CH5、Tree

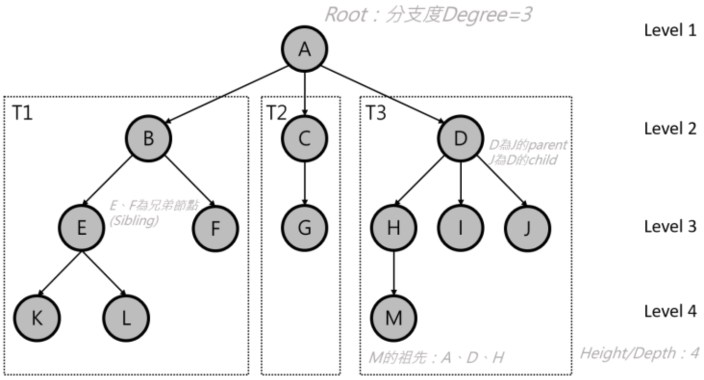
樹與二元樹

目錄：

Tree

Def：由一個或多個 Node 組成集合，具有：

1. 有一特定 Node 為 Root(樹根)，此 Node 沒有 Parent.
2. 其餘成為(n≥0)個互斥集合 T1, T2, …, Tn 皆為一棵樹為 Root 之 Subtree(子樹)



Leaf Node(Terminal Node)：F, G, I, J, K, L, M*(Degree=0)*

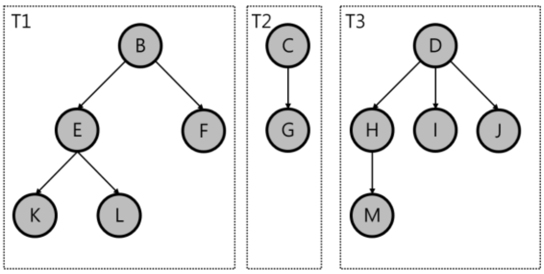
Non-terminal：A, B, C, D, E, H

Height/Depth：4*(若有註明從第 0 層開始，則為 3，要注意)*

把 Root(A)拔掉，可變成 3 個獨立的子樹：T1, T2, T3*(虛線框內)*

Tree Degree=Max(各 Node Degree)

Forest(森林)：由 0~多棵互斥的 Tree 組成



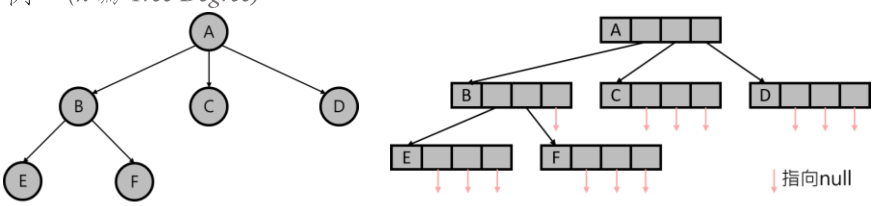
Tree 的表示法

[法一]採 Linked List

Node Structure

Data	$Link_1$	$Link_2$	…	$Link_k$

例：*(k 為 Tree Degree)*

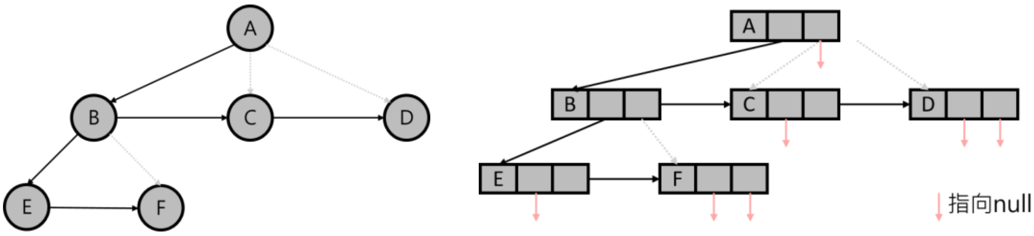


問題：太浪費空間
說明：Tree Degree=k，Node 數=n 個，需準備 n*k 個 Links，又實際上有用到的只有 n-1 個，因此浪費率 n*k-(n-1) / nk ≈ (k-1)/k => 可知 k 越小越好
⇨ [法二]化成二元樹再存

[法三]採 Child-Sibiling 方法
Def：
Node Structure：

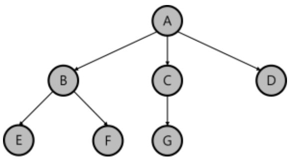
Data	Child	Sibling

Child：Link 指向”Leftmost Child”
Sibling：Link 指向”Next Right Sibling Node”
例：



[法四]括號法(Lists)
作法：
1. 父(子…子)
2. 表示父子間的形成關係
3. 可以用巢狀(Nested)表示*(括號內有括號)*

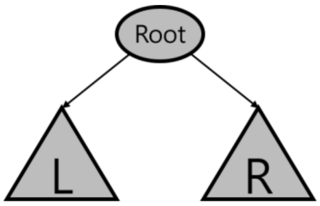
例：



=> List：A(B(EF)C(G)D)

二元樹(Binary Tree, BT，也稱 Ordered Tree 有序樹)
Def：由 Node 組成之有限集合，由：
1. Root(D)
2. 左子樹(L)
3. 右子樹(R)

組成，例：

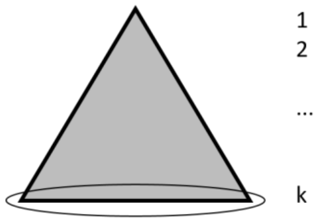


比較表

Tree	Binary Tree
不可為空	可為空
Degree ≥ 0	Degree 介於 0~2 之間
“沒有” 順序之分	“有”左右之分

BT 三定理

1. 第 i level 之 Node 數最多為 2^{i-1} 個



第 k 層最多有 2^{k-1} 個

[證明]：歸納法

(1) 恆真

(2) 令 i=k-1 時成立

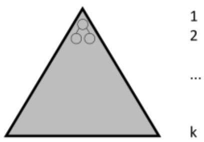
(3) 當 i=k 時亦成立

(1) 當 i=1 時，只有 Root=> $2^{1-1}=2^0=1$，成立

(2) 令 i=k-1 時皆成立

*(3) 當 i=k 時，最多 Node 為：k-1 層之最多 Node 數*2 = $2^{k-1-1}*2=2^{k-1}$，成立。由(1)、(2)、(3)可得證*

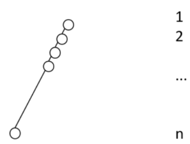
2. 高度為 k 之 BT，總 Node 數為 2^k-1



總 Node 數=$2^0+2^1+\ldots+2^{k-1}=2^k-1$

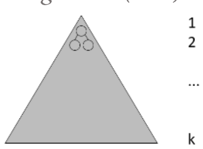
例 1：一 BT 有 n(17)個 Node，問最高為何？最低為何？

1.



Height = n (=17)

2.



