Тригонометрическими уравнениями называют уравнения, в которых переменная содержится под знаком тригонометрических функций. К их числу прежде всего относятся простейшие тригонометрические уравнения, т.е. уравнения вида $sinx = a, cosx = a, tgx = a$, где a – действительное число.

Перед решением уравнений разберем некоторые тригонометрические выражения и формулы.

1 **радиан** $= \frac{180}{\pi} \approx 57$ **градусов**

1 **градус** $= \frac{\pi}{180}$ **радиан**

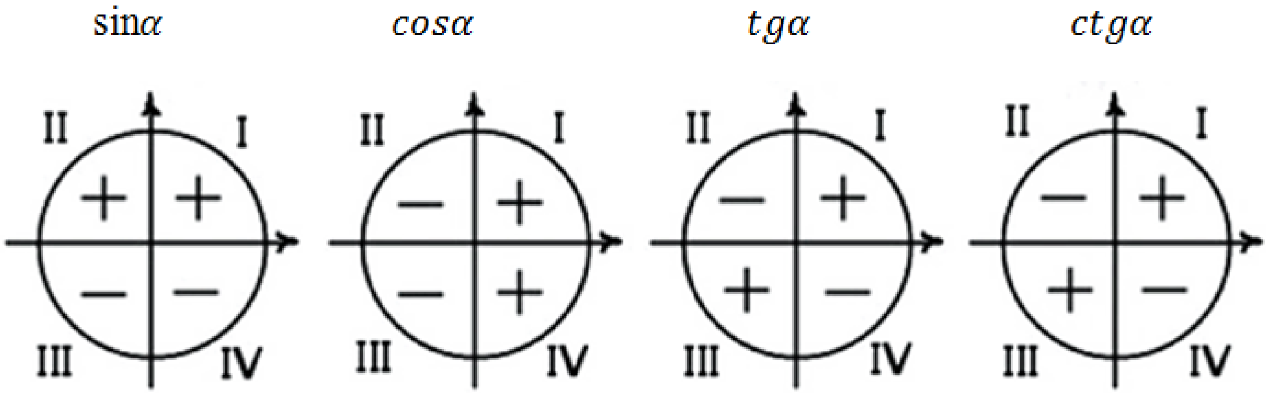
Значения тригонометрических функций некоторых углов

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	0
$ctg\alpha$	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-$

Периоды повтора значений тригонометрических функций

Период повторения у синуса и косинуса 2π, у тангенса и котангенса π

Знаки тригонометрических функций по четвертям



Эта информация нам пригодится для использования формул приведения. Формулы приведения необходимы для понижения углов до значения от 0 до 90 градусов.

Чтобы правильно раскрыть формулы приведения необходимо помнить, что:

1. если в формуле содержатся углы $180°$ и $360°$ (π и 2π), то наименование функции не изменяется; (если же в формуле содержатся углы $90°$ и $270°$ ($\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$), то наименование функции меняется на противоположную (синус на косинус, тангенс на котангенс и т. д.);
2. чтобы определить знак в правой части формулы ($+$ или $-$), достаточно, считая угол α острым, определить знак преобразуемого выражения.

Преобразовать $cos\left(90° + \alpha\right)$. Прежде всего, мы замечаем, что в формуле содержится угол 90, поэтому cos измениться на sin.

$cos\left(90° + \alpha\right) = sin\alpha$

Чтобы определить знак перед $sin\alpha$, предположим, что угол α острый, тогда угол $90° + \alpha$ должен оканчиваться во 2-й четверти, а косинус угла, лежащего во 2-й четверти, отрицателен. Поэтому, перед $sin\alpha$ нужен знак $-$.

$cos\left(90° + \alpha\right) = -sin\alpha$ - это конечный результат преобразования

Четность тригонометрических функций

Косинус четная функция: $cos\left(-t\right) = cost$

Синус, тангенс и котангенс нечетные функции:
$sin\left(-t\right) = -sint; tg\left(-t\right) = -tgt; ctg\left(-t\right) = -ctgt$

Тригонометрические тождества

1. $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$
2. $ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$
3. $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ (Основное тригонометрическое тождество)

Из основного тригонометрического тождества можно выразить формулы для нахождения синуса и косинуса

$sin\alpha = \pm\sqrt{1 - cos^2\alpha}$

$cos\alpha = \pm\sqrt{1 - sin^2\alpha}$

4. $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$
5. $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}$
6. $1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha}$

Вычислить $sint$, если $cost = \frac{5}{13}; t \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$

Найдем $sint$ через основное тригонометрическое тождество. И определим знак, так как $t \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ -это четвертая четверть, то синус в ней имеет знак минус

$sint = -\sqrt{1 - cos^2t} = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}$

Формулы двойного угла

1. $sin2\alpha = 2sin\alpha \cdot cos\alpha$
2. $cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha = 2cos^2\alpha - 1 = 1 - 2sin^2\alpha$

3. $tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

Формулы суммы и разности

$cos\alpha + cos\beta = 2cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha - \beta}{2}$

