Исследование степенных и иррациональных функций

1. 1. Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 48x + 17$.

Решение.

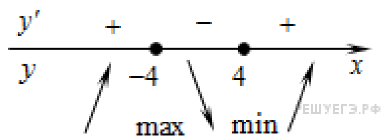
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 - 48 = 3(x^2 - 16) = 3(x-4)(x+4)$$

Найдем нули производной:

$$3(x-4)(x+4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = 4. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = -4$.

Ответ: −4.

2. 2. Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 48x + 17$.

Решение.

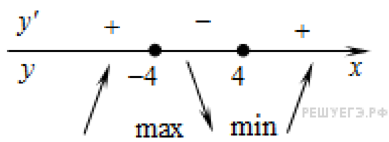
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 - 48 = 3(x^2 - 16).$$

Найдем нули производной:

$$x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = 4. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = 4$.

Ответ: 4.

3. 3. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 27x$ на отрезке $[0;4]$.

Решение.

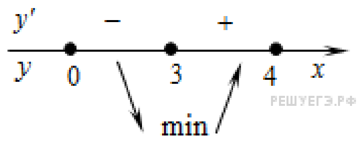
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) = 3(x+3)(x-3).$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} 3(x+3)(x-3) = 0, \\ 0 \le x \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = 3, \end{array}\right. \\ 0 \le x \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 3$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(3) = 27 - 27 \cdot 3 = -54.$$

Ответ: −54.

4. 4. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 3x + 4$ на отрезке $[-2;0]$.

Решение.

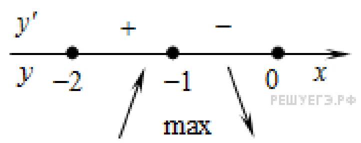
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x+1)(x-1).$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} 3(x+1)(x-1) = 0, \\ -2 \le x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 1, \end{array}\right. \\ -2 \le x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = -1$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение:

$$y(-1) = -1 + 3 + 4 = 6.$$

Ответ: 6.

5. 5. Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Решение.

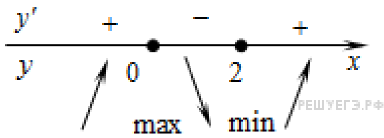
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2).$$

Найдем нули производной:

$$3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = 0$.

Ответ: 0.

6. 6. Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Решение.

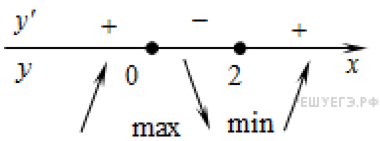
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

Найдем нули производной:

$$3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = 2$.

Ответ: 2.

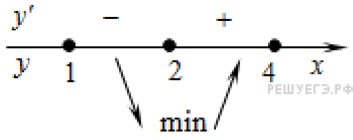
7. 7. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 3x^2 + 2$ на отрезке $[1;4]$.

Решение.

Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2).$$

Производная обращается в нуль в точках 0 и 2, заданному отрезку принадлежит число 2. Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 2$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(2) = 8 - 3 \cdot 4 + 2 = -2.$$

Ответ: −2.

8. 8. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 6x^2$ на отрезке $[-3;3]$.

Решение.

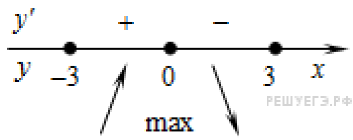
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 - 12x = 3x(x-4).$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} 3x(x-4) = 0, \\ -3 \le x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 4, \end{array}\right. \\ -3 \le x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 0$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение:

$$y(0) = 0.$$

Ответ: 0.

9. 9. Найдите точку максимума функции $y = x^3 + 2x^2 + x + 3.$

Решение.

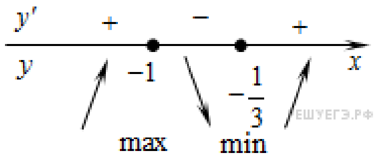
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 + 4x + 1.$$

Найдем нули производной:

$$3x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = -\dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = -1$.

