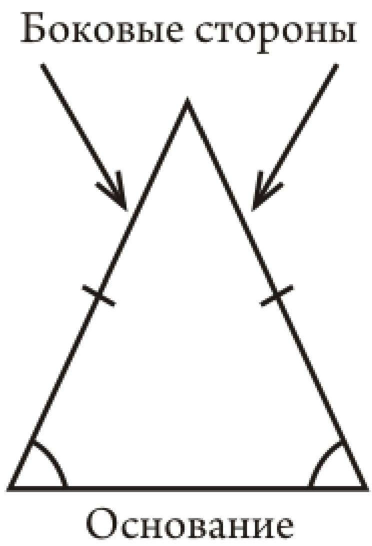
Равнобедренный треугольник - это такой треугольник, у которого две стороны равны. Равные стороны называются боковыми. Третья сторона называется основанием.



Свойства:

1. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

2. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является медианой и высотой.

3. Высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является медианой и биссектрисой.

4. Медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является высотой и биссектрисой.

5. Углы, противолежащие равным сторонам равнобедренного треугольника, всегда острые.

6. В равнобедренном треугольнике:

- биссектрисы, проведенные из вершин при основании, равны;

- высоты, проведенные из вершин при основании, равны;

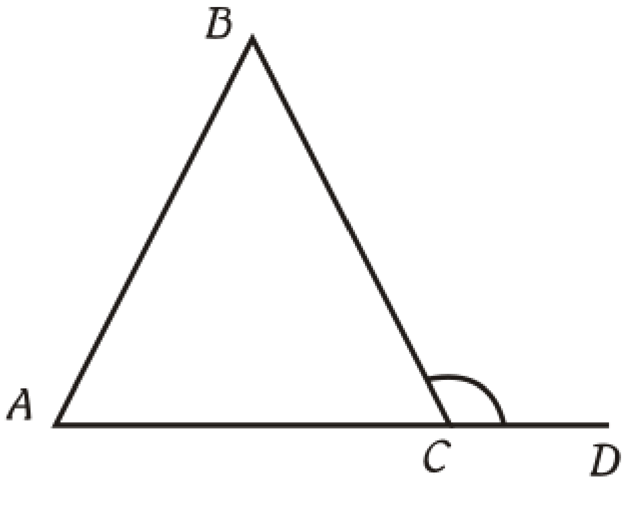
- медианы, проведенные из вершин при основании, равны.

7. Центры вписанной и описанной окружностей лежат на высоте, биссектрисе и медиане, проведенных к основанию.

8. Вписанная окружность точкой касания делит основание пополам.

Внешним углом треугольника называется угол, смежный с каким-либо углом этого треугольника.

Внешний угол треугольника равен сумме двух углов, не смежных с ним.

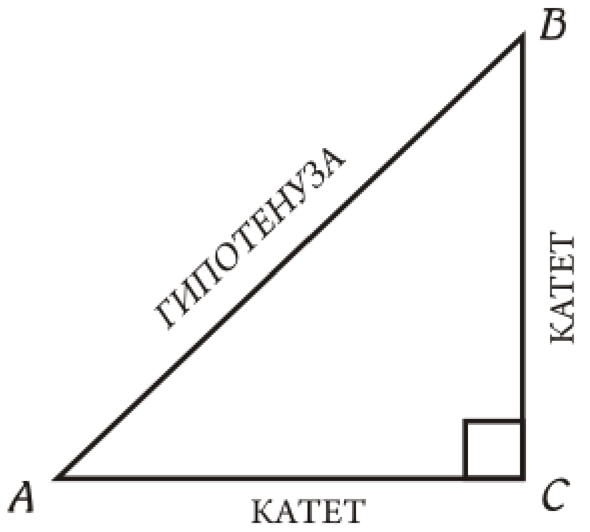


$\angle BCD$ - внешний угол треугольника ABC.

$\angle BCD = \angle A + \angle B$

Теорема Пифагора.

В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.



$\mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2$

Соотношение между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике:

В прямоугольном треугольнике ABC, с прямым углом C.

Для острого угла B: AC - противолежащий катет; BC - прилежащий катет.

