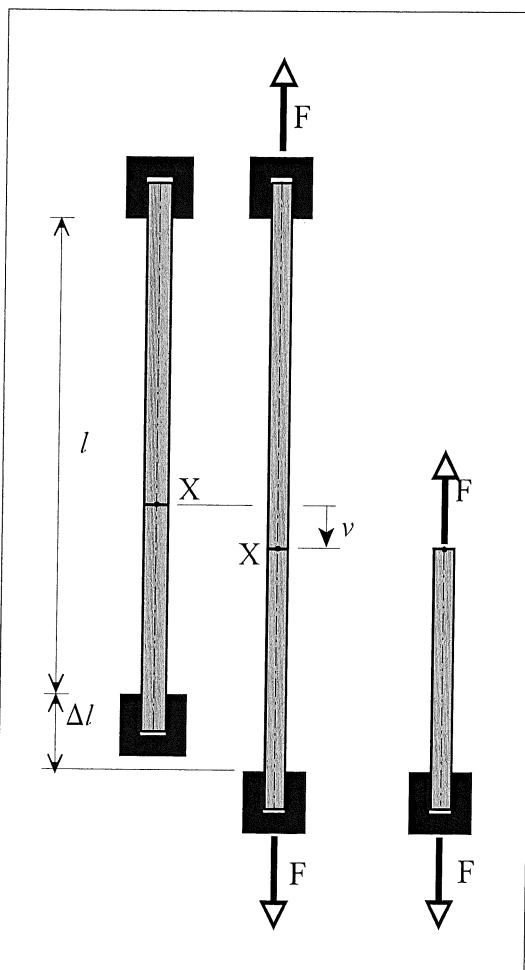


## PLANE ELASTISKE BJÆLKE- OG STANGSYSTEMER

### INDHOLD

1.	INDLEDNING .....	2
2.	BEREGNINGSMODELLER .....	6
3.	AKSIALPÅVIRKNING .....	7
	3.1 Beregningsmodel .....	7
	3.2 Arbejdsligningen .....	12
4.	BØJNINGSPÅVIRKNING .....	16
	4.1 Tværsnitsanalyse .....	18
	4.2 Naviers formel .....	20
	4.3 Elementanalyse .....	21
	4.4 Arbejdsligningen .....	26
5.	KOMBINERET AKSIAL - OG BØJNINGSPÅVIRKNING .....	30
	5.1 Tværsnitsanalyse .....	30
	5.2 Naviers formel .....	32
	5.3 Elementanalyse .....	34
	5.4 Arbejdsligningen .....	38
	5.5 Temperaturpåvirkning og initiale deformationer .....	39
6.	FORSKYDNINGSPÅVIRKNING .....	42
	6.1 Grashofs formel .....	44
	6.2 Forskydningsspændinger .....	46
	6.3 Forskydningsdeformationer .....	52
7.	SUPERPOSITIONSPRINCIPPET .....	61
	7.1 Superposition af statiske størrelser .....	61
	7.2 Superposition af geometriske størrelser .....	63
8.	STATISK UBESTEMTE KONSTRUKTIONER .....	64
	8.1 Indledning .....	64
	8.2 Statisk tilladelige snitkraftkurver .....	66
	8.3 Kraftmetoden .....	67
9.	DEFORMATIONSMETODEN .....	73
	9.1 Elementegenskaber .....	73
	9.2 Deformationsmetodens ligninger .....	76
	9.3 Manuel beregningsmetode .....	77
	APPENDIX A PLAN SPÆNDINGSTILSTAND .....	83
	APPENDIX B: INTEGRATIONSFORMLER .....	97
	APPENDIX C: BJÆLKEELEMENTER .....	99

## 1. INDLEDNING



Figur 1.1 Trækpåvirkning

Figur 1.1 symboliserer en prismatisk stang placeret i en træk-prøvemaskine. I den ubelastede tilstand er stangens frie længde  $l$ , medens stangens tværsnitsareal betegnes  $A$ .

### Geometriske forhold

Når stangen - v.h.a. prøvemaskinen - belastes af kraften  $F$ , vil den umiddelbare respons være at stangen bliver længere. Stangens forlængelse kaldes i det følgende  $\Delta l$ . (Samtidig med forlængelsen vil man ved måling kunne konstattere, at stangen tillige bliver lidt tyndere. Betydningen af dette er omtalt i appendix A.)

Betrages et tilfældigt (materielt) punkt  $X$  på stangens akse vil forlængelsen betyde, at dette punkt flytter sig et stykke  $v$  nedad. Det synes nu rimeligt at antage, at alle punkter beliggende på et tværsnit i stangen gennem  $X$  får samme lodrette flytning. Sagt med andre ord: vi vil *antage*, at tværsnit, der før deformationen er plane og vinkelrette på stangens akse, også efter deformationen er plane og vinkelrette på aksen. (Vær opmærksom på, at der er tale om en *geometrisk antagelse*, hvis godhed må verificeres ved forsøg. Sådanne forsøg viser, at antagelsen er tilstrækkelig god, når man betragter dele af stangen, der ikke er i umiddelbar nærhed af prøvemaskinens kåber.)

Betrages ligevægten af den del af stangen, der ligger under tværsnittet ved  $X$  og ses bort fra stangens egenvægt, indses det, at normalkraften i punkt  $X$  bliver lig med  $F$ , uanset hvor på aksen  $X$  ligger. Da alle dele af stangen således er utsat for den samme påvirkning, er det rimeligt at definere stangens længdeændring pr. længdeenhed  $\epsilon_0$  ved følgende udtryk:

$$\epsilon_0 = \frac{\Delta l}{l}$$

Den ubenævnte størrelse  $\epsilon_0$  benævnes stangens *aksiale tøjning* - eller stangens *længdetøjning*. Bemerk at ovenstående formel kun kan anvendes for en stang hvor normalkraften og dermed længdetøjningen er den samme i alle snit. En mere generel formel for  $\epsilon_0$  findes i afsnit 3.1.

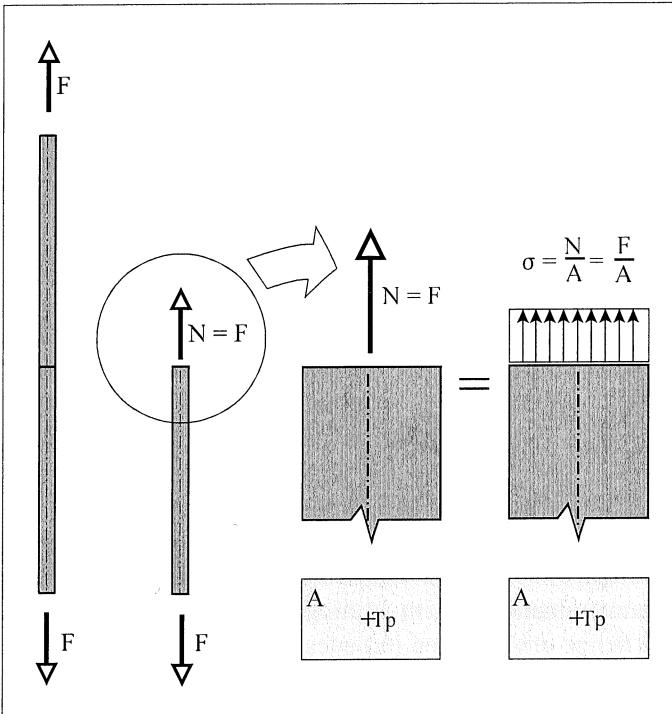
Betrages stangen som sammensat af et uendeligt stort antal langsgående fibre, betyder antagelsen om, at plane tværsnit forbliver plane tværsnit, at samtlige fibre får samme forlængelse og dermed også samme tøjning  $\epsilon$ . Med andre ord er tøjningen konstant henover stangtværsnittet. Dette kan udtrykkes ved ligningen:

$$\epsilon = \epsilon_0$$

Ovenstående udtryk kaldes ofte stangtværsnittets *geometriske betingelser*.

*Statiske forhold*

Som nævnt ovenfor vil der gennem et hvert tværsnit skulle overføres en normalkraft af størrelsen  $F$ . Normalkraften er defineret som den kraft, den del af stangen, der ligger over tværsnittet, må påvirke den del, der ligger under tværsnittet med (eller omvendt), for at ligevægten kan opretholdes. I realiteten må denne kraft være *resultanten* af et kraftsystem, der er fordelt over hele stangens tværsnit som antydet på figur 1.2. Intensiteten af dette kraftsystem benævnes *spændingen* - eller mere præcis *normalspændingen*, idet den virker vinkelret på tværsnittet dvs. i tværsnitsnormalens retning. Normalspændinger repræsenteres sædvanligvis ved det græske bogstav  $\sigma$  (sigma). Spændinger har altså dimensionen kraft pr. arealenhed og måles f.eks. i Pascal ( $\text{Pa} = \text{N/m}^2$ ) eller MegaPascal ( $\text{MPa} = \text{MN/m}^2 = \text{N/mm}^2$ ).



**Figur 1.2** Normalkraft og normalspænding

spændingen i alle fibre være konstant. Vi har således

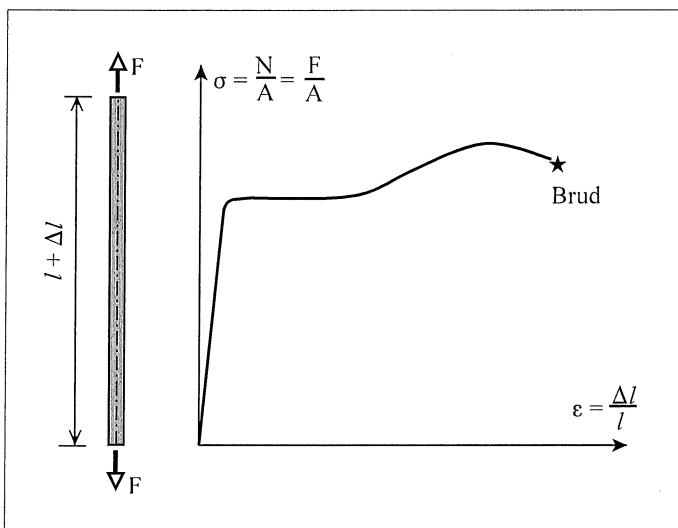
$$N = \int_A \sigma dA = \sigma \int_A dA = \sigma A \Rightarrow \sigma = \frac{N}{A}$$

Bemærk, at spændingen er defineret i forhold til stangens tværsnitsareal  $A$  i den *udeformerede* tilstand. Ovenstående udtryk kaldes stangtværsnittets *statiske betingelse* og udtrykker altså, at normalkraften er *statisk økvivalent* med det kraftsystem, der udgøres af spændingerne.

Da resultanten af en ensformigt fordelt fladelast går igennem fladens tyngdepunkt indses det, at normalkraftens angrebspunkt ved en spænding, der er ensformigt fordelt over tværsnittet, må have angrebspunkt i tværsnittets tyngdepunkt. For at opnå denne type spændingsfordeling må stangen derfor være ophængt på en sådan måde, at angrebslinjen for den ydre last  $F$  er sammenfaldende med stangens tyngdepunktslinje således, som det er antydet på figur 1.2.

*Fysiske forhold*

I prøvemaskinen kan vi måle sammenhørende værdier af kraften  $F$  og forlængelsen  $\Delta l$  og optegne resultatet på en graf, der udtrykker  $F$  som funktion af  $\Delta l$ . Udseendet af denne graf må dels afhænge af det materiale, stangen er fremstillet af, og dels af stangens dimensioner  $A$  og  $l$ . For at opnå en graf der kun afspejler materialets egenskaber er det nærliggende i stedet at optegne  $\sigma$  som funktion af  $\epsilon$ . En sådan graf benævnes materialets *trækarbejdselinje*. Figur 1.3 viser en typisk trækarbejdsline for blødt konstruktionsstål.

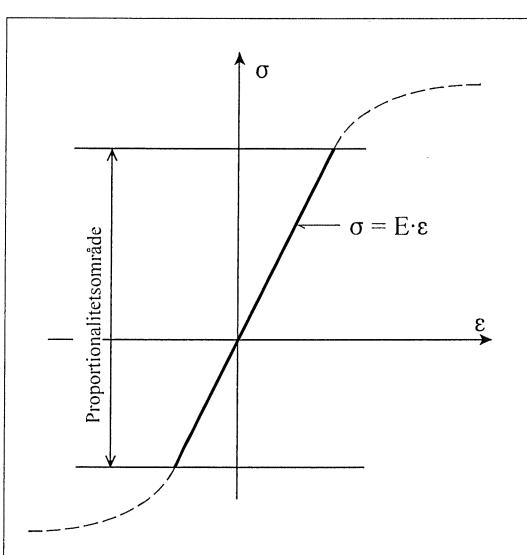


**Figur 1.3 Trækarbejdselinje**

når man en aflastningskurve for materialet. Hvis aflastningskurven er sammenfaldende med belastningskurven (dvs. arbejdslien) taler man om et *elastisk* materiale. For et elastisk materiale gælder det altså, at der er en entydig sammenhæng mellem tøjning og spænding. De fleste materialer udviser elastiske egenskaber så længe aflastningen indledes ved en tilstrækkelig lille tøjning.

I en trykprøvemaskine kan man på tilsvarende måde fremstille en trykarbejdsline. En fælles graf for et materiales træk- og trykarbejdsline benævnes blot materialets *arbejdsline*. Sammenhængen mellem spændinger og tøjninger benævnes ofte materialets *fysiske betingelse*.

I det foregående har det været underforstået, at arbejdslien blev optegnet for voksende værdier af lasten  $F$ . Afbryder man forsøget før det endelige brud indtræffer og foretager en aflastning af prøvemnet, medens man stadig registrerer sammenhørende værdier af tøjning og spænding, op-



**Figur 1.4 Lineærelastisk område**

Et elastisk materiale hvorom det gælder, at der er proportionalitet mellem spændinger og tøjninger, kaldes *lineærelastisk*. Sammenhængen mellem spænding og tøjning for et lineærelastisk materiale kan derfor udtrykkes ved ligningen:

$$\sigma = E\epsilon$$

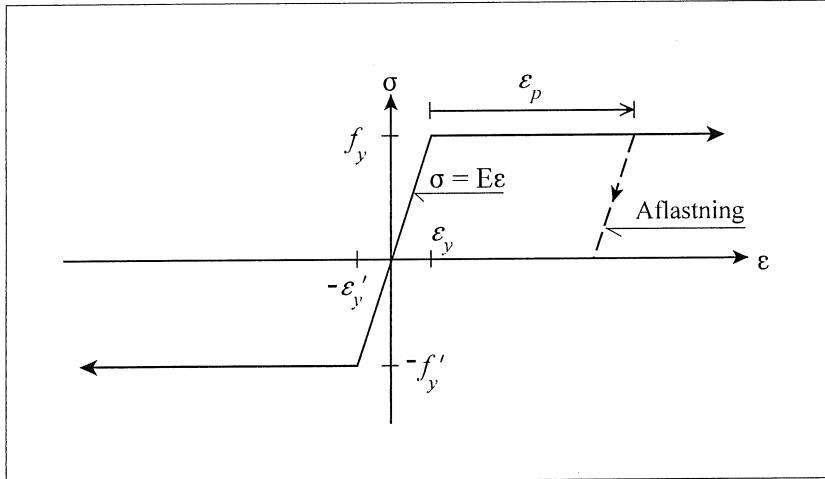
Dette udtryk benævnes *Hooke's lov* og proportionalitetsfaktoren  $E$  kaldes *elasticitetskoefficienten*, *E-modulet* eller *Youngs Modul*.

De fleste bygningsmaterialer kan regnes lineærelastiske inden for visse spændingsgrænser. Se figur 1.4

Med henblik på at opnå tilstrækkelig simple beregningsmodeller er det i almindelighed nødvendigt at anvende idealiserede arbejdslien.

Den mest anvendte idealiserede arbejdsline (bortset fra den rent lineærelastiske) er vist på figur 1.5. Et materiale, der følger denne arbejdsline, benævnes *lineærelastisk-idealplastisk*. De fleste former for konstruktionsstål kan med god tilnærmelse betragtes som lineærelastiske-idealplastiske.

I en trækprøvemaskine vil en stang af lineærelastisk-idealplastisk materiale opføre sig lineærelastisk for en voksende forlængelse, indtil den har opnået en bestemt tøjning  $\epsilon_y$ . Denne tøjning kaldes materialets (træk-) *flydetøjning*. Hvis  $E$  er materialets elasticitetskoefficient, vil den tilsvarende spænding være  $f_y = E \epsilon_y$ . Spændingen  $f_y$  kaldes materialets (træk-) *flydespænding*.



**Figur 1.5 Lineærelastisk-idealplastisk arbejdselinje**

Udsættes stangen for en yderligere forlængelse for eksempel svarende til den på figuren viste tøjning  $\epsilon_p$ , vil spændingen forblive konstant lig med flydespændingen  $f_y$ . Den nødvendige trækraft vil altså holde sig konstant, medens stangen bliver længere. Man siger at stangmaterialet flyder. Som antydet på figuren behøver trækflydespændingen  $f_y$  ikke nødvendigvis at være lig med trykflydespændingen  $f'_y$ .

Hvis man efter, at materialet er begyndt at flyde, påbegynder en aflastning af stangen, vil de sammenhørende værdier af tøjning og spænding følge den på figur 1.5 viste aflastningsgren, der har samme hældning ( $E$ ) som den første (elastiske) del af arbejdslien.

Når aflastningen er tilendebragt, dvs når spændingen i stangen er 0, vil stangen således have fået en blivende forlængelse, der pr. længdeenhed er  $\epsilon_p$ , svarende til den tøjning *udover* flydetøjningen som stangen blev utsat for inden aflastningen.

Den reversible del af tøjningen, (her  $\epsilon_y$ ) kaldes den elastiske tøjning, medens den irreversible del (her  $\epsilon_p$ ) kaldes den plastiske tøjning.

*I nærværende kompendium vil vi indsætte os til at beskrive beregningsmodeller, der er baseret på en lineærelastisk arbejdselinje. Modellerne kan derfor kun anvendes så lange, spændingerne i konstruktionen holder sig indenfor de proportionalitetsgrænser, der er gældende for de anvendte materialer.*

Herefter fås ved indsættelse af Hookes lov i stangens statiske betingelse:

$$N = EA\epsilon_0 \quad \text{eller} \quad \epsilon_0 = \frac{N}{EA}$$

Ovenstående udtryk, der forbinder deformation og snitkraft i stangen, kaldes ofte *stangelementets fysiske betingelse*, medens produktet EA benævnes *stangens aksialstivhed*.

### Grundligningen

Indsættes den fysiske betingelse i udtrykket  $\Delta l = \epsilon_0 l$  og indføres  $F = N$ , fås en direkte sammenhæng mellem belastningen  $F$  og stangens forlængelse  $\Delta l$ :

$$\Delta l = \frac{l}{EA} F$$

Dette udtryk, der direkte forbinder stangens forlængelse med belastningen, kaldes stangens *grundligning*.

## **2. BEREGNINGSMODELLER**

De fleste konstruktioner er opbygget af et antal velkendte konstruktionselementer såsom bjælker, søger, plader osv. For at kunne regne på en konstruktion er det derfor nødvendigt at etablere beregningsmodeller for de forskellige typer af konstruktionselementer.

I det følgende skal vi beskæftige os med beregningsmodeller for bjælkeelementer udsat dels for aksial last dels for tværlast og dels for kombinationer af disse to belastningstyper.

Indledningsafsnittet er et eksempel på en beregningsmodel for et aksialpåvirket bjælkelement, hvor den eneste last består af to modsat rettede kræfter, hvis angrebspunkter ligger på elementets tyngdepunktslinje ved enderne af elementet. Et bjælkelement med denne type belastning kaldes almindeligvis en *stang* eller et *stangelement*.

En beregningsmodel kan karakteriseres som en matematisk model, der kan anvendes til at beregne virkningerne af en belastning i form af snitkræfter og spændinger og de dertil hørende flytninger og deformationer.

Udledningen af en beregningsmodel opdeles sædvanligvis i redegørelser for modellens *geometriske, statiske og fysiske forhold* som vist i indledningsafsnittet.

Modellens *geometriske forhold* vedrører relationerne mellem flytninger og deformationer/tøjninger. Disse relationer benævnes de *geometriske betingelser* og baseres på et sæt simplificerende antagelser vedrørende flytningsfeltet. (F.eks. "plane tværsnit forbliver plane".)

Modellens *statiske forhold* vedrører relationer mellem belastning, snitkræfter og spændinger. Disse relationer benævnes de *statiske betingelser* og etableres ved hjælp af ligevægtsligningerne. De i det følgende behandlede modeller vil alle være baseret på følgende antagelse:

*Flytningernes indflydelse på snitkraftfordelingen er så lille, at man med tilstrækkelig nøjagtighed kan basere ligevægtsligningerne på den udeformerede bjælkes geometri.*

(En teori der baseres på denne antagelse benævnes en førsteordensteori. Anvendes en førsteordensteori vil der være visse fænomener, som f.eks. søgerstabilitet, der ikke kan beskrives.)

Modellens *fysiske forhold* vedrører sammenhængen mellem snitkræfter og deformationer og baseres på konstruktionsmaterialets fysiske egenskaber som f.eks. materialets arbejdslinje. De modeller, der udledes i det følgende, er alle baseret på lineærelastiske materialer. Relationer mellem snitkræfter og deformationer benævnes modellens *fysiske betingelser* eller konstitututive ligninger.

På basis af modellens fysiske betingelser kan de statiske og geometriske betingelser ofte sammenkædes til en eller flere *grundligninger*, der udtrykker sammenhængen mellem modellens belastning og de tilhørende flytninger. Dette gælder specielt for lineærelastiske modeller.

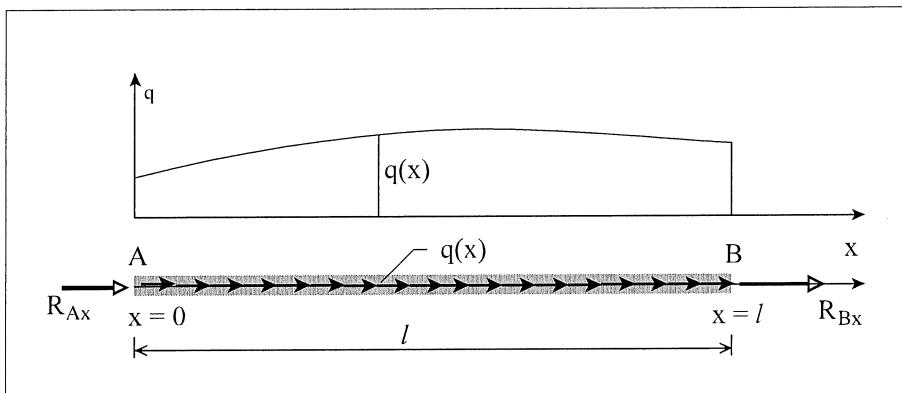
*Der skal gøres opmærksom på, at en models geometriske og statiske betingelser er uafhængige af de fysiske forhold og derfor gælder, uanset hvilket materiale konstruktionselementet består af.*

De modeller, der vil blive behandlet i det følgende, er alle plane. Ved en *plan konstruktionsmodel* forstås en model hvor geometri, belastning og udbøjninger kan beskrives i et og samme plane koordinatsystem.

### 3. AKSIALPÅVIRKNING

#### 3.1 Beregningsmodel

Figur 3.1 viser et aksialpåvirket stang- eller bjælkeelement. Bjælkelementet repræsenterer en bjælke eller en del af en bjælke.



**Figur 3.1** Aksialpåvirket bjælkeelement

Som basis for modelbeskrivelsen indlægges en koordinatsystem, hvor x-aksen er sammenfaldende med den *udeformerede* bjælkes tyngdepunktsakse. De enkelte materielle punkter på bjælkeaksen kan derfor karakteriseres ved deres x-koordinat i den udeformerede situation. Bjælkeaksens endepunkter A og B er således bestemt ved koordinaterne 0 og  $l$ .

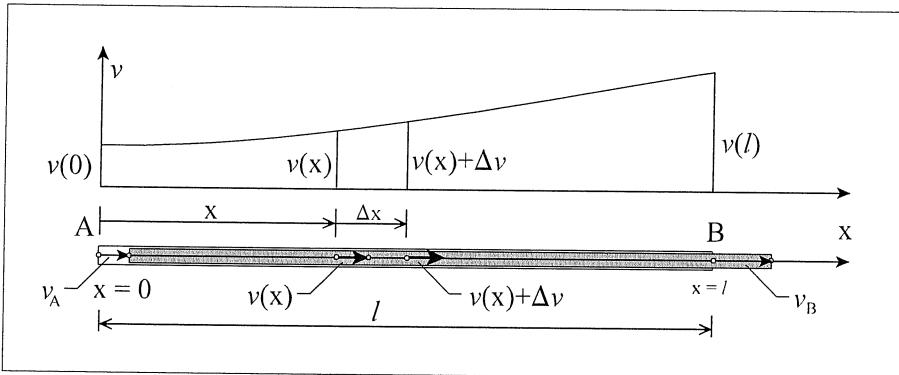
Bjælken kan være belastet med en fordelt aksiallast med intensiteten  $q(x)$  (kraft/længdeenhed). Lastintensiteten kan være en funktion af  $x$  som antydet på figuren. Ud over den fordelte belastning er elementet i enderne påvirket af kræfterne  $R_{Ax}$  og  $R_{Bx}$ . Disse påvirkninger kan betragtes som snitkræfter, reaktioner eller ydre last afhængigt af elementets understøtningsforhold. De nævnte påvirkninger har virkelinjer, der er sammenfaldende med bjælkeaksen og regnes positive som vist på figuren.

### Geometriske forhold

Når bjælkeelementet udsættes for en aksialbelastning, vil de enkelte punkter på bjælkeaksen flytte sig langs aksen. Med samme begrundelse som i indledningsafsnittet vil vi *antage, at tværsnit, der før deformationen er plane og vinkelrette på stangens akse, også efter deformationen er plane og vinkelrette på aksen.* Denne antagelse betyder, at alle materielle punkter beliggende på samme tværsnit får samme flytning. Flytningstilstanden, og dermed deformationstilstanden i bjælkelementet, kan derfor beskrives ved alene at betragte flytningerne af punkter på bjælkeaksen. Endvidere må det som for stangen gælde, at tøjningsfordelingen over tværsnittene er konstant. Følgende ligning er altså stadig gyldig:

$$\varepsilon = \varepsilon_0$$

Figur 3.2 viser bjælkeelementet dels i den udeformerede tilstand og dels i den deformerede tilstand. Flytningen af et punkt med koordinaten  $x$  betegnes  $v = v(x)$ . Figuren viser endvidere en graf, der udtrykker flytningsfunktionen  $v$ 's afhængighed af  $x$ .



**Figur 3.2 Aksiale flytninger**

Vi betragter nu et punkt på bjælkeaksen karakteriseret ved koordinaten  $x + \Delta x$ . Flytningen af dette punkt er  $v(x + \Delta x) = v(x) + \Delta v$ , hvor  $\Delta v$  er et udtryk for flytningstilvæksten, når man bevæger sig et stykke  $\Delta x$  mod højre. (Se figur 3.2). Et stykke af bjælkeaksen, der i den udeformerede tilstand har længden  $\Delta x$ , vil således have længden  $\Delta x + \Delta v$  i den deformerede tilstand. Den relative længdeændring af dette stykke bliver derfor  $\Delta v / \Delta x$ . Denne brøk har grænseværdien  $v'(x)$  når  $\Delta x \rightarrow 0$ . Bjælkeaksens tøjning i pkt  $x$  defineres nu som denne grænseværdi. Vi har altså:

$$\varepsilon_0(x) = \frac{dv}{dx} \quad \text{eller} \quad \varepsilon_0(x) = v'(x)$$

Dette udtryk omtales som det aksialpåvirkede bjælkeelements *geometriske betingelse*.

I det følgende vil vi ofte komme til at beskæftige os med udledninger af samme karakter som ovenstående. For at gøre disse udledninger enklere er det inden for mekanikken almindeligt at erstatte  $\Delta$  med  $d$  og underforstå grænseovergangen  $\Delta x \rightarrow 0$ . Anvendes denne fremgangsmåde ved udledelsen af ovenstående erstatter vi altså  $\Delta x$  med  $dx$  og  $\Delta v$  med  $dv$ . (Man udtrykker dette sprogligt ved at sige, at man betragter et infinitesimalt stykke  $dx$  af bjælen.) Herefter fås den relative længdeændring  $\varepsilon_0$  direkte som  $dv/dx$ .

De mulige *geometriske randbetingelser* er jf. figur 3.2

$$v(0) = v_A \quad , \quad v(l) = v_B$$

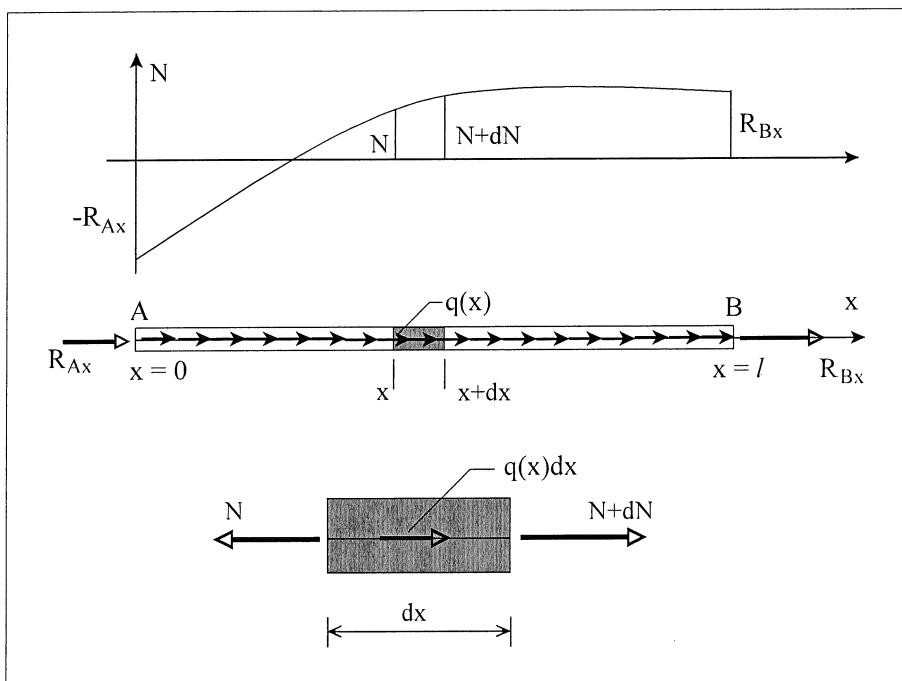
*Statiske forhold*

I en aksialbelastet bjælke vil den eneste snitkraft være normalkraften  $N$ .  $N$  regnes som sædvanlig positiv som træk. Da vi under behandlingen af de geometriske forhold har indset, at alle punkter i samme tværsnit er utsat for den samme tøjning, må det også gælde, at spændingsfordelingen er konstant. Som det var tilfældet med stangelementet har vi altså følgende sammenhæng mellem normalkraft og normalspænding:

$$N = \sigma A \quad \text{eller} \quad \sigma = \frac{N}{A}$$

A står som før for elementets tværsnitsareal, men der skal gøres opmærksom på, at dette kan variere hen gennem bjælken - dvs. at  $A$  kan være en funktion af  $x$ .

Figur 3.3 viser et aksialpåvirket bjælkelement samt en graf, der viser en tænkt variation af normalkraften hen gennem elementet.

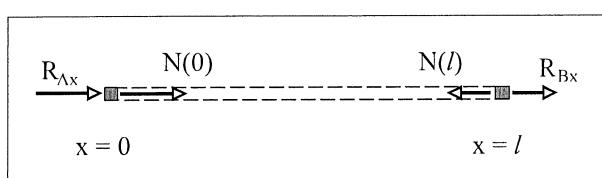


**Figur 3.3** Normalkraefter

Modellens statiske betingelse opstilles ved at betragte ligevægten af en infinitesimal bjælkedel af længden  $dx$ . Med henvisning til figuren ses det, at følgende ligevægtsgleichning kan opstilles:  $q(x)dx + N + dN - N = 0$ . Ved division med  $dx$  fås herefter modellens *statiske feltbetingelse*:

$$\frac{dN}{dx} = -q(x) \quad \text{eller} \quad N'(x) = -q(x)$$

Feltbetingelsen giver udtryk for et ligevægtskrav,  $N$  skal opfylde i "det indre" af elementet.



Ved at betragte ligevægten af infinitesimale bjælkedele ved  $x = 0$  og  $x = l$ , (se figurerne 3.3 og 3.4) fås nedenstående *statiske randbetingelser*:

$$\begin{aligned} N(0) &= -R_{Ax} \\ N(l) &= R_{Bx} \end{aligned}$$

**Figur 3.4** Statiske randbetingelser

### Fysiske forhold

Idet vi forudsætter, at bjælkematerialet er lineærerlastisk, har vi følgende sammenhæng mellem spændinger og tøjninger :  $\sigma = E \epsilon$ . Sammenholdes dette udtryk med den geometriske tværsnitsbetningelse  $\epsilon = \epsilon_0$  og den statiske tværsnitsbetningelse  $N = \sigma A$  fås elementets *fysiske betingelse*:

$$N = EA\epsilon_0 \quad \text{eller} \quad \epsilon_0 = \frac{N}{EA}$$

Dette udtryk sætter snitkraften  $N$  i relation til bjælkeaksens deformation  $\epsilon_0$ . Som tidligere nævnt kaldes produktet  $EA$  for *aksialstivheden*.

### Grundligningen

Indsættes den geometriske betingelse  $\epsilon_0 = v'$  i den fysiske betingelse får vi:  $N = EA v'$ , der ved indsættelse i den statiske feltbetningelse  $N' = -q$ , giver ligningen:

$$\frac{d(EAv')}{dx} = -q \quad \text{Er } EA = \text{konstant} \text{ fås: } EAv'' = -q \quad \text{eller} \quad \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{q}{EA}$$

Dette er den aksialbelastede bjælkes *grundligning*.

Da grundligningen er en andenordens differentialligning, kræves der 2 randbetingelser for at kunne bestemme en entydig løsning.

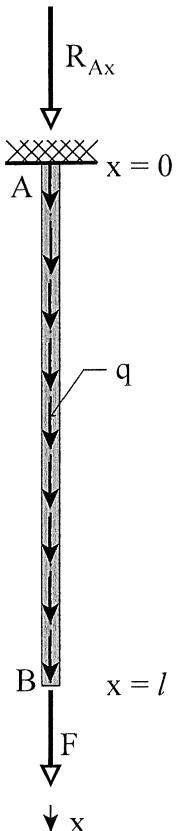
Man skelner mellem geometriske randbetingelser og statiske randbetingelser.

De geometriske randbetingelser (se afsnittet om geometriske forhold) angiver foreskrevne værdier for  $v$  i enderne af elementet og kan derfor anvendes direkte.

De statiske randbetingelser (se afsnittet om statiske forhold) angiver foreskrevne værdier for  $N$  i enderne af elementet og kan derfor ikke anvendes direkte. Ved brug af den fysiske betingelse  $N = EA v'$  kan disse betingelser imidlertid udtrykkes ved  $v'$ . Med henvisning til figur 3.2 og figur 3.4 fås:

Geometriske randbetingelser	Statiske randbetingelser
$v(0) = v_A$	eller $N(0) = EAv'(0) = -R_{Ax}$
$v(l) = v_B$	eller $N(l) = EAv'(l) = R_{Bx}$

Bemærk, at der altid vil være netop én randbetingelse i hver ende af elementet. Er  $v_A$  f.eks. kendt vil den tilsvarende kraft (reaktion)  $R_{Ax}$  være ukendt - og omvendt. Der er altså kun mulighed for én betingelse i hver linje i skemaet ovenfor.

**Eksempel 3.1** Anvendelse af differentialligningen for aksialpåvirkning.

Hosstående figur viser et aksialpåvirket elastisk bjælkelement A-B, der er ophængt i punkt A og i punkt B er belastet med en lodret nedadrettet enkeltkraft af størrelsen F. Udover F er elementet belastet med en ensformigt fordelt nedadrettet last med intensiteten q. (q kan betragtes som et udtryk for elementets vægt pr. længdeenhed.) Angrebslinjerne for F og q er sammenfaldende med elementets tyngdepunktsakse.

Bjælkeelementet har i den udeformerede tilstand længden  $l$  og det konstante tværsnitsareal A. Aksialstivheden EA kan således regnes konstant.

Bjælkeelementets forlængelse  $\Delta l$  samt reaktionen  $R_{Ax}$  ønskes bestemt ved hjælp af elementets grundligning.

$$\text{For konstant EA lyder grundligningen: } v''(x) = -\frac{q}{EA}$$

Da q er konstant fås umiddelbart ved integration:

$$v'(x) = -\frac{q}{EA}x + C_1$$

$$v(x) = -\frac{1}{2}\frac{q}{EA}x^2 + C_1x + C_2$$

Integrationskonstanterne  $C_1$  og  $C_2$  bestemmes nu vha. randbetingelserne.

$$x = 0: \quad v(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$x = l: \quad N(l) = F \Rightarrow EA v'(l) = -ql + EAC_1 = F$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{1}{EA}(F + ql)$$

Indsættes dette i udtrykkene for  $v'$  og  $v$  fås:

$$v'(x) = \varepsilon_0(x) = \frac{1}{EA}(-qx + ql + F) ; \quad v(x) = \frac{1}{EA}\left(-\frac{1}{2}qx^2 + (F + ql)x\right)$$

Da bjælkeelementets forlængelse  $\Delta l$  svarer til den lodrette flytning af punkt B, har vi:

$$\Delta l = v(l) = \frac{1}{EA}\left(-\frac{1}{2}ql^2 + (F + ql)l\right) = \frac{1}{EA}(Fl + \frac{1}{2}ql^2)$$

Bemærk, at for  $q = 0$  fås  $\Delta l = \frac{l}{EA}F$ , som vist i indledningsafsnittet.

Normalkraften N og hermed reaktionen  $R_{Ax}$  kan nu bestemmes af den fysiske betingelse for elementet:

$$N(x) = EA\varepsilon_0(x) = EA v'(x) = q(l - x) + F$$

$$R_{Ax} = -N(0) = -(ql + F)$$

Da konstruktionen er statisk bestemt er det naturligvis nemmere at bestemme disse to størrelser direkte ved hjælp af ligevægtsligningerne.

### 3.2 Arbejds ligningen (Det virtuelle arbejdes princip)

Såfremt de statiske felt- og randbetingelser er opfyldt, må nedenstående ligning gælde for *vilkårligt valgte* funktioner  $\delta v = \delta v(x)$ , idet alle udtrykkene i de kantede parenteser er identisk lig med 0. (NB!  $\delta v$  skal opfattes som ét symbol).

$$\int_0^{\ell} \delta v(x) [N'(x) + q(x)] dx + \delta v(0) [R_{Ax} + N(0)] + \delta v(l) [R_{Bx} - N(l)] = 0$$

Omvendt kan man slutte: Hvis ovenstående er opfyldt for *alle* vilkårligt valgte funktioner  $\delta w$ , da er de statiske felt- og randbetingelser opfyldt.

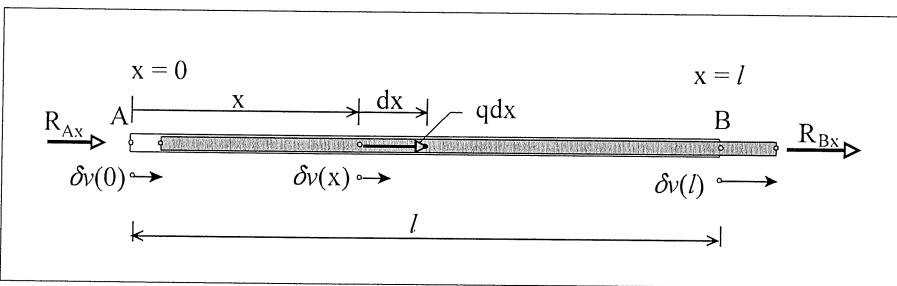
Ved brug af delvis integration foretages følgende omskrivning:

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell} \delta v(x) N'(x) dx &= [\delta v(x) N(x)]_0^{\ell} - \int_0^{\ell} \delta v'(x) N(x) dx \\ &= \delta v(l) N(\ell) - \delta v(0) N(0) - \int_0^{\ell} \delta v'(x) N(x) dx \end{aligned}$$

Indsættes dette i den oprindelige ligning kan følgende ligning udledes.

$$\int_0^{\ell} \delta v'(x) N(x) dx = \delta v(0) R_{Ax} + \delta v(l) R_{Bx} + \int_0^{\ell} \delta v(x) q(x) dx$$

Tolkes funktionen  $\delta v$  nu som en virtuel (tænkt) flytningsfunktion (se figur 3.5), kan  $\delta v'$  betragtes som den tilsvarende virtuelle aksetøjning.



Figur 3.5 Virtuelle flytninger

Herefter kan højre side af ovenstående ligning tolkes som det arbejde randkræfterne  $R_{Ax}$  og  $R_{Bx}$  samt den fordelte aksiallast  $q$  ville udføre ved en virtuel flytning  $\delta v$ . Dette arbejde kaldes det virtuelle ydre arbejde og benævnes  $\delta A_y$ . Tilsvarende benævnes venstre side af ligningen det virtuelle indre arbejde  $\delta A_i$ . Vi har altså:

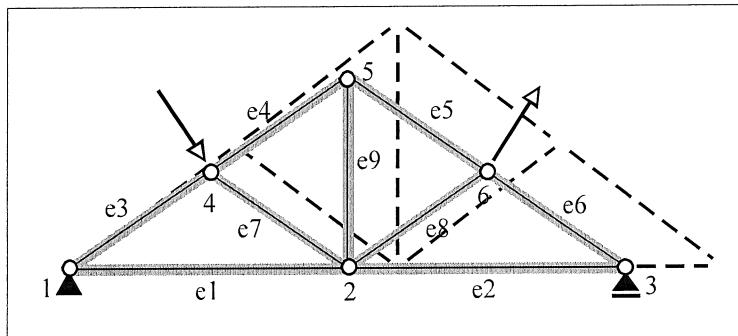
$$\begin{aligned} \delta A_y &= \delta v(0) R_{Ax} + \delta v(l) R_{Bx} + \int_0^{\ell} \delta v(x) q(x) dx \\ \delta A_i &= \int_0^{\ell} \delta v'(x) N(x) dx \end{aligned}$$

*Det virtuelle arbejdes princip* kan herefter formuleres som følger:

$$\text{Ligevægt} \Leftrightarrow \delta A_i = \delta A_y \text{ for alle virtuelle flytninger}$$

Bemærk, at det virtuelle arbejdes princip er en ren matematisk omskrivning af de statiske felt- og randbetingelser og derfor uafhængigt af beregningsmodellens fysiske forhold - dvs. materialeegenskaber.

Den netop udledte version af arbejdslikningen gælder indtil videre kun for et enkelt aksialt påvirket bjælkelement. Er en konstruktion sammensat af flere sådanne elementer - som f.eks. en gitterkonstruktion - kan man forestille sig, at de enkelte elementer frigøres fra knuderne, hvorefter hvert element gives en virtuel flytning som antydet på figur 3.6. (Det skal erindres, at den virtuelle flytning intet har med virkelig flytning - dvs. den der forårsages af den aktuelle last - at gøre.)

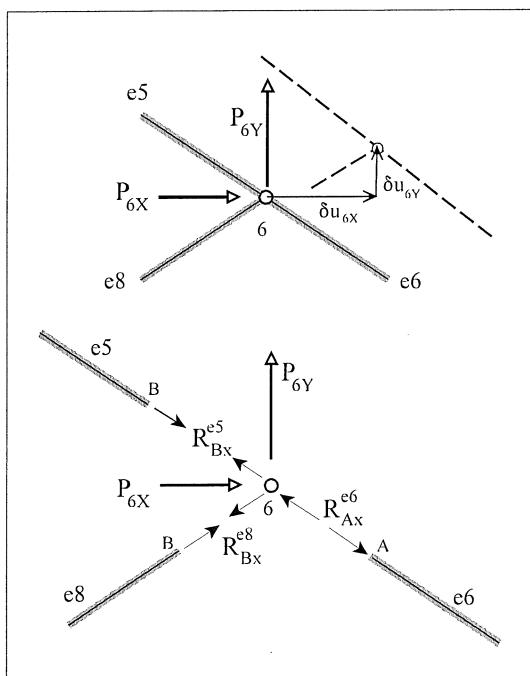


**Figur 3.6** Virtuelle flytninger

Denne flytning foregår dels ved at elementerne flyttes som stive legemer og dels ved at elementerne gives et sæt aksiale flytninger  $\delta v$ , således at elementenderne kan bringes til at nå hinanden. Da det enkelte element er i ligevægt, vil en flytning som et stift hele ikke give anledning til hverken ydre eller indre arbejde. Det er således kun de aksiale flytninger, der bidrager til det virtuelle arbejde.

Det indre hhv. det ydre virtuelle arbejde for samtlige elementer fås derfor umiddelbart som summen af de enkelte elementers indre og ydre arbejder:

$$\begin{aligned}\delta A_y &= \sum_1^{n_e} (\delta v(0) R_{Ax} + \delta v(l) R_{Bx}) + \sum_1^{n_e} \int_0^l \delta v q dx \\ \delta A_i &= \sum_1^{n_e} \int_0^l \delta v' N dx \quad (n_e = \text{antal elementer})\end{aligned}$$



**Figur 3.7**

Figur 3.7 viser de 3 elementer, der støder op til knude nr. 6. I et globalt XY-kordinatsystem udtrykker  $\delta u_{6x}$  og  $\delta u_{6y}$  den virtuelle flytning af knude 6. Da den enkelte knude forudsættes at være i ligevægt er det arbejde, der skal udføres ved en vilkårlig virtuel flytning af knuden, lig med 0. Forestiller man sig derfor, at knuden følger med bjælkeenderne ved den virtuelle flytning, vil dette ikke påvirke det samlede ydre arbejde. Betragtes figur 3.7 kan det nu indsese, at det arbejde, randlasten (R) på de tre elementer udfører, ophæves af det arbejde, som de tilsvarende kræfter på knuden udfører. (De to sæt kræfter er lige store og modsat rettede.) Tilbage bliver det arbejde, som den ydre last på knuden udfører. I ovenstående udtryk for det ydre virtuelle arbejde kan randlastens bidrag derfor erstattes med det arbejde knudelasten udfører. Herefter kan det virtuelle arbejdes princip for den samlede konstruktion udtrykkes ved:

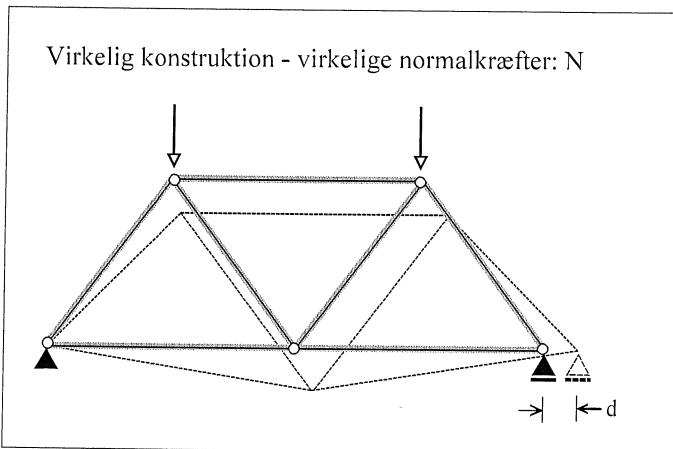
$$\text{Ligevægt} \Leftrightarrow \delta A_i = \delta A_y \text{ for alle virtuelle flytninger}$$

$$\delta A_y = \sum_1^{n_k} (\delta u_{kx} P_{kx} + \delta u_{ky} P_{ky}) + \sum_1^{n_e} \int_0^l \delta v q dx ; \quad \delta A_i = \sum_1^{n_e} \int_0^l \delta v' N dx$$

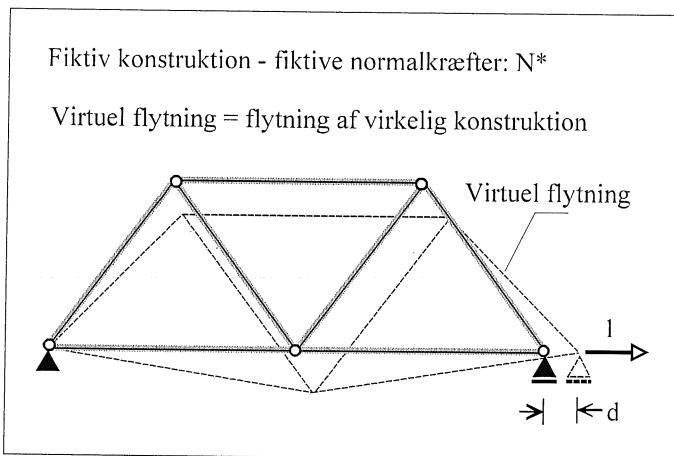
$$n_k = \text{antal knuder} ; \quad n_e = \text{antal elementer}$$

### Flytningsbestemmelse vha. arbejdslieningen

Som nævnt er arbejdslieningen en matematisk omskrivning af ligevægtslieningerne og kan som sådan erstatte disse f.eks. til bestemmelse af reaktioner og snitkræfter i statisk bestemte konstruktioner. Desuden er arbejdslieningen et nyttigt redskab i forbindelse med formuleringen af computerbaserede beregningsmodeller. En særlig anvendelse af arbejdslieningen knytter sig til beregning af flytninger i elastiske konstruktioner. Der vil blive redegjort for denne anvendelse i det følgende.



**Figur 3.8** Virkelig belastning



**Figur 3.9** Fiktiv belastning

Figur 3.8 viser en simpelt understøttet konstruktion opbygget af aksialpåvirkede elementer. Når konstruktionen belastes medfører dette flytninger af elementer og knuder. På figuren er den deformerede konstruktion vist med punkterede linjer. (For anskuelighedens skyld er flytningernes størrelse stærkt overdrevet.)

Den vandrette flytning ( $d$ ) af den bevægelige understøttning ønskes nu beregnet. Til dette formål betragtes en tilsvarende konstruktion (se figur 3.9), belastet af en enkeltkraft af størrelsen 1 virkende i den knude, hvor flytningen søger og med samme retning som denne. Denne konstruktion benævnes i det følgende den *fiktive konstruktion* og enkeltkraften 1 benævnes den *fiktive last*.

*Arbejdslieningen anvendes nu på den fiktive konstruktion, idet man som virtuel flytning anvender flytningerne fra den virkelige konstruktion.* (Det erindres at arbejdslieningen gælder for en vilkårlig virtuel flytning, blot den fiktive konstruktion er i ligevægt.)

For det virtuelle ydre arbejde fås:  $\delta A_y = 1 \cdot d$ , idet den fiktive last er den eneste last, der udfører arbejde ved den valgte virtuelle flytning.

Det virtuelle indre arbejde bestemmes som tidligere vist som integralet af de virtuelle tøjninger  $\delta v'$  multipliceret med normalkræfterne i den fiktive konstruktion. Disse normalkræfter kaldes i det følgende  $N^*$  for at adskille dem fra normalkræfterne  $N$  i den virkelige konstruktion. Idet flytningerne af den virkelige konstruktion er valgt som virtuel flytning, er de tilsvarende virtuelle tøjninger i de enkelte elementer lig med tøjningerne i den virkelige konstruktion. Da elementerne er elastiske, kan deres tøjning bestemmes af udtrykket  $\epsilon_0 = N/EA$ . Herefter kan det virtuelle indre arbejde skrives på formen:

$$\delta A_i = \sum_1^{n_e} \int_0^l \delta v' N^* dx = \sum_1^{n_e} \int_0^l \frac{N}{EA} N^* dx$$

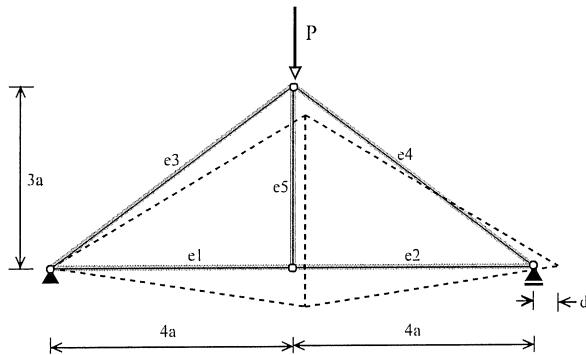
Anvendes arbejdslieningen  $\delta A_i = \delta A_i$  fås nu følgende udtryk til beregning af den søgte udbøjning:

$$1 \cdot d = \sum_1^{n_e} \int_0^l \frac{N}{EA} N^* dx$$

Dette udtryk indebærer åbenbart, at man for hvert element skal beregne integralet af  $N \cdot N^*/EA$ . Har man imidlertid at gøre med en gitterkonstruktion, der udelukkende er belastet i knuderne, vil normalkræfterne i de enkelte elementer være *konstante* stangkræfter. Kaldes de virkelige stangkræfter for  $S$  og de fiktive strangkræfter for  $S^*$  og forudsættes det, at tværsnitsarealet  $A$  i den enkelte stang er konstant, kan ovenstående udtryk skrives på formen:

$$1 \cdot d = \sum_1^{n_e} \frac{S}{EA} S^* l$$

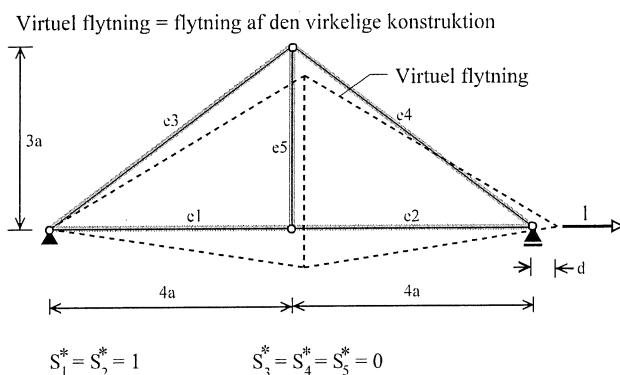
**Eksempel 3.2** Arbejdslieningen anvendt til bestemmelse af gitterdeformationer.



$$S_1 = S_2 = \frac{2}{3}P \quad S_3 = S_4 = -\frac{5}{6}P \quad S_5 = 0$$

a) Virkelig konstruktion

Hosstående figur (a) viser en gitterkonstruktion opbygget af elastiske stangelementer alle med tværsnitsarealet  $A$ . På figuren er tillige vist de af belastningen fremkaldte stangkræfter  $S$  samt den tilhørende flytningsfigur (punkteret). Den vandrette flytning  $d$  af det bevægelige leje ønskes bestemt.



$$S_1^* = S_2^* = 1 \quad S_3^* = S_4^* = S_5^* = 0$$

b) Fiktiv konstruktion

Figur b viser den tilsvarende fiktive konstruktion samt de til den fiktive belastning hørende stangkræfter  $S^*$ . Herefter fås jævnfør ovenstående formel:

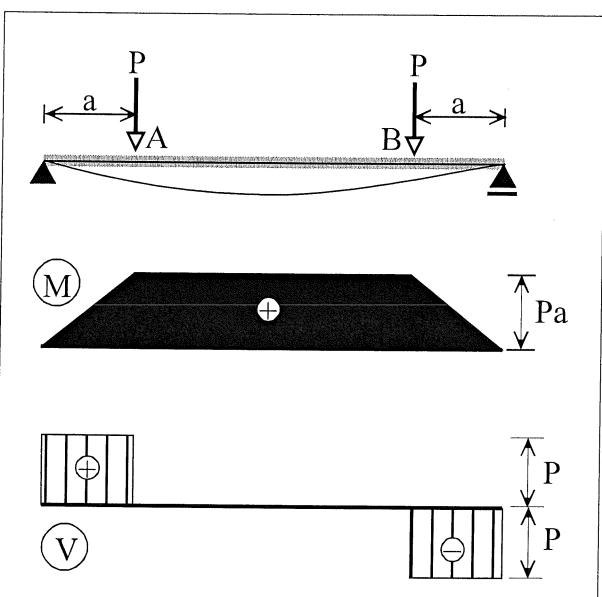
(Bemærk, at i dette simple eksempel kunne man også bestemme  $d$  direkte som tøjningen i elementerne  $e1$  og  $e2$  multipliceret med den totale længde  $8a$ .)

$$d = \sum_1^5 \frac{S}{EA} S^* \cdot l = \frac{1}{EA} \left( \frac{2}{3}P \cdot 1 \cdot 4a + \frac{2}{3}P \cdot 1 \cdot 4a + 0 + 0 + 0 \right) = \frac{16}{3} \frac{Pa}{EA}$$

#### 4. BØJNINGSPÅVIRKNING

I det følgende skal en beregningsmodel for et bjælkelement udsat for bøjning påvirkning opbygges. Vi vil forudsætte, at bjælkelementet er plant i den forstand, at bjælketræsnittet er symmetrisk omkring en plan, som vi af praktiske grunde vil lade være lodret, samt at belastning og reaktioner kan ækvivaleres med et kraftsystem, der virker i denne symmetriplan. På grund af symmetrien er det klart, at de flytninger (udbøjninger), som bjælkeaksen bliver udsat for på grund af belastningen, ligeledes foregår i symmetriplanen.

Ind til videre vil vi indskrænke os til kun at betragte bjælker, der er påvirket af kræfter vinkelret på bjælkeaksen (tværbelastede bjælker). Der forekommer således ikke normalkræfter i bjælkerne.



Figur 4.1

Figur 4.1 viser en simpelt understøttet bjælke påvirket til bøjning af to symmetrisk opstillede enkeltkræfter. Figuren viser tillige bjælkeaksens udbøjningslinje samt de aktuelle snitkraftkurver. Det ses, at bjælkelementet A-B beliggende mellem de to enkeltkræfter er udsat for et konstant bøjningsmoment af størrelsen  $M=Pa$ , mens forskydningskraften  $V$  er lig med nul. Vi vil indledningsvis studere, hvilke deformationser denne konstante momentpåvirkning giver anledning til.

Figur 4.2 viser den midterste del af bjælekstykket A-B dels i den udeformerede tilstand, og dels i den deformede tilstand.

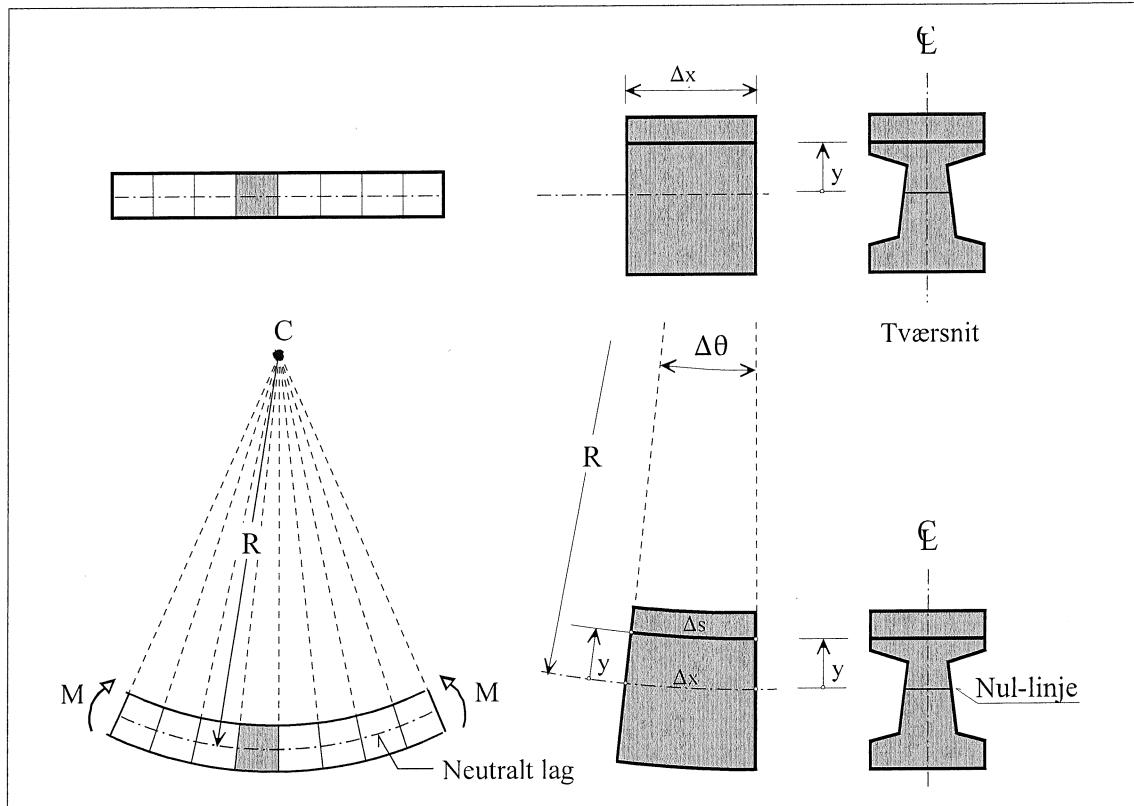
Som antydet på figur 4.2 kan man forestille sig, at bjælken i den ubelastede tilstand opdeles i et antal ens sektioner af længden  $\Delta x$  adskilt af plane snit vinkelret på bjælkeaksen. Når bjælken belastes, vil det betragtede bjælekstykke krumme sig under påvirkning af det konstante bøjningsmoment  $M$ . Da alle sektioner er udsat for den samme påvirkning, må de deformeres ens. Det indses, at dette kun er geometrisk muligt, såfremt de *plane snit*, der adskiller sektionerne, *forbliver plane og vinkelret på aksen*.

Dette betyder, at bjælken må krumme sig som en cirkel, som vist på figuren. Da den øverste del af bjælken således bliver trykket sammen, mens den nederste del bliver strakt, må der findes et lag i bjælken, hvis længde forbliver uforandret. Dette lag betegnes det neutrale lag og er på figur 4.2 vist som en stiplet linje. Det neutrale lags skæring med et tilfældigt tværsnit kaldes tværsnittets *nul-linje*. Som et mål for bjælkens *krumming* anvendes den reciproke værdi af krumningsradien  $R$ , som måles fra cirklens centrum til nul-linjen. Krumningen repræsenteres sædvanligvis ved det græske bogstav  $\kappa$  (kappa). Med betegnelserne vist på figur 4.2 har vi altså:

$$\kappa = \frac{1}{R} ; \quad \Delta\theta = \frac{\Delta x}{R} = \kappa \Delta x$$

Lad os nu betragte deformationen af en enkelt bjælkesektion med den oprindelige længde  $\Delta x$ . I den udeformerede tilstand har alle langsgående "fibre" således længden  $\Delta x$ . I den deformede tilstand vil de fibre, der er beliggende i det neutrale lag, stadig have længden  $\Delta x$ , hvorimod de fibre, der ligger i afstanden  $y$  over det neutrale lag, vil have længden:

$$\Delta s = (R - y)\Delta\theta = (R - y) \frac{\Delta x}{R} = (1 - \frac{y}{R})\Delta x = (1 - \kappa y)\Delta x$$

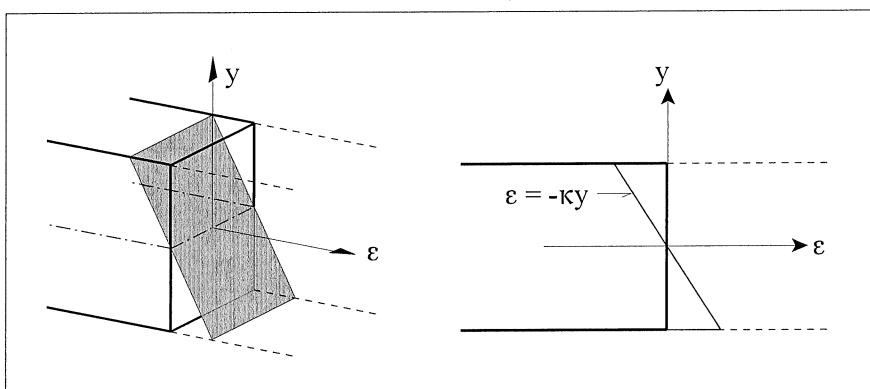


**Figur 4.2** Bøjningsdeformationer ved konstant momentpåvirkning

Tøjningen af disse fibre bliver således:

$$\varepsilon = \frac{\Delta s - \Delta x}{\Delta x} = \frac{(1 - \kappa y)\Delta x - \Delta x}{\Delta x} = (1 - \kappa y) - 1 = -\kappa y$$

Tøjningen vokser altså (numerisk set) lineært med afstanden fra nul-linjen, som antydet på figur 4.3. Når tøjningerne fordeler sig på denne måde over tværsnittet, tales der om en *plan tøjningsfordeling*, eller en lineær tøjningsfordeling.



**Figur 4.3** Plan tøjningsfordeling

Efter disse indledende overvejelser vil vi forlade forudsætningen om konstant moment og tage fat på at opstille en mere generel beregningsmodel for et bøjningspåvirket bjælkelement. Teorien denne beregningsmodel baseres på benævnes ofte *Bernoullis bjælketeori* eller *den tekniske bøjningsteori*.

Det viser sig hensigtsmæssigt at opdele undersøgelsen i en *tværnitsanalyse*, hvor sammenhængen mellem krumming og bøjningsmoment for et bestemt bjælketcrosssnit analyseres, samt en *elementanalyse*, hvor relationerne mellem flytninger og last etableres.

## 4.1 Tværsnitsanalyse

### Geometriske forhold

Bernoullis bjælketeori baseres på følgende vigtige geometriske *forudsætning*:

*Plane snit, der før deformationen er vinkelret på bjælkeaksen, er også efter deformationen plane og vinkelret på bjælkeaksen.*

Det antages altså, at man med en for anvendelserne tilstrækkelig nøjagtighed kan benytte den samme deformationsmodel for et bjælkeelement med varierende moment som for et med konstant moment. Det viser sig, at denne antagelse er god, så længe det betragtede tværsnit ikke befinner sig for tæt på koncentrerede lastpåvirkninger (f.eks. understøtninger) eller abrupte ændringer i bjælketværsnittet.

Det, at tværsnittene forbliver plane, medfører som vist i forrige afsnit, at bjælketværsnittets *geometriske betingelse* kan skrives på formen:

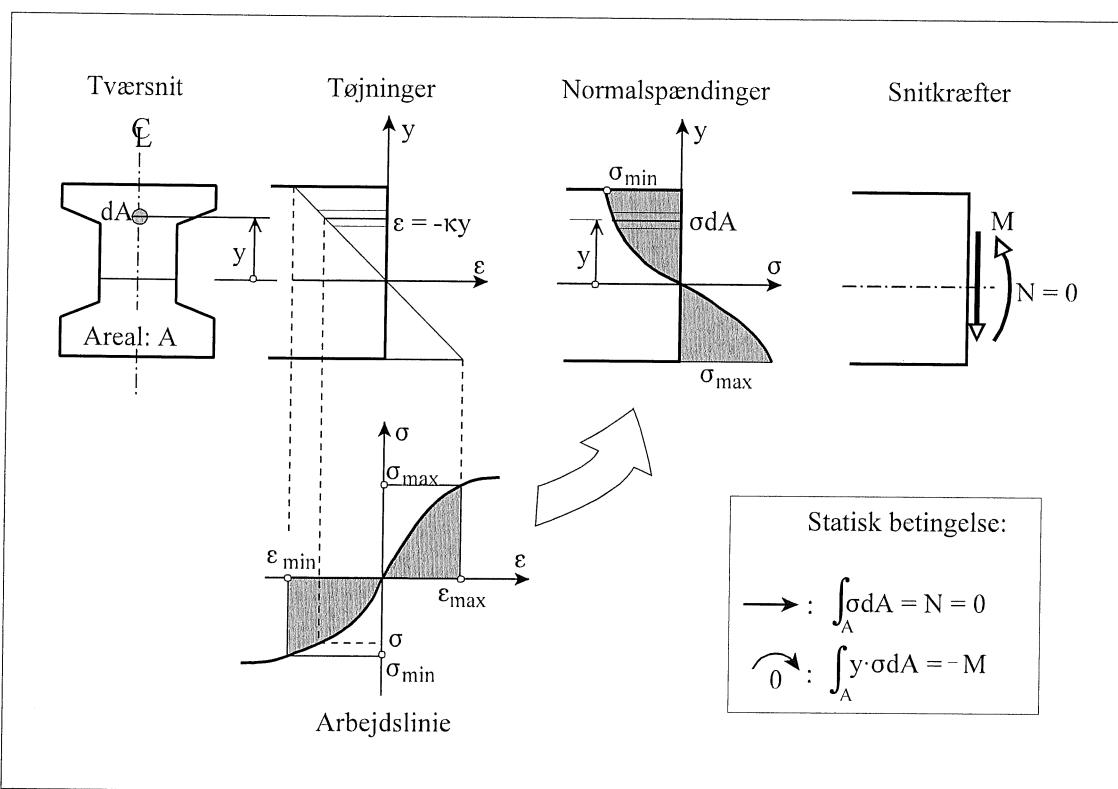
$$\epsilon = -\kappa y$$

hvor  $y$  regnes positiv *opad* fra nul-linjen. (Se figur 4.4).

Det, at tværsnittene forbliver vinkelret på bjælkeaksen, betyder, at den krumning  $\kappa$ , der indgår i formlen, er den samme som bjælkesaksens krumning.

### Statiske forhold

For en bestemt plan tøjningsfordeling - dvs. for en kendt værdi af krumningen - kan man på basis af bjælkematerialets arbejdslinje optegne den tilsvarende normalspændingsfordeling som vist på figur 4.4. Det indses, at spændingsfordelingen får "samme facon" som den del af arbejdslien, der ligger mellem tøjningen  $\epsilon_{min}$  i toppen af tværsnittet, og tøjningen  $\epsilon_{max}$  i bunden af tværsnittet.



Figur 4.4 Sammenhæng mellem tøjninger, spændinger og bøjningsmoment

Tværsnittets statiske betingelse udtrykker, at *det kraftsystem, der udgøres af normalspændingerne, er statisk ækvivalent med det kraftsystem, der udgøres af snitkrafterne  $M$  og  $N$ .* I det aktuelle tilfælde er  $N = 0$ . (Endvidere skal forskydningskraften  $V$  være statisk ækvivalent med forskydningsspændingerne, dvs. de spændingskomposanter, der virker i tværsnittets plan. Dette forhold vil blive omtalt i afsnittet op forskydningspåvirkning). De statiske betingelsesligninger opstilles ved at udtrykke, at resultanten af normalspændingerne skal være lig med normalkraften  $N$ , samt at spændingernes moment omkring nul-linjen skal være lig med bøjningsmomentet  $M$ .

Herefter kan *tværsnittets statiske betingelse* udtrykkes ved ligningerne:

$$\int_A \sigma dA = N = 0 \quad ; \quad \int_A y\sigma dA = -M$$

Minustegnet i den sidste ligning fremkommer, fordi normalspændingerne regnes positive som trækspændinger, og afstanden  $y$  regnes positiv opad.

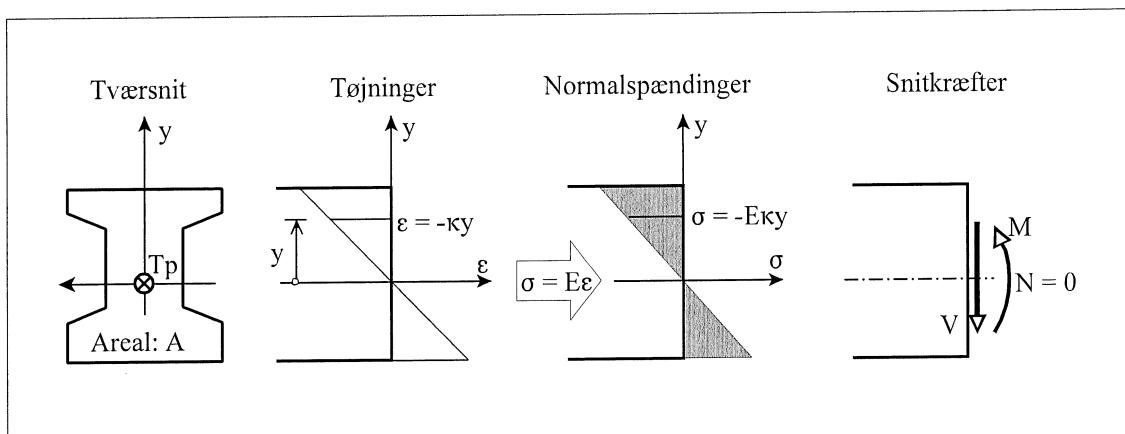
### Fysiske forhold

Bjælkematerialets fysiske betingelse udtrykker sammenhængen mellem normalspændingerne  $\sigma$  og de tilsvarende tøjninger  $\varepsilon$ . Det grafiske udtryk for denne sammenhæng er bjælkematerialets arbejdslinje. For nærværende vil vi indskrænke os til at betragte lineærerlastiske materialer. For et lineærerlastisk materiale gælder det at:

$$\sigma = E\varepsilon$$

### Grundligning

Hvis den geometriske betingelse  $\varepsilon = -ky$  indsættes i ovenstående fysiske betingelse fås  $\sigma = -Eky$ . Spændingerne fordeler sig altså lineært over tværsnittet som vist på figur 4.5.



