Математика базовая - ПЛАНИМЕТРИЯ - Параллелограммы

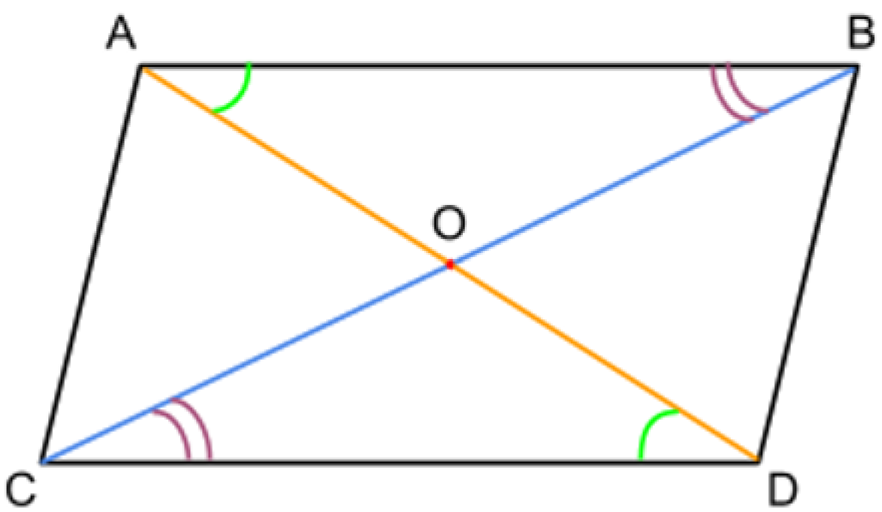
Среди произвольных четырехугольников можно выделить два особенных: параллелограмм и трапеция. Параллелограммы можно разделить на:

- произвольный параллелограмм,
- прямоугольник;
- ромб;
- квадрат.

Часто для решения задания достаточно знать определение фигуры и уметь им пользоваться.

Параллелограмм.

Параллелограмм ? это четырёхугольник, у которого противоположные стороны равны и параллельны (AB || CD, AC || BD).



То есть, если у четырехугольника есть хотя бы одна пара равных и параллельных противоположных сторон, то этот четырехугольник –

параллелограмм, а значит, все его противоположные стороны равны и параллельны.

Свойства параллелограмма

Из определения параллелограмма вытекает ряд его свойств. Для любого параллелограмма (то есть произвольного и особенного, вроде ромба или прямоугольника) выполняются условия:

1. Противоположные стороны равны (AB = CD, AC = BD).

2. Противоположные углы равны (?A = ?D, ?B = ?C).

3. Сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180°: ?BAC + ?ACD = 180°, ?ABD + ?BCD = 180° (это вытекает из параллельности противоположных сторон, так как указанные углы являются односторонними).

4. Из параллельности сторон вытекает равенство частей углов (например, ?DAB = ?ADC; ?BCD = ?ABC как накрестлежащие).

5. Две диагональ делят параллелограмм на две пары равных треугольников ?ABC = ?BCD, ?ABD = ?ACD (по стороне и двум углам).

6. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам (AO = OD, CO = OB).

Интересные, но редко применимые свойства параллелограмма:

7. Биссектрисы противоположных углов параллелограмма всегда параллельны.

8. Биссектрисы соседних углов параллелограмма всегда пересекаются под прямым углом.

Признаки параллелограмма

Для того, чтобы в задании с развернутым ответом доказать, что фигура действительно является параллелограммом, нужно знать, какими свойствами мы можем пользоваться. Четырехугольник ABCD будет параллелограммом, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:

1. Четырехугольник имеет две пары параллельных сторон: AB||CD и BC||AD.

2. Четырехугольник имеет пару параллельных и равных сторон: AB||CD, AB = CD (или BC||AD, BC = AD).

3. В четырехугольнике противоположные стороны попарно равны: AB = CD, BC = AD.

4. В четырехугольнике противоположные углы попарно равны: ?DAB = ?BCD, ?ABC = ?CDA.

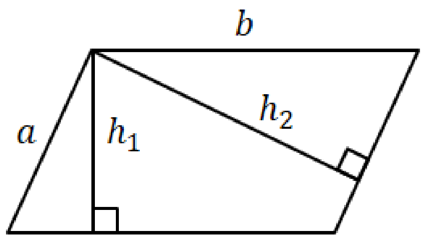
5. В четырехугольнике диагонали точкой пересечения делятся пополам: AO = OC, BO = OD.

6. Сумма углов четырехугольника прилегающих к любой стороне равна 180°: ?ABC + ?BCD = ?BCD + ?CDA = ?CDA + ?DAB = ?DAB + ?DAB = 180°.

