Преобразование алгебраических выражений

Для преобразования алгебраических выражений мы будем использовать:

- формулы сокращенного умножения;

- метод группировки;

- приведение дробей к общему знаменателю.

Вспомним, что такое алгебраическое выражение.

Например: $c+4$ – это **целое алгебраическое выражение.**

В нем есть переменная и нет дробей. Существуют также выражения в виде дробей, их называют - **рациональные алгебраические выражения.** Вот пример:

$\frac{2c}{a+b}$

Также бывают алгебраические выражения со степенями и корнями. Например,

$\sqrt{a}+\sqrt{c}$

В числовом выражении есть только числа, а в алгебраическом – и числа, и «буквы», то есть переменные.

Вам знакомо выражение «привести подобные». Что это значит?

Например, у вас есть выражение:

$2x + y + 3c - x + 7y - 10c$.

Собираем «иксы» в одну «кучку», «игреки» - в другую, а те, в которых есть «с», в третью. И выполняем действия.

$2x - x + y + 7y + 3c - 10c = x + 8y - 7c$.

Иксы к иксам, игреки – к игрекам, а те, которые с буквой «с», в отдельную кучку.

Если сказать совсем простыми словами, то разные переменные – это как разные звери :-)

$3x + 2x$ – это 3 мышки и еще 2 мышки, всего 5 мышек.

$5y + y$ – это 5 бегемотов и еще бегемот, 6 бегемотов.

$4c - c$ – это было 4 кошки, ушла 1 кошка, осталось 3 кошки.

Мышки – с мышками, кошки – с кошками, а бегемоты – с бегемотами. Подобные – с подобными!

А $3x + 5y$ – это 3 мышки и 5 бегемотов!

Более сложный пример:

$3xy + 5c - xy + 4c = 2xy + 9c$. Привели подобные.

Вспомним **формулы сокращенного умножения:**

Формулы сокращенного умножения	
Разность квадратов	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
Квадрат суммы	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Квадрат разности	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Куб суммы	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
Куб разности	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
Сумма кубов	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
Разность кубов	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Левая часть в каждой такой формуле всегда равна правой части. Такие равенства, которые верны всегда, называются **тождества.**

Заметим, что эти формулы работают в обе стороны. Можно применять их и слева направо, и справа налево.

Теперь вспомним, что такое **метод группировки.**

Группировку удобно применять, когда выражение состоит из нескольких слагаемых, которые можно разбить на "кучки".

Вот пример такого выражения:

$$ax + bx + 3ay + 3by$$

.

Как его сгруппировать?

Нам помогут правила:

1) находим одинаковые переменные, переписываем выражение так, чтобы слагаемые с этими переменными оказались рядом;

2) выносим за скобки эти одинаковые переменные. Их еще называют общими множителями. А в скобках должны получиться одинаковые выражения;

3) выносим за скобку эти одинаковые выражения.

Упростим выражение $ax + bx + ay + by$.

1 шаг:

Находим повторяющиеся "буквы":

$$ax + bx + ay + by$$

.

2 шаг:

Выносим за скобки повторяющиеся "буквы", то есть переменные:

$$x(a + b) + y(a + b)$$

.

3 шаг:

Выносим за скобку одинаковые выражения в скобках:

$(a+b)(x+y)$.

Мы разложили выражение на множители, применив метод группировки.

Еще один прием – **приведение алгебраических дробей к общему знаменателю.**

Действуем так же, как мы это делали с числами.

1) находим общий знаменатель для этих дробей;

2) находим дополнительные множители для каждой дроби;

3) умножаем дополнительный множитель для каждой дроби на ее числитель;

4) записываем дроби с новыми числителями и общим знаменателем.

Пример:

Привести дроби $\frac{2}{ab^2}$ и $\frac{3}{ac}$ к общему знаменателю.

Идем по алгоритму:

1 шаг:

Общий знаменатель для ab^2 и ac равен acb^2. Это выражение делится и на ab^2, и на ac.

2 шаг:

Ищем дополнительные множители для каждой дроби:

$acb^2 : ab^2 = c$;

$acb^2 : ac = b^2$

3 шаг:

Умножаем дополнительный множитель каждой дроби на ее числитель:

$c \cdot 2 = 2c$;

$b^2 \cdot 3 = 3b^2$.

4 шаг:

Записываем дроби с новыми числителями и найденным общим знаменателем: $\frac{2c}{acb^2}$ и $\frac{3b^2}{acb^2}$

Примеры решения и оформления задач:

1. Упростите выражение: $(2-c)^2 - c(c+4)$.

Решение:

Раскроем первую скобку по формуле квадрата разности:

$(2-c)^2 = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot c + c^2 = 4 - 4c + c^2$

Раскроем вторую скобку:

$$-c(c+4) = -c^2 - 4c$$

.

Запишем всё вместе и приведем подобные слагаемые:

$$4 - 4c + c^2 - c^2 - 4c = 4 - 8c + c^2 - c^2 = 4 - 8c$$

.

Ответ: $4 - 8c$.

2. Разложить на множители, используя способ группировки:

$$xa^2 + xb^2 - a^2 - b^2$$

Решение:

Находим повторяющиеся "буквы", подчеркиваем их:

$$x\underline{a^2} + x\underline{b^2} - \underline{a^2} - \underline{b^2}$$

Сгруппируем:

$$x\underline{a^2} - \underline{a^2} + x\underline{b^2} - \underline{b^2}$$

Вынесем за скобки повторяющиеся "буквы":

$$a^2(x-1) + b^2(x-1)$$

.

Выносим за скобку одинаковые выражения в скобках:

$(x-1)(a^2+b^2)$.

Ответ: $(x-1)(a^2+b^2)$.

3. Привести дроби к общему знаменателю: $\frac{2c}{ab}$ и $\frac{4b}{ac}$.

Решение:

Общий знаменатель для ab и ac равен abc.

Ищем дополнительные множители для каждой дроби:

$abc : ab = c$;

$abc : ac = b$.

Умножаем дополнительный множитель каждой дроби на ее числитель:

$c \cdot 2c = 2c^2$;

$b \cdot 4b = 4b^2$.

Записываем дроби с новыми числителями и найденным общим знаменателем:

$\frac{2c^2}{abc}$ и $\frac{4b^2}{abc}$

Ответ: $\frac{2c^2}{abc}$ и $\frac{4b^2}{abc}$