

Арифметическая прогрессия в задачах ЕГЭ по математике

Арифметическая прогрессия — это последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен сумме предыдущего члена и некоторого фиксированного числа d :

$$a_{n+1} = a_n + d, (n = 1, 2, \dots).$$

Фиксированное число d называется разностью арифметической прогрессии.

Формула n -го члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

Сумма первых n членов арифметической прогрессии

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ вычисляется по формуле:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, есть

среднее арифметическое соседних: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

1. Максим решил накопить на айфон последней модели и 1 марта положил в копилку 10 рублей. С этого дня Максим ежедневно

опускает в копилку на 10 рублей больше, чем в предыдущий день. Сколько рублей будет в копилке 31 мая, после того как Максим, как обычно, положит туда деньги?

По условию, 1 марта в копилке у Максима 10 рублей.

2 марта Максим опускает в копилку на 10 рублей больше, чем в предыдущий день, то есть 20 рублей.

3 марта он добавляет еще 30 рублей,

4 марта 40 рублей,

5 марта 50 рублей.

Мы имеем дело с **арифметической прогрессией**.

В нашей прогрессии $a_1 = 10, d = 10$. В марте 31 день, в апреле 30, в

мае 31 день. Значит, $n = 31 + 30 + 31 = 92$.

31 мая Максим положит в копилку $a_{92} = a_1 + (92 - 1)d = 10 + 910 = 920$ рублей.

Всего в копилке в этот день будет $S_{92} = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot 92 = \frac{(10 + 920)}{2} \cdot 92 = 42780$ рублей.

Видите, как удобно пользоваться формулами для вычисления n -ного члена и суммы арифметической прогрессии. Намного проще, чем складывать 92 слагаемых.

2. (Задача ЕГЭ) Улитка ползет от одного дерева до другого.

Каждый день она проползает на одно и то же расстояние больше, чем в предыдущий день. Известно, что за первый и последний дни

улитка проползла в общей сложности 10 метров. Определите, сколько дней улитка потратила на весь путь, если расстояние между деревьями равно 150 метрам.

Пусть улитка проползла в первый день a_1 метров, в последний – a_n метров, причем $a_1 + a_n = 10$. Тогда за n дней она преодолела

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = 150 \quad n = 30$$

метров. Отсюда

Ответ: 30

3. (Задача ЕГЭ) Васе надо решить 434 задачи. Ежедневно он решает на одно и то же количество задач больше по сравнению с предыдущим днем. Известно, что за первый день Вася решил 5 задач. Определите, сколько задач решил Вася в последний день, если со всеми задачами он справился за 14 дней

Это обычная задача на арифметическую прогрессию. В первый день

Вася решил $a_1 = 5$ задач, в последний a_{14} задач. Запишем формулу

для суммы арифметической прогрессии: $S_{14} = \frac{(a_1 + a_{14})14}{2} = 434$. Отсюда

$$a_{14} = 57$$

4. (Задача ЕГЭ) Бригада маляров красит забор длиной 150 метров, ежедневно увеличивая норму покраски на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме бригада покрасила 75 метров забора. Определите, сколько дней бригада маляров красила весь забор.

В первый день бригада покрасила a_1 метров забора, во второй a_2 метров, в последний a_n метров.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = 150$$

По формуле суммы арифметической прогрессии:

По условию, $a_1 + a_n = 75$. Отсюда $n = 4$.

5. (Задача ОГЭ) Дана арифметическая прогрессия: -4; -2; 0... Найдите сумму первых десяти её членов.

Найдем d – разность арифметической прогрессии.

$$d = a_2 - a_1 = (-2) - (-4) = 2.$$

Найдем сумму первых 10 членов прогрессии по формуле:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

У нас $n = 10$.

$$S_{10} = \frac{2a_1 + (10-1)d}{2} \cdot 10 = \frac{-8 + 9 \cdot 2}{2} \cdot 10 = 50.$$

Задачи ЕГЭ для самостоятельного решения

1. Турист идет из одного города в другой, каждый день проходя больше, чем в предыдущий день, на одно и то же расстояние. Известно, что за первый день турист прошел 10 километров. Определите, сколько километров прошел турист за третий день, если весь путь он прошел за 6 дней, а расстояние между городами составляет 120 километров.

2. Рабочие прокладывают тоннель длиной 99 метров, ежедневно увеличивая норму прокладки на одно и то же число метров. Известно, что за первый день рабочие проложили 7 метров туннеля. Определите, сколько метров туннеля проложили рабочие в последний день, если вся работа была выполнена за 9 дней.
3. Грузовик перевозит партию щебня массой 210 тонн, ежедневно увеличивая норму перевозки на одно и то же число тонн. Известно, что за первый день было перевезено 2 тонны щебня. Определите, сколько тонн щебня было перевезено за девятый день, если вся работа была выполнена за 14 дней.
4. Вере надо подписать 640 открыток. Ежедневно она подписывает на одно и то же количество открыток больше по сравнению с предыдущим днем. Известно, что за первый день Вера подписала 10 открыток. Определите, сколько открыток было подписано за четвертый день, если вся работа была выполнена за 16 дней.

Ответы к задачам:

1. Ответ: 18
2. Ответ: 15
3. Ответ: 18
4. Ответ: 22.