**Figur 4.5** Tøjninger, spændinger og snitkræfter ved bøjning af lineærerlastisk bjælke

I det følgende forudsættes det, at tværsnittet er homogen (dvs. at  $E$  er uafhængig af  $y$ ). Da  $\kappa$  tillige er uafhængig af  $y$ , fås ved indsættelse af  $\sigma = -Eky$  i den statiske betingelse:

$$\int_A \sigma dA = -E\kappa \int_A y dA = -E\kappa S_0 = 0 \quad ; \quad \int_A y\sigma dA = -E\kappa \int_A y^2 dA = -E\kappa I = -M$$

Her er det statiske moment om nul-linien  $S_0$  defineret ved:  $S_0 = \int_A y dA$ ,

mens tværsnittets inertimomentet  $I$  er defineret ved:  $I = \int_A y^2 dA$

Det fremgår af den første ligning, at  $S_0 = 0$ , hvilket betyder, at *nul-linjen går gennem tværsnittets tyngdepunkt*. (Vær opmærksom på, at dette kun gælder for  $N = 0$ ). Den anden ligning udtrykker den søgte sammenhæng mellem krumningen  $\kappa$  og bøjningsmomentet  $M$ . Denne sammenhæng vil vi benævne *tværsnittets grundligning*:

$$M = EI\kappa \quad \text{eller} \quad \kappa = \frac{M}{EI}$$

Her er  $E$  bjælkematerialets elasticitetskoefficient, og  $I$  er tværsnittets inertimoment om en vandret linje gennem tværsnittets tyngdepunkt.

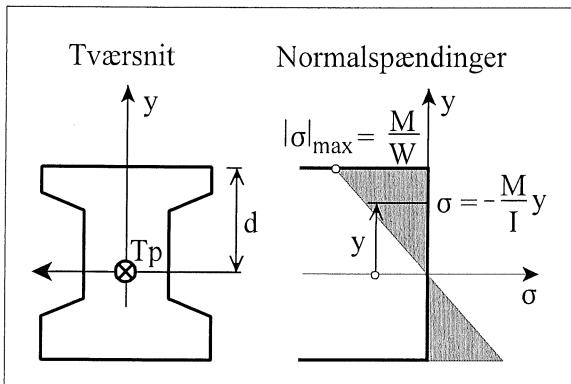
Produktet  $EI$  kaldes tværsnittets, eller bjælkens, *bøjningsstivhed*.

Det grafiske billede af  $M$  som funktion af  $\kappa$  kaldes tværsnittets *bøjningsarbejdslinje*. For en lineærerlastisk bjælke er bøjningsarbejdslinenen åbenbart en ret linje.

#### 4.2 Naviers formel

Ovenfor fandt vi udtrykket  $\sigma = -E\kappa y$ . Indsættes dette i tværsnittets grundligning, fås *Naviers formel* for bøjning *uden normalkraft*:

$$\sigma = -\frac{M}{I}y$$



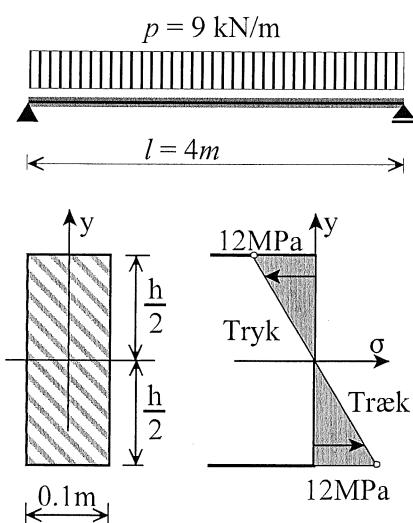
Figur 4.6

Formlen angiver spændingen i de fibre, der ligger i den lodrette afstand  $y$  fra tværsnittets tyngdepunkt. Den numerisk største spænding findes således i de fibre, der ligger længst væk fra tyngdepunktet. Hvis afstanden til disse fibre kaldes for  $d$ , kan Naviers formel skrives på formen:

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|M|}{W}, \text{ hvor } W = \frac{I}{d}$$

Tværsnitskonstanten  $W$  kaldes tværsnittets elastiske *modstandsmoment*.

#### Eksempel 4.1 Naviers formel



En elastisk bjælke med rektangulært tværsnit er simpelt understøttet med en spændvidde på 4m. Bjælken skal bære en ensformigt fordelt last på 9 kN/m.

Bjælketværsnittets bredde er fastlagt til 0.1m. Den nødvendige bjælkehøjde ønskes bestemt, når det kræves, at den maksimale normalspænding i bjælken ikke må overstige 12 MPa.

$$\text{Maksimalt bøjningsmoment} : M = \frac{1}{8} pl^2 = \frac{1}{8} \times 9 \times 4^2 = 18 \text{ kNm} = 0.018 \text{ MNm}$$

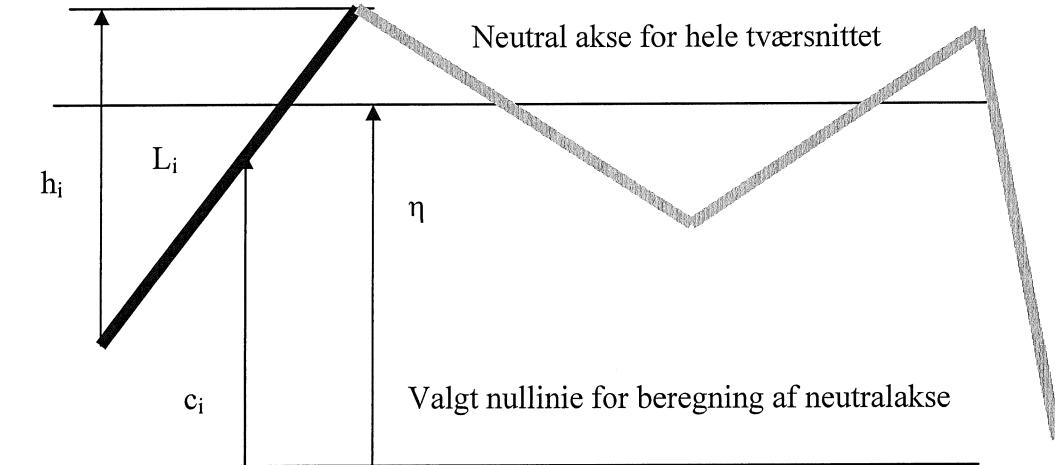
$$\text{Tværsnittets inertimoment} : I = \frac{1}{12} bh^3$$

$$\text{Tværsnittets modstandsmoment: } W = \frac{I}{\frac{1}{2}h} = \frac{1}{6}bh^2$$

$$\text{Maksimal normalspænding} : 12 \text{ MPa} = |\sigma|_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{6M}{bh^2}$$

$$\text{Nødvendig bjælkehøjde} : h = \sqrt{\frac{6M}{b|\sigma|_{\max}}} = \sqrt{\frac{6 \times 0.018}{0.1 \times 12}} = 0.3 \text{ m}$$

## Symmetriske, tyndfligede tværsnit: Afstand til neutralakse og inertimoment



Tværsnittet står af  $N$  flige, hver med tykkelse  $t_i$  og længde  $L_i$ ;  $i = 1, 2, 3, \dots, N$ . Desuden er afstanden fra nullinien til de enkelte fliges tyngdepunkt givet ved  $c_i$ .

Afstand fra valgt nulllinie til tværsnittets neutralakse:

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^N c_i t_i L_i}{\sum_{i=1}^N t_i L_i}$$

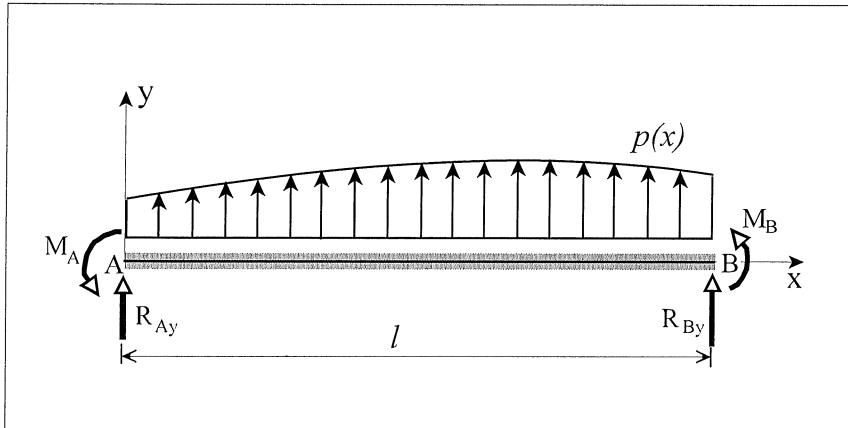
Inertimoment  $I$  med hensyn til neutralaksen:

$$I = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{1}{12} h_i^2 + (c_i - \eta)^2 \right] t_i L_i$$

Her er  $h_i$  den projekterede længde (dvs højde) af flig nummer  $i$  på en linie vinkelret på neutralaksen.

### 4.3 Elementanalyse

Figur 4.6 viser et retlinjet bjælkelement med længden  $l$ . Bjælkeelementet repræsenterer en bjælke eller en del af en bjælke. Det forudsættes som tidligere nævnt, at bjælkeelementet er tværbelastet. (Det vil sige, at elementet er belastet og understøttet på en sådan måde, at normalkraften  $N$  overalt er lig med 0.)



**Figur 4.6** Tværbelastet bjælkeelement

Som basis for modelbeskrivelsen indlægges et retvinklet xy-koordinatsystem, hvor x-aksen er sammenfaldende med den *udeformerede* bjælkes tyngdepunktsakse. De enkelte materielle punkter på bjælkeaksen kan derfor karakteriseres ved deres x-koordinat i den udeformerede situation. Bjælkeaksens endepunkter A og B er således bestemt ved koordinaterne 0 og  $l$ .

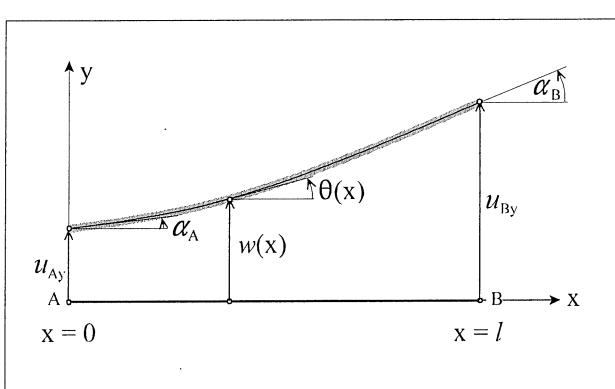
Bjælken kan være belastet med en fordelt tværlast med intensiteten  $p = p(x)$ . Den fordelte tværlast forudsættes at virke på hele strækningen fra punkt A til punkt B. Ud over den fordelte belastning er elementet i enderne påvirket af kræfterne  $R_{Ay}$  og  $R_{By}$  samt momenterne  $M_A$  og  $M_B$ . Disse påvirkninger kan betragtes som snitkræfter, reaktioner eller ydre last afhængigt af elementets understøtningsforhold. De nævnte påvirkninger regnes positive som vist på figuren.

## *Geometriske forhold*

Figur 4.7 viser det deformerede bjælkelementet. (Deformationerne er af hensyn til anskueligheden stærkt overdrevne.)

Flytningen af bjælkeaksen i y-retningen beskrives ved funktionen:  $w = w(x)$

Det forudsættes, at den deformerede bjælkeakses vinkel  $\theta$  med  $x$ -aksen er lille, eller mere præcist, at:  $|\theta| \ll 1$



**Figur 4.7** Deformeret bjælkeelement

## Betrages rækkeudviklingerne

$$\tan \theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \dots$$

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \dots$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2\cos^{-1}\theta} + \dots$$

ses det, at denne forudsætning medfører, at:

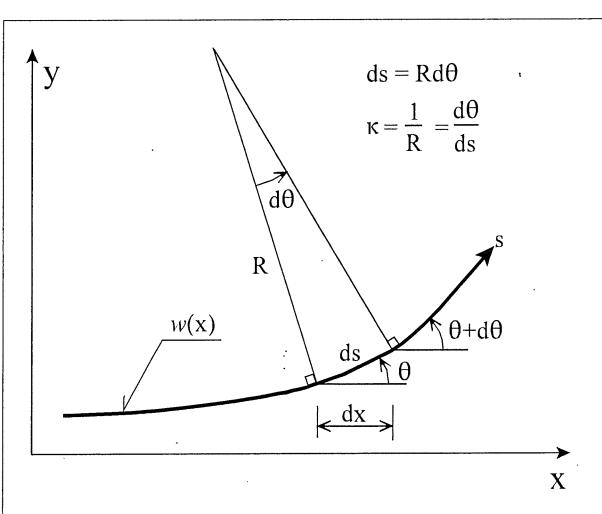
$$\tan\theta \approx \theta \quad ; \quad \sin\theta \approx \theta \quad \text{eg} \quad \cos\theta \approx 1$$

Da  $\tan\theta$  er et udtryk for udbøjningslinjens tangenthældning, har vi åbenbart:  $w' = \tan\theta \approx \theta$ .

Vinkeldrejningen  $\theta$  og holdningen  $w'$  af bjælkeaksen kan altså betragtes som værende ens.

Udsagnet  $\cos\theta \approx 1$  betyder, at længdeforskellen mellem den skrå bjælke og dens projektion kan negligeres

Tværsnitsanalysen viser, at bjælkeaksens krumning ( $\kappa$ ) er den relevante deformationsstørrelse for tværbelastede bjælker. Matematisk defineres en kurves krumning ved, hvor hurtigt tangentvinklen  $\theta$  ændrer sig, når man bevæger sig langs kurven, (se figur 4.8).



**Figur 4.8** Bøjlekeaksens krumning

Tangentvinklen  $\theta$  regnes positiv mod uret.  
 Kurven på figur 4.8 har således en positiv krumning.

Forudsættes det, at udbøjningskurven er meget flad ( $|θ| \ll 1$ ), medfører dette som

nævnt ovenfor, at  $ax \approx as$  og  $\Theta \approx w$ . Herefter kan krumningen af bjælkeaksen bestemmes af nedenstående udtryk:

$$\kappa = \frac{d(w')}{dx} = \frac{d^2 w}{dx^2}$$

eller

$$\kappa(x) \equiv w''(x)$$

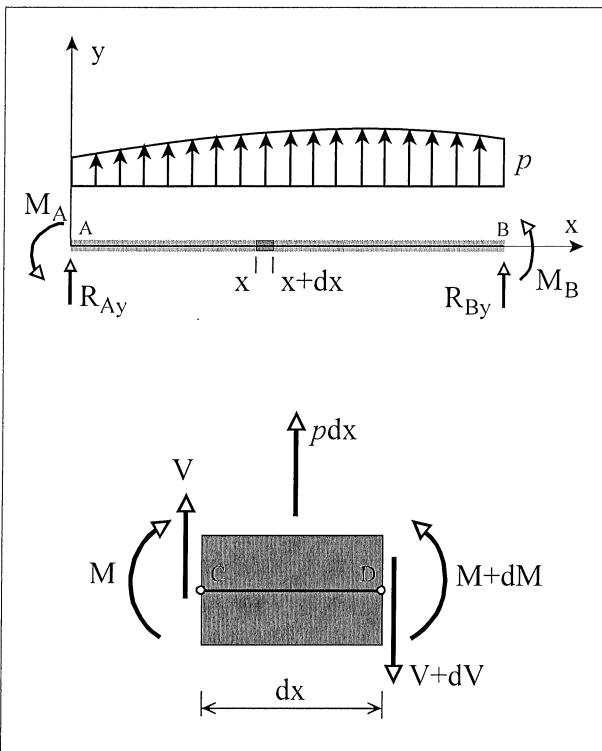
Denne ligning udtrykker bjælkelementets *geometriske* (felt-) betingelse:

De mulige geometriske randbetingelser er if. figur 4.7

$$w(0) = u_{A_v}, \quad w'(0) = \alpha_A, \quad w(l) = u_{B_v}, \quad w'(l) = \alpha_B$$

*Statiske forhold*

Det forudsættes, at de statiske betingelsesligninger (ligevægtsligningerne) med tilstrækkelig nøjagtighed kan baseres på den udeformerede bjælkes geometri.



Figur 4.9

Modellens statiske betingelser opstilles ved at betragte ligevægten af en infinitesimal bjælkedel. Betragtes figur 4.9 ses det, at følgende ligevægtsligninger kan opstilles.

Lodret projktion:

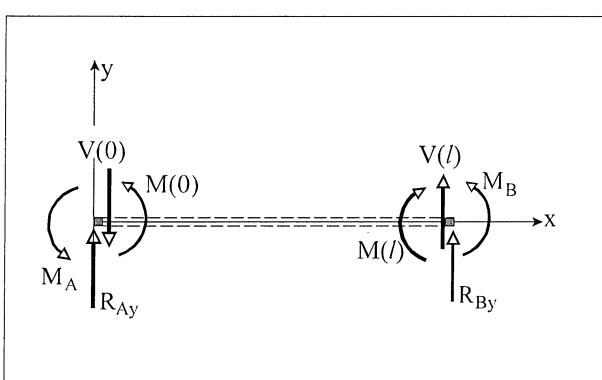
$$pdx + V - (V + dV) = 0 \Rightarrow \\ \frac{dV}{dx} = p \quad \text{eller} \quad V' = p$$

Moment om D:

$$M + dM - M - Vdx = 0 \Rightarrow \\ \frac{dM}{dx} = V \quad \text{eller} \quad M' = V$$

Differentieres ligningen  $V = M'$  og indsættes  $V' = p$  ses det, at  $V$  kan eliminieres. Herved fås følgende ligning, der betegnes modellens *statiske feltbetningelse*,

$$M'' - p = 0$$

Figur 4.10 *Statiske randbetingelser*

Ved at betragte ligevægten af infinitesimale bjælkedele ved  $x = 0$  og  $x = l$  (se figur 4.10) samt anvende ligevægtsligningen  $V = M'$ , kan de *statiske randbetingelser* formuleres således:

$$\begin{aligned} R_{Ay} &= V(0) = M'(0) \\ M_A &= -M(0) \\ R_{By} &= -V(l) = -M'(l) \\ M_B &= M(l) \end{aligned}$$

*Fysiske forhold*

Det forudsættes i det følgende, at bjælkematerialet er lineær-elastisk med elasticitetsmodulet  $E$ . Kaldes bjælketværsnittets inertimoment om en vandret linje gennem tyngdepunktet for  $I$ , kan den *fysiske betningelse*, som tidligere nævnt, udtrykkes ved ligningen:

$$M = EI\kappa$$

### Grundligningen

Indsættes den geometriske betingelse  $\kappa = w''$  i den fysiske betingelse fås:  $M = EIw''$ , der ved indsættelse i den statiske feltbetegnelse  $M'' - p = 0$  fører til *grundligningen*:

$$(EIw'')'' = p$$

I det følgende vil vi forudsætte, at bjælkeelementets bøjningsstivhed  $EI$  er konstant. Herved simplificeres grundligningen til:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{p}{EI}$$

Den fuldstændige løsning til denne ligning er:

$$w = w_p(x, p) + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$$

Her er  $C_1, C_2, C_3$  og  $C_4$  integrationskonstanter, medens  $w_p$  er et partikulært integral - dvs. en vilkårlig funktion, der tilfredsstiller differentialligningen.

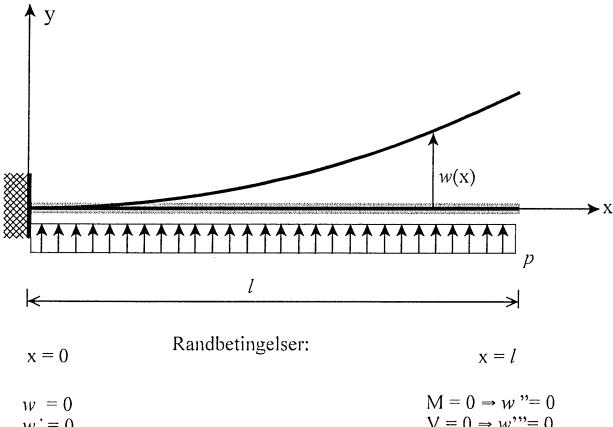
For at kunne bestemme en entydig løsning til grundligningen kræves åbenbart kendskab til 4 randbetingelser for at kunne bestemme de 4 integrationskonstanter. Randbetingelserne deles som sædvanlig op i de geometriske (-eller essentielle) randbetingelser og de statiske (-eller naturlige) randbetingelser.

De geometriske randbetingelser angiver foreskrevne værdier af  $w$  og/eller  $w'$  og kan derfor anvendes direkte.

De statiske randbetingelser angiver foreskrevne værdier af  $M$  og/eller  $V$ . Ved brug af den fysiske betegnelse  $M = EIw''$  kan disse betingelser imidlertid udtrykkes ved de aflede af  $w$ . Med henvisning til figur 4.7 og figur 4.10 fås:

Geom. randbet.		Statisk randbetingelse
$u_{Ay} = w(0)$	eller	$R_{Ay} = V(0) = M'(0) = EIw'''(0)$
$\alpha_A = w'(0)$	eller	$M_A = -M(0) = -EIw''(0)$
$u_{By} = w(\ell)$	eller	$R_{By} = -V(l) = -M'(l) = -EIw'''(l)$
$\alpha_B = w'(\ell)$	eller	$M_B = M(l) = EIw''(l)$

Bemærk, at der altid vil være netop 2 randbetingelser i hver ende af bjælkelementet. Er  $u_{Ay}$  for eksempel kendt, vil den tilsvarende reaktion  $R_{Ay}$  være ukendt og omvendt. Der er altså kun mulighed for én betegnelse i hver linje i skemaet ovenfor.

**Eksempel 4.2** Anvendelse af bjælkens differentialligning.

Hosstående figur viser en indspændt elastisk bjælke påvirket af en ensformigt fordelt last med intensiteten  $p$ . Bjælkens bøjningsstivhed  $EI$  forudsættes at være konstant. Vi søger et analytisk udtryk for udbøjningsfunktionen  $w$  samt moment- og forskydningskraftkurverne.

Der tages udgangspunkt i grundligningen:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{p}{EI}$$

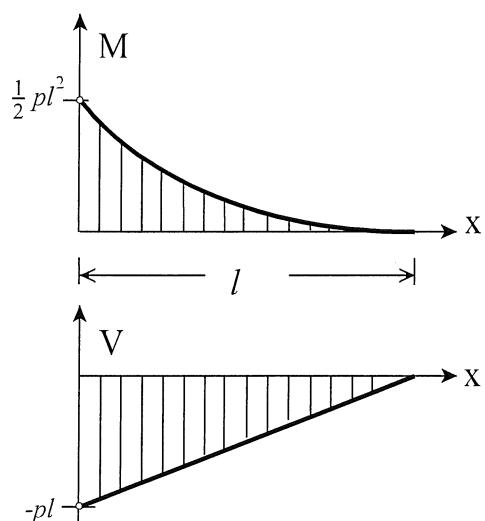
Da  $p$  er konstant, fås ved integration nedenstående fuldstændige løsning til denne ligning.

$$\begin{aligned} \frac{d^3 w}{dx^3} &= \frac{p}{EI}(x + k_1) & \frac{d^2 w}{dx^2} &= \frac{p}{EI}\left(\frac{1}{2}x^2 + k_1 x + k_2\right) & \frac{dw}{dx} &= \frac{p}{EI}\left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}k_1 x^2 + k_2 x + k_3\right) \\ w &= \frac{p}{EI}\left(\frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}k_1 x^3 + \frac{1}{2}k_2 x^2 + k_3 x + k_4\right) \end{aligned}$$

Integrationskonstanterne  $k_1, \dots, k_4$  bestemmes herefter ved hjælp af de aktuelle randbetingelser, (se figuren)

$$\begin{aligned} x = 0: \quad w(0) = 0 &\Rightarrow k_4 = 0 \\ w'(0) = 0 &\Rightarrow k_3 = 0: \\ x = l: \quad V(l) = EIw'''(l) = 0 &\Rightarrow l + k_1 = 0, \quad \text{dvs. } k_1 = -l \\ M(l) = EIw''(l) = 0 &\Rightarrow \frac{1}{2}l^2 + k_1 l + k_2 = 0, \quad \text{dvs. } k_2 = \frac{1}{2}l^2 \end{aligned}$$

Ved indsættelse af de fundne værdier for integrationskonstanterne fås herefter:



$$\begin{aligned} w &= \frac{p}{EI}\left(\frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6}lx^3 + \frac{1}{4}l^2x^2\right) \\ w' &= \frac{p}{EI}\left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}lx^2 + \frac{1}{2}l^2x\right) \\ M &= EIw'' = p\left(\frac{1}{2}x^2 - lx + \frac{1}{2}l^2\right) \\ V &= EIw''' = p(x - l) \end{aligned}$$

#### 4.4 Arbejdsligningen (Det virtuelle arbejdes princip)

Såfremt de statiske felt- og randbetegnelser er opfyldt, må nedenstående ligning gælde for *vilkårligt valgte* funktioner  $\delta w = \delta w(x)$ , idet alle udtrykkene i de kantede parenteser er identisk lig med 0. (NB!  $\delta w$  skal opfattes som ét symbol).

$$\int_0^l \delta w [M'' - p] dx = \delta w(0) [R_{Ay} - M'(0)] + \delta w'(0) [M_A + M(0)] \\ + \delta w(l) [R_{By} + M'(l)] + \delta w'(l) [M_B - M(l)]$$

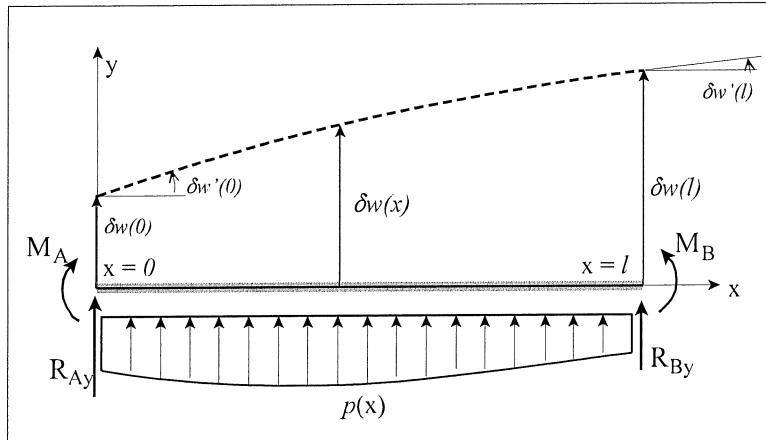
Omvendt kan man slutte: Hvis ovenstående er opfyldt for **alle** vilkårligt valgte funktioner  $\delta w$ , da er de statiske felt- og randbetegnelser opfyldt.

Ved brug af delvis integration (2 gange) foretages følgende omskrivning:

$$\int_0^l \delta w M'' dx = [\delta w M']_0^l - \int_0^l \delta w' M' dx = [\delta w M']_0^l - [\delta w' M]_0^l + \int_0^l \delta w'' M dx \\ = \delta w(l) M'(l) - \delta w(0) M'(0) - \delta w'(l) M(l) + \delta w'(0) M(0) + \int_0^l \delta w'' M dx$$

Indsættes dette i den oprindelige ligning kan nedenstående ligning udledes.

$$\int_0^l \delta w'' M dx = \delta w(0) R_{Ay} + \delta w(l) R_{By} + \delta w'(0) M_A + \delta w'(l) M_B + \int_0^l \delta w p dx$$



**Figur 4.11** Virtuelle flytninger

Tolkes funktionen  $\delta w$  nu som en *virtuel* (tænkt) udbøjningsfunktion (se figur 4.11), kan  $\delta w''$  betragtes som den tilsvarende virtuelle krumming. Denne størrelse benævnes  $\delta \kappa$ .

Herefter kan højre side af ovenstående ligning tolkes som det arbejde randpåvirkningerne  $R_{Ay}$ ,  $R_{By}$ ,  $M_A$  og  $M_B$  samt den fordelte last  $p$  ville udføre ved en virtuel flytning  $\delta w$ . Dette arbejde kaldes det *virtuelle ydre arbejde* og be-

nævnes  $\delta A_y$ . Tilsvarende benævnes venstre side af ligningen det *virtuelle indre arbejde*  $\delta A_i$ . Vi har altså:

$$\delta A_y = \delta w(0) R_{Ay} + \delta w(l) R_{By} + \delta w'(0) M_A + \delta w'(l) M_B + \int_0^l \delta w p dx$$

$$\delta A_i = \int_0^l \delta w'' M dx$$

*Arbejdsligningen*, eller det *virtuelle arbejdes princip*, kan herefter formuleres som følger:

$$\text{Ligevægt} \Leftrightarrow \delta A_i = \delta A_y \text{ for alle virtuelle flytninger}$$

Bemærk, at arbejdsligningen er en ren matematisk omskrivning af de statiske felt- og randbetegnelser og derfor uafhængig af beregningsmodellens fysiske forhold - dvs. materialeegenskaber.

Den netop udledte version af arbejdslieningen gælder indtil videre kun for et bjælkelement, der ud over randlasten er belastet med en fordelt last  $p$ . En bjælkekonsstruktion, der yderligere er påvirket af enkeltkræfter og/eller -momenter i et antal punkter, må derfor deles op i elementer af den omtalte type.

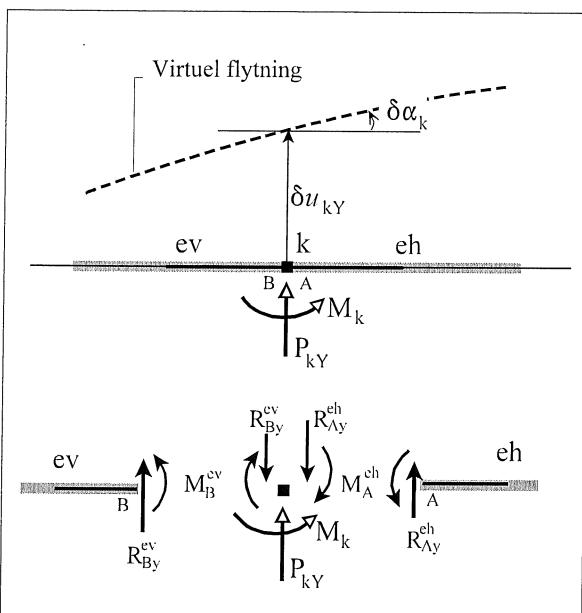
De punkter, hvor bjælkeelementerne er samlet, samt understøtningspunkter og evt. frie bjælkeender betegnes i det følgende knuder. (Se eksemplet figur 4.12). Tænker man sig nu elementerne frigjort fra knuderne og givet et sæt virtuelle flytninger, vil det ydre hhv. indre arbejde for samtlige elementer

**Figur 4.12 Konstruktion opdelt i elementer**

fås som summen af de ydre hhv. indre arbejder for de enkelte elementer:

$$\delta A_y = \sum_{e=1}^{n_e} (\delta w(0) R_{Ay} + \delta w(l) R_{By} + \delta w'(0) M_A + \delta w'(l) M_B) + \sum_{e=1}^{n_e} \int_0^l \delta w p dx$$

$$\delta A_i = \sum_{e=1}^{n_e} \int_0^l \delta w'' M dx \quad (n_e = \text{antal elementer})$$



**Figur 4.13**

bidrag derfor erstattes med det arbejde knudelasten udfører.

Herefter kan det virtuelle arbejdes princip for den samlede konstruktion udtrykkes ved:

$$\text{Ligevægt} \Leftrightarrow \delta A_i = \delta A_y \text{ for alle virtuelle flytninger}$$

$$\delta A_y = \sum_{k=1}^{n_k} (\delta u_{kY} P_{kY} + \delta \alpha_k M_k) + \sum_{e=1}^{n_e} \int_0^l \delta w p dx, \quad \delta A_i = \sum_{e=1}^{n_e} \int_0^l \delta w'' M dx$$

Her står  $n_k$  for antallet af knuder, medens  $n_e$  er antallet af elementer.

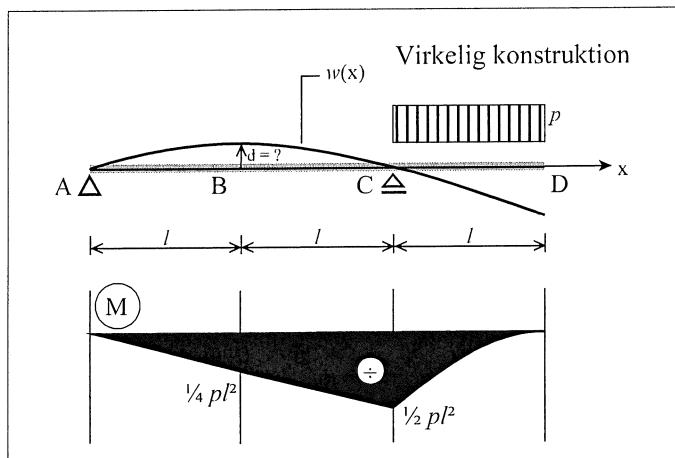
Figur 4.13 viser to elementer (ev og eh), der støder op til knude nr. k. I et globalt XY-koordinatsystem symboliserer  $\delta u_{kY}$  den virtuelle flytning af knude nr. k, medens  $\delta \alpha_k$  symboliserer den virtuelle drejning af knuden.

Da den enkelte knude forudsættes at være i ligevægt, er det arbejde, der skal udføres ved en vilkårlig virtuel flytning af knuden, lig med 0. Forestiller man sig derfor, at knuden følger med bjælkeenderne ved den virtuelle flytning, vil dette ikke påvirke det samlede ydre arbejde.

Betrages figur 4.13 kan det nu indsese, at det arbejde, randlasten på de to elementer udfører, ophæves af det arbejde, som de tilsvarende kræfter på knuden udfører. (De to sæt kræfter er lige store og modsat rettede.)

Tilbage bliver det arbejde, som den ydre last på knuden udfører. I ovenstående udtryk for det ydre virtuelle arbejde kan randlastens

Flytningsbestemmelse vha. arbejdslieningen

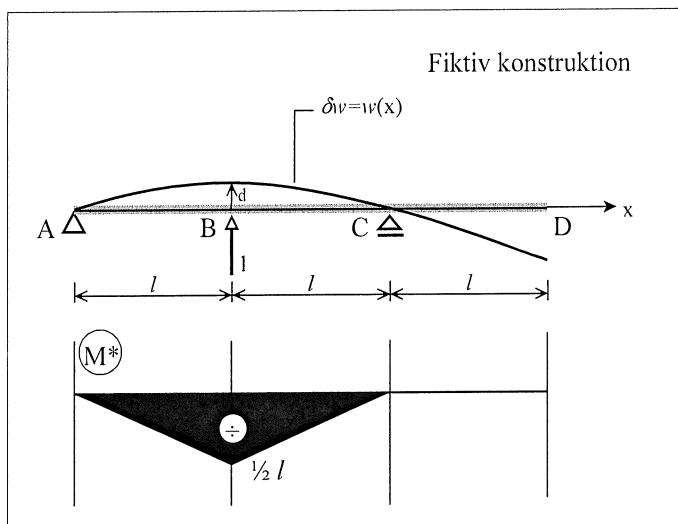


Figur 4.14 Virkeligt belastning

Som nævnt er arbejdslieningen en matematisk omskrivning af ligevægtslieningerne og kan som sådan erstatte disse fx til bestemmelse af reaktioner og snitkræfter i statisk bestemte konstruktioner. Desuden er arbejdslieningen et nyttigt redskab i forbindelse med formuleringen af computerbaserede beregningsmodeller. En særlig anvendelse af arbejdslieningen knytter sig til beregning af flytninger i elastiske konstruktioner. Der vil blive gjort rede for denne anvendelse i det følgende.

Figur 4.14 viser en simpelt understøttet, udkraget bjælke A, B, C, D, der på den udkragede del er belastet med en nedadrettet ensformigt fordelt linjelast med intensiteten  $p$ . Bjælken har overalt bøjningsstivheden  $EI$ . Figuren viser tillige den af belastningen  $p$  forårsagede udbøjning af bjælkeaksen.

Den lodrette udbøjning  $d$  af bjælkeaksen i pkt. B ønskes bestemt.



Figur 4.15 Fiktiv belastning ved flytningsbestemmelse

Figur 4.15 viser en tilsvarende bjælke påvirket af en lodret opadrettet enkeltkraft af størrelsen 1 i pkt. B. Denne bjælke benævnes i det følgende den fiktive konstruktion og enkeltkraften 1 benævnes den fiktive last. Arbejdslieningen anvendes nu på den fiktive konstruktion, idet man som virtuel flytning anvender udbøjningslinjen fra den *virkelige konstruktion*. (Det erindres, at arbejdslieningen gælder for en vilkårlig virtuel flytning, blot den fiktive konstruktion er i ligevægt.)

For det virtuelle ydre arbejde fås, idet den fiktive last er den eneste last, der udfører arbejde ved den valgte virtuelle flytning:

$$\delta A_y = \sum_{k=1}^{n_k} (\delta u_{kY} P_{kY} + \delta \alpha_k M_k) + \sum_{e=1}^{n_e} \int_0^l \delta w p dx = 1 \cdot d$$

Det virtuelle indre arbejde bestemmes som tidligere vist som integralet af de virtuelle krumninger  $\delta w''$  multipliceret med momenterne i den fiktive konstruktion. Disse momenter kaldes i det følgende  $M^*$  for at adskille dem fra momenterne  $M$  i den virkelige bjælke.

Idet udbøjningen af den virkelige bjælke er valgt som virtuel flytning, er den tilsvarende virtuelle krumning lig med den virkelige bjælkes krumning. Da denne bjælke er elastisk, kan dens krumning bestemmes af udtrykket  $\kappa = M/EI$ .

Herefter kan det virtuelle indre arbejde skrives på formen:

$$\delta A_i = \sum_{e=1}^{n_e} \int_0^l \delta w'' M^* dx = \sum_{e=1}^{n_e} \int_0^l \frac{M}{EI} M^* dx$$

Anvendes arbejdslieningen  $\delta A_y = \delta A_i$  fås nu følgende udtryk til beregning af den søgte udbøjning:

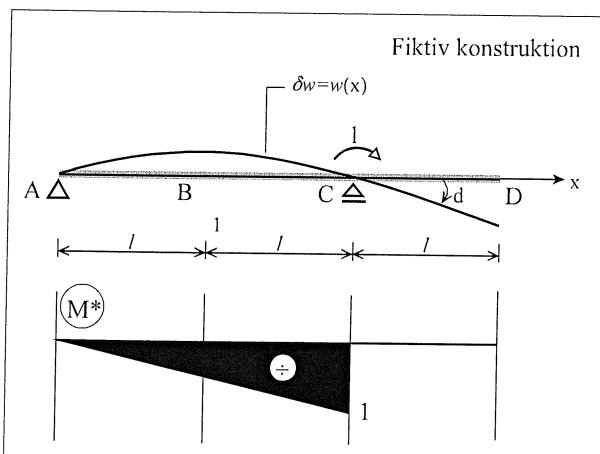
$$1 \cdot d = \sum_{e=1}^{n_e} \int_0^l \frac{M}{EI} M^* dx$$

Dette udtryk indebærer åbenbart, at man for hvert bjælkelement skal beregne integralet af  $M \cdot M^*/EI$ .

Oftest består belastningen på den virkelige bjælke af en ensformigt fordelt last og/eller en eller flere enkeltkræfter hvilket medfører, at  $M$ -kurven vil være sammensat af parabler og/eller rette linjestykker.

Belastningen på den fiktive konstruktion består jo altid af en enkeltkraft (- eller et moment, se nedenfor), hvorfor  $M^*$ -kurven altid vil være sammensat af rette linjer. Forudsættes det, at  $EI$  er konstant for det enkelte bjælkelement, vil der altså ofte blive tale om at integrere enten produktet af et 2.-grads- og et 1.-gradspolynomium eller af to 1.-gradspolynomier. Appendix B indeholder et sæt integrationsformler, der dækker disse tilfælde.

(Anvendes dette formelsæt, fås for eksemplet figur 4.14:  $d = \sum_{e=1}^{n_e} \int_0^l \frac{M}{EI} M^* dx = \frac{pl^4}{8EI}$  )



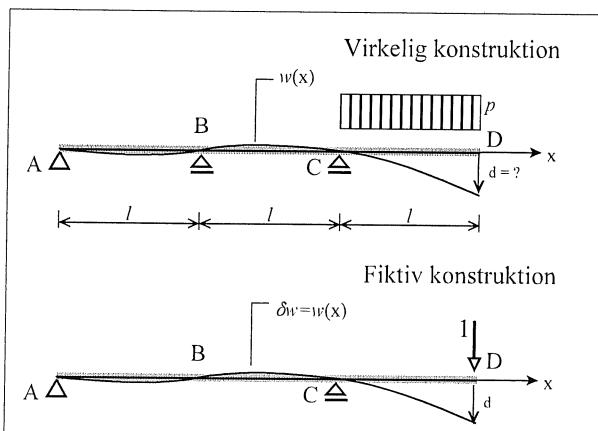
**Figur 4.16** Fiktiv last ved drejningsbestemmelse

Beregning af vinkeldrejninger foregår på principielt samme måde som beregning af udbøjninger, blot benyttes et moment af størrelsen 1 som fiktiv last. Figur 4.16 viser for det aktuelle eksempel den fiktive last og den tilsvarende  $M^*$ -kurve for beregning af vinkeldrejningen i punktet C.

(Anvendes formlerne i appendix B på dette eksempel fås:

$$d = \frac{1}{3} \cdot 2l \cdot \frac{1}{2} pl^2 \frac{1}{EI} \cdot 1 = \frac{1}{3} \frac{pl^3}{EI}$$

I det foregående har den fiktive bjælke haft samme udformning som den virkelige bjælke. Dette er imidlertid ikke noget krav. For at arbejdslieningen skal kunne bruges, kræves det blot, at den fiktive bjælke er i lige vægt dvs., at  $M^*$ -kurven er statisk tilladelig.

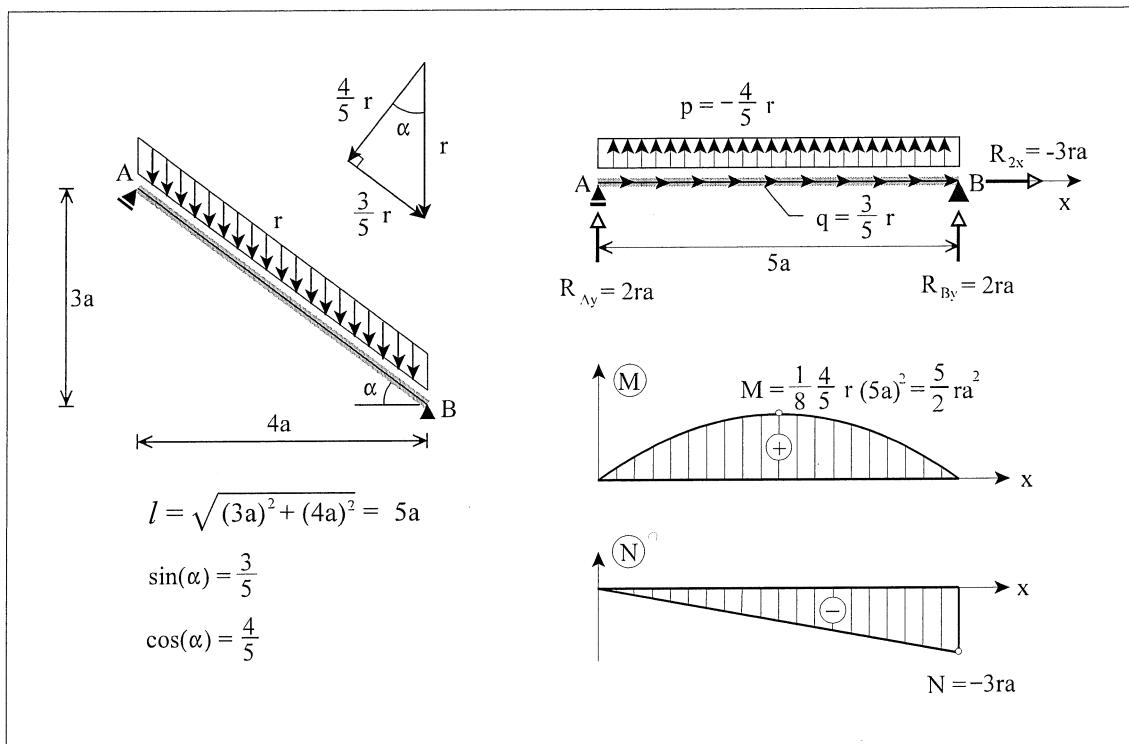


**Figur 4.17**

Af praktiske grunde bør den fiktive konstruktion dog være udformet således, at den har samme udstrækning - men ikke nødvendigvis samme understøtningsforhold - som den virkelige konstruktion kun. Endvidere bør den fiktive konstruktion udformes således, at kun den fiktive last bidrager til det ydre arbejde.

Denne iagttagelse er særlig nyttig i forbindelse med flytningsbestemmelser i statisk ubestemte konstruktioner. Figur 4.17 viser således en én gang statisk ubestemt konstruktion samt en tilsvarende *statisk bestemt* fiktiv konstruktion.

## 5. KOMBINERET AKSIAL - OG BØJNINGSPÅVIRKNING



**Figur 5.1** Eksempel på kombineret aksial- og bøjningspåvirkning

I de foregående afsnit er aksialpåvirkning og bøjning behandlet separat. I praksis vil man imidlertid ofte finde bjælkelementer, der er utsat for en kombination af disse påvirkninger. Figur 5.1 viser således en skrætstillet bjælke (tagspær) påvirket af en lodret nedadrettet ensformigt fordelt last med intensiteten  $r$ . Opløses lasten i komposanter vinkelret på hhv. langs med bjælkeaksen, ses det, at bjælken i realiteten er påvirket af en tværlast ( $p$ ) og en aksiallast ( $q$ ). (Det overlades til læseren at kontrollere resultaterne i figur 5.1).

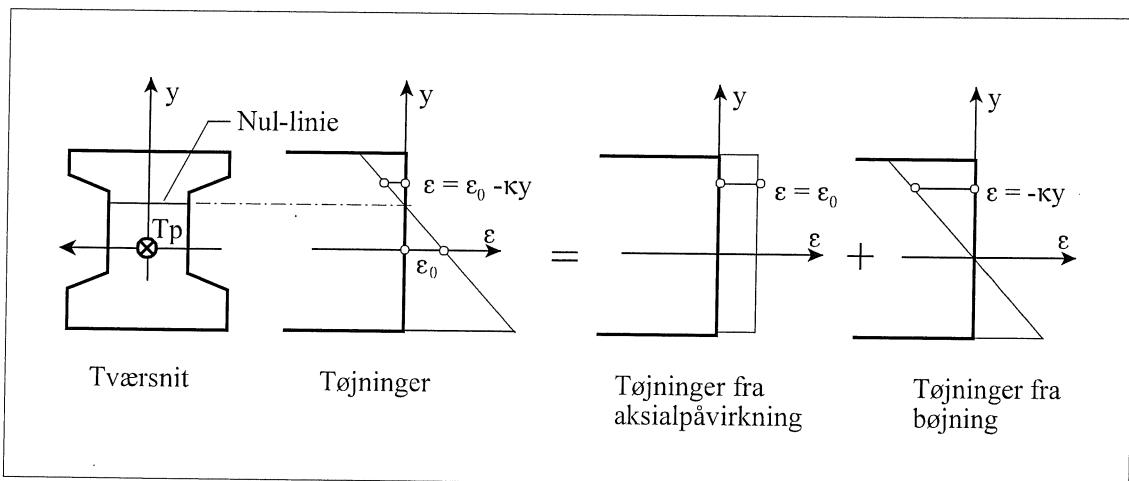
I det følgende vil der blive opstillet en beregningsmodel for et bjælkeelement påvirket af en kombination af tværlast og aksiallast.

Forudsættes det, at flytningsgradienterne er små, at ligevægten kan baseres på den udeformerede geometri, samt, at bjælkematerialet er lineærelastisk, viser det sig, at modellen kan opfattes som en superposition (overlejring) af de tidligere gennemgåede modeller for aksialpåvirkning og bøjning. Gennemgangen af modellen vil derfor i høj grad blive en gentagelse af, hvad der tidligere er udledt og skal således tjene som en praktisk sammenfatning af de to modellers resultater.

### 5.1 Tværsnitsanalyse

#### Geometriske forhold

Som i de to foregående modeller antages det, at man med tilstrækkelig nøjagtighed kan antage, at plane tværsnit forbliver plane. Bjælkens deformationer kan derfor beskrives ved dels en aksialtøjning  $\epsilon_0$  og dels en krumning  $\kappa$  og tøjningsfordelingen over tværsnittet kan betragtes som summen af de tøjninger, der hidrører fra aksialpåvirkningen ( $N$ ) og de tøjninger, der hidrører fra bøjningspåvirkningen ( $M$ ). Dette er illustreret på figur 5.2



Figur 5.2 Tøjningsfordeling ved kombineret aksial- og bøjningsspåvirkning

Bjælketværsnittets geometriske betingelse kan således udtrykkes ved:

$$\epsilon = \epsilon_0 - ky$$

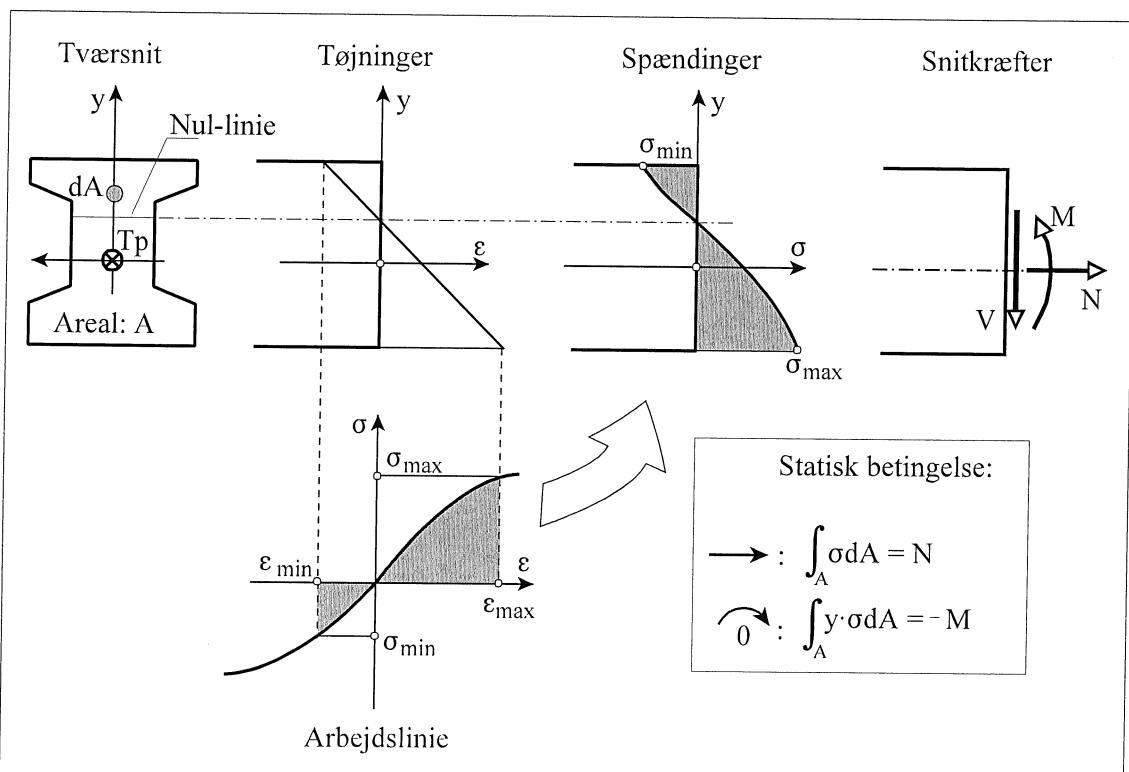
hvor  $y$  stadig måles fra tværsnittets tyngdepunkt. Bemærk, at nul-linjen ikke længere går gennem tyngdepunktet.

#### Statiske forhold

Tværsnittets statiske betingelse udtrykker, at der er ækvivalens mellem normalspændingerne og snitkræfterne  $N$  og  $M$ .

$$\int_A \sigma dA = N ; \quad \int_A y\sigma dA = -M$$

Den eneste ændring i forhold til bøjning uden aksialpåvirkning er, at normalkraften ikke længere er lig med nul.



Figur 5.3 Sammenhæng mellem tøjningerne, spændingerne og snitkræftene  $M = N$

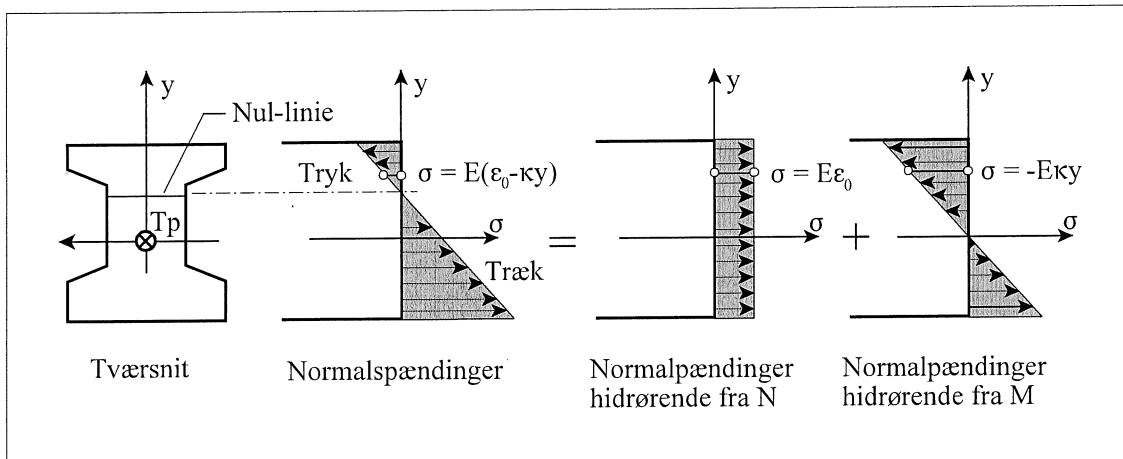
### Fysiske forhold

Som i det foregående vil vi indskrænke os til at betragte lineærelastiske materialer. Tværtnitsmaterialets *fysiske betingelse* kan således skrives på formen:

$$\sigma = E\varepsilon$$

### Grundligninger

Hvis den geometriske betingelse  $\varepsilon = \varepsilon_0 - \kappa y$  indsættes i ovenstående fysiske betingelse, fås  $\sigma = E\varepsilon_0 - E\kappa y$ . Idet det forudsættes, at  $E$  er konstant ses det, at spændingerne fordeler sig lineært over tværtnittet, som vist på figur 5.4. Endvidere ses det, at spændingsfordelingen kan betragtes som bestående af to bidrag, hvor det ene bidrag ( $E\varepsilon_0$ ) hidrører fra normalkraften medens det andet ( $-E\kappa y$ ) hidrører fra bøjningsmomentet.



**Figur 5.4** Normalspændingsfordeling i lineærelastisk bjælke

Indsættes det fundne udtryk for  $\sigma$  i de statiske betingelser, fås derfor de samme grundligninger som tidligere er fundet for hhv. aksialpåvirkning og bøjning:

$$\varepsilon_0 = \frac{N}{EA} \quad \text{og} \quad \kappa = \frac{M}{EI}$$

### 5.2 Naviers formel

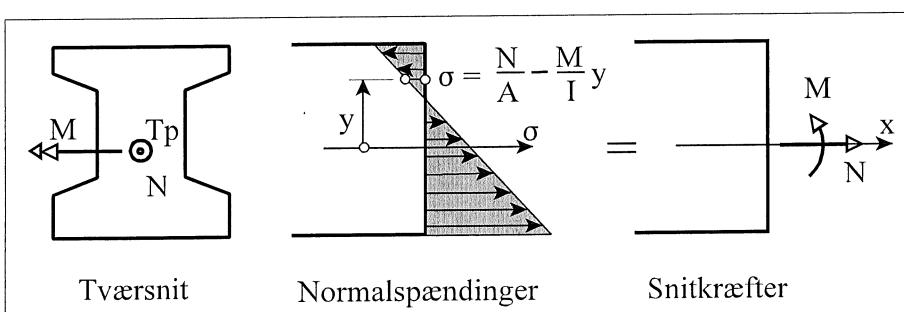
Indsættes grundligningerne i det ovenfor udledte udtryk:  $\sigma = E\varepsilon_0 - E\kappa y$  fås Naviers formel:

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M}{I} y$$

Denne formel udtrykker ligesom figur 5.4, at normalspændingerne i tværtnittet kan sammensættes af et bidrag fra normalkraften og et bidrag fra bøjningsmomentet.

Bemærk, at formlen kræver, at følgende forudsætninger er opfyldt:

- Lineærelastisk bjælkemateriale
- $y$  regnes positiv opad fra tværtnittets tyngdepunkt .
- Snitkræfterne regnes positive som vist på figur 5.5
- Normalkraften virker i tværtnittets tyngdepunkt.



**Figur 5.5** Naviers formel

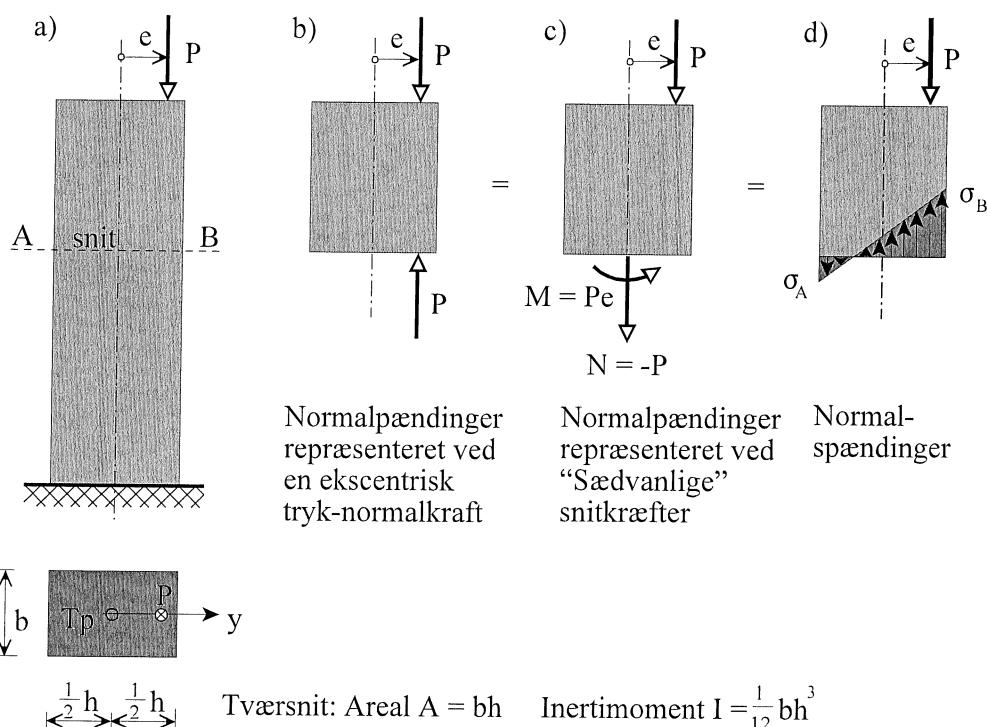
**Eksempel 5.1** Naviers formel ved ekscentrisk virkende normalkraft.

Nedenstående figur (a) viser en søjle (lodret bjælke) belastet med en lodret nedadrettet enkeltkraft af størrelsen  $P$ . Kraften er beliggende i søjlens symmetriplan i afstanden  $e$  fra søjlens tyngdepunktsakse. Der ses bort fra søjlets egenvægt.

Søjlematerialet forudsættes at være lineærelastisk.

På figuren er søjletværsnittet for nemheds skyld vist rektangulært, men de efterfølgende beregninger kan gennemføres for et vilkårligt enkeltsymmetrisk tværsnit.

Normalspændingsfordelingen i et vilkårligt søjletværsnit ønskes bestemt.



Ligevægten af den del af søjlen, der ligger over det på figur a viste snit, betragtes. Det indses, at søjledelen vil være i ligevægt, hvis de spændinger, der virker på snittet, er ækvivalente med en ekscentrisk virkende tryknormalkraft  $P$ , som vist på figur b.

Da søjlematerialet er lineærelastisk, kan *Naviers formel* anvendes til at bestemme spændingsfordelingen. Før formlen kan benyttes, må den ekscentrisk virkende tryknormalkraft imidlertid ækvivaleres med et sæt "sædvanlige" snitkræfter, som vist på figur c. (Det erindres, at to kraftsystemer er ækvivalente, hvis de har samme projektion på to ikke parallele linjer og samme moment i et punkt.)

Herefter giver *Naviers formel*:

$$\sigma = \frac{-P}{A} - \frac{Pe}{I} y$$

Hvis tværsnittet er rektangulært med højden  $h$  og bredden  $b$ , fås følgende udtryk for tværsnittets kantspændinger:

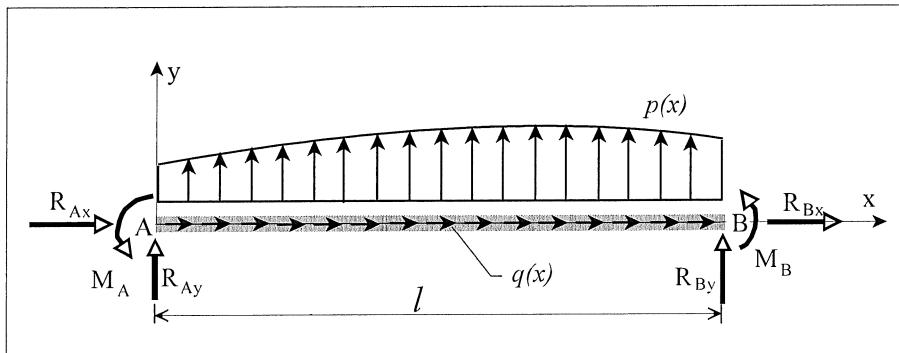
$$\sigma_A = \frac{-P}{bh} - \frac{Pe}{\frac{1}{12}bh^3} (-\frac{1}{2}h) = -\frac{P}{bh} \left(1 - \frac{6e}{h}\right) ; \quad \sigma_B = \frac{-P}{bh} - \frac{Pe}{\frac{1}{12}bh^3} (\frac{1}{2}h) = -\frac{P}{bh} \left(1 + \frac{6e}{h}\right)$$

Det fremgår af ovenstående udtryk, at tværsnittet overalt vil være udsat for trykspændinger såfremt  $-\frac{1}{6}h < e < \frac{1}{6}h$ .  $k = \frac{1}{6}h$  kaldes tværsnittets *kerneradius*.

### 5.3 Elementanalyse

Figur 5.6 viser et retlinjet bjælkeelement med længden  $l$ . Bjælkeelementet repræsenterer en bjælke, eller en del af en bjælke.

Som basis for modelbeskrivelsen anvendes som sædvanligt et retvinklet xy-koordinatsystem, hvor x-aksen er sammenfaldende med den *udeformerede* bjælkes tyngdepunktsakse. De enkelte materielle punkter på bjælkeaksen kan derfor karakteriseres ved deres x-koordinat i den udeformerede situation. Bjælkeaksens endepunkter A og B er således bestemt ved koordinaterne 0 og  $l$ .



**Figur 5.6**

Bjælken kan være belastet med en fordelt tværlast med intensiteten  $p = p(x)$  samt en fordelt aksiallast med intensiteten  $q = q(x)$ . Den fordelte last forudsættes at virke på hele strækningen fra punkt A til punkt B. Ud over den fordelte belastning er elementet i enderne påvirket af kræfterne  $R_{Ax}$ ,  $R_{Bx}$ ,  $R_{Ay}$  og  $R_{By}$  samt momenterne  $M_A$  og  $M_B$ . Disse påvirkninger kan betragtes som snitkraeftter, reaktioner eller ydre last afhængigt af elementets understøtningsforhold. De nævnte påvirkninger regnes positive som vist på figuren.

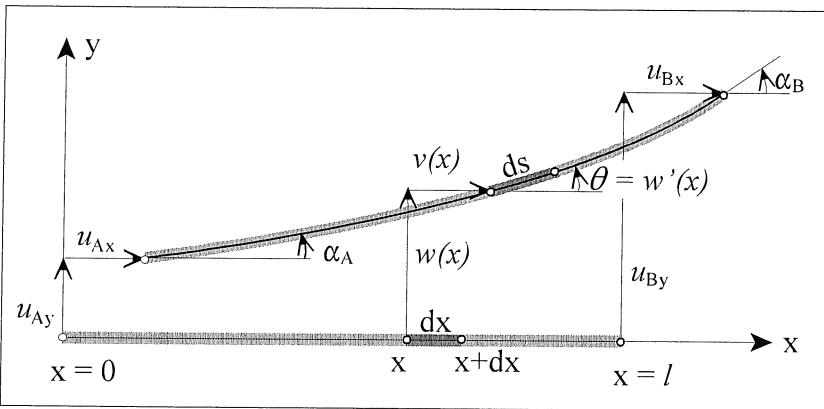
#### Geometriske forhold

Figur 5.7 viser det deformede bjælkelementet. (Deformationerne er af hensyn til anskueligheden stærkt overdrevne.)

Flytningen af bjælkeaksen i x-retningen beskrives ved funktionen:  $v = v(x)$ , medens flytningen af bjælkeaksen i y-retningen beskrives ved funktionen:  $w = w(x)$ .

Det forudsættes, at flytningerne er "små" eller mere præcist, at det omflytningsgradienterne  $v'(x)$  og  $w'(x)$  gælder at:  $|v'(x)| \ll 1$  og  $|w'(x)| \ll 1$

Når  $|w'(x)| \ll 1$ , er der tale om en meget flad kurve. Når samtidig  $|v'(x)| \ll 1$  kan tangentvinklen  $\theta$  kan betragtes som værende lig med hældningen af bjælkeaksen, dvs.  $\theta = w'$ .



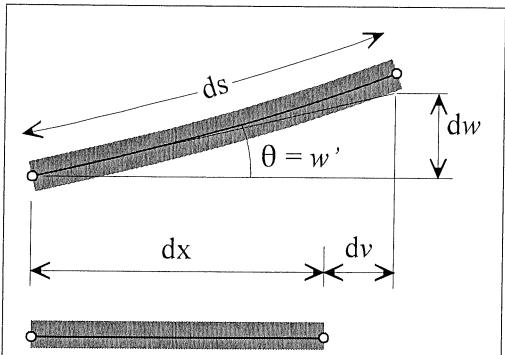
**Figur 5.7 Flytninger**

For at kunne bestemme bjælkeaksens længdetøjning  $\epsilon_0$  og krumming  $\kappa$  betragtes et infinitesimalt udsnit af bjælken. Inden deformationen har dette udsnit længden  $dx$ , medens det efter deformationen har længden  $ds$ . Figur 5.8 viser det deformerede og det udeformerede bjælkeudsnit i forstørret udgave. Forudsætningen om at vinklen  $\theta$  er meget lille betyder at:

$$ds \approx dx + dv = dx(1 + \frac{dv}{dx}) = dx(1 + v')$$

Længdetøjningen af bjælkeaksen bliver således:

$$\epsilon_0 = \frac{ds - dx}{dx} \approx \frac{dv}{dx} = v'$$



**Figur 5.8 Infinitesimalt bjælkeudsnit**

Under forudsætning af "små flytninger" kan den *geometriske (felt-) betingelse* for et bjælkeelement utsat for en kombination af aksialpåvirkning og bøjning således beskrives ved de samme udtryk som anvendes, når disse påvirkninger virker hver for sig.

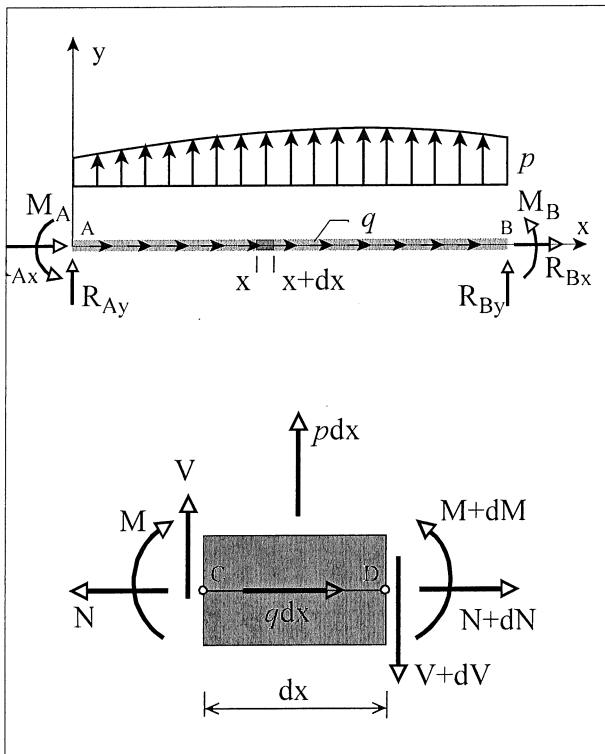
$$\epsilon_0 = \frac{dv}{dx} \quad \text{eller} \quad \epsilon_0 = v'(x) \quad ; \quad \kappa = \frac{d^2 w}{dx^2} \quad \text{eller} \quad \kappa = w''(x)$$

De mulige *geometriske randbetingelser* er jf. figur 5.7:

$$\begin{aligned} u_{Ax} &= v(0) & ; \quad u_{Ay} &= w(0) & ; \quad \alpha_A &= w'(0) \\ u_{Bx} &= v(l) & ; \quad u_{By} &= w(l) & ; \quad \alpha_B &= w'(l) \end{aligned}$$

### Statiske forhold

Det forudsættes som tidligere, at ligevægtsligningerne med tilstrækkelig nøjagtighed kan baseres på den udeformerede bjælkes geometri.



**Figur 5.9** Belastning og snitkrafter

Modellens statiske betingelser opstilles ved at betragte ligevægten af en infinitesimal bjælkedel. Betragtes figur 5.9 ses det, at følgende ligevægtsligninger kan opstilles.

Vandret projektion:

$$qdx - N + (N + dN) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dN}{dx} = -q \quad \text{eller} \quad N' = -q$$

Lodret projektion:

$$pdःx + V - (V + dV) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dV}{dx} = p \quad \text{eller} \quad V' = p$$

Moment om D:

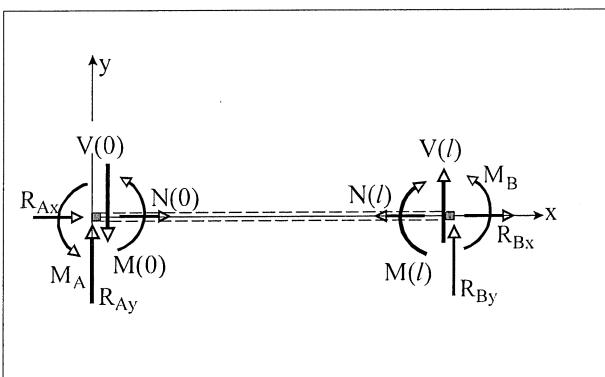
$$M + dM - M - Vdx = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dM}{dx} = V \quad \text{eller} \quad V = M'$$

Differentieres ligningen  $V = M'$  og indsættes  $V' = p$  ses det, at  $V$  kan elimineres. Herved fås følgende differentialligninger, der betegnes modellens *statiske feltbettingelse*,

$$N' + q = 0 \quad \text{og} \quad M'' - p = 0$$

Ved at betragte ligevægten af infinitesimale bjælkedele ved  $x = 0$  og  $x = l$  (se figur 5.10) samt anvende ligevægtsligningen  $V = M'$  kan de *statiske randbetingelser* formuleres således:



**Figur 5.10** Statiske randbetingelser

$$\begin{aligned} R_{Ax} &= -N(0) \\ R_{Ay} &= V(0) = M'(0) \\ M_A &= -M(0) \\ R_{Bx} &= N(l) \\ R_{By} &= -V(l) = -M'(l) \\ M_B &= M(l) \end{aligned}$$

Det ses, at de statiske betingelser for et bjælkelement udsat for en kombination af aksialpåvirkning og bøjning simpelthen er en kombination af de statiske betingelser,

der gælder, hvis påvirkningerne virker hver for sig. Dette hænger sammen med forudsætningen om, at ligevægtsligningerne kan baseres på den udeformerede bjælkes geometri.

*Fysiske forhold*

Bjælkelementets fysiske betingelse skal udtrykke sammenhængen mellem de deformationsstørrelser, der karakteriserer elementets deformationstilstand, og de tilsvarende snitkraæfter. I det aktuelle tilfælde vil det sige sammenhængen mellem aksialtøjningen og normalkraften og mellem krumningen og bøjningsmomentet.

Forudsættes det, at bjælkematerialet er lineærelastisk, udtrykker tværsnitsanalysens grundligninger disse sammenhænge. *Bjælkelementets fysiske betingelse* er således:

$$N = EA\varepsilon_0 \quad \text{og} \quad M = EI\kappa$$

*Grundligningerne*

Forudsættes det, at flytningsgradienterne er små, at ligevægten kan baseres på den udeformerede geometri, samt, at bjælkematerialet er lineærelastisk, har vi nu vist, at de geometriske, statiske og fysiske betingelser for et bjælkelement udsat for en kombination af aksialpåvirkning og bøjning kan opfattes som en superposition (overlejring) af de tilsvarende betingelser for aksialpåvirkning og bøjning, når disse påvirkninger virker hver for sig. Dette forhold må derfor også gælde den kombinerede models grundligninger, der således udtrykkes ved følgende differentialligninger:

$$(EAv')' = -q \quad ; \quad (EIw'')'' = p$$

Forudsættes det, at bjælkeelementets aksialstivhed  $EA$  og bøjningsstivhed  $EI$  er konstant, fås:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{-q}{EA} \quad ; \quad \frac{d^4w}{dx^4} = \frac{p}{EI}$$

De tilhørende randbetingelser bliver:

Geom. randbet.		Statiske randbetingelser
$u_{Ax} = v(0)$	eller	$R_{Ax} = -N(0) = -EAv'(0)$
$u_{Ay} = w(0)$	eller	$R_{Ay} = V(0) = M'(0) = EIw'''(0)$
$\alpha_A = w'(0)$	eller	$M_A = -M(0) = -EIw''(0)$
$u_{Bx} = v(l)$	eller	$R_{Bx} = N(l) = EA v'(l)$
$u_{By} = w(l)$	eller	$R_{By} = -V(l) = -M'(l) = -EIw'''(l)$
$\alpha_B = w'(l)$	eller	$M_B = M(l) = EIw''(l)$

Bemærk, at der altid vil være netop 3 randbetingelser i hver ende af bjælkelementet. Er  $u_{Ay}$  for eksempel kendt, vil den tilsvarende reaktion  $R_{Ay}$  være ukendt og omvendt. Der er altså kun mulighed for én betingelse i hver linje i skemaet ovenfor.

