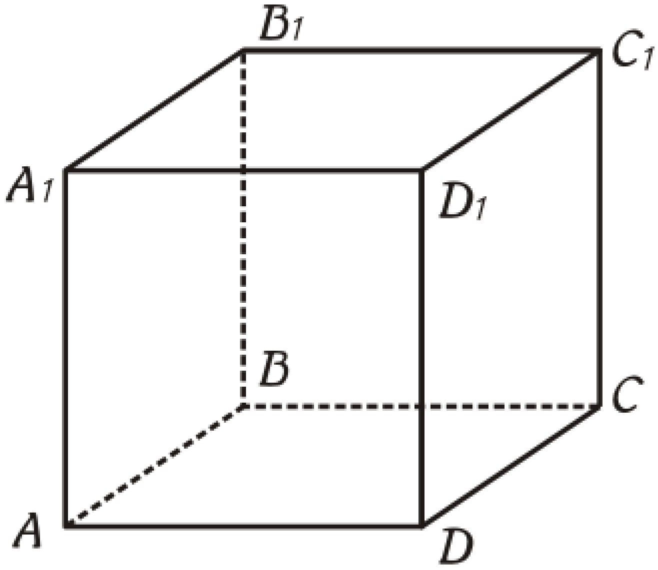
Куб – правильный многогранник, каждая грань которого представляет собой квадрат. Все ребра куба равны.



Свойства куба:

1. В кубе 6 граней и все они являются квадратами.

2. Противоположные грани попарно параллельны.

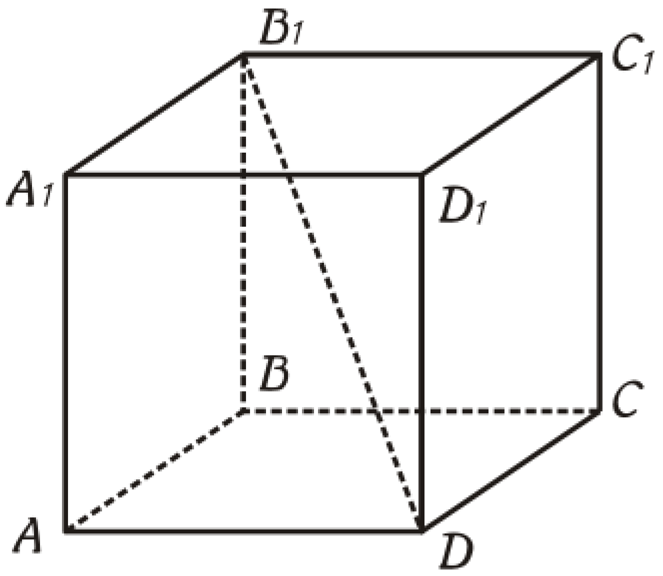
3. Все двугранные углы куба – прямые.

4. Диагонали равны.

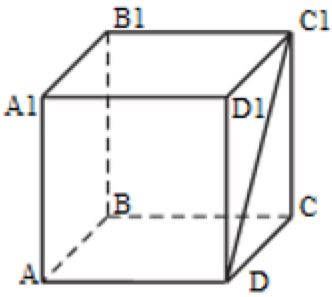
5. Куб имеет 4 диагонали, которые пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

6. Диагональ куба в $\sqrt{3}$ раз больше его ребра

$B_1D = AB\sqrt{3}$



7. Диагональ грани куба в $\sqrt{2}$ раза больше длины ребра.



$DC_1 = DC\sqrt{2}$

Пусть a – длина ребра куба, d – диагональ куба, тогда справедливы формулы:

Объем куба: $V = a^3 = \frac{d^3}{3\sqrt{3}}$.

Площадь полной поверхности: $S_{\text{п.п}} = 6\text{a}^2 = 2d^2$

Радиус сферы, описанной около куба: $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

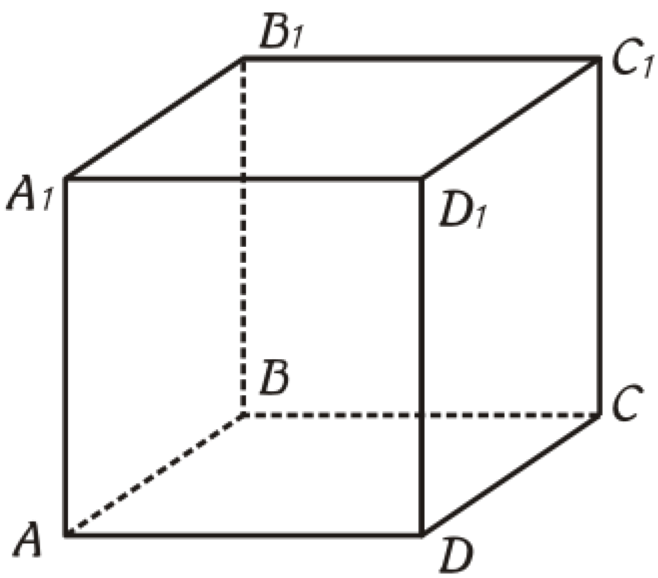
Радиус сферы, вписанной в куб: $r = \frac{a}{2}$

При увеличении всех линейных размеров куба в k раз, его объём увеличится в k^3 раз.

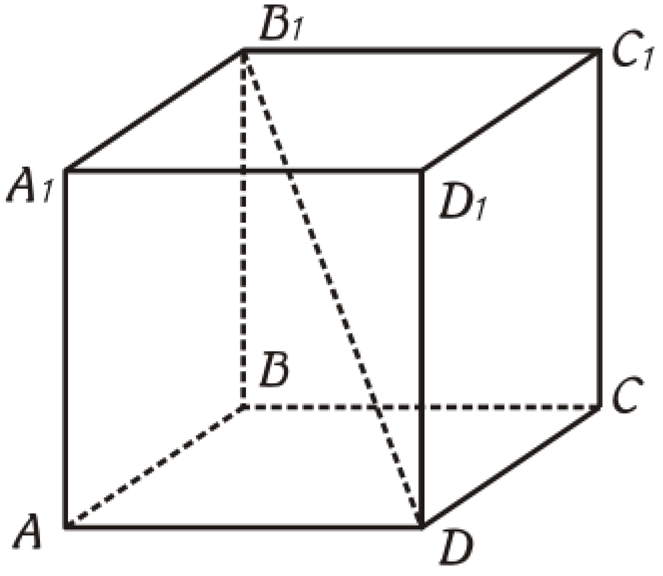
При увеличении всех линейных размеров куба в k раз, площадь его поверхности увеличится в k^2 раз.

Прямоугольный параллелепипед

Параллелепипед называется прямоугольным, если его боковые ребра перпендикулярны к основанию, а основания представляют собой прямоугольники.



1. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений (длины, ширины, высоты).



$B_1D^2 = AD^2 + DC^2 + C_1C^2$

Формулы вычисления объема и площади поверхности прямоугольного параллелепипеда.

Чтобы были понятны формулы, введем обозначения:

a-длина;

b-ширина;

c-высота(она же боковое ребро);

$P_{\text{осн}}$-периметр основания;

$S_{\text{осн}}$-площадь основания;

$S_{\text{п.п}}$-площадь полной поверхности;

V-объем.

