Lez 12

• **Prop**: sia $I = [x_0, x_n]$ e siano assegnate $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ con gli x_i distinti, se $f \in C^{n+1}(I)$ (il polinomio)

allora $\forall x \in I \quad \exists \ \alpha = \alpha(x) \in I$ t.c. $\quad E_n f(x) = f(x) - \Pi_n f(x) = \dfrac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\alpha(x)) \cdot w_{n+1}(x)$

con $w_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$

- $E_n f(x_i) = 0$

◦ ci ricordo Taylor ⇓

• **Dimo** $\quad G(t) = E_n f(t) - \dfrac{w_{n+1}(t)\, E_n f(x)}{w_{n+1}(x)} \quad$ in $I_x = [x_0, x_n]$,

(x sarà considerato come fisso) (n è ultimo nodo)

- $f(x) \in C^{n+1}$, $\Pi_n \in C^{\infty}$ (polinomi), $w_{n+1}(x) \rightsquigarrow G(t) \in C^{n+1}(I_x)$

- $G(x_i) = 0$ per $i = 0, \dots, n$ e $G(x) = 0$ (per definizione) $\rightsquigarrow$ ho $(n+2)$ zeri

- per teorema di Rolle $\quad G'(t)$ ha almeno $(n+1)$ zeri

$G''(t) \quad$ " $\quad n$

$\vdots$

$G^{(n+1)}(t) \quad$ 1 zero $\to \alpha(x)$

- $G^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \dfrac{(n+1)!\ E_n f(x)}{w_{n+1}(x)}$

- $G^{(n+1)}(\alpha(x)) = f^{(n+1)}(\alpha(x)) - \dfrac{(n+1)!\ E_n f(x)}{w_{n+1}(x)} = 0 \rightsquigarrow E_n f(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\alpha(x))}{(n+1)!} w_{n+1}(x)$

(ci sono sbarazzato di $\alpha(x)$)

• $\|E_n f\|_{\infty, I_x} = \max_{x \in I_x} |E_n f(x)| \leq \dfrac{1}{(n+1)!} \max_{x \in I_x} \left| f^{(n+1)}(x) \right| \max_{x \in I_x} \left| w_{n+1}(x) \right|$

• $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ distribuzione uniforme

passo di discretizzazione $h = \text{cost} = \dfrac{x_n - x_0}{n} \quad \sim \quad x_{k+1} = x_k + h \quad$ per $k = 0, \dots, n-1$

◦ potrei scrivere $\quad x_{k+1} = x_0 + h(k+1) \quad k = 0, \dots, n-1$

(non dipende da k per l'uniformità del passo)

• $|w_{n+1}(x)| \leq \dfrac{h^{n+1}}{4} n!$

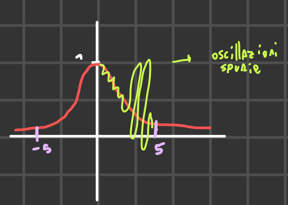
(per nodi uniformi)

• $\|E_n f\|_{\infty, I_x} \leq \dfrac{1}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty, I_x} \dfrac{h^{n+1}}{4} n! = \underbrace{\dfrac{h^{n+1}}{4(n+1)}}_{A} \underbrace{\|f^{(n+1)}\|_{\infty, I_x}}_{B}$

A: per $n \to +\infty$ tende a 0

B: per $n \to +\infty$ dipende
$\to c < +\infty \to$ ✓
$\to +\infty \longrightarrow$ se va $\to +\infty$ + velocemente di A ✗ ; se non va .. .. A ✓
$\to 0 \to$ ✓

• es $\quad f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \quad x \in [-5, 5]$



(va all'infinito rapidamente)

	$\boxed{A}$	$\boxed{B}$	$\boxed{A} \cdot \boxed{B}$
$n=3$	$O(10)$	$O(10^0)$	$O(10)$
$n=9$	$O(10^{-2})$	$O(10^6)$	$O(10^4)$
$n=15$	$O(10^{-5})$	$O(10^{15})$	$O(10^7)$
$n=21$	$O(10^{-10})$	$O(10^{?})$	$O(10^{10})$