I mange tilfælde vil de to differentialligninger kunne løses uafhængigt af hinanden. Der vil dog være tilfælde, hvor randbetingelserne for de to ligninger er indbyrdes afhængige som f.eks. ved en simpel bevægelig understøtning med skrå rullebane.

## 5.4 Arbejds ligningen

Da bjælkelementets statiske betingelsesligninger som tidligere nævnt er en kombination af de statiske betingelser for aksialpåvirkning hhv. bøjning, må dette også gælde for arbejds ligningen, der jo blot er en matematisk omskrivning af de statiske felt- og randbetingelser. For en plan konstruktion sammensat af retlinjede bjælke- og/eller stangelementer, fås således:

$$\text{Ligevægt} \Leftrightarrow \delta A_i = \delta A_y \text{ for alle virtuelle flytninger}$$

$$\delta A_y = \sum_{k=1}^{n_k} (\delta u_{kx} P_{kX} + \delta u_{ky} P_{kY} + \delta \alpha_k M_k) + \sum_{e=1}^{n_e} \int_0^l \delta v q dx + \sum_{e=1}^{n_e} \int_0^l \delta w p dx$$

$$\delta A_i = \sum_{e=1}^{n_e} \int_0^l \delta v' N dx + \sum_{e=1}^{n_e} \int_0^l \delta w'' M dx$$

$$n_k = \text{antal knuder} ; n_e = \text{antal elementer.}$$

Her er  $\delta u_{kx}$ ,  $\delta u_{ky}$ ,  $\delta \alpha_k$  de virtuelle flytninger hhv. drejninger af konstruktionens knude nr. k, medens  $P_{kX}$ ,  $P_{kY}$ ,  $M_k$  er de tilsvarende knudebelastninger. Disse størrelser er målt i et til formålet valgt globalt XY-koordinatsystem. De virtuelle flytninger  $\delta v$  og  $\delta w$  måles i de enkelte elementers lokale koordinatsystemer. Dette gælder også de fordelte belastninger  $p$  og  $q$  samt snitkræfterne  $M$  og  $N$ .

### Flytningsbestemmelse vha. arbejds ligningen

En særlig anvendelse af arbejds ligningen knytter sig som tidligere nævnt til beregning af flytninger i elastiske konstruktioner. Fremgangsmåden ved en sådan beregning skal kort rekapituleres her. Der etableres en fiktiv konstruktion med samme geometri som den virkelige konstruktion og belastet med en enkeltkraft af størrelsen 1 i det punkt flytningen (d) søges og med samme retning som denne. (Hvis det er en vinkeldrejning, der søges, erstattes kraften 1 med et moment af størrelsen 1). *Arbejds ligningen anvendes nu på den fiktive konstruktion, idet flytningerne i den virkelige konstruktion anvendes som virtuelle flytninger.* Med fornuftigt valgte understøtningsforhold for den fiktive konstruktion kan man nu opnå, at det virtuelle ydre arbejde bliver lig med den søgte flytning. Ved beregning af det indre virtuelle arbejde udnyttes det, at de virtuelle flytninger er lig med flytningerne i den virkelige konstruktion samt, at konstruktionen er lineærelastisk, hvilket betyder, at  $\delta v' = \epsilon_0 = N/EA$  og  $\delta w'' = \kappa = M/EI$ . Herefter kan arbejds ligningen skrives på formen:

$$1 \cdot d = \sum_{e=1}^{n_e} \int_0^l \frac{M}{EI} M^* dx + \sum_{e=1}^{n_e} \int_0^l \frac{N}{EA} N^* dx + \sum_{e=1}^{n_e} \frac{S}{EA} S^* l$$

Her er de snitkræfter, der er forsynet med en \*, snitkræfterne i den fiktive konstruktion.

Af praktiske grunde skelnes der mellem normalkræfter i egentlige stangelementer (S) og normalkræfter i egentlige bjælkeelementer (N). Da de sidstnævnte -udover normalkraftpåvirkningen - også er bøjningspåvirkede, har de ofte så stort et tværsnitsareal at, deres normalkraftbidrag til flytningerne kan negligeres. Er dette tilfældet reduceres ovenstående udtryk til:

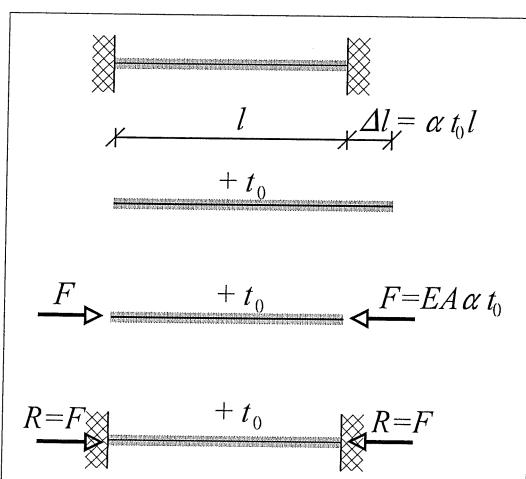
$$1 \cdot d = \sum_{e=1}^{n_e} \int_0^l \frac{M}{EI} M^* dx + \sum_{e=1}^{n_e} \frac{S}{EA} S^* l$$

### 5.5 Temperaturpåvirkning og initiale deformationer

Indtil nu har vi kun omtalt deformationer der skyldes en egentlig belastning af konstruktionen. Imidlertid vil f.eks. temperaturændringer også give anledning til deformationer af de berørte konstruktionele.

Udsættes en bjælke således for en *ensformig* temperaturændring på  $t_0$  °C vil den få en længdeændring pr længdeenhed - altså en tøjning - på:  $\varepsilon_{0i} = \alpha t_0$ , hvor  $\alpha$  er temperaturudvidelseskoefficienten. Dette forudsætter naturligvis at bjælken er fri til at kunne udvide sig i længderetningen.

Hvis bjælken er forhindret i at udvide sig, vil tøjningen naturligvis forblive 0, men til gengæld vil der opstå normalkræfter og dermed normalspændinger i bjælken. Dette indses nemmest ved at betragte følgende simple eksempel.



**Figur 5.11 Ensformig temperaturændr.**

Det er i almindelighed en nyttig tankegang, at man i første omgang lader eventuelle temperaturdeformationer foregå frit og først bagefter tvinger konstruktionen på plads i forhold til understøtningerne. På den baggrund indses det, at den ovenfor beskrevne situation havde været helt den samme selvom længdeændringen  $\Delta l$  ikke skyldtes en temperaturændring, men blot at bjælken var fremstillet med en overlængde på  $\Delta l$ .

Det er således praktisk, at betragte alle små afvigelser, hvadenten de skyldes temperaturændringer eller andre forhold, mellem de enkelte konstruktionselementers geometri, og den geometri de skulle ha' haft for at passe til den samlede konstruktions geometri og understøtningsforhold, som forårsades deformationer eller *initiale deformationer*. (Denne betegnelse begrunder anvendelsen af index i ovenfor.)

Da de initiale deformationer (pr. definition) ikke fremkalder spændinger i konstruktionen, må de spændingsfremkaldende tøjninger fås som differensen mellem de totale tøjninger og de tøjninger der introduceres af de initiale deformationer :

$$\varepsilon = \varepsilon_{tot} - \varepsilon_i$$

Anvendes dette på eksemplet ovenfor, fås, idet den totale (endelige) tøjning er 0, at den spændingsfremkaldende tøjning er  $\varepsilon_o = -\varepsilon_{0i}$ . Den tilsvarende spænding er følgelig  $\sigma = -E \varepsilon_{0i}$

Da snitkræfter og reaktioner i en statisk bestemt konstruktion kan bestemmes ved hjælp af ligevægtsligningerne alene, indses det, at temperaturpåvirkning eller andre initiale deformationer kun vil medføre flytninger men ikke snitkræfter i sådanne konstruktioner. Dette vil i almindelighed ikke være gældende for en statisk ubestemt konstruktion, som eksempelvis den ovenfor viste indspændte bjælke. (Se endvidere eksempel 8.1)

Når en retlinjet bjælke udsættes for en ensformig temperaturændring, vil den som omtalt ovenfor få en længdeændring, men den vil forblive retlinjet. Hvis bjælken derimod udsættes for en temperaturændring, der varierer fra bjælkens underside til dens overside, vil de enkelte lag i bjælken tilsi i forhold til hinanden i dels.

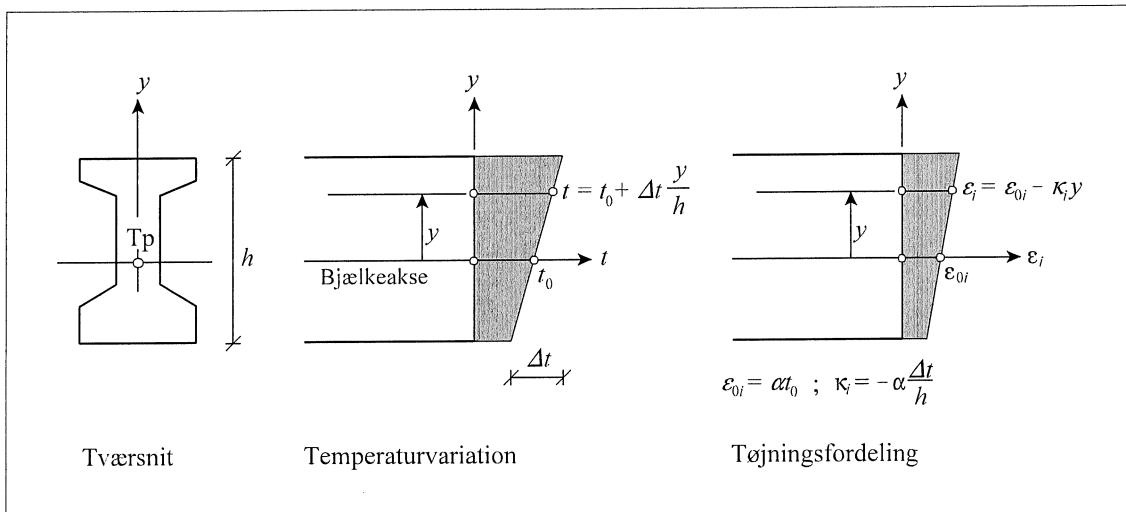
En elastisk bjælke med længden  $l$  og tværsnitsarealet  $A$  er fast indspændt i begge ender som vist på figur 5.11. Bjælken opvarmes nu  $t_0$  grader.

Hvis man i første omgang forestiller sig, at bjælken frigøres fra understøtningerne således, at den kan udvide sig uhindret, vil dette medføre en tøjning  $\varepsilon_{0i} = \alpha t_0$  svarende til en total forlængelse af bjælken på  $\Delta l = \varepsilon_{0i} l = \alpha t_0 l$ .

For igen at kunne få bjælken på plads mellem understøtningerne presses den nu sammen til sin oprindelige længde ved hjælp af kræfterne  $F$ , som vist på figuren. Da bjælken er elastisk kræver dette, at  $F = EA\varepsilon_{0i} = EA\alpha t_0$ . Da normalkraften i bjælken nu er  $N = -F$ , bliver spændingen i bjælken

$$\sigma = -F/A = -E\varepsilon_{0i} = -E\alpha t_0 .$$

Betrætter vi således en bjælke, der bliver udsat for en temperaturændring, der varierer lineært over bjælkehøjden kan temperaturændringen i et lag i bjælken, der ligger i afstanden  $y$  fra bjælkeaksen bestemmes af udtrykket:  $t = t_0 + \Delta t \cdot y/h$ . Her er  $t_0$  bjælkeaksens temperaturændring, medens  $\Delta t$  er forskellen mellem temperaturændringen af bjælkens over- og underside. Se fig. 5.12



**Figur 5.12** Temperaturvariation og tilhørende tøjningsfordeling

Under forudsætning af at bjælken kan deformere frit, fås de tilsvarende initiale tøjninger ( $\varepsilon_i$ ) ved at multiplicere temperaturændringerne med temperaturudvidelseskoefficienten  $\alpha$ :

$$\varepsilon_i = \alpha t_0 + \alpha \Delta t \frac{y}{h} \text{ eller } \varepsilon_i = \varepsilon_{0i} - \kappa_i y, \text{ hvor } \varepsilon_{0i} = \alpha t_0 \text{ og } \kappa_i = -\alpha \frac{\Delta t}{h}$$

Ved at sammenligne med det sædvanlige udtryk for tøjningsfordelingen i en bjælke (se figur 5.2) indsies det, at  $\varepsilon_{0i}$  er et udtryk for den initiale tøjning bjælkeaksen får pga. temperaturændringen  $t_0$  medens  $\kappa_i$  er et udtryk for en initial krumning af bjælken forårsaget af temperaturvariationen  $\Delta t$ .

Ligesom det var tilfældet med en initial aksetøjning ( $\varepsilon_{0i}$ ), behøver den initiale krumning ( $\kappa_i$ ) ikke nødvendigvis at være fremkaldt af temperaturændringer. Et bjælkelement kan også (tilsigtet eller utilsigtet) være fremstillet med en initial krumning.

Som tidligere nævnt fås de spændingsfremkaldende deformationer som differensen mellem de totale og de initiativerne deformationer. Hvis et bjælkelement derfor indeholder både initiativerne aksetøjninger og initiativerne krumninger har man:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{0,tot} - \varepsilon_{0i} \quad ; \quad \kappa = \kappa_{tot} - \kappa_i$$

Normalt lader man udbøjningsfunktionerne  $v$  og  $w$  repræsentere de totale flytninger, hvilket medfører at de geometriske betingelser for et bjælkeelement med initiale deformationer får formen:

Hvis Bjælkeelementet er lineærelastisk gælder det endvidere at

$$\varepsilon_0 = \frac{N}{EA} \Rightarrow v' = \frac{N}{EA} + \varepsilon_{0i} \quad \text{og} \quad \kappa = \frac{M}{EI} \Rightarrow w'' = \frac{M}{EI} + \kappa_i$$

Ved at differentiere 1 henholdsvis 2 gange samt indsætte de statiske betingelser  $N' = -q$  og  $M'' = p$  fås, under forudsætning af, at  $EA$  og  $EI$  er konstante, nedenstående grundligninger.

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{-q}{EA} + \frac{d\varepsilon_i}{dx} \quad ; \quad \frac{d^4w}{dx^4} = \frac{p}{EI} + \frac{d^2\kappa_i}{dx^2}$$

Disse ligninger kan sammen med de relevante randbetingelser anvendes til bestemmelse af udbøjningsfunktionerne  $v(x)$  og  $w(x)$ .

Hvis kun enkelte flyningsstørrelser ønskes bestemt er det dog en fordel at anvende arbejdsligningen. Hvis det er de totale flyninger, der skal bestemmes, må vi i ligningen indsætte udtrykkene for de totale akselbøjninger og krumninger. Herefter får arbejdsligningen til deformationsbestemmelse nedenstående udseende.

$$1 \cdot d_{tot} = \sum_{e=1}^{n_e} \int_0^l \left( \frac{M}{EI} + \kappa_i \right) M^* dx + \sum_{e=1}^{n_e} \int_0^l \left( \frac{N}{EA} + \varepsilon_{0i} \right) N^* dx + \sum_{e=1}^{n_e} \left( \frac{S}{EA} + \varepsilon_{0i} \right) S^* l$$

Det fremgår af denne ligning, at de initiale deformationer bidrager til den søgte flytning med:

$$1 \cdot d_i = \sum_{e=1}^{n_e} \int_0^l \kappa_i M^* dx + \sum_{e=1}^{n_e} \int_0^l \varepsilon_{0i} N^* dx + \sum_{e=1}^{n_e} \varepsilon_{0i} S^* l$$

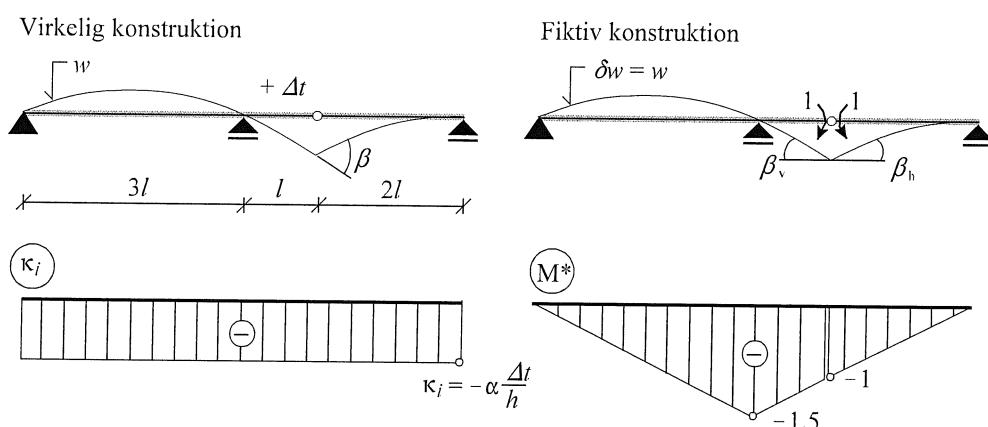
### Eksempel 5.2 Temperaturpåvirkning

En bjælkekonstruktion er opbygget af to vandrette stålbjælker, der er indbyrdes forbundet vha. et charniere, som vist på nedenstående figur. Bjælkerne har tværsnitshøjden  $h$ , og bjælkematerialets temperaturudvidelseskoefficient benævnes  $\alpha$ .

Som følge af solpåvirkning bliver konstruktionens overside opvarmet således, at der opstår en temperaturforskel  $\Delta t$  mellem bjælkelementernes over- og underside. Det forudsættes at temperaturvariationen er lineær.

Temperaturpåvirkningen bevirker, at bjælkeelementerne krummer således, at konstruktionen får en udbøjning  $w$  som antydet på figuren.

Vi ønsker at beregne den gensidige vinkeldrejning ( $\beta$ ) i charnieret vha. arbejdsligningen. Vi betragter derfor en fiktiv konstruktion belastet med to enhedsmomenter, der virker umiddelbart til venstre hhv højre for charnieret.



Vi bruger nu arbejdsligningen på den fiktive konstruktion idet vi anvender den virkelige udbøjning som virtuel flytning. Ved brug af appendix B fås nedenstående resultat.

$$1 \cdot \beta_v + 1 \cdot \beta_h = \beta = \int_0^{6l} \kappa_i M^* dx = \frac{9}{2} \kappa_i l = \frac{9}{2} \alpha \frac{\Delta t}{h} l$$

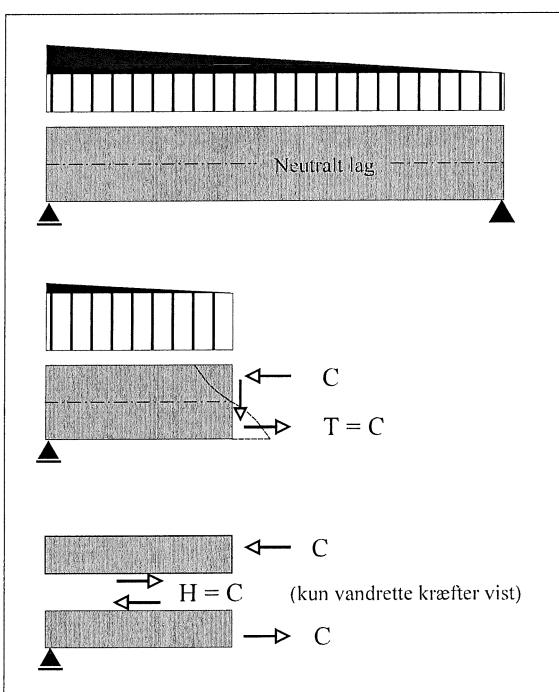
For stål er  $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ . Antages det endvidere at,  $\Delta t = 50 \text{ } ^\circ\text{C}$ ,  $l = 2 \text{ m}$  og  $h = 0,2 \text{ m}$  fås:  $\beta = 0,027 \text{ radian} = 1,5 \text{ grader}$

## 6. FORSKYDNINGSPÅVIRKNING

Tidligere har vi set hvorledes aksialpåvirkning og bøjningspåvirkning (under visse forudsætninger) kan behandles hver for sig, hvorefter resultaterne kan kombineres svarende til den samlede påvirkning. Forskydningspåvirkningen er derimod nøje knyttet til bøjningspåvirkningen gennem den statiske betingelsesligning  $V = M'$  og kan derfor ikke behandles uafhængigt af denne.

Da vi endvidere har baseret bøjningsteorien på antagelsen om, at plane tværsnit forbliver plane og vinkelrette på bjælkeaksen, opstår der yderligere den komplikation, at denne antagelse udelukker muligheden for at indrage forskydningsdeformationer i denne teori. (Se afsnit 6.3)

Forskydningskræfter/-spændinger må i den foreliggende teori behandles som en slags reaktioner, der nødvendigvis må eksistere for, at den indre ligevægt i bjælken kan opretholdes. Beregningen af disse størrelser er derfor alene baseret på ligevægtsbetragtninger.



**Figur 6.1** Forskydningspåvirkning

En lodret projktion af de kræfter, der påvirker venstre bjælkehælf, vil sædvanligvis vise, at højre bjælkedel ud over normalspændingerne må påvirke venstre del med et sæt spændinger beliggende i tværsnittets plan. Disse spændinger benævnes som bekendt forskydningsspændingerne, medens deres resultant benævnes forskydningskraften i snittet.

Vi forestiller os nu venstre bjælkedel som sammensat af to dele adskilt af det neutrale lag. Betragtes ligevægten af den øverste del, ses det ved vandret projktion, at den nederste del må påvirke den øverste med en vandret kraft  $H$  af samme størrelse som trykresultanten  $C$ . Omvendt må den øverste bjælkedel påvirke den nederste med en lige så stor og modsatrettet kraft. Disse vandrette forskydende kræfter må være resultanter af forskydningsspændingerne beliggende i det vandrette snit, der adskiller de to bjælkedele.

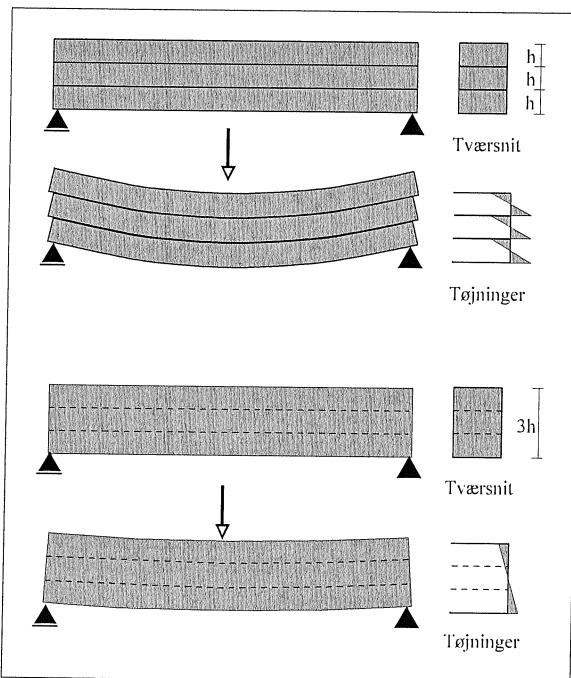
Betrugtes venstre bjælkedel herefter som sammensat af to dele adskilt af et vandret snit beliggende under det neutrale lag, kan det på samme måde indsese, at også i dette lag må der findes forskydningspåvirkninger, hvis resultant skal holde ligevægt med resultanten af de trækspændinger, der virker på bjælkedelens andel af tværsnittet. Størrelsen af denne resultant må aftage efterhånden, som det vandrette snit nærmer sig bjælkens underside.

Lad os indledningsvis betragte en simpelt understøttet bjælke. Belastes bjælken med en lodret nedadrettet last, vil fibrene over det neutrale lag vil blive utsat for tryk, medens fibrene under det neutrale lag vil blive trækpåvirkede.

Betrugtes et tværsnit i bjælken, vil bjælkedelen til højre for snittet således påvirke bjælkedelen til venstre for snittet med et sæt tryknormalspændinger og et sæt træknormalspændinger som antydet på figur 6.1.

Kaldes resultanten af trykspændingerne  $C$  og resultanten af trækspændingerne  $T$ , ses det ved vandret projktion af de kræfter, der virker på den venstre bjælkehælf, at  $C = T$ . Det kraftsystem, der udgøres af normalspændingerne i snittet, er således ækvivalent med et kraftpar. (Virkningen, momentet, af dette kraftpar går som bekendt under navnet snitmomentet eller bøjningsmomentet).

Det indses derfor, at de forskydende kræfter mellem de enkelte lag må være maksimale ved det neutrale lag og aftage mod nul, efterhånden som det betragtede vandrette snit nærmer sig bjælkens over- hhv. underside. Den indre ligevægt i en bjælke medfører derfor i almindelighed, at der findes forskydende kræfter i såvel vandrette som lodrette snit i bjælken.



**Figur 6.2**

lige så godt have anbragt dem ved siden af hinanden som oven på hinanden. Bjælkens bøjningsstivhed er således 3 gange den enkelte lamels bøjningsstivhed. Hvis bjælkematerialet er lineærelastisk bliver bøjningsstivheden således:

$$EI = E \frac{1}{12} 3bh^3 = \frac{1}{4} Ebh^3$$

Herefter limes de tre lameller sammen, så bjælken kommer til at fremstå som en homogen bjælke med højden  $3h$ . Nu kan lamellerne ikke glide i forhold til hinanden, og tøjningsfordelingen kan regnes lineær som vist nederst på figur 6.2. Hvis bjælkematerialet er lineærelastisk, bliver bøjningsstivheden nu

$$EI = E \frac{1}{12} b(3h)^3 = \frac{9}{4} Ebh^3$$

Den sammenlimede bjælkes bøjningsstivhed er altså 9 gange så stor som den oprindelige bjælkes. Tilsvarende bliver nedbøjningen af den oprindelige bjælke 9 gange så stor som den sammenlimede bjælkes nedbøjning. Anvendes *Naviers formel*, kan det desuden vises, at spændingerne i den oprindelige bjælke bliver 3 gange så store som i den sammenlimede.

Efter disse indledende bemærkninger vil vi gå over til at udlede en formel til bestemmelse af de forskydende kræfter i et langsgående snit i en bjælke. Som det vil fremgå af det følgende behøver snittet ikke nødvendigvis at være vandret, det skal blot være et snit, hvis frembringere er parallelle med bjælkeaksen. Den søgte formel omtales ofte som *Grashofs formel*.

Eksistensen af de forskydende kræfter i de vandrette lag i bjælken kan demonstreres ved et simpelt eksperiment. Figur 6.2 viser en bjælke, der består af 3 rektangulære lameller med højden  $h$ . I første omgang er lamellerne lagt ”løst” oven på hinanden, og det forudsættes, at lamellernes overflader er så tilpas glatte, at friktionen mellem de enkelte lameller kan negligeres. Når bjælken belastes, vil de tre lameller opføre sig som tre individuelle bjælker med hver deres neutrale lag, idet hver lamel nødvendigvis må opretholde sin egen vandrette ligevægt, da der ikke kan overføres vandrette kræfter mellem dem. Det betyder, at undersiden af den enkelte lamel bliver strakt, medens oversiden bliver trykket sammen med den virkning, at lamellerne glider i forhold til hinanden som vist på figuren, hvor også tøjningsfordelingen i lamellerne er vist.

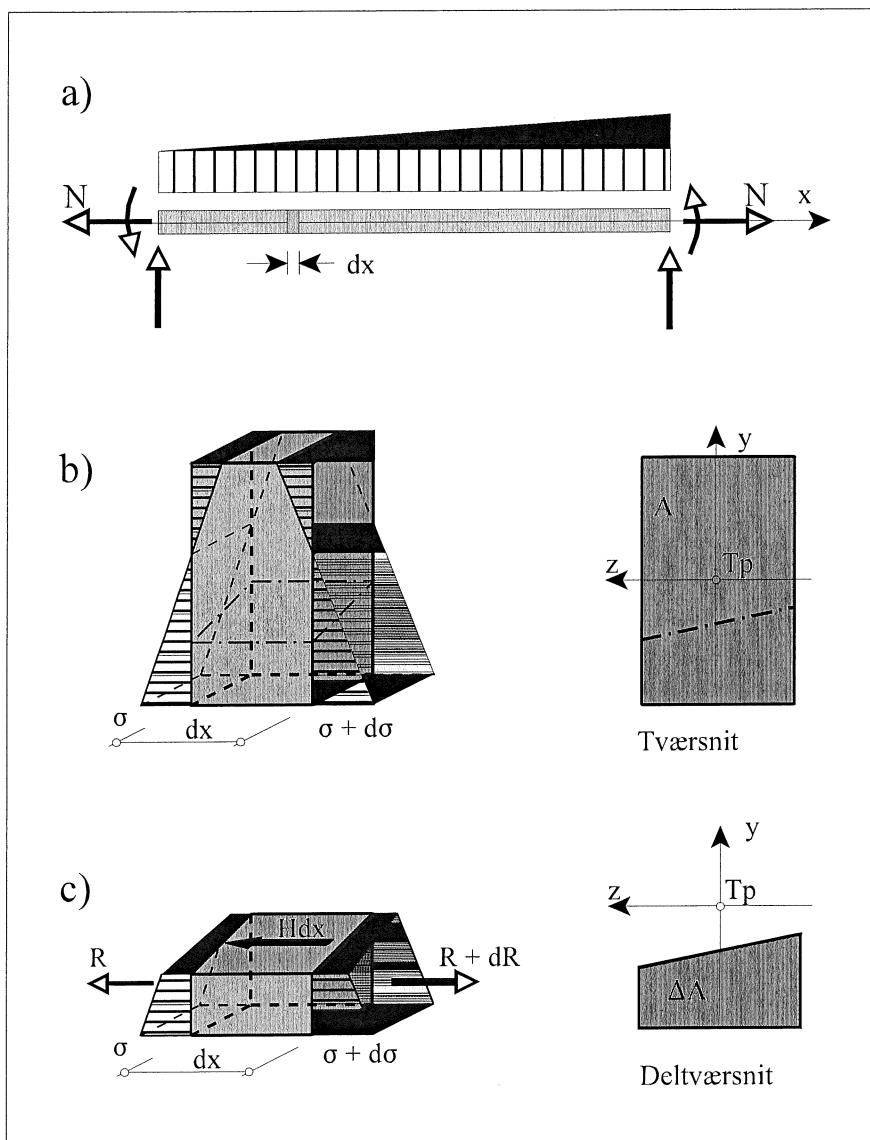
Da lamellerne får samme nedbøjning, må det være rimeligt at antage, at de hver bærer en tredjedel af belastningen. Man kunne derfor

## 6.1 Grashofs formel

Figur 6.3a viser et tværbelastet bjælkeelement. Ud over tværbelastningen kan bjælkeelementet i enderne være påvirket af aksialt virkende krafter (N). Snitkræfterne i bjælken forudsættes således at bestå af en konstant normalkraft (N) samt bøjende momenter (M) og forskydningskræfter (V). Moment og forskydningskraft vil i modsætning til normalkraften sædvanligvis være funktioner af aksekoordinaten x.

Bjælkeelementet forudsættes at have konstant tværsnit. (På figuren er bjælketværsnittet af praktiske grunde vist som værende rektangulært, men de efterfølgende betragtninger er uafhængige af tværsnittets form.)

I første omgang betragter vi et infinitesimalt udsnit af bjælken beliggende mellem to tværsnit med den indbyrdes afstand dx. Figur 6.3b viser det pågældende udsnit samt de normalspændinger, der virker på de afgrænsende tværsnit.



**Figur 6.3 Ligevægt af bjælkeudsnit**

Vi forestiller os nu det betragtede udsnit delt i to dele ved et snit, der er parallel med bjælkeaksen. Dette snit er vist med stiplede linjer på figur 6.3b. Herefter betragtes ligevægten af den del af bjælken, der ligger under dette snit.

Figur 6.3c viser den betragtede bjælkedel samt de normalspændinger, der virker på dens endeflader. Resultanten af normalspændingerne på den venstre endeflade benævnes  $R$ , medens resultanten på den højre endeflade benævnes  $R + dR$ , idet spændingernes størrelse i almindelighed ændrer sig fra snit til snit.

For at kunne opretholde den vandrette ligevægt indses det, at det øverste bjælkestykke må påvirke det nederste med en vandret kraft, idet bjælkens fri overflade er ubelastet i vandret retning. Benævnes kraften per længdeenhed af snittet for  $H$ , vil der i et snit med længden  $dx$  overføres en kraft af størrelsen  $Hdx$ . Kravet om vandret ligevægt giver således:

$$(R + dR) - R - Hdx = 0 \quad \Rightarrow \quad H = \frac{dR}{dx}$$

$R$  er som sagt et udtryk for resultanten af de normalspændinger ( $\sigma$ ), der virker på den venstre endeflade af det betragtede bjælkestykke. Kaldes arealet af endefladen for  $\Delta A$ , kan  $R$  udtrykkes på formen:

$$R = \int_{\Delta A} \sigma dA$$

På figur 6.3 er normalspændingsfordelingen vist som værende lineært varierende svarende til forholdene i en bjælke af lineærelastisk materiale. Indtil nu har vi dog ikke gjort brug af nogen forudsætninger om bjælkematerialets beskaffenhed, så de ovenstående udtryk gælder altså uanset hvilket bjælkemateriale, der anvendes. Til gengæld er udtrykkene ikke umiddelbart anvendelige for praktiske beregninger.

En praktisk anvendelig formel for  $H$  kan imidlertid opnås, hvis vi forudsætter, at bjælkematerialet er lineærelastisk således, at vi kan bestemme normalspændingerne ( $\sigma$ ) ved brug af *Naviers formel*:

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M}{I} y$$

Det erindres, at  $A$  er bjælkens tværsnitsareal,  $I$  er tværsnittets inertimoment om en vandret akse gennem tværsnittets tyngdepunkt (z-aksen), og  $y$  er den lodrette afstand fra tyngdepunktet til det punkt, hvor spændingen ønskes bestemt.

Anvendes Naviers formel på udtrykket for  $R$  fås:

$$R = \int_{\Delta A} \left( \frac{N}{A} - \frac{M}{I} y \right) dA = \frac{N}{A} \int_{\Delta A} dA - \frac{M}{I} \int_{\Delta A} y dA = \frac{N}{A} \Delta A - \frac{M}{I} \Delta S ,$$

idet integralet af  $dA$  over delarealet  $\Delta A$  må være delarealet selv, medens integralet af  $y dA$  over delarealet ses at være det statiske moment af delarealet med hensyn til en vandret akse gennem det samlede tværsnits tyngdepunkt. Denne størrelse er benævnt  $\Delta S$ .

Indsættes dette udtryk i det tidligere udledte udtryk for  $H$  fås, idet det er forudsat, at  $A$ ,  $\Delta A$ ,  $I$ , og  $\Delta S$  er uafhængige af  $x$ :

$$H = \frac{dR}{dx} = \frac{\Delta A}{A} \frac{dN}{dx} - \frac{\Delta S}{I} \frac{dM}{dx}$$

Da det endvidere er forudsat, at normalkraften  $N$  er konstant (dvs.  $dN/dx = 0$ ), fås:

$$H = - \frac{\Delta S}{I} \frac{dM}{dx} = - \frac{\Delta S}{I} V , \text{ da } \frac{dM}{dx} = V$$

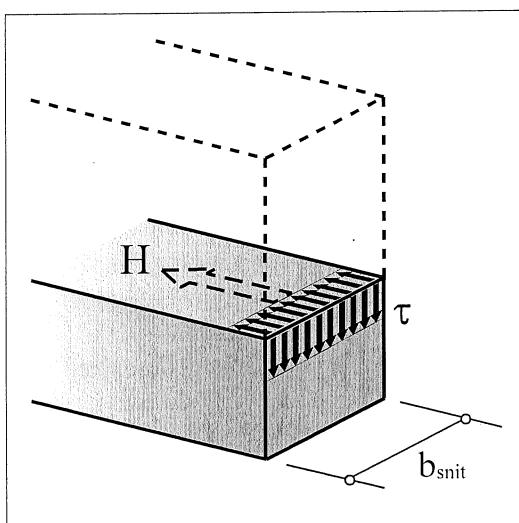
Almindeligvis foretrækker man at regne den forskydende kraft  $H$  numerisk, da et evt. fortegn er ligegyldigt for anvendelserne. Herefter kan *Grashofs formel* udtrykkes på formen:

$$H = \left| \frac{\Delta S}{I} V \right|$$

Det skal understreges, at ud over de forudsætninger, der er nævnt i nærværende afsnit, fordrer anvendelsen af *Grashofs formel* tillige, at forudsætningerne for *Naviers formel* er til stede, idet denne formel er blevet anvendt ved udledelsen.

## 6.2 Forskydningsspændinger

Som tidligere nævnt må vi betragte den forskydende kraft pr længdeenhed ( $H$ ) som resultanten af et sæt langsgående forskydningsspændinger. Ved hjælp af *Grashofs formel* er vi således i stand til at bestemme forskydningsspændingernes resultant, men ikke selve forskydningsspændingerne. I visse tilfælde vil det dog være en rimelig tilnærmelse at antage, at forskydningsspændingerne er ensformigt fordelt over bredden af det langsgående snit. Dette gælder f. eks. for vandrette snit i bjælker med rektangulært (eller næsten rektangulært) tværsnit (se figur 6.4) samt for tyndfligede tværsnit, såfremt de langsgående snit er vinkelrette på fligene.



**Figur 6.4** Forskydningsspændinger

Kaldes bredden af det langsgående snit for  $b_{snit}$ , fås således følgende udtryk for forskydningsspændingen  $\tau$ :

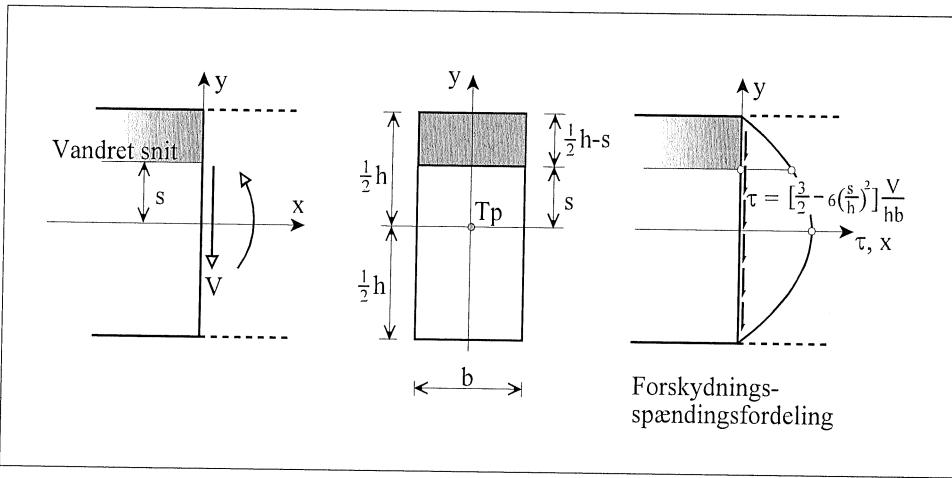
$$\tau \cong \frac{H}{b_{snit}}$$

Fra teorien om spændinger i kontinuerte legermer (se appendix A) vides det, at forskydningsspændingerne i to på hinanden vinkelrette snit gennem samme punkt er numerisk lige store og enten peger ind imod den fælles snitkant, eller bort fra denne. Dette betyder, at vi, når vi har bestemt størrelsen af forskydningsspændingerne i et vandret snit, samtidig har bestemt størrelsen af forskydningsspændingerne i det tilsvarende lodrette snit som vist på figur 6.4.

*Grashofs formel* giver os dermed mulighed for at beregne forskydningsspændingsfordelingen over bjælketværsnittet i bjælker af den ovenfor omtalte type. Fremgangsmåden ved disse beregninger vil i det følgende blive demonstreret dels for rektangulære tværsnit, og dels for tyndfligede tværsnit.

### Rektangulære tværsnit

Vi betragter en lineær elastisk bjælke med rektangulært tværsnit. I et bestemt tværsnit er fundet en forskydningskraft af størrelsen  $V$ . For at bestemme forskyningsspændingerne størrelse i den lodrette afstand  $s$  fra tværsnittets tyngdepunkt, lægges et vandret snit i bjælken som vist på figur 6.5.



**Figur 6.5** Forskyningsspændingsfordeling i rektangulært tværsnit

Det statiske moment af det ved snittet fremkomne delareal bliver:

$$\Delta S = b\left(\frac{h}{2} - s\right)\left(s + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - s\right)\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h}{2} - s\right)\left(\frac{h}{2} + s\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - s^2\right)$$

Herefter fås ved indsættelse i Grashofs formel:

$$H = \frac{\Delta S}{I} V = \frac{\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - s^2\right)}{\frac{1}{12}bh^3} V = 6\left(\frac{1}{4} - \frac{s^2}{h^2}\right) \frac{V}{h}$$

Størrelsen af de forskydende spændinger i den lodrette afstand  $s$  fra tyngdepunktet fås herefter ved division med snitbredden:

$$\tau = \frac{H}{b} = 6\left(\frac{1}{4} - \frac{s^2}{h^2}\right) \frac{V}{bh} = \left(\frac{3}{2} - 6\frac{s^2}{h^2}\right) \frac{V}{bh} \quad ; \quad \text{Max } \tau = \frac{3}{2} \frac{V}{bh} \text{ (for } s=0\text{)}$$

Det ses at, forskyningsspændingerne fordeler sig "parabelformet" over tværsnitshøjden som vist på figur 6.5. Som ventet er forskyningsspændingerne nul ved tværsnittets over- og underside, medens de maksimale spændinger findes i niveau med tværsnittets tyngdepunkt.

Bemærk, at den maksimale forskyningsspænding er halvanden gang så stor som den spænding, man ville få ved at fordele  $V$  ensformigt over tværsnitsarealet.

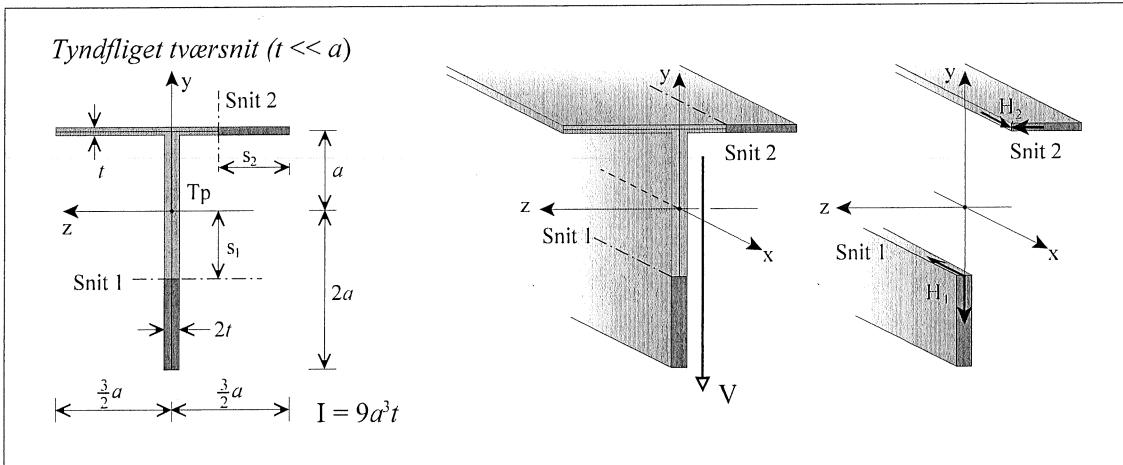
Som kontrol af beregningerne kan vi benytte os af, at det kraftsystem, der består af forskyningsspændingerne i tværsnittet, skal være statisk ækvivalent med forskydningskraften  $V$ :

$$\begin{aligned} \text{Resultant af } \tau : \quad \int_A \tau dA &= 2 \int_0^{\frac{h}{2}} H ds = 2 \int_0^{\frac{h}{2}} 6\left(\frac{1}{4} - \frac{s^2}{h^2}\right) ds \frac{V}{h} = 12 \frac{V}{h} \left[ \frac{1}{4}s - \frac{1}{3}\frac{s^3}{h^2} \right]_0^{\frac{h}{2}} \\ &= 12 \frac{V}{h} \left[ \frac{1}{8}h - \frac{1}{24}h \right] = V \quad \text{OK!} \end{aligned}$$

### Tyndfligede tværsnit

Som eksempel betragtes en elastisk bjælke med et tyndfliget T-tværsnit. Figur 6.6 viser tværsnittets geometri samt placeringen af tværsnittets tyngdepunkt. Endvidere er tværsnittets inertimoment om z-aksen angivet. (Det overlades til læseren at verificere tyngdepunktets placering samt udtrykket for inertimomentet.)

Tværsnittet tænkes påvirket til forskydning af en nedadrettet forskydningskraft af størrelsen V.



**Figur 6.6**

For at bestemme fordelingen af de forskydende kræfter ( $H_1$ ) i tværsnitskroppen lægges et vandret snit (snit 1) i afstanden  $s_1$  fra tværsnittets tyngdepunkt som vist på figur 6.6. Det statiske moment af det ved snittet fremkomne delareal bliver:

$$\Delta S_1 = 2t(2a - s_1)(s_1 + 0.5(2a - s_1)) = t(4a^2 - s_1^2)$$

Herefter fås ved indsættelse i *Grashofs formel*:

$$H_1 = \frac{\Delta S_1}{I} V = \frac{t(4a^2 - s_1^2)}{9ta^3} V = \frac{1}{9}(4 - \frac{s_1^2}{a^2}) \frac{V}{a} ; \quad \max H_1 = \frac{4}{9} \frac{V}{a} \quad (\text{for } s_1 = 0)$$

Det ses at,  $H_1$  varierer parabolsk samt, at den maksimale værdi af  $H_1$  som forventet findes ved tværsnittets tyngdepunkt.

For at bestemme fordelingen af de forskydende kræfter ( $H_2$ ) i tværsnittets flange lægges et lodret snit (snit 2) i afstanden  $s_2$  fra flangens kant. Det statiske moment med hensyn til z-aksen af det ved snittet fremkomne delareal bliver:  $\Delta S_2 = ts_2 a$

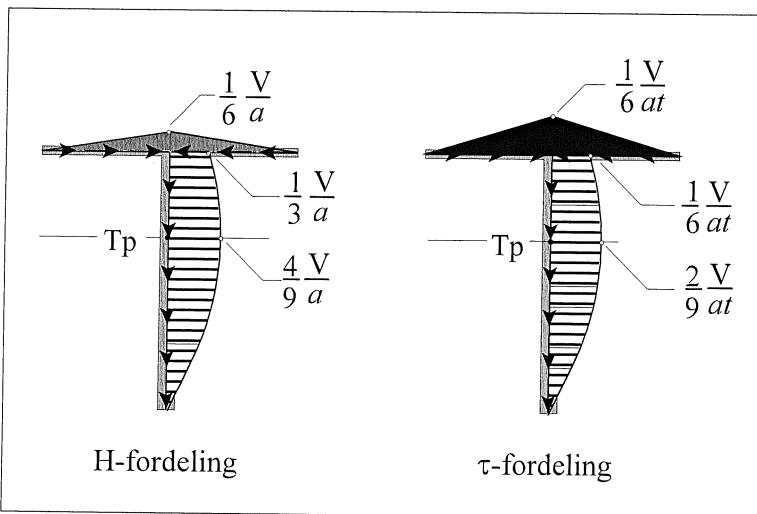
$$\text{Herefter fås ved indsættelse i Grashofs formel: } H_2 = \frac{\Delta S_2}{I} V = \frac{ts_2 a}{9a^3 t} V = \frac{1}{9} \frac{s_2}{a} \frac{V}{a}$$

Det ses, at  $H_2$  varierer lineært. Dette hænger sammen med, at det for vandrette flige gælder, at den arm, der benyttes ved beregningen af det statiske moment  $\Delta S$ , er uafhængig af snittets beliggenhed, medens dette ikke er tilfældet for lodrette eller skrå flige.

Heftet kan vi formulere følgende generelle regel vedrørende variationen af de forskydende kræfter i et tyndfliget tværsnit:

*Variationen af de forskydende kræfter er parabolsk, i lodrette eller skrål flige, medens den er lineær i vandrette flige. Den maksimale værdi af H findes i niveau med tyngdepunktet.*

Bemærk, at da snit 2 er lodret, er de tilhørende forskydende kræfter vandrette som vist på figur 6.6. (Der vil i princippet også være lodrette forskydningsspændinger i flangen, som ville kunne findes ved at lægge et vandret snit i denne, men da der er tale om et tyndfliget tværsnit, vil størrelsen af disse være negligeligt.)



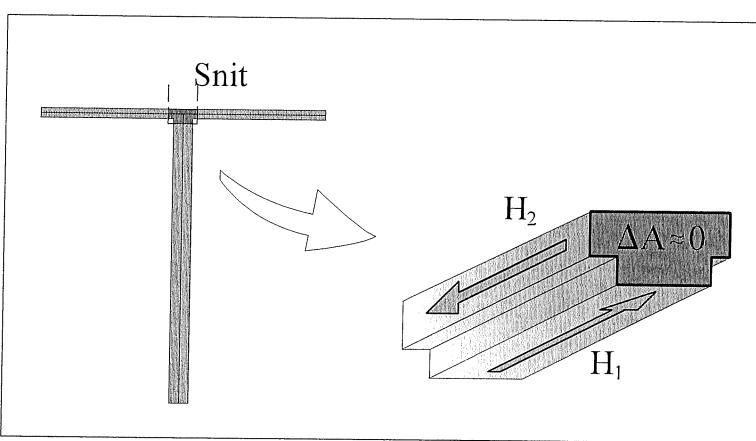
**Figur 6.7** Retning og fordeling af  $H$  og  $\tau$

Når de forskydende kræfter ( $H$ ) er bestemt, kan de tilsvarende forskydningsspændinger ( $\tau$ ) bestemmes ved division med de respektive fligtykkelser. Figur 6.7 viser  $H$ -fordelingen og  $\tau$ -fordelingen over tværsnittet.

Da vi i Grashofs formel har valgt at regne numerisk, giver beregningerne ingen oplysning om retningen af de forskydende kræfter. Imidlertid skal det kraftsystem, der udgøres af forskydningsspændingerne (eller  $H$ -kræf-

terne), være statisk ækvivalent med forskydningskraften  $V$ . Det er derfor umiddelbart indlysende, at forskydningsspændingerne i kroppen må have samme retning som  $V$ , hvilket i det foreliggende eksempel vil sige nedad.

Retningen af forskydningsspændingerne i de vandrette flige (flangen) kan bestemmes ved at betragte ligevægten af en bjælkedel bestående af samlingen mellem krop og flange som vist på figur 6.8.



**Figur 6.8** Ligevægt af knudepunkt

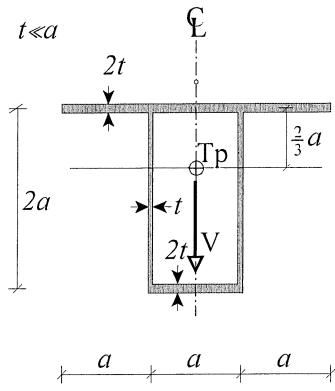
Da tværsnittet regnes tyndflet kan delarealet  $\Delta A$  principielt gøres vilkårligt lille. Dette betyder, at resultanten af de normalspændinger, der virker på delarealet kan sættes lig med nul. Betragtes den vandrette ligevægt af bjælkedelen indses det derfor, at  $H$ -kræfterne må være i ligevægt indbyrdes. Dette betyder, at  $H$ -kræfterne i de vandrette flige må være modsatrettede  $H$ -kraften i kroppen som vist på figuren. Desuden må summen af  $H$ -kræfterne i de vandrette

flige være lig med  $H$ -kraften i kroppen. (Betragtes  $H$ -fordelingen på figur 6.7, ses dette at være opfyldt.) Ovenstående betragtninger kan lidt populært sammenfattes i følgende “kontinuitetsregel”:

*De  $H$ -kræfter, der “løber til” en samling, skal være lig med de  $H$ -kræfter, der “løber fra” samlingen.*

Heraf fremgår det, at  $H$ -kræfterne (og dermed forskydningsspændingerne) i de vandrette flige i det foreliggende eksempel er rettet ind mod midten af tværsnittet.

På basis af de ovenfor fremhævede regler indses det, at det i almindelighed ikke vil være nødvendigt at gennemføre en beregning med “variable snit”. Det vil være tilstrækkeligt at benytte Grashofs formel på udvalgte snit, og derefter anvende kendskabet til de forskydende kræfters variation sammen med “kontinuitetsreglen” til at optegne fordelingen af de forskydende kræfter. I det foreliggende eksempel vil det således være tilstrækkeligt at beregne de forskydende kræfter i tværsnittets tyngdepunkt samt i kroppen umiddelbart under flangen. De forskydende kræfter i de vandrette flige samt deres retninger kan herefter bestemmes vha. “kontinuitetsreglen”

**Eksempel 6.1** Grashofs formel anvendt på et lukket tyndfliget tværsnit


Hosstående figur viser tværnippetet af en lineær-elastisk bjælke. Tværnippet har inertimomentet  $I = 8ta^3$  omkring en vandret akse gennem tværnippets tyngdepunkt. (Det overlades til læseren at kontrollere tyngdepunktets beliggenhed og inertimomentets størrelse.)

Vi ønsker at bestemme fordelingen af forskydende kræfter ( $H$ ) og forskydningsspændinger ( $\tau$ ) over tværnippet ved hjælp af formlerne:

$$H = \frac{\Delta S}{I} V \quad (\text{Grashofs formel})$$

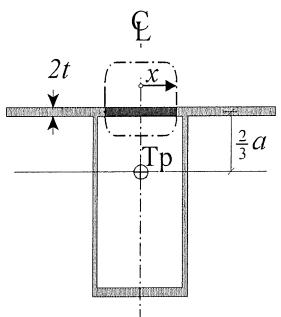
$$\tau = \frac{H}{b_{\text{snit}}} \quad (\text{Tilnærmelsesformel})$$

Indledningsvis indses det, at et lukket tværnud indebærer det problem, at det ikke er muligt at isolere et deltværn uden, at der opstår 2 snit. Da Grashofs formel giver den *samlede* forskydende kraft, som deltværnippet påvirkes af, vil formlen således give summen af de forskydende kræfter i de to snit.

Imidlertid kan tværnippes symmetri anvendes til at bestemme  $H$  idet enkelte snit, idet man i to symmetriske snit må have samme værdi for  $H$ . Isoleres således et symmetrisk deltværn i overflangen, som vist på hosstående figur, fås ifølge Grashofs formel:

$$\Delta S = 2x \cdot 2t \cdot \frac{2}{3}a = \frac{8}{3}atx$$

$$2H = \frac{\Delta S}{I} V = \frac{1}{3} \frac{V}{a^2} x \Rightarrow H = \frac{1}{6} \frac{V}{a^2} x$$



Det ses, at for  $x = 0$  bliver  $H = 0$ . Da man vil opnå dette resultat for alle deltværn af den viste type, kan vi konkludere følgende:

*Den forskydende kraft i snit, der er beliggende i symmetrilinjen er nul.*

Bemærk at denne regel ikke har relevans, hvis tværnippet er udformet med en lodret krop i symmetrilinjen.

(Ovenstående konklusion kan selvfølgelig også opnås ved en simpel symmetribetrægtnings, idet den forskydende kraft, der virker på det materiale, der ligger på den ene side af et snit, er lig med og modsatrettet den, der virker på det materiale, der ligger på den anden side af snittet. I symmetrisnit må disse to kræfter imidlertid være lige store og ensrettede på grund af symmetrien. Dette kan kun opfyldes, hvis kræfterne er lig med nul.)

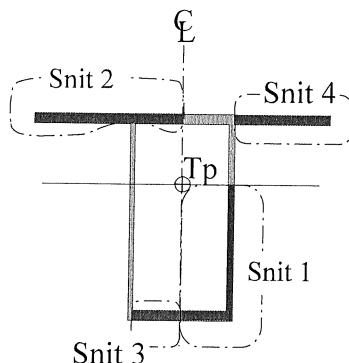
*Fortsættes*

For deltværsnit, der medfører to snit, vil det således være hensigtsmæssigt at placere det ene af disse i symmetrilinjen, idet Grashofs formel så direkte vil give værdien af  $H$  i det andet snit. For det aktuelle tværsnits vedkommende vil det være tilstrækkeligt at indlægge de 4 snit, der er vist på nedenstående figur.

### *Snit 1:*

$$\Delta S_1 = \frac{1}{2}a \cdot 2t \cdot \frac{4}{3}a + \frac{4}{3}a \cdot t \cdot \frac{2}{3}a = \frac{20}{9}a^2t$$

$$H_1 = \frac{20a^2t}{9 \cdot 8a^3t} V = \frac{20}{72} \frac{V}{a} ; \quad \tau_1 = \frac{H_1}{t} = \frac{20}{72} \frac{V}{at}$$



### *Snit 2:*

$$\Delta S_2 = \frac{3}{2}a \cdot 2t \cdot \frac{2}{3}a = 2a^2t$$

$$H_2 = \frac{2a^2t}{8a^3t} V = \frac{1}{4} \frac{V}{a} = \frac{18}{72} \frac{V}{a} ; \quad \tau_2 = \frac{H_2}{t} = \frac{18}{72} \frac{V}{at}$$

### *Snit 3:*

$$\Delta S_3 = \frac{1}{2}a \cdot 2t \cdot \frac{4}{3}a = \frac{4}{3}a^2t$$

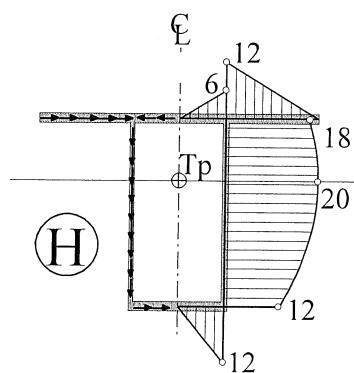
$$H_3 = \frac{4a^2t}{3 \cdot 8a^3t} V = \frac{1}{6} \frac{V}{a} = \frac{12}{72} \frac{V}{a} ; \quad \tau_3 = \frac{H_3}{t} = \frac{6}{72} \frac{V}{at}$$

### *Snit 4:*

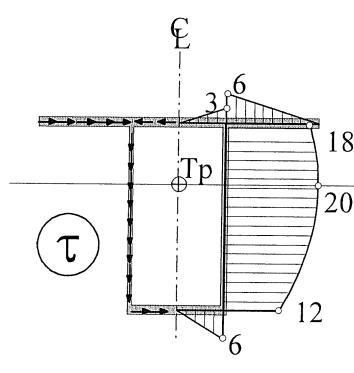
$$\Delta S_4 = a \cdot 2t \cdot \frac{2}{3}a = \frac{4}{3}a^2t$$

$$H_4 = \frac{4a^2t}{3 \cdot 8a^3t} V = \frac{1}{6} \frac{V}{a} = \frac{12}{72} \frac{V}{a} ; \quad \tau_4 = \frac{H_4}{t} = \frac{6}{72} \frac{V}{at}$$

Herefter kan kendskabet til de forskydende kræfters variation i henholdsvis vandrette og lodrette flige samt "kontinuitetsreglen" anvendes til at skitserne fordelingen og retningen af henholdsvis  $H$  og  $\tau$ .



Faktor:  $\frac{1}{72} \frac{V}{a}$



Faktor:  $\frac{1}{72} \frac{V}{at}$

### 6.3 Forskydningsdeformationer

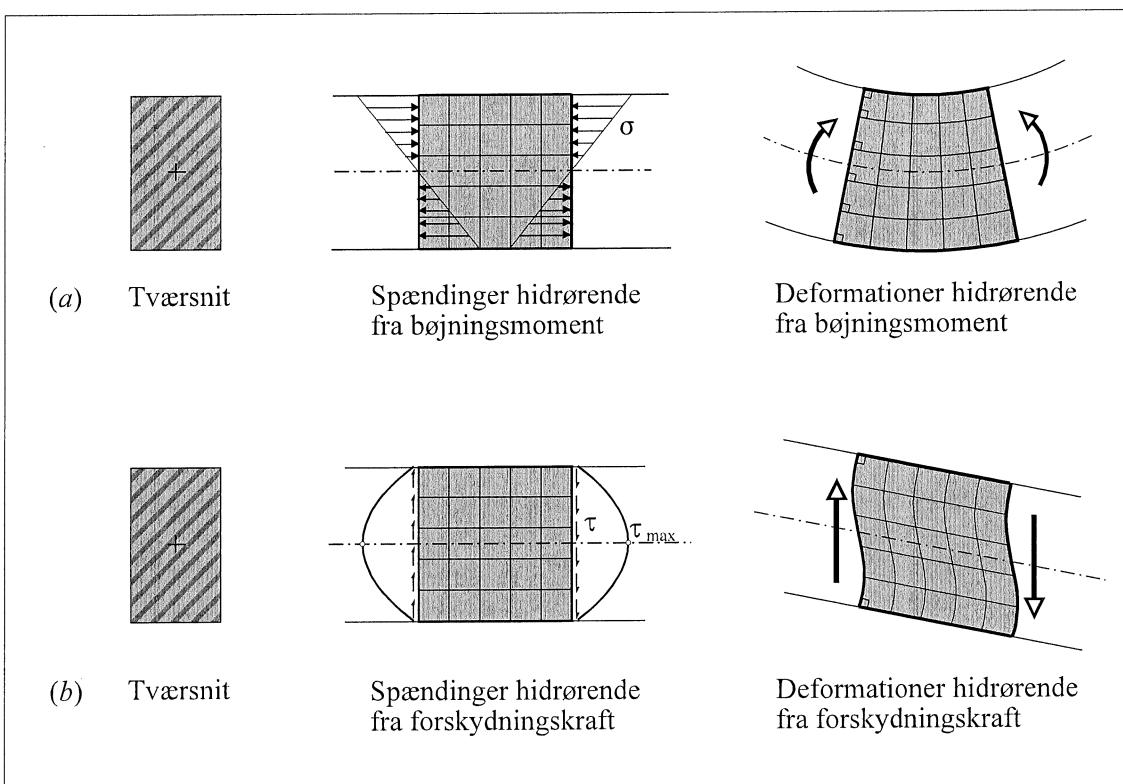
I almindelighed er en bøjningspåvirket bjælke tillige påvirket til forskydning. Kun hvis bøjningsmomentet ( $M$ ) i bjælken er konstant, er forskydningskraften ( $V$ ) identisk lig med 0.

Imidlertid er den bøjningsteori, vi hidtil har beskæftiget os med (Bernouillis bøjningsteori), baseret på den antagelse, at man med rimelig nøjagtighed kan forudsætte, at plane tværsnit forbliver plane og vinkelrette på bjælkeaksen. Denne antagelse var netop inspireret af deformationstilstanden i et bjælkeelement påvirket til bøjning med et konstant bøjningsmoment.

Figur 6.9a viser et udsnit af en lineærelastisk bjælke med rektangulært tværsnit samt de normalspændinger og deformationer den omtalte antagelse indebærer. Bemærk, at de rette vinkler i det viste netværk bibeholdes. Dette er ensbetydende med, at deformationer fra forskydningsspændinger ikke kan rummes i teorien, idet de tilsvarende tøjninger netop indebærer vinkelændringer. (Se appendix A figur 12.)

For at få et billede af, hvad vi "går glip af" betragtes figur 6.9b, der viser de deformationer forskydningspændingerne ville medføre, hvis de kunne virke alene. Da forskydningspændingerne antager deres maximumsværdi i niveau med tyngdepunktet finder vi de maksimale vinkelændringer her, medens vinkelændringerne er nul i toppen og bunden af tværsnittet, hvor forskydningspændingerne er nul. Det ses, at såvel vinkelændringerne som den "s-formede" deformation er i modstrid med antagelsen om, at plane tværsnit forbliver plane og vinkelrette på bjælkeaksen.

Det skal bemærkes, at forskydningersnes bidrag til den samlede deformation i almindelighed er meget lille, hvorfor deformationsfigurene på figur 6.9 ikke må opfattes som et udtryk for det indbyrdes størrelsесforhold mellem bøjnings- og forskydningsdeformationerne.



**Figur 6.9 Bøjnings- og forskydningsdeformationer**

Da forskydningsdeformationerne som nævnt er relativt små, er vi interesserede i at opstille en teori, der på den simplest mulige måde tager hensyn til disse deformationer. En sådan teori kan man opnå ved at se bort fra den s-formede deformation af tværsnittene således, at deformationerne fra forskydning bliver som illustreret yderst til venstre i figur 6.10.

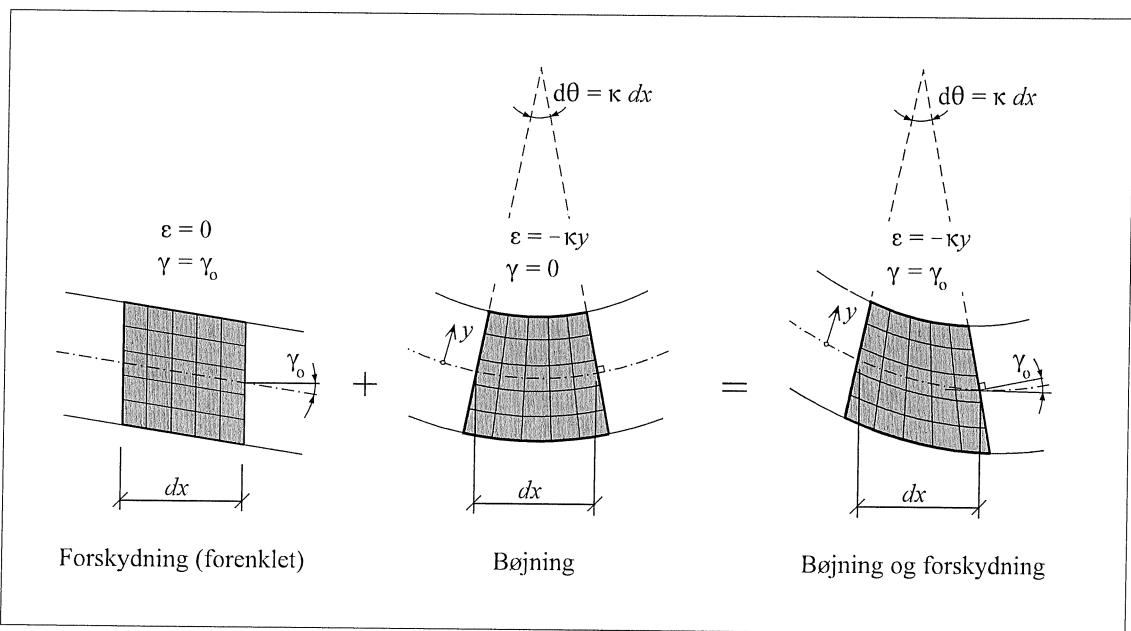
Bemærk at forskydningsøjningen  $\gamma$  nu er konstant (uafhængig af  $y$ ) i det enkelte tværsnit. Dette indebærer, at forskydningspændingerne må regnes ensformigt fordelt over tværsnittet.

Da vi som sædvanlig vil forudsætte "små tøjninger" giver defoemationsmodellen ikke anledning til længdetøjninger.

Vi kan nu opfatte deformationsmodellen for bøjning med forskydning som en superposition af den forenklede forskydningsmodel og den sædvanlige bøjningsmodel som illustreret på figur 6.10

Det ses, at denne model indebærer, at vi kan fastholde antagelsen om at plane tværsnit forbliver plane, men må acceptere, at tværsnittene efter deformationen ikke længere står vinkelret på bjælkeaksen.

Det, at tværsnittene forbliver plane, medfører, at vi stadig har en lineær fordeling af længdetøjningerne udtrykt ved:  $\epsilon = -\kappa y$ , men da tværsnittene ikke forbliver vinkelrette på bjælkeaksen er  $\kappa$  ikke længere et udtryk for bjælkeaksens krumning.

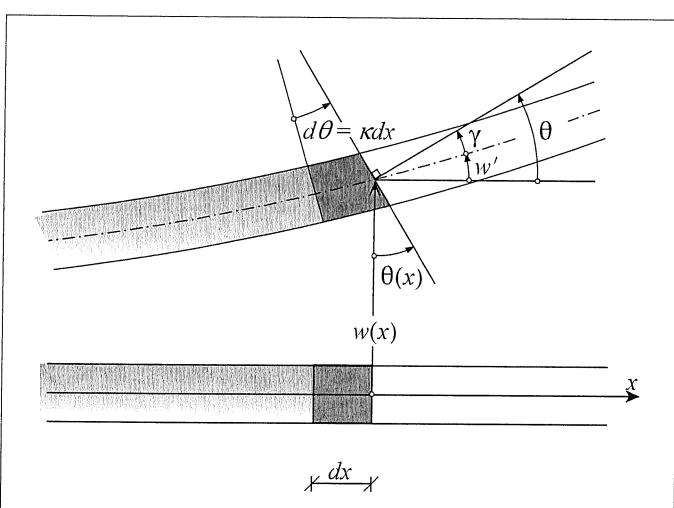


**Figur 6.10** Forenklet model for bøjning med forskydning

Efter disse indledende overvejelser kan vi nu opstille en beregningsmodel for bjælker utsat for både bøjnings- og forskydningsdeformationer. Modellen kaldes ofte *Timoshenkos bjælkemodell*.

### Geometriske forhold

Som i den tidligere bjælkemodell beskriver vi den lodrette flytningen af bjælkeaksen ved funktionen  $w = w(x)$ , men da tværsnittene ikke længere er vinkelrette på bjælkeaksen er vi nødsaget til at indføre endnu en flytningsfunktion  $\theta = \theta(x)$ . Denne funktion beskriver bjælketværsnittenes vinkel med lodret (eller tværsnitsnormalens vinkel med vandret), som illustreret på figur 6.11



Af figur 6.11 fremgår det endvidere, at de deformationsstørrelser (generaliserede tøjninger), der er relevante for modellen, er knyttet til flytningsfunktionerne ved følgende udtryk:

$$\kappa = \frac{d\theta}{dx} ; \quad \gamma = \theta - \frac{dw}{dx}$$

Bemærk at vi for Bernouillis bjælkemodell har, at  $\theta = w$  således, at ovenstående udtryk giver det velkendte udtryk for krumningen:  $\kappa = w''$ , medens forskydningstøjningen  $\gamma$  bliver lig med 0.

**Figur 6.11** Geometriske betingelser

### Statiske forhold

Det, at vi har ændret på den anvendte deformationsmodel ændrer naturligvis ikke ligevægtsligningerne, så forudsat disse baseres på den udeformerede bjælkes geometri, har vi stadig nedenstående statiske feltbetingelser:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dV}{dx} = p \\ \frac{dM}{dx} = V \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{d^2M}{dx^2} = p$$

### Fysiske forhold

*Idet vi forudsætter, at bjælkematerialet er lineær elastisk* haves følgende relationer mellem de relevante spændinger og tøjninger:  $\sigma = E\varepsilon$  og  $\tau = G\gamma$ , hvor  $E$  er materialets elasticitetskoefficient og  $G$  er det tilsvarende forskydningsmodul. (Se Appendix A).

Da vi også i den aktuelle bjælkemodel har en lineær tøjningsfordeling ( $\varepsilon = -\kappa y$ ), må det stadig gælde, at  $M = EI\kappa$ , hvor  $EI$  er bjælkens bøjningsstivhed.

Endvidere har vi antaget, at vi med tilstrækkelig nøjagtighed kan regne med en konstant forskydningstøjning i det enkelte tværsnit. Dette må som tidligere nævnt medføre, at også forskydningsspændingerne bliver konstante. Da forskydningskraften  $V$  er resultanten af forskydningsspændingerne  $\tau$  må vi derfor forvente følgende sammenhæng mellem  $V$  og  $\tau$ :  $V = A\tau$ , hvor  $A$  er bjælkens tværsnitsareal. Indsættes  $\tau = G\gamma$ , fås således:  $V = GA\gamma$ , hvor  $GA$  åbenbart er et udtryk for bjælkens forskydningsstivhed.

Imidlertid er det jo en tilnærmelse at betragte  $\gamma$  som en konstant. Denne tilnærmelse kom i stand ved at vi indførte den geometriske restriktion, at plane snit forbliver plane. En sådan restriktion medfører at modellen bliver mindre fleksibel end den burde være. Vi kommer med andre ord til at overvurdere modellens stivhed.

I praksis indfører man derfor en korrektionsfaktor  $c_k$ , således at forskydningsstivheden udtrykkes ved  $c_k GA$  eller  $GA_k$ , hvor  $A_k = c_k A$  kaldes forskydningsarealet eller *kroparealet*. Sidstnævnte betegnelse skyldes, at kroparealet for et I-profil tilnærmelsesvis er lig med arealet af profilets krop. For et rektangulært tværsnit anvendes sædvanligvis korrektionsfaktoren  $c_k = 5/6$ .

( $c_k$  beregnes gerne ud fra et krav om, at den energi, der skal anvendes for at etablere deformationen vist i figur 6.9a, skal være den samme som den, der skal bruges for at fremkalde den forenklede forskydningsdeformation vist i figur 6.10).

