Тригонометрические уравнения и неравенства

Тригонометрические уравнения и неравенства.

<u>Решение простейших тригонометрических уравнений</u>

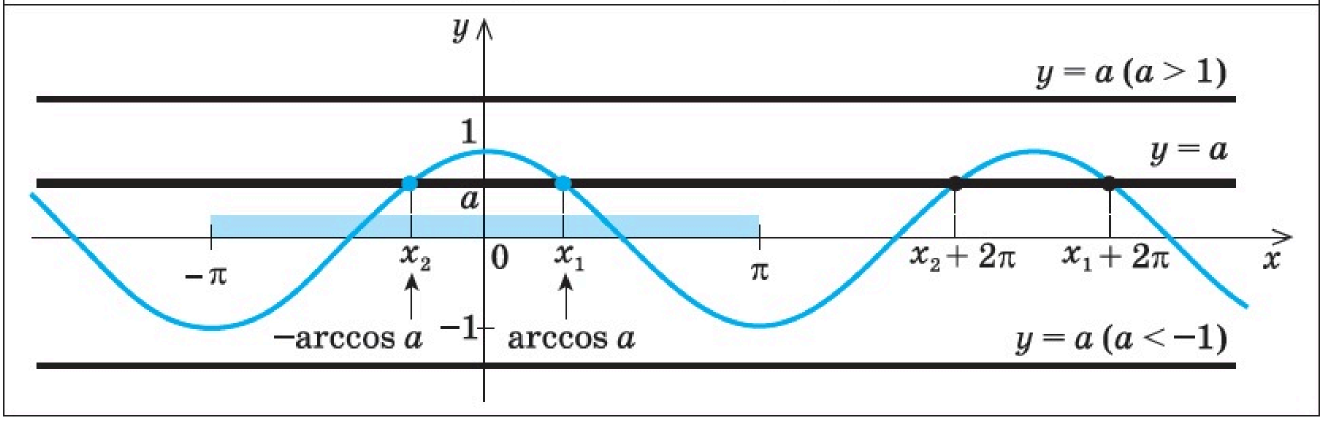
Простейшими тригонометрическими уравнениями называют уравнения cos x = a, sin x = a, tg x = a, ctg x = a.

Чтобы рассуждения по нахождению корней этих уравнений были более наглядными, воспользуемся графиками соответствующих функций.

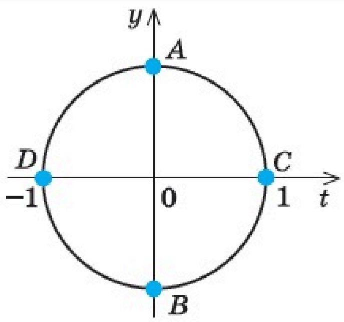
Уравнение cos x = a

1. Графическая иллюстрация и решение уравнения $\cos x = a$

Графическая иллюстрация



Решения	Примеры
$\boxed{\cos x = a}$ $\lvert a\rvert > 1$: **Корней нет** $\lvert a\rvert \leqslant 1$: $\boxed{x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z}$	1. ▶ $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$. ◁ 2. ▶ $\cos x = \sqrt{3}$. Корней нет, поскольку $\sqrt{3} > 1$. ◁

2. Частные случаи решения уравнения $\cos x = a$	
	$\cos x = 0 \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$ $\cos x = 1 \quad x = 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$ $\cos x = -1 \quad x = \pi + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$

Примеры решения задач

Задача 1 Решите уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Решение

▶ $x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z},$

$$x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n,$$

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n.$$

Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$ ◁

Комментарий

Поскольку $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$, то данное уравнение вида $\cos x = a$ имеет корни, которые можно найти по формуле (1).

Для вычисления $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ можно воспользоваться формулой:

$$\mathbf{arccos\,(-a) = \pi - arccos\,a}.$$

Тогда

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Задача 2 Решите уравнение $\cos x = \sqrt{2}$.

Решение

▶ Поскольку $\left|\sqrt{2}\right| > 1$, то корней нет.

Ответ: корней нет. ◁

Комментарий

Поскольку $\left|\sqrt{2}\right| > 1$, то данное уравнение не имеет корней (то есть формулу (1) нельзя применить).

Задача 3 Решите уравнение $\cos 4x = \frac{1}{3}$.

