Числовые тригонометрические выражения

9. Преобразование числовых и буквенных выражений

1. Вспоминай формулы по каждой теме

2. Решай новые задачи каждый день

3. Вдумчиво разбирай решения

- Алгоритм применения *формул приведения:*

Шаг 1: определить, меняется ли функция на кофункцию:

$$\sin \leftrightarrow \cos$$
$$\mathrm{tg} \leftrightarrow \mathrm{ctg}$$

Шаг 2: определить знак, который имеет *изначальная функция*, поняв, в какой четверти тригонометрической окружности находится *изначальный угол* (предполагая, что α – острый)

- Если угол можно представить в виде $(\pi n \pm \alpha)$, где n – натуральное, то функция на кофункцию **не меняется**.Пример: $\sin(\pi n \pm \alpha) = \odot \sin\alpha$, где на месте $\odot$ должен стоять знак синуса для угла $(\pi n \pm \alpha)$

- Если угол можно представить в виде $\left(\frac{\pi}{2}n \pm \alpha\right)$, где n – нечетное число, то функция на кофункцию **меняется**Пример: $\sin\left(\frac{\pi}{2}n \pm \alpha\right) = \odot \cos\alpha$, где на месте $\odot$ должен стоять знак синуса для угла $\left(\frac{\pi}{2}n \pm \alpha\right)$

- **Основные формулы:**

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \qquad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \qquad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

Задание 1

Уровень задания: Легче ЕГЭ

Найдите значение выражения $2\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ$.

Используя основное тригонометрическое тождество, исходное выражение можно преобразовать следующим образом:

$$2\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = \sin^2 30^\circ + (\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ) = \sin^2 30^\circ + 1.$$

Так как $\sin 30^\circ = 0,5$, то значение исходного выражения равно $0,5^2 + 1 = 1,25$.

Ответ: 1,25

Задание 2

Уровень задания: Равен ЕГЭ

Найдите значение выражения

$$\frac{24}{\sin^2 127^\circ + 1 + \sin^2 217^\circ}$$

Заметим, что $217^\circ = 90^\circ + 127^\circ$. Так как по формуле приведения $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha$, то

$$\sin 217^\circ = \sin(90^\circ + 127^\circ) = \cos 127^\circ$$

Следовательно, выражение можно переписать в виде:

$$\frac{24}{\sin^2 127^\circ + \cos^2 127^\circ + 1} = \frac{24}{1+1} = 12,$$

так как по основному тригонометрическому тождеству $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ для любого угла α.

Ответ: 12

Задание 3

Уровень задания: Равен ЕГЭ

Найдите значение выражения

$$\sqrt{48} - \sqrt{192}\sin^2\frac{19\pi}{12}$$

(Задача от подписчиков.)

Заметим, что $192 = 48\cdot 4$, следовательно, $\sqrt{192}\ = 2\sqrt{48}$. Таким образом, выражение примет вид (по формуле косинуса двойного угла $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$):

$$\sqrt{48}\left(1 - 2\sin^2\frac{19\pi}{12}\right) = \sqrt{48}\cdot\cos\frac{19\pi}{6}$$

Т.к. $\frac{19\pi}{6} = \frac{18\pi+\pi}{6} = 3\pi + \frac{\pi}{6}$, то по формуле приведения:

$$\sqrt{48}\cos\left(3\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{48}\cdot\left(-\cos\frac{\pi}{6}\right) = \ -\sqrt{48}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \ -4\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \ -6.$$

Ответ: -6

Задание 4

Уровень задания: Равен ЕГЭ

Найдите значение выражения

$$8\left(\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} - 1\right)$$

По формуле синуса двойного угла $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ имеем: $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$. Следовательно,

$$8\left(\frac{1}{2}\sin 2\cdot\frac{\pi}{12}-1\right)=8\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}-1\right)=8\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-1\right)=-6.$$

Ответ: -6

Задание 5

Уровень задания: Равен ЕГЭ

Найдите значение выражения

$$\frac{32}{\sin\left(-\frac{35\pi}{4}\right)\cdot\cos\frac{25\pi}{4}}$$

Т.к. синус — нечетная функция, то есть $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$, то $\sin\left(-\frac{35\pi}{4}\right)=-\sin\frac{35\pi}{4}$.

Заметим, что :

$$\frac{35\pi}{4}=\frac{36\pi-\pi}{4}=9\pi-\frac{\pi}{4};$$

$$\frac{25\pi}{4}=\frac{24\pi+\pi}{4}=6\pi+\frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, по формулам приведения:

$$\sin\frac{35\pi}{4}=\sin\left(9\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4};$$

$$\cos\frac{25\pi}{4}=\cos\left(6\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, выражение принимает вид:

$$\frac{32}{-\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}}=-\frac{32}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=-64.$$

Ответ: -64

Задание 6

Уровень задания: Равен ЕГЭ

Найдите значение выражения $\frac{7\sin 11^\circ}{\cos 79^\circ}$.

Используя формулу приведения $\sin(90^\circ \pm \alpha) = cos\alpha$, исходное выражение можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{7\sin 11^\circ}{\cos 79^\circ} = \frac{7\sin(90^\circ - 79^\circ)}{\cos 79^\circ} = \frac{7\cos 79^\circ}{\cos 79^\circ} = 7.$$

Ответ: 7

Задание 7

Уровень задания: Равен ЕГЭ

Найдите значение выражения $\frac{15}{\sin(-\frac{20\pi}{3}) \cdot \cos(-\frac{43\pi}{6})}$.

Используя формулы приведения, а также четность косинуса и нечетность синуса, исходное выражение можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{15}{-\sin\left(6\pi + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(7\pi + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{15}{-\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cdot (-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right))} = \frac{15}{-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2})} = 20.$$

Ответ: 20