Иррациональные уравнения и неравенства.

Определение. Иррациональным называется уравнение, в котором неизвестное (переменная) содержится под знаком корня или под знаком операции возведения в рациональную (дробную) степень.

Для решения иррациональных уравнений обычно используются следующие приемы:

1)возведение в соответствующую степень обе части уравнения;

2) введение новой переменной;

3) сведение к системе уравнений;

4) применение свойств функций, входящих в уравнение.

При решении иррациональных уравнений необходима проверка всех найденных корней путем их подстановки в исходное уравнение или нахождение ОДЗ и следующий анализ корней (при решении методом приведения к равносильной смешанной системе уравнений и неравенств необходимость в этом отпадает).

Простейшим иррациональным уравнением является уравнение вида:

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x),$$

при решении которого важную роль играет четность или нечетность ***n***.

Если ***n***- нечетное, то данное уравнение равносильно уравнению

$$f(x) = (g(x))^n.$$

Если ***n*** - четное, то, так как корень считается арифметическим, необходимо учитывать ОДЗ (область допустимых значений): $f(x) \geq 0$. Уравнение $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ в этом случае равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x) = (g(x))^n \\ g(x) \geq 0 \end{cases}.$$

Пример 1.

Решить уравнение $\sqrt{x-3} = 5$.

Решение. Так как ***n=2*** - четное, то обе части уравнения возводим во 2ю степень:
$(\sqrt{x-3})^2 = 5^2 \Leftrightarrow x-3 = 25 \Leftrightarrow x = 28$

Ответ: 28

Пример 2.

Решить уравнение $\sqrt[3]{x^3-2x+1}=1$.

Решение. Так как в данном примере ***n=3*** - нечетное, то после возведения обеих частей уравнения в третью степень получим равносильное данному уравнение:

$$x^3-2x+1=1^3 \Leftrightarrow x^3-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{array}\right..$$

Ответ: $x_1=-\sqrt{2}, x_2=0, x_3=\sqrt{2}$.

Пример 3.

Решить уравнение $\sqrt{x+1}=2-x$.

Решение. Так как ***n=2*** - четное, то исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x+1=(2-x)^2 \\ 2-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=4-4x+x^2 \\ x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+3=0 \\ x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2} \\ x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{5-\sqrt{13}}{2}.$$

Ответ: $x=(5-\sqrt{13})/2$.

Уравнения вида $\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{g(x)}$, решаются следующим образом:

n – нечетное $\Rightarrow f(x)=g(x)$

n - четное $\Rightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)\ge 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x)=g(x) \\ g(x)\ge 0 \end{cases}$.

Пример 4.

Решить уравнение: $\sqrt[4]{5-x} = \sqrt[4]{4x+2}$

$$\begin{cases} 5-x \geq 0 \\ 4x+2 \geq 0 \\ 5-x = 4x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x \geq -0{,}5 \\ x = 0{,}6 \end{cases} \Rightarrow$$

Ответ: 0,6

Пример 5.

Решить уравнение: $\sqrt{2x+6}-\sqrt{x+1}=0$

Решение. Запишем данное уравнение в виде: $\sqrt{2x+6} = \sqrt{x+1}.$ Возводя обе части в квадрат и учитывая, что $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x+6 \geq 0 \end{cases}$ получим уравнение $2x+6=x+1$, решение которого есть $x = -5$ – не удовлетворяет выписанному условию. Значит, данное уравнение не имеет решений.

Ответ: нет решений

Если иррациональное уравнение содержит несколько радикалов. В этом случае для избавления от радикалов уравнение приходится возводить в соответствующую степень несколько раз. При этом предварительно уединяют один из радикалов так, чтобы обе части уравнения стали неотрицательными. Особое внимание следует обратить на правильное нахождение ОДЗ.

Пример 6.

Решить уравнение $\sqrt{2x-9}-\sqrt{x-3}=1$.

