Probabilità, Lezioni del prof. F. Bassetti
a.a. 2024/2025, E. Bucci

nota

PERCORSO 1: - Esame:

↳ parziali ("compitini") ad aprile e giugno (in 30-esimi)

⇝ orale a richiesta (senza: 29 max.)

PERCORSO 2:

⇝ scritto unico (stesso giorno del compitino 2)

↳ a scelta (se si è fatto il compitino 1 vi si può accedere lo stesso)

⇝ Programma: obs: corso troppo denso

↳ si è cercato di alleggerirlo (senza MARKOV) 4 lez.

⇝ si aggiunge qualcosa di misuristica.

N.B. consiglio di integrare libro e appunti

⇝ Libri:

(–) Jacod-Protter ~ "Probability Essentials"

(–) Baldi ~ "Probability - an introd. through theory and exercises"

⇝ lezioni registrate + STREAMING con avviso (vedasi F.d. Automatica)

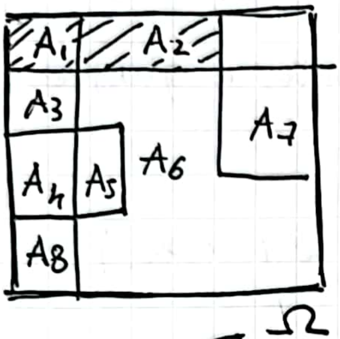
Lez 1

lun 17/02/2025

N.B. il linguaggio richiesto sarà NOIOSAMENTE introdotto nel corso delle prime lezioni

Misuristica

$\rightsquigarrow$ Algebre, σ-Algebre, Probabilità (misure)



↳ ci si aspetta una teoria che rispecchi le evidenze geometriche N.B.

$\rightsquigarrow$ si prepara la terminologia

def Spazio. $\omega \in \Omega$ (Spazio campionario)

$A_i \subseteq \Omega$

↳ **ex:**

$\Omega_1 = \{1, 2, \dots, M\}$

$\Omega_2 = \{0, 1, \dots\} = \mathbb{N}_0$

$\Omega_3 = \{x \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

$\Omega_4 = \mathbb{R}^D, \quad D \geq 1$

$\Omega_5 = \{x = (x_1, \dots, x_n, \dots)\}$ con $x_i \in \{1, \dots, M\}$

↳ ex: $M = 1$ successioni di 0 e 1

ex:

$A = \{1, 2\} \subseteq \Omega_1$

$A = \{1\} \subseteq \Omega_1$

def complementare

$$A^c \stackrel{\Delta}{=} \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$$

(insieme di sottoinsiemi)

def 1 $\mathcal{A}$ classe di insiemi di Ω è un' ALGEBRA se:

(1) $\Omega \in \mathcal{A}$ (2) se $\mathcal{A} \ni A \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

(3) se $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$

esercizio $\mathcal{A}$ algebra, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$

↳ $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ $(n \in \mathbb{N})$

$\boxed{\text{def } 2}$ $\mathcal{F}$ classe di INSIEMI di Ω è una σ-ALGEBRA se:

(1) $\Omega \in \mathcal{F}$ (2) se $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

(3*) $A_i \in \mathcal{F}$ $i = 1, \dots, n \Rightarrow \bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{F}$

↳ anche inf. num!

obs: se $\mathcal{F}$ è σ-ALG $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ è algebra

obs: (1) e (2) $\Rightarrow$ $\underset{\varnothing}{\underset{\|}{\Omega^c}} \in \mathcal{F}$ $\Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \varnothing \dots \cup \varnothing \cup \dots$
$= A_1 \cup A_2$

↳ [esempio di oggetto Alg. ma non σ-Alg sulle DISPENSE]

---

obs: se Ω finito $\Rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$ finito

$\Omega = \{1, \dots, M\}$

↳ $\mathcal{P}(\Omega) = \{1, \dots, N\}$

$\boxed{\text{N.B.}}$ $\mathcal{P}(\Omega)$ insieme delle parti

$\boxed{\text{def}}$ insieme di tutti i sottoinsiemi

$\boxed{\text{N.B.}}$ $\mathcal{P}(\Omega)$ è una σ-ALG.

$\boxed{\text{def}}$ $(\Omega, \mathcal{A})$ o $(\Omega, \mathcal{F})$

↳ spazio misurabile

$\boxed{\text{def}_2:}$ $\mu: \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ è una misura $\boxed{\text{finitamente additiva}}$

se valgono:

(a_0) $\mu(\varnothing) = 0$

(b_0) $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ e $A_1 \cap A_2 = \varnothing \Rightarrow \mu(A_1 + A_2)$
$= \mu(A_1) + \mu(A_2)$

$\boxed{\text{def } 3:}$ $\mu: \mathcal{F} \longrightarrow [0, +\infty]$ è una misura $\boxed{\sigma\text{-additiva}}$

se valgono:

(a_0) $\mu(\varnothing) = 0$

↳

4.

$\hookrightarrow$ (b_0^*) se $A_i \in \mathcal{F}$ $i = 1, 2, \dots$ $\Rightarrow \mu(\bigcup_{i\geq 1} A_i) = \sum_{i \geq 1} \mu(A_i)$

con $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\forall i, j$

obs: può valere $+\infty$!!

$\boxed{\text{N.B.}}$ Talvolta chiameremo i sottoinsiemi di Ω "EVENTI" $\rightsquigarrow$ Ω $\tilde{=}$ evento certo

$\rightsquigarrow$ $\emptyset$ $\tilde{=}$ evento impossibile

$\rightsquigarrow$ A^c $\tilde{=}$ evento contrario

$\boxed{\text{def}_4}$ $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ è una (misura di) probabilità (fin. additiva)

se valgono le seguenti:

(a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ e $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(b) $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$: $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$\Rightarrow$ $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$

$\boxed{\text{def}_5}$ $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ è una (misura di) probabilità (σ-additiva)

se valgono le seguenti:

(a)

(b^*) $A_1, \dots, A_N, \dots$ con $i \in \{1, \dots, N, \dots\}$

$A_i \in \mathcal{F}$ con $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$

$\Rightarrow$ $\mathbb{P}(\bigcup_{i \geq 1} A_i) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(A_i)$

Proprietà Elementari sia $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ misura σ-add. (misura)

(1) $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$

per $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

1,5

(2) $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

(monotonia)

N.B. se $A \cap B = \emptyset$ A e B si dicono INCOMPATIBILI

obs: vuol dire che se

A e B sono prop. $\leadsto$ $A \Rightarrow B$ ma $B \not\Rightarrow A$ nec.

obs: se $\mathbb{P}$ è una mis. prob (mdp) $\Rightarrow$ è una misura

dim $A_1 \cup A_2 \overset{\text{poiché } A \cap \emptyset = \emptyset}{=} A_1 \cup A_2 \cup \emptyset \cup \ldots \cup \emptyset$

$\leadsto$ $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu\left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right)$ con $A_i = \emptyset$ per $i \geq 3$

$\overset{Hp}{=} \mu(A_1) + \mu(A_2) + 0 + \ldots + 0$

$= \mu(A_1) + \mu(A_2)$ $\square_{(1)}$

$\leadsto$ $B = \underbrace{A}_{A_1} \cup \underbrace{(B \setminus A)}_{A_2}$ $\leadsto$ $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$\mu(B) \overset{\text{prop 1}}{=} \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$

$\square_{(2)}$

Proprietà $\mathbb{P}$ mdp su $\mathcal{F}$

(1) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) \quad \forall A \in \mathcal{F}$

(2) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \quad \forall A, B \in \mathcal{F}$

dim $A \cup A^c = \Omega$ $\leadsto$ $1 \overset{\nabla}{=} \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$

(1)

$= \mathbb{P}(A \cup A^c)$

$\square_{(1)}$

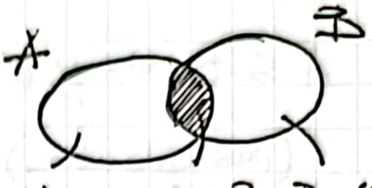
(2) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(\dots \cup \dots \cup \dots)$

$= \mathbb{P}(A \setminus (B\cap A)) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus (B \cap A))$

$\overset{(*)}{=} \mathbb{P}(A) - \cancel{\mathbb{P}(A\cap B)} + \cancel{\mathbb{P}(A \cap B)} + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cap B)$

$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

$\square_{(2)}$



$A \setminus (B\cap A)$ $\quad$ $A \cap B$ $\quad$ $B \setminus (B \cap A)$

incompatibili!

obs: $A = \underbrace{(A \setminus (B \cap A)) \cup (B \cap A)}_{\text{disgiunti anch'essi...}}$

$\mathbb{P}(A) \overset{!}{=} \mathbb{P}(A \setminus (B \cap A)) + \mathbb{P}(A \cap B)$

$(*)$ $\mathbb{P}(A \setminus (A \cap B)) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$

---

ex: $\Omega := \{1, 2, 3\}$

def $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathcal{E} := \{\{1,2\}, \{2,3\}\}$

obs: non una σ-algebra (per ex: non c'è $\varnothing$)

$\sigma(\mathcal{E}) \triangleq$ la più piccola σ-ALG che contiene $\mathcal{E}$ "σ-ALG. generata"

$\rightsquigarrow \sigma(\mathcal{E}) \ni \{1,2\} \cup \{2,3\} \overset{!}{=} \Omega$

$\rightsquigarrow \sigma(\mathcal{E}) \ni \{1,2\}^c = \{3\}$

$\rightsquigarrow \sigma(\mathcal{E}) \ni \{2,3\}^c = \{1\}$

$\rightsquigarrow \sigma(\mathcal{E}) \ni \{1\} \cup \{3\} = \{1,3\} \implies \sigma(\mathcal{E}) \ni \{1,3\}^c = \{2\}$

$\rightsquigarrow \sigma(\mathcal{E}) \ni \varnothing$

$\implies \boxed{\sigma(\mathcal{E}) \overset{!}{=} \mathcal{P}(\Omega)}$

esercizio $\mathcal{E} = \{\{1,2\}, \{3\}\}$

Lez 2 prob

N.B. sul Jacod-Protter la def. di probabilità è leggerm. diversa, ma equivalente

prop 1 $(\Omega, \mathcal{F})$ con $\mathcal{F}$ σ-ALGEBRA e una funzione $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$

↦ le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) $\mathbb{P}$ è una m.d.p.

(2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ e vale (b^*):

$\boxed{NB}$ in (2) non si chiede che $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

$$\forall A_i \in \mathcal{F} \quad i \geq 1 \qquad A_i \cap A_j = \emptyset \text{ per } i \neq j$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(A_i)$$

$\boxed{\text{dim}}$ (1) ⇒ (2) per definizione di m.d.p.

(2) ⇒ (1) poiché:

$p := \mathbb{P}(\emptyset) \overset{Hp}{\in} [0, 1]$ e poiché $\emptyset = \bigcup_{i \geq 1} \emptyset$

↳ per (b^*) $\quad p = \sum_{i \geq 1} p \iff p = 0$

■

$\boxed{\text{def}}$ una misura μ su $\mathcal{F}$ dicesi FINITA se: $\mu(\Omega) \in \mathbb{R}^+_0$ (finita)

$\boxed{\text{def}}$ una misura μ su $\mathcal{F}$ dicesi σ-FINITA se: $\exists\, B_i \in \mathcal{F}$ $i \geq 1$

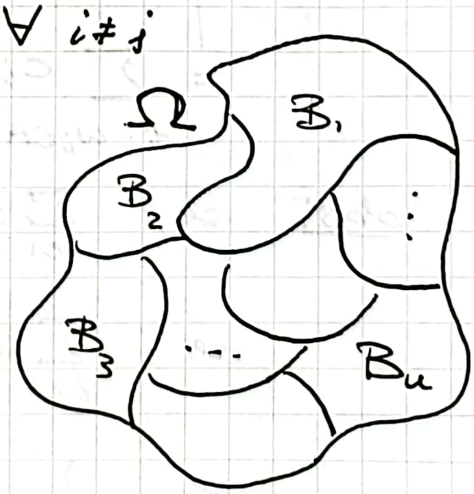
famiglia numerabile misurabile di eventi

t.c. (1) $B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

(2) $\Omega = \bigcup_{i \geq 1} B_i$

(3) $\mu(B_i) < +\infty$

e tale suddivisione verrà chiamata PARTIZIONE di Ω

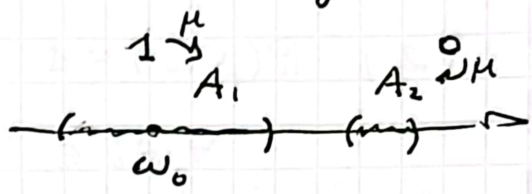


8.

$\boxed{ex_1}$ $(\Omega, \mathcal{F})$, $\omega_0 \in \Omega$

$\delta_{\omega_0}(A)$ "=" delta concentrata o massa degenere in ω_0

$$\delta_{\omega_0}(A) \triangleq \begin{cases} 1 & \omega_0 \in A \\ 0 & \omega_0 \notin A \end{cases}$$

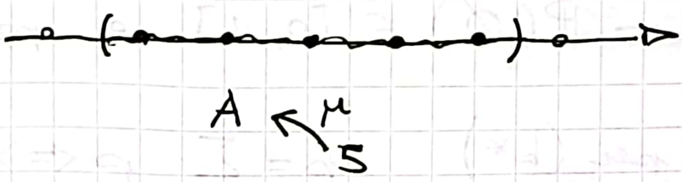


$\boxed{ex_2}$ $(\Omega, \mathcal{F})$ $\omega_i \in \Omega$ $i \in \mathbb{N}$

$$\mu(A) \triangleq \sum_{i \geq 1} \delta_{\omega_i}(A) \text{ "=" misura di conteggio}$$

↳ (e.g.) $\Omega = \mathbb{N}$ con $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$\omega_i = i$



<u>obs:</u> non finita

(e.g.)

$$\mu(A) \triangleq \sum_{i=1}^{N} \delta_{\omega_i}(A) \rightsquigarrow \mu(\Omega) = N$$

<u>obs:</u> finita

$\boxed{ex_3}$ $(\Omega, \mathcal{F})$ $\omega_i \in \Omega$ $i \in \mathbb{N}$

$c_i \in \mathbb{R}^+$

$$\mu(A) \triangleq \sum_{i \geq 1} c_i \, \delta_{\omega_i}(A) \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

$$= \sum_{i:\, \omega_i \in A} c_i \text{ "=" misura di conteggio pesato}$$

<u>obs:</u> se $\sum_{i \geq 1} c_i = +\infty$ → misura non finita

se $\sum_{i \geq 1} c_i < +\infty$ → misura finita

se $\sum_{i \geq 1} c_i = 1$ → m. d. p.

Nota: σ-Algebre Generate

(dim esercizio) (1) $A \subseteq \Omega$ $\quad \sigma(A) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$

ex: $\Omega = \{1, 2, 3\}$ con $A = \{1, 2\}$

(2) $\{\mathcal{F}_s : s \in \mathbb{I}\}$ ⤳ è intersezione di più σ-ALG. è σ-ALG

$$\Rightarrow \mathcal{F} = \bigcap_{s \in \mathbb{I}} \mathcal{F}_s \text{ è una } \sigma\text{-ALG.}$$

(3) $\mathcal{E}$ famiglia di insiemi di Ω

$$\sigma(\mathcal{E}) \overset{\blacktriangledown}{=} \bigcap_{\substack{P:\, P\ \sigma\text{-ALG} \\ \text{t.c. } \mathcal{E} \subseteq P}} P$$

⤳ obs: esiste sempre!

