Гипербола

Определение

Функцию вида

где k — некоторое действительное число, $k \neq 0$, называют **обратной пропорциональностью**. При этом k называют **коэффициентом обратной пропорциональности**.

Так как делить на нуль нельзя, то областью определения функции $y = \frac{k}{x}$ является множество действительных чисел, исключая число нуль. Записать область определения такой функции можно следующим образом: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Построим график функции $y = \frac{k}{x}$, например, при $k = 2$. Для этого составим таблицу соответствующих значений переменных x и y:

Заметим, что при изменении знака аргумента x на противоположный значение функции также меняется на противоположное:

Функция, обладающая таким свойством, называется **нечётной**, а её график симметричен относительно начала координат.

Отметим полученные точки на координатной плоскости Oxy и соединим их плавной линией, а затем симметрично относительно начала координат отобразим построенную кривую (см. рисунок 1).

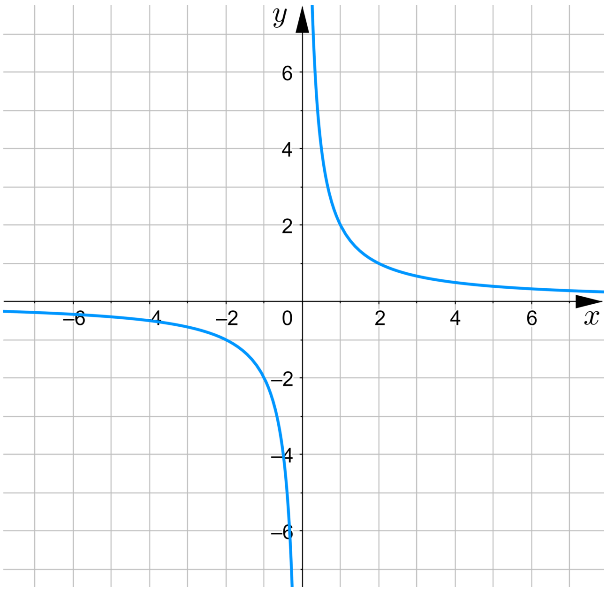


Рис. 1

Мы видим, что график функции $y = \dfrac{2}{x}$ состоит из двух ветвей. Одна ветвь лежит в первой координатной четверти (I четверти), для её точек $x > 0$, $y > 0$; другая ветвь лежит в третьей координатной четверти (III четверти), для её точек $x < 0$, $y < 0$. Эта кривая линия на плоскости, состоящая из двух ветвей, называется **гиперболой**.

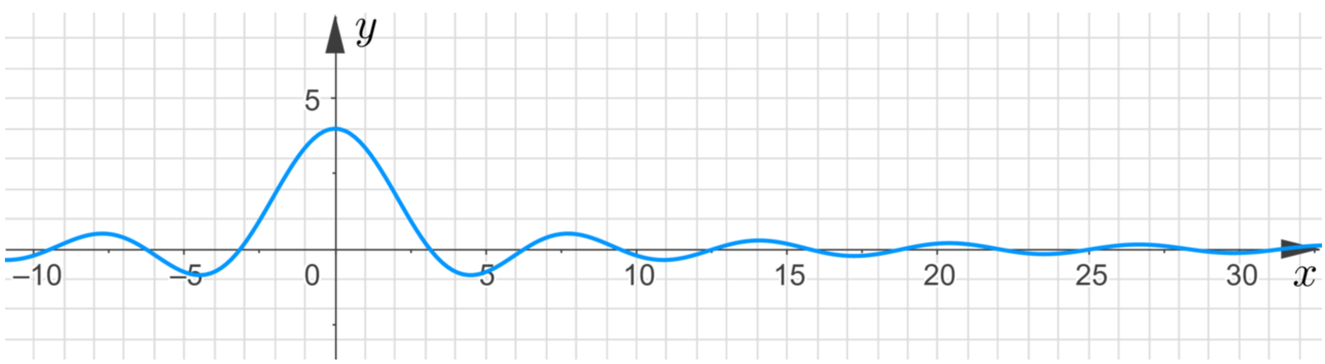
Ясно, что при любом положительном значении k графиком функции $y = \dfrac{k}{x}$ будет являться гипербола, расположенная в координатных четвертях I и III.

Если же $k < 0$, то координаты любой точки $(x; y)$, лежащей на графике, имеют разные знаки: если $x > 0$, то $y < 0$; если $x < 0$, то $y > 0$. Поэтому графиком функции $y = \dfrac{k}{x}$ при любом отрицательном значении k является гипербола, лежащая во II и IV четвертях.

При очень малых значениях $|x|$ соответствующие значения $|y|$ будут очень велики и наоборот. Например, для функции $y = \dfrac{2}{x}$ при $x = 0,01$ значение $y = 200$, при $x = 0,001$ $y = 2000$ и т. д.

