Ese 3

- di che si parla?
- scheda 3

- **Es. 1**

  - caso con reimissione

    - sia $\mathcal{B}$ l'insieme delle biglie (non ripetuto) $\mathcal{B} = \{B, R, G\}$ ~ definiamo $\Omega = \mathcal{B}^4$ con la consueta σ-algebra delle parti
    - Problema: viene a meno l'equiprobabilità (ci sono più rossi [meno male]) ~ le "numeriamo" in modo da ricondurci a prima (senza citie) così da lavorare su $\mathcal{B}^4$
    - Assumeremo che le 10 biglie siano tutte distinguibili, per comodità ~ si ha card $\Omega = |\Omega| = 10^4$ (esiti distinguibili)
    - devo estrarre $(2B, 1R, 1G)$ ~ basta considerare quante seq. (a prescindere dall'ordine) ~ # biglie è il numero di anagrammi di BBRG

    ovvero $\frac{4!}{2!} = 12$ (non tiene conto di quali biglie sto estraendo) ~ qualunque modo

    - otteniamo dunque
    $$\mathbb{P}[(2B, 1R, 1G)] = \frac{\overbrace{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2}^{\text{biglie colorate}}}{\underbrace{10^4}_{\text{cardinalità } \Omega}} \cdot \left.\frac{4!}{2!}\right]^{\text{permutazioni}} = \frac{27}{250} \underset{\text{si può interpretare}}{=} \overbrace{\left(\frac{3}{10}\right)\cdot\left(\frac{3}{10}\right)\cdot\left(\frac{5}{10}\right)\left(\frac{2}{10}\right)}^{\text{prob di avere una delle ...}}\left(\frac{4}{2!}\right) =$$
    fattore che considera l'ordine

  - caso senza reimissione

    - sp di tutte le ... in $\mathcal{B}^4$, lavoro nel framework delle tutte distinguibili
    - $\Omega = \{4\text{-ple di elementi distinti nell'insieme delle biglie}\}$
    - la cardinalità di Ω è card $\Omega = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$
    - fissando un ordine (per comodità), $\begin{matrix} B & B & R & G \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 5 & 2 \end{matrix}$ → scelte possibili, con $\frac{4!}{2!}$ ordini possibili ~ $\mathbb{P}[(2B, 1G, 1R)] = \frac{3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} \cdot 12$

    poter permutare deriva da equiprob

  - caso simultaneo

    - simultaneo → cambia Ω, tutto, ma probabilità no
    - seleziono $\Omega \overset{!}{=} \{\text{Sottoinsiemi di biglie con 4 elementi}\}$ e card $\Omega = \binom{10}{4}$ (simultaneo lavoro con sottoinsiemi)
    - seleziono un sottoinsieme di lungh 2 dall'ins. biglie rosse ~ $\mathbb{P}[(2B, 1R, 1G)] = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{1}\binom{2}{1}}{\binom{10}{4}} = \frac{1}{7}$

Es 2 $R + B = N$? esattamente k di n biglie sono rosse $= E_{k,n}$

fisso n t.c. $0 \le n \le N$

fisso $0 \le k \le n$

- Rispetto a una scelta di Ω a una scelta di Ω, sia p la probabilità cercata $(p = p(k,n))$ $p = \mathbb{P}[E_{k,n}]$

- caso con reimissione

  - fisso per comodità $\underbrace{RRR \dots R}_{k}$ $\underbrace{B \dots B}_{n-k}$ per ogni prob di n e k si ha $p = \left(\frac{R}{R+B}\right)^k \left(\frac{B}{R+B}\right)^{n-k} \binom{n}{k}$ [distribuzione binomiale]

- caso senza reimissione

  - fisso $k \le R$, $n \le N$ (non posso estrarre infinite biglie) $\underbrace{RR \dots R}$ $B \dots B$ ~ ragiono uguale ma con le biglie che decrescono

  $$\sim p = \frac{\overbrace{\frac{R!}{(R-k)!}}^{R(R-1)\cdots(R-(k+1))} \frac{B!}{(B-(n-k))!} \overbrace{\frac{n!}{R!\,(n-R)!}}^{\frac{n!}{k!\,(n-k)!}}}{\left.\frac{N!}{(N-n)!}\right] \text{cardinalità } \Omega} = \frac{\frac{R!}{k!\,(R-k)!} \frac{B!}{(n-k)!\,(B-(n-k))!}}{\frac{N!}{(N-n)!\,n!}} = \frac{\binom{R}{k}\binom{B}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

