3. BOOLOVA ALGEBRA, LOGIČNE FUNKCIJE IN OSNOVNA DIGITALNA VEZJA

Boolova algebra pozna le dve vrsti spremenljivk: 0 in 1. Nad dvema vrednostima spremenljivk, 0 in 1, so definirane tri **osnovne** Boolove (logične) funkcije:

- *disjunkcija*, logična funkcija ALI (angl. OR), simbol V, +
- *konjunkcija*, logična funkcija IN (angl. AND), simbol &, ·, $\wedge$ ali brez
- *negacija*, logična funkcija NE (angl. NO), simbol $\overline{}$

Spodaj so tri osnovne logične funkcije prikazane še s tabelo.

A B	disjunkcija Y = A + B	konjunkcija Y = A· B
0 0	0	0
0 1	1	0
1 0	1	0
1 1	1	1

A	negacija Y = $\overline{A}$
0	1
1	0

3.1 PRAVILA BOOLOVE ALGEBRE

Boolova algebra temelji na postulatih (aksiomih). Postulate predpostavimo in jih ne dokazujemo. Na osnovi teh postulatov potem dokazujemo teoreme. Tabela na naslednji strani prikazuje štiri postulate in 13 teoremov.

S pomočjo teh pravil je mogoče preoblikovati logične izraze. S tem jih lahko poenostavimo, zmanjšamo število elementov ali pa dosežemo, da jih je moč izvesti z elementi, ki so na razpolago.

Zgled 1: $Y = \underbrace{B(A+C)}_{P3} + C = BA + BC + C = BA + C\underbrace{(B+1)}_{T1} = BA + \underbrace{C1}_{P1} = \underbrace{BA + C}_{P2} = \underline{\underline{AB + C}}$

Uporabili smo: P3, T1, P1, P2

Zgled 2: $Y = \underbrace{(A+B)\overline{B} + \overline{B}}_{P3} + BC = A\overline{B} + \underbrace{B\overline{B}}_{P4} + \overline{B} + BC = \underbrace{A\overline{B} + 0}_{P1} + \overline{B} + BC = A\overline{B} + \overline{B} + BC = \overline{B}\underbrace{(A+1)}_{T1} + BC$

Uporabili smo: P3, P4, P1, T1

$= \underbrace{\overline{B}\cdot 1}_{P1} + BC = \underbrace{\overline{B} + BC}_{T9} = \underline{\underline{\overline{B} + C}}$

	POSTULATI (aksiomi)		**TEOREMI (izreki)**
P1.	X + 0 = X	**T1.**	X +1 = 1
	X .1 = X	**T2.**	X + X = X
P2.	X + Y = Y + X	**T3.**	X .X = X
	X . Y = Y . X	**T4.**	$\overline{\overline{X}} = X$
P3.	X + (Y . Z) = X + Y . Z = = (X + Y) . (X + Z)	**T5.**	X . 0 = 0
	X . (Y + Z) = X . Y + X . Z	**T6.**	X + X . Y = X
P4.	$X + \overline{X} = 1$	**T7.**	X . (X + Y) = X
	$X \cdot \overline{X} = 0$	**T8.**	$\left(X + \overline{Y}\right) \cdot Y = X \cdot Y$
		T9.	$X \cdot \overline{Y} + Y = X + Y$
		T10.	$\left(X + Y\right) + \overline{X} = 1$
		T11.	$\left(\overline{X} \cdot \overline{Y}\right) \cdot X = 0$
		T12.	$\overline{X + Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$ **(de Morganov teorem)**
		T13.	$\overline{X \cdot Y} = \overline{X} + \overline{Y}$ **(de Morganov teorem)**

3.2 OSNOVNA DIGITALNA VEZJA

Za grafično predstavitev Boolovih oz. logičnih funkcij z digitalnimi vezji se uporabljajo posebni simboli. Obstaja več standardov za simbole digitalnih vezij. V Evropi se najpogosteje uporablja standard IEC 617-12, v ZDA pa ANSI. Slednjega je dobro poznati, ker se v praksi velikokrat srečujemo z orodji, načrti, knjigami ameriškega izvora, ki uporabljajo te simbole.

