Первообразной для функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, для которой выполняется равенство: $F'(x) = f(x)$

Таблица первообразных

Первообразная нуля равна C

Функция	Первообразная
$f(x) = k$	$F(x) = kx + C$
$f(x) = x^m, m \neq -1$	$F(x) = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = ln\lvert x\rvert + C$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$
$f(x) = a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{lna} + C$
$f(x) = sinx$	$F(x) - cosx + C$
$f(x) = cosx$	$F(x) = sinx + C$
$f(x) = \frac{1}{sin^2x}$	$F(x) = -ctgx + C$
$f(x) = \frac{1}{cos^2x}$	$F(x) = tgx + C$
$f(x) = \sqrt{x}$	$F(x) = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$

Если $y = F(x)$ – это первообразная для функции $y = f(x)$ на промежутке X, то у $y = f(x)$ бесконечно много первообразных и все они имеют вид $y = F(x) + C$

Правила вычисления первообразных:

1. Первообразная суммы равна сумме первообразных. Если $F(x)$ - первообразная для $f(x)$, а $G(x)$ – первообразная для $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ - первообразная для $f(x) + g(x)$.
2. Постоянный множитель выносится за знак первообразной. Если $F(x)$ - первообразная для $f(x)$, а k – постоянная величина, то $k\,F(x)$ - первообразная для $k\,f(x)$.
3. Если $F(x)$ - первообразная для $f(x)$, a$, k, b$ - постоянные величины, причем $k \neq 0$, то $\frac{1}{k}\,F(kx + b)$ - это первообразная для $f(kx + b)$.

Пример:

Найти первообразную для функции $f(x) = 2sinx + \frac{4}{x} - \frac{cosx}{3}$.

Решение:

Чтобы было проще найти первообразную от функции, выделим коэффициенты каждого слагаемого

$f(x) = 2sinx + \frac{4}{x} - \frac{cosx}{3} = 2 \cdot sinx + 4 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{3} \cdot cosx$

Далее, воспользовавшись таблицей первообразных, найдем первообразную для каждой функции, входящих в состав $f(x)$

$f_1 = sinx$

$f_2 = \frac{1}{x}$

$f_3 = cosx$

Для $f_1 = sinx$ первообразная равна $F_1 = -cosx$

Для $f_2 = \frac{1}{x}$ первообразная равна $F_2 = ln|x|$

Для $f_2 = cosx$ первообразная равна $F_3 = sinx$

По первому правилу вычисления первообразных получаем:

$F(x) = 2F_1 + 4F_2 - \frac{1}{3}F_3 = 2 \cdot (-cosx) + 4 \cdot ln|x| - \frac{1}{3} \cdot sinx$

Итак, общий вид первообразной для заданной функции

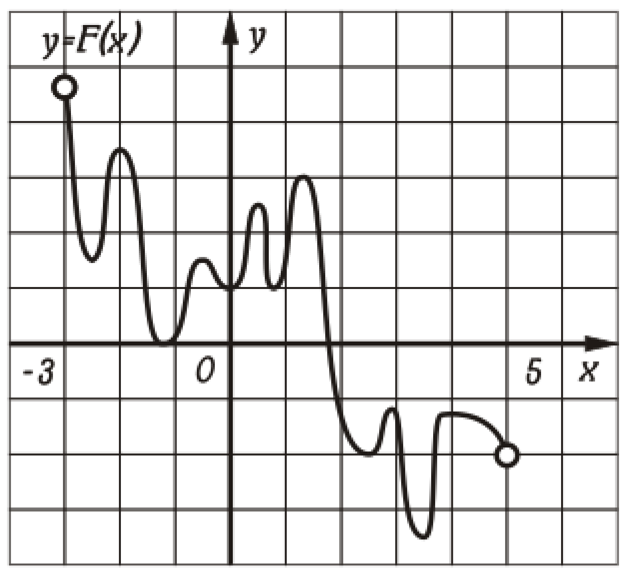
$$F\left(x\right) = -2cosx + 4ln|x| - \frac{sinx}{3} + C$$

Связь между графиками функции и ее первообразной:

1. Если график функции $f\left(x\right) > 0$ на промежутке, то график ее первообразной $F\left(x\right)$ возрастает на этом промежутке.
2. Если график функции $f\left(x\right) < 0$ на промежутке, то график ее первообразной $F\left(x\right)$ убывает на этом промежутке.
3. Если $f\left(x\right) = 0$, то график ее первообразной $F\left(x\right)$ в этой точке меняется с возрастающего на убывающий (или наоборот).

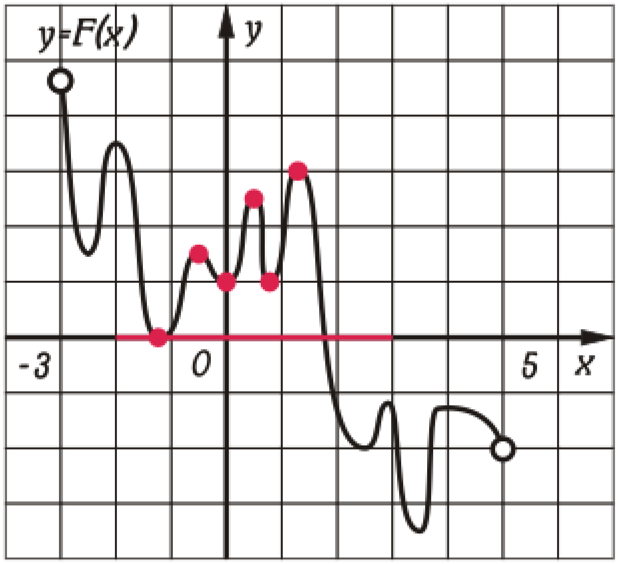
Пример:

На рисунке изображен график функции $y = F\left(x\right)$ – одной из первообразных некоторой функции $f\left(x\right)$, определенной на интервале $\left(-3; 5\right)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений $f\left(x\right) = 0$ на отрезке $\left(-2; 2\right]$



Если $f\left(x\right) = 0$, то график ее первообразной $F\left(x\right)$ в этой точке меняется с возрастающего на убывающий(или наоборот).