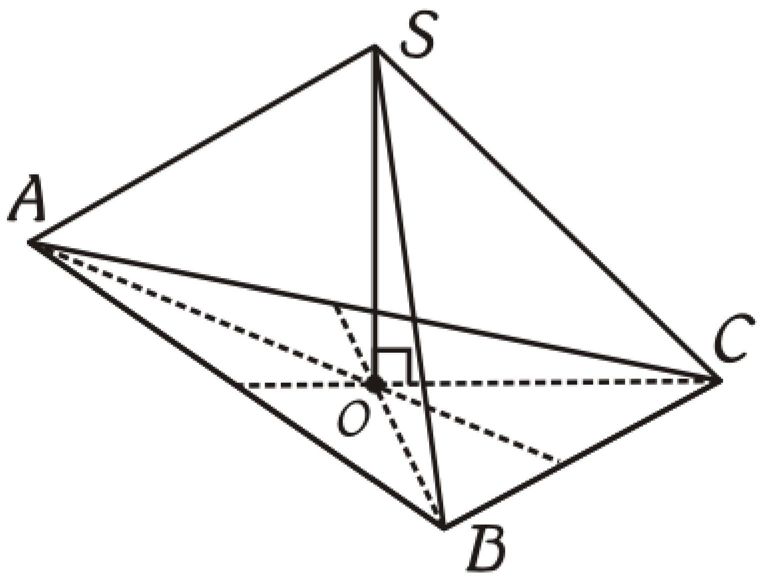
$V = a \cdot b \cdot c$ – объем равен произведению трех измерений прямоугольного параллелепипеда.

$S_{\text{п.п}} = 2\left(ab + bc + ac\right).$

Пирамида

Пирамидой называется многогранник, одна грань которого (основание) – многоугольник, а остальные грани (боковые) - треугольники, имеющие общую вершину.

Высотой (h) пирамиды является перпендикуляр, опущенный из ее вершины на плоскость основания.



SO - высота.

Формулы вычисления объема и площади поверхности правильной пирамиды.

h_a - высота боковой грани (апофема)

$S_{\text{бок}} = \frac{P_{\text{осн}} \cdot h_a}{2}$

$S_{\text{п.п}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$

$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$

В основании лежат правильные многоугольники, рассмотрим их площади:

1. Для равностороннего треугольника $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где a - длина стороны.
2. Квадрат $S = a^2$, где a - сторона квадрата.

Задачи на нахождение объема составного многогранника:

1. Разделить составной многогранник на несколько параллелепипедов.
2. Найти объем каждого параллелепипеда.
3. Сложить объемы.

Задачи на нахождение площади поверхности составного многогранника.

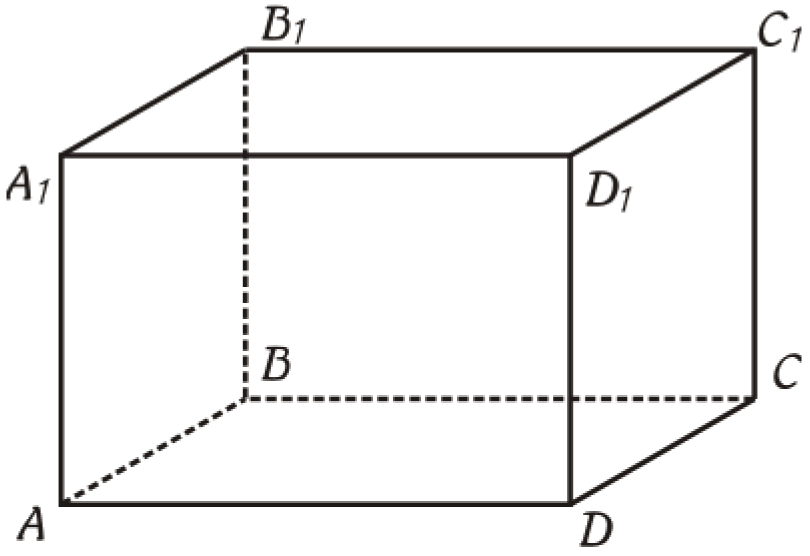
- Если можно составной многогранник представить в виде прямой призмы, то находим площадь поверхности по формуле:

$S_{\text{полн.пов.}} = P_{\text{осн}} \cdot h + 2S_{\text{осн}}$

Чтобы найти площадь основания призмы, надо разделить его на прямоугольники и найти площадь каждого.

- Если составной многогранник нельзя представить в виде призмы, то площадь полной поверхности можно найти как сумму площадей всех граней, ограничивающих поверхность.

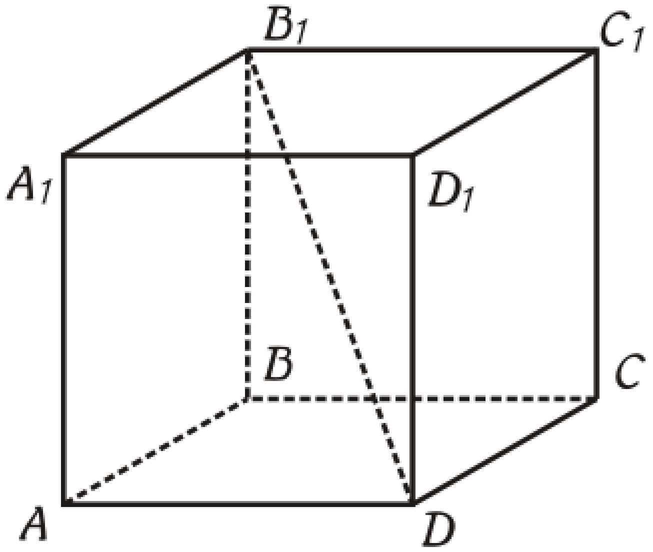
Параллелепипед называется прямоугольным, если его боковые ребра перпендикулярны к основанию, а основания представляют собой прямоугольники.



На рисунке изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Его основаниями являются прямоугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, а боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 перпендикулярны к основаниям.

Свойства прямоугольного параллелепипеда:

1. В прямоугольном параллелепипеде 6 граней и все они являются прямоугольниками.
2. Противоположные грани попарно равны и параллельны.
3. Все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда – прямые.
4. Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.
5. Прямоугольный параллелепипед имеет 4 диагонали, которые пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.
6. Любая грань прямоугольного параллелепипеда может быть принята за основание.
7. Прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра равны, называется кубом.
8. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений (длины, ширины, высоты).



$B_1D^2 = AD^2 + DC^2 + C_1C^2$

Формулы вычисления объема и площади поверхности прямоугольного параллелепипеда.

Чтобы были понятны формулы, введем обозначения:

a - длина;

b - ширина;

c - высота(она же боковое ребро);

$P_{\text{осн}}$ - периметр основания;

$S_{\text{осн}}$ - площадь основания;

$S_{\text{бок}}$ - площадь боковой поверхности;

$S_{\text{п.п}}$ - площадь полной поверхности;

V - объем.

$V = a \cdot b \cdot c$ – объем равен произведению трех измерений прямоугольного параллелепипеда.

$S_{бок} = P_{осн} \cdot c = 2\left(a + b\right) \cdot c$ – площадь боковой поверхности равна произведению периметра основания на боковое ребро.

$S_{п.п} = 2\left(ab + bc + ac\right)$.

Дополнительные сведения, которые пригодятся для решения задач:

Куб

a - длина стороны.

$V = a^3$;

$S_{бок} = 4\mathrm{a}^2$;

$S_{п.п} = 6\mathrm{a}^2$;

$d = a\sqrt{3}$ – диагональ равна длине стороны, умноженной на $\sqrt{3}$.

Пирамида

Пирамидой называется многогранник, одна грань которого (основание) – многоугольник, а остальные грани (боковые) - треугольники, имеющие общую вершину.

Высотой (h) пирамиды является перпендикуляр, опущенный из ее вершины на плоскость основания.

