Теория вероятностей на ЕГЭ. Трудные задачи.

Еще одна статья по теории вероятностей. В ней собраны задачи на проценты, вероятности зависимых событий, а также задачи, требующие последовательного подсчёта разных вероятностей. Эти задачи относятся к категории «трудные задачи», однако разобрав их с нами, они таковыми вам уже не покажутся.

Теоретическая часть

Если имеются события A и B, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$
$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

Эти формулы следуют применять, когда A и B – зависимые совместные события

Задачи о зависимых событиях

Задача 5.1 В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,4. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,22. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение. **1-й способ**.

Так как 0,4 ·0,4 ≠ 0,22, то события «кофе закончился в 1-ом автомате» и «кофе закончился во 2-ом автомате» зависимые. Обозначим через A событие «кофе остался в первом автомате», через B – «кофе остался во втором автомате». Тогда $P(A) = P(B) = 1 - 0,4 = 0,6$.

Событие «кофе остался хотя бы в одном автомате» – это A U B, его вероятность равна P(A U B) = 1 — 0,22 = 0,78, так как оно противоположно событию «кофе закончился в обоих автоматах». По формуле для пересечения событий: P(A ∩ B) = P(A) + P(B) — P(A ∪ B)= 0,6 + 0,6 — 0,78 = 0,42

2-й способ Обозначим через X событие «кофе закончился в первом автомате», через Y – «кофе закончился во втором автомате». Тогда по условию P(X) = P(Y) = 0,4, P(X ∩ Y) = 0,22. Так как P(X ∩ Y) ≠ P(X) · P(Y), то события X и Y зависимые. По формуле для объединения событий:

$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) = 0{,}4 + 0{,}4 – 0{,}22 = 0{,}58$.

Мы нашли вероятность события X U Y «кофе закончился хотя бы в одном автомате». Противоположным событием будет $\overline{X \cup Y}$ «кофе остался в обоих автоматах», его вероятность равна $P(\overline{X \cup Y})$ = 1 –P(X ∪ Y) = 1 –0,58 = 0,42.

3-й способ. Составим таблицу вероятностей возможных результатов в конце дня.

		Второй автомат	
		кофе закончился	кофе остался
Первый автомат	кофе закончился	0,22	
	кофе остался		

По условию вероятность события «кофе закончился в обоих автоматах» равна 0,22. Это число мы сразу записали в соответствующую ячейку таблицы.

В первом автомате кофе закончится с вероятностью 0,4, поэтому сумма чисел в верхних ячейках таблицы должна быть равна 0,4. Значит, в правой верхней ячейке должно быть число 0,4 – 0,22 = 0,18.

		Второй автомат	
		кофе закончился	кофе остался
Первый автомат	кофе закончился	0,22	0,18
	кофе остался		

Во втором автомате кофе закончится с вероятностью 0,4, поэтому сумма чисел в левых ячейках таблицы также должна быть равна 0,4.

Значит, в левой нижней ячейке должно быть число 0,4 – 0,22 = 0,18.

		Второй автомат	
		кофе закончился	кофе остался
Первый автомат	кофе закончился	0,22	0,18
	кофе остался	0,18	

Так как сумма чисел во всех четырёх ячейках должна быть равна 1, то искомое число в правой нижней ячейке равно 1 – 0,22 – 0,18 – 0,18 = 0,42.

		Второй автомат	
		кофе закончился	кофе остался
Первый автомат	кофе закончился	0,22	0,18
	кофе остался	0,18	0,42

Ответ: 0,42.

Задачи на проценты

Задача 5.2 Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 60% яиц из первого хозяйства – яйца высшей категории, а из второго хозяйства – 40% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 48% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Решение. Пусть x – искомая вероятность. Пусть всего закуплено n яиц. Тогда в первом хозяйстве закуплено $x \cdot n$ яиц, из них $0,6x \cdot n$ высшей категории. Во втором хозяйстве закуплено $(1- x) \cdot n$ яиц, из них $0,4 \cdot (1- x) \cdot n$ высшей категории. Всего высшую категорию имеют $0,48n$ яиц.

Отсюда

$$0{,}6x \cdot n + 0{,}4 \cdot (1-x) \cdot n = 0{,}48n$$
$$0{,}6x + 0{,}4 \cdot (1-x) = 0{,}48$$
$$0{,}6x + 0{,}4 - 0{,}4x = 0{,}48$$
$$0{,}2x = 0{,}08$$
$$x = 0{,}4$$

Ответ: 0,4

Задача 5.3 На фабрике керамической посуды 20% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 70% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

Решение. Пусть всего произведено x тарелок. Качественных тарелок 0,8x (80% от общего числа), они поступают в продажу.

Дефектных тарелок 0,2x, из них в продажу поступает 30%, то есть 0,3 • 0,2x = 0,06x. Всего в продажу поступило 0,8x + 0,06x = 0,86x

тарелок. Вероятность купить тарелку без дефектов равна $\frac{0{,}8x}{0{,}86x} = \frac{40}{43}$ ≈ 0,93

Ответ: 0,93.

Разные задачи

Задача 5.4 На рок-фестивале выступают группы – по одной от каждой из заявленных стран. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность того, что группа из Финляндии будет выступать после группы из Бельгии, но перед группой из Греции? Результат округлите до сотых.

