第5讲 一元函数微分学的应用（一）——$\boxed{\text{几何应用}}$

画出$f(x)$大致的图像.

需要考虑

定义域、对应法则"f"（奇偶性、周期性、有界性、单调性、凹凸性）、
极值点、拐点、渐近线、最值.

考题	极值点与单调性、拐点与凹凸性、最值等函数性态的分析，渐近线的求法
题型	选择题、填空题、解答题
目标	①理解函数的极值概念，掌握用导数判断函数的单调性和求函数极值的方法，掌握函数最大值和最小值的求法及其应用； ②会用导数判断函数图形的凹凸性，会求函数图形的拐点以及水平、铅直和斜渐近线，会描绘函数的图像； ③了解曲率、曲率圆与曲率半径的概念，会计算曲率和曲率半径（仅数学一、数学二）
重难点	①极值点的判别； ②拐点的判别

基础知识结构

- 极值的定义
- 单调性与极值的判别
  - 单调性的判别 → 产生极值点
  - 一阶可导点是极值点的必要条件
  - 判别极值的第一充分条件
  - 判别极值的第二充分条件
  - 判别极值的第三充分条件
- 凹凸性与拐点的概念
  - 凹凸性的定义
  - 拐点的定义

- 凹凸性与拐点的判别
  - 判别凹凸性 → 产生拐点
  - 二阶可导点是拐点的必要条件
  - 判别拐点的第一充分条件
  - 判别拐点的第二充分条件
  - 判别拐点的第三充分条件
- 极值点与拐点的重要结论 → 重要
- 渐近线（重要；3种（渐近线均为直线））→ 当自变量趋向于某一点或无穷大时，函数曲线无限靠近某一条直线
  - 铅直渐近线
  - 水平渐近线
  - 斜渐近线
- 最值或取值范围
  - 最值的定义
  - 求闭区间上连续函数的最大值和最小值 → 一定有最值
  - 求开区间内连续函数的最值或取值范围 → 不一定有最值
- 作函数图像
- 曲率及曲率半径（仅数学一、数学二）→ 描述曲线一点处的弯曲程度，与曲率圆半径有关

基础内容精讲

一 极值的定义

对于函数$f(x)$，若存在点x_0的某个邻域（见注1），使得在该邻域内任意一点x，均有

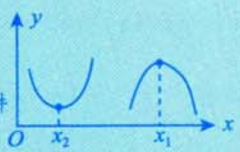
$$f(x)\leqslant f(x_0)(\text{或 } f(x)\geqslant f(x_0))$$

成立，则称点x_0为$f(x)$的**极大值点**（或**极小值点**），$f(x_0)$为$f(x)$的**极大值**（或**极小值**）.

注1 (1) 局部的概念．

(2) 左右邻域（双侧邻域）均有定义（端点处不讨论极值、间断点）．

(3) 常数函数处处是极值（处处是极大值、处处是极小值）．



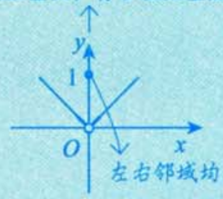
不是极值点的必要条件

(4) 常考查“理想”的极值点，如图所示，即“左邻域减，右邻域增”或“左邻域增、右邻域减”，且在x_0，x_1处可导．

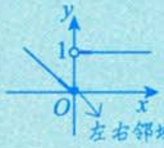
注2 结合第1讲的知识，一个常见的问题是：间断点可以是极值点吗？答案是肯定的．举四个例子供考生分析．

在0处有定义，且在0处的函数值比两边的函数值大，符合极大值点定义．

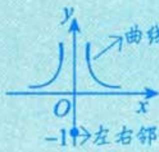
(1) $f(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ |x|, & x\neq 0,\end{cases}$ $x=0$是$f(x)$的可去间断点，但它是$f(x)$的极大值点．



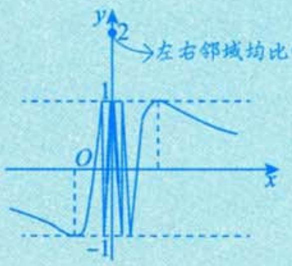
(2) $f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ -x, & x\leqslant 0,\end{cases}$ $x=0$是$f(x)$的跳跃间断点，但它是$f(x)$的极小值点．



(3) $f(x)=\begin{cases}-1, & x=0,\\ \dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\end{cases}$ $x=0$是$f(x)$的无穷间断点，但它是$f(x)$的极小值点．



(4) $f(x)=\begin{cases}2, & x=0,\\ \sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\end{cases}$ $x=0$是$f(x)$的振荡间断点，但它是$f(x)$的极大值点．



二 单调性与极值的判别

1 单调性的判别

若任意$x\in(a,b)$，$f'(x)>0$，则$f(x)$在$[a,b]$上严格单调增加，即(a,b)内的每一点x，对x的左边点x_1有$f(x_1)<f(x)$，对x的右边点x_2有$f(x_2)>f(x)$，这样$f(x)$就在$[a,b]$上严格单调增加

设函数$y=f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导．

见注

①如果在(a,b)内$f'(x)\geqslant 0$，且等号仅在有限个点处成立，那么函数$y=f(x)$在$[a,b]$上严格单调增加；

②如果在(a,b)内$f'(x)\leqslant 0$，且等号仅在有限个点处成立，那么函数$y=f(x)$在$[a,b]$上严格单调减少．

注 导数为0仅能说明在某点处的函数值变化充分小，而不能说明没变化，即导数大于0一定严格单调增加，而严格单调增加不一定导数大于0.

例如，函数$y=x^3$在$(-\infty,+\infty)$上连续且可导，且导函数$y'=3x^2\geqslant 0$，等号仅在$x=0$处成立，则函数$y=x^3$在$(-\infty,+\infty)$上严格单调增加．

任意$\delta>0$，这个δ是一个无穷小量，$f(x)=x^3$在$x=0$处导数为0，代表$f(\delta)-f(0)$和$f(0)-f(-\delta)$都是无穷小量，即$f(x)=x^3$在$x=0$的无穷小邻域内，函数值变化率极小，所以$f(x)=x^3$在$x=0$处导数值为0

② 一阶可导点是极值点的必要条件

设$f(x)$在$x=x_0$处可导，且在点x_0处取得极值，则必有$f'(x_0)=0$．费马定理，此处不证明．

注1 事实上，若$x=x_0$为曲线$y=f(x)$的极值点，则只有以下两种情况：

驻点与不可导点

(1) $f'(x_0)=0$，如$y=x^2$在$(0,0)$处的情形，如图5-1(a)所示．

(2) $f'(x_0)$不存在，如$y=|x|$在$(0,0)$处的情形，如图5-1(b)所示．

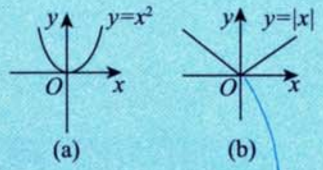


图5-1

极小值点，但不可导．

注2 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$仅能说明在$x\to x_0$时，$f(x)-f(x_0)$为$x-x_0$的高阶无穷小，不能说明$f(x)=f(x_0)$，即当$f'(x_0)=0$时，$f(x)$仍然可能是单调的，所以$f'(x_0)=0$仅为$f(x)$在$x=x_0$处取得极值的必要条件．

