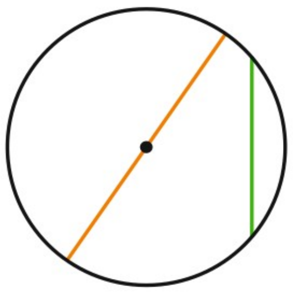
Центральный и вписанный угол, свойства

Окружность. Центральный и вписанный угол

Центральный угол — это угол, вершина которого находится в центре окружности.

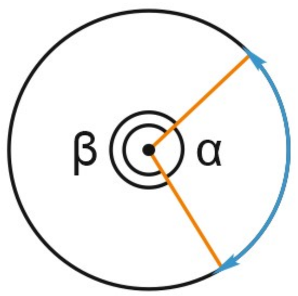
Вписанный угол — угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают ее.



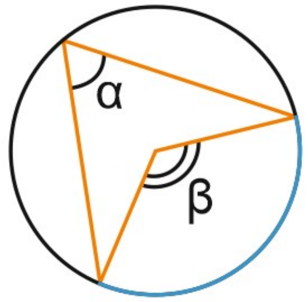
Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется хорда.

Самая большая хорда проходит через центр окружности и называется диаметр.

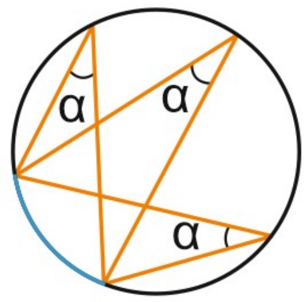
На рисунках — центральные и вписанные углы, а также их важнейшие свойства.



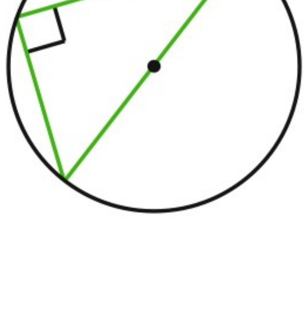
Угол, вершина которого лежит в центре окружности, называется *центральным*. Величина центрального угла равна угловой величине дуги, на которую он опирается. Угол β тоже можно назвать центральным. Только он опирается на дугу, которая больше 180°.



Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется вписанным. Величина вписанного угла равна половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.



Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.



Вписанный угол, опирающийся на диаметр, - прямой.

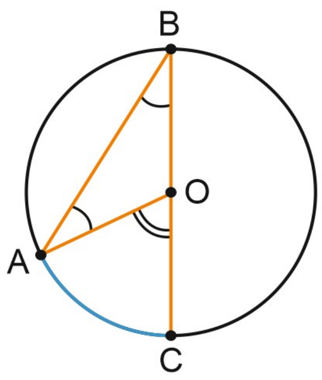
Величина центрального угла равна угловой величине дуги, на

которую он опирается. Значит, центральный угол величиной в 90

градусов будет опираться на дугу, равную 90°, то есть $\frac{1}{4}$ круга.

Центральный угол, равный 60°, опирается на дугу в 60 градусов, то есть на шестую часть круга.

Докажем, что величина вписанного угла в два раза меньше центрального, опирающегося на ту же дугу.



Пусть угол AOC — центральный и опирается на дугу AC, тогда OA и OC — радиусы окружности.

Пусть $\angle$ABC — вписанный угол, опирающийся на дугу AC,

AB и BC — хорды окружности.

Первый случай: Точка O лежит на BC, то есть BC — диаметр окружности.

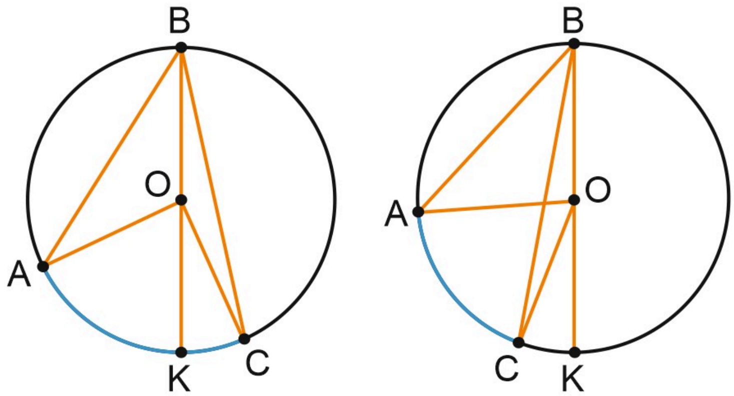
Треугольник AOB — равнобедренный, AO = OB как радиусы. Значит,

$\angle A = \angle B.$

$\angle AOC$ — внешний угол $\triangle AOB,$ а внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