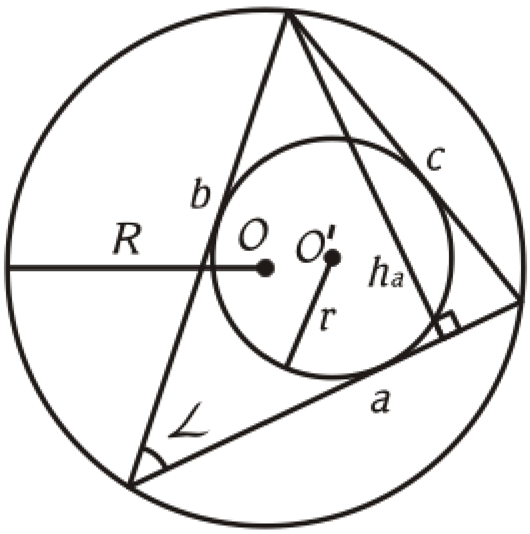
Объем любой пирамиды равен трети произведения основания и высоты.

$V = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot h$

В основании у произвольной пирамиды могут лежать различные многоугольники, рассмотрим площади некоторых из них.

В основании лежит треугольник.

Площадь треугольника.



- $S = \frac{a \cdot h_a}{2}$, где h_a - высота, проведенная к стороне a.
- $S = \frac{a \cdot b \cdot sin\alpha}{2}$, где a, b - соседние стороны, α - угол между этими соседними сторонами.
- Формула Герона $S = \sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}$, где p - это полупериметр $p = \frac{a+b+c}{2}$.
- $S = p \cdot r$, где r - радиус вписанной окружности.
- $S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$, где R - радиус описанной окружности.
- Для прямоугольного треугольника $S = \frac{a \cdot b}{2}$, где a и b - катеты прямоугольного треугольника.
- Для равностороннего треугольника $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где a - длина стороны.

В основании лежит четырехугольник.

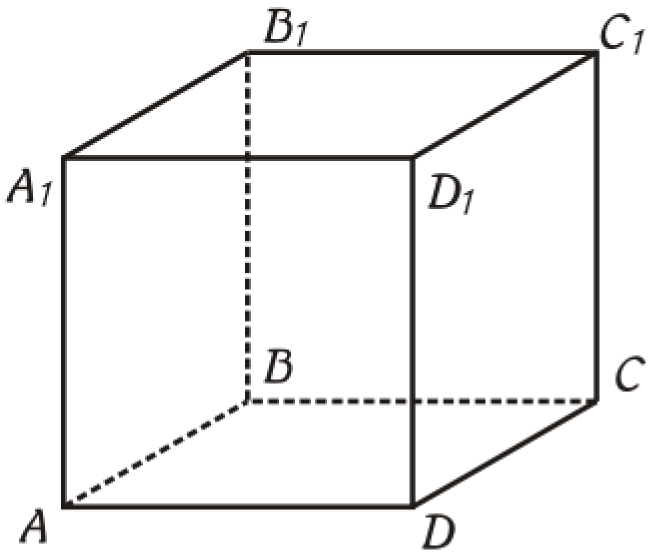
1. Прямоугольник. $S = a \cdot b$, где a и b - смежные стороны.
2. Ромб. $S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, где d_1 и d_2 - диагонали ромба. $S = a^2 \cdot sin\alpha$, где a - длина стороны ромба, а α - угол между соседними сторонами.
3. Трапеция. $S = \frac{\left(a+b\right) \cdot h}{2}$, где a и b - основания трапеции, h - высота трапеции.

4. Квадрат. $S = a^2$, где a - сторона квадрата.

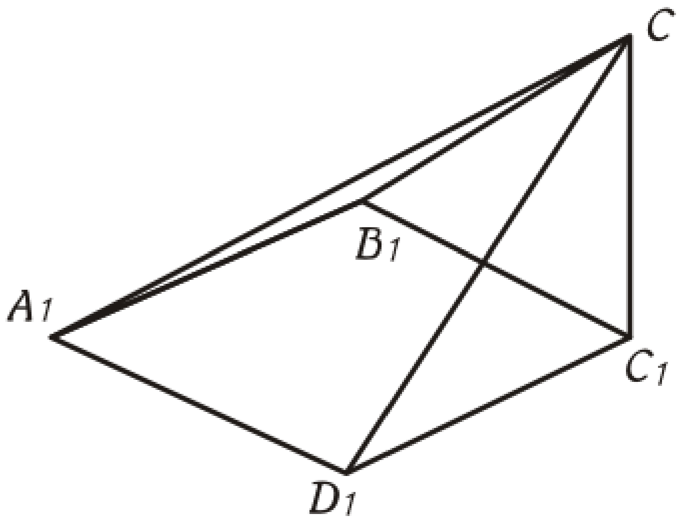
Пример:

Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки C, A_1, B_1, C_1, D_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 8, AD = 12, AA_1 = 4$.

Решение:



Изобразим прямоугольный параллелепипед и на нем отметим вершины многогранника C, A_1, B_1, C_1, D_1, получим в итоге четырехугольную пирамиду. В основании пирамиды лежит прямоугольник, так основание пирамиды и прямоугольного параллелепипеда совпадают.



Объем пирамиды, в основании которой лежит прямоугольник

$V = \frac{S_{\text{прямоугольника}} \cdot h}{3} = \frac{a \cdot b \cdot h}{3}$, где a и b - стороны прямоугольника.

Для нашего рисунка стороны прямоугольника – это $\mathrm{A_1B_1}$ и A_1D_1.

В прямоугольном параллелепипеде противоположные ребра равны и параллельны, следовательно, $AB = \mathrm{A_1B_1} = 8; AD = A_1D_1 = 12$.

Высотой в пирамиде $CA_1B_1C_1D_1$ будет являться ребро $\mathrm{CC_1}$, так как оно перпендикулярно основанию (из прямоугольного параллелепипеда).

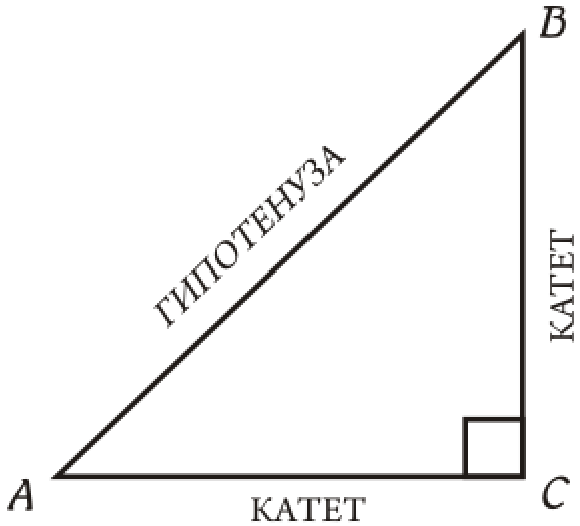
$\mathrm{CC_1} = \mathrm{AA_1} = 4$

$V = \frac{\mathrm{A_1B_1} \cdot A_1D_1 \cdot \mathrm{CC_1}}{3} = \frac{8 \cdot 12 \cdot 4}{3} = 128$

Ответ: 128

Теорема Пифагора.

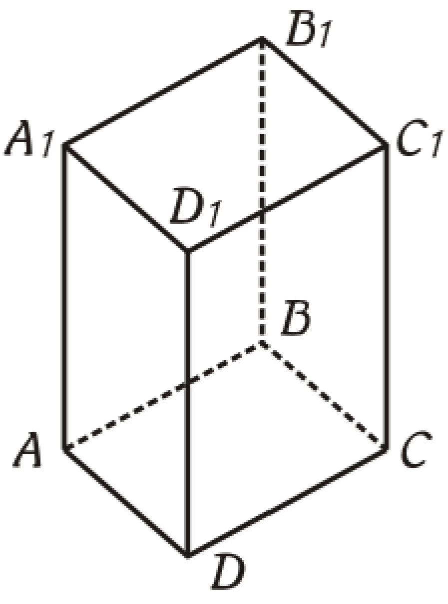
В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.