找极值时的两种情况：①驻点；②不可导点．

③ 判别极值的第一充分条件

排除了间断的情况．

需借助左、右邻域的一阶导数的正负来判断这一点处的极值情况

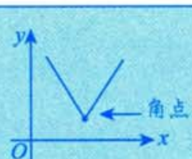
设$f(x)$在$x=x_0$处连续，且在x_0的某去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)(\delta>0)$内可导．

①若$x\in(x_0-\delta,x_0)$时，$f'(x)<0$，而$x\in(x_0,x_0+\delta)$时，$f'(x)>0$，则$f(x)$在$x=x_0$处取得极小值；

②若$x\in(x_0-\delta,x_0)$时，$f'(x)>0$，而$x\in(x_0,x_0+\delta)$时，$f'(x)<0$，则$f(x)$在$x=x_0$处取得极大值；

③若$f'(x)$在$(x_0-\delta,x_0)$和$(x_0,x_0+\delta)$内不变号，则点x_0不是极值点．

注 $f(x)$在$x=x_0$处不一定可导，可能出现角点．



④ 判别极值的第二充分条件

需借助$x=x_0$一点处的二阶导数的正负，当一点处的信息较强时使用

设$f(x)$在$x=x_0$处二阶可导，且$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq0$．

①若$f''(x_0)<0$，则$f(x)$在x_0处取得极大值；

②若$f''(x_0)>0$，则$f(x)$在x_0处取得极小值．

借助保号性推导：

设$f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}>0$，由保号性可知：

(1) 当 $x\in(x_0-\delta, x_0)$ 时，$x-x_0<0$，从而 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 x_0 的左邻域单调递减；

(2) 当 $x\in(x_0, x_0+\delta)$ 时，$x-x_0>0$，从而 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 x_0 的右邻域单调递增．

所以 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极小值．

同理，当 $f''(x_0)<0$ 时，$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极大值．

上述第二充分条件可以推广为第三充分条件．

5 判别极值的第三充分条件

→持续求导，直至n阶导数不为0.

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处 n 阶可导，且 $f^{(m)}(x_0)=0(m=1, 2, \cdots, n-1)$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0(n\geqslant 2)$，则

①当 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；

②当 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 处取得极小值．

第三充分条件的证明用洛必达法则或泰勒展开式，《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》对此不作要求．

注 上述第三充分条件的证明如下：由于 n 为偶数，因此令 $n=2k$，构造极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^{2k}}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{2k(x-x_0)^{2k-1}}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\cdots\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(2k-1)}(x)}{(2k)!(x-x_0)}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(2k-1)}(x)-f^{(2k-1)}(x_0)}{(2k)!(x-x_0)}=\frac{1}{(2k)!}f^{(2k)}(x_0)\neq 0 .$$

上述洛必达法则成立的依据是，最后的结果 $\frac{1}{(2k)!}f^{(2k)}(x_0)$ 是存在的．

当 $f^{(2k)}(x_0)<0$ 时，由函数极限的局部保号性知，存在 x_0 的某去心邻域，对于该邻域内的任意 x，有 $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^{2k}}<0$，即 $f(x)<f(x_0)$，故 x_0 为极大值点；

当 $f^{(2k)}(x_0)>0$ 时，由函数极限的局部保号性知，存在 x_0 的某去心邻域，对于该邻域内的任意 x，有 $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^{2k}}>0$，即 $f(x)>f(x_0)$，故 x_0 为极小值点．

例 5.1 设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)f'(x)>0$，则（　　）．

(A) $f(1)>f(-1)$　　(B) $f(1)<f(-1)$　　(C) $|f(1)|>|f(-1)|$　　(D) $|f(1)|<|f(-1)|$

分析 见到 $f(x)\cdot f'(x)$，联想 $\{[f(x)]^2\}'=2f(x)\cdot f'(x)$．

解 应选 (C).

由 $f(x)f'(x)>0$ 知

$$\left[\frac{1}{2}f^2(x)\right]' = f(x)f'(x) > 0,$$

则 $\frac{1}{2}f^2(x)$ 单调增加，从而 $f^2(x)$ 单调增加，由此可知 $f^2(1) > f^2(-1)$，两端开方得 $|f(1)| > |f(-1)|$. 故排除 (D)，选 (C).

取 $f(x) = -e^x$，$f(x)f'(x) > 0$，有 $f(1) < f(-1)$；取 $f(x) = e^x$，$f(x)f'(x) > 0$，有 $f(1) > f(-1)$. 故排除 (A), (B).

注 (1) 对平方开根号时应注意，$\sqrt{u^2} = |u|$ 而非 u.

(2) 使用举例方式仅能排除选项而不能证明选项 .

例 5.2 设函数 $f(x)$ 二阶可导，且在 $x = x_0$ 处取极大值，则有（　　）.

(A) $f''(x_0) < 0$　　(B) $f''(x_0) \leqslant 0$　　(C) $f''(x_0) > 0$　　(D) $f''(x_0) \geqslant 0$

分析 充分条件：若 $f(x)$ 二阶可导，且在 $x = x_0$ 处取极大值，则 $\begin{cases} f'(x_0) = 0, \\ f''(x_0) \leqslant 0. \end{cases}$

解 应选 (B).

因 $f(x)$ 二阶可导，且 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极值，故 $f'(x_0) = 0$. 根据判别极值的第二充分条件，当 $f''(x_0) > 0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 处取得极小值，与已知矛盾 . 取 $f(x) = -x^4$，可知 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取极大值，此时 $f''(0) = 0$，因此 $f''(x_0)$ 可取 0，故 $f''(x_0) \leqslant 0$. 故选 (B).

方法总结 本题是借助判别极值的第二充分条件来解决的 .

注 (1) $f''(x_0) < 0$（在 $f'(x_0) = 0$ 条件下）是 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值的充分不必要条件 .

(2) $f''(x_0) = 0$ 并不是 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 的邻域内无变化，而是变化的幅度很小，进一步分析也只能得出 $f(x)$ 的变化幅度小而不能得出无变化 .

例 5.3 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y^3 + xy^2 + x^2y + 6 = 0$ 确定，求 $y(x)$ 的极值 .

解 由例 4.8 知 $x = 1$ 是函数 $y(x)$ 的极小值点，极小值为 $y(1) = -2$.

注 前面已算过 $y'(1) = 0$，$y''(1) = \frac{4}{9} > 0$，故由判断极值的第二充分条件可知 $x = 1$ 为极小值点，代入即可 .

例 5.4 设 $f(x) = xe^x$，求 $f^{(n)}(x)$ 的极值点和极值 .

解 由例 4.17 知

$$f^{(n)}(x) = (n + x)e^x,\ f^{(n+1)}(x) = (n + 1 + x)e^x,\ f^{(n+2)}(x) = (n + 2 + x)e^x .$$

令$f^{(n+1)}(x)=(n+1+x)\mathrm{e}^x=0$，得函数$f^{(n)}(x)=(n+x)\mathrm{e}^x$的驻点$x=-(n+1)$. 又

$$f^{(n+2)}[-(n+1)]=\mathrm{e}^{-n-1}>0,$$

所以$x=-(n+1)$是函数$f^{(n)}(x)=(n+x)\mathrm{e}^x$的极小值点，极小值为

可记为$F(x)$

$$f^{(n)}[-(n+1)]=-\mathrm{e}^{-(n+1)}.$$

方法总结 先求出表达式$f^{(n)}(x)$，再求出此函数的驻点，然后代入$f^{(n+2)}(x)$验证即可. 求极小值时将驻点代入$f^{(n)}(x)$而非$f(x)$.