(4) $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$ famiglie di eventi

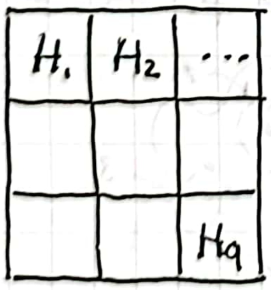
$\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2 \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2)$

// PAR 1

Probabilità su Spazi finiti o numerabili o σ-ALG Numerabilmente Generate

ex: $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ o $\Omega = \{\omega_1, \dots\}$

ex:



$[0,1] \times [0,1] =: \Omega$

obs: ↳ divisibili

$\omega_1 \quad \omega_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \omega_8 \quad \omega_9$

obs: non divisibili

Setting: $\{\mathbb{H}_i \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots\} =: \mathbb{H}$

partizione numerabile

(eventi a due a due disgiunti)

che coprono Ω

⇝ ha senso dunque considerare: $\mathcal{F} := \sigma(\mathbb{H})$

essa si chiama σ-ALG numerabilmente generata

$\boxed{\text{ex}}$: $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n, \dots\}$

e $\mathbb{H} := \{\mathbb{H}_i := \{\omega_i\}$ con $i = 1, 2, \dots\}$

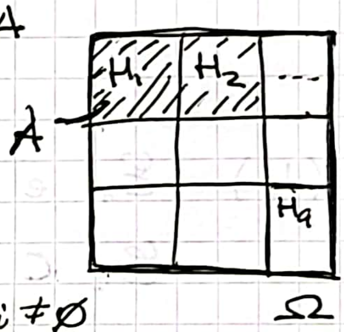
⇝ $\sigma(\mathbb{H}) \overset{!}{=} \mathcal{P}(\Omega)$ //

in generale: $A \in \sigma(\mathbb{H}) =: \mathcal{F}$

↳ $A = \bigcup_{i \in I(A)} \mathbb{H}_i$ (prova a dimostrarlo)

$i \in I(A)$ ⇝ indici che dipendono da A (*)

$\boxed{\text{prop}_2}$ (1) sia $\mathbb{P}$ mdp su $\mathcal{F} = \sigma(\mathbb{H})$



⇝ posto $p_i = \mathbb{P}(\mathbb{H}_i)$ $\forall i \geq 1$

allora: $\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I(A)} p_i = \sum_{i : A \cap H_i \neq \emptyset} p_i$

$\forall A \in \mathcal{F}$

(2) data una successione (di pesi) $p_i \geq 0$

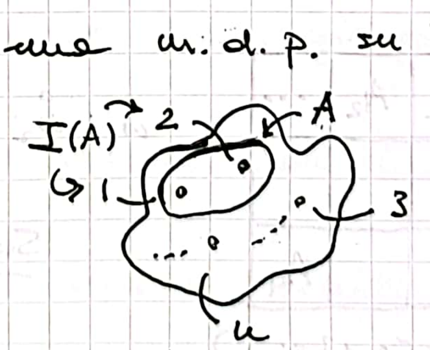
t.c. $\sum_{i \geq 1} p_i = 1$

⇝ $\mathbb{P}(A) := \sum_{i \in I(A)} p_i$ con $A \in \mathcal{F} = \sigma(\mathbb{H})$

è una m.d.p. su $\mathcal{F}$ //

(*)

ex: $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n, \dots\}$



$\mathcal{F} = \sigma(\Omega)$

$A \in \mathcal{F}$

↳ $I(A) = \{i : \omega_i \in A\}$

$\boxed{ex_1}$ $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_M\}$

$\mathcal{F} := \mathcal{P}(\Omega)$ $\quad \mathbb{H}_i := \{\omega_i\}$ $\quad p_i := \frac{1}{M} \geq 0$

$$\sum_{i=1}^{M} \frac{1}{M} = 1 \rightsquigarrow \mathbb{P}(A) = \sum_{i : \omega_i \in A} \frac{1}{M} \overset{\nabla}{=} \frac{\# A}{\# \Omega}$$

↳ probabilità uniforme

$\boxed{ex_2}$ $\Omega = \mathbb{N}$ $\quad \mathbb{H}_i = \{i\}$ $\quad i = 0, 1, 2, \dots$

$$\sigma(\mathbb{H}) = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightsquigarrow p_i = \theta^i (1-\theta) \quad i = 0, 1, \dots$$

$\boxed{\theta \in (0,1)}$

$\mathbb{P}(A) = \sum_{\substack{i : i \in A \\ i \geq 0}} p_i$ è una m.d.p.

↳ probabilità geometrica

$\boxed{Q}$ ok, ma se non siamo numerabili?

Estensione, Unicità

$\boxed{ex}$ (anticipazione di mis. di Lebesgue)

μ definita su $\mathcal{F}$ di insiemi $\mathbb{R}$

$\rightsquigarrow \mu\{(a,b)\} = b - a$

$\forall \ -\infty < a \leq b < +\infty$

↳ ok, ma come la definisco

$\boxed{Q}$ una σ-ALG su $\mathbb{R}$?

nota: no dimostrazioni in questa parte (vedasi Karr)

idea: costruisco un ibrido tra una misura su ALG fin. additiva e una σ-ALG

sia μ definibile su un' algebra $\mathcal{A}$ tale che:

(c) $\mu(\bigcup_{n \geq 1} A_n) = \sum_n \mu(A_n)$ $\forall A_1, A_2 \dots$ t.c. $A_i \in \mathcal{A}$ $\quad A_i \cap A_j = \emptyset$ $i \neq j$

e $\bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{A}$

Teorema 3 se μ soddisfa le ipotesi sopra def

$\Rightarrow \exists \mu^*$ misura (σ-ADDITIVA) definita

su $\sigma(\mathcal{A}) =: \mathcal{F}$ tale che $\mu^*(A) = \mu(A)$ $\forall A \in \mathcal{A}$

se μ^* è σ-FINITA

$\Rightarrow \mu^*$ è <u>unica</u>

carathéodory / [Teorema di Estensione]

Teorema 4 $\mathbb{P}$ è una mdp σ-ADDITIVA su $\mathcal{A}$ algebra

$\Rightarrow \exists! \, \mathbb{P}^*$ su $\sigma(\mathcal{A})$ con $\mathbb{P}^*(A) = \mathbb{P}(A)$ $\forall A \in \mathcal{A}$

def $\mathcal{C}$ classe di eventi è detta π-CLASSE (o π-system) se è stabile per intersezioni finite (*)

Teorema 5 [Unicità]

siano P e Q mdp su $\mathcal{F}$ tali che:

$P(A) = Q(A)$ $\forall A \in \mathcal{C}$ π-CLASSE

se: $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F} \Rightarrow P \equiv Q$

(*) cioè: se $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{C} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{C}$

$\Rightarrow$ (chiuso per intersezioni)

c.ex: $\mathcal{E} = \{\{1,2\},\{2,3\}\}$ non π-classe

poiché $\{2\} \notin \mathcal{E}$

ex: $\Omega = \mathbb{R}$

$\mathcal{E} = \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$ è una π-classe?

lez 3

prob

mer 19/02/2025

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ numerabile / finito (recap)

prop

⇒ 1) se $\mathbb{P}$ mdp su $\mathcal{F}$ e $p_i := \mathbb{P}(\{\omega_i\})$ $i = 1, 2, 3, \dots$

$$\mathbb{P}(\{A\}) = \sum_{i:\omega_i \in A} p_i$$

⇒ 2) se $(p_i)\big|_{i \geq 1}$ $p_i \geq 0$ e $\sum_{i \geq 1} p_i = 1$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\{A\}) := \sum_{i:\omega_i \in A} p_i \text{ è una mdp}$$

su $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

Teorema [Unicità per Misure]

$\mu_{1,2}$ misure σ-FINITA su $\mathcal{F}$; C π-classe t.c.

$\sigma(C) = \mathcal{F}$; $\exists\, E_i$ $i = 1, \dots,$ $E_i \in C$ t.c.

$\mu_i(E_i) < +\infty$ $i \geq 1$ $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$

↳ (equivalente a : $\mathcal{F} \supseteq C$) $\bigcup_i E_i = \Omega$;

$$\Rightarrow \boxed{\mu_1 = \mu_2}$$

ex₁: $\mathbb{R} =: \Omega$ ⇝ $C_2 := \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$

È UNA π-CLASSE

ex₂: $C_0 := \{(a, b) : -\infty < a \leq b < +\infty\}$

non È UNA π-CLASSE

e.ex

A_1 A_2

↳ $A_1 \cap A_2 = \emptyset \notin C_0$

ex₃: $C := \{C_0 \cup \{\emptyset\}\}$ è una π-CLASSE

Continuità della Probabilità

$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ mdp

def $\begin{cases} A_n \nearrow A & \text{se } A_n \subseteq A_{n+1} \quad A = \bigcup_{n\geq 1} A_n \\ B_n \searrow B & \text{se } B_n \supseteq B_{n+1} \quad B = \bigcap_{n \geq 1} B_n \end{cases}$

↳ monotonia crescente / decrescente

<u>nota</u>: d'ora in poi per $\subset$ si intende $\subseteq$ se non specificato

Teorema $\mathcal{F}$ σ-ALG. su Ω [Continuità di Probabilità]

1) se $\mathbb{P}$ è una m.d.p. su $\mathcal{F}$ allora:

$\mathbb{P}(A_n) \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{P}(A) \quad \forall A_n \nearrow A$

$\mathbb{P}(B_n) \xrightarrow{n\to+\infty} \mathbb{P}(B) \quad \forall B_n \searrow B$

2) $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ t.c. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

e $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$ se $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

⇝ mdp finitamente additiva su una σ-ALG.

allora:

vale $\overset{(\sigma\text{-additività})}{\underline{(b*)}} \iff \forall B_n \searrow \emptyset \quad (\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \underset{\mathbb{P}(\emptyset)}{0})$

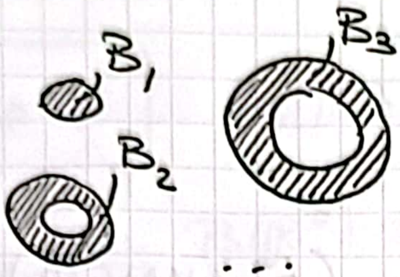
<u>obs</u>: ($\boxed{\Rightarrow}$ è ovvio per (1))

dim(1) [(2) sulle dispense / libro]

sia $A_n \nearrow A$. <u>Introduco $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$</u>: $B_1 := A_1$

(ciambelle) ← $\boxed{B_{i+1} := A_i \setminus A_{i-1}}$ $\forall i \in \mathbb{N}$ $\quad B_2 := A_2 \setminus A_1$

$B_3 := A_3 \setminus A_2$



obs: $B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

$$A_n \stackrel{!}{=} \bigcup_{i\geq 1} B_i$$

$$\Rightarrow P(A_n) = P\Big(\bigcup_{i\geq 1} B_i\Big) = \sum_{i\geq 1} P(B_i)$$

d'altro canto: $\bigcup_{i\geq 1} A_i = \bigcup_{k\geq 1} B_k$

$$\Rightarrow P\Big(\bigcup_{i\geq 1} A_i\Big) = P\Big(\bigcup_{k\geq 1} B_k\Big) = \sum_{k\geq 1} P(B_k)$$

$$\hookrightarrow P(A_n) = P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \xrightarrow{n\to+\infty} \sum_{k\geq 1} P(B_k) = P(A)$$

■ (1)

Sub additività

$\boxed{\text{Teorema}}$ P mdp su $\mathcal{F}$, $A_n \in \mathcal{F} \ \forall n$

(1) $P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$ sub. [FINITA]

(2) $P\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) \leq \sum_{n\geq 1} P(A_n)$ sub. [COMPLETA]

obs: vale (=) sse sono disgiunti a 2 a 2

poiché $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$ $(\circlearrowright)$

obs: $\sum_{n\geq 1} P(A_n) \in [0, +\infty]$

$\boxed{\text{dim}}$ $P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$ da $(\circlearrowright)$

$$\Rightarrow P(A_1\cup A_2 \cup A_3) \leq P(A_1 \cup A_2) + P(A_3)$$
$$\leq P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

e reitero per il caso generale.

$$\underbrace{P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big)}_{\doteq \tilde{A}_n \nearrow A = \bigcup_{n\geq 1} A_n} \leq \sum_k P(A_k) \xrightarrow[\text{al lim}]{\text{passo}} P\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big)$$

$$\leq \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \sum_{n\geq 1} P(A_n)$$ ■

Boreliani su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{R}^D$

obs: $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mathcal{P}(\mathbb{R}^D)$ sono Brutte (σ-SHAMING)

$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ↳ poco rilevanti a livello concreto e ingegneristico

ricordo:
$A \subseteq \mathbb{R}^D$ dicesi aperto se $\forall x \in A \; \exists B(x,r) \subseteq A$

(su $\mathbb{R}$: $[1,2]$ non è aperto)
$(1,2)$ sì

⇝ (vedesi corso di Analisi II)

sia: $\mathcal{U} = \{A \in \mathbb{R}^D \mid A \text{ aperto}\}$ $\boxed{\text{def}}$

e lavorerò su: $\sigma(\mathcal{U}) =: \mathcal{B}(\mathbb{R}^D)$
"=" σ-ALGEBRA dei BORELLIANI

$\boxed{\text{N.B.}}$ dentro ci saranno:
- ◦) aperti
- ... altro

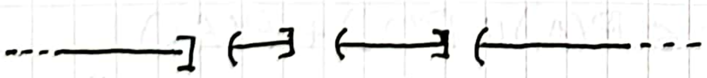
fissiamo $d = 1 \Rightarrow \mathbb{R}$ (di default si tratterà questo caso)

$\mathcal{C}_0 \triangleq \{(a,b) : a<b\}$
$\mathcal{C}_1 \triangleq \{(a,b] : a<b\}$
$\mathcal{C}_2 \triangleq \{(-\infty,a] : a\in\mathbb{R}\}$
$\mathcal{C}_3 \triangleq \{(a,+\infty) : a\in\mathbb{R}\}$

$\boxed{Q}$ ok, ma come costruisco un'algebra da essi?

$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{m=1}^{M} B_i : B_i \in C_1, C_2, C_3 \right\}$ $\exists M$

è un'algebra (verifica)



$A \in \mathcal{A} \rightsquigarrow A = \bigcup_{i=1}^{m} (a_i, b_i]$

↳ forma di A

$-\infty \leq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 \dots < b_m \leq +\infty$

prop $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{C}_0) = \sigma(\mathcal{C}_2)$

obs: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^D) \ni A$ aperto $\Rightarrow A^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

↳ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^D)$ contiene anche tutti i chiusi!

