Физический смысл производной и первообразной и их практическое применение

В ходе одного, из уроков физики, к задаче о нахождении пути при известном уравнении скорости было найдено простое и оригинальное решение с использованием первообразной. Решение получилось коротким и уложилось в пару строк. Это послужило поводом к началу исследования.

Понятие производной

Пусть функция $y=f(x)$ определена в точке x и в некоторой ее окрестности. Дадим аргументу x приращение Δx такое, чтобы не выйти из указанной окрестности. Найдем соответствующее приращение функции Δy (при переходе от точки x к точке $x+\Delta x$) и составим отношение. Если существует предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, то указанный предел называют производной функции $y=f(x)$ в точке x и обозначают $f'(x)$.

Физический смысл производной

Если $s(t)$ – закон прямолинейного движения тела, то производная выражает мгновенную скорость в момент времени t: $v = s'(t)$.

или если некоторый процесс протекает по закону $s = s(t)$, то производная $s'(t)$ выражает скорость протекания процесса в момент времени t.

Рассматривая производную скорости по времени t, получим скорость изменения скорости, т. е. ускорение: $a=v'=(s')'=s''(t)$

Понятие первообразной

Функцию $y=f(x)$ называют первообразной для функции $y=f(x)$ на заданном промежутке X, если для любого x € X выполняется равенство $F'(x)=f(x)$.

Физический смысл первообразной

Если уравнение мгновенной скорости в момент времени t при прямолинейном движении $v=v(t)$, то первообразная для v будет являться уравнением движения.

Нахождение максимума и минимума уравнения

Для того, чтобы найти точки максимума или минимума, нужно найти производную от заданного уравнения. Затем следует определить, на каких промежутках производная равна нулю. Для этого приравниваем производную к нулю и находим корни получившегося уравнения. Если в точке функция меняет свой знак на противоположный, значит эта точка является экстремумом функции. От того, как меняется знак производной, зависит то, точка это минимума или же максимума.

Применение производной в физике

С понятием производной в физике мы впервые встречаемся в 10 классе при изучении понятия скорости и ускорения, далее в 11 классе в разделе механические и электромагнитные колебания, при изучении явления электромагнитной индукции, а при решении задач без знания понятий производной и первообразной и умения их вычислять, просто не обойтись:

- нахождение скорости/ускорения при заданном уравнении движения от времени (обратные преобразования делаются при помощи интеграла);

- решение уравнения колебаний;

- графические задачи на первый закон термодинамики;

- графические задачи в электродинамике.

Практическая часть.

Задача 1

Координата точки меняется со временем по закону x = 11 + 35t + 35t3 Определить ускорение точки через 1 с.

Дано: x = 11 + 35t + 35t3 t = 1с.

Решение:

При решении этой задачи без понятия производной не обойтись. Мы знаем, что v = x’; a = v’ = x’’

Таким образом, получаем: a = (11 + 35t + 35t3)’’ = (35 + 105t2)’ = 210t = 210м/с2

Ответ: 210м/с2

Задача 2

Скорость движения автомобиля от времени задана уравнением v=3 + 2t. Какой путь пройдет автомобиль за 6 секунд?

Дано: v = 3 + 2t м/с t=6 с

Решение:

При традиционном решении данной задачи строится график зависимости v(t) и путь находится как площадь фигуры, ограниченной графиком и осями координат. Приведем это решение:

Роль оснований играет v0 и v, высота – t

Тогда S =. Определим v0 и v.

v = 3 + 2tv = v0 + at v0 = 3 м/сv = 3 + 2·6 = 15 м/с

$S = 2*(15+3)/2 = 54$ м

Мы же хотим предложить, на наш взгляд, более простой и рациональный способ решения задачи. В принципе, получившаяся фигура является частным случаем криволинейной трапеции и её площадь можно найти с помощью интеграла:

. Подставляем t и получаем:

$S = 54$ м.

Ответ: 54 м.

Мы попробовали применить данный способ к решению любых задач данного типа и столкнулись с проблемой:

Задача 3

Прямолинейное движение точки заданно уравнением $x = -2 + 3t – 0,5t2$ Найти путь за 8 секунд.

Дано: $x = -2 + 3t – 0,5t2$ $t = 8$ с.

Решение:

Решим данную задачу графически. Найдем уравнение зависимости v(t) и построим его график.

$vx = v0x + axt$

Найдем v0x и ax из уравнения:

$v0x = 3$ м/с $ax = -1$ м/с2 $vx =3 – t$.

Построим график

Попробуем применить понятие первообразной.

$v(t) = 3 – t$.

$S = 24 – 32 = -8$ м

Путь не может быть отрицательным, следовательно, в данном случае этот способ решения не может быть применен.

Ответ: 17,5 м.

Таким образом, наша гипотеза о применении первообразной при решении задач на нахождение пути при равноускоренном движении подтверждается лишь частично, в случае, когда график v(t) и фигура, ограниченная этим графиком находятся в первой четверти, выше оси t.

