

### Atividade: Álgebra de Boole

Em Matemática, chama-se **proposição** ao enunciado de uma verdade que se quer demonstrar, ou como usaremos: uma sentença que pode ser falsa (0), ou verdadeira (1), mas nunca ambos ao mesmo tempo.

A conjunção é uma relação entre sentenças que estabelece um resultado **verdadeiro** (1) quando associadas duas proposições (p e q), ambas **verdadeiras** (iguais a 1). Basta uma delas ser **falsa** (0), para que a conjunção (s) também seja **falsa** (0).

A porta **AND** ( E ) é um componente de circuito lógico que implementa essa relação; pode ter duas (p, q), ou mais entradas, e a saída (s) assumirá o valor 1 (**verdadeiro**) se, e somente se, todas as entradas forem iguais a 1 (**verdadeiras**); caso uma, ou mais entradas forem iguais a 0 (**falso**), a saída terá valor igual a 0 (**falso**).

A disjunção é uma relação entre sentenças que estabelece um resultado **falso** (0) quando duas proposições (p e q) forem **falsas** (0). Basta uma delas ser **verdadeira** (1), para que a disjunção também seja **verdadeira** (1).

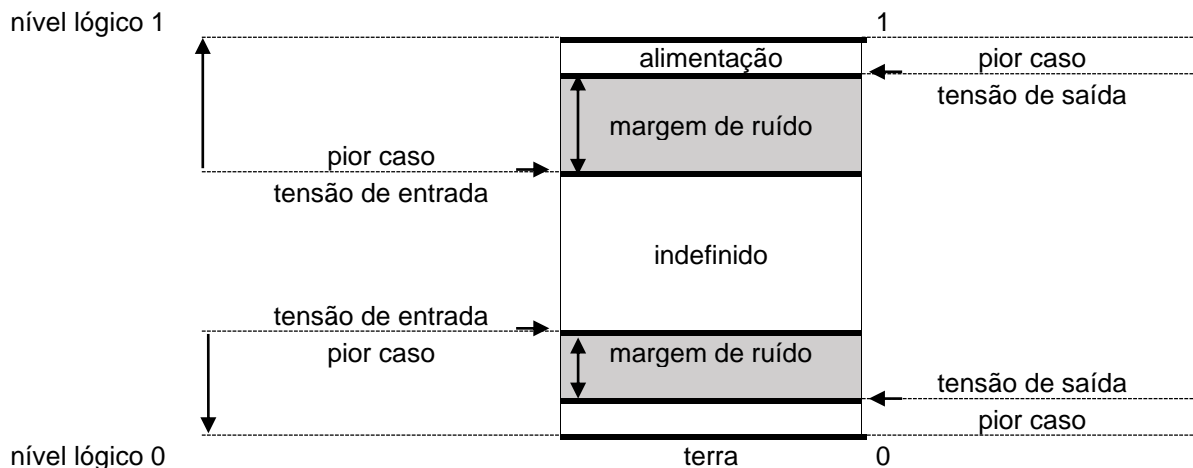
A porta **OR** ( OU ) é um componente de circuito lógico que implementa essa relação; pode ter duas (p, q), ou mais entradas, e a saída (s) assumirá o valor 0 (**falso**) se, e somente se, todas as entradas forem iguais a 0 (**falso**); caso uma, ou mais entradas forem iguais a 1 (**verdadeiro**), a saída terá valor 1 (**verdadeiro**).

A negação determina que se uma proposição (p) for **falsa** (0), seu resultado será **verdadeiro** (1), ou vice-versa.

A porta **NOT** (NÃO) é um componente de circuito lógico que implementa essa relação, também chamada de **INVERTER** (INVERSOR), só possui uma entrada (p), e a saída assumirá o valor 1 (**verdadeiro**), se a entrada for igual a 0 (**falso**); senão, a saída terá valor 0 (**falso**), se a entrada for igual a 1 (**verdadeiro**).

### Níveis lógicos

Os níveis lógicos 0 e 1 variam de acordo com a entrada e a saída, bem como a tecnologia.