⇝ tra cui anche i punti.

obs: $(-\infty, x) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $x \in \mathbb{R}$ poiché:

$$\bigcup_{n \geq 1} \left(-\infty, x - \frac{1}{n}\right) = (-\infty, x)$$

dim $[\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{C}_0)]$ (caso 1)

$\forall A \in \mathcal{U} \rightsquigarrow A = \bigcup_{n \geq 1} (a_n, b_n)$ e $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{C}_0$

$$\Rightarrow \sigma(\mathcal{U}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \supset \sigma(\mathcal{C}_0)$$

ma $\sigma(\mathcal{C}_0) \supset \underbrace{\{A = \bigcup_{n \geq 1} (a_n, b_n)\}}_{= \mathcal{U}}$ (poiché σ-ALG)

$$\Rightarrow \sigma(\mathcal{C}_0) \supset \sigma(\mathcal{U}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightsquigarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{C}_0)$$

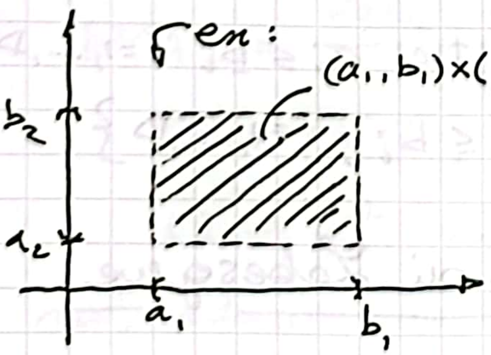
■ (caso 1)

se $D > 1$, $\mathbb{R}^D$

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^D) = \sigma(\overbrace{\mathcal{U}_D}^{\text{aperti in } \mathbb{R}^D})$$

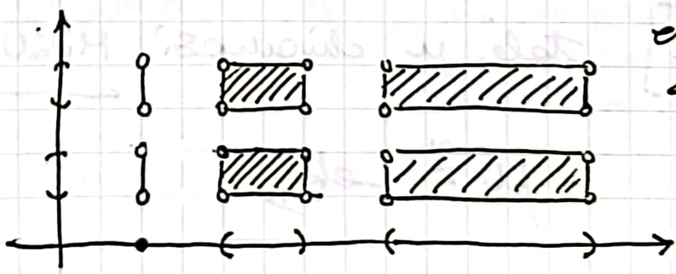
$\rightsquigarrow \mathcal{C}_0^{[D]} := \{(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_D, b_D) : a_i, b_i \in \mathbb{R},\ a_i < b_i\}$

ex:



$\mathcal{D}_0 := \{A_1 \times \dots \times A_D : A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$

ex:

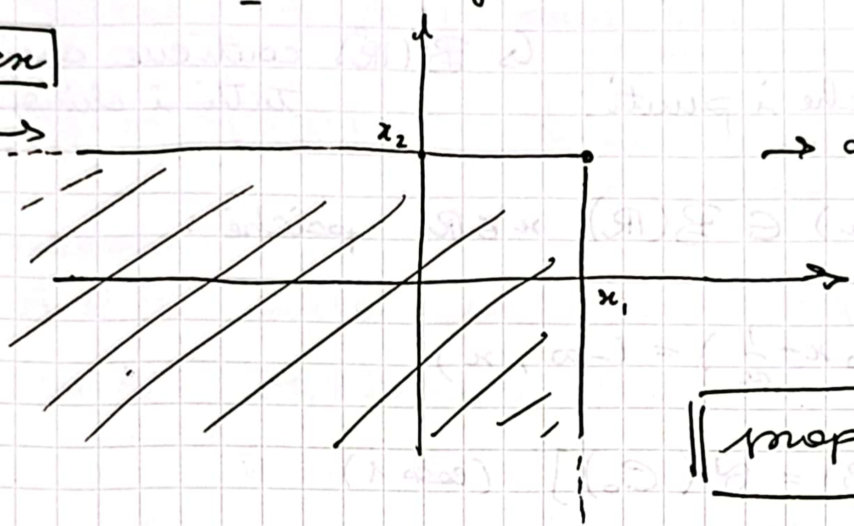


$$C_3^{[D]} = \{(-\infty, \underline{x}] : \underline{x} \in \mathbb{R}^D\} \rightsquigarrow \text{è } \pi\text{-CLASSE!}$$

$\Vert$D

$$\{\underline{y} \in \mathbb{R}^D : y_i \le x_i \ \forall i \in \{1, \dots, D\}\}$$

ex



obs: → chiuso su intersezioni

prop [equivalenze di Boelliani in $\mathbb{R}^D$]

prop

$$\sigma(D_0) = \sigma(C_0^{[D]}) = \sigma(\mathcal{C}_2^{[D]}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^D)$$

se P, Q sono mdp su $\mathcal{B}(\mathbb{R}^D)$ tali che:

$$P(\{(-\infty, \underline{x}]\}) = Q(\{(-\infty, \underline{x}]\}) \ \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^D$$

$$\Rightarrow \boxed{P \equiv Q}$$

dim sono mdp su una π-CLASSE.

⇒ applico la proposizione a fine di (lez 2) ∎

Teorema

$\exists$ una misura μ σ-FINITA su $\mathcal{B}(\mathbb{R}^D)$ t.c.

$$\mu\{(a, b)\} = \prod_{i=1}^{D} (b_i - a_i) \quad \forall \underline{a} \in \mathbb{R}^D, \underline{b} \in \mathbb{R}^D$$

t.c. $\underline{a}_i \le \underline{b}_i$ $i = 1, \dots, D$

DOVE: $(a, b) = \{\underline{x} : a_i \le x_i \le b_i ; i = 1, \dots, D\}$

def tale μ chiamasi <u>MISURA di Lebesgue</u>

$$\mu \overset{N}{=} \text{Leb}_D$$

"↷ $A \in \mathcal{A}$

obs: $(D=1)$ $\quad \mu(A) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{m}(a_i, b_i)\right) = \sum_{i=1}^{m}(b_i - a_i)$

$-\infty \le a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots$

$\boxed{\text{Lez 4}}$ prob

gio 20/02/2025 $\quad$ ⇝ (recap): misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^D$

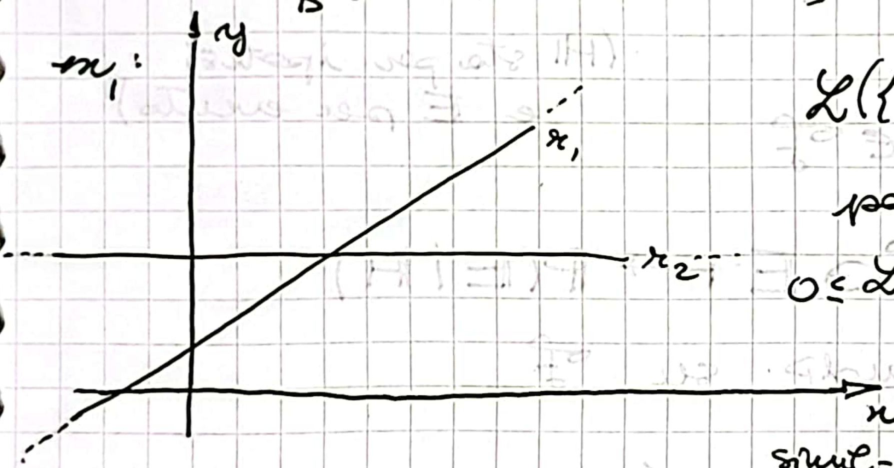
$\boxed{\text{N.B.}}$ $\quad (D=1) \rightsquigarrow \text{Leb}(\{(a,b)\}) = b-a \quad (b>a)$

(p1) vale $\forall D$ $\quad \text{Leb}(\{\mathbb{R}\}) = +\infty$

(p1) $\text{Leb}(\{x\}) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(p2) $\text{Leb}_2\{\text{retta}\} = 0$

$\text{Leb}_D\{\text{iperpiano dim} < D\} = 0$



$\mathcal{L}(\{r_1 \cup r_2\}) = 0$

poiché sub-additiva:

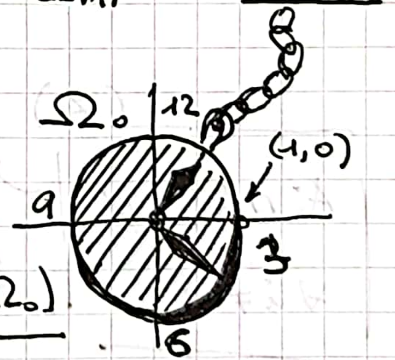
$0 \le \mathcal{L}(\{r_1 \cup r_2\}) \le \mathcal{L}(r_1) + \mathcal{L}(r_2) \overset{!}{=} 0 + 0 = 0$

⇝ simmetrico dado

ex_2: $\quad \Omega = \{1, 2, 3, \dots, 6\} \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I(A)} p_i \quad \boxed{p_i = \frac{1}{6}}$

$A \in \mathcal{P}(\Omega) =: \mathcal{F}$

ex_3: $\quad \Omega_0 = \{\omega = (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$



$$\mathbb{P}(A) := \frac{\text{Leb}_2(A \cap \Omega_0)}{\text{Leb}_2(\Omega_0) = \pi \cdot 1^2} = \frac{\text{Leb}(A \cap \Omega_0)}{\pi}$$

$\mathcal{F} := \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$

$\Omega := \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow \Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^2$

$A = $ "{ il diametro di Ω_0 che passa per un punto di Ω_0 passa per il settore $\overset{12}{◰}_3$ }"

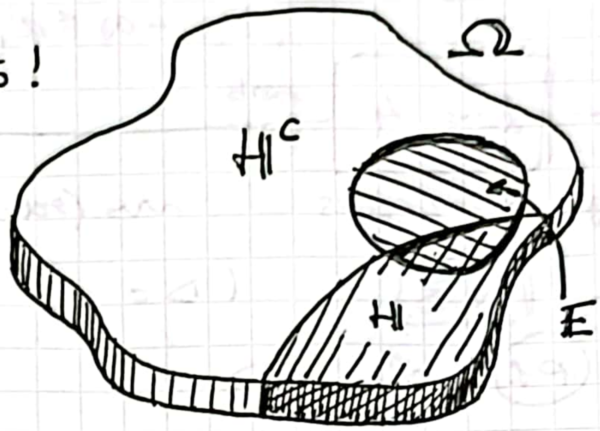
⇝ traduco:

$A = \{\omega \in \Omega_0 : x_1 x_2 \ge 0\}$

Eventi Indipendenti e Condizionamento

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ N.B. non è un evento!

$$\mathbb{P}(E \cap H) = \mathbb{P}(E|H)\mathbb{P}(H)$$



probabilità condizionale — def

" A_1 dato A_2 "

$$\mathbb{P}(A_1 | A_2) \triangleq \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_2)}$$

evento — ipotesi

con $H, E \in \mathcal{F}$

$\Omega = H \cup H^c$

(H sta per ipotesi e E per evento)

proprietà $H \in \mathcal{F}$

$\mathbb{P}(H) > 0 \qquad \mathcal{F} \ni E \longmapsto \mathbb{P}(E|H)$

è una m.d.p. su $\mathcal{F}$

dim

(1) $\mathbb{P}(E|H) \geq 0$ ✓

(2) $\mathbb{P}(\Omega|H) \triangleq \dfrac{\mathbb{P}(\Omega \cap H)}{\mathbb{P}(H)} = \mathbb{P}(H) \cdot \dfrac{1}{\mathbb{P}(H)} = 1$ ✓

(3) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n \,\middle|\, H\right) = \dfrac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{n\geq1} A_n\right) \cap H\right)}{\mathbb{P}(H)}$

$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

$$= \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq1}(A_n \cap H)\right)}{\mathbb{P}(H)} = \frac{\sum_{n\geq1} \mathbb{P}(A_n \cap H)}{\mathbb{P}(H)}$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq1} A_n \,\middle|\, H\right) = \sum_{n\geq1} \mathbb{P}(A_n | H) \quad ✓$$

nota:

è funzione di E,

non di H, H è fissato a priori

obs: ne segue che •) $P(E^c|H) = 1 - P(E|H)$

$E \subseteq F \rightsquigarrow$ •) $P(E|H) \le P(F|H)$

ma •) $P(E|H^c) \overset{NO}{\neq} 1 - P(E|H)$

Nota: spesso: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ abbiamo: $\left.\begin{array}{l} P(E|H) \\ P(E|H^c) \\ P(H) \end{array}\right]$ note

vogliamo: $P(E) = ?$

Formula di Probabilità totale

$$P(E) \underset{\text{additività}}{=} P(E\cap H) + P(E\cap H^c) \overset{\nabla}{=} P(E|H)\cdot P(H) + P(E|H^c)\cdot\overbrace{(1-P(H))}^{P(H^c)}$$

↳ generalizzo

Proposizione $(H_i)_{i\ge1}$ partizione numerabile di Ω

ossia: $\bigcup_{i\ge1} H_i = \Omega$ e $H_i \cap H_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$

t.c. $P(H_i) > 0$ $\forall i$

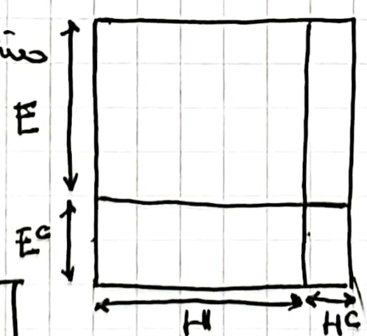
$$\boxed{P(E) = \sum_{i\ge1} P(E|H_i)\,P(H_i)}$$

dim $E \overset{\nabla}{=} \bigcup_{i\ge1}(E\cap H_i) \rightsquigarrow P(E) = \sum_{i\ge1} P(E\cap H_i) \overset{\nabla}{=} \sum_{i\ge1} P(E|H_i)\,P(H_i)$ ■

es: E = test positivo

H = sano

H^c = malato



Conosco: $\left.\begin{array}{l} P(E|H) \\ P(E|H^c) \\ P(H) \end{array}\right] \rightsquigarrow P(H|E) = ?$

Quant'è probabile che sia malato se il test è positivo??

22.

Teorema [Teorema di Bayes]

$(H_i)_{i\geq 1}$ partizione di Ω $\mathbb{P}(H_i) > 0$ allora:

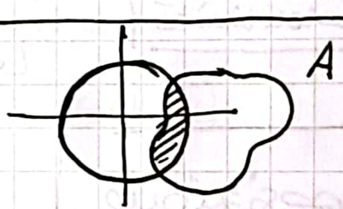
$$\mathbb{P}(H_i \mid E) = \frac{\mathbb{P}(E \mid H_i)\,\mathbb{P}(H_i)}{\sum_{j\geq 1} \mathbb{P}(E \mid H_j)\,\mathbb{P}(H_j)} = \frac{\mathbb{P}(E \mid H_i)\,\mathbb{P}(H_i)}{\mathbb{P}(E)}$$

obs:

modello di apprendim.
$$\begin{cases} i \longmapsto \mathbb{P}(E \mid H_i) & \text{"verosimiglianza"} \\ i \longmapsto \mathbb{P}(H_i) & \text{"distribuzione iniziale" (PRIOR)} \\ i \longmapsto \mathbb{P}(H_i \mid E) & \text{"distribuzione finale" (POSTERIOR)} \end{cases}$$

Lez 5 prob

lun 24/02/2025 complementi



(−) $(\Omega, \mathcal{F})$ con $\Delta \in \mathcal{F}$ es: $\Omega = \mathbb{R}^2$

$\Delta = \{\underline{x} \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

def $\mathcal{F}_\Delta \overset{\Delta}{=} \{A \in \mathcal{F};\ A \cap \Delta\}$

"=" traccia di Δ sulla σ-ALG $\mathcal{F}$

prop $\Rightarrow$ $\mathcal{F}_\Delta$ è una σ-ALG (dim esercizio)

es$_2$: $[0,1] =: \Delta$ $\mathbb{R}^2 =: \Omega$ $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