Для острого угла A: BC - противолежащий катет; AC - прилежащий катет.

1. Синусом (sin) острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.
2. Косинусом (cos) острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.
3. Тангенсом (tg) острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему.

4. Котангенсом (ctg) острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к противолежащему.

Пример:

В прямоугольном треугольнике ABC для острого угла B:

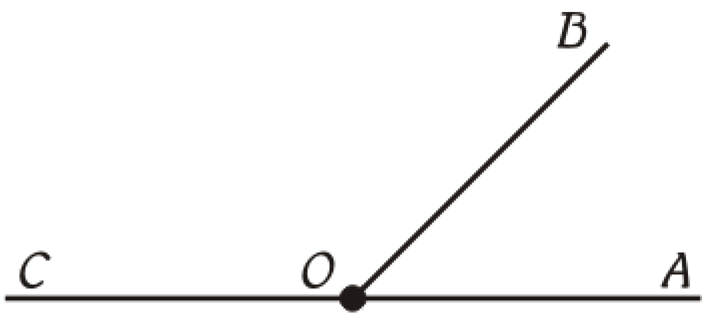
$sinB = \frac{AC}{AB}$;

$cosB = \frac{BC}{AB}$;

$tgB = \frac{AC}{BC}$;

$ctgB = \frac{BC}{AC}$.

5. В прямоугольном треугольнике синус одного острого угла равен косинусу другого острого угла.
6. Синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы острых равных углов равны.
7. Синусы смежных углов равны, а косинусы, тангенсы и котангенсы отличаются знаками: для острых углов положительные значения, для тупых углов отрицательные значения.



$sinBOA = sinBOC$;

$cosBOA = -cosBOC$;

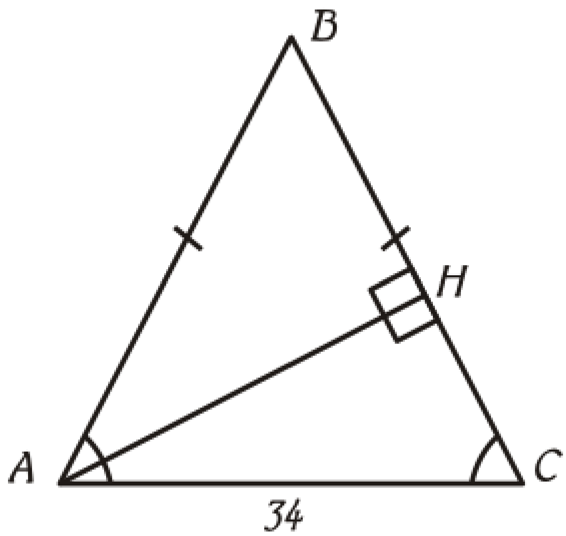
$tgBOA = -tgBOC$;

$ctgBOA = -ctgBOC$.

Пример:

В треугольнике ABC $AB = BC, AH$ — высота, $AC = 34, cos\angle BAC = 0.15$. Найдите CH.

Решение:



Так как треугольник ABC равнобедренный, то $\angle A = \angle \mathrm{C}$ (как углы при основании)

Косинусы равных углов равны, следовательно, $cos\angle BAC = cos\angle \mathrm{BCA} = 0.15$

Рассмотрим прямоугольный треугольник AHC.

Косинусом (cos) острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Распишем косинус $\angle \mathrm{HCA}$ (он же $\angle \mathrm{BCA}$) по определению:

$cos\angle \mathrm{HCA} = \frac{\mathrm{HC}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{HC}}{34} = 0.15$

