Линейные уравнения

Линейным уравнением относительно переменной x называется уравнение первой степени

$$kx + b = 0\ , \qquad (1)$$

где k и b – произвольные вещественные числа.

В случае $k \neq 0$ уравнение (1) имеет **единственное решение** при любом значении b:

$$x = -\frac{b}{k}.$$

В случае, когда $k = 0,\quad b \neq 0,$ уравнение (1) **решений не имеет**.

В случае, когда $k = 0,\quad b = 0,$ **решением** уравнения (1) **является любое число**

$$x \in (-\infty; +\infty).$$

Линейные неравенства

Линейным неравенством относительно переменной x называется неравенство, принадлежащее к одному из следующих типов:

$$kx + b \geq 0,$$
$$kx + b > 0,$$
$$kx + b \leq 0,$$
$$kx + b < 0,$$

где k и b – произвольные вещественные числа.

Решая линейные, да и не только линейные, неравенства, следует помнить, что

> при умножении или делении неравенства на **положительное** число знак неравенства **сохраняется**,

а

при умножении или делении неравенства на **отрицательное** число знак неравенства **меняется на противоположный**.

В соответствии с этим решение линейных неравенств, в зависимости от значений коэффициентов k и b, представлено в следующей Таблице 1.

Таблица 1. – Решение неравенств первой степени (линейных неравенств)

	$kx+b\geq 0$	$kx+b>0$	$kx+b\leq 0$	$kx+b<0$
$k>0$	Знак неравенства сохраняется			
	$x\geq -\frac{b}{k}$	$x>-\frac{b}{k}$	$x\leq -\frac{b}{k}$	$x<-\frac{b}{k}$
$k=0,$ $b<0$	$\varnothing$	$\varnothing$	$x\in(-\infty;+\infty).$	$x\in(-\infty;+\infty).$
$k=0,$ $b=0$	$x\in(-\infty;+\infty).$	$\varnothing$	$x\in(-\infty;+\infty).$	$\varnothing$
$k=0,$ $b>0$	$x\in(-\infty;+\infty).$	$x\in(-\infty;+\infty).$	$\varnothing$	$\varnothing$
$k<0$	Знак неравенства меняется на противоположный			
	$x\leq -\frac{b}{k}$	$x<-\frac{b}{k}$	$x\geq -\frac{b}{k}$	$x>-\frac{b}{k}$

$kx+b\geq 0$	$kx+b>0$	$kx+b\leq 0$	$kx+b<0$
$k>0$ Знак неравенства сохраняется			
$x\geq -\frac{b}{k}$	$x>-\frac{b}{k}$	$x\leq -\frac{b}{k}$	$x<-\frac{b}{k}$
$k=0,\ \ b<0$			
$\varnothing$	$\varnothing$	$x\in(-\infty;+\infty).$	$x\in(-\infty;+\infty).$
$k=0,\ \ b=0$			
$x\in(-\infty;+\infty).$	$\varnothing$	$x\in(-\infty;+\infty).$	$\varnothing$
$k=0,\ \ b>0$			
$x\in(-\infty;+\infty).$	$x\in(-\infty;+\infty).$	$\varnothing$	$\varnothing$
$k<0$ Знак неравенства меняется на противоположный			

$x \le -\frac{b}{k}$	$x < -\frac{b}{k}$	$x \ge -\frac{b}{k}$	$x > -\frac{b}{k}$

$k > 0$

Знак неравенства сохраняется

Неравенство:

$$kx + b \ge 0$$

Решение неравенства:

$$x \ge -\frac{b}{k}$$

Неравенство:

$$kx + b > 0$$

Решение неравенства:

$$x > -\frac{b}{k}$$

Неравенство:

$$kx + b \le 0$$

Решение неравенства:

$$x \le -\frac{b}{k}$$

Неравенство:

$$kx + b < 0$$

Решение неравенства:

$$x < -\frac{b}{k}$$

$k = 0, \quad b < 0$

Неравенство:

$$kx + b \geq 0$$

Решение неравенства:

$$\varnothing$$

Неравенство:

$$kx + b > 0$$

Решение неравенства:

$$\varnothing$$

Неравенство:

$$kx + b \leq 0$$

Решение неравенства:

$$x \in (-\infty; +\infty).$$

Неравенство:

$$kx + b < 0$$

Решение неравенства:

$$x \in (-\infty; +\infty).$$

$$k = 0, \quad b = 0$$

Неравенство:

