Тригонометрические функции

В школьной программе изучаются четыре тригонометрических функции — синус, косинус, тангенс и котангенс. В этой статье мы рассмотрим графики и основные свойства этих функций.

1. Начнем с построения графика функции y = sin x.

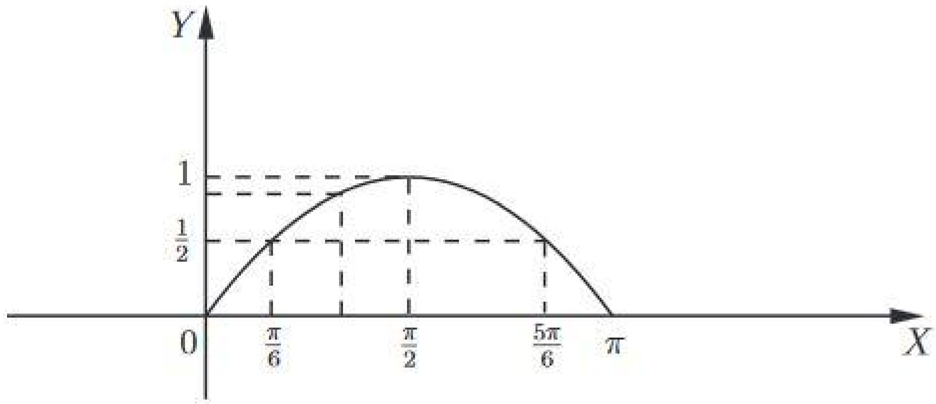
Выберем подходящий масштаб. По оси X: три клетки примем за $\frac{\pi}{2}$ (это примерно полтора). Тогда $\frac{\pi}{6}$ — одна клеточка, $\frac{\pi}{3}$ — две клетки. По оси Y: две клетки примем за единицу.

Область определения функции y = sin x — все действительные числа, поскольку значение sin α можно посчитать для любого угла α.

Вспомним, что у нас есть тригонометрический круг, на котором обозначены синусы и косинусы основных углов. Удобнее всего отметить на будущем графике точки, в которых значение синуса является рациональным числом.

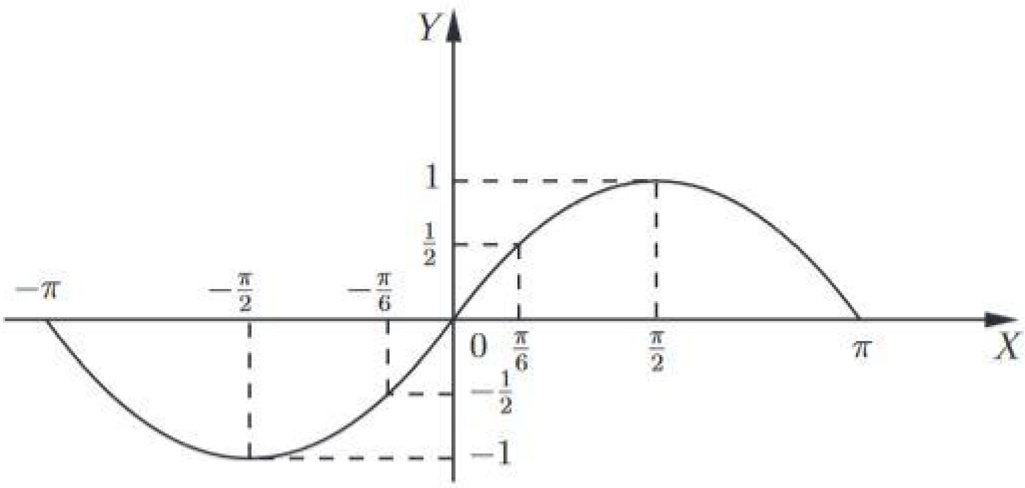
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0

Можем добавить, для большей плавности графика, точки $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3}.$ В них значение синуса равно $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,86.$ Соединим полученные точки плавной кривой.