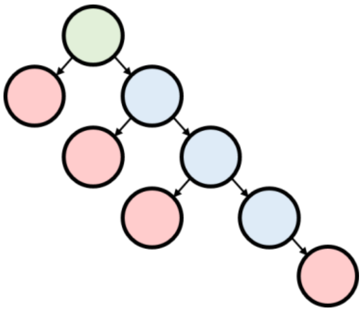
$2^{k-1}=n$，$2^k=n+1$ => $k = \log_2(n+1)$ ($=4.x \approx 5$)

例 2：

1. BT 有用的 Link 數=99，則總 Node 數為何 ?
2. BT 有 200 個 Leaf Node，問最小高度為何 ?
3. BT 有 200 個 Node，問最小高度為何 ?

1. *100*
2. *(定理 1)：$2^{k-1}=200 \Rightarrow k \approx 9$*
3. *(定理 2)：$2^{k}-1=200 \Rightarrow k \approx 8$*

3. 一非空的 BT 為 n_0 為 Leaf Node 為 0 之個數，n_2 為 Degree=2 之 Node，則 $n_0=n_2+1$



$n_0 = 4 = 3 + 1 = n_2 + 1$

[證明]：
n_0 為 Degree = 0 之 Node 數
n_1 為 Degree = 1 之 Node 數
n_2 為 Degree = 2 之 Node 數
B 為總分支度 = 有用的 Link 數 = N-1
則 $N=n_0+n_1+n_2 = B+1 = (n_1*1 + n_2*2) +1$
等式兩邊可消掉 => $n_0=n_2+1$

例 1：一 BT 有 12 個 Node，又 $n_1=5$，問 Leaf 數為何 ?

$N=n_0+n_1+n_2$
$12=n_0+5+n_2$
⇨ *$n_0+n_2=7$*
又 $n_0=n_2+1 \Rightarrow n_2+1+n_2=7$
$n_2=3$，故 $n_0=4$

例 2：一 Tree，其 Tree Degree=5，令 n_i 為 Degree i 之 Node 數，且 $n_i = i$ ($i\geq1$)，問：

1. 此 Tree 總 Node 數為何 ?
2. Leaf Node 數為何 ?

1. *$N=B+1 = n_1*1 + n_2*2 + n_3*3 + n_4*4 + n_5*5 + 1 = 1+4+9+16+25+1 = 56$*
2. *$56 = n0 +1+2+3+4+5 \Rightarrow n0 = 41$*

例 3：承上，若 Degree=k，則 n_0 為何 ?

$N=B+1 = n1*1 + n2*2 + n3*3 + \dots + nk*k +1 = 1*1+2*2+\dots+k*k +1$
$N = n0 + n1 + \dots + nk = n0 + 1+2+\dots+k$
$n0 = 12 + 22 + \dots + k2 +1 - (1+2+\dots+k) = k(k+1)(2k+1)/6 +1 - k(k+1)/2$
$= [k(k+1)(2k+1) - 3k(k+1) + 6] / 6$

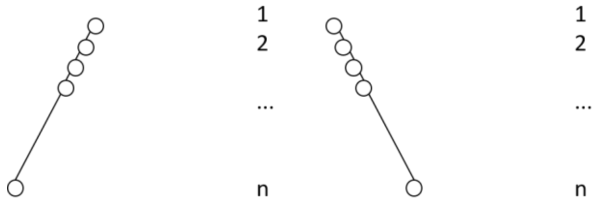
例 4：一 Quard Tree，Tree Degree=4，且 Non-leaf Node 之 Degree 皆為 4，若其 Leaf Node 數量=x，問總 Node 數為何 ?

已知 $N=B+1 = n_4*4 +1$
已知 $n_0=x$，$N = n_0 + n_4$
故 $4n_4 +1 = x + n_4$
⇨ *$n_4 = (x-1)/3$，故 $N = x + (x-1)/3$*

特殊二元樹

一、Skewed BT(斜曲二元樹)

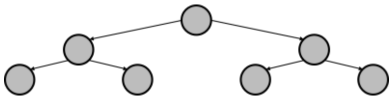
分為左斜曲 BT(Left Skewed BT)與右斜區 BT(Right Skewed BT)



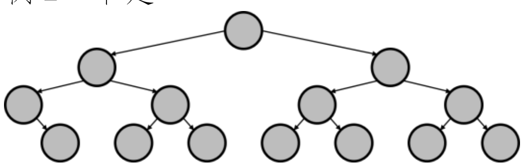
二、Full BT(完滿二元樹)

Def：高度為 k，具 2^k-1 個 Node，謂之

例 1：是



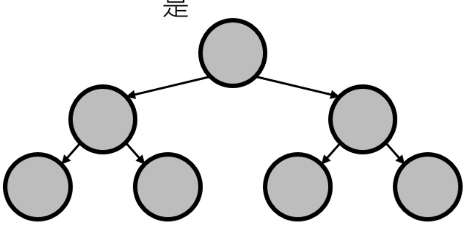
例 2：不是



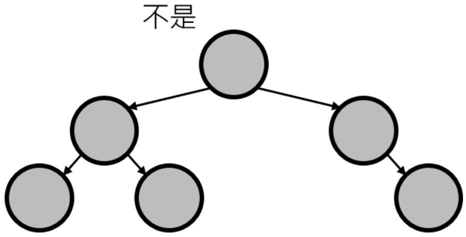
三、Complete BT(完整二元樹)

Def：高度為 k，具 n 個 Node，其依序編號後會跟高度為 k 之 Full BT 的前 n 個 Node 一一對應

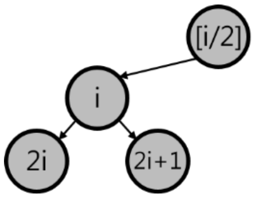
是



不是



定理：



if([i/2]<1)，沒有父點=>Root

if (2_i > N)，左兒子不存在

if (2_i+1 > N)，右兒子不存在

[證明]*先證 1.成立，則 2.成立，1.與 2.成立，則 3.成立*

1. 當 Node 編號=1，Root。而 Root 的存兒子=2(必成立)
2. 令編號 i-1 之前，上述皆成立
3. 則編號=i 時，其左兒子編號必為：i-1 之左兒子編號數+2
   = 2_i -2 +2 = 2_i，可知 2.亦成立。1.與 2.成立，則 3.成立，故得證

例 1：一 Complete BT 有 1000 個 Node，則：

1. 最後一個 Parent 編號為何？
2. 編號 250, 251 是否為 Sibling？
3. 250 的祖父編號為何？
4. 371 的左子點、右子點、父點編號為何？
5. 編號 512 之左兒子為何？

1. *1000/2 = 500*
2. *250/2 = 125 = 251/2，故此 2 數是兄弟*
3. *250/2 = 125*
4. *371*2=742、742+1=743、374/2=185*
5. *512*2=1024 > 1000，故無左兒子不存在*

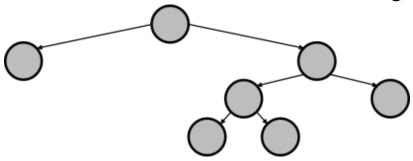
[延伸題]

6. 第 7 level 的第 1 個 Node 編號為何？
7. Depth 為何？
8. 375 位於 level 幾？
9. Leaf Node 數為何？
10. Degree = 1 的個數為何？
11. n_1 之數量永為 0~1 之間(True/False)？

6. *2^6-1+1 = 2^6 = 64*
7. *Log(1000+1) ≈ 10*
8. *Log (375+1) = 9*
9. *500 個*
10. *看最後父點：1 個*
11. *True*

四、Strict BT(嚴格/嚴謹二元樹)

Def：所有 Non-leaf Node Degree 皆為 2，即 $n_1=0$



$N=n_0+n_2$

例 1：

1. Full BT 一定是 Strict BT？
2. Complete BT 一定是 Strict BT？
3. Strict 必為 Full BT？
4. Strict 必為 Complete BT？

1. *True*
2. *False*
3. *False*
4. *False*

例 2：

a. $n_0=n_2+1$
b. $N=2n_0-1$
c. $Height=\log_2(n+1)$
d. $n_0+n_2 \leq N \leq n_0+n_2+1$