Решение

▶ $4x = \pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z},$

$$x = \pm\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ:

$$\pm\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}.$$ ◁

Комментарий

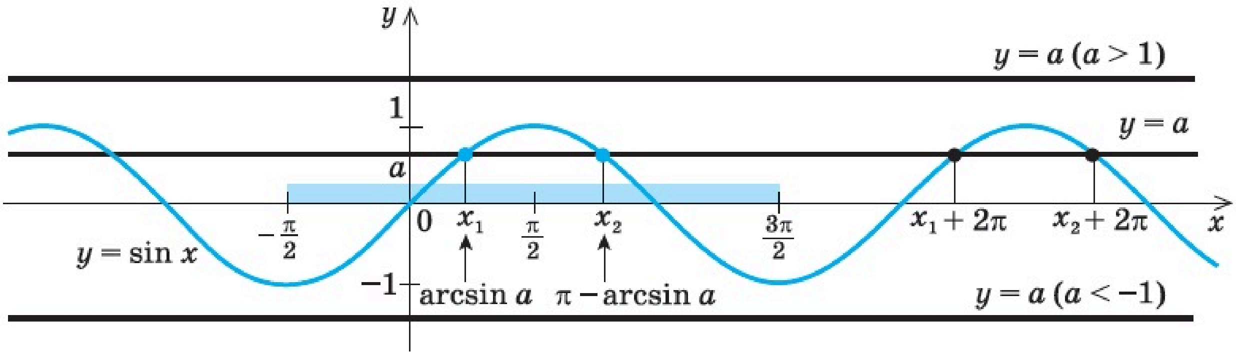
Поскольку $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$, то можно воспользоваться формулой (1).

Учитывая, что $\arccos\frac{1}{3}$ не является табличным значением, для получения ответа достаточно после нахождения $4x$ по формуле (1) обе части последнего уравнения разделить на 4.

Уравнение sin x = a

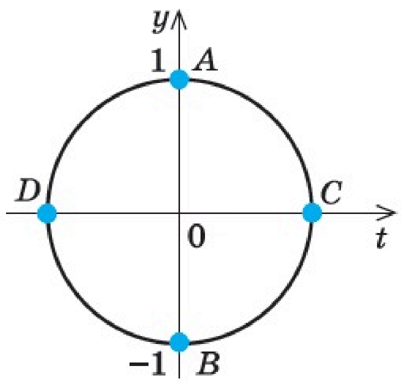
1. Графическая иллюстрация и решение уравнения $\sin x = a$

Графическая иллюстрация



Решения	Примеры
$\boxed{\sin x = a}$ $\lvert a \rvert > 1$ → $\boxed{\text{Корней нет}}$ $\lvert a \rvert \leqslant 1$ → $\boxed{x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z}$	1. ▶ $\sin x = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n,\ n \in Z.$ $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$ ◁ 2. ▶ $\sin x = \sqrt{3}$. Корней нет, так как $\sqrt{3} > 1$. ◁

2. Частные случаи решения уравнения $\sin x = a$



$\boxed{\sin x = 0 \quad x = \pi k,\ k \in Z}$

$\boxed{\sin x = 1 \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z}$

$\boxed{\sin x = -1 \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z}$

Примеры решения задач

Задача 1 Решите уравнение $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение

▶ $x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

$$x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $(-1)^n \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$ ◁

Комментарий

Поскольку $\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right| < 1$, то данное уравнение вида $\sin x = a$ имеет корни, которые можно найти по формуле (3).

Для вычисления $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ можно воспользоваться формулой:

$\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

Тогда

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}.$$

Замечание. Ответ к задаче 1 часто записывают в виде $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, но такая запись не является обязательной.

Задача 2 Решите уравнение $\sin x = \frac{\pi}{2}$.

Решение

▶ Поскольку $\left|\frac{\pi}{2}\right| > 1$, то корней нет.