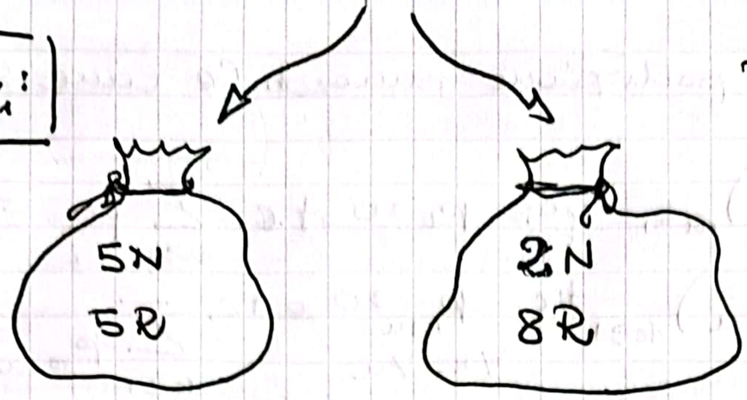
$\rightsquigarrow$ $\mathcal{F}_\Delta$ è una σ-ALG $\rightsquigarrow$ def $\mathcal{B}([0,1])$

Probabilità Condizionali di Eventi

recap: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $H \in \mathcal{F}$: $\mathbb{P}(H) > 0$

$$\rightsquigarrow \mathbb{P}(A \mid H) := \frac{\mathbb{P}(A \cap H)}{\mathbb{P}(H)}$$

$\boxed{ex_1:}$



$R :=$ "estraggo pallina rossa"

$T :=$ "scelgo la prima urna (TESTA)"

↳ $C := T^c$

$$\mathbb{P}(T) := \frac{1}{2} \rightsquigarrow \mathbb{P}(R \mid T) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(C) \overset{\nabla}{=} 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \rightsquigarrow \mathbb{P}(R \mid C) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(T \mid R) \underset{\boxed{\text{Th. di Bayes}}}{=} \frac{\mathbb{P}(R \mid T)\cdot}{\mathbb{P}(R \mid T)\,\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(R \mid C)\,\mathbb{P}(C)}$$

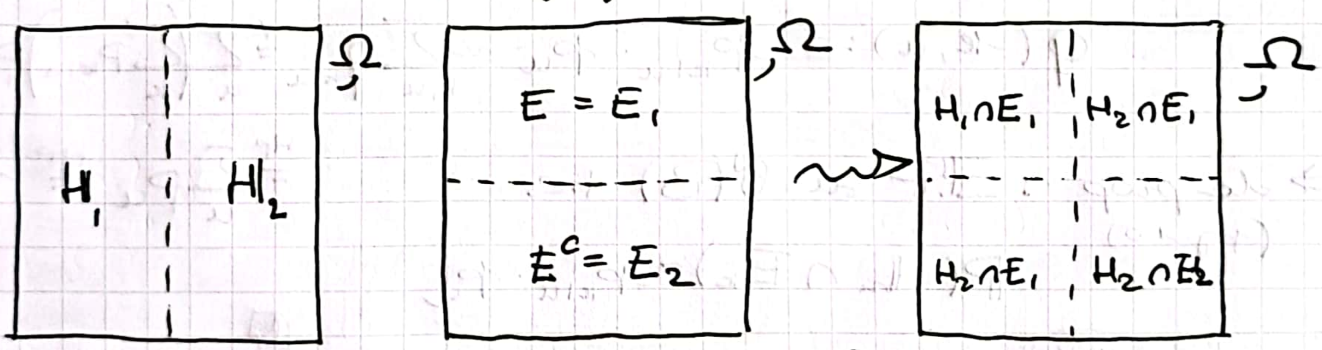
obs: $H_1 = T \quad H_2 = C \quad E = R$

↳ ho utilizzato teoremi senza stare tranquillo di essere in un ambiente idoneo!

$\boxed{\text{Nota}}$ non abbiamo definito per niente né tantomeno Ω, né $\mathcal{F}$, né $\mathbb{P}$!!

obs:

⇝ non sarà quasi mai un problema, ingegneristicamente... poiché:



↳ ho partizionato!

⇝ in generale considero:

$\boxed{\text{prop}}$

$(H_n)_{n \geq 1}$ Partizione e $(E_k)_{k \geq 1}$

↳ $\mathcal{B} := \{(H_n \cap E_k),\ n \geq 1,\ k \geq 1\}$ è una Partizione //

⇒ **idea:** DEFINISCO automaticamente:

$$\mathcal{F} := \mathcal{F}(\mathcal{B}) := \sigma(\mathcal{B})$$

e sarò sempre in uno spazio misurabile.

$\boxed{\text{prop}}$ sia $\mathcal{B}$ partizione numerabile come sopra.

-) sia $(p_n)_{n\geq 1}$ t.c. $p_n \geq 0$ e t.c. $\sum_{n\geq 1} p_n = 1$
-) siano $(p_{k|n})_{k\geq 1}$ t.c. $p_{k|n} \geq 0$ $\forall k, \forall n$ e t.c. $\sum_{k\geq 1} p_{k|n} = 1$ $\forall n$

$\Rightarrow \exists \mathbb{P}$ mdp definita su $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{B})$

t.c. $\mathbb{P}(H_n \cap E_k) = p_{k|n} p_n \; \forall k, \forall n$

$\boxed{\text{N.B.}}$ ne segue che: $\mathbb{P}(H_n) = p_n$ e $\mathbb{P}(E_k | H_n) = p_{k|n}$

(obs: nell' (ex$_1$) $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$, $p_{1|1} = \frac{1}{2}$, $p_{1|2} = 4/5$

⇝ le righe sommano a 1 ✓ $p_{2|1} = \frac{1}{2}$, $p_{2|2} = 1/5$ ✓

↳ c'è una mdp ben definita per prop. //)

$\boxed{\text{dim}}$ $\mathcal{B}$ è numerabile e parametrizzata (k, n)

$q(k,n) := p_{k|n} \cdot p_n \rightsquigarrow \sum_{k,n} q_{k,n} \overset{*}{=} \sum_n \left(\sum_k p_{k|n}\right) p_n \overset{Hp}{=} \sum_n p_n \overset{HP}{=} 1$

$\Rightarrow$ da prop (pg 10): $\exists! \mathbb{P}$ su $\sigma(\mathcal{B})$ t.c.

$\mathbb{P}(H_n \cap E_k) = p_{k|n} \cdot p_n$ ∎

$\boxed{\text{N.B.}}$

↳ (unica a meno di Ω scelto)

[Regola a Catene]

$\boxed{\text{prop}}$ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{F}$ t.c.

$\mathbb{P}(\underbrace{E_1 \cap \dots \cap E_n}_{\bigcap_{i=1}^n E_i}) > 0$

$\Rightarrow \mathbb{P}(E_1 \cap \dots \cap E_n) = \mathbb{P}(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_2 | E_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(E_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} E_i)$

$\boxed{\text{dim}}$ per $n = 2$: $\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) \overset{\boxed{\text{Th. di Bayes}}}{=} \mathbb{P}(E_1) \cdot \frac{\mathbb{P}(E_1 \cap E_2)}{\mathbb{P}(E_1)} = \mathbb{P}(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_2 | E_1)$ //

$n=3$: $\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \mathbb{P}(E_1) \cdot \dfrac{\mathbb{P}(E_2 \cap E_1)}{\mathbb{P}(E_1)} \cdot \dfrac{\mathbb{P}(E_3 \cap (E_1 \cap E_2))}{\mathbb{P}(E_1 \cap E_2)}$

$\rightsquigarrow$ **ESERCIZIO**: completa per induzione ■

Indipendenza di Eventi

ricordo: $\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) \overset{\triangledown}{=} \mathbb{P}(A \cap B)$ $\rightsquigarrow \boxed{A \perp\!\!\!\perp B}$

def $A, B \in \mathcal{F}$ in $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

si dicono STOCASTICAMENTE INDIPENDENTI se

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

obs: l'indipendenza è una proprietà della probabilità! non universale.

prop (A, B) indipendenti

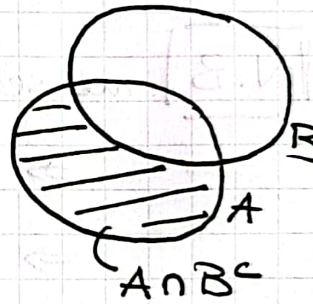
$\Rightarrow (A, B^c)$ indipendenti [indipendenza dei complementari]

dim $\mathbb{P}(A \cap B^c) \overset{\triangledown}{=} \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$

$\overset{Hp}{=} \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

$= \mathbb{P}(A) \cdot (1 - \mathbb{P}(B))$

$\mathbb{P}(A \cap B^c) \overset{\triangledown}{=} \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B^c)$



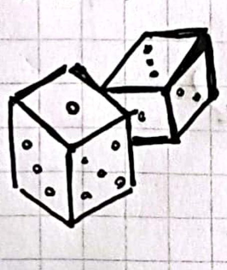
obs: $(A, B \text{ indip.}) \neq (A \cap B = \emptyset)$

es$_2$: $\Omega := \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \in \{1, \dots, 6\}, \omega_2 \in \{1, \dots, 6\}\}$

$\#(\Omega) \overset{\triangledown}{=} 36 \rightsquigarrow \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$; $\mathbb{P}(A) := \dfrac{\#(A)}{\#(\Omega)}$

obs: sto modellizzando il lancio di due dadi a 6 facce $\hookrightarrow \mathbb{P}(\{\omega\}) := \dfrac{1}{36}$

$\rightsquigarrow A := \{\omega \in \Omega : \omega_1 = 1\}$, $B := \{\omega \in \Omega : \omega_2 = 3\}$



$\mathbb{P}(A) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$ $\quad \mathbb{P}(B) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$ $\quad \boxed{A \perp\!\!\!\perp B}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{36} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

def $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ si dicono INDIPENDENTI se:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} \mathbb{P}(A_{i_j}) \quad \forall\, 2 \le k \le n$$
$$\forall \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$$

↳ deve valere $A_i \perp\!\!\!\perp A_j$ idea

ma non solo:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3)$$

etc... per ogni numero di intersezioni di insiemi A_i

prop Se $A_1, \dots, A_n$ sono indipendenti

$\Rightarrow A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}^c, \dots, A_n^c$ sono indip. $\forall k$

N.B ne segue che: A_1, A_2, A_3 indipendenti

$\Rightarrow A_1, A_2$ sono indipendenti

$\Rightarrow A_1, A_2^c, A_3$

e se A_1^c, A_2, A_3 indipendenti

$\Rightarrow A_1, A_2, A_3$ sono indipendenti

notazione $A_1, \dots, A_n$ indip. $\Leftrightarrow \coprod_{i=1}^{n} A_i$

esercizio A, B sono indip. $\quad \mathcal{F}_1 = \sigma(A)$

$\mathcal{F}_2 = \sigma(B)$

$\rightsquigarrow \mathbb{P}(E \cap F) \overset{?}{=} \mathbb{P}(E) \cdot \mathbb{P}(F)$

con $E \in \mathcal{F}_1$; $F \in \mathcal{F}_2$

idea: ogni catena troncata è indipendente.

def $(A_n)_{n \ge 1}$, $A_i \in \mathcal{F}\ \forall i \ge 1$ se $\forall m \ge 2$ $\coprod_{i=1}^{m} A_i$

successione di eventi

dicesi indipendenti

Es 1 | Prob

mer 25/02/2025 → Testi degli esercizi online

$\boxed{Q}$ → Appendici, esercizi anche più complicati

cos'è la probabilità? ⇝ dibattito acceso

(oltre la definizione assiomatica) ↳ non c'è una risposta precisa

↳ di Kolmogorov, 1933

⇒ Spazio di Probabilità $(\Omega, \sigma\mathcal{A}, \mathbb{P})$

spazio campionario — insieme qualsiasi

sigma algebra ↳ per noi: $\mathcal{F}$

ricordo:

$\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0,1]$

$\mathbb{P}(\Omega) = 1$ e $\mathbb{P}$ σ-additiva

① si chiede Ω minimale per descrivere i seguenti:

1.1) $n \in \mathbb{N}$. Lancio di monete n volte

L'esito di un lancio è un elemento di

$\{T, C\}$ ⇝ se lo lancio n volte avrò un vettore

ex: $\underbrace{(T, C, C, \dots, T)}_{n}$

$$\Omega := \underbrace{\{T,C\} \times \{T,C\} \times \dots \times \{T,C\}}_{n}$$

$$\Omega =: \{T,C\}^n$$

<u>obs</u>: si poteva scegliere qualsiasi insieme con 2 elementi!

1.2) $n \in \mathbb{N}$. Lancio n monete 1 volta

⇝ tecnicamente diversi, ma modellizzati <u>identicamente</u> ⇝ $\Omega := \{T, C\}^n$

1.3) lancio una moneta ogni minuto per sempre

$$\Omega := \{T, C\}^{\mathbb{N}} := \lim_{n \to +\infty} \{T, C\}^n$$

1.4) se $\mathcal{C} := \{1, \dots, 10\} =: [10]$

L'esito di una carta da un mazzo da 10 e lancio simultaneo di una moneta:

$\Omega = \mathcal{C} \times \{T, C\}$

1.5) Estrazione dei 5 numeri vincenti

$\mathcal{N} := \{1, \dots, 90\} \Rightarrow \Omega = \mathcal{N}^5$ (con reimmissione)

1.6) Estrazione delle prime 20 carte da 40:

$\mathcal{N} := \{1, \dots, 40\} \Rightarrow \mathcal{N}^{20}$ (con reimmissione)

senza reimmissione: $\Omega := \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathcal{N}^5\}$ t.c. distinti

1.7) Misurazione della frazione di tempo impiegata a risolvere il cubo di Rubik, dato un tempo massimo $T>0$ assegnato

$\Omega := [0, T]$

2) $(\Omega, \mathcal{F})$ spazio "probabilizzabile"

2.1) con $A, B, C \in \mathcal{F}$. Esprimere insiemisticamente:

2.1) a) $A \cup B \cup C =: E_a \leftarrow$ unione "almeno uno si verifica"

2.) b) "al più un evento si verifica" $\rightarrow$ 0 o eventi / $\rightarrow$ o 1 evento

$\rightsquigarrow E_b := \underbrace{(A^c \cap B^c \cap C^c)} \cup (A \cap B^c \cap C^c)$

$\cup (A^c \cap B \cap C^c)$

$\cup (A^c \cap B^c \cap C)$

obs: $E_c = (A \cup B \cup C)^c$

2.) c) "nessun evento"

2.) d) "tutti e 3" $\rightsquigarrow E_d = A \cap B \cap C$

2.) e) "esattamente un evento" obs: $E_e = E_b \setminus E_c$

2.) f) "esattamente due eventi" $\rightarrow$ analogo a 2.2 ...

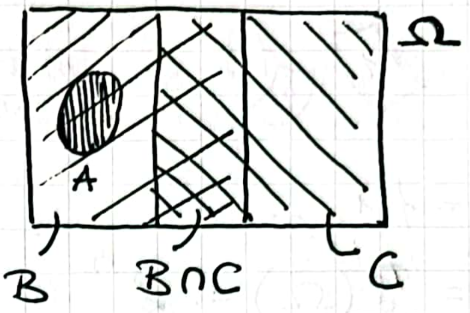
(2.2

2.2)[a] tradurre: $A \to B \rightsquigarrow A \subseteq B$

2.2)[b] A e C mutuamente esclusivi $\rightsquigarrow A \cap B = \emptyset$

2.2)[c] almeno un evento di B e C si verifica

$\rightsquigarrow A \cup B = \Omega$



(3) sia $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

↳ infinite prove di Bernoulli

$E_k :=$ "successo (1) alla prova k"

3.1)[a] $\sigma(E_1) = \{\emptyset, \Omega, E_1, E_1^c\}$.