問：

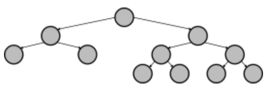
1. BT 符合：
2. Full BT 符合：
3. Complete BT 符合：
4. Strict BT 符合：

1. *a*
2. *a, b, c, d*
3. *a, c, d*
4. *a, b, d*

例 3：下列何者為非？

1. BT 中，each Node 皆有 Parent？
2. 空 Link 必比非空 Links 多 1 個？
3. Root 之左、右為 Full BT，則整棵樹為 Full？
4. Root 整棵樹為 Complete，則左、右子樹亦是 Complete？

1. *False*
2. *False*
3. *False*



4. *True*

   Note：通常 Top-down 會成立；Bottom-up 不見得

BT 表示法

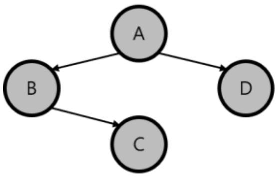
[法一] Linked List

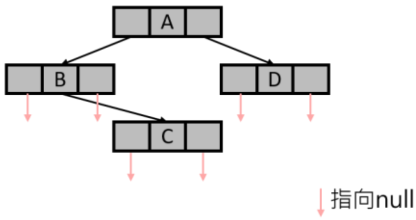
Node Structure

Lchild	Data	Rchild

指向左兒子　　　指向右兒子

例：





分析：若 BT 有 n 個 Node，需 2n 個 Link => 浪費 2n – (n-1) = n+1

優點：Insert、Delete 方便

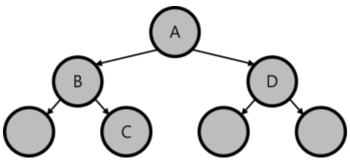
缺點：

1. 浪費 Link(約一半 Link 數沒用)
2. 對父點不得而知

[法二] Array(Heap 適用)

作法：將 BT 想成 Full BT，故需準備一個一維陣列 A[1: 2^k-1]，k 為高度

例：



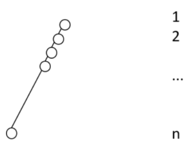
1	2	3	4	5	6	7
A	B	D		C		

優點：

1. 不需 Link Space
2. 可以輕易找到父點：Full，所以可用 Complete 的定理

缺點：

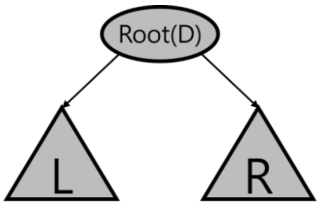
1. Insert、Delete 不便
2. 對斜曲樹不適用



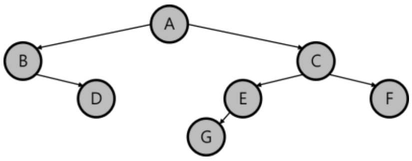
Full 需 2^{10}-1 = 1023，浪費：1023-10 = 1013

Traversal(追蹤/走訪)

目的：拜訪 BT 中所有的 Node 一次
規定：L 要在 R 之前拜訪
前序 DLR、中序 LDR、後序 LRD*(也有書將中間的 D 稱之為 N)*
方法：

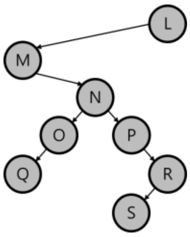


例 1：



前：ABDCEGF
中：BDAGECF
後：DBGEFCA

例 2：

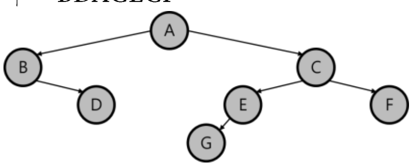


前：LMNOQPRS
中：MQONPSRL
後：QOSRPNML

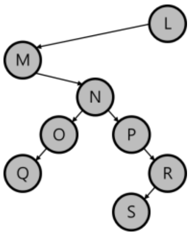
反向

考法：給前序+中序 or 後序+中序，決定一棵唯一的 BT
前序：從左而右找 Root
後序：從右而左找 Root

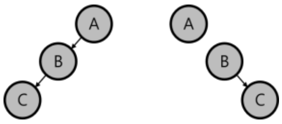
例 1：
前：ABDCEGF
中：BDAGECF



例 2：
前：QOSRPNML
中：MQONPSRL



例 3：試說明為何給前+後序，無法決定一棵唯一的 BT？

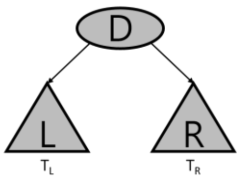


前序：ABC、後序：CBA
由上例可知，給前序+後序，無法決定一唯一的 BT

例 4：
1. 此 BT 的中序和前序相等？
2. 此 BT 的中序和後序相等？
3. 此 BT 的前序和後序相等？

1. 中序=前序(LDR=DLR)
   (1) 當空或只有 Root
   (2) 沒有 L(左子樹) => 即右斜曲
2. 中序=後序(LDR=LRD)
   (1) 當空或只有 Root
   (2) 當沒有 R(右子樹) => 即左斜曲
3. 前序=後序(DLR=LRD)
   (1) 當空或只有 Root 時才成立

例 5：試證後序+前序無法決定唯一 BT

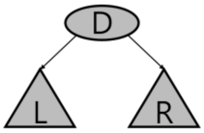


依 T_L、T_R 為空與否，分成下最 4 種：
1. T_L=T_R=空
   則：
   (1) 前序：D
   (2) 後序：D
2. $T_L \neq$ 空，T_R=空
   則：
   (1) 前序：DT_L'(T_L' 為 T_L 前序)
   *(2) 後序：T_L*D(T_L* 為 T_L 後序)*

3. T_L=空，$T_R \neq$空
   則：
   (1) 前序：DT_R'(T_R'為 T_R 的前序)
   (2) 後序：T_R^*D(T_R^*為 T_R 的後序)
4. $T_L \neq$空，$T_R \neq$空
   (1) 前序：$DT_L'T_R'$()
   (2) 後序：$T_L^*T_R^*D$()

結論：由上可知，當 $T_L'=T_R'$，$T_L^*=T_R^*$，則無法判別 2.與 3.，故結果不唯一

Note：注意題目會 Redefine。例：



RLD => CAB
RDL => CAB
DRL => ACB

例 6：試證前序+中序，決定唯一的 BT(採數學歸結法)

證明：
1. 當 Node 數=0(空)，此時前序=中序。故可決定一唯一的 BT
2. 令 Node 數≤n-1 時，此定理成立
3. 當 Node 數=n 時，自前序取第一個 Node 為 D(Root)，依 D 將中序切割成 D 以及 TL'(於 D 的左邊)、T_R'(於 D 的右邊)。令 TL'的長度=|TL'|、TR'的長度=|TR'|
   於前序中自第 2 個
   開始取長度$|T_L'|$個元素成為 T_L^*
   之後再取$|T_R'|$個長度成為 T_R^*

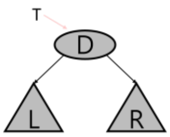
0	T_L^*	T_R^*

4. 又 TL'為左子樹的中序、T_L^*為左子樹的前序，且$|T_L'|$必≤n-1。故可決定唯一的左子樹
   同上，可決定唯一的右子樹。因為左、右子樹都唯一，故整個 BT 也唯一，得證。

Trevarsal 演算法

Node Structure：

Lchild	Data	Rchild



程式：

```
clase Node
{
        Node *Lchild;
        int data;
        Node *Rchild;
};
```

