Lez - 08

- SOR e SOR. Avere un accelerazione è utile

- $\alpha_{opt} \overset{\text{autovalori reali positivi}}{=} \dfrac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$, $\rho(B_{\alpha_{opt}}) = 1 - \dfrac{\lambda_n}{\lambda_1+\lambda_n} = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_n - 2\lambda_n}{\lambda_1+\lambda_n} = \dfrac{\lambda_1 - \lambda_n}{\lambda_1+\lambda_n}$

  B_α ha autovalori $1-\alpha\lambda_i$ $\rightsquigarrow$ $B_{\alpha_{opt}}$ ha autovalori $1-\alpha_{opt}\lambda_i$ (il valore max si ha per λ_{min})

- oss) se $P^{-1}A$ è SDP allora $k_2(P^{-1}A) = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_n}$

  P^{-1} deve essere trovato t.c. velocità sia

  - quindi $\rho(B_{\alpha_{opt}}) = \dfrac{k_2(P^{-1}A) - 1}{k_2(P^{-1}A)+1} = \dfrac{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}}{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}+1} = \dots = \dfrac{\lambda_1 - \lambda_n}{\lambda_1 - \lambda_n}$

- corollario) Sia A SDP e abbia autovalori $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Allora RS non precondizionato con α tra $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_1}$ converge e

  $\|e^{(k+1)}\|_A \leq \rho(B_\alpha)\,\|e^{(k)}\|_A \leq \dots \leq [\rho(B_\alpha)]^{(k+1)}\,\|e^{(0)}\|_A$

  - $\|\cdot\|_A$:= dato $\forall z \in \mathbb{R}$ $\|z\|_A^2 = z^T A z$ → questo lo rende problem dependent

    se $A = I$ avremo $\|\cdot\|_2$, quindi introduciamo una metrica che dipende da A

- sia $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$; α, P (I)

  $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$ → LU di P

  for $k = 0, 1, \dots$

  $Pz^{(k)} = r^{(k)}$

  $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha z^{(k)}$

  $r^{(k+1)} = b - Ax^{(k+1)} = \underbrace{b - Ax^{(k)}}_{r^{(k)}} - \alpha A z^{(k)} = r^{(k)} - \alpha A z^{(k)}$

Fine Richardson stazionario

- Metodo di Richardson dinamico (non precondizionato)

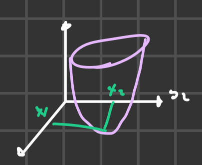
  - $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k r^{(k)}$

  - $\alpha_k = \alpha_{k,opt} = \dfrac{[r^{(k)}]^T r^{(k)}}{[r^{(k)}]^T A\, r^{(k)}}$ $\rightsquigarrow$ applichiamo il metodo del gradiente ??? rivedere come mai

  - Richiamo di equivalenza

  - Lemma) sia A SDP (ipotesi alla base del metodo del gradiente) allora risolvere $Ax = b$ ⟷ $x: \arg\min_{y \in \mathbb{R}^n} \phi(y)$ con $\phi(y) = \frac{1}{2} y^T A y - y^T b$

    (la soluz. del sistema minimizza l'energia)

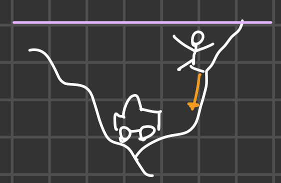


Dim: $\nabla \phi(y) \overset{\text{sfrutto simmetria di A}}{=} \frac{1}{2}(A^T + A)y + b \overset{\text{simmetria A}}{=} \underbrace{Ay - b}_{\text{residuo?}}$

  - $\Leftarrow$ $\nabla\phi(x) = 0$ con $\nabla\phi(x) = Ax - b$ ⟶ $Ax = b$, x soluz. del mio sistema

    se x è minimo $\phi(x+y) > \phi(x)$

  - $\Rightarrow$ $\phi(x+y) \underset{\text{uso Taylor}}{=} \phi(x) + \underset{\text{= 0 per ipotesi?}}{\nabla\phi(x)\cdot y} + \frac{1}{2}\underbrace{y^T A y}_{>0 \text{ poiché } A>0\ \forall y\neq 0} > \phi(x)$ $\forall y \neq 0$

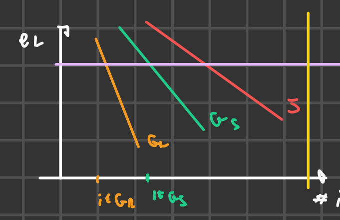


- $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \gamma^{(k)} \delta^{(k)}$ con $\delta^{(k)} = -\nabla\phi(x^{(k)}) = -Ax^{(k)} + b = r^{(k)}$

- $\underbrace{\phi(x^{(k)} + \gamma^{(k)} r^{(k)})}_{=:\, g(\gamma^{(k)})} \underset{\text{Taylor}}{=} \phi(x^{(k)}) + \gamma^{(k)} \overbrace{\nabla\phi(x^{(k)})}^{-r^{(k)}} \cdot r^{(k)} + \frac{1}{2}[\gamma^{(k)}]^2 [r^{(k)}]^T A\, r^{(k)} = \phi(x^{(k)}) - \gamma^{(k)} \|r^{(k)}\|_2^2 + \frac{1}{2}[\gamma^{(k)}]^2 [r^{(k)}]^T A\, r^{(k)}$

- $g'(\gamma^{(k)}) = -\|r^{(k)}\|_2^2 + \gamma^{(k)} [r^{(k)}]^T A\, r^{(k)}$ $\rightsquigarrow$ $\gamma^{(k)}_{opt} = \dfrac{\|r^{(k)}\|_2^2}{[r^{(k)}]^T A\, r^{(k)}}$

- se abbiamo $Ax = b$ con A sdp



a parità di accuratezza cerco di diminuire il numero di iterazioni

a stesso numero di iterazioni controllo l'accuratezza

- Converge? "scendo" a ogni iterata

  - $\phi(x^{(k+1)}) < \phi(x^{(k)})$

  - $\phi(x^{(k)} + \alpha^{(k)} r^{(k)}) = \phi(x^{(k)}) - \alpha_k \|r^{(k)}\|_2^2 + \frac{1}{2}\alpha_k^2 [r^{(k)}]^T A r^{(k)} = \phi(X^{(k)}) - \frac{\|r^{(k)}\|_2^4}{[r^{(k)}]^T A r^{(k)}} + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\|r^{(k)}\|^4}{[[r^{(k)}]^T A r^{(k)}]^2}}_{(\alpha_k^2)} A r^{(k)} = \phi(x^{(k)}) - \frac{1}{2}\frac{\|r^{(k)}\|^2}{[r^{(k)}]^T A r^{(k)}} < \dots$

    $< \phi(x^{(k)})$ ⤳ stiamo convergendo

- a che velocità?

  - TH) sia A sdp allora $\|e^{(k+1)}\|_A = \frac{k_2(A) - 1}{k_2(A) + 1} \|e^{(k)}\|_A$

- se attivo la versione precondizionata?

  - (I) $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, P

    $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$

    for $k = 0, 1, \dots N_{max}$

    $P z^{(k)} = r^{(k)}$

    $\alpha_k = \frac{[z^{(k)}]^T r^{(k)}}{[z^{(k)}]^T A z^{(k)}}$

    $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k z^{(k)}$

    $r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha_k A z^{(k)}$

  - TH) $\|e^{(k+1)}\|_A \le \frac{k_2(P^{-1}A) - 1}{k_2(P^{-1}A) + 1} \|e^{(k)}\|_A$