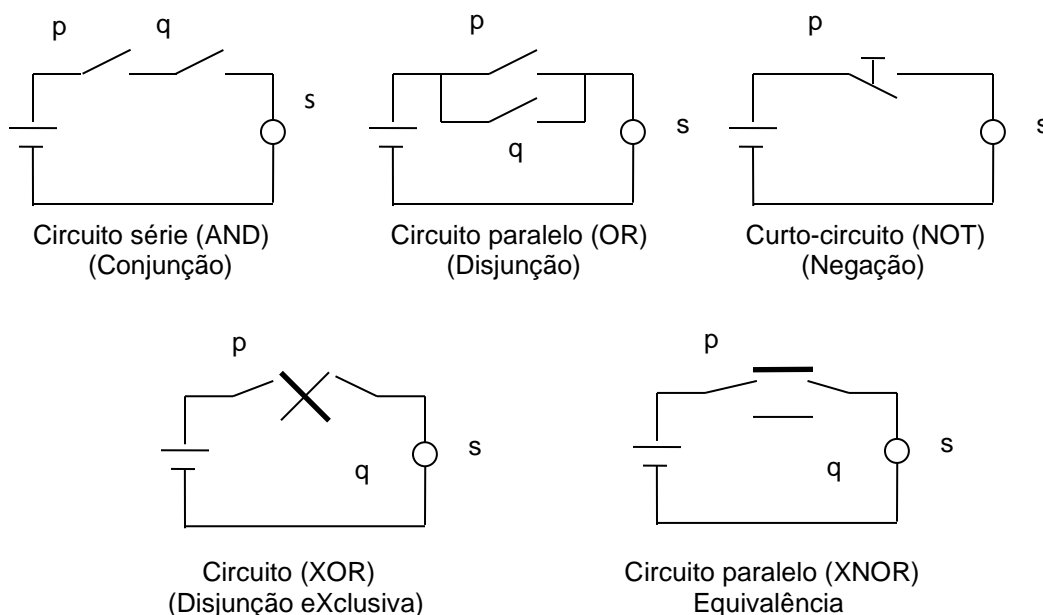
## - Analogias com circuitos elétricos

O primeiro circuito a seguir (conjunção) determina que se duas chaves (p e q) forem fechadas (1), o resultado (s) será o de um circuito fechado com uma lâmpada acesa (1), por exemplo; basta que uma delas seja aberta (0), para que o circuito se abra, e a lâmpada apague (0). O circuito poderá ter duas (p, q), ou mais chaves, em série que a saída (s) terá o mesmo resultado (1) se, e somente se, todas as chaves forem fechadas (1); caso uma, ou mais chaves forem abertas (0), o resultado será um circuito aberto com a lâmpada apagada (0).

O segundo circuito a seguir (disjunção) determina que se duas chaves (p e q) forem abertas (0), o resultado (s) será o de um circuito aberto com uma lâmpada apagada (0), por exemplo; basta que uma delas seja fechada (1), para que o circuito se feche. O circuito poderá ter duas (p, q), ou mais chaves, em paralelo que a saída (s) terá o mesmo resultado (1) se, e somente se, todas as entradas forem abertas (0); caso uma, ou mais chaves forem fechadas (1), o resultado será um circuito fechado com a lâmpada acesa (1).

O terceiro circuito a seguir (negação) determina que se uma chave (p) for acionada (1), o resultado (s) será o de um circuito aberto com uma lâmpada apagada (0); caso contrário, o circuito permanecerá fechado, e a lâmpada se manterá acesa (1).

## - Representações por circuitos



## - Representações simbólicas

Há duas representações simbólicas para as portas lógicas: a ANSI/IEEE Std 91-1984/91a-1991 e a IEC 60617-12. A primeira usa símbolos distintos e é baseada no Padrão Militar dos Estados Unidos (MIL-STD-806, das décadas de 1950 e 1960). A segunda usa o formato retangular e é baseada no padrão ANSI Y32.14, principalmente; foi adotada por outros padrões europeus como os do Reino Unido (BS EN 60617-12:1999) e da Alemanha (DIN EN 60617-12:1998, embora a DIN 40700:1976 ainda seja usada). A seguir há exemplos dessas representações mais comuns.

## - Representações de relações lógicas

### Notações

Conjunção ( E )  
( p e q )

$$p \wedge q$$

$$p \cdot q = p q$$

$$p \& q$$

$$p \&\& q$$

Disjunção ( OU )  
( p ou q )

$$p \vee q$$

$$p + q$$

$$p \mid q$$

$$p \parallel q$$

Negação ( NÃO )  
( não p )

$$\neg p$$

$$/p = p' = \bar{p}$$

$$\sim p$$

$$! p$$

### Tabela-verdade

Conjunção ( E )

p q s

$$0 \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot 1 = 0$$

$$1 \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

Disjunção ( OU )

p q s

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 1$$

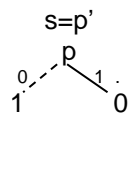
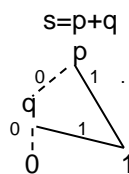
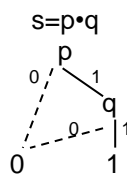
Negação ( NÃO )

p s

$$0' = 1$$

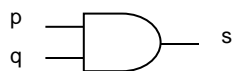
$$1' = 0$$

### Diagrama de Decisão Binária (BDD)



### Portas Lógicas

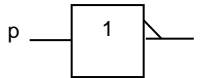
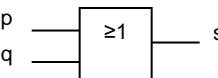
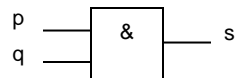
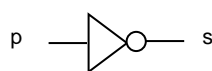
$s = \text{AND} ( p, q )$



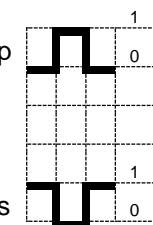
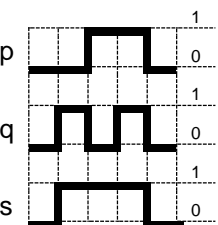
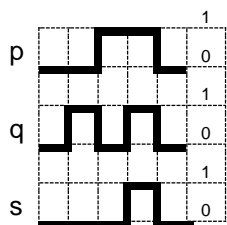
$s = \text{OR} ( p, q )$



$s = \text{NOT} ( p )$



### Diagramas de tempo para as portas lógicas



- Prioridade de conectivos

Na álgebra de Boole estabelece-se que a ordem de avaliação de uma expressão, envolvendo conectivos lógicos, será da esquerda para a direita. Entretanto, para certas aplicações (linguagens de programação, por exemplo) é usual atribuir prioridades aos conectivos como mostrado abaixo, sendo a primeira a mais alta, quando aplicada imediatamente a um valor.

NÃO  
E  
OU

Pode-se alterar a ordem de avaliação por meio de parênteses.