前序：

```
void preorder(Node *T)
{
	if(T!=null)
	{
		print(T->data);		//D
		preorder(T->Lchild);	//L
		preorder(T->Rchild);	//R
	}
}
```

中序：

```
void preorder(Node *T)
{
	if(T!=null)
	{
		preorder(T->Lchild);	//L
		print(T->data);		//D
		preorder(T->Rchild);	//R
	}
}
```

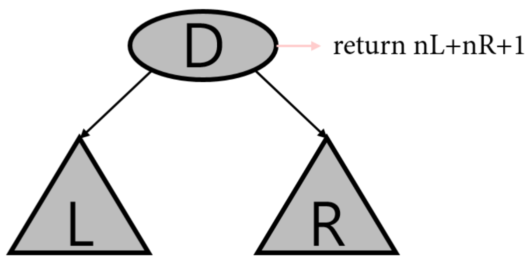
後序：

```
void preorder(Node *T)
{
	if(T!=null)
	{
		preorder(T->Lchild);	//L
		preorder(T->Rchild);	//R
		print(T->data);		//D
	}
}
```

應用演算法

1. Count：計算總 Node 數

   概念：

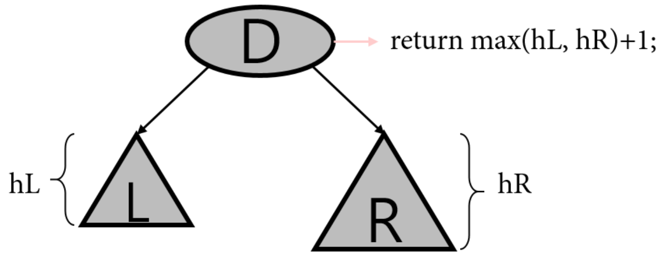


程式：

```
int count(Node *T)
{
	if(T==null) return 0;
	else
	{
		int nL=count(T->Lchild);
		int nR=count(T->Rchild);
		return nL+nR+1;
	}
}
```

2. Height：計算 Tree 的高度

概念：

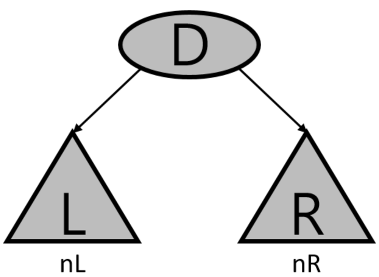


程式：

```
int height(Node *T)
{
	if(T==null) return 0;
	else
	{
		int hL=height(T->Lchild);
		int hR=height(T->Rchild);
		return max(hL, hR)+1;
	}
}
```

3. Leaf Node：計算 Leaf 數量

概念：

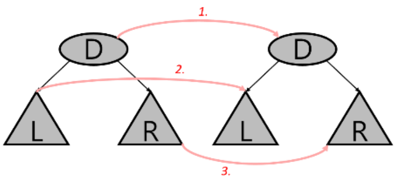


程式：

```
int countLeaf(Node *T)
{
        if(T==null) return 0;
        else
        {
                int nL=countLeaf(T->Lchild);
                int nR=countLeaf(T->Rchild);
                if(nL+nR==0)
                        return 1;
                else
                        return nL+nR;
        }
}
```

4. BT 的 Copy

概念：



程式：

```
Node *copy(Node *orig)
{
        Node *t=new Node();
        if(orig!=null)
        {
                t->data = orig->data;
                t->Lchild = copy(orig->Lchild);
                t->Rchild = copy(orig->Rchild);
        }
        else t=null;
        return t;
}
```

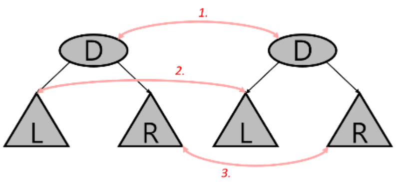
5. Equal：判別 s, t 2 個 BT 是否相等

概念：

(1) s=t=空 => true

(2) s≠空，t≠空 => check

(3) otherwise(一空一非空) => false

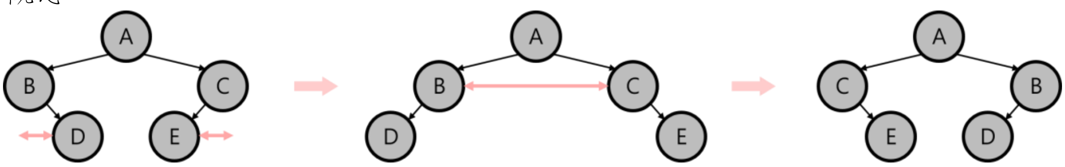


程式：

```
bool Equal(Node *s, Node *t)
{
	bool flag=false;
	if(s==null && t==null)
		return tree;
	else if(s!=null && t!=null)
	{
		if(Equal(s->data, t->data)
			if(Equal(s->Lchild, t->Lchild)
				flag=Equal(s->Rchild, t->Rchild)
		return flag;
	}
	else return false;
}
```

6. SWAP BT：將左、右子點互換

概念：



由下而上，左、右對調

程式：

```
void swap(Node *T)
{
	if(T!=null)
	{
		swap(T->Lchild);
		swap(T->Rchild);
		Node *tmp=T->Lchild;
		T->Lchild=T->Rchild;
		T->Rchild=tmp;
	}
}
```

7. Expression Tree

概念：利用 BT 表示運算式

(驗證：Proder 為 Prefix；Inorder 為 Infix；Postorder 為 Postfix)

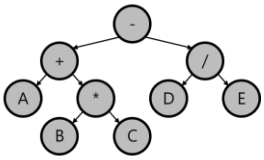
原則：

(1) Non-leaf 表示”operator”運算子

(2) Leaf 表示”operand”運算元

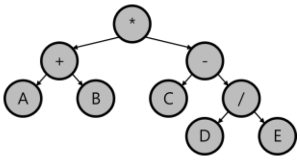
(3) Priority 愈高的運算子在愈下層(先執行)

例 1：A+(B*C)-D/E，建 Expression Tree



*Preorder：-+A*BC/DE*

例 2：(A+B)*(C-D/E)，建 Expression Tree



Recursive 演算法：計算 Expression BT 之結果：以 Linked List 表示

Node Structure

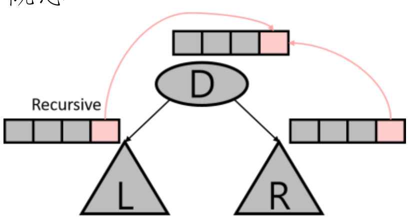
Lchild	Data	Rchild	Result

Note：

Data：存 operator 或 operand

Result：運算結果 or 變數 or 常數值

概念：



程式：

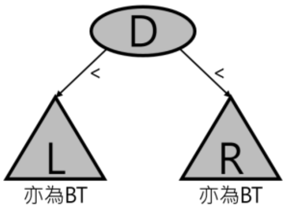
```
int Eval(Node *T)
{
        if(T->Lchild);
        {
                Eval(T->Lchild);
                Eval(T->Rchild);
                switch(T->data)
                {
                        case"變數或常數":
                                T->Result=T->data;
                        case"二元運算子":
                                T->Result=exec((T->Lchild)->Result,T->data, (T->Rchild)->Result);
                        case"單元運算子":
                                T->Result=exec(T->data, (T->Rchild)->Result);
                }
                return T->Result;
        }

}
```

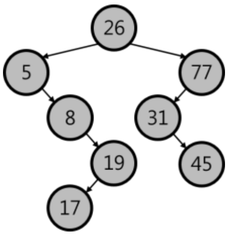
Binary Search Tree(**二元搜尋樹**)

