Выражения, содержащие знак радикала (корень), называются иррациональными.

Арифметическим корнем натуральной степени n из неотрицательного числа a называется некоторое неотрицательное число, при возведении которого в степень n получается число a.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

В записи $\sqrt[n]{a}$, «а» называется подкоренным числом, n - показателем корня или радикала.

Свойства корней n-ой степени при $\mathrm{a} \geq 0$ и $b \geq 0$:

1. Корень произведения равен произведению корней

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Пример:

Вычислить $\sqrt[5]{5} \cdot \sqrt[5]{625}$

Решение:

Корень произведения равен произведению корней и наоборот: произведение корней с одинаковым показателем корня равно корню из произведения подкоренных выражений

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\sqrt[5]{5} \cdot \sqrt[5]{625} = \sqrt[5]{5 \cdot 625} = \sqrt[5]{5 \cdot 5^4} = \sqrt[5]{5^5} = 5$$

Ответ: 5

2. Корень из дроби – это отдельно корень из числителя, отдельно из знаменателя

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, при $b \neq 0$

3. При возведении корня в степень, в эту степень возводится подкоренное выражение

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$

4. Если $a \geq 0$ и n, k - натуральные числа, больше 1, то справедливо равенство.

$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}$

5. Если показатели корня и подкоренного выражения умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то значение корня не изменится.

$\sqrt[n \cdot m]{a^{k \cdot m}} = \sqrt[n]{a^k}$

6. Корень нечетной степени можно извлекать из положительных и отрицательных чисел, а корень четной степени – только из положительных.

7. Любой корень можно представить в виде степени с дробным (рациональным) показателем.

$\sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}$

Пример:

Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{9 \cdot \sqrt[11]{c}}}{\sqrt[11]{2048 \cdot \sqrt{c}}}$ при $c > 0$

Решение:

Корень произведения равен произведению корней

$$\frac{\sqrt{9\cdot\sqrt[11]{c}}}{\sqrt[11]{2048\cdot\sqrt{c}}}=\frac{\sqrt{9}\cdot\sqrt{\sqrt[11]{c}}}{\sqrt[11]{2048}\cdot\sqrt[11]{\sqrt{c}}}$$

Корни из чисел мы можем извлечь сразу

$$\frac{\sqrt{9}\cdot\sqrt{\sqrt[11]{c}}}{\sqrt[11]{2048}\cdot\sqrt[11]{\sqrt{c}}}=\frac{3\cdot\sqrt{\sqrt[11]{c}}}{2\cdot\sqrt[11]{\sqrt{c}}}$$

Далее применим формулу

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[n\cdot k]{a}$$

$$\frac{3\cdot\sqrt{\sqrt[11]{c}}}{2\cdot\sqrt[11]{\sqrt{c}}}=\frac{3\cdot\sqrt[22]{c}}{2\cdot\sqrt[22]{c}}$$

Корни 22 степени из c мы сокращаем и получаем $\frac{3}{2}=1,5$

Ответ: $1,5$

Если у радикала с четным показателем степени мы не знаем знак подкоренного выражения, то при извлечении корня выходит модуль подкоренного выражения.

Пример:

Найдите значение выражения $\sqrt{(c-7)^2}+\sqrt{(c-9)^2}$ при $7<c<9$

Решение:

Если над корнем не стоит показатель, то это означает, что мы работаем с квадратным корнем. Его показатель равен двум, т.е. четный. Если у радикала с четным показателем степени мы не знаем знак подкоренного выражения, то при извлечении корня выходит модуль подкоренного выражения.

$$\sqrt{(c-7)^2} + \sqrt{(c-9)^2} = |c-7| + |c-9|$$

Определим знак выражения, стоящего под знаком модуля, исходя из условия $7 < c < 9$

Для проверки возьмем любое число из заданного промежутка, например, 8

Проверим знак каждого модуля

$8 - 7 > 0$

$8 - 9 < 0$, при раскрытии модуля пользуемся правилом: модуль положительного числа равен самому себе, отрицательного числа - равен противоположному значению. Так как у второго модуля знак отрицательный, при раскрытии меняем знак перед модулем на противоположный.

$$|c-7| + |c-9| = (c-7) - (c-9) = c - 7 - c + 9 = 2$$

Ответ: 2

Свойства степеней с рациональным показателем:

1. При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание остается прежним, а показатели складываются.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

2. При возведении степени в степень основание остается прежним, а показатели перемножаются

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

3. При возведении в степень произведения в эту степень возводится каждый множитель

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

4. При возведении в степень дроби в эту степень возводиться числитель и знаменатель

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$