三 凹凸性与拐点的概念

1 凹凸性的定义

《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》规定如下：

定义 1 设函数$f(x)$在区间I上连续. 如果对I上任意不同两点x_1, x_2，恒有

横坐标中点的函数值在曲线上

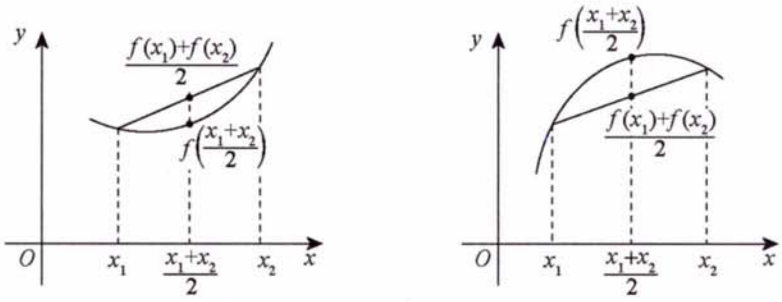
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

函数值的中点在弦上

则称$y=f(x)$在I上的**图形是凹的**（**或凹弧**），如图 5-2(a) 所示；如果恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

则称$y=f(x)$在I上的**图形是凸的**（**或凸弧**），如图 5-2(b) 所示.



图形上任意弧段位于弦的下方

$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

(a)

图形上任意弧段位于弦的上方

$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

(b)

图 5-2

注 事实上，当图形为凹（凸）时，可以将$f\left(\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2\right)\underset{(>)}{<}\frac{1}{2}f(x_1)+\frac{1}{2}f(x_2)$更一般地写为

$$\underline{f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\underset{(>)}{<}\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)},$$

广义化的凹凸性定义

其中 $0<\lambda_1<1,\ 0<\lambda_2<1,\ \lambda_1+\lambda_2=1$.

$\lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{2}$ 仅为特殊情况.

定义 2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，若对 (a,b) 内的任意 x 及 $x_0(x\neq x_0)$，均有

$$\underbrace{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{切线方程}} \underset{(>)}{<} \underbrace{f(x)}_{\text{曲线方程}}, \tag{*}$$

则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的图形上是凹的.
（凸）

注（几何意义）$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,\ f(x_0))$ 处的切线方程，因此 (*) 式的几何意义如图 5-3 所示 . 若曲线 $y=f(x)(a<x<b)$ 在任意点处的切线（除该点外）总在曲线的下方（上方），则该曲线是凹（凸）的 .

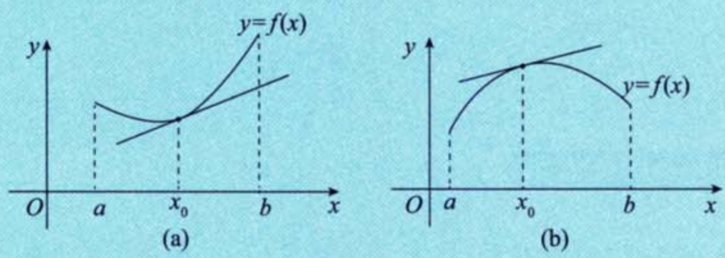


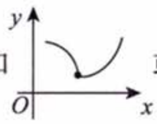
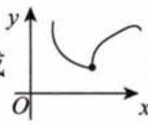
图 5-3

2 拐点的定义

连续曲线的凹弧与凸弧的分界点称为该曲线的**拐点** .

①拐点处只需连续.
②判别拐点时凹凸不分先后.
③拐点在曲线上，写 $(x_0,\ f(x_0))$.

①间断点不可能为拐点；

②形如  或  也称为有拐点；

③极值点只写横坐标 $x=x_0$，拐点应写 $(x_0,\ f(x_0))$.

四 凹凸性与拐点的判别

与极值点的判别结合记忆

1 判别凹凸性

设函数 $f(x)$ 在 I 上二阶可导 .

①若在 I 上 $f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在 I 上的**图形是凹的**；

②若在 I 上 $f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在 I 上的**图形是凸的** .

② 二阶可导点是拐点的必要条件

设$f''(x_0)$存在，且点$(x_0, f(x_0))$为曲线的拐点，则$f''(x_0)=0$.

注 事实上，若点$(x_0, f(x_0))$为曲线$y=f(x)$的拐点，则只有以下两种情况：

(1) $f''(x_0)=0$，如$y=x^3$在$(0, 0)$处的情形，如图 5-4(a) 所示.

二阶导数存在必为0

(2) $f''(x_0)$不存在，如$y=\sqrt[3]{x}$在$(0, 0)$处的情形，如图 5-4(b) 所示.

二阶导数不存在的点也有可能是拐点

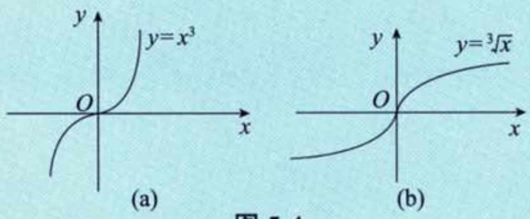


图 5-4

③ 判别拐点的第一充分条件

判别拐点最常用的方法.

设$f(x)$在点$x=x_0$处连续，在点$x=x_0$的某去心邻域$\mathring{U}(x_0, \delta)$内二阶导数存在，且在该点的左、右邻域内$f''(x)$变号（无论是由正变负，还是由负变正），则点$(x_0, f(x_0))$为曲线的**拐点**.

需借助左、右邻域二阶导数的正负变化

注 $(x_0, f(x_0))$为曲线$y=f(x)$的拐点，并不要求$f(x)$在点x_0的导数存在，如$y=\sqrt[3]{x}$在$x=0$的情形，如图 5-5 所示，其中$y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$，$y''=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$，当$x>0$时，$y''<0$；当$x<0$时，$y''>0$，故点$(0, 0)$为曲线$y=\sqrt[3]{x}$的拐点，但在该点的导数不存在.

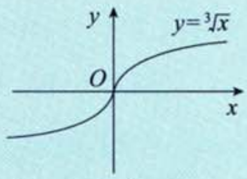


图 5-5

④ 判别拐点的第二充分条件

设$f(x)$在$x=x_0$的某邻域内三阶可导，且$f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)\neq 0$，则点$(x_0, f(x_0))$为曲线的**拐点**.

注 上述第二充分条件的证明如下：由于$f'''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)}{x-x_0}\neq 0$，不妨设$f'''(x_0)>0$.

由保号性可知：

①当$x\in(x_0-\delta, x_0)$时，$x-x_0<0$，所以$f''(x)<0$，即曲线在x_0的左邻域为凸的.

②当$x\in(x_0, x_0+\delta)$时，$x-x_0>0$，所以$f''(x)>0$，即曲线在x_0的右邻域为凹的.

因此 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点．

5 判别拐点的第三充分条件

对 $m=1$ 无须求，故无须 $f'(x_0)=0$.