Def：為一 BT，可為空，若不為空，則：

1. 左子樹鍵值小於 Root
2. 右子數鍵值大於 Root
3. 左、右子樹亦為 BST



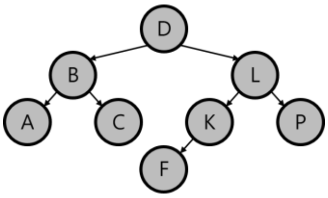
例 1：依下列 data 建一 BST：26, 5, 77, 8, 19, 31, 17, 15



利用中序追蹤可得：由小到大排列(Sorting 效果)：5, 8, 17, 19, 26, 31, 45, 77

例 2：BST 之 postorder 為：ACBFKPLD，問此 BT 之前序？

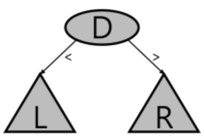
反向：後序+中序可得一唯一 BT
為 BST，故中序由小到大：ABCDFKLP，故可得圖：



前序：DBACLKFP

Search in BST

概念：



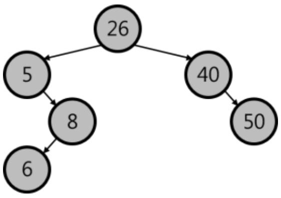
欲 Search key(x)於 BST 中，則：

1. x=Root => Found
2. x<Root => 找左子樹
3. x>Root => 找右子樹

程式：

```
bool search(Node *T, int x)
{
	if(T==null) return false;
	else
	{
		if(T->data==x) return true;
		else if(x<T->data)
			return search(T->Lchild, x);
		else
			return search(T->Rchild, x);
	}
}
```

例 1：採 BST 之 Search，平均比較次數為何？



(1+2+2+3+3+4)6 = 2.5

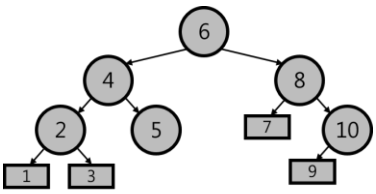
例 2：Worst case 的平均比較次數(Skewed BT)

(1+2+…+n)n = [n(n+1)/2] /n = (n+1)/2 => O(n)

例 3：Best case 的平均比較次數(Full BT)

O(log n)

例 4：有 1~10 個數於 BST，如下圖，求平均比較次數(含失敗值)



失敗本身不算
25/10 = 2.5(次)

比較表

<table>
<tr><th></th><th>Best Case</th><th>Worst Case</th></tr>
<tr><td>Search(x)</td><td rowspan="3">O(log n)
(Full/Complete)</td><td rowspan="3">O(n)
(Skewed)</td></tr>
<tr><td>Insert(x)</td></tr>
<tr><td>Delete(x)</td></tr>
</table>

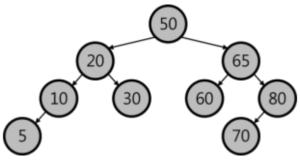
Delete a node in BST：

分析：

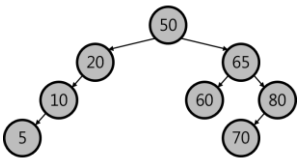
1. x 為 Leaf Node => Delete
2. x 為 Non-leaf
   (1) 有一個 child：將 Parent Link 指向 x 的 child
   (2) 有 2 個 child
      a. 拿左子樹最大值取代之
      b. 拿右子樹最小值取代之

例：問：

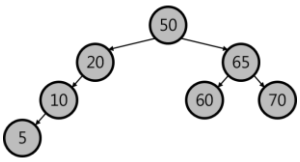
1. Delete "30"
2. Delete "80"
3. Delete "50"



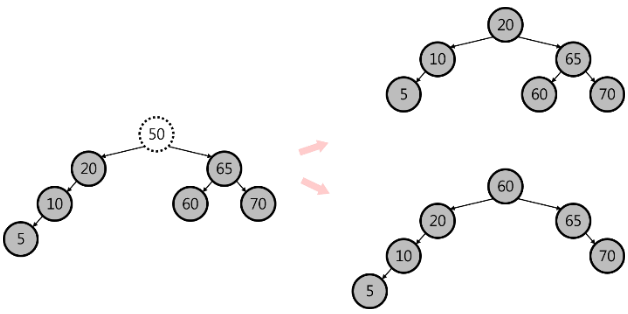
1.



2.



3.



Thread BT(**引線二元樹**)

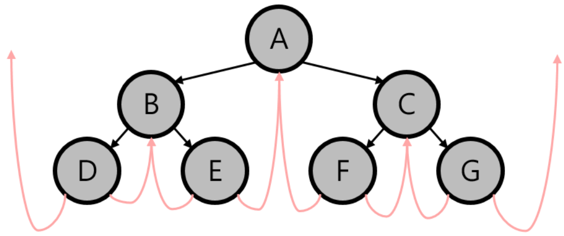
緣由：n 個 Node 之 BT，以 Link 表示會有 n+1 條空 Links，為充分利用這些 Links，故將之改為『引線(Thread)』

常見為『中序引線 BT』

Def：若 Node x 的

1. Lchild 為空，視為左引線=>將 Link 指向 x 的中序之前一個 Node
2. Rchild 為空，視為右引線=>將 Link 指向 x 的中序之後一個 Node

例：中序：DBEAFCG

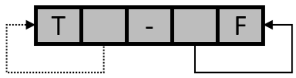


Node Structure：

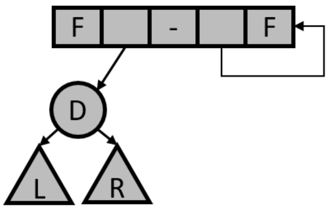
LeftThread	*Lchild*	*Data*	*Rchild*	*RightThread*
False 表已 Link				*False 表已 Link*
True 表引線				*True 表引線*

Note：在 Thread BT 中尚需引入一個 Head Node(串列首)，其格式如下：

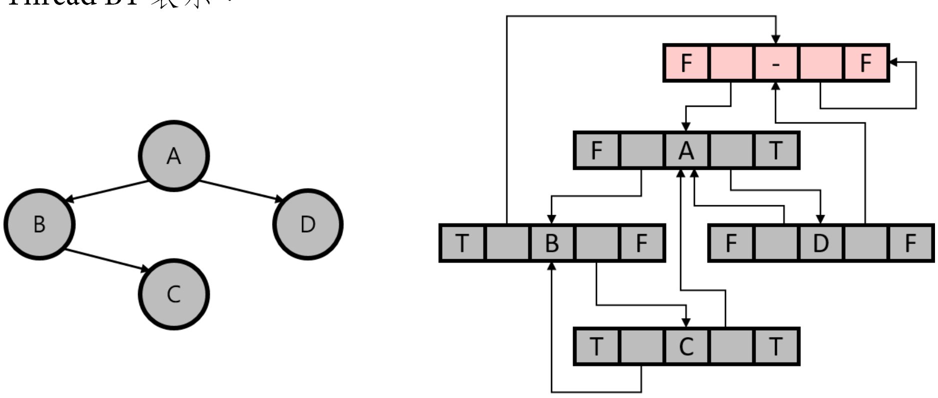
1. 空樹



2. 非空



Thread BT 表示：



Why？優點：

1. 充分利用 Links
2. 容易存取 x 的中序前/後繼者
3. 簡化中序追蹤 => 不需用 Recursive

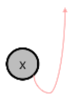
演算法：

Insuc(x) => 找 x 的中序後繼者

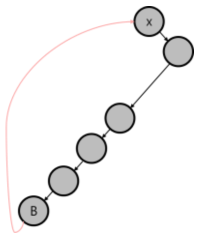
Pre(x) => 找 x 的中序前繼者

Insuc(x)