Мы помним, что $\sin(-x) = -\sin x$. Это значит, что

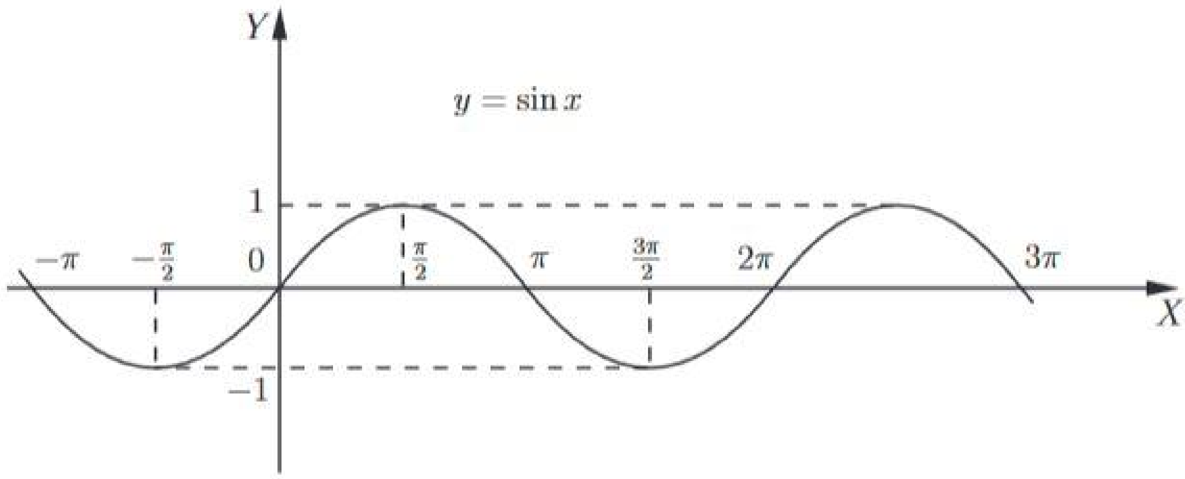
$\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}; \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1.$ Получается часть графика, симметричная той, которую нарисовали раньше.



Кроме того, значения синуса повторяются через полный круг или через целое число кругов, то есть

$$\sin(x + 2\pi n) = \sin x.$$

Это значит, что функция y = sin x является периодической. Мы уже построили участок графика длиной 2π. А теперь мы как будто "копируем" этот участок и повторяем его с периодом 2π:



Синусоида построена. Перечислим основные свойства функции y = sin x.

1) D(y): x ∈ R, то есть область определения — все действительные числа.

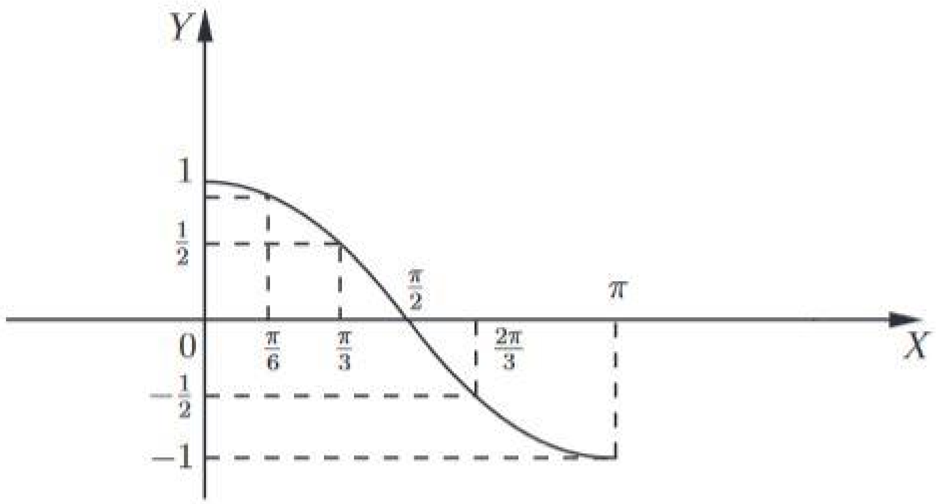
2) E(y): y ∈ [−1; 1]. Это означает, что наибольшее значение функции y = sin x равно единице, а наименьшее — минус единице.

3) Функция y = sin x — нечетная. Ее график симметричен относительно нуля.