Exemplo:

Considere a expressão lógica:  $(\neg x \ \&\& \ y) \ || \ (x \ \&\& \ \neg y)$

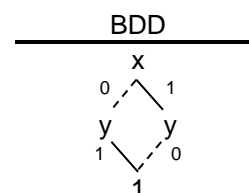
de forma mais simples como  $(x' \cdot y) + (x \cdot y')$

A sua avaliação será feita na seguinte ordem de prioridade:

- negação de (x) :  $x'$
- conjunção com (y) :  $x' \cdot y$
- negação de (y) :  $y'$
- conjunção com (x) :  $x \cdot y'$
- disjunção das conjunções :  $(x' \cdot y) + (x \cdot y')$

A expressão poderá ser representada nas formas tabular (**tabela-verdade**) ou por BDD (*Binary Decision Diagram*):

| n | x y | $(x' \cdot y)$ | $(x \cdot y')$ | $(x' \cdot y) + (x \cdot y')$ |
|---|-----|----------------|----------------|-------------------------------|
| 0 | 0 0 | 0              | 0              | 0                             |
| 1 | 0 1 | 1              | 0              | 1                             |
| 2 | 1 0 | 0              | 1              | 1                             |
| 3 | 1 1 | 0              | 0              | 0                             |



Resumidamente as relações em uma tabela também poderão ser indicadas

- pela disjunção ( + ) das conjunções iguais a 1 (ou mintermos)

| n | m             | x y | $(x' \cdot y)$ | $(x \cdot y')$ | $(x' \cdot y) + (x \cdot y')$ |
|---|---------------|-----|----------------|----------------|-------------------------------|
| 0 | $x' \cdot y'$ | 0 0 | 0              | 0              | 0                             |
| 1 | $x' \cdot y$  | 0 1 | 1              | 0              | 1                             |
| 2 | $x \cdot y'$  | 1 0 | 0              | 1              | 1                             |
| 3 | $x \cdot y$   | 1 1 | 0              | 0              | 0                             |

mintermos (=1)  
 $m0 = x' \cdot y' = 0$  .  
 $m1 = x' \cdot y = 1 \leftarrow$   
 $m2 = x \cdot y' = 2 \leftarrow$   
 $m3 = x \cdot y = 3$  .

$$f(x, y) = (x' \cdot y) + (x \cdot y') = m1 + m2 = \sum m(1,2) = \text{SoP}(1,2)$$


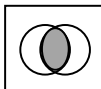
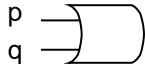
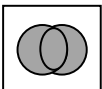

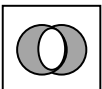
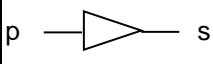

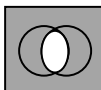

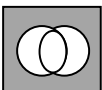
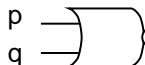
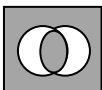
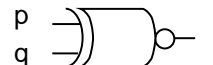

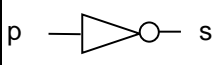
- pela conjunção (  $\cdot$  ) das disjunções iguais a 0 (ou MAXTERMS).

| N | X Y     | $(X+Y')$ | $(X'+Y)$ | $(X+Y') \cdot (X'+Y)$ |
|---|---------|----------|----------|-----------------------|
| 0 | $X+Y$   | 0 0      | 0        | 0                     |
| 1 | $X+Y'$  | 0 1      | 1        | 1                     |
| 2 | $X'+Y$  | 1 0      | 0        | 1                     |
| 3 | $X'+Y'$ | 1 1      | 0        | 0                     |

MAXTERMS (=0)  
 $M0 = X + Y = 0 \leftarrow$   
 $M1 = X + Y' = 1$  .  
 $M2 = X' + Y = 2$  .  
 $M3 = X' + Y' = 3 \leftarrow$