$AC^2 + BC^2 = AB^2$

Призма

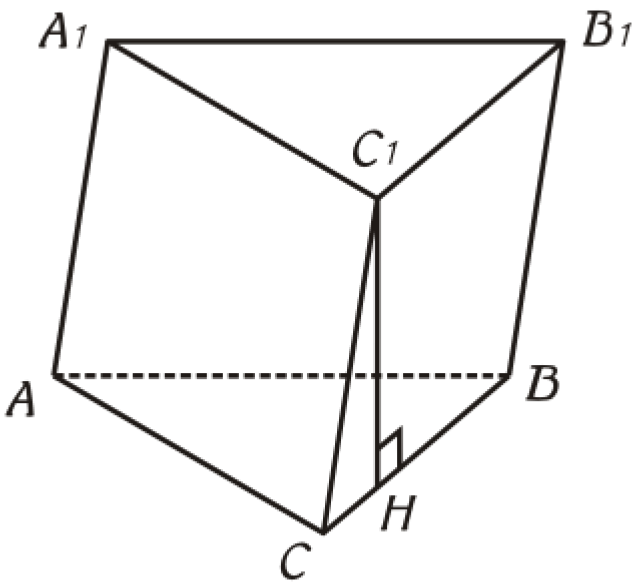
Призма – это многогранник, состоящий из двух равных многоугольников, расположенных в параллельных плоскостях, и n-го количества параллелограммов.



Многоугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ – называются основаниями призмы.

Параллелограммы $\mathrm{AA_1B_1B}, \mathrm{BB_1C_1C}$ и т.д.- боковыми гранями.

Перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется высотой призмы.



$\mathrm{C_1H}$ - высота

Если боковые ребра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется прямой, в противном случае – наклонной. Высота прямой призмы равна ее боковому ребру.

Формулы вычисления объема и площади поверхности призмы:

Чтобы были понятны формулы, введем обозначения:

$P_{\text{осн}}$ - периметр основания;

$S_{\text{осн}}$ - площадь основания;

$S_{\text{бок}}$ - площадь боковой поверхности;

$S_{\text{п.п}}$ - площадь полной поверхности;

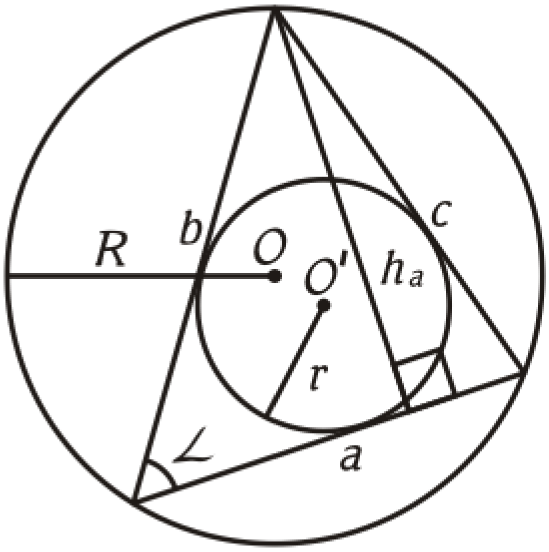
h - высота призмы.

$S_{бок} = P_{осн} \cdot h$

$S_{п\,.\,п} = S_{бок} + 2S_{осн}$

$V = S_{осн} \cdot h$

В основании призмы могут лежать различные многоугольники, рассмотрим площади некоторых из них.



В основании лежит треугольник.

1. $S = \frac{a \cdot h_a}{2}$, где h_a - высота, проведенная к стороне a
2. $S = \frac{a \cdot b \cdot sin\alpha}{2}$, где a, b - соседние стороны, α - угол между этими соседними сторонами.
3. Формула Герона $S = \sqrt{p\left(p - a\right)\left(p - b\right)\left(p - c\right)}$, где p - это полупериметр $p = \frac{a + b + c}{2}$
4. $S = p \cdot r$, где r - радиус вписанной окружности
5. $S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$, где R - радиус описанной окружности
6. Для прямоугольного треугольника $S = \frac{a \cdot b}{2}$, где a и b - катеты прямоугольного треугольника.

В основании лежит четырехугольник

1. Прямоугольник

$S = a \cdot b$, где a и b - смежные стороны.

2. Ромб

$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, где d_1 и d_2 - диагонали ромба

$S = a^2 \cdot sin\alpha$, где a - длина стороны ромба, а α - угол между соседними сторонами.

3. Трапеция

$S = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$, где a и b - основания трапеции, h - высота трапеции.

Прямая призма называется правильной, если ее основания – правильные многоугольники.

Рассмотрим площади правильных многоугольников:

1. Для равностороннего треугольника $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где a - длина стороны.

2. Квадрат

$S = a^2$, где a - сторона квадрата.

3. Правильный шестиугольник

Шестиугольник разделим на шесть правильных треугольников и найдем площадь как:

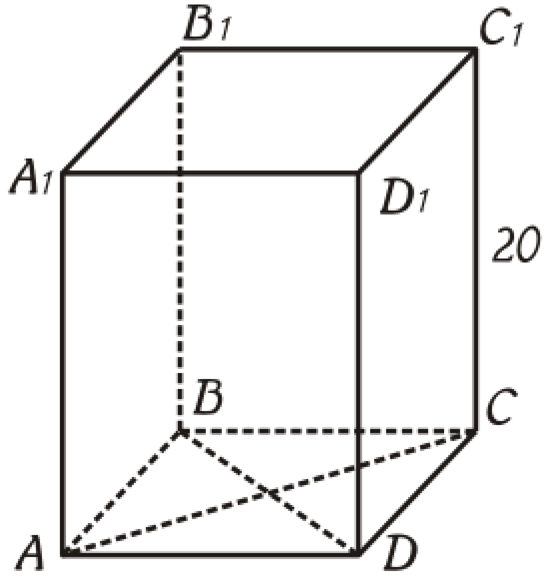
$S = 6 \cdot S_{\text{треугольника}} = \frac{6 \cdot a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3 \cdot a^2\sqrt{3}}{2}$, где a - сторона правильного шестиугольника.

Пример:

Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 10 и 24, а её боковое ребро равно 20.

Решение:

Построим прямую призму, в основании которой лежит ромб.



Распишем формулу площади полной поверхности:

$$S_{\text{п.п}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}} = P_{\text{осн}} \cdot h + 2S_{\text{ромба}}$$

В прямой призме высота равна боковому ребру, следовательно, $h = \mathrm{C_1C} = 20$

Чтобы найти периметр основания, надо узнать сторону ромба. Рассмотрим один из прямоугольных треугольников, получившихся, при пересечении диагоналей и воспользуемся теоремой Пифагора.

Диагонали точкой пересечения делятся пополам, поэтому катеты прямоугольного треугольника равны 5 и 12.

$$\mathrm{AB} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

$$\mathrm{P} = 13 \cdot 4 = 52$$

Теперь найдем площадь основания: площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

$$S_{\text{основания}} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{10 \cdot 24}{2} = 120$$

Далее подставим все найденные величины в формулу полной поверхности и вычислим ее:

$$S_{\text{п . п}} = P_{\text{осн}} \cdot h + 2S_{\text{ромба}} = 52 \cdot 20 + 2 \cdot 120 = 1040 + 240 = 1280$$

Ответ: 1280

Цилиндр - это та же призма, в основании которой лежит круг.

