CH 2 數字系統(digital system)

A. **進位制** – 10 進位(0~9)、2 進位(0~1)、8 進位(0~7)、16 進位(0~9；A~F)

B. **10 進位轉其他進位(R)** – 整數: 連除 R，最後的商數 + 下至上取餘數；小數：連乘 R，取整數部分，直到無小數、10 進位快速取 2 進位

C. **R 進位轉 10 進位**

D. **2 進位與其他進位互換** – 2-8(每 3 個 bits 一組)、2-16(每 4 個 bits 一組)、2-4(每 2 個 bits 一組)

E. **16 進位←→ 8 進位** – 化 2 進位再轉

F. **10 進位分數轉 2 進位** – 一直乘 2，取進位到整數的部分；無法精準轉換→存成近似值；判斷→分母為 2 的次方

G. **四則運算** – 加、減、乘、除

---

1. 進位制

10 進制：每一位數之值域：Ø~9 (逢10進1位)

8 進制：每一位數之值域：Ø~7

2 進制： " " Ø及1

16 進制：Ø~F

10	11	12	13	14	15
A	B	C	D	E	F

熟記.

0	0000	8	1000
1	0001	9	1001
2	0010	A(10)	1010
3	0011	B(11)	1011
4	0100	C(12)	1100
5	0101	D(13)	1101
6	0110	E(14)	1110
7	0111	F(15)	1111

2. 10 進位轉換至其他進位

作法：整數部份：連除以r，直到商數<r，由下而上，取餘數。
小數部份：連乘以r，直到為無小數，由上而下，取整數部份組成。

例：(1) $(21.625)_{10} \to (10101.101)_2$

整數：

2 | 21 餘數
2 | 10 1
2 | 5 0
2 | 2 1
1 0

小數：

$0.625 * 2 = 1.25$
$0.25 * 2 = 0.5$
$0.5 * 2 = 1.0$

(2) $(375.125)_{10} \to (567.1)_{8/oct}$

整數：

8 | 375
8 | 46 7
5 6

小數：$0.125 * 8 = 1.000$

(3) $(984.625)_{10} \to (3D8.A)_{16/Hex}$

16 | 984
16 | 61 8
$\boxed{3}$ 13

最後的商數

$0.625 * 16 = 10.0$
A

(4) $(784)_{10} \to (2200)_7$

7 | 784
7 | 112 0
7 | 16 0
2 2

- 10 進位 "整數" 快速轉換 2 進位方法

(1)

[1]

$(\underbrace{100000\cdots0}_{n個“0”})_2 \Leftrightarrow 2^n \Leftrightarrow$ 十進制

e.g. $(100)_2 = 2^2 = 4$ $(10000)_2 = 2^4 = 16$

$(100000)_2 = 2^5$ $(1\underbrace{00\cdots0}_{8個0})_2 = 2^8 = 256.$

(1) $(96)_{10} = (?)_2$

Ans: $96 = 64 + 32$
$= 2^6 + 2^5$
$\therefore (1100000)_2$ ※

(2) $(150)_{10} = (?)_2$

Ans: $150 = 128 + 22$
$= 2^7 + 16 + 6$
$= 2^7 + 2^4 + 6$
$\therefore (10010110)_2$

(3) $(300)_{10} = (?)_2$

$300 = 256 + 44 = 2^8 + 2^5 + 12$
$= 2^8 + 2^5 + 2^3 + 2^2$
$(100101100)_2$ ※

(2)

$(\underbrace{11111\cdots111}_{n個“1”})_2 \Leftrightarrow 2^n - 1 \Leftrightarrow$ 十進制

e.g. $(11)_2 = 2^2 - 1 = 3.$ $(\underbrace{11\cdots111}_{10個1})_2 = 2^{10} - 1 = 1023$

$(111)_2 = 2^3 - 1 = 7$

(1) $(60)_{10} = (?)_2$

S: $60 = 64 - 4$ × → $1000000 - 100$ 要借位.
$= \underbrace{63}_{2^6-1} - 3$ ✓
$\therefore$ 6個"1"

111111
− 011
$(111100)_2$ ※

(2) $(250)_{10} = (?)_2$

Ans: $\underbrace{255}_{2^8-1} - 5$

11111111
− 101
$(11111010)_2$ ※

3. 其他進位轉換至 10 進位

作法：

$$(\overbrace{x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1 x_0}^{整數} \;.\; \overbrace{y_1 y_2 \cdots y_m}^{小數})_r$$

$$\downarrow * \quad \downarrow * \quad \cdots \quad \downarrow * \quad \downarrow * \quad \downarrow * \;.\; \downarrow * \quad \downarrow * \quad \cdots \quad \downarrow *$$

$$r^n + r^{n-1} + \cdots + r^2 + r^1 + r^0 \;.\; r^{-1} + r^{-2} + \cdots + r^{-m}$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$(整數 \;.\; 小數)_{10}$$