$$F(X, Y) = (X+Y) \cdot (X'+Y') = M0 \cdot M3 = \prod M(0,3) = \text{PoS}(0,3)$$

## Principais relações da álgebra de Boole

|   |   |  |   |   |   |   |  |   |   |                     |   |   |   |  |   |   |   |  |                    |   |   |   |   |   |   |   |  |        |  |       |  |   |  |   |  |
|---|---|--|---|---|---|---|--|---|---|---------------------|---|---|---|--|---|---|---|--|--------------------|---|---|---|---|---|---|---|--|--------|--|-------|--|---|--|---|--|
| <table><tr><td colspan="2">s=(p&amp;q)    AND (1)</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr></table>  | s=(p&q)    AND (1)  |  | 0   | 1 | 0 | 0 | 0  | 1 | <table><tr><td colspan="2">s=(p   q)    OR (7)</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr></table> | s=(p   q)    OR (7) |   | 0 | 1 | 0  | 1 | 1 | 1 | <table><tr><td colspan="2">s=(p^q)    XOR (6)</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table> | s=(p^q)    XOR (6) |   | 0   | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | <table><tr><td colspan="2">BUFFER</td></tr><tr><td colspan="2">s = p</td></tr><tr><td colspan="2">0</td></tr><tr><td colspan="2">1</td></tr></table> | BUFFER |  | s = p |  | 0 |  | 1 |  |
| s=(p&q)    AND (1)  |   |  |   |   |   |   |  |   |   |                     |   |   |   |  |   |   |   |  |                    |   |   |   |   |   |   |   |  |        |  |       |  |   |  |   |  |
| 0   | 1   |  |   |   |   |   |  |   |   |                     |   |   |   |  |   |   |   |  |                    |   |   |   |   |   |   |   |  |        |  |       |  |   |  |   |  |
| 0   | 0   |  |   |   |   |   |  |   |   |                     |   |   |   |  |   |   |   |  |                    |   |   |   |   |   |   |   |  |        |  |       |  |   |  |   |  |
| 0   | 1   |  |   |   |   |   |  |   |   |                     |   |   |   |  |   |   |   |  |                    |   |   |   |   |   |   |   |  |        |  |       |  |   |  |   |  |
| s=(p   q)    OR (7)   |   |  |   |   |   |   |  |   |   |                     |   |   |   |  |   |   |   |  |                    |   |   |   |   |   |   |   |  |        |  |       |  |   |  |   |  |
| 0   | 1   |  |   |   |   |   |  |   |   |                     |   |   |   |  |   |   |   |  |                    |   |   |   |   |   |   |   |  |        |  |       |  |   |  |   |  |
| 0   | 1   |  |   |   |   |   |  |   |   |                     |   |   |   |  |   |   |   |  |                    |   |   |   |   |   |   |   |  |        |  |       |  |   |  |   |  |
| 1   | 1   |  |   |   |   |   |  |   |   |                     |   |   |   |  |   |   |   |  |                    |   |   |   |   |   |   |   |  |        |  |       |  |   |  |   |  |
| s=(p^q)    XOR (6)  |   |  |   |   |   |   |  |   |   |                     |   |   |   |  |   |   |   |  |                    |   |   |   |   |   |   |   |  |        |  |       |  |   |  |   |  |
| 0   | 1   |  |   |   |   |   |  |   |   |                     |   |   |   |  |   |   |   |  |                    |   |   |   |   |   |   |   |  |        |  |       |  |   |  |   |  |
| 0   | 1   |  |   |   |   |   |  |   |   |                     |   |   |   |  |   |   |   |  |                    |   |   |   |   |   |   |   |  |        |  |       |  |   |  |   |  |
| 1   | 0   |  |   |   |   |   |  |   |   |                     |   |   |   |  |   |   |   |  |                    |   |   |   |   |   |   |   |  |        |  |       |  |   |  |   |  |
| BUFFER  |   |  |   |   |   |   |  |   |   |                     |   |   |   |  |   |   |   |  |                    |   |   |   |   |   |   |   |  |        |  |       |  |   |  |   |  |
| s = p   |   |  |   |   |   |   |  |   |   |                     |   |   |   |  |   |   |   |  |                    |   |   |   |   |   |   |   |  |        |  |       |  |   |  |   |  |
| 0   |   |  |   |   |   |   |  |   |   |                     |   |   |   |  |   |   |   |  |                    |   |   |   |   |   |   |   |  |        |  |       |  |   |  |   |  |
| 1   |   |  |   |   |   |   |  |   |   |                     |   |   |   |  |   |   |   |  |                    |   |   |   |   |   |   |   |  |        |  |       |  |   |  |   |  |
| <p>p/q</p> <p>0</p> <p>1</p>  | <p>p/q</p> <p>0</p> <p>1</p>  | <p>p/q</p> <p>0</p> <p>1</p>   | <p>p/q</p> <p>0</p> <p>1</p>  |   |   |   |  |   |   |                     |   |   |   |  |   |   |   |  |                    |   |   |   |   |   |   |   |  |        |  |       |  |   |  |   |  |
| <div>Conjunção</div> <div><p>p<br/>q</p><p>s</p></div> <div>AND</div> <div>s = p • q</div> <div></div>                                      | <div>Disjunção</div> <div><p>p<br/>q</p><p>s</p></div> <div>OR</div> <div>s = p + q</div> <div></div>                               | <div>Disjunção Exclusiva Antivalência</div> <div><p>p<br/>q</p><p>s</p></div> <div>XOR</div> <div>s = p ⊕ q</div> <div></div> | <div>Cópia</div> <div><p>p</p><p>s</p></div> <div>BUFFER</div> <div>s = p</div> <div></div>                               |   |   |   |  |   |   |                     |   |   |   |  |   |   |   |  |                    |   |   |   |   |   |   |   |  |        |  |       |  |   |  |   |  |
| <div></div> <div>s = (p • q)'</div> <div>NAND</div> <div><p>p<br/>q</p><p>s</p></div> <div>Função de Sheffer<br/>Alternative Denial</div> | <div></div> <div>s = (p + q)'</div> <div>NOR</div> <div><p>p<br/>q</p><p>s</p></div> <div>Função de Peirce<br/>Joint Denial</div> | <div></div> <div>s = (p ⊕ q)'</div> <div>XNOR</div> <div><p>p<br/>q</p><p>s</p></div> <div>Equivalência</div>               | <div></div> <div>s = p' = <math>\overline{p}</math></div> <div>NOT</div> <div><p>p</p><p>s</p></div> <div>Negação</div> |   |   |   |  |   |   |                     |   |   |   |  |   |   |   |  |                    |   |   |   |   |   |   |   |  |        |  |       |  |   |  |   |  |
| <table><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr></table>  | 1   | 1  | 1   | 0 | 0 | 1 | <table><tr><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr></table> | 1 | 0   | 0                   | 0 | 0 | 1 | <table><tr><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr></table> | 1 | 0 | 0 | 1  | 0                  | 1 | <table><tr><td>1</td></tr><tr><td>0</td></tr></table> | 1 | 0 |   |   |   |  |        |  |       |  |   |  |   |  |
| 1   | 1   |  |   |   |   |   |  |   |   |                     |   |   |   |  |   |   |   |  |                    |   |   |   |   |   |   |   |  |        |  |       |  |   |  |   |  |
| 1   | 0   |  |   |   |   |   |  |   |   |                     |   |   |   |  |   |   |   |  |                    |   |   |   |   |   |   |   |  |        |  |       |  |   |  |   |  |
| 0   | 1   |  |   |   |   |   |  |   |   |                     |   |   |   |  |   |   |   |  |                    |   |   |   |   |   |   |   |  |        |  |       |  |   |  |   |  |
| 1   | 0   |  |   |   |   |   |  |   |   |                     |   |   |   |  |   |   |   |  |                    |   |   |   |   |   |   |   |  |        |  |       |  |   |  |   |  |
| 0   | 0   |  |   |   |   |   |  |   |   |                     |   |   |   |  |   |   |   |  |                    |   |   |   |   |   |   |   |  |        |  |       |  |   |  |   |  |
| 0   | 1   |  |   |   |   |   |  |   |   |                     |   |   |   |  |   |   |   |  |                    |   |   |   |   |   |   |   |  |        |  |       |  |   |  |   |  |
| 1   | 0   |  |   |   |   |   |  |   |   |                     |   |   |   |  |   |   |   |  |                    |   |   |   |   |   |   |   |  |        |  |       |  |   |  |   |  |
| 0   | 1   |  |   |   |   |   |  |   |   |                     |   |   |   |  |   |   |   |  |                    |   |   |   |   |   |   |   |  |        |  |       |  |   |  |   |  |
| 0   | 1   |  |   |   |   |   |  |   |   |                     |   |   |   |  |   |   |   |  |                    |   |   |   |   |   |   |   |  |        |  |       |  |   |  |   |  |
| 1   |   |  |   |   |   |   |  |   |   |                     |   |   |   |  |   |   |   |  |                    |   |   |   |   |   |   |   |  |        |  |       |  |   |  |   |  |
| 0   |   |  |   |   |   |   |  |   |   |                     |   |   |   |  |   |   |   |  |                    |   |   |   |   |   |   |   |  |        |  |       |  |   |  |   |  |
| <p>s=∼(p&amp;q)    NAND(14)</p>   | <p>s=∼(p q)    NOR (8)</p>  | <p>s=∼(p^q)    XNOR (9)</p>  | <p>s=∼p    NOT</p>  |   |   |   |  |   |   |                     |   |   |   |  |   |   |   |  |                    |   |   |   |   |   |   |   |  |        |  |       |  |   |  |   |  |

