Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0, a \neq 1$, называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить b.

$log_2 8 = 3$, т.к. $2^3 = 8$;

$log_3 \frac{1}{27} = -3$, т.к $3^{-3} = \frac{1}{27}$.

Особенно можно выделить три формулы:

$log_a a = 1$;

$log_a 1 = 0$;

$log_a a^b = b$.

Основное логарифмическое тождество:

$a^{log_a b} = b$

Это равенство справедливо при $b > 0, a > 0, a \neq 1$

$4^{log_4 5} = 5$;

$3^{-2log_3 5} = \left(3^{log_3 5}\right)^{-2} = 5^{-2} = \frac{1}{25}$

Некоторые свойства логарифмов

Все свойства логарифмов мы будем рассматривать для $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, m$ – любое действительное число.

1. Для любого действительного числа m справедливы равенства:

$log_a b^m = m log_a b$;

$log_{a^m} b = \frac{1}{m} log_a b$.

$log_3 3^{10} = 10 log_3 3 = 10$;

$log_{5^3} 7 = \frac{1}{3} log_5 7$;

$log_{3^7} 4^5 = \frac{5}{7} log_3 4$;

2. Для решения задач иногда полезно следующее свойство: Если числа a и b на числовой оси расположены по одну сторону от единицы, то $log_a b > 0$, а если по разные, то $log_a b < 0$.

Десятичным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию 10 и пишут lgb вместо $log_{10} b$.

Натуральным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию e, где e – иррациональное число, приближенно равное $2,7$. При этом пишут lnb, вместо $log_e b$

Логарифмические уравнения

Логарифмическими уравнениями называют уравнения вида

$log_a f(x) = log_a g(x)$, где a – положительное число, отличное от 1, и уравнения, сводящиеся к этому виду.

После нахождения корней логарифмического уравнения необходимо проверить условие: подлогарифмическое выражение должно быть больше 0.

Можно выделить несколько основных видов логарифмических уравнений:

1. **Простейшие логарифмические уравнения**: $log_a x = b$. Решение данного вида уравнений следует из определения логарифма, т.е.

$x = a^b$ и $x > 0$

$log_2 x = 3$

Представим обе части уравнения в виде логарифма по основанию 2

$log_2 x = log_2 2^3$

Если логарифмы по одинаковому основанию равны, то подлогарифмические выражения тоже равны.

$x = 8$

Ответ: $x = 8$

2. **Уравнения вида:** $log_a f(x) = log_a g(x)$. Т.к. основания одинаковые, то приравниваем подлогарифмические выражения:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$log_3 (x^2 - 3x - 5) = log_3 (7 - 2x)$

Т.к. основания одинаковые, то приравниваем подлогарифмические выражения

$x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x$

Перенесем все слагаемые в левую часть уравнения и приводим подобные слагаемые

$x^2 - x - 12 = 0$

$x_1 = 4, x_2 = -3$

Проверим найденные корни по условиям: $\begin{cases} x^2 - 3x - 5 > 0 \\ 7 - 2x > 0 \end{cases}$

При подстановке во второе неравенство корень $x = 4$ не удовлетворяет условию, следовательно, он посторонний корень

Ответ: $\mathrm{x} = -3$

3. **Уравнения квадратного вида** $log_a^2 x + log_a x + c = 0$. Такие уравнения решаются способом введения новой переменной и переходом к обычному квадратному уравнению.

4. **Уравнения вида** $a^x = b$. Решаются логарифмированием обеих частей по основанию a.

Решить уравнение $log_5 log_2 (x + 1) = 1$

Решение:

Сделаем в обеих частях уравнения логарифмы по основанию 5

$$log_5 \left(log_2 (x + 1) \right) = log_5 5$$

Т.к. основания одинаковые, то приравниваем подлогарифмические выражения

$$log_2 (x + 1) = 5$$

Далее представим обе части уравнения в виде логарифма по основанию 2

$$log_2 (x + 1) = log_2 2^5$$

$$x + 1 = 32$$

$$x = 31$$

ОДЗ данного уравнения $x + 1 > 0$

Подставим вместо x в неравенство 31 и проверим, получиться ли верное условие $32 > 0$, следовательно, 31 корень уравнения.

Ответ: 31