3.1)[b] $\sigma(E_1, E_2) = \{\emptyset, \Omega, E_1, E_2, E_1^c, E_2^c, E_1 \cup E_2,$

$E_1^c \cup E_2^c, E_1^c \cup E_2, E_2^c \cup E_1, \}$

3.2) $\mathcal{A} := \sigma(\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}})$

a) nessun successo: $E_a = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k^c$

b) $E_b = E_3 \cap \bigcap_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \neq 3}} E_k^c$

c) $E_c = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_{2k}$

d) solo successi definitivamente:

→ "solo successi dal k-esimo tentativo"

$\rightsquigarrow \bigcap_{k \geq n} E_k$

→ unisco variando il k:

$E_d = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} E_k$

e) "infiniti successi"

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ si verifica E_k con $k \geq n$

→ "Fissato n si verifica almeno" un E_k con $k \geq n$

$\rightsquigarrow \bigcup_{k \geq n} E_k$

→ deve valere $\forall n \in \mathbb{N}$

$E_e = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} E_k$

f) "numero finito di successi"

$E_f \overset{\nabla}{=} E_e^c$ $\boxed{\text{de Morgan}}$

$E_f = \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} E_k\right)^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{k \geq n} E_k\right)^c$

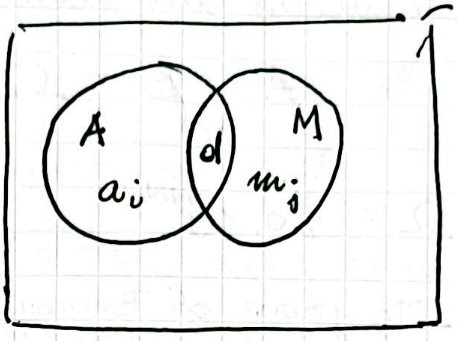
$\boxed{\text{de Morgan}}$ $= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} E_k^c$

g) "solo un successo"

$$E_g = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[E_n \cap \bigcap_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ k\neq n}} E_k^c \right]$$

insieme dei premi

Ω



(4) 1, 2 ... 50

$\Omega = \{1, \dots, 50\}$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) =: 2^{\Omega}$

$\boxed{\text{N.B.}}$ La probabilità sugli insiemi finiti è caratterizzata dalla probabilità dei singoli eventi elementari.

$\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0,1]$ ⇝ probabilità uniforme!

$$\mathbb{P}(A) \triangleq \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} = \frac{\#A}{50} \iff \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{50}$$

"premio giace solo ad Anna" $A = \{a_1, a_2, \dots, a_6\}$

" " ——— " Marco" $M = \{m_1, \dots, m_5\}$

" " ——— " entrambi" $A \cap M = \{d\}$

" " ——— " almeno uno dei due" $A \cup M$

" " ——— " solo ad Anna o solo a Marco"

$(A \cup M) \setminus (A \cap M)$

⇝ per calcolare la probabilità applico la formula

$$\mathbb{P}(A) = \frac{6}{50} \qquad \mathbb{P}(B) = \frac{5}{50} \quad \dots \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \frac{13}{50}.$$

(completa)

(5) next time

⑥ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. $A, B \in \mathcal{F}$ t.c. $\mathbb{P}(A) = 0.4$

si classifichino le seguenti $\qquad \mathbb{P}(B) = 0.7$

in sempre vere (V) sempre, false (F) o indecidibili (I

a) $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.4$ (F) poiché ci deve essere un' intersezione!

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

p.a.

se vere $\rightarrow$ $\mathbb{P}(A \cap B) = 1.1 - 0.4 = 0.7 > 0.4 = \mathbb{P}(A)$ $\ast$

b) $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.7$ (I) vero se $A \subseteq B$

c) $\mathbb{P}(A \cup B) \geq 0.7$ (V) per monotonia di $\mathbb{P}$

d) $\mathbb{P}(A \cup B) = 1.1$ (F) (ovviamente)

e) $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.28$ (I) ESERCIZIO: mostra che può essere vero

$\mathbb{P}(B \cap A^c) \geq 0.3$ (V)

f) $\underbrace{\mathbb{P}(B \cap A^c)}_{= B \setminus A} \overset{?}{=} \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \geq 0.3$;

$0.7 - \mathbb{P}(A \cap B) \geq 0.3$

$\mathbb{P}(A \cap B) \leq 0.4$ ✓

g) $\underbrace{\mathbb{P}(A \cap B^c)}_{A - B} \leq 0.3$ (V)

$\rightarrow$ $\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) \leq 0.3$;

poiché:

$0.4 - \mathbb{P}(A \cap B) \leq 0.3$

$\mathbb{P}(A \cup B) = 1.1 - \mathbb{P}(A \cap B) \leq 1$ $\qquad$ $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 0.1$ ✓

$\rightarrow$ $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 1.1 - 1 = 0.1$

Lez. 6 prob

$\rightarrow$ seguita a distanza

mer 26/02/2025

<u>Eventi Bernoulliani</u> $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $E_i \in \mathcal{F}$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

1) $(E_1, \dots, E_n)$ sono indipendenti

2) $\mathbb{P}(E_i) =: p_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

notazione

$$\mapsto \quad E_i^{e_i} := \begin{cases} E_i & \text{se } e_i = 1 \\ E_i^c & \text{se } e_i = 0 \end{cases} \quad \text{con } \{0,1\} \ni e_i$$

$\hookrightarrow E^0 = E^c$ e $E^1 = E$

$p_i := \mathbb{P}(E_i)$
$1-p_i \overset{\vee}{=} \mathbb{P}(E_i^c)$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n E_i^{e_i}\right) \overset{Hp}{=} \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(E_i^{e_i}) = \prod_{i=1}^n p_i^{e_i}(1-p_i)^{1-e_i}$$

con $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n) \in \{0,1\}^n$

(e.g.) $n=3$

$e_1 = 0,\ e_2 = 1,\ e_3 = 1$

$\bigcap_{i=1}^3 E_i^{e_i} = E_1^c \cap E_2 \cap E_3$

$\rightsquigarrow$ introduco:

$$A_k := \bigcup_{\substack{\underline{e} \in \{0,1\}^n \\ \sum_{i=1}^n e_i = k}} \underbrace{\bigcap_{i=1}^n E_i^{e_i}}_{B_{\underline{e}}}$$

con $k \in \{0, 1, \dots, n\}$

idea: unisco tutte le possibili intersezioni tra eventi ed eventi complementari

$\rightsquigarrow$ tutte le possibili combinazioni di eventi elementari.

$A_0 = \bigcap_{i=1}^n E_i^{e_i}$ con $\underline{e} = (0,0,\dots,0)$

$A_1 = \bigcup_{\underline{e}} \bigcap_{i=1}^n E_i^{e_i}$ con $\underline{e} = (1,0,\dots,0); (0,1,0,\dots,0); \dots ; (0,\dots,0,1)$

$A_2 = \bigcup_{\underline{e}} \bigcap_{i=1}^n E_i^{e_i}$ con $\underline{e} = (1,1,0,\dots,0); (1,0,1,\dots,0); \dots ; (1,0,\dots,0,1);$
$(0,1,1,\dots,0); (0,1,0,1,\dots,0); \dots ; (0,1,0,\dots,1);$
$\vdots$
$(0,0,\dots,0,1,1)$

$\vdots$

$A_n = \bigcup_{\underline{e}} \bigcap_{i=1}^n E_i^{e_i}$ con $\underline{e} = (1,1,\dots,1)$

obs: tra una n-upla e un altra cambia sempre almeno una cifra.

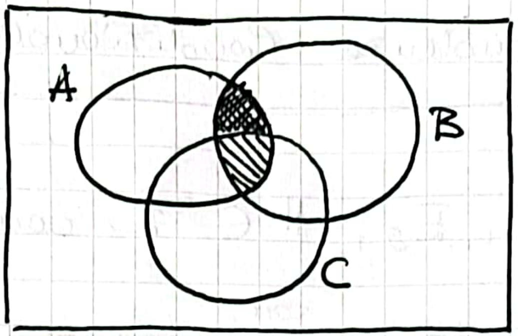
obs: tra un $B_{\underline{e}_1}$ e un $B_{\underline{e}_2}$, siccome sono definiti come intersezioni di tutti gli insiemi, se sostituisco un insieme con il suo complementare, ciò li rende disgiunti!

$\hookrightarrow$ un elemento non può stare sia in E_i che in E_i^c.

$\rightsquigarrow$

↳ en: considero

$A, B, C \in \Omega$



▨ $= A \cap B \cap C$

▩ $= A \cap B \cap C^c$

↳ i due eventi sono disgiunti.

⇝ tutti i $B_{\underline{e}}$ sono disgiunti //

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A_k) \underset{\boxed{\text{additività}}}{=} \sum_{\substack{\underline{e} \in \{0,1\}^k \\ \sum_{i=1}^{n} e_i = k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i^{e_i}\right) \overset{\nabla}{=} \sum_{\substack{\underline{e} = \{0,1\}^k \\ \sum_{i=1}^{n} e_i = k}} p_i^{e_i} \cdot (1-p_i)^{1-e_i}$$

⊛ conteggio

Hp se $p_i = p \ \forall i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow \mathbb{P}(A_k) = p^k (1-p)^{n-k} \underbrace{\sum_{\substack{\underline{e} \{0,1\}^k \\ \sum_{i=1}^{n} e_i = k}} 1}$

⊛ conto tutte le stringhe che hanno k "1" e $n-k$ "0" ⇝ $\binom{n}{k}$ (per definizione)

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

obs: [FACOLTATIVA] $\boxed{Q}$ ma sono sicuro che posso costruire tale eventi così?

↳ $\overset{?}{\exists} (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ t.c. Hp ?

ex: $\Omega = \{0,1\}^n \to$ stringhe

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ ↳ insieme delle combinazioni fino a n stringhe. ↝ obs: $\#(\Omega) = 2^n$

$\#(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^{2^n}$

$\mathbb{P}$ mdp su $\mathcal{F}$

$\underline{\omega} \in \Omega \Rightarrow \underline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$

$$\mathbb{P}(\{\underline{\omega}\}) \ominus \prod_{i=1}^{n} p_i^{\omega_i} \cdot (1-p_i)^{1-\omega_i}, \text{ con } \{p_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$$

t.c. $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

obs: è chiaramente > 0

ESERCIZIO

1) $\sum_{\underline{\omega} \in \Omega} \prod_{i=1}^{n} p_i^{\omega_i} (1-p_i)^{1-\omega_i} = 1$

2) $E_i = \{\underline{\omega} \in \Omega \text{ t.c. } \omega_i = 1\}$

$\Rightarrow (E_1, \dots, E_n)$ sono Bernoulliani.

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ sia $\Omega := \{0,1\}^n \overset{\nabla}{=} \{\underbrace{(\omega_1, \dots, \omega_n)}_{\underline{\omega}} \mid \omega_i \in \{0,1\}\ \forall i \in \{1,\dots,n\}\}$ ← stringa

sia $\mathcal{F} := \mathcal{P}(\Omega) \overset{\nabla}{=} \{\emptyset$, [insiemi di singole stringhe], [insiemi formati da coppie di stringhe], ...

obs: $\#(\Omega) = 2^n$

$\#(\mathcal{F}) = 2^{2^n}$

..., [insiemi formati dalle $(n-1)$uple di stringhe], $\underbrace{\text{[insieme formato dalle } n\text{-uple di stringhe]}}_{\Omega \text{ per def.}}$ $\}$

definisco $\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0,1]$ mediante la formula:

t.c. $\mathbb{P}(\{\underline{\omega}\}) := \prod_{i=1}^{n} p_i^{\omega_i} \cdot (1-p_i)^{1-\omega_i}$; $\{p_i\}$ fissata t.c. $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ con $p_i > 0$

obs: $\mathbb{P}$ è ben definita poiché sussiste la proposizione di probabilità di sub-partizioni pesate.

1) si verifichi che $\mathbb{P}$ è misura di probabilità su $\mathcal{F}$

2) si verifichi che $E_i := \{\underline{\omega} \in \Omega$ t.c. $\omega_i = 1\}$

$\Rightarrow (E_1, \dots, E_n)$ sono Bernoulliani

---

1) affinché $\mathbb{P}$ sia mdp su $\mathcal{F}$ basta controllare che

1.1) $\mathbb{P}(\{\underline{\omega}\}) \geq 0 \quad \forall \underline{\omega} \in \Omega$

ma ciò è banale poiché siccome $p_i > 0\ \forall i$ e $\sum p_i = 1$

$\Rightarrow p_i < 1 \Rightarrow p_i, (1-p_i) > 0 \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} p_i^{\omega_i} (1-p_i)^{1-\omega_i} > 0$

(siccome $\omega_i \in \{0,1\}$) $\square_{1.1}$

1.2) $\sum_{\underline{\omega} \in \Omega} \mathbb{P}(\{\underline{\omega}\}) = 1$ (essendo una partizione)

ma ciò è vero poiché:

obs: se $\omega_i = 1 \rightsquigarrow 1-\omega_i = 0$; $\omega_i = 0 \rightsquigarrow 1-\omega_i = 1$

$\Rightarrow$ se $\omega_i = 1 \rightsquigarrow p_i^{\omega_i}(1-p_i)^{1-\omega_i} = p_i$

se $\omega_i = 0 \rightsquigarrow p_i^{\omega_i}(1-p_i)^{1-\omega_i} = (1-p_i)$

idea: sto sommando tutte le combinazioni di elementi di questa forma:

ex: $p_1 (1-p_2)(1-p_3) p_4 \cdots (1-p_{n-1}) \cdot p_n$

con ogni fattore che sarà talvolta p_i talvolta $(1-p_i)$ →

$\mapsto$ ne segue che se sommo tutte queste catene di fattori:

$$\sum_{\underline{\omega}\in\Omega}\prod_{i=1}^{n} p_i^{\omega_i}(1-p_i)^{1-\omega_i} = \prod_{i=1}^{n}\underbrace{\sum_{\omega_i\in\{0,1\}} p_i^{\omega_i}(1-p_i)^{1-\omega_i}}_{p_0^{\omega_0}\cdot(1-p_0)^{1-\omega_0}+p_1^{\omega_1}\cdot(1-p_1)^{1-\omega_1}=1} = \prod_{i=1}^{n} 1 = 1 \;//$$

__ex.__ $n=3 \rightsquigarrow$

$$\left.\begin{array}{r} p_1\, p_2\, p_3 + \\ (1-p_1)\, p_2\, p_3 + \\ p_1\,(1-p_2)\, p_3 + \\ p_2\, p_2\,(1-p_3) + \\ (1-p_1)(1-p_2)\, p_3 + \\ p_1\,(1-p_2)(1-p_3) + \\ (1-p_1)\, p_2\,(1-p_3) + \\ (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3) = \end{array}\right\}$$

tutte le possibili combinazioni di fattori dove ognuno è preso a scelta tra (p_i) e $(1-p_i)$

$$[p_1+(1-p_1)][p_2+(1-p_2)][p_3+(1-p_3)] = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$

$\square_{1.2}$

2) affinché $(E_1,\dots,E_n)$ siano Bernoulliani devono soddisfare le condizioni:

2.1) $\mathbb{P}(E_j) = p_j \quad \forall j\in\{1,\dots,n\}$

2.2) indipendenza, ovvero: $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} E_i\right) = \prod_{i\in I}\mathbb{P}(E_i)$

per ogni insieme di indici I

2.1) $\mathbb{P}(\underbrace{E_j}) \overset{\circledast}{=} \sum_{\underline{\omega}\in E_j}\mathbb{P}(\{\underline{\omega}\})$

tutte le successioni che hanno "1" come j-esima componente.