Prvi trije simboli na naslednji strani so simboli za osnovne logične funkcije: konjunkcijo, disjunkcijo in negacijo. Ostali simboli pa predstavljajo nekaj preprostih kombinacij osnovnih logičnih funkcij. Za zapis poljubne logične funkcije sta zadostni že konjunkcija in negacija (IN vrata + inverter ali NE IN oz.NAND vrata) ali pa disjunkcija in negacija (ALI vrata + inverter ali NE ALI oz. NOR vrata).

V skrajni desni koloni je vsaka funkcija predstavljena še s pravilnostno tabelo. Na levi strani tabele imamo neodvisne (vhodne) spremenljivke, na desni strani pa funkcijske vrednosti (izhode vrat).

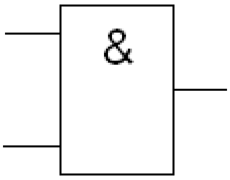
LOGIČNA VRATA | **SIMBOL PO IEC standardu** | **SIMBOL PO ANSI standardu** | **PRAVILNOSTNA (izjavnostna) tabela**

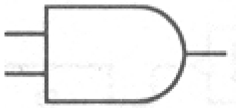
A, B vhodni spremenljivki

Y izhodna spremenljivka

IN (AND)

$Y = A \cdot B$

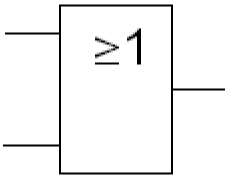


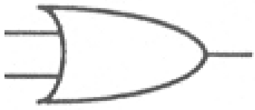


A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ALI (OR)

$Y = A + B$

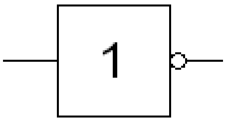


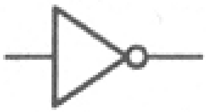


A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

NE (NOT, inverter)

$Y = \overline{A}$

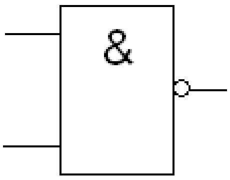


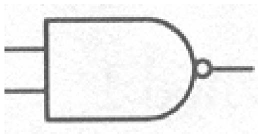


A	Y
0	1
1	0

NE IN (NAND)
(Schefferjeva funkcija)

$Y = \overline{A \cdot B}$

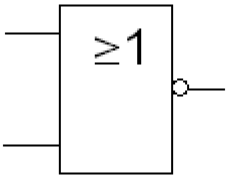


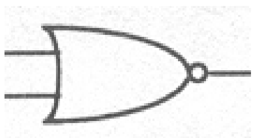


A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NE ALI (NOR)
(Pierceova funkcija)

$Y = \overline{A + B}$

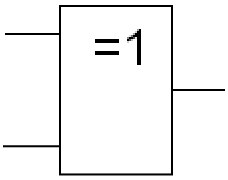


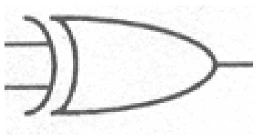


A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

EKSKLUZIVNA ALI
(EXOR funkcija,
antivalenca,
vsota po modulu 2)

$Y = \overline{A}B + A\overline{B} = A \oplus B$



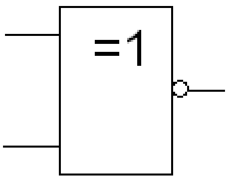


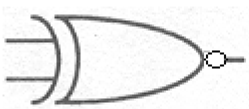
A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

EKSKLUZIVNA NE ALI
(EX NOR funkcija,
ekvivalenca)