Ответ: −1.

10. 10. Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$.

Решение.

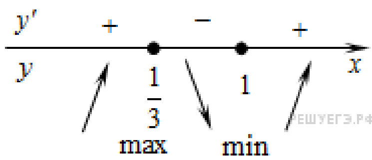
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 - 4x + 1.$$

Найдем нули производной:

$$3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = \dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = 1$.

Ответ: 1.

11. 11. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$ на отрезке $[1;4]$.

Решение.

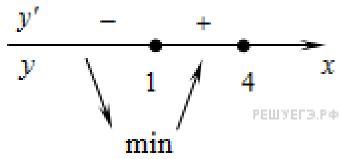
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 - 4x + 1.$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} 3x^2 - 4x + 1 = 0, \\ 1 \le x \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = \dfrac{1}{3}, \end{array}\right. \\ 1 \le x \le 4 \end{cases} \Rightarrow x = 1.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 1$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(1) = 1 - 2 + 1 + 3 = 3.$$

Ответ: 3.

12. 12. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 + 2x^2 + x + 3$ на отрезке $[-4; -1]$.

Решение.

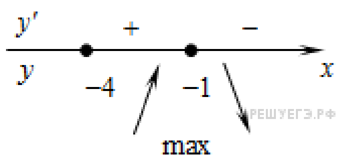
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 + 4x + 1.$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} 3x^2 + 4x + 1 = 0, \\ -4 \le x \le -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = -\dfrac{1}{3}, \end{array}\right. \\ -4 \le x \le -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = -1$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение:

$$y(-1) = -1 + 2 - 1 + 3 = 3.$$

Ответ: 3.

13. 13. Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 5$.

Решение.

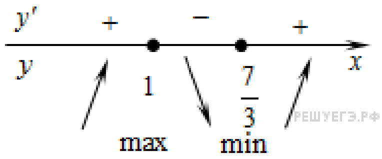
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 - 10x + 7.$$

Найдем нули производной:

$$3x^2 - 10x + 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = \dfrac{7}{3}. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = 1$.

Ответ: 1.

14. 14. Найдите точку минимума функции $y = x^3 + 5x^2 + 7x - 5$.

Решение.

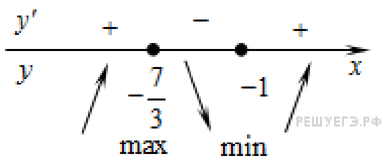
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 + 10x + 7.$$

Найдем нули производной:

$$3x^2 + 10x + 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = -\dfrac{7}{3}. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = -1$.

Ответ: −1.

15. 15. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - x^2 - 40x + 3$ на отрезке $[0; 4]$.

Решение.

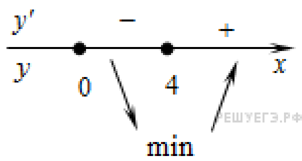
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 - 2x - 40.$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x - 40 = 0, \\ 0 \le x \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = -\dfrac{10}{3}, \end{array}\right. \\ 0 \le x \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 4$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(4) = 64 - 16 - 160 + 3 = -109.$$

Ответ: −109.

16. 16. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 4$ на отрезке $[-2;0]$.

Решение.

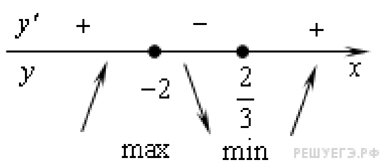
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 + 4x - 4.$$

Из уравнения $3x^2 + 4x - 4 = 0$ найдем нули производной:

$$\left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = \dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



На отрезке [−2; 0] функция убывает, поэтому она достигает своего наибольшего значения в точке $x = -2$. Найдем это наибольшее значение:

$$y(-2) = (-2)^3 + 2\cdot(-2)^2 - 4\cdot(-2) + 4 = 12.$$

Ответ: 12.