$\circledast$ siccome $\underline{\omega}_{j1}\cap\underline{\omega}_{j2} = \emptyset$ per ogni scelta di $\underline{\omega}_{j1},\underline{\omega}_{j2}\in E_j$ vale l'additività

$\Rightarrow$ per definizione: $\sum_{\underline{\omega}\in E_j}\mathbb{P}(\{\underline{\omega}\}) = \sum_{\underline{\omega}\in E_j}\prod_{i=1}^{n} p_i^{\omega_i}(1-p_i)^{1-\omega_i}$

__obs__: so che la j-esima componente è "1"

$\hookrightarrow p_j^{\omega_j}(1-p_j)^{1-\omega_j} = p_j$

$$= \sum_{\underline{\omega}\in E_j} p_j \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} p_i^{\omega_i}(1-p_i)^{1-\omega_i}$$

__obs__: equivalente a sommare sugli $\underline{\omega}$ di $\Omega_{n-1} = \{0,1\}^{n-1}$ ottenuti togliendo la j-esima componente ai vettori di Ω

$$= p_j\cdot\sum_{\underline{\omega}'\in\Omega_{n-1}}\prod_{i=1}^{n-1} p_i^{\omega'_i}(1-p_i)^{1-\omega_i} \overset{\boxed{1.2}}{=} p_j$$

$\square_{2.1}$

2.2) notasi che $E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \dots \cap E_{i_k}$ è l'insieme di tutte

obs le sequenze binarie che hanno le componenti $i_1, i_2, \dots, i_k$ uguali a "1"

Ts l'argomentazione segue dalla stessa fatta per $\boxed{2.1}$:

→ so che $p_{i_\alpha}^{\omega_{i_\alpha}} (1-p_{i_\alpha})^{1-\omega_{i_\alpha}} = p_{i_\alpha} \quad \forall \alpha \in \{1, \dots, k\}$ per definizione di $E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_k}$

→ posso raccogliere tutti i p_{i_α} prima della sommatoria, ricavando la produttoria di essi, e considerare il caso analogo di stringhe $\underline{\omega}' \in \Omega_{n-k} := \{0,1\}^{n-k}$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in \mathbb{I}} E_i\right) \underset{\boxed{k \in \{2,\dots,n\}}}{=} \mathbb{P}(E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_k}) \overset{\nabla}{=} \sum_{\underline{\omega} \in E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_k}} \prod_{j=1}^{n} p_j^{\omega_j} (1-p_j)^{1-\omega_j}$$

$$= p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \dots \cdot p_{i_k} \cdot \underbrace{\sum_{\underline{\omega}' \in \Omega_{n-k}} \prod_{j=1}^{n-k} p_j^{\omega'_j} (1-p_j)^{1-\omega'_j}}_{1 \quad (\text{da } 1.2)}$$

$$= \prod_{i \in \mathbb{I}} p_i \qquad \text{da cui la tesi}$$

$\square_{2.2}$

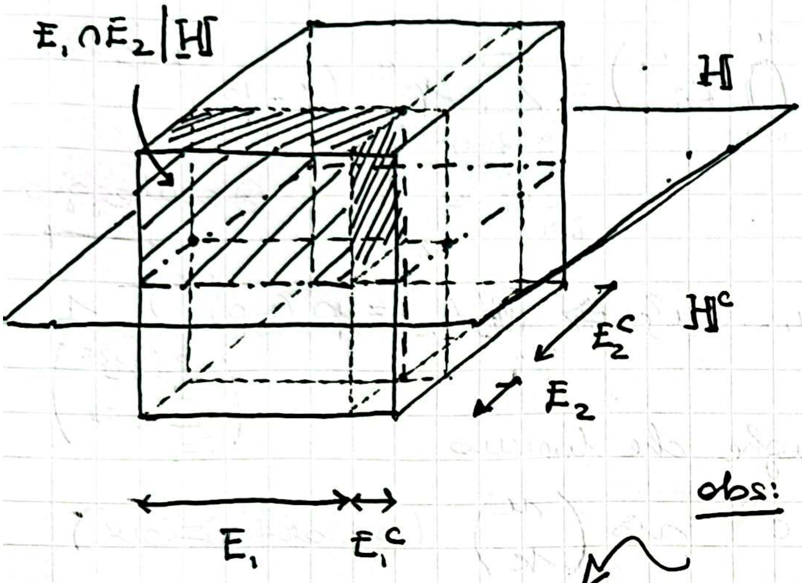
■

Indipendenza Condizionale

$\boxed{\text{def}}$ $E_1, E_2, H \in \mathcal{F}$ con $\mathbb{P}(H) > 0$

E_1, E_2 sono detti CONDIZIONATAMENTE INDIPENDENTI su H

se: $\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \mid H) = \mathbb{P}(E_1 \mid H) \cdot \mathbb{P}(E_2 \mid H)$



nota: ciò non implica la mutua indipendenza!

ricordo:

$E \longmapsto \mathbb{P}(E|H)$

è una m.d.p.

obs: equivalentemente avrei potuto definirli condiz. indip. se risultano indipendenti secondo la misura $\mathbb{P}(A \mid H)$

$\boxed{\text{def}}$ $(E_1, \dots, E_n)$ sono detti CONDIZIONATAMENTE INDIPENDENTI su H se sono indipendenti rispetto a $\mathbb{P}(\cdot \mid H)$ (notazione: $\overset{P(\cdot|H)}{\underset{0 \le i \le n}{\perp\!\!\!\perp}} E_i$)

obs: $E_1 \overset{\mathbb{P}}{\perp\!\!\!\perp} E_2 \not\Rightarrow E_1 \overset{\mathbb{P}(\cdot|C)}{\perp\!\!\!\perp} E_2$

$E_1 \overset{\mathbb{P}(\cdot|C)}{\perp\!\!\!\perp} E_2 \not\Rightarrow E_1 \overset{\mathbb{P}}{\perp\!\!\!\perp} E_2$

Variabili Aleatorie

$\xi : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathcal{X}, \mathscr{X})$

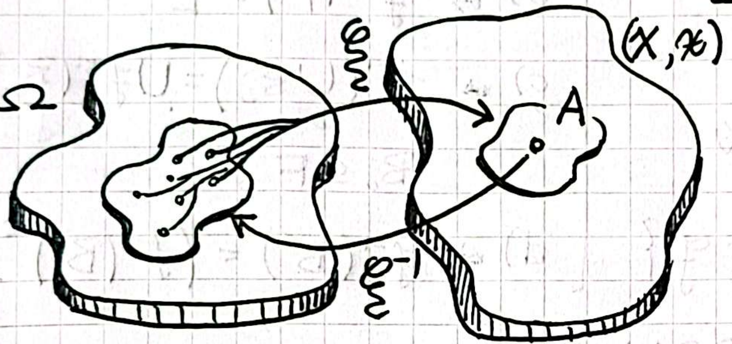
ex: $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$
$\mathcal{X} = \{0, 1\}$

ex: $\Omega = [0, 1]$
$\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$

(e.g.) "tiro un dado" e guardo se ho un numero pari

$\xi : \underset{\{1, \dots, 6\}}{\Omega} \to \mathcal{X} := \{0, 1\}$

$$\xi(\omega) := \begin{cases} 0 & \omega = 1, 3, 5 \\ 1 & \omega = 2, 4, 6 \end{cases}$$



def ξ dicesi MISURABILE se: $\xi^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ $\forall A \in \mathscr{X}$
controimmagine

obs: ξ non è necessariamente invertibile.
$\xi^{-1} := \{\omega : \xi(\omega) = A\}$

def $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathcal{X}, \mathscr{X})$ misurabile dicesi VARIABILE ALEATORIA (o elemento aleatorio)

def ξ t.c. var. a valori $(\mathcal{X}, \mathscr{X}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dicesi VARIABILE ALEATORIA A VALORI REALI

def ξ var. al. a valori $(\mathcal{X}, \mathscr{X}) = (\mathbb{R}^D, \mathcal{B}(\mathbb{R}^D))$ dicesi VETTORE ALEATORIO

def una funzione misurabile $h : (\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ dicesi BORELIANA (o semplicemente "misurabile" sottointendendo.)

obs: se ξ V.A. $\leadsto$ ha senso le domande: $\mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega) \in A\})$ per $A \in \mathscr{X}$

$$\mapsto \mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega) \in A\}) \overset{\nabla}{=} \mathbb{P}\{\underset{\overset{\parallel}{B \in \mathcal{F}}}{\xi^{-1}(A)}\}$$

(e.g. 1) $\mathbb{P}(\{\text{PARI}\}) = \mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega) = 1\}) = \mathbb{P}(\{2,4,6\})$

Lemma [Criterio di Misurabilità] idea: criterio per stabilire se un oggetto è variabile aleatoria

sia $\xi : (\Omega, \mathcal{F}) \to (X, \mathcal{X})$

sia $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{X} : \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{X}$ t.c.

$\xi^{-1}(c) \in \mathcal{F} \;\; \forall c \in \mathcal{C}$

$\Rightarrow \xi$ è misurabile per $\mathcal{F}/\mathcal{X}$

obs: $f : E \to F$

a) $\Rightarrow f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

b) $\Rightarrow f^{-1}(F) = E$

c) $\Rightarrow f^{-1}(\bigcup_i B_i) = \bigcup_i f^{-1}(B_i)$, $B_i \subseteq F$

d) $\Rightarrow f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$

dim $S = \{s \subseteq X : \xi^{-1}(s) \in \mathcal{F}\}$

$\Rightarrow S$ è una σ-ALGEBRA:

(1) $\mathcal{F} \ni \emptyset \overset{(a)}{=} \xi^{-1}(\emptyset) \Rightarrow \emptyset \in S$

$\mathcal{F} \ni \Omega \overset{(b)}{=} \xi^{-1}(X) \Rightarrow X \in S$

(2) $s \in S \rightsquigarrow \xi^{-1}(s^c) \overset{(d)}{=} (\xi^{-1}(s))^c \in \mathcal{F} \Rightarrow s^c \in S$

(3) $s_i \in S \rightsquigarrow \xi^{-1}(\bigcup_{i \geq 1} s_i) \overset{(c)}{=} \bigcup_{i \geq 1} \underbrace{\xi^{-1}(s_i)}_{\in \mathcal{F}} \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i \geq 1} s_i \in S$

$\Rightarrow$ siccome $\mathcal{C} \overset{Hp}{\subseteq} S \Rightarrow \mathcal{X} \overset{Hp}{=} \sigma(\mathcal{C}) \subseteq \sigma(S) = S$ ■

prop

$\xi : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. $\Rightarrow \xi$ è misurabile $(\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R}))$

sse $\xi^{-1}\{(-\infty, x]\} \in \mathcal{F}$

$\forall x \in \mathbb{R}$

dim

$\mathcal{C} := \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\} \rightsquigarrow \sigma(\mathcal{C}) \overset{\nabla}{=} \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\rightsquigarrow$ sono soddisfatte le ipotesi del lemma

$\rightsquigarrow$ da cui la tesi ■

prop

$\xi_i : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ $i = 1, 2, \dots$
<u>misurabili</u>

$\Rightarrow (\xi_1, \xi_2) : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$
è <u>misurabile</u>

dim

$\mathcal{C} := \{ C = A_1 \times A_2, \ A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \}$
$\Rightarrow \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (da Teorema)

$C \in \mathcal{C} \rightsquigarrow \xi^{-1}(C) = \xi^{-1}(A_1 \times A_2)$
$= \underbrace{\xi_1^{-1}(A_1)}_{\in \mathcal{F}} \cap \underbrace{\xi_2^{-1}(A_2)}_{\in \mathcal{F}} \in \mathcal{F}$

$\rightsquigarrow$ concludo per il Lemma ■

prop [misurabilità della composta]

$\xi_1 : (\Omega_1, \mathcal{F}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ (obs: avrei potuto chiamarlo $(\mathcal{Y}, \mathcal{G})$)
$\xi_2 : (\Omega_2, \mathcal{F}_2) \to (\mathcal{X}, \mathcal{H})$
<u>misurabili</u> (secondo $\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_2$ e $\mathcal{F}_2/\mathcal{H}$)

$\Rightarrow$ è <u>misurabile</u>: $\omega \longmapsto \xi(\omega) := \xi_2(\xi_1(\omega))$
(secondo $\mathcal{F}_1/\mathcal{H}$)

dim ESERCIZIO ■

prop

$h : (\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ continua
$\Rightarrow h$ è <u>misurabile</u> (Borel)

$\rightsquigarrow$ dim. next time.

prop $\xi_2 : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ misurabile

$\leadsto$ sono misurabili:
- $|\xi_1|$
- dato: $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2)$ $\leadsto \varphi(\xi_1, \xi_2)$
- $\xi_1 \pm \xi_2$
- $\xi_1 \cdot \xi_2$
- $\xi_1^+ := \max\{\xi_1, 0\}$
- $\xi_1^- := \min\{\xi_1, 0\}$

[misurabilità di somme, prodotto, parte positiva, modulo e composizione per funzioni scalari continue]

Lez 7 prob

gio 27/02/2025

Funzioni Misurabili

↳ dipende non solo da: $\xi, \Omega, \mathbb{X}$ ma anche da $\mathcal{F}, \mathcal{X}$!

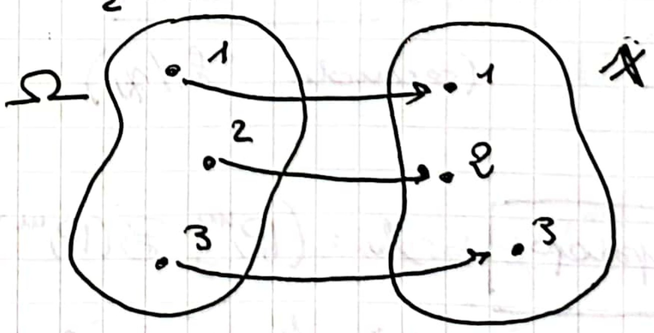
richiamo: $\xi : \Omega \to \mathbb{X}$ sempre

N.B. anche se scrivo, come notaz. che: $\xi : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{X}, \mathcal{X})$ per fare capire che l'eventuale enunciato dipende dalle σ ALGEBRE usate

↳ ad ex. la misurabilità

ex $\Omega =: \mathbb{X} := \{1, 2, 3\}$

$\xi(\omega) = \omega \quad \forall \omega \in \Omega$



è misurabile? dipende

- se scelgo: $\mathcal{F} := \mathcal{P}(\Omega) \overset{?}{=} \mathcal{P}(\mathbb{X}) =: \mathcal{X}$

$\Rightarrow \xi$ è $\mathcal{F}/\mathcal{X}$-misurabile

- ma se scelgo: $\mathcal{F} := \sigma(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1,2\}, \{3\}, \Omega\}$

$\Rightarrow \xi$ non è $\mathcal{F}/\mathcal{X}$-misurabile.

$\rightsquigarrow \left(\text{INFATTI} \quad \underset{\mathcal{X}}{\underset{\cap}{\xi^{-1}(\{1\})}} = \{1\} \notin \mathcal{F} \right)$

N.B. $\underline{h}: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$. (proposizione)

$\underline{h} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d) \iff \forall A \in \mathcal{O}p(\mathbb{R}^m)$

$\underline{h}^{-1}(A) \in \mathcal{O}p(\mathbb{R}^d)$

en $\underline{h}: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continua

$\Rightarrow$ è $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) / \mathcal{B}(\mathbb{R})$ - mis.

dim — [prop. pg 37]

$\mathcal{C} := \mathcal{U} := \mathcal{O}p(\mathbb{R})$

↳ già verificato che: $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

w.t.p. $\forall A \in \mathcal{C} \Rightarrow \underline{h}^{-1}(A) \in \mathcal{O}p(\mathbb{R}^d) \overset{\nabla}{\subseteq} \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

↳ ciò è verificato dalla proposizione precedente ✓

en ξ_1, ξ_2 t.c.

