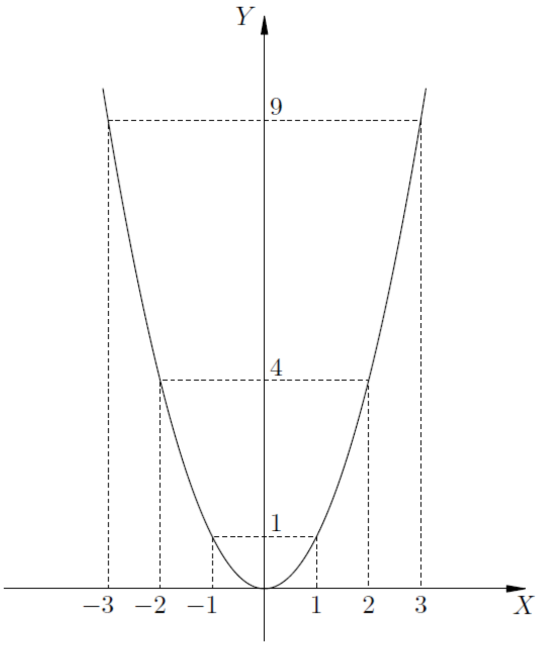
Парабола и квадратные неравенства

Квадратичная функция (парабола)

Все знают, как выглядит парабола $y = x^2$. В седьмом классе мы рисовали таблицу:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

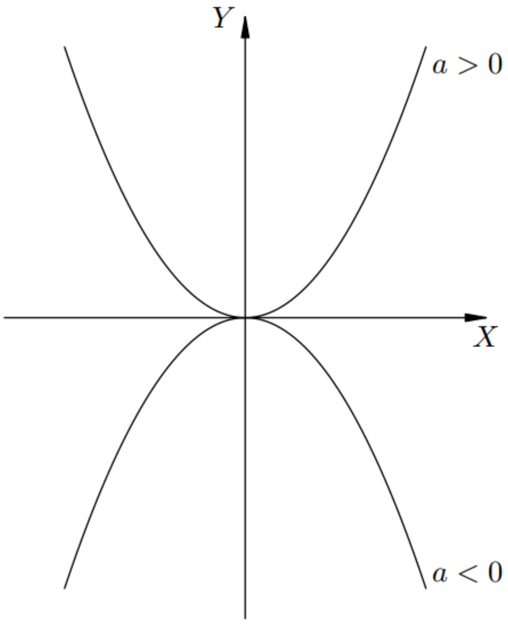
После этого по точкам строили график:



Параболу $y = ax^2 + bx + c$ мы не станем строить каждый раз «по точкам» — для выпускника школы это просто несолидно. Ведь нам надо знать закономерности поведения данной функции. А эти закономерности таковы.

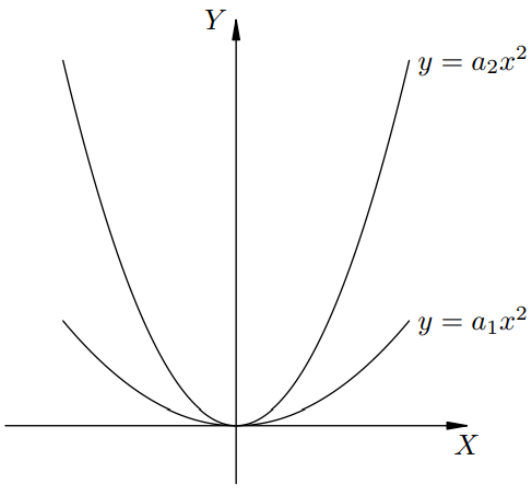
1. Знак коэффициента a отвечает за направление ветвей. При $a > 0$ ветви направлены вверх, при $a < 0$ — вниз.

На рисунке приведены две параболы $y = ax^2$ с равными по модулю, но противоположными по знаку значениями a.



2. Абсолютная величина коэффициента a отвечает за «раскрыв» параболы. Чем больше |a|, тем у́же парабола (больше прижата к оси Y). Наоборот, чем меньше |a|, тем шире парабола (больше прижата к оси X).

На рисунке приведены две параболы $y = a_1x^2$ и $y = a_2x^2$, у которых $a_2 > a_1 > 0$.



3. Абсцисса вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$ находится по формуле:

$x_0 = -\frac{b}{2a}.$

Для нахождения ординаты вершины y_0 удобнее всего подставить x_0 в уравнение параболы. Но вообще, полезно помнить, что

$y_0 = -\frac{D}{4a},$

где $D = b^2 - 4ac$ — дискриминант.

4. Точки пересечения параболы $y = ax^2 + bx + c$ с осью X находятся с помощью решения квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Если дискриминант равен нулю, то парабола касается оси X. Если дискриминант меньше нуля, то парабола не пересекает ось X.

