LEZ 7

- $A_1, A_2, \dots A_n \in \mathcal{F} \rightsquigarrow \bigcap_{n\geq1} A_n \in \mathcal{F}$

- ES) $\bigcup B_i \in \mathcal{F}$ $\quad B^c \in \mathcal{F}$ $\quad + (\bigcup B_i)^c = \bigcap B_i^c$

- PROP) (1) sia F funz. ripartizione $\rightsquigarrow \exists!$ msp su $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.c. $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad F(x) = P_F\{(-\infty, x]\}$

  (2) Data una msp P su $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\quad x \longmapsto P\{(-\infty, x]\} =: F(x)$ è una F di ripartizione

- Dim (2)

  - $\underbrace{(-\infty, x]}_{\text{evento}} \subseteq (-\infty, y]$ per $x \leq y$ $\rightsquigarrow F(x) = P\{(-\infty, x]\} \leq P\{(-\infty, y]\} = F(y) \rightsquigarrow F$ è mon. non decresc.

  - siano $A_n = (-\infty, -n]$ t.c. $A_{n+1} \subseteq A_n$ $\rightsquigarrow A_n \downarrow \emptyset$, la continuità di P implica $F(-n) = P\{(-\infty, -n]\} \to P\{\emptyset\} = 0$

    - ci manca esprimere $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ poiché F è monotona

    - analogamente per $x \to +\infty$ dovremmo considerare $B_n = (-\infty, n]$ $\quad B_n \uparrow \rightsquigarrow F(n) = P(B_n) \to P(\Omega) = 1$

      - usando monotonia si ha $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

  - siamo $\forall x \in \mathbb{R}$ con $C_n = (-\infty, x+\frac{1}{n}] \downarrow C = (-\infty, x]$ etc

- PROP) sia $X: (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ $\quad P_X$ (misura immagine)

  - chiamo funz. di rip associata ad X $\quad F_X(x) := \mathbb{P}\{\omega : X(\omega) \leq x\} = \mathbb{P}\{X \leq x\} = P_X\{(-\infty, x]\}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow F_x$ è una formula di ripartiz.

  - Dim) corollario della prop vista prima $\quad F_X(x) = P_X\{(-\infty, x]\}$

- estraiamo info dalla funz. di ripartizione

  - OSS) Sia X una v.a. reale con funz di ripartizione F_X

    - (1) $\mathbb{P}\{X > x\} = 1 - \mathbb{P}\{(X > x)^c\} = 1 - \mathbb{P}\{X \leq x\} = 1 - F_X(x)$

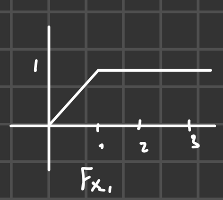
    - (2) $\mathbb{P}\{X \in (a, b]\} = \mathbb{P}\{(X \leq b) \setminus (X \leq a)\} \overset{a \leq b}{=} \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}\{X \leq a\} = F_X(b) - F_X(a)$

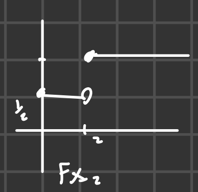
    - (3) $\mathbb{P}\{X < x\} = \lim_{y \uparrow x} F_X(y) = F_X(x^-)$

    - (4) $\mathbb{P}\{X = x\} = \mathbb{P}\{(X \leq x) \setminus (X \geq x)\} = F_X(x) - F_X(x^-) =$ salto in x di F_X (se è continua vale 0)

      - in particolare se F_X è continua $\mathbb{P}\{X = x\} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- (esempi)





(domande tipiche queste sono funz. di ripartizione?)

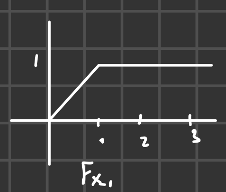
(domanda $\mathbb{P}\{X_1 = 3\}$? $\rightsquigarrow \mathbb{P}\{\dots\} = F_X(3) - F_X(3^-)$ ... perché F_X è continua)

(domanda $\mathbb{P}(\{X \leq 3\}) = 1$, $\mathbb{P}\{X_1 \in (0,1]\} = F_{X_1} - F_{X_1}(0) = 1 - 0 = 1$

?$\mathbb{P}\{X_2 = 0\} \overset{\text{salto}}{=} F_{X_2}(0) - F_{X_2}(0^-) = \frac{1}{2} - 0$, ?$\mathbb{P}\{X_2 = 2\} = F_{X_2}(2) - F_{X_2}(2^-) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

- ES) esprimere la prob $\mathbb{P}\{X \in (a,b)\} =$ e $\mathbb{P}\{X \in [a,b]\}$

- esempio 1)



è detta v.a. con legge uniforme su $[0,1]$ $\rightsquigarrow$ $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x \in [0,1) \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$ $\to$ $0 \leq a < b \leq 1 \to \mathbb{P}\{X \in (a,b]\} = b - a$

$= \mathbb{P}\{X \in (a,b)\} = b - a$ perché $\mathbb{P}\{\text{"un punto"}\} = 0$

