LEZ 07

"adesso finiamo quegli"

- **Proposizione:** sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sia tridiagonale, non singolare e t.c $a_{ii} \neq 0$ per $i = 1, \dots, n$

  Allora o sia che J che GS convergono o entrambi divergono, se entrambi sono convergenti:
  allora $\rho(B_{GS}) = [\rho(B_J)]^2$ (+ veloce sarà GS)

- (es) suppongo $\rho(B_J) = \frac{1}{4}$ $\quad \underset{\text{tolleranza}}{TOL}$ $\rightsquigarrow \exists k_{min} \in \mathbb{N}^+ : \left(\frac{1}{4}\right)^{k_{min}} \le TOL \to \frac{1}{TOL} \le 4^{k_{min}} \to \underbrace{\left\lceil \log_4 \frac{1}{TOL} \right\rceil}_{} \le k_{min}$

- sfruttando il risultato $\rho(B_{GS}) = \frac{1}{4^2} \rightsquigarrow \exists k_{min} \in \mathbb{N}^+ : \left(\frac{1}{4}\right)^{2k_{min}} \le TOL \rightsquigarrow \frac{1}{TOL} \le 4^{2k_{min}} \to \log_4 \frac{1}{TOL} \le 2k_{min} \rightsquigarrow \left\lceil \frac{1}{2} \log_4 \frac{1}{TOL} \right\rceil \le k_{min}$

$\rightsquigarrow$ iterazioni GS $\simeq$ it. J

- esempio $Ax = b \rightsquigarrow A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & & 0 \\ -2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $b : x = [1, \dots, 1]^T \rightsquigarrow \rho(B_J) < 1$, $\rho(B_{GS}) < 1$,

  $x^{(0)} = 0$ e $TOL = 10^{-12}$; $\quad \#it_J = 277$
  $\#it_{GS} = 143$

- $\boxed{TH}$ se A è SDP $\rightsquigarrow$ JOR converge, $0 < \omega < \frac{2}{\rho(D^{-1}A)}$
  $\qquad P_J = P_{JOR}$

- $\boxed{TH}$ se A è SDP $\rightsquigarrow$ SOR converge se e solo se $0 < \omega < 2$

- $\boxed{TH}$ se A è SDP e tridiagonale $\rightsquigarrow$ SOR converge se $0 < \omega < 2$ e $\omega_{OPT} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - [\rho(B_J)]^2}}$

Criteri di arresto

1) N_{max}

2) accuratezza

$\exists k_{min} \in \mathbb{N}^+$ t.c $\|x - x^{(k_{min})}\| \le \delta \le TOL \rightsquigarrow \delta \le TOL \rightsquigarrow$ ma potrebbe esserci una costante t.c $c \cdot \delta \le TOL$

c piccolo $\rightsquigarrow$ affidabile

- chi è δ che stima l'errore? quando mi posso fidare

- δ_1 residuo con $r^{(k)} = b - Ax^{(k)} \rightsquigarrow \delta_1 :=$ residuo relativo $= \frac{\|r^{(k)}\|}{\|b\|}$ perchè $\|b\|$?

- $\exists k_{min} \in \mathbb{N}^+$ t.c $\frac{\|r^{(k)}\|}{\|b\|} \le TOL \rightsquigarrow \frac{\|x - x^{(k_{min})}\|}{\|x\|} \le \underset{K(A)}{\overset{\text{condizionatore}}{c}} \frac{\|r^{(k_{min})}\|}{\|b\|} \le TOL$

- $K(A)$? (Hill Beker) $(A + \delta A)(x + \delta x) = (b + \delta b) \rightsquigarrow \delta A = 0 \quad \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le K(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} = K(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}$

  $\hat{x}$
  $\downarrow (-)$
  x
  b

  $\hat{x} = x^{(k)} \rightsquigarrow \frac{\|x - x^{(k)}\|}{\|x\|} \le K(A) \frac{\|r^{(k)}\|}{\|b\|} \rightsquigarrow$ se mettiamo k_{min} abbiamo quello che ci serve

  la convergenza dipende da come è condizionato

- $\delta_2 :=$ incremento $:= \delta \quad x^{(k+1)} - x^{(k)} = \delta^{(k)}$

- $\exists k_{min} \in \mathbb{N}^+$ t.c $\|x^{(k_{min})}\| \le c \, \|\delta^{(k)}\| \le TOL$

- il risultato vale per ogni B ma lo dimostra per B SDP $\to e^{(k_{min})} = x - x^{(k_{min})} + x^{(k_{min}+1)} - x^{(k_{min}+1)} = e^{(k_{min}+1)} + x^{(k_{min}+1)} - x^{(k_{min})} = e^{(k_{min}+1)} + \delta^{(k_{min})}$

$\to \|e^{(k_{min})}\| = \|e^{(k_{min}+1)} + \delta^{(k_{min})}\| \underset{\text{disuguaglianza triangolare}}{\le} \|e^{(k_{min}+1)}\| + \|\delta^{(k_{min})}\| \le \|Be^{(k_{min})}\| + \|\delta^{(k_{min})}\| \underset{\text{comp norma euclidea}}{\le} \|B\|_2 \, \|e^{(k_{min})}\| + \|\delta^{(k_{min})}\| = \rho(B) \, \|e^{(k_{min})}\| + \|\delta^{(k_{min})}\|$

con $\|B\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(B^T B)}$, $\|B\|_2 \big|_{SDP} = \sqrt{\lambda_{max}(B^2)} = \sqrt{[\lambda_{max}(B)]^2} = \lambda_{max}(B) = \rho(B)$