$Y = \overline{A} \cdot \overline{B} + AB = \overline{A \oplus B}$

$Y = A \equiv B$





A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3.3 MINTERMI, MAKSTERMI, KANONIČNE OBLIKE FUNKCIJ

Minterm n spremenljivk je Boolov produkt teh n spremenljivk, kjer se spremenljivka lahko pojavi v negirani ali nenegirani obliki. Za n spremenljivk dobimo 2^n mintermov. Mintermi so označeni z m_i. Indeks i je desetiško število, ki ga dobimo na naslednji način:

npr.: $1\ 0\ 0 = 1.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0 = 4 \longrightarrow i = 4 \quad A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} = m_4$

Za tri spremenljivke A, B, C dobimo naslednje minterme:

A	B	C	F(A,B,C,)	Mintermi
0	0	0	α_0	$m_0 = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$
0	0	1	α_1	$m_1 = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$
0	1	0	α_2	$m_2 = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$
0	1	1	α_3	$m_3 = \overline{A} \cdot B \cdot C$
1	0	0	α_4	$m_4 = A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$
1	0	1	α_5	$m_5 = A \cdot \overline{B} \cdot C$
1	1	0	α_6	$m_6 = A \cdot B \cdot \overline{C}$
1	1	1	α_7	$m_7 = A \cdot B \cdot C$

α je lahko 0 ali 1

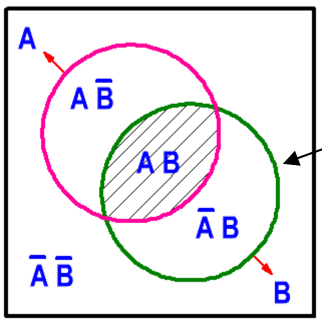
Maksterm n spremenljivk je Boolova vsota teh n spremenljivk, kjer se spremenljivka lahko pojavi v negirani ali nenegirani obliki. Za n spremenljivk dobimo 2^n makstermov.

npr.: $1\ 0\ 1 = 1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0 = 5 \longrightarrow i = 5 \quad A + \overline{B} + C = M_5$

Maksterme pišemo v pravilnostno tabelo v obratnem vrstnem redu, kot je razvidno iz spodnje tabele, ki prikazuje maksterme funkcije treh spremenljivk.

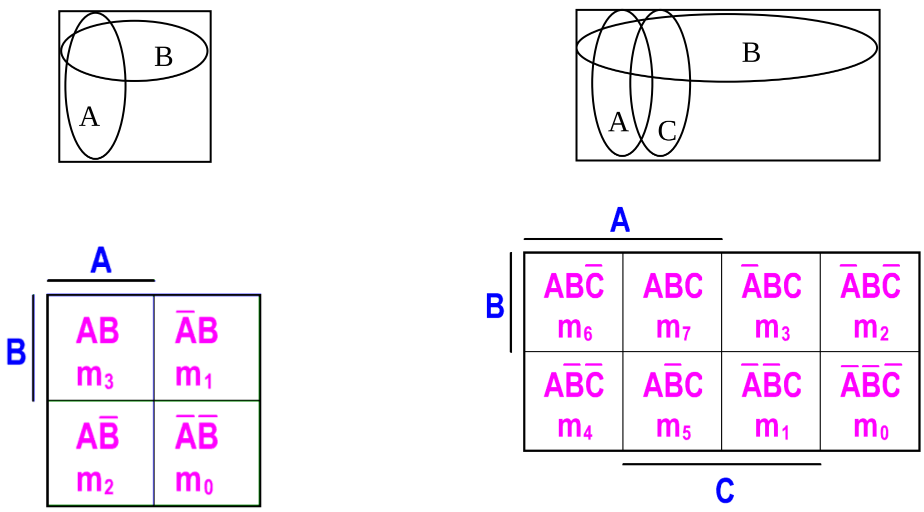
A	B	C	F(A,B,C,)	Makstermi
0	0	0	α_7	$M_7 = A + B + C$
0	0	1	α_6	$M_6 = A + B + \overline{C}$
0	1	0	α_5	$M_5 = A + \overline{B} + C$
0	1	1	α_4	$M_4 = A + \overline{B} + \overline{C}$
1	0	0	α_3	$M_3 = \overline{A} + B + C$
1	0	1	α_2	$M_2 = \overline{A} + B + \overline{C}$
1	1	0	α_1	$M_1 = \overline{A} + \overline{B} + C$
1	1	1	α_0	$M_0 = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