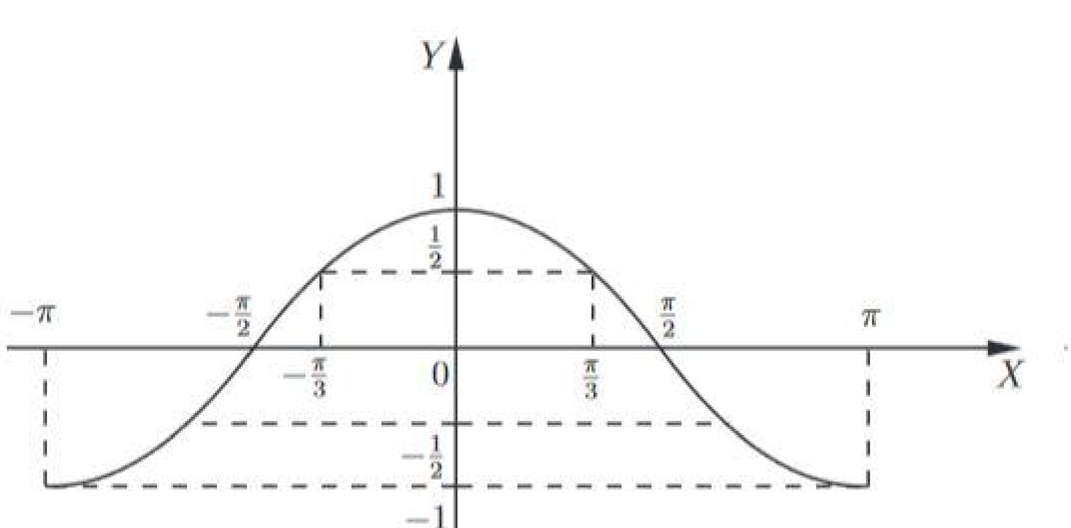
4) Функция y = sin x — периодическая. Ее наименьший положительный период равен 2π.

2. Следующий график: y = cos x. Масштаб — тот же. Отметим на графике точки, в которых косинус является рациональным числом:

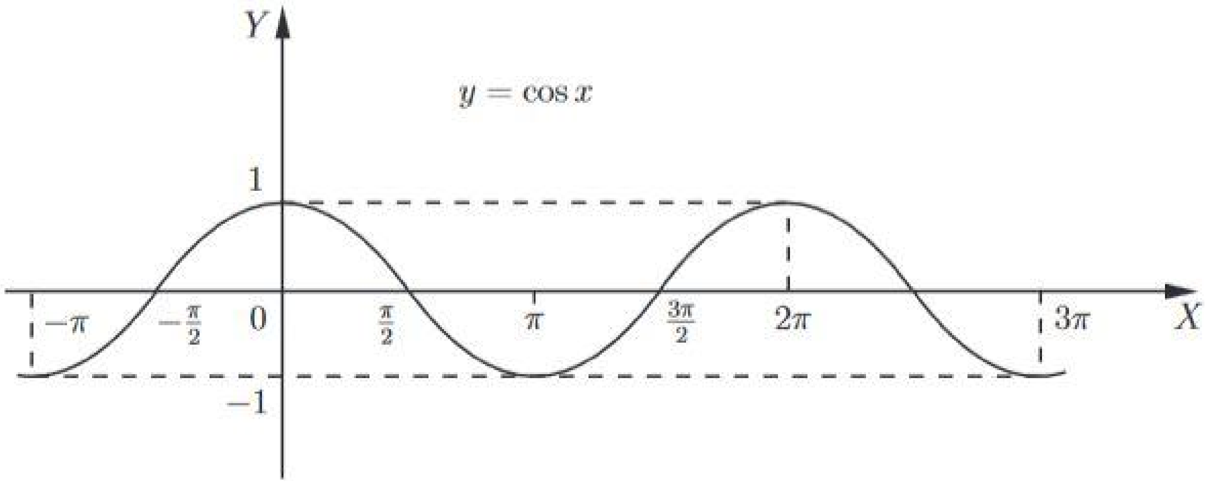
x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
cos x	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1



Поскольку cos (−x) = cos x, график будет симметричен относительно оси Y , то есть левая его часть будет зеркальным отражением правой.



Функция y = cos x — тоже периодическая. Так же, как и для синуса, ее значения повторяются через 2πn. "Копируем" участок графика, который уже построили, и повторяем периодически.



Перечислим основные свойства функции y = cos x.

1) D(y): x ∈ R, то есть область определения — все действительные числа.

2) E(y): y ∈ [−1; 1]. Это означает, что наибольшее значение функции y = cos x равно единице, а наименьшее — минус единице.

3) Функция y = cos x — четная. Ее график симметричен относительно оси Y.

4) Функция y = cos x — периодическая. Ее наименьший положительный период равен 2π.

Отметим еще одно свойство. Графики функций y = sin x и y = cos x весьма похожи друг на друга. Можно даже сказать, что график косинуса получится, если график синуса сдвинуть на $\frac{\pi}{2}$ влево. Так оно и есть — по одной из формул приведения, $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$.