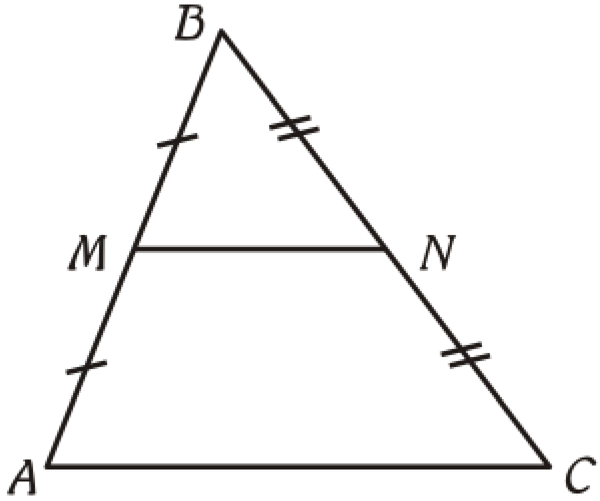
$$S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot h = 2\pi Rh$$

$$S_{\text{п . п}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi R\left(h + R\right)$$

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h = \pi R^2 h$$

Подобные призмы: при увеличении всех линейных размеров призмы в k раз, её объём увеличится в k^3 раз.

Средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине.



MN - средняя линия, так как соединяет середины соседних сторон.

$MN // AC, MN = \frac{AC}{2}$

Подобие треугольников

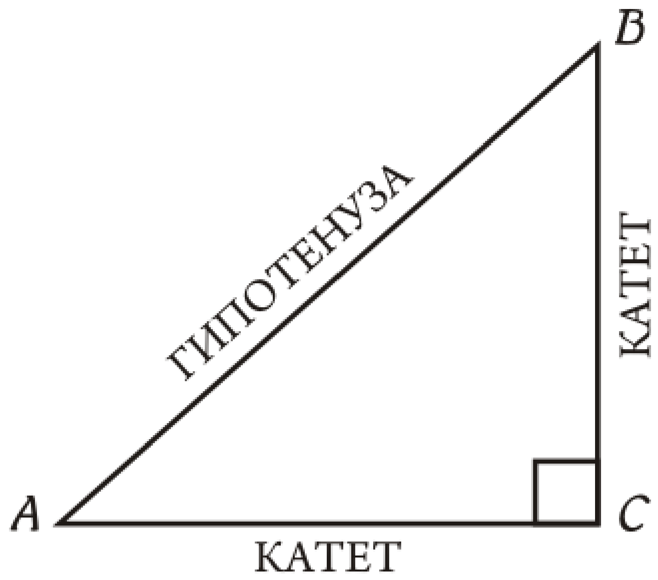
Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны, а стороны одного треугольника больше сходственных сторон другого треугольника в некоторое число раз.

Число k - коэффициент подобия (показывает во сколько раз стороны одного треугольника больше сторон другого треугольника.)

1. Периметры подобных треугольников и их линейные величины (медианы, биссектрисы, высоты) относятся друг к другу как коэффициент подобия k.
2. Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Прямоугольный треугольник и его свойства:

В прямоугольном треугольнике катетами называются две стороны треугольника, которые образуют прямой угол. Гипотенузой называется сторона, лежащая напротив прямого угла.

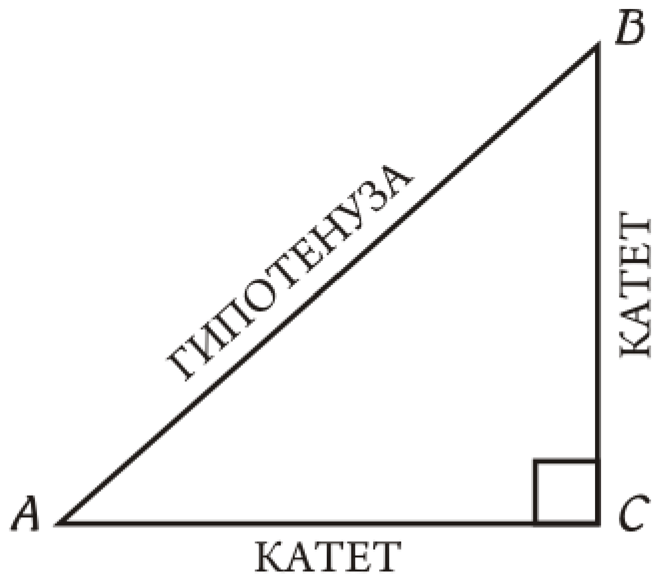


Некоторые свойства прямоугольного треугольника:

1. Сумма острых углов в прямоугольном треугольнике равна 90 градусов.
2. Катет прямоугольного треугольника, лежащий напротив угла в 30 градусов, равен половине гипотенузы. (Этот катет называется малым катетом.)

Теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.



$AC^2 + BC^2 = AB^2$

Соотношение между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике:

В прямоугольном треугольнике ABC, с прямым углом C

Для острого угла B: AC - противолежащий катет; BC - прилежащий катет.

Для острого угла A: BC - противолежащий катет; AC - прилежащий катет.

1. Синусом (sin) острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.
2. Косинусом (cos) острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.
3. Тангенсом (tg) острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему.
4. Котангенсом (ctg) острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к противолежащему.
5. В прямоугольном треугольнике синус одного острого угла равен косинусу другого острого угла.
6. Синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы острых равных углов равны.
7. Синусы смежных углов равны, а косинусы, тангенсы и котангенсы отличаются знаками: для острых углов положительные значения, для тупых углов отрицательные значения

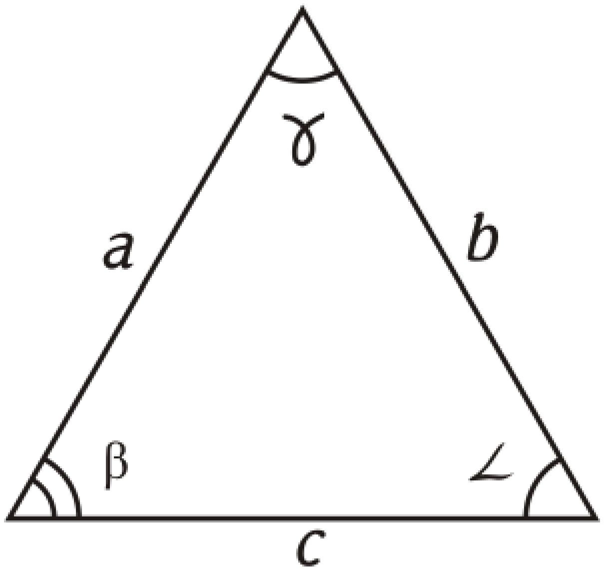
Значения тригонометрических функций некоторых углов:

α	30	45	60
$sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$ctg\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Теорема синусов

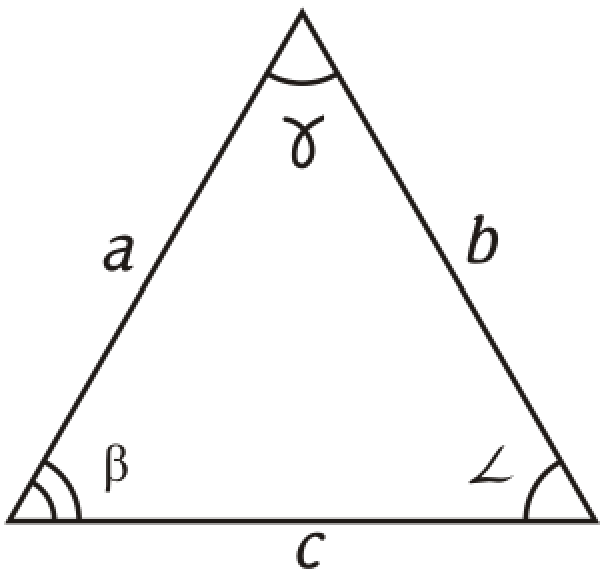
Во всяком треугольнике стороны относятся как синусы противолежащих углов:

$\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma} = 2R$, где R - радиус описанной около треугольника окружности.