$= \mathbb{P}\{X \in [a,b]\}$ $\quad \mathrm{Leb}_{[0,1]}((a,b))$

- ∇ $\mathbb{P}\{X \in (-1,-2)\} = 0$, in generale $\mathbb{P}\{X \in A\} = 0$ se $A \cap [0,1] = \emptyset$ $\quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

  - vimo con $A \subseteq \mathbb{R} \setminus [0,1]$ $\rightsquigarrow \mathbb{P}(X \in A) \leq \mathbb{P}(X \in \mathbb{R} \setminus [0,1]) = \underbrace{F_X(0)}_{0} + \underbrace{1 - F_X(1)}_{0} = 0$

- **Ex 2** sia $X_1 \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$ ossia X_1 ha funz di ripartizione $F_{X_1} =$ 

sia $X_2^{(\omega)} = -\ln\left(X_1^{(\omega)}\right)$

- io so che $\mathbb{P}\{X_1 \in (0,1)\} = 1 \rightsquigarrow X_2^{(\omega)} := -\ln(X_1(\omega))\ \mathbb{1}\{X_1(\omega) > 0\}$ con $\mathbb{1}\{\omega : X_1(\omega) > 0\} = \begin{cases} 1 & \text{se } X(\omega) > 0 \\ 0 & \text{se } X(\omega) \le 0 \end{cases}$

$\rightsquigarrow$ ancora + preciso $X_2(\omega) = \begin{cases} \ln(X_1(\omega)) & \text{se } X_1(\omega) > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

esercizio che può capitare

- $F_{X_2}(x) = \mathbb{P}\{X_2 \le x\}$ guardiamo come si comporta $\rightsquigarrow$ se $X_1(\omega) \in (0,1) \rightsquigarrow \underbrace{-\ln(X_1(\omega))}_{X_2(\omega)} > 0 \rightsquigarrow \mathbb{P}\{X_2(\omega) > 0\} = 1$

- si prendo $A = \{\omega : X_1(\omega) \in (0,1)\} \rightsquigarrow \mathbb{P}(A) = 1$, con $A \overset{\text{implica}}{\subseteq} \{-\ln(X_1(\omega)) > 0\} = \{\omega : X_2(\omega) > 0\} \rightsquigarrow 1 = \mathbb{P}(A) \le \{X_2 > 0\} \rightsquigarrow \mathbb{P}(X_2 > 0) = 1$

mi evito 1

- $F_{X_2}(x) = \mathbb{P}\{X_2 \le x\} = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \mathbb{P}\{X_2 \le x\} & x > 0 \end{cases}$ $\quad x > 0 \quad \mathbb{P}\{X_2 \le x\} = \mathbb{P}\{X_2 \le x$ $\quad \mathbb{P}\{X_2 \le x \cap (X_1 \in (0,1))\} = F_{X_2}(x) = \dots$

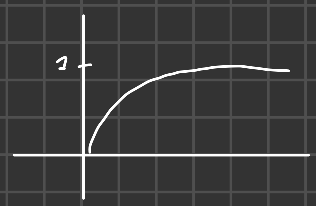
ugu eventi

... = $\mathbb{P}\{-\ln(X_1) \le x \cap \{X_1 > 0\}\}) \overset{\text{uguaglianza tra eventi}}{=} \mathbb{P}\{X_1 \ge e^{-x} \cap \{X_1 > 0\}\} \overset{\text{uguaglianza di prob}}{=} \mathbb{P}\{X_1 \ge e^{-x}\} \overset{\mathbb{P}\{X_1 = a\} = 0\ \forall a}{=} \mathbb{P}\{X_1 > e^{-x}\} = 1 - F_{X_1}(e^{-x})$

$F_{X_1}(u) = u$ se $u \in (0,1)$

- tot. V.A. da un occhiata ai passaggi

- Ho dimostrato $F_{X_2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ 1 - F_{X_1}(e^{-x}) & \text{se } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$



- continua da dx
  monotona

- Funzione di ripartizione esponenziale (negativa)

- **Prop** Se X_1 e X_2 sono var. aleatorie t.c. $F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x)\ \forall x \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{P}\{X_1 \in A\} = \mathbb{P}\{X_2 \in A\}\ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ossia $\underset{\text{legge}}{P_{X_1}} = P_{X_2}$

- **NB** non vuol dire che $\mathbb{P}\{X_1 = X_2\} = 1$ (NO)
- non suppone che X_1, X_2 siano def nello stesso $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

- **esempio** $X_i \in \{0,1\}$, $\Omega = \{0,1\}$ $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ e $\mathbb{P}(\omega = 0) = \mathbb{P}(\omega = 1) = \frac{1}{2}$

$X_1(\omega) = \omega$
$X_2(\omega) = 1 - \omega$ $\rightsquigarrow \mathbb{P}\{X_1 = X_2\} = \mathbb{P}\{\emptyset\} = 0$

- **esercizio** $F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x)$

- **Prop** Sia F una funzione di ripartizione su $\mathbb{R} \rightsquigarrow \exists\ (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ t.c. $F_X = F$