LEZ 07

"adesso finiamo quegli"

- **Proposizione**: sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sia tridiagonale, non singolare e t.c $a_{ii} \neq 0$ per $i = 1, \dots, n$

  Allora o sia che J che GS convergono o entrambi divergono, se entrambi sono convergenti:
  allora $\rho(B_{GS}) = [\rho(B_J)]^2$ (+ veloce sarà GS)

- (es) suppongo $\rho(B_J) = \frac{1}{4}$ $\underset{\text{tolleranza}}{TOL}$ $\rightsquigarrow$ $? k_{min} \in \mathbb{N}^+ : \left(\frac{1}{4}\right)^{k_{min}} \leq TOL \to \frac{1}{TOL} \leq 4^{k_{min}} \to \underbrace{\left\lceil \log_4 \frac{1}{TOL} \right\rceil} \leq k_{min}$

  - sfruttando il risultato $\rho(B_{GS}) = \frac{1}{4^2}$ $\rightsquigarrow$ $? k_{min} \in \mathbb{N}^+ : \left(\frac{1}{4}\right)^{k_{min}} \leq TOL \rightsquigarrow \frac{1}{TOL} \leq 4^{2k_{min}} \to \log_4 \frac{1}{TOL} \leq 2k_{min} \rightsquigarrow \left\lceil \frac{1}{2} \log_4 \frac{1}{TOL} \right\rceil \leq k_{min}$

  $\rightsquigarrow$ iterazioni GS $\simeq$ it. J

- esempio $Ax = b$ $\rightsquigarrow$ $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & & 0 \\ -2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $b : x = [1, \dots, 1]^T$ $\rightsquigarrow$ $\rho(B_J) < 1$, $\rho(B_{GS}) < 1$,

  $x^{(0)} = 0$ e $TOL = 10^{-12}$; $\#it_J = 277$
  $\#it_{GS} = 143$

- $\boxed{TH}$ se A è SDP $\rightsquigarrow$ JOR converge $0 < \omega < \frac{2}{\rho(D^{-1}A)}$, $\rho(D^{-1}A) = P_J = P_{JOR}$

- $\boxed{TH}$ se A è SDP $\rightsquigarrow$ SOR converge se e solo se $0 < \omega < 2$

- $\boxed{TH}$ se A è SDP e tridiagonale $\rightsquigarrow$ SOR converge se $0 < \omega < 2$ e $\omega_{OPT} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - [\rho(B_J)]^2}}$

Criteri di arresto

1) Nmax
2) accuratezza

$? k_{min} \in \mathbb{N}^+$ t.c $\| x - x^{(k_{min})} \| \leq S \leq TOL$ $\rightsquigarrow$ $S \leq TOL$ $\rightsquigarrow$ ma potrebbe esserci una costante t.c $c \cdot S \leq TOL$

c piccolo $\rightsquigarrow$ affidabile

- chi è S che stimo l'errore? quando mi posso fidare

- S_1 $\equiv$ residuo con $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ $\rightsquigarrow$ $S_1 \equiv$ residuo relativo $= \frac{\| r^{(k)} \|}{\| b \|}$ perché $\|b\|$?

- $? k_{min} \in \mathbb{N}^+$ t.c $\frac{\| r^{(k)} \|}{\| b \|} \leq TOL$ $\rightsquigarrow$ $\frac{\| x - x^{(k_{min})} \|}{\| x \|} \leq \underset{K(A)}{\overset{\text{condizionamento}}{c}} \frac{\| r^{(k_{min})} \|}{\| b \|} \leq TOL$

- $K(A)$? (Hill defn) $(A x + \delta A)(\underbrace{x + \delta x}_{\hat{x}}) = (b + \delta b)$ $\rightsquigarrow$ $\delta A = 0$ $\frac{\| \delta x \|}{\| x \|} \leq K(A) \frac{\| \delta b \|}{\| b \|} = K(A) \frac{\| r \|}{\| b \|}$

  $\hat{x} \to x^{(k)}$, $\delta b \to r$

  Ora $\hat{x} = x^{(k)}$ $\rightsquigarrow$ $\frac{\| x - x^{(k)} \|}{\| x \|} \leq K(A) \frac{\| r^{(k)} \|}{\| b \|}$ $\rightsquigarrow$ se mettiamo kmin abbiamo quello che ci serve

  la convergenza dipende da come è condizionato

- $S_2 \equiv$ incremento $\equiv \delta$ $x^{(k+1)} - x^{(k)} = \delta^{(k)}$

  - $? k_{min} \in \mathbb{N}^+$ t.c $\| x^{(k_{min})} \| \leq c \, \| \delta^{(k)} \| \leq TOL$

  - il risultato vale per ogni B ma lo dimostro per B SDP $\rightsquigarrow$ $e^{(k_{min})} = x - x^{(k_{min})} + x^{(k_{min}+1)} - x^{(k_{min}+1)} = e^{(k_{min}+1)} + x^{(k_{min}+1)} - x^{(k_{min})} = e^{(k_{min}+1)} + \delta^{(k_{min})}$

