

Рациональное уравнение – это уравнение вида $f(x) = g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ - рациональные выражения.

Рациональные выражения - это целые и дробные выражения, соединённые между собой знаками арифметических действий: деления, умножения, сложения или вычитания, возведения в целую степень и знаками последовательности этих выражений.

Например,

$$\frac{2}{x} + 5x = 7 - \text{рациональное уравнение}$$

$$3x + \sqrt{x} = 7 - \text{иррациональное уравнение (содержит корень)}$$

Если хотя бы в одной части рационального уравнения содержится дробь, то уравнение называется дробно рациональным.

Чтобы решить дробно рациональное уравнение, необходимо:

1. Найти значения переменной, при которых уравнение не имеет смысл (ОДЗ);
2. Найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;
3. Умножить обе части уравнения на общий знаменатель;
4. Решить получившееся целое уравнение;
5. Исключить из его корней те, которые обращают в ноль общий знаменатель.

$$\text{Решить уравнение: } 4x + 1 - \frac{3}{x} = 0$$

Решение:

1. находим значения переменной, при которых уравнение не имеет смысл (ОДЗ)

$$x \neq 0$$

2. находим общий знаменатель дробей и умножаем на него обе части уравнения

$$4x + 1 - \frac{3}{x} = 0 \quad | \cdot x$$

$$4x \cdot x + 1 \cdot x - \frac{3 \cdot x}{x} = 0$$

3. решаем полученное уравнение

$$4x^2 + x - 3 = 0$$

Решим вторым устным способом, т.к. $a + c = b$

$$\text{Тогда, } x_1 = -1, x_2 = -\frac{3}{4}$$

4. исключаем те корни, при которых общий знаменатель равен нулю

В первом пункте получилось, что при $x = 0$ уравнение не имеет смысла, среди корней уравнения нуля нет, значит, оба корня нам подходят.

$$\text{Ответ: } x_1 = -1, x_2 = -\frac{3}{4}$$

При решении уравнения с двумя дробями, можно использовать основное свойство пропорции.

Основное свойство пропорции: Если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ - пропорция, то $a \cdot d = b \cdot c$

$$\text{Решить уравнение } \frac{3x - 5}{-2} = \frac{1}{x}$$

Решение:

Находим значения переменной, при которых уравнение не имеет смысл (ОДЗ)

$$x \neq 0$$

Воспользуемся основным свойством пропорции

$$x(3x - 5) = -2$$

Раскроем скобки и соберем все слагаемые в левой стороне

$$3x^2 - 5x + 2 = 0$$

Решим данное квадратное уравнение первым устным способом, т.к.
 $a + b + c = 0$

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{2}{3}$$

В первом пункте получилось, что при $x = 0$ уравнение не имеет смысла, среди корней уравнения нуля нет, значит, оба корня нам подходят.

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = \frac{2}{3}$

Дробно рациональные уравнения

Рациональное уравнение, в котором левая или правая части являются дробными выражениями, называется дробным.

Чтобы решить дробное уравнение, необходимо:

1. найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;
2. умножить обе части уравнения на общий знаменатель;
3. решить получившееся целое уравнение;
4. исключить из его корней те, которые обращают в ноль общий знаменатель.

$$4x + 1 - \frac{3}{x} = 0$$

1. находим значения переменной, при которых уравнение не имеет смысл (ОДЗ)

$$x \neq 0$$

2. находим общий знаменатель дробей и умножаем на него обе части уравнения

$$4x + 1 - \frac{3}{x} = 0 \quad | \cdot x$$

$$4x \cdot x + 1 \cdot x - \frac{3 \cdot x}{x} = 0$$

3. решаем полученное уравнение

$$4x^2 + x - 3 = 0$$

Решим вторым устным способом, т.к. $a + c = b$

$$\text{Тогда } x_1 = -1, x_2 = \frac{3}{4}$$

4. исключаем те корни, при которых общий знаменатель равен нулю
В первом пункте получилось, что при $x = 0$ уравнение не имеет смысла, среди корней уравнения нуля нет, значит, оба корня нам подходят.

$$\text{Ответ: } x_1 = -1, x_2 = \frac{3}{4}$$

При решении уравнения с двумя дробями можно использовать основное свойство пропорции.

Основное свойство пропорции: Если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $a \cdot d = b \cdot c$

$$\frac{3x - 5}{-2} = \frac{1}{x}$$

Находим значения переменной, при которых уравнение не имеет смысла (ОДЗ)

$$x \neq 0$$

Воспользуемся основным свойством пропорции

$$x(3x - 5) = -2$$

Раскроем скобки и соберем все слагаемые в левой части уравнения

$$3x^2 - 5x + 2 = 0$$

Решим данное квадратное уравнение первым устным способом, т.к.

$$a + b + c = 0$$

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{2}{3}$$

В первом пункте получилось, что при $x = 0$ уравнение не имеет смысл, среди корней уравнения нуля нет, значит, оба корня нам подходят.

$$\text{Ответ: } x_1 = 1, x_2 = \frac{2}{3}$$