Исследование функций

Задание 12 первой части Профильного ЕГЭ по математике — это нахождение точек максимума и минимума функции, а также наибольших и наименьших значений функции с помощью производной.

Вот какие типы задач могут встретиться в этом задании:

Нахождение точек максимума и минимума функций

Исследование сложных функций

Нахождение наибольших и наименьших значений функций на отрезке

Нахождение точек максимума и минимума функций

1. Найдите точку максимума функции $y=-\frac{x^2+289}{x}.$

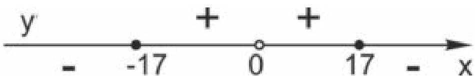
Найдем производную функции.

$$y'=-\left(\frac{x^2+289}{x}\right)'=-\left(x+\frac{289}{x}\right)'=-\left(1-\frac{289}{x^2}\right)=\frac{289-x^2}{x^2}.$$

Приравняем производную к нулю. Получим:

$$x^2=289\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=17,\\x=-17.\end{array}\right.$$

Исследуем знаки производной.



В точке $x = 17$ производная $y'(x)$ меняет знак с «плюса» на «минус».

Значит, $x = 17$ — точка максимума функции $y(x).$

Ответ: 17.

2. Найдите точку минимума функции $y = 2x^2 - 5x + lnx - 3.$

Найдем производную функции.

$$y' = 4x - 5 + \frac{1}{x}.$$

Приравняем производную к нулю.

$$4x - 5 + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = \frac{1}{4}. \end{array} \right.$$

Определим знаки производной.

В точке $x=1$ производная $y'(x)$ меняет знак с «минуса» на «плюс».

Значит, $x=1$ — точка минимума функции $y(x).$

Ответ: 1.

Исследование сложных функций

3. Найдите точку максимума функции $y=2^{5-8x-x^2}.$

Перед нами сложная функция $y=2^{5-8x-x^2}.$ Возможно, вы знаете формулы производной сложной функции. Но вообще-то их изучают на первом курсе вуза, поэтому мы решим задачу более простым способом.

Так как функция $y=2^t$ монотонно возрастает, точка максимума

функции $y=2^{5-8x-x^2}$ будет при том же x_0, что и точка максимума

функции $t\left(x\right)=5-8x-x^2.$ А ее найти легко.

$t'\left(x\right)=-8-2x;$

$t'\left(x\right)=0$ при $x=-4$. В точке $x=-4$ производная $t'\left(x\right)$ меняет знак с

«плюса» на «минус». Значит, $x=-4$ — точка максимума функции $t\left(x\right)$

.

Заметим, что точку максимума функции $t\left(x\right)=5-8x-x^2$ можно найти и без производной.

Графиком функции $t\left(x\right)$ является парабола ветвями вниз, и

наибольшее значение $t\left(x\right)$ достигается в вершине параболы, то есть

при $x=-\frac{8}{2}=-4.$

Ответ: - 4.

4. Найдите абсциссу точки максимума функции $y=\sqrt{4-4x-x^2}.$

Напомним, что абсцисса — это координата по $X.$

Снова сложная функция. Применяем тот же прием, что и в предыдущей задаче.

Так как функция $y=\sqrt{z}$ монотонно возрастает, точка максимума

функции $y=\sqrt{4-4x-x^2}$ является и точкой максимума функции

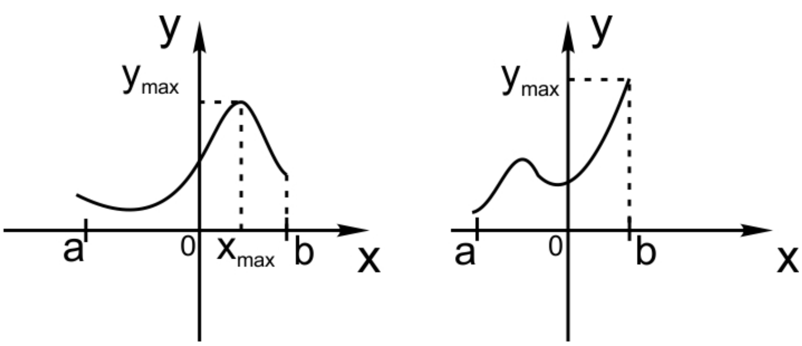
$t\left(x\right)=4-4x-x^2.$

Это вершина квадратичной параболы $t\left(x\right)=4-4x-x^2;x_0=\frac{-4}{2}=-2.$

Нахождение наибольших и наименьших значений функций на отрезке

5. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 4$ *на отрезке* $[-2; 0]$.