Получили, что $\angle AOC = \angle A + \angle B = 2 \cdot \angle B = 2\angle ABC.$

Второй случай: Центр окружности точка O не лежит на BC. Построим диаметр BK:



Если точка O лежит внутри вписанного угла ABC, как на рисунке слева, то

$$\angle AOC = \angle AOK + \angle KOC = 2\angle ABK + 2\angle KBC = 2\angle ABC.$$

Если O лежит вне вписанного угла ABC, как на рисунке справа, то

$$\angle AOC = \angle AOK - \angle COK = 2\angle ABK - 2\angle CBK = 2\angle ABC.$$

Мы получили, что в каждом из этих случаев величина центрального угла в два раза больше, чем величина вписанного угла, опирающегося на ту же дугу.

Теорема доказана.

При решении задач по геометрии также применяются следующие теоремы:

1. Равные центральные углы опираются на равные хорды.

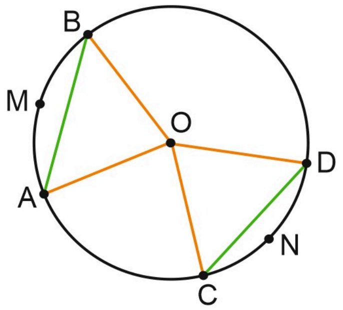
2. Равные вписанные углы опираются на равные хорды.

3. Равные хорды стягивают равные дуги.

Докажем теорему 3.

Пусть хорды AB и CD равны. Докажем, что AMB дуги CND имеют одинаковую градусную меру, то есть равны.

Доказательство:



По условию, AB = CD. Соединим концы хорд с центром окружности. Получим: AO = BO = CO = DO = r.

$\triangle AOB = \triangle CPD$ по трем сторонам, отсюда следует, что центральные углы равны, т.е. $\angle AOB = \angle COD.$ Значит, и дуги, на которые они опираются, также равны, т.е. дуги AMB и CND имеют одинаковую градусную меру.

Теорема доказана.

Верна и обратная теорема:

Если две дуги окружности равны, то равны и хорды, их стягивающие.

Пусть дуги AMB и CND равны. Тогда $\angle AOB = \angle COD$ как центральные углы, опирающиеся на эти дуги. Значит, треугольники $\triangle AOB$ и $\triangle CPD$ равны по двум сторонам и углу между ними, и тогда $AB = CD,$ что и требовалось доказать.

Эти две теоремы можно объединить в одну, которая формулируется так:

Хорды окружности равны тогда и только тогда, когда равны дуги, которые они стягивают.

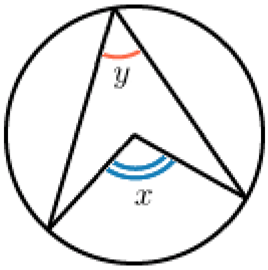
Разберем задачи ЕГЭ и ОГЭ по теме: Окружность, центральный угол, вписанный угол.

Задача 1, ЕГЭ. Чему равен вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности? Ответ дайте в градусах.

Вписанный угол, опирающийся на диаметр, — прямой.

Ответ: 90.

Задача 2, ЕГЭ. Центральный угол на 36° больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите вписанный угол. Ответ дайте в градусах.



Решение:

Пусть центральный угол равен x, а вписанный угол, опирающийся на ту же дугу, равен y.

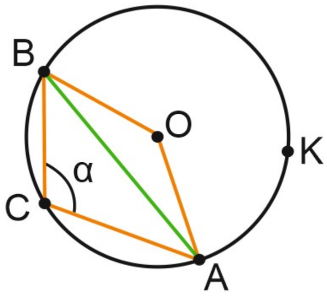
Мы знаем, что $x = 2y.$

Отсюда $2y = 36 + y,$

$y = 36.$

Ответ: 36.

Задача 3, ЕГЭ. Радиус окружности равен 1. Найдите величину тупого вписанного угла, опирающегося на хорду, равную $\sqrt{2}.$ Ответ дайте в градусах.

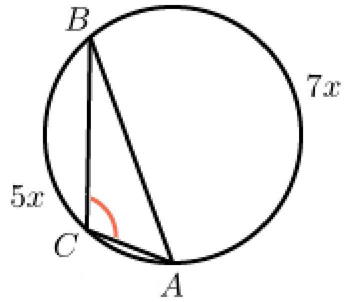


Решение:

Пусть хорда AB равна $\sqrt{2}.$ Тупой вписанный угол, опирающийся на эту хорду, обозначим $\alpha.$ В треугольнике AOB стороны AO и OB равны 1, сторона AB равна $\sqrt{2}.$ Нам уже встречались такие треугольники. Очевидно, что треугольник AOB — прямоугольный и равнобедренный, то есть угол AOB равен 90$^\circ.$ Тогда дуга ACB равна 90$^\circ,$ а дуга AKB равна $360^\circ - 90^\circ = 270^\circ.$ Вписанный угол α опирается на дугу AKB и равен половине угловой величины этой дуги, то есть 135.