17. 17. Найдите точку максимума функции $y = 7 + 12x - x^3$.

Решение.

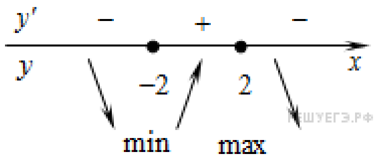
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 12 - 3x^2.$$

Найдем нули производной:

$$12 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = 2$.

Ответ: 2.

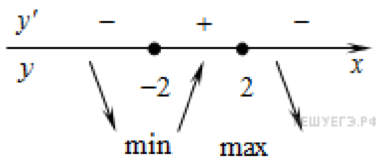
18. 18. Найдите точку минимума функции $y = 7 + 12x - x^3$.

Решение.

Найдем нули производной:

$$12 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = -2$.

Ответ: −2.

19. 19. Найдите наименьшее значение функции $y = 7 + 12x - x^3$ на отрезке $[-2; 2]$.

Решение.

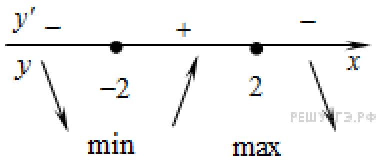
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 12 - 3x^2.$$

Найдем нули производной:

$$12 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = -2$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(-2) = 7 - 24 + 8 = -9.$$

Ответ: −9.

20. 20. Найдите наибольшее значение функции $y = 7 + 12x - x^3$ на отрезке $[-2; 2]$.

Решение.

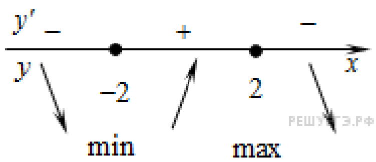
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 12 - 3x^2.$$

Найдем нули производной:

$$12 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



На отрезке [−2; 2] заданная функция возрастает. Она принимает наибольшее значение в точке $x = 2$. Найдем его:

$$y(2) = 7 + 12 \cdot 2 - 2^3 = 7 + 24 - 8 = 23.$$

Ответ: 23.

21. 21. Найдите точку максимума функции $y = 9x^2 - x^3$.

Решение.

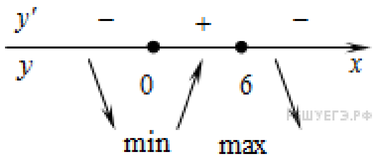
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 18x - 3x^2 = 3x(6 - x).$$

Найдем нули производной:

$$3x(6 - x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 6. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = 6$.

Ответ: 6.

22. 22. Найдите точку минимума функции $y = 9x^2 - x^3$.

Решение.

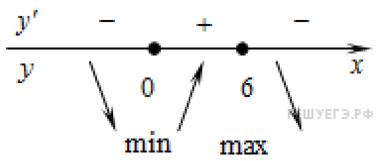
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 18x - 3x^2 = 3x(6 - x).$$

Найдем нули производной:

$$3x(6 - x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 6. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = 0$.

Ответ: 0.

23. 23. Найдите наименьшее значение функции $y = 9x^2 - x^3$ на отрезке $[-1; 5]$.

Решение.

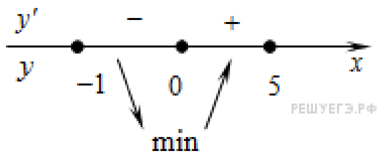
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 18x - 3x^2 = 3x(6 - x).$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} 3x(6-x)=0, \\ -1 \le x \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=6, \end{array}\right. \\ -1 \le x \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 0$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение: $y(0) = 0$.

Ответ: 0.

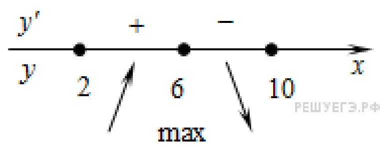
24. 24. Найдите наибольшее значение функции $y = 9x^2 - x^3$ на отрезке $[2; 10]$.