De fysiske betingelser for Timoshenkos bjælkemodel kan nu udtrykkes således:

$$\kappa = \frac{M}{EI} \quad ; \quad \gamma = \frac{V}{GA_k}$$

### Grundligninger

Kombineres de geometriske, statiske og fysiske betingelser fås følgende differentialligninger til bestemmelse af flytningsfunktionerne  $\theta(x)$  og  $w(x)$ .

$$M'' = p \quad ; \quad \theta' = \frac{M}{EI} \quad ; \quad w' = \theta - \frac{M'}{GA_k}$$

Forudsættes, at bøjningsstivheden  $EI$  og forskydningsstivheden  $GA_k$  er konstante og indfører vi funktionen  $f_p(x)$  som en vilkårlig løsning (partikulært integral) til ligningen  $f'''(x) = p(x)$ , kan den fuldstændige løsningen til disse differentialligninger bestemmes som vist nedenfor.

$$M'' = p \quad \Rightarrow \quad M = f_p'' + C_1 x + C_2$$

$$\theta' = \frac{M}{EI} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{1}{EI} (f_p' + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3)$$

$$w' = \theta - \frac{M'}{GA_k} = \frac{1}{EI} (f_p' + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3) - \frac{1}{GA_k} (f_p''' + C_1)$$

Indføres den dimensionsløse konstant  $\beta = \frac{EI}{GA_k l^2}$  fås :

$$w' = \frac{1}{EI} (f_p' - \beta l^2 f_p''' + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3 - \beta l^2 C_1) \Rightarrow$$

$$w = \frac{1}{EI} (f_p - \beta l^2 f_p'' + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + (C_3 - \beta l^2 C_1)x + C_4)$$

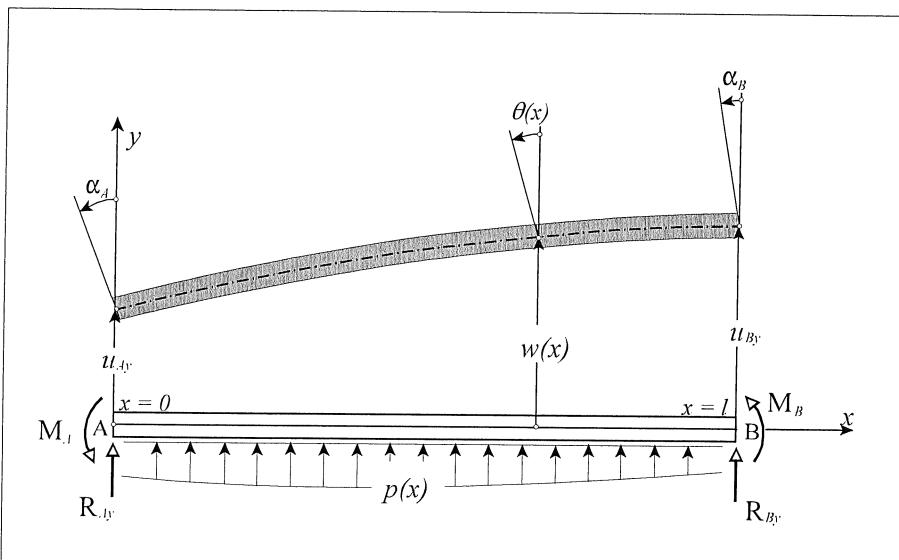
Det ses, at de tre ligninger tilsammen introducerer 4 integrationskonstanter, der efterfølgende skal bestemmes ved hjælp af de aktuelle randbetingelser.

Med henvisning til figur 6.12 bliver de mulige randbetingelser:

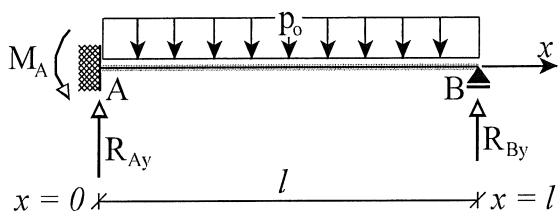
Geom. randbet.	Statiske randbet.
$w(0) = u_{Ay}$	eller $V(0) = M'(0) = R_{Ay} \Rightarrow EI\theta''(0) = R_{Ay}$
$\theta(0) = \alpha_A$	eller $M(0) = -M_A \Rightarrow EI\theta'(0) = -M_A$
$w(l) = u_{By}$	eller $V(l) = M'(l) = -R_{By} \Rightarrow EI\theta''(l) = -R_{By}$
$\theta(l) = \alpha_B$	eller $M(l) = M_B \Rightarrow EI\theta'(l) = M_B$

Bemærk, at de geometriske randbetingelser, der vedrører vinkeldrejningen i bjælkeenderne nu ikke længere relateres til hældningen af udbøjningsfunktionen  $w$ . Ved en fast indspænding af en vandret bjælke vil udbøjningslinjen eksempelvis ikke være bundet til at have vandret tangent.

Som for Bernoullis bjælketeori vil der altid være netop 2 randbetingelser i hver ende af bjælkelementet. Er  $u_{Ay}$  for eksempel kendt vil den tilsvarende reaktion  $R_{Ay}$  være ukendt - og omvendt. Der er altså kun mulighed for en betingelse i hver linje i skemaet ovenfor.



**Figur 6.12 Flytninger**

**Eksempel 6.2 Anvendelse af Timoshenkos bjælkemodel**


Vi betragter en vandret lineærelastisk bjælke, der er indspændt i venstre ende og understøttet af et simpelt bevægeligt leje i højre.

Bjælken er belastet med en lodret nedadrettet ensformigt fordelt last med intensiteten  $p_0$  som vist på hosstående figur.

Vi søger analytiske udtryk for flytningsfunktionerne  $w(x)$  og  $\theta(x)$  og snitkræfterne  $M(x)$  og  $V(x)$ . Endvidere ønskes reaktionerne  $R_{Ay}$ ,  $R_{By}$  og  $M_A$  bestemt.

I det foregående afsnit bestemte vi den fuldstændige løsning til grundligningerne for Timoshenkos bjælkemodel. I denne løsning indgik en partikulær løsning til differentialligningen

$$\frac{d^4 f}{dx^4} = p, \text{ hvor den fordelte last } p = p(x) \text{ regnes positiv opad.}$$

I det aktuelle tilfælde er  $p$  således lig med konstanten  $-p_0$ . Herefter fås en partikulær løsning  $f_p$  ved simpel integration:

$$f_p''' = -p_0 x; \quad f_p'' = -\frac{1}{2} p_0 x^2; \quad f_p' = -\frac{1}{6} p_0 x^3; \quad f_p = -\frac{1}{24} p_0 x^4$$

- og den fuldstændige løsning til bjælkens grundligninger bliver:

$$M = -\frac{1}{2} p_0 x^2 + C_1 x + C_2 \Rightarrow V = M' = -p_0 x + C_1$$

$$\theta = \frac{1}{EI} \left( -\frac{1}{6} p_0 x^3 + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \right)$$

$$w = \frac{1}{EI} \left( -\frac{1}{24} p_0 x^4 - \beta l^2 \left( -\frac{1}{2} p_0 x^2 \right) + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + (C_3 - \beta l^2 C_1) x + C_4 \right)$$

De aktuelle randbetingelser bruges nu til bestemmelse af integrationskonstanterne  $C_1$  -  $C_4$ . For  $x = 0$  har vi følgende randbetingelser:

$$\theta(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$w(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

for  $x = l$  fås herefter:

$$M(l) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} p_0 l^2 + C_1 l + C_2 = 0$$

$$w(l) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{24} p_0 l^4 + \frac{1}{2} p_0 \beta l^4 + \frac{1}{6} C_1 l^3 + \frac{1}{2} C_2 l^2 - \beta C_1 l^3 = 0$$

Løses disse ligninger med hensyn til  $C_1$  og  $C_2$  fås:

$$C_1 = \frac{5+12\beta}{8+24\beta} p_0 l; \quad C_2 = -\frac{1}{8+24\beta} p_0 l^2$$

De analytiske udtryk for  $M$ ,  $V$  og  $\theta$  bliver således:

$$M = \frac{1}{8} \left( -4 \left( \frac{x}{l} \right)^2 + \frac{5+12\beta}{1+3\beta} \frac{x}{l} - \frac{1}{1+3\beta} \right) p_0 l^2; \quad V = \frac{1}{8} \left( -8 \frac{x}{l} + \frac{5+12\beta}{1+3\beta} \right) p_0 l$$

$$\theta = \frac{1}{16} \left( -\frac{8}{3} \left( \frac{x}{l} \right)^3 + \frac{5+12\beta}{1+3\beta} \left( \frac{x}{l} \right)^2 - \frac{2}{1+3\beta} \frac{x}{l} \right) \frac{p_0 l^3}{EI}$$

*Eksempel fortsat*

- og efter en del mellemregninger bliver det analytiske udtryk for  $w$ :

$$w = \frac{1}{48} \left( -2 \left( \frac{x}{l} \right)^4 + \frac{5+12\beta}{1+3\beta} \left( \frac{x}{l} \right)^3 + \frac{72\beta^2 + 24\beta - 3}{1+3\beta} \left( \frac{x}{l} \right)^2 - \frac{72\beta^2 + 30\beta}{1+3\beta} \frac{x}{l} \right) \frac{p_0 l^4}{EI}$$

Reaktionerne bestemmes nu ved hjælp af randbetingelserne.

$$R_{Ay} = V(0) = \frac{5+12\beta}{8+24\beta} p_0 l ; \quad M_A = -M(0) = \frac{1}{8+24\beta} p_0 l^2$$

$$R_{By} = -V(l) = \left( 1 - \frac{5+12\beta}{8+24\beta} \right) p_0 l = \frac{3+12\beta}{8+24\beta} p_0 l$$

Bemærk, at for  $\beta = 0$  svarende til, at forskydningsstivheden  $GA_k$  er uendelig stor, skal disse udtryk falde sammen med de tilsvarende udtryk baseret på den sædvanlige bjælketeori, hvor der jo ses bort fra forskydningsdeformationer. (Nb! I den sædvanlige bjælketeori er  $\theta = w'$ )  
Indsættes  $\beta = 0$  eksempelvis i udtrykkene for reaktionerne fås:

$$R_{Ay} = \frac{5}{8} p_0 l ; \quad M_A = \frac{1}{8} p_0 l^2 ; \quad R_{By} = \frac{3}{8} p_0 l ,$$

der ses at stemme med resultaterne fra den sædvanlige bjælketeori. (Se appendix C)

For at få et indtryk af forskydningsdeformationernes indflydelse på resultaterne af vores beregninger, vil vi et øjeblik se på størrelsen af den dimensionsløse konstant  $\beta$ .

For en bjælke med rektangulært tværsnit har man:

$$\beta = \frac{EI}{GA_k l^2} = \frac{E \frac{1}{12} bh^3}{G \frac{5}{6} bhl^2} = 0.1 \frac{E}{G} \left( \frac{h}{l} \right)^2 , \text{ idet kroparealet som tidligere nævnt er } \frac{5}{6} bh$$

Faktoren 0.1 er således et udtryk for tværsnitsformens indflydelse. (Eksempelvis er denne faktor ca. 0.6 for et valset stålprofil af typen HEB 400).

Forholdet mellem materialekonstanterne E og G vil for stål være ca 2.6, medens det for træ typisk vil være ca. 14, idet træ på grund af fiberstrukturen har et meget lavt forskydningsmodul.

Det ses, at  $\beta$  udover tværsnitsformen og forholdet mellem E og G afhænger af forholdet mellem bjælkehøjden og bjækelængden i anden potens. Forskydningsdeformationernes indflydelse vokser derfor kraftigt når bjælken gøres kortere.

Betruger vi eksempelvis en træbjælke med rektangulært tværsnit, hvor  $h/l = 0.1$  bliver  $\beta = 0.1 \cdot 14 \cdot 0.1^2 = 0.014$ . Indsættes denne værdi i de ovenfor fundne resultater fås for reaktionerne:

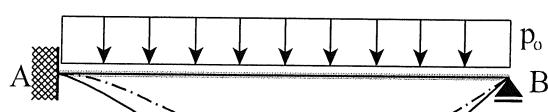
$$R_{Ay} = \frac{4.96}{8} p_0 l ; \quad M_A = \frac{0.96}{8} p_0 l^2 ; \quad R_{By} = \frac{3.04}{8} p_0 l$$

Det ses, at der er tale om relativt små ændringer i forhold til de værdier den sædvanlige bjælketeori giver. (For statisk ubestemte konstruktioner vil det i almindelighed gælde, at snitkraftfordelingen og reaktionerne er afhængige af forskydningsstivheden. For statisk bestemte konstruktioner er dette naturligvis ikke tilfældet.)

Hosstående figur viser dels de udbøjninger man får hvis den sædvanlige bjælketeori anvendes (stillet kurve) og dels de udbøjninger vi har beregnet ovenfor. (fuldt optrukken kurve.)

Bemærk, at den fuldt optrukne kurve ikke har vandret tangent i punkt A.

Forskellen mellem udbøjningerne ved bjælkemidten er i det aktuelle eksempel ca 40%. Det skal bemærkes den meget store forskel skyldes, at eksemplet er ekstremt.



### Arbejdsligningen (Det virtuelle arbejdes princip)

Arbejdsligningen svarende til Timoshenkos bjælkemodel udledes principielt på samme måde som arbejdsligningen for den sædvanlige bjælkemodel, blot med den forskel at vi nu indfører to uafhængige virtuelle flytningsfunktioner  $\delta\theta = \delta\theta(x)$  og  $\delta w = \delta w(x)$ .

Såfremt de statiske felt- og randbetingelser er opfyldt, må nedenstående ligning gælde for *vilkårligt valgte* funktioner  $\delta\theta$  og  $\delta w$ , idet alle udtrykkene i de kantede parenteser er identisk lig med 0. (NB!  $\delta\theta$  og  $\delta w$  skal hver især opfattes som ét symbol).

$$\int_0^l \delta\theta [M' - V] dx + \int_0^l \delta w [p - V'] dx + \delta w(0) [R_{Ay} - V(0)] + \delta w(l) [R_{By} + V(l)]$$

$$+ \delta\theta(0) [M_A + M(0)] + \delta\theta(l) [M_B - M(l)] = 0$$

Omvendt kan man slutte: Hvis ovenstående er opfyldt for *alle* vilkårligt valgte funktioner  $\delta\theta$  og  $\delta w$ , da er de statiske felt- og randbetingelser opfyldt.

Ved brug af delvis integration foretages følgende omskrivning:

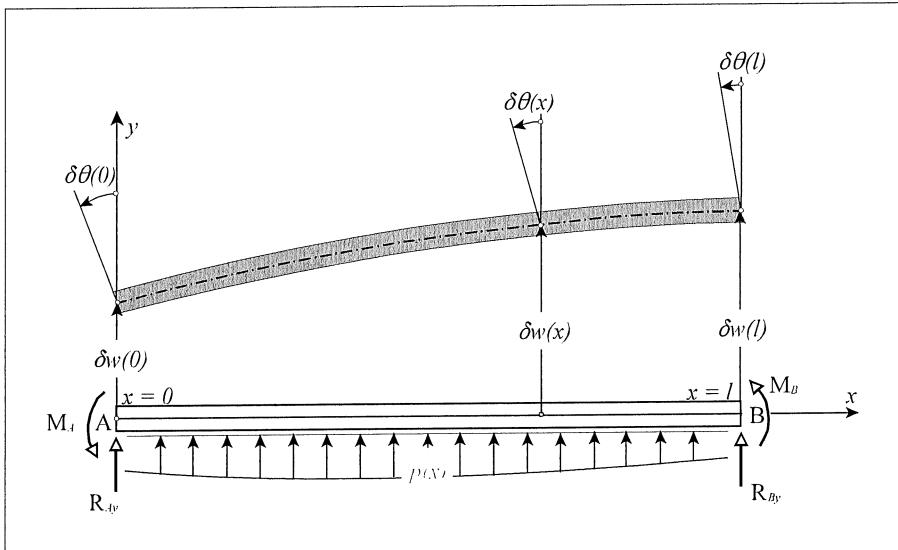
$$\int_0^l \delta\theta M' dx = [\delta\theta M]_0^l - \int_0^l \delta\theta' M dx = \delta\theta(l)M(l) - \delta\theta(0)M(0) - \int_0^l \delta\theta' M dx$$

$$\int_0^l \delta w V' dx = [\delta w V]_0^l - \int_0^l \delta w' V dx = \delta w(l)V(l) - \delta w(0)V(0) - \int_0^l \delta w' V dx$$

Indsættes dette i den oprindelige ligning kan nedenstående ligning udledes.

$$\delta w(0)R_{Ay} + \delta w(l)R_{By} + \delta\theta(0)M_A + \delta\theta(l)M_B + \int_0^l \delta w p dx = \int_0^l (\delta\theta - \delta w')V dx + \int_0^l \delta\theta' M dx$$

Når  $\delta\theta$  og  $\delta w$  tolkes som *virtuelle* flytningsfunktioner (se figur 6.13), kan  $\delta\theta - \delta w'$  og  $\delta\theta'$  tolkes som de tilsvarende virtuelle deformationsstørrelser  $\delta\gamma$  og  $\delta\kappa$ .



**Figur 6.13** Virtuelle flytninger

Venstre side af ovenstående ligning kan som sædvanlig tolkes som det *virtuelle ydre arbejde*  $\delta A_y$  medens højre side er det tilsvarende *virtuelle indre arbejde*  $\delta A_i$ . Vi har altså:

$$\delta A_y = \delta w(0)R_{Ay} + \delta w(l)R_{By} + \delta\theta(0)M_A + \delta\theta(l)M_B + \int_0^l \delta w p dx$$

$$\delta A_i = \int_0^l \delta\gamma V dx + \int_0^l \delta\kappa M dx \text{ hvor } \delta\gamma = (\delta\theta - \delta w') \text{ og } \delta\kappa = \delta\theta'$$

Herefter kan *Arbejdsligningen*, eller det *virtuelle arbejdes princip*, formuleres som følger:

$$\text{Ligevægt} \Leftrightarrow \delta A_i = \delta A_y \text{ for alle virtuelle flytninger}$$

Den eneste forskel i forhold til den tidligere udledte form af arbejdsligningen er, at den virtuelle drejning af tværsnittene er gjort uafhængig af den virtuelle flytning af bjælkeaksen, hvilket har

medført det ekstra led  $\int \delta\gamma V dx$  i udtrykket for det indre arbejde.

Dette led er et udtryk for det virtuelle (indre) arbejde som forskydningskræfterne udfører. Hvis vi som i den sædvanlige bjælketeori forudsætter at tværsnittene forbliver vinkelrette på bjælkeaksen, hvilket er ensbetydende med, at  $\delta\theta = \delta\omega$  således, at  $\delta\gamma = \delta\theta - \delta\omega = 0$ , ses det at det nye led igen forsvinder, således at den netop udledte form af arbejdsigningen bliver identisk med den tidligere udledte.

Ved *flytningsbestemmelse* anvendes arbejdsigningen, som bekendt, på en *fiktiv konstruktion*, idet man som virtuel flytning anvender flytningerne i den *virkelige konstruktion*. (Se efterfølgende eksempel.) I det bidrag de fiktive forskydningskræfter ( $V^*$ ) giver til det indre arbejde benytter man således den virkelige vinkeltøjning ( $\gamma$ ) som virtuel vinkeltøjning ( $\delta\gamma$ ).

Hvis den virkelige konstruktion er *lineærrelastisk*, gælder det at,  $\gamma = V/GA_k$ , hvor  $V$  er forskydningskræfterne i den virkelige konstruktion. Bidraget fra de fiktive forskydningskræfter kan herefter skrives på formen:

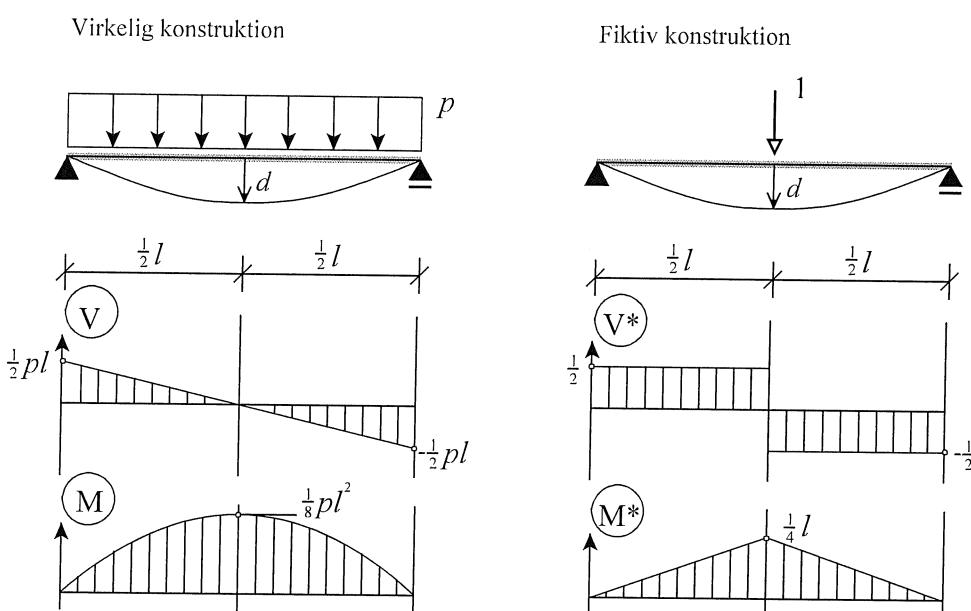
$$\int_0^l \delta\gamma V^* dx = \int_0^l \gamma V^* dx = \int_0^l \frac{V}{GA_k} V^* dx .$$

Hvis man ønsker at medtage forskydningskræfternes bidrag til flytningerne skal dette led åbenbart adderes til de led som de øvrige snitkræfter bidrager med. Dette illustreres i følgende eksempel.

### **Eksempel 6.3 Beregning af flytningsbidrag hidrørende fra forskydningskræfter**

Vi betragter en simpelt understøttet bjælke påvirket af en ensformot fordelt last  $p$ .

Den lodrette nedbøjning af bjælken ønskes bestemt, idet der tages hensyn til såvel bøjningsdeformationernes som forskydningsdeformationernes bidrag.



Ved hjælp af integrationsformlerne i appendix B fås:

$$1 \cdot d = \int_0^l \frac{MM^*}{EI} dx + \int_0^l \frac{VV^*}{GA_k} dx = \frac{1}{EI} \frac{5}{12} l \cdot \frac{1}{8} pl^2 \cdot \frac{1}{4} l + \frac{1}{GA_k} 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{l}{2} \frac{1}{2} pl \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{384} \frac{pl^4}{EI} + \frac{1}{8} \frac{pl^2}{GA_k}$$

Her er første led et udtryk for bøjningsdeformationernes bidrag til nedbøjningen, medens andet led udtrykker forskydningsdeformationernes bidrag.

Indføres de dimensionsløse konstant  $\beta = EI/GA_k l^2$ , kan dette resultat skrives på formen:

$$d = \frac{5}{384} \left( 1 + \frac{48}{5} \beta \right) \frac{pl^4}{EI} . \text{ For } \beta = 0.014 \text{ (se forrige eks.) fås: } \frac{48}{5} \beta = 0.134 .$$

I dette eksempel udgør forskydningsdeformationernes bidrag til nedbøjningen således 13% af bøjningsdeformationernes bidrag.



**7. SUPERPOSITIONSPRINCIPPET**

I den lineære algebra defineres en lineær afbildning:  $\mathbf{x} \rightarrow f(\mathbf{x})$  som en afbildning, der opfylder følgende 2 betingelser:

$$(1) \quad f(k\mathbf{x}) = kf(\mathbf{x})$$

$$(2) \quad f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2)$$

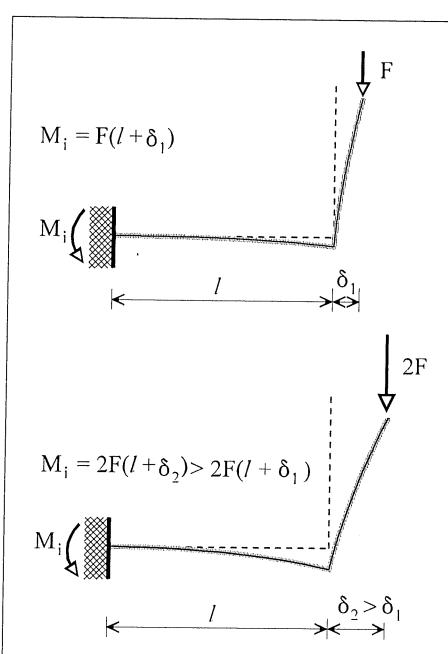
Man siger også, at *superpositionsprincippet* kan anvendes på afbildningen. Hvis  $\mathbf{x}$  f.eks. symboliserer en bestemt belastning på en konstruktion, og  $f(\mathbf{x})$  symboliserer den virkning, som den pågældende belastning har på konstruktionen (f.eks. den til belastningen svarende udbøjning), gælder superpositionsprincippet altså hvis:

- (1) Virkningen bliver  $k$  gange så stor, når belastningen sættes op med en faktor  $k$ .
- (2) Virkningen af to forskellige belastninger, der virker samtidigt, er lig med summen af de virkninger som belastningerne giver, når de virker hver for sig.

Vi vil i det følgende undersøge hvilke forudsætninger, der skal være opfyldt, hvis man ønsker at anvende superpositionsprincippet dels på statiske størrelser som reaktioner og snitkræfter og dels på geometriske størrelser som flytninger og vinkeldrejninger.

**7.1 Superposition af statiske størrelser**

En krafts moment i et punkt er som bekendt lig med kraft gange arm. Hvis kraften gøres  $k$  gange så stor bliver momentet således også  $k$  gange så stort, såfremt kraftens virkelinje - og dermed kraftens arm - er uændret. Tilsvarende betragtninger kan anvendes på en krafts projektion på en ret linje. Endvidere gælder det pr. definition, at et kraftsystems moment i et bestemt punkt lig med summen af de enkelte kræfters momenter i punktet og et kraftsystems projektion på en ret linje er lig med summen af de enkelte kræfters projektioner på linjen. Igen er det en forudsætning, at de enkelte kræfters virkelinjer forbliver uforandrede.



**Figur 7.1** Ligevægt af deformerede konstruktion

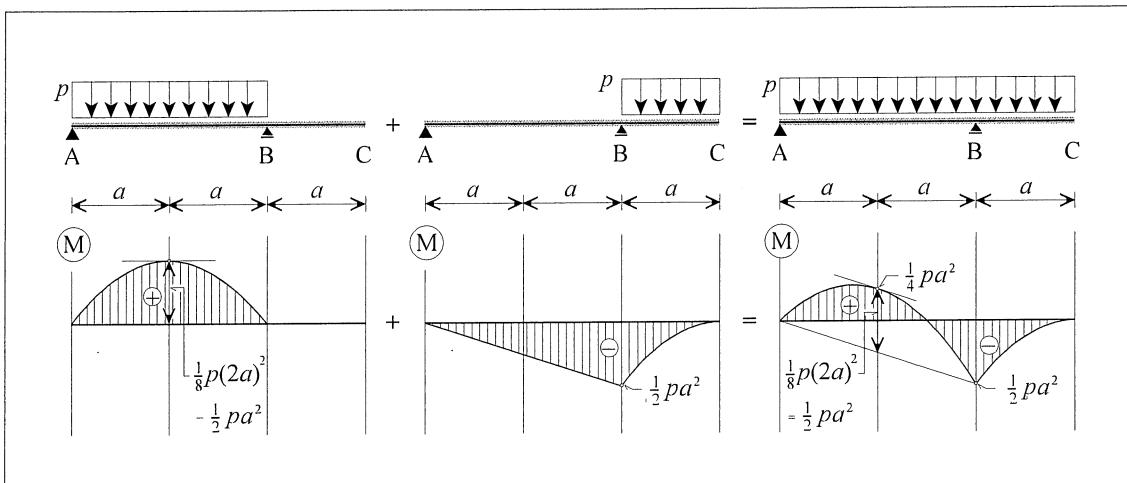
Hvis et kraftsystem således opfylder ligevægtsligningerne, vil det kraftsystem, der fremkommer ved at multiplikere alle kræfterne med en konstant  $k$ , også være i ligevægt. Hvis to kraftsystemer begge opfylder ligevægtsligningerne, vil det kraftsystem, der består af en kombination af de to kraftsystemer, ligeledes opfylde ligevægtsligningerne.

Herefter kan vi formulere følgende regel:

*Hvis ligevægtsligningerne **alene** anvendes til at bestemme en reaktion eller en snitkraft gælder superpositionsprincippet, såfremt ligevægtsligningerne baseres på den **udeformerede** konstruktions geometri.*

Figur 7.1 illustrerer, at superpositionsprincippet *ikke* kan anvendes, hvis ligevægtsligningerne baseres på den *deformerede* konstruktions geometri.

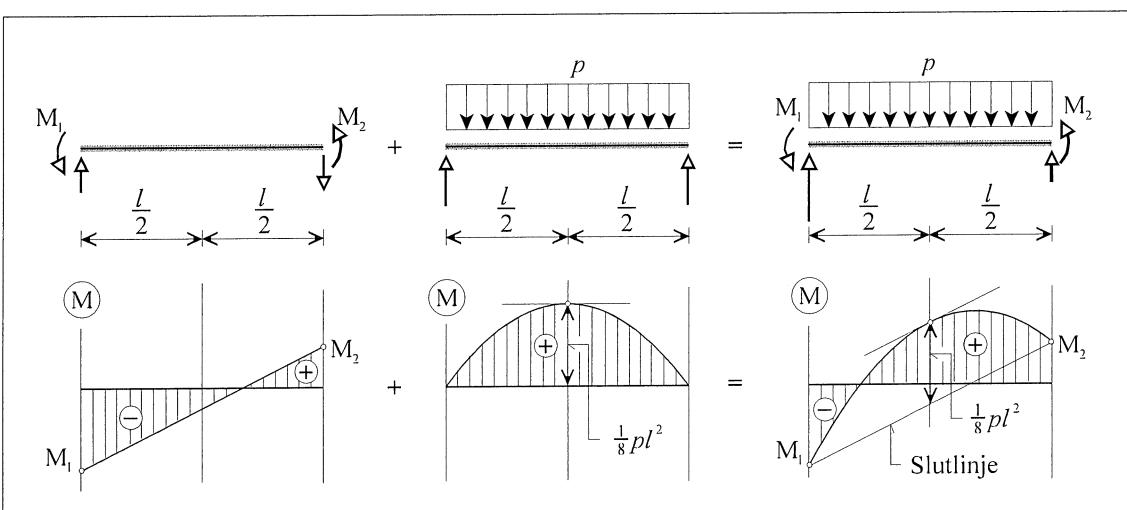
Superpositionsprincippet kan med fordel anvendes, hvis en given belastning kan opsplittes i belastninger for hvilke, der i forvejen findes kendte løsninger. Figur 7.2 skal således illustrere, hvorledes momentkurven for en ensformigt belastet udkraget bjælke kan sammensættes af momentkurverne for hhv. en simpelt understøttet bjælke (AB) og en indspændt bjælke (BC).



**Figur 7.2 Superpositionsprincippet**

En mere generel anvendelse af superpositionsprincippet til konstruktion af momentkurver er illustreret på figur 7.3. Bjælkeelementet på figuren viser en vilkårlig del af en bjælkekonstruktion. Påvirkningerne i bjælkeelementets ender kan således repræsentere en vilkårlig kombination af belastninger, reaktioner og snitkrafter. (Hvis elementet således repræsenterede stykket AB af den udkragede bjælke på figur 7.2 ville  $M_1$  være lig med 0 og  $M_2$  ville være snitmomentet i B - altså:  $-\frac{1}{2} pl^2$ ). På figuren er bjælkeelementet endvidere belastet med en ensformigt fordelt last, men de følgende betragtninger er uafhængige af hvilken belastningsopstilling, der anvendes.

Bjælkeelementets momentkurve kan ifølge superpositionsprincippet findes som kombinationen af den momentkurve, momenterne  $M_1$  og  $M_2$  giver, når den fordelte last sættes til nul, og den momentkurve, den fordelte last giver, når  $M_1$  og  $M_2$  sættes lig med nul. Den førstnævnt momentkurve er retlinjet, medens den sidstnævnte er den momentkurve, belastningen ville give i en simpelt understøttet bjælke. Kaldes den rette linje, der forbinder momentværdierne i de to ender af bjælken, for *slutlinjen*, ses det, at den endelige momentkurve kan konstrueres ved, at man fra slutlinjen afsætter momenterne i den simpelt understøttede bjælke.

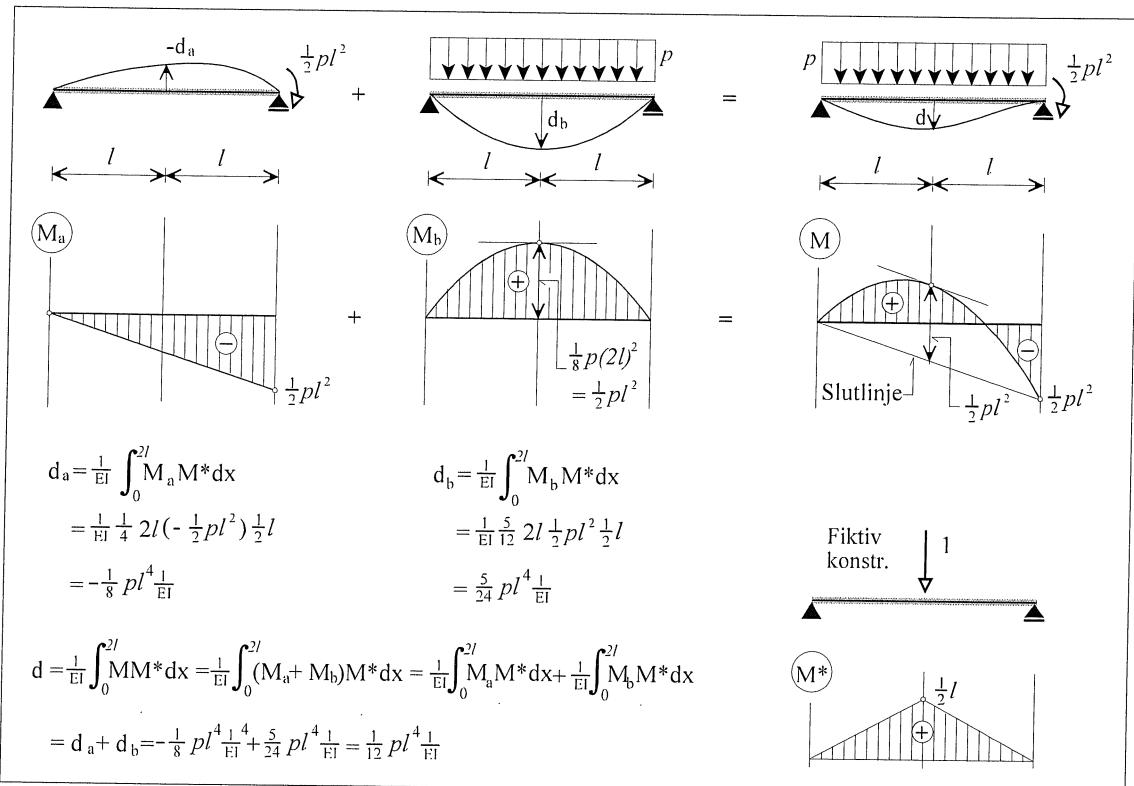


**Figur 7.3 Superpositionsprincippet**

## 7.2 Superposition af geometriske størrelser

Hvis superpositionsprincippet kan anvendes på en konstruktions snitkrafter, må det også kunne anvendes på de tilsvarende deformationer, såfremt der er en lineær sammenhæng mellem snitkrafter og deformationer. Dette vil være tilfældet, hvis der er tale om lineærelastiske konstruktioner. For lineærelastiske bjælker gælder således lineære relationer mellem normalkraft og aksialtøjning ( $N = EA\varepsilon_0$ ) og mellem bøjningsmoment og krumning ( $M = EI\kappa$ ).

At superpositionsprincippet tillige kan anvendes på flytningsstørrelser som udbøjninger og vinkeldrejninger, kan også indses ved at betragte en flytningsberegnning ved hjælp af arbejdsligningen, som vist i figur 7.4.



Figur 7.4 Superpositionsprincippet

I ovenstående eksempel indgår kun deformationer hidrørende fra bøjningspåvirkning, men det turde være umiddelbart indlysende, at tilsvarende forhold gør sig gældende for konstruktioner, der tillige er aksialpåvirkede.

Herefter kan følgende regel formuleres:

*For lineærelastiske konstruktioner kan superpositionsprincippet anvendes for såvel statiske som geometriske størrelser, såfremt ligevægtsligningerne baseres på den udeformerede konstruktions geometri.*

Superpositionsprincippet kan med fordel anvendes ved beregning af udbøjninger og vinkeldrejninger, hvis en given belastning kan opsplittes i belastninger for hvilke, der i forvejen findes kendte løsninger (f.eks i Teknisk Ståbi). Det fremgår endvidere af ovenstående eksempel, at superpositionsprincippet kan være nyttigt, hvis en momentkurve, der skal anvendes ved en flytningsberegning vha. arbejdsligningen, ikke umiddelbart lader sig integrere ved brug af integrationsformlerne i appendix B.

Superpositionsprincippet er desuden af afgørende betydning for de beregningsmetoder, der anvendes i forbindelse med statisk ubestemte konstruktioner.

## 8. STATISK UBESTEMTE KONSTRUKTIONER

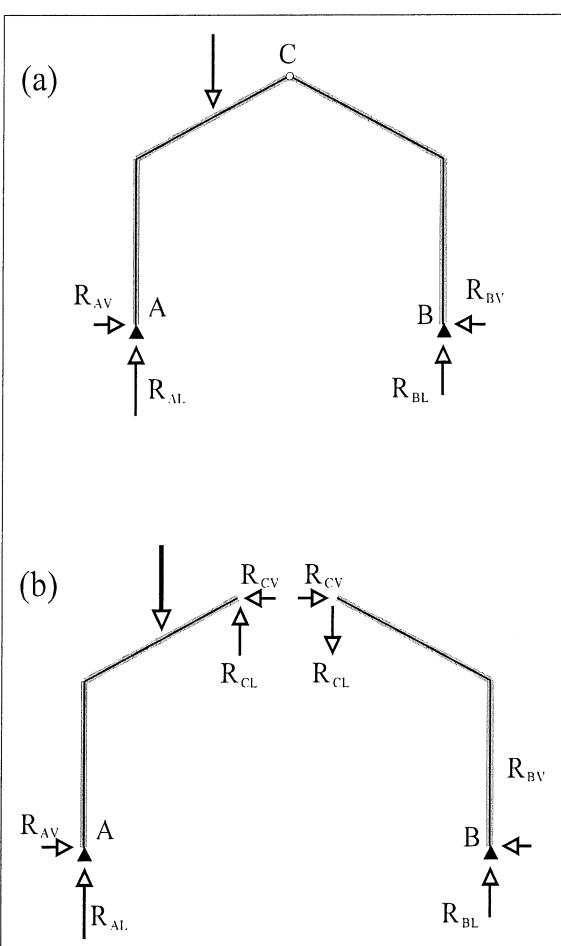
### 8.1 Indledning

Indledningsvis skal følgende velkendte definitioner repeteres:

*Hvis en reaktion eller en snitkraft kan bestemmes alene ved hjælp af ligevægtsligningerne, siges den pågældende statiske størrelse at være statisk bestemt.*

*Hvis samtlige reaktioner og snitkræfter i en konstruktion kan bestemmes alene ved hjælp af ligevægtsligningerne, siges konstruktionen som helhed at være statisk bestemt.*

For at gennemske om en konstruktion er statisk bestemt, er det som regel tilstrækkeligt at afgøre om et sæt af *statiske nøglestørrelser* - ofte reaktionerne - er statisk bestemte.



Figur 8.1

Betrages rammen på figur 8.1a, ses det således umiddelbart, at samtlige snitkræfter kan bestemmes, hvis reaktionerne i A og B kan bestemmes.

At konstruktionen er statisk bestemt betyder således, at der kan opstilles et sæt lineært uafhængige ligevægtsligninger, hvis antal svarer til antallet af statiske nøglestørrelser.

I det foreliggende eksempel kan vi opnå tre lineært uafhængige ligevægtsligninger ved at betragte ligevægten af konstruktionen som helhed, medens den fjerde ligning kan opnås ved at udtrykke, at snitmomentet i charnieret ved C skal være nul.

En nødvendig betingelse, for at en plan rammekonstruktion er statisk bestemt, kan opnås ved at splitte konstruktionen op i stive delkonstruktioner, som vist på figur 8.1b.

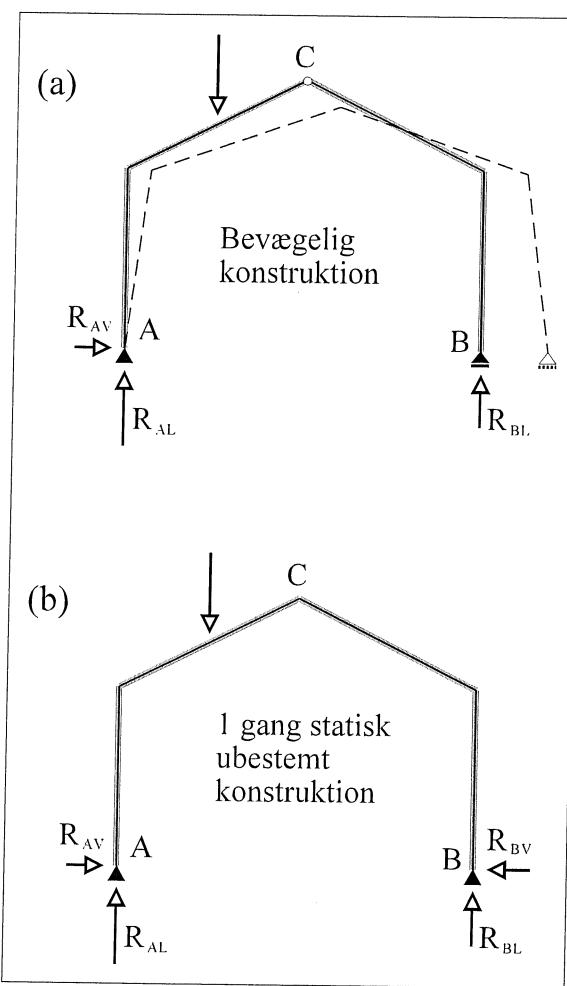
De ubekendte statiske nøglestørrelser udgøres nu dels af de ydre reaktioner, hvormed omgivelserne påvirker konstruktionen med og dels af de indre reaktioner, hvormed de enkelte konstruktionsdele påvirker hinanden. (De sidstnævnte er naturligvis parvis lige store og modsat rettede jvf. Newtons 3. lov).

Da man for hver stiv delkonstruktion kan opstille 3 - og kun 3 - lineært uafhængige ligevægtsligninger, indses det at:

*En nødvendig betingelse for statisk bestemthed er, at antallet af reaktioner - indre såvel som ydre - er lig med 3 gange antallet af stive delkonstruktioner.*

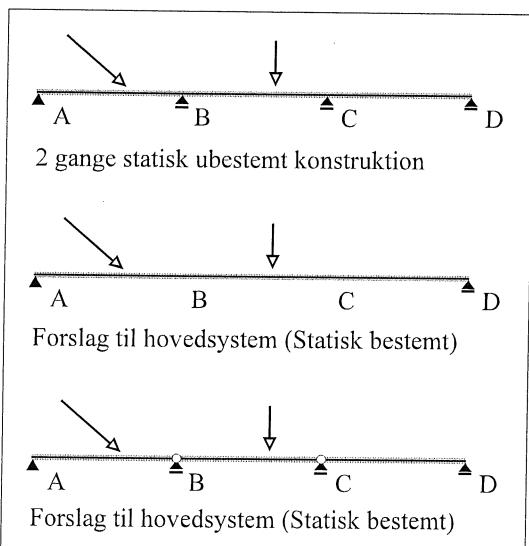
Det ses at rammen i figur 8.1 opfylder denne betingelse.

Bemærk, at betingelsen ikke er tilstrækkelig, idet der ikke er nogen garanti for, at ligevægtsligningerne for de forskellige delkonstruktioner er indbyrdes lineært uafhængige.



Figur 8.2

Hvis forskellen mellem antallet af ubekendte og antallet af ligninger er  $n$ , siges konstruktionen at være  $n$  gange statisk ubestemt, og der eksisterer en  $n$ -dobbelt uendelighed af løsninger til ligningssystemet. Rammen på figur 8.2b er således en gang statisk ubestemt, da der kun er tre lineært uafhængige ligevægtsligninger til rådighed til bestemmelse af de fire reaktioner.



Figur 8.3 Hovedsystemer

Hvis antallet af lineært uafhængige ligninger, der skal tilfredsstilles, er større end antallet af ubekendte, har ligningssystemet i almindelighed ingen løsning.

Geometrisk betyder dette, at konstruktionen er *bevægelig*, hvilket vil sige, at der ikke er tilstrækkelig mange geometriske bindinger til, at der kan etableres et sæt reaktioner, der kan holde ligevægt med belastningen.

Dette er illustreret på figur 8.2a, hvor rammen fra figur 8.1 er blevet forsynet med et vandret rulleleje i punkt B.

Hvis antallet af lineært uafhængige ligninger, der skal tilfredsstilles, er mindre end antallet af ubekendte, har ligningssystemet uendelig mange løsninger, og konstruktionen siges at være *statisk ubestemt*.

Geometrisk betyder dette, at konstruktionen er forsynet med flere geometriske bindinger, end det er nødvendig for, at der kan etableres et sæt reaktioner, der kan holde ligevægt med belastningen.

Dette er illustreret på figur 8.2b, hvor rammen fra figur 8.1 er blevet forsynet med et stiv samling i stedet for et charnier i punkt C.

Det fremgår af det foregående, at en statisk bestemt konstruktion er forsynet med netop så mange geometriske bindinger, at den ikke bliver bevægelig. En statisk bestemt konstruktion bliver således bevægelig, hvis blot en af disse bindinger svigter. En konstruktions grad af statisk ubestemthed kan derfor afgøres ved at undersøge, hvor mange geometriske bindinger der skal fjernes, før konstruktionen bliver statisk bestemt.

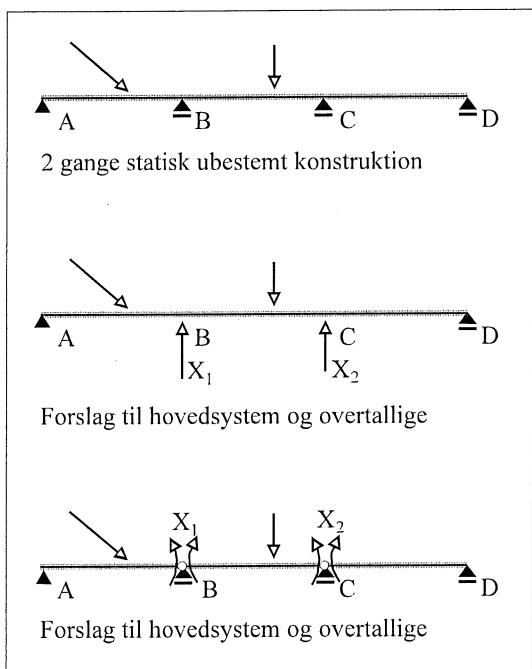
Til hver geometrisk binding svarer en reaktion eller en snitkraft, så det at fjerne geometriske bindinger svarer til at sætte de tilsvarende snitkræfter eller reaktioner lig med nul.

Figur 8.3 viser en 2 gange statisk ubestemt konstruktion samt to forskellige måder at fjerne geometriske bindinger.

De statisk bestemte konstruktioner, der opnås på denne måde, kaldes *hovedsystemer*.

## 8.2 Statisk tilladelige snitkraftkurver

Hvis en konstruktion er  $n$  gange statisk ubestemt betyder det, som nævnt tidligere, at man har  $n$  flere ubekendte reaktioner/snitkræfter, end man har lineært uafhængige ligevægtsligninger. Man kan derfor selv vælge værdien af i alt  $n$  af de ubekendte og stadigvæk opfylde ligevægtsligningerne. De statiske størrelser, der således bliver udvalgt, kaldes de *overtallige*.



Figur 8.4 viser en 2 gange statisk ubestemt konstruktion (den samme som i figur 8.3) samt 2 forskellige valg af overallige  $X_1$  og  $X_2$ . I det første forslag er reaktionerne i B og C valgt som overallige, medens det andet forslag benytter snitmomenterne over mellemunderstøtningerne som overallige.

Det at vælge overallige er åbenbart det samme som at vælge et hovedsystem og samtidig erstatte de geometriske bindinger, der fjernes med de tilsvarende reaktioner/snitkræfter.

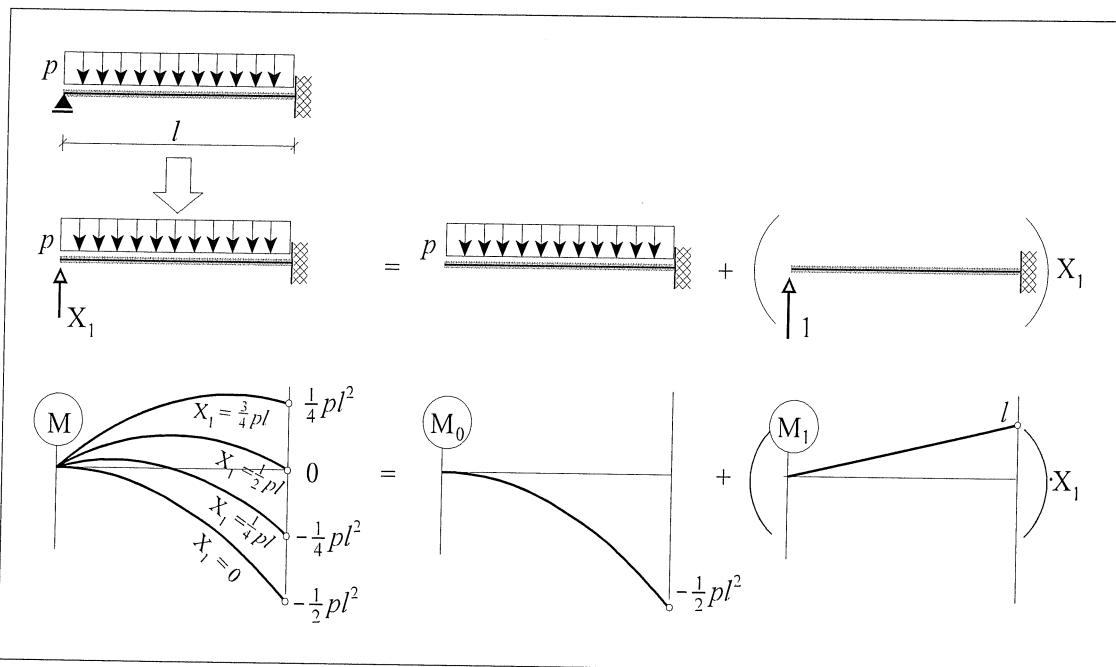
Hvilke statiske størrelser, der vælges som overallige, er i principippet ligegyldigt, blot må man sikre sig, at ingen overallig er statisk bestemt, idet sådanne størrelser naturligvis ikke kan tildeles vilkårlige værdier. Den vandrette reaktion i A (figur 8.4), kan således ikke anvendes som overallig.

**Figur 8.4** Overtallige

Når de overallige er valgt, kan de med fordel betragtes som en del af belastningen. Herefter kan de resterende reaktioner og snitkræfter bestemmes udtrykt ved de overallige. De på denne måde beregnede snitkraftkurver kaldes *statisk tilladelige*, idet de opfylder ligevægtsligningerne. Der findes således et sæt statisk tilladelige snitkraftkurver svarende til ethvert sæt af værdier, der tildeles de overallige.

Ved beregning af statisk tilladelige snitkraftkurver kan man med fordel anvende superpositionsprincippet. Dette er illustreret på figur 8.5, hvor et sæt statisk tilladelige momentkurver til en 1 gang statisk ubestemt konstruktion er beregnet.

Den parentes, der omslutter konstruktionen og momentkurven til højre i figuren skal symbolisere, at beregningerne i første omgang udføres for den overallige lig med 1, hvorefter resultatet multipliceres med den aktuelle værdi af den overallige.

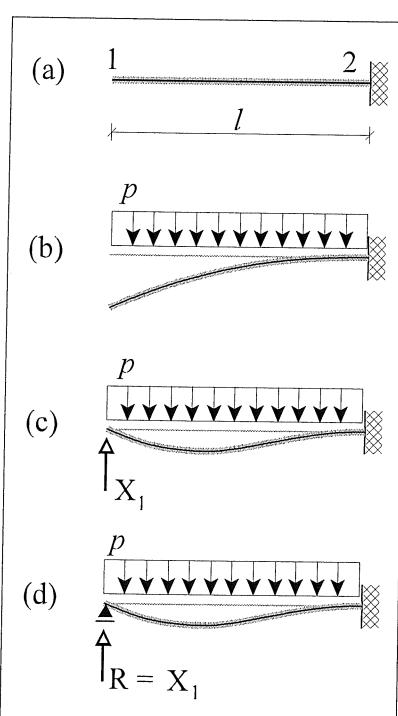


Figur 8.5 Statisk tilladelige momentkurver

### 8.3 Kraftmetoden

Lad os igen betragte den en gang statisk ubestemte konstruktion fra figur 8.5. Det er klart, at i den virkelige konstruktion vil der kun være én værdi af den overallige  $X_1$  (reaktionen ved den simple understøtning), der er den "rigtige" i den forstand, at den rent faktisk vil være til stede i konstruktionen.

Den metode til at finde frem til den rigtige værdi af  $X_1$ , der skal præsenteres i det følgende, benævnes kraftmetoden. Ideen bag kraftmetoden kan illustreres ved følgende tankeeksperiment:



- Først etableres en bjælke der er indspændt i højre side (figur 8.6-a). Denne bjælke repræsenterer et hovedsystem for bjælken fra figur 8.5
- Dette hovedsystem belastes nu af den fordelte last  $p$ . Derved bøjer bjælken ud, og bjælkeenden forskydes et stykke nedad som antydet på figur 8.6-b
- Herefter tvinges den venstre bjælkeende et tilsvarende stykke opad ved hjælp af kraften  $X_1$  (figur 8.6-c).
- Nu kan den simple understøtning anbringes på sin plads i samme niveau som indspændingen (figur 8.6-d).

Den korrekte værdi af  $X_1$  og dermed af reaktionen er åbenbart den værdi, der medfører, at den endelige udbøjning af punkt 1, er lig med 0.

En beregning af  $X_1$  kan derfor udføres ved, at udbøjningen ved punkt 1 beregnes, hvorefter det beregnes hvor stor en enkeltkraft  $X_1$ , der skal til for at fremkalde en lige så stor og modsat rettet udbøjning.

Figur 8.6 Kraftmetoden

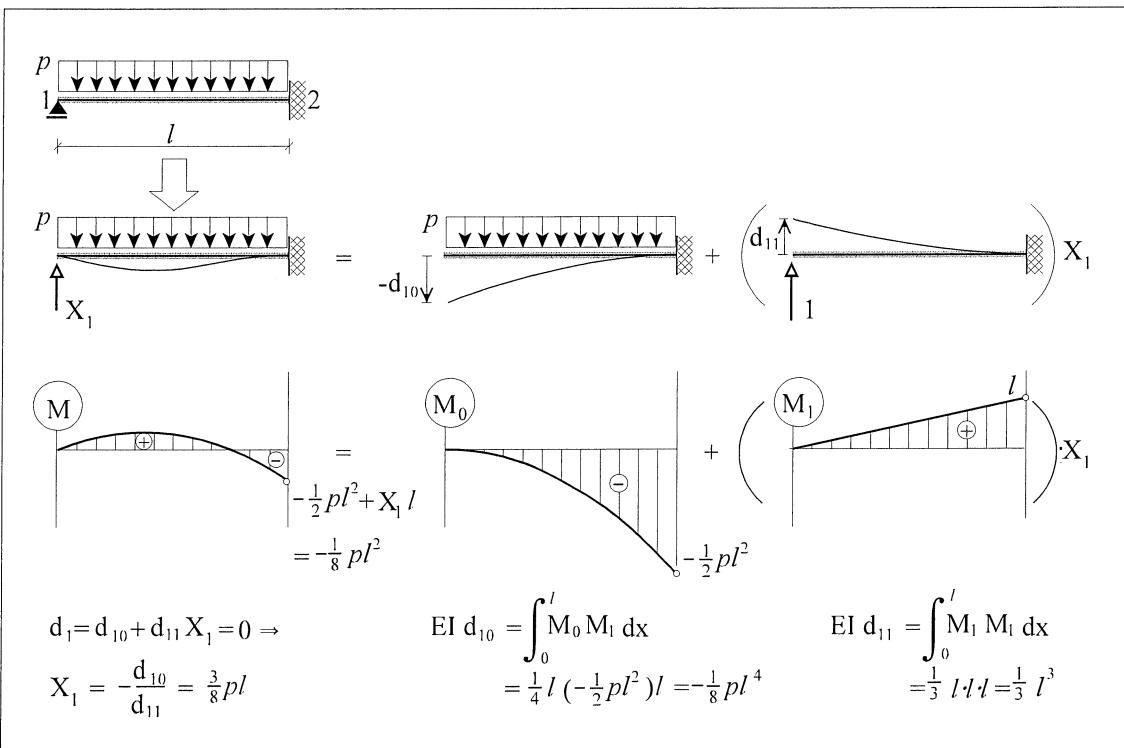
Da kraftmetoden således er baseret på beregning af flytninger og superposition af flytninger, er den kun praktisk anvendelig for *lineærelastiske* konstruktioner. *Det vil derfor i det følgende være forudsat, at de betragtede konstruktioner er lineærelastiske.*

De beregninger, der er nødvendige for at bestemme den overtallige  $X_1$ , er vist i figur 8.7 og kommenteret nedenfor.

Først beregnes momentfordelingerne i hovedsystemet dels for den fordelte belastning ( $p$ ) og dels for den overtallige, når denne tildeles værdien 1. Disse to momentfordelinger benævnes  $M_0$  og  $M_1$ . Herefter anvendes arbejdsprincippet til beregning af, dels den udbøjning ( $d_{10}$ ) hovedsystemet får i punkt 1, når belastningen er  $p$ , og dels den udbøjning ( $d_{11}$ ) hovedsystemet får; når det er belastet med  $X_1 = 1$ .

Bemærk, at den fiktive belastning, der skal anvendes i forbindelse med disse beregning, er en lodret enhedskraft i punkt 1, hvilket netop er den belastning, der svarer til  $X_1 = 1$ .  $M_1$  kan derfor anvendes som fiktiv momentkurve ( $M^*$ ) ved udbøjningsberegningerne. Dette indebærer, at de to udbøjninger begge regnes positive i den retning, der er valgt som positiv for  $X_1$ . Udbøjningen  $d_{10}$  bliver derfor negativ i det aktuelle eksempel.

Til slut udtrykkes det, at den samlede udbøjning ( $d_1$ ) af punkt 1 skal være 0. Dette giver den nødvendige ligning til bestemmelse af  $X_1$ .

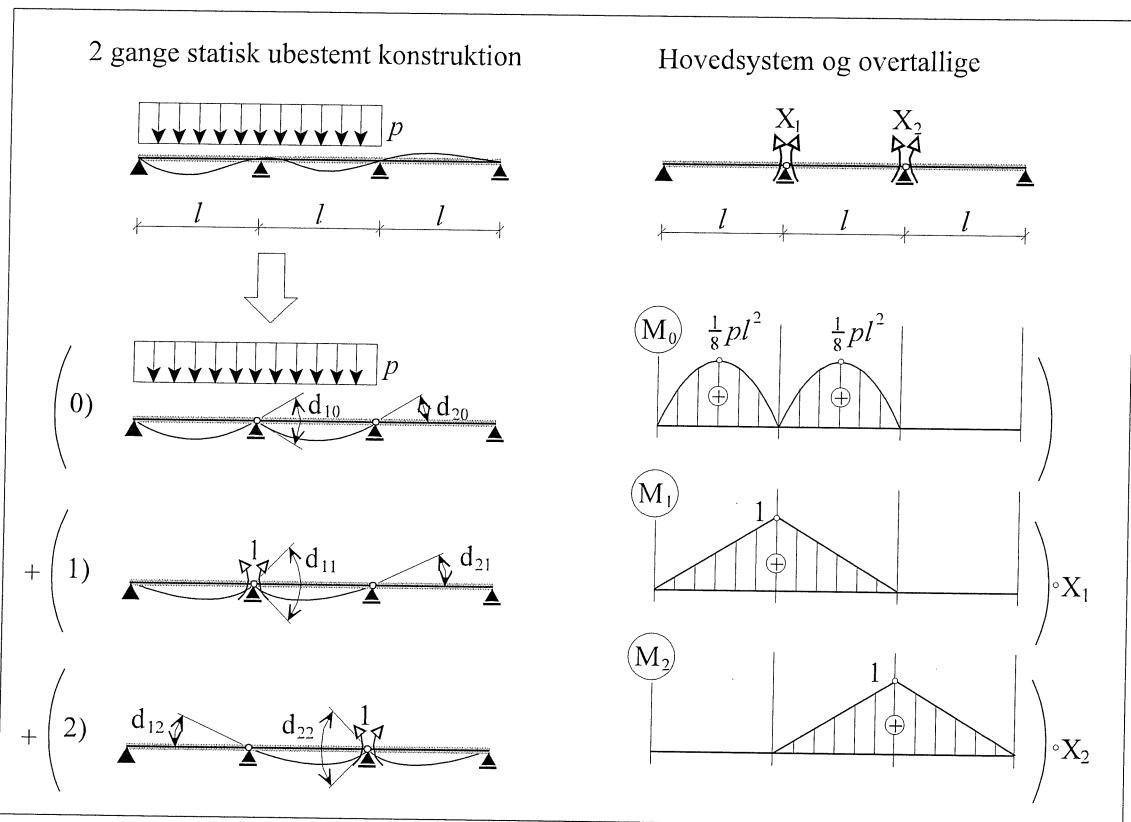


**Figur 8.7 Kraftmetoden anvendt på en 1 gang statisk ubestemt konstruktion**

Herefter vil vi betragte et eksempel på en 2 gange statisk ubestemt konstruktion. Formålet er dels at vise systematikken i beregningsproceduren, idet denne først bliver tydeliggjort når der er mere end en overtallig, og dels at illustrere anvendelsen af snitmomenter som overallige.

Vi betragter en bjælke, der er kontinuert over tre lige store fag som vist på figur 8.8. Som overallige vælges snitmomenterne over mellemunderstøtningerne. Da hovedsystemet er det statiske system, der fremkommer når de overallige tildeles værdien 0, ses det, at det hovedsystem, der svarer til at vælge snitmomenterne som overallige, fremkommer ved at indsætte charnierer over mellemunderstøtningerne i den kontinuerte bjælke. Hovedsystemet bliver således en serie af tre simpelt understøttede bjælker.

- |   |    |                          |
|---|----|--------------------------|
| Hovedsystemet belastes nu successivt af : | 0) | Den ydre last ( $p$ )    |
|   | 1) | Den overallige $X_1 = 1$ |
|   | 2) | Den overallige $X_2 = 1$ |



**Figur 8.8 Kraftmetoden anvendt på en 2 gange statisk ubestemt konstruktion**

Hver af disse belastninger medfører et knæk over mellemunderstøtningerne i den tilsvarende udbøjningslinje. Størrelsen af knækvinklerne navngives som vist på figur 8.8.

Størrelsen af de overtallige ( $X_1$  og  $X_2$ ) bestemmes herefter således, at den gensidige vinkeldrejning af de bjælkeender, der støder op til charniererne, bliver nul. Dette geometriske krav kan i følge superpositionsprincippet udtrykkes ved følgende ligninger:

$$d_1 = d_{10} + d_{11}X_1 + d_{12}X_2 = 0$$

$$d_2 = d_{20} + d_{21}X_1 + d_{22}X_2 = 0$$

hvor  $d_1$  og  $d_2$  er den totale knækvinkel over mellemunderstøtningerne.

Knækvinklerne  $d_{10}$ ,  $d_{11}$  osv bestemmes ved hjælp af arbejdsligningen.

Det ses, at de relevante fiktive belastninger netop bliver de lasttilfælde, hvor de overtallige er sat lig med 1. De fiktive momentkurver ( $M^*$ ), der skal anvendes ved beregningerne, bliver således momentkurverne  $M_1$  og  $M_2$ .

Herefter fås ved brug af integrationsformlerne i appendix B:

$$d_{10} = \sum \int_0^l \frac{M_1 M_0}{EI} dx = \frac{1}{12} \frac{pl^3}{EI} ; \quad d_{11} = \sum \int_0^l \frac{M_1 M_1}{EI} dx = \frac{2}{3} \frac{l}{EI} ; \quad d_{12} = \sum \int_0^l \frac{M_1 M_2}{EI} dx = \frac{1}{6} \frac{l}{EI}$$

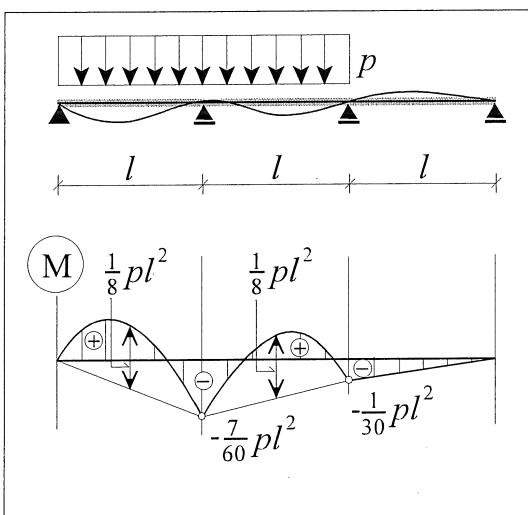
$$d_{20} = \sum \int_0^l \frac{M_2 M_0}{EI} dx = \frac{1}{24} \frac{pl^3}{EI} ; \quad d_{21} = \sum \int_0^l \frac{M_2 M_1}{EI} dx = \frac{1}{6} \frac{l}{EI} ; \quad d_{22} = \sum \int_0^l \frac{M_2 M_2}{EI} dx = \frac{2}{3} \frac{l}{EI}$$

Bemærk, at  $d_{12} = d_{21}$ , da  $M_1 M_2 = M_2 M_1$ .

Herefter fås følgende ligningssystem til bestemmelse af  $X_1$  og  $X_2$ :

$$\frac{2}{3} \frac{l}{EI} X_1 + \frac{1}{6} \frac{l}{EI} X_2 = -\frac{1}{12} \frac{pl^3}{EI}$$

$$\frac{1}{6} \frac{l}{EI} X_1 + \frac{2}{3} \frac{l}{EI} X_2 = -\frac{1}{24} \frac{pl^3}{EI}$$



Ved løsning af dette ligningssystem fås :

$$X_1 = -\frac{7}{60} pl^2 \quad \text{og} \quad X_2 = -\frac{1}{30} pl^2$$

Når de overallige er bestemt, kan de resterende snitkræfter og reaktioner bestemmes på sædvanlig måde ved hjælp af ligevægtsligningerne. Også i denne sammenhæng vil det ofte være en fordel at benytte superpositionsprincippet. Den kontinuerte bjælke's momentkurve fås således umiddelbart af :

$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2. \quad (\text{Se figur 8.9})$$

**Figur 8.9**

For en  $n$  gange statisk ubestemt konstruktion kan kraftmetoden beskrives ved følgende procedure:

- Først vælges  $n$  statisk ubestemte reaktioner og/eller snitkræfter som overallige. De overallige benævnes  $X_1, \dots, X_n$ . Herved har man samtidig etableret et hovedsystem for den statisk ubestemte konstruktion. Dette hovedsystem giver mulighed for  $n$  flytninger (udbøjninger og/eller vinkeldrejninger), som ikke er mulige i den oprindelige (statisk ubestemte) konstruktion. Disse flytninger benævnes  $d_1, \dots, d_n$ . I den oprindelige konstruktion er alle disse flytninger åbenbart lig med 0.
- Hovedsystemet belastes nu succesivt af den ydre belastning, af  $X_1 = 1$ , af  $X_2 = 1$  osv. Den ydre lasts bidrag til de ovenfor nævnte flytninger benævnes  $d_{10}, \dots, d_{n0}$ , medens de til  $X_i = 1$  svarende bidrag til flytningerne benævnes  $d_{1i}, \dots, d_{ni}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Enhver af flytningerne  $d_1, \dots, d_n$  kan nu bestemmes ved hjælp af superpositionsprincippet. For flytning nr.  $j$  fås således:  $d_j = d_{j0} + d_{j1}X_1 + \dots + d_{ji}X_i + \dots + d_{jn}X_n$
- Til bestemmelse af de overallige haves nu nedenstående ligningssystem, idet det erindres, at i den oprindelige konstruktion er det et *geometrisk krav*, at samtlige flytninger  $d_1, \dots, d_n$  er lig med 0.

$$\begin{aligned} d_1 &= d_{10} + d_{11}X_1 + \dots + d_{1i}X_i + \dots + d_{1n}X_n = 0 \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ d_j &= d_{j0} + d_{j1}X_1 + \dots + d_{ji}X_i + \dots + d_{jn}X_n = 0 \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ d_n &= d_{n0} + d_{n1}X_1 + \dots + d_{ni}X_i + \dots + d_{nn}X_n = 0 \end{aligned}$$

De omtalte flytningsbidrag kan for eksempel bestemmes ved hjælp af arbejdsligningen. Medtages kun momenternes bidrag til flytningerne fås følgende udtryk til bestemmelse af koefficienterne i ligningssystemet:

$$d_{j0} = \sum \int_0^l \frac{M_j M_0}{EI} dx \quad ; \quad d_{ji} = \sum \int_0^l \frac{M_j M_i}{EI} dx ,$$

hvor  $M_0$  er den momentkurve, hovedsystemet får, når det belastes med den ydre last, medens  $M_j$  og  $M_i$  er de momentkurver, hovedsystemet får, når det belastes med henholdsvis  $X_j = 1$  og  $X_i = 1$ . Bemærk at ligningssystemet bliver symmetrisk da  $d_{ji} = d_{ij}$ .

## Bestemmelse af udbøjninger ved hjælp af kraftmetoden.

Arbejdsligningen kan også bruges til bestemmelse af udbøjninger i statisk ubestemte konstruktioner. Generelt kan en udbøjning eller vinkeldrejning  $d$  bestemmes som, se side 29 øverst i kompendiet,

$$d = \sum_{e=1}^n \frac{1}{EI} \int_0^\ell MM^* dx$$

hvor  $M$  er momentet i den virkelige konstruktion og  $M^*$  momentet i den fiktive konstruktion, hvor den ydre belastning er erstattet af en enkeltkraft (hvis  $d$  er en udbøjning) eller et moment (hvis  $d$  er en vinkeldrejning).

For en statisk ubestemt konstruktion bestemmes  $M$  først ved hjælp af kraftmetoden som

$$M = M_0 + \sum_{i=1}^m X_i M_i$$

hvor  $M_0$  er momentfordelingen i det statisk bestemte hovedsystem med den rigtige ydre last og  $M_i$  momentfordelingen i det statisk bestemte hovedsystem med den ydre last fjernet og erstattet af en enhedslast placeret på positionen af den  $i$ 'te overtallige, præcis som angivet kompendiet side 67-70. De i alt  $m$  overtallige  $X_i$  bestemmes således ved løsning af de  $m$  ligninger:

$$d_i = \frac{1}{EI} \int_0^\ell MM_i dx = \frac{1}{EI} \int_0^\ell M_0 M_i dx + \sum_{j=1}^m X_j \frac{1}{EI} \int_0^\ell M_j M_i dx = 0; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Den nye  $M^*$  til bestemmelse af  $d$  kan skrives på samme måde som  $M$ :

$$M^* = M_0^* + \sum_{i=1}^m X_i^* M_i$$

under brug af det samme statisk bestemte hovedsystem. Indsættes dette i udtrykket for  $d$  fås:

$$d = \sum_{e=1}^n \frac{1}{EI} \int_0^\ell MM^* dx = \sum_{e=1}^n \left[ \frac{1}{EI} \int_0^\ell MM_0^* dx + \sum_{i=1}^m X_i^* \frac{1}{EI} \int_0^\ell MM_i dx \right] = \sum_{e=1}^n \frac{1}{EI} \int_0^\ell MM_0^* dx$$

idet, se oven for

$$\frac{1}{EI} \int_0^\ell MM_i dx = d_i = 0$$

**Dermed kan udbøjningen  $d$  bestemmes ved blot at finde momentfordelingen  $M_0^*$  i det statiske bestemte hovedsystem påsat en enhedslast der, hvor udbøjningen ønskes bestemt. Dette resultat er i overensstemmelse med den tekst, der står nederst på side 29 i kompendiet.** Generelt kan  $M_0^*$  faktisk bestemmes i et vilkårligt statisk bestemt hovedsystem.

**Eksempel:** Bestem vinkeldrejningen af punkt 1 i eksemplet i noterne i Figur 8.7. Det statisk bestemte hovedsystem er der valgt som en udkraget bjælke, fri i punkt 1, svarende til at den lodrette reaktion i pkt 1 er den overallige  $X_1$ .