Minterme lahko nazorno prikažemo v *Vennovih diagramih*. Vennov diagram je sestavljen iz pravokotnika v katerega narišemo prekrivajoče se kroge. Vsak krog predstavlja eno Boolovo spremenljivko. Vse točke znotraj kroga spadajo k spremenljivki, vse točke izven kroga pa ne spadajo k spremenljivki. Vsaka delna površina predstavlja en minterm. Disjunkcija vseh mintermov je celotna površina, ki jo označimo z 1.



$$A\overline{B}+AB+\overline{A}B+\overline{A}\cdot\overline{B}=A\left(B+\overline{B}\right)+\overline{A}\left(B+\overline{B}\right)=A+\overline{A}=1$$

Posebna vrsta Vennovega diagrama je *Veitchev diagram.* Veitchev diagram dobimo iz Vennovega tako, da kroge spremenimo v pravokotnike in jih sistematično razporedimo. Na rob diagrama napišemo spremenljivke, ki se v stolpcu ali vrstici pojavijo v nenegirani obliki.

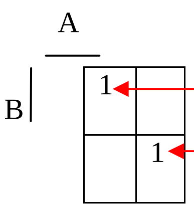


Veitchev diagram za 2 in 3 spremenljivki

Vidimo, da vsak kvadrat predstavlja en minterm Boolove funkcije. Torej predstavlja minterm najmanjšo površino v Veitchevem diagramu. Vanjo vpišemo konstanto 0 ali 1, ki predstavlja njegovo logično vrednost v funkciji.

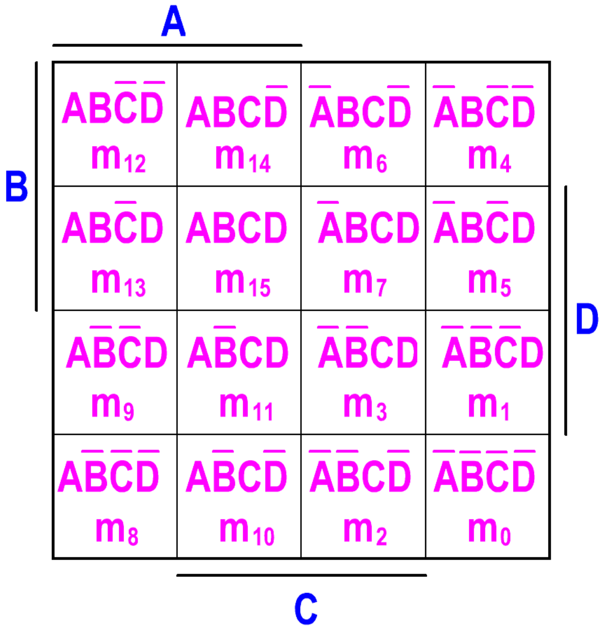
Zgled:

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



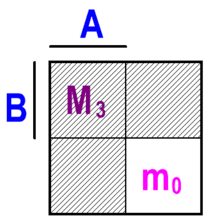
$$Y(A,B)=m_1+m_0=AB+\overline{A}\cdot\overline{B}$$

Iz tabele narišemo Veitchev diagram tako, da vpišemo 1 (enke) v diagram. Iz Veitchevega diagrama ali direktno iz tabele napišemo logično enačbo, iz enačbe pa narišemo še vezje s pomočjo simbolov, ki so podani na strani 15. Vrstni red teh operacij je lahko poljuben.

