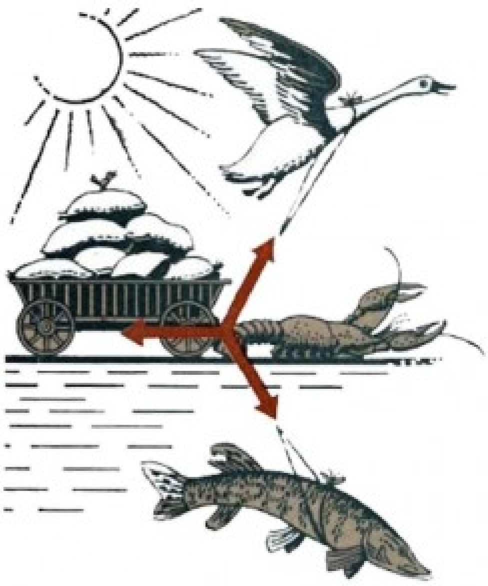
Векторы и действия над векторами

Векторы на ЕГЭ по математике. Действия над векторами

- Сложение векторов
- Вычитание векторов
- Умножение вектора на число
- Скалярное произведение векторов



Стандартное определение: «Вектор — это направленный отрезок». Обычно этим и ограничиваются знания выпускника о векторах. Кому нужны какие-то «направленные отрезки»?

А в самом деле, что такое векторы и зачем они? Прогноз погоды. «Ветер северо-западный, скорость 18 метров в секунду». Согласитесь, имеет значение и направление ветра (откуда он дует), и модуль (то есть абсолютная величина) его скорости.

Величины, не имеющие направления, называются скалярными. Масса, работа, электрический заряд никуда не направлены. Они характеризуются лишь числовым значением — «сколько килограмм» или «сколько джоулей».

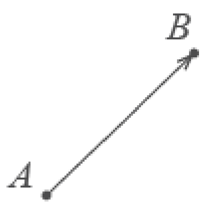
Физические величины, имеющие не только абсолютное значение, но и направление, называются векторными.

Скорость, сила, ускорение — векторы. Для них важно «сколько» и важно «куда». Например, ускорение свободного падения $\vec{g}$ направлено к поверхности Земли, а величина его равна 9,8 м/с^2. Импульс, напряженность электрического поля, индукция магнитного поля — тоже векторные величины.

Вы помните, что физические величины обозначают буквами, латинскими или греческими. Стрелочка над буквой показывает, что величина является векторной:

$\vec{a}$

Вот другой пример. Автомобиль движется из A в B. Конечный результат — его перемещение из точки A в точку B, то есть перемещение на вектор $\overrightarrow{AB}$.



Теперь понятно, почему вектор — это направленный отрезок. Обратите внимание, конец вектора — там, где стрелочка. **Длиной**

вектора называется длина этого отрезка. Обозначается: $|\vec{a}|$ или $|\overrightarrow{AB}|$.

До сих пор мы работали со скалярными величинами, по правилам арифметики и элементарной алгебры. Векторы — новое понятие. Это другой класс математических объектов. Для них свои правила.

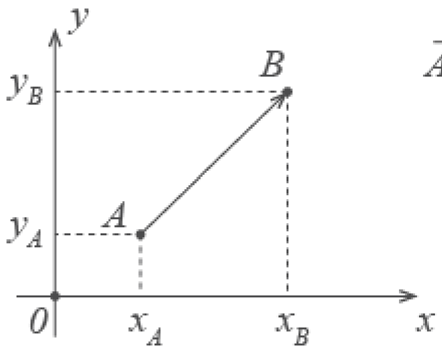
Когда-то мы и о числах ничего не знали. Знакомство с ними началось в младших классах. Оказалось, что числа можно сравнивать друг с другом, складывать, вычитать, умножать и делить. Мы узнали, что есть число единица и число ноль. Теперь мы знакомимся с векторами.

Понятия «больше» и «меньше» для векторов не существует — ведь направления их могут быть разными. Сравнивать можно только длины векторов.

А вот понятие равенства для векторов есть. **Равными** называются векторы, имеющие одинаковые длины и одинаковое направление. Это значит, что вектор можно перенести параллельно себе в любую точку плоскости. **Единичным** называется вектор, длина которого равна 1. Нулевым — вектор, длина которого равна нулю, то есть его начало совпадает с концом.

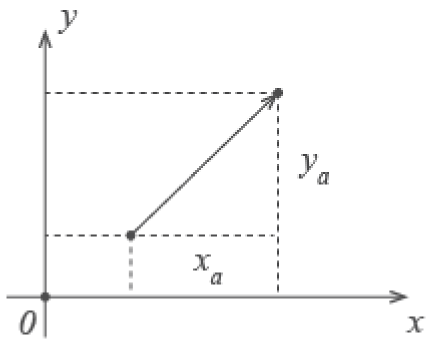
Удобнее всего работать с векторами в прямоугольной системе координат — той самой, в которой рисуем графики функций. Каждой точке в системе координат соответствуют два числа — ее координаты по x и y, абсцисса и ордината. Вектор также задается двумя координатами: $\vec{a}\,(x_a, y_a)$.

Здесь в скобках записаны координаты вектора $\vec{a}$ - по x и по y. Находятся они просто: координата конца вектора минус координата его начала.