Решение. Запишем уравнение в виде: $\sqrt{2x-9}=1+\sqrt{x-3}$. Так как теперь обе части полученного уравнения неотрицательны, то возведем их в квадрат:

$$2x-9=1+x-3+2\sqrt{x-3} \quad \Leftrightarrow \quad x-7=\sqrt{x-3}.$$

Полученное уравнение равносильно исходному. Для его решения рассмотрим систему:

$$\begin{cases} x-7 \geq 0 \\ (x-7)^2 = 4(x-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7 \\ x^2-14x+49=4x-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7 \\ x^2-18x+61=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 7 \\ x = 9 \pm \sqrt{20} \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = 9+\sqrt{20}.$$

Ответ: $x=9+\sqrt{20}$.

Введение новой переменной в ряде случаев позволяет перейти от иррационального уравнения к рациональному уравнению.

Пример 7.

Решить уравнение $x^2+3x+4\sqrt{x^2+3x-5}=10$.

Решение. Возведение данного уравнения в квадрат привело бы к уравнению четвертой степени, что нерационально. Поэтому запишем уравнение в виде $x^2+3x-5+4\sqrt{x^2+3x-5}=5$ и введем «новую» переменную:

$$y=\sqrt{x^2+3x-5},\ y\geq 0.$$

Получим $y^2+4y-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-5 \end{array}\right.$.

Вернемся к «старым» переменным $\sqrt{x^2+3x-5}=1$ или $\sqrt{x^2+3x-5}=-5$. Второе из полученных уравнений решений не имеет, а решения первого есть числа $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{2}$.

Ответ: $x_1=\dfrac{-3-\sqrt{33}}{2}, x_2=\dfrac{-3+\sqrt{33}}{2}$.

Иногда при решении иррационального уравнения возникает необходимость ввести не одну, а несколько «новых» переменных. Такая ситуация возникает, например, при решении уравнений, содержащих радикалы разных степеней.

Пример 8**.**

Решить уравнение $\sqrt{x-2}+\sqrt[3]{11-x}=1$.

Решение. Пусть $u=\sqrt{x-2}\geq 0$ и $v=\sqrt[3]{1-x}$. Тогда $u+v=1$. С другой стороны $u^2+v^3=x-2+11-x=9$. Получаем систему

$$\begin{cases} u+v=1 \\ u^2+v^3=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1-v \\ (1-v)^2+v^3=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1-v \\ v^3+v^2-2v-8=0 \end{cases}.$$

Решим последнее уравнение системы:

$$v^3+v^2-2v-8=0 \Leftrightarrow (v^3-8)+v(v-2)=0 \Leftrightarrow$$

$$(v-2)(v^2+2v+4+v)=0 \iff \left[\begin{array}{l} v=2 \\ v^2+3v+4=0 \end{array}\right. \iff v=2$$.

Получим, что $v=2$, а тогда $u=1-v=-1<0$. По условию $u\ge 0$, следовательно исходное уравнение решений не имеет.

Ответ: нет решений.

При решении некоторых иррациональных уравнений нахождение области допустимых значений входящих в уравнение неизвестных может существенно облегчить решение уравнения.

При решении иррациональных уравнений бывает полезно воспользоваться монотонностью функций.

Пример 10**.**

Решить уравнение $\sqrt{2(x+6)}=6-\sqrt[3]{x+6}$.

Решение. Один корень данного уравнения $x=2$ легко найти подбором. Покажем, что других корней нет. Запишем уравнение в виде $\sqrt{2(x+6)}+\sqrt[3]{x+6}=6$.

По свойству степенных функций функции $y_1(x)=\sqrt{2(x+6)}$ и $y_2(x)=\sqrt[3]{x+6}$ являются возрастающими на промежутке $[-6;\infty)$, где они обе определены. Поэтому их сумма $y(x)=\sqrt{2(x+6)}+\sqrt[3]{x+6}$ на этом промежутке также возрастает, следовательно, она принимает каждое свое значение (в том числе и 6) только один раз. Поэтому других корней нет.

Ответ: $x=2$.

Определение: Под иррациональным неравенством понимается неравенство, в котором неизвестные величины (или некоторые функции величин) находятся под знаком радикала.

