

Уравнения, содержащие неизвестную под знаком корня, называются иррациональными.

Чтобы решить иррациональное уравнение, необходимо:

1. Преобразовать заданное иррациональное уравнение к виду:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \text{ или } \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$$

2. Обе части уравнение возвести в квадрат: $\sqrt{f(x)}^2 = (g(x))^2$

$$\text{или } \sqrt{f(x)}^2 = \sqrt{g(x)}^2$$

3. Решить полученное рациональное уравнение.
4. Сделать проверку корней, так как возведение в четную степень может привести к появлению посторонних корней. (Проверку можно сделать при помощи подстановки найденных корней в исходное уравнение.)

Решите уравнение $\sqrt{4x-3} = x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите наименьший из них.

Решение:

Обе части уравнение возведем в квадрат:

$$\sqrt{4x-3}^2 = x^2$$

Получаем квадратное уравнение:

$$4x - 3 = x^2$$

Перенесем все слагаемые в левую часть уравнения:

$$-x^2 + 4x - 3 = 0$$

Решим данное квадратное уравнение устным способом, так как

$$a + b + c = 0$$

$$-1 + 4 - 3 = 0, \text{ следовательно } x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-3}{-1} = 3$$

Проведем проверку корней, подставив их вместо x в исходное уравнение

$$\sqrt{4 \cdot 1 - 3} = 1$$

$1 = 1$, получили в результате проверки верное равенство, следовательно $x_1 = 1$ подходит.

$$\sqrt{4 \cdot (3) - 3} = 3$$

$$\sqrt{9} = 3$$

$3 = 3$, получили в результате проверки верное равенство, следовательно корень $x_2 = 3$ подходит

$x_1 = 1$ наименьший корень.

Ответ: 1

Так как в иррациональных уравнениях иногда необходимо возводить в квадрат не только число, но и целое выражение, необходимо вспомнить формулы сокращенного умножения:

1. Квадрат разности двух чисел равен квадрату первого числа минус удвоенное произведение первого на второе число плюс квадрат второго числа. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
2. Квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа плюс удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Решить уравнение: $x - 6 = \sqrt{8 - x}$

Возведем обе части уравнения в квадрат

$$(x - 6)^2 = 8 - x$$

В левой части уравнения при возведении в квадрат получаем формулу сокращенного умножения квадрат разности. В правой части уравнения квадрат и корень компенсируют друг друга и в результате остается только подкоренное выражение

$$x^2 - 2 \cdot 6 \cdot x + 6^2 = 8 - x$$

$$x^2 - 12x + 36 = 8 - x$$

Получили квадратное уравнение. Все слагаемые переносим в левую часть уравнения. При переносе слагаемых через знак равно их знаки меняются на противоположные.

$$x^2 - 12x + 36 - 8 + x = 0$$

Приводим подобные слагаемые:

$$x^2 - 11x + 28 = 0$$

Найдем корни уравнения через дискриминант:

$$D = b^2 - 4ac = 121 - 4 \cdot 28 = 121 - 112 = 9 = 3^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{11 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = 7; x_2 = 4$$

Проведем проверку корней, подставив их вместо икса в исходное уравнение

$$x_1 = 7$$

$$7 - 6 = \sqrt{8 - 7}$$

$1 = 1$, получили верное равенство, следовательно, корень нам подходит.

$$x_2 = 4$$

$$4 - 6 = \sqrt{8 - 4}$$

$-2 = 2$, получили неверное равенство, следовательно, данный корень посторонний.

Ответ: 7