Форма графиков функций синус и косинус, которые мы построили, очень характерна и хорошо знакома нам. Такой линией дети рисуют волны. Да, это и есть волны!

Функции синус и косинус идеально подходят для описания колебаний и волн — то есть процессов, повторяющихся во времени.

По закону синуса (или косинуса) происходят колебания маятника или груза на пружине. Переменный ток (тот, который в розетке)

выражается формулой $I(t) = I^{0} \cos(\omega t+\alpha)$. Но и это не все. Функции синус и косинус описывают звуковые, инфра– и ультразвуковые волны, а также весь спектр электромагнитных колебаний. Ведь то, что наш глаз воспринимает как свет и цвет, на самом деле представляет собой электромагнитные колебания. Разные длины волн света воспринимается нами как разные цвета. Наши глаза видят лишь небольшую часть спектра электромагнитных волн. Кроме видимого цвета, в нем присутствуют радиоволны, тепловое (инфракрасное) излучение, ультрафиолетовое, рентгеновское и гамма–излучение. Более того — объекты микромира (например, электрон) проявляют волновые свойства.

3. Перейдем к графику функции y = tg x.

Чтобы построить его, воспользуемся таблицей значений тангенса.

Масштаб возьмем тот же — три клетки по оси X соответствуют $\frac{\pi}{2}$, две клетки по Y — единице. График будем строить на отрезке от 0 до π. Поскольку tg (x + πn) = tg x, функция тангенс также является периодической. Мы нарисуем участок длиной π, а затем периодически его повторим.

Непонятно только, как быть с точкой $x = \frac{\pi}{2}.$ Ведь в этой точке значение тангенса не определено. А как же будет вести себя график функции y = tg x при x, близких к $\frac{\pi}{2},$ то есть к 90 градусам?

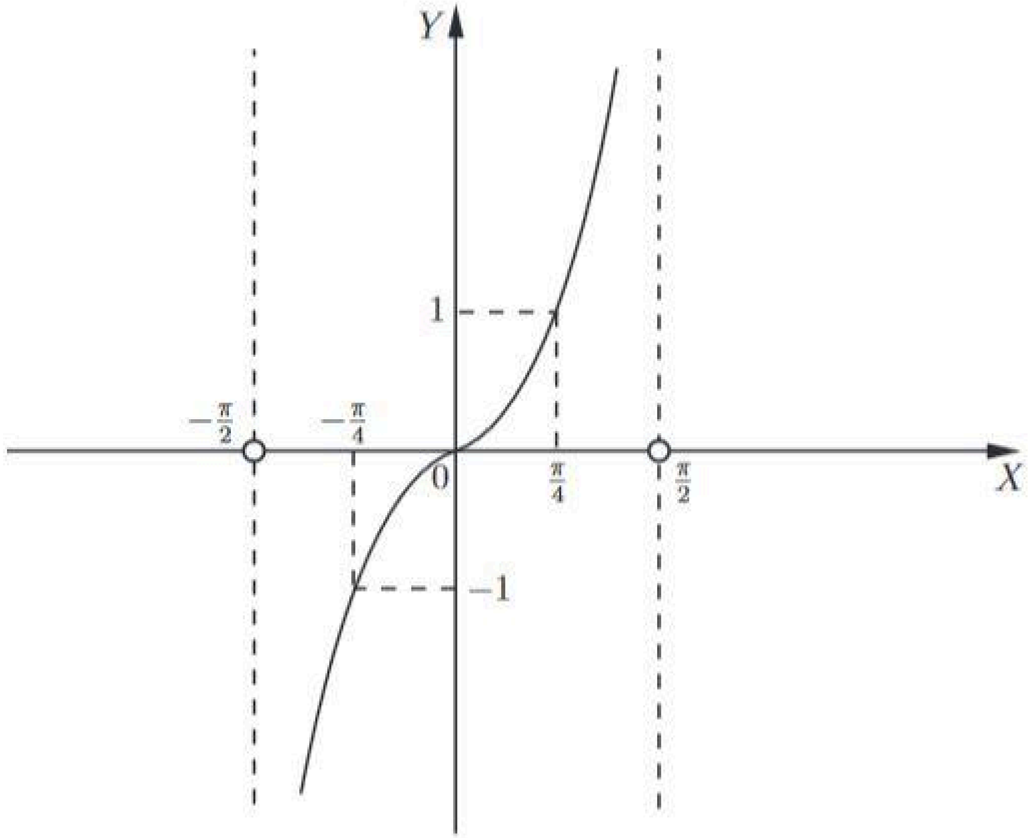
Чтобы ответить на этот вопрос, возьмем значение x, близкое к 90°, и посчитаем на калькуляторе значения синуса и косинуса этого угла.