$\xi_i : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$i \in \{1,2\}$

$\Rightarrow \xi_1 + \xi_2$ è $\mathcal{B}(\mathbb{R}) / \mathcal{F}$ -mis

dim — [prop pg. 38]

infatti:

$\omega \longmapsto (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$

$\longmapsto \xi_1(\omega) + \xi(\omega) =: S(\xi_1, \xi_2)$

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "\xi", "\text{MIS.}"'] \arrow[rr, bend right] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "S", "\text{CONT.}"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

con $S(x,y) := x + y$

■

def su $(\Omega, \mathcal{F})$ considero $A \in \mathcal{F}$

la funzione $\omega \longmapsto \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \notin A \\ 1 & \omega \in A \end{cases}$ è detta

FUNZIONE INDICATRICE

$\mathbb{1}_A : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

42

prop $\mathbb{1}$ è misurabile

dim notosi: $\underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}}}{\mathbb{1}_A^{-1}(B)} = \begin{cases} A & \text{se } B \ni 1, B \not\ni 0 \\ A^c & \text{se } B \ni 0, B \not\ni 1 \\ \emptyset & \text{se } B \not\ni 0, B \not\ni 1 \\ \Omega & \text{se } B \ni 0, B \ni 1 \end{cases}$

↳ tutti $\in \mathcal{F}$

la tesi segue dalle prop. precedenti ■

---

obs: se $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{F}$; $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$

$$\omega \longmapsto \sum_{i=1}^{m} c_i \mathbb{1}_{A_i}(\omega) \quad \text{è misurabile}$$

def FUNZIONI "SEMPLICI" [misurabilità della funzione limite]

prop se $\xi_n : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ $n \geq 1$

t.c. sono misurabili

$\Rightarrow$ se $\exists \lim_{n \to +\infty} \xi_n(\omega) =: \xi(\omega)$ allora

$\xi(\omega)$ è misurabile //

---

notazioni userò in generale: $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathcal{X}, \mathcal{B})$ (*)

e, se arrivo in $\mathbb{R}$: $\underline{X} : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$

con ogni $X_i : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$\forall i \in \{1, \dots, d\}$

(*) **obs:** manca lo spazio per definire una m. d. P!

Legge Immagine e Funzione di Ripartizione

ex: $\Omega := \{1, \dots, 6\}$; $\mathcal{X} := \{0, 1\}$; $\mathcal{F} := \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathscr{X} := \sigma(\{0,1\})$

e, su $\mathcal{F}$, considero $\mathbb{P}$ t.c.

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega = \{1,3,5\} \\ 1 & \omega = \{2,4,6\} \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) := \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\{\omega \text{ t.c. } X(\omega) = 1\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\{\omega \text{ t.c. } X(\omega) = 0\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

N.B. facilmente generalizzabile su $(\mathcal{X}, \mathscr{X})$

def $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ v.a.

allora: $\mathbb{P}_X(A) \triangleq \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \in A\}) \overset{\nabla}{=} \mathbb{P}(X^{-1}(A))$ $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

dicesi "LEGGE INDOTTA" di X.

prop $\mathbb{P}_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \ni A \mapsto \mathbb{P}_X(A)$ è una m. di P.

obs: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \xrightarrow{X} (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathbb{P}_X)$

notazioni $\Omega \supseteq \{\omega : X(\omega) \in A\} \overset{\nabla}{=} X^{-1}(A) \overset{N}{=} \{X \in A\}$

dim

- $\mathbb{P}_X(A) := \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \in A\}) \geq 0$ per def. di $\mathbb{P}$. ✓
- $\mathbb{P}_X(\mathbb{R}^d) \overset{\nabla}{=} \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}^d) \overset{\nabla}{=} \mathbb{P}(\Omega) = 1$ ✓
- $\mathbb{P}_X(\bigcup_{i \geq 1} A_i) \overset{\nabla}{=} \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \in \bigcup_{i \geq 1} A_i\})$

$= \mathbb{P}(\bigcup_{i \geq 1} \{\omega : X(\omega) \in A_i\})$

disgiunti

$\overset{\text{disgiunti}}{=} \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \in A_i\})$

$$\mathbb{P}_X(\bigcup_{i \geq 1} A_i) \overset{\nabla}{=} \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}_X(A_i) \quad ✓$$

$\blacksquare$

Q a cosa ci serve tutto ciò? → ora abbiamo gli strumenti rigorosi per modellizzare ogni evento aleatorio!

⇝ mi limito per ora al caso più semplice: $\boxed{d=1}$

⇝ $X:(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\longrightarrow(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\mathbb{P}_X)$

⇝ $\mathbb{P}_X$ è mdP su $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

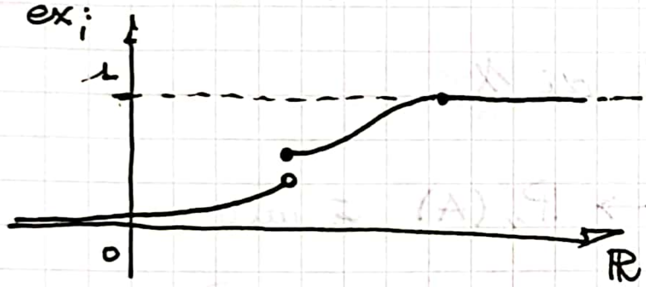
def $F:\mathbb{R}\longrightarrow[0,1]$ è detta **Funzione di Ripartizione**

se: 1.) monotona non decrescente

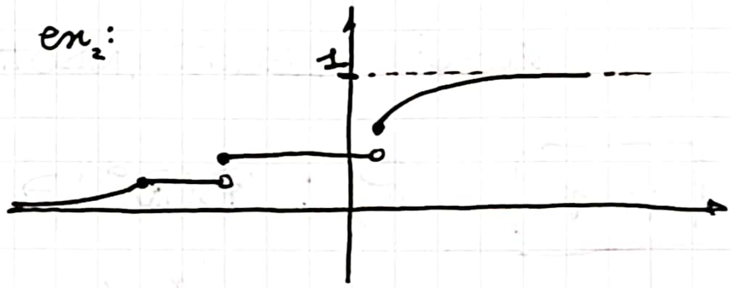
2.) $\lim_{x\to+\infty} F = 1$, $\lim_{x\to-\infty} F = 0$

3.) $\forall x_0\in\mathbb{R}$ $\lim_{x\to x_0^+} F(x)=F(x_0)$

ex_1:



ex_2:



prop 1) $\mathbb{P}$ mdp su $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$x\longmapsto F_P(x):=\mathbb{P}(\{(-\infty,x]\})$ ⇒ F_P è F. di Rip.

[corrispondenza tra $\mathbb{P}$ e F]

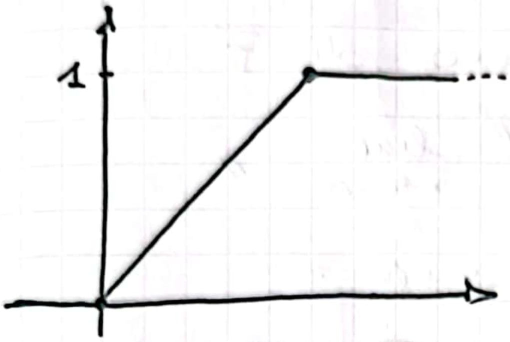
2) $\forall F$ F. di Rip $\exists!\ \mathbb{P}_F$ su $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.c.

$\mathbb{P}(\{(-\infty,x]\})=F(x)$

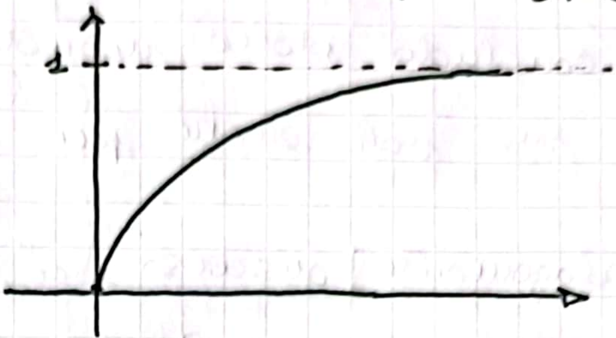
<u>oss</u>: analogo alla prop. di sub partizioni pesate a pg 10, per il caso finito!

↳ 41

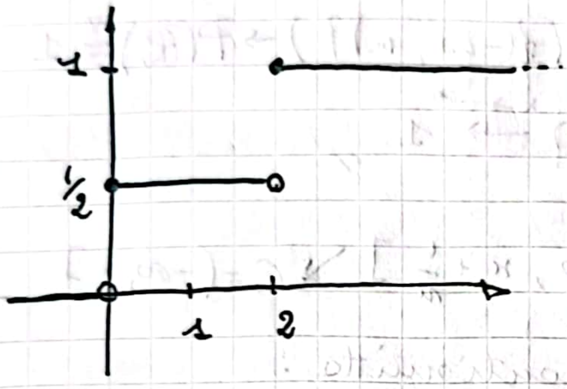
⇝ $(e.g.)_1$ $F_1(x)$



$(e.g.)_2$ $F_2(x) := \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$



$(e.g)_3$ $F_3(x)$



$(-2,0) \subseteq (-\infty,0)$

obs: $\mathbb{P}_{F_1}((-2,0)) \leq \mathbb{P}((-\infty,0)) \overset{\nabla}{=} 0$

$\rightsquigarrow \mathbb{P}_{F_1}((-2,0)) = 0$

$\boxed{\text{lez } 8}$ prob

lun 03/03/2025 obs: $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{F}$

recap: (prop) F funzione di ripartizione

$\Rightarrow \exists!$ mdp su $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\mathbb{P}_F$ t.c.

(1) $\forall x \in \mathbb{R}$ $F(x) = \mathbb{P}_F(\{(-\infty, x]\})$

(2) data una mdp $\mathbb{P}$ su $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$x \longmapsto \mathbb{P}(\{(-\infty, x]\}) =: F(x)$

è una funz. di ripartizione

$\boxed{\text{dim}}$ (2) $(-\infty, x] \subseteq (-\infty, y]$ per $x \leq y$

•) $\Rightarrow F(x) := \mathbb{P}\{(-\infty, x]\} \leq \mathbb{P}\{(-\infty, y]\} =: F(y)$

da cui la monotonia //

•) considero: $A_n := (-\infty, -n]$ $A_{n+1} \subseteq A_n$

obs: $A_n \searrow \emptyset$

$\longmapsto$ per continuità: $F(-n) \overset{\triangledown}{=} P(\{(-\infty, -n)\}) \to P\{\emptyset\} \overset{\triangledown}{=} 0$

concludo dalla monotonia di F

$\leadsto$ vale anche per il $\lim\limits_{x \to -\infty}$ //

[analogamente] discorso per $x \to +\infty$:

$B_n := [-\infty, n] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad B_n \nearrow \mathbb{R}$

per continuità: $F(n) \overset{\triangledown}{=} P(\{(-\infty, n)\}) \to P(\mathbb{R}) \overset{\triangledown}{=} 1$

$\leadsto F(x) \xrightarrow{x \to -\infty} 0 \qquad F(x) \xrightarrow{x \to +\infty} 1$ //

∘) $\forall x \in \mathbb{R}$: $C_n := (-\infty, x + \frac{1}{n}] \searrow C = (-\infty, x]$

concludo sempre da continuità:

$$\lim_{x \to x_0^+} F(x) = \lim_{x \to x_0^+} P(\{(-\infty, x + \tfrac{1}{n}]\})$$

$$= P(\{(-\infty, x]\}) = F(x_0)$$

da cui ottengo, per monotonia, la continuità da dx. //

②

$\boxed{\text{def}}$ sia $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$$F_X(x) \triangleq \mathbb{P}\{\omega : X(\omega) \leq x\} \overset{\triangledown}{=} \mathbb{P}\{X \leq x\} = P_X\{(-\infty, x]\}$$

obs: abbiamo già dim. che F_X è f.d.r. (per X)

$F_X(x)$ "=" funzione di ripartizione di X

$\boxed{\text{N.B.}}$ Sia X v.a. reale con funzione di rip. F_X. allora:

(1) $\mathbb{P}(\{X > x\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X > x\}^c)$

$= 1 - \mathbb{P}(\{X \leq x\}) = 1 - F_X(x)$ //

(2) $\mathbb{P}(\{X \in (a,b]\}) = \mathbb{P}(\{(X\le b)\setminus(X\le a)\})$

$$\boxed{\text{con } (X\le a) \subseteq (X\le b)} \quad = \mathbb{P}(\{(X\le b)\}) - \mathbb{P}(\{(X\le a)\}) \overset{\nabla}{=} F_X(b) - F_X(a)$$

(3) $\mathbb{P}(\{X < x\}) = \lim\limits_{y \nearrow x} F_X(y) \overset{\nabla}{=} F_X(x^-)$

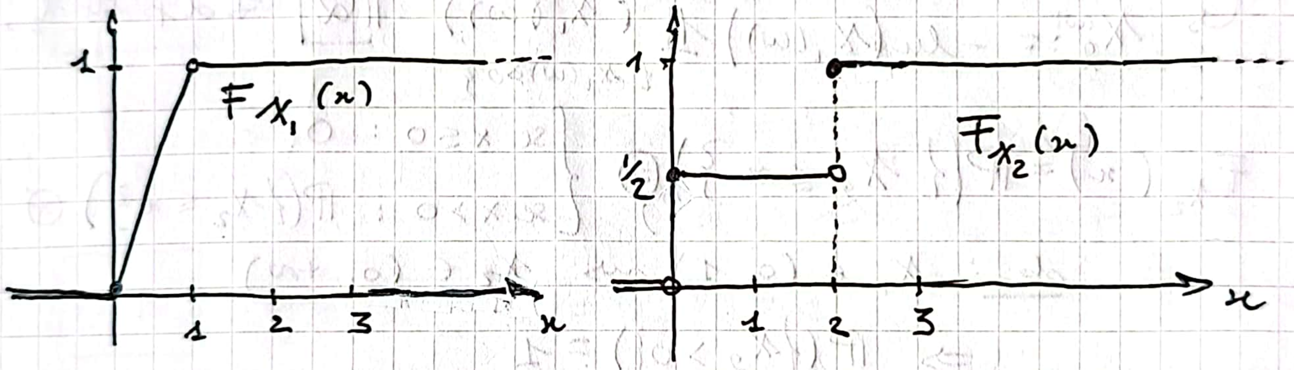
(4) $\mathbb{P}(\{X = x\}) = \mathbb{P}(\{(X\le x)\setminus(X<x)\})$

$$\overset{\nabla}{=} F_X(x) - F_X(x^-)$$

caso della discontinuità salto in x per F_X

$\rightsquigarrow$ se F_X è continua: $\mathbb{P}(\{X=x\})=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

obs: considero $(e.g)_2$ e $(e.g)_3$ di LEZ 7



$\mathbb{P}(\{X_1 = 3\}) = 0$

$\mathbb{P}(\{X_1 \le 3\}) = 1$

$\mathbb{P}(\{X_1 \in (0,1]\}) = F_{X_1}(1) - F_{X_1}(0) = 1 - 0 = 1$

$\mathbb{P}(\{X_2 = 0\}) = F_{X_2}(0) - F_{X_2}(0^-) = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(\{X_2 = 2\}) = F_{X_2}(2) - F_{X_2}(2^-) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ $\mathbb{P}(\{X \in (a,b)\}) = ?$