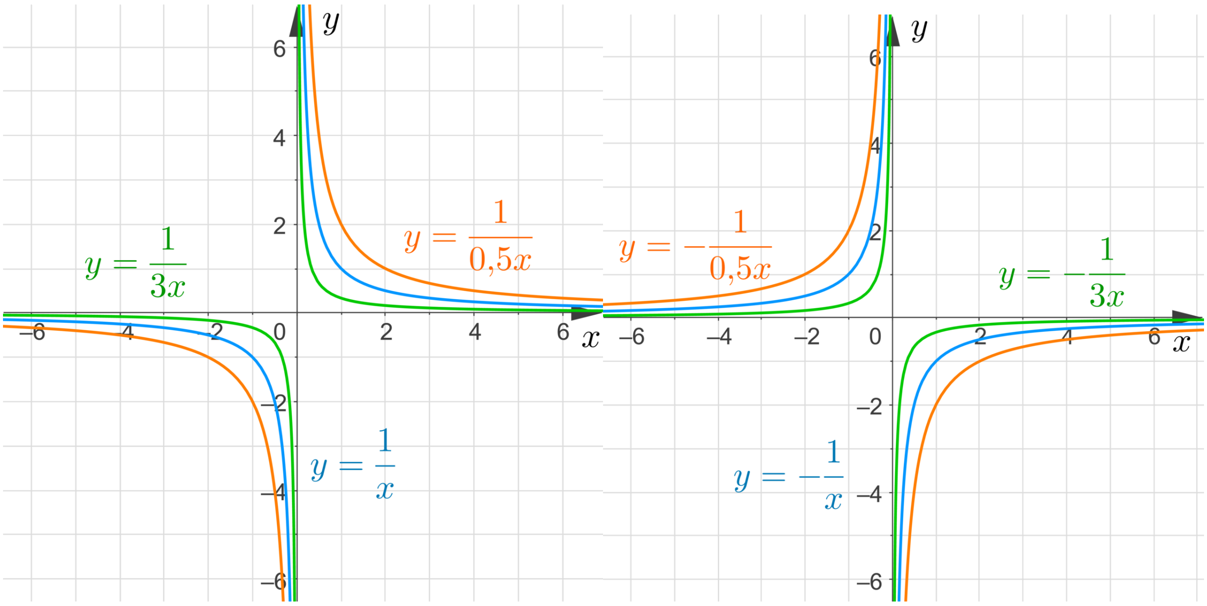
Наоборот, при $x=100$ значение $y=0,02$, при $x=1000$ $y=0,002$ и т. д. Это означает, что при малых по модулю значениях x график $y=\dfrac{k}{x}$ приближается к оси ординат, но не прикасается к ней и не пересекает её, так как $x\neq 0$. Если же значения модуля x неограниченно увеличиваются, то график $y=\dfrac{k}{x}$ приближается к оси абсцисс, но также не прикасается к ней и не пересекает её, так как $y\neq 0$. Такие прямые, к которым приближается график функции, называются *асимптотами* данного графика.

Часто думают, что график функции, стремящийся к асимптоте, никогда не пересекает её. Это неверно. Можно привести примеры функций, графики которых стремятся к асимптоте, пересекая её. Например, у такого графика



асимптотой является ось Ox. График функции при увеличении x приближается к ней, но тем не менее он бесконечно много раз её пересекает.

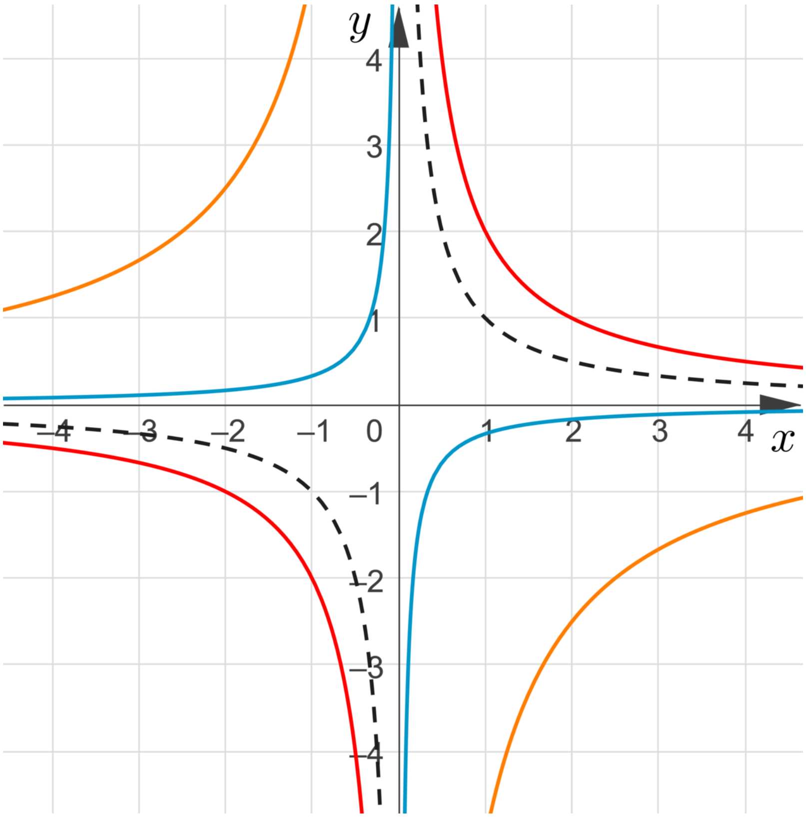
Приведем ещё несколько примеров графиков функций обратной пропорциональности:



Подведем итог:

$1)$ при положительных значениях k график функции $y = \frac{k}{x}$ находится в I и III четвертях, при отрицательных $-$ во II и IV;$2)$ чем меньше по модулю коэффициент k, тем сильнее график “вжимается” в угол между осями координат.

Дан график функции $y = \frac{1}{x}$ (пунктирной линией) и графики нескольких функций $y = \frac{k}{x}$. Определите знаки коэффициентов k и сравните $|k|$ с единицей.



Судя по четвертям, в которых находятся ветви гипербол, у функции, график которой выделен красным цветом, коэффициент $k > 0$. У функций, графики которых выделены синим и оранжевым цветами, коэффициенты $k < 0$.

Кроме того, синяя гипербола сильнее, чем гипербола функции $y = \dfrac{1}{x}$, прижата к осям координат, а красная и оранжевая идут более плавно дальше от осей, поэтому у функции, график которой отображается синей гиперболой, $|k| < 1$, а у функций, графики которых отображаются красной и оранжевой гиперболами, $|k| > 1$.