

Esercizio 6

Esercizio 1

risale nella
storia

p

X_n è una v.a. (esempio) reale discreta

significato: n-esima prova successo

$$P[X_n = 2] = P[\omega \in E_n] = p \Rightarrow P[X_n = 0] = 1 - p$$

Es. 1 $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$
 $\mathcal{F} = \sigma(\{E_k : k \in \mathbb{N}\})$
con $E_k = \text{"buccia alla prova k"}$
 $IP: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$
 $IP[E_k] = p, \quad k \in \mathbb{N}$ indipendenti

$X_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
 $X_n(\omega) = \omega_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(in $\omega = \{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$)

$X_n(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \notin E_n \\ 1 & \omega \in E_n \end{cases} = \mathbb{1}_{E_n}(\omega)$
 X_n è una v.a. (esattamente) reale discreta.
 $IP[X_n = 1] = IP[\omega \in E_n] = p$
 $\Rightarrow IP[X_n = 0] = 1 - p$

$\Rightarrow X_n \sim \text{Be}(p)$
 $X_n = \sum_{i=1}^n X_i$
 $X_n \sim \text{Bi}(n, p)$

$IP[X_n = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
Oss! Per calcolare $E[X_n]$ si può anche procedere così:
 $E[X_n] = E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right]$

$= \sum_{i=1}^n E[X_i] = np$
 $\textcircled{2} Z = \min\{n \in \mathbb{N} : X_n = 1\}$
 $Z \sim (1, \mathbb{Z}, IP) \rightarrow (NU(n), (1-p)^{n-1} p)$

Z è l'indice della prova in cui si ottiene il primo successo. Sia $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
 $IP[Z = k] = P[\text{"nei k-1 tentativi si ha successo 0 e quest'indice"}] = (1-p)^{k-1} p$
 $IP[Z = +\infty] = 1 - IP[Z \in \mathbb{N}] = 1 - P\left[\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{Z = k\}\right]$

$= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} IP[Z = k]$
 $= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1}$
 $= 1 - p \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1}$
 $= 1 - p \frac{1}{1-(1-p)} = 1 - 1 = 0$

$\textcircled{2} W = \text{"numero di tentativi prima del primo successo"}$
È chiaro per def. l'equ. che $W = Z - 1$
Sia $k \in \mathbb{N}$
 $IP[W = k] = IP[Z = 1 + k] = IP[Z = k + 1] = (1-p)^k p$

Diciamo che $Z \sim \text{Geom}(p)$ e W è una geometria troncata di parametro p .
Oss! Analogamente, $IP[W = +\infty] = IP[Z = +\infty] = 0$.

Esercizio 2

caso con per missione

Es. 2
 X_i "indice di estrazione dalla prima urna (bianca) rossa"
Ad ogni estrazione, arrotondando l'indice "a" alle frazioni intere, si "0" alle bianche e altrimenti, delle X_n è stato in (una estrazione) $\{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

$X_n \sim \text{Poi}\left(\frac{R}{R+B}\right)$
Dunque $X_n \sim \text{Geom}\left(\frac{R}{R+B}\right)$
 $\textcircled{2}$ Sia $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, W_n "indice di estr. dalla k-esima urna rossa"
Per calcolare $E[Y_k]$.

Idea:
 $Y_k = Y_1 + (Y_1 - Y_1) + (Y_1 - Y_1) + \dots + (Y_1 - Y_{k-1})$
E' chiaro che $Y_{k+1} \geq Y_k$
 $IP[Y_2 - Y_1 = 1 | Y_1 = k] = \frac{IP[Y_2 - X_1 = 1 \wedge Y_1 = k]}{IP[Y_1 = k]}$

$= \frac{(1-p)^{k+1} p (1-p)^{k-1} p}{(1-p)^k p} = (1-p)^{k+1} p$
 $\Rightarrow E[Y_k] = E[Y_1] + \sum_{i=2}^k E[Y_i - Y_{i-1}] = k E[Y_1]$

