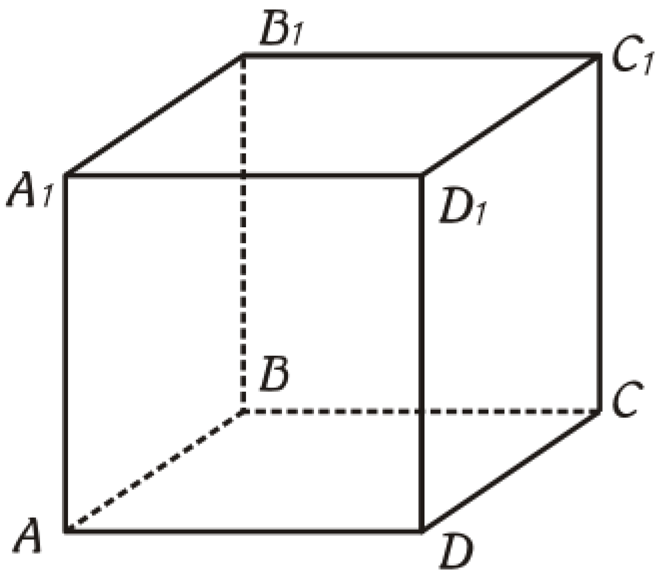
Данная тема посвящена задачам на комбинацию пространственных фигур, нахождению элементов вписанных и описанных цилиндров, конусов и сфер.

Рассмотрим объемные тела:

Параллелепипед называется прямоугольным, если его боковые ребра перпендикулярны к основанию, а основания представляют собой прямоугольники.



Формулы вычисления объема и площади поверхности прямоугольного параллелепипеда.

Чтобы были понятны формулы, введем обозначения:

a, b и c - длина, ширина и высота соответственно;

$P_{\text{осн}}$ - периметр основания;

$S_{\text{осн}}$ - площадь основания;

$S_{\text{бок}}$ - площадь боковой поверхности;

$S_{\text{п.п}}$ - площадь полной поверхности;

V - объем.

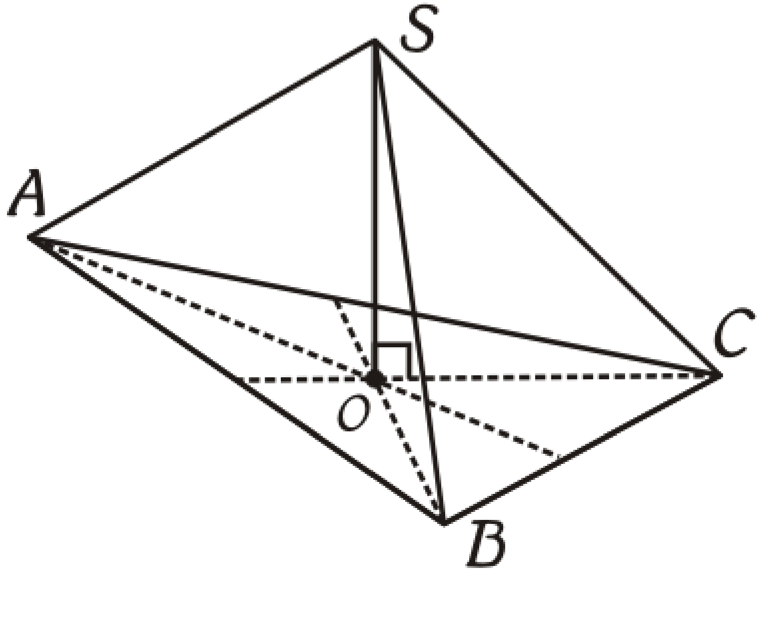
$V = a \cdot b \cdot c$ – объем равен произведению трех измерений прямоугольного параллелепипеда.

$S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot c = 2\left(a + b\right) \cdot c$ – площадь боковой поверхности равна произведению периметра основания на боковое ребро.

$S_{\text{п.п}} = 2\left(ab + bc + ac\right)$.

Пирамидой называется многогранник, одна грань которого (основание) – многоугольник, а остальные грани (боковые)- треугольники, имеющие общую вершину.

Высотой (h) пирамиды является перпендикуляр, опущенный из ее вершины на плоскость основания.



SO - высота

Пирамида называется правильной, если в ее основании лежит правильный многоугольник, а ее высота приходит в центр основания (в центр описанной окружности). Все боковые ребра правильной пирамиды равны, следовательно, все боковые грани являются равнобедренными треугольниками.