Решение.

Найдем производную заданной функции:

$$y' = 18x - 3x^2 = 3x(6 - x).$$

Найдем нули производной: $x = 0$ и $x = 6$, на заданном отрезке лежит только число 6. Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 6$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение:

$$y(6) = 9 \cdot 36 - 6 \cdot 36 = 324 - 216 = 108.$$

Ответ: 108.

25. 25. Найдите точку максимума функции $y = \frac{x^3}{3} - 9x - 7$.

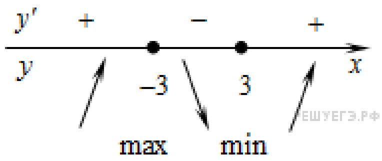
Решение.
Найдем производную заданной функции:

$$y' = x^2 - 9 = (x-3)(x+3).$$

Найдем нули производной:

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -3. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = -3$.

Ответ: −3.

26. 26. Найдите точку минимума функции $y = \frac{x^3}{3} - 9x - 7$.

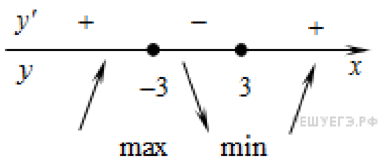
Решение.
Найдем производную заданной функции:

$$y' = x^2 - 9 = (x-3)(x+3).$$

Найдем нули производной:

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -3. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = 3$.

Ответ: 3.

27. 27. Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{x^3}{3} - 9x - 7$ на отрезке $[-3;3]$.

Решение.

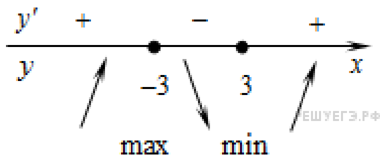
Найдем производную заданной функции:

$$y' = x^2 - 9.$$

Найдем нули производной:

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -3. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Из рисунка видно, что наименьшее значение функции на заданном отрезке достигается в точке $x = 3$. Оно равно:

$$y(3) = \frac{3^3}{3} - 9 \cdot 3 - 7 = -25.$$

Ответ: -25.

28. 28. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{x^3}{3} - 9x - 7$ на отрезке $[-3; 3]$.

Решение.

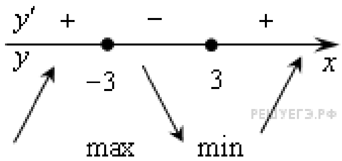
Найдем производную заданной функции:

$$y' = x^2 - 9 = (x-3)(x+3).$$

Найдем нули производной:

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -3. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Найденная производная неположительна на заданном отрезке, заданная функция убывает на нем, поэтому наибольшим значением функции на отрезке является:

$$y(-3) = -9 + 27 - 7 = 11.$$

Ответ: 11.

29. 29. Найдите точку максимума функции $y = 5 + 9x - \frac{x^3}{3}$.

Решение.

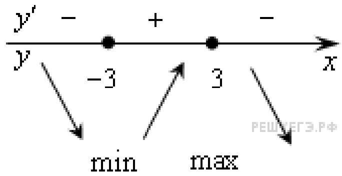
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 9 - x^2 = (3 - x)(3 + x).$$

Найдем нули производной:

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -3. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке 3 производная меняет знак с плюса на минус, поэтому эта точка является точкой максимума.

Ответ: 3.

30. 30. Найдите точку минимума функции $y = 5 + 9x - \frac{x^3}{3}$.

Решение.

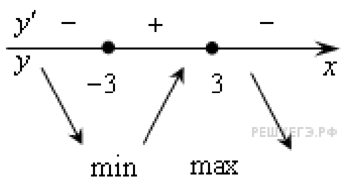
Найдём производную заданной функции:

$$y' = 9 - x^2.$$

Найдем нули производной:

$$9 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -3. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке −3 производная меняет знак с минуса на плюс, поэтому эта точка является точкой минимума.