## Resumo

|           |               |         |     |      | AND      | OR         | XOR          | XNOR                | NOR               | NAND            |
|-----------|---------------|---------|-----|------|----------|------------|--------------|---------------------|-------------------|-----------------|
|           | m             | M       | p   | q    | $p \& q$ | $p \mid q$ | $p \wedge q$ | $\sim (p \wedge q)$ | $\sim (p \mid q)$ | $\sim (p \& q)$ |
| 0         | $p' \cdot q'$ | $P+Q$   | 0   | 0    | 0        | 0          | 0            | 1                   | 1                 | 1               |
| 1         | $p' \cdot q$  | $P+Q'$  | 0   | 1    | 0        | 1          | 1            | 0                   | 0                 | 1               |
| 2         | $p \cdot q'$  | $P'+Q$  | 1   | 0    | 0        | 1          | 1            | 0                   | 0                 | 1               |
| 3         | $p \cdot q$   | $P'+Q'$ | 1   | 1    | 1        | 1          | 0            | 1                   | 0                 | 0               |
|           |               |         |     |      | [1]      | [7]        | [6]          | [9]                 | [8]               | [14]            |
| mintermos |               | SoP     | (+) | [=1] | 3        | 1,2,3      | 1,2          | 0,3                 | 0                 | 0,1,2           |
| MAXTERMS  |               | PoS     | (•) | [=0] | 0,1,2    | 0          | 0,3          | 1,2                 | 1,2,3             | 3               |

### Principais propriedades da Álgebra de Boole

| Idempotência                           | Comutativa                                   | Associativa  |
|--|--|--|
| $p + p = p$                            | $p + q = q + p$                              | $(p + q) + r = p + (q + r)$  |
| $p \cdot p = p$                        | $p \cdot q = q \cdot p$                      | $(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$  |
|  |  |  |
| Identidade                             | De Morgan                                    | Distributiva   |
| $p + 0 = p \quad p \cdot 0 = 0$        | $\overline{(p + q)} = \bar{p} \cdot \bar{q}$ | $p + (q \cdot r) = (p + q) \cdot (p + r)$  |
| $p + 1 = 1 \quad p \cdot 1 = p$        | $\overline{(p \cdot q)} = \bar{p} + \bar{q}$ | $p \cdot (q + r) = (p \cdot q) + (p \cdot r)$  |
|  |  |  |
| Complementar                           | Absorção                                     | Consenso   |
| $p + \bar{p} = 1$<br>(tautologia)      | $p + (\bar{p} \cdot q) = (p + q)$            | $(p \cdot q) + (\bar{p} \cdot r) + (q \cdot r)$<br>$= (p \cdot q) + (\bar{p} \cdot r)$ |
| $p \cdot \bar{p} = 0$<br>(contradição) | $\bar{p} + (p \cdot q) = (\bar{p} + q)$      | $(p + q) \cdot (\bar{p} + r) \cdot (q + r)$<br>$= (p + q) \cdot (\bar{p} + r)$         |
| $\bar{\bar{p}} = p$<br>(dupla negação) | $p + (p \cdot q) = p$                        |  |

