Вписанная и описанная окружность

Окружность вписана в n-угольник, если она касается всех сторон этого *n*-угольника (рис. 8.106).

Окружность описана около n-угольника, если все вершины *n*-угольника лежат на окружности (рис. 8.107).

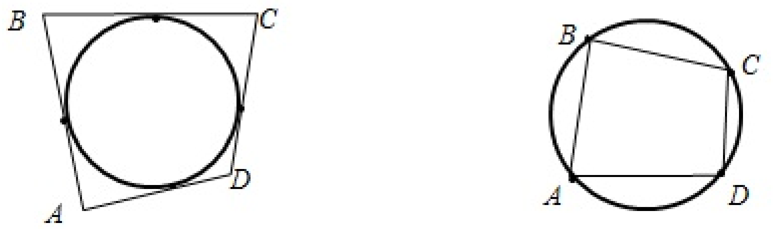

Рис. 8.106 Рис. 8.107

Свойства вписанной окружности

1. Окружность можно вписать в любой треугольник.

2. Окружность можно вписать в четырехугольник, если суммы длин его противолежащих сторон равны.

Например, на рисунке 8.106 $AD + BC = AB + DC$.

Так, *окружность можно вписать в квадрат и в ромб, но нельзя вписать в параллелограмм и в прямоугольник*.

Свойства описанной окружности

1. Окружность можно описать около любого треугольника.

2. Окружность можно описать около четырехугольника, если суммы его противолежащих углов равны.

Например, на рисунке 8.107 $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$.

Так, *окружность можно описать около квадрата и прямоугольника, но нельзя описать около параллелограмма и ромба*.

Расположение центров окружностей, описанных около треугольника:

1) центр окружности расположен на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника;

2) если треугольник остроугольный, то центр окружности расположен в этом треугольнике:

а) в равностороннем треугольнике центром окружности является точка пересечения высот, биссектрис, медиан треугольника (центры вписанной и описанной окружностей совпадают (рис. 8.108);

б) в равнобедренном треугольнике центр окружности расположен на биссектрисе, проведенной из вершины треугольника к его основанию (рис. 8.109);

3) если треугольник прямоугольный, то центр окружности расположен на середине гипотенузы (рис. 8.110);

4) если треугольник тупоугольный, то центр окружности расположен вне треугольника (рис. 8.111).

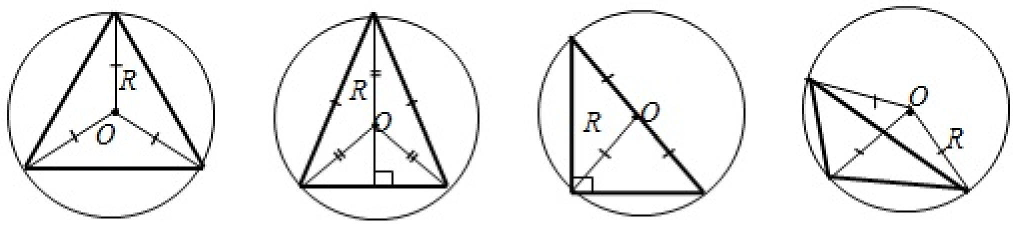

Рис. 8.108 Рис. 8.109 Рис. 8.110 Рис. 8.111

Расположение центров окружностей, вписанных в треугольник:

1) центр окружности, вписанной в треугольник, расположен в этом треугольнике (рис. 8.112 – 8.115);

2) центром окружности является точка пересечения биссектрис треугольника;

3) в равностороннем треугольнике центром окружности является точка пересечения высот, биссектрис, медиан треугольника.

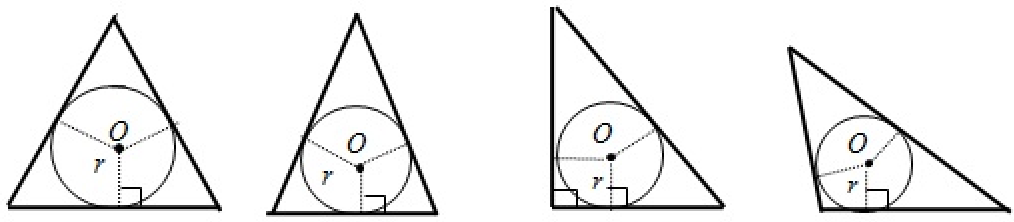

Рис. 8.112 Рис. 8.113 Рис. 8.114 Рис. 8.115

Формулы для вычисления радиусов вписанной и описанной окружностей

Радиус окружности, описанной около многоугольника, как правило, обозначают R, а радиус окружности, вписанной в многоугольник, обозначают r:

1) для ***равностороннего треугольника*** со стороной a:

$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$, (8.34)

$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$; (8.35)

2) для ***произвольного треугольника*** со сторонами a, b, c и площадью S:

$R = \frac{abc}{4S}$, (8.36)

$r = \frac{2S}{a+b+c}$; (8.37)

3) для ***прямоугольного треугольника*** с катетами a, b и гипотенузой c:

$R = \frac{c}{2}$, (8.38)

$r = \frac{a+b-c}{2}$; (8.39)

4) для ***квадрата*** со стороной a и диагональю d:

$R = \frac{d}{2}$, (8.40)

$r = \frac{a}{2}$; (8.41)

5) для ***прямоугольника*** с диагональю d:

$R = \frac{d}{2}$; (8.42)

6) для ***ромба*** с высотой h:

$r = \frac{h}{2}$; (8.43)

7) для ***трапеции*** с высотой h, при условии, что в трапецию можно вписать окружность:

$$r = \frac{h}{2}. \quad (8.44)$$

Если около трапеции можно описать окружность, то, проведя диагональ трапеции и рассмотрев один из полученных треугольников со сторонами a, b, c и площадью S, по формуле $R = \frac{abc}{4S}$ найдем радиус окружности описанной около треугольника, а значит и около трапеции (рис. 8.116);

8) для ***правильного шестиугольника*** со стороной a:

$$R = a, \quad (8.45)$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \quad (8.46)$$

Правильный шестиугольник состоит из шести правильных треугольников (рис. 8.117) и точка O является центром вписанной в него и описанной около него окружностей.

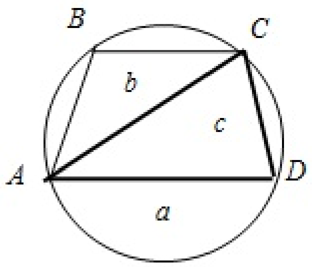

Рис. 8.116

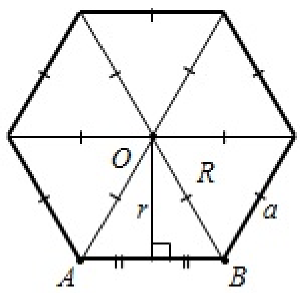

Рис. 8.117