Пусть $x = 89^\circ$.

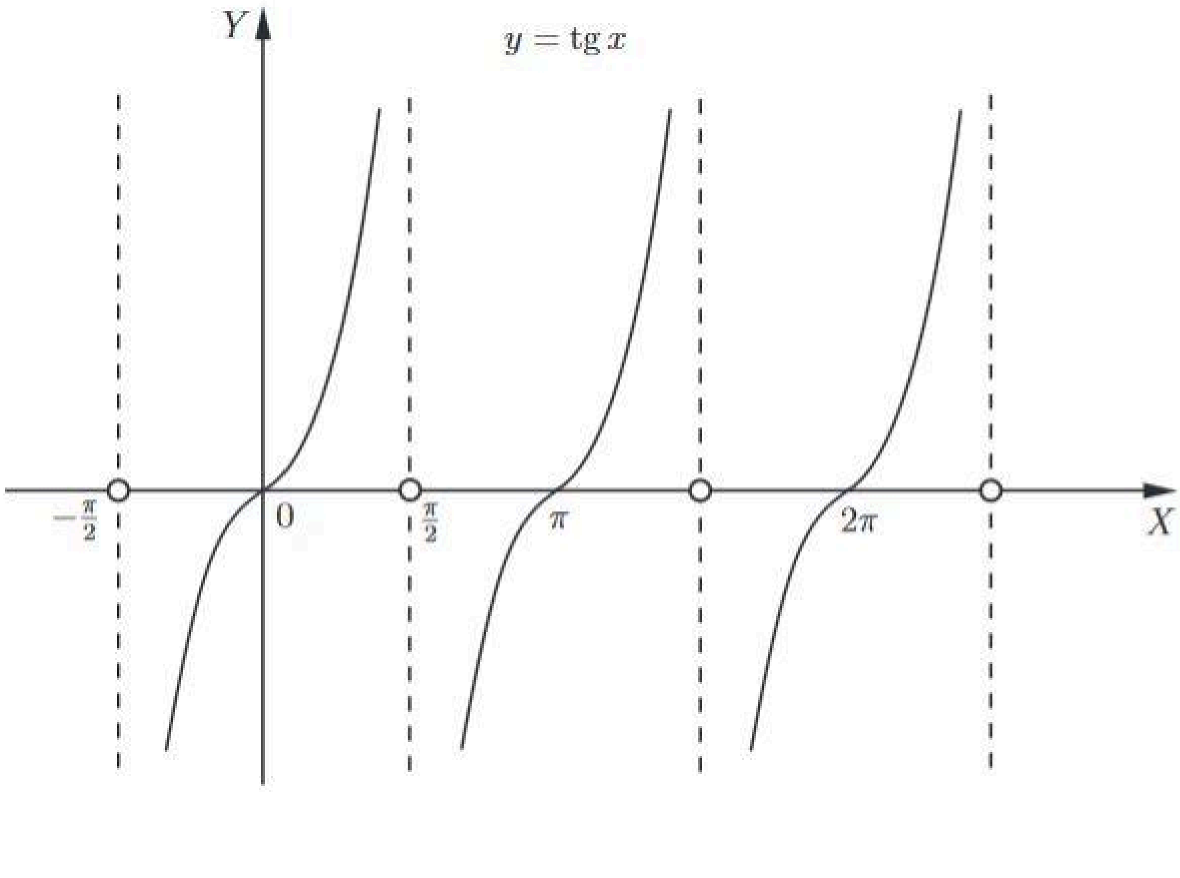
Синус угла 89° — это почти 1. Точнее, sin 89° = 0,9998. Косинус этого угла близок к нулю. Точнее, cos 89° = 0,0175.

Тогда $\mathrm{tg}89^\circ = \frac{\sin 89^\circ}{\cos 89^\circ} = \frac{0,9998}{0,0175} = \frac{9998}{175} \approx 59,$ график уйдет на 59 единиц (то есть на 118 клеток) вверх. Можно сказать, что если x стремится к 90° (то есть к $\frac{\pi}{2}$), значение функции y = tg x **стремится к бесконечности**.

Аналогично, при x, близких к $-\frac{\pi}{2}$, график тангенса уходит вниз, то есть **стремится к минус бесконечности**.



Осталось только "скопировать" этот участок графика и повторить его с периодом π.



Перечислим свойства функции y = tg x.