  [ipergeometrica]

  espando; estraggo n; modi di permutare

  card $\Omega = N(N-1)(N-2)\cdots(N-(n+1))$

  modo di scrivere l'estrazione simultanea pure

ES. 3 (prova itinere) tazzine e piattini

- (1) che sp. camp conviene? quello delle combinazioni perché sto scegliendo 2

  - prob di estrarre 2 set dello stesso colore è 3 {coppia colore 1, 2, 3} possibili estrazioni $p = \frac{3}{\binom{6}{2}} = \frac{3!}{\frac{6!}{2!\,4!}} = \frac{3 \cdot 2}{30} = \frac{1}{5}$

  A e A^c

- (2) $\mathbb{P}[\text{set abbinati dopo l'estrazione}] = \mathbb{P}[\text{set abbinati dopo l'estrazione} \cap \text{set uguali}] + \mathbb{P}[\dots \dots \cap \text{set diversi}] = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$

  prob totali; $\frac{1}{5}$; $\left(\frac{4}{5}\right) = 1 - \frac{1}{5}$ set diversi $= \frac{2}{4}$

- 3

- "tazzine e piattini devono essere contate entrambi insieme" "in realtà i piattini non "servono", posso appoggiarli e muovere le tazzine di conseguenza"
- senza perdita di generalità, assumiamo che l'ordine dei piattini sia fissato $\rightsquigarrow$ dunque le configurazioni sono $\frac{6!}{2!\,2!\,2!} = 90$
- a fronte di una sola configurazione corretta, si ha che la prob dei set $\rightsquigarrow$ $\mathbb{P}[\text{set abbinati sul vassoio}] = \frac{1}{90}$

indipendenza tra eventi

ES 4 | 1 dado equo (prob uniforme) lanciato due volte $A\{\text{dispari al } 1^\circ \text{ lancio}\}$ $B\{\text{dispari } 2^\circ \text{ lancio}\}$ $C\{\text{somma dispari}\}$ dimostrare indipendenza

- sia $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$ e $\mathcal{P}(\Omega)$ la σ-algebra delle parti . ($\mathbb{P}$ uniforme)
- $\mathbb{P}[A] \overset{\text{spiegazione}}{=} \frac{1}{2}$
- $\mathbb{P}[B] = \frac{1}{2}$
- $\mathbb{P}[C] = \mathbb{P}[\text{un lancio è dispari, l'altro pari}] = \mathbb{P}[1^\circ \text{ dispari}, 2^\circ \text{ pari}] + \mathbb{P}[1^\circ \text{ pari}, 2^\circ \text{ dispari}] = \frac{1}{2}$
  - $\mathbb{P}[A \cap B] \overset{\text{ind}}{=} \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B] = \frac{1}{4}$

    $\underset{\text{prob condizionata}}{\mathbb{P}[A \cap C] =}$ $\mathbb{P}[C \cap A] = \underbrace{\mathbb{P}[C|A]}_{\text{esito del secondo pari} \to \frac{1}{2}}^{\text{bisogna comportarsi che A sia vera}} \overset{\frac{1}{2}}{\mathbb{P}[A]} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ indipendente

- $\mathbb{P}[B \cap C] = \frac{1}{4}$

- $\mathbb{P}[\overbrace{A \cap B \cap C}^{\text{impossibile}}] = 0 \neq \left(\frac{1}{2}\right)^3$ $\rightsquigarrow$ sono a coppie indipendenti ma non una famiglia di eventi indipendenti

- ES 5

- suppongo uno sp. prob $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $\{E_i\}_{i \in I}$
  - (a) falso (vedi esercizio 4)
  - (b) $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} E_i\right) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(E_i)$ $\forall J \subset I$ finito V

    - oss | fissiamo $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$

    - suppongo (b) è vero $\rightsquigarrow$ $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} E_i\right) = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}[E_i] = \lim_{n \to +\infty} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}[E_i] = \mathbb{P}\Big(\text{"}\lim_{n \to +\infty}\text{"} \underbrace{\bigcap_{i \in J_n} E_i}_{\text{successione monotona}}\Big) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in \{1,\dots,n\}} E_i\right) = \lim_{n \to +\infty} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i)$