Ответ: −3.

31. 31. Найдите наименьшее значение функции $y = 5 + 9x - \frac{x^3}{3}$ на отрезке $[-3; 3]$.

Решение.

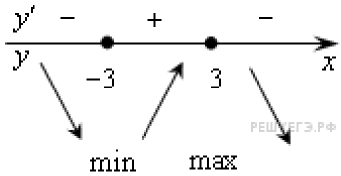
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 9 - x^2 = (3 - x)(3 + x).$$

Найдем нули производной:

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -3. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Найденная производная неотрицательна на заданном отрезке, заданная функция возрастает на нем, поэтому наименьшим значением функции на отрезке является:

$$y(-3) = 5 - 27 + 9 = -13.$$

Ответ: −13.

32. 32. Найдите наибольшее значение функции $y = 5 + 9x - \frac{x^3}{3}$ на отрезке $[-3; 3]$.

Решение.

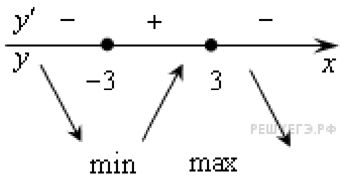
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 9 - x^2 = (3 - x)(3 + x).$$

Найдем нули производной:

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -3. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Найденная производная неотрицательна на заданном отрезке, заданная функция возрастает на нем, поэтому наибольшим значением функции на отрезке является:

$$y(3) = 5 + 27 - 9 = 23.$$

Ответ: 23.

33. 33. Найдите точку минимума функции $y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1.$

Решение.

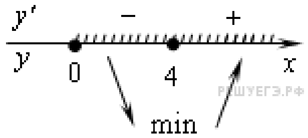
Найдем производную заданной функции:

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 3.$$

Найдем нули производной:

$$\frac{3}{2}\sqrt{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = 4$.

Ответ: 4.

34. 34. Найдите наименьшее значение функции $y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$ на отрезке $[1;9]$.

Решение.

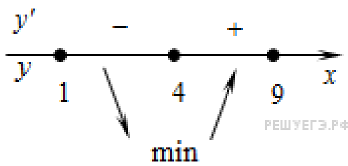
Найдем производную заданной функции:

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 3.$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x} - 3 = 0, \\ 1 \le x \le 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 2, \\ 1 \le x \le 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 4$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(4) = 8 - 12 + 1 = -3.$$

Ответ: −3.

35. 35. Найдите точку минимума функции $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x + 1$.

Решение.

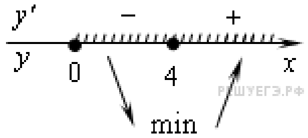
Найдем производную заданной функции:

$$y' = \sqrt{x} - 2.$$

Найдем нули производной:

$$\sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \ \Leftrightarrow x = 4.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = 4$.

Ответ: 4.

36. 36. Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$ на отрезке $[1;9]$.

Решение.

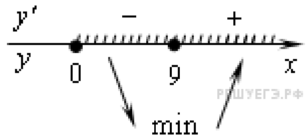
Найдем производную заданной функции:

$$y' = \sqrt{x} - 3.$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} \sqrt{x} - 3 = 0, \\ 1 \le x \le 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = 9.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Найденная производная неположительна на заданном отрезке, заданная функция убывает на нем, поэтому наименьшим значением функции на отрезке является:

$$y(9) = 18 - 27 + 1 = -8.$$

Ответ: −8.

37. 37. Найдите точку максимума функции $y = 7 + 6x - 2x^{\frac{3}{2}}$.

Решение.

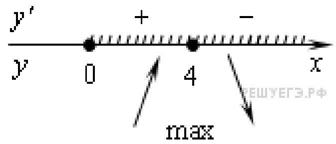
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 6 - 3\sqrt{x}.$$

Найдем нули производной:

$$6 - 3\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = 4$.