Ответ: 135.

Задача 4, ЕГЭ. Хорда AB делит окружность на две части, градусные величины которых относятся как 5 : 7. Под каким углом видна эта хорда из точки C, принадлежащей меньшей дуге окружности? Ответ дайте в градусах.



Решение:

Главное в этой задаче — правильный чертеж и понимание условия. Как вы понимаете вопрос: «Под каким углом хорда видна из точки С?»

Представьте, что вы сидите в точке С и вам необходимо видеть всё, что происходит на хорде АВ. Так, как будто хорда АВ — это экран в кинотеатре :-) Очевидно, что найти нужно угол АСВ. Сумма двух дуг, на которые хорда АВ делит окружность, равна $360^\circ,$ то есть

$5x + 7x = 360^\circ$

Отсюда $x = 30^\circ,$ и тогда вписанный угол АСВ опирается на дугу, равную $210^\circ.$ Величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги, на которую он опирается, значит, угол АСВ равен $105^\circ.$

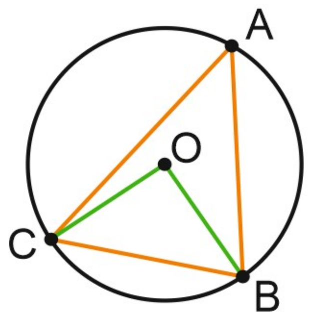
Ответ: 105.

Задача 5, ЕГЭ.

Треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Найдите угол

BOC, если угол BAC равен 32 $^\circ$.

Решение:



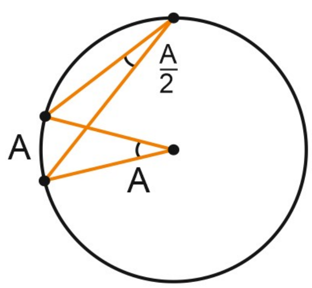
Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

$$\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC.$$

Значит, $\angle BOC = 2 \cdot \angle BAC = 2 \cdot 32^\circ = 64^\circ.$

Ответ: 64.

Задача 6, ЕГЭ. Найдите центральный угол AOB, если он на 15° больше вписанного угла ACB, опирающегося на ту же дугу. Ответ дайте в градусах.



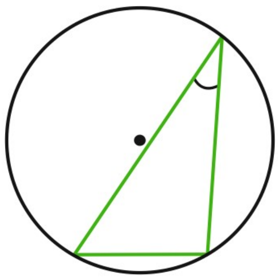
Решение:

Пусть величина угла AOB равна x градусов. Величина вписанного угла ACB равна половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу, то есть $\frac{x}{2}$ градусов.

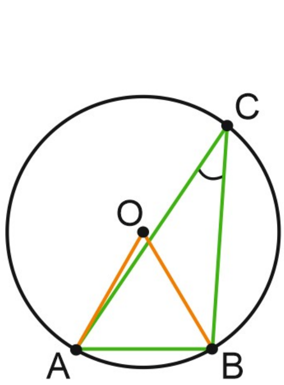
Получим уравнение: $x - \frac{1}{2}x = 15°,$ откуда $x = 30°.$

Ответ: 30.

Задача 7, ЕГЭ. Чему равен острый вписанный угол, опирающийся на хорду, равную радиусу окружности? Ответ дайте в градусах.



Решение.



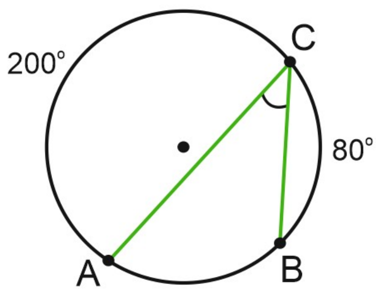
Рассмотрим треугольник AOB. Он равносторонний, так как AO = OB = AB = R.

Поэтому угол AOB = 60. Вписанный угол ACB равен половине дуги, на которую он опирается, то есть 30°.

Ответ: 30.

Задача 8, ЕГЭ.

Дуга окружности AC, не содержащая точки B, составляет 200°. А дуга окружности BC, не содержащая точки A, составляет 80°. Найдите вписанный угол ACB. Ответ дайте в градусах.