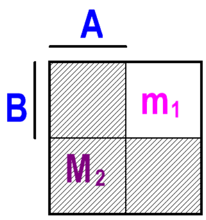


Veitchev diagram za 4 spremenljivke

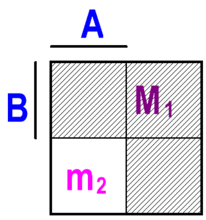
Na spodnji sliki je v vsakem Veitchevem diagramu označen en minterm, šrafirani kvadrati pa predstavljajo maksterm.



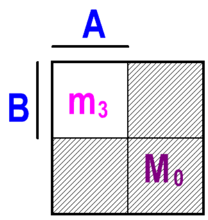
$m_0 = \overline{M}_3$



$m_1 = \overline{M}_2$



$m_2 = \overline{M}_1$



$m_3 = \overline{M}_0$

Iz te slike lahko vidimo, da obstaja povezava med mintermi in makstermi. Med mintermi in makstermi velja naslednja zveza:

$m_i = \overline{M}_{2^n-1-i}$ in $M_i = \overline{m}_{2^n-1-i}$ n ….število spremenljivk

Vse logične funkcije lahko pretvorimo v eno izmed dveh standarnih oblik: disjunktivno ali konjunktivno obliko.

Popolna disjunktivna normalna oblika (PDNO) logične funkcije je logična vsota mintermov:

$$f(x_1, x_2 \ldots x_n) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i m_i = \alpha_0 m_0 + \alpha_1 m_1 + \ldots \alpha_{2^n-1} m_{2^n-1}$$

kjer $\sum$ predstavlja logično vsoto, α_i je 0 ali 1, m_i so mintermi. V logični funkciji se pojavijo le členi pri katerih je $\alpha_i=1$.

$$F(A,B,C) = m_2 + m_3 + m_6 = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + AB\overline{C}$$

Popolna konjunktivna normalna oblika (PKNO) logične funkcije je logični produkt makstermov:

$$f\left(x_1, x_2 \ldots x_n\right) = \prod_{i=0}^{2^n-1}\left(\alpha_i + M_i\right) = \left(\alpha_1 + M_1\right)\left(\alpha_2 + M_2\right)\ldots\ldots\left(\alpha_{2^n-1} + M_{2^n-1}\right)$$

kjer Π predstavlja konjunkcijo, α_i je 0 ali 1, M_i so makstermi. V končnem izrazu se pojavijo le členi z $\alpha_i = 0$, zaradi $0 + M_i = M_i$ in $1 + M_i = 1$

$$F(A,B,C)=M_0M_1M_4M_7=\left(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}\right)\cdot\left(\overline{A}+\overline{B}+C\right)\cdot\left(A+\overline{B}+\overline{C}\right)\cdot\left(A+B+C\right)=\&^3(0,1,4,7)$$

Na osnovi povezave med mintermi in makstermi (glej prejšnjo stran) lahko logične funkcije zapisane v disjunktivni (konjunktivni) obliki lahko pretvorimo v konjunktivno (disjunktivno) obliko na sledeč način:

- Funkcijo prvič negiramo (izpišemo indekse mintermov ali makstermov, ki jih ni v funkciji).
- Funkcijo drugič negiramo (izračunamo nove indekse makstermov ali mintermov: $j = 2^n - 1 - i$)
- Napišemo novo obliko funkcije

Zgled 1: Dana je funkcija v PDNO: F(A,B,C,) = $\overline{A}\cdot\overline{B}C + A\overline{B}C + ABC$

Zapišemo jo lahko tudi takole: F(A,B,C,) = $m_1 + m_5 + m_7 = V^3(1,5,7)$

Funkcijo prvič negiramo: $\overline{F}$ (A,B,C) = $m_0 + m_2 + m_3 + m_4 + m_6$ (manjkajoči mintermi)

