

Равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой, называется уравнением. Выражение, стоящее слева от знака равенства, называется левой частью уравнения, а выражение, стоящее справа, - правой частью уравнения.

Линейные уравнения

Линейным называется такое уравнение, в котором неизвестное x находится в числителе уравнения и без показателей. Например:
 $2x - 5 = 3$

Линейные уравнения сводятся к виду $ax = b$, которое получается при помощи раскрытия скобок, приведения подобных слагаемых, переноса слагаемых из одной части уравнения в другую, а также умножения или деления обеих частей уравнения на число, отличное от нуля.

$$5(5 + 3x) - 10x = 8$$

Раскроем скобки.

$$25 + 15x - 10x = 8$$

Перенесем неизвестные слагаемые в левую часть уравнения, а известные в правую. При переносе из одной части в другую, у слагаемого меняется знак на противоположный.

$$15x - 10x = 8 - 25$$

Приведем подобные слагаемые.

$$5x = -17$$
 - это конечный результат преобразований.

После преобразований к виду $ax = b$, где, $a \neq 0$, корень уравнения находим по формуле $x = \frac{b}{a}$

$$x = -\frac{17}{5}$$

$$x = -3,4$$

Ответ: $-3,4$

Квадратные уравнения

Квадратное уравнение — уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c — некоторые числа $a \neq 0$, x — неизвестное. Перед тем как решать уравнение, необходимо раскрыть скобки и собрать все слагаемые в левой части уравнения.

Числа a, b, c называются коэффициентами квадратного уравнения.

- a - старший коэффициент;
- b - средний коэффициент;
- c - свободный член.

Если в квадратном уравнении коэффициенты b и c не равны нулю, то уравнение называется полным квадратным уравнением. Например, уравнение $2x^2 - 8x + 3 = 0$. Если один из коэффициентов b или c равен нулю или оба коэффициента равны нулю, то квадратное уравнение называется неполным. Например, $5x^2 - 2x = 0$.

Решение неполных квадратных уравнений

Неполное квадратное уравнение имеет вид $ax^2 + bx = 0$, если $a \neq 0$; $c = 0$. В левой части этого уравнения есть общий множитель x .

1. Вынесем общий множитель x за скобки.

Мы получим $x(ax + b) = 0$. Произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю. Поэтому получаем $x = 0$ или

$ax + b = 0$. Таким образом, данное уравнение эквивалентно двум уравнениям:

$$x = 0; ax + b = 0$$

2. Решаем получившиеся уравнения каждое отдельно.

Мы получим $x = 0$ и $x = \frac{-b}{a}$. Следовательно, данное квадратное уравнение имеет два корня $x = 0$ и $x = \frac{-b}{a}$

$$4x^2 - 5x = 0$$

Вынесем x как общий множитель за скобки:

$$x(4x - 5) = 0$$

Приравняем каждый множитель к нулю и найдем корни уравнения.

$$x = 0 \text{ или } 4x - 5 = 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = 1,25$$

Ответ: $x_1 = 0; x_2 = 1,25$

Неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + c = 0, a \neq 0, b = 0$

Для решения данного неполного квадратного уравнения выразим x^2 .

$$ax^2 + c = 0$$

$$ax^2 = -c$$

$$x^2 = \frac{-c}{a}$$

При решении последнего уравнения возможны два случая:

если $\frac{-c}{a} > 0$, то получаем два корня: $x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$

если $\frac{-c}{a} < 0$, то уравнение во множестве действительных чисел не имеет решений.

$$x^2 - 16 = 0$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$

Ответ: $x_1 = 4, x_2 = -4$

Решение полного квадратного уравнения

Решение с помощью дискриминанта

Дискриминантом квадратного уравнения D называется выражение

$$b^2 - 4ac.$$

При решении уравнения с помощью дискриминанта **возможны три случая**:

1. $D > 0$. Тогда корни уравнения равны:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

2. $D = 0$. В данном случае решение даёт два двукратных корня:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

3. $D < 0$. В этом случае уравнение не имеет корней.

$$3x^2 - 11 = -8x$$

Соберем все слагаемые в левую часть уравнения и расставим в порядке убывания степеней

$$3x^2 + 8x - 11 = 0$$

$$a = 3, b = 8, c = -11$$

$$D = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-11) = 64 + 132 = 196 = 14^2$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-8 + 14}{6} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-8 - 14}{6} = -3\frac{2}{3}$$

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = -3\frac{2}{3}$

Устные способы

Если сумма коэффициентов равна нулю ($a + b + c = 0$), то $x_1 = 1, x_2 = -\frac{c}{a}$

$$4x^2 + 3x - 7 = 0$$

$$4 + 3 - 7 = 0, \text{ следовательно } x_1 = 1, x_2 = -\frac{7}{4}$$

$$\text{Ответ: } x_1 = 1, x_2 = -\frac{7}{4}$$

Если старший коэффициент в сумме со свободным равен среднему коэффициенту ($a + c = b$), то $x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a}$

$$5x^2 + 7x + 2 = 0$$

$$5 + 2 = 7, \text{ следовательно, } x_1 = -1, x_2 = -\frac{2}{5}$$

$$\text{Ответ: } x_1 = -1, x_2 = -\frac{2}{5}$$

Кубические уравнения

Для решения простых кубических уравнений необходимо обе части представить в виде основания в третьей степени. Далее извлечь кубический корень и получить простое линейное уравнение.

$$(x - 3)^3 = 27$$

Представим обе части как основания в третьей степени

$$(x - 3)^3 = 3^3$$

Извлечем кубический корень из обеих частей

$$x - 3 = 3$$

Соберем известные слагаемые в правой части

$$x = 6$$

$$\text{Ответ: } x = 6$$