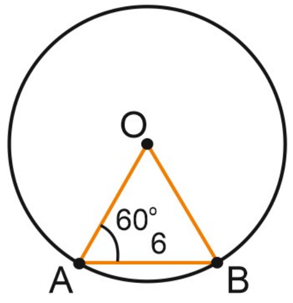
Решение:

Вписанный угол равен половине угловой величины дуги, на которую он опирается. Дуга AB равна $360^\circ - 200^\circ - 80^\circ - 80^\circ.$ Тогда $\angle ACB = 40^\circ.$

Ответ: 40.

Задачи ОГЭ по теме: Центральный и вписанный угол, градусная мера дуги.

Задача 9, ОГЭ. Центральный угол AOB опирается на хорду AB длиной 6. При этом угол OAB равен $60^\circ.$ Найдите радиус окружности.



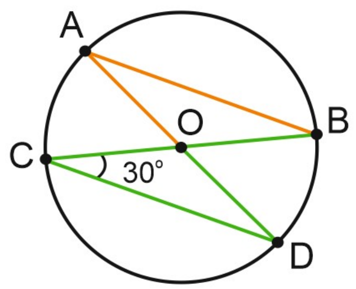
Решение.

Рассмотрим треугольник AOB: он равнобедренный, его боковые стороны равны радиусу окружности.

Углы при основании равнобедренного треугольника равны. Пусть AOB равен x, тогда $x + 60° + 60° = 180°,$ где $x = 60°.$ Треугольник, у которого все углы равны, — равносторонний треугольник; значит, радиус равен 6.

Ответ: 6.

Задача 10, ОГЭ. В окружности с центром в точке O проведены диаметры AD и BC, угол OCD равен $30°.$ Найдите величину угла OAB.

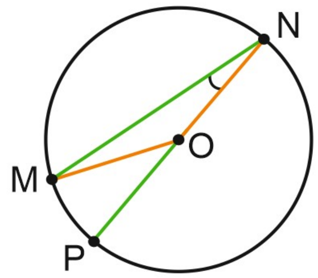


Решение.

Вписанные углы BCD и BAD опираются на одну и ту же дугу окружности, поэтому они равны, угол $OAB = 30°.$

Ответ: 30.

Задача 11, ОГЭ. Найдите градусную меру центрального $\angle$MON, если известно, что NP — диаметр, а градусная мера $\angle$MNP равна 18°.



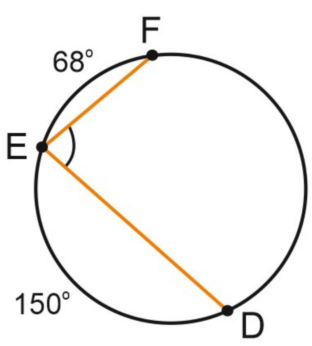
Решение:

Треугольник MON — равнобедренный. Тогда $\angle MON = 180^{\circ}$ − $2 \cdot 18^{\circ} = 144^{\circ}$.

Ответ: 144.

Задача 12, ОГЭ.

Найдите $\angle$DEF, если градусные меры дуг DE и EF равны 150° и 68° соответственно.

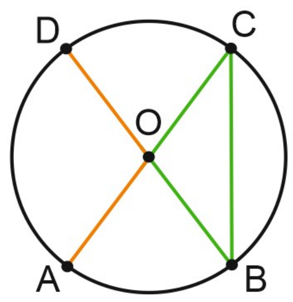


Решение.

Дуга FD, не содержащая точку E, равна $360° - 150° - 68° = 142°.$
Вписанный угол DEF, опирающийся на эту дугу, равен половине ее угловой величины, $\angle DEF = 71°.$

Ответ: 71.

Задача 13, ОГЭ. В окружности с центром O AC и BD — диаметры. Угол ACB равен $26°.$ Найдите угол AOD. Ответ дайте в градусах.



Решение.

Угол ACB — вписанный, он равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу, то есть AOB = 52°. Угол BOD — развернутый, поэтому угол AOD равен $180° - 52° = 128°.$

Ответ: 128.

Благодарим за то, что пользуйтесь нашими публикациями. Информация на странице «Окружность. Центральный и вписанный угол» подготовлена нашими авторами специально, чтобы помочь вам в освоении предмета и подготовке к экзаменам. Чтобы успешно сдать нужные и поступить в высшее учебное заведение или техникум нужно использовать все инструменты: учеба, контрольные, олимпиады, онлайн-лекции, видеоуроки, сборники заданий. Также вы можете воспользоваться другими статьями из данного раздела.

Публикация обновлена: 02.04.2024