  $\to \| e^{(k_{min})} \| = \| e^{(k_{min}+1)} + \delta^{(k_{min})} \| \underset{\text{disuguaglianza triangolare}}{\leq} \| e^{(k_{min}+1)} \| + \| \delta^{(k_{min})} \| \leq \| B e^{(k_{min})} \| + \| \delta^{(k_{min})} \| \underset{\text{comp norma euclidea}}{\leq} \| B \|_2 \, \| e^{(k_{min})} \| + \| \delta^{(k_{min})} \| = \rho(B) \, \| e^{(k_{min})} \| + \| \delta^{(k_{min})} \|$

con $\|B\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(B^T B)}$, $\|B\|_2 \Big|_{SDP} = \sqrt{\lambda_{max}(B^2)} = \sqrt{[\lambda_{max}(B)]^2} = \lambda_{max}(B) = \rho(B)$

- $[1-\rho(B)]\, \|e^{(k\,min)}\| = \|\delta^{(k\,min)}\|$

→ Regime convergenza ~ $\rho(B) \leq 1$ ~ $\|e^{(k\,min)}\| \leq \frac{1}{1-\rho(B)} \|\delta^{(k\,min)}\|$

↳ se $\rho(B) \to 0$ converge → è molto veloce a convergere

Richardson Stazionario

- $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha P^{-1} r^{(k)}$

$\lambda_i \equiv$ Autovalori della matrice $P^{-1}A$

- **TH)** sia P invertibile (non singolare) allora R_S (rich. stat.) converge $\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \leftrightarrow \alpha$ è t.c. $\frac{2\,Re(\lambda_i)}{\alpha\, |\lambda_i|^2} > 1 \quad \forall i$

  - **DIM)** $B_\alpha = I - \alpha P^{-1} A$ ~ $\rho(I - \alpha P^{-1}A) < 1$ — autovalori sarà $1 - \alpha\lambda_i$ ~ $|1 - \alpha\lambda_i| < 1 \quad \forall i$ ~ max $|\ |$ lo sarà

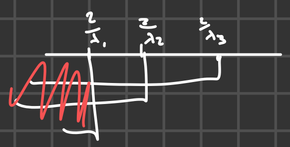
  - $= [Re(1-\alpha\lambda_i)]^2 + [Im(1-\alpha\lambda_i)]^2 < 1$ ~ $[1 - \alpha\, Re(\lambda_i)]^2 + [\alpha^2\, Im(\lambda_i)]^2 < 1$ ~ $1 + \alpha^2 [Re(\lambda_i)]^2 - 2\alpha\, Re(\lambda_i) + \alpha^2 [Im(\lambda_i)]^2 < 1$

    $= \frac{\alpha |\lambda_i|^2 - 2\alpha\, Re(\lambda_i) < 0}{\alpha\, |\lambda_i|^2}$ ~ $1 - \frac{2\alpha^2\, Re(\lambda_i)}{\alpha^2 |\lambda_i|^2} < 0$ ~ $1 < \frac{2\cancel{\alpha^2}\, Re(\lambda_i)}{\cancel{\alpha^2} |\lambda_i|^2}$

- **TH)** sia P invertibile e $P^{-1}A$ abbia tutti autovalori reali e positivi (t.c. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$)

  Allora (RS) converge $\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \leftrightarrow \underbrace{0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_1}}_{\text{Figlia Dimo di prima}}$, inoltre $\rho(B_\alpha)$ è minimo se $\alpha = \alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$

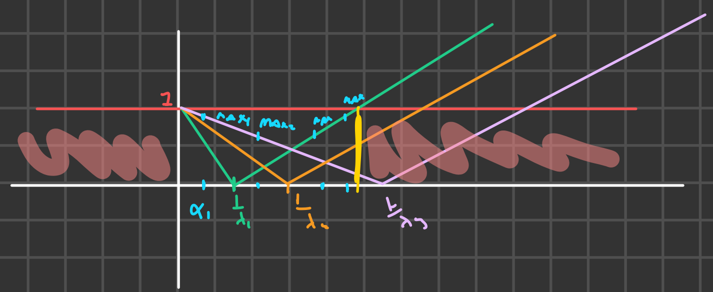
  - $1 < \frac{2\lambda_i}{\alpha |\lambda_i|^2}$ $\quad \alpha < \frac{2}{\lambda_i}$

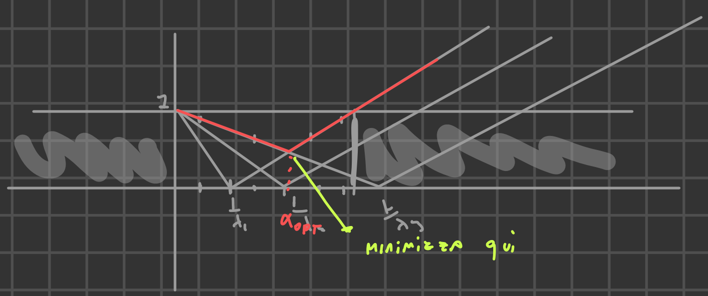


- Dimo ② (caso con 3 Autovalori)

  - $\lambda_1 \mapsto 1 - \alpha\lambda_1$
    $\geq$
    $\lambda_2 \quad 1 - \alpha\lambda_2$
    $\geq$
    $\lambda_3 \quad 1 - \alpha_3$
    $>$
    0

    ~ voglio studiare il comportamento del modulo $|1-\alpha\lambda_1|$, $|1-\alpha\lambda_2|$, $|1-\alpha\lambda_3|$





α_{opt} sarà $1 - \alpha\lambda_3 = \alpha\lambda_1 - 1$ ~ $2 = \alpha(\lambda_1 + \lambda_3)$ ~ $\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_3}$