Выделим отрезок $\left(-2; 2\right]$ и отметим на нем экстремумы.



У нас получилось 6 таких точек.

Ответ: 6

Неопределенный интеграл

Если функция $y = f\left(x\right)$ имеет на промежутке X первообразную $y = F\left(x\right)$, то множество всех первообразных $y = F\left(x\right) + C$, называют неопределенным интегралом функции $y = f\left(x\right)$ и записывают:

$\int f\left(x\right)dx$

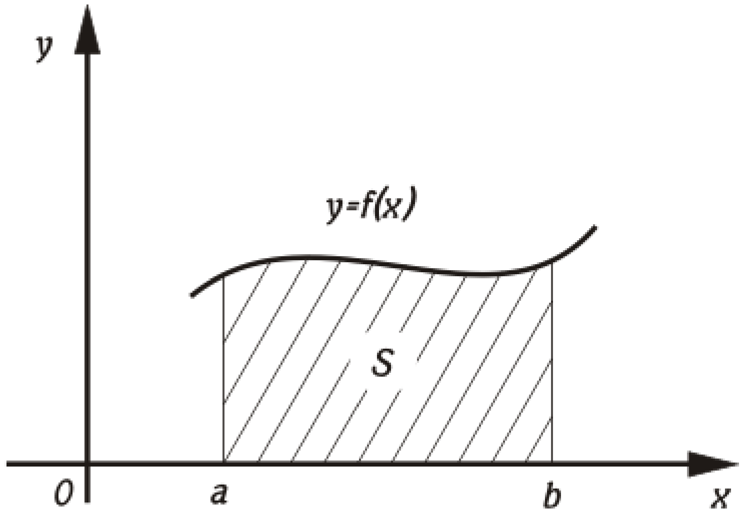
Определенный интеграл – это интеграл с пределами интегрирования (на отрезке)

$\int_a^b f\left(x\right)dx$, где a, b - пределы интегрирования

Площадь криволинейной трапеции или геометрический смысл первообразной

Площадь S фигуры, ограниченной осью Ox, прямыми $x = a$ и $x = b$ и графиком неотрицательной функции $y = f\left(x\right)$ на отрезке $\left[a; b\right]$, находится по формуле

$S = \int_a^b f\left(x\right)dx$



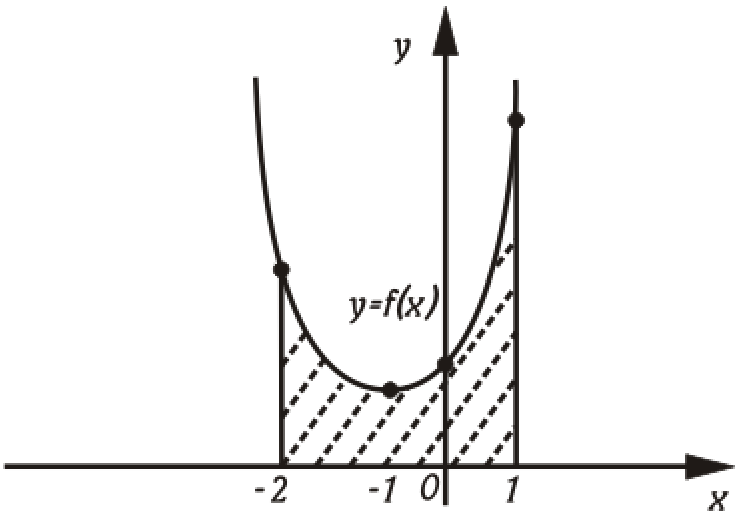
Формула Ньютона - Лейбница

Если функция $y = f\left(x\right)$ непрерывна на отрезке $\left[a; b\right]$, то справедливо равенство

$\int_a^b f\left(x\right)dx = F\left(x\right)\Big|_a^b = F\left(b\right) - F\left(a\right)$, где $F\left(x\right)$ - первообразная для $f\left(x\right)$

Пример:

На рисунке изображен график некоторой функции $y = f\left(x\right)$. Одна из первообразных этой функции равна $F\left(x\right) = \frac{2x^3}{3} - 2x^2 - 1$. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



Решение:

Площадь выделенной фигуры равна разности значений первообразных, вычисленных в точках 1 и -2

$$S = F(1) - F(-2)$$

Первообразная нам известна, следовательно, осталось только подставить в нее значения и вычислить

$$F(1) = \frac{2 \cdot 1}{3} - 2 \cdot 1 - 1 = \frac{2}{3} - 2 - 1 = \frac{2}{3} - 3$$

$$F(-2) = \frac{2(-2)^3}{3} - 2(-2)^2 - 1 = \frac{2 \cdot (-8)}{3} - 8 - 1 = -\frac{16}{3} - 9$$

$$S = \frac{2}{3} - 3 - \left(-\frac{16}{3} - 9\right) = \frac{2}{3} - 3 + \frac{16}{3} + 9 = \frac{18}{3} + 6 = 6 + 6 = 12$$

Ответ: 12