Теорема косинусов

Квадрат одной из сторон треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними:



$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\alpha$;

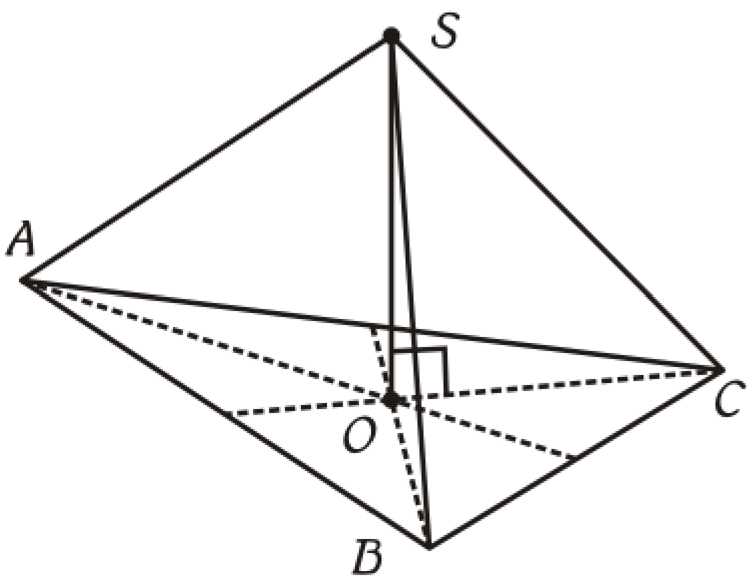
$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos\beta$;

$c^2 = b^2 + a^2 - 2 \cdot b \cdot a \cdot cos\gamma$.

Пирамида

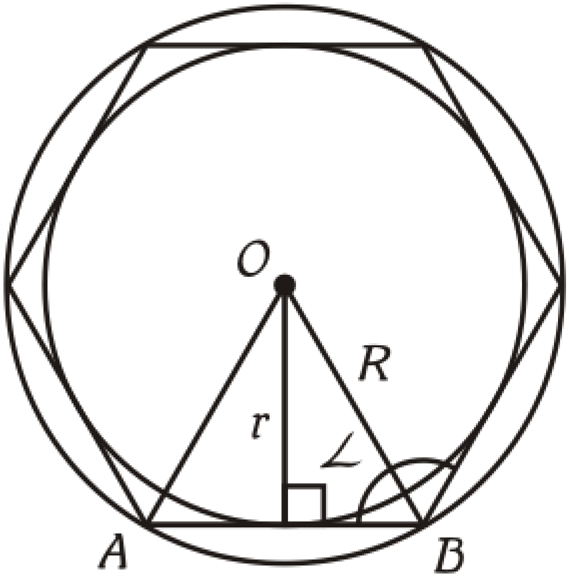
Пирамидой называется многогранник, одна грань которого (основание) – многоугольник, а остальные грани (боковые) - треугольники, имеющие общую вершину.

Высотой (h) пирамиды является перпендикуляр, опущенный из ее вершины на плоскость основания.



SO - высота

Связь между сторонами правильного n-угольника и радиусами описанной и вписанной окружностей :



$\mathrm{AB} = an$ - сторона правильного многоугольника

R - радиус описанной окружности

r - радиус вписанной окружности

n - количество сторон и углов

$a_n = 2 \cdot R \cdot sin\frac{180°}{n}$;

$r = R \cdot cos\frac{180°}{n}$;

$a_n = 2 \cdot r \cdot tg\frac{180°}{n}$.

В зависимости от многоугольника, лежащего в основании, пирамиды могут быть треугольными, четырехугольными и т.д.

У треугольной пирамиды есть еще одно название – тетраэдр (четырехгранник).

Формулы вычисления объема и площади поверхности произвольной пирамиды.

Чтобы были понятны формулы, введем обозначения:

$P_{\text{осн}}$ -периметр основания;

$S_{\text{осн}}$ - площадь основания;

$S_{\text{бок}}$ - площадь боковой поверхности;

$S_{\text{п . п}}$ - площадь полной поверхности;

V - объем.

В произвольной пирамиде боковые грани могут быть разными треугольниками, поэтому площадь боковой поверхности равна сумме площадей всех боковых граней, найденных по отдельности.

$S_{\text{бок}} = \sum^{n} S_{\text{бок . граней}}$

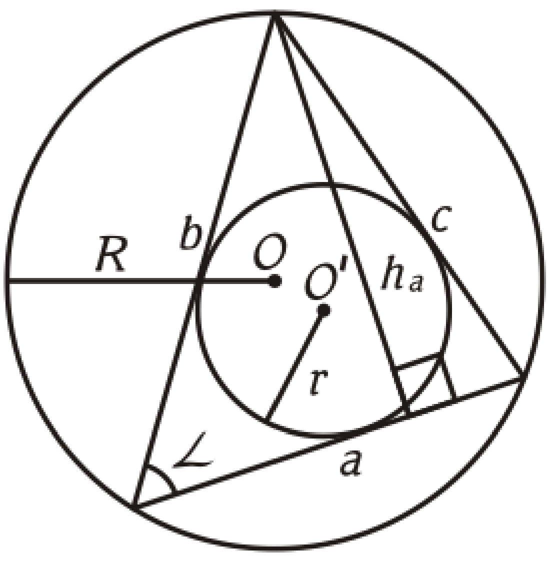
$S_{\text{п . п}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$

$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$

В основании у произвольной пирамиды могут лежать различные многоугольники, рассмотрим площади некоторых из них.

В основании лежит треугольник

Площадь треугольника



1. $S = \frac{a \cdot h_a}{2}$, где h_a - высота, проведенная к стороне a

2. $S = \frac{a \cdot b \cdot sin\alpha}{2}$, где a, b - соседние стороны, α - угол между этими соседними сторонами.
3. Формула Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p - это полупериметр $p = \frac{a+b+c}{2}$
4. $S = p \cdot r$, где r - радиус вписанной окружности
5. $S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$, где R - радиус описанной окружности
6. Для прямоугольного треугольника $S = \frac{a \cdot b}{2}$, где a и b - катеты прямоугольного треугольника.

В основании лежит четырехугольник

Прямоугольник

$S = a \cdot b$, где a и b - смежные стороны.

Ромб

$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, где d_1 и d_2 - диагонали ромба

$S = a^2 \cdot sin\alpha$, где a - длина стороны ромба, а α - угол между соседними сторонами.

Трапеция

$S = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$, где a и b - основания трапеции, h - высота трапеции.

Пирамида называется правильной, если в ее основании лежит правильный многоугольник, а ее высота приходит в центр основания (в центр описанной окружности). Все боковые ребра правильной пирамиды равны, следовательно, все боковые грани являются равнобедренными треугольниками.

Формулы вычисления объема и площади поверхности правильной пирамиды.

h_a- высота боковой грани (апофема)

$S_{\text{бок}} = \frac{P_{\text{о}}\text{сн} \cdot h_a}{2}$

$S_{\text{п . п}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$

$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$

В основании лежат правильные многоугольники, рассмотрим их площади:

1. Для равностороннего треугольника $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где a - длина стороны.
2. Квадрат $S = a^2$, где a - сторона квадрата.
3. Правильный шестиугольник

Шестиугольник разделим на шесть правильных треугольников и найдем площадь как:

$S = 6 \cdot S_{\text{треугольника}} = \frac{6 \cdot a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3 \cdot a^2\sqrt{3}}{2}$, где a - сторона правильного шестиугольника.

Пример:

Найдите объём правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 10, а высота равна $5\sqrt{3}$.