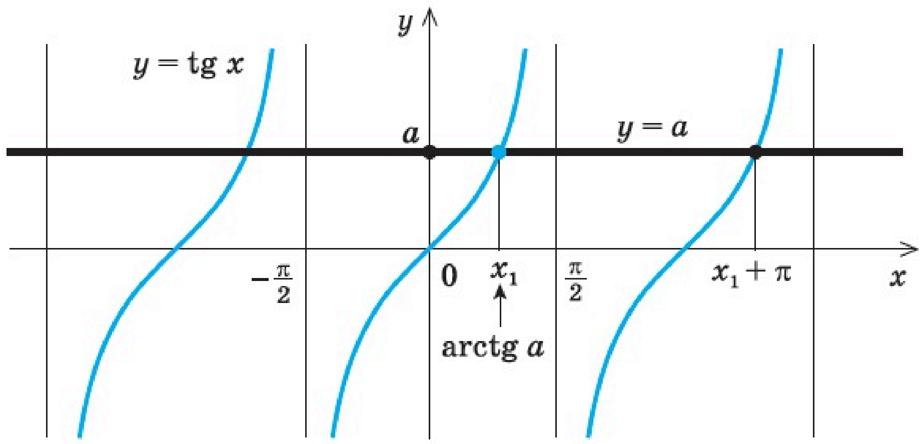
Ответ: корней нет. ◁

Комментарий

Поскольку $\left|\frac{\pi}{2}\right| > 1$, то данное уравнение не имеет корней (то есть формулой (3) нельзя воспользоваться).

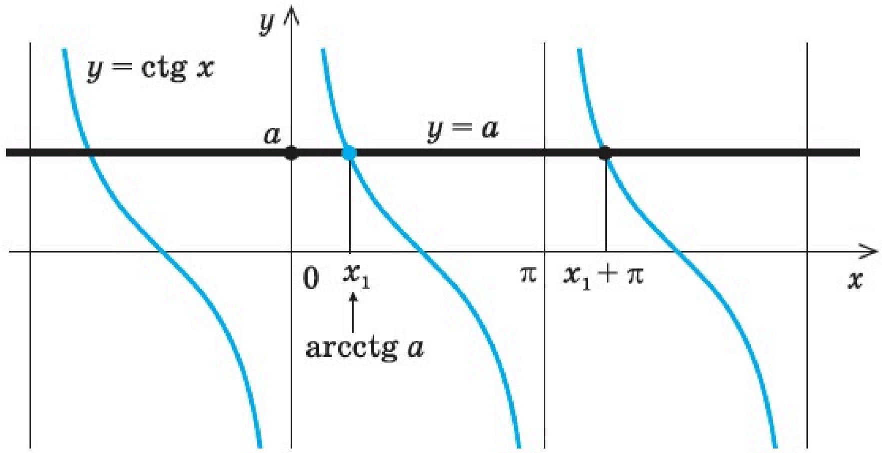
Уравнение tg x = a и ctg x = a

1. Графическая иллюстрация и решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$



Формула	Пример
$\operatorname{tg} x = a$ $x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z$ Частный случай $\operatorname{tg} x = 0$ $x = \pi n,\ n \in Z$	$\operatorname{tg} x = 1$ ▶ $x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n,\ n \in Z.$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$ ◁

2. Графическая иллюстрация и решения уравнения $\operatorname{ctg} x = a$



Формула	Пример
$\operatorname{ctg} x = a$ $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z$ Частный случай $\operatorname{ctg} x = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$	$\operatorname{ctg} x = 7$ ▶ $x = \operatorname{arcctg} 7 + \pi n,\ n \in Z.$ ◁

Примеры решения задач

Задача 1 Решите уравнение $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

Решение

▶ $x = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ◁

Комментарий

Уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет корни при любом значении a, поэтому всегда можно воспользоваться формулой (1):

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Для нахождения $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$ можно применить формулу

$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$. Тогда

$$\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}.$$

Задача 2 Решите уравнение $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1.$

Решение

▶ $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},$

$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Ответ: $\pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ◁

Комментарий

Сначала по формуле (1) найдем значение выражения $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$, а потом из полученного линейного уравнения найдем значение переменной x.

Задача 3 Решите уравнение $\operatorname{ctg} x = 5$.

Решение

▶ $x = \operatorname{arcctg} 5 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Ответ: $\operatorname{arcctg} 5 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ◁

Комментарий

Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ имеет корни при любом значении a, поэтому всегда можно воспользоваться формулой (2):

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Учитывая, что $\operatorname{arcctg} 5$ не является табличным значением (см. табл. 19, приведенную на с. 156), полученная формула дает окончательный ответ.

Решение тригонометрических уравнений, отличающихся от простейших

Как правило, решение тригонометрических уравнений сводится к решению простейших уравнений с помощью преобразований тригонометрических выражений, разложения на множители и замены переменных.

Замена переменных при решении тригонометрических уравнений

Если в уравнение, неравенство или тождество переменная входит в одном и том же виде, то удобно соответствующее выражение с переменной обозначить одной буквой (новой переменной).

