

# Самая удобная и увлекательная подготовка к ЕГЭ

ООО «Экзамер»

Тригонометрическими уравнениями называют уравнения, в которых переменная содержится под знаком тригонометрических функций. К их числу прежде всего относятся простейшие тригонометрические уравнения, т.е. уравнения вида  $\sin x = a$ ,  $\cos x = a$ ,  $\operatorname{tg} x = a$ , где  $a$  – действительное число.

Перед решением уравнений разберем некоторые тригонометрические выражения и формулы.

$$1 \text{ радиан} = \frac{180}{\pi} \approx 57 \text{ градусов}$$

$$1 \text{ градус} = \frac{\pi}{180} \text{ радиан}$$

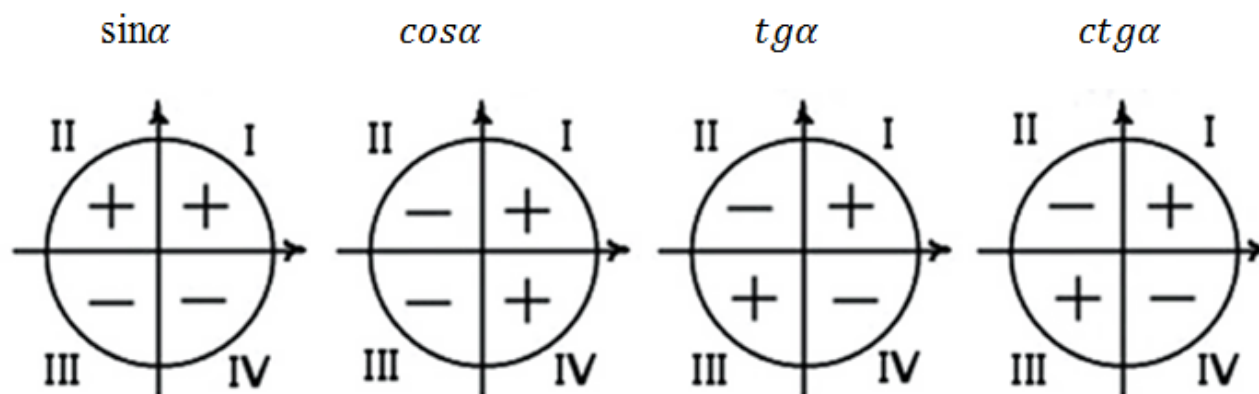
Значения тригонометрических функций некоторых углов

$\alpha$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–

Периоды повтора значений тригонометрических функций

Период повторения у синуса и косинуса  $2\pi$ , у тангенса и котангенса  $\pi$

Знаки тригонометрических функций по четвертям



Эта информация нам пригодится для использования формул приведения. Формулы приведения необходимы для понижения углов до значения от 0 до 90 градусов.

Чтобы правильно раскрыть формулы приведения необходимо помнить, что:

1. если в формуле содержатся углы  $180^\circ$  и  $360^\circ$  ( $\pi$  и  $2\pi$ ), то наименование функции не изменяется; (если же в формуле содержатся углы  $90^\circ$  и  $270^\circ$  ( $\frac{\pi}{2}$  и  $\frac{3\pi}{2}$ ), то наименование функции меняется на противоположную (синус на косинус, тангенс на котангенс и т. д.);
2. чтобы определить знак в правой части формулы (+ или -), достаточно, считая угол  $\alpha$  острым, определить знак преобразуемого выражения.

Преобразовать  $\cos(90^\circ + \alpha)$ . Прежде всего, мы замечаем, что в формуле содержится угол 90, поэтому  $\cos$  измениться на  $\sin$ .

$$\cos(90^\circ + \alpha) = \sin \alpha$$

Чтобы определить знак перед  $\sin \alpha$ , предположим, что угол  $\alpha$  острый, тогда угол  $90^\circ + \alpha$  должен оканчиваться во 2-й четверти, а косинус угла, лежащего во 2-й четверти, отрицателен. Поэтому, перед  $\sin \alpha$  нужен знак  $-$ .