Мы помним, что наибольшее значение функции на отрезке может достигаться либо в точке максимума, либо на конце отрезка. Эти случаи показаны на рисунке.



Будем искать точку максимума функции $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 4$ с помощью производной. Найдем производную и приравняем ее к нулю.

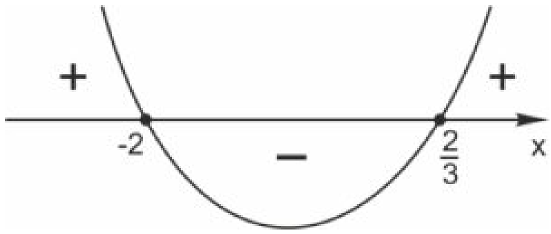
$y' = 3x^2 + 4x - 2;$

$y' = 0;$

$3x^2 + 4x - 4 = 0;$

$D = 64; x = \frac{-4 \pm 8}{6}; x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = -2.$

Найдем знаки производной.



В точке $x = -2$ производная равна нулю и меняет знак с "+" на "-".

Значит, x = - 2 — точка максимума функции $y(x)$. Поскольку при $x \in [-2; 0]$ функция $y(x)$ убывает, $y_{max}(x) = y(-2) = 12.$ В этой задаче значение функции на концах отрезка искать не нужно.

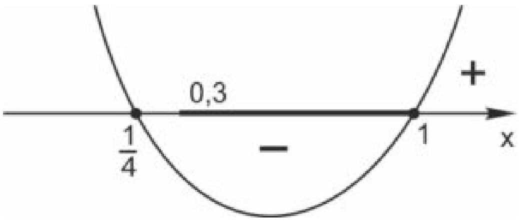
Ответ: 12.

6. Найдите наименьшее значение функции $y = 4x^2 - 10x + 2lnx - 5$ *на отрезке* $[0,3;3].$

Найдем производную функции $y = 4x^2 - 10x + 2lnx - 5$ и приравняем ее к нулю.

$y'(x) = 8x - 10 + \frac{2}{x}; y'(x) = 0$ при $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{4}.$

Найдем знаки производной.



Точка $x_1 = 1$ — точка минимума функции $y(x)$. Точка $x_2 = \frac{1}{4}$ не лежит на отрезке $[0,3;1].$ Поэтому

$y(0,3) > y(1)$ и $y(3) > y(1)$. Значит, наименьшее значение функции на отрезке $[0,3;1]$ достигается при $x = 1.$ Найдем это значение.

$$y_{min}(x) = y(1) = 4 - 10 - 5 = -11.$$

Ответ: -11.

7. Найдите наименьшее значение функции $y = 9x - \ln(9x) + 3$ *на отрезке* $\left[\frac{1}{18}; \frac{5}{18}\right]$.

Иногда перед тем, как взять производную, формулу функции полезно упростить.

$$y = 9x - \ln(9x) + 3 = 9x - \ln 9 - \ln x + 3.$$

Мы применили формулу для логарифма произведения.

$y'(x) = 9 - \frac{1}{x} = \frac{9x-1}{x}; y' = 0$ при $x = \frac{1}{9}$.

Если $0 < x < \frac{1}{9}$, то $y'(x) < 0.$ Если $x > \frac{1}{9}$, то $y'(x) > 0.$

Значит, $x = \frac{1}{9}$ — точка минимума функции $y(x)$. В этой точке и достигается наименьшее значение функции на отрезке $\left[\frac{1}{18}; \frac{5}{18}\right]$.

$y_{min}(x) = y\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 3 = 4.$

Ответ: 4.