Решение:

Объем пирамиды равен трети произведения площади основания на высоту:

$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$

Так как пирамида правильная, то в основании у нее лежит равносторонний треугольник, найдем его площадь по формуле:

$S_{\text{основания}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{10^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$

Подставим все данные в формулу объема и вычислим его:

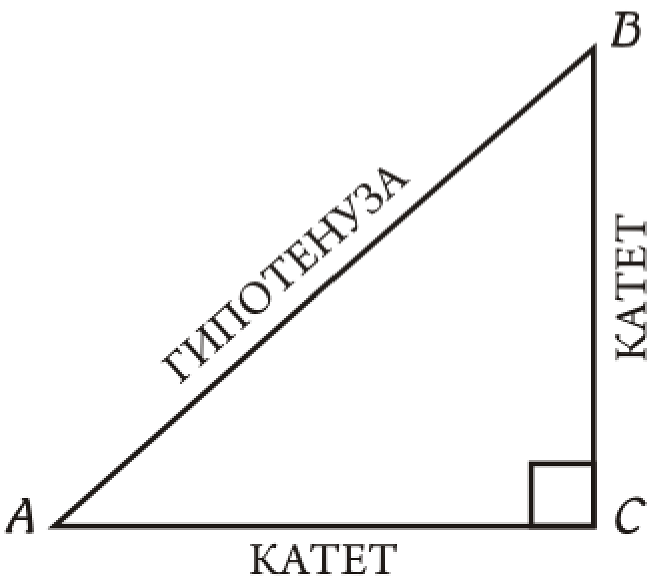
$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{25\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3}}{3} = \frac{25 \cdot 5 \cdot 3}{3} = 25 \cdot 5 = 125$$

Ответ: 125

Подобные пирамиды: при увеличении всех линейных размеров пирамиды в k раз, его объём увеличится в k^3 раз.

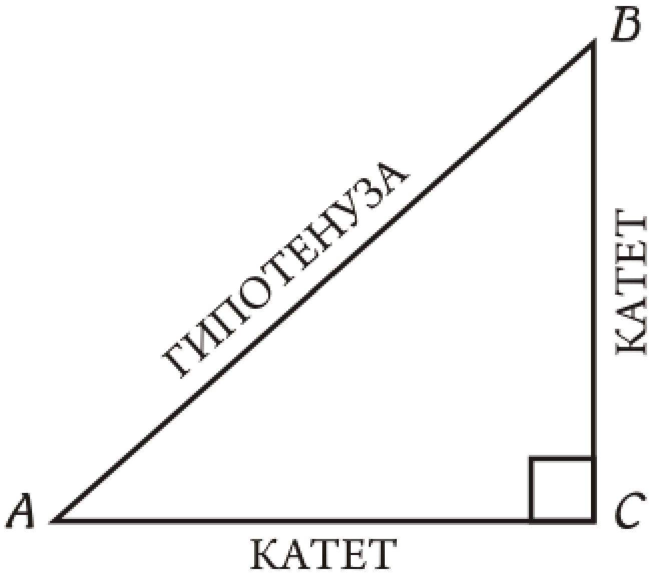
Теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.



$AC^2 + BC^2 = AB^2$

Соотношение между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике:



В прямоугольном треугольнике ABC, с прямым углом C

Для острого угла B: AC - противолежащий катет; BC - прилежащий катет.

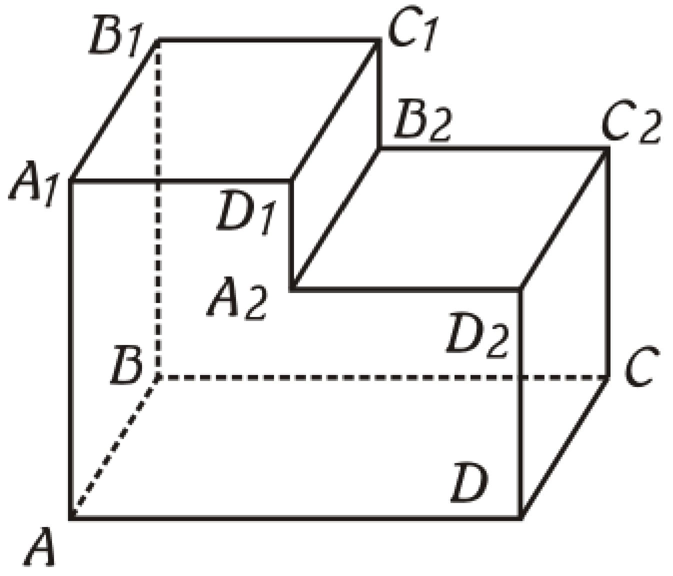
Для острого угла A: BC - противолежащий катет; AC - прилежащий катет.

1. Синусом (sin) острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.
2. Косинусом (cos) острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.
3. Тангенсом (tg) острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему.
4. Котангенсом (ctg) острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к противолежащему.
5. В прямоугольном треугольнике синус одного острого угла равен косинусу другого острого угла.
6. Синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы острых равных углов равны.

Многогранники

Многогранник – это поверхность, составленная из многоугольников, ограничивающая некоторое геометрическое тело.

В данной теме мы рассмотрим составные многогранники (многогранники, состоящие обычно из нескольких параллелепипедов).



Объемы различных многогранников:

- Призма $V = S_{осн} \cdot h$
- Пирамида $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$
- Параллелепипед $V = a \cdot b \cdot c$, где a, b и c - длина, ширина и высота.
- Куб $V = \mathrm{a}^3$, где a - сторона куба

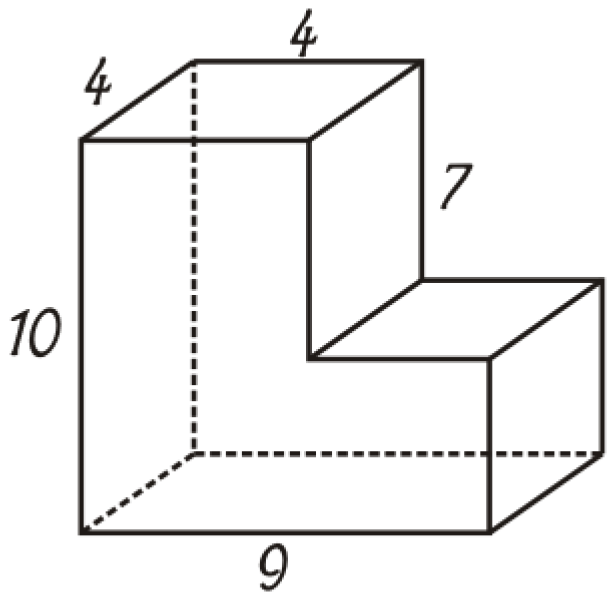
Задачи на нахождение объема составного многогранника:

- Первый способ.

1. Составной многогранник надо достроить до полного параллелепипеда или куба.
2. Найти объем параллелепипеда.
3. Найти объем лишней части фигуры.
4. Вычесть из объема параллелепипеда объем лишней части.

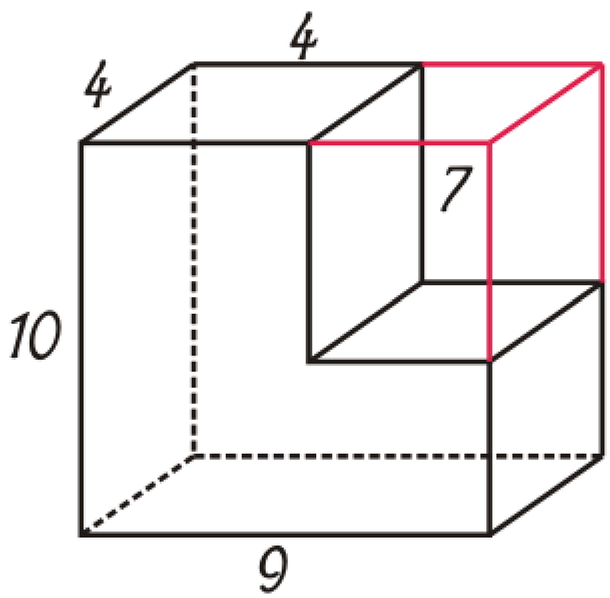
Пример:

Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Решение:

1. Достроим составной многогранник до параллелепипеда.