$cos\alpha - cos\beta = 2sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot sin\frac{\beta - \alpha}{2}$

$sin\alpha + sin\beta = 2sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha - \beta}{2}$

$sin\alpha - sin\beta = 2sin\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha + \beta}{2}$

Формулы произведения

$cos\alpha \cdot cos\beta = \frac{cos\left(\alpha - \beta\right) + cos\left(\alpha + \beta\right)}{2}$

$sin\alpha \cdot sin\beta = \frac{cos\left(\alpha - \beta\right) - cos\left(\alpha + \beta\right)}{2}$

$sin\alpha \cdot cos\beta = \frac{sin\left(\alpha + \beta\right) + sin\left(\alpha - \beta\right)}{2}$

Формулы сложения

$cos\left(\alpha + \beta\right) = cos\alpha \cdot cos\beta - sin\alpha \cdot sin\beta$

$cos\left(\alpha - \beta\right) = cos\alpha \cdot cos\beta + sin\alpha \cdot sin\beta$

$sin\left(\alpha + \beta\right) = sin\alpha \cdot cos\beta + cos\alpha \cdot sin\beta$

$sin\left(\alpha - \beta\right) = sin\alpha \cdot cos\beta - cos\alpha \cdot sin\beta$

Вычислить $sin12cos18 + cos12sin18$

Данное выражение является синусом суммы

$sin12cos18 + cos12sin18 = sin\left(12 + 18\right) = sin30 = 0.5$

Задача (Вписать в ответ число)

Вычислить $sin\frac{5\pi}{12}cos\frac{\pi}{12} + cos\frac{\pi}{12}sin\frac{5\pi}{12}$

Решение:

Данное выражение является синусом суммы

$$sin\frac{5\pi}{12}cos\frac{\pi}{12} + cos\frac{\pi}{12}sin\frac{5\pi}{12} = sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12}\right) = sin\frac{6\pi}{12} = sin\frac{\pi}{2} = 1$$

Ответ: 1

Обратные тригонометрические функции и простейшие тригонометрические уравнения

Арккосинус

Если, $|\mathrm{a}| \le 1$, то $arccos\mathrm{a}$ – это такое число из отрезка $[0; \pi]$, косинус которого равен a.

Если, $|\mathrm{a}| \le 1$, то $arccos\mathrm{a} = t \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(t) = a \\ 0 \le t \le \pi \end{cases}$

$arcos(-a) = \pi - arccosa$, где $0 \le \mathrm{a} \le 1$

Уравнение вида $cost = a$, если, $|\mathrm{a}| \le 1$, имеет решение

$t = \pm arccosa + 2\pi k; k \in Z$

Частные случаи

$cost = 1, t = 2\pi k; k \in Z$

$cost = 0, t = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in Z$

$cost = -1, t = \pi + 2\pi k; k \in Z$

Найдите наименьший положительный корень уравнения $cos\frac{2\pi x}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$cos\frac{2\pi x}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\pi x}{3} = \pm arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k; k\epsilon Z$

$\frac{2\pi x}{3} = \pm\left(\pi - arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k; k\epsilon Z$

$\frac{2\pi x}{3} = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi k; k\epsilon Z$

$\frac{2\pi x}{3} = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; k\epsilon Z$

Далее избавимся от всех величин, мешающих иксу. Для этого разделим обе части уравнения на $\frac{2\pi}{3}$

$x = \pm\frac{5\pi \cdot 3}{6 \cdot 2\pi} + \frac{2\pi \cdot 3}{2\pi}k$

$x = \pm 1,25 + 3k$

Чтобы найти наименьший положительный корень, подставим вместо k целые значения

$k = 0$

$x_1 = -1,25$

$x_2 = 1,25$

$к = 1$

$x_1 = 3 - 1,25 = 1,75$

$x_2 = 3 + 1,25 = 4,25$

Нам подходит $1,25$ – это и есть результат

Ответ: $1,25$

Арксинус

Если, $|a| \leq 1$, то $arcsina$ – это такое число, из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a.

Если, $|a| \leq 1$, то $arcsina = t \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = a \\ -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$arcsin(-a) = -arcsina$, где $0 \leq a \leq 1$

Если, $|\mathrm{a}| \le 1$, то уравнение $sint = a$ можно решить и записать двумя способами:

1.$t_1 = arcsina + 2\pi k; k \in Z$

$t_2 = \left(\pi - arcsina\right) + 2\pi k; k \in Z$

2.$t = \left(-1\right)^n arcsina + \pi n; n \in Z$

3. **Частные случаи**

$sint = 0, t = \pi k; k \in Z$

$sint = 1, t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in Z$

$sint = -1, t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in Z$

Арктангенс

$arctga$ - это такое число, из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, тангенс которого равен a.

$$arctga = t \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{tgt} = a \\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$arctg\left(-a\right) = -arctga$

Уравнение $tgt = a$ имеет решение $t = arctga + \pi k; k \in Z$