

В задачах на движение по прямой часто надо отыскать среднюю скорость транспортного средства.

Средняя скорость – это величина, равная отношению пути, пройденного телом, ко времени, за которое пройден этот путь.

$$v_{\text{ср}} = \frac{S_{\text{общий}}}{t_{\text{общее}}}$$

Пример:

Первые 140 км автомобиль ехал со скоростью 70 км/ч, следующие 220 км — со скоростью 80 км/ч, а затем 30 км — со скоростью 120 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Решение:

Для простоты решения задачи сделаем таблицу.

$$\begin{array}{lll} S_1 = 140 \text{ км} & S_2 = 220 \text{ км} & S_3 = 30 \text{ км} \\ v_1 = 70 \text{ км/ч} & v_2 = 80 \text{ км/ч} & v_3 = 120 \text{ км/ч} \\ t_1 - ? & t_2 - ? & t_3 - ? \end{array}$$

Получилось три участка пути, про каждый участок мы знаем его путь и скорость, но для расчета средней скорости необходимо знать путь и время каждого участка. Найдём время каждого участка пути, для этого разделим путь на скорость.

$$t_1 = \frac{S_1}{v_1} = \frac{140}{70} = 2 \text{ часа}$$

$$t_2 = \frac{S_2}{v_2} = \frac{220}{80} = 2.75 \text{ часа}$$

$$t_3 = \frac{S_3}{v_3} = \frac{30}{120} = 0.25 \text{ часа}$$

$$v_{\text{ср}} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{140 + 220 + 30}{2 + 2.75 + 0.25} = \frac{390}{5} = 78 \text{ км/ч}$$

Ответ: 78 км/ч

Иногда встречаются такие задачи на движение, в которых учитываются размеры транспортного средства. Чаще всего в таких задачах необходимо рассчитать длину поезда, например.

Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 60 км/ч, проезжает мимо платформы, длина которой равна 200 метрам, за 3 минуты. Найдите длину поезда в метрах.

Решение:

Считается, что поезд проедет полностью мимо платформы, если он проедет длину платформы и еще свою длину.

Найдем расстояние, которое поезд проедет за три минуты. Время переведем в секунды и умножим на скорость поезда, которую переведем из км/ч в м/с.

$$3 \text{ минуты} = 3 \cdot 60 = 180 \text{ секунд}$$

$$60 \text{ км/ч} = \frac{60}{3.6} = \frac{600}{36} = \frac{50}{3} \text{ м/с}$$

$$S = v \cdot t = \frac{50 \cdot 180}{3} = 3000 \text{ метров}$$

Чтобы найти длину поезда из всего пройденного пути за 3 минуты вычтем длину платформы:

$$l = 3000 - 200 = 2800 \text{ метров.}$$

Ответ: 2800

Пример:

Два велосипедиста одновременно отправились в пробег протяжённостью 84 километра. Первый ехал со скоростью, на 5 км/ч большей скорости второго, и прибыл к финишу на 5 часов раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

Решение:

Пусть x км/ч – скорость второго велосипедиста, тогда $(x + 5)$ км/ч – скорость первого велосипедиста.

Создаем стандартную таблицу и столбец « v » заполняем данными с неизвестными.

	$S(\text{км})$	$v(\text{км})$	$t(\text{ч})$
Первый велосипедист		$(x + 5)$	
Второй велосипедист		x	

Так как расстояние, которое проехали велосипедисты одинаково и равно 84 км, заполняем столбец « S ».

	$S(\text{км})$	$v(\text{км})$	$t(\text{ч})$
Первый велосипедист	84	$(x + 5)$	
Второй велосипедист	84	x	

Третий столбец заполняем по формуле $t = \frac{S}{v}$.

	$S(\text{км})$	$v(\text{км})$	$t(\text{ч})$
Первый велосипедист	84	$(x + 5)$	$\frac{84}{(x + 5)}$
Второй велосипедист	84	x	$\frac{84}{x}$

Именно содержимое третьего столбца будем использовать для составления уравнения к задаче. По условию задачи разница между временами движения велосипедистов равна 5 часов. Дольше в пути находился второй велосипедист, следовательно, из большего времени отнимаем меньшее время и все это равно разнице времен.