设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导，且 $f^{(m)}(x_0)=0(m=2,\cdots,n-1)$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0(n\geqslant 3)$，则当 n 为奇数时，点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线的**拐点**．

证明可借助泰勒公式或洛必达法则，无须掌握．

注1 上述第三充分条件的证明如下：由于 n 为奇数，因此令 $n=2k+1$，构造极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{(x-x_0)^{2k-1}}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\cdots\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(2k)}(x)}{(2k-1)!(x-x_0)}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(2k)}(x)-f^{(2k)}(x_0)}{(2k-1)!(x-x_0)}=\frac{1}{(2k-1)!}f^{(2k+1)}(x_0)\neq 0\ .$$

上述洛必达法则成立的依据是最后的结果 $\dfrac{1}{(2k-1)!}f^{(2k+1)}(x_0)$ 是存在的．

不妨设 $f^{(2k+1)}(x_0)>0$，由函数极限的局部保号性知，存在 x_0 的某去心邻域，对于该邻域内的任意 x，有

$$\frac{f''(x)}{(x-x_0)^{2k-1}}>0,$$

当 $x\to x_0^+$ 时，$f''(x)>0$；当 $x\to x_0^-$ 时，$f''(x)<0$，故点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线的拐点．

注2 由上述证明过程可知，第三充分条件不需要 $f'(x_0)=0$ 这个条件．

例 5.5 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+[f'(x)]^2=\sin x$，且 $f'(0)=0$，则（　　）．

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) 点 $(0, f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，点 $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

解 应选 (C).

在等式 $f''(x)+[f'(x)]^2=\sin x$ 中，令 $x=0$，得 $f''(0)=0$．

在等式 $f''(x)+[f'(x)]^2=\sin x$ 两端对 x 求导，得

$f''(x)=-[f'(x)]^2+\sin x$，$f'(x)$ 和 $\sin x$ 均可导，故 $f''(x)$ 可导.

$$f'''(x)+2f'(x)f''(x)=\cos x,$$

上式中令 $x=0$，得 $f'''(0)=1>0$，则点 $(0,\ f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，由"五、①"知 (A), (B) 错误．故应选 (C).

重要结论.

方法总结 无须借助微分方程求解 $f(x)$．仅需借助拐点的第三充分条件得出在 $x=0$ 处的有效信息即可．

注 对等式而言，若等号一侧可导，则等号另外一侧也必然可导．

五 极值点与拐点的重要结论

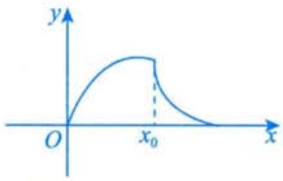
常命制选择题

以下结论均可直接使用，不必证明．

①曲线的可导点不可同时为极值点和拐点；曲线的不可导点可同时为极值点和拐点．

参考例5.5

$(x_0,\ f(x_0))$ 为拐点，$x=x_0$ 为极值点



②设多项式函数 $f(x)=(x-a)^n g(x)(n>1)$，且 $g(a)\neq 0$，则当 n 为偶数时，$x=a$ 是 $f(x)$ 的极值点；当 n 为奇数时，点 $(a,\ 0)$ 是曲线 $f(x)$ 的拐点．

③设多项式函数 $f(x)=(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdots(x-a_k)^{n_k}$，其中 n_i 是正整数，a_i 是实数且 a_i 两两不等，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$．

记 k_1 为 $n_i=1$ 的个数，k_2 为 $n_i>1$ 且 n_i 为偶数的个数，k_3 为 $n_i>1$ 且 n_i 为奇数的个数，则 $f(x)$ 的极值点个数为 $k_1+2k_2+k_3-1$，拐点个数为 $k_1+2k_2+3k_3-2$．

例如，$f(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4(x-5)$，则 $k_1=2,\ k_2=2,\ k_3=1$．

从而极值点个数为 $2+4+1-1=6$，拐点个数为 $2+4+3-2=7$．

例 5.6 设函数 $y=\left|xe^{-x}\right|$，则（　　）.

(A) $x=0$ 是 y 的极大值点，点 $(0,\ 0)$ 不是曲线 y 的拐点

(B) $x=0$ 是 y 的极小值点，点 $(0,\ 0)$ 不是曲线 y 的拐点

(C) $x=0$ 是 y 的极大值点，点 $(0,\ 0)$ 是曲线 y 的拐点

(D) $x=0$ 是 y 的极小值点，点 $(0,\ 0)$ 是曲线 y 的拐点

分析 判断一点是否为极值点应分析该点左、右邻域内函数值与该点处函数值的大小关系．判断一点是否为拐点应分析该点左、右邻域内二阶导数是否变号．

解 应选 (D).

注意到 $y\big|_{x=0}=0$，当 $x\neq 0$ 时，$y=\left|xe^{-x}\right|>0$，由极值的定义可知 $x=0$ 为 y 的极小值点．

由例 4.6 知 $y''=\begin{cases}e^{-x}(2-x), & x<0,\\ e^{-x}(x-2), & x>0,\end{cases}$ 令 $y''=0$，得 $x=2$.

当 $x<0$ 时，$y''=e^{-x}(2-x)>0$；当 $0<x<2$ 时，$y''=e^{-x}(x-2)<0$，可知 y'' 在 $x=0$ 的左、右邻域内符号不同 . 因此点 $(0, 0)$ 为曲线 y 的拐点 .

故选 (D).

方法总结 绝对值函数属于分段函数，故应写成分段函数的形式再分析 .

注 实际上，$(2, y(2))$ 也是拐点，只是选项没有涉及而已 .

例 5.7 曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的一个拐点是（　　）.

(A) (1, 0)　　(B) (2, 0)　　(C) (3, 0)　　(D) (4, 0)

解 应选 (C).

令
$$y=(x-3)^3(x-1)(x-2)^2(x-4)^4=(x-3)^3 g(x),$$
显然 $g(3)\neq 0$，且 $n=3$ 是奇数 . 由"五、②"可知，点 $(3, 0)$ 是 y 的一个拐点，故选 (C).

注1 由于"五、②"中的 $n>1$，因此只分析 $(3, 0)$ 而不分析 $(1, 0)$.

注2 (1) 由"五、③"可知，$k_1=1, k_2=2, k_3=1$，故 y 的拐点个数为 $1+2\times2+3\times1-2=6$.

若 α 是 $f(x)=0$ 的 $m(\geqslant1)$ 重根，则 α 是 $f'(x)=0$ 的 $m-1$ 重根.

若 $x-\alpha$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式，则 α 称为 $f(x)=0$ 的 k 重根.

(2) 本题的常规解法：因为 $x=3$ 是方程 $(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4=0$ 的三重根，所以它是方程 $y''=0$ 的单根，从而函数 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的二阶导数在点 $x=3$ 的两侧附近改变正负号，故点 $(3, 0)$ 是曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的一个拐点 .

例 5.8 曲线 $f(x)=(x-1)^2(x-3)^3$ 的拐点个数为（　　）.

(A) 0　　(B) 1

(C) 2　　(D) 3

分析 借助重要结论"五、③"即可 .

解 应选 (D).

由"五、③"可知，$k_1=0, k_2=1, k_3=1$，则拐点个数为 $k_1+2k_2+3k_3-2=2\times1+3\times1-2=3$.