- $[1-\rho(B)]\,\|e^{(k\,min)}\| = \|\delta^{(k\,min)}\|$

→ Regime convergenza ~ $\rho(B) \leq 1$ ~ $\|e^{(k\,min)}\| \leq \dfrac{1}{1-\rho(B)} \|\delta^{(k\,min)}\|$

se $\rho(B) \to 0$ converge → è molto veloce a convergere

Richardson Stazionario

- $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha P^{-1} r^{(k)}$

$\lambda_i \equiv$ Autovalori della matrice $P^{-1}A$

- **TH)** sia P invertibile (non singolare) allora R_S (rich stat) converge $\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ ↔ α è t.c $\dfrac{2\,Re(\lambda_i)}{\alpha\,|\lambda_i|^2} > 1 \quad \forall i$

- **DIM)** $B_\alpha = I - \alpha P^{-1}A$ ~ $\rho(I - \alpha P^{-1}A) < 1$ — autovalori sarà $1-\alpha\lambda_i$ → $|1-\alpha\lambda_i| < 1 \quad \forall i$ ~ max $|\ |$ lo farà

- $= [Re(1-\alpha\lambda_i)]^2 + [Im(1-\alpha\lambda_i)]^2 < 1$ ~ $[1-\alpha\,Re(\lambda_i)]^2 + [\alpha^2\,Im(\lambda_i)]^2 < 1$ → $\cancel{1} + \alpha^2[Re(\lambda_i)]^2 - 2\alpha\,Re(\lambda_i) + \alpha^2[Im(\lambda_i)]^2 < \cancel{1}$

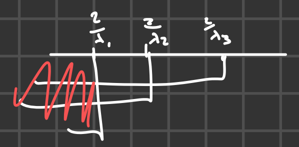
$= \dfrac{\alpha|\lambda_i|^2 - 2\alpha\,Re(\lambda_i)}{\alpha|\lambda_i|^2} < 0$ → $1 - \dfrac{2\alpha^2 Re(\lambda_i)}{\alpha^2|\lambda_i|^2} < 0$ ~ $1 < \dfrac{2\cancel{\alpha^2} Re(\lambda_i)}{\cancel{\alpha^2}|\lambda_i|^2}$

- **TH)** sia P invertibile e $P^{-1}A$ abbia tutti autovalori reali e positivi (t.c $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$)

Allora (RS) converge $\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ ↔ $0 < \alpha < \dfrac{2}{\lambda_1}$, inoltre $\rho(B_\alpha)$ è minimo se $\alpha = \alpha_{opt} = \dfrac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$

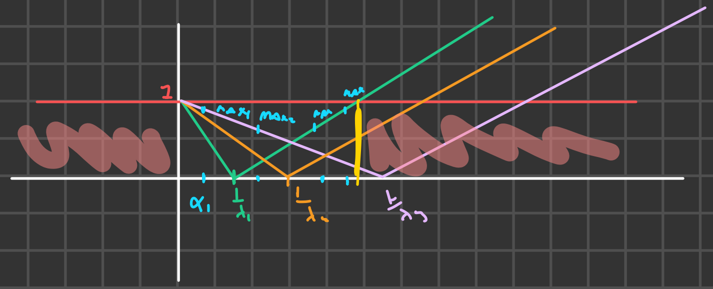
Figlia dimo di prima

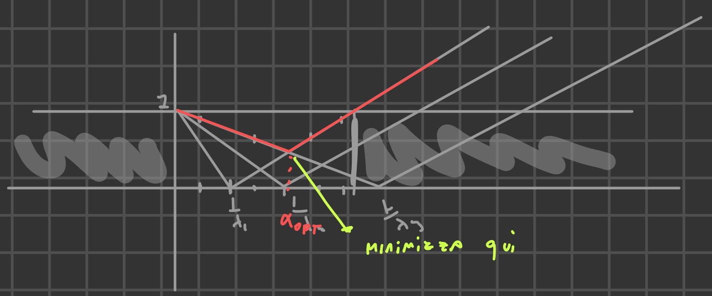
- $1 < \dfrac{2\lambda_i}{\alpha|\lambda_i|^2}$ $\quad \alpha < \dfrac{2}{\lambda_i}$



- Dimo ② (caso con 3 autovalori)

- $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 > 0$ ↦ $1-\alpha\lambda_1$, $1-\alpha\lambda_2$, $1-\alpha_3$ ~ voglio studiare il comportamento del modulo $|1-\alpha\lambda_1|$, $|1-\alpha\lambda_2|$, $|1-\alpha\lambda_3|$





α_{opt} sarà $\underline{1-\alpha\lambda_3} = \underline{\alpha\lambda_1 - 1}$ ~ $2 = \alpha(\lambda_1 + \lambda_3)$ ~ $\alpha_{opt} = \dfrac{2}{\lambda_1 + \lambda_3}$