Формулы вычисления объема и площади поверхности правильной пирамиды.

h_a - высота боковой грани (апофема)

$S_{\text{бок}} = \frac{P_{\text{осн}} \cdot h_a}{2}$

$S_{\text{п.п}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$

$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$

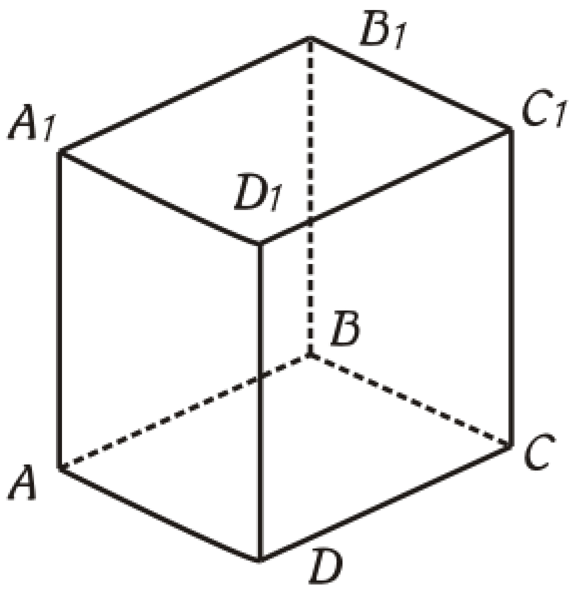
В основании лежат правильные многоугольники, рассмотрим их площади:

1. Для равностороннего треугольника $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где a - длина стороны.
2. Квадрат $S = a^2$, где a - сторона квадрата.
3. Правильный шестиугольник.

Шестиугольник разделим на шесть правильных треугольников и найдем площадь как:

$S = 6 \cdot S_{\text{треугольника}} = \frac{6 \cdot a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3 \cdot a^2\sqrt{3}}{2}$, где a - сторона правильного шестиугольника.

Призма – это многогранник, состоящий из двух равных многоугольников, расположенных в параллельных плоскостях, и n-го количества параллелограммов.



Если боковые ребра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется прямой. Высота прямой призмы равна ее боковому ребру.

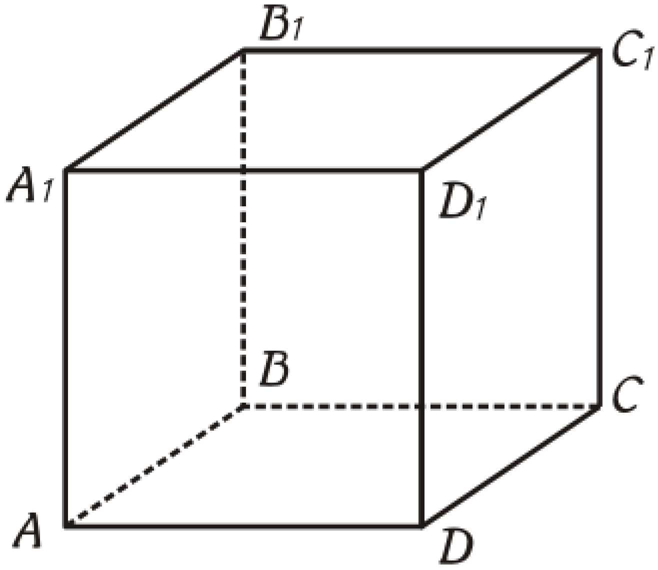
Формулы вычисления объема и площади поверхности призмы:

$S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot h$

$S_{\text{п.п}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$

$V = S_{\text{осн}} \cdot h$

Куб – правильный многогранник, каждая грань которого представляет собой квадрат. Все ребра куба равны.



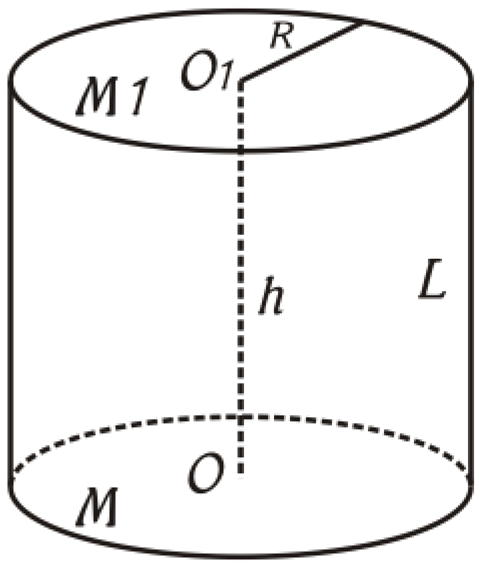
Объем куба: $V = a^3 = \frac{d^3}{3\sqrt{3}}$.