1) $D(y): x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$. Другими словами, тангенс не определен для $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,$ где n ∈ Z.

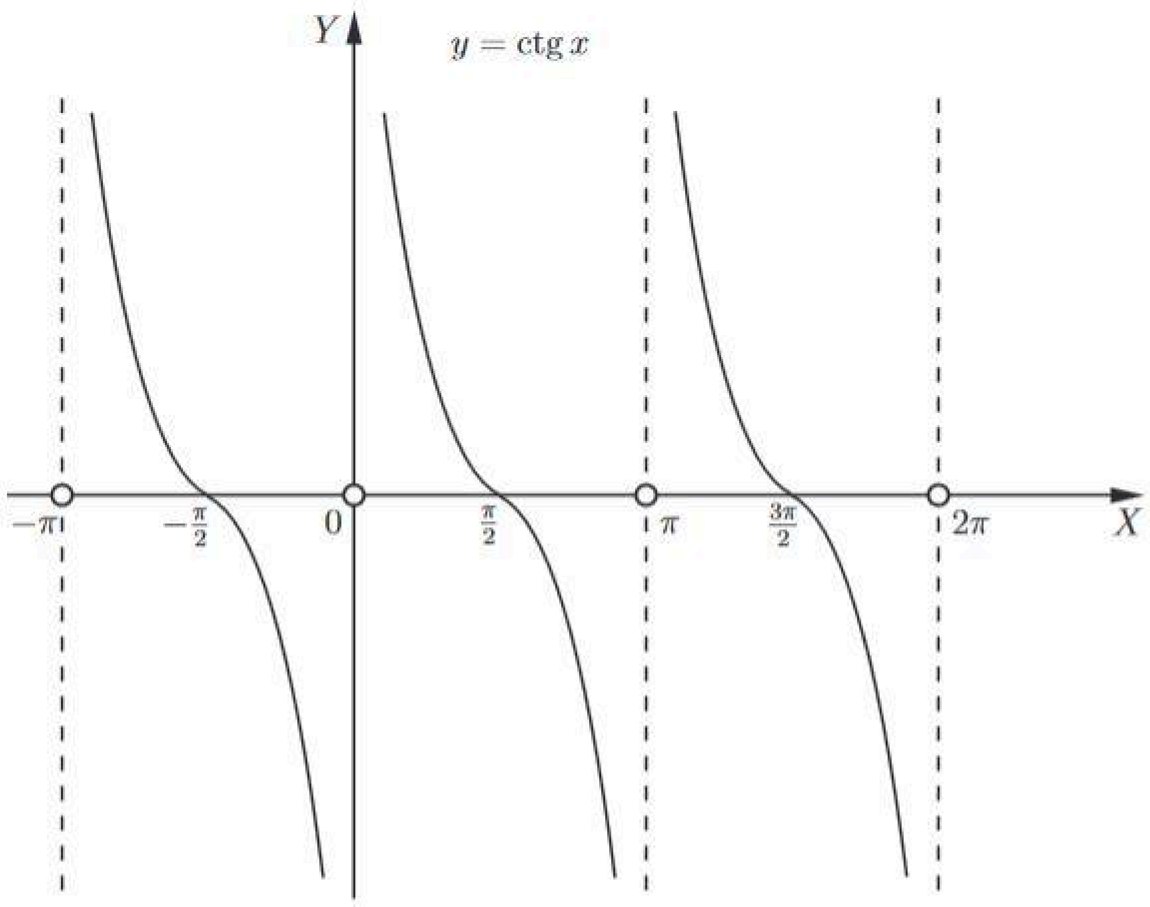
2) Область значений E(y) — все действительные числа.

3) Функция y = tg x — нечетная. Ее график симметричен относительно начала координат.

4) Функция y = tg x — периодическая. Ее наименьший положительный период равен π.

5) Функция y = tg x возрастает при $x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$, то есть на каждом участке, на котором она непрерывна.

4. График функции y = ctg x строится аналогично. Вот он:



1) $D(y) : x \in (\pi n; \pi n + \pi)$. Другими словами, котангенс не определен для $x = \pi n$ где n ∈ Z.

2) Область значений E(y) - все действительные числа.

3) Функция y = ctg x — нечетная. Ее график симметричен относительно начала координат.

4) Функция y = ctg x — периодическая. Ее наименьший положительный период равен π.

5) Функция y = ctg x убывает при $x \in (\pi n; \pi n + \pi)$, то есть на каждом участке, на котором она непрерывна.