例：(1) $(10011.011)_2 \to (?)_{10}$

1 0 0 1 1 . 0 1 1

$$2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 \;.\; 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3}$$

$\therefore 16 + 2 + 1 \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

$\therefore (19\frac{3}{8})_{10} = (19.375)_{10}$ #

(2) $(7432.56)_8 \to (?)_{10}$

7 4 3 2 . 5 6

$8^3\ 8^2\ 8^1\ 8^0 \;.\; 8^{-1}\ 8^{-2}$

整數：$7*8^3 + 4*8^2 + 3*8^1 + 2*8^0$

$= 7*512 + 4*64 + 24 + 2 = 3866$

小數：$\frac{5}{8} + \frac{6}{64} = \frac{46}{64}$ $\quad \therefore (3866\frac{46}{64})_{10}$ #

(3) $(CDA.EB)_{16} \to (?)_{10}$

12 13 10 . 14 11

C D A . E B

$16^2\ 16^1\ 16^0 \;.\; 16^{-1}\ 16^{-2}$

整數：$12*16^2 + 13*16^1 + 10*16^0$

$= 3072 + 208 + 10 = 3290$

小數：$\frac{14}{16} + \frac{11}{16^2} = \frac{235}{256}$ $\quad \therefore (3290\frac{235}{256})_{10}$ #

(4) $(873.5)_9 \to (?)_{10}$

8 7 3 . 5

$9^2\ 9^1\ 9^0 \;.\; 9^{-1}$

整數：$8*9^2 + 7*9^1 + 3*9^0 = 714$

小數：$\frac{5}{9}$ $\quad \therefore (714\frac{5}{9})_{10}$ #

4. 2 進位與其他進位互換

- 2 → 8

$(10111011.01101)_2 \to (?)_8$

Ans: $\because 8 = 2^{3}$ ∴ 每3個 Bits 為一單位化成其位數值 ∅~7

$\boxed{\emptyset 10}\boxed{111}\boxed{011} \;.\; \boxed{011}\boxed{01\emptyset}$

$(2\ 7\ 3\ .\ 3\ 2)_8$ #

- 2 → 16

$(110111011111.11011001)_2 \rightarrow (?)_{16}$

$16=2^{4}$ ∴ 每4個Bits為一單位化成 $0\sim F$

$\underline{0110}\ \underline{1110}\ \underline{1111}\ .\ \underline{1101}\ \underline{1001}$

$(6\ E\ F\ .\ D\ 9)_{16}$ #

- 2 → 4

$(111010.1011)_2 \rightarrow (?)_4$

$4=2^{2}$ ∴ 每2 bits為單位化成 $0\sim 3$

$(322.23)_4$ #

- 16 → 2

$(ACF.59)_{16} \rightarrow (?)_2$

∵ $16=2^{4}$ ∴ 16進制每一位數值以4bits表示之.

$(A\ C\ F\ .\ 5\ 9)_{16}$

$(1010\ 1100\ 1111\ .\ 0101\ 1001)_2$ #

- 8 → 2

$(7356.124)_8 \rightarrow (?)_2$ ∵ $8=2^{3}$ ∴ 8進制每一位數值以3bits表示

$(111\ 011\ 101\ 110\ .\ 001\ 010\ 1\boxed{00})_2$ #

可省.

- 2 → 10

(1) 0 很多，1 不多

(1) $(100000101)_2=(?)_{10}$

8位

$2^8=256$ 　 5

$\therefore 256+5=(261)_{10}$ #

(2) $(110100001)_2=(?)_{10}$

13 　 5位.