Funkcijo drugič negiramo: $\overline{\overline{F}}(A,B,C) = \overline{m_0 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5} = \overline{m_0}.\overline{m_2}.\overline{m_3}.\overline{m_4}.\overline{m_6}$

Uporabili smo De Morganov teorem. Uporabimo še zvezo med mintermi in makstermi in dobimo:

$j = 2^3 - 1 - i = 7 - i$ F(A,B,C) = $M_1\, M_3\, M_4\, M_5\, M_7 = \&^3(1,3,4,5,7)$

Zgled 2: Dana je funkcija v PKNO: F(A,B,C,) = $\&^3(0,1,3,4,7)$

Funkcijo prvič negiramo: $\overline{F}$ (A,B,C) = $\&^3(2,5,6)$

Funkcijo drugič negiramo: $\overline{\overline{F}}$ (A,B,C) = F(A,B,C) = $V^3(1,2,5)$

3.4 POENOSTAVLJANJE (MINIMIZACIJA) LOGIČNIH FUNKCIJ

Ker praviloma vedno želimo, da bi bilo elektronsko vezje za neko logično funkcijo kar se da enostavno, poskušamo čim bolj poenostaviti tudi ustrezne algebraične izraze. Najenostavnejši način poenostavljanja logičnih funkcij je uporaba pravil Boolove algebre. Pri tem načinu ni sistematskega zmanjšanja izrazov in zato tudi ne vemo vedno ali imamo najenostavnejšo obliko. Najbolj znane metode za sistematsko zmanjševanje izrazov- minimizacijo logičnih funkcij, so grafične metode, ki so primerne za funkcije z največ petimi spremenljivkami. Za funkcije z več spremenljivkami je bolj primerna tabelarična metoda ali pa poenostavljanje s pomočjo računalnika.

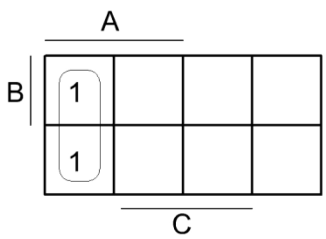
Naloga minimizacije logične funkcije je, da od 3^n-1 kombinacij izberemo najmanjše število kombinacij, ki še zadošča zahtevam določene logične funkcije oziroma določeni pravilnostni tabeli. Postopek minimizacije nas pripelje do minimalne disjunktivne normalne oblike (**MDNO)** in minimalne konjunktivne normalne oblike (**MKNO**) funkcije.

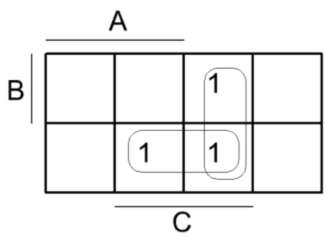
Grafična metoda poenostavljanja temelji na poenostavljanju s pomočjo Veitchevega ali Karnaughjevega diagrama. Razlika med tema diagramoma je samo v označevanju. Pravila poenostavljanja so pri obeh diagramih ista.

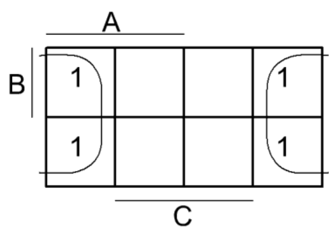
Tako v Veitchevem in Karnaughjevem diagramu **so spremenljivke razporejene tako**, da se ob **prehodu iz enega kvadrata v poljubnega sosednega**, **spremeni le ena spremenljivka**. Kvadrate ob skrajnem robu diagrama, ki so v isti vrsti ali istem stolpcu, štejemo kot sosedne. Sosedni kvadrati pa niso tisti, ki se stikajo le z oglišči.

Sosednost kvadratov je osnova za poenostavljanje logičnih funkcij po grafični poti. Združevanje sosednih izrazov namreč zmeraj izloči tisto spremenljivko, ki se je v obeh kvadratih pojavila v komplementarni obliki (v negirani in nenegirani obliki).