Ответ: 4.

38. 38. Найдите наибольшее значение функции $y = 3x - 2x^{\frac{3}{2}}$ на отрезке $[0;4]$.

Решение.

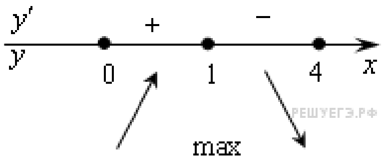
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3 - 3\sqrt{x} = 3(1 - \sqrt{x}).$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} 3(1-\sqrt{x}) = 0, \\ 0 \le x \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1, \\ 0 \le x \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Найденная производная неотрицательна на отрезке (0; 1] и неположительна на отрезке [1; 4]; заданная функция возрастает на отрезке [0; 1] и убывает на отрезке [1; 4]. В точке 1 функция принимает наибольшее значение. Найдем его:

$$y(1) = 3 - 2 = 1.$$

Ответ: 1.

39. 39. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3x + 1$.

Решение.

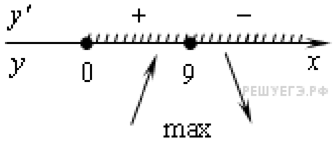
Найдем производную заданной функции:

$$y' = -\sqrt{x} + 3.$$

Найдем нули производной:

$$\sqrt{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = 9$.

Ответ: 9.

40. 40. Найдите наибольшее значение функции $y = -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3x + 1$ на отрезке $[1;9]$.

Решение.

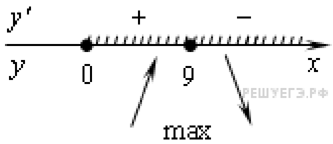
Найдем производную заданной функции:

$$y' = -\sqrt{x} + 3.$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} -\sqrt{x} + 3 = 0, \\ 1 \le x \le 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = 9.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Найденная производная неотрицательна на заданном отрезке, заданная функция возрастает на нем, поэтому наибольшим значением функции на отрезке является:

$$y(9) = -\frac{2}{3} \cdot 27 + 3 \cdot 9 + 1 = 10.$$

Ответ: 10.

41. 41. Найдите точку минимума функции $y = x\sqrt{x} - 3x + 1$.

Решение.

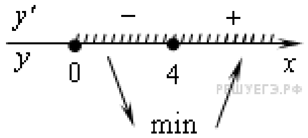
Найдем производную заданной функции:

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 3.$$

Найдем нули производной:

$$\frac{3}{2}\sqrt{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \ \Leftrightarrow x = 4.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = 4$.

Ответ: 4.

42. 42. Найдите наименьшее значение функции $y = x\sqrt{x} - 3x + 1$ на отрезке $[1;9]$.

Решение.

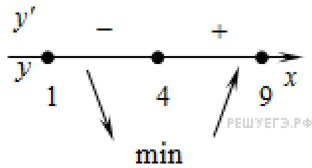
Найдем производную заданной функции:

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 3.$$

Найдем нули производной:

$$\frac{3}{2}\sqrt{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 4$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(4) = 8 - 12 + 1 = -3.$$

Ответ: −3.

43. 43. Найдите точку минимума функции $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x + 1.$

Решение.

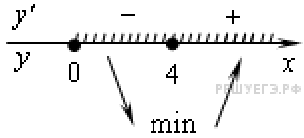
Найдем производную заданной функции:

$$y' = \sqrt{x} - 2.$$

Найдем нули производной:

$$\sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = 4$.

Ответ: 4.

44. 44. Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 3x + 1$ на отрезке $[1;9]$.

Решение.