Решение. **1-й способ.** Будем считать исходом порядок выступления групп на фестивале. Разобьём множество исходов на подмножества следующим образом: в одно подмножество будем включать исходы, полученные перестановками рок-групп из Финляндии, Бельгии и Греции (с сохранением мест всех остальных рок-групп).

Тогда в каждом подмножестве будет 6 исходов: ФБГ, ФГБ, БГФ, БФГ, ГБФ, ГФБ. Из этих шести исходов благоприятным будет только БФГ. Следовательно, благоприятными являются 1/6 всех исходов. Искомая вероятность равна 1\6 ≈ 0,17

2-й способ (этот способ не является математически верным, но при решении на экзамене может помочь, если первый способ непонятен)

Так как в условии не указано общее число рок-групп, будем считать, что их всего три: из Финляндии, Бельгии и Греции. Будем считать исходом порядок выступлений, всего 6 исходов: ФБГ, ФГБ, БГФ, БФГ, ГБФ, ГФБ. Благоприятным является только исход БФГ. Искомая вероятность равна 1\6 ≈ 0,17.

Ответ: 0,17.

Задача 5.5 При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,2, а при каждом последующем 0,7. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,98?

Решение. **1-й способ** Вероятность промаха при первом выстреле равна 1 – 0,2 = 0,8. Вероятность промаха при каждом последующем равна 0,3. Подсчитаем число выстрелов, при котором цель остаётся непоражённой с вероятностью менее 1 – 0,98 = 0,02.

Вероятность непоражения после второго выстрела равна 0,8 • 0,3 = 0,24; после третьего 0,24 • 0,3 = 0,072; после четвёртого 0,072 • 0,3 = 0,0216; после пятого 0,0216 • 0,3 = 0,00648.

Следовательно, необходимо 5 выстрелов.

2-й способ (этот способ имеет математическое значение, но непригоден на экзамене из-за необходимости приближённого вычисления логарифма)

Вероятность непоражения после *n* выстрелов равна $0,8 \cdot 0,3^{n-1}$, так как при первом выстреле вероятность промаха 0,8, а при каждом последующем 0,3.

По условию необходимо, чтобы

$$1-0{,}8\cdot 0{,}3^{n-1}\ge 0{,}98$$

$$0{,}8\cdot 0{,}3^{n-1}\le 0{,}02$$

$$0{,}3^{n-1}\le 0{,}025$$

$$n-1\ge \log_{0,3} 0{,}025$$

$$n\ge 1+\log_{0,3} 0{,}025\approx 1+3{,}06$$

$$n\ge 5$$

Ответ: 5.

Задача 5.6 Чтобы поступить в институт на специальность «Архитектура», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 60 баллов по каждому из трёх предметов – математике, русскому языку и истории. Чтобы поступить на специальность «Живопись», нужно набрать не менее 60 баллов по каждому из трёх предметов – русскому языку, истории и литературе. Вероятность того, что абитуриент Н. получит не менее 60 баллов по истории, равна 0,8, по русскому языку 0, 5, по литературе 0,6 и по математике 0,9. Найдите вероятность того, что Н. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

Решение.

Вероятность того, что Н. не сможет набрать 60 баллов ни по литературе, ни по математике равна (1 – 0,6) • (1 –0,9) = 0,4 • 0,1 = 0,04. Следовательно, хотя бы по одному из этих двух предметов он получит 60 баллов с вероятностью 1 – 0,04 = 0,96. Для поступления нужно набрать требуемый балл по русскому языку, истории и хотя бы по одному предмету из литературы и математики. Вероятность поступления равна 0,5 • 0,8 • 0,96 = 0,384.

Ответ: 0,384.

Задача 5.7 В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,9 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 11 марта, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 14 марта в Волшебной стране будет отличная погода.

Решение.

Составим таблицу вероятностей для погоды в Волшебной стране.

	11 марта	12 марта	13 марта	14 марта
хорошая	1			
отличная	0			

Погода 12 марта с вероятностью 0,9 останется хорошей, с вероятностью 0,1 станет отличной. Занесём эти данные в таблицу.

	11 марта	12 марта	13 марта	14 марта
хорошая	1	0,9		

отличная	0	0,1		

Хорошая погода 13 марта может быть в двух случаях. 1) Погода 12 марта была хорошей и не изменилась. Вероятность этого равна 0,9 • 0,9 = 0,81. 2) Погода 12 марта была отличной и изменилась. Вероятность этого равна 0,1 • 0,1 = 0,01.

Таким образом, вероятность хорошей погоды 13 марта равна 0,81 + 0,01 = 0,82. Вероятность отличной погоды 13 марта равна 1 – 0,82 = 0,18. Заносим эти данные в таблицу.

	11 марта	12 марта	13 марта	14 марта
хорошая	1	0,9	0,82	
отличная	0	0,1	0,18	

Отличная погода 14 марта может быть в двух случаях. 1) Погода 13 марта была хорошей и изменилась. Вероятность этого равна 0,82 • 0,1 = 0,082. 2) Погода 13 марта была отличной и не изменилась. Вероятность этого равна 0,18 • 0,9 = 0,162.

Таким образом, вероятность отличной погоды 14 марта равна 0,082 + 0,162 = 0,244.

	11 марта	12 марта	13 марта	14 марта
хорошая	1	0,9	0,82	
отличная	0	0,1	0,18	0,244

Ответ: 0,244.