$\therefore 13*2^5+1=(417)_{10}$ #

or $3*2^7+2^5+1$

(3) $(1010000010)_2=(?)_{10}$

6位

$10*2^6+2=(642)_{10}$ #

(4) $(10001111)_2=(?)_{10}$

7位

$1*2^7+15=(143)_{10}$ #

(2) 0 很少，1 很多

(1) $(1111011)_2 = (?)_{10}$

$1111111 - 100 \Rightarrow (2^7-1) - 4$

$\Rightarrow 127-4=(123)_{10}$ #

(2) $(11100111)_2 = (?)_{10}$

$11111111 - 11000 \Rightarrow (2^8-1) - 24$

$\Rightarrow 255-24=(231)_{10}$ #

(3) $(1111110101)_2 = (?)_{10}$

$1111111111 - 1010 \Rightarrow (2^{10}-1) - 10$

$\Rightarrow 1023-10=(1013)_{10}$

(4) $(1110110)_2 = (?)_{10}$

$1111111 - 1001 \Rightarrow (2^7-1) - 9$

$\Rightarrow 127-9=(118)_{10}$

5. 16 進位 ←→ 8 進位

Ex1: $(DCA.97)_{16} \rightarrow (?)_8$

$(110\,111\,001\,010.100\,101\,110)_2$

$(6712.456)_8$ #

EX2: $(753.62)_8 \rightarrow (?)_{16}$

$(0001\,1110\,1011.1100\,1000)_2$

$(1DB.C8)_{16}$ #

6. 其他進位互換

Ex3: $(12\ 01\ 21)_3 \rightarrow (?)_9$

$\because 9 = 3^2$

$3^1+3^0 \quad 3^1+3^0 \quad 3^1+3^0$

$(5\ 1\ 7)_9$ #

Ex4: $(8\ 7\ 4.5)_9 \rightarrow (?)_3$

$(22\ 21\ 11.12)_3$ #

$3 \underline{|8}\ 2\ 2 \quad 3\underline{|7}\ 2\ 1 \quad 3\underline{|4}\ 1\ 1 \quad 3\underline{|5}\ 1\ 2$

7. 10 進位分數轉 2 進位

例: $(10\frac{3}{8})_{10} \rightarrow (?)_2$

Ans: 整數: $(10)_{10} \rightarrow (1010)_2$ 分數: $\frac{3}{8} * 2 = 0\frac{6}{8}$

$\frac{6}{8} * 2 = 1\frac{4}{8}$

$\frac{4}{8} * 2 = 1$

$\therefore (1010.011)_2$ #

- 無法精準轉換之狀況 => 無法以 2 進位完整表示，會形成誤差，存成近

似值

例：[1] $\left(\frac{3}{5}\right)_{10} \to (?)_2$

$$\begin{aligned}
\tfrac{3}{5} * 2 &= 1\tfrac{1}{5} \\
\tfrac{1}{5} * 2 &= 0\tfrac{2}{5} \\
\tfrac{2}{5} * 2 &= 0\tfrac{4}{5} \\
\tfrac{4}{5} * 2 &= 1\tfrac{3}{5} \\
\tfrac{3}{5} * 2 &= 1\tfrac{1}{5} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

循環小數

$\therefore (0.\overline{1001})_2$

[2] 小數點後20位數中有?個"1"

$\frac{20位}{4} = 5$個循環

每個循環有2個"1"

$\therefore 5*2=10$個"1"※

- **判斷**

☆ 判斷是否可用2進制精確表示

⇒ 分數將它約分後，若分母是2的冪次方者，則可以精確用2進制表示。

反之則不行。即 $\frac{i}{2^k} * 2$ 乘k次後，即無小數。

- 詳細台大于天立 http://ocw.aca.ntu.edu.tw/ntu-ocw/ocw/cou/101S210/1

8. 四則運算

- 加法

(1)
$$\begin{array}{r} (1011.011)_2 \\ +\ (1110.111)_2 \\ \hline (11010.010)_2 \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{r} (420.75)_8 \\ +\ (267.74)_8 \\ \hline (710.71)_8 \end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{r} (AD73.98)_{16} \\ +\ (2BEC.DA)_{16} \\ \hline (D960.72)_{16} \end{array}$$

- 減法

(1)
$$\begin{array}{r} (10010.01)_2 \\ -\ (1011.10)_2 \\ \hline 00(110.11)_2 \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{r} (6142.5)_8 \\ -\ (764.62)_8 \\ \hline (5155.66)_8 \end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{r} (7245.68)_{16} \\ -\ (2ABE.9D)_{16} \\ \hline (4786.CB)_{16} \end{array}$$

- 乘法

(1)
$$\begin{array}{r} (1011.01)_2 \\ *\ (110)_2 \\ \hline 10110.1 \\ 101101 \\ \hline (1000011.1)_2 \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{r} (A5.4)_{16} \\ *\ (2B)_{16} \\ \hline \end{array}$$

[法一] 化成10進制相乘，再化回16進制

or

[法二] 化成2進制相乘，再化回16進制

- 除法

$$
\begin{array}{rrl}
 & 1001 & \leftarrow \text{商數} \\
1010 & \overline{)1011011} & \\
 & \underline{1010} & \\
 & 1011 & \\
 & \underline{1010} & \\
 & 1 & \leftarrow \text{餘數}
\end{array}
$$