Nekaj značilnih primerov:



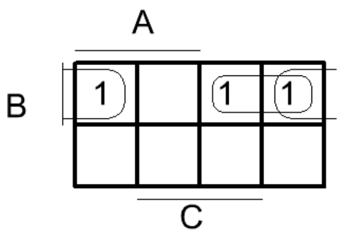




F(A,B,C)$_{MDNO}$ = $A\overline{C}$ (B odpade) F(A,B,C)$_{MDNO}$ = $\overline{B}C + \overline{A}C$ F(A,B,C)$_{MDNO}$= $\overline{C}$ (A in B odpadeta)

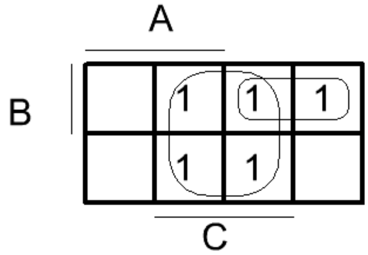
Obkrožimo lahko 2,4, 8 ali 16 enic. Če obkrožimo 2 enki, odpade ena spremenljivka, če obkrožimo 4 enke, odpadeta dve spremenljivki in če obkrožimo 8 enk, odpadejo tri spremenljivke itd. Enke lahko obkrožimo večkrat.

Zgledi: Podano funkcijo Y(A,B,C) = V^3(2,3,6) minimiziraj!



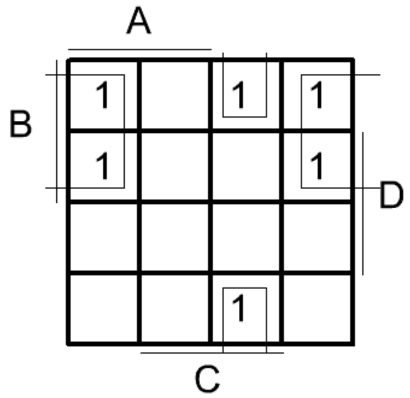
$$Y = B\overline{C} + \overline{A}B$$

Podano funkcijo Y(A,B,C) = V^3(1,2,3,5,7) minimiziraj!



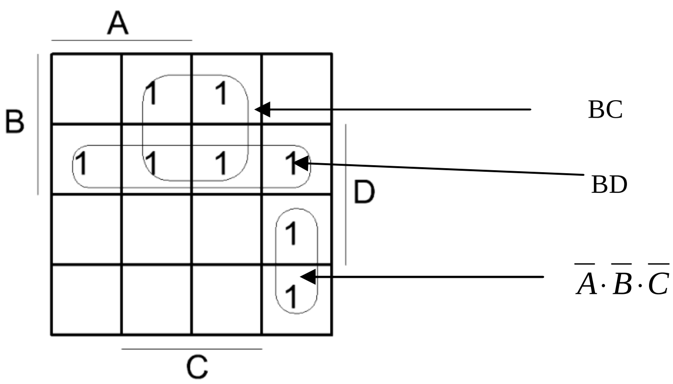
$$Y = \overline{A}B + C$$

Funkcijo Y(A,B,C,D)=V^4(2,4,5,6,12,13) zapiši v MDNO!



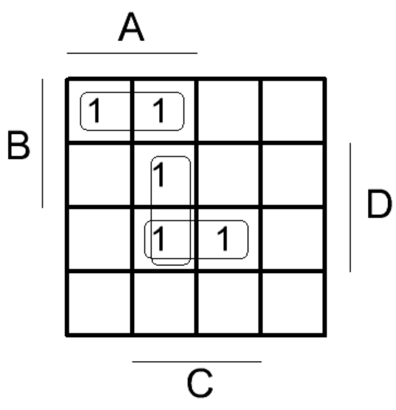
$$Y = B\overline{C} + \overline{A}CD$$

Funkcijo F(A,B,C,D) =V^4(0,1,5,6,7,13,14,15) zapiši v MDNO!

