Lez 03

- mi sono perso le condizioni

- Condizioni sufficienti per garantire $\exists!\, LU$
  - sono ...
    - classe 1: se A è a dominanza diagonale stretta per righe, allora $\exists!$ la fattorizzazione LU
      - dom. diag. stretta per righe se le entrate $\sim$ $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$ (errore classico: perdere valori assoluti)
      - (es) $A = \begin{bmatrix} 4 & \cdot & -1 \\ 3 & -7 & 2 \\ -2 & 1 & 9 \end{bmatrix}$
    - classe 2 " " per colonne, " $\exists!$ " " LU $\rightsquigarrow$ $|a_{jj}| > \sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}|$ $j=1,\dots,n$ (sono due famiglie separate)
    - 3 classe se A è una matrice simmetrica e definita positiva $\rightsquigarrow$ $\exists!$ la fattorizzazione LU
      - simmetria $A = A^t$ $\leftrightarrow$ $a_{ij} = a_{ji}$ con $i,j = 1,\dots,n$ $\leftrightarrow$ $\begin{bmatrix} & x & 0 \\ x & & \\ 0 & & \end{bmatrix}$
      - matlab: `(A == A')`
      - definita positiva $v^T A v > 0$ $\forall \neq 0$ $\forall v \in \mathbb{R}^n$
      - matrice simmetrica $\sim$ autovalori $\in \mathbb{R}$ è def positiva se tutti $\lambda_i > 0$
        - matlab: "`eig(A)`"

riassunto

1) cond necess. e suff. $\exists!\, LU$ (A potrebbe essere singolare)
2) 3 cond suff. $\exists!\, LU$
3) voglio capire se posso garantire $\exists!\, LU$ per A che non soddisfa 1) e 2) ma con A non singolare (cond. vincolata ma non così tanto)

- se non fossi in una di queste cond. sufficienti?
  - matrice problematica $A = A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[m_{31}=3]{m_{21}=2} A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ \cdot & 0 & -4 \\ \cdot & 3 & -9 \end{bmatrix}$ proviamo a risolvere questo prob
  - (es) se fin dall'inizio $\hat{A} = \hat{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\hat{m}_{31}=2]{\hat{m}_{21}=3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ \cdot & 3 & -5 \\ \cdot & \cdot & -4 \end{bmatrix}$ l'elemento pivotale a_{22} è $\neq 0$ e ho fatto un passo in meno

- sia $A^{(i)} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & a_{ii}^{(i)} \cdots & a_{in}^{(i)} \\ & \vdots\, a_{ni}^{(i)} \cdots & a_{nn}^{(i)} \end{bmatrix}$ $a_{ii}^{(i)} = 0$ bisogna capire quando scambiare e con chi scambiare
  - criterio possibile $a_{i+1,i}^{(i)} \neq 0$ $\rightsquigarrow$ scambio le righe
  - matematicamente si traduce con le matrici di permutazione
    - P è una matrice t.c. $P^T P = P P^T = I$ con $I = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$ la matrice che scambia la ~~sec~~ 2ª e 3ª riga $\rightsquigarrow P \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot \end{bmatrix}$
    - $PA = LU$ con $P = \prod P_i$
    - se voglio la fatt LU di $P \cdot A$ $\rightsquigarrow$ $Ax = b$ $\rightarrow$ $PAx = Pb$ $\rightsquigarrow$ $L\underbrace{Ux}_{y} = Pb$ $\longrightarrow$ $\begin{cases} Ly = Pb \\ Ux = y \end{cases}$
    - $a_{ii}^{(i)} \neq 0$ ma $a_{kk}^{(k)} = 10^{-15}$ $\sim$ $A^k = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ 0 & a_{kk}^{(k)} & \cdots \\ & \cdots & \end{bmatrix}$ $m_{k+1,k} = \frac{a_{k+1,k}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$ il moltiplicatore diventa molto grande causando un errore di arrotondamento che posso propagarsi

$m_{r,k} = \frac{a_{rk}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$

- (es) $A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1.05 \cdot 10^{-5} & 3 \\ 2 & 2 & 20 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ $\neq 0$ ≈ 0 MA non zero $\longrightarrow$ $A = LU = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 4 \end{bmatrix}$ $\rightsquigarrow$ morale: pivoting va applicato sempre

- pivoting parziale   costo n^2 $PA = LU$

  pivoting totale   controllo tutta la sottomatrice (quindi scambio di righe e per colonne) $\underset{\text{righe}}{P} = I$, $\underset{\text{colonne}}{Q} = I$ $\rightarrow$ $PAQ = LU$

- $Ax = b$ $\rightsquigarrow$ $\underbrace{PAQ}_{LU}\overbrace{\underbrace{Q^T x}_{y}}^{z} = Pb$ $\begin{cases} Lz = Pb \\ Uy = z \\ Q^T x = y \end{cases}$

  $PAx = Pb$

- domanda da esame: A cosa serve il pivoting

- $\underline{\boxed{\text{commento}}}$ $[L, U, P] = lu(A)$ farlo sempre

  $\underset{\triangle}{spy(L)}$, $\underset{\triangleleft}{spy(U)}$, $spy(P)$ (per vedere se ~~ci~~ non c'è stato pivoting o no)

  se faccio spy L non lo vedrò una $\underbrace{\triangle}$

- non vuole $[L, U]$, P verrà calcolato sempre $\rightsquigarrow$ se faccio $A = LU$ allora farà = $PA = LU$ $\rightsquigarrow$ $A = P^{-1}LU$

- ~~dobbiamo~~ vediamo come la fatt. LU si modifica per una matrice TRIDIAGONALE

  - $A = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ \ddots & \ddots & \\ & \ddots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$

  un sacco di commenti per capire cosa come ha ricavato

- (3×3) $A = \underset{\text{noto}}{\begin{bmatrix} a_1 & c_1 & 0 \\ e_1 & a_2 & c_2 \\ 0 & e_3 & a_3 \end{bmatrix}} = \underset{L}{\begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \beta_2 & 1 & \cdot \\ \cdot & \beta_3 & 1 \end{bmatrix}} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & \\ \cdot & \alpha_2 & \gamma_2 \\ \cdot & \cdot & \alpha_3 \end{bmatrix}}_{U}$ $\rightsquigarrow$ $\gamma_1 = c_1$, $\gamma_2 = c_2$ $\rightsquigarrow$ $\underset{L}{\begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \beta_2 & 1 & \cdot \\ \cdot & \beta_3 & 1 \end{bmatrix}} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 & c_1 & \\ \cdot & \alpha_2 & c_2 \\ \cdot & \cdot & \alpha_3 \end{bmatrix}}_{U}$ $\rightsquigarrow$

  $\alpha_1 = a_1$

  $\beta_2 \alpha_1 = e_2 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{e_2}{\alpha_1}$

  $\beta_2 c_1 + \alpha_2 = a_2 \rightsquigarrow \alpha_2 = a_2 - \beta_2 c_1$

  $\beta_3 \alpha_2 = e_3 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{e_3}{\alpha_2}$

- $(n \times n)$ $\rightsquigarrow$ $\overset{\text{passo 1}}{\alpha_1 = a_1}$ $\rightsquigarrow$ $\beta_i = \dfrac{e_i}{\alpha_{i-1}}$ $\rightsquigarrow$ $\alpha_i = \underline{a_i - \beta_i \cdot c_{i-1}}$ per $i = 2, \dots, n$

- costo totale algoritmo $\forall \beta_i$: ho una divisione $\rightsquigarrow$ costo complessivo $3(n-1)$

  $\forall \alpha_i$: ho una molt. e una sottrazione