LE 7

- $A_1, A_2, \dots A_n \in \mathcal{F} \rightsquigarrow \bigcap_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{F}$

- Es) $\forall$ $B_i \in \mathcal{F}$ $\quad B^c \in \mathcal{F}$ $\quad + (\bigcup B_i)^c = \bigcap B_i^c$

- Prop) (1) sia F funz. ripartizione $\rightsquigarrow \exists!$ mdp su $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.c. $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad F(x) = P_F\{(-\infty, x]\}$

  (2) data una mdp P su $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\quad x \longmapsto P\{(-\infty, x]\} =: F(x)$ è una F di ripartizione

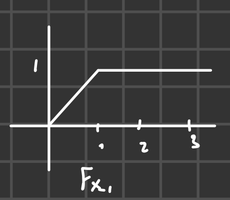
- dim (2)) evento
  - $(-\infty, x] \subseteq (-\infty, b]$ per $x \leq b$ $\rightsquigarrow F(x) = P\{(-\infty, x]\} \leq P\{(-\infty, b]\} = F(b)$ $\rightsquigarrow$ F è mon. non decresc.

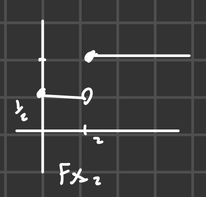
    mdp decresc.
  - siano $A_n = (-\infty, -n]$ t.c. $A_{n+1} \subseteq A_n$ $\rightsquigarrow$ $A_n \downarrow \emptyset$, la continuità di P implica $F(-n) = P\{(-\infty, -n]\} \to P\{\emptyset\} = 0$
    - ci manca esprimere $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ poiché F è monotona
    - analogamente per $x \to +\infty$ dovremmo considerare $B_n = (-\infty, n]$ $\quad B_n \uparrow$ $\rightsquigarrow F(n) = P(B_n) \to P(\Omega) = 1$
      - usando monotonia si ha $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
  - simmo $\forall x \in \mathbb{R}$ con $C_n = (-\infty, x + \frac{1}{n}] \downarrow C = (-\infty, x]$ etc

- Prop) sia $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ $\quad P_X$ (misura immagine)
  - chiamo funz. di rip associata ad X $\quad F_X(x) := \mathbb{P}\{\omega : X(\omega) \leq x\} = \mathbb{P}\{X \leq x\} = P_X\{(-\infty, x]\}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow F_X$ è una formula di ripartiz.
  - dim) corollario della prop vista prima $\quad F_X(x) = P_X\{(-\infty, x]\}$

- estraiamo info dalla funz. di ripartizione
  - oss) Sia X una v.a reale con funz di ripartizione F_X
    - (1) $\mathbb{P}\{X > x\} = 1 - \mathbb{P}\{(X > x)^c\} = 1 - \mathbb{P}\{X \leq x\} = 1 - F_X(x)$
    - (2) $\mathbb{P}\{X \in (a, b]\} = \mathbb{P}\{(X \leq b) \setminus (X \leq a)\} = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}\{X \leq a\} = F_X(b) - F_X(a)$ $\quad a \leq b$
    - (3) $\mathbb{P}\{X < x\} = \lim_{y \uparrow x} F_X(y) = F_X(x^-)$
    - (4) $\mathbb{P}\{X = x\} = \mathbb{P}\{(X \leq x) \setminus (X < x)\} = F_X(x) - F_X(x^-) =$ salto in x di F_X (se è continua vale 0)
      - in particolare se F_X è continua $\mathbb{P}\{X = x\} = 0$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

- (esempi)





(domande tipiche queste sono funz. di ripartizione?)

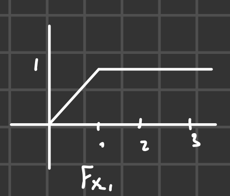
(domanda $\mathbb{P}\{X_1 = 3\}$? $\rightsquigarrow \mathbb{P}\{\dots\} = F_X(3) - F_X(3^-)$ nullo perché F_X è continua)

(domanda $\mathbb{P}(\{X \leq 3\}) = 1$, $\quad \mathbb{P}\{X_1 \in (0,1]\} = F_{X_1} - F_{X_1}(0) = 1 - 0 = 1$

? $\mathbb{P}\{X_2 = 0\}$ $\overset{\text{salto}}{=}$ $F_{X_2}(0) - F_{X_2}(0^-) = \frac{1}{2} - 0$, $\quad$? $\mathbb{P}\{X_2 = 2\} = F_{X_2}(2) - F_{X_2}(2^-) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

- es) esprimere la prob $\mathbb{P}\{X \in (a,b)\} =$ e $\mathbb{P}\{X \in [a,b]\}$

- esempio 1)



è detta v.a con legge uniforme su $[0,1]$ $\rightsquigarrow$ $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x \in [0,1) \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$ $\rightarrow$ $0 \leq a < b \leq 1 \rightsquigarrow \mathbb{P}\{X \in (a, b]\} = b - a$

$= \mathbb{P}\{X \in (a,b)\} = b - a$ perché $\mathbb{P}\{\text{"un punto"}\} = 0$