Fra noterne haves

$$d_1 = d_{10} + d_{11}X_1 = \frac{1}{EI} \left( -\frac{p\ell^4}{8} + \frac{\ell^3}{3}X_1 \right) = 0 \Rightarrow X_1 = \frac{3}{8}p\ell$$

Da vinkeldrejningen i punkt 1 ønskes, bestemmes momentfordelingen i **det statisk bestemte hovedsystem** hvor den ydre last ( $p$ ) er fjernet og erstattet af et enhedsmoment i pkt 1. Det ses let, at denne momentfordeling ( $M_0^*$ ) er konstant (med værdien 1) langs hele bjælken. Dermed bliver vinkeldrejningen  $d$  i pkt 1:

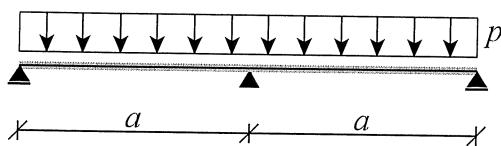
$$\begin{aligned} d &= \sum_{e=1}^n \frac{1}{EI} \int_0^\ell MM_0^* dx = \frac{1}{EI} \int_0^\ell MM_0^* dx = \frac{1}{EI} \int_0^\ell (M_0 + M_1 X_1) M_0^* dx = \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^\ell (M_0 + M_1 X_1) 1 dx = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^\ell M_0 1 dx + X_1 \int_0^\ell M_1 1 dx \right] = \\ &= \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{3} \ell \left( -\frac{p\ell^2}{2} \right) 1 + \frac{3}{8} p\ell \frac{1}{6} \ell \ell 3 \right] = \frac{p\ell^3}{48EI} \end{aligned}$$

**Eksempel 8.1** Initiale deformationer og statisk ubestemthed

Hvis en statisk ubestemt konstruktion bliver fremstillet med initiale deformationer (eller udsættes for temperaturpåvirkninger), vil dette i almindelighed give anledning til snitkræfter i konstruktionen. (Som tidligere nævnt er dette ikke tilfældet for statisk bestemte konstruktioner. Se afsnit 5.5)

I praksis benyttes initiale deformationer ofte til at opnå en mere hensigtsmæssig momentfordeling i bjælkekonstruktioner, der er kontinuerte over flere fag. For at illustrere dette betragtes følgende simple eksempel.

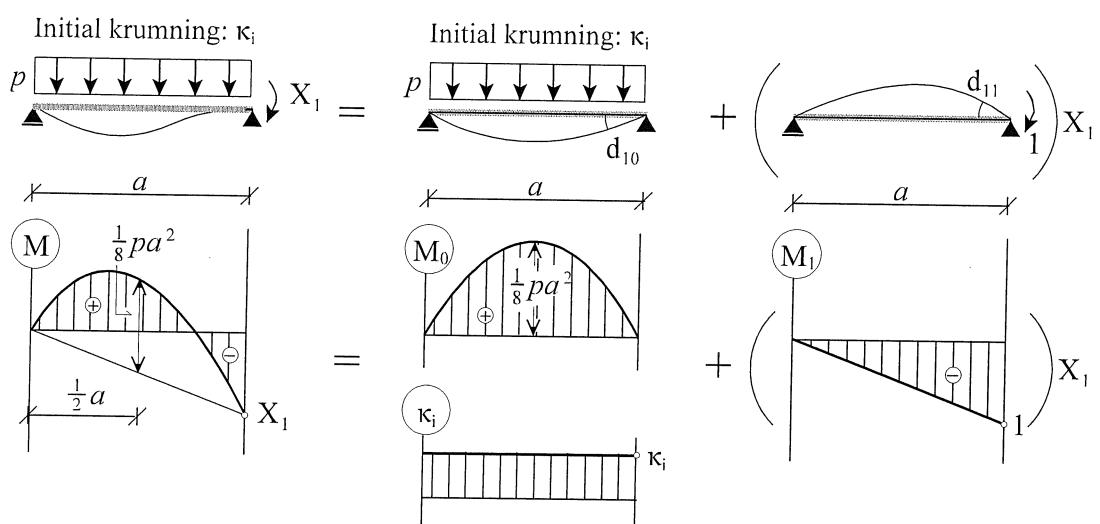
En elastisk bjælke med den konstante bøjningsstivhed  $EI$  er kontinuert over 2 fag som vist på nedenstående figur. Bjælken skal dimensioneres for den ensformigt fordelte last  $p$ .



Bjælken tænkes fremstillet med en initial krumning  $\kappa_i$ , og vi ønsker at bestemme  $\kappa_i$  således, at snitmomentet over mellemunderstøtningen numerisk set får samme størrelse som snitmomentet midt i fagene.

Det indses at konstruktionen er en gang statisk ubestemt. Da vi er specielt interesseret i snitmomentet over mellemunderstøtningen, vælges dette som den overallige ( $X_1$ ).

Da konstruktionen er symmetrisk omkring mellemunderstøtningen, vil bjælken, når den belastes, forblive vandret ved mellemunderstøtningen. Vi kan således indskrænke os til at betragte den venstre halvdel af bjælken som vist nedenfor.



Da vinkeldrejningen ved mellemunderstøtningen skal være nul fås følgende ligning til bestemmelse af den overallige  $X_1$ :

$$d = 0 = d_{10} + d_{11}X_1 \Rightarrow X_1 = -\frac{d_{10}}{d_{11}}$$

Arbejdsligningen og appendix B anvendes nu til bestemmelse af vinkeldrejningerne  $d_{10}$  og  $d_{11}$

$$d_{10} = \int_0^a \left( \frac{M_0}{EI} + \kappa_i \right) M_1 dx = \frac{1}{EI} \frac{1}{3} a \frac{1}{8} pa^2 (-1) + \kappa_i \frac{1}{2} a (-1) = -\frac{1}{24} \frac{pa^3}{EI} - \frac{1}{2} \kappa_i a$$

$$d_{11} = \int_0^a \frac{M_1}{EI} M_1 dx = \frac{1}{EI} \frac{1}{3} a (-1)(-1) = \frac{1}{3} \frac{a}{EI}$$

$$\text{Heraf fås} \quad X_1 = \frac{1}{8} pa^2 + \frac{3}{2} \kappa_i EI$$

*fortsættes*

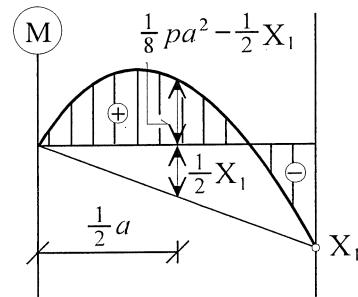
**Eksempel 8.1** fortsat

Kræves det nu, at momentet over mellemunderstøtningen numerisk set skal være lig med momentet midt i faget, fås jævnfør hosstående figur:

$$X_1 = \frac{1}{8} pa^2 - \frac{1}{2} X_1 \Rightarrow X_1 = \frac{1}{12} pa^2$$

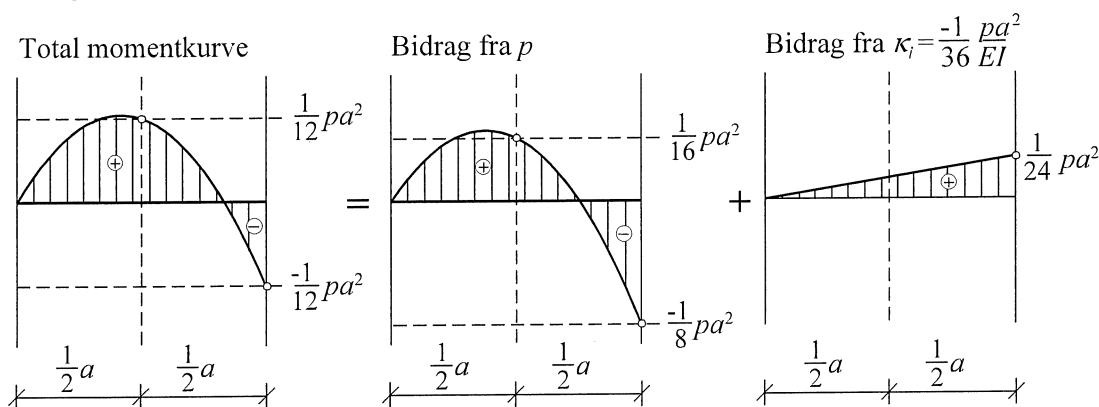
Indsættes den værdi af  $X_1$  vi fandt på foregående side fås:

$$\frac{1}{8} pa^2 + \frac{3}{2} \kappa_i EI = \frac{1}{12} pa^2 \Rightarrow \kappa_i = -\frac{1}{36} \frac{pa^2}{EI}$$



(Det, at den initiale krumning er negativ betyder at bjælken fra fabrikkens side skal tildannes så den "skyder ryg" og altså skal presses ned på mellemunderstøtningen.)

Nedenstående figur viser den totale momentkurve, samt den del den egentlige belastning ( $p$ ) bidrager med og den del, der alene skyldes den initiale krumning ( $\kappa_i$ ).



Det ses at den initiale krumning reducerer det numerisk største moment fra  $1/8 pa^2$  til lidt over  $1/12 pa^2$  - eller ca. 50 %. Hermed reduceres det nødvendige modstandsmoment for bjælketræværsnittet tilsvarende.

Det optimale valg af initial krumning havde naturligvis været det, der gjorde de numerisk største positive og negative momenter nøjagtig lige store. Det overlades til læseren at eftervise, at værdien af denne krumning er:

$$\kappa_i = -\frac{1}{12}(8\sqrt{2}-11) \frac{pa^2}{EI} \quad \text{svarende til} \quad X_1 = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) pa^2$$

## 9. DEFORMATIONSMETODEN

Deformationsmetoden er en metode til beregning af såvel statisk bestemte som statisk ubestemte bjælke- og rammekonstruktioner. Da metoden indebærer superposition af statiske og geometriske størrelser, forudsættes det dels, at der er tale om *lineærrelastiske konstruktioner* og dels, at *ligevægtsbetragtninger kan baseres på den udeformerede konstruktions geometri*.

Deformationsmetoden bygger på, at enhver bjælke- eller rammekonstruktion kan opdeles i et antal bjælkeelementer, hvis egenskaber en gang for alle kan fastlægges gennem en analyse af elementernes respons, dels på den belastning elementet er påvirket af, og dels på de forskydninger og vinkeldrejninger elementets ender er utsat for.

Som det vil blive vist i det følgende afsnit, kan der således en gang for alle udledes formler, der bestemmer snitkræfterne/reaktionerne i et bjælkeelements ender ud fra kendskabet til belastningen på elementet og forskydninger samt vinkeldrejninger af elementets endepunkter.

### 9.1 Elementegenskaber

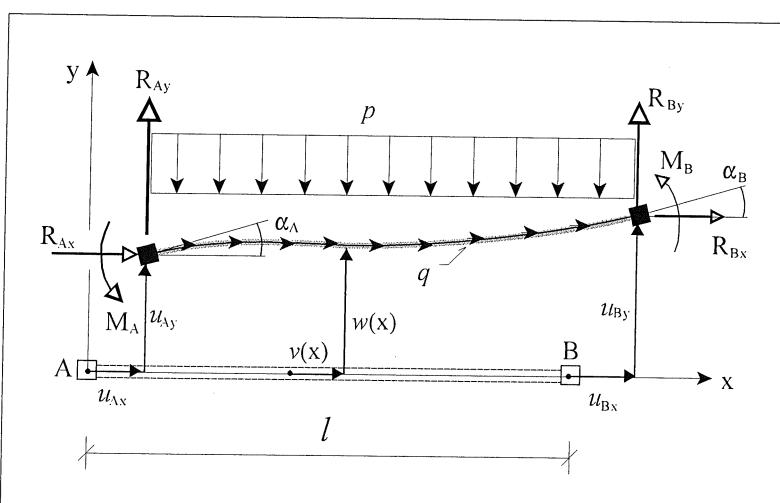
Vi betragter et retlinjet bjælkeelement med den konstante aksialstivhed  $EA$  og den konstante bøjningsstivhed  $EI$ .

Bjælkeelementet tænkes i endepunkterne forsynet med knuderne A og B, som vist på figur 9.1. I første omgang forudsættes det, at elementet er stift forbundet til knuderne.

Bjælkeelementet utsættes for følgende påvirkninger:

- En ensformigt fordelt aksiallast  $q$ .
- En ensformigt fordelt tværlast  $p$ .
- Et sæt (tvungne) flytninger af knuderne A og B repræsenteret af de akseparallele forskydninger  $u_{Ax}$ ,  $u_{Ay}$ ,  $u_{Bx}$  og  $u_{By}$  og af vinkeldrejninger (hældningerne)  $\alpha_A$  og  $\alpha_B$

(For anskuelighedens skyld er belastningerne vist på den deformede figur, selvom det er en forudsætning, at ligevægtsbetragtninger kan baseres på den udeformerede geometri.)



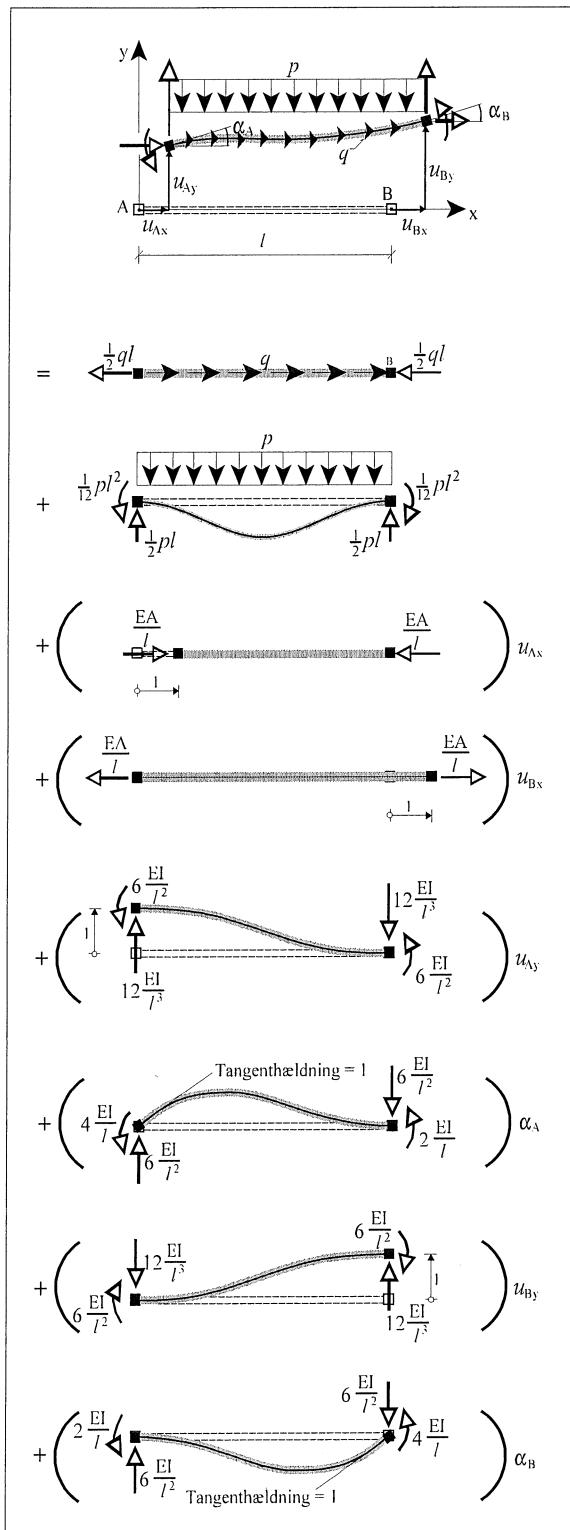
**Figur 9.1** Bjælkeelement med påvungne knudeflytninger

Vi ønsker at bestemme de reaktioner omgivelserne må påvirke knuderne med for at opretholde den givne tilstand. Reaktionerne ønskes udtrykt dels ved belastningerne og dels ved knudeflytningerne.

De omtalte reaktioner kan, hvis der ses bort fra deformationer hidrørende fra forskydningsspændinger, bestemmes ved brug af bjælkelementets differentialalligninger med tilhørende randbetingelser: (Se afsnit 5)

Aksialpåvirkning:  $\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{-q}{EA}$  ; Randbetingelser:  $v(0) = u_{Ax}$  ;  $v(l) = u_{Bx}$

Bøjningspåvirkning:  $\frac{d^4w}{dx^4} = \frac{-p}{EI}$  ; Randbetingelser:  $w(0) = u_{Ay}$  ;  $w(l) = u_{By}$   
 $w'(0) = \alpha_A$  ;  $w'(l) = \alpha_B$



Når flytningsfunktionerne  $v(x)$  og  $w(x)$  er bestemt, kan normalkraft-moment- og forskydningskraftfordelinger bestemmes ved hjælp af udtrykkene:

$$N = EA\varepsilon_0 = EA v'$$

$$M = EI\kappa = EI w''$$

$$V = M' = EI w'''$$

Herefter kan reaktionerne bestemmes af de statiske randbetingelser:

$$R_{Ax} = -N(0) ; R_{Ax} = N(l)$$

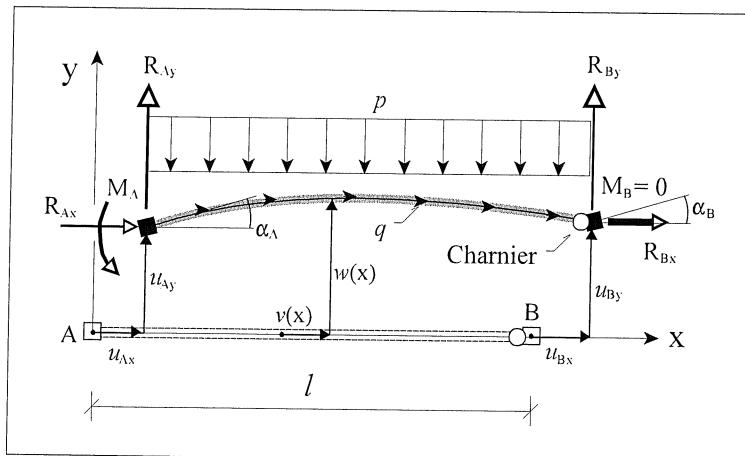
$$R_{Ay} = V(0) ; R_{By} = -V(l)$$

$$M_A = -M(0) ; M_B = M(l)$$

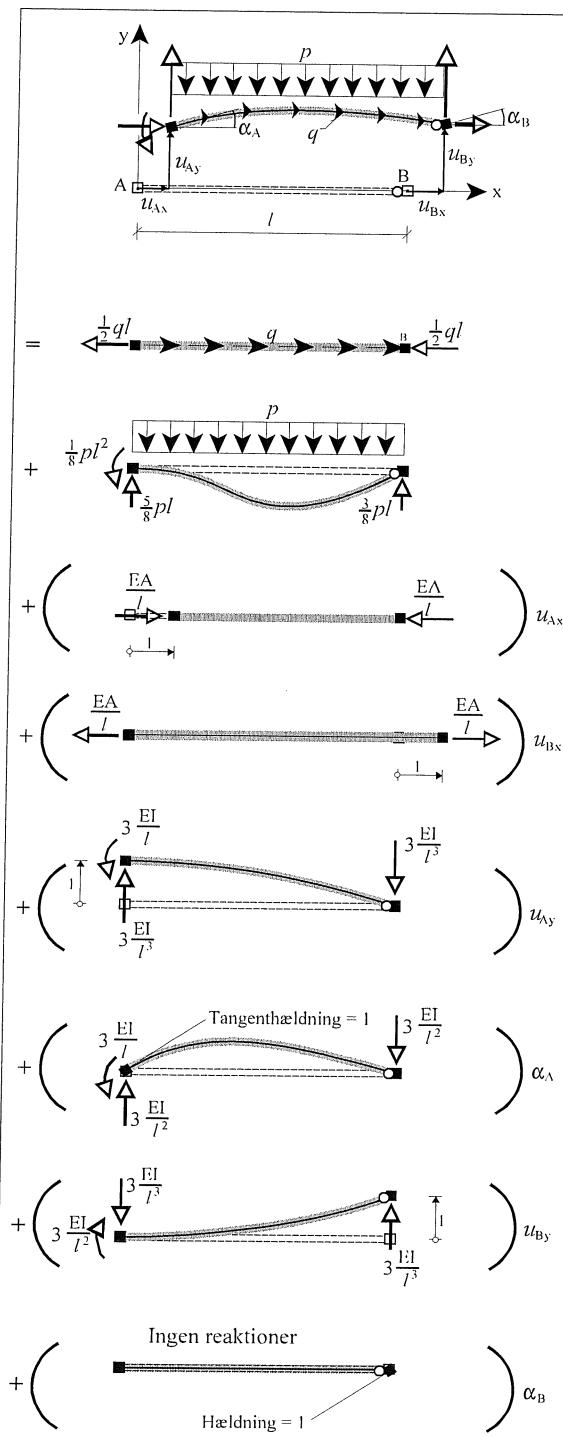
Ved beregningerne er det en fordel at anvende *superpositionsprincippet*, således at bidragene fra den samlede påvirkning fås som summen af de bidrag, der fremkommer, når man lader de enkelte påvirkninger virke hver for sig. Denne fremgangsmåde er illustreret på figur 9.2, hvor også resultaterne af beregningerne er vist. Det overlades til læseren at verificere rigtigheden af resultaterne.

De viste resultater forudsætter som sagt, at der er tale om ensformigt fordelte belastninger. Det er dog klart, at de bidrag, der skyldes knudeflytningerne, er uafhængige af belastningstypen. Reaktionsbidrag fra andre belastningstyper kan derfor opnås ved at bestemme de reaktioner, den pågældende belastningstype vil medføre i en bjælke, hvor knudeflytningerne er sat til nul. (Dette svarer til en bjælke, der er fast indspændt i begge ender.)

Figur 9.2 Superposition



Figur 9.3



Figur 9.4

Udover den netop introducerede element-type, hvor elementet er fast indspændt i knuderne A og B, er det praktisk at introducere elementtyper, hvor elementet er forbundet til den ene og/eller den anden af knuderne gennem et friktionsløst charnier.

Figur 9.3 viser således et bjælkelement, der er stift forbundet med knude A, medens det er forbundet til knude B ved hjælp af et charnier. Et charnier ved B vil ikke ændre løsningen af den differentialligning, der styrer aksialpåvirkningen, idet denne differentiallignings randbetingelser er uændrede.

Hvad bøjningspåvirkningen angår, er der derimod tale om ændrede randbetingelser, idet den randbetingelse, der involverede vinkel drejningen ved punkt B ( $\alpha_B$ ), må erstattes af en randbetingelse, der udtrykker, at snitmomentet ved B er lig med 0.

Da  $M = EI\kappa = EIw''$ , er dette krav ensbetydende med at krumningen  $\kappa = w''$  skal være nul ved B.

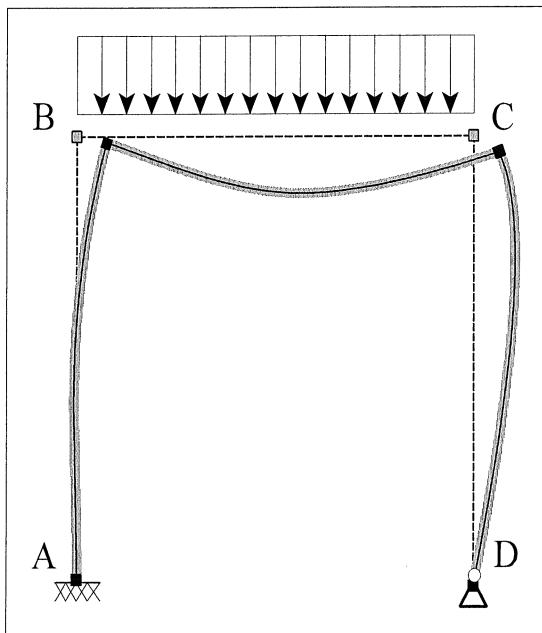
Randbetingelsen  $w'(l) = \alpha_B$ , skal altså erstattes med randbetingelsen  $w''(l) = 0$

Figur 9.4 viser de enkelte påvirkningers bidrag til reaktionerne. Det overlades igen til læseren at verificere resultaterne.

Bemærk, at charnieret ved B medfører, at en drejning af knude B ikke giver anledning til reaktioner eller snitkræfter i bjælkelementet. De i figuren anførte belastningsbidrag gælder også for dette element - kun for ensformigt fordelte belastninger. Andre belastningstyper kræver som før en separat undersøgelse.

## 9.2 Deformationsmetodens ligninger

Deformationsmetodens idé kan herefter beskrives på følgende måde, idet vi som eksempel betragter rammen på figur 9.5



**Figur 9.5** Elementer og knuder

Rammen tænkes som sagt opdelt i bjælkeelementer af de i forvejen analyserede typer.

De punkter, hvor elementerne er samlet (samtid med evt. frie eller understøttede elementendepunkter), kaldes ligesom tidligere for rammens knuder.

I det aktuelle tilfælde udgøres rammens knuder af punkterne A, B, C og D, medens elementerne er bjælkestykkerne AB, BC og CD. Elementerne AB og BC er den type, der er fast indspændt i endeknuderne, medens elementet CD er den type, der er stift forbundet til knuden i den ene ende (C) og forbundet til knuden i den anden ende (D) gennem et charnier.

Når rammen belastes er det klart, at de knuder, der ikke er fastholdt af understøtningspunkter, vil flytte sig.

For en plan konstruktion vil en knudeflytning kunne beskrives ved dels en vandret forskydning dels en lodret forskydning og dels en drejning.

Knudeflytningerne udgør åbenbart et sæt essentielle parametre for konstruktionen, idet man med kendskab til knudeflytningerne, samt de i det foregående afsnit omtalte elementegenskaber, vil være i stand til beregne samtlige snitkræfter i de enkelte elementer. Specielt kan man beregne de (snit)kræfter, det enkelte element påvirker rammens knuder med. (Disse kræfter er naturligvis lige så store og modsat rettede de reaktioner, der blev beregnet i forrige afsnit.)

Til et hvert sæt af knudeflytninger kan man således beregne de kræfter, de enkelte elementer påvirker knuderne med.

Når konstruktionen er i ligevægt, må de enkelte knuder være i ligevægt under påvirkning af dels de kræfter, de tilstødende elementer påvirker dem med, og dels de ydre kræfter/momenter knuden måtte være belastet af.

*Vi søger derfor det sæt knudeflytninger, der netop svarer til, at de enkelte knuder er i ligevægt.*

Da vi for hver knude kan opstille tre ligevægtsligninger, og vi for hver knude har tre knudeflytninger, får vi for rammen i figur 9.5 i alt 12 ligevægtsligninger med 12 ubekendte. Da flytningerne af knuderne A og D på forhånd vides at være nul, kan antallet af ligninger reduceres til 6 svarende til tre ligninger for hver af knuderne B og C. De tilsvarende ubekendte er disse to knuders flytninger.

Når knudeflytningerne er bestemt, kan samtlige deformationer og snitkræfter i de enkelte elementer som tidligere nævnt bestemmes på basis af elementegenskaberne.

For store rammesystemer bliver der tale om relativt store ligningssystemer, hvorfor metoden i den her skitserede form egner sig bedst til beregning på computer. Set fra et programmeringsteknisk synspunkt har metoden den fordel, at det er relativt enkelt at formulere en generel algoritme til at opstille og løse det styrende ligningssystem.

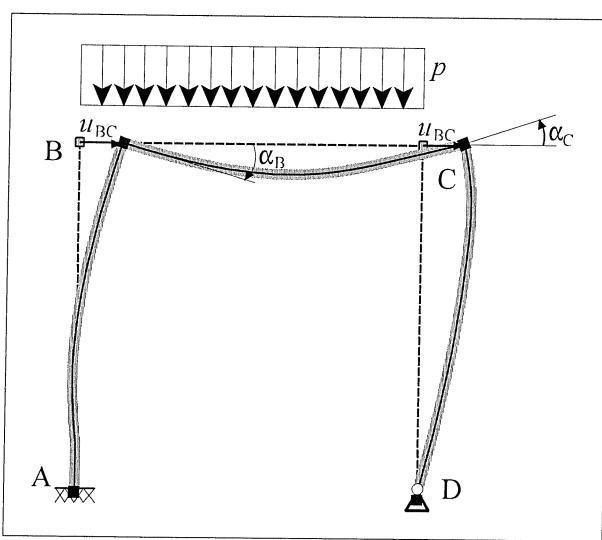
Deformationsmetoden kan opfattes som et specialtilfælde af en metode, der normalt omtales som *elementmetoden* (Eng. The Finite Element Method). Elementmetoden er en generel metode til løsning af et stort antal forskelligartede fysiske problemer som for eksempel beregning af skiver, plader, varmestrømme, grundvandsstrømnninger etc.

Det eneste, der adskiller de forskellige beregningsmodeller, er de til den aktuelle model hørende elementegenskaber, medens selve programstrukturen - dvs. opbygning og løsning af de styrende ligninger- kan være fælles for de forskellige typer af modeller.

Til forskel fra ramme- og gitterberegninger vil man i de ovenfor nævnte bereregningsmodeller normalt være henvist til at benytte tilnærmede elementegenskaber, hvilket naturligvis fører til en tilnærmet løsning af det aktuelle problem. For at opnå en acceptabel løsning kræves som regel et stort antal elementer, og netop valget af elementinddelingens udseende og finhed kræver i almindelighed en del erfaring af brugeren af elementmetodeprogrammer.

### 9.3 Manuel beregningsmetode

For simple rammekonstruktioner er det overkomeligt at opstille og løse deformationsmetodens ligninger uden brug af computer, *hvis man kan se bort fra elementernes aksiale deformationer*, hvilket i mange tilfælde vil være en god tilnærmelse.



Figur 9.6 Knudeflytninger

Betrages rammen på figur 9.6 ses det, at antallet af ukendte knudeflytninger på denne måde reduceres fra 6 til 3, idet de lodrette flytninger af knuderne B og C kan sættes lig med 0, medens de vandrette flytninger af disse knuder kan antages at være ens. (Knuderne A og D flytter sig ikke, da de er fastholdt af understøtningerne.)

De ukendte knudeflytninger er herefter:

- 1) Den vandrette flytning af knuderne B og C ( $u_{BC}$ ).
- 2) Vinkeldrejningen af knude B ( $\alpha_B$ ).
- 3) Vinkeldrejningen af knude C ( $\alpha_C$ ).

De ligevægtsligninger, der er relevante for den aktuelle konstruktion, udtrykker dels den vandrette ligevægt af knuderne B og C tilsammen og dels momentlige vægten af knude B og momentlige vægten af knude C.

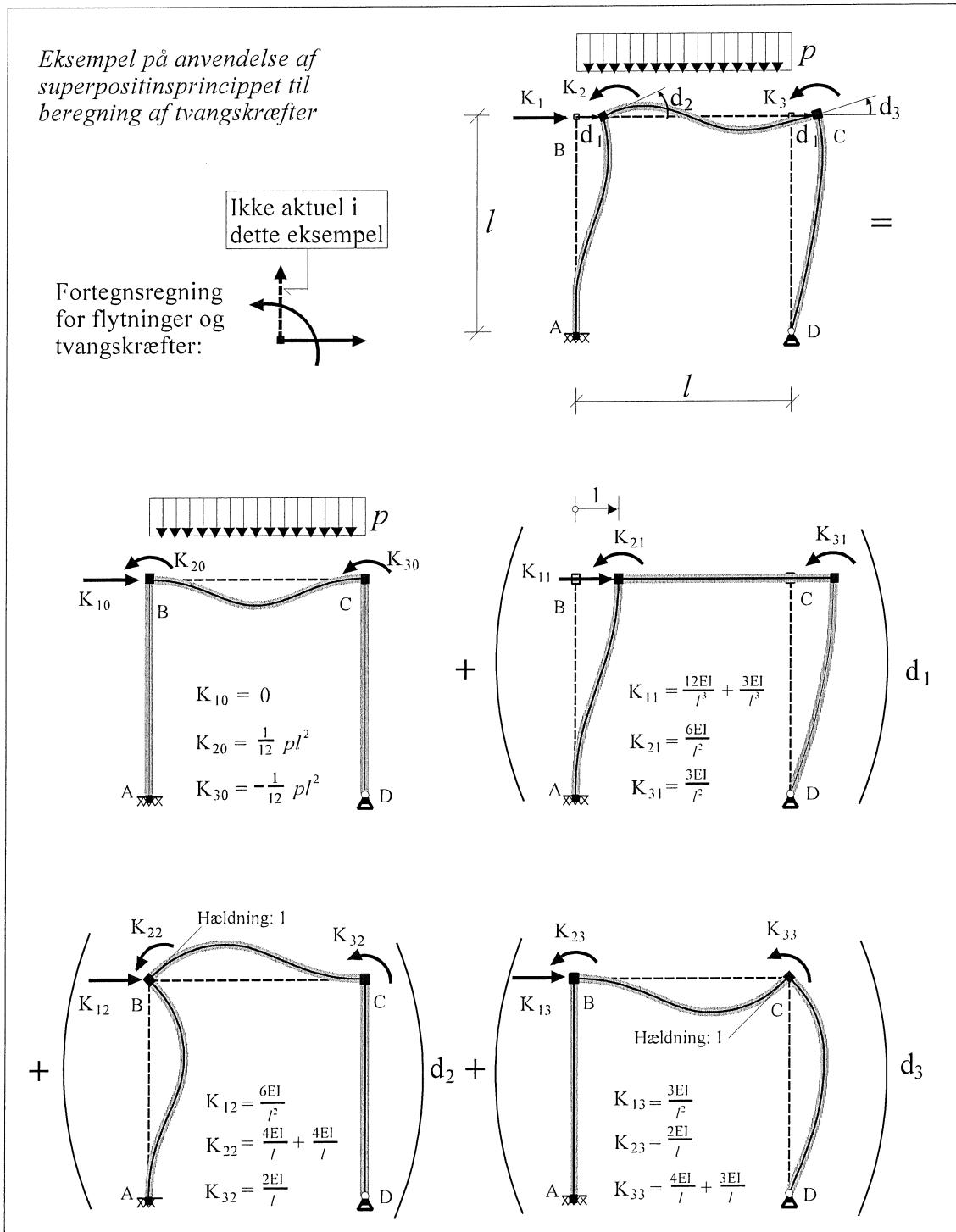
At det er den samlede vandrette ligevægt af knuderne B og C og ikke de vandrette ligevægte hver for sig, der skal sikres, hænger sammen med, at vi har forudsat, at de vandrette flytninger af disse knuder er ens. Den lodrette ligevægt af knuderne B og C er ikke relevant, da vi har forudsat, at de lodrette knudeflytninger er lig med nul.

For at finde en praktisk metode til at opstille de relevante ligevægtsligninger vil vi i første omgang vende problemstillingen om og forestille os, at vi påtvinger rammen (inclusiv belastning) et sæt på forhånd kendte knudeflytninger  $d_1$ ,  $d_2$  og  $d_3$ , hvor  $d_1$  betegner den vandrette flytning af knuderne B og C, medens  $d_2$  og  $d_3$  er vinkeldrejningen af henholdsvis knude B og knude C.  $d_1$  regnes positiv mod højre og  $d_2$  og  $d_3$  regnes positive mod uret.

For at kunne opretholde disse flytninger må knuderne fastholdes med den vandrette kraft  $K_1$  og momenterne  $K_2$  og  $K_3$  som vist øverst til højre på figur 9.7.  $K_1$ ,  $K_2$  og  $K_3$  kaldes under et *tvangskræfter*. Tvangskræfterne nummereres og regnes positive på samme måde som de tilsvarende knudeflytninger.

Vi kan nu betragte rammen som udsat for følgende fire påvirkninger:

- (0) Den ydre last ( $p$ )
- (1) Den vandrette forskydning ( $d_1$ ) af knuderne B og C
- (2) Drejningen ( $d_2$ ) af knude B
- (3) Drejningen ( $d_3$ ) af knude C



Figur 9.7 Deformationsmetoden

De nødvendige tvangskræfter bestemmes nemmest ved hjælp af superpositionsprincippet, idet bidragene fra de fire påvirkninger beregnes hver for sig og summeres som illustreret på figur 9.7. De tvangskræfter, der skal til når belastningen virker alene, dvs. når knudeflytningerne sættes lig med nul, benævnes  $K_{10}$ ,  $K_{20}$  og  $K_{30}$ .

De tvangskræfter, der skal til for at opnå en bestemt knudeflytning, udregnes af praktiske grunde først for den pågældende knudeflytning lig med 1, hvorefter resultatet multipliceres med den aktuelle værdi af knudeflytningen. Eksempelvis er  $K_{11}$ ,  $K_{21}$  og  $K_{31}$  de tvangskræfter, der skal til når  $d_1 = 1$ , medens ydre last og de øvrige knudeflytninger er lig med nul. ( $K_{ij}$  er således det bidrag til tvangskraft nr. i, der skyldes  $d_j = 1$ )

$K_{10}$ ,  $K_{11}$ , ... osv. bestemmes på basis af de aktuelle elementegenskaber som beskrevet i afsnittet elementegenskaber.

De vigtigste elementegenskaber er for overskuelighedens skyld samlet i Appendix C, hvor også momentkurver svarende til de enkelte påvirkninger er vist.

Ser vi på det aktuelle eksempel (og forudsættes, at alle 3 elementer har den samme konstante bøjningsstivhed  $EI$ ), fås eksempelvis, at den kraft ( $K_{11}$ ), der skal til at forskyde knuderne B og C stykket 1 mod højre, kan sammensættes af den kraft, der skal til at give elementet AB en forskydning på 1 i punkt B og den kraft, der skal til at give element DC en forskydning på 1 i punkt C.

Konsulteres Appendix C, ses det, at disse to kræfter er henholdsvis  $12EI/(l^3)$  og  $3EI/(l^3)$ , idet element DC har charnier i punkt D.  $K_{11}$  bliver således summen af disse to bidrag:  $K_{11} = 15EI/(l^3)$ . Appendix C viser ligeledes, at knude B samtidig skal påvirkes med et moment  $K_{21} = 6EI/(l^2)$  og knude C med et moment  $K_{31} = 3EI/(l^2)$  for at forhindre, at disse knuder drejer.

På figur 9.7 er samtlige K-værdier angivet. Læseren opfordres til at verificere disse værdier ved hjælp af Appendix C.

De tvangskræfter, der i alt skal til for at opnå knudeflytningerne  $d_1$ ,  $d_2$  og  $d_3$ , bliver nu i følge superpositionsprincippet:

$$\begin{aligned} K_1 &= K_{10} + K_{11}d_1 + K_{12}d_2 + K_{13}d_3 \\ K_2 &= K_{20} + K_{21}d_1 + K_{22}d_2 + K_{23}d_3 \\ K_3 &= K_{30} + K_{31}d_1 + K_{32}d_2 + K_{33}d_3 \end{aligned}$$

**Omvendt** kan man, hvis man ikke kender knudeflytningerne, men i stedet kender tvangskræfterne  $K_1$ ,  $K_2$  og  $K_3$ , bestemme de tilsvarende knudeflytninger ved at løse ovenstående ligningssystem.

*Deformationsmetoden anvendes i almindelighed til at bestemme de knudeflytninger, som en bestemt belastningsopstilling medfører. Ved denne anvendelse er tvangskræfterne altid lig med nul.* I det aktuelle eksempel er  $K_1$ ,  $K_2$  og  $K_3$  således alle er lig med nul. Vi har derfor følgende ligningssystem til bestemmelse af de ukendte knudeflytninger  $d_1$ ,  $d_2$  og  $d_3$ , idet de på figur 9.7 beregnede K-værdier er indsats:

$$\begin{aligned} 0 &= K_{10} + K_{11}d_1 + K_{12}d_2 + K_{13}d_3 \Rightarrow \frac{15EI}{l^3}d_1 + \frac{6EI}{l^2}d_2 + \frac{3EI}{l^2}d_3 = 0 \\ 0 &= K_{20} + K_{21}d_1 + K_{22}d_2 + K_{23}d_3 \Rightarrow \frac{6EI}{l^2}d_1 + \frac{8EI}{l}d_2 + \frac{2EI}{l}d_3 = \frac{-1}{12}pl^2 \\ 0 &= K_{30} + K_{31}d_1 + K_{32}d_2 + K_{33}d_3 \Rightarrow \frac{3EI}{l^2}d_1 + \frac{2EI}{l}d_2 + \frac{7EI}{l}d_3 = \frac{1}{12}pl^2 \end{aligned}$$

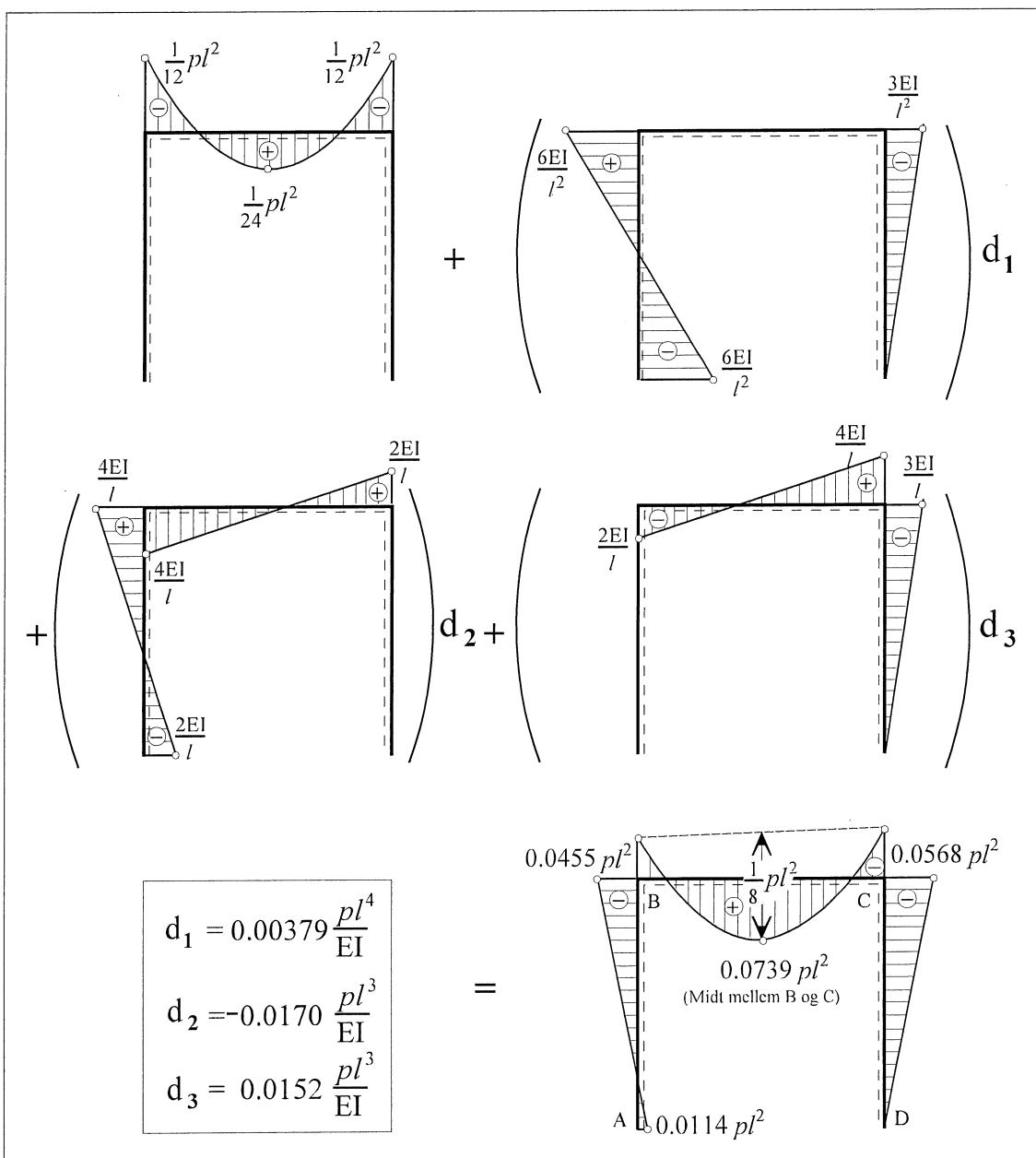
Løses dette ligningssystem, fås (med 3 betydnende cifre):

$$d_1 = 0.00379 \frac{pl^4}{EI} (= u_{BC}) ; \quad d_2 = -0.0170 \frac{pl^3}{EI} (= -\alpha_B) ; \quad d_3 = 0.0152 \frac{pl^3}{EI} (= \alpha_C)$$

Når knudeflytningerne er bestemt, kan snitmomenter og forskydningskræfter bestemmes ved hjælp af superpositionsprincippet og elementegenskaberne. Dette gælder også de tilsvarende reaktioner, hvilket i det aktuelle eksempel er de vandrette reaktioner i A og D samt indspændingsmomentet i A.

Da vi ser bort fra aksialdeformationer, kan normalkræfterne og de tilsvarende reaktioner (de lodrette reaktioner i A og D) derimod ikke bestemmes på denne måde. Disse størrelser må bestemmes ved hjælp af sædvanlige ligevægtsbetragtninger. Denne fremgangsmåde kan naturligvis også anvendes til at bestemme snitmomenter og forskydningskræfter, når blot et tilstrækkeligt antal reaktioner og/eller snitkræfter er bestemt.

Figur 9.8 viser hvorledes momentkurven for den betragtede ramme kan bestemmes ved hjælp af superpositionsprincippet og elementegenskaberne. Læseren opfordres til at kontrollere resultaterne ved hjælp af Appendix C.



Figur 9.8

Herefter kan proceduren ved anvendelse af deformationsmetoden opsummeres som følger:

- a) Identifikation af knuder og elementer (elementtyper).
- b) Identifikation af *relevante* knudeflytninger ( $d_i$ ) og tilhørende tvangskræfter ( $K_i$ ), samt nummerering og definition af positive retninger. (Det er dette punkt, der sædvanligvis giver anledning til de fleste fejl.)
- c) Beregning af de nødvendige tvangskræfter (på basis af Appendix C) ved følgende elementartilfælde:
  - (0) Belastningen virker, medens alle knudeflytninger ( $d_i$ ) er lig med nul ( $K_{i0}$ ).
  - (1)  $d_1 = 1$ , øvrige knudeflytninger lig med nul. Ingen belastning ( $K_{1j}$ ).
  - (2)  $d_2 = 1$ , øvrige knudeflytninger lig med nul. Ingen belastning ( $K_{2j}$ ).
  - ⋮
  - (n)  $d_n = 1$ , øvrige knudeflytninger lig med nul. Ingen belastning ( $K_{nj}$ ).  
(n = antal relevante knudeflytninger.)
- d) Opstilling af deformationsmetodens ligninger ved hjælp af superpositionsprincippet:
 
$$K_1 = 0 = K_{10} + K_{11}d_1 + K_{12}d_2 + \dots + K_{1n}d_n$$

$$K_2 = 0 = K_{20} + K_{21}d_1 + K_{22}d_2 + \dots + K_{2n}d_n$$

$$\vdots$$

$$K_n = 0 = K_{n0} + K_{n1}d_1 + K_{n2}d_2 + \dots + K_{nn}d_n$$

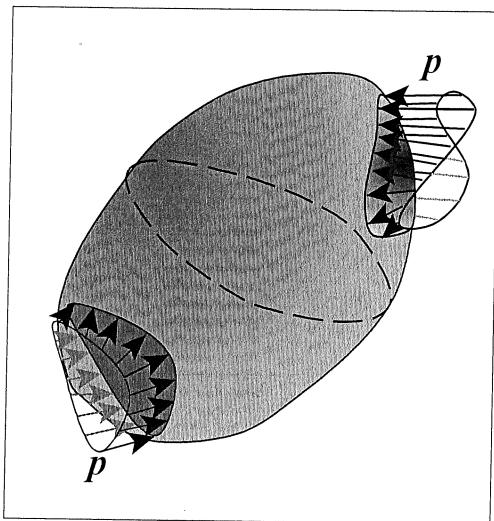
- Og løsning af ligningerne.
- e) Beregning af reaktioner og snitkræfter. (Dette kan gøres dels ved anvendelse af Appendix C sammen med superpositionsprincippet og dels ved hjælp af sædvanlige ligevægtsbetragtninger.)



## APPENDIX A PLAN SPÆNDINGSTILSTAND

### Spændingsbegrebet

Betratger vi et legeme i ligevægt, kan de kræfter, der påvirker legemet, opdeles i *fladekræfter* og *volumenkræfter*.



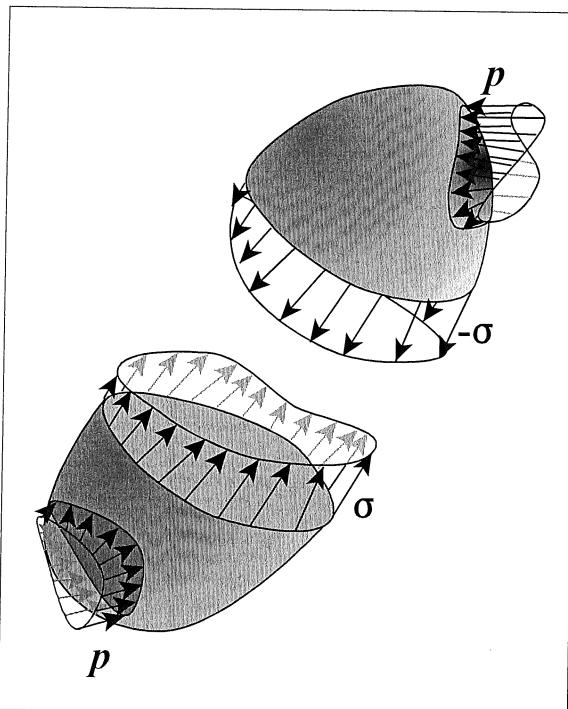
**Figur 1** *Fladekræfter*

Fladekræfterne er fordelte belastninger (*p*), der virker på legemets overflade som antydet på figur 1. Lasten *p* er i ethvert punkt på overfladen karakteriseret af en retning og en størrelse. Størrelsen er belastningens intensitet målt i kraft pr. arealenhed. På et infinitesimalt arealelement  $dA$  virker der således en resulterende kraft  $dF = pdA$ . Denne kraft ses at være en vektor med samme retning som *p*.

Fladelasten *p* siges at udgøre et *vektorfelt* defineret på legemets overflade.

Volumenkræfterne kan på tilsvarende måde karakteriseres som et vektorfelt (*g*), defineret i det indre af legemet. Volumenlasten *g* er således i ethvert punkt karakteriseret ved en retning og en lastintensitet målt i kraft pr. volumenenhed. På et infinitesimalt volumelement  $dV$  virker der derfor en resulterende kraft  $dG = gdV$ . Denne kraft er en vektor med samme retning som *g*. Volumenkræfterne skyldes i almindelighed tyngdefeltet.

Enkeltkræfter kan opfattes som resultanter af særligt koncentrerede udgaver af flade- eller volumenlaster.



**Figur 2** *Spændinger*

Vi tænker os nu, at det betragtede legeme er sammensat af to dellegemer, der støder op til hinanden langs en indre skilleflade - også kaldet et snit i legemet. På figur 1 er dette snit antydet med en punkteret linje.

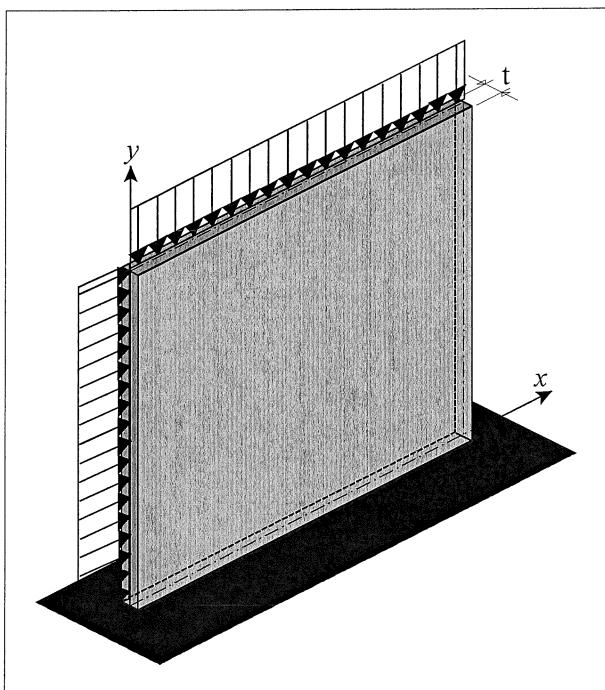
Da legemet som helhed er i ligevægt, må også de to dellegemer være i ligevægt. For at denne ligevægt skal kunne opretholdes, må de to dellegemer i almindelighed påvirke hinanden med lige store modsatrettede belastninger *σ* og *-σ* fordelt over snitfladen, som vist på figur 2.

I ethvert punkt på snitfladen er lasten *σ* (som enhver anden fladelast) karakteriseret ved sin retning og sin størrelse (intensitet). Vektoren *σ* benævnes *spændingen* i punktet. I almindelighed afhænger både retningen og størrelsen af *σ* af såvel punktets beliggenhed som snittets retning i punktet.

### Plan spændingstilstand

Et konstruktionselement, der er symmetrisk omkring en plan, kaldes en *skive*, hvis:

- Elementets udstrækning ( $t$ ) vinkelret på symmetriplanen kan regnes for lille i forhold til dets udstrækning i planen.
- Belastningen på elementet virker i symmetriplanen. (Hvis belastningen virker vinkelret på symmetriplanen, kaldes konstruktionselementet en plade.)



**Figur 3 Skive**

På grund af symmetrien indses det, at spændingerne i ethvert snit vinkelret på symmetriplanen kan ækvivaleres med en linjelast beliggende i symmetriplanen.

Endvidere vil den flytning af punkterne i symmetriplanen, som belastningen medfører, foregå i symmetriplanen. Symmetriplanen vil altså også efter deformationsværelse være plan. Indlægges et xy-koordinatsystem i symmetriplanen, vil de ovenfor nævnte størrelser derfor kunne udtrykkes som funktioner af  $x$  og  $y$  alene. Der er altså tale om et plant problem.

Vi vil i det følgende betragte spændingstilstanden i en skive med konstant tykkelse. Opfatter vi skiven som sammensat af et stort antal tynde lag parallelle med symmetriplanen, synes det at være en rimelig antagelse, at samtlige lag bliver utsat for den samme påvirkning. Sagt med andre ord vil vi antage, at spændingstilstanden i et lag uden for symmetriplanen vil være den

samme som spændingstilstanden i symmetriplanen. I et snit vinkelret på symmetriplanen vil spændingsvektorerne altså være parallelle med symmetriplanen. Denne type spændingstilstand benævnes *plan spændingstilstand*.

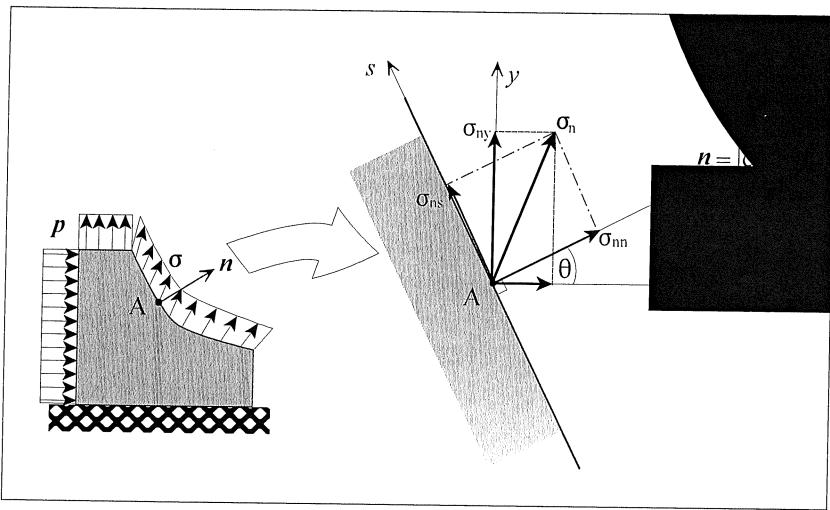
Som nævnt tidligere har det ingen mening at tale om spændingen i et punkt uden samtidig at tale om, hvilket snit gennem punktet der betragtes. En spændingsvektors størrelse og retning afhænger altså dels af punktets koordinater ( $x, y$ ), dels af hvilken retning snittet har. I den nærværende tekst vil vi indskrænke os til at betragte spændingerne gennem forskellige snit gennem samme punkt, medens spændingernes variation mht.  $x$  og  $y$  ikke vil blive behandlet.

Et snits retning i forhold til koordinatsystemet og hvilken af de to snitflader, der betragtes, udtrykkes gerne ved at angive koordinaterne til en *udadrettet enhedsnormalvektor* ( $n$ ) til snitfladen som illustreret på figur 4. Samtidig betegnes spændingsvektoren  $\sigma_n$  for at vise, at der er tale om spændingsvektoren svarende til snittet med normalen  $n$ .

Figur 4 viser endvidere spændingsvektorens akseparallelle komposanter i to koordinatsystemer: Det globale koordinatsystem ( $x, y$ ) og det lokale koordinatsystem ( $n, s$ ). Spændingskomposanterne indiceres efter følgende system: Første indeks refererer til snitnormalen, medens andet indeks angiver, hvilken akse komponanten er parallel med.

Spændingskomponanten  $\sigma_{nn}$  kaldes *normalspændingen* (fordi den går i snitnormalens retning), medens spændingen  $\sigma_{ns}$  kaldes *forskydningsspændingen*. Som symbol for forskydningsspændingen bruges ofte det græske bogstav  $\tau$  (tau) i stedet for  $\sigma$ .

Ser man på en enkelt snitflade som den, der er vist på figur 4, regnes spændingskomposanterne almindeligvis positive i akseretningerne. Beskriver man derimod spændingstilstanden et punkt ved at angive spændingerne i to på hinanden vinkelrette snit, benytter man den fortegnsdefinition, der er redegjort for i det følgende afsnit.



**Figur 4** Spændingskomposanter

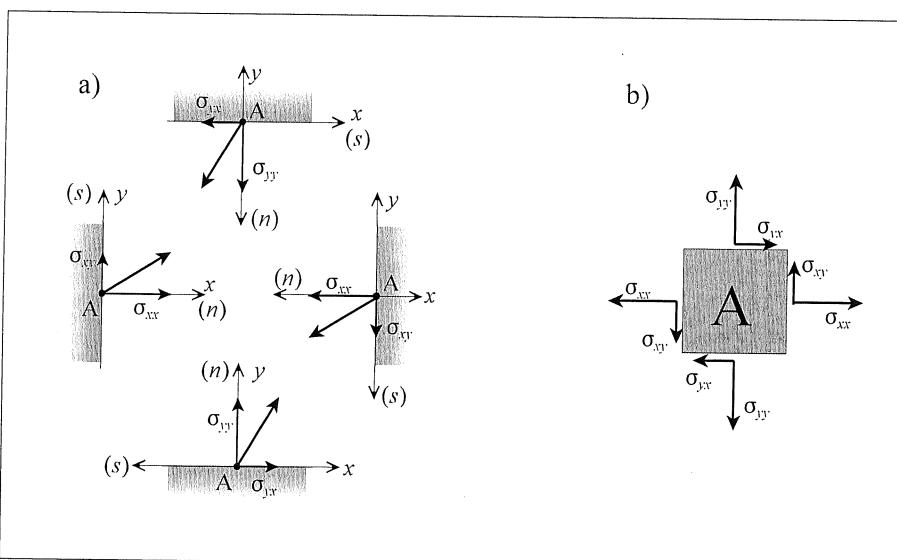
#### Spændinger i akseparallele snit

For snit, der er parallelle med akserne i det valgte xy-koordinatsystem, anvendes følgende fortegnsdefinition:

På de to snitflader, hvor enten x- eller y-aksen har samme retning som snitladens uadrettede normalvektor ( $\mathbf{n}$ ), regnes spændingskomposanterne positive i henholdsvis x- og y-retningen. På de to andre snitflader regnes spændingskomposanterne positive modsat disse retninger.

Figur 5a viser spændingskomposanternes positive retninger på de 4 snitflader. Det ses, at på de vandrette snitflader er den positive retning af forskydningsspændingen  $\sigma_{yx}$  modsat s-retningen og derfor ikke i overensstemmelse med den tidligere fortegnsdefinition.

For nemheds skyld vises spændingskomposanterne på de fire snitflader ofte som illustreret i figur 5b. Man skal være opmærksom på, at denne figur ligesom figur 5a viser spændingerne i to på hinanden vinkelrette snit gennem *sammen* punkt.

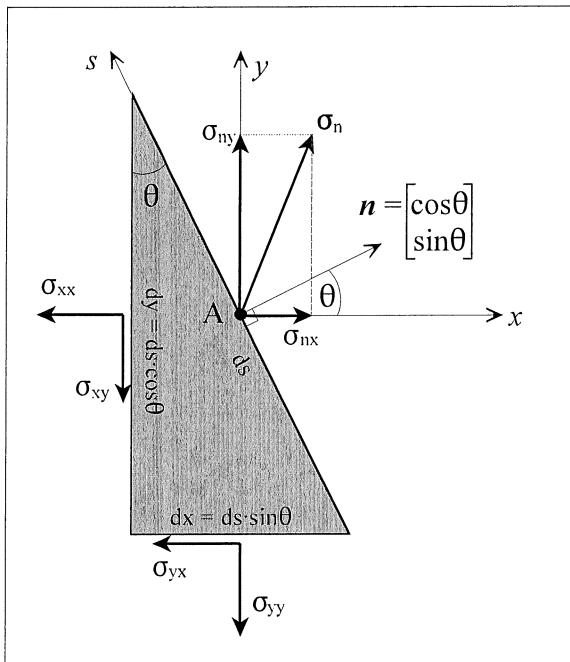


**Figur 5** Fortegnsdefinition for spændinger i akseparallele snit

### Spændinger i vilkårlige snit

I det følgende vil vi undersøge sammenhængen mellem spændingerne i forskellige snit gennem samme punkt (A).

Indledningsvis vil vi søge en sammenhæng mellem spændingerne på et vilkårligt "skråt" snit med snitnormalen  $\mathbf{n}$  og de akseparallele snit gennem samme punkt.



**Figur 6** Spændinger i skråt snit

Vi betragter ligevægten af en infinitesimal trekant, der begrænses af det skrål snit samt af snit parallelle med henholdsvis x- og y-aksen. (Se figur 6). Sidelængderne i denne trekant benævnes  $ds$ ,  $dx$  og  $dy$ . Disse benævnelser skal indikere, at vi underforstår en grænseovergang, der indebærer, at trekantens sidelængder går mod 0 således, at de spanssionskomposanter, der er vist på snittene, i sidste ende repræsenterer spanssionskomposanter på snit gennem det fælles punkt A.

Før de relevante ligevægtsligninger opstilles, skal det erindres, at for at bestemme de resulterende kræfter, der virker på snittene, skal spændingerne multipliceres med de respektive snitfladers arealer. For nemheds skyld vil vi sætte trekantens tykkelse til 1 således, at arealet af snitfladerne bliver henholdsvis  $ds$ ,  $dx = \sin\theta \cdot ds$  og  $dy = \cos\theta \cdot ds$ . (Det skal bemærkes, at disse udtryk kun er korrekte, når  $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ . Det overlades til læseren at verificere de efterfølgende beregninger for andre værdier af  $\theta$ .)

Hvis trekanten ud over spanssionserne er påvirket af en volumenlast med intensiteten  $g$ , vil resultanten af denne blive  $\frac{1}{2} \cdot g \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta \cdot ds^2$ . Volumenlasten vil derfor være lille af en størrelsesorden højere end spanssionsresultanterne, hvorfor dens bidrag til ligevægtsligningerne vil forsvinde ved den underforståede grænseovergang.

Herefter bliver ligevægtsligningerne som følger:

Moment om A:

$$\sigma_{xy} ds \cos\theta \cdot \frac{1}{2} ds \sin\theta - \sigma_{yx} ds \sin\theta \cdot \frac{1}{2} ds \cos\theta = 0 \Rightarrow \sigma_{xy} = \sigma_{yx}$$

Vandret projktion:

$$\sigma_{nx} ds - \sigma_{xx} ds \cos\theta - \sigma_{yx} ds \sin\theta = 0 \Rightarrow \sigma_{nx} = \sigma_{xx} \cos\theta + \sigma_{yx} \sin\theta$$

Lodret projktion:

$$\sigma_{ny} ds - \sigma_{xy} ds \cos\theta - \sigma_{yy} ds \sin\theta = 0 \Rightarrow \sigma_{ny} = \sigma_{xy} \cos\theta + \sigma_{yy} \sin\theta$$

Den første af disse ligninger viser, at  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ . Da xy-koordinatsystemet kan orienteres vilkårligt i planen, har vi hermed bevist følgende vigtige sætning:

### Forskydningsspændingerne i to på hinanden vinkelrette snit er lige store

Vi vil herefter indføre betegnelsen  $\tau$  (tau) for forskydningsspændingerne. Endvidere vil vi for nemheds skyld indføre betegnelserne  $\sigma_x$  og  $\sigma_y$  i stedet for  $\sigma_{xx}$  og  $\sigma_{yy}$ . Indsættes dette i projekionsligningerne, fås følgende sammenhæng mellem spanssionskomposanterne i et skråt snit og spanssionskomposanterne i akseparallele snit:

$$\sigma_{nx} = \sigma_x \cos\theta + \tau \sin\theta$$

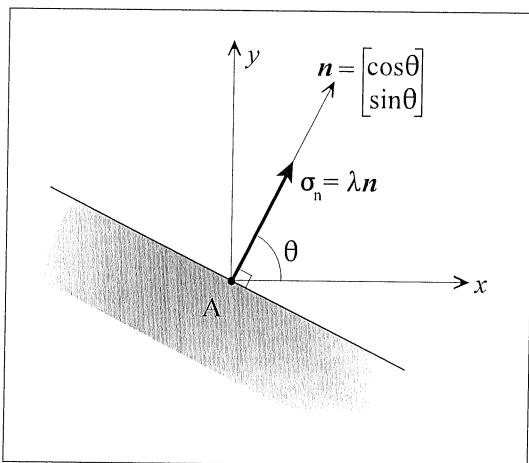
$$\sigma_{ny} = \tau \cos\theta + \sigma_y \sin\theta$$

På matrixform kan ovenstående udtrykkes ved matrixligningen:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{nx} \\ \sigma_{ny} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau \\ \tau & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad \text{eller på kort form: } \boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{S}\mathbf{n}$$

Matricen  $\mathbf{S}$  kaldes *spændingsmatricen*. Bemærk at spændingsmatricen er symmetrisk.

### Hovedspændinger



**Figur 7 Hovedspændinger**

Matrixligningen ovenfor giver os som sagt mulighed for at betemme spændingsvektoren i forskellige snit gennem samme punkt. Vi vil nu stille spørgsmålet: Findes der snit, hvor forskydningsspændingen er nul? Eller sagt med andre ord: Findes der snit, hvor spændingsvektoren er vinkelret på snittet og derfor proportional med snitnormalen  $\mathbf{n}$ ? (Se figur 7.)

Da  $\boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{S}\mathbf{n}$  er dette ensbetydende med at spørge, om der findes normalvektorer  $\mathbf{n}$ , der opfylder ligningen:  $\mathbf{S}\mathbf{n} = \lambda\mathbf{n}$ .

I den lineære algebra kaldes denne type problem som bekendt et *egenværdiproblem*. Hvis problemet har en løsning forskellig fra nulvektoren,

kaldes proportionalitetsfaktoren  $\lambda$  for en *egenværdi*, medens den tilsvarende værdi af  $\mathbf{n}$  kaldes en *egenvektor*.

Det fremgår af udtrykket  $\boldsymbol{\sigma}_n = \lambda\mathbf{n}$ , at egenværdien  $\lambda$  er et udtryk for længden af spændingsvektoren, dvs. spændingens størrelse, idet  $\mathbf{n}$  jo er en enhedsvektor.

For at løse problemet omskrives ligningen på følgende måde: Højresiden multipliceres med enhedsmatricen  $\mathbf{I}$ . (Dette ændrer ikke ligningen, da det som bekendt gælder, at  $\mathbf{In} = \mathbf{n}$ .) Herefter lyder ligningen:  $\mathbf{Sn} = \lambda\mathbf{In}$ . Ved at samle leddene på ligningens venstre side og sætte  $\mathbf{n}$  uden for en parentes fås:  $(\mathbf{S} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{n} = \mathbf{0}$

Med fuldt udskrevne matricer ser beregningerne således ud:

$$\begin{aligned} \mathbf{Sn} = \lambda\mathbf{n} \quad \text{eller} \quad & \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau \\ \tau & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \\ \mathbf{Sn} = \lambda\mathbf{In} \quad \text{eller} \quad & \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau \\ \tau & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \\ (\mathbf{S} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{eller} \quad & \begin{bmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau \\ \tau & \sigma_y - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Det ses, at  $(\mathbf{S} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{n} = \mathbf{0}$  repræsenterer et homogent ligningssystem.

Fra den lineære algebra vides, at et homogent ligningssystem kun har løsninger forskellige fra nulvektoren, hvis koefficientmatricens determinant er lig med nul. Som det ses af nedenstående beregninger, giver dette krav anledning til en andengradsligning (den karakteristiske ligning) til bestemmelse af de værdier af  $\lambda$ , der gør determinanten lig med 0.

$$\begin{aligned} \det(S - \lambda I) &= (\sigma_x - \lambda)(\sigma_y - \lambda) - \tau^2 = 0 \Rightarrow \\ \lambda^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\lambda + \sigma_x\sigma_y - \tau^2 &= 0 \Rightarrow \\ \lambda &= \frac{1}{2} \left[ \sigma_x + \sigma_y \pm \sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 4(\sigma_x\sigma_y - \tau^2)} \right] \Rightarrow \\ \lambda &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2} \end{aligned}$$

Som det fremgår af udtrykket for  $\lambda$ , vil der altid være 2 løsninger til ligningen, idet udtrykket under kvadratrodstegnet ikke kan blive negativt. (Dette hænger sammen med, at spændingsmatricen er symmetrisk.).

Hvis  $\sigma_y = \sigma_x$  og  $\tau = 0$  er de to løsninger sammenfaldende. Kaldes de to ens spændinger for  $\sigma$ , kan spændingsmatricen skrives på formen  $S = \sigma I$ , og ligningen  $\sigma_n = Sn$  degenererer derfor til:  $\sigma_n = \sigma In = \sigma n$ . Dette betyder, at spændingsvektoren i alle snit er proportional med normalvektoren, dvs. vinkelret på snittet, og at spændingens størrelse i alle snit vil være  $\sigma$ . En sådan spændingstilstand kaldes hydrostatisk spændingstilstand.

Vi vil i det følgende forudsætte, at spændingstilstanden *ikke er hydrostatisk*. For det aktuelle egenværdiproblem eksisterer der således altid to forskellige egenværdier. Da egenværdierne som tidligere nævnt repræsenterer størrelsen af spændingsvektoren  $\sigma_n$ , benævnes de *hovedspændinger*. Almindeligvis benyttes betegnelserne  $\sigma_1$  for den største hovedspænding og  $\sigma_2$  for den mindste.

Indføres betegnelserne  $c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$  og  $r = \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2}$ , har vi således:

1. hovedspænding:  $\sigma_1 = c + r$
2. hovedspænding:  $\sigma_2 = c - r$

De til egenværdierne svarende egenvektorer repræsenterer snitnormalerne til de snit, hvor hovedspænderne virker og dermed retningen af hovedspænderne. Disse retninger kaldes 1. og 2. *hovedretning* og de tilsvarende snit kaldes 1. og 2. *hovedsnit*. Der findes således 2 og kun 2 snit (hovedsnittene), for hvilke det gælder, at forskydningsspændingerne er 0.

Da vi tidligere har vist, at forskydningsspændingerne i to på hinanden vinkelrette snit er lige store, kan vi konkludere, at *hovedsnittene og dermed egenvektorerne er vinkelrette på hinanden*. Dette betyder, at vi kan nøjes med at bestemme den ene af egenvektorerne for eksempel den, der svarer til  $\lambda = \sigma_1$ . Dette gøres ved at løse ligningssystemet  $(S - \sigma_1 I)n = 0$ . Da  $\sigma_1$  er en egenværdi, er  $\det(S - \sigma_1 I) = 0$ , hvilket betyder, at de to ligninger, ligningssystemet består af, er lineært afhængige og derfor har samme løsning.

Vi vælger at betragte ligningen:  $\tau \cos \theta + (\sigma_y - \sigma_1) \sin \theta = 0$ . Divideres med  $\cos \theta$  fås:  
 $\tau + (\sigma_y - \sigma_1) \tan \theta = 0$ . Heraf kan tangens til den vinkel  $\theta$ , egenvektoren - det vil sige 1. hovedretning - danner med x-aksen, bestemmes:

$$\tan \theta = \frac{\tau}{\sigma_1 - \sigma_y}$$

*Mohrs cirkel*

Den tyske ingeniør Otto Mohr angav i 1882 en grafisk metode til bestemmelse af hovedspændinger og hovedretninger. Denne metode beskrives i det følgende.

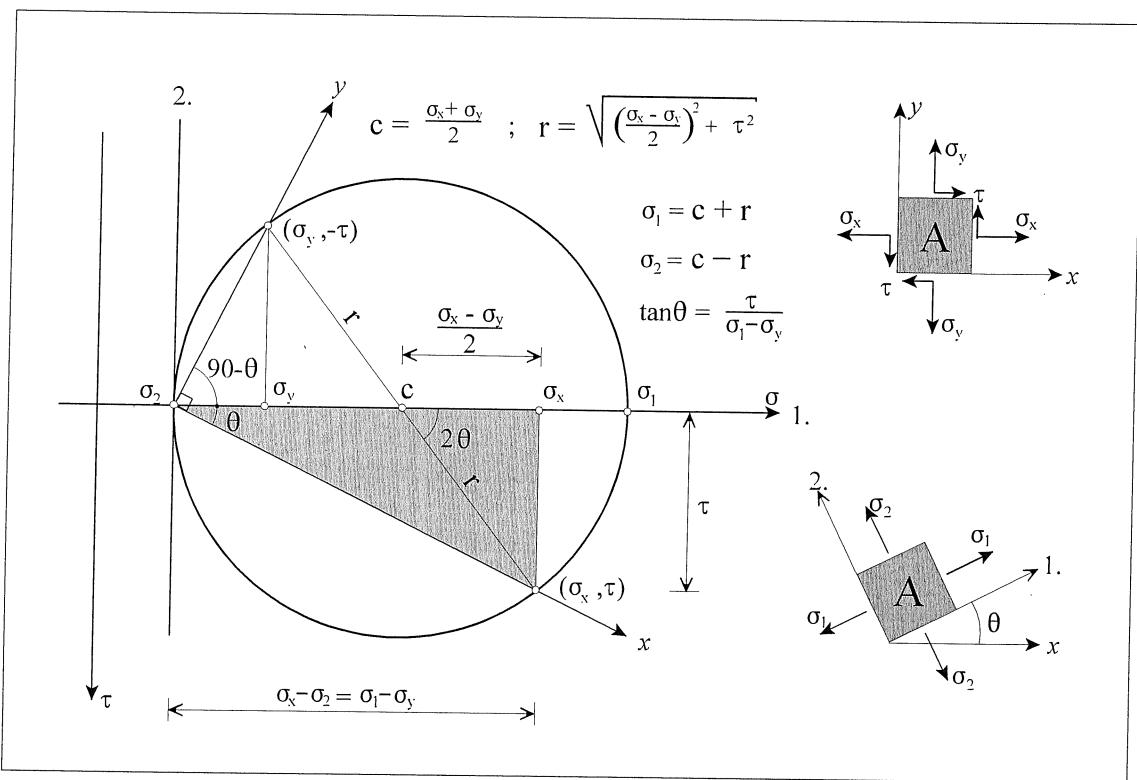
I et  $\sigma$ - $\tau$ -koordinatsystem, hvor akserne er orienteret som vist på figur 8, afsættes punkterne med koordinaterne  $(\sigma_x, \tau)$  og  $(\sigma_y, -\tau)$ .