1. x 無右兒子，當 RightThread=True，x→Rchild 即是



2. x 有右兒子，將 temp 一直找到最後一個左兒子，此 Node 即是 x 的後繼者



程式：

```
Node Insuc(x)
{
        temp=x->Rchild;
        if(x->RightThread==false)     //有右子點
        {
                while(temp->LeftThread==false)
                        temp=temp->Lchild;
                return temp;
        }
}
```

Pre(x)

程式：

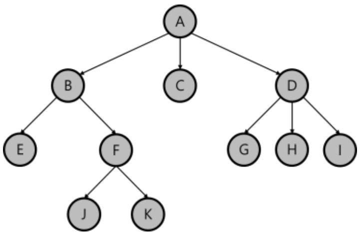
```
Node Pre(x)
{
        temp=x->Lchild;
        if(x->LightThread==false)     //有右子點
        {
                while(temp->ReftThread==false)
                        temp=temp->Rchild;
                return temp;
        }
}
```

Tree 轉成 BT

採用 Leftmost child next right sibling 之方式，步驟：

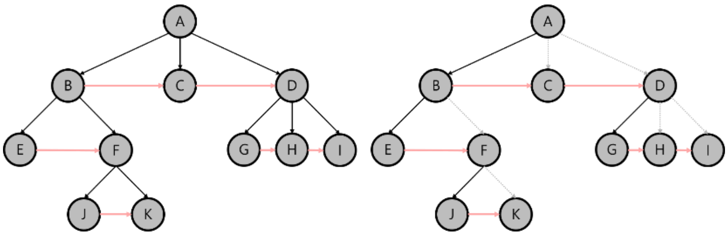
1. 將 Sibling 間的 Link 接起
2. 只留最左兒子的 Link，其餘父子 Link 皆 Delete
3. 以最左兒子為中心，順時針轉 45 度

例 1：轉之轉成 BT

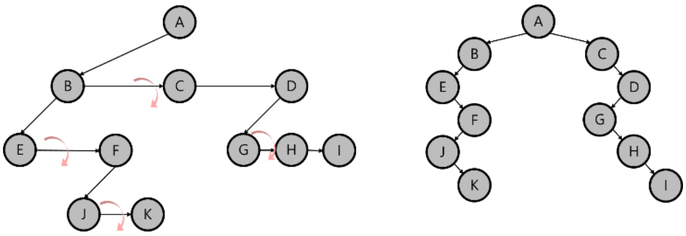


1. 將 Sibling 間的 Link 接起

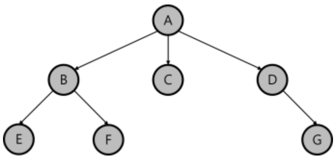
2. 只留下最左兒子的 Link，其餘父子 Link 皆 Delete



3. 以最左兒子為中心，順時針轉 45 度

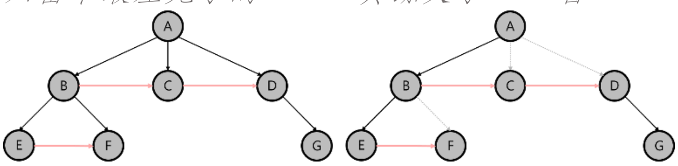


例 2：轉之轉成 BT

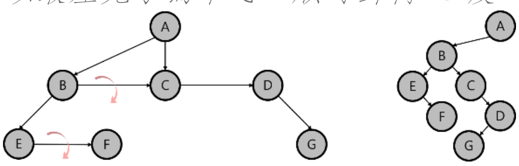


1. 將 Sibling 間的 Link 接起

2. 只留下最左兒子的 Link，其餘父子 Link 皆 Delete



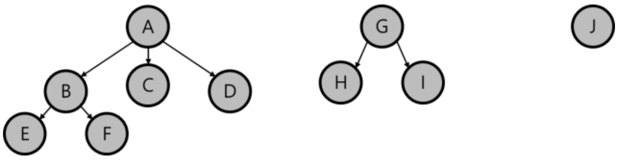
3. 以最左兒子為中心，順時針轉 45 度



Forest 轉成 BT

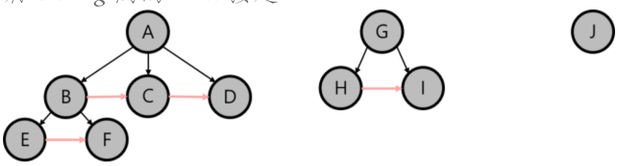
1. 將各 Tree 轉成 BT
2. 將各 BT 的 Root 連起
3. 以最左 Root 為主，順時針將右邊兄弟轉 45 度

