Тригонометрическая функция

Функции, их исследование.

Тригонометрическая функция. Продолжаем рассматривать задачи связанные с нахождением точек максимума (минимума). Советую повторить теорию необходимую для решения задач на нахождение наибольшего (наименьшего) значения функции на интервале и на нахождение точек максимума (минимума) функции. В этой статье разберём две задачи в этой теме, рассмотрим тригонометрические функции.

Ещё раз запишем алгоритм нахождения точек максимума (минимума) функции:

1. Вычисляем производную функции.

2. Приравниваем её к нулю, решаем уравнение.

3. Полученные корни разбивают числовую ось на интервалы, отмечаем их.

4. Определяем знаки производной на этих интервалах (подставляем произвольные значения из интервалов в производную).

5. Делаем вывод.

Задача

77492. Найдите точку максимума функции y = (2x –3) cos x – 2sin x + 5

принадлежащую промежутку (0;П/2).

Найдём производную функции:

$$y' = \left((2x-3)\cos x - 2\sin x + 5\right)' =$$
$$= \left((2x-3)\cos x\right)' - (2\sin x)' + 5' =$$
$$= (2x-3)'\cos x + (\cos x)'(2x-3) - (2\sin x)' + 5' =$$
$$= 2\cos x + (-\sin x)(2x-3) - 2\cos x =$$
$$= -\sin x\,(2x-3)$$

Решаем уравнение:

$$-\sin x\,(2x-3) = 0$$

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю, и другие при этом не теряют смысла. Следовательно:

$$-\sin x = 0 \qquad \text{или} \qquad 2x - 3 = 0$$

Решаем уравнение – sin x = 0:

$$x = \pi n, n \in Z$$

В условии дан промежуток (0;П/2). Ему не принадлежит ни один из полученных корней. *Обратите внимание, что указанные границы исключены (скобки круглые).

Решаем уравнение: 2x – 3 = 0, получим x = 1,5.

Запишем данный промежуток в радианах, получим: (0;1,57), так как

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3{,}14}{2} \approx 1{,}57$$

Следовательно полученное значение принадлежит промежутку (0;П/2):

$$0 < 1{,}5 < 1{,}57$$

Конечно, нам интуитивно понятно, что полученная точка это и есть точка максимума, и казалось бы в дальнейших вычислениях и рассуждениях нет необходимости. Но любая задача данного типа должна быть решена до конца по указанному алгоритму. Это важно!

Полученное значение x разбивает данный промежуток на два других. Определим знаки производной функции, подставляя произвольные значения из полученных промежутков (0;1,5) и (1,5;1,57) в найденную производную, и изобразим на рисунке поведение функции:

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4}\left(2\cdot\frac{\pi}{4} - 3\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 3\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{3{,}14}{2} - 3\right) > 0$$

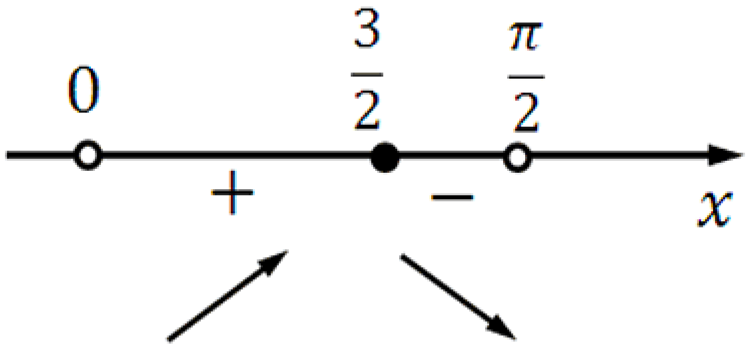
$$y'(1{,}53) = -\sin 1{,}53 \cdot (2\cdot 1{,}53 - 3) = -1(\pi - 3) = -(3{,}14 - 3) < 0$$

*В подобных случаях необязательно вычислять значения выражений. Важно установить их знаки (положительный либо отрицательный). Например, мы видим, что выражение:

(3,14/2) – 3   имеет отрицательный знак

3,14 – 3   имеет положительный знак

В целом этого достаточно для определения знака выражения.



Таким образом, в точке x = 1,5 функция меняет знак с положительного на отрицательный. Это означает, что данная точка является точкой максимума функции на заданном промежутке.

Ответ: 1,5

Задача

77493. Найдите точку минимума функции y = (0,5 – x) cos x + sin x

принадлежащую промежутку (0;П/2).

Найдём производную функции:

$$y' = \left((0{,}5 - x)\cos x + \sin x\right)' = \left((0{,}5 - x)\cos x\right)' + (\sin x)' =$$
$$= (0{,}5 - x)'\cos x + (0{,}5 - x)(\cos x)' + \cos x =$$
$$= -1 \cdot \cos x + (0{,}5 - x)(-\sin x) + \cos x =$$
$$= -\sin x\,(0{,}5 - x)$$

Решаем уравнение:

$$-\sin x\,(0{,}5 - x) = 0$$

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю, и другие при этом не теряют смысла. Следовательно:

$-\sin x = 0$ или $0{,}5 - x = 0$

Решаем уравнение – sin x = 0:

$x = \pi n, n \in Z$

В условии дан промежуток (0;П/2). Ему не принадлежит ни один из полученных корней.

Решаем уравнение: 0,5 – x = 0, получим x = 0,5.

Запишем данный промежуток в радианах: (0;1,57).

*Показано в предыдущем примере.

Следовательно полученное значение принадлежит промежутку (0;П/2):

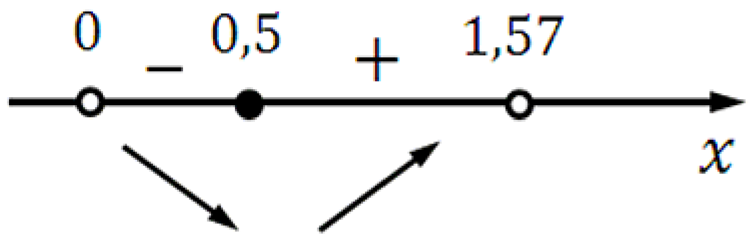
$0 < 0{,}5 < 1{,}57$

Найденное значение x разбивает данный промежуток на два других. Определим знаки производной функции, подставляя произвольные значения из полученных промежутков (0;0,5) и (0,5;1,57) в найденную производную, и изобразим на рисунке поведение функции:

$$y'(0{,}3) = -\sin 0{,}3 \cdot (0{,}5 - 0{,}3) < 0$$

$$y'(1) = -\sin 1\,(0{,}5 - 1) = -\sin 1\,(0{,}5 - 1) > 0$$

*Синус 0,3 радиана и синус 1 радиана имеют положительные знаки, так как оба эти угла лежат в пределах от 0 до 90 градусов. А мы знаем, что синусы углов лежащих в первой четверти имеют положительные значения.



Таким образом, в точке x = 0,5 функция меняет знак с отрицательного на положительный. Это означает, что данная точка является точкой минимума функции на заданном промежутке.

Ответ: 0,5

Как видите всё просто. Необходимо понимать свойства производной для исследования функций, понимать как «работать» с мерами углов, знать основы тригонометрии.