Формулы площади параллелограмма

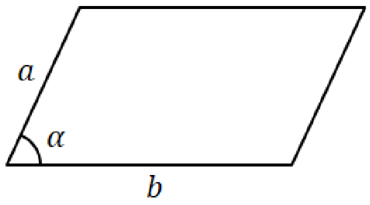
Существую три формулы площади параллелограмма, которые применимы как для произвольного параллелограмма, так и для ромба, прямоугольника, квадрата.

1	**2**	**3**



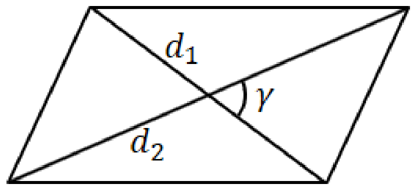
$$S = bh_1 = ah_2$$

Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.



$$S = ab\sin\alpha$$

Площадь параллелограмма равна произведению его сторон на синус угла между ними.

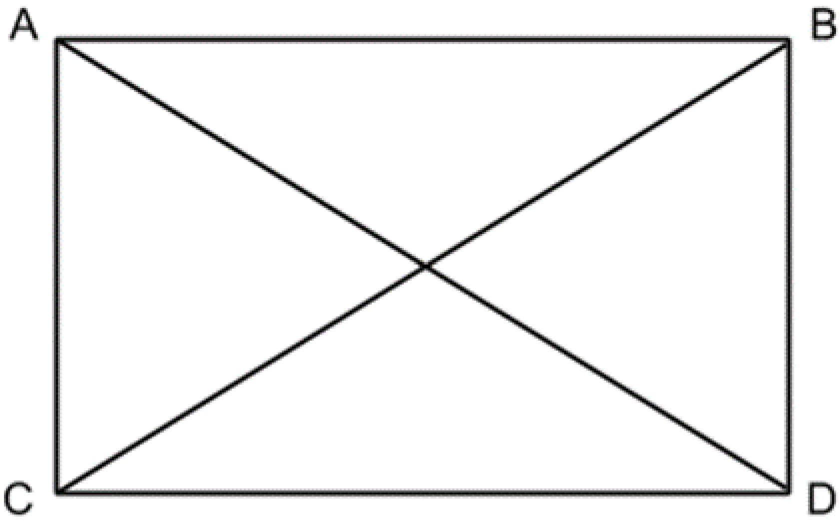


$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\gamma$$

Площадь параллелограмма равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

Прямоугольник

Прямоугольник ? это параллелограмм, у которого все углы прямые. Для того, чтобы параллелограмм был прямоугольником, достаточно, чтобы хотя бы один его угол был равен 90°, тогда и все остальные будут равны 90°.



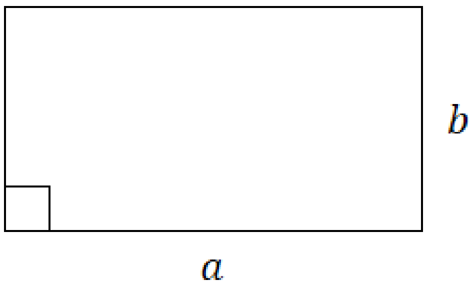
Кроме свойств параллелограмма, у прямоугольника есть и несколько своих:

1. Диагонали прямоугольника равны (AD = BC).

Стороны прямоугольника являются его высотами.

В связи с этими свойствами, формулы площади параллелограмма для прямоугольника можно немного изменить. 1 и 2 формула обращаются в одну, во второй формуле произведение диагоналей можно заменить на квадрат одной диагонали.

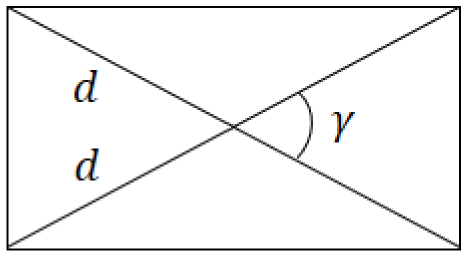
1



$S = ab$

Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон.

2

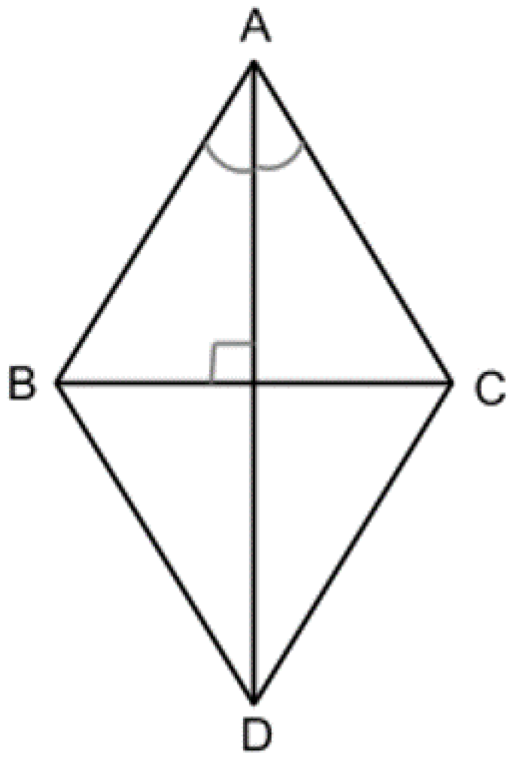


$S = \frac{1}{2} d^2 \sin \gamma$

Площадь прямоугольника равна половине произведения квадрата его диагонали на синус угла между диагоналями.