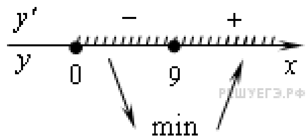
Найдем производную заданной функции:

$$y' = \sqrt{x} - 3.$$

Найдем нули производной:

$$\sqrt{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 9.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Найденная производная неположительна на заданном отрезке, заданная функция убывает на нем, поэтому наименьшим значением функции на отрезке является:

$$y(9) = 18 - 27 + 1 = -8.$$

Ответ: −8.

45. 45. Найдите точку максимума функции $y = 7 + 6x - 2x\sqrt{x}.$

Решение.

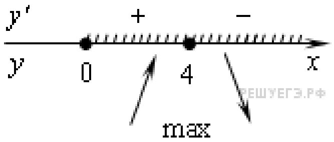
Найдем производную заданной функции:

$$y' = (7 + 6x - 2x^{\frac{3}{2}})' = 6 - 3\sqrt{x}.$$

Найдем нули производной:

$$6 - 3\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = 4$.

Ответ: 4.

46. 46. Найдите наибольшее значение функции $y = 3x - 2x\sqrt{x}$ на отрезке $[0;4]$.

Решение.

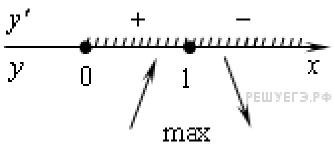
Заметим, что $y = -2x^{\frac{3}{2}} + 3x$ и найдем производную этой функции:

$$y' = -2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} + 3 = -3\sqrt{x} + 3.$$

Найдем нули производной:

$$-3\sqrt{x} + 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Наибольшим значением функции на отрезке [0; 4] является ее значение в точке максимума. Найдем его:

$$y(1) = -2 + 3 = 1.$$

Ответ: 1.

47. 47. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 3x + 1$.

Решение.

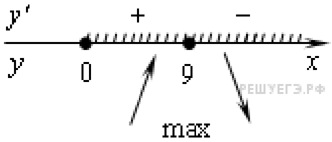
Найдем производную заданной функции:

$$y' = -\sqrt{x} + 3.$$

Найдем нули производной:

$$\sqrt{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = 9$.

Ответ: 9.

48. 48. Найдите наибольшее значение функции $y = -\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 3x + 1$ на отрезке $[1;9]$.

Решение.

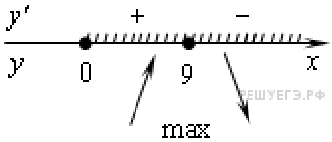
Заметим, что $y = -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3x + 1$ и найдем производную этой функции:

$$y' = -\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 3 = -\sqrt{x} + 3.$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} -\sqrt{x} + 3 = 0, \\ 1 \le x \le 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = 9.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Найденная производная неотрицательна на заданном отрезке, заданная функция возрастает на нем, поэтому наибольшим значением функции на отрезке является:

$$y(9) = -\frac{2}{3} \cdot 27 + 3 \cdot 9 + 1 = 10.$$

Ответ: 10.

49. 49. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 6,5x^2 + 14x - 14$ на отрезке $[-4;3]$.

Решение.

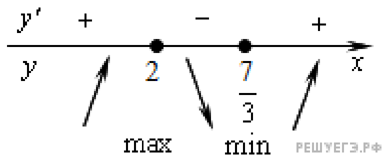
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 - 13x + 14.$$

Из уравнения $3x^2 - 13x + 14 = 0$ найдем нули производной:

$$\left[\begin{array}{l} x = 2\frac{1}{3}, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



На отрезке [−4; 3] функция не является монотонной, она может достигать своего наибольшего значения в точках 2 или 3. Сравним значения функции в этих точках:

$$y(2) = 2^3 - 6,5 \cdot 2^2 + 14 \cdot 2 - 14 = -4,$$
$$y(3) = 3^3 - 6,5 \cdot 3^2 + 14 \cdot 3 - 14 = -3,5.$$

Наибольшим является значение функции в точке 3, оно равно −3,5.

Ответ: −3,5.

