Числовые логарифмические выражения

Логарифм по основанию a от b – это число t, которое показывает, в какую степень нужно возвести a, чтобы получить b.*Ограничения:* числа a и b такие, что $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$.Таким образом, верно основное логарифмическое тождество

$$a^t = b \quad \Leftrightarrow \quad \log_a b = t$$

Т.к. мы имеем право возводить в любую степень, то $t \in R$.

- Если a, b, c – числа, удовлетворяющие ограничениям: $a, b, c > 0,\ a \neq 1$, то справедливы следующие формулы:

$$(1)\log_a 1 = 0 \qquad (2)\log_a a = 1$$

$$(3)\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n}\log_a b \qquad (4)a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

$$(5)\log_a bc = \log_a b + \log_a c \qquad (6)\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$(7)\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c \quad \text{или} \quad (7')\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

Заметим, что при выполнении ограничений данные формулы верны в **обе стороны**!

Некоторые частные случаи, которыми удобно пользоваться:

- Частные случаи формул **(3)** и **(4)**:

$$m = \log_a a^m \quad \text{и} \quad b = a^{\log_a b}$$

С помощью первой формулы нагляднее видно, как заменить число на логарифм по *нужному основанию*:$4 = \log_2 2^4 = \log_2 16$;

а с помощью второй – как заменить число на степень с *нужным основанием*:$4 = 3^{\log_3 4}$.

- Частные случаи формул **(7)** и **(7’)**:

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1 \quad \text{и} \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Пример:

$$\log_3 25 + \frac{2}{\log_{\frac{1}{5}} 3} = \text{(применили формулу (2))} = \log_3 25 + 2\log_3 \frac{1}{5} = \log_3 25 + \log_3 \frac{1}{25} = \log_3 \Big(2$$