Задача 1 Решите уравнение $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$.

Решение

▶ Пусть $\sin x = t$, тогда получаем:

$$2t^2 - 7t + 3 = 0.$$

Отсодa $t_1 = 3$; $t_2 = \frac{1}{2}$.

1. При $t = 3$ имеем $\sin x = 3$ — уравнение не имеет корней, поскольку $|3| > 1$.
2. При $t = \frac{1}{2}$ имеем $\sin x = \frac{1}{2}$, тогда $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n$,

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \; n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ◁

Комментарий

Анализируя вид этого уравнения, замечаем, что в его запись входит только одна тригонометрическая функция $\sin x$. Поэтому удобно ввести новую переменную $\sin x = t$.

После решения квадратного уравнения необходимо выполнить обратную замену и решить полученные простейшие тригонометрические уравнения.

Замечание. Записывая решения задачи 1, можно при введении замены $\sin x = t$ учесть, что $|\sin x| \leqslant 1$, и записать ограничения $|t| \leqslant 1$, а далее заметить, что один из корней $t = 3$ не удовлетворяет условию $|t| \leqslant 1$, и после этого обратную замену выполнять только для $t = \frac{1}{2}$.

При поиске плана решения более сложных тригонометрических уравнений можно воспользоваться таким ориентиром:

1. ***Пробуем привести все тригонометрические функции к одному аргументу.***

2. ***Если удалось привести к одному аргументу, то пробуем все тригонометрические выражения привести к одной функции.***

3. ***Если к одному аргументу удалось привести, а к одной функции - нет, тогда пробуем привести уравнение к однородному.***

4. ***В других случаях переносим все члены в одну сторону и пробуем получить произведение ил используем специальные приемы решения.***

Решение тригонометрических уравнений приведением к одной функции

Задача Решите уравнение $\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{ctg} x = 3$.

Решение

▶ $\operatorname{tg} x + \frac{2}{\operatorname{tg} x} = 3$. Замена $\operatorname{tg} x = t$ дает уравнение $t + \frac{2}{t} = 3$.

При $t \neq 0$ получаем равносильное уравнение $t^2 - 3t + 2 = 0$.

Отсюда $t_1 = 1$, $t_2 = 2$.

Выполняем обратную замену:

1. При $t = 1$ имеем $\operatorname{tg} x = 1$, тогда
$$x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n,$$
$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$
2. При $t = 2$ имеем $\operatorname{tg} x = 2$, тогда
$$x = \operatorname{arctg} 2 + \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;
$\operatorname{arctg} 2 + \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Комментарий

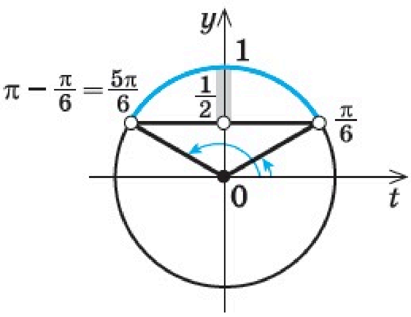
Все аргументы уже одинаковые (x), поэтому приводим все тригонометрические выражения к одной функции $\operatorname{tg} x$ (учитываем, что
$$\left.\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right).$$

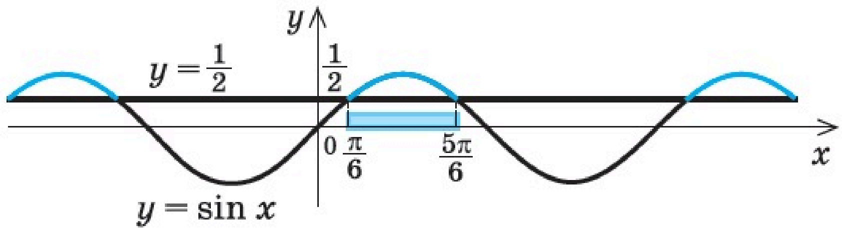
В полученное уравнение переменная входит в одном и том же виде $\operatorname{tg} x$, поэтому удобно выполнить замену $\operatorname{tg} x = t$.