### Principais propriedades da álgebra com XOR.

| Básicas  | Identidade  | Complementar  |
|--|---|---|
| $p \oplus p = 0$   | $p \oplus 0 = p$  | $\bar{p} \oplus \bar{q} = p \oplus q$                                 |
| $p \oplus \bar{p} = 1$                                       | $p \oplus 1 = \bar{p}$                                  | $\overline{(p \oplus q)} = \bar{p} \oplus q = p \oplus \bar{q}$       |
|  |   |   |
| Associativa  |   | Comutativa  |
| $(p \oplus q) \oplus r = p \oplus (q \oplus r)$              |   | $p \oplus q = q \oplus p$   |
|  |   |   |
| Disjunção  | Distributiva  | Transposição  |
| se: $p = q \oplus r$ e $q \cdot r = 0$<br>então: $p = q + r$ | $p \cdot (q \oplus r) = (p \cdot q) \oplus (p \cdot r)$ | se: $p = q \oplus r$<br>então: $q = p \oplus r$ e<br>$r = p \oplus q$ |

## Tabela-verdade

Expressões lógicas podem ser expressas na forma tabular (tabela-verdade):

Exemplo:

Avaliar a expressão:  $x' \cdot y + x \cdot y'$

considerando a ordem de prioridades entre negação, conjunção e disjunção.

| #mintermo | mintermo      | x y | $x' \cdot y$ | $x \cdot y'$ | $x' \cdot y + x \cdot y'$ |
|-----------|---------------|-----|--------------|--------------|---------------------------|
| 0         | $x' \cdot y'$ | 0 0 | 0            | 0            | 0                         |
| 1         | $x' \cdot y$  | 0 1 | 1            | 0            | 1                         |
| 2         | $x \cdot y'$  | 1 0 | 0            | 1            | 1                         |
| 3         | $x \cdot y$   | 1 1 | 0            | 0            | 0                         |

A descrição equivalente em Verilog será

```
// -----  
// TRUTH TABLE  
// Nome: xxx yyy zzz  
// Matricula: 999999  
// -----  
  
// -----  
// -- expression  
// -----  
  
module fxy (output s,  
            input x, y);  
    assign s = ~x & y | x & ~y;  
  
endmodule // fxy
```

Uma função lógica também pode ser descrita pela soma de produtos (mintermos), ou SoP, (disjunção das conjunções dos termos na tabela onde a função for igual a 1).

| #mintermo | mintermo      | x y | f (x,y) |   |
|-----------|---------------|-----|---------|---|
| 0         | $x' \cdot y'$ | 0 0 | 0       |   |
| 1         | $x' \cdot y$  | 0 1 | 1       | ← |
| 2         | $x \cdot y'$  | 1 0 | 1       | ← |
| 3         | $x \cdot y$   | 1 1 | 0       |   |

$$f(x,y) = (x' \cdot y) + (x \cdot y') = \sum m(1, 2)$$

A descrição equivalente em Verilog será

```
// -----
// -- SoP
// -----

module SoP (output s,
            input x, y);
    // mintermos
    assign s = ( ~x & y ) // 1
              | ( x & ~y ); // 2
endmodule // SoP
```

Uma função lógica pode ser descrita pelo produto de somas (MAXTERMOS), ou PoS, (conjunção das disjunções dos termos na tabela onde a função for igual a 0), cujo resultado é equivalente à soma de produtos complementar

| #MAXTERMOS | MAXTERMOS | X Y | F(X,Y) |   |
|------------|-----------|-----|--------|---|
| 0          | $X + Y$   | 0 0 | 0      | ← |
| 1          | $X + Y'$  | 0 1 | 1      |   |
| 2          | $X' + Y$  | 1 0 | 1      |   |
| 3          | $X' + Y'$ | 1 1 | 0      | ← |

$$F(X,Y) = (X + Y) \cdot (X' + Y') = \prod M(0, 3)$$

A descrição equivalente em Verilog será

```
// -----
// -- PoS
// -----

module PoS (output S,
            input X, Y);
    // MAXTERMOS
    assign S = ( X | Y ) // 0
              & ( ~X | ~Y ); // 3

endmodule // PoS
```



cujo módulo com os conjuntos de testes em Verilog poderá ser

```
// -----  
// -- test_module  
// -----  
  
module test_module;  
  reg  x, y;  
  wire s1, s2, s3;  
      // instancias  
  fxy FXY1 (s1, x, y);  
  SoP SOP1 (s2, x, y);  
  PoS POS1 (s3, x, y);  
  
      // valores iniciais  
  initial begin: start  
    x=1'bx; y=1'bx; // indefinidos  
  end  
      // parte principal  
  initial begin: main  
    // identificacao  
    $display("Exemplo- xxx yyy zzz - 999999");  
    $display("Test boolean expression");  
    $display("\nx'&y+x&y' = s\n");  
    // monitoramento  
    $display("x y = s1 s2 s3");  
    $monitor("%2b %2b = %2b %2b %2b", x, y, s1, s2, s3);  
    // sinalizacao  
    #1 x=0; y=0;  
    #1 x=0; y=1;  
    #1 x=1; y=0;  
    #1 x=1; y=1;  
  end  
  
endmodule // test_module
```

## Preparação

Como preparação para o início das atividades, recomendam-se

- a.) leitura prévia do resumo teórico, do detalhamento na apostila e referências recomendadas
- b.) estudo e testes dos exemplos
- c.) assistir aos seguintes vídeos:

<http://www.youtube.com/watch?v=Tb1qLGR2hvU>

<http://www.youtube.com/watch?v=UrA-miNZ6ag>

<http://www.youtube.com/watch?v=wAqlu7M4xvA>

## Orientação geral:

Atividades previstas como parte da avaliação

Apresentar todas as soluções em apenas um arquivo com formato texto (.txt).

Sugere-se usar como nome Guia\_xx.txt, onde xx indicará o guia, exemplo Guia\_01.txt.

Todos os arquivos deverão conter identificações iniciais com o nome e matrícula, no caso de programas, usar comentários.