$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\, ,\, y_B - y_A)$

Если координаты вектора заданы, его длина находится по формуле



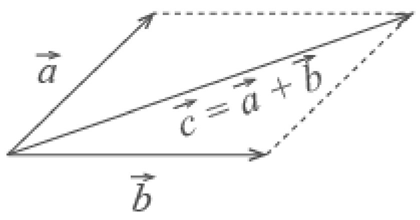
$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$

к оглавлению ▲

Сложение векторов

Для сложения векторов есть два способа.

1. Правило параллелограмма. Чтобы сложить векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, помещаем начала обоих в одну точку. Достраиваем до параллелограмма и из той же точки проводим диагональ параллелограмма. Это и будет сумма векторов. $\vec{a}$ и $\vec{b}$

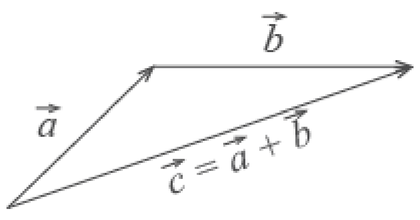


Помните басню про лебедя, рака и щуку? Они очень старались, но так и не сдвинули воз с места. Ведь векторная сумма сил, приложенных ими к возу, была равна нулю.

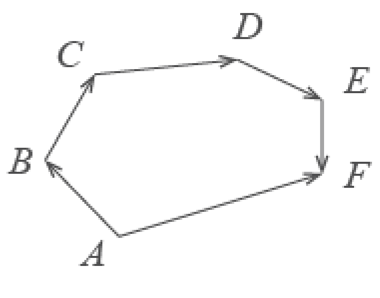
2. Второй способ сложения векторов — правило треугольника.

Возьмем те же векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. К концу первого вектора пристроим начало второго. Теперь соединим начало первого и конец второго.

Это и есть сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



По тому же правилу можно сложить и несколько векторов. Пристраиваем их один за другим, а затем соединяем начало первого с концом последнего.



$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$$

Представьте, что вы идете из пункта A в пункт B, из B в C, из C в D, затем в E и в F. Конечный результат этих действий — перемещение из A в F.

При сложении векторов $\vec{a}\,(x_a, y_a)$ и $\vec{b}\,(x_b, y_b)$ получаем:

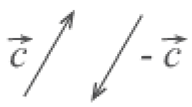
$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$;

$\vec{c}\,(x_a + x_b\,,\, y_a + y_b)$.

к оглавлению ▲

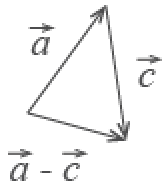
Вычитание векторов

Вектор $-\vec{c}$ направлен противоположно вектору $\vec{c}$. Длины векторов $\vec{c}$ и $-\vec{c}$ равны.



Теперь понятно, что такое вычитание векторов. Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$ - это сумма вектора $\vec{a}$ и вектора $-\vec{c}$.

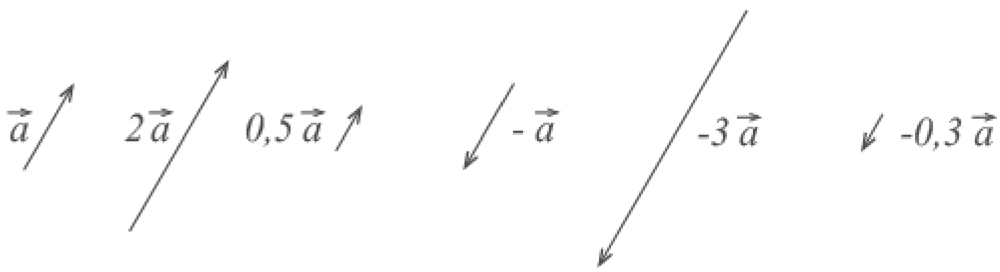
$\vec{a} - \vec{c} = \vec{a} + (-\vec{c})$



к оглавлению ▲

Умножение вектора на число

При умножении вектора $\vec{a}$ на число k получается вектор, длина которого в k раз отличается от длины $\vec{a}$. Он сонаправлен с вектором $\vec{a}$, если k больше нуля, и направлен противоположно $\vec{a}$, если k меньше нуля.



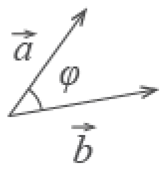
к оглавлению ▲

Скалярное произведение векторов

Векторы можно умножать не только на числа, но и друг на друга.

Скалярным произведением векторов называется произведение длин векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$



Обратите внимание — перемножили два вектора, а получился скаляр, то есть число. Например, в физике механическая работа равна скалярному произведению двух векторов — силы и перемещения:

$$A = \vec{F}\ \vec{S} = F\,S\cos\varphi.$$

Если векторы перпендикулярны, их скалярное произведение равно нулю. А вот так скалярное произведение выражается через координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b.$$

Из формулы для скалярного произведения можно найти угол между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2}}.$$

Эта формула особенно удобна в стереометрии. Например, в задаче 14 Профильного ЕГЭ по математике нужно найти угол между скрещивающимися прямыми или между прямой и плоскостью. Часто векторным методом задача 14 решается в несколько раз быстрее, чем классическим.