De to punkter forbides med en ret linje. Det ses, at denne linje vil skære  $\sigma$ -aksen i punktet  $(c, 0)$ , idet  $c = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$ .

Afstanden mellem punkterne  $(c, 0)$  og  $(\sigma_x, \tau)$  kan nu beregnes vha. pythagoras. Det ses, at denne afstand netop bliver lig med den størrelse,  $r$ , der indgår i udtrykket for hovedspændingerne.

Med centrum i  $c$  tegnes herefter en cirkel med radius  $r$ . Denne cirkel vil skære  $\sigma$ -aksen i punkterne  $(c + r, 0) = (\sigma_1, 0)$  og  $(c - r, 0) = (\sigma_2, 0)$ .  $\sigma_1$  og  $\sigma_2$  kan således aflæses på tegningen.

Vinklen  $\theta$ , der kendetegner 1. hovedretning, finder vi som vinklen mellem  $\sigma$ -aksen og en ret linje fra punktet  $(\sigma_2, 0)$  til punktet  $(\sigma_x, \tau)$ . Dette indses ved at betragte den på figuren fremhævede trekant, idet tangens til vinklen  $\theta$  i denne trekant netop bliver  $\tau / (\sigma_1 - \sigma_y)$ .



Figur 8 Mohrs cirkel

Lader vi  $\sigma$ -aksen repræsentere 1. hovedretning, mens linjen fra  $(\sigma_2, 0)$  til  $(\sigma_x, \tau)$  repræsenterer x-aksen, giver figuren et direkte billede af, hvorledes de to akser ligger i forhold til hinanden. Dette kan benyttes, hvis man ønsker at anskueliggøre spændingstilstanden i henholdsvis xy-snittene og hovedsnittene som vist yderst til højre i figur 8.

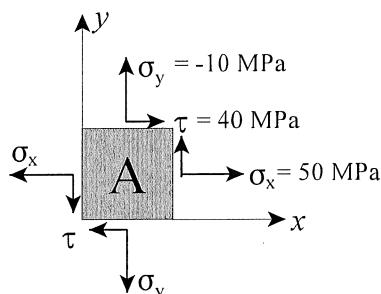
Bemærk, at hvis linjen fra  $(\sigma_2, 0)$  til  $(\sigma_x, \tau)$  repræsenterer x-aksen, vil linjen fra  $(\sigma_2, 0)$  til  $(\sigma_y, -\tau)$  repræsentere y-aksen, idet vinklen mellem de to linjer er en periferivinkel, der spænder over en diameter, og derfor er  $90^\circ$ .

Bemærk endvidere, at vinklen, der på figuren er angivet til  $2\theta$ , er en centervinkel, der spænder over samme bue som periferivinklen  $\theta$ , og derfor er dobbelt så stor som denne.

**Eksempel A1** Anvendelse af Mohrs cirkel

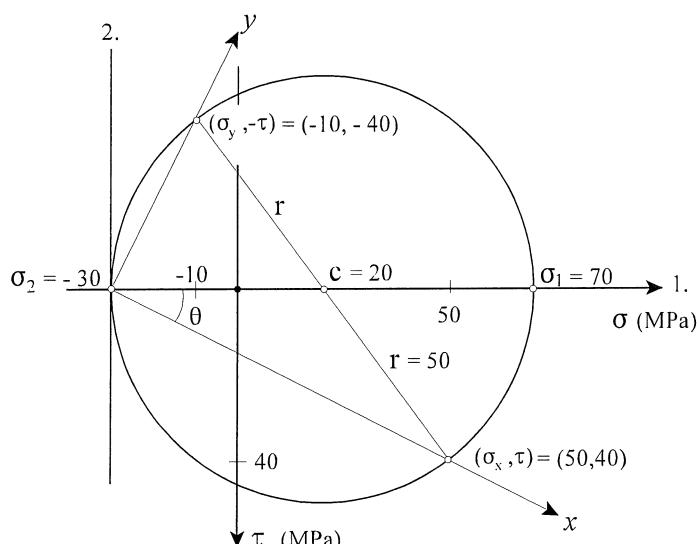
I et lodret og et vandret snit gennem et punkt (A) i en skive, har man fundet de spændinger, der er vist på hosstående figur.

Vi ønsker at bestemme hovedspændingerne og hovedretningerne i punktet A ved hjælp af Mohrs cirkel.



I et  $\sigma \tau$ -koordinatsystem afsættes punkterne  $(\sigma_x, \tau) = (50, 40)$  og  $(\sigma_y, -\tau) = (-10, -40)$ .

Disse punkter forbides af en ret linje, og med centrum i det punkt (c), hvor denne linje skærer  $\sigma$ -aksen tegnes en cirkel gennem de afsatte punkter. Herefter kan hovedspændingerne  $\sigma_1$  og  $\sigma_2$  i principippet aflæses som abcisserne til de punkter, hvor cirklen skærer  $\sigma$ -aksen, ligesom vinklen mellem 1. hovedretning og x-aksen kan aflæses som vinklen mellem  $\sigma$ -aksen og en ret linje gennem punkterne  $(0, \sigma_2)$  og  $(\sigma_x, \tau)$ . Se nedenstående figur.



Som et alternativ til en direkte aflæsning af  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  og  $\theta$ , kan Mohrs cirkel anvendes som støtte for en beregning af disse størrelser. Ved at betragte Mohrs cirkel ses det at:

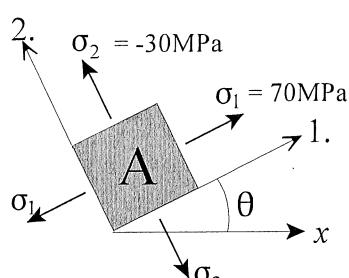
$$c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{50 + (-10)}{2} = 20 \text{ MPa} \quad \text{og} \quad r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} = \sqrt{\left(\frac{50 - (-10)}{2}\right)^2 + 40^2} = 50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = c + r = 20 + 50 = 70 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = c - r = 20 - 50 = -30 \text{ MPa}$$

$$\tan \theta = \frac{\tau}{\sigma_x - \sigma_2} = \frac{40}{50 - (-30)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = 26.56^\circ$$



Hosstående figur viser hvorledes hovedretninger og hovedsnit er orienteret i forhold til det oprindelige xy-koordinatsystem.

Bemærk, at den relative orientering af akserne kan aflæses direkte af Mohrs cirkel.

### Normal- og forskydningsspændinger i vilkårlige snit

Størrelsen af spændingskomponanterne  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  og  $\tau$  i et bestemt punkt afhænger naturligvis af hvorledes vi orienterer xy-koordinatsystemet i planen, dvs. hvilke snit vi udnævner til at være x-hhv. y-snit. Hovedspændingernes størrelse og retning er derimod fysiske realiteter og må som sådanne være uafhængige af det valgte koordinatsystem.

Af udtrykkene for hovedspændingerne:  $\sigma_1 = c + r$  og  $\sigma_2 = c - r$  ses det at  $2c = \sigma_1 + \sigma_2$  og  $2r = \sigma_1 - \sigma_2$ . Da  $\sigma_1$  og  $\sigma_2$  er uafhængige af koordinatsystemets orientering, vil  $c$  og  $r$  således også være det.

$$\text{Af udtrykket for } r \text{ fås ved kvadrering: } r^2 = \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2$$

Af definitionen af  $c$ :  $2c = \sigma_x + \sigma_y$  fås:  $\sigma_y = 2c - \sigma_x$ , der ved indsættelse i ovenstående giver:

$$r^2 = (\sigma_x - c)^2 + \tau^2$$

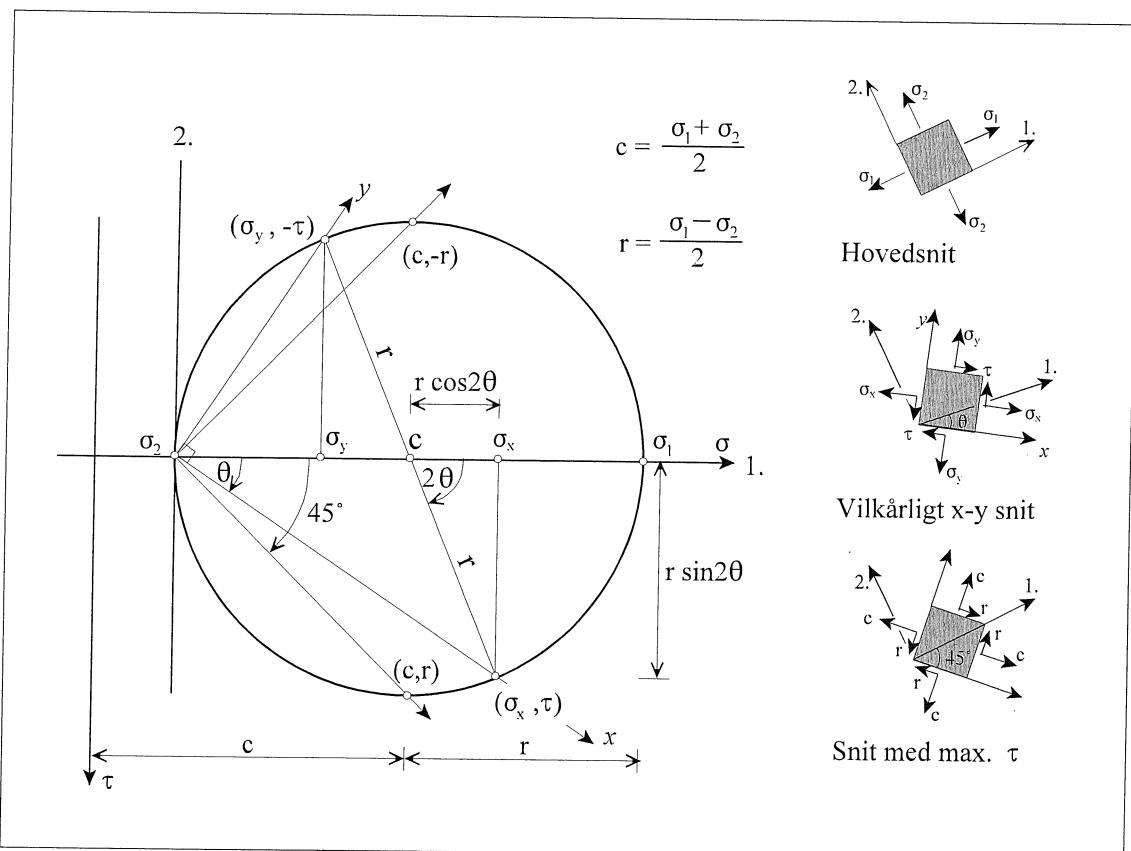
Da  $r$  og  $c$  er konstanter, viser dette udtryk, at punktet  $(\sigma_x, \tau)$  ligger på en cirkel (Mohrs cirkel) med centrum i  $(c, 0)$  og radius  $r$ , uanset hvilken orientering xy-koordinatsystemet har i forhold til hovedretningerne.

Hvis vi derfor vender problemstillingen om og tager udgangspunkt i hovedretningerne, medens vi lader x-y koordinatsystemet rotere således, at vinklen  $\theta$  mellem 1. hovedretning og x-aksen varierer, vil vi på mohrs cirkel kunne aflæse hvorledes normalspændingen  $\sigma_x$  og forskydningsspændingen  $\tau$  varierer med snittets vinkel  $\theta$  med 1. hovedretning.

Betratges figur 9 ses således, at

$$\sigma_x = c + r \cos 2\theta ; \quad \tau = r \sin 2\theta$$

Endvidere ses det, at den maksimale forskydningsspænding  $\tau_{\max} = r$ , findes i de snit, der danner vinklen  $45^\circ$  med hovedsnittene.



Figur 9 Spændinger i forskellige snit

## Notat om von Mises spændingen

v. Mises referencespænding bruges ofte, når man skal vurdere om et materiale flyder under en fler-akset spændingstilstand.

Udgangspunktet er såkaldte spændingsinvarianter, dvs kombinationer af spændinger, som ikke afhænger af retning på det snit, man ser på. Opskrevet i hovedspændingerne  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  for et rumligt legeme er den mest hyppige invariant

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \quad (1.1)$$

Imidlertid viser forsøg, at flydning af et legeme ikke afhænger af et eventuelt ydre tryk  $p$ , svarende til

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p \quad (1.2)$$

Dermed bliver den modificerede invariant

$$\begin{aligned} & \left( \sigma_1 - \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right)^2 + \left( \sigma_2 - \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right)^2 + \\ & \left( \sigma_3 - \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right)^2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

et bedre mål for spændingen i et punkt i forhold til den en-aksede flydespænding  $f_y$ .

For plane tilstænde ( $\sigma_3 = 0$ ) reduceres udtrykket (1.3) til:

$$\frac{2}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2) \quad (1.4)$$

Herudfra defineres v.Mises spændingen for plane tilstænde som

$$\sigma_{vMises} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \quad (1.5)$$

Forsøg med metalmaterialer viser, at

$$\sigma_{vMises} = f_y \quad (1.6)$$

giver en god beskrivelse af, fra hvornår flydning starter i punkt med fler-akset spændingstilstand. Flydefladen, som fremgår af udtrykkene (1.5)-(1.6), er en ellipse i et koordinatsystem med  $\sigma_1, \sigma_2$  som akser.

Udnyttes relationerne mellem hovedspændingerne og spændingskomposanterne  $\sigma_x, \sigma_y, \tau$ , givet i forbindelse med Mohrs cirkel side 91, ses efter lidt regning, at v. Mises referencespændingen for plane problemer også kan skrives

$$\sigma_{vMises} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau^2} \quad (1.7)$$

v. Mises spændingen er ofte den spænding, som udskrives fra FEM programmer.

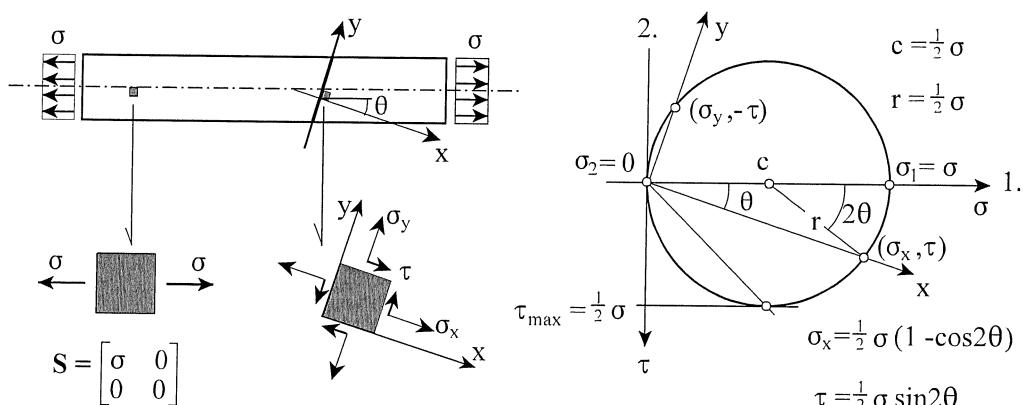
**Eksempel A2 Specielle spændingstilstande**

**Enakset træk** forekommer f.ex. i en stang udsat for et centralt virkende aksialt træk svarende til den ensformigt fordelede trækspænding  $\sigma$  som vist på nedenstående figur.

Da alle punkter i stangen er ens påvirket, viser en ligevægtsbetragtning, at forskydningsspændingen i stangens tværssnit samt normalspændingen i akseparallel snit er 0.  $\sigma$  repræsenterer således første hovedspænding, medens anden hovedspænding er lig med 0.

Herefter er det simpelt at tegne Mohr's cirkel og anvende denne til at bestemme normal og forskydningsspændinger i et vilkårligt skråt snit, som det er vist på figuren.

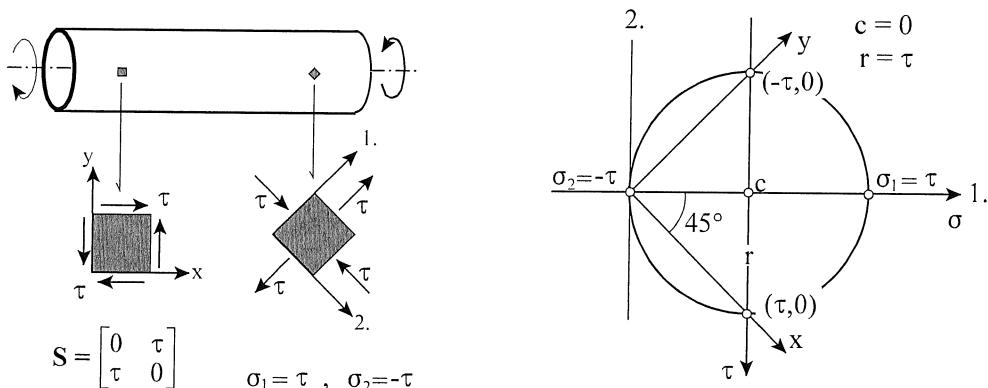
**Enakset tryk** kan naturligvis analyseres på tilsvarende måde.



**Ren forskydning** forekommer f.ex. i en tyndvægget cirkulær cylinder udsat for vridning.

Af symmetrigrunde må alle punkter på cylindervæggen være ens påvirket, hvorfor en ligevægtsbetragtning viser, at normalspændingerne i såvel tværssnit som akseparallel snit må være nul.

Mohrs cirkel bliver således en cirkel med centrum i koordinatsystemets begyndelsespunkt og med radius  $\tau$  som vist på nedenstående figur. Af figuren fremgår det endvidere, at hovedspændingerne bliver:  $\sigma_1 = \tau$  og  $\sigma_2 = -\tau$  samt, at hovedretningerne danner vinklen  $45^\circ$  med de akseparallele snit.



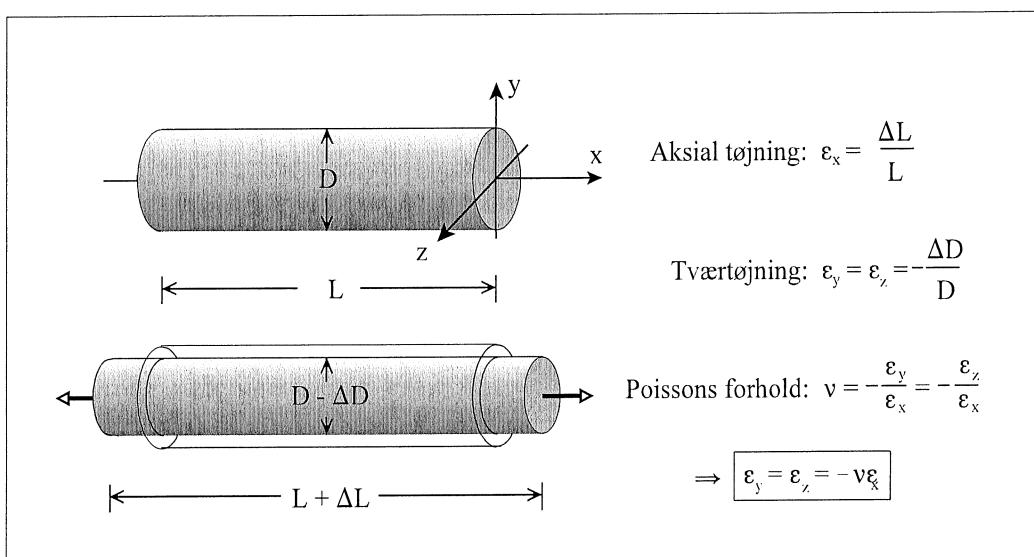
### Tøjninger ved enakset spændingstilstand

Udsætter man en stang af homogen, isotrop materiale for centralt træk, vil man opleve, at stangen bliver lidt længere og samtidig en smule smallere, som det (meget overdrivet) er illustreret på figur 10. Deformationen i længderetningen, defineret som længdeændringen divideret med den oprindelige længde, kaldes som bekendt stangens aksiale tøjning eller længdetøjning. Tilsvarende kan tværtøjningen dvs. deformationen i tværretningen defineres som ændringen i stangens tykkelse divideret med den oprindelige tykkelse.

Både længdetøjning og tværtøjning regnes positive, når der er tale om positive længdeændringer. For en trækpåvirket stang er længdetøjningen således positiv, medens tværtøjningen er negativ. Det omvendte forhold gør sig naturligvis gældende for en trykpåvirket stang.

Man definerer nu *Poissons forhold* som forholdet mellem tværtøjningen og længdetøjningen med modsat fortegn. Herved bliver Poissons forhold et positivt tal.

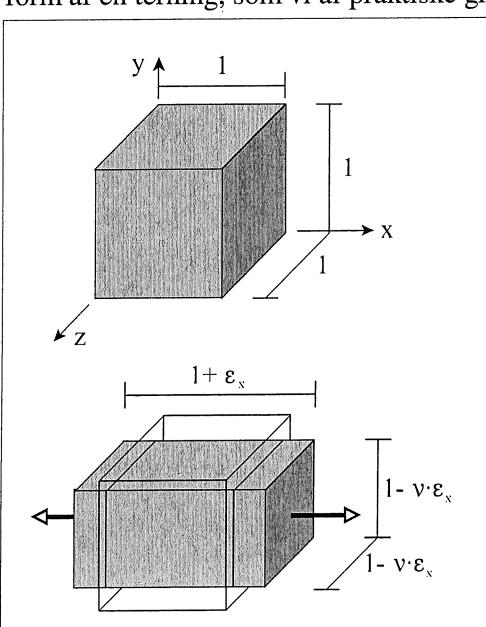
Poissons forhold benævnes også *tværkontraktionsforholdet* og repræsenteres sædvanligvis ved det græske bogstav  $v$  (ny).



**Figur 10** *Tværkontraktion*

For et *lineærelastisk materiale* er Poissons forhold en materialekonstant på samme måde som elasticitetskoefficienten  $E$ .

For at få et indtryk af størrelsесordenen af Poissons forhold  $v$  betragtes en del af trækstangen i form af en terning, som vi af praktiske grunde giver sidelængden 1. (Se figur 11).



Før deformationen har denne terning volumenet  $V_0 = 1$ .

Efter deformationen er volumenet:

$$V = (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z) = (1 + \epsilon_x)(1 - v \epsilon_x)^2$$

idet  $\epsilon_y = \epsilon_z = -v \epsilon_x$ . (Se figur 10).

Volumenændringen  $\Delta V = V - V_0$  bliver:

$$\begin{aligned} \Delta V &= (1 + \epsilon_x)(1 - v \epsilon_x)^2 - 1 \\ &= 1 - \epsilon_x - 2v \epsilon_x + v(v - 2)\epsilon_x^2 + \epsilon_x^3 v^2 - 1 \end{aligned}$$

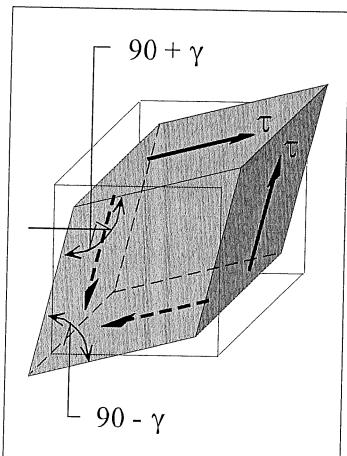
Forudsættes som sædvanligt at  $| \epsilon_x | \ll 1$ , kan leddene med  $\epsilon_x$  i en potens større end 1 bortkastes. Herefter bliver volumenændringen:

$$\Delta V \approx \epsilon_x(1 - 2v)$$

Af dette udtryk ses, at hvis vi forudsætter, at der vil ske en positiv volumenændring når et legeme udsættes for træk må det gælde at  $v < 0.5$ . Eksempelvis kan det nævnes at  $v = 0.3$  for stål og ca. det halve for beton.

**Figur 11** *Volumenændring ved træk*

### Tøjninger ved ren forskydning



**Figur 12** Ren forskydning

Vi betragter en terning påvirket til ren forskydning. Da terningen ikke er påvirket af normalspændinger vil kantlængderne ikke ændre sig ved denne påvirkning. Derimod vil terningen blive trukket skæv idet de 2 spændingsløse sider vil få rombefacon, medens de resterende 4 sider vil forblive kvadrater som vist på figur 12.

Den *vinkelændring*, der er en følge af denne deformation, benævnes *forskydningsøjningen* eller *vinkeltøjningen* og symboliseres med det græske bogstav  $\gamma$  (gamma).

For et *lineærelastisk materiale* gælder, at vinkeltøjningen og forskydningsspændingen er proportionale. Denne sammenhæng kan skrives på formen:

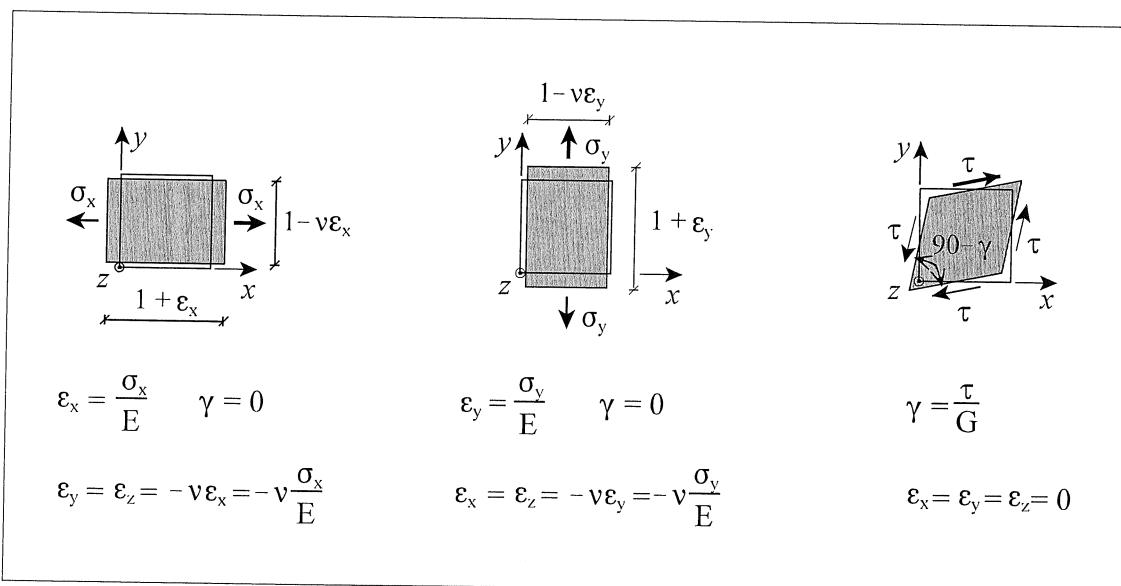
$$\tau = G\gamma \quad \text{eller} \quad \gamma = \frac{\tau}{G}$$

Konstanten  $G$  kaldes *Forskydningsmodulen*.

Det ses at sammenhængen mellem  $\tau$  og  $\gamma$ , der kaldes *Hooke's lov for ren forskydning*, er helt analog til Hooke's lov for enkset påvirkning ( $\sigma = E \epsilon$ )

### Hooke's lov for plan spændingstilstand

Med afsæt i forholdene for enkset påvirkning og ren forskydning af en terning med kantlængden 1 (se figur 13), kan vi nu opstille en generel sammenhæng mellem spændinger og tøjninger ved plan spændingstilstand.



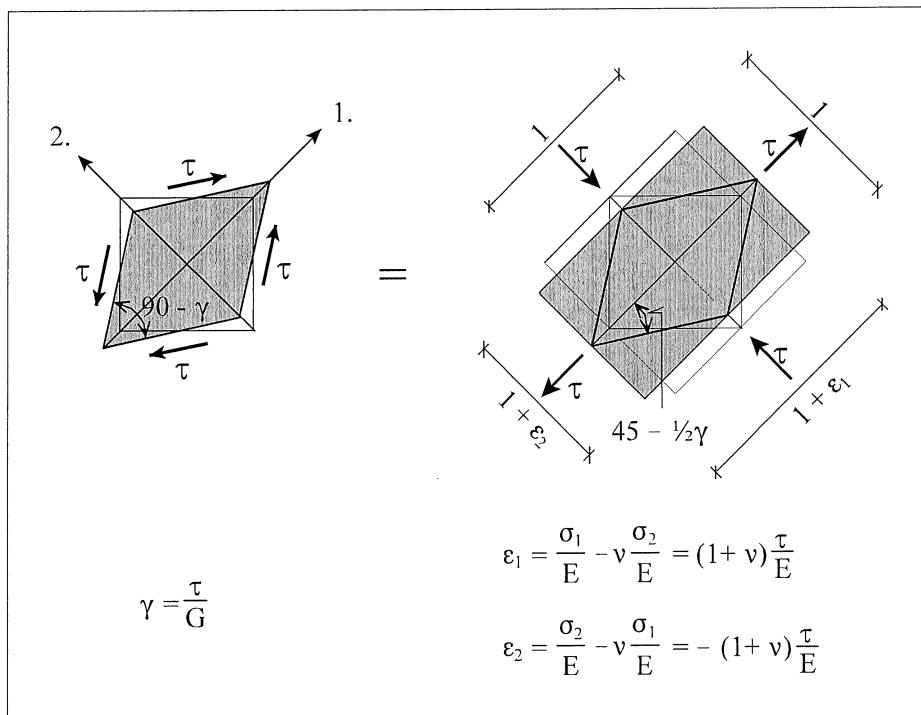
**Figur 13** Tøjninger og spændinger ved simple deformationstilstande

Betruger vi således den generelle plane spændingstilstand, som en sum af de på figuren viste simple spændingstilstande, fås umiddelbart nedenstående sammenhæng mellem tøjninger og spændinger:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - v \frac{\sigma_y}{E} \quad ; \quad \epsilon_y = -v \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} \quad ; \quad \gamma = \frac{\tau}{G}$$

Vi har i et tidligere eksempel vist, at hvis vi i akseparallele snit har ren forskydning med forskydningsspændingen  $\tau$ , vil vi i snit, der danner en vinkel på  $45^\circ$  med akserne, finde hovedspændingerne  $\sigma_1 = \tau$  og  $\sigma_2 = -\tau$ . som illustreret på figur 14.

Ved at betragte tøjningstilstanden ved ren forskydning og sammenligne med den tøjningsstilstand, de tilsvarende hovedspændinger fremkalder, er det muligt, at bestemme en sammenhæng mellem materialekonstanterne E, G og v.



**Figur 14**

Betruger vi således den skraverede trekant på figur 14 ses det at:

$$\tan(45 - \frac{1}{2}\gamma) = \frac{1 + \varepsilon_2}{1 + \varepsilon_1} = \frac{1 - (1+v)\frac{\tau}{E}}{1 + (1+v)\frac{\tau}{E}}$$

Anvendes formlen  $\tan(u - v) = (\tan(u) - \tan(v)) / (1 + \tan(u)\tan(v))$  kan  $\tan(45 - \frac{1}{2}\gamma)$  skrives på formen:

$$\tan(45 - \frac{1}{2}\gamma) = \frac{\tan(45) - \tan(\frac{1}{2}\gamma)}{1 + \tan(45)\tan(\frac{1}{2}\gamma)} = \frac{1 - \tan(\frac{1}{2}\gamma)}{1 + \tan(\frac{1}{2}\gamma)}$$

Sammenlignes de to udtryk ses det at:  $\tan(\frac{1}{2}\gamma) = (1+v)\tau/E$ . Forudsættes "små tøjninger" således, at  $\gamma \ll 1$ , er  $\tan(\frac{1}{2}\gamma) \approx \frac{1}{2}\gamma$ . Herved opnås følgende sammenhæng mellem  $\gamma$  og  $\tau$ :

$$\frac{1}{2}\gamma = \frac{1+v}{E}\tau \Rightarrow \tau = \frac{E}{2(1+v)}\gamma$$

Sammenlignes dette udtryk med Hookes lov for ren forskydning ( $\tau = G\gamma$ ), ses det, at:

$$G = \frac{E}{2(1+v)}$$

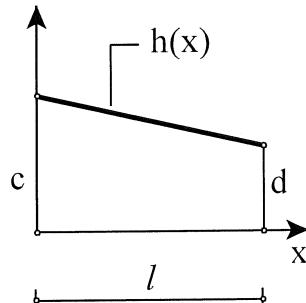
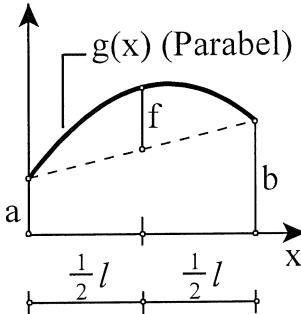
Indsættes dette i udtrykkene nederst på modsatte side og løses ligningerne mht. til spændingerne fås *Hookes lov for plan spændingstilstand*:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-v^2} (\varepsilon_x + v\varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-v^2} (\varepsilon_y + v\varepsilon_x) \quad \text{eller} \quad \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{bmatrix} = \frac{E}{1-v^2} \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma \end{bmatrix} \\ \tau &= G\gamma = \frac{E}{2(1+v)} \gamma \end{aligned}$$



## APPENDIX B: INTEGRATIONSFORMLER

Generel formel:  $\int_0^l g(x)h(x)dx = \frac{1}{6}l[2(fc+fd+ac+bd)+bc+ad]$



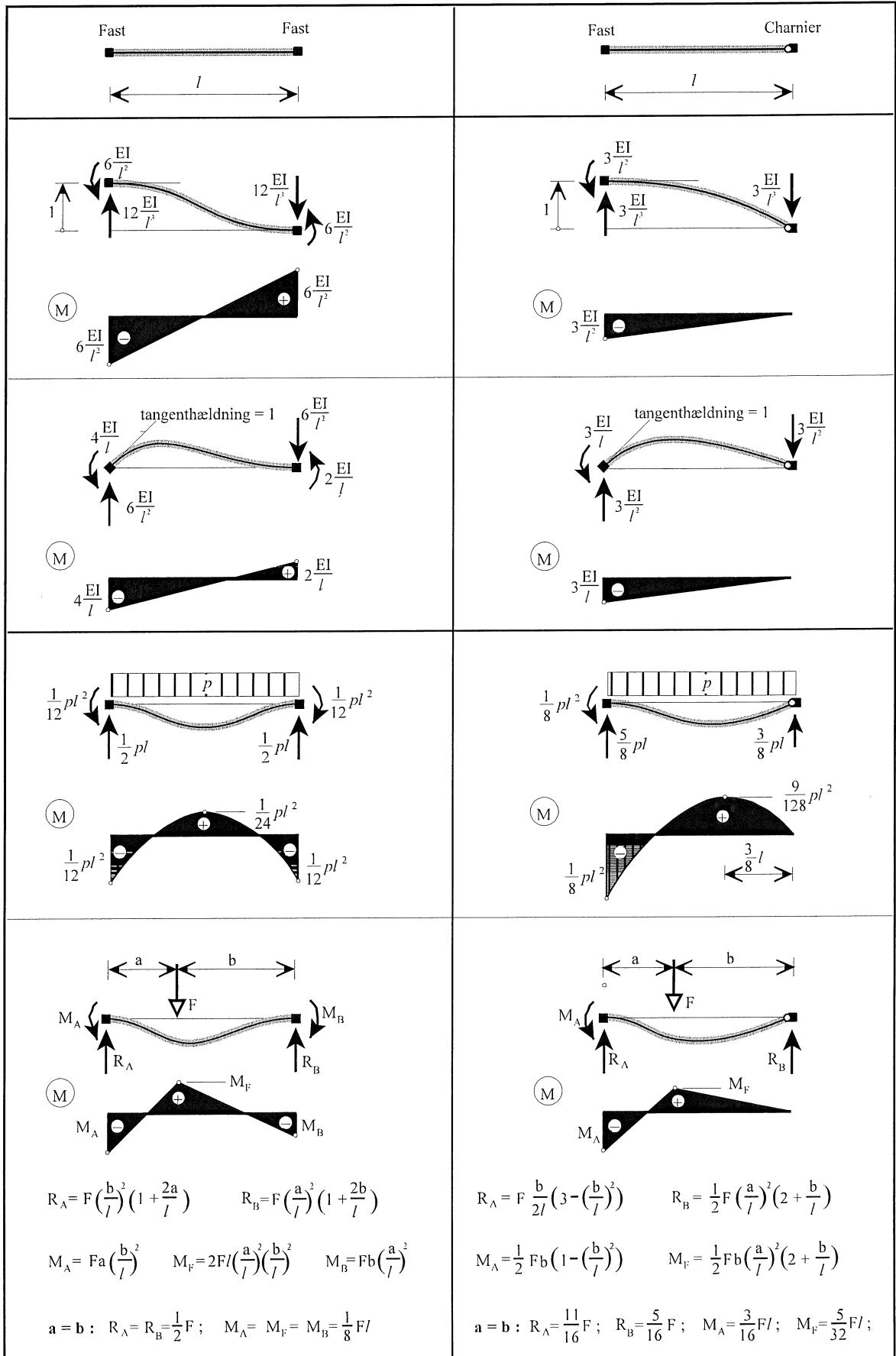
Formlen gælder  
selvom nogle af  
værdierne a - f  
er negative

Specielle formler (kan udledes af ovenstående) Nb! --- = vandret tangent

$g(x)$	$h(x)$	$\int_0^l g(x)h(x)dx$	$g(x)$	$h(x)$	$\int_0^l g(x)h(x)dx$
		$\frac{1}{6}l[2(ac+bd)+bc+ad]$			$\frac{1}{12}lb(3c+5d)$
		$\frac{1}{6}la(2c+d)$			$\frac{1}{4}lbc$
		$\frac{1}{3}lac$			$\frac{5}{12}lbd$
		$\frac{1}{6}lad$			$\frac{17}{48}lbh$
		$\frac{1}{4}lh(c+d)$			$\frac{1}{12}lb(c+3d)$
		$\frac{1}{3}lf(c+d)$			$\frac{1}{12}lbc$
		$\frac{5}{12}lfh$			$\frac{1}{4}lbd$
		$\frac{2}{3}fc$			$\frac{1}{3}lbd$
		$\frac{1}{3}fc$			$\frac{7}{48}lbh$



## APPENDIX C: BJÆLKEELEMENTER

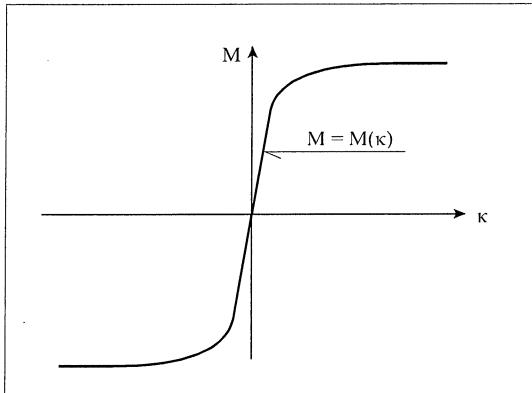


## **PLANE PLASTISKE BJÆLKER**

### **INDHOLD**

1. BØJNINGSARBEJDSLINJEN .....	2
1.1 Beregning af bøjningsarbejdselinje .....	3
1.2 Beregning af flydemomenter .....	7
1.3 Beregning af brudmomenter .....	8
1.4 N-M-diagrammer .....	10
2. FLYDELEDSMETODEN .....	12
2.1 Flydeled .....	12
2.2 Flydemekanismer .....	14
2.3 Ekstremalsætningerne .....	16
2.4 Beregningsmetoder .....	20

## 1. BØJNINGSARBEJDSLINJEN



**Figur 1.1** Bøjningsarbejdselinje

Ved et bjælketværtsnits bøjningsarbejdslinje forstås den kurve, der beskriver sammenhængen mellem det bøjningsmoment ( $M$ ), tværssnittet er utsat for, og den tilsvarende krumning ( $\kappa$ ) af bjælkeaksen.

Analytisk er bøjningsarbejdslinjen således momentet som funktion af krumningen:  $M = M(\kappa)$ .

Hvis ikke andet er nævnt, forudsættes det, at tværssnittet ikke er normalkraftpåvirket.

Et eksempel på en typisk bøjningsarbejdslinje er vist på figur 1.1

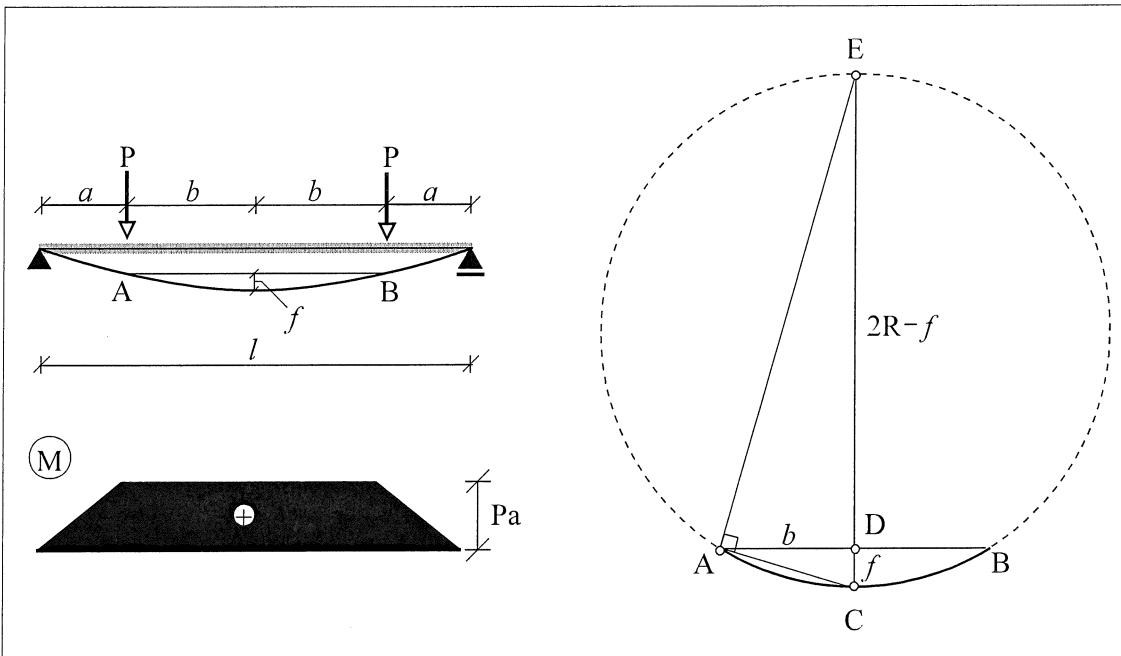
I laboratoriet kan bøjningsarbejdslinjen for et givent tværsnit bestemmes ved forsøg med en simpelt understøttet bjælke symmetrisk belastet med to lige store enkeltkræfter som vist på figur 1.2. Ser vi i første omgang bort fra bjælkens egenvægt, vil momentet på strækningen mellem de to kræfter være konstant og have størrelsen:  $M = Pa$ .

Det konstante moment medfører, at også krumningen er konstant således, at bjælkeaksens udbøjningslinje på den pågældende strækning bliver en del af en cirkel. Kaldes radius i denne cirkel for  $R$ , er bjælkeaksens krumning på den pågældende strækning:  $\kappa = 1/R$

Betraktes cirklen til højre på figur 1.2, ses det, at trekantene EDA og ADC er ensvinklede, hvorfor det gælder, at:

$$\frac{2R-f}{b} = \frac{b}{f} \Rightarrow R = \frac{1}{2} \frac{b^2 + f^2}{f} \Rightarrow \kappa = \frac{1}{R} = 2 \frac{f}{b^2 + f^2} \approx \frac{2f}{b^2} \text{ såfremt } f \ll b$$

Måles sammenhørende værdier af  $P$  og  $f$ , kan man på basis af ovenstående udtryk bestemme de tilsvarende værdier for  $M$  og  $\kappa$  og således fastlægge bøjningsarbejdslinjens udseende.



**Figur 1.2** Eksperimentel bestemmelse af bøjningsarbejdselinje

I praksis er det dog nødvendigt at tage højde for bjælkens egenvægt ( $g$ ). Dette gøres ved, at man til momentkurven vist på figur 1.2 lægger den momentkurve, som egenvægten medfører. Momentet midt på bjælken bliver således  $M = Pa + 1/8 \cdot gl^2$ .

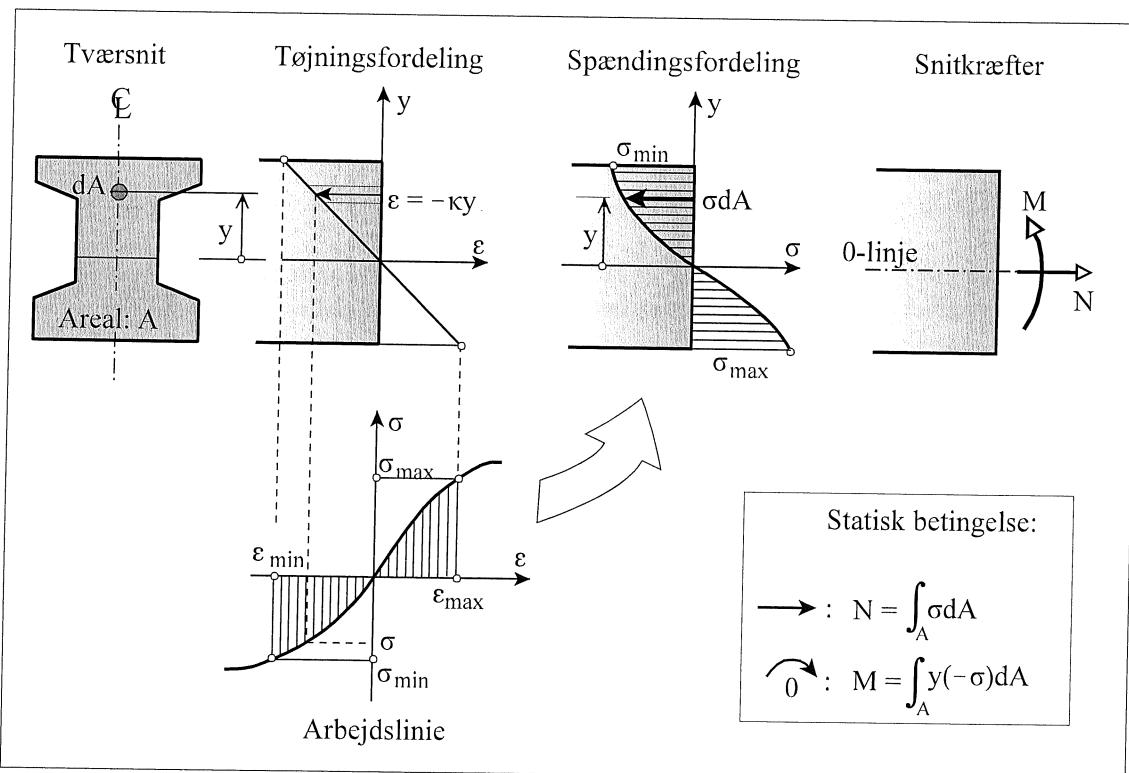
Da momentkurven hidrørende fra egenvægten er parabelformet, vil momentet mellem kræfterne ikke længere være konstant. Man begår derfor en lille fejl ved at betragte udbøjningslinjen som en cirkel. Fejlen aftager dog hurtigt ved voksende værdier af  $P$ .

## 1.1 Beregning af bøjningsarbejdselinje

Et givet tværsnits bøjningsarbejdselinje kan beregnes, hvis bjælkematerialets arbejdselinje kendes. Beregningen er baseret på den sædvanlige geometriske forudsætning om, at "plane tværsnit forbliver plane". Denne forudsætning medfører som bekendt, at tøjningsfordelingen i tværsnittet er retlinjet således, at tøjningen  $\varepsilon$  i afstanden  $y$  fra tværsnittets nullinje kan bestemmes af udtrykket:  $\varepsilon = -\kappa y$ , hvor  $\kappa$  er krumningen af bjælkeaksen ved det pågældende tværsnit, og  $y$  regnes positiv opad. Betragtes tøjningsfordelingen på figur 1.3, ses det, at  $\kappa$  svarer til hældningen af den skrå linje, der beskriver tøjningsfordelingen.

For et bestemt valg af krumningen og nullinjens beliggenhed kan man ved hjælp af ovenstående bestemme tøjningerne overalt i tværsnittet. Herefter kan de tilsvarende spændinger bestemmes ved hjælp af bjælkematerialets arbejdselinje. Bemærk, at fordi tøjningsfordelingen er retlinjet, får spændingsfordelingen samme facon som den del af arbejdselinjen, der afgrænses af  $\varepsilon_{\min}$  og  $\varepsilon_{\max}$ .

Når spændingerne er bestemt, kan de resulterende snitkræfter (N og M) bestemmes ved hjælp af de statiske betingelsesligninger, der jo udtrykker, at det kraftsystem, der udgøres af normalspændingerne, er statisk ækvivalent med det kraftsystem, der udgøres af snitkræfterne M og N. Sagt med andre ord, er normalkraften (N) spændingernes resultant, medens bøjningsmomentet (M) er spændingernes moment om nullinjen, såfremt N tænkes at virke i niveau med denne.



**Figur 1.3** Sammenhæng mellem tøjninger, spændinger og snitkræfter

Da man ved beregning af bøjningsarbejdslinjer (normalt) forudsætter, at normalkraften (N) er lig med 0, skal resultanten af normalspændingerne i tværsnittet være 0. Dette indebærer, at nullinjen skal placeres således, at resultanten af trykspændingerne (trykresultanten) numerisk set skal have samme størrelse som resultanten af trækspændingerne (trækresultanten).

Hvordan beregninger rent praktisk udføres illustreres nemmest vha. følgende eksempel.

Vi betragter en bjælke med rektangulært tværsnit. Bjælkematerialet antages at opføre sig lineærelastisk-idealplastisk med samme flydespænding  $f_y$  for såvel træk som tryk. Flydetøjningen (dvs. den tøjning ved hvilken materialet begynder at flyde) betegnes  $\varepsilon_y$ . Den elastiske del af arbejdselinjen har derfor elasticitetskoefficienten  $E = f_y / \varepsilon_y$ . (Se figur 1.4).

Vi forestiller os nu, at bjælkens krumning vokser langsomt fra nul og opad svarende til, at hældningen på tøjningsfordelingen bliver større og større som antydet på figur 1.4.

Til at begynde med vil alle tøjningerne i tværsnittet være numerisk mindre end  $\varepsilon_y$  således, at de tilsvarende spændinger vil være at finde på den elastiske del af arbejdslien. Tilfælde ① på figuren illustrerer denne situation.

Så længe spændingsfordelingen er elastisk, ved vi fra tidligere, at nullinjen går gennem tværsnittets tyngdepunkt samt, at der eksisterer følgende sammenhæng mellem moment og krumning:

$$M = EI \kappa,$$

hvor E er bjælkematerialets elasticitetskoefficient, og I er tværsnittets inertimoment. Så længe bjælkematerialet opfører sig elastisk, vil bøjningsarbejdslien således være en ret linje med hældningen EI. (Se "Plane elastiske bjælke- og stangsystemer side 19").

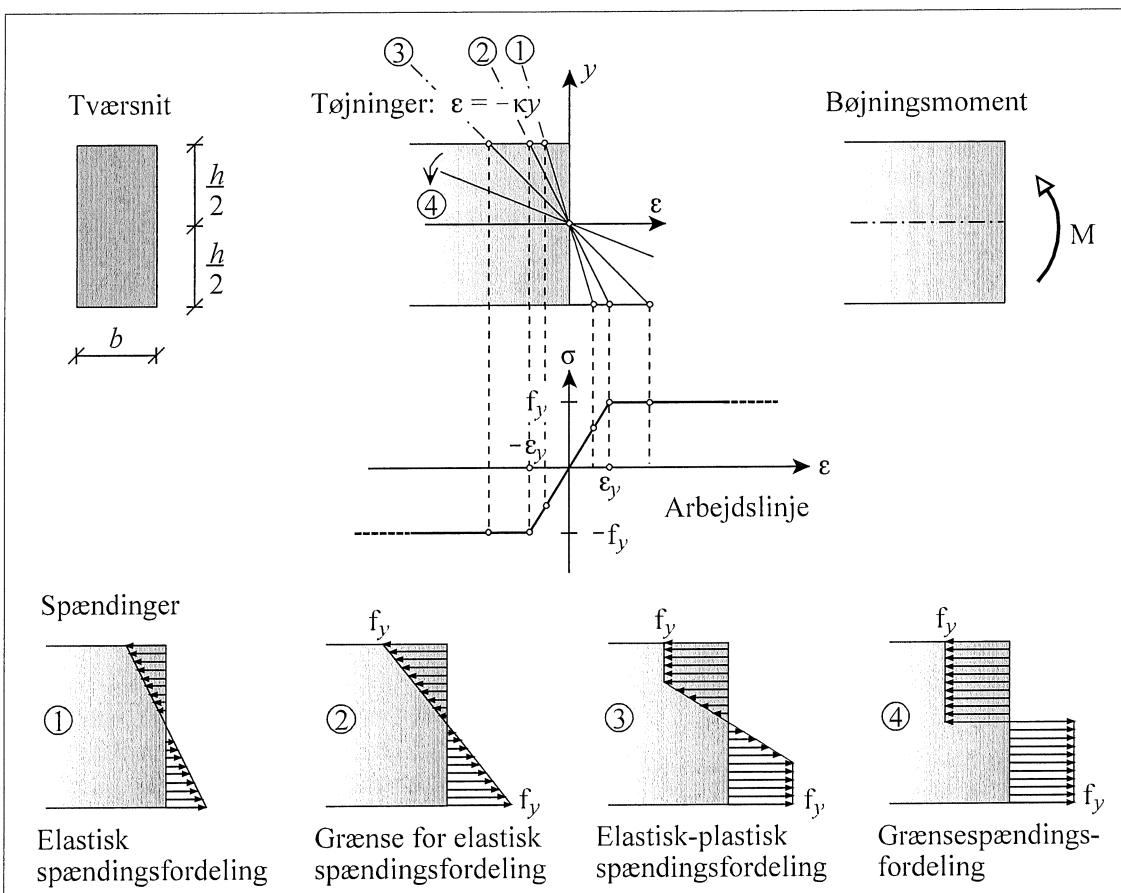
Ovenstående vil være gældende indtil krumningen bliver så stor, at den numerisk største tøjning i tværsnittet bliver lig med flydetøjningen  $\varepsilon_y$ . Denne situation svarer til tilfælde ② på figur 1.4 og benævnes *begyndende flydning*.

Da spændingsfordelingen stadig er lineær, kan det moment, der svarer til begyndende flydning ( $M_{1y}$ ), bestemmes ved hjælp af Naviers formel. Idet spændingen i bunden af tværsnittet er  $f_y$  fås:

$$\sigma_{bund} = f_y = -\frac{M_{1y}}{I} \left(-\frac{h}{2}\right) = \frac{M_{1y}}{\frac{1}{12}bh^3} \frac{h}{2} = \frac{M_{1y}}{\frac{1}{6}bh^2} \Rightarrow M_{1y} = \frac{1}{6}bh^2 f_y$$

Den tilsvarende krumning ( $\kappa_{1y}$ ) kan bestemmes af udtrykket  $M = EI \kappa$ , men kan som tidligere nævnt også bestemmes som hældningen på tøjningsfordelingen. I situation ② fås således:

$$\kappa_{1y} = \frac{\varepsilon_y}{\frac{1}{2}h} = 2 \frac{\varepsilon_y}{h}$$

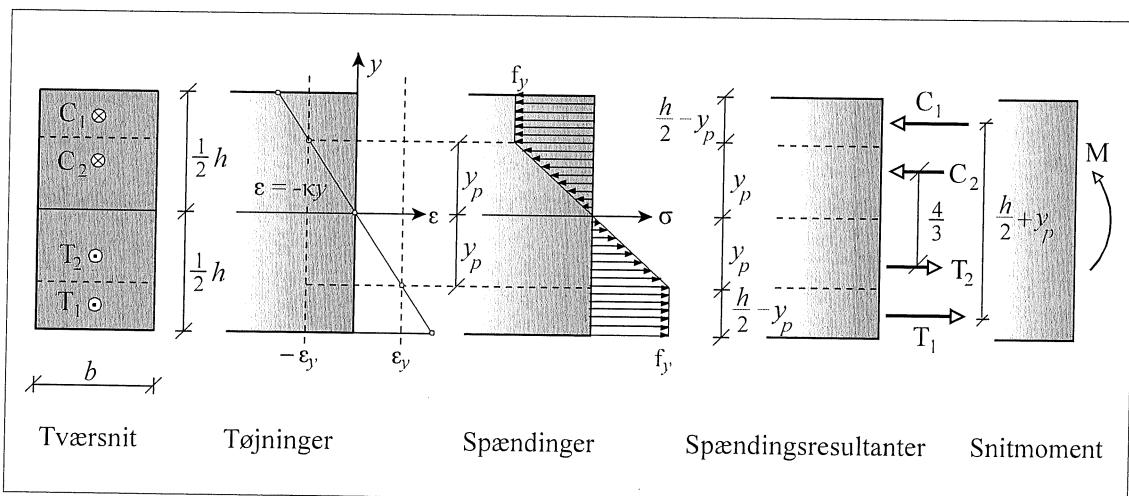


**Figur 1.4 Spændingsfordelinger ved voksende krumning**

Øges krumningen yderligere svarende til tilfælde ③, vil tøjningerne i de øverste og nederste lag af bjælken numerisk set overstige flydetøjningen  $\varepsilon_y$ . Betragtes arbejdslien, indses det, at de tilsvarende spændinger ikke kan stige yderligere, men må forblive lig med  $f_y$ . Herved fremkommer den elastisk-plastiske spændingsfordeling, der er vist på figur 1.4. Til hjælp for de efterfølgende beregninger er denne spændingsfordeling tillige vist på figur 1.5.

Da spændingsfordelingen ikke mere er rent elastisk, kan de formler, vi har anvendt i de foregående to tilfælde, ikke længere bruges. I stedet må vi direkte anvende de statiske betingelser for at kunne bestemme nullinjens beliggenhed samt den ønskede sammenhæng mellem krumning og moment.

Indledningsvis indses det, at nulllinjen stadig må ligge midt i tværsnittet, da trykspændingernes resultant skal være lig med trækspændingernes resultant ( $N = 0$ ). Bemærk, at dette er specielt for det aktuelle eksempel og hænger sammen med, at tværsnittet er dobbeltsymmetrisk og arbejdslien er punktsymmetrisk. I almindelighed vil nulllinjens bevæge sig bort fra tværsnittets tyngdepunkt i takt med, at de plastiske zoner i tværsnittet udvikler sig.



**Figur 1.5 Elastisk-plastisk spændingsfordeling**

Herefter kan snitmomentet bestemmes ved at udtrykke, at spændinger og snitkræfter skal have samme moment om en vilkårlig vandret linje i tværsnittet.

Snitmomentet bestemmes nemmest ved først at bestemme tryk- og trækspændingernes resultanter. Af praktiske grunde deles resultanterne op i to bidrag som vist på figur 1.5. Her er  $C_1$  og  $T_1$ , resultanterne i den plastiske zone, medens  $C_2$  og  $T_2$  er resultanterne i den elastiske zone.

Idet  $y_p$  betegner afstanden fra nulllinjen til det lag i bjælken, hvor tøjningen netop er  $\epsilon_y$  fås:

$$C_1 = T_1 = \left(\frac{h}{2} - y_p\right)bf_y \quad ; \quad C_2 = T_2 = \frac{1}{2}y_pbf_y$$

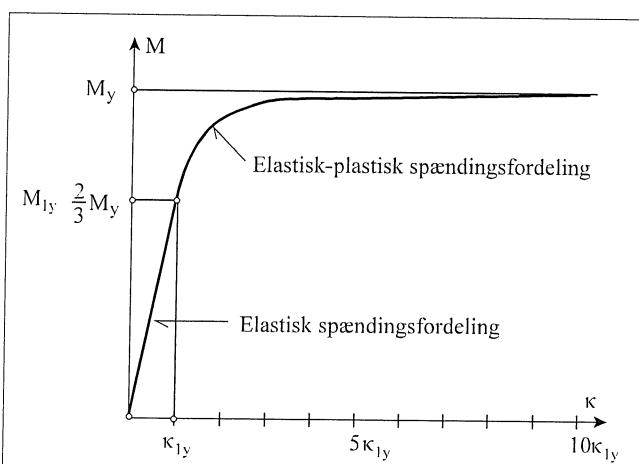
Da spændingsresultanterne udgør to kraftpar, får  $M$  umiddelbart som summen af disse kraftpars momenter:

$$M = \left(\frac{h}{2} + y_p\right)C_1 + \frac{4}{3}y_pC_2 = \left(\frac{h}{2} + y_p\right)\left(\frac{h}{2} - y_p\right)bf_y + \frac{4}{3}y_p\frac{1}{2}y_pbf_y = \left(\frac{h^2}{4} - \frac{1}{3}y_p^2\right)bf_y$$

Endelig indses det ved at betragte den geometriske betingelse, at  $\epsilon_y = -\kappa(-y_p) \Rightarrow y_p = \frac{\epsilon_y}{\kappa}$

Indsættes dette udtryk for  $y_p$  i ovenstående, får man følgende udtryk for  $M$  som funktion af  $\kappa$ :

$$M = \left(\frac{h^2}{4} - \frac{1}{3}\frac{\epsilon_y^2}{\kappa^2}\right)bf_y \quad \text{gældende for } \kappa \geq \kappa_{ly} = \frac{2\epsilon_y}{h}$$



**Figur 1.6 Bøjningsarbejdslien**

Lader vi  $\kappa$  gå mod uendelig (svarende til at  $y_p$  går mod nul), vil de elastiske zoner i spændingsfordelingen blive mindre og mindre. I grænsen vil spændingsfordelingen være rent plastisk som vist på figur 1.4 nederst til højre. Den tilsvarende værdi for  $M$  kaldes tværsnittets *flydemoment*  $M_y$ .

Af ovenstående udtryk ses det, at:

$$M_y = \frac{1}{4}h^2bf_y$$

Figur 1.6 viser den aktuelle bøjningsarbejdslien. (Bemærk, at  $M = M_y$  er asymptote til bøjningsarbejdslien.)

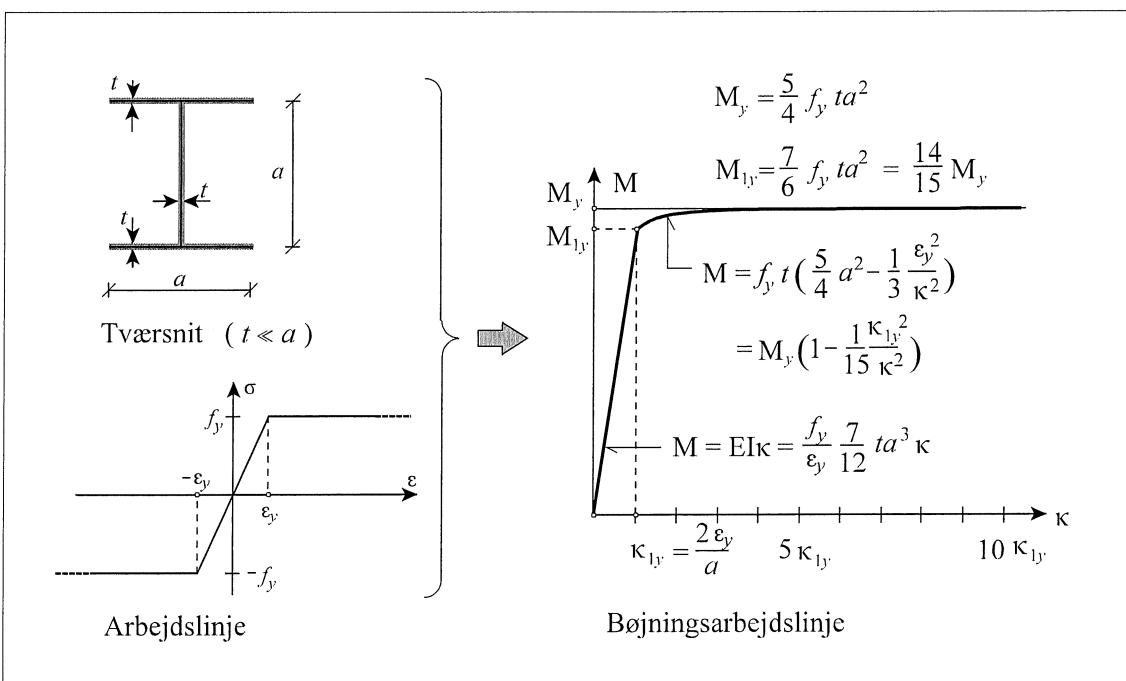
I praksis vil de vandrette grene i bjælkematerialets arbejdslinje naturligvis ikke være uendelig lange. Ved en vis tøjning - *brudtøjningen* - vil materialet bryde. Dette betyder, at også bøjningsarbejdslien må have en endelig udstrækning, der bestemmes af den krumning, ved hvilken kanttøjningen i enten tryk eller træksiden bliver lig med den tilsvarende brudtøjning. Det moment, der svarer til denne krumning benævnes *brudmomentet*.

(Vedrørende beregning af brudmomenter henvises til afsnit 1.3).

Selvom flydemomentet således ikke kan opnås i praksis, da det forudsætter uendelig stor krumning, og dermed uendelig store tøjninger, betragter man det alligevel som et udtryk for tværsnittets bøjningsstyrke. Dette hænger sammen med, at man selv for moderate krumninger opnår et moment, der er tæt på  $M_y$ . I det aktuelle tilfælde er  $M$  lig med 99% af  $M_y$ , når  $\kappa = 5\kappa_{ly}$  svarende til, at den maksimale tøjning er  $\epsilon_{max} = 5\cdot\epsilon_y$ . Til sammenligning skal det nævnes, at for eksempel konstruktionsstålens brudtøjning er af størrelsesordenen  $50\cdot\epsilon_y$ .

For I-formede tværsnit kan 99 % af flydemomentet opnås allerede, når  $\kappa$  er ca. det dobbelte af  $\kappa_{ly}$ . Figur 1.7 viser således bøjningsarbejdslien for et tyndfliget I-profil af stål.

Læseren opfordres til at verificere de udtryk for bøjningsarbejdslien, der er angivet på figuren.



Figur 1.7 Bøjningsarbejdslien for I-profil

## 1.2 Beregning af flydemomenter

På baggrund af det foregående indsies det, at, hvis et bjælkemateriale udviser idealplasticitet, - dvs. hvis materialets arbejdslinje ender i lange vandrette grene for såvel tryk som træk, - vil grænse-spændingsfordelingen bestå af to rektangulære spændingsblokke, uanset hvorledes arbejdslinjens facon i øvrigt er.

Dette betyder, at det i modsætning til at bestemme selve bøjningsarbejdslinjens udseende er relativt nemt at bestemme dens asymptoter i form af flydemomentet  $M_y$ .

Denne iagttagelse er vigtig, idet den metode man i almindelighed anvender til at bestemme bjælkekonstruktioners bæreevne (flydelede metoden) alene baserer sig på flydemomentets størrelse, samt det faktum, at *bøjningsarbejdslinjen* ender i lange (næsten) vandrette grene for såvel positiv som negativ momentpåvirkning.

Nedenstående eksempel viser beregningsgangen ved bestemmelse af flydemomenter.

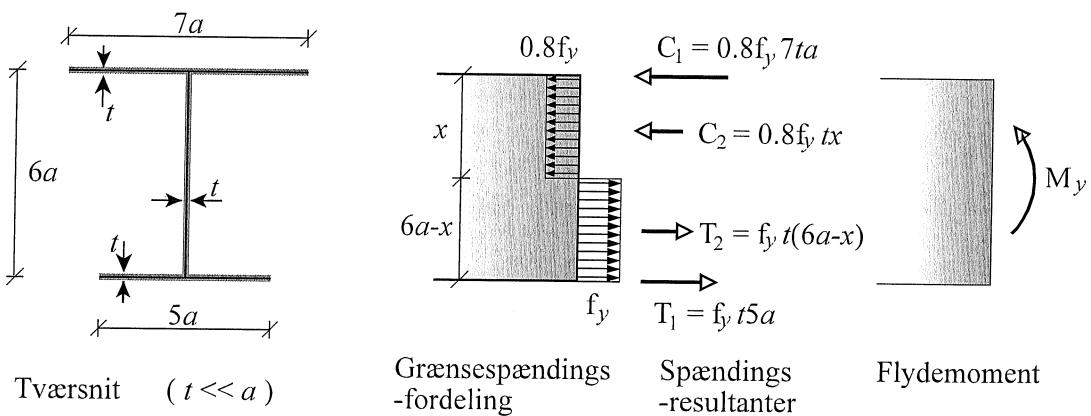
### *Eksempel 1.1 Beregning af flydemomenter*

En bjælke med det på nedenstående figur viste tyndfligede tværsnit er fremstillet af et materiale med idealplastiske egenskaber. For trækpåvirkning er materialets flydespænding  $f_y$ , medens det ved tryk har flydespændingen  $f_y' = 0.8 f_y$ .

I første omgang ønsker vi at bestemme tværsnittets flydemoment  $M_y$  for positiv momentpåvirkning. Fremgangsmåden er som følger:

Først optegnes grænse-spændingsfordelingen. Nullinjens beliggenhed er endnu ukendt, hvorfor dens afstand til overflangen benævnes  $x$ .

Herefter beregnes spændingsresultanterne, idet disse opdeles i bidrag, hvis angrebslinjer umiddelbart lader sig bestemme. I det aktuelle tilfælde er  $C_1$  og  $C_2$  trykspændingernes resultant i hhv. flangen og kroppen, medens  $T_1$  og  $T_2$  er de tilsvarende trækresultanter.



Nullinjens beliggenhed bestemmes nu ved at udtrykke, at resultanten af trykspændingerne skal være lig med resultanten af trækspændingerne, da normalkraften er nul. Dette giver følgende ligning til bestemmelse af  $x$ :

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= T_1 + T_2 \Rightarrow 0.8f_y \cdot 7at + 0.8f_y \cdot tx = f_y \cdot 5at + f_y \cdot (6a-x)t \Rightarrow \\ 0.8x + x &= 5a + 6a - 5.6a \Rightarrow 1.8x = 5.4a \Rightarrow x = 3a \end{aligned}$$

Bemerk, at nullinjen ikke går gennem tværsnittets tyngdepunkt, idet dette ligger i afstanden  $8/3a$  fra overflangen.

Når nullinjens beliggenhed er fastlagt, bestemmes flydemomentet ved at udtrykke, at spændinger og snitkræfter har samme moment om en vilkårlig vandret linje i tværsnittet. Da  $N = 0$  er den eneste relevante snitkraft momentet  $M_y$ . Da et moment giver anledning til samme moment i alle punkter, er det åbenbart ligegyldigt hvilken linje, vi tager moment om. Vælges det at tage moment om overflangen, fås:

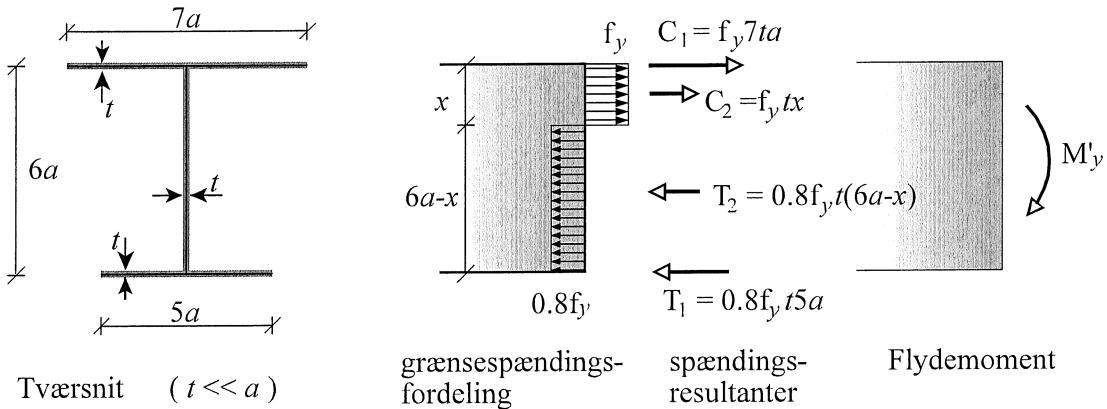
$$M_y = T_1 \cdot 6a + T_2 \cdot 4.5a - C_2 \cdot 1.5a = 5f_y ta \cdot 6a + 3f_y ta \cdot 4.5a - 2.4f_y ta \cdot 1.5a = 39.9f_y ta^2$$

***Eksempel fortsat***

På helt tilsvarende måde bestemmes flydemomentet for negativ momentpåvirkning ( $M_y'$ ). Med henvisning til nedenstående figur fås:

$$\text{Vandret projektion: } 7f_yta + f_ytx = 0.8f_yt(6a - x) + 0.8f_yt \cdot 5a \Rightarrow x = a$$

$$\text{Moment om underflange: } M_y' = 7f_yta \cdot 6a + f_yta \cdot 5.5a - 0.8f_yt5a \cdot 2.5a = 37.5f_yta^2$$



Bemerk, at såvel nullinjens placering som flydemomenterne er forskellige for hhv. positiv og negativ momentpåvirkning. Dette hænger sammen med, at træk- og trykflydespændingerne er forskellige, samtidig med at tværsnittet ikke er dobbeltsymmetrisk.