5. Точка пересечения с осью Y находится легко: мы просто подставляем $x = 0$ в уравнение параболы. Получается точка (0, c).

А теперь покажем, как с помощью графика функции $y = ax^2 + bx + c$ решать квадратные неравенства.

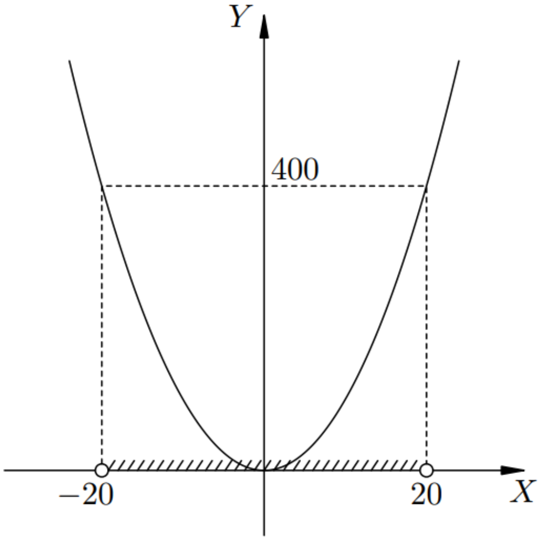
1. Часто на тестировании мы предлагаем решить неравенство

$x^2 < 400.$

Справляются далеко не все. Очень часто, не задумываясь, выдают «ответ»: $x < \pm 20$.

Однако сама эта запись — абсурдна! Представьте, что вы слышите прогноз погоды: «Температура будет меньше плюс-минус двадцати градусов». Что, спрашивается, надеть — рубашку или шубу? :-)

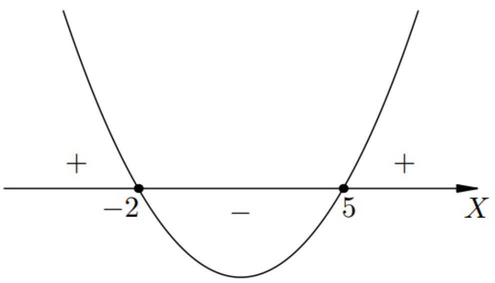
Давайте решим это неравенство с помощью графика. Изобразим схематично график функции $y = x^2$ и отметим все значения x, для которых $y < 400$.



Теперь мы видим правильный ответ: x ∈ (−20; 20).

2. Решим неравенство: $x^2 - 3x - 10 \geq 0$.

Графиком функции $y = x^2 - 3x - 10$ служит парабола, ветви которой направлены вверх. Решая квадратное уравнение $x^2 - 3x - 10 = 0$, находим $x_1 = -2$ и $x_2 = 5$ — в этих точках парабола пересекает ось X. Нарисуем схематично нашу параболу:



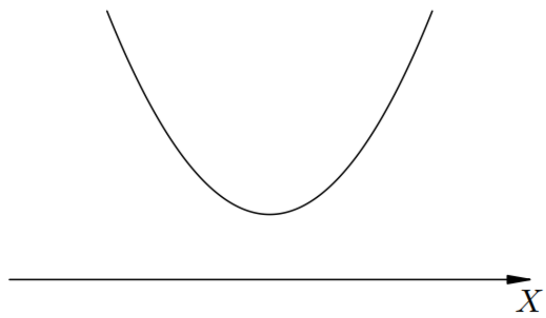
Мы видим, что при x ∈ (−2; 5) значения функции отрицательны (график проходит ниже оси X). В точках −2 и 5 функция обращается в нуль, а при x < −2 и x > 5 значения функции положительны. Следовательно, наше неравенство выполняется при $x \in (-\infty; -2] \cup [5; +\infty)$.

Обратите внимание, что для решения неравенства нам достаточно было схематично изобразить параболу. Ось Y вообще не понадобилась!

3. Ещё одно неравенство: $x^2 + 2x + 4 > 0$.

Ветви параболы $y = x^2 + 2x + 4$ направлены вверх. Дискриминант отрицателен, т. е. уравнение $x^2 + 2x + 4 = 0$ не имеет корней. Стало быть, нет и точек пересечения параболы с осью X.

Раз ветви параболы направлены вверх и она не пересекает ось X — значит, парабола расположена над осью X.



Получается, что значения функции положительны при всех возможных x. Иными словами, решения нашего неравенства — это все действительные числа.

Ответ: $(-\infty, +\infty)$.

Квадратные неравенства являются неотъемлемой частью ЕГЭ. Разберём типичные примеры из банка заданий ЕГЭ.

4. Зависимость объема спроса q (тыс. руб.) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задается формулой $q = 100 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка r(p) составит не менее 240 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

Подставим выражение для q в формулу выручки:

$r(p) = qp = (100 - 10p)p = 100p - 10p^2$.