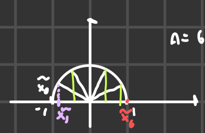
fenomeno di Runge

$n \to +\infty \quad \downarrow\ \infty$

per risolvere questo prob cambio della scelta dei nodi

• **Soluzione 1** nodi di Chebyshev – Gauss – Lobatto (CGL)

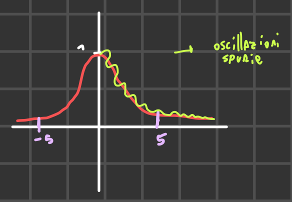
• $[-1, 1] \quad \tilde{x}_i = -\cos\left(\dfrac{\pi i}{n}\right) \quad i = 0, \dots, n \quad \sim$



$i=0 \quad \tilde{x}_0 = -\cos(0)$ → più densi agli estremi che
$i=1 \quad \tilde{x}_1 = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$
$i=6 \quad \tilde{x}_6 = -\cos(\pi) = 1$

creo una mappa

- $\{\tilde{x}_i\} \to \{x_i\}$ $\quad$ $[-1,1] \quad [a,b]$ $\quad \rightsquigarrow \quad x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\tilde{x}_i \qquad i = 0, \dots, n$



scontiamo! però, se scelgo i nodi CGL $\|E_n f\|_{\infty, I_x} \to 0$ $\quad n \to +\infty \quad$ per $f \in C^1(I_x)$

- nodi Chebyshev-Gauss (CG)

  - $[-1,1]$ $\quad x_i^* = -\cos\left[\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right] \qquad i = 0, \dots, n$

$n = 8$

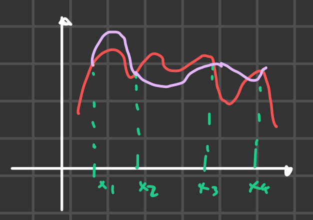
$$x_0^* = -\cos\left[\frac{\pi}{18}\right]$$
$$x_1^* = -\cos\left[\frac{3\pi}{18}\right]$$
$$\vdots$$
$$x_8^* = -\cos\left[\frac{17\pi}{18}\right]$$

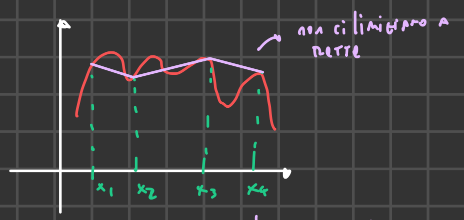
con stesse condizioni ma senza considerare il bordo

- nella pratica però: prendere i nodi in un modo dato è improbabile

- passo da una appross. polinomiale globale a una locale

Interpolazione lineare a tratti (linear piecewise)





buono se infittisco i dati migliora la approssimazione

- per x_i (approccio moderno) non sono uniformi $\rightsquigarrow$ $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ con $x_0, \dots, x_n$ con $i = 0, \dots, n-1$ $\qquad h_i = x_{i+1} - x_i \qquad H = \max h_i$

  - polinomio lineare $\Pi_1^H f \in C^0(I_x)$ $\quad$ t.c. $\quad \Pi_1^H f|_{I_i} \in \mathbb{P}_1(I_i) \qquad \Pi_1^H f(x_i) = y_i \qquad i = 0, \dots, n$

  - $\Pi_1^H f|_{I_i}(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)$

    $(x_i, y_i) \qquad y_i = f(x_i)$
    $(x_{i+1}, y_{i+1}) \qquad y_{i+1} = f(x_{i+1})$

richiesta $C^2(I_x)$

I_i: Errore $\rightsquigarrow \max_{x \in I_i} \left| f(x) - \Pi_1^H f(x) \right| \le \frac{h_i^2}{4 \cdot 2!} \max_{x \in I_i} \left| f^{(2)}(x) \right|$

$$I_x = [x_0, x_n] \qquad \max_{x \in I_x} \left| f(x) - \Pi_1^H f(x) \right| \le \underbrace{\frac{H^2}{8}}_{\boxed{A}} \underbrace{\max_{x \in I_x} \left| f^{(2)}(x) \right|}_{\boxed{B}}$$

A: $\downarrow$ $n \to +\infty$ $\to 0$

B: è sempre una derivata seconda = cost. per $n \to +\infty$ non cambia