### 1.3 Beregning af brudmomenter

Ved beregning af et tværsnits brudmoment må man indledningsvis overveje, hvilke brudmåder der er mulige. For bjælker, der kun består af et materiale, er der to muligheder: Enten indledes bruddet i bjælkens trækside, eller i dens trykside. Ofte er det indlysende, hvilken af disse muligheder der er den aktuelle, men hvis dette ikke er tilfældet, må begge muligheder undersøges.

For bjælker, der er sammensat af flere materialer som for eksempel armerede betonbjælker, er der naturligvis flere muligheder.

Fremgangsmåden ved beregning af brudmomenter er illustreret i eksempel 1.2

***Eksempel 1.2 Beregning af brudmoment***

Vi betragter en træbjælke med rektangulært tværsnit. For træet anvendes en idealiseret arbejdslinje, der for træk er lineærelastisk op til brud, medens den for tryk er lineærelastisk-idealplastisk.

Trækbrudstyrken benævnes  $f_u$  og den tilsvarende brudtøjning  $\epsilon_u$ .

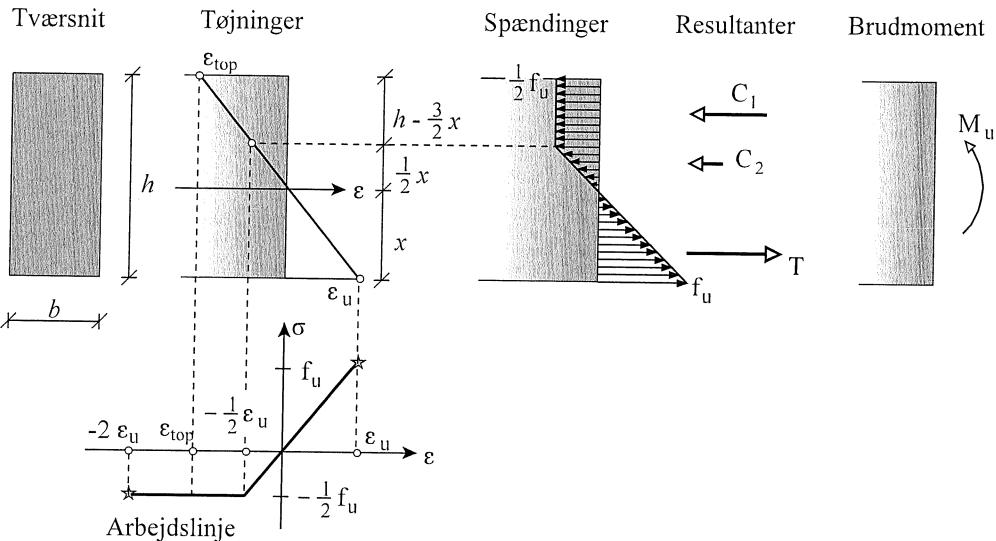
Trykflydespændingen er  $f'_y = \frac{1}{2}f_u$  svarende til en flydetøjning på  $-\frac{1}{2}\epsilon_u$ .

Trykbrudtøjningen antages at være  $-2\epsilon_u$ .

Bjælken påvirkes til bøjning uden normalkraft, og vi ønsker at bestemme brudmomentet  $M_u$ .

### *Eksempel 1.2 fortsat*

Indledningsvis antages det, at bruddet starter i bjælkens trækside, hvorfor kanttøjningen her sættes lig med  $\varepsilon_u$ . Forudsat at tøjningen i bjælkens trykside numerisk set er større end  $\frac{1}{2} \varepsilon_u$ , vil tøjnings- og spændingsfordelingen komme til at se ud som vist på nedenstående figur.



Herefter kan nullinjens beliggenhed som sædvanlig bestemmes ved vandret projektion. Kaldes afstanden fra tværsnittets underkant til nullinjen for  $x$ , fås:

$$T - C_1 - C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} f_u b x - \frac{1}{2} f_u b \left( h - \frac{3}{2} x \right) - \frac{1}{2} \frac{1}{2} f_u b \frac{1}{2} x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{9} h$$

For denne værdi af  $x$  kan tøjningen i tværsnittets overkant bestemmes ved at betragte de to ensvinklede trekanter i tøjningsfordelingen:

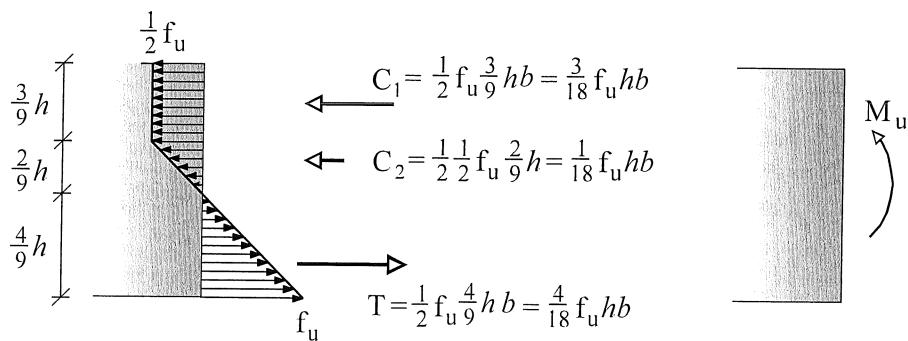
$$\frac{|\varepsilon_{top}|}{\varepsilon} = \frac{5/9h}{4/9h} = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad |\varepsilon_{top}| = \frac{5}{4} \varepsilon_u$$

Det ses, at tøjningen i tværsnittets overkant opfylder betingelsen  $-2\varepsilon_u < \varepsilon_{top} < -\frac{1}{2}\varepsilon_u$  som forudsat ved optegning af tøjnings- og spændingsfordelingen.

Endelig kan brudmomentet  $M_u$  bestemmes ved for eksempel at tage moment om nulllinjen. Med henvisning til nedenstående figur fås:

$$M_u = C_1 \left( \frac{5}{9}h - \frac{3}{18}h \right) + C_2 \frac{2}{3} \frac{2}{9}h + T \frac{2}{3} \frac{4}{9}h = \frac{3}{18} f_u h b \frac{7}{18}h + \frac{1}{18} f_u h b \frac{4}{27}h + \frac{4}{18} f_u h b \frac{8}{27}h$$

$$\Rightarrow M_u = \frac{5}{36} f_u b h^2 = 0.139 f_u b h^2$$



## Spændinger

## Resultanter

Brudmoment

## 1.4 N-M-diagrammer

Indtil videre har vi alene beskæftiget os med flyde- og brudmomenter, under forudsætning af at normalkraften var lig med nul.

Hvis normalkraften ikke er nul, vil dette naturligvis ændre flyde- eller brudmomentets størrelse, idet nullinjens beliggenhed jo afhænger af normalkraftens størrelse.

Til enhver værdi af normalkraften (N) svarer således en bestemt værdi af flyde- eller brudmomentet (M). Afsættes disse værdier i et N-M-koordinatsystem, fås et såkaldt N-M-diagram.

Et N-M-diagram kan med fordel anvendes ved dimensionering, hvis et tværnitt skal vurderes for forskellige kombinationer af N og M.

Et tværnitts N-M-diagram kaldes også tværnittets flydebetingelse henholdsvis brudbetingelse.

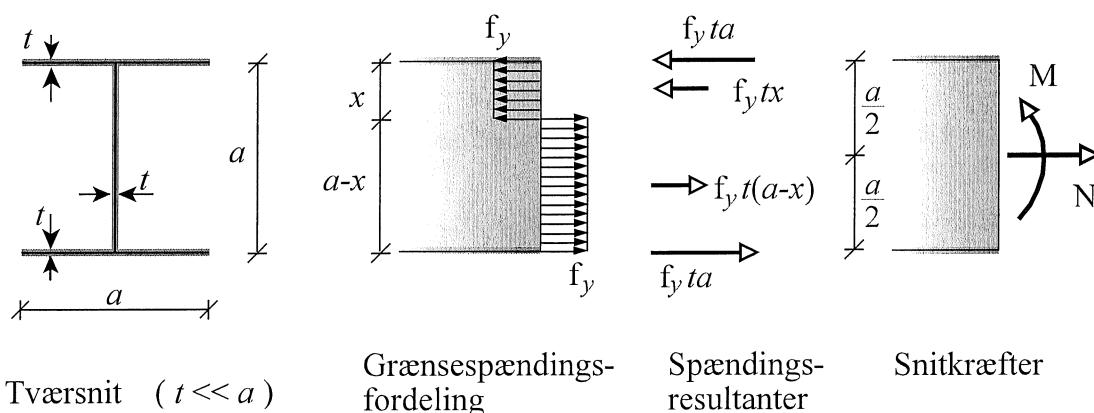
Nedenstående eksempel viser, hvorledes et tyndfliget stålprofils flydebetingelse kan beregnes.

### Eksempel 1.3 Beregning af flydebetingelse for tyndfliget stålprofil

Vi betragter en stålbjælke med det på nedenstående figur viste tyndfligede tværnitt.

Det forudsættes, at stålets arbejdslinje er lineærelastisk-idealplastisk med samme flydespænding  $f_y$  for såvel tryk som træk.

Under forudsætning af at nullinjen ligger i tværnittets krop og momentet er positivt, får grænse-spændingsfordelingen det på figuren viste udseende.



Afstanden ( $x$ ) fra nullinjen til tværnittets overflange findes som sædvanligt ved at udtrykke, at spændinger og snitkræfter har samme vandrette projektion:

$$f_yta + f_yt(a-x) - f_yta - f_ytx = N \Rightarrow x = \frac{1}{2}(1 - \frac{N}{f_yta})a$$

Da det er forudsat, at nullinjen ligger i tværnittskroppen, gælder ovenstående udtryk i realiteten kun, hvis  $x$  ligger i intervallet fra  $t/2$  til  $a - t/2$ . Da tværnittet er tyndfliget ( $t \ll a$ ), vil vi imidlertid tillade os at benytte udtrykkene i hele intervallet fra 0 til  $a$ . De tilsvarende grænser for N bliver således:

$$0 \leq x \leq a \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2}(1 - \frac{N}{f_yta})a \leq a \Rightarrow -f_yta \leq N \leq f_yta$$

Når  $x$  er bestemt, kan det tilsvarende moment bestemmes ved at udtrykke, at spændinger og snitkræfter har samme moment om en vilkårlig vandret linje. Vælges for eksempel at tage moment om overflangen får man:

$$M + \frac{a}{2}N = f_yta \cdot a + f_yt(a-x)(x + \frac{a-x}{2}) - f_ytx \cdot \frac{1}{2}x \Rightarrow M = f_yt(\frac{3}{2}a^2 - x^2) - \frac{1}{2}aN$$

Indsættes den tidligere bestemte værdi af  $x$ , fås efter en del mellemregninger:

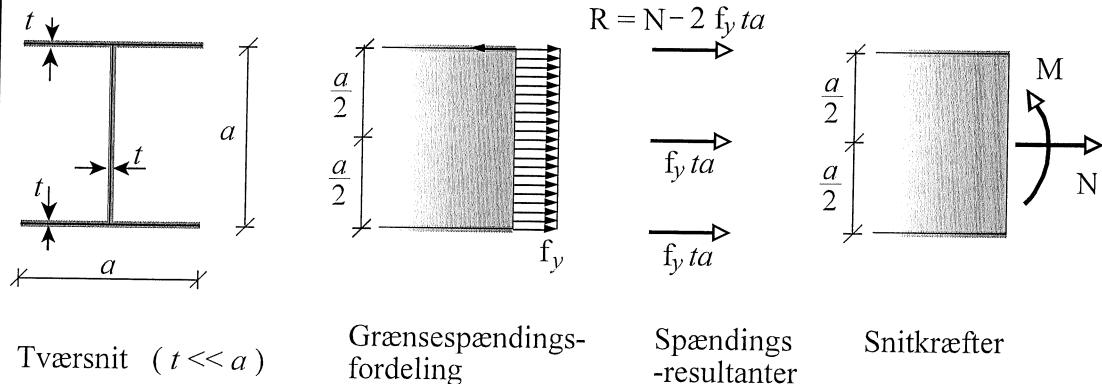
$$M = \frac{5}{4}f_yta^2(1 - \frac{1}{5}(\frac{N}{f_yta})^2)$$

Når nullinjen falder i tværnittskroppen, fås således en parabolsk sammenhæng mellem N og M.

*Eksempel 1.3 fortsat*

Det ses, at den maksimale værdi for  $M$  opnås, når  $N = 0$ . Det er denne værdi, der sædvanligvis kaldes tværsnittets flydemoment  $M_y$ . For  $N = 0$  fås således:  $M = M_y = 5/4 f_y t a^2$ . I intervalendepunkterne, dvs. når  $N = \pm f_y t a$ , bliver momentet åbenbart  $M = f_y t a^2$ .

Hvis normalkraften bliver større end  $f_y t a$ , vil nulllinjen bevæge sig op i overflangen således, at denne bliver udsat for både tryk- og trækspændinger. Da tværsnittet er tyndfliget kan vi imidlertid tillade os at erstatte disse spændinger med en enkelt resultant ( $R$ ) virkende i flangens systemlinje. Størrelsen af denne resultant kan ved brug af vandret projektion bestemmes til  $R = N - 2f_y t a$ . Nedenstående figur viser grænsspændingsfordelingen og de tilsvarende resultanter i denne situation.



Det moment denne spændingsfordeling giver anledning til kan nu bestemmes ved at tage moment om overflangen:

$$M + \frac{a}{2} N = f_y t a \cdot a + f_y t a \cdot \frac{1}{2} a \Rightarrow M = \frac{3}{2} f_y t a^2 - \frac{a}{2} N = \frac{3}{2} f_y t a^2 \left(1 - \frac{1}{3} \frac{N}{f_y t a}\right)$$

Når nulllinjen falder i overflangen, fås således en retlinjet sammenhæng mellem  $M$  og  $N$ .

Den største værdi  $N$  kan antage, svarer til, at hele tværsnittet er fuldt udnyttet til træk. I denne situation er spændingsresultanten i overflangen  $R = f_y t a$  svarende til, at  $N = 3 f_y t a$ . Indsættes dette i ovenstående udtryk for  $M$ , ses det, at den tilsvarende værdi for momentet er:  $M = 0$ .

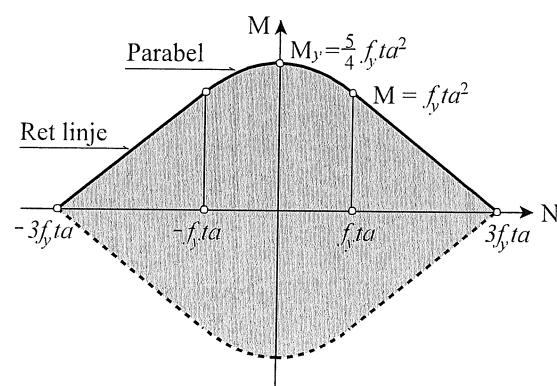
Hvis normalkraften bliver mindre end  $-f_y t a$ , vil nulllinjen ligge i underflangen. Ved beregninger, der er helt analoge til dem, vi gennemførte for nulllinjen beliggende i overflangen, fås følgende sammenhæng mellem  $M$  og  $N$ :

$$M = \frac{3}{2} f_y t a^2 + \frac{a}{2} N = \frac{3}{2} f_y t a^2 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{N}{f_y t a}\right)$$

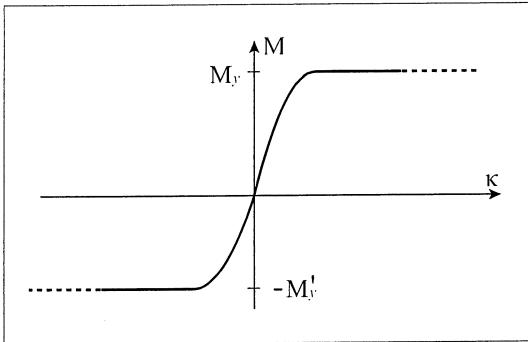
Herefter er vi i stand til at optegne den del af  $N$ - $M$ -diagrammet (flydebetingelsen), der svarer til positive værdier for  $M$ . På hosstående figur svarer denne del til den fuldt optrukne kurve. Da det betragtede tværsnit er dobbeltsymmetrisk, indses det, at den tilsvarende kurve for negative værdier af  $M$  fås ved spejling i  $N$ -aksen. Denne del af  $N$ - $M$ -diagrammet er vist som en punkteret kurve på figuren.

Som tidligere nævnt kan  $N$ - $M$ -diagrammet anvendes til at afgøre, hvilke kombinationer af  $M$  og  $N$ , tværsnittet kan modstå.

Hvis en bestemt kombination af  $M$  og  $N$  således afbordes i et punkt inde i det gråtonede område, er tværsnittet ikke fuldt udnyttet. Hvis punktet falder på områdets periferi, er alle dele af tværsnittet fuldt udnyttet til flydning. Punkter uden for området er ikke tilladelige.



## 2. FLYDELEDSMETODEN



**Figur 2.1** Bøjningsarbejdselinje

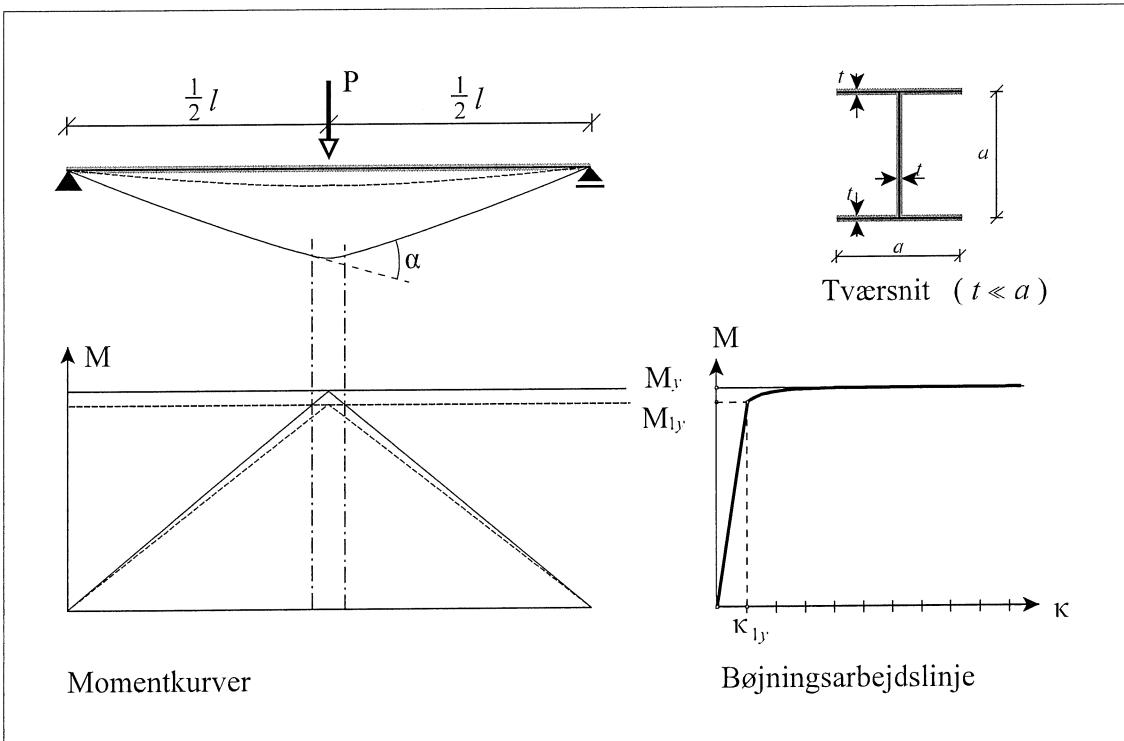
Flydeledsmetoden er en metode til beregning af bæreevnen for en bjælke- eller rammekonstruktion. Metoden forudsætter, at konstruktionen er opbygget af bjælker, hvis bøjningsarbejdsmlinjer afsluttes af lange næsten vandrette grene. Et eksempel på en sådan bøjningsarbejdslinje er vist på figur 2.1. Som antydet på figuren behøver flydemomenterne for positive og negative momentpåvirkninger ikke at være lige store.

Metoden bygger på, at konstruktionens bæreevne alene afhænger af de enkelte bjælkeelementers bøjningsstyrke. Forskydningsbrud og brud, der skyldes svigtende stabilitet som for eksempel søjleudknækning og kipning, må undersøges særskilt.

Flydeledsmetoden udmærker sig ved, at den kan anvendes direkte på kollapssituationen (brudsituacionen) uden forudgående beregninger af elastiske eller delvis elastiske mellemstadier. Endvidere er den relativ simpel at anvende på selv flere gange statisk ubestemte konstruktioner. Metoden er specielt velegnet ved den indledende dimensionering af en konstruktion, hvor det gælder om hurtigt at få et bud på konstruktionens hoveddimensioner.

### 2.1 Flydeled

Indledningsvis betragtes en simpelt understøttet stålbjælke belastet på midten af en enkeltkraft ( $P$ ). Bjælkens tværsnit samt den tilhørende bøjningsarbejdselinje er vist dels i figur 1.7, og dels på nedenstående figur.



**Figur 2.2**

Vi tænker os nu, at belastningen  $P$  vokser, indtil bjælken kollapser. Ved små værdier af  $P$  vil alle momenter i bjælken være at finde på den elastiske del af bøjningsarbejdslinjen, og de tilsvarende deformationer vil være rent elastiske. Grænsen for den rent elastiske tilstand nås, når momentet midt på bjælken bliver lig med det moment ( $M_{ly}$ ), der svarer til begyndende flydning i bjælketværsnittet.. Momentkurven i denne situation samt den tilsvarende udbøjningskurve er vist med punkterede linjer på figur 2.2.

Øges belastningen yderligere, bevæger spidsen af momentkurven sig op i det plastiske område.

Hvis bøjningsarbejdselinjen er tilstrækkelig lang, kan belastningen øges, indtil maksimalmomentet praktisk taget er lig med flydemomentet  $M_y$ . Benævnes den tilsvarende værdi af  $P$  for  $P_y$  fås:

$$\frac{1}{4} P_y l = M_y \Rightarrow P_y = 4 \frac{M_y}{l}$$

Ved at betragte bøjningsarbejdselinjen ses det, at krumningerne i den del af bjælken, hvor momentet er større end  $M_{ly}$  (delen mellem de stiplede linjer på figuren) øges kraftigt, og jo tættere momentet er på  $M_y$ , jo mere dramatisk er krummingstilvæksten. Derimod vil krumningen næsten holde sig konstant i de dele af bjælken, hvor momentet er mindre end  $M_{ly}$ . (Delene uden for de stiplede linjer). Når momentet kommer tæt på  $M_y$  vil bjælken således se ud til at få et knæk på midten. Denne situation er illustreret med den fuldt optrukne udbøjningskurve og den tilsvarende fuldt optrukne momentkurve.

Ved at betragte figur 2.2 indses det, at jo mindre afstand, der er mellem momentet ved begyndende flydning ( $M_{ly}$ ) og flydemomentet ( $M_y$ ), jo mindre bliver den plastiske del af bjælken, og i grænsen, hvor  $M_{ly} = M_y$ , er de plastiske deformationer koncentreret i et enkelt punkt. Et sådant punkt kaldes et *flydeled*. (I et flydeled vil krumningerne til gengæld være uendelig store).

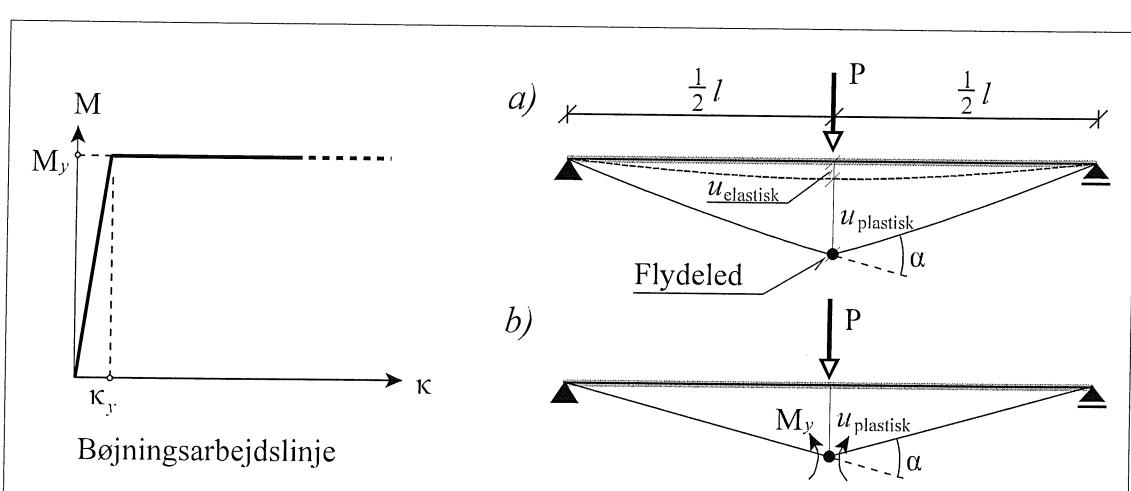
Flydeledsmetoden bygger på, at de plastiske deformationer i en bjælke- eller rammekonstruktion med rimelig nøjagtighed kan siges at være koncentreret i flydeled, medens deformationerne uden for flydeleddene er rent elastiske. Jævnfør det foregående svarer dette til, at de indgående bjælkeelementers bøjningsarbejdselinjer idealiseres således, at de afsluttes af lange vandrette grene. En sådan bøjningsarbejdselinje kaldes *idealplastisk*. Hvis bøjningsarbejdselinjen samtidig er lineær-elastisk indtil flydning indtræffer, kaldes den naturligvis *lineær-elastisk-idealplastisk*.

Figur 2.3 viser den samme bjælke, som blev betragtet i det foregående, men bjælkens bøjningsarbejdselinje forudsættes nu at være lineær-elastisk-idealplastisk med det positive flydemoment  $M_y$ .

Lader vi igen belastningen ( $P$ ) vokse, indtil bjælken kollapser, vil bjælkens deformationer være rent elastiske, så længe snitmomentet midt på bjælken er mindre end flydemomentet  $M_y$ .

Når snitmomentet når  $M_y$ , vil der kunne dannes et flydeled. Som vi så tidligere, vil dette ske, når  $P = P_y = 4M_y/l$ . Forsøg på at forøge lasten yderligere vil medføre uhæmmede plastiske deformationer i flydeleddet med kollaps til følge.

Den punkterede linje på figur 2.3a viser de elastiske udbøjninger umiddelbart før flydeleddet dannes, medens den fuldt optrukne linje viser de udbøjninger, der vil optræde under kollapsset, når knækvinklen ( $\alpha$ ) i flydeleddet har opnået en vis værdi. (Vær opmærksom på, at udbøjningerne er vist stærkt overdrevne, idet det som sædvanligt forudsættes, at alle vinkeldrejninger er meget mindre end 1).



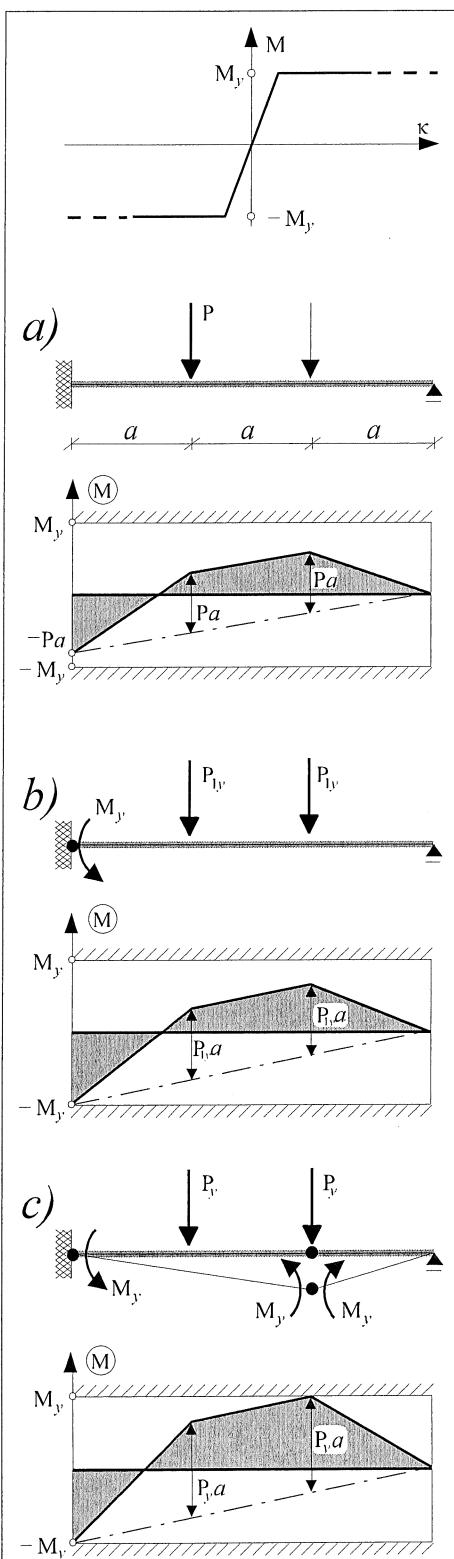
Figur 2.3

Figur 2.3b viser de udbøjninger, der alene skyldes plastiske deformationer. Bemerk, at de plastiske deformationer kun foregår i flydeleddet. Man kan sige, at flydeleddet virker som et charnier med et indbygget fast moment  $M_y$  som antydet på figuren. Et flydeled kaldes derfor ofte for et *flydecharnier*. Til forskel fra et friktionsløst charnier er signaturen for et flydecharnier en *udfyldt cirkel* som vist på figuren.

## 2.2 Flydemekanismer

En statisk bestemt konstruktion er kendtegnet ved, at den er forsynet med netop så mange geometriske bindinger, at den ikke er bevægelig. En statisk bestemt konstruktion bliver således bevægelig, hvis blot en af disse bindinger svigter. Dette betyder, at en statisk bestemt konstruktion kollapser når belastningen bliver så stor, at der dannes blot et flydecharrnier. Den simpelt understøttede bjælke, der blev betragtet i det foregående afsnit, demonstrerer dette.

Hvis en konstruktion er statisk ubestemt, er den forsynet med flere geometriske bindinger, end det er nødvendigt for at opretholde ligevægten. En statisk ubestemt konstruktion vil derfor normalt stadig have en bæreevnnereserve, når det først flydeledd dannes. Først når antallet af flydeledd gør konstruktionen bevægelig, er bæreevnen nået. Dette illustreres i nedenstående eksempel.



Figur 2.4

Figur 2.4a viser en bjælke, der i venstre endepunkt er fast indspændt, medens den i højre endepunkt er forsynet med en simpel bevægelig understøtning med vandret rullebane.

Det antages, at bjælkens bøjningsarbejdselinje er lineærelastisk-idealplastisk med samme flydemoment  $M_y$ , for såvel positive som negative momentpåvirkninger, som vist øverst i figur 2.4.

Bjælken er i tredjedelspunkterne påvirket af to lige store kræfter af størrelsen  $P$ . Der ses bort fra bjælkens egen vægt.

Vi ønsker at følge bjælkens opførsel, idet belastningen ( $P$ ) vokser fra 0 til den værdi, der medfører kollaps af bjælken.

Indledningsvis indsættes det, at bjælken er en gang statisk ubestemt, idet man, hvis man fjerner indspændingen, (for eksempel ved at indsætte et charnier i venstre bjælkeende), netop ville opnå en statisk bestemt konstruktion.

Så længe momenterne overalt i bjælken befinner sig i det elastiske område dvs. i intervallet  $-M_y < M < M_y$ , kan bjælkens momentkurve bestemmes ved for eksempel at anvende kraftmetoden. Således kan momentet ved indspændingen beregnes til  $M = -Pa$ .

Den elastiske momentfordeling er vist på figur 2.4a. (At afstanden fra momentkurvens slutlinje - den stiplede linje - til knækpunkterne i kurven er lig med  $Pa$ , indsættes ved hjælp af superpositionsprincippet, idet disse afstande svarer til momenterne i den tilsvarende simpelt understøttede bjælke jævnfør figur 1.2).

På figuren er tillige vist, de grænser momentfordelingen er tvunget til at holde sig indenfor, jævnfør bøjningsarbejdslienjen.

Den elastiske momentfordeling er åbenbart gyldig indtil momentet ved indspændingen bliver lig med  $-M_y$ , det vil sige indtil lasten  $P = P_{ly} = M_y/a$ . Når belastningen når dette niveau, vil der dannes et flydecharrnier ved indspændingen. Figur 2.4b illustrerer denne situation.

Øges belastningen yderligere, vil momentet ved indspændingen forblive lig med  $-M_y$ . Dette betyder, at konstruktionen har ændret sig fra at være en gang statisk ubestemt til at være statisk bestemt, og momentkurven kan herefter

kun "vokse i den positive retning".

Ved at betragte momentkurven på figur 2.4b ses det, at belastningen ( $P$ ) kun kan vokse, indtil momentkurven "rammer den øvre grænse", det vil sige, indtil det største positive moment bliver lig med  $M_y$ .

Når dette sker, dannes der endnu et flydeled, hvorefter konstruktionen bliver bevægelig, således at selv den mindste forøgelse af belastningen, vil medføre kollaps. Man siger, at der er dannet en *flydemekanisme* eller en *brudmekanisme*. Den tilsvarende værdi af  $P$  kaldes *flydelasten* og benævnes  $P_y$ .

Figur 2.4c viser de nedbøjninger, der opstår, *efter* at flydemekanismen er dannet, samt den tilsvarende momentkurve. Vær opmærksom på, at efter flydemekanismen er dannet, sker der ingen ændringer af momentkurven og dermed ingen ændringer af de elastiske krumninger, de enkelte bjælkedele måtte have, inden flydemekanismen trådte i funktion. Bjælkedelene bevæger sig derfor som stive legemer som antydet på figuren.

Ved at betragte momentkurven i fig 2.4c indses det, at afstanden mellem den stippled linje og momentkurvens spidser er  $4/3 M_y$ . Da afstanden tillige er  $P_y a$ , får vi:

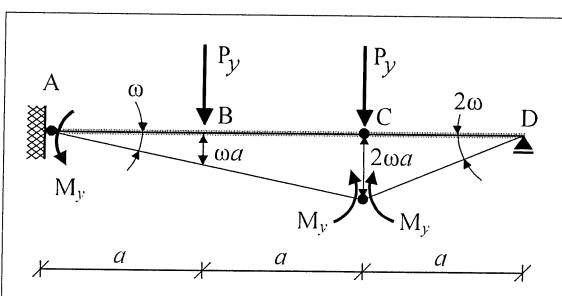
$$\frac{4}{3} M_y = P_y a \Rightarrow P_y = \frac{4 M_y}{3 a}$$

En forudsætning for at denne værdi af bæreevnen kan nås, er som sagt, at momentet i det først dannede flydeled holder sig konstant, medens belastningen vokser, indtil det andet flydeled dannes. Under denne proces vil tilvæksten i de elastiske deformationer medføre en vinkeldrejning i flydeleddet ved indspændingen, da dette jo nu virker som et charnier med et indbygget fast moment  $M_y$ . Man bør altså sikre sig, at den bøjningsarbejdslinje, der gælder for tværsnittet ved indspændingen, har tilstrækkelig lange vandrette grene til at den nødvendige vinkeldrejning kan foregå, uden at der sker et egentligt brud. Man siger også, at tværsnittet skal være i besiddelse af den nødvendige *rotationskapacitet*.

I de danske normer for beton- og stålkonstruktioner er der angivet vejledende regler for, hvilke tværsnitstyper der kan påregnes at have tilstrækkelig rotationskapacitet til, at plastiske beregningsmetoder kan anvendes.

Det er vigtigt at gøre opmærksom på, at hvis man ved, hvor flydeleddene dannes, kan konstruktionens flydelast ( $P_y$ ) bestemmes, uden at man er nødt til at gennemregne de stadier, konstruktionen gennemløber, inden den endelige kollaps finder sted.

Beregningen foretages nemmest ved hjælp af arbejdsligningen. Som virtuel flytning anvendes en flytning, der svarer til de nedbøjninger, konstruktionen har mulighed for, *efter at* flydemekanismen er dannet. Tænker vi os således, at bjælkedelen ABC på figur 2.5 får den lille (infinitesimale) drejning  $\omega$  om punkt A, må bjælkedelen CD dreje sig vinklen  $2\omega$  om punkt D, da de to dele skal have samme nedbøjning i C.



Figur 2.5

udføres i flydeleddene, bliver således:  $-2\omega M_y - 2\omega M_y = -4\omega M_y$ .

Ved at betragte figur 2.5 indses det, at den lodrette flytning af punkterne B og C bliver  $\omega a$  hhv.  $2\omega a$ . Det arbejde, belastningen udfører, bliver derfor i alt:  $P_y \omega a + P_y 2\omega a = 3P_y \omega a$ .

Da begge bjælkedele er i ligevægt, umiddelbart før konstruktionen kollapser, gælder det i følge arbejdsligningen, at det samlede arbejde, der udføres ved en vilkårlig virtuel flytning, er lig med nul. Altså gælder det, at:

$$3P_y \omega a - 4M_y \omega = 0 \Rightarrow P_y = \frac{4 M_y}{3 a}$$

Bemærk, at alle flydemomenterne bidrager med et negativt arbejde. Dette må gælde generelt, da det fra et fysisk synspunkt er oplagt, at flydeleddene så at sige "stritter imod" kollapsen.

Bjælkedelen ABC er i hver ende påvirket af et moment med størrelsen  $M_y$ . Da disse momenter begge virker *mod* uret, og bjælkedelen drejes vinklen  $\omega$  *med* uret, vil det arbejde, disse momenter udfører ved drejningen være:  $-2\omega M_y$ . Bjælkedelen CD er alene påvirket af et moment  $M_y$  ved punkt C, idet momentet ved den simple understøtning er nul. Da bjælkedelen drejer sig vinklen  $2\omega$  modsat den retning, momentet virker, bliver det arbejde, som dette moment udfører, lig med  $-2\omega M_y$ . Det arbejde, der i alt

### 2.3 Ekstremalsætningerne

I det foregående afsnit blev det vist, at en konstruktions flydelast kan bestemmes ved hjælp af arbejdsligningen, hvis blot man kender den korrekte flydemekanisme. Tilbage står problemet: Hvordan bestemmer man den korrekte flydemekanisme?

På baggrund af det netop gennemgåede eksempel indses det, at vi kan opstille en fysisk, en statisk og en geometrisk betingelse, som konstruktionen skal opfylde i kollapssituationen. Disse 3 betingelser knytter sig alle til konstruktionens momentkurve.

#### Fysisk betingelse

Kaldes bjælkethværsnittets positive flydemoment for  $M_y$ , og det negative for  $-M'_y$ , skal momenterne overalt i bjælken opfylde betingelsen:  $-M'_y \leq M \leq M_y$ .

Et positivt flydeled, dvs. et flydeled, hvor der er træk i bjælkens underside, kan kun forekomme, hvis  $M = M_y$ , medens et negativt flydeled, hvor der er træk i bjælkens overside, kun kan forekomme hvor  $M = -M'_y$ .

#### Statisk betingelse

Konstruktionens momentkurve skal være *statisk tilladelig*.

En statisk tilladelig momentkurve er som bekendt en momentkurve, der opfylder ligevægtsligningerne. Hvis konstruktionen er n gange statisk ubestemt, betyder det, at man frit kan vælge n statisk ubestemte snitmomenter. De valgte snitmomenter kaldes som bekendt de *overtallige*. Herefter kan de resterende momenter fastlægges ved brug af ligevægtsligningerne.

Den nemmeste måde at bestemme en statisk tilladelig momentkurve er som regel ved brug af superpositionsprincippet.

En momentkurve, som både er statisk tilladelig og opfylder den fysiske betingelse, kaldes en *sikker momentfordeling*

#### Geometrisk betingelse

De negative og positive flydeled, som momentkurven giver konstruktionen mulighed for at danne, skal svare til en flydemekanisme.

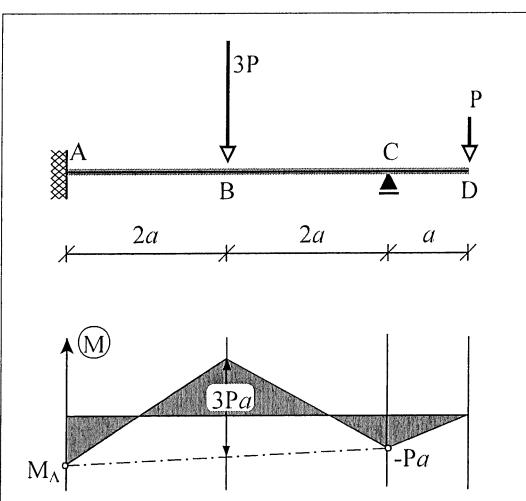
Erstatter man flydeleddene med charnierer, skal konstruktionen således være bevægelig, og den gensidige vinkeldrejning i charniererne skal afspejle, om der er tale om et negativt eller et positivt flydeled.

Hvis en konstruktion er n gange statisk ubestemt, skal der åbenbart *maksimalt*  $n+1$  flydeled til for at gøre den bevægelig. Ofte vil et mindre antal dog være tilstrækkeligt. Hvis antallet af flydeled er  $n+1$ , taler man om en total kollaps, ellers er der tale om en partiell - eller delvis - kollaps.

For at få en ide om, hvorledes ovenstående betingelser kan anvendes, vil vi betragte følgende eksempel.

En vandret bjælke ABCD er understøttet og belastet som vist på figur 2.6.

Det forudsættes, at bjælken opfører sig *idealplastisk* med samme flydemoment for såvel positive som negative momentpåvirkninger. Det gælder altså, at:  $M'_y = M_y$ .



Figur 2.6 Statisk tilladelig momentkurve

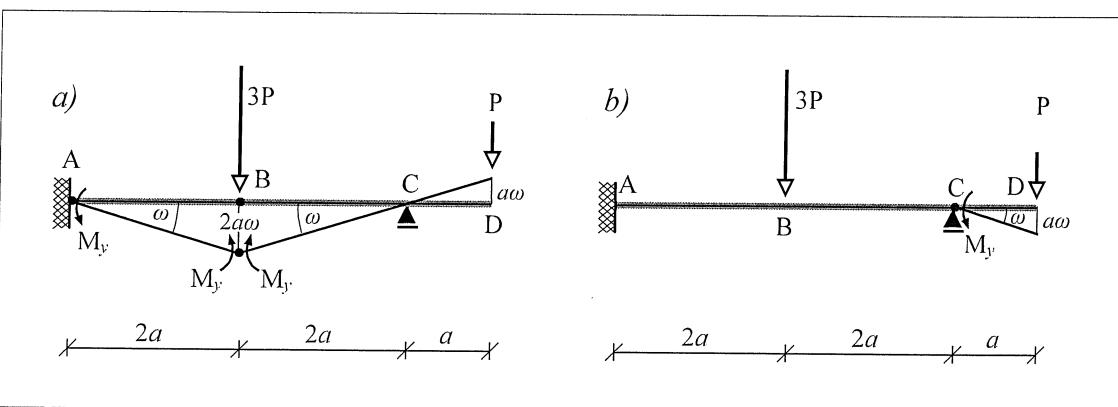
Da konstruktionen er en gang statisk ubestemt, kan en statisk tilladelig momentkurve findes ved, at man frit vælger en værdi for indspændingsmomentet ( $M_A$ ), hvorefter de resterende momenter bestemmes ved hjælp af ligevægtsligningerne.

Bemærk, at den udkragede del af bjælken (CD) er statisk bestemt, hvorfor momentet i C bliver  $-Pa$ , uanset valget af indspændingsmoment.

Ved brug af superpositionsprincippet indses det endvidere, at afstanden fra slutlinjen (den stippled linje) til momentkurvens knæk ved B er bundet til at være  $3Pa$ , svarende til det moment der ville have været i punkt B, hvis bjælkedelen ABC havde været en simpelt understøttet bjælke.

På basis af momentkurven indses det, at konstruktionen kun har mulighed for at kollapse på 2 forskellige måder.

Den ene er en total kollaps, der indebærer en flydemekanisme med et negativt flydeled ved indspændingen og et positivt flydeled i punkt B, den anden er en delvis kollaps, hvor mekanismen alene dannes af et negativt flydeled i punkt C. De to mekanismer er vist i figur 2.7 a) og b). Herefter kan arbejdslieningen anvendes til at bestemme den værdi af lastparameteren P, der svarer til henholdsvis mekanisme a) og mekanisme b).



Figur 2.7 Flydemekanismer

Med henvisning til de vinkler og afstande der er vist på figuren fås for mekanisme a) :

$$3P \cdot 2a\omega - Pa\omega - M_y\omega - M_y\omega - M_y\omega = 0 \Rightarrow P = \frac{3M_y}{5a}$$

For mekanisme b) fås tilsvarende:

$$Pa\omega - M_y\omega = 0 \Rightarrow P = \frac{M_y}{a}$$

(Denne værdi kan naturligvis også findes direkte af momentligningen:  $-Pa = -M_y$ .)

Tilbage står at afgøre, hvilken af de to værdier for P der svarer til den korrekte flydelast  $P_y$ . Indledningsvis indses det, at anvendelse arbejdslieningen på en flydemekanisme sikrer, at den fundne løsning opfylder 2 af de 3 betingelser, der blev opstillet i indledningen af dette afsnit.

*Den geometriske betingelse* er selvsagt opfyldt, idet vi har taget udgangspunkt i mulige flydemekanismer.

*Den statiske betingelse* er opfyldt, idet vi har brugt arbejdslieningen til at bestemme P. Arbejdslieningen er jo som bekendt en alternativ ligevægtsligning, hvilket betyder, at den fundne værdi af P stemmer med, at momentet i flydeleddene er  $M_y$ . Det er derfor muligt at bestemme en statisk tilladelig momentkurve, der er i overensstemmelse med den valgte mekanisme.

For at afgøre om *den fysiske betingelse*  $-M'_y \leq M \leq M_y$  er overholdt bestemmes momentkurverne svarende til de undersøgte flydemekanismer.

For mekanisme a) gælder det, at den har et negativt flydeled i punkt A og et positivt flydeled i punkt B, hvorfor snitmomenterne i disse punkter skal være henholdsvis  $-M_y$  og  $M_y$ . Snitmomentet i punkt C bliver :

$$M_c = -Pa = -\frac{3}{5}M_y \text{ idet } P = \frac{3M_y}{5a}$$

Da ingen af momenterne i bjælken overtræder den fysiske betingelse, kan vi konkludere, at mekanisme a) er den korrekte flydemekanisme, og konstruktionens flydelast er:

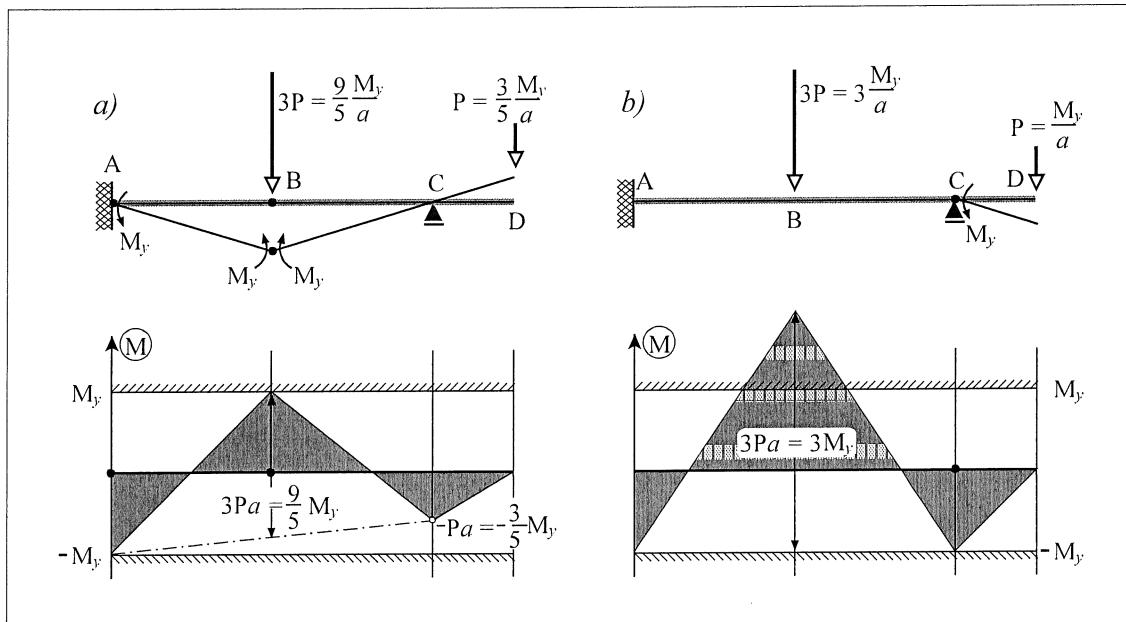
$$P_y = \frac{3M_y}{5a}$$

Momentkurven for mekanisme a) er vist på figur 2.8 a). Figuren viser tillige de grænser momentkurven skal holde sig indenfor, hvis den fysiske betingelse skal være overholdt.

Det bemærkes, at da mekanisme *a*) svarer til en total kollaps, er den tilsvarende momentkurve entydigt bestemt. Det samme gælder imidlertid ikke for momentkurven svarende til mekanisme *b*). Her er tale om en delvis kollaps, hvilket medfører, at den del af konstruktionen, der ikke deltager i kollapsen, stadig er statisk ubestemt.

I det aktuelle tilfælde er momenterne på strækningen AC således en gang statisk ubestemt, hvorfor snitmomentet i punkt A kan vælges frit.

Da flydemekanismen har et negativt flydeled i punkt C, er snitmomentet her lig med  $-M_y$ . Selvom momentet i A vælges så fordelagtigt som muligt, nemlig lig med  $M_y$ , ses det, at det ikke er muligt at holde momentkurven inden for grænserne, idet den krævede afstand fra slutlinjen til momentkurvens spids ved punkt B er  $3Pa = 3M_y$ . Mekanisme *b*) kan således ikke bringes til at opfylde den fysiske betingelse.



Figur 2.8 Flydemekanismer med tilhørende momentkurver

På baggrund af det netop gennemgåede eksempel indses det, at det, der kan gå galt ved valg af mekanisme, er, at den tilsvarende momentkurve "rager ud over" de grænser, som den fysiske betingelse sætter. Da dette er ensbetydende med at den tilsvarende last er for stor, således at momentkurven "fylder for meget", kan vi (intuitivt) formulere følgende vigtige sætning:

Anvendes arbejdslikningen på en mulig flydemekanisme, vil den derved bestemte værdi af lastparameteren ( $P$ ) være større end eller lig med den korrekte flydelast. ( $P_y$ )

Denne sætning kaldes *øreværdisætningen*, og den tilsvarende værdi af lastparameteren kaldes en *øreværdi* for flydelasten.

En øreværdi markeres ofte med et øvre indeks  $+$ . Det gælder altså, at:  $P^+ \geq P_y$ .

I stedet for at tage udgangspunkt i en mulig flydemekanisme og derefter anvende arbejdslikningen kan vi også vælge at starte med en statisk tilladelig momentfordeling og derefter gøre denne sikker ved at sørge for at vælge lastparameteren, således at den fysiske betingelse er opfyldt.

På denne måde vil vi indledningsvis opfylde den statiske og den fysiske betingelse. Om den valgte værdi af lastparameteren svarer til den korrekte flydelast afhænger så af, om den tilsvarende momentkurve tillader dannelsen af flydelede svarende til en mulig mekanisme.

Vi vil illustrere denne fremgangsmåde ved at anvende den på det aktuelle eksempel.

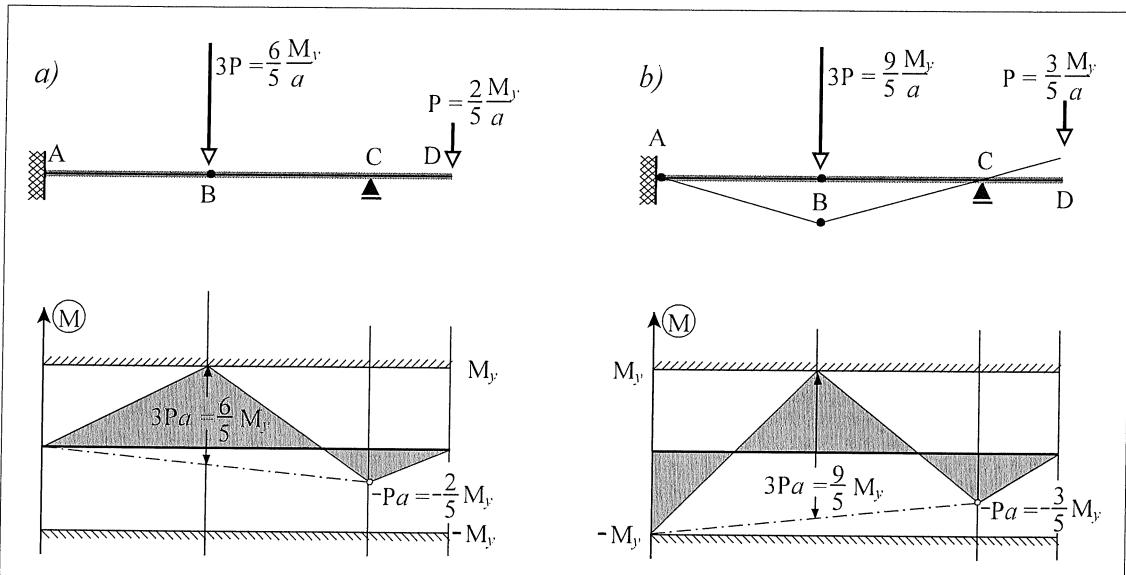
Som tidligere nævnt er konstruktionen en gang statisk ubestemt. Benævner vi derfor snitmomentet i punkt A for  $M_A$ , ses det ved betragtning af figur 2.6 at snitmomentet i punkt B bliver:

$$M_B = 3Pa - (-M_A + Pa) \frac{1}{2} = \frac{5}{2}Pa + \frac{1}{2}M_A$$

Hvis vi for eksempel vælger at sætte  $M_A$  lig med nul og samtidig forlanger, at  $M_B \leq M_y$  fås:

$$M_B = \frac{5}{2}Pa \leq M_y \Rightarrow P \leq \frac{2}{5} \frac{M_y}{a}$$

Figur 2.9 a) viser den tilsvarende momentkurve, når  $P$  vælges størst mulig. Det ses, at denne momentkurve kun giver mulighed for et positivt flydeled i punkt B, hvilket betyder, at den geometriske betingelse ikke er opfyldt. Den anvendte værdi af  $P$  er derfor ikke den korrekte flydelast.



Figur 2.9 Sikre momentkurver

Hvis vi derimod vælger  $M_A = -M_y$  får vi:

$$M_B = \frac{5}{2}Pa - \frac{1}{2}M_y \leq M_y \Rightarrow P \leq \frac{3}{5} \frac{M_y}{a}$$

Hvis  $P$  vælges størst muligt, fås den på figur 2.9 b) viste momentkurve. Det ses, at denne momentkurve giver mulighed for et negativt flydeled ved indspændingen og et positivt flydeled i punkt B.

Da disse flydeled svarer til en mekanisme, opfylder denne momentkurve den geometriske betingelse, og den tilhørende værdi af  $P$  er derfor den korrekte flydelast. Det ses, at denne værdi for flydelasten (heldigvis!) er den samme, som den vi fandt tidligere i dette afsnit. (Se figur 2.8).

På baggrund af ovenstående indses det, at det åbenbart gælder om at gøre en sikker momentkurve "så stor som mulig" for at opnå, at den kommer til at svare til en mulig mekanisme.

Da dette betyder, at den tilsvarende belastning også skal være så stor som mulig, kan vi (igen intuitivt) formulere følgende vigtige sætning:

*En sikker momentfordeling svarer til en værdi af lastparameteren ( $P$ ), der er mindre end eller lig med den korrekte flydelast ( $P_y$ ).*

Denne sætning kaldes *nedreværdisætningen*, og den tilsvarende værdi af lastparameteren kaldes en *nedreværdi* for flydelasten.

En nedreværdi markeres ofte med et øvre indeks  $\bar{\cdot}$ . Det gælder altså at:  $P^- \leq P_y$

Tilsammen kan øvre- og nedreværdisætningen sammenfattes i uligheden:  $P^- \leq P_y \leq P^+$ , hvor lighedstegnene gælder, hvis såvel den fysiske som den statiske og den geometriske betingelse er opfyldt.

Det fremgår af denne ulighed, at der for en bestemt lastopstilling, styret af lastparameteren  $P$ , kun findes én værdi for den korrekte flydelast  $P_y$ .

Det skal bemærkes, at selvom værdien af flydelasten altid er entydigt bestemt, kan der undertiden findes flere flydemekanismer, der fører til den samme flydelast.

## 2.4 Beregningsmetoder

I det foregående afsnit blev der skitseret 2 metoder, der begge kan anvendes i forbindelse med en bæreevneundersøgelse.

Den ene metode tager udgangspunkt i øvreværdisætningen, og anvendes almindeligvis, hvis opgaven går ud på at bestemme flydelasten for en allerede given konstruktion.

Metoden består i, at man udvælger et passende antal (sandsynlige) flydemekanismer og anvender arbejdslikningen på disse. Herved får man beregnet et antal øvreværdier til flydelasten. Disse værdier er alle større end eller lig med den korrekte flydelast, hvilket vil sige, at kun den mindste af dem har mulighed for at være lig med flydelasten. Om dette er tilfældet undersøges derefter ved at optegne en statisk tilladelig momentkurve svarende til den mindste øvreværdi. Denne fremgangsmåde illustreres i eksempel 2.1.

I enkelte tilfælde er det overkommeligt at undersøge *samtlige* mulige flydemekanismer. Er dette tilfældet har man vished for, at den mindste øvreværdi også er den korrekte flydelast, hvorfor det ikke er nødvendigt at optegne den tilsvarende momentkurve. Denne fremgangsmåde er illustreret i eksempel 2.2.

Den anden metode tager udgangspunkt i nedreværdisætningen, og anvendes for det meste i forbindelse med dimensioneringsopgaver.

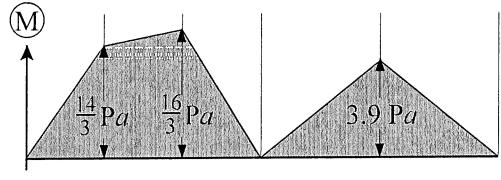
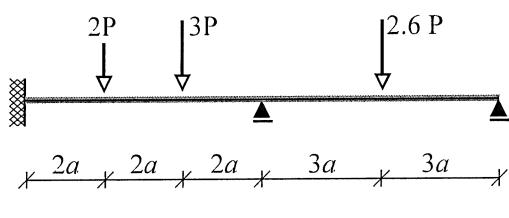
Her er konstruktionens statiske system samt en eller flere lastopstillinger givet, og opgaven går ud på at bestemme det eller de flydemomenter, der skal til for, at konstruktionen kan bære de givne belastninger.

Beregningerne foregår på den måde, at man for hver af de betragtede lastopstillinger bestemmer en statisk tilladelig momentfordeling. Herefter fastlægges flydemomenterne i de forskellige dele af konstruktionen således, at de anvendte momentkurver overalt opfylder den fysiske betingelse. Metoden har især sin berettigelse ved dimensionering af armerede betonkonstruktioner, hvor man ved at variere antallet af armeringsstänger i bjælkernes over og undersider, kan opnå, at de grænser, som den fysiske betingelse sætter, i det store og hele følger momentkurverne.

I denne forbindelse, er det vigtigt at minde om, at en elastisk momentkurve, det vil sige en momentkurve der er beregnet under forudsætning af, at konstruktionen opfører sig lineærelastisk, altid er statisk tilladelig. Dette gælder selvom den aktuelle konstruktion rent faktisk ikke opfylder forudsætningen. Dette nævnes fordi det som oftest er nemt at fremskaffe en elastisk momentkurve ved hjælp af et egnet computerprogram, men det skal understreges, at elastiske momentkurver som regel ikke giver det mest økonomiske design.

Eksempel 2.3 illustrerer, hvorledes nedreværdimethoden kan anvendes ved dimensionering af en armeret betonbjælke.

### Eksempel 2.1 Øvreværdimethoden



Statisk tilladelig M-kurve

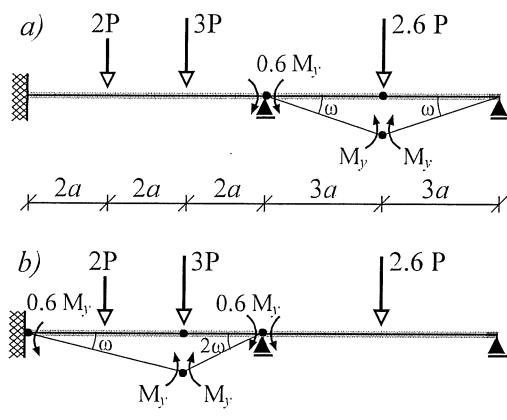
Hosstående figur viser det statiske system for en 2 gange statisk ubestemt bjælkekonstruktion. Det forudsættes at bjælkens bøjningsarbejdslinje opfører sig idealplastisk med et positivt flydemoment af størrelsen  $M_y$  og et negativt flydemoment  $M'_y = 0.6M_y$ .

Da konstruktionen som nævnt er 2 gange statisk ubestemt, kan en statisk tilladelig momentkurve beregnes, hvis for eksempel indspændingsmomentet og momentet over mellemunderstøtningen sættes til 0, svarende til at konstruktionen bestod af to simpelt understøttede bjælker. Det overlades til læseren at kontrollere værdierne på hosstående figur.

**Eksempel 2.1 fortsat**

På baggrund af den statisk tilladelige momentkurve vælges det nu at undersøge de to nedenfor viste flydemekanismer.

Bemærk, at mekanisme *a* svarer til en delvis kollaps, idet den kun involverer 2 ud af 3 flydeled, medens mekanisme *b* (pr. definition) svarer til en total kollaps, da den involverer det maksimale antal flydeled for en to gange statisk ubestemt konstruktion.



Arbejdsligningen brugt på mekanisme *a*:

$$2.6P \cdot 3a\omega - 0.6M_y\omega - M_y\omega - M_y\omega = 0 \Rightarrow$$

$$7.8Pa\omega = 2.6M_y\omega \Rightarrow P = P^+ = \frac{1}{3} \frac{M_y}{a}$$

Arbejdsligningen brugt på mekanisme *b*:

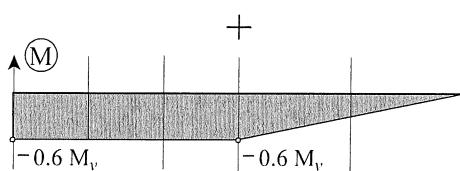
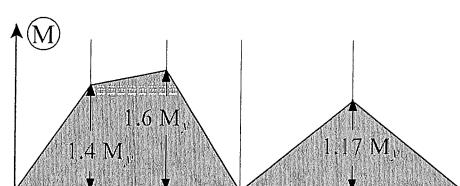
$$2P \cdot 2a\omega + 3P \cdot 4a\omega$$

$$-0.6M_y\omega - M_y\omega - M_y 2\omega - 0.6M_y 2\omega = 0 \Rightarrow$$

$$16Pa\omega = 4.8M_y\omega \Rightarrow P = P^+ = 0.3 \frac{M_y}{a}$$

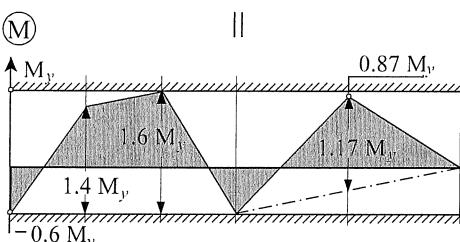
Det ses, at mekanisme *b*) giver anledning til den mindste - og dermed den bedste - øvreværdi. For at afgøre hvorvidt denne øvreværdi er lig med den korrekte flydelast, undersøges om den tilsvarende momentkurve opfylder den fysiske betingelse:  $-0.6M_y \leq M \leq M_y$ .

Momentkurven bestemmes lettest ved hjælp af superpositionsprincippet.



Vi tager udgangspunkt i den statisk tilladelige momentkurve, der blev bestemt tidligere i eksemplet. Erstattes lastparameteren  $P$  med den mindste øvreværdi  $P = 0.3M_y/a$ , fås de på hosstående figur viste værdier for momenterne ved enkeltkræfterne:

Denne momentkurve skal nu adderes til den momentkurve, der hidrører fra, at momenterne ved indspændingen og ved mellemunderstøtningen ikke er 0 men  $-0.6M_y$ . Denne momentkurve er vist som nr. 2 på figuren



Den endelige momentkurve bliver herefter som vist nederst på figuren.

Det ses, at hele momentkurven falder inden for de grænser, der sættes af den fysiske betingelse.

Herefter kan vi konkludere, at den korrekte flydelast for konstruktionen er:

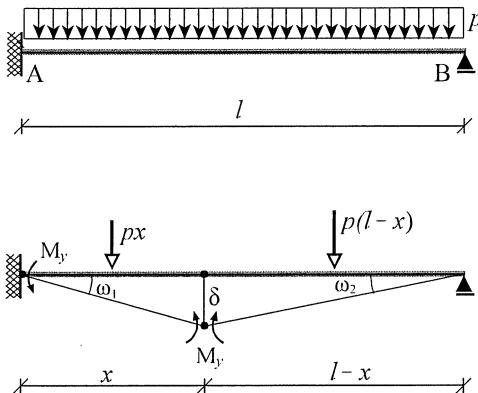
$$P_y = 0.3 \frac{M_y}{a}$$

### Eksempel 2.2 Øvreværdimetoden

En vandret bjælke AB er fast indspændt ved A og simpelt understøttet ved B. Bjælken er belastet med en ensformigt fordelt lodret last med intensiteten  $p$  som vist på nedenstående figur.

Det forudsættes, at bjælken opfører sig idealplastisk med samme flydemoment  $M_y$  for såvel positive som negative momentpåvirkninger.

Vi ønsker at bestemme bjælkens flydelast  $p_y$  ved hjælp af øvreværdimetoden.



Indledningsvis indsættes det, at der skal to flydelede - et positivt og et negativt - til at danne en flydemekanisme.

Det negative flydelede må opstå ved indspændingen, hvor den negative momentpåvirkning er størst. Placeringen af det positive flydelede er derimod ikke så indlysende. Vi placerer derfor det positive flydelede i den endnu ukendte afstand  $x$  fra indspændingen, som vist på hosstående figur.

Når vi efterfølgende anvender arbejdsligningen på mekanismen opnår vi, at den herved beregnede øvreværdi bliver en funktion af  $x$ .

Bemærk, at for at finde den fordelte belastningens arbejde, må denne repræsenteres af to resultanter, en for hvert at de stive bjælestykker der adskilles af flydeleddet. Dette er nødvendigt, da et kraftsystems arbejde kun er lig med resultantens arbejde, hvis kraftsystemet virker på et stift legeme.

Hvis den lodrette flytning af det positive flydelede benævnes  $\delta$ , fås med henvisning til figuren:

$$\omega_1 = \frac{\delta}{x} ; \quad \omega_2 = \frac{\delta}{l-x}$$

Ved anvendelse af arbejdsligningen fås herefter:

$$px \cdot \frac{1}{2}\delta + p(l-x) \cdot \frac{1}{2}\delta - M_y \cdot \frac{\delta}{x} - M_y \cdot \frac{\delta}{x} - M_y \cdot \frac{\delta}{l-x} = 0 \Rightarrow p = p^+(x) = 2 \frac{M_y}{l} \left( \frac{2}{x} + \frac{1}{l-x} \right)$$

Vi har hermed bestemt en øvreværdi for alle placeringer af det positive flydelede.

Eksempelvis bliver øvreværdien, hvis flydeleddet er placeret midt i bjælken ( $x = \frac{1}{2}l$ ):

$$p^+(\frac{1}{2}l) = 2 \frac{M_y}{l} \left( \frac{2}{\frac{1}{2}l} + \frac{1}{l - \frac{1}{2}l} \right) = 12 \frac{M_y}{l^2}$$

Ifølge øvreværdisætningen er den korrekte flydelast den mindste af samtlige øvreværdier. Vi kan derfor finde den korrekte flydelast ved at bestemme minimum for funktionen  $p^+(x)$ .

$$\frac{dp^+}{dx} = 0 \Rightarrow -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{(l-x)^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 2(l-x)^2 \Rightarrow x = \sqrt{2}(l-x) \Rightarrow x = (2-\sqrt{2})l$$

Indsættes denne værdi for  $x$  i udtrykket for  $p^+$  fås - efter en del mellemregninger - den korrekte flydelast:

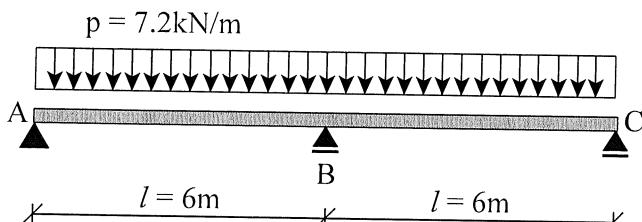
$$p_y = (6 + 4\sqrt{2}) \frac{M_y}{l^2} \cong 11.66 \frac{M_y}{l^2}$$

Bemærk, at denne værdi, der jo er opnået for  $x = (2-\sqrt{2})l \cong 0.586l$ , ikke er meget forskellig fra den den øvreværdi, vi fandt, hvis flydeleddet blev placeret midt i bjælken. Dette peger på, at funktionen  $p^+(x)$  har et relativt "fladt minimum". Denne egenskab viser sig at være ret karakteristisk for øvreværdimetoden, således at forstå, at hvis man blot har fat i den rigtige type mekanisme, kan man, ved en fornuftig placering af flydeleddene, opnå en øvreværdi, der ligger tæt på den korrekte flydelast.

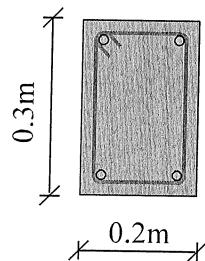
**Eksempel 2.3 Nedreværdimetoden**

En armeret betonbjælke, der spænder kontinuert over to fag, skal dimensioneres til at bære en ensformigt fordelt last med intensiteten 7.2 kN/m.

Bjælken har rektangulært tværssnit og ønskes armeret i over- og underside med 16mm armeringsstål som antydet på nedenstående figur.



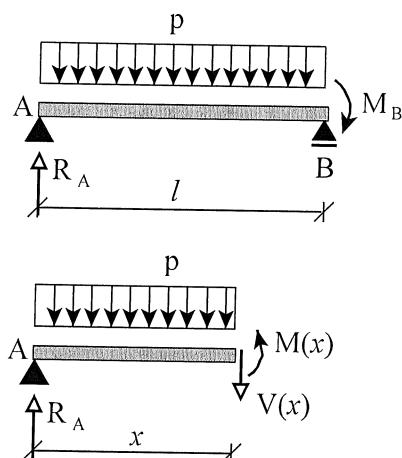
Konstruktion



Tværssnit

Det kan forudsættes, at bjælken opfører sig idealplastisk, og at man med rimelig god nøjagtighed kan antage, at bjælkens flydemoment for henholdsvis positiv og negativ momentpåvirkning er  $M_y = n_u \cdot 10 \text{ kNm}$  og  $M'_y = n_o \cdot 10 \text{ kNm}$ , hvor  $n_u$  er antallet af armeringstænger i bjælkens underside og  $n_o$  er antallet af armeringstænger i oversiden.

Opgaven består således i at bestemme  $n_u$  og  $n_o$  ved anvendelse af nedreværdimetoden.



Indledningsvis indsættes det, at bjælken er en gang statisk ubestemt. En statisk tilladelig momentkurve kan således bestemmes ved, at man på forhånd vælger for eksempel størrelsen af snitmomentet over mellemunderstøtningen. Kaldes dette moment  $M_B$  og regnes det positivt som vist på nedenstående figur fås, idet der henvises til figurens betegnelser:

$$R_A l + M_B - \frac{1}{2} p l^2 = 0 \Rightarrow R_A = \frac{1}{2} p l - \frac{M_B}{l}$$

$$M(x) + px \cdot \frac{1}{2} x - R_A x = 0 \Rightarrow M(x) = R_A x - \frac{1}{2} px^2$$

$$V(x) = M'(x) = R_A - px$$

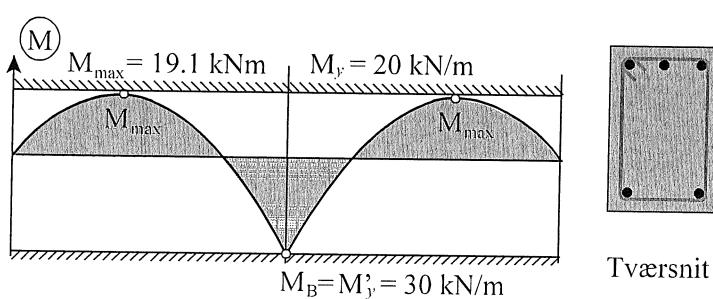
$$V(x) = 0 \text{ for } x = \frac{R_A}{p} \Rightarrow$$

$$M_{\max} = M\left(\frac{R_A}{p}\right) = R_A \frac{R_A}{p} - \frac{1}{2} \left(\frac{R_A}{p}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{R_A^2}{p}$$

Vælger vi nu at armere med 3 stænger i bjælkens overside ( $n_o = 3$ ) bliver  $M'_y = 30 \text{ kNm}$ , hvilket betyder, at vi ligeledes kan sætte  $M_B = 30 \text{ kNm}$ . Ved indsættelse i ovenstående udtryk får vi:

$$R_A = \frac{1}{2} \cdot 7.2 \cdot 6 - \frac{30}{6} = 16.6 \text{ kNm} \Rightarrow M_{\max} = \frac{1}{2} \frac{16.6^2}{7.2} = 19.1 \text{ kNm}$$

Dette betyder, at det vil være tilstrækkeligt med to armeringstænger i bjælkens underside ( $n_u = 2$ ), idet dette medfører at  $M_y = 20 \text{ kNm}$ .



