Ese 2

- distinti / indistinguibili per la combinatoria importante

- ese tipo di permutazioni: Anagrammi

  - Ana di "enigma" ~ 6 lettere distinte ~ $\underset{6}{\square}\ \underset{5}{\square}\ \underset{4}{\square} \cdots \underset{1}{\square}$ ~ # permutazioni di 6 lettere distinte) = 6!

- esercizio 2 "matematica" contiene anche lettere indistinguibili ~ la permutazione non genera un cambio ~ $\exists\ 2!\ 3!\ 2! = 24$ permutazioni che mantengono la parola indistinguibile

  ~ Dunque # permutazioni è $\frac{10!}{3!\,2!\,2!} = 151200$

- (caso generale) sia $n \in \mathbb{N}$ un insieme di Oggetti t.c k di tali oggetti si ripetono $a_1, a_2, \dots, a_k$ volte $(a_i \geq 2)$ ~ $\#(\text{permutazioni}) = \frac{n!}{\prod a_i!} = \frac{n!}{a_1! \cdots a_k!}$

Disposizioni semplici

- quanti podi (distinti si possono verificare)

$\underset{20}{\square}\ \underset{19}{\square}\ \underset{18}{\square}$ ~ #(disp di 3 elementi su 20) $= 20 \cdot 19 \cdot 18 = \frac{20!}{17!}$

- in generale: sia $n \in \mathbb{N}$ e $k \leq n$ ~ # (disposizioni di k elementi su n) $= n(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Esercizio 3 combinazioni

- un sottoinsieme di 3 elementi di 6 elementi ~ una combinazione è una disposizione in cui non conta l'ordine

~ # disposizioni non ordinate (combinazioni) di k elementi $= \frac{\left[\frac{n!}{(n-k)!}\right]}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$

- sia A t.c. card $A = n$ allora card $\mathcal{P}(A) = 2^n$

- $\text{card}\,[\mathcal{P}(A)] = \text{card}\left[\bigcup_{k=0}^{n} \{B \subset A : B \text{ ha } k \text{ elementi}\}\right] = \sum_{k=0}^{n} \text{card}\,(\{B \subset A : B \text{ ha } k \text{ elementi}\}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^k\, 1^{n-k}}_{\text{costruisco binomio di Newton}} = 2^n$

- Esercizio 4

  - sia $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ = l'insieme delle biglie

  - (1) senza reimissione $\Omega = \{$"k-uple di elementi distinti di $\mathcal{B}$"$\}$, l'esperimento che lo descrive sono le disp. semplici ~ card $\Omega = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

  - (2) con reimissione $\Omega = \mathcal{B}^k$ ~ card $\Omega = n^k$ (disposizione con ripetizione)

  - (3) estrazione simultanea $\Omega \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{B})$ ~ $\Omega\ \{B \subseteq \mathcal{B} : B \text{ ha } k \text{ elementi}\}$ ~ card $\Omega = \binom{n}{k}$

Esercizio 5 n biglie e k scatole con biglie indistinguibili

- $n \in \mathbb{N}$ biglie indistinguibili
  $k \in \mathbb{N}$ scatole distinte

- (* $n=6, k=3$) o o o o o o

  3 b1 / 1 b2 / 2 b3
  k_1 / k_2 / k_3

  o o o | o | o o

  || o o o o o o → le possibili combinazioni valgono come Anagrammi

~ # configurazioni) $= \frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!} = \binom{n+k-1}{k-1}$

permutazioni

— le ripetizioni

- in questo caso $= \binom{8}{2}$

* esercizio in + 6 (★) cosa cambia se impongo se in ognuna delle scatole bisogna che ci sia la pallina (IP. k non può essere arbitrario) (problema delle partizioni N)

- **Es 7** paradosso dei compleanni

- Sia $n \in \mathbb{N}$ intero, sia $D = \{1, \dots, 365\}$ è insieme delle date [g/m], le date di nascita di n persone è un elemento di $D^n = \Omega$

  inoltre $\# \Omega = 365^n$

- insieme finito $\rightsquigarrow$ sia $\mathcal{P}(\Omega)$ σ-algebra

- Assumendo l'equiprobabilità degli elementi di D^n, introduco $\mathbb{P}: \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$

- $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card} A}{\text{card}\, \Omega} = \frac{\text{card} A}{365^n} \quad \forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$

- sia $A = \{ (d_1, \dots, d_n) \in D^n$ t.c. $\exists i, j \in \{1, \dots, n\}$ distinti t.c. $d_i = d_j \}$

  - quando stimare la prob è difficile chiedersi se A^c è più semplice

  - "esistono 2 indici"^{c} = "non esistono" $\rightsquigarrow$ $A^c = \{ (d_1, \dots, d_n) \in D^n : d_i \neq d_j \ \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \}$ $\rightsquigarrow$ card $A^c = \frac{365!}{(365-n)!}$ =

    vettore $\rightsquigarrow$ ordine conta

  - $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{365!}{(365-n)!} \cdot \frac{1}{365^n}$

- $\mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{2} \iff 1 - \frac{365!}{(365-n)!\, 365^n} \geq \frac{1}{2} \iff \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdots \frac{365-(n-1)}{365} \leq \frac{1}{2} \rightsquigarrow 1 \left(1 - \frac{1}{365}\right)\left(1 - \frac{2}{365}\right)\left(1 - \frac{n-1}{365}\right) \leq \frac{1}{2}$

  $\rightsquigarrow \underbrace{\prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{365}\right)}_{a_n} \leq \frac{1}{2} \iff n \geq 23$

- **Esercizio 8**

  tipo = {"numero carta"}
  seme =

- poker all'italiana

- Ω = {"insieme mani poker"} $\rightsquigarrow$ $|\Omega| = \binom{52}{5}$, σ algebra sarà $\mathcal{P}(\Omega)$ e $\mathbb{P}$ la discreta uniforme su Ω

  ordine delle carte non conta

- ① Full

  - $\{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2\}$

    quanti modi ho di scegliere X e Y? Ho $\left.\begin{matrix}13\\12\end{matrix}\right\}$ scelte per $\begin{matrix}X\\Y\end{matrix}$ come controllo che è giusto perché $(X, Y) \neq (Y, X)$

  - Per il tris ho $\binom{4}{3}$ combinazioni di semi e per la coppia ho $\binom{4}{2}$ combinazioni di semi $\mathbb{P}(\text{full}) = \frac{13 \cdot 12 \binom{4}{3}\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{3744}{\binom{52}{5}} = 0.00144$

② Doppia coppia : $\{\underbrace{x_1, x_2, y_1, y_2}_{\text{stesso nero}}, z\}$

  - $\{X, Y\}$ è un sottoinsieme dei semi, $z \neq X Y$ $\rightsquigarrow$ ho $\binom{13}{2} \cdot 11 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{2}$

  - $\mathbb{P}(\text{doppia coppia}) = \frac{\frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{2} \binom{4}{2}^2 \cdot 4}{\binom{52}{5}} \simeq 0{,}0475$

③ Scala reale max

  - $\mathbb{P}(\text{scala reale max}) = \frac{4}{\binom{52}{5}} \simeq 1.54 \cdot 10^{-6}$

④ Colore le carte stesso seme del tipo $\{x_1, y_1, z_1, A_1, B_1\}$

  sottoinsieme di 5 tipi

  - $\mathbb{P}(\text{colore}) = \frac{\binom{13}{5} \cdot 4}{\binom{52}{5}} \simeq 0.001165\ldots$