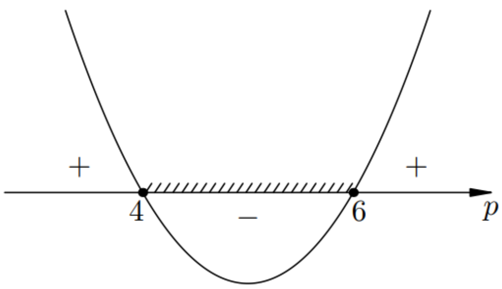
Выручка должна быть не менее (то есть больше или равна) 240 тысяч рублей. Поскольку цена p уже выражена в тысячах рублей, мы можем записать это условие в виде неравенства:

$100p - 10p^2 \geq 240$.

Переносим всё вправо и делим на 10:

$p^2 - 10p + 24 \leq 0$.

Для схематичного построения параболы находим корни уравнения $p^2 - 10p + 24 = 0$. Они равны 4 и 6. Остаётся сделать рисунок.



Решением нашего неравенства служит отрезок [4; 6]. Нас просили найти наибольшее p. Оно равно 6.

Ответ: 6.

5. Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1{,}6 + 8t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее трёх метров?

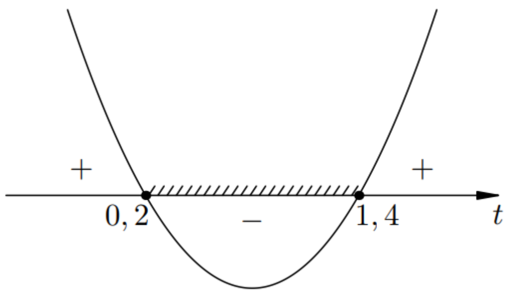
Итак, требуется, чтобы выполнялось неравенство $h(t) \geq 3$. Подставляем сюда выражение для h:

$1{,}6 + 8t - 5t^2 \geq 3$.

Собираем всё справа:

$5t^2 - 8t + 1{,}4 \le 0.$

Корни соответствующего уравнения $5t^2 - 8t + 1{,}4 = 0$ равны $t_1 = 0{,}2$ и $t_2 = 1{,}4$. Как дальше действовать — мы знаем.



Таким образом, через $t_1 = 0{,}2$ секунды после начала полёта мяч оказался на высоте 3 метра. Мяч продолжал лететь вверх, высота увеличивалась; затем началось снижение, высота уменьшалась, и в момент времени $t = 1{,}4$ секунды снова стала равна трём метрам над землей.

Получается, что мяч находился на высоте не менее трёх метров в течение $t_2 - t_1 = 1{,}2$ секунд. В бланк ответов вписываем десятичную дробь 1,2.

6. Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур определяется выражением $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1400$ К, $a = -10$ К/мин, $b = 200$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1760 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор. Ответ выразите в минутах.

Согласно условию, зависимость температуры нагревательного элемента от времени определяется формулой:

$T(t) = 1400 + 200t - 10t^2$.

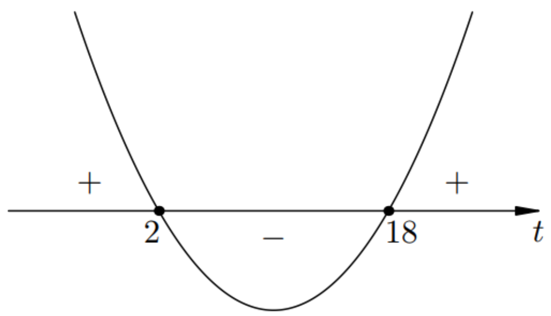
В нормальном режиме работы прибора должно выполняться неравенство $T \le 1760$, или

$1400 + 200t - 10t^2 \le 1760$.

Переносим всё вправо и делим на 10:

$t^2 - 20t + 36 \ge 0$.

Находим $t_1 = 2$, $t_2 = 18$ и делаем рисунок:



Получаем решения нашего неравенства:

$$\left[\begin{array}{l} t \le 2, \\ t \ge 18. \end{array}\right.$$

Остаётся понять: в какой же момент отключать прибор? Для этого надо представить физическую картину процесса.

Мы включаем прибор в момент времени $t = 0$. Температура нагревателя повышается и при $t = 2$ мин достигает 1760 К. Затем повышение температуры продолжается, в результате чего прибор может испортиться. Поэтому ясно, что отключать его надо при $t = 2$.

А что же решения $t \ge 18$? Они не имеют физического смысла. Войдя в зону температур $T > 1760$, прибор испортится, и формула $T(t) =$

$1400+200t-10t^2$, справедливая для исправного прибора, перестанет адекватно отражать реальность.

Поэтому в бланк ответов вписываем число 2.