$\mathbb{P}(\{X \in [a,b]\}) = ?$

$$\boxed{F_X \overset{N}{=} \mathcal{U}_{[0,1]}}$$

$\boxed{\text{def}}$ X v.a. con $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ x & x\in(0,1) \\ 1 & x\ge 1 \end{cases}$ dicesi

VAR. AL. con LEGGE uniforme su $(0,1)$

⇝ obs: $\mathbb{P}(\{X \in (a,b] : 0 \leq a < b \leq 1\}) \overset{\nabla}{=} b-a$ $\boxed{\mathbb{P} \text{ uniforme}}$

obs: $= Leb_{[0,1]}((a,b])$

$\boxed{N.B.}$ $\mathbb{P}(\{X \in (a,b] : a < b < 0\}) = 0 \neq Leb_{[0,1]}$

in generale: $\mathbb{P}(\{X \in A\}) = 0$ se $A \cap [0,1] = \emptyset$

poiché: $A \subseteq \mathbb{R} \setminus [0,1]$ ⇝ $\mathbb{P}(X \in A) =$

$= \mathbb{P}(X \in \mathbb{R} \setminus [0,1]))$

$\boxed{\text{ex}_2}$ $X_1 \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$ $\boxed{\text{monotonia dei complem.}}$ $= F_X(0) + 1 - F_X(1)$

ha come f.d.r. $\mathcal{U}$ $\quad \mathbb{P}(X \in A) = 0 + 0 = 0$

⇝ $X_2 := -\ln(X_1)$ per $X_1(\omega) > 0$

↳ $X_2^{(\omega)} := -\ln(X_1(\omega)) \mathbb{1}_{\{X_1(\omega) > 0\}}(X_1(\omega))$ $\boxed{Q}$ f.d.p di X_2?

$$F_{X_2}(x) \overset{\Delta}{=} \mathbb{P}(\{X_2 \leq x\}) = \begin{cases} \text{se } x \leq 0 : 0 \\ \text{se } x > 0 : \mathbb{P}(\{X_2 \leq x\}) \ (*) \end{cases}$$

obs: $X_1 \in (0,1)$ ⇝ $X_2 \in (0, +\infty)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(\{X_2 > 0\}) = 1$

$$\left(\begin{array}{l} \text{poiché: } A := \{\omega : X_1(\omega) \in (0,1)\} \Rightarrow \mathbb{P}(A) \overset{\nabla}{=} 1 \\ \text{ma } A \subseteq \{-\ln(X_1(\omega)) > 0\} \\ \Rightarrow \mathbb{P}(\{X_2 > 0\}) = 1 \end{array} \right)$$

(*) ⇝ cerco: per $x > 0$ la $\mathbb{P}(\{X_2 \leq x\})$

$$\mathbb{P}\{(X_2 \leq x) \cap (X_1 \in (0,1))\} \overset{\nabla}{=} \mathbb{P}\{(-\ln(X_1) \leq x) \cap (\dots)\} =$$

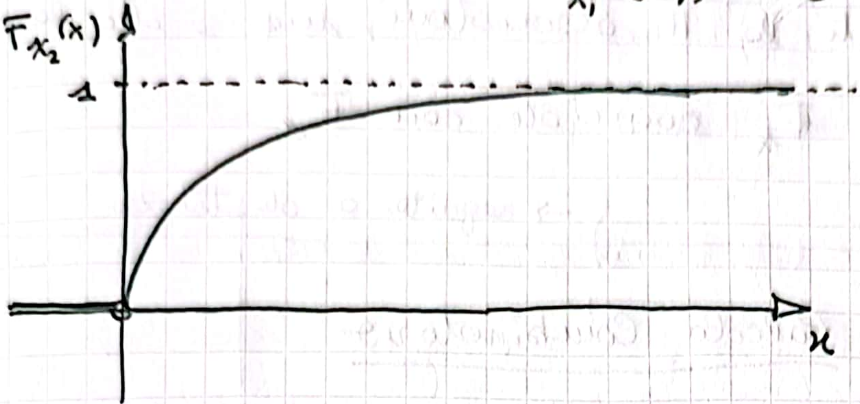
$$= \mathbb{P}((X_1 \geq e^{-x}) \cap (X_1 \in (0,1))\} = \mathbb{P}\{X_1 \geq e^{-x}\} =$$

$$= \mathbb{P}(\{X_1 > e^{-x}\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X_1 \leq e^{-x}\}) = 1 - F_{X_1}(e^{-x})$$

$\boxed{\mathbb{P}(\{X_1 = a\}) = 0 \ \forall a}$

↳

$$\Longrightarrow F_{X_2}(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1 - F_{X_1}(e^{x}), & x>0 \end{cases} \doteq \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1-e^{-x}, & x>0 \end{cases}$$



obs:

$\lim_{x \to -\infty} F_{X_2}(x) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} F_{X_2}(x) = 1$

monotona ✓

continua da dx ✓

def [distribuzione esponenziale]

X v.a. ha la dist. exp ($X \sim \exp$) se la sua f.d.r. è $F_{X_2}(x)$

prop se X_1 e X_2 sono v.a. t.c. $F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

allora: $\mathbb{P}(\{X_1 \in A\}) = \mathbb{P}(\{X_2 \in A\})$ $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightsquigarrow \mathbb{P}_{X_1} = \mathbb{P}_{X_2}$

N.B. $\not\Rightarrow \mathbb{P}(\{X_1 = X_2\}) = 1$

↳ non necessariamente vero.

ex $X_i \in \{0,1\}$ $\Omega := \{0,1\}$ con $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathbb{P}(\{\omega = 0\}) := \mathbb{P}(\{\omega = 1\}) := \frac{1}{2}$

obs: $\mathbb{P}(\{X_1 = X_2\}) = 0$ (eventi disgiunti)

ESERCIZIO $\left\{F_{X_1}(x) \overset{?}{=} F_{X_2}(x)\right\} = 1$

prop sia F una f.d.r. su $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists X: (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ t.c. $F_X = F$

↳ idea: non solo so, data una classe F di rip. trovarti la IP associatavi, ma so che la sua F_X coincide con F,

prob → seguita a distanza

Es 2

mar 04/03/2025

Calcolo Combinatorio

"toolbox" eventi → distinti / ↳ indistinguibili

def una permutazione è una biezione

$$f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$$

(1) ENIGMA → 6 lettere distinte

N.B. non una dimostrazione

□ □ □ □ □ □ $\#\text{password}_1 = 6 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 1 \stackrel{?}{=} 6! = 720$

6 scelte, 5 scelte ... 1 scelta

1.(2) MATEMATICA **obs:** diverse lettere ripetute

↝ posso considerare tutte le permutazioni prima e dopo aver scambiato due "A"

↳ sono le stesse → divido per 2

ma le "A" sono 3! → divido per $3! = 6$

$$\#\text{anagrammi} = \frac{n!}{k_1!\,k_2! \cdots k_m!} \quad \text{con } \sum_i k_i = n$$

$$\#\text{password}_2 = \frac{10!}{3!\,2!\,2!} = \frac{10!}{24} = 151'200$$

obs: $1! = 1$

1. (3) sia $n \in \mathbb{N}$ insieme di oggetti t.c. k di tali oggetti si ripetono $a_1, a_2, \dots, a_k$ volte $(a_i \geq 2)$

Allora $\#(\text{permutazioni}) = \dfrac{n!}{a_1! \cdots a_k!}$

(2) [Disposizioni Semplici]

$p = \#$ podi su 20 partecipanti ?

$\square \; \square \; \square$

20 scelte, 19 scelte, 18 scelte

$p \overset{?}{=} 20 \cdot 19 \cdot 18 \overset{?}{=} \dfrac{20!}{17!} = \dfrac{20!}{(18-1)!}$

2. (2) sia $n \in \mathbb{N}$ e $k \leq n$. $\#(\text{disposizioni}) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

(3) [Combinazioni semplici]

<u>idea:</u> n° di sottoinsiemi con k elementi

ns. fisso una disposizione. $k!$ disposizioni sono una combinazione

$\#(\text{combinazioni}) = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$ ogni disp. mi genera $k!$ combinazioni

con $n \in \mathbb{N}$ e $k \leq n$

$\overset{\nabla}{=} \dbinom{n}{k}$

proposizione

enu la cardinalità dell'insieme delle parti di un insieme finito A t.c. $\#(A) = n$ è : $\#(\mathcal{P}(A)) = 2^{\#(A)} = 2^n$

dim $\#(\mathcal{P}(A)) = \#\left(\bigcup_{k=0}^{n} \{B \in \mathcal{P}(A) : \#(B) = k\}\right) \overset{*}{=}$

<u>obs:</u> ogni $\{B \in \mathcal{P}(A) : \#(B) = k\}$ è disgiunto

↳ ho l'additività

$\overset{*}{=} \sum_{k=0}^{n} \#(\{B \in \mathcal{P}(A) : \#(B) = k\}) = \sum_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} \cdot 1$

$$\mapsto \; = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n} \cdot 1^{n-k} = (1+1)^{n} = 2^{n}$$

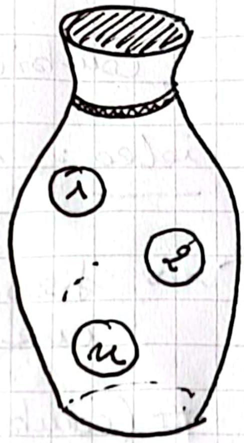
Binomio di Newton

④ ⓐ (senza reimmissione)

Sia $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ l'insieme delle biglie

⇝ estraggo k biglie su n (tutte diverse)

$$\Omega = \{ k\text{-uple di elementi distinti di } \mathcal{B} \}$$
$$= \{ (b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_k}) \in \mathcal{B}^k \mid b_{i_j} \neq b_{i_l} \text{ se } j \neq l \}$$



$$\hookrightarrow \#(\Omega) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Disposizioni

ⓑ (con reimmissioni) $\Omega = \mathcal{B}^k$

$$\#(\Omega) = n \cdot n \cdots n = n^k$$

Disposizioni con ripetizione

ⓒ (estrazione simultanea)

$$\Omega \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{B})$$

$$\Omega = \{ B \subseteq \mathcal{B} : \#(B) = k \}$$

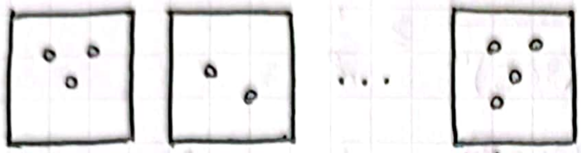
$$\#(\Omega) = \binom{n}{k}$$

combinazioni

⑤ [stars and bars] → [biglie e scatole]

$\boxed{Q}$ quanti modi ho di disporre le mie n biglie in k scatole distinte?

$k-1$ stanghette!



1) 2) ... k)

$\mapsto \circ\circ\circ | \circ\circ | \circ | \cdots | \circ\circ$

↳ ho una biezione con tali grafici

⇝ # configurazioni $=$ # anagrammi di tali biglie

$$= \frac{(n+k-1)!}{n!\cdot(k-1)!} = \frac{(n+k-1)!}{((n+k-1)-(k-1))!\,((n+k-1)-n)!} \overset{\nabla}{=} \binom{n+k-1}{k-1}$$

$$= \binom{n+k-1}{n}$$ ⇝ $\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ e se impongo che in ogni scatola debba esserci almeno una pallina? ⑥*

obs: pigeon-hole principle

"principio delle piccionaia"

$\boxed{\text{N.B}}$ "problema delle partizioni intere"

⑥ assumo n° giorni $= 365$

[Paradosso dei Compleanni]

Sia $n \in \mathbb{N}$. Sia $D := \{1, \dots, 365\}$ l'insieme delle date [g/m]

⇝ $\Omega := D^n$ ⇝ $\#(\Omega) = 365^n$

⇝ $\mathcal{F} := \mathcal{P}(\Omega)$ come σ-algebra

⇝ Assumo equiprobabilità degli elementi di D

⇝ $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$

want-to-find

$$\frac{\#(A)}{\#(\Omega)} =: \mathbb{P}(A) = \frac{\#(A)}{365^n}$$

obs: almeno 2

Sia $A = \{(d_1, \dots, d_n) \in D^n : \exists\, i \neq j \in \{1, \dots, n\}$ t.c. $d_i = d_j\}$

$\boxed{Q}$ è più facile conoscere A^c?

⇝ $A^c = \{(d_1, \dots, d_n) \in D^n : d_i \neq d_j \ \forall i \neq j\}$

↳ $\#(A^c) = \frac{365!}{(365-n)!}$ ⇝ $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{365!}{(365-n)!\, 365^n}$

$$\mathbb{P}(A) \geq 1/2 \quad \rightsquigarrow \quad 1 - \frac{365!}{(365-n)!(365)^n} \geq \frac{1}{2}$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{365-(n-1)}{365} \geq \frac{1}{2}$$

$$\prod_{i=1}^{n-1}\left(1 - \frac{i}{365}\right) \geq \frac{1}{2} \iff \boxed{n \geq 23}$$

(7) [Poker all'italiana] — obs: non conta l'ordine

$\Omega :=$ {insieme delle mani di poker}

$\hookrightarrow \#(\Omega) = |$combinazioni di 5 carte su 52$| = \binom{52}{5}$

come σ-algebra scelgo: $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ e

per $\mathbb{P}$ scelgo l'uniforme su Ω

(a) [FULL] — obs: ho 2 parametri di distinzione → seme, → tipo

considero:

$\{X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2\}$

$\boxed{Q}$ Quanti modi ho di scegliere X e Y?

13 scelte per X
12 scelte per Y
$\hookrightarrow 13 \cdot 12$

obs: se scambio i ruoli di X e Y non sono intercambiabili

$(X, Y) \neq (Y, X)$!

$\boxed{Q}$ per i semi? ogni tris fa comparire 3 semi e ogni coppia fa 2 semi

$\binom{4}{3}$ scelte per il tris

$\binom{4}{2}$ scelte per la coppia

$$\mathbb{P}(\text{full}) = \frac{13 \cdot 12 \cdot \binom{4}{3}\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{3744}{\binom{52}{5}} \simeq 0.144\%$$

(b) [DOPPIA COPPIA] $\{X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1\}$

analogamente:

13 scelte per X
12 scelte per Y
11 scelte per Z

$\Big\} \binom{13}{12} \cdot 11$

obs: X e Y sono intercambiabili!

$\Rightarrow \{X, Y\}$ è un sottoinsieme di $\rightarrow \binom{13}{2}$ possibilità

$Z \neq X, Y \rightarrow 11$ possibilità rimanenti

$\leadsto \binom{4}{2}$ per il seme di X, Y $\quad \binom{4}{1} = 4$ per il seme di Z

$$\leadsto \mathbb{P}([\text{DOPPIA COPPIA}]) = \frac{\frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{2} \cdot \binom{4}{2}^2 \cdot 4}{\binom{52}{5}} \simeq 0.0475 \approx 4.75\%$$

ⓒ [SCALA REALE MASSIMA] (10 J Q K A di $\{\heartsuit \spadesuit \clubsuit \diamondsuit\}$)

$$\leadsto \mathbb{P}(\text{scala reale max}) = \frac{4}{\binom{52}{5}} \simeq 1.54 \cdot 10^{-6} \approx 0.000154\%$$

ⓓ [COLORE] (5 carte dello stesso seme)

$\{X_1, Y_1, Z_1, A_1, B_1\}$

$$\mathbb{P}(\text{colore}) = \frac{\binom{13}{5} \cdot 4}{\binom{52}{5}} \approx 0.1965\%$$

$\boxed{\text{Lez 9}}$ prob