Tværssnit

Hosstående figur viser den valgte sikre momentkurve samt armeringens placering i tværssnittet. Det bemærkes, at der styrkemægt kun er behov for oversidearmering på en kort strækning over mellemunderstøtningen.

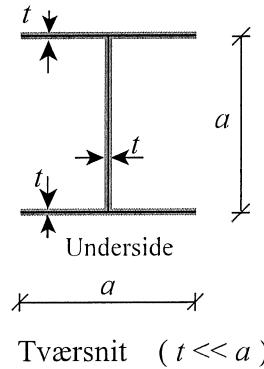
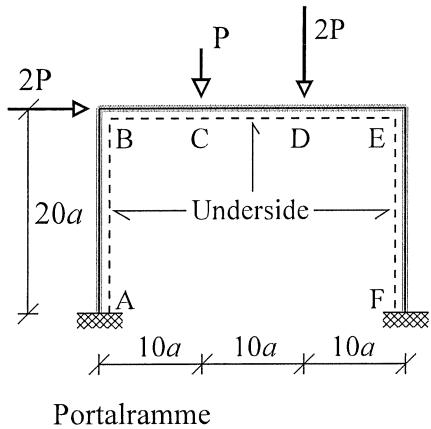
Som det blev vist i eksempel 1.3, afhænger størrelsen af et tværsnits flydemomenter ( $M_y$  og  $M'_y$ ) af, om tværsnittet er normalkraftpåvirket. Da vi indtil kun nu har beskæftiget os med bjælkekonsstruktioner, hvor normalkraften ( $N$ ) var lig med nul, har flydemomenterne kunne betragtes som tværsnits konstanter, og som sådanne uafhængige af den aktuelle belastnings størrelse.

Dette vil imidlertid ikke være tilfældet, hvis flydeledsmetoden anvendes på en rammekonstruktion. Her vil det være nødvendigt at tage hensyn til normalkræfternes indflydelse på flydemomenterne. Dog vil normalkræfterne i en ramme ofte være af en størrelsесorden, der gør, at deres indflydelse på flydemomenterne er begrænset.

Hvis man derfor indledningsvis antager at flydemomenterne er uafhængige af normalkraften og på den baggrund beregner flydelasten, kan man efterfølgende beregne de tilsvarende normalkræfter. Man kan derefter beregne hvor meget disse normalkræfter reducerer de aktuelle flydemomenter. Herefter kan den fundne flydelast og den tilhørende statisk tilladelige momentkurve reduceres tilsvarende. Herved har man bestemt en nedrev værdi til flydelasten, idet den reducerede momentkurve jo stadig er statisk tilladelig og nu også opfylder den fysiske betingelse.

Nedenstående eksempel illustrerer denne fremgangsmåde.

#### Eksempel 2.4 Rammeberegning



Ovenstående figur viser en indspændt ramme, samt rammeelementernes tværsnitsgeometri. Vi ønsker at bestemme rammens bæreevne udtrykt ved lastparametren  $P$ , under forudsætning af at rammen opfører sig idealplastisk.

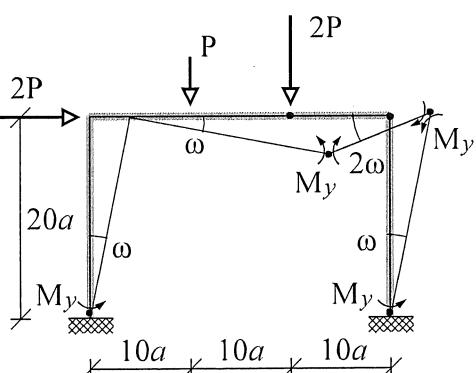
Da det viste tværsnit er magen til det tværsnit, der blev analyseret i eksempel 1.3, kan såvel det positive som det negative flydemoment kan bestemmes af udtrykket:

$$M = \frac{5}{4} f_y t a^2 \left(1 - \frac{1}{5} \left(\frac{N}{f_y t a}\right)^2\right) \quad \text{når} \quad -f_y t a \leq N \leq f_y t a$$

Indledningsvis vil vi bestemme rammens flydelast under forudsætning af at vi med rimelig nøjagtighed kan negliger normalkraftens indflydelse på flydemomenterne, således at:

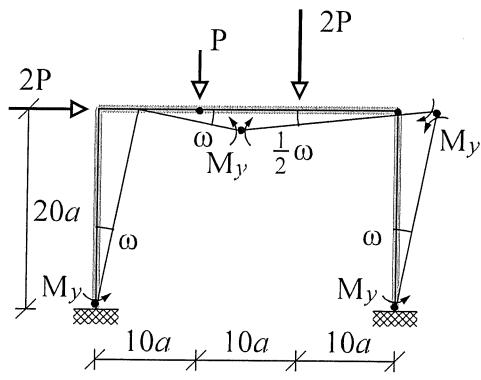
$$M_y = M'_y = \frac{5}{4} f_y t a^2 .$$

Herefter tages udgangspunkt i øvre værdimetoden idet to udvalgte flydemekanismer analyseres. Da rammen er 3 gange statisk ubestemt skal der anvendes i alt 4 flydeled for at opnå en total kollaps.



I første omgang vælges det at placere flydeleddene som vist på hosstående figur.  
Anvendes arbejdsligningen på denne mekanisme fås:

$$\begin{aligned} 2P \cdot 20a\omega + P \cdot 10a\omega + P \cdot 20a\omega &= \\ M\omega + M\omega + M \cdot 2\omega + M \cdot 2\omega + M\omega + M\omega &= \\ \Rightarrow P^+ = \frac{4}{35} \frac{M_y}{a} &\cong 0.114 \frac{M_y}{a} \end{aligned}$$

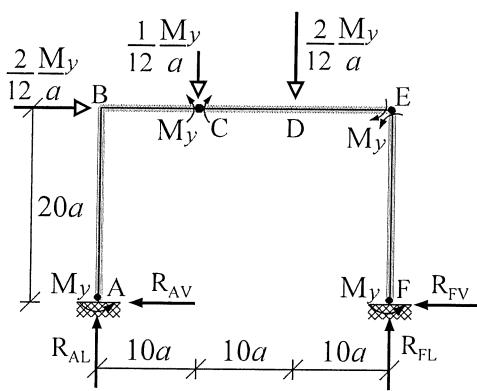
*Eksampel 2.4 fortsat*

Vælger vi at flytte flydeleddet i rammens overligger, således, at det ligger under den lodrette kraft  $P$  i stedet for under kraften  $2P$  fås:

$$\begin{aligned} 2P \cdot 20a\omega + P \cdot 10a\omega + P \cdot 20a \cdot \frac{1}{2}\omega &= \\ M\omega + M\omega + M \cdot \frac{1}{2}\omega + M \cdot \frac{1}{2}\omega + M\omega + M\omega &= \\ \Rightarrow P^+ = \frac{1}{12} \frac{M_y}{a} \cong 0.0833 \frac{M_y}{a} & \end{aligned}$$

Det ses, at den sidst analyserede mekanisme giver anledning til den mindste øvreværdi, hvorfor denne mekanisme lægges til grund for de følgende beregninger.

Med henblik på at bestemme rammens momentkurve vil vi indledningsvis bestemme rammens reaktioner ved indspændingerne.



Moment om F (hele rammen):

$$\begin{aligned} R_{AL} 30a + \frac{2}{12} \frac{M_y}{a} 20a - \frac{1}{12} \frac{M_y}{a} 20a \\ - \frac{2}{12} \frac{M_y}{a} 10a - 2M_y = 0 \Rightarrow R_{AL} = \frac{1}{15} \frac{M_y}{a} \end{aligned}$$

Lodret projektion:

$$R_{FL} = \frac{1}{12} \frac{M_y}{a} + \frac{2}{12} \frac{M_y}{a} - \frac{1}{15} \frac{M_y}{a} = \frac{11}{60} \frac{M_y}{a}$$

Moment om E (højre rammeben)

$$R_{FV} 20a - 2M_y = 0 \Rightarrow R_{FV} = \frac{1}{10} \frac{M_y}{a}$$

Vandret projektion:

$$R_{AV} = \frac{2}{12} \frac{M_y}{a} - \frac{1}{10} \frac{M_y}{a} = \frac{1}{15} \frac{M_y}{a}$$

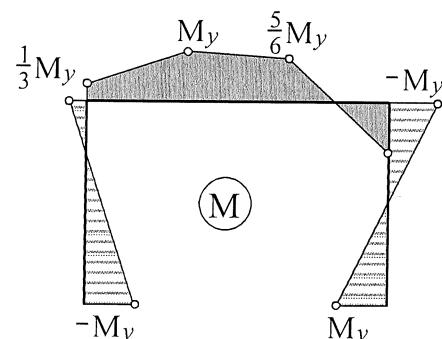
Herefter kan rammens momentkurve beregnes.

Moment om B (venstre rammeben):

$$M_B = \frac{1}{15} \frac{M_y}{a} 20a - M_y = \frac{1}{3} M_y$$

Moment om D (højre rammedel):

$$M_D = \frac{11}{60} \frac{M_y}{a} 10a + M_y - \frac{1}{10} \frac{M_y}{a} 20a = \frac{5}{6} M_y$$



Det ses, at momenterne i rammen overalt opfylder betingelsen:  $-M'_y \leq M \leq M_y$ .

Dette betyder, at hvis flydemomentet var uafhængigt af normalkraften, ville den fundne øvreværdi for lastparameteren være lig med den korrekte flydelast. Da dette imidlertid ikke er tilfældet foretages følgende korrektion: Ved at betragte rammens reaktioner, indses det, at den største normalkraft findes i det højre rammeben. Vi har således at:

$$N = -R_{FL} = -\frac{11}{60} \frac{M_y}{a} \text{ hvor } M_y = \frac{5}{4} f_y t a^2 \Rightarrow N = -\frac{11}{60} \frac{5}{4} f_y t a \cong -0.23 f_y t a$$

Indsættes denne værdi i udtrykket for flydemomentets afhængighed af  $N$  fås:

$$M = M_y \left(1 - \frac{1}{5} \left(\frac{N}{f_y t a}\right)^2\right) = M_y \left(1 - \frac{1}{5} \left(\frac{-0.23 f_y t a}{f_y t a}\right)^2\right) = 0.99 M_y$$

Hvis vi således nedsætter belastningen med 1%, vil en tilsvarende reduktion af momenterne i den ovenfor viste momentkurve repræsentere en sikker momentfordeling, idet alle momenter vil være numerisk mindre end eller lig med  $0.99 M_y$ . En nedrev værdi for flydelasten er således:

$$P^- = 0.99 \frac{1}{12} \frac{M_y}{a} \cong 0.0825 \frac{M_y}{a} \Rightarrow 0.0825 \frac{M_y}{a} \leq P_y \leq 0.0833 \frac{M_y}{a}$$

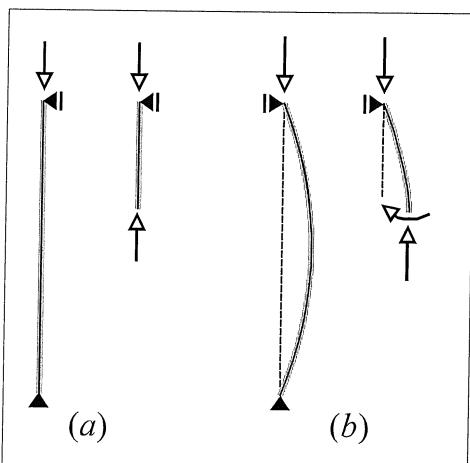
## **SIMPELT UNDERSTØTTEDE SØJLER**

### **INDHOLD**

1 Indledning .....	2
2 Eulers søjleformel .....	4
3 Effektiv søjlelængde .....	6
4 Momentpåvirkede søjler .....	8
5 Bløde søjler .....	12

## 1 Indledning

Ved en søjle forstås i det følgende en bjælke, der er påvirket af en tryknormalkraft af en sådan størrelse, at bjælkens ligevægtsligninger ikke med tilstrækkelig nøjagtighed kan opstilles på basis af den udeformerede bjælkes geometri.



**Figur 1.1** Simpelt understøttet søjle

Betratger vi således en centralt belastet søjle (dvs. en søjle, der alene er belastet af kræfter, hvis virkelinjer er sammenfaldende med søjlens tyngdepunktsaksse), er det klart, at såfremt søjlens ligevægt baseres på den udeformerede geometri, vil den eneste snitkraft i søjlen være en tryknormalkraft. Denne situation er illustreret på figur 1.1(a).

Vores erfaring fortæller os imidlertid, at belaster vi søjlen med en kraft af en passende størrelse, er det muligt at opnå en ligevægtssituatie som den, der er vist på figur 1.1(b).

Denne ligevægtsstilling, der åbenbart indebærer bøjningspåvirkning af søjlen, kan selvagt kun analyseres, hvis man betragter ligevægten af den deformerede søjle. Denne analyse gennemføres i afsnit 2.

For at få et begreb om søjleproblemets natur vil vi imidlertid først betragte den på figur 1.2 viste trykpåvirkede konstruktion, idet denne er velegnet til at illustrere nogle grundlæggende forhold ved søjleligevægt.

Konstruktionen består af 3 uendelig stive stænger, der er indbyrdes forbundet af charnier. Begge samlinger er forsynet med spiralfjedre med fjederkonstanten  $c$ . Hvis der derfor sker en gensidig vinkeldrejning  $\alpha$  af de elementer, der støder op til samlingen, vil fjederen generere et tilbageføringsmoment af størrelsen:  $M = c\alpha$ .

Vi ønsker at undersøge, om konstruktionen kan indtage andre ligevægtskonfigurationer end den trivielle retlinjede tilstand. Til det formål betragter vi mulighederne for ligevægt i den situation, hvor punkterne B og C er blevet påtvunget de små (infinitesimale) flytninger  $x_B$  og  $x_C$ .

Billedet til højre i figur 1.2 viser konstruktionens deformerede geometri, idet udbøjningerne dog er stærkt overdrevne af hensyn til overskueligheden. Flytningerne  $x_B$  og  $x_C$  medfører følgende gensidige vinkeldrejninger ved B og C:

$$\alpha_B = \frac{x_B}{a} + \frac{x_B - x_C}{a} = \frac{1}{a}(2x_B - x_C)$$

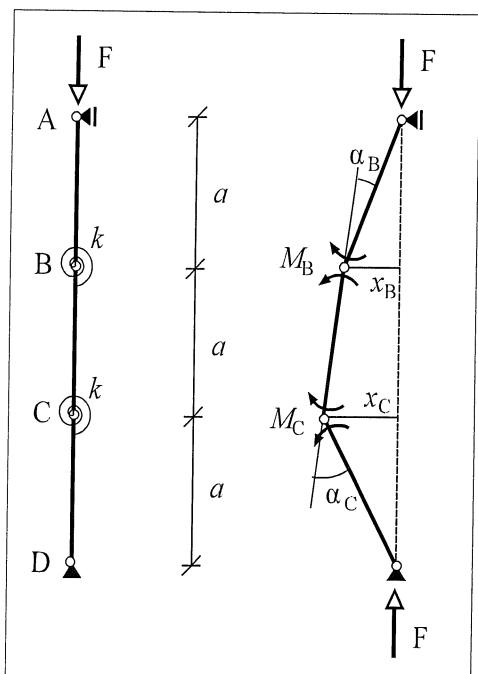
$$\alpha_C = \frac{x_C}{a} + \frac{x_C - x_B}{a} = \frac{1}{a}(2x_C - x_B)$$

Disse vinkeldrejninger giver på grund af spiralfjedrene anledning til indre momenter i samlingerne ved B og C af størrelsen:  $M_B = c\alpha_B$  og  $M_C = c\alpha_C$ .

Hvis konstruktionen er i ligevægt, må disse momenter modsvares af de momenter, den ydre last er årsag til.

Ser vi først på konstruktionen som helhed, er det klart,

at de vandrette reaktioner ved understøttningerne er nul. Ved at betragte momentligevægten af stængerne AB og CD fås herefter ligningerne:



**Figur 1.2** Fjedermodel

$$M_B = c\alpha_B = Fx_B \Rightarrow \frac{c}{a}(2x_B - x_C) = Fx_B \Rightarrow 2x_B - x_C = \frac{aF}{c}x_B$$

$$M_C = c\alpha_C = Fx_C \Rightarrow \frac{c}{a}(2x_C - x_B) = Fx_C \Rightarrow -x_B + 2x_C = \frac{aF}{c}x_C$$

Ved brug af matrixnotation kan dette ligningssystem skrives på formen:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_C \end{bmatrix} = \frac{aF}{c} \begin{bmatrix} x_B \\ x_C \end{bmatrix} \quad \text{eller på kort form: } \mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}, \text{ hvor } \lambda = \frac{aF}{c}$$

Denne ligning definerer et simpelt *egenværdiproblem*.

Samles alle led på venstre side af ligningssystemet, får følgende homogene ligningssystem:

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hvis vi ønsker at finde andre løsninger end den triviele:  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  (udeformet konstruktion), er dette som bekendt kun muligt, hvis ligningssystemets determinant er lig med 0, hvilket fører os til følgende ligning:

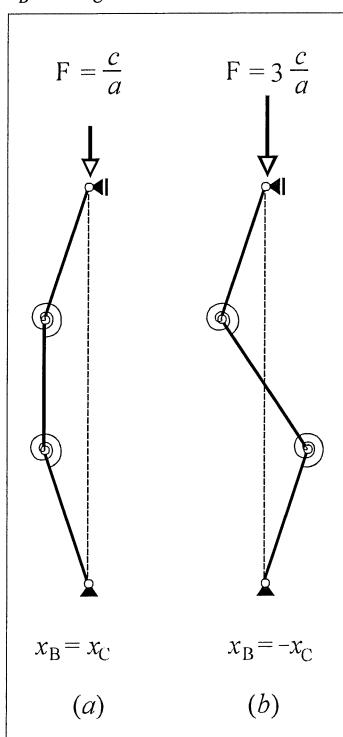
$$(2-\lambda)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{aF}{c} = \frac{1}{2}(4 \pm \sqrt{16-12}) = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

Ligningssystemet har åbenbart 2 *egenværdier* svarende til to mulige ligevægtskonfigurationer.

Den mindste egenværdi  $\lambda = 1$  svarende til  $F = c/a$  giver ved indsættelse i ligningssystemet:  $x_B = x_C$ .

Den største egenværdi  $\lambda = 3$  svarende til  $F = 3c/a$  giver ved indsættelse i ligningssystemet:

$$x_B = -x_C.$$



Disse to ligevægtskonfigurationer er illustreret i figur 1.3 (a) og (b). Bemærk, at løsningen ikke siger noget om udbøjningernes størrelse, men kun om deres indbyrdes forhold. Størrelsen kan altså vælges vilkårligt, så længe forudsætningen om små flytninger er overholdt. Man siger derfor, at konstruktionen er i *ligegeyldig ligevægt* i disse to situationer.

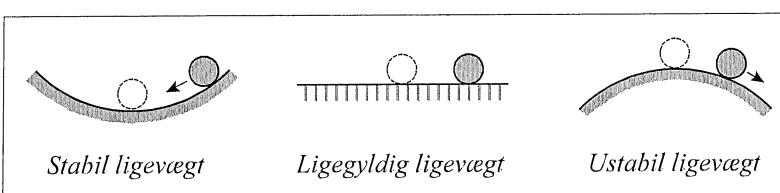
Vi vil nu nærmere betragte den situation, hvor vi påtvinger konstruktionen en deformation svarende til den, der er vist i figur 1.3 (a).

Hvis  $F = c/a$ , vil de momenter, de ydre kræfter medfører i B og C, åbenbart være i ligevægt med tilbageføringsmomenterne i fjendersamlingerne, og konstruktionen bliver stående i den *ligegeyldige ligevægtstilstand*.

Hvis  $F < c/a$ , vil tilbageføringsmomenterne være størst, og konstruktionen vil søge tilbage til sin retlinjede ligevægtstilstand. Når  $F < c/a$ , omtales den retlinjede konfiguration derfor som en *stabil ligevægtstilstand*.

Hvis  $F > c/a$ , vil tilbageføringsmomenterne være mindre end de momenter, den ydre last giver anledning til, og konstruktionen vil kollapse. Når  $F > c/a$  omtales den retlinjede konfiguration derfor som en *ustabil ligevægtstilstand*.

**Figur 1.3**



**Figur 1.4 Tre typer af ligevægt**

Begreberne stabil, ligegeyldig og ustabil ligevægt kan illustreres ved ligevægten af en kugle placeret henholdsvis inde i en kugleskal, på en vandret plan og på toppen af en kuglekalot, som vist på figur 1.4.

Det skal bemærkes, at den ligegeyldige ligevægtstilstand, der er repræsenteret ved figur 1.3 (b), ikke har nogen praktisk betydning, idet selv den mindste ændring af belastningen ( $F = 3c/a$ ) vil føre konstruktionen ud i en ustabil tilstand.

Det er således den mindste egenværdi, der er afgørende for, om den retlinjede ligevægtstilstand er stabil. Den tilsvarende værdi af belastningen kaldes derfor den *kritiske last*. For den aktuelle konstruktion har vi således:

$$F_{kr} = \frac{c}{a}$$

## 2 Eulers søjleformel

Vi betragter den i figur 2.1 (a) viste simpelt understøttede søjle. Det forudsættes, at søjlen er lodret og perfekt retlinjet i den udeformerde tilstand.

Søjlen belastes alene af den lodrette, centralt placerede kraft  $F$ . Der ses således bort fra søjlets egenvægt.

Vi ønsker at undersøge de ligevægtsstillinger, søjlen kan indtage.

Det er umiddelbart indlysende, at søjlen er i ligevægt i sin retlinjede stilling, uanset hvilken størrelse kraften  $F$  har, men som tidligere omtalt kan denne ligevægtsstilling både være stabil og ustabil i den forstand, at giver vi søjlen et nok så lille puf sidevært, vil den for værdier af  $F$ , der er mindre end en vis kritisk værdi, sætte tilbage til sin retlinjede stilling, medens den for værdier af  $F$ , der er større end denne værdi, vil øge udbøjningen, indtil denne når en uacceptabel stor værdi, eller søjlen bryder.

Da det naturligvis ikke kan accepteres, at en konstruktion befinner sig i en ustabil ligevægtssituation, er vi interesserede i at analysere netop den situation, der adskiller den stabile og den ustabile ligevægt. I denne situation er  $F$  lig med sin kritiske værdi, og søjlen kan bringes i ligevægt i en udbøjet tilstand.

Som basis for analysen indlægges det på figuren viste koordinatsystem, hvor  $x$ -aksen er sammenfaldende med søjlens tyngdepunktsakse. Der anvendes de sædvanlige fortegnsvedtægter for snitkræfter og udbøjninger.

Analysen baseres på følgende forudsætninger:

*Statiske forudsætninger:* Ligevægtsligningerne baseres på den deformede søjles geometri.

*Geometriske forudsætninger:* Flytningerne ( $w$ ) er "små" (eller mere præcist:  $|w'| \ll 1$ ).

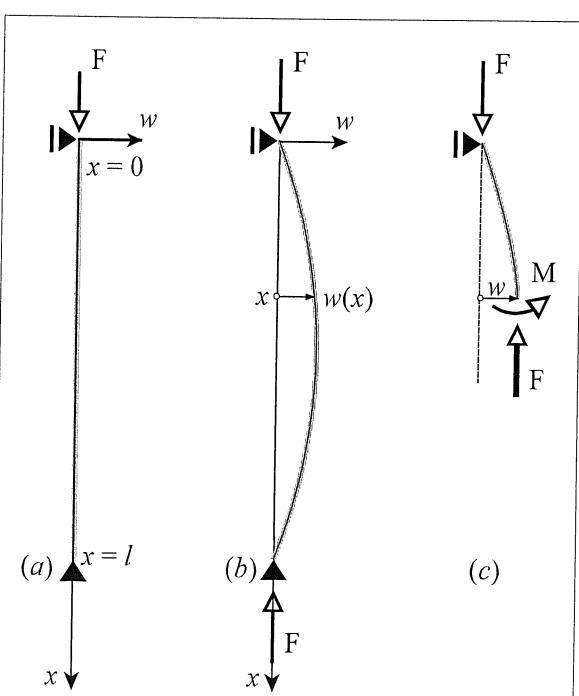
Plane tværsnit forbliver plane og vinkelrette på søjleaksen.

*Fysiske forudsætninger:* Søjlen er lineærelastisk og har den konstante bøjningsstivhed  $EI$ .

Det ses, at bortset fra, at ligevægten her baseres på den deformede geometri, er disse forudsætninger magen til dem, der blev anvendt ved opstillingen af den tekniske bjælketeori. (Se Plane Elastiske Bjælke- og stangsystemer afsnit 4.1 og 4.3).

Dette indebærer, at søjlens krumning ( $\kappa$ ) med rimelig nøjagtighed kan sættes lig med den anden afledede af udbøjningsfunktionen, samt at bøjningsmomentet ( $M$ ) overalt er lig med bøjningsstivheden gange krumningen.

Det gælder altså, at:  $M = EI\kappa = EIw''$



Vi betragter nu ligevægten af søjlen i den udbøjede tilstand. (Se figur 2.1(b)).

Det ses umiddelbart, at de vandrette reaktioner ved understøtningerne er lig med 0.

Hvis vi derfor lægger et snit i afstanden  $x$  fra søjletoppen og betragter ligevægten af den øvre del af søjlen, vil de eneste snitkræfter være et bøjningsmoment ( $M$ ) samt en lodret opadrettet kraft af størrelsen  $F$ , som vist på figur 2.1(c).

Det ses umiddelbart, at lodret og vandret ligevægt er i orden, medens momentligevægten kræver, at:

$$M = -Fw$$

Da  $M$  endvidere er lig med  $EIw''$ , fås følgende differentialligning til bestemmelse af  $w$ :

$$EIw'' = -Fw \Rightarrow w'' = -\frac{F}{EI}w$$

eller:

$$w'' + k^2w = 0, \text{ hvor } k = \sqrt{\frac{F}{EI}}; \quad (F \geq 0)$$

Figur 2.1 Simpelt understøttet søjle

Ved indsættelse ses, at denne homogene differentialligning har løsningen:

$$w = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx)$$

Integrationskonstanterne  $C_1$  og  $C_2$  bestemmes som sædvanligt ved hjælp af ligningens randbetegnelser, der i det aktuelle tilfælde er, at udbøjningen skal være nul for  $x = 0$  og  $x = l$ . Dvs.  $w(0) = w(l) = 0$ .

Indsættes  $x = 0$  i ovenstående udtryk for  $w$ , fås umiddelbart  $C_1 = 0$ , således at løsningen reduceres til:

$$w = C_2 \sin(kx)$$

Herefter fås ved indsættelse af  $x = l$ :  $C_2 \sin(kl) = 0$ . Denne ligning er opfyldt for  $C_2 = 0$ , hvilket svarer til den trivuelle løsning  $w = 0$ , altså den retlinjede ligevægtstilstand.

Ligningen er imidlertid også tilfredsstillet, hvis  $kl = n\pi$  eller  $k = n\pi/l$ , hvor  $n$  er et helt tal. Disse værdier af  $k$  svarer (jævnfør definitionen af  $k$ ) til følgende værdier af belastningen  $F$ :

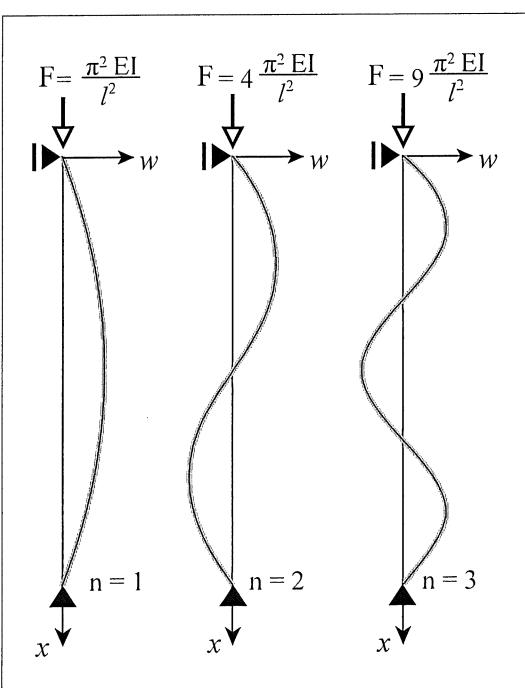
$$k = \sqrt{\frac{F}{EI}} = \frac{n\pi}{l} \Rightarrow F = \frac{n^2\pi^2 EI}{l^2}$$

For disse værdier af  $F$  kan konstruktionen således være i ligevægt i udbøjet stilling, og de tilsvarende udbøjningsfunktioner er givet ved udtrykket:

$$w = C_1 \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

De værdier af  $k^2$ , som giver løsninger forskellige fra nulløsningen, kaldes som bekendt egenværdier, og de tilsvarende udbøjningsfunktioner ( $w$ ) kaldes egenfunktioner.

Figur 2.2 viser egenfunktionerne for  $n = 1, 2$  og  $3$ .



Figur 2.2 Egenfunktioner

Som omtalt i indledningen er det dog kun den mindste egenværdi og dermed den mindste værdi af den tilsvarende belastning, der har interesse i praksis. Søjlets kritiske last er derfor:

$$F_{kr} = F_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

Den kritiske last kaldes også for Eulerlasten, ( $F_E$ ), og selve formlen kaldes *Eulers søjleformel* efter den schweiziske matematiker Leonard Euler, der opstillede og løste søjleproblemet i 1757.

Som tidligere nævnt har de ligegeyldige ligevægtstilstande, der svarer til værdier af  $n$ , der er større end en, kun akademisk interesse, idet de er "omgivet" af ustabile ligevægtstilstande. I praksis gælder derfor følgende:

$F < F_E$	$\Rightarrow$	Stabil ligevægt
$F = F_E$	$\Rightarrow$	Ligegeyldig ligevægt
$F > F_E$	$\Rightarrow$	Ustabil ligevægt

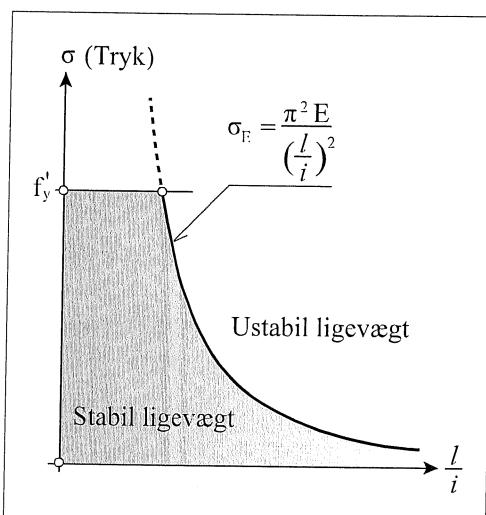
Eulers søjleformel udtrykkes ofte på en anden form, der i stedet for Eulerlasten angiver den ensformigt fordelte trykspænding, der findes i et vilkårligt tværssnit i den *udeformerede* søjle, når denne er belastet med Eulerlasten. Denne spænding kaldes Eulerspændingen ( $\sigma_E$ ).

Kaldes søjlets tværssnitsareal for  $A$  fås ved omskrivning af Eulers søjleformel:

$$\sigma_E = \frac{F_E}{A} = \frac{\pi^2 E}{l^2} \frac{I}{A} \quad \text{eller} \quad \sigma_E = \frac{\pi^2 E}{(l/i)^2}, \quad \text{hvor } i = \sqrt{\frac{l}{A}}$$

Tværssnitskonstanten  $i$ , der jo åbenbart har dimensionen længde, kaldes tværsnittets *inertiradius*, og forholdet  $l/i$  benævnes søjlets *slankhedsforhold*.

Figur 2.3 viser Eulerspændingen som funktion af slankhedsforholdet.



**Figur 2.3** Eulerspændingen

Det er imidlertid indlysende, at Eulerspændingen ikke kan overstige søjlematerialets brud- eller flydespænding, således at kurven for  $\sigma_E$  må begrænses, som vist på figuren.

Det er klart, at forudsætningen om en perfekt retlinjet søjle ikke kan opfyldes i praksis. Det vil derfor ofte være nødvendigt at tage højde for dette ved at antage, at søjlen i den ubelastede tilstand har visse imperfektioner som for eksempel en lille forhåndskrumming. Endvidere er det sjældent, at et materiales arbejdslinje opfører sig lineærelastisk helt op til brud eller flydning. Kurven på figur 2.3 repræsenterer således en idealiseret grænsetilstand.

Søjler med imperfektioner omtales i afsnit 4, medens søjler, der ikke er lineærelastiske vil blive omtalt i afsnit 5.

Det er vigtigt at være opmærksom på, at selvom vi i det foregående har behandlet søjleproblemet som et plant problem, vil en søjle i almindelighed bøje ud om sin svageste akse, medmindre understøtningsforholdene forhindrer dette. Derfor er det som regel *tværsnittets mindste inertimoment*, der skal indgå i Eulers søjleformel.

Der skal endvidere gøres opmærksom på, at et trykpåvirket konstruktionselement også kan udvise andre former for stabilitetssvigt end dem, der relaterer sig til elementets bøjningsstivhed. For eksempel kan søjler med tyndfligede tværsnit fejle på grund af lokal udbuling, og søjler med åbne tyndfligede tværsnit kan i visse tilfælde kollapse på grund af manglende vridningsstabilitet.

### 3 Effektiv søjlelængde

I det foregående viste vi, at den kritiske last for en perfekt retlinjet, simpelt understøttet søjle er givet ved Eulers søjleformel:

$$F_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

Ved at indføre en regnestørrelse, som benævnes den *effektive søjlelængde*  $l_e$ , kan den kritiske last for søjler med andre understøtningsformer udtrykkes ved en tilsvarende formel:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{l_e^2} \Rightarrow l_e = \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{F_{kr}}} = \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{l^2} \frac{l^2}{F_{kr}}} = \sqrt{\frac{F_E}{F_{kr}}} \cdot l$$

Ovenstående definerer således den effektive søjlelængde som den længde, der skal anvendes i Eulers søjleformel for at bestemme den kritiske last. For en simpelt understøttet søjle er den effektive søjlelængde derfor lig med den faktiske søjlelængde.

Den effektive søjlelængde benævnes også den *fri søjlelængde* eller *knæklængden*.

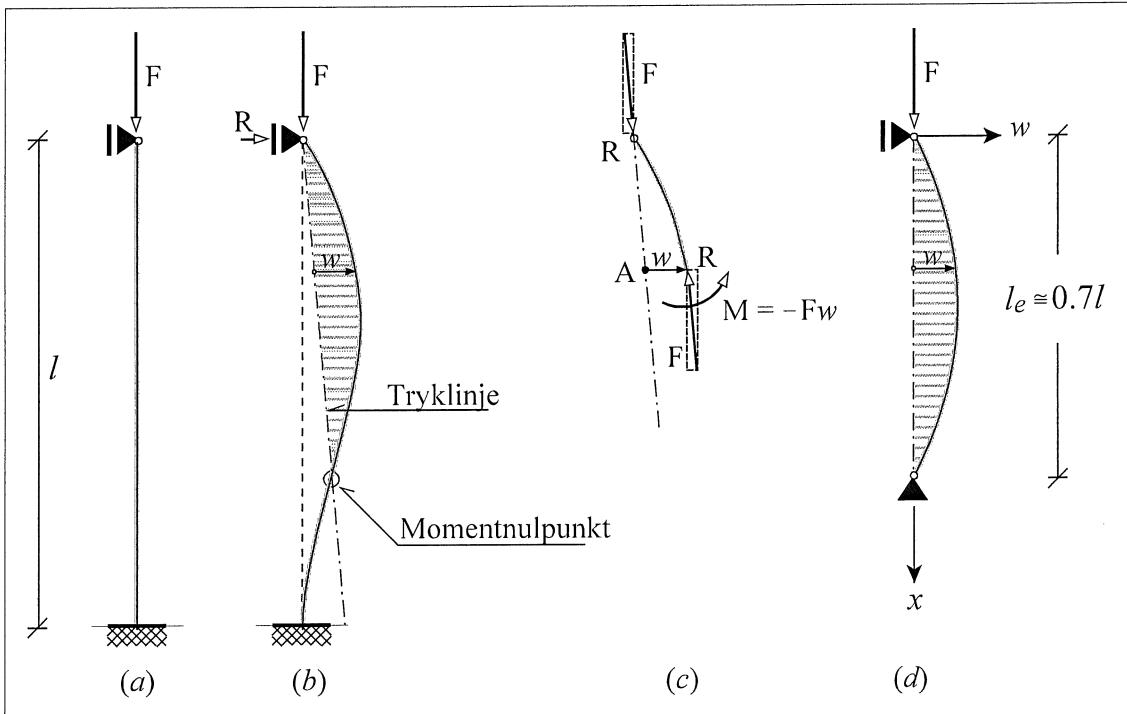
For at kunne anvende ovenstående formel for den kritiske søjlelast på andre søjler end den simpelt understøttede, er det åbenbart nødvendigt at kende den effektive søjlelængde. For at få en ide om, hvorledes denne kan estimeres, betragtes en lodret centralt belastet søjle med understøtningsbetinger som vist på figur 3.1 (a).

Når søjlen belastes med sin kritiske last, vil den kunne bringes i ligevægt i en udbøjet stilling, hvis form kan skitseres, som vist i figur 3.1 (b).

Da udbøjningskurven må have lodret tangent ved indspændingen, er det klart at, dens krumning må skifte fortegn et eller andet sted mellem understøtningerne. Der må således være et punkt, hvor kurven har vendetangent og krumningen ( $\kappa$ ) er lig med nul. Da  $M = EI\kappa$ , er snitmomentet ligeledes nul i dette punkt.

Ser vi på ligevægten af den del af søjlen, der ligger over momentnulpunktet, er det klart, at de ydre kræfters moment i dette punkt skal være nul. Det vil sige, at de ydre kræfters resultant må have en virkelinje, der går gennem momentnulpunktet. Denne virkelinje kaldes som bekendt også for konstruktionens *tryklinje*. Søjlens tryklinje er vist stiplet på figur 3.1 (b).

Det ses, at søjlens udbøjning i det aktuelle tilfælde indebærer, at der må opstå en vandret reaktion ( $R$ ) ved understøtningen.



**Figur 3.1** Effektiv søjlelængde

Lægges nu et tilfældigt vandret snit i søjlen og betragtes ligevægten af den del af søjlen, der ligger over snittet, indses det, at den lodrette og vandrette komposant af snitkræfterne i snittet er henholdsvis  $F$  og  $R$ . Kaldes den *vandrette afstand fra snittet til tryklinjen* for  $w$ , fås ved moment om punkt A på figur 3.1 (c):  $M + Fw = 0$  eller  $M = -Fw$ .

Selvom vi her har betragtet en søjle, der var indspændt i bunden og simpelt understøttet i toppen, indses det, at vi for søjler med andre understøtningsbetingelser vil få samme resultat. Det gælder derfor generelt, at:

*Den numeriske værdi af snitmomentet i et vilkårligt snit er lig med den vandrette afstand fra snittet til søjlens tryklinje multipliceret med søjlelasten.*

Da  $M = -Fw$  er nøjagtig det samme udtryk, der var gældende for den simpelt understøttede søjle, (hvor tryklinjen jo er den linje der forbinder understøtningerne), får vi også den samme differentialequation til bestemmelse af  $w$ .

Betruger vi alene den del af søjlen, der ligger imellem momentnulpunkterne, vil vi tillige have de samme randbetingelser. Dette betyder, at vi kan bestemme den aktuelle søjles kritiske last ved at betragte den simpelt understøttede søjle, der er vist på figur 3.1 (d).

Ved opmåling på figur 3.1 (b), anslås det, at afstanden fra søjlens top til momentnulpunktet er  $0.7l$ , hvorfor søjlens kritiske last bliver:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{l_e^2} \approx \frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2} = 20.14 \frac{EI}{l^2}$$

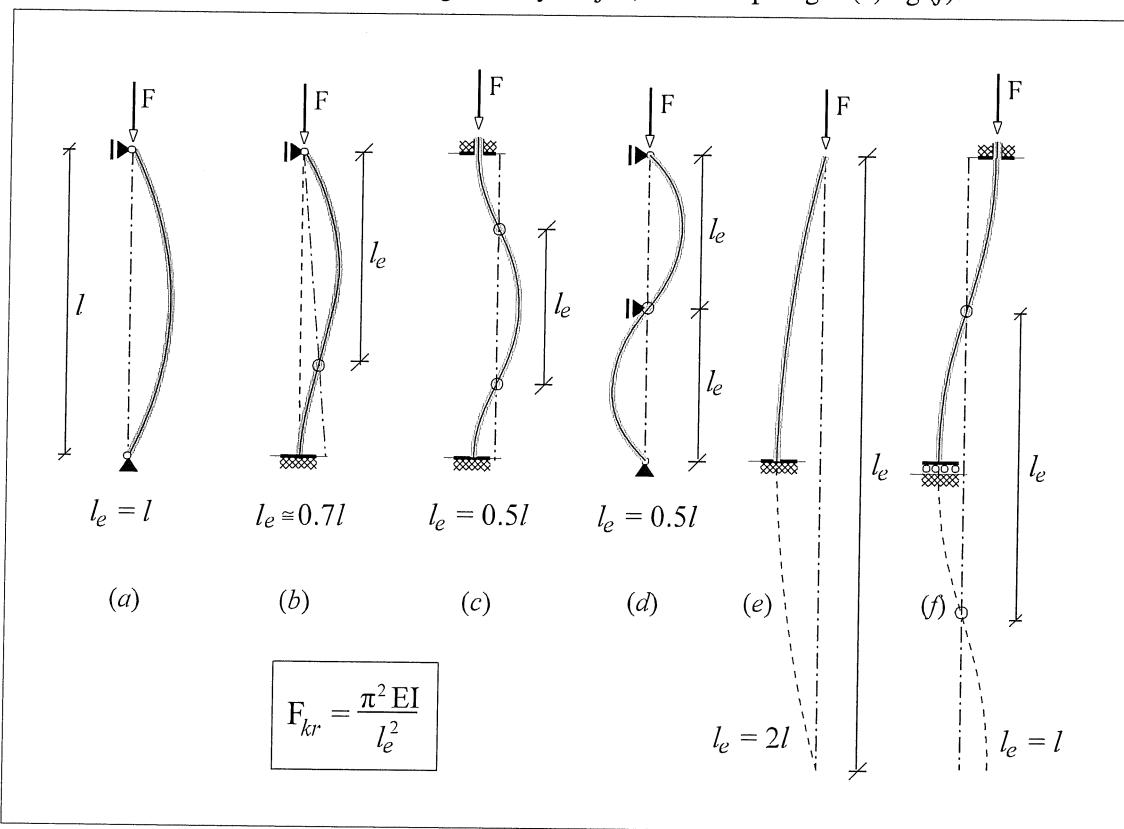
(I afsnittet "Plane Elastiske Bjælkesøjler" er den korrekte værdi af den kritiske søjlelast beregnet til:  $F_{kr} = 20.19 EI/l^2$  svarende til  $l_e = 0.699l$ .)

På baggrund af det netop betragtede eksempel indsæs det, at hvis søjlens tryklinje er retlinjet (uden knæk) mellem to på hinanden følgende momentnulpunkter (vendetangentpunkter), er afstanden mellem disse punkter lig med den effektive søjlelængde.

Det er klart, at en bestemmelse af den effektive søjlelængde, der baserer sig på en skitse af den forventede udbøjningskurve, i høj grad er afhængig af, hvor godt denne skitse stemmer overens med den korrekte udbøjning. Det kan derfor ikke anbefales at anvende skitsemetoden til andet end overslagsberegning.

Der er dog visse søjletilfælde, hvor den korrekte værdi af den effektive søjlelængde kan bestemmes direkte ud fra en symmetribetræftning. Dette gælder for eksempel for de søjler, der er vist på figur 3.2 (c) og (d). På figuren er vendetangentpunkter vist med en cirkel, medens søjlernes tryklinjer er vist som stippled linjer.

Hvis søjlen ikke indeholder to momentnulpunkter, kan søjlens udbøjningslinje tænkes fortsat ud over understøtningerne indtil skæring med tryklinjen, som vist på figur (e) og (f).



**Figur 3.2** Effektive søjlelængder

#### 4 Momentpåvirkede søjler

Ved en momentpåvirket søjle (bjælkesøjle) forstås en søjle, hvis belastning giver anledning til bøjende momenter, selvom søjlens ligevægt baseres på den *udeformerede geometri*. Sådanne momenter kaldes almindeligvis 1. ordens-momenter. I modsætning hertil kaldes de (tillægs-) momenter, der kan fremkomme, når ligevægten opstilles på basis af den *deformerede geometri*, for 2. ordens-momenter.

En søjle er således momentbelastet, hvis den ud over søjlelasten ( $F$ ) er påvirket af en tværlast, eller hvis søjlelastens virkelinje ikke er sammenfaldende ned søjlenes tyngdepunktsakse for eksempel på grund af, at søjlen ikke er perfekt retlinjet.

Momenterne af 1. orden vil i det følgende blive benævnt  $M_0 = M_0(x)$ .

Når en momentpåvirket søjle belastes, vil den i modsætning til en centralt belastet og perfekt retlinjet søjle (Eulersøjle) bøje ud, uanset hvor stor den aktuelle last er. Kaldes udbøjningen for  $w$  og baseres ligevægten på den *deformerede geometri*, bliver momentet i ethvert punkt lig med summen af 1. ordens momentet  $M_0$  og 2. ordens momentet  $-Fw$ . Vi har altså:

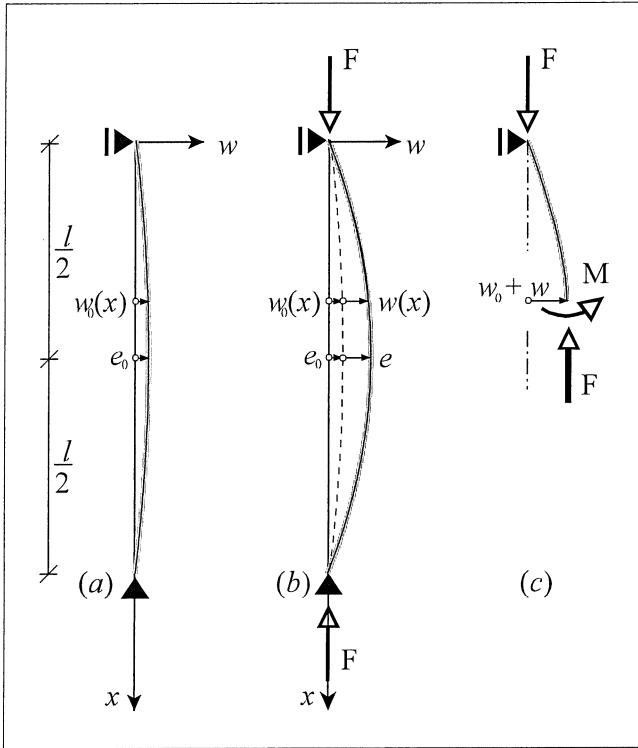
$$M = M_0 - Fw$$

Under forudsætning af, at søjlen er lineær elastisk og udbøjningerne er små, har vi endvidere, at  $M = EI\kappa = EIw''$ , hvilket giver følgende differentialligning til bestemmelse af udbøjningsfunktionen  $w$ :

$$EIw'' = M_0 - Fw \Rightarrow w'' + \frac{F}{EI}w = \frac{M_0}{EI} \quad \text{eller} \quad w'' + k^2w = \frac{M_0}{EI}, \quad k^2 = \frac{F}{EI}$$

Denne ligning adskiller sig fra ligningen for Eulersøjlen ved, at der ikke står 0 på højre side af lighedstegnet. Differentialligningen er med andre ord inhomogen. Dette indebærer, at der ikke længere er tale om et egenværdiproblem. For hver værdi af  $F$ , vil der således eksistere en og kun en løsning  $w(x)$  til differentialligningen i overensstemmelse med, hvad der tidligere er anført

Som et eksempel på en momentpåvirket søjle vil vi i det følgende betragte en søjle, hvis geometri i den ubelastede tilstand afviger lidt fra den perfekte retlinjede geometri. En sådan afvigelse kaldes ofte en imperfektion.



Figur 4.1 Søjle med imperfektion

Figur 4.1 (a) viser således en søjle med en imperfektion, der i det viste koordinatsystem er beskrevet ved en kendt funktion  $w_0 = w_0(x)$ .

Søjlen tænkes alene belastet af en lodret nedadrettet enkeltkraft  $F$ . Denne belastning giver anledning til udbøjningen  $w = w(x)$ , som vist på figur 4.1 (b). Det forudsættes, at  $F$  er mindre end Eulerlasten ( $F_E$ ).

Hvis søjlens ligevægt baseres på den udeformentede geometri, ses det, at imperfektionen giver anledning til 1. ordens-momentet  $M_0 = -Fw_0$ .

Baseres søjlens ligevægt på den deformentede geometri, fås som illustreret på figur 4.1(c)

$$M = -F(w_0 + w) = M_0 - Fw, \quad \text{hvor } -Fw \text{ repræsenterer 2. ordensbidraget.}$$

Herefter kan søjlens differentialligning skrives på formen:

$$w'' + k^2w = \frac{M_0}{EI} = \frac{-Fw_0}{EI} \quad \text{eller} \quad w'' + k^2w = -k^2w_0, \quad k^2 = \frac{F}{EI}$$

Det er klart, at løsningen vil afhænge af, hvilken form og størrelse imperfektionen har. Hvis vi således forestiller os en sinusformet imperfektion med pilhøjden  $e_0$  dvs.  $w_0 = e_0 \sin(\pi/l x)$ , får differentialligningen formen:

$$w'' + k^2w = -k^2e_0 \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)$$

Vi vil starte med at undersøge, om en funktion af formen  $w = e \cdot \sin(\pi/l x)$  er en mulig løsning. Bemerk, at denne funktion tilfredsstiller randbetingelserne  $w(0) = 0$  og  $w(l) = 0$ .

Ved indsættelse fås:

$$\begin{aligned} -\frac{\pi^2}{l^2}e \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) + k^2e \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) &= -k^2e_0 \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) \Rightarrow -\frac{\pi^2}{l^2}e + k^2e = -k^2e_0 \Rightarrow \\ e = \frac{k^2e_0}{\frac{\pi^2}{l^2} - k^2}. \quad \text{Indsættes } k^2 = \frac{F}{EI} \quad \text{fås:} \quad e &= \frac{\frac{F}{EI}}{\frac{\pi^2}{l^2} - \frac{F}{EI}} e_0 = \frac{F}{\frac{\pi^2 EI}{l^2} - F} e_0 = \frac{F}{F_E - F} e_0, \end{aligned}$$

hvor  $F_E$  som sædvanlig betegner søjlens Eulerlast.

Vi har nu vist, at funktionen

$$w(x) = \frac{F}{F_E - F} e_0 \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right)$$

tilfredsstiller såvel differentialligning som randbetingelser. Vi har således bestemt den korrekte løsning til det opstillede problem.

Bemærk, at udbøjningen ved søjlemidten ( $e$ ) går mod uendelig, når belastningen ( $F$ ) nærmer sig Eulerlasten ( $F_E$ ).

Søjlens momentkurve kan nu bestemmes ved hjælp af den fysiske betingelse  $M = EIw''$ , eller direkte ud fra ligevægtsligningen:

$$M = -F(w_0 + w) = -F(e_0 + e) \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right) = -F\left(e_0 + \frac{F}{F_E - F} e_0\right) \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right) = -Fe_0 \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right) \frac{F_E}{F_E - F}$$

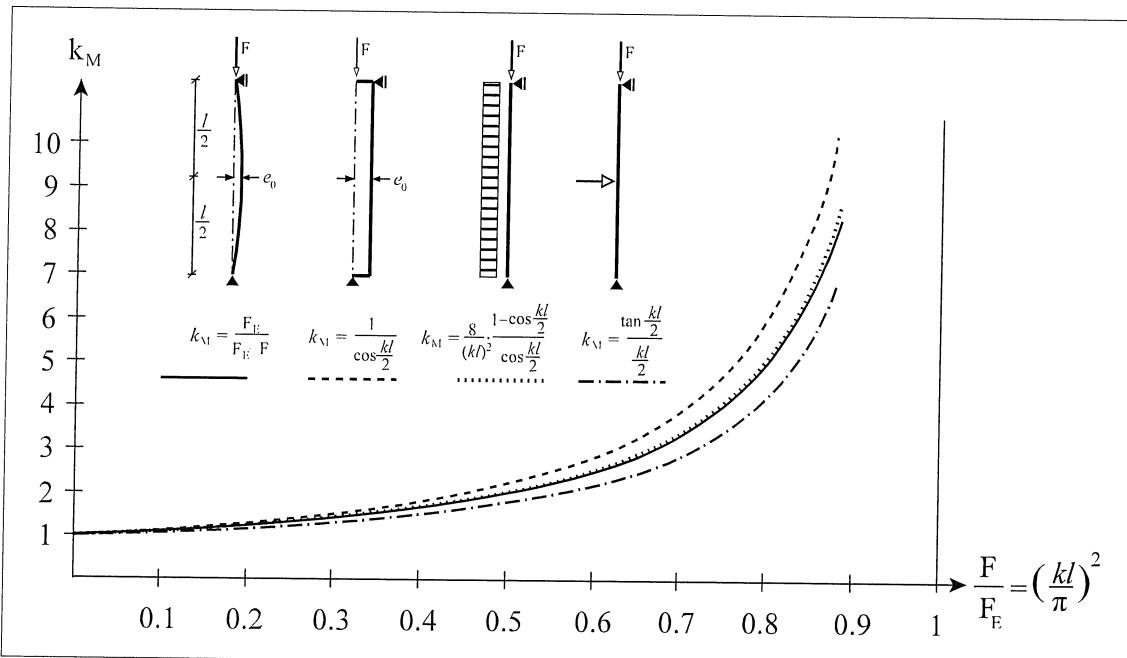
Det indses, at  $M_0 = -Fe_0 \sin(\pi / l \cdot x)$  repræsenterer momenterne af 1. orden. (Den momentforde-  
ling, der ville være i søjlen, hvis man ikke tog hensyn til udbøjningen). Herefter kan udtrykket for  
M skrives på formen:

$$M = M_0 k_M, \text{ hvor } k_M = \frac{F_E}{F_E - F}$$

Faktoren  $k_M$  kaldes *momentforøgelsesfaktoren*.

Bemærk, at ovenstående udtryk for  $k_M$  kun gælder eksakt, hvis søjlen har en sinusformet imperfektion svarende til, at  $M_0$  er sinusformet. For andre former af  $M_0$  fås naturligvis andre løsninger til differentialligningen og dermed andre udtryk for  $k_M$ .

Nedenstående figur viser momentforøgelsesfaktoren som funktion af søjlelasten for fire forskellige søjletyper inclusive den netop analyserede. Det ses, at man for passende små værdier af søjlelasten  $F$  med rimelig nøjagtighed kan anvende det udtryk for  $k_M$ , der er udledt ovenfor. For  $F = 0.25F_E$  bliver den maksimale afvigelse således ca. 5 %, medens den for  $F = 0.5F_E$  bliver omkring 10 %.



Figur 4.2 Momentforøgelsesfaktorer

Hvis en momentpåvirket søjle er fremstillet af et materiale, der kan regnes lineærelastisk op til brud eller flydning, er det almindeligt at definere den kritiske søjlelast ( $F_{kr}$ ), som den kraft, der medfører brud eller begyndende flydning i det hårdest belastede tværssnit.

Betratger vi for eksempel en centralt belastet søjle med en sinusformet imperfektion, hvis maksimale værdi er  $e_0$ , finder vi det hårdest belastede tværssnit ved søjlemidten. Hvis søjlen netop er belastet med den kritiske last  $F_{kr}$ , kan momentet i dette tværssnit, som det er vist i det foregående, bestemmes af udtrykket:

$$M = k_M M_0 = \frac{F_E}{F_E - F_{kr}} F_{kr} e_0$$

Kaldes søjlens tværnitsareal for  $A$  og defineres  $\sigma_E$  og  $\sigma_{kr}$  som:

$$\sigma_E = \frac{F_E}{A} ; \quad \sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{A} ,$$

kan dette udtryk også skrives på formen:

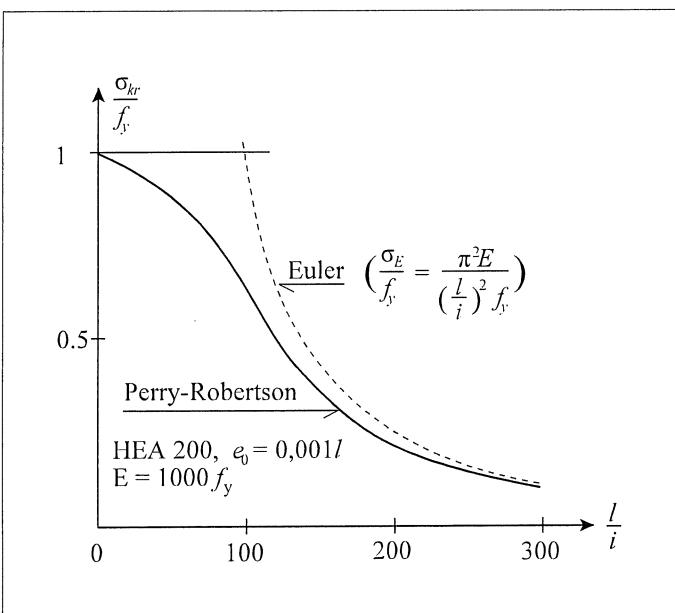
$$M = \frac{\sigma_E}{\sigma_E - \sigma_{kr}} \sigma_{kr} A e_0$$

Da søjlematerialet er lineærelastisk, kan den maksimale trykspænding i tværnittet bestemmes ved hjælp af Naviers formel. Denne spænding skal ifølge definitionen af den kritiske søjlelast være lig med søjlematerialets brud- eller flydespænding. Benævnes denne spænding  $f_y$ , og kaldes tværnittets mindste modstandsmoment for  $W$ , fører dette krav til, at følgende ligning - som læseren opfordres til at verificere - skal være opfyldt:

$$(f_y - \sigma_{kr})(\sigma_E - \sigma_{kr}) = \sigma_{kr} \sigma_E \frac{A}{W} e_0$$

Det ses, at dette udtryk, der kaldes *Perry-Robertsons formel*, fører til en andengradsligning til bestemmelse af den kritiske søjlespænding  $\sigma_{kr}$ . Det ses endvidere, at  $\sigma_{kr}$  blandt andet afhænger af tværnittets modstandsmoment, og derigennem af tværnittets form.

Da Eulerspændingen  $\sigma_E$  afhænger af søjlens slankhedsforhold ( $l/i$ ), kan  $\sigma_{kr}$  ligeledes opfattes som en funktion af  $l/i$ , som illustreret på figur 4.3. Til sammenligning vises den tilsvarende variation af Eulerspænderingerne. Det ses, at de to kurver nærmer sig hinanden, når slankhedsforholdet vokser.



**Figur 4.3** Kritisk spænding iflg Perry-Robertson

Ud fra den betragtning, at man i praksis ikke kan opnå, at søjler er perfekt retlinjede, danner Perry-Robertsons formel grundlaget for beregning af centralt belastede stål- og træsøjler efter de danske konstruktionsnormer (DS 412 og DS 413).

## Tilføjelse til opgave 6

### Variabler og formler:

A	Tværsnitsareal
I	Inertimoment
$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$	Inertiradius
W	Modstandsmoment ( $W=2*I/h$ for dobbeltsymmetrisk tværsnit, $h=\text{tværsnithøjde}$ )
$k = \frac{W}{A}$	Kerneradius, (tryk/træk i hele tværsnittet hvis N ligger inden for kernen)
E	Elasticitetsmodul
$f_y$	Flydespænding
l	Søjlelængde
$\lambda = \frac{l}{i}$	Slankhedsforhold
$\lambda_r = \frac{\lambda}{\pi \sqrt{\frac{E}{f_y}}}$	Relative slankhedsforhold
$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W}$	Navier's formel
$N_{Eu} = \pi^2 \frac{EI}{l^2}$	Euler lasten
$\frac{\sigma_{Eu}}{f_y} = \frac{1}{\lambda_r^2}$	Euler spænding i forhold til flydespænding

### Perry-Robertson's formel :

$$(f_y - \sigma_{kr}) * (\sigma_{Eu} - \sigma_{kr}) = \frac{e_0}{k} * \sigma_{Eu} * \sigma_{kr}$$

Søjle med sinusformet forhåndsudbøjning med amplitude  $e_0$  belastet med tryknormalkraft svarende til en spænding  $\sigma_{kr}$ . Vi har bestemt søjlets elastiske Euler spænding  $\sigma_{Eu}$ . Med ovenstående formel bestemmes en værdi af  $\sigma_{kr}$ , som netop medfører flydning i tværsnittes ydre fiber. Denne værdi af  $\sigma_{kr}$  benævner vi søjlets kritiske spænding.

Udtrykt ved det relative slankhedsforhold fås :

$$(1 - \frac{\sigma_{kr}}{f_y}) * (\frac{1}{\lambda_r^2} - \frac{\sigma_{kr}}{f_y}) = \frac{e_0}{k} * \frac{1}{\lambda_r^2} * \frac{\sigma_{kr}}{f_y},$$

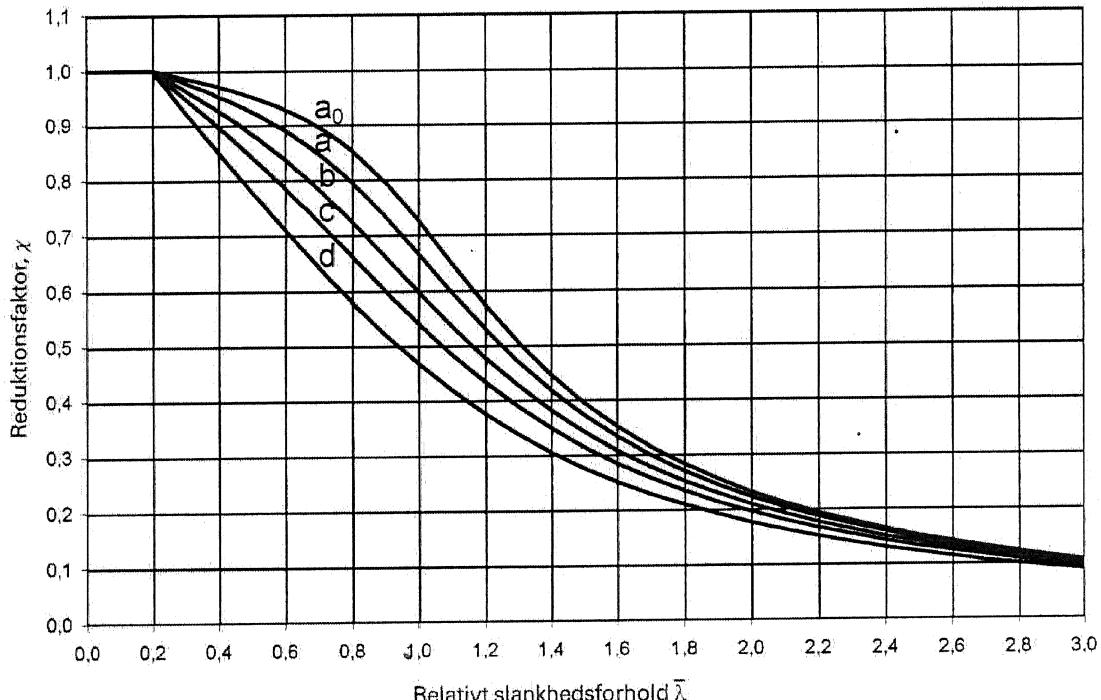
en andengradsligning, hvis løsning kan skrives som :

$$\frac{\sigma_{kr}}{f_y} = \beta - \sqrt{\beta^2 - \frac{1}{\lambda_r^2}}$$

$$\beta = \frac{1}{2\lambda_r^2} \left( \lambda_r^2 + 1 + \frac{e_0}{k} \right)$$

Uddrag fra DS412 udgave april 1983 :

- : Beregningen at en centralt påvirket trykstang kan gennemtøres ved anvendelse af nedenfor anførte bæreevneudtryk. Vedrørende baggrunden for bæreevneudtrykkene henvises til Anneks A.
  - : Metoden inkluderer indirekte virkningen af egenspændinger og geometriske imperfektioner.
  - : Egenspændingernes betydning afhænger af det pågældende profils form og fremstilling. Der benyttes en opdeling i 5 tilfælde  $a_0$ , a, b, c og d som angivet i tabel V 6.2.1.
  - : Udtrykkene inkluderer en geometrisk imperfektion svarende til en forhåndsdubøjning af trykstangen på 1/1000 af knæklangden.
  - : Som bæreevneudtryk benyttes
- $$\frac{\sigma_{cr}}{f_y d} = \begin{cases} 1 & \text{for } \lambda_r \leq 0,2 \\ \beta - \sqrt{\beta^2 - \frac{1}{\lambda_r^2}} & \text{for } \lambda_r > 0,2 \end{cases}$$
- hvor
- $$\beta = \frac{1}{2\lambda_r^2} \left( \lambda_r^2 + 1 + \frac{e}{k} \right)$$
- $$\frac{e}{k} = \begin{cases} 0,13 (\lambda_r - 0,2) & \text{for tilfælde } a_0 \\ 0,21 (\lambda_r - 0,2) & \text{for tilfælde a} \\ 0,34 (\lambda_r - 0,2) & \text{for tilfælde b} \\ 0,49 (\lambda_r - 0,2) & \text{for tilfælde c} \\ 0,76 (\lambda_r - 0,2) & \text{for tilfælde d} \end{cases}$$

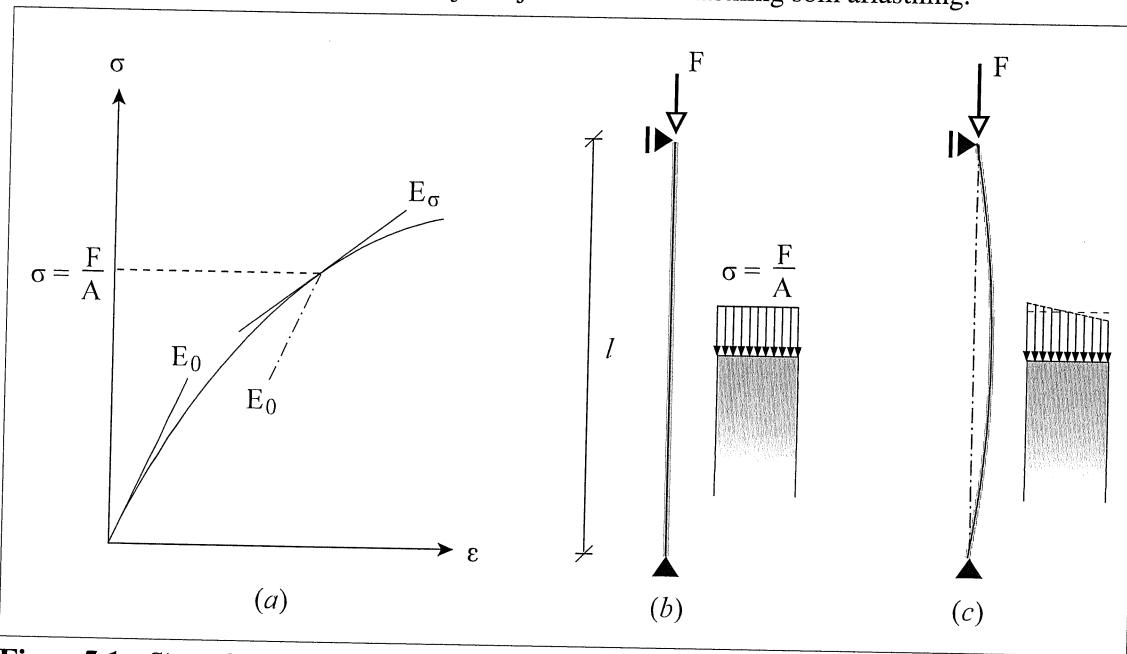


$$\chi = \frac{\sigma_{kr}}{f_y} \text{ i ovenstående diagram.}$$

## 5. Bløde søger

Med en blød søger menes her en søger, der er fremstillet af et materiale, hvis arbejdselinje krummer på en sådan måde, at dens hældning aftager, når den numeriske værdi af spændingen vokser. Figur 5.1 (b) og (a) viser således en simpelt understøttet, perfekt retlinjet blød søger med tilhørende arbejdselinje.

Det forudsættes i første omgang, at søgermaterialet er elastisk (men ikke lineærelastisk) således, at spændingerne følger den viste arbejdselinje ved såvel belastning som aflastning.



**Figur 5.1** Simpelt understøttet blød søger

Belastes søgeren nu af en centralt placeret tryknormalkraft  $F$ , vil der, så længe søgeren forbliver retlinjet, være en konstat trykspænding  $\sigma = F/A$  over søgerens tværsnitsareal  $A$ .

Hvis søgeren i denne situation påtvinges en lille flytning, vil dette medføre, at spændingsfordelingen ændrer sig en smule som antydet på figur 5.1 (c).

Så længe der er tale om små ændringer, kan vi med god tilnærmede erstatter arbejdslien med dennes tangent ved det pågældende spændingsniveau. Kaldes tangentens hældning for  $E_\sigma$  vil søgeren således "føle", at den for små (infinitesimale) udbøjninger er lineærelastisk med bøjningsstivheden  $E_\sigma I$ , hvor  $I$  er søgerens inertimoment. Søjlets kritiske last kan derfor bestemmes på samme måde som den, der blev anvendt for Eulersøjlen. Vi har derfor at:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 E_\sigma I}{l^2}$$

Denne formel kaldes almindeligvis for Engessers søgerformel.

På samme måde som Eulers søgerformel kan Engessers formel skrives på formen:

$$\sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{A} = \frac{\pi^2 E_\sigma}{(l/i)^2}, \quad \text{hvor } i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

Som nævnt ovenfor forudsætter Engessers søgerformel, at søgermaterialet er elastisk, således at man kan bruge den samme elasticitetskoefficient ( $E_\sigma$ ) for såvel belastning som aflastning.

De fleste materialer med en krum arbejdslien udviser dog plastiske træk, idet materialet ved aflastning snarere følger en ret linje med samme hældning som tangenthældningen ved arbejdslienens begyndelsespunkt ( $E_0$ ), som det er antydet med en stiplet linje på figur 5.1 (a).

Dette betyder, at materialet i den aflastede side af søgerens tværsnitt vil være stivere end antaget. Søjlets bøjningsstivhed vil derfor være lidt større end  $E_\sigma I$ , hvilket betyder, at Engessers søgerformel er lidt på den sikre side.

Forsøg (Shanley, 1946) har imidlertid vist, at Engessers formel giver en rimelig god værdi for bløde søjlers bæreevne, selvom søjlematerialet udviser plasticitet, især set i lyset af, at  $E_\sigma$  normalt ikke kan bestemmes med en særlig stor nøjagtighed.

### **Eksempel 5.1 Rankines søjleformel**

For betonsøjler anvendes ofte nedenstående tilnærmede udtryk for  $E_\sigma$ :

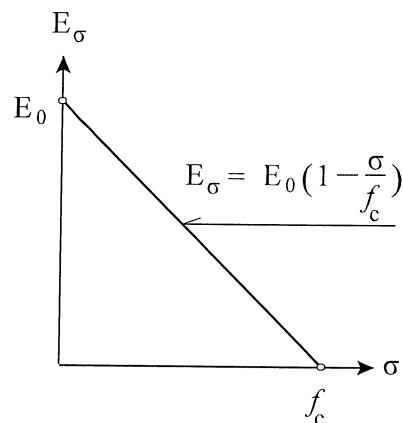
$$E_\sigma = E_0 \left(1 - \frac{\sigma}{f_c}\right)$$

Hér er  $E_0$  betonens begyndelseselasticitetskoefficient, medens  $f_c$  er betonens trykstyrke.

Indsættes dette udtryk i Engessers formel fås, idet  $\sigma = \sigma_{kr}$ :

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E_\sigma}{(l/i)^2} = \frac{\pi^2 E_0 (1 - \sigma_{kr}/f_c)}{(l/i)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\sigma_{kr} (l/i)^2}{\pi^2 E_0} = 1 - \sigma_{kr}/f_c \Rightarrow \frac{\sigma_{kr} (l/i)^2 f_c}{\pi^2 E_0} = f_c - \sigma_{kr}$$



Herefter fås ved isolation af  $\sigma_{kr}$ :

$$\sigma_{kr} = \frac{f_c}{1 + \frac{f_c}{\pi^2 E_0} \left(\frac{l}{i}\right)^2}$$

Denne formel kaldes ofte *Rankines søjleformel*.

Hosstående figur viser Rankine-spændingen  $\sigma_{kr}$  som funktion af slankhedsforholdet. Til sammenligning vises den tilsvarende Euler-spænding.

Rankines søjleformel danner grundlaget for beregning af betonsøjler efter den danske betonnorm (DS 411).