$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$
 - это конечный результат преобразования

## Четность тригонометрических функций

**Косинус четная функция:**  $\cos(-t) = \cos t$

**Синус, тангенс и котангенс нечетные функции:**

$$\sin(-t) = -\sin t; \operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t; \operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg} t$$

## Тригонометрические тождества

$$1. \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$2. \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$3. \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ (Основное тригонометрическое тождество)}$$

Из основного тригонометрического тождества можно выразить формулы для нахождения синуса и косинуса

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$4. \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$5. 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$6. 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Вычислить  $\sin t$ , если  $\cos t = \frac{5}{13}$ ;  $t \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$

Найдем  $\sin t$  через основное тригонометрическое тождество. И определим знак, так как  $t \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$  -это четвертая четверть, то синус в ней имеет знак минус

$$\sin t = -\sqrt{1 - \cos^2 t} = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}$$

## Формулы двойного угла

$$1. \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$2. \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$3. \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

### Формулы суммы и разности

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$

### Формулы произведения

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

### Формулы сложения

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

Вычислить  $\sin 12 \cos 18 + \cos 12 \sin 18$

Данное выражение является синусом суммы

$$\sin 12 \cos 18 + \cos 12 \sin 18 = \sin(12 + 18) = \sin 30 = 0.5$$

Задача (Вписать в ответ число)

$$\text{Вычислить } \sin \frac{5\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}$$

Решение:

Данное выражение является синусом суммы

$$\sin \frac{5\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} = \sin \left( \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} \right) = \sin \frac{6\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

Ответ: 1

## Обратные тригонометрические функции и простейшие тригонометрические уравнения

### Арккосинус

Если,  $|a| \leq 1$ , то  $\arccos a$  – это такое число из отрезка  $[0; \pi]$ , косинус которого равен  $a$ .

$$\text{Если, } |a| \leq 1, \text{ то } \arccos a = t \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(t) = a \\ 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a, \text{ где } 0 \leq a \leq 1$$

Уравнение вида  $\cos t = a$ , если,  $|a| \leq 1$ , имеет решение

$$t = \pm \arccos a + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

### Частные случаи

$$\cos t = 1, t = 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos t = 0, t = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos t = -1, t = \pi + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

Найдите наименьший положительный корень уравнения  $\cos \frac{2\pi x}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos \frac{2\pi x}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{2\pi x}{3} = \pm \arccos \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{2\pi x}{3} = \pm \left( \pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{2\pi x}{3} = \pm \left( \pi - \frac{\pi}{6} \right) + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{2\pi x}{3} = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

Далее избавимся от всех величин, мешающих иксу. Для этого разделим обе части уравнения на  $\frac{2\pi}{3}$

$$x = \pm \frac{5\pi \cdot 3}{6 \cdot 2\pi} + \frac{2\pi \cdot 3}{2\pi} k$$

$$x = \pm 1,25 + 3k$$

Чтобы найти наименьший положительный корень, подставим вместо  $k$  целые значения

$$k = 0$$

$$x_1 = -1,25$$

$$x_2 = 1,25$$

$$k = 1$$

$$x_1 = 3 - 1,25 = 1,75$$

$$x_2 = 3 + 1,25 = 4,25$$

Нам подходит 1,25 – это и есть результат

Ответ: 1,25

## Арксинус

Если,  $|a| \leq 1$ , то  $\arcsin a$  – это такое число, из отрезка  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ , синус которого равен  $a$ .

$$\text{Если, } |a| \leq 1, \text{ то } \arcsin a = t \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = a \\ -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a, \text{ где } 0 \leq a \leq 1$$

Если,  $|a| \leq 1$ , то уравнение  $\sin t = a$  можно решить и записать двумя способами:

$$1. t_1 = \arcsin a + 2\pi k; k \in Z$$

$$t_2 = (\pi - \arcsin a) + 2\pi k; k \in Z$$

$$2. t = (-1)^n \arcsin a + \pi n; n \in Z$$

### 3. Частные случаи

$$\sin t = 0, t = \pi k; k \in Z$$

$$\sin t = 1, t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in Z$$

$$\sin t = -1, t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in Z$$

### Арктангенс

$\arctg a$  - это такое число, из отрезка  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ , тангенс которого равен  $a$ .

$$\arctg a = t \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} t = a \\ -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\arctg(-a) = -\arctg a$$

Уравнение  $\operatorname{tg} t = a$  имеет решение  $t = \arctg a + \pi k; k \in Z$