As implementações e testes dos exemplos em Verilog (.v) fornecidos como pontos de partida, também fazem parte da atividade e deverão ter os códigos fontes entregues **separadamente**, a fim de que possam ser compilados e testados.

Sugere-se usar como nomes Guia\_01yy.v, onde yy indicará a questão, exemplo Guia\_0101.v

As saídas de resultados, opcionalmente, poderão ser copiadas ao final do código, em comentários.

Quaisquer outras anotações, observações ou comentários poderão ser colocadas em arquivo texto (README.txt) acompanhando a entrega.

## Atividades extras e opcionais

Outras formas de solução serão **opcionais**; não servirão para substituir as atividades a serem avaliadas. Caso entregues, poderão contar apenas como atividades extras.

Planilhas, caso venham a ser utilizadas, deverão ser **programadas** e/ou usar funções nativas. Serão suplementares e opcionais, e deverão ser entregues em formato texto, preferencialmente, com colunas separadas por tabulações ou no formato (.csv), acompanhando a solução em texto.

Os *layouts* de circuitos deverão ser entregues no formato (.circ), identificados internamente. Figuras exportadas pela ferramenta serão aceitas apenas como arquivos para visualização, mas não terão validade para fins de avaliação. Separar versões completas (a) e simplificadas (b).

Arquivos em formato (.pdf), fotos, cópias de tela ou soluções manuscritas também serão aceitos como recursos suplementares para visualização, e **não** terão validade para fins de avaliação.

Atividades:

- 01.) Construir a tabela-verdade para as proposições  
e verificar pelas respectivas tabelas-verdades implementadas em Verilog e pelo Logisim:  
Exemplo:

$$\bar{x} + (\bar{y} \cdot \bar{z})$$

| #mintermos | mintermos | x y z | x' | y' | z' | y'•z' | x'+(y'•z') |
|------------|-----------|-------|----|----|----|-------|------------|
| 0          | x'•y'•z'  | 0 0 0 | 1  | 1  | 1  | 1     | 1          |
| 1          | x'•y'•z   | 0 0 1 | 1  | 1  | 0  | 0     | 1          |
| 2          | x'•y•z'   | 0 1 0 | 1  | 0  | 1  | 0     | 1          |
| 3          | x'•y•z    | 0 1 1 | 1  | 0  | 0  | 0     | 1          |
| 4          | x•y'•z'   | 1 0 0 | 0  | 1  | 1  | 1     | 1          |
| 5          | x•y'•z    | 1 0 1 | 0  | 1  | 0  | 0     | 0          |
| 6          | x•y•z'    | 1 1 0 | 0  | 0  | 1  | 0     | 0          |
| 7          | x•y•z     | 1 1 1 | 0  | 0  | 0  | 0     | 0          |

SoP (0,1,2,3,4)

```
module fxyz (output s,
             input x, y, z);
    assign s = ~x | (~y & ~z);

endmodule // fxyz
```

- a.)  $x' \cdot (y' + z)'$
- b.)  $(x' + y')' \cdot z$
- c.)  $(x \cdot y')' \cdot z'$
- d.)  $(x' \cdot y)' \cdot z$
- e.)  $(x' + y) \cdot (y' + z)'$

02.) Simplificar as expressões abaixo pelas propriedades da álgebra de Boole e verificar pelas respectivas tabelas-verdades implementadas em Verilog ou pelo Logisim:

Exemplo:

$$(\bar{x} + \bar{y}) \cdot (\bar{x} + \bar{z})$$

$$= x' + (y' \cdot z') \quad (\text{propriedade distributiva})$$

```
module fxyz (output s1, output s2, input x, y, z);
  assign s1 = (~x | ~y) & (~x | ~z);
  assign s2 = ~x | (~y & ~z);
endmodule // fxyz
```

a.)  $x \cdot (x' + y)'$

b.)  $(x' + y) + (x' \cdot y)$

c.)  $(x' \cdot y')' \cdot (x + y)$

d.)  $(x' \cdot y)' + (x' + y)'$

e.)  $(y + x') \cdot (y' + x)'$

03.) Montar as tabelas-verdades expressas pelas somas de produtos abaixo e verificar pelas respectivas tabelas-verdades implementadas em Verilog ou pelo Logisim:

Exemplo:

$$f(x,y,z) = \sum m(0, 1, 2, 3, 4) = \text{SoP}(0,1,2,3,4) = 1$$

```
module SoP (output s, input x, y, z); // mintermos
  //      m 0          1          2          3          4
  assign s = (~x&~y&~z) | (~x&~y&z) | (~x&y&~z) | (~x&y&z) | (x&~y&~z);

endmodule // SoP
```

| m | x y z | mintermos                   | SoP (0,1,2,3,4) |
|---|-------|-----------------------------|-----------------|
| 0 | 0 0 0 | $x' \cdot y' \cdot z' = m0$ | 1               |
| 1 | 0 0 1 | $x' \cdot y' \cdot z = m1$  | 1               |
| 2 | 0 1 0 | $x' \cdot y \cdot z' = m2$  | 1               |
| 3 | 0 1 1 | $x' \cdot y \cdot z = m3$   | 1               |
| 4 | 1 0 0 | $x \cdot y' \cdot z' = m4$  | 1               |
| 5 | 1 0 1 | $x \cdot y' \cdot z$        | 0               |
| 6 | 1 1 0 | $x \cdot y \cdot z'$        | 0               |
| 7 | 1 1 1 | $x \cdot y \cdot z$         | 0               |

