

Самая удобная и увлекательная подготовка к ЕГЭ

ООО «Экзамер»

Логарифмом положительного числа b по основанию a , где $a > 0, a \neq 1$, называется показатель степени, в которую надо возвести число a , чтобы получить b .

$$\log_2 8 = 3, \text{ т.к. } 2^3 = 8;$$

$$\log_3 \frac{1}{27} = -3, \text{ т.к. } 3^{-3} = \frac{1}{27}.$$

Особенно можно выделить три формулы:

$$\log_a a = 1;$$

$$\log_a 1 = 0;$$

$$\log_a a^b = b.$$

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b$$

Это равенство справедливо при $b > 0, a > 0, a \neq 1$

$$4^{\log_4 5} = 5;$$

$$3^{-2\log_3 5} = \left(3^{\log_3 5}\right)^{-2} = 5^{-2} = \frac{1}{25}$$

Некоторые свойства логарифмов

Все свойства логарифмов мы будем рассматривать для $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, m$ – любое действительное число.

1. Для любого действительного числа m справедливы равенства:

$$\log_a b^m = m \log_a b;$$

$$\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \log_a b.$$

$$\log_3 3^{10} = 10 \log_3 3 = 10;$$

$$\log_{5^3} 7 = \frac{1}{3} \log_5 7;$$

$$\log_{3^7} 4^5 = \frac{5}{7} \log_3 4;$$

2. Для решения задач иногда полезно следующее свойство: Если числа a и b на числовой оси расположены по одну сторону от единицы, то $\log_a b > 0$, а если по разные, то $\log_a b < 0$.

Десятичным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию 10 и пишут lgb вместо $\log_{10} b$.

Натуральным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию e , где e – иррациональное число, приближенно равное 2,7. При этом пишут lnb , вместо $\log_e b$.

Логарифмические уравнения

Логарифмическими уравнениями называют уравнения вида

$\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где a – положительное число, отличное от 1, и уравнения, сводящиеся к этому виду.

После нахождения корней логарифмического уравнения необходимо проверить условие: подлогарифмическое выражение должно быть больше 0.

Можно выделить несколько основных видов логарифмических уравнений:

1. **Простейшие логарифмические уравнения:** $\log_a x = b$. Решение данного вида уравнений следует из определения логарифма, т.е.

$$x = a^b \text{ и } x > 0$$

$$\log_2 x = 3$$

Представим обе части уравнения в виде логарифма по основанию 2

$$\log_2 x = \log_2 2^3$$

Если логарифмы по одинаковому основанию равны, то подлогарифмические выражения тоже равны.

$$x = 8$$

Ответ: $x = 8$

2. Уравнения вида: $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. Т.к. основания одинаковые, то приравниваем подлогарифмические выражения:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$$\log_3 (x^2 - 3x - 5) = \log_3 (7 - 2x)$$

Т.к. основания одинаковые, то приравниваем подлогарифмические выражения

$$x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x$$

Перенесем все слагаемые в левую часть уравнения и приводим подобные слагаемые

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$x_1 = 4, x_2 = -3$$

Проверим найденные корни по условиям: $\begin{cases} x^2 - 3x - 5 > 0 \\ 7 - 2x > 0 \end{cases}$

При подстановке во второе неравенство корень $x = 4$ не удовлетворяет условию, следовательно, он посторонний корень

Ответ: $x = -3$

3. **Уравнения квадратного вида** $\log_a^2 x + \log_a x + c = 0$. Такие уравнения решаются способом введения новой переменной и переходом к обычному квадратному уравнению.

4. **Уравнения вида** $a^x = b$. Решаются логарифмированием обеих частей по основанию a .

Решить уравнение $\log_5 \log_2 (x + 1) = 1$

Решение:

Сделаем в обеих частях уравнения логарифмы по основанию 5

$$\log_5 (\log_2 (x + 1)) = \log_5 5$$

Т.к. основания одинаковые, то приравниваем подлогарифмические выражения

$$\log_2 (x + 1) = 5$$

Далее представим обе части уравнения в виде логарифма по основанию 2

$$\log_2 (x + 1) = \log_2 2^5$$

$$x + 1 = 32$$

$$x = 31$$

ОДЗ данного уравнения $x + 1 > 0$

Подставим вместо x в неравенство 31 и проверим, получится ли верное условие $32 > 0$, следовательно, 31 корень уравнения.

Ответ: 31