad (1.6)$$

giver en god beskrivelse af, fra hvornår flydning starter i punkt med fler-akset spændingstilstand. Flydeflader, som fremgår af udtrykkene (1.5)-(1.6), er en ellipse i et koordinatsystem med σ_1, σ_2 som akser.

Udnyttes relationerne mellem hovedspændingerne og spændingskomponenterne σ_x, σ_y, τ , givet i forbindelse med Mohrs cirkel side 91, ses efter lidt regning, at v. Mises referencespændingen for plane problemer også kan skrives

$$\sigma_{vMises} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau^2} \quad (1.7)$$

v. Mises spændingen er ofte den spænding, som udskrives fra FEM programmer.