

L62 03

• mi sono perso le condizioni

• Condizioni sufficienti per garantire $\exists!$ LU

• sono ...

• classe 1: se A è a dominanza diagonale stretta per righe, allora $\exists!$ la fattorizzazione LU

• dom. diag. stretta per righe se le entrate $\leadsto |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ (errore classico: pensare valori assoluti)

• (es) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

• classe A " " per colonne, " $\exists!$ " in LU $\leadsto |a_{jj}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$ $j=1, \dots, n$ (sono due famiglie separate)

• 3 classe se A è una matrice simmetrica e definita positiva $\leadsto \exists!$ la fattorizzazione LU

• simmetrica $A = A^T \iff a_{ij} = a_{ji}$ con $i, j = 1, \dots, n \iff \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & x \\ 0 & \end{bmatrix}$

• matlab: $(A == A')$

• definita positiva $v^T A v > 0 \quad v \neq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$

• matrice simmetrica \leadsto Autovalori $\in \mathbb{R}$ è def. positiva se tutti $\lambda_i > 0$

• matlab: "eig(A)"

perché?

1) cond. necess. e suff. $\times \exists!$ LU (A potrebbe essere singolare)

2) 3 cond. suff. $\leadsto \exists!$ LU

3) voglio capire se posso garantire $\exists!$ LU per A che non soddisfa \rightarrow e2) ma con A non singolare (conf. vincolata ma non così tanto)

• se non fossi in una di queste cond. sufficienti?

• matrice problematica $A \sim A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[m_{31}=3]{m_{21}=2} A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ \cdot & \textcircled{0} & -4 \\ \cdot & 3 & -9 \end{bmatrix}$ proviamo a risolvere questo prob

• (e3) se fin dall'inizio $\hat{A} \sim \hat{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\hat{m}_{31}=2]{\hat{m}_{21}=3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ \cdot & \textcircled{3} & -6 \\ \cdot & \cdot & -4 \end{bmatrix}$ l'elemento pivotale è $\neq 0$ e ho fatto un passo in meno

• sia $A^{(i)} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{ii}^{(i)} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$ $a_{ii}^{(i)} = 0$ bisogna capire quanto scambiare e con chi scambiare

• criterio possibile $a_{i+1,i}^{(i)} \neq 0 \leadsto$ scambio il pivot

• matematicamente si capisce con le matrici di permutazione

• P è una matrice e.c. $P^T P = P P^T = I$ con $I = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$ la matrice che scambia la 2^a e 3^a riga $\leadsto P = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot \end{bmatrix}$

• $PA \sim LU$ con $P = \Pi_i$

• se voglio la form LU si: $PA \leadsto A \leadsto L \leadsto PAx = Pb \leadsto \underbrace{LU}_y = Pb \leadsto \begin{cases} Ly = Pb \\ Ux = y \end{cases}$

• $a_{ij}^{(i)} \neq 0 \leadsto a_{k+1,k}^{(k)} = 10^{-15} \leadsto A^k = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{kk}^{(k)} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \xrightarrow{m_{k+1,k} = \frac{a_{k+1,k}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{kk}^{(k)} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$ la moltiplicazione diventa molto grande calcolando l'un ordine di arrotondamento non si può propagarsi
 $m_{r,k} = \frac{a_{rk}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$

• (es) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1.05 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ $\xrightarrow{\sim 0 \text{ ma non zero}}$ $A = LU = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 4 \end{bmatrix}$ \sim normale: pivoting va applicato sempre

• pivoting parziale costo n^2 $PA = LU$

pivoting totale: incolla tutta la sotto matrice (quindi scambio di righe e per colonne) $\begin{matrix} \text{non} & \text{colonne} \\ P = I & Q = I \end{matrix} \rightarrow PAQ = LU$

• $Ax = b$ $\rightarrow \underbrace{PAQ}^Z Q^T x = \underbrace{Pb}_y$ $\begin{cases} LZ = y \\ Ux = z \\ Q^T x = y \end{cases}$

$PAx = Pb$

• domanda da esame: A cosa serve il pivoting

• argomento $[L, U, P] = \text{LU}(A)$ fanno sempre $\text{spy}(L), \text{spy}(U), \text{spy}(P)$ (con vedere se ci son c'è zero pivoting o no)

$\Delta \quad \triangleleft$

• non vuole $[L, U]$, P verrà calcolato sempre \sim se faccio $A = LU$ allora $PA = LU \sim A = P^{-1}LU$

se faccio spy
L non lo vedo un
 Δ

• ~~problem~~ vediamo come la fatt. LU si modifica per una matrice TRI DIAGONALE

• $A = \begin{bmatrix} \diagup & & \\ & \diagup & \\ & & \diagup \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \cdot & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & \diagup & \\ & & \diagup \end{bmatrix}$

un sacco di commenti:
per copiar tutto come
ho riscritto

• (3x3) $A = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & 0 \\ b_1 & a_2 & c_2 \\ 0 & b_2 & a_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ b_2 & 1 & \\ & b_3 & 1 \end{bmatrix}}_L \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & c_1 & \\ & a_2 & c_2 \\ & & a_3 \end{bmatrix}}_U \sim x_1 = c_1, x_2 = c_2$

\uparrow \downarrow \uparrow \downarrow

$\begin{bmatrix} 1 & & \\ b_2 & 1 & \\ & b_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & \\ & a_2 & c_2 \\ & & a_3 \end{bmatrix} \sim \begin{matrix} \alpha_1 = a_1 \\ \beta_1 \alpha_1 = c_2 \rightarrow \beta_1 = \frac{c_2}{\alpha_1} \\ \beta_2 c_1 + \alpha_2 = a_2 \rightarrow \alpha_2 = a_2 - \beta_2 c_1 \\ \beta_3 \alpha_2 = c_3 \rightarrow \beta_3 = \frac{c_3}{\alpha_2} \end{matrix}$

• (n x n) $\xrightarrow{\text{passo 1}} \alpha_1 = a_1 \rightarrow \beta_i = \frac{c_i}{\alpha_{i-1}} \rightarrow \alpha_i = a_i - \beta_i \cdot c_{i-1}$ per $i = 2, \dots, n$

• costo totale algoritmo $\forall \beta_i$ ho una divisione \sim costo complessivo $3(n-1)$
 $\forall \alpha_i$ ho una moltip. e una sottrazione