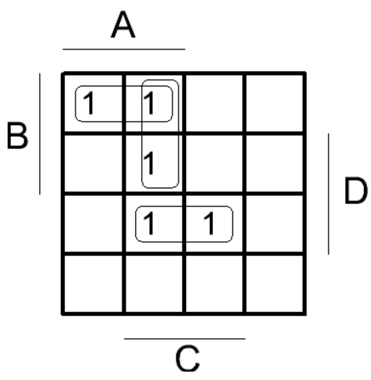


$$F(A,B,C,D) = BC + BD + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$$

Pri nekaterih funkcijah je mogoče z različnimi izbirami sosedov dobiti **različne enakovredne rešitve**, kot v naslednjem primeru: Y(A,B,C,D)=V^4(3,11,12,14,15)



$$Y(A,B,C,D) = AB\overline{D} + ACD + \overline{B}CD$$

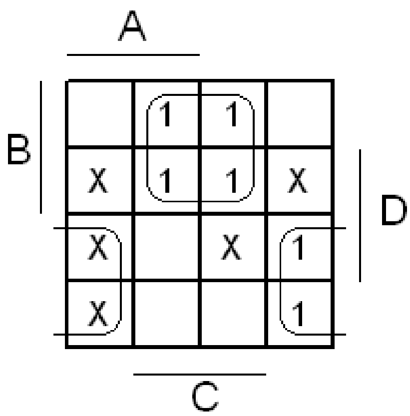


$$Y(A,B,C,D) = AB\overline{D} + ABC + \overline{B}CD$$

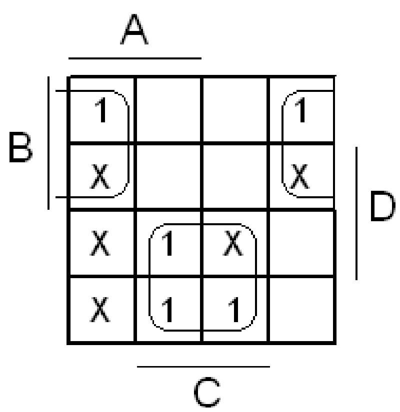
3.4.1 Poenostavljanje logičnih funkcij ob upoštevanju kombinacij s poljubnimi vrednostmi

Včasih imamo opraviti z logičnimi vezji, kjer se določene kombinacije spremenljivk sploh ne morejo pojaviti. Zato nam je vseeno kakšno vrednost bi ustrezna logična funkcija zavzela pri teh kombinacijah. Za kombinacije, ki se ne bodo pojavile, vpeljemo pojem <u>kombinacija s poljubno vrednostjo</u> in jo v diagramu označimo z **X**. X uporabimo pri poenostavljanju tako kot nam najbolj ustreza. Če nam x pri poenostavljanju ne koristi, predpostavimo, da je nič. Če pa nam X koristi, predpostavimo, da je 1.

Zgled: F(A,B,C,D,)=V^4(0,1,6,7,14,15) m_3, m_5 , m_8, m_9, m_{13} = x   Poišči MDNO in MKNO!



$$F(A,B,C,D)_{MDNO} = BC + \overline{B}\,\overline{C}$$



Veitchev diagram za <u>negirano funkcijo</u> $\overline{F}$ (A,B,C,D)

$$\overline{F}(A,B,C,D) = \overline{B}C + B\overline{C}$$ To funkcijo je potrebno še enkrat negirat.

$$\overline{\overline{F}}(A,B,C,D) = \overline{\overline{B}C + B\overline{C}} =$$
$$F(A,B,C,D)_{MKNO} = \underline{\underline{\left(B+\overline{C}\right)\cdot\left(\overline{B}+C\right)}}$$

Minimalna normalna oblika (MNO) je tista, ki je krajša po številu operatorjev (manjše število vrat) in/ali številu vhodov.