Площадь полной поверхности: $S_{\text{п.п}} = 6\text{a}^2 = 2d^2$

Радиус сферы, описанной около куба: $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

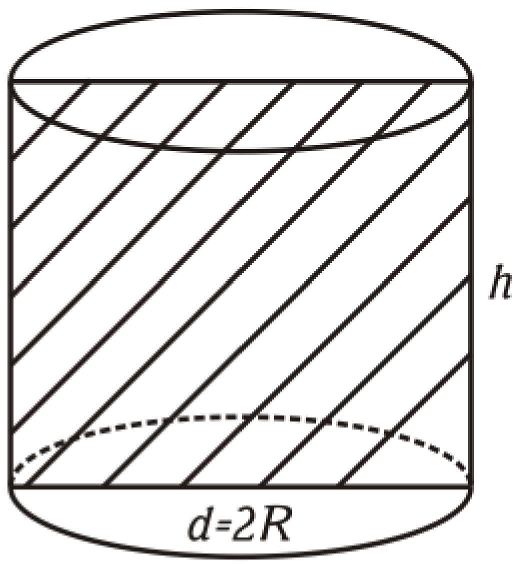
Радиус сферы, вписанной в куб: $r = \frac{a}{2}$

Цилиндр – тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами с границами M и M_1. Цилиндрическая поверхность называется боковой поверхностью цилиндра, а круги – основаниями цилиндра.



Образующие цилиндрической поверхности называются образующими цилиндра, на рисунке образующая L.

Осевое сечение цилиндра - это прямоугольник, у которого одна сторона равна диаметру основания, а вторая – высоте цилиндра.



Основные понятия и свойства цилиндра:

1. Радиусом цилиндра называется радиус его основания (R).
2. Высотой цилиндра называется расстояние между плоскостями оснований (в прямом цилиндре высота равна образующим).

3. Осью цилиндра называется отрезок, соединяющий центры оснований (OO_1).
4. Если призму вписать в цилиндр, то ее основаниями будут являться равные многоугольники, вписанные в основание цилиндра, а боковые ребра - образующими цилиндра.
5. Если цилиндр вписан в призму, то ее основания - равные многоугольники, описанные около оснований цилиндра. Плоскости граней призмы касаются боковой поверхности цилиндра.
6. Если в цилиндр вписана сфера, то радиус сферы равен радиусу цилиндра и равен половине высоте цилиндра.

$R_{\text{сферы}} = R_{\text{цилиндра}} = \frac{h_{\text{цилиндра}}}{2}$

Площадь поверхности и объем цилиндра.

Площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту.

$S_{\text{бок.пов.}} = 2\pi R \cdot h$

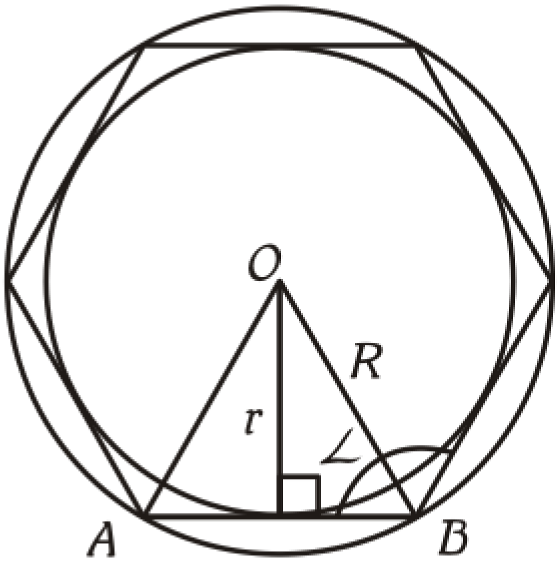
Площадь поверхности цилиндра равна сумме двух площадей основания и площади боковой поверхности.

$S_{\text{полной.пов.}} = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot h = 2\pi R\left(R + h\right)$

Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту.

$V = \pi R^2 \cdot h$

Связь между сторонами правильного n-угольника и радиусами описанной и вписанной окружностей