$= \mathbb{P}\{X \in [a,b]\}$ $\quad \mathrm{Leb}_{[0,1]}((a,b))$

- ∇ $\mathbb{P}\{X \in (-1, -2)\} = 0$, in generale $\mathbb{P}\{X \in A\} = 0$ se $A \cap [0,1] = \emptyset$ $\quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$
  - dimo con $A \subseteq \mathbb{R} \setminus [0,1]$ $\rightsquigarrow \mathbb{P}(X \in A) \leq \mathbb{P}(X \in \mathbb{R} \setminus [0,1]) = \underset{0}{F_X(0)} + \underbrace{1 - F_X(1)}_{0} = 0$

• **Ex 2** sia $X_1 \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$ ossia X_1 ha funz di ripartizione $F_{X_1} =$ 

sia $X_2^{(\omega)} := -\ln\left(X_1^{(\omega)}\right)$

• io so che $\mathbb{P}\{X_1 \in (0,1)\} = 1$ $\rightsquigarrow$ $X_2^{(\omega)} := -\ln(X_1(\omega))\ \mathbb{1}\{X_1(\omega) > 0\}$ con $\mathbb{1}\{\omega : X_1(\omega) > 0\} = \begin{cases} 1 & \text{se } X(\omega) > 0 \\ 0 & \text{se } X(\omega) \le 0 \end{cases}$

$\rightsquigarrow$ ancora + preciso $X_2(\omega) = \begin{cases} \ln(X_1(\omega)) & \text{se } X_1(\omega) > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

esercizio che può capitare

• $F_{X_2}(x) = \mathbb{P}\{X_2 \le x\}$ guardiamo come si comporta $\rightsquigarrow$ se $X_1(\omega) \in (0,1) \rightsquigarrow \underbrace{-\ln(X_1(\omega))}_{X_2(\omega)} > 0$ $\rightsquigarrow \mathbb{P}\{X_2(\omega) > 0\} = 1$

• si prende $A = \{\omega : X_1(\omega) \in (0,1)\}$ $\rightsquigarrow \mathbb{P}(A) = 1$, con $A \overset{\text{implica}}{\subseteq} \{-\ln(X_1(\omega)) > 0\} = \{\omega : X_2(\omega) > 0\} \rightsquigarrow 1 = \mathbb{P}(A) \le \{X_2 > 0\}$ $\rightsquigarrow \mathbb{P}(X_2 > 0) = 1$

• $F_{X_2}(x) = \mathbb{P}\{X_2 \le x\} = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \mathbb{P}\{X_2 \le x\} & x > 0 \end{cases}$ $\quad x > 0$ $\mathbb{P}\{X_2 \le x\} = \mathbb{P}\{X_2 \le x$ $\quad \overset{\text{mi evito } \mathbb{1}}{\mathbb{P}\{X_2 \le x \cap (X_1 \in (0,1))\}} = F_{X_2}(x) = \dots$

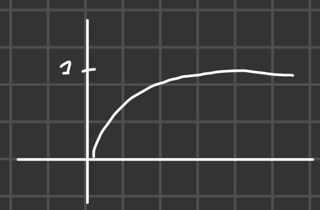
$\mathbb{P}\{X_1 = a\} = 0\ \forall a$

... $\overset{\text{ugu eventi}}{=}$ • $\mathbb{P}\{-\ln(X_1) \le x \cap \{X_1 > 0\}\}) \overset{\text{uguaglianza tra eventi}}{=} \mathbb{P}\{X_1 \ge e^{-x} \cap \{X_1 > 0\}\} \overset{\text{uguaglianza di prob}}{=} \mathbb{P}\{X_1 \ge e^{-x}\} = \mathbb{P}\{X_1 > e^{-x}\} = 1 - F_{X_1}(e^{-x})$

$F_{X_1}(u) = u$ se $u \in (0,1)$

• tot. v.a. da un occhio ai passaggi

• Ho dimostrato $F_{X_2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ 1 - F_{X_1}(e^{-x}) & \text{se } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$



• continua da dx
monotona

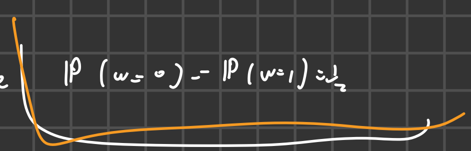
• Funzione di ripartizione esponenziale (negativa)

• **Prop** Se X_1 e X_2 sono var. aleatorie t.c. $F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ $\mathbb{P}\{X_1 \in A\} = \mathbb{P}\{X_2 \in A\}\ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ossia $\overset{\text{legge}}{P_{X_1}} = P_{X_2}$

• **NB** non vuol dire che $\mathbb{P}\{X_1 = X_2\} = 1$ (**NO**)

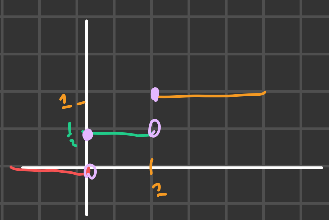
• Ho supposto che X_1, X_2 siano def nello stesso $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

• **esempio** $X_i \in \{0,1\}$, $\Omega = \{0,1\}$ $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ e $\mathbb{P}(\omega = 0) = \mathbb{P}(\omega = 1) = \frac{1}{2}$



$X_1(\omega) = \omega$
$X_2(\omega) = 1 - \omega$
$\rightsquigarrow \mathbb{P}\{X_1 = X_2\} = \mathbb{P}\{\emptyset\} = 0$

• **esercizio** $F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x)$



• **Prop** Sia F una funzione di ripartizione su $\mathbb{R}$ $\rightsquigarrow \exists\ (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ t.c. $F_X = F$