$$\frac{84}{x} - \frac{84}{(x + 5)} = 5$$

Перенесем все слагаемые в левую сторону уравнения

$$\frac{84}{x} - \frac{84}{(x+5)} - 5 = 0$$

Приведем все слагаемые к общему знаменателю $x(x+5)$, тогда к первой дроби дополнительный множитель равен $(x+5)$, ко второй x , а к третьему слагаемому $(x^2 + 5x)$. Получаем:

$$\frac{84x + 420 - 84x - 5x^2 - 25x}{x(x+5)} = 0$$

Далее проговариваем: дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю.

$$84x + 420 - 84x - 5x^2 - 25x = 0; x(x+5) \neq 0$$

Найдем сначала корни знаменателя (ОДЗ дроби)

$$x(x+5) \neq 0$$

$$x \neq 0 \text{ или } x + 5 \neq 0$$

$$x \neq 0 \text{ или } x \neq -5$$

Найдем корни числителя.

$$84x + 420 - 84x - 5x^2 - 25x = 0;$$

Приведем подобные слагаемые и расставим поставим их в порядке убывания степеней

$$-5x^2 - 25x + 420 = 0$$

Разделим уравнение на (-5)

$$x^2 + 5x - 84 = 0$$

По теореме Виета

$$x_1 = -12, x_2 = 7$$

$x_1 = -12$ нам не подходит, так как отрицательная величина.

$x_2 = 7$ км/ч – скорость велосипедиста.

Ответ: 7

Некоторые нюансы в задачах с круговым движением:

1. В задачах на движение по окружности желательно делать рисунок, чтобы расставить величины и увидеть взаимосвязь между транспортными средствами.
2. Если транспортные средства начали двигаться из одной точки в диаметрально противоположных направлениях, то между ними расстояние равно половине длины окружности.
3. Если в задаче сказано, что транспортные средства двигаются в одном направлении, то необходимо узнать их скорость опережения: для этого из большей скорости вычитается меньшая.
4. Любую задачу на круговое движение можно представить как задачу на прямолинейном отрезке, мысленно развернув круговую трассу в прямую.

Пример:

Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 18 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 92 км/ч, и через 45 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Решение:

Сделаем рисунок к задаче, для этого мысленно развернем круговую трассу в прямую.



$$S = 18 \text{ км}$$

$$t = 45 \text{ мин} = \frac{3}{4} \text{ часа}$$

Пусть x км/ч - скорость второго автомобиля.

Скорость опережения равна разности скоростей.

Тогда скорость опережения равна $v_{\text{опережения}} = (92 - x)$. Так как первый автомобиль обгонит второй на один круг за 45 минут, то скорость опережения можно выразить еще одним способом: для этого длину круга надо разделить на время опережения.

Не забываем перевести время из минут в часы $45 \text{ минут} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4} \text{ часа}$

$$v_{\text{опережения}} = \frac{S}{t} = \frac{18}{\frac{3}{4}} = \frac{18 \cdot 4}{3} = 24$$

Так как мы разными записями выразили скорость опережения, то для составления уравнения приравняем обе записи друг к другу.

$$92 - x = 24$$

$$-x = 24 - 92$$

$x = 68$ км/ч – скорость второго автомобиля.

Ответ: 68

Скорость по течению реки равна сумме собственной скорости транспортного средства и скорости течения реки

$$v = v_{\text{собственная}} + v_{\text{течения реки}}$$

Чтобы найти скорость против течения, нужно отнять от собственной скорости транспортного средства скорость течения реки

$$v = v_{\text{собственная}} - v_{\text{течения реки}}$$

Пример:

Катер прошел против течения реки 120 км и вернулся обратно, затратив на обратный путь на 4 часа меньше времени. Найдите скорость катера в стоячей воде, если скорость течения реки 4 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Решение:

Для начала необходимо за «х» взять неизвестную. В нашем случае(и чаще всего) за «х» берется скорость.

Пусть x км/ч – собственная скорость катера, тогда $(x + 4)$ км/ч – скорость катера по течению; $(x - 4)$ км/ч – скорость катера против течения.

Создаем стандартную таблицу и столбец « v » заполняем данными с неизвестными.