例 1：

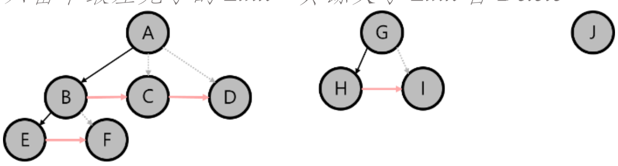


1. 將各 Tree 轉成 BT

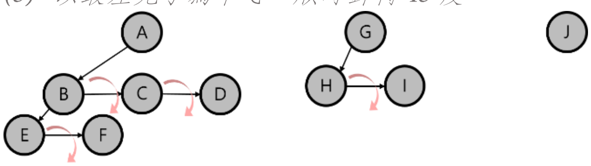
(1) 將 Sibling 間的 Link 接起



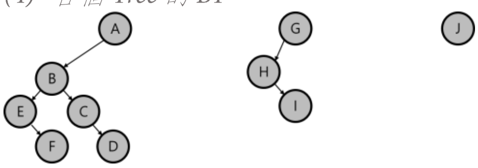
(2) 只留下最左兒子的 Link，其餘父子 Link 皆 Delete



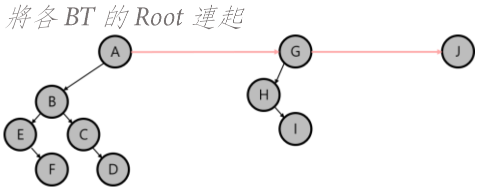
(3) 以最左兒子為中心，順時針轉 45 度



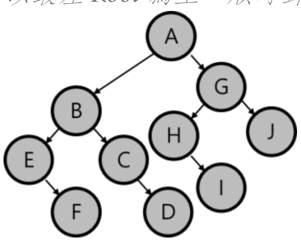
(4) 各個 Tree 的 BT



2. 將各 BT 的 Root 連起



3. 以最左 Root 為主，順時針將右邊兄弟轉 45 度



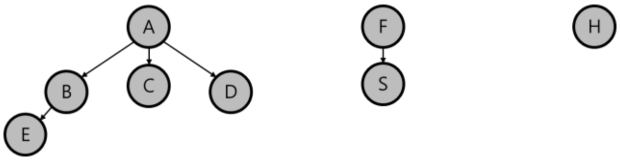
Forest Traversal

森林的前序、中序追蹤 = 將之化為 BT 的前序、中序

但是：

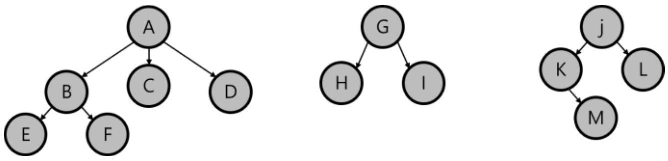
Forest 的後序≠化成 BT 的後序

例 1：



EBCDSHFA

例 2：



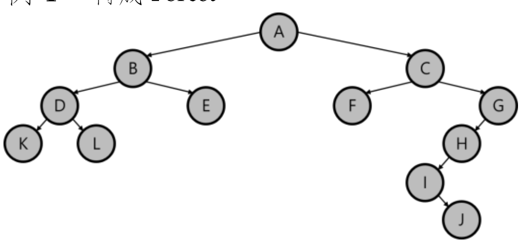
後序：EFBCDHIMKLJGA

BT 轉成 Tree/Forest

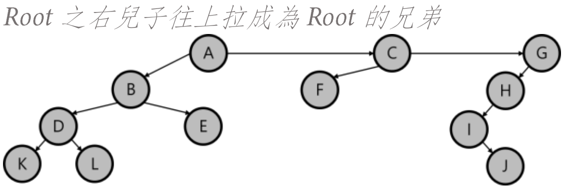
步驟：

1. Root 之右兒子往上拉成為 Root 的兄弟
2. Delete Root 之間的 Sibling Link
3. 將每棵 BT 化成 Tree
   (1) 將右兒子逆時針轉 45 度
   (2) 將父點與往上拉的 Node 加上 Link
   (3) 將各 Sibling 之間的 Link Delete

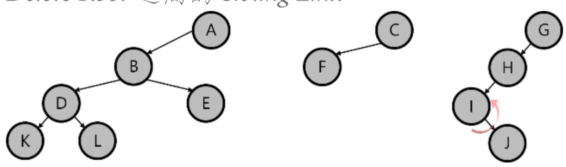
例 1：轉成 Forest



1. Root 之右兒子往上拉成為 Root 的兄弟

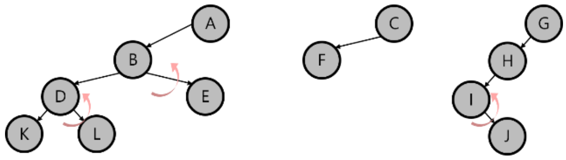


2. *Delete Root 之間的 Sibling Link*

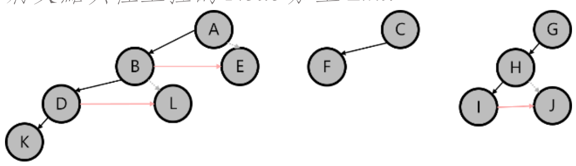


3. *將每棵 BT 化成 Tree*

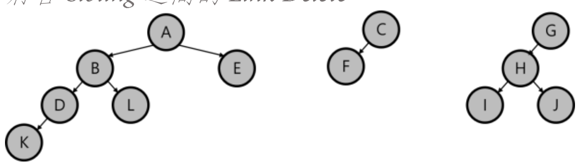
   (1) *將右兒子逆時針轉 45 度*



   (2) *將父點與往上拉的 Node 加上 Link*



   (3) *將各 Sibling 之間的 Link Delete*



[補充]n 個 Node 能形成幾種 BT？

(等於同 n 筆 Data，依序 push、pop 的合法 output 組合)

$$\frac{1}{(n+1)} \times C_n^{2n}$$

n=3 => 5 種

n=4 => 14 種

n=5 => 42 種

Heap(堆積)

一、Max-Heap(最大堆積)

Def：

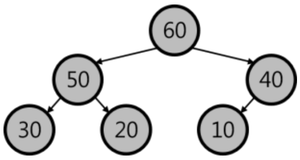
1. 為一”Complete BT”
2. 父點必大於子點鍵值
3. Root 為最大值

二、Min-Heap(最小堆積)

Def：

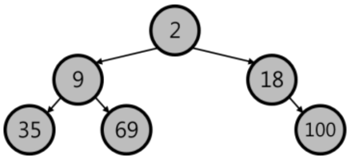
1. 為一”Complete BT”
2. 父點必小於子點鍵值
3. Root 為最小值

例 1：



Max-Heap

例 2：



不成立

Heap Construction(**建構**)

分為：

一、Top-Down(O(n log n))

⇨ Data size 不知道

二、Bottom-Up(O(n))

⇨ Data 事先準備好適用

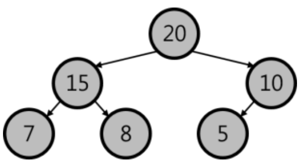
一、Top-Down 方式：*(為製作 Priority Queue 的 DS)*

Max-Heap*(Min-Heap)*

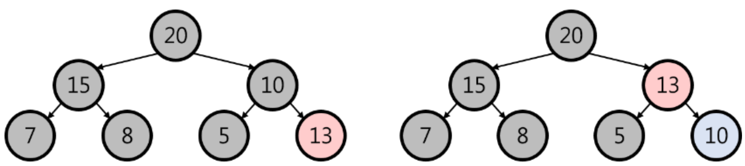
1. 將欲加入的 Node(x)置於 last Node 的下一個位置
2. 由下往上比較
   (1) 若 x>*(<)*Parent Node，swap(x, Parent)，goto (2)
   (2) 若 x≤*(≥)*Parent Node，停止，x 插入於此

例 1：有一 Max-Heap 如下：

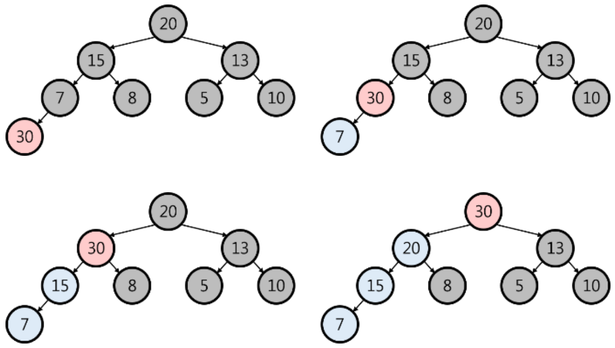
1. Insert “13”
2. Insesrt “30”



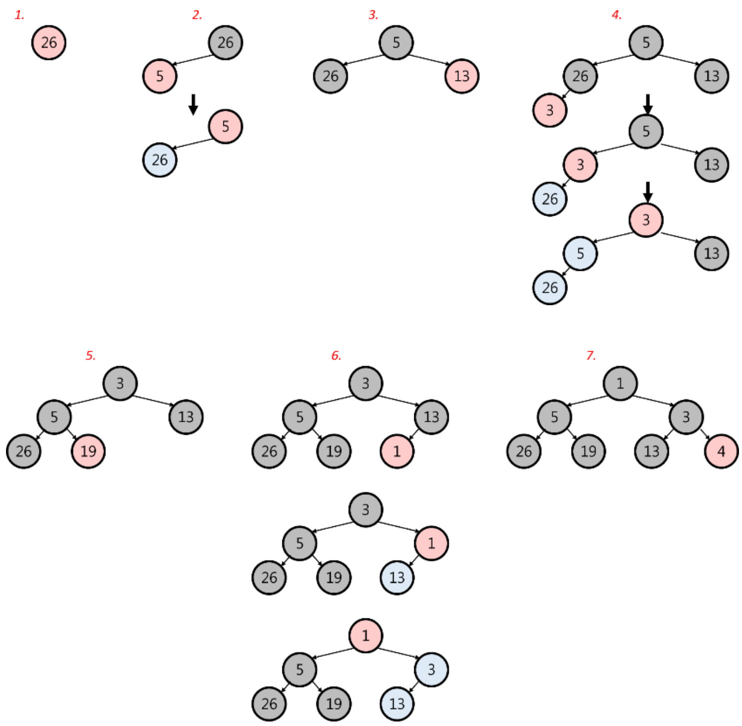
1.