a)  $f(x,y,z) = \sum m(1, 5, 6, 7)$

b)  $f(x,y,z) = \sum m(2, 5, 6, 7)$

c)  $f(x,y,w,z) = \sum m(1, 2, 3, 6, 7, 11, 15)$

d)  $f(x,y,w,z) = \sum m(1, 2, 6, 8, 10, 12, 14)$

e)  $f(x,y,w,z) = \sum m(0, 2, 5, 7, 8, 11)$

04.) Montar as expressões PoS equivalentes aos produtos das somas abaixo e verificar pelas respectivas tabelas-verdades implementadas em Verilog ou pelo Logisim:  
Exemplo:

$$F(X,Y,Z) = \prod M(5, 6, 7) = \text{PoS}(5,6,7) = 0$$

```
module PoS (output S, input X, Y, Z);    // MAXTERMOS
//      M  5          6          7
  assign S = (~X|Y|~Z) & (~X|~Y|Z) & (~X|~Y|~Z);

endmodule // PoS
```

| M | x y z | MAXTERMOS     | PoS (5,6,7) |
|---|-------|---------------|-------------|
| 0 | 0 0 0 | X+Y+Z         | 1           |
| 1 | 0 0 1 | X+Y+Z'        | 1           |
| 2 | 0 1 0 | X+Y'+Z        | 1           |
| 3 | 0 1 1 | X+Y'+Z'       | 1           |
| 4 | 1 0 0 | X'+Y+Z        | 1           |
| 5 | 1 0 1 | X'+Y+Z' = M5  | 0           |
| 6 | 1 1 0 | X'+Y'+Z = M6  | 0           |
| 7 | 1 1 1 | X'+Y'+Z' = M7 | 0           |

- a)  $F(X,Y,Z) = \prod M(1, 2, 6, 7)$
- b)  $F(X,Y,Z) = \prod M(0, 3, 4, 7)$
- c)  $F(X,Y,W,Z) = \prod M(0, 1, 2, 4, 6, 8, 11, 12)$
- d)  $F(X,Y,W,Z) = \prod M(1, 2, 4, 7, 8, 9, 15)$
- e)  $F(X,Y,W,Z) = \prod M(0, 1, 2, 4, 5, 10, 13)$

05.) Identificar as expressões SoP e PoS equivalentes às tabelas abaixo e verificar pelas respectivas tabelas-verdades implementadas em Verilog ou pelo Logisim:

a.)

| n | x y | f(x,y) | SoP( ) = _____ |
|---|-----|--------|----------------|
| 0 | 0 0 | 0      |                |
| 1 | 0 1 | 0      |                |
| 2 | 1 0 | 1      | PoS( ) = _____ |
| 3 | 1 1 | 0      |                |

b.)

| n | x y | f(x,y) | SoP( ) = _____ |
|---|-----|--------|----------------|
| 0 | 0 0 | 0      |                |
| 1 | 0 1 | 1      |                |
| 2 | 1 0 | 0      | PoS( ) = _____ |
| 3 | 1 1 | 1      |                |

c.)

| n | x y z | f(x,y,z) | SoP( ) = _____ |
|---|-------|----------|----------------|
| 0 | 0 0 0 | 1        |                |
| 1 | 0 0 1 | 0        |                |
| 2 | 0 1 0 | 0        |                |
| 3 | 0 1 1 | 1        |                |
| 4 | 1 0 0 | 1        | PoS( ) = _____ |
| 5 | 1 0 1 | 1        |                |
| 6 | 1 1 0 | 0        |                |
| 7 | 1 1 1 | 1        |                |

d.)

| n | x y z | f(x,y,z) | SoP( ) = _____ |
|---|-------|----------|----------------|
| 0 | 0 0 0 | 1        |                |
| 1 | 0 0 1 | 1        |                |
| 2 | 0 1 0 | 1        |                |
| 3 | 0 1 1 | 0        |                |
| 4 | 1 0 0 | 1        | PoS( ) = _____ |
| 5 | 1 0 1 | 1        |                |
| 6 | 1 1 0 | 1        |                |
| 7 | 1 1 1 | 0        |                |

e.)

| n  | x y w z | f(x,y,w,z) | SoP( ) = _____ |
|----|---------|------------|----------------|
| 0  | 0 0 0 0 | 1          |                |
| 1  | 0 0 0 1 | 1          |                |
| 2  | 0 0 1 0 | 0          |                |
| 3  | 0 0 1 1 | 1          |                |
| 4  | 0 1 0 0 | 0          |                |
| 5  | 0 1 0 1 | 1          |                |
| 6  | 0 1 1 0 | 1          |                |
| 7  | 0 1 1 1 | 0          |                |
| 8  | 1 0 0 0 | 1          | PoS( ) = _____ |
| 9  | 1 0 0 1 | 1          |                |
| 10 | 1 0 1 0 | 1          |                |
| 11 | 1 0 1 1 | 0          |                |
| 12 | 1 1 0 0 | 1          |                |
| 13 | 1 1 0 1 | 0          |                |
| 14 | 1 1 1 0 | 1          |                |
| 15 | 1 1 1 1 | 1          |                |

## Extras

06.) Dada a expressão em Verilog abaixo, identificar a expressão SoP equivalente:

```
module FXYZ (output S1, input X, input Y, input Z);  
  assign s1 = ( ~X | Y | ~Z ) & ( X | ~Y | ~Z );  
endmodule // FXYZ
```

07.) Dada a expressão em Verilog abaixo, identificar a expressão PoS equivalente:

```
module fxyz (output s1, input x, input y, input z);  
  assign s1 = ( ~x & ~y & z ) | ( x & y & ~z );  
endmodule // fxyz
```