$$kx + b \geq 0$$

Решение неравенства:

$$x \in (-\infty; +\infty).$$

Неравенство:

$$kx + b > 0$$

Решение неравенства:

$$\varnothing$$

Неравенство:

$$kx + b \leq 0$$

Решение неравенства:

$$x \in (-\infty; +\infty).$$

Неравенство:

$$kx + b < 0$$

Решение неравенства:

$$\varnothing$$

$$k = 0, \quad b > 0$$

Неравенство:

$$kx + b \geq 0$$

Решение неравенства:

$$x \in (-\infty; +\infty).$$

Неравенство:

$$kx + b > 0$$

Решение неравенства:

$$x \in (-\infty; +\infty).$$

Неравенство:

$$kx + b \leq 0$$

Решение неравенства:

$$\varnothing$$

Неравенство:

$$kx + b < 0$$

Решение неравенства:

$$\varnothing$$

$$k < 0$$

Знак неравенства меняется на противоположный

Неравенство:

$$kx + b \geq 0$$

Решение неравенства:

$$x \leq -\frac{b}{k}$$

Неравенство:

$$kx + b > 0$$

Решение неравенства:

$$x < -\frac{b}{k}$$

Неравенство:

$$kx + b \leq 0$$

Решение неравенства:

$$x \geq -\frac{b}{k}$$

Неравенство:

$$kx + b < 0$$

Решение неравенства:

$$x > -\frac{b}{k}$$

Системы линейных неравенств

Рассмотрим ***решение систем линейных неравенств*** на примерах.

Пример 1. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 2x-3 \ge 0, \\ -3x+11>0 \end{cases}$$

Решение. Решим каждое из неравенств системы:

$$\begin{cases} 2x-3 \ge 0, \\ -3x+11>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \ge 3, \\ -3x>-11, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{3}{2}, \\ x<\frac{11}{3}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-3 \ge 0, \\ -3x+11>0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x \ge 3, \\ -3x>-11, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge \frac{3}{2}, \\ x<\frac{11}{3}. \end{cases}$$

Изобразив на одной координатной прямой (рис. 1) оба точечных множества, составляющих последнюю систему, получаем ответ примера.

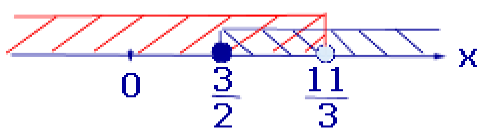

Рис.1

Ответ: $x \in \left[\frac{3}{2}; \frac{11}{3}\right)$

Пример 2. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 5x+4<0, \\ -2x-7\ge 0. \end{cases}$$

Решение. Решим каждое из неравенств системы:

$$\begin{cases} 5x+4<0, \\ -2x-7\ge 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x<-4, \\ -2x\ge 7, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-\dfrac{4}{5}, \\ x\le -\dfrac{7}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x+4<0, \\ -2x-7\ge 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x<-4, \\ -2x\ge 7, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<-\dfrac{4}{5}, \\ x\le -\dfrac{7}{2}. \end{cases}$$

Изобразив на одной координатной прямой (рис. 2) оба точечных множества, составляющих последнюю систему, получаем ответ примера.

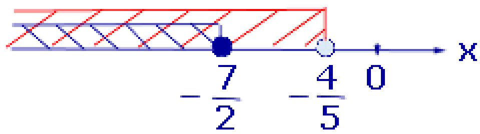

Рис.2

Ответ: $x\in\left(-\infty;-\dfrac{7}{2}\right]$

Пример 3. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 6x-7>0, \\ 4x+13<0. \end{cases}$$

Решение. Решим каждое из неравенств системы:

$$\begin{cases} 6x - 7 > 0, \\ 4x + 13 < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x > 7, \\ 4x < -13, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{7}{6}, \\ x < -\dfrac{13}{4}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x - 7 > 0, \\ 4x + 13 < 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x > 7, \\ 4x < -13, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > \dfrac{7}{6}, \\ x < -\dfrac{13}{4}. \end{cases}$$

Изобразив на одной координатной прямой (рис. 3) оба точечных множества, составляющих последнюю систему, получаем ответ примера

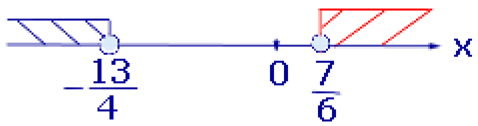

Рис.3

Ответ: $\varnothing$