50. 50. Найдите наибольшее значение функции $x^5 - 5x^3 - 20x$ на отрезке $[-6; 1]$.

Решение.

Найдем производную заданной функции:

$$y' = 5x^4 - 15x^2 - 20.$$

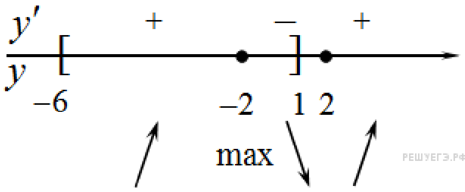
Сделаем замену $x^2 = t$ и решим полученное уравнение:

$$5t^2 - 15t - 20 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1, \\ t = 4. \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = -1, \\ x^2 = 4 \end{array}\right. \underset{x^2 \geq 0}{\Leftrightarrow} x^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



На отрезке $[-6;1]$ функция достигает наибольшего значения в точке −2. Найдем его:

$$y(-2) = (-2)^5 - 5 \cdot (-2)^3 - 20 \cdot (-2) = -32 + 40 + 40 = 48.$$

Ответ: 48.

51. 51. Найдите наибольшее значение функции $3x^5 - 20x^3 - 54$ на отрезке $[-4;-1]$.

Решение.

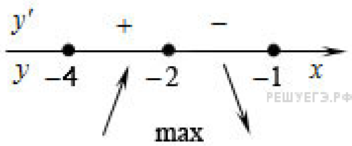
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 15x^4 - 60x^2 = 15x^2(x^2 - 4).$$

Найдем нули производной:

$$15x^2(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0; \\ x = 2; \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции на заданном отрезке:



На отрезке $[-4;-1]$ функция достигает наибольшего значения в точке максимума. Найдем его:

$$y(-2) = 3 \cdot (-2)^5 - 20 \cdot (-2)^3 - 54 = -96 + 160 - 54 = 10.$$

Ответ: 10.

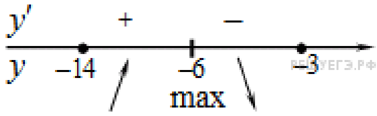
52. 52. Найдите наибольшее значение функции $y = (x+6)^2(x-10) + 8$ на отрезке $[-14;-3]$.

Решение.

Найдем производную заданной функции:

$$y' = 2(x+6)(x-10) + (x+6)^2 \cdot 1 = (x+6)(2x-20+x+6) = (x+6)(3x-14).$$

Производная обращается в нуль в точках -6 и $\frac{14}{3}$, заданному отрезку принадлежит число -6. Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции на заданном отрезке:



В точке −6 функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение:

$$y(-6) = (-6+6)^2(-6-10) + 8 = 8.$$

Ответ: 8.

53. 53. Найдите наибольшее значение функции $y = 3 + 27x - x^3$ на отрезке [−3; 3].

Решение.

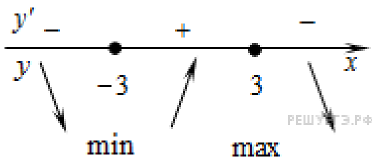
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 27 - 3x^2.$$

Найдем нули производной:

$$27 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



На отрезке $[3;3]$ заданная функция возрастает. Она принимает наибольшее значение в точке $x = 3$. Найдем его:

$$y(3) = 3 + 27 \cdot 3 - 3^3 = 3 + 81 - 27 = 57.$$

Ответ: 57.

54. 54. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 3x + 4$ на отрезке $[-2;0]$.

Решение.

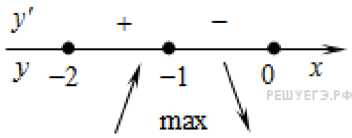
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x+1)(x-1).$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} 3(x+1)(x-1) = 0, \\ -2 \le x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 1, \end{array}\right. \\ -2 \le x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = -1$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение:

$$y(-1) = -1 + 3 + 4 = 6.$$

Ответ: 6.