注 (1) 也可借助常规方法进行分析，但计算量更大 . 本题的常规解法：由

$$f'(x)=2(x-1)(x-3)^3+3(x-1)^2(x-3)^2$$
$$=(x-1)(x-3)^2(5x-9),$$

易知$f''(x)$中必含一次因式$x-3$．另由$f'(1)=f'\left(\frac{9}{5}\right)=f'(3)=0$，知必存在$x_1\in\left(1,\frac{9}{5}\right)$，$x_2\in\left(\frac{9}{5},3\right)$，使得$f''(x_1)=f''(x_2)=0$，故可令

$$f''(x)=k(x-x_1)(x-x_2)(x-3),$$

其中k是不为0的常数．由于$f''(x)$在$x=x_1$，$x=x_2$，$x=3$两侧都异号，因此该曲线共有3个拐点．

(2) 曲线$y=(x-1)^2(x-3)^2$的极值点个数与拐点个数分别为（　　）．

(A) 3，2　　(B) 2，3　　(C) 3，4　　(D) 4，3

解　应选 (A).

由“五、③”可知，$k_1=0, k_2=2, k_3=0$，于是极值点个数为$0+2\times2+0-1=3$，拐点个数为$0+2\times2+3\times0-2=2$．可直接得出答案．

六 渐近线

当曲线上的点远离原点时，曲线与某直线充分靠近，则称该直线为曲线的渐近线．

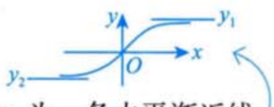
1 铅直渐近线

若$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$（或$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$），则$x=x_0$为一条铅直渐近线．

注　此处的x_0或是函数的$\underbrace{\text{无定义点}}_{①}$，或是函数定义区间的$\underbrace{\text{端点}}_{②}$，或是分段函数的$\underbrace{\text{分段点}}_{③}$．

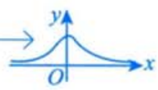
例：$y=\tan x$在$x=\frac{\pi}{2}$处　　例：$y=\ln x(x>0)$在$x\to0^+$处　　例：$y=\begin{cases}1, & x\geqslant0,\\ \frac{1}{x}, & x<0\end{cases}$在$x=0$处

2 水平渐近线



若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=y_1$，则$y=y_1$为一条水平渐近线；若$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=y_2$，则$y=y_2$为一条水平渐近线；

若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=y_0$，则$y=y_0$为一条水平渐近线．



注　$x\to+\infty$与$x\to-\infty$时的水平渐近线可能相同，如$y_1=e^{-|x|}$；也可能不同，如$y_2=\arctan x$．

③ 斜渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a_1(a_1\neq 0)$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-a_1x\right]=b_1$，则 $y=a_1x+b_1$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线；

若 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a_2(a_2\neq 0)$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-a_2x\right]=b_2$，则 $y=a_2x+b_2$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线；

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a(a\neq 0)$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]=b$，则 $y=ax+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线 .

注1 $f(x)$ 向直线 $y=ax+b$ 趋近，表明二者在无穷远处无限接近 . 即对任意 $\varepsilon>0$ 都有 $\left|f(x)-(ax+b)\right|<\varepsilon$，也即

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0\text{，}\qquad ①$$

从而

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-(ax+b)}{x}=0\text{，即}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a(a\neq 0)\text{ .}\qquad ②$$

将②结果代入①，可知

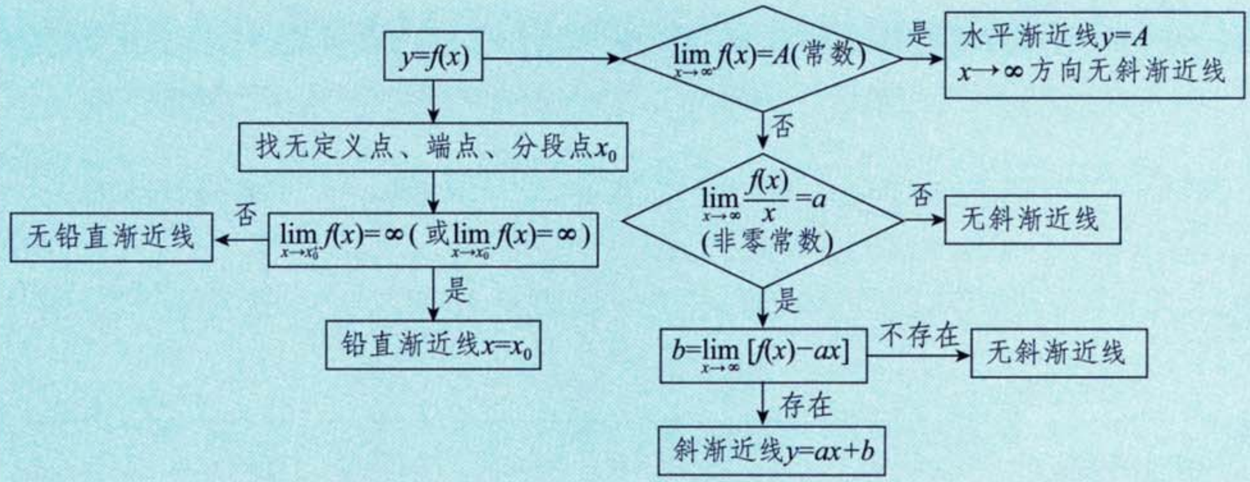
$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b\text{，}\qquad ③$$

由②，③，可以得出 a 与 b，即可得到斜渐近线 .

注2 $x\to+\infty$ 与 $x\to-\infty$ 时的斜渐近线可能相同，也可能不同 . 有时需分左右两侧分别去求 .

注3 寻找渐近线的顺序：铅直渐近线、水平渐近线、斜渐近线 .

若求曲线 $y=f(x)$ 的渐近线，要先找函数的无定义点①，定义区间的端点②或分段函数的分段点③，具体说来，若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$（或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$），则 $x=x_0$ 为一条铅直渐近线；然后判别 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 是否为常数，若是常数，则存在水平渐近线；若是 ∞，则最后判别 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ 是否为非零常数 a，若是，则求出常数 a，再求 $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$，当 a,b 都存在时，则存在斜渐近线，否则就没有斜渐近线 . 可总结成如下程序 .

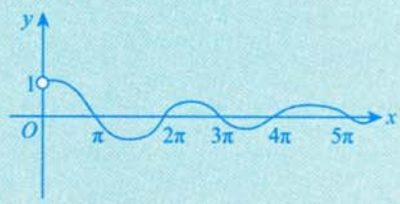


注4 ①求斜渐近线时，a与b均应求出来才可以，仅求出a不能确定有斜渐近线．

如$y=x+\sin x$，$a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1$，而$b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-1\cdot x)=\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$不存在．

所以$y=x+\sin x$无斜渐近线．

②曲线与渐近线可能会有交点，如$y=\frac{\sin x}{x}$．



例 5.9 求曲线$y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$的渐近线．

分析 按铅直、水平与斜渐近线的顺序依次去找，注意极限的计算．

解 因为

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=\infty,$$

所以直线$x=0$是曲线$y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$的一条铅直渐近线．

因为

$$\lim_{x\to -\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=0,$$

所以直线$y=0$是曲线$y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$在$x\to-\infty$时的一条水平渐近线．

因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{x+\ln(1+e^{-x})}{x}\right]=1,$$

且

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^{-x})\right]=0,$$

$\ln(1+e^x)-x$
$=\ln(1+e^x)-\ln e^x$
$=\ln\frac{1+e^x}{e^x}$
$=\ln(1+e^{-x})$

所以直线 $y=x$ 是曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 在 $x\to+\infty$ 时的一条斜渐近线，其大致图形如图 5-6 所示 .