Из последнего равенства найдем HC, для этого 0.15 представим в виде обыкновенной дроби и воспользуемся свойством пропорции:

$$\frac{\mathrm{HC}}{34} = \frac{15}{100}$$

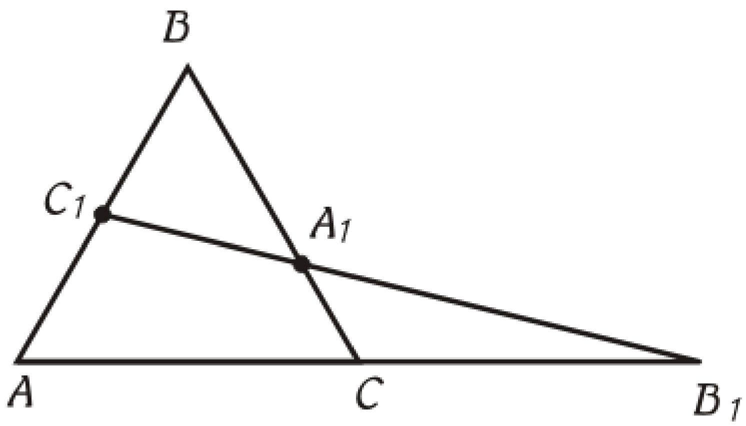
$$\mathrm{HC} = \frac{34 \cdot 15}{100} = 5.1$$

Ответ: 5.1

Теорема Менелая:

Если на сторонах BC, AB и продолжении стороны AC треугольника ABC за точку C отмечены соответственно $\mathrm{A_1}, \mathrm{C_1}, \mathrm{B_1}$, лежащие на одной прямой, то

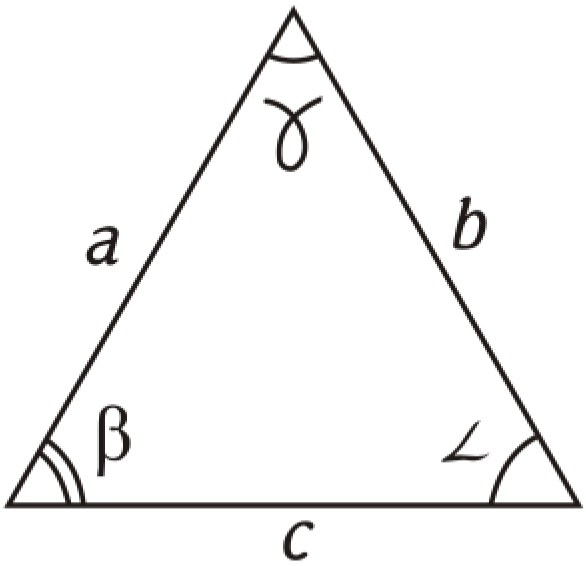
$$\frac{\mathrm{AC_1}}{\mathrm{C_1B}} \cdot \frac{\mathrm{BA_1}}{\mathrm{A_1C}} \cdot \frac{\mathrm{CB_1}}{\mathrm{B_1A}} = 1$$



Теорема синусов.

Во всяком треугольнике стороны относятся как синусы противолежащих углов:

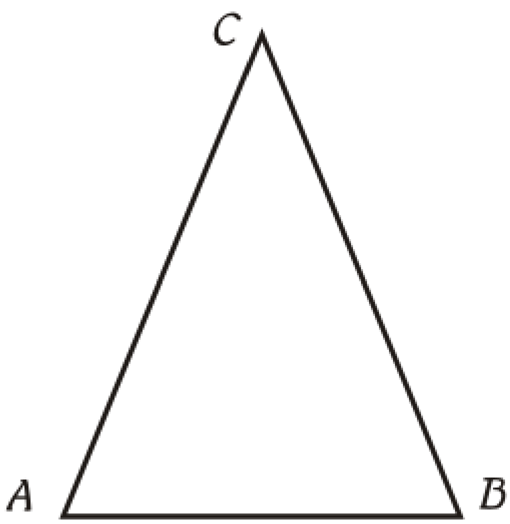
$\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma} = 2R$, где R - радиус описанной около треугольника окружности.



Пример:

В треугольнике ABC $\mathrm{BC} = 16, sin\angle A = \frac{4}{5}$. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

Решение:



Воспользуемся теоремой синусов:

Отношение стороны к синусу противолежащего угла равно двум радиусам описанной окружности

$\frac{\mathrm{BC}}{sinA} = 2R$

Далее подставим числовые данные и найдем R

$\frac{16 \cdot 5}{4} = 2R$

$R = \frac{16 \cdot 5}{4 \cdot 2} = 10$

Ответ: 10

Теорема косинусов.

Квадрат одной из сторон треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\alpha$.