Найдем его объем. Для этого перемножим все три измерения параллелепипеда:

$V = 10 \cdot 9 \cdot 4 = 360$

2. Найдем объем лишнего маленького параллелепипеда:

Его длина равна $9-4=5$

Ширина равна 4

Высота равна 7

$V=7\cdot 4\cdot 5=140$

3. Вычтем из объема параллелепипеда объем лишней части и получим объем заданной фигуры:

$V=360-140=220$

Ответ: 220

- Второй способ

1. Разделить составной многогранник на несколько параллелепипедов.
2. Найти объем каждого параллелепипеда.
3. Сложить объемы.

Задачи на нахождение площади поверхности составного многогранника.

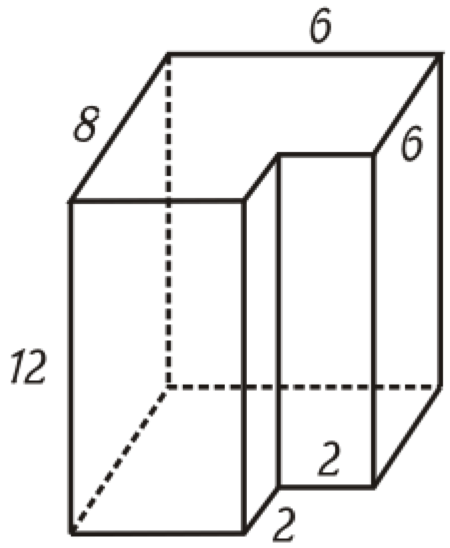
- Если можно составной многогранник представить в виде прямой призмы, то находим площадь поверхности по формуле:

$S_{\text{полн.пов.}}=P_{\text{осн}}\cdot h+2S_{\text{осн}}$

Чтобы найти площадь основания призмы, надо разделить его на прямоугольники и найти площадь каждого.

Пример:

Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).

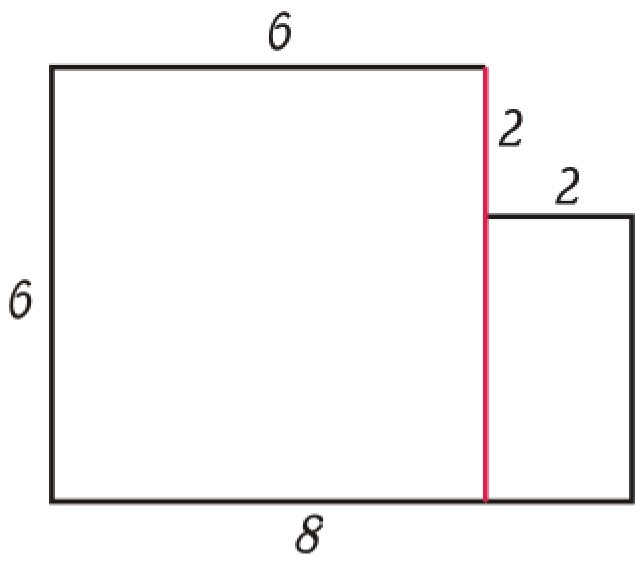


Представим данный многогранник как прямую призму с высотой равной 12.

$S_{\text{полн.пов.}} = P_{\text{осн}} \cdot h + 2S_{\text{осн}}$

$P_{\text{осн}} = 8 + 6 + 6 + 2 + 2 + 4 = 28$

Чтобы найти площадь основания, разделим его на два прямоугольника и найдем площадь каждого:



$S_1 = 6 \cdot 6 = 36$

$S_2 = 2 \cdot 4 = 8$

$S_{\text{о}}\text{сн} = 36 + 8 = 44$

Далее подставим все данные в формулу и найдем площадь поверхности многогранника

$S_{\text{полн.пов.}} = 28 \cdot 12 + 2 \cdot 44 = 336 + 88 = 424$

Ответ: 424

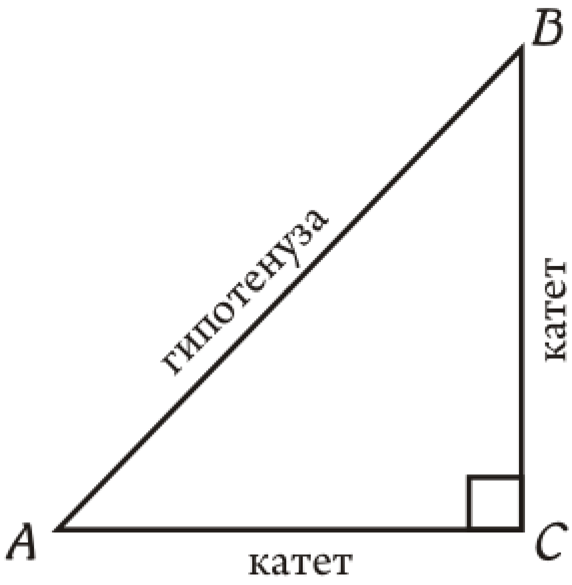
- Если составной многогранник нельзя представить в виде призмы, то площадь полной поверхности можно найти как сумму площадей всех граней, ограничивающих поверхность.

Задачи на нахождение расстояния между точками составного многогранника.

В данных задачах приведены составные многогранники, у которых двугранные углы прямые. Надо соединить расстояние между заданными точками и достроить его до прямоугольного треугольника. Далее остается воспользоваться теоремой Пифагора для нахождения нужной стороны.

Теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.

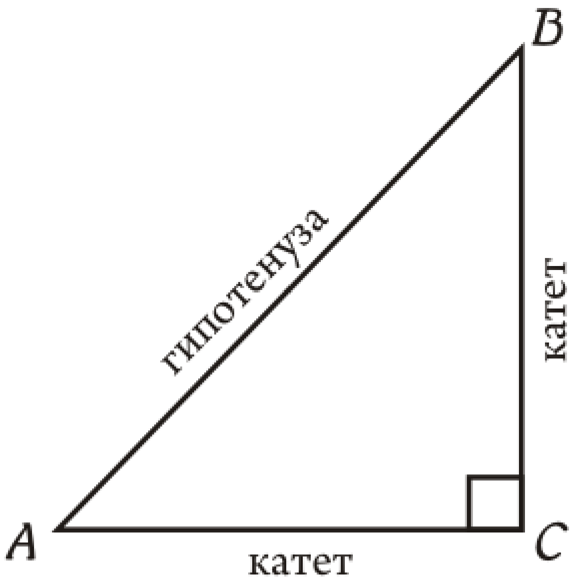


$AC^2 + BC^2 = AB^2$

Задачи на нахождение угла или значения одной из тригонометрических функций обозначенного в условии угла составного многогранника.

Так как в данных задачах приведены составные многогранники, у которых все двугранные углы прямые, то достроим угол до прямоугольного треугольника и найдем его значение по тригонометрическим значениям.

Соотношение между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике:



В прямоугольном треугольнике ABC, с прямым углом C:

Для острого угла B: AC - противолежащий катет; BC - прилежащий катет.

Для острого угла A: BC - противолежащий катет; AC - прилежащий катет.

1. Синусом (sin) острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.
2. Косинусом (cos) острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.
3. Тангенсом (tg) острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету.

Значения тригонометрических функций некоторых углов:

Составим твой персональный план подготовки к ЕГЭ

α	30	45	60
$sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

$ctg\alpha$ $\sqrt{3}$ 1 $\frac{\sqrt{3}}{3}$