Основным методом решения иррациональных неравенств является метод сведения исходного неравенства к равносильной системе неравенств или совокупности таких систем, не содержащих иррациональных выражений.

Схемы решения:

$$1)\quad \sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) < g(x), n \in N. \end{cases}$$

$$2)\quad \sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < (g(x))^{2n}, n \in N. \end{cases}$$

$$3)\quad \sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x))^{2n}; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Пример 1. Решить неравенство

$\sqrt{x-5}<1$.

Решение.

Обе части неравенства неотрицательны, можно возводить в квадрат, значит,

$\begin{cases} x-5 \geq 0, \\ x-5<1; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 5 \\ x<6; \end{cases}$ $5 \leq x < 6.$

Ответ: $[5;6)$.

Пример 2. Решить неравенство

$\sqrt{x+8}>-1$.

Решение.

Допустимые значения неравенства:

$x+8 \geq 0$, $x \geq -8$.

Левая часть неотрицательна, правая – отрицательна, т.е. неравенство выполняется при всех допустимых x.

Ответ: $[-8;+\infty)$.

Пример 3. Решить неравенство

$\sqrt{9x-20}<x$.

Решение.

Допустимые значения неравенства:

$9x-20 \geq 0, 9x \geq 20, x \geq 2\frac{2}{9}.$

Правая часть неравенства может быть отрицательной, но с учётом допустимых значений, обе части неотрицательны. Возводим в квадрат:

$$\begin{cases} x \geq 2\frac{2}{9}, \\ 9x - 20 < x^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 2\frac{2}{9}, \\ -x^2 + 9x - 20 < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 2\frac{2}{9}, \\ x < 4, x > 5; \end{cases}$$

$2\frac{2}{9} \leq x < 4, x > 5.$

Ответ: $\left[2\frac{2}{9};4\right) \cup (5;+\infty).$

Пример 4. Решить неравенство

$\sqrt{x+61} < x+5.$

Решение.

Допустимые значения неравенства:

$x + 61 \geq 0,\ x \geq -61.$

Правая часть неравенства может быть отрицательной.

Рассмотрим два случая.

1. $\begin{cases} x + 5 \geq 0, \\ \left(\sqrt{x+61}\right)^2 < (x+5)^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -5, \\ x + 61 < x^2 + 10x + 25; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -5, \\ x^2 + 9x - 36 > 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq -5, \\ x < -12, x > 3; \end{cases} \qquad x > 3.$

2. $x + 5 < 0$

В этом случае левая часть исходного неравенства неотрицательна, а правая отрицательна. Нет решений.

Ответ: $(3;+\infty).$

Пример 5. Решить неравенство

$\sqrt{x+7} > x+1.$

Решение.

Допустимые значения неравенства:

$x + 7 \geq 0, x \geq -7.$

Правая часть неравенства может быть отрицательной.

Рассмотрим два случая.

1. $\begin{cases} x + 1 \geq 0, \\ \left(\sqrt{x+7}\right)^2 > (x+1)^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -1, \\ x + 7 > x^2 + 2x + 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -1, \\ x^2 + x - 6 < 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} x \geq -1, \\ -3 < x < 2; \end{cases} \qquad -1 \leq x < 2.$$

2. $x+1<0,$ т. е. левая часть исходного неравенства неотрицательна, а правая отрицательна. Следовательно, та часть рассматриваемого участка, которая входит в область допустимых значений исходного неравенства, является его решением.

$$\begin{cases} x \geq -7, \\ x+1<0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -7, \\ x < -1; \end{cases} \quad -7 \leq x < -1.$$

Объединим ответы в первом и во втором случаях:

$-1 \leq x < 2$ или $-7 \leq x < -1.$

Ответ: $[-7;2)$.

Решать иррациональные неравенства можно, придерживаясь, например, следующего алгоритма:

1.Найти область допустимых значений заданного неравенства.

2.Руководствуясь предложениями о равносильности неравенств, решить заданное неравенство.

3.Из найденных решений отобрать значение переменной, принадлежащее области определения заданного неравенства.