$IP[Y_2 - Y_1 = 1 | Y_1 = k] = IP[Y_1 = k] = (1-p)^k p$
 $= k E[Y_1] = \frac{k}{p}$

$E[Y_k] = \sum_{k=1}^{+\infty} k IP[Y_1 = k] = p \sum_{k=1}^{+\infty} k (1-p)^{k-1}$
 $= p \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d}{dp} (-(1-p)^k) = -p \frac{d}{dp} \left[\frac{1}{p} - 1 \right]$
 $= -p \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p} \right) = \frac{1}{p}$

$\textcircled{3}$ Estraggo solo biglie bianche
 $\Rightarrow IP[Y_1 = +\infty] = 0$.
la probabilità di estrarre n biglie rosse è $\left(\frac{R}{R+B}\right)^n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.

Esercizio 3

$\textcircled{5}$ Estraggo solo biglie bianche
 $\Rightarrow IP[Y_1 = +\infty] = 0$.
la probabilità di estrarre n biglie rosse è $\left(\frac{R}{R+B}\right)^n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.

Es. 3 $X \sim \text{Pois}(3)$
 $Y = \min(X, 3) \quad W = e^{X/3}$
Poiché Y e W sono funzioni misurabili di X allora sono v.a. discrete reali.
Poiché $X \sim \text{Pois}(3)$, $IP[X = n] = \frac{3^n}{n!} e^{-3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 $Y = \begin{cases} 3 & \text{se } X \geq 3 \\ X & \text{se } X < 3 \end{cases}$

$Y = X \mathbb{1}_{X < 3} + 3 \mathbb{1}_{X \geq 3}$
 $IP[Y = 3] = IP[X \geq 3] = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} e^{-3}$
 $IP[Y = k] = IP[X = k] = \frac{3^k}{k!} e^{-3}$
per $k \in \{0, 1, 2\}$

W è una funzione misurabile di X
Insomma l'immagine di W è $\{e^{k/3}\}_{k \in \mathbb{N}}$
 $\Rightarrow IP[W = e^{k/3}] = IP[X = k] = \frac{3^k}{k!} e^{-3}, k \in \mathbb{N}$
Insomma
 $E[Y] = 0 \cdot \frac{3^0}{0!} e^{-3} + 1 \cdot \frac{3^1}{1!} e^{-3} + 2 \cdot \frac{3^2}{2!} e^{-3} + e^{-3} \sum_{k=3}^{+\infty} 3 \cdot \frac{3^{k-1}}{(k-1)!} \approx 2.33$

$E[W] = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{k/3} \cdot \frac{3^k}{k!} e^{-3}$
 $= e^{-3} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(3e^{1/3})^k}{k!} = e^{-3} e^3 = 1$
o 3.28

$$\mathbb{E}[W] = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k/3} \cdot \frac{3^k}{k!} e^{-1}$$

$$= e^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(3e^{-1/3})^k}{k!} = e^{-1} e^1 = 1$$

$$\Omega = \{B, RB, RRB, \dots, \underbrace{R \dots R}_k B, \underbrace{R \dots R}_{k+1} B\}$$

$$\mathbb{P}[B] = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}[RB] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}[RRB] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}[RR \dots R B] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \dots \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \cdot 3^k}$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2 \cdot 3^k} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - 1/3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\mathbb{P}[RR \dots R] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \dots = \frac{1}{2 \cdot 3^k}$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2 \cdot 3^k} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - 1/3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\mathbb{P}[X = k+1] = \frac{1}{2 \cdot 3^{k+1}}$$

$$\mathbb{P}[X = 0] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3+1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot \mathbb{P}[Y = k]$$

$$\mathbb{P}[Y = n] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2 \cdot 3^n}$$

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot \frac{1}{2 \cdot 3^k} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1/3}{(1 - 1/3)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1/3}{(2/3)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1/3}{4/9} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \mathbb{P}[RR \dots R B]$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \dots \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{k+1} \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k+1} = +\infty$$