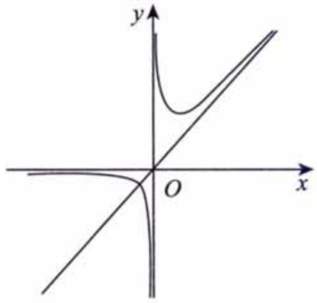


图 5-6

> **注** 渐近线的求解是对考生的极限计算能力的考查 .

七 最值或取值范围

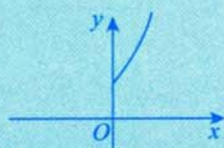
1 最值的定义

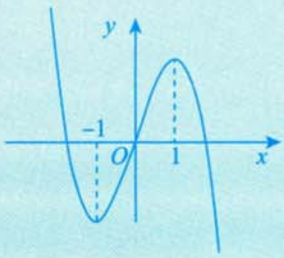
整体概念，有别于极值

定义 3 设 x_0 为 $f(x)$ 定义域内一点，若对于 $f(x)$ 的定义域内任意一点 x，均有

$$f(x)\leqslant f(x_0)\ （或 f(x)\geqslant f(x_0)）$$

成立，则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的**最大值**（或**最小值**）.

> **注** 极值和最值是什么关系？我们通过两个例子来看 .
>
> ①设 $f(x)=e^x, x\in[0,+\infty)$，则 $f(0)=e^0=1$ 为 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内的最小值，即 $f(x)\geqslant f(0)$. 但 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内没有极值 . 细致说来，首先，$x=0$ 是区间左端点，不存在双侧邻域 $U(0)$，使 $x\in U(0)$ 时，$f(x)\geqslant f(0)$，故不存在极值 . 其次，对于 $(0,+\infty)$ 内的任意一点 x_0，不论 $U(x_0)$ 取得多么小，对于 $x\in U(x_0)$，并不总有 $f(x)\geqslant f(x_0)$，所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内无极小值，易见也无极大值 . 所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内无极值 .
>
> 
>
>
> ②设 $f(x)=3x-x^3$，有
>
> $$f'(x)=3(1-x^2),\ f''(x)=-6x,\ f'(\pm1)=0,\ f''(\pm1)=\mp6,$$



所以 $f(1)=2$ 为极大值，$f(-1)=-2$ 为极小值．但 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无最大值，也无最小值．

由此可见，极值点并不一定是最值点，最值点也不一定是极值点．

但是，下面这个结论是正确的：

如果 $f(x)$ 在区间 I 上有最值点 x_0，并且此最值点 x_0 不是区间 I 的端点而是 I 内部的点，那么此 x_0 必是 $f(x)$ 的一个极值点．

即 $f(x_0)$ 在定义域内最大（小），且存在左、右邻域，$f(x_0)$ 必大（小）于邻域内点的函数值

事实上，设 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在 I 上的最大值，则对一切 $x\in I$，有 $f(x)\leqslant f(x_0)$，又因为 x_0 为 I 内部的点，故存在一个邻域 $U(x_0)\subset I$，当 $x\in U(x_0)$ 时，$f(x)\leqslant f(x_0)$．由极大值的定义知，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极大值．

② 求区间 $[a,b]$ 上连续函数 $f(x)$ 的最大值 M 和最小值 m

①求出 $f(x)$ 在 (a,b) 内的可疑点——ⓐ驻点与ⓑ不可导点，并求出这些可疑点处的函数值；

②求出端点的函数值ⓒ $f(a)$ 和 $f(b)$；

③比较以上所求得的所有函数值，其中最大者为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值 M，最小者为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值 m．

比较ⓐⓑⓒ中的结果

注 有时这类问题也可命制为“求连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的值域 $[m,M]$”．

③ 求区间 (a,b) 内连续函数 $f(x)$ 的最值或取值范围

开区间上的连续函数也可能有最值

①求出 $f(x)$ 在 (a,b) 内的可疑点——ⓐ驻点与ⓑ不可导点，并求出这些可疑点处的函数值；

②求 (a,b) 两端的单侧极限：若 a,b 为有限常数，则求 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$；若 a 为 $-\infty$，则求 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$；若 b 为 $+\infty$，则求 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$．记以上所求左端极限为 A，右端极限为 B；ⓒ

③比较①，②所得结果，确定最值或取值范围．

比较ⓐⓑⓒ中的结果

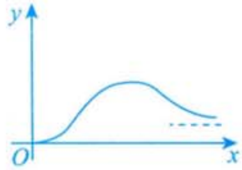
注1 这类问题有时没有最大值、最小值．

注2 求区间 $(a,b]$ 或 $[a,b)$ 内连续函数 $f(x)$ 的最值或取值范围，只需在区间 (a,b) 内得到的结果基础上加上 $f(b)$ 或 $f(a)$ 的值即可．

例 5.10 求数列 $\left\{\sqrt[n]{n}\right\}$ 的最大项．

分析 将数列连续化为函数后，观察其单调性．

解 设$f(x)=x^{\frac{1}{x}}(x>0)$，则 幂指函数．



$$f'(x)=x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2},$$

令$f'(x)=0$，得唯一驻点$x=\mathrm{e}$．当$x\in(0,\mathrm{e})$时，$f'(x)>0$，当$x\in(\mathrm{e},+\infty)$时，$f'(x)<0$，所以$f(x)$在$x=\mathrm{e}$处取得极大值，即最大值为$f(\mathrm{e})=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$，又因为$\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$(利用$(\sqrt{2})^6<(\sqrt[3]{3})^6$得出)，故$\sqrt[3]{3}$是数列$\{\sqrt[n]{n}\}$的最大项．

注1 $\mathrm{e}\approx 2.718$，介于2与3之间，而$x_n=n^{\frac{1}{n}}$中的n无法取到e，故就近取$n=2$与$n=3$，比较大小即可．

注2 如果遇到最小值和最大值的实际问题，首先建立目标函数（即欲求其最值的那个函数），然后确定其定义区间，将它转化为函数的最值问题．特别地，如果所考虑的实际问题存在最小值或最大值，并且所建立的目标函数$f(x)$有唯一的极值点x_0，则$f(x_0)$即为所求的最小值或最大值．

八 作函数图像

(1) 给出函数$f(x)$，作图的一般步骤：

①确定定义域，考查函数是否有奇偶性，周期性，并用好图像变换；见附录1

②用导数工具（一阶导数确定函数的单调区间、极值点；二阶导数确定曲线的凹凸区间、拐点）；

③考查渐近线；

④作出函数图像．

这是基本功，一定要重视．

通常不会直接考查作图，但应学会分析函数性态．

注 常用曲线的图形见附录2，考生需熟练画出这些图形．（重点记忆心形线，星形线及平摆线）

例5.11 画出$y^2=(1-x^2)^3$的图像．

分析 用好图像变换，借助对称性仅需画出第一象限的部分即可．

解 首先，代入点(x,y)，$(-x,y)$知$y^2=(1-x^2)^3$关于y轴对称；代入点(x,y)，$(x,-y)$知$y^2=(1-x^2)^3$关于x轴对称，于是只需研究$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$时的情形．由于$y^2\geqslant 0$，知$0\leqslant x\leqslant 1$，故$0\leqslant y\leqslant 1$．

其次，用导数工具，$y=(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$，$y'=\frac{3}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(-2x)\xlongequal{令}0$，当$x\geqslant0$，$y\geqslant0$时，$x=0$，$x=1$（驻点）；

又$y''=3\cdot\frac{2x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}$，令$y''=0$，解得$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$（拐点横坐标），代入得，拐点$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$.