$\mathrm{AB} = a_n$ - сторона правильного многоугольника

R - радиус описанной окружности

r - радиус вписанной окружности

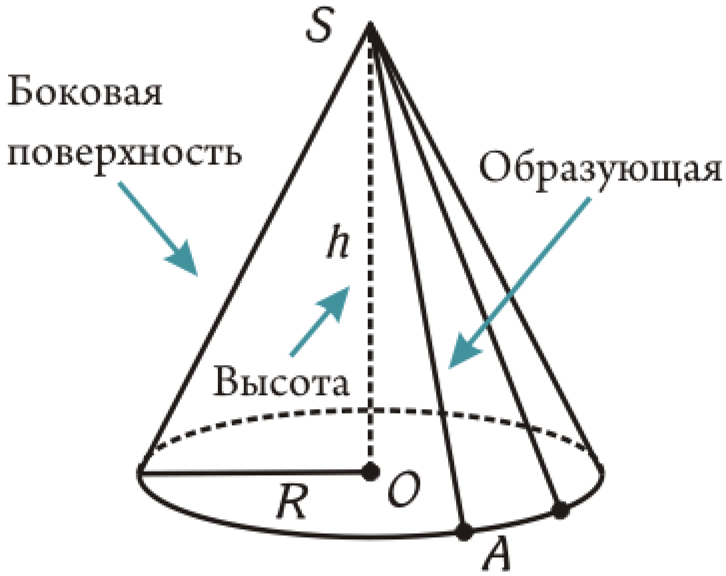
n - количество сторон и углов

$a_n = 2 \cdot R \cdot sin\frac{180°}{n}$;

$r = R \cdot cos\frac{180°}{n}$;

$a_n = 2 \cdot r \cdot tg\frac{180°}{n}$.

Конусом (круговым конусом) называется тело, которое состоит из круга, точки, не лежащей в плоскости этого круга, и всех отрезков, соединяющих заданную точку с точками круга.



Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются образующими и обозначаются (l).

$l = SA$

Высотой конуса называется перпендикуляр, опущенный из его вершины на плоскость основания. Ось прямого конуса и его высота равны.

SO - высота и ось конуса.

Свойства конуса:

1. Все образующие конуса равны.

2. Осевым сечением конуса является равнобедренный треугольник, основание которого равно двум радиусам, а боковые стороны равны образующим конуса.

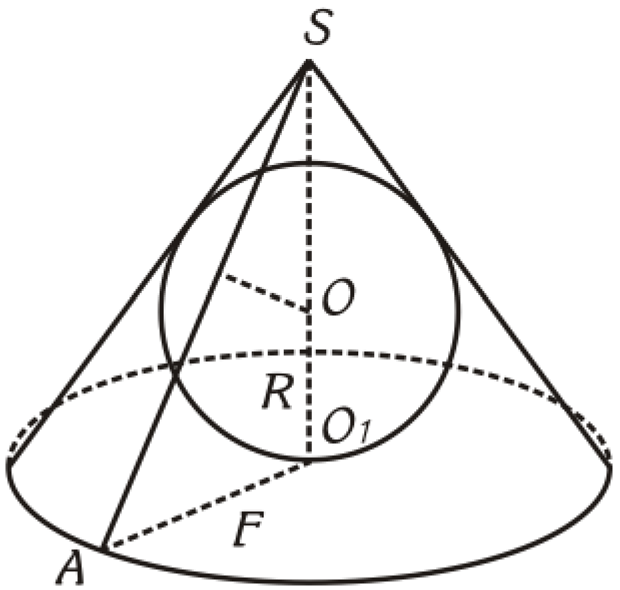
3. Если боковая поверхность конуса – полукруг, то осевым сечением является равносторонний треугольник и угол при вершине осевого сечения равен 60° и радиус основания равен высоте конуса.

$R_{\text{осн}} = h$

4. Если конус вписан в сферу, то сфера содержит окружность конуса и его вершину, радиус сферы равен радиусу конуса и равен высоте конуса.

$R_{\text{сферы}} = R_{\text{конуса}} = h_{\text{конуса}}$

5. Если в конус, осевое сечение которого – равносторонний треугольник, вписан шар, то радиус основания конуса в $\sqrt{3}$ раз больше радиуса шара, а высота конуса в 3 раза больше радиуса шара.



$r = R\sqrt{3}; SO_1 = 3R$

Площадь поверхности и объем конуса.

Площадь боковой поверхности конуса равна произведению половины длины окружности основания на образующую.

$S_{\text{бок.пов.}} = \pi R \cdot l$

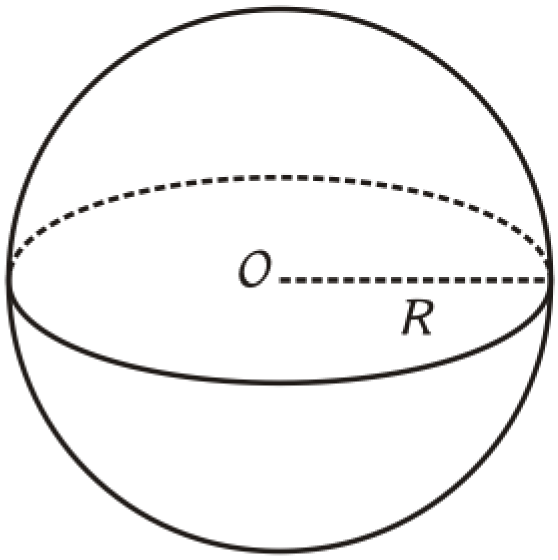
Площадь поверхности конуса равна сумме площади основания и площади боковой поверхности.

