Estructuras Discretas

Práctica 06: Nuestras EStructuras Pt. 2

"Karyme I. Azpeitia García"
"Dorantes Perez Brando"
"Valencia Cruz Jonathan Josué"

12/11/2020

1. Sea F la función que toma un natural n y devuelve la lista de naturales entre 1 y $n. Es decir,

$$F(n) = [1, 2, 3, ..., n]$$

(a) Defina recursivamente a F.

```
F :: (Eq a, Num a) => a -> [a]
F 1 = [1]
F n = f (n-1) ++ [n]
```

(b) Demuestre que `fac(n) = prodl (F n)`, donde fac es la función factorial y `prodl` es la función que toma una lista de naturales y devuelve el producto de sus elementos.

Demostración por Inducción sobre n, considerando $\mathbb{N} - \{0\}$

Caso Base Probamos para $n = 1$.

Es fácil verificar, pues por como estan definidas las funciones `fac 1`, `prodl [x]`,`F 1`, tenemos

```
fac 1 = 1 = prodl [1] = prodl F 1
```

Hipótesis Inductiva

Supongamos que se cumple para $n \in \mathbb{N}$, esto quiere decir

```
fac n = prodl F n
```

Paso Inductivo

Queremos ver que se cumple para el sucesor de n.

Pd. `fac (n+1) = prodl F(n+1)`

Procedemos saliendo del lado derecho de la igualdad

```
prodl F(n+1) =
             = prodl (F (n+1)-1 ++ [n+1]) --Por definición recursiva de F.
             = prodl (F n ++ [n+1]) --Por aritmetica (*).
```

Obs. 1 Por la firma de `F` sabemos que `F n` es de tipo `xs` por lo que `F n ++ [n+1]` es de la forma `(x:xs)`.

Continuando con (*)

```
            = prodl F n * prodl [n+1] --Por Obs.1 y defición recursiva de prodl.
            = fac n * (n+1) --Por hipótesis inductiva.
                            --y definición recursiva de prodl.
            = fac n+1 --Por definición recursiva  de fac.
```

Así que por el principio de inducción, concluimos que se cumple para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

2. Sea G la función que toma dos naturales k y n y devuelve la lista con n apariciones del número k. Es decir,

$$G(k, n) = [k1, k2, ..., kn]$$

(a) Defina recursivamente a G.

```
G :: (Eq p, Num p) => p -> p -> [p]
G k 1 = [k]
G k n = G k (n-1) ++ [k]
```

(b) Demuestre que "'sum (replica k n) = k * n"" donde sum es la función que toma una lista de naturales y devuelve su suma.

Demostración por inducción sobre n considerando $\mathbb{N} - \{0\}$

Caso Base Probamos que se cumple para $n = 1$.

Es fácil verificar, pues por como estan definidas las funciones `replica k 1`, `sum [x] = x`, `k * 1`, tenemos

```
sum(replica k 1)= sum [k] = k = k *1
```

Hipótesis Inductiva

Supongamos que se cumple para $n \in \mathbb{N}$, esto quiere decir

```
sum(replica k n) = k * n
```

Paso Inductivo

Queremos ver que se cumple para el sucesor de n.

Pd. `sum(replica k n+1) = k * n + 1`

Procedemos partiendo del lado izquierdo de la igualdad

```
sum(replica k n+1) =
                   = sum(replica k  ((n+1)-1) ++ [n+1]) --Por definición recursiva de replica.
                   = sum (replica k  n) + k --Por definición recursiva de sum.
                   =  k*n + k --Por hipótesis de inducción.
                   =  k * n+1 --Por definición recursiva de (*).
```

Así que por el principio de inducción, concluimos que se cumple para cualquier $n \in \mathbb{N}$.