8. Найдите наибольшее значение функции

$y(x) = 14x - 7tgx - 3,5\pi + 11$ *на отрезке* $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

Найдем производную функции $y(x) = 14x - 7tgx - 3,5\pi + 11.$

$y'(x) = 14 - \frac{7}{cos^2x}.$

Приравняем производную к нулю: $14 - \frac{7}{cos^2x} = 0.$

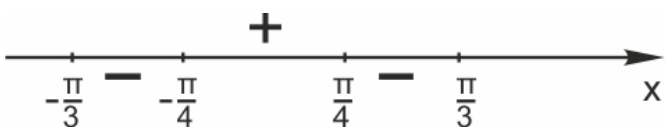
$cos^2x = \frac{1}{2}.$

$cos^2x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Поскольку $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right], y'(x) = 0,$ если $x = \pm\frac{\pi}{4}.$

Найдем знаки производной на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right].$

$y'(0) = 14 - 7 > 0,$

$y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = y'\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 14 - 28 < 0.$



При $x = \frac{\pi}{4}$ знак производной меняется с «плюса» на «минус». Значит, $x = \frac{\pi}{4}$ — точка максимума функции $y(x).$

Мы нашли точку максимума, но это еще не все. Сравним значения функции в точке максимума и на конце отрезка, то есть при $x = -\frac{\pi}{3}$ и $x = \frac{\pi}{4}.$

$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -7 + 11 = 4;$

$y\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{14\pi}{3} + 7tg\frac{\pi}{3} - 3,5\pi + 11 < 4.$

Мы нашли, что $y_{max}(x) = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -7 + 11 = 4.$

Заметим, что если вам попадется такая задача в первой части ЕГЭ по математике, то находить значение функции при $-\frac{\pi}{3}$ не обязательно. Как мы видим, это значение — число иррациональное. А в первой части ЕГЭ по математике ответом может быть только целое число или конечная десятичная дробь.

Ответ: 4.

9. Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 8e^x + 9$ *на отрезке [0;2].*

Снова сложная функция. Запишем полезные формулы:

$(e^{-x})' = -e^{-x}.$

$(e^{cx})' = e^{cx} \cdot c.$

$(e^{x+a})' = e^{x+a}.$

Найдем производную функции $y = e^{2x} - 8e^x + 9.$

$y' = 2e^{2x} - 8e^x = 2e^x(e^x - 4);$

$y' = 0,$ если $e^x = 4.$ Тогда $x = ln4.$

$0 < ln4 < 2.$ При $x = ln4$ знак производной меняется с «минуса» на «плюс». Значит, $x = ln4$ — точка минимума функции $y(x).$

$y\left(ln4\right) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 9 = 16 - 32 + 9 = -7.$

Ответ: -7.

10. Найдите наибольшее значение функции

$y = 12cosx + 6\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}\pi + 6$ *на отрезке* $\left[0; \frac{\pi}{2}.\right]$

Как всегда, возьмем производную функции и приравняем ее к нулю.

$y'\left(x\right) = -12sinx + 6\sqrt{3};$

$y' = 0; 12sinx = 6\sqrt{3};$

$sinx = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

По условию, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. На этом отрезке условие $sinx = \frac{\sqrt{3}}{2}$ выполняется только для $x = \frac{\pi}{3}.$ Найдем знаки производной слева и справа от точки $x = \frac{\pi}{3}.$

$y'\left(0\right) = 6\sqrt{3} > 0;$

$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -12 + 6\sqrt{3} < 0.$

В точке $x_0 = \frac{\pi}{3}$ производная функции меняет знак с «плюса» на «минус». Значит, точка $x_0 = \frac{\pi}{3}$ — точка максимума функции $y(x)$.

Других точек экстремума на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ функция не имеет, и наибольшее значение функции $y = 12cosx + 6\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}\pi + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ достигается при $x = \frac{\pi}{3}.$

$y_{max}(x) = y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 12.$

Ответ: 12.

11.Найдите наименьшее значение функции $y = 16x - 6sinx + 6$ *на отрезке* $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Найдем производную функции и приравняем ее к нулю.

$y'(x) = 16 - 6cosx;\ 16 - 6cosx = 0;\ cosx = \frac{8}{3} > 1$ — нет решений.

Что это значит? Производная функции $y = 16x - 6sinx + 6$ не равна нулю ни в какой точке. Это значит, что знак производной в любой точке одинаков, а функция не имеет экстремумов и является монотонной.

Поскольку $cosx \le 1$, получим, что $16 - 6cosx > 0$ для всех x, и функция $y(x) = 16x - 6sinx + 6$ монотонно возрастает при $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Значит, наименьшее свое значение функция принимает в левом конце отрезка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, то есть при $x = 0.$

$y_{min}(x) = y(0) = 6.$

Ответ: 6