Решение простейших тригонометрических неравенств

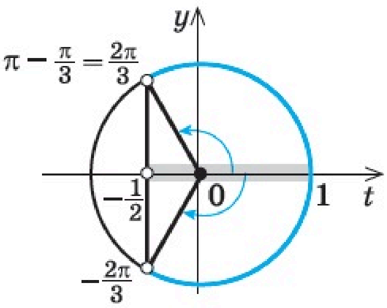
1. Примеры решения простейших тригонометрических неравенств

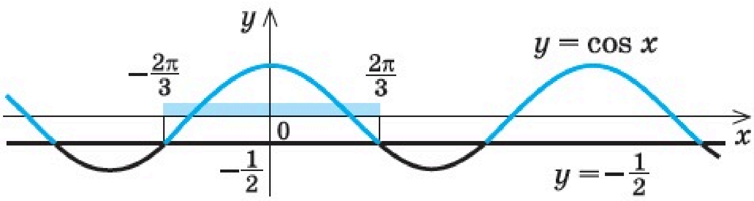
с помощью единичной окружности	с помощью графиков



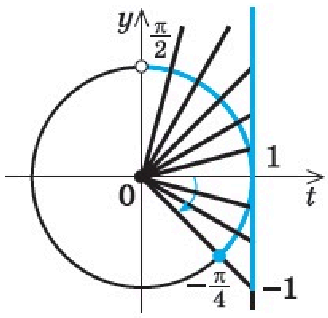


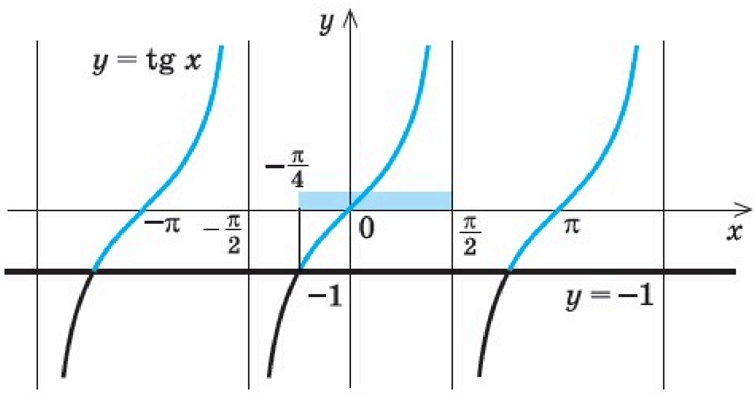
$\sin x > \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{\pi}{6}+2\pi k < x < \frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k \in Z$



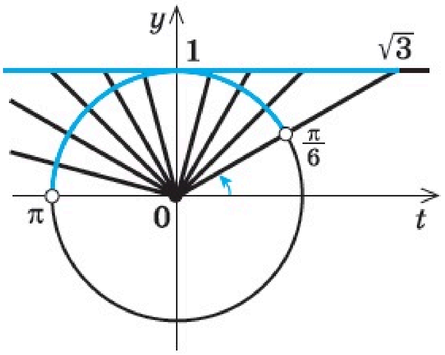


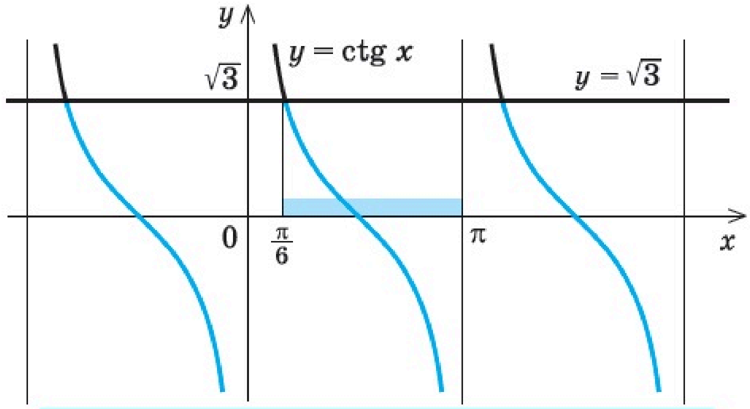
$\cos x > -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k < x < \frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k \in Z$





$\text{tg}\,x \geqslant -1$ $\qquad$ $-\frac{\pi}{4}+\pi k \leqslant x < \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k \in Z$





$\operatorname{ctg} x < \sqrt{3}$ $\quad \frac{\pi}{6} + \pi k < x < \pi + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$