列表如下.

x	0	$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$	1
y'	0	−		−	0
y''	−3	−	0	+	
y	1	↘	拐点	↘	0

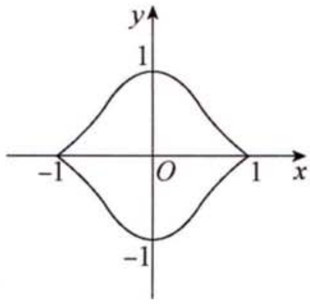


图 5-7

最后，画出图像，如图 5-7 所示.

注 也可借助上表分析出由每个分段点分出的区间内函数的单调性与曲线的凹凸性.

例 5.12 画出$y=x^x\ (x>0)$的图像.

分析 幂指函数求导常用公式：$u^v=e^{v\ln u}$.

解 当$x\to0^+$时，

$$\lim_{x\to0^+}x^x=\lim_{x\to0^+}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}(-x)}=e^0=1\ .$$

令$y=f(x)$，则

$$f'(x)=(x^x)'=(e^{x\ln x})'=x^x(1+\ln x)\text{，}\longrightarrow\text{求驻点}$$
$$f''(x)=[f'(x)]'=[(1+\ln x)f(x)]'$$
$$=(1+\ln x)f'(x)+\frac{1}{x}f(x)$$
$$=x^x\left[(1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\right].$$

由$x>0$，得$x^x>0$，故$f(x)>0$，$f''(x)>0$ $\longrightarrow$ 无拐点

令$f'(x)=0$，解得$x=\frac{1}{e}$. 因此$f(x)$在$x=\frac{1}{e}$处取得极小值，故函数图像如图 5-8 所示.

$\to$在$\left(0,\frac{1}{e}\right)$上，$f'(x)<0$；在$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$上，$f'(x)>0$.

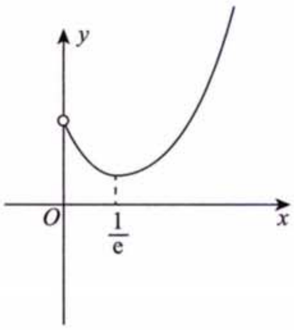


图 5-8

> **注** 当$x\to+\infty$时，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{x}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln x\right\}=+\infty$，且速度远超幂函数，从而也无斜渐近线．

例 5.13 画出$y=\dfrac{e^{x}}{x}$的图像．

解 对于$y=\dfrac{e^{x}}{x}$，$y'=\dfrac{e^{x}(x-1)}{x^{2}}\overset{令}{=\!=}0$，得驻点$x=1$，且当$x=0$时$y'$不存在．又$y''=\dfrac{e^{x}(x^{2}-2x+2)}{x^{3}}=\dfrac{e^{x}[(x-1)^{2}+1]}{x^{3}}$，当$x>0$时，$y''>0$；当$x<0$时，$y''<0$；当$x=0$时，$y''$不存在．故列表如下．

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$-$		$-$		$+$
y''	$-$		$+$		$+$
y	↘		↘	e	↗

由于$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{x}}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to0^{-}}\dfrac{e^{x}}{x}=-\infty$，$\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{e^{x}}{x}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{e^{x}}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x^{2}}=+\infty$，因此图形有一条水平渐近线$y=0$，一条铅直渐近线$x=0$，没有斜渐近线．

作图，如图 5-9 所示．

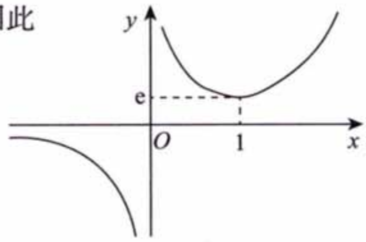


图 5-9

> **注** 由表达式首先确定定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$．

★ **例 5.14** 画出$r=\sin^{2}\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$在直角坐标系和极坐标系下的图像．

分析 学会用直角坐标系的观点画极坐标的图．

解 $r=\sin^{2}\theta=\dfrac{1-\cos2\theta}{2}(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$．

在直角坐标系的观点下，视θ为x，r为y，即可画出图像，如图 5-10 所示．

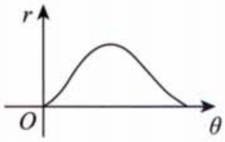


图 5-10

看变化趋势

用描点法，可画出其在极坐标下的图像，如图 5-11 所示 .

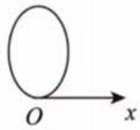


图 5-11

(2) 给出参数方程 .

a. 描点法 . ⟶速度慢一些

b. 化为 $\begin{cases} \text{直角坐标方程，} \\ \text{极坐标方程 .} \end{cases}$ ⟶借助函数性态画图像；⟶借助直角坐标系的思想画极坐标图像

如 $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\cos^3 t \end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$化为直角坐标方程为$y^2=(1-x^2)^3$.

九 曲率及曲率半径(仅数学一、数学二)

表示曲线弯曲程度

设$y(x)$二阶可导，则曲线$y=y(x)$在点$(x,\ y(x))$处的曲率公式为

$$k=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}} .$$ ⟶背公式即可

必考

曲率半径的计算公式

$$R=\frac{1}{k}=\frac{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}{|y''|}(y''\neq 0) .$$

注 弯曲程度越大，曲率越大，曲率圆的半径越小 .

星形线方程　　基本都是考填空

例 5.15 曲线$\begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t \end{cases}$在$t=\dfrac{\pi}{4}$对应点处的曲率为______.

分析 主要考查参数方程求导 .

解 应填$\dfrac{2}{3}$.

用参数求导法，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{3\sin^2 t\cos t}{-3\cos^2 t\sin t}=-\tan t,\ \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-1,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=(-\tan t)'\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{-3\cos^2 t\sin t}=\frac{1}{3\cos^4 t\sin t},\ \left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

按曲率公式，$t=\frac{\pi}{4}$ 对应点处的曲率为

$$k=\left.\frac{\left|\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|}{\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{3/2}}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{4}{3}\sqrt{2}}{2^{3/2}}=\frac{2}{3}.$$

基础习题精练

习 题

5.1 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 具有二阶导数，且 $g''(x)<0$．若 $g(x_0)=a$ 是 $g(x)$ 的极值，则 $f[g(x)]$ 在 x_0 取极大值的一个充分条件是（　　）．

(A) $f'(a)<0$　　(B) $f'(a)>0$　　(C) $f''(a)<0$　　(D) $f''(a)>0$

5.2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且在点 $x=a$ 处取最小值，在点 $x=b$ 处取最大值，则（　　）．

(A) $f_+'(a)\leqslant 0$，$f_-'(b)\leqslant 0$　　(B) $f_+'(a)\leqslant 0$，$f_-'(b)\geqslant 0$

(C) $f_+'(a)\geqslant 0$，$f_-'(b)\leqslant 0$　　(D) $f_+'(a)\geqslant 0$，$f_-'(b)\geqslant 0$

5.3 曲线 $y=\frac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线条数为______．

5.4 曲线 $\tan\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)=\mathrm{e}^y$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为______．

5.5 曲线 $y=(x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点坐标为______．

5.6 函数 $y=x+2\cos x$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为______．

5.7 曲线 $y=(2x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线方程为______．

5.8 （仅数学一、数学二）曲线$y=x^2+x(x<0)$上曲率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$的点的坐标是______.