Ромб

Ромб ? это параллелограмм, у которого все стороны равны. На самом деле, достаточно, чтобы были равны хотя бы две его соседние стороны, тогда все стороны будут равны.



Кроме свойств параллелограмма, у ромба есть несколько своих:

1. Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.

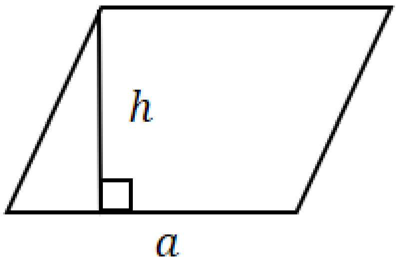
2. Диагонали ромба пересекаются под прямым углом (AD ? BC).

То есть, параллелограмм является ромбом, если выполняется хотя бы одно из условий:

- Две его смежные стороны равны;
- Его диагонали пересекаются под прямым углом;
- Одна из диагоналей делит содержащие её углы пополам;
- Все высоты равны.

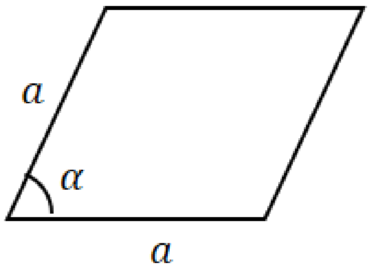
На основании свойств можно немного изменить формулы площади параллелограмма для ромба:

1 **2** **3**



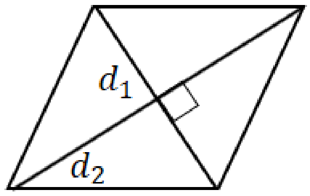
$$S = ah$$

Площадь ромба равна произведению его стороны на высоту (при чем для любой стороны это выражение будет одинаковым, так как стороны равны).



$$S = a^2 \sin\alpha$$

Площадь ромба равна произведению квадрата его стороны на синус угла между сторонами.



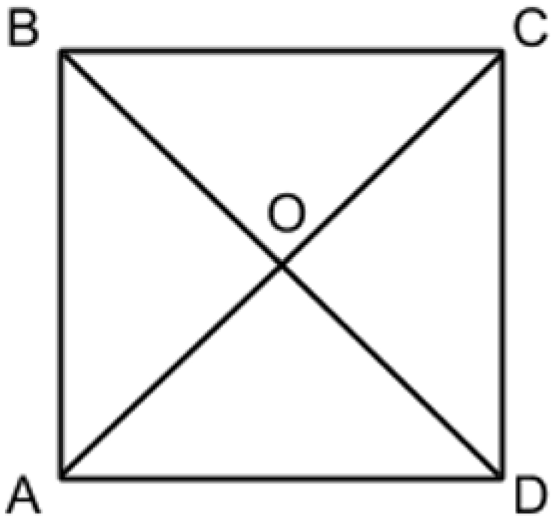
$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

Квадрат

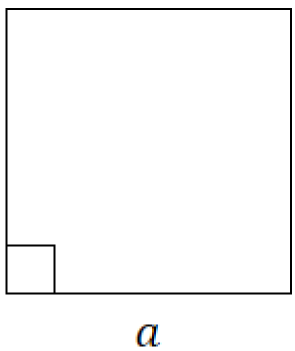
Квадрат ? это параллелограмм, у которого все стороны равны и все углы равны (AB = BC = CD = DA и ?A = ?B = ?C = ?D = 90°). То есть квадрат сочетает в себе свойства и ромба, и прямоугольника, поэтому ему присущи не только свойства параллелограмма, но и ромба с прямоугольником. Надо запомнить, что любой квадрат является ромбом и прямоугольником, но не любой ромб или прямоугольник является квадратом.

Центры вписанной и описанной окружностей квадрата совпадают и одновременно являются точкой пересечения диагоналей (т. О).



Формулы площади квадрата:

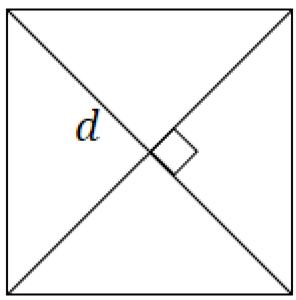
1



$S = ab$

Площадь квадрата равна его стороне, возведенной в квадрат.

2



$S = \frac{1}{2} d^2 \sin \gamma$

Площадь квадрата равна одной второй квадрата его диагонали.