Способы решения более сложных тригонометрических неравенств

а) **Использование равносильных преобразований** и, в частности, *сведение тригонометрического неравенства к алгебраическому неравенству по схеме*: 1) *к одному аргументу*, 2) *к одной функции*, 3) *замена переменной* (аналогично схеме решения тригонометрических уравнений, приведенной на с. 249) *и последующее решение полученных простейших тригонометрических неравенств.*

б) **Использование метода интервалов**

(*после сведения неравенства к виду* $f(x) \gtrless 0$) *по схеме:*

1) **Найти ОДЗ неравенства.**
2) **Найти** общий период (если он существует) для всех функций, входящих в неравенство, то есть **период функции $f(x)$.**
3) **Найти нули функции: $f(x) = 0$.**
4) **Отметить нули функции на ОДЗ на одном периоде и найти знак функции $f(x)$ в каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ** (на одном периоде).
5) **Записать ответ**, учитывая знак заданного неравенства и период функции $f(x)$.

Решение простейших тригонометрических неравенств в общем виде	
Значения a	Решение
1. Неравенство $\sin x > a$	
$-1 \leqslant a < 1$	$\arcsin a + 2\pi k < x < \pi - \arcsin a + 2\pi k$, где k — любое целое число ($k \in \mathbf{Z}$).
$a \geqslant 1$	Решений нет.
$a < -1$	x — любое действительное число.
2. Неравенство $\sin x \geqslant a$	
$-1 < a < 1$	$\arcsin a + 2\pi k \leqslant x \leqslant \pi - \arcsin a + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.
$a > 1$	Решений нет.
$a = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.
$a \leqslant -1$	x – любое действительное число.
3. Неравенство $\sin x < a$	
$-1 < a \leqslant 1$	$-\pi - \arcsin a + 2\pi k < x < \arcsin a + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.
$a \leqslant -1$	Решений нет.
$a > 1$	x — любое действительное число.
4. Неравенство $\sin x \leqslant a$	
$-1 < a < 1$	$-\pi - \arcsin a + 2\pi k \leqslant x \leqslant \arcsin a + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.
$a < -1$	Решений нет.
$a = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.
$a \geqslant 1$	x — любое действительное число.

5. Неравенство $\cos x > a$	
$-1 \leqslant a < 1$	$-\arccos a + 2\pi k < x < \arccos a + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$
$a \geqslant 1$	Решений нет.
$a < -1$	x — любое действительное число.
6. Неравенство $\cos x \geqslant a$	
$-1 < a < 1$	$-\arccos a + 2\pi k \leqslant x \leqslant \arccos a + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$
$a > 1$	Решений нет.
$a = 1$	$x = 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$
$a \leqslant -1$	x — любое действительное число.
7. Неравенство $\cos x < a$	
$-1 < a \leqslant 1$	$\arccos a + 2\pi k < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$
$a > 1$	x — любое действительное число.
$a \leqslant -1$	Решений нет.
8. Неравенство $\cos x \leqslant a$	
$-1 < a < 1$	$\arccos a + 2\pi k \leqslant x \leqslant 2\pi - \arccos a + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$
$a < -1$	Решений нет.
$a = -1$	$x = \pi + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$
$a \geqslant 1$	x — любое действительное число.
9. Неравенство $\operatorname{tg} x > a$	
a — любое действительное число ($a \in \boldsymbol{R}$)	$\operatorname{arctg} a + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$

10. Неравенство tg $x \geqslant a$	
$a \in \boldsymbol{R}$	$\operatorname{arctg} a+\pi k \leqslant x<\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$
11. Неравенство tg $x < a$	
$a \in \boldsymbol{R}$	$-\frac{\pi}{2}+\pi k<x<\operatorname{arctg} a+\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$
12. Неравенство tg $x \leqslant a$	
$a \in \boldsymbol{R}$	$-\frac{\pi}{2}+\pi k<x \leqslant \operatorname{arctg} a+\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$
13. Неравенство ctg $x > a$	
$a \in \boldsymbol{R}$	$\pi k<x<\operatorname{arcctg} a+\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$
14. Неравенство ctg $x \geqslant a$	
$a \in \boldsymbol{R}$	$\pi k<x \leqslant \operatorname{arcctg} a+\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$

15. Неравенство ctg $x < a$	
$a \in \boldsymbol{R}$	$\operatorname{arcctg} a+\pi k<x<\pi+\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$
16. Неравенство ctg $x \leqslant a$	
$a \in \boldsymbol{R}$	$\operatorname{arcctg} a+\pi k \leqslant x<\pi+\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$