5.9 设函数$y=y(x)$由方程

$$2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$$

所确定，试求$y=y(x)$的驻点，并判别它是否为极值点.

解答

5.1 (B) **解** 由于$g(x_0)$是$g(x)$的极值，故由题设知$g'(x_0)=0$. 记$y=f[g(x)]$，则$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=f'(a)g'(x_0)=0$，从而$x=x_0$是函数$y=f[g(x)]$的驻点. 由于

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\{f'[g(x)]g'(x)\}'=f''[g(x)][g'(x)]^2+f'[g(x)]g''(x),$$

则
$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}=f'(a)g''(x_0).$$

由题设知$g''(x_0)<0$，所以，若$f'(a)>0$，则可得到$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}<0$，这正是函数$y=f[g(x)]$在驻点$x=x_0$处取得极大值的充分条件，从而可知选项 (B) 正确.

若$f'(a)<0$，则可推出函数$f[g(x)]$在x_0处取得极小值，故选项 (A) 不正确.

$f[g(x)]$在x_0处取得极大值，与$f''(a)$的取值无关，即当$f''(a)>0$和$f''(a)<0$时都可能使$f[g(x)]$在x_0处取得极大值.

例如，取$g(x)=-x^2$，$f(x)=\mathrm{e}^x$，$x_0=0$，则$g'(x)=-2x$，$g''(x)=-2<0$，$g(0)=0$是$g(x)$的极大值，$f[g(x)]=\mathrm{e}^{-x^2}$在$x=0$处取极大值，但$f''(0)=\mathrm{e}^0=1>0$，故选项 (C) 不是充分条件.

又例如，取$g(x)=-x^2$，$f(x)=\ln(1+x)$，$x_0=0$，则$f[g(x)]=\ln(1-x^2)$在$x=0$处显然取得极大值，但此时$f''(0)=-\left.\dfrac{1}{(1+x)^2}\right|_{x=x_0}=-1<0$，故选项 (D) 不是充分条件.

5.2 (D) **解** 因为$f(a)$是最小值，所以$f(x)\geqslant f(a)$，$x\in(a,b]$，又$f'_+(a)$存在，故

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geqslant 0.$$

因为$f(b)$是最大值，所以$f(x)\leqslant f(b)$，$x\in[a,b)$，又$f'_-(b)$存在，故

$$f'_-(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}\geqslant 0.$$

注 (1) 本题考查可导函数在端点处取最值的必要条件，总结如下：

设$f(x)$在$[a, b]$上可导，则$f(x)$在$[a, b]$上必存在最大（小）值，且

①若$f(x)$在$x=a$处取$[a, b]$上的最大（小）值，则$f'_+(a)\leqslant 0(\geqslant 0)$；

②若$f(x)$在$x=b$处取$[a, b]$上的最大（小）值，则$f'_-(b)\geqslant 0(\leqslant 0)$.

(2) 若$f(x)$在$[a, b]$上可导，且在点$x=c\in(a, b)$处取最小或最大值，则必有$f'(c)=0$，此为费马定理.

(3) 在考研中，要习惯函数$f(x)$的“升阶”或“降阶”. 若本题命制成$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，$x\in[a, b]$，此谓“升阶”，则$F(x)$是$f(x)$在$[a, b]$上的一个原函数，于是

①若$f(x)$在$[a, b]$上可导，且当$f(x)$在$x=a$处取得最大（小）值时，有$F''_+(a)\leqslant 0(\geqslant 0)$.

②若$f(x)$在$[a, b]$上可导，且当$f(x)$在$x=b$处取得最大（小）值时，有$F''_-(b)\geqslant 0(\leqslant 0)$.

③若$f(x)$在$[a, b]$上可导，且当$f(x)$在$x=c\in(a, b)$处取得最大或最小值时，有$F''(c)=0$.

5.3 2 **解** 因为$y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\dfrac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}$，所以$\lim\limits_{x\to 1}y=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x-1}=\infty$，故$x=1$是曲线$y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$的铅直渐近线，且是唯一的铅直渐近线.

又因为$\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=1$，所以$y=1$是曲线$y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$的一条水平渐近线. 同时该曲线无斜渐近线. 综上可知，曲线$y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$有 2 条渐近线.

5.4 $y=-2x$ **解** 方程变形为$x+y+\dfrac{\pi}{4}=\arctan \mathrm{e}^y$，方程两边对$x$求导得$1+y'=\dfrac{\mathrm{e}^y}{1+\mathrm{e}^{2y}}y'$.

将点$(0, 0)$代入上式得$y'|_{(0,0)}=-2$，从而得到曲线在点$(0, 0)$处的切线方程为$y=-2x$.

5.5 $(-1, -6)$ **解** $y=x^{\frac{5}{3}}-5x^{\frac{2}{3}}$，$y'=\dfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\dfrac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}$，$y''=\dfrac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}+\dfrac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}}=\dfrac{10(x+1)}{9\sqrt[3]{x^4}}$.

令$y''=0$，得$x=-1$，又$x\to 0$时，$y''\to+\infty$. 由于在$x=-1$的左、右邻域内y''变号，在$x=0$的左、右邻域内y''不变号，故拐点为$(-1, -6)$.

5.6 $\sqrt{3}+\dfrac{\pi}{6}$ **解** $y'=1-2\sin x$，$y''=-2\cos x$，令$y'=0$得$x=\dfrac{\pi}{6}$，$y''\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}<0$，则$y=x+2\cos x$在$x=\dfrac{\pi}{6}$处取得极大值，又该函数在$\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$上极值点唯一，则该极大值点为函数在$\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$上的最大值点，又$y(0)=2$，$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$，比较得函数在$\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$上的最大值为$y\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+\dfrac{\pi}{6}$.

5.7 $y=2x+1$ **解** $$a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}=2,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-ax)=\lim_{x\to\infty}[2x(e^{\frac{1}{x}}-1)-e^{\frac{1}{x}}]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2(e^{\frac{1}{x}}-1)}{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x}}\right]=1,$$

所以斜渐近线方程为 $y=2x+1$.

5.8 $(-1,0)$ **解** 将 $y'=2x+1$, $y''=2$ 代入曲率公式 $k=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$，得 $\frac{2}{[1+(2x+1)^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，整理后有 $x^2+x=0$，由于 $x<0$，因此得 $x=-1$，又有 $y\big|_{x=-1}=0$，故所求点的坐标为 $(-1,0)$.

5.9 **解** 方程两边对 x 求导可得

$$3y^2y'-2yy'+xy'+y-x=0, \tag{$*$}$$

令 $y'=0$，由（$*$）得 $y=x$，将其代入原方程有

$$2x^3-x^2-1=0,$$

从而可得唯一驻点 $x=1$.（$*$）式两边再对 x 求导，得

$$(3y^2-2y+x)y''+2(3y-1)(y')^2+2y'-1=0,$$

因此 $y''\big|_{x=1}=\frac{1}{2}>0$，故 $x=1$ 是 $y=y(x)$ 的极小值点 .