Геометрический смысл производной

Напомним, что уравнение прямой, не параллельной осям координат, можно записать в виде $y = kx + b$, где k – угловой коэффициент прямой. Коэффициент k равен тангенсу угла наклона между прямой и положительным направлением оси Ox.

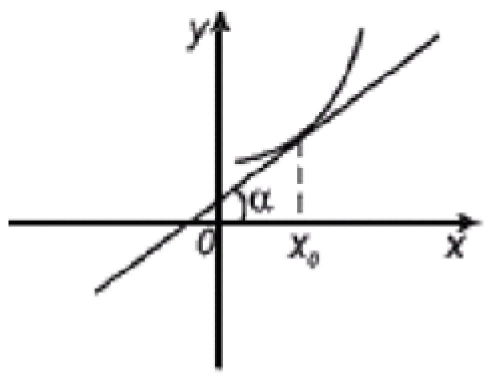
$k = tg\alpha$

Производная функции $f\left(x\right)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту k касательной к графику в данной точке:

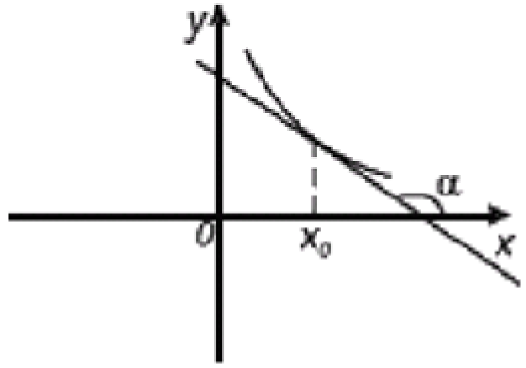
$f'\left(x_0\right) = k$

Следовательно, можем составить общее равенство:

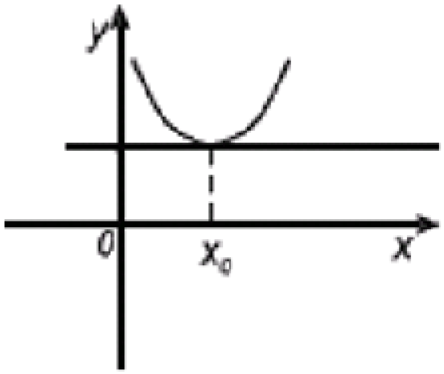
$f'\left(x_0\right) = k = tg\alpha$



На рисунке касательная к функции $f\left(x\right)$ возрастает, следовательно, коэффициент $k > 0$. Так как $k > 0$, то $f'\left(x_0\right) = tg\alpha > 0$. Угол α между касательной и положительным направлением Ox острый.

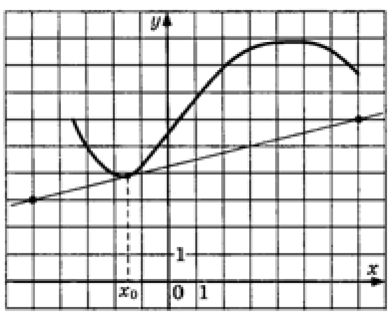


На рисунке касательная к функции $f\left(x\right)$ убывает, следовательно, коэффициент $k<0$, следовательно, $f'\left(x_0\right)=tg\alpha<0$. Угол α между касательной и положительным направлением оси Ox тупой.



На рисунке касательная к функции $f\left(x\right)$ параллельна оси Ox, следовательно, коэффициент $k=0$, следовательно, $f'\left(x_0\right)=tg\alpha=0$. Точка x_0, в которой $f'\left(x_0\right)=0$, называется **экстремумом**.

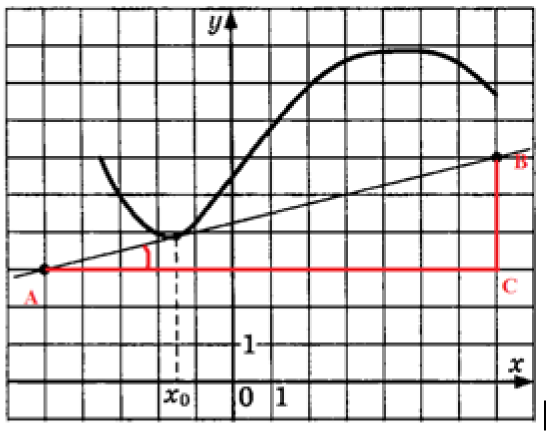
На рисунке изображён график функции $y=f\left(x\right)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f\left(x\right)$ в точке x_0.



Решение:

Касательная к графику возрастает, следовательно, $f'\left(x_0\right) = tg\alpha > 0$

Для того, чтобы найти $f'\left(x_0\right)$, найдем тангенс угла наклона между касательной и положительным направлением оси Ox. Для этого достроим касательную до треугольника ABC.



Найдем тангенс угла BAC. (Тангенсом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету.)

$$tgBAC = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$f'\left(x_0\right) = tg\mathrm{BAC} = 0,25$$

Ответ: $0,25$