	$S(\text{км})$	$v(\text{км/ч})$	$t(\text{ч})$
По течению		$(x + 4)$	
Против течения		$(x - 4)$	

Так как расстояние, которое катер проплыл по течению и против течения одинаково и равно 120 км, заполняем столбец « S »

	$S(\text{км})$	$v(\text{км/ч})$	$t(\text{ч})$
По течению	120	$(x + 4)$	
Против течения	120	$(x - 4)$	

Третий столбец заполняем по формуле $t = \frac{S}{v}$

	$S(\text{км})$	$v(\text{км/ч})$	$t(\text{ч})$
По течению	120	$(x + 4)$	$\frac{120}{(x + 4)}$
Против течения	120	$(x - 4)$	$\frac{120}{(x - 4)}$

Именно содержимое третьего столбца будем использовать для составления уравнения к задаче. По условию задачи разница между временами движения против течения и по течению равна 4 часа, следовательно, из большего времени отнимаем меньшее время и все это равно разнице времен.

$$\frac{120}{(x - 4)} - \frac{120}{(x + 4)} = 4$$

Решим полученное дробно рациональное уравнение, для этого перенесем все слагаемые в левую часть.

$$\frac{120}{(x - 4)} - \frac{120}{(x + 4)} - 4 = 0$$

Приведем дроби к общему знаменателю $(x - 4)(x + 4)$, тогда к первой дроби дополнительный множитель равен $(x + 4)$, ко второй $(x - 4)$, а к третьему слагаемому $(x + 4)(x - 4)$. Получаем:

$$\frac{120(x + 4) - 120(x - 4) - 4(x - 4)(x + 4)}{(x - 4)(x + 4)} = 0$$

Далее проговариваем: дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю.

$$120(x + 4) - 120(x - 4) - 4(x - 4)(x + 4) = 0; (x - 4)(x + 4) \neq 0$$

Найдем сначала корни знаменателя (ОДЗ дроби)

$$(x - 4)(x + 4) \neq 0$$

$$x - 4 \neq 0 \text{ или } x + 4 \neq 0$$

$$x \neq 4 \text{ или } x \neq -4$$

Найдем корни числителя.

$$120(x + 4) - 120(x - 4) - 4(x - 4)(x + 4) = 0$$

Для этого раскроем скобки и приведем подобные слагаемые.

$$120x + 480 - 120x + 480 - 4x^2 + 64 = 0$$

$$-4x^2 + 1024 = 0$$

$$-4x^2 = -1024$$

Разделим обе части уравнения на (-4)

$$x^2 = 256$$

$$x_{1,2} = \pm 16$$

Так как за «х» мы брали собственную скорость катера, а она отрицательной быть не может, следовательно, нам подходит только корень $x = 16$ км/ч

Ответ: 16

Пример:

От пристани А к пристани В, расстояние между которыми равно 70 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 1 час после этого следом за ним, со скоростью, на 8 км/ч большей, отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт В оба теплохода прибыли одновременно.

Решение:

Пусть x км/ч- это скорость первого теплохода, тогда $(x + 8)$ км/ч –это скорость второго теплохода.

Составим таблицу, в которой заполним столбцы путь « S » и скорость « v » по условию задачи, а третий столбец время « t » заполним по формуле $t = \frac{S}{v}$

	$S(\text{км})$	$v(\text{км/ч})$	$t(\text{ч})$
Первый теплоход	70	x	$\frac{70}{x}$
Второй теплоход	70	$(x + 8)$	$\frac{70}{(x + 8)}$

Так как второй теплоход выехал на час позже, то время его в пути на час меньше относительно времени первого теплохода. Составим и решим уравнение: из большего времени отнимаем меньшее время и все это равно разнице времен

$$\frac{70}{x} - \frac{70}{(x+8)} = 1$$

$$\frac{70}{x} - \frac{70}{(x+8)} - 1 = 0$$

Приводим дроби к общему знаменателю

$$\frac{70(x+8) - 70x - x(x+8)}{x(x+8)} = 0$$

$$\frac{70x + 560 - 70x - x^2 - 8x}{x(x+8)} = 0$$

Найдем сначала корни знаменателя(ОДЗ дроби)

$$x(x+8) \neq 0$$

$$x \neq 0 \text{ или } x+8 \neq 0; x \neq -8$$

Найдем корни числителя

$$70x + 560 - 70x - x^2 - 8x = 0$$

$$-x^2 - 8x + 560 = 0$$

$$x^2 + 8x - 560 = 0$$

$$\text{По т.Виета } x_1 + x_2 = -8$$

$$x_1 \cdot x_2 = -560$$

$x_1 = -28; x_2 = 20$, первый корень нам не подходит, так как он отрицательный, следовательно скорость первого теплохода равна 20 км/ч.

Ответ: 20