$S_{\text{полной.пов.}} = \pi R^2 + \pi R \cdot l = \pi R\left(R + l\right)$

Объем конуса равен трети произведения площади основания на высоту.

$V = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3}$

Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии (R) от данной точки (центра сферы O).



Тело, ограниченное сферой, называется шаром.

Осевое сечение шара это круг, радиус которого равен радиусу шара. Осевым сечением является самый большой круг шара.

Площадь поверхности сферы: $S_{\text{п.п}} = 4\pi \cdot R^2 = \pi \cdot d^2$, где R - радиус сферы, d - диаметр сферы

Объем шара: $V = \frac{4\pi \cdot R^3}{3} = \frac{\pi \cdot d^3}{6}$, где R - радиус шара, d - диаметр шара.

Многогранник – это поверхность, составленная из многоугольников, ограничивающая некоторое геометрическое тело.

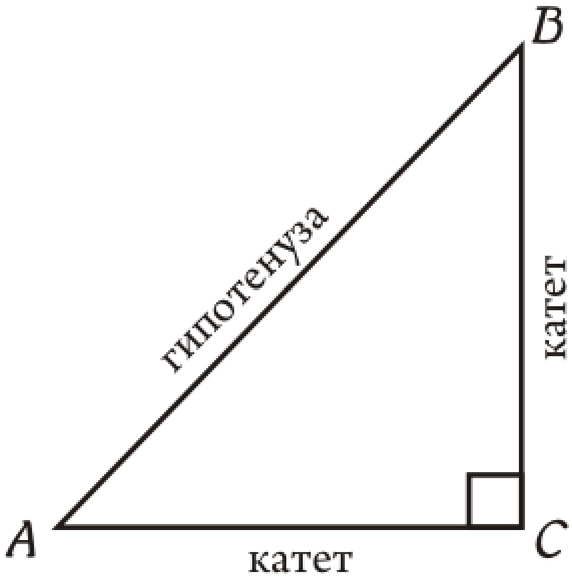
Задачи на нахождение расстояния между точками составного многогранника.

В данных задачах приведены составные многогранники, у которых двугранные углы прямые. Надо соединить расстояние между заданными точками и достроить его до прямоугольного треугольника.

Далее остается воспользоваться теоремой Пифагора для нахождения нужной стороны.

Теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.

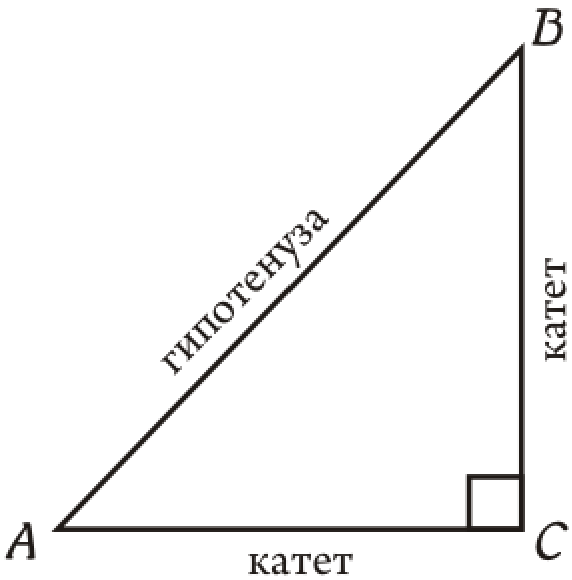


$AC^2 + BC^2 = AB^2$

Задачи на нахождение угла или значения одной из тригонометрических функций обозначенного в условии угла составного многогранника.

Так как в данных задачах приведены составные многогранники, у которых все двугранные углы прямые, то достроим угол до прямоугольного треугольника и найдем его значение по тригонометрическим значениям.

Соотношение между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике:



В прямоугольном треугольнике ABC, с прямым углом C:

Для острого угла B: AC - противолежащий катет; BC - прилежащий катет.

Для острого угла A: BC - противолежащий катет; AC - прилежащий катет.

1. Синусом (sin) острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.
2. Косинусом (cos) острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.
3. Тангенсом (tg) острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету.

Значения тригонометрических функций некоторых углов:

α	30	45	60
$sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$ctg\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$