Теперь рассмотрим задачи из раздела «Колебания»:

Задача 4 (задачник УГНТУ)

Дано: $x = 0{,}05 \cos(2\pi t/3)$ $t = 3$ с a - ?

Решение:

Необходимо вспомнить, что: $a = x''$.

Поступим тем же образом и применим первообразную: $a = - 0{,}05 \cos(2\pi t/3)$.

$a = -2$ м/с

Ответ: -2 м/с

Задача 5 (задачник УГНТУ)

Дано: $q = 0{,}006 \sin(100\pi t)$ Кл $t = 1/300$ с i - ?

Решение:

Поскольку $i = q'$, то подходим к решению аналогично, как и в разделе механики: $i = (0{,}006 \sin(100\pi t))' = 0{,}006 \cos(100\pi t)*100\pi = 0{,}6\pi \times \times\cos(100\pi t) = 0{,}6\pi \cos = 0{,}3\pi$ А.

Ответ: 0,3π А.

Задача 6 (задачник УГНТУ)

Какую максимальную мощность во внешней цепи сопротивлением 15 Ом может выделить источник с ЭДС 15 В.

В этой задаче используется понятие производной при исследовании функции на максимум.

$\varepsilon = 15$ В

$R = 15$ Ом

P_{max} - ?

Решение:

. , $U = IR$

$P = I2R$.

Чтобы найти P_{max} , найдем P' и приравняем к 0. Функция сложная!

⇨ $R + r = 2R$, $R = r$ – условие P_{max}.

Ответ: 3,75 Вт

Задача 7 (учебник «Алгебра и начала анализа. Профильный уровень. Теория» 11класс, А. Мордкович)

Тело движется прямолинейно по закону $s = 10t2 + 3t – 1$. Доказать, что это движение происходит под действием постоянной силы.

Решение: $s' = (10t2 + 3t – 1)' = 20t + 3$; $s'' = (20t + 3)' = 20$. Значит, ускорение постоянно и равно 20м/с2. Так как по закону Ньютона действующая сила пропорциональна ускорению, то она постоянна

Задача 8 (учебник «Алгебра и начала анализа. Профильный уровень. Теория» 11класс, А. Мордкович)

Плот подтягивают к берегу при помощи каната, который наматывается на ворот со скоростью 3 м/мин. Определить скорость движения плота в тот момент, когда его расстояние до берега равно 25 м, если известно, что ворот расположен выше поверхности воды на 4 м.

Решение: Пусть s = PW – длина каната между воротом W и плотом P, x = PB – расстояние плота от берега, WB = 4 м, следовательно,. Здесь x есть функция от времени t, т. е. x = x(t). нам нужно найти скорость движения плота, т. е. Имеем:. Значит , откуда. По условию , и, следовательно,

Тогда. Итак, искомая скорость примерно равна 3,04 м/мин.

Задача 9 (учебник «Алгебра и начала анализа. Профильный уровень. Теория» 11класс, А. Мордкович)

В степи, на расстоянии 9 км к северу от шоссе, идущего с запада на восток, находится поисковая партия. В 15 км к востоку от ближайшей на шоссе к поисковой партии точке расположен райцентр. Поисковая партия отправляет курьера-велосипедиста в райцентр. Каков должен быть маршрут курьера, чтобы он прибыл в райцентр в кратчайший срок, если известно, что по степи он едет со скоростью 8 км/ч, а по шоссе – со скоростью 10 км/ч?

Решение: Сделаем чертеж. На рисунке точка P означает местонахождение поисковой партии, прямая l – шоссе, B – райцентр, PA = 9 км, AB = 15 км, PBM – маршрут курьера, причем положение точки M неизвестно.

1) оптимизируемая величина – время движения курьера P в B; надо найти tнаим.

2) Пусть AM = x. По смыслу задачи точка M моет занять любое положение между A и B, не исключая самих точек A и B. Значит реальные границы изменения x таковы: 0≤x≤15.

3) Выразим t через x. Имеем:. Этот путь велосипедист едет со скоростью 8 км/ч, значит, время t, затраченное на этот путь, выражается формулой Далее, MB=15 – x. Этот путь велосипедист едет со скоростью 10 км/ч, значит, время t2, затраченное на этот путь, выражается формулой. Найдем суммарное время t, затраченное на весь путь:

Итак, ,

4) Для функции найдем наименьшее значение на отрезке [0;15].

Находим t':

Производная t' существует при всех точках x. Найдем точки, в которых t' = 0. Имеем:

Значение x=12 принадлежит отрезку [0;15].

Составим таблицу значений функции, куда включим значения функции на концах отрезка и в найденной стационарной точке:

x 0 12 15

Следовательно, tнаим = (поскольку 87 <).

Ответ: Так как tнаим достигается при x=12, то велосипедисту надо ехать по такому маршруту PBM, чтобы расстояние между точками A и M на шоссе было равно 12 км.