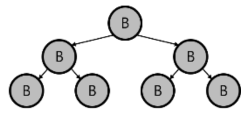


2.



例 2：Data：26, 5, 13, 2, 19, 1, 4，建一 Min-Heap(採 Top-Down)





1	*5*	*2*	*26*	*19*	*13*	*4*	*(多的一格當做 Swap 的 temp)*

Why Heap using array structure？

1. 因為 Complete 適用
2. 在做 Heap 調整時，才能方便得知父點

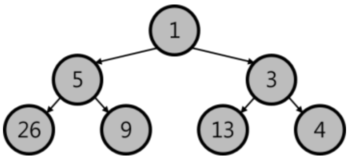
Heap 特性：

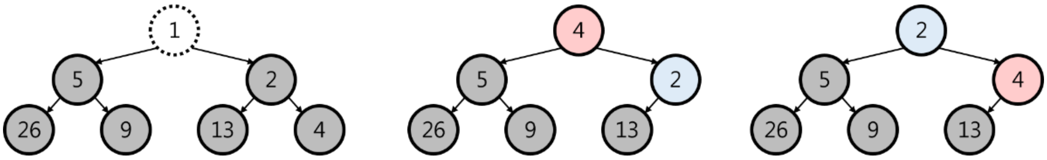
1. Heap 適用 Array 存放
2. Heap 的 Insert => O(log n)，跟高度有關
3. 刪除最大或最小元素 => O(log n)
4. 於 Max-Heap*(Min-Heap)*找最大*(小)*值，在 Root(O(1))

Heap Delete：Max-Heap*(Min-Heap)*

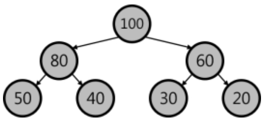
1. 移走 Root
2. 將 last Node 取代 Root
3. 調整成 Max-Heap
   (1) 找出 x 左、右子點最大*(小)*值
   (2) Compare(x, k)：if (x<*(>)*k)：Swap(x, k), goto(1)；if (x≥*(≤)*k)：停止

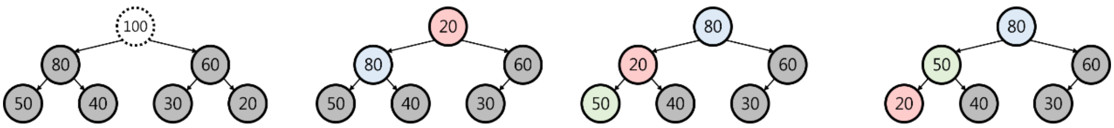
例 1：有一 Max-Heap 如下，求 Delete Min 後為何？





例 2：有一 Max-Heap 如下，求 Delete 100 後為何？





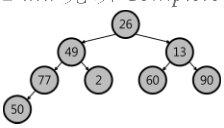
二、Bottom-Up 方式：

Max-Heap*(Min-Heap)*

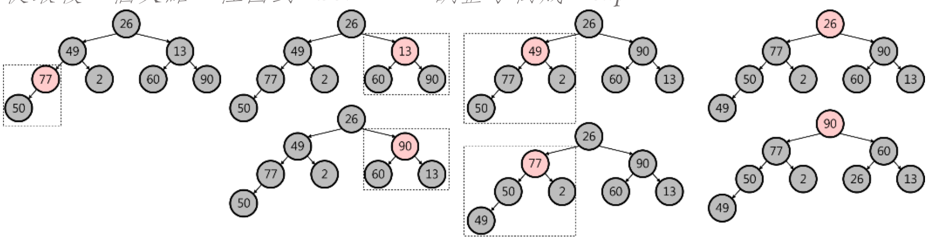
1. Data 先以 Complete BT 呈現(先建，暫不調整)
2. 從最後一個父點，往回到 Root，一一調整子樹成 Heap

例 1：Data：26, 49, 13, 77, 2, 60, 90, 50。以 Bottom-Up 建立 Max-Heap 之結果為何？

1. Data 先以 Complete BT 呈現(先建，暫不調整)

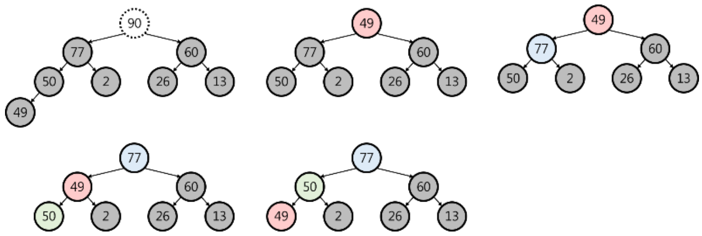


2. 從最後一個父點，往回到 Root，一一調整子樹成 Heap



Note：會跟採 Top-Down 建立的 Heap 不同

例 2：承上，Delete “90”



Heap Sort 就是將 Heap 做 n-1 次的 Delete，即可有 Sorting 之效果

演算法：

1. (tree, i, n) => 調整 => 副程式
2. adjust create(tree, n) => 主程式：由下而上、一一呼叫 adjust()

(反覆繞上來)

PASCAL like: “Max-Heap”

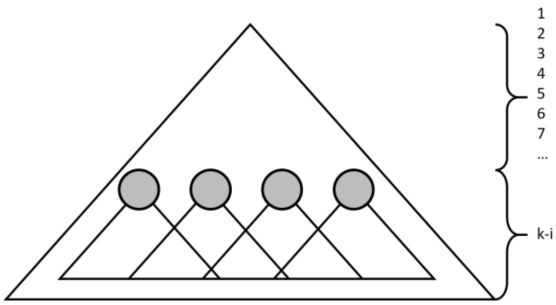
```
Procedure create(tree, n)
begin
        for i=[n/2] to 1 do
                adjust(tree, i, n);
        end

Procedure adjust(tree, i, n)
{
        int j, k;
        Node r;
        bool done;
        done=false; r=tree[i];    k=tree[i].key;
        j=2*i;
        while(j<=n && !done)
        {
                if(j<n)              //成立有右兒子
                        if(tree[j].key<tree[j+1].key)
                                j=j+1;
                if(k>=tree[j].key)
                        done=true;
                else
                {
                        tree[j/2]=tree[j];
                        j=2*j;
                }
        }
        tree[j/2]=r;
}
```

考題：

1. Heap：Construction、Insert、Delete
2. 演算法：adjust
3. Bottom-Up 為何是 O(n)

分析：Heap 以 Bottom-Up 建立之 Time Complexity：O(n)



由上圖可知，調整的最大成本為”k-i”，Root 在第 i level 之子樹最多有 (2^{i-1})棵，而每棵最大調整成本為 k-i。

因此，整個調整成本為$\sum 2^{i-1}*(k-i)$，最少為 1 即可

可知，令 s 為總成本，則

$s = 2^0*(k-1) + 2^1*(k-2) + \ldots + 2^{k-1-1}*(1)$

$2s = 2^1*(k-1) + 2^2*(k-2) + \ldots + 2^{k-1}*(1)$

兩式相減可得：

$s = 2^0*(k-1) + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{k-1} = 2^k-k-1$，又 Heap 是 Complete BT

則 $k = \log(n+1)$ => $O(\log n)$

$2^k-k-1 = 2^{\log n} - \log n - 1 = n - \log n - 1$ => $O(n)$