Lez 15

- Valore atteso per v.a qualunque

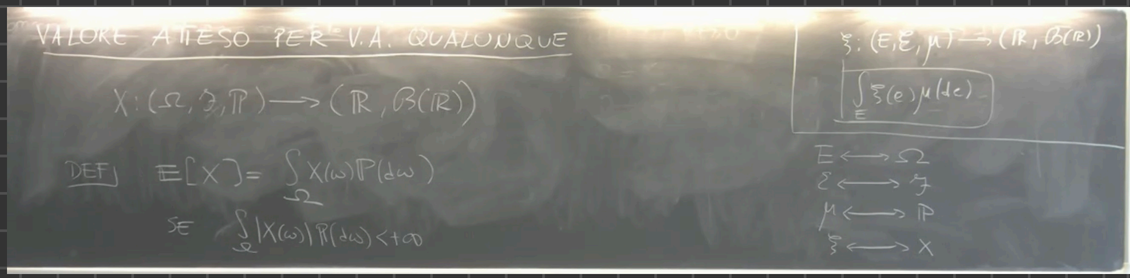
$$X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

è una funz. misurabile? sì

...

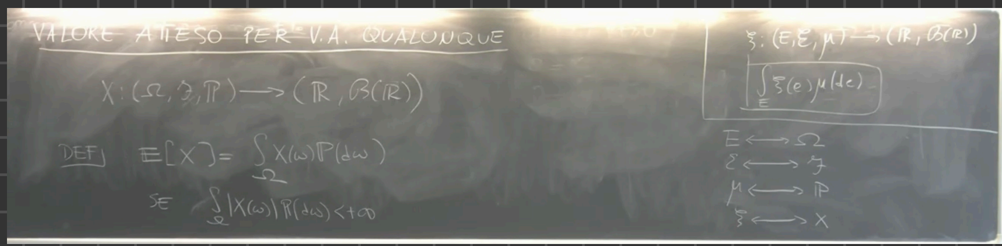
- Ricordo che se abbiamo $\xi : (E, \mathcal{E}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ abbiamo descritto questo oggetto : $\boxed{\int_E \xi(e)\, \mu(de)}$ questo è un simbolo

- prendo
  - $E \longleftrightarrow \Omega$
  - $\mathcal{E} \longleftrightarrow \mathcal{F}$
  - $\mu \longleftrightarrow \mathbb{P}$
  - $\xi \longleftrightarrow X$



- def) $\mathbb{E}[X] := \int_\Omega X(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega)$ se $\int_\Omega |X(\omega)|\, \mathbb{P}(d\omega) < +\infty$ (int assoluto del modulo)

- oss) (1) considero le semplici $\sum_{i=1}^{n} c_i \, \mathbb{1}_{A_i}(\omega)$ con $c_i \geq 0$, $A_i \in \mathcal{F}$ $\quad \mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \mathbb{P}(A_i)$
  - (2) prendo $X \geq 0$ $\quad S_n(\omega) \nearrow X(\omega) \quad \leadsto \quad \mathbb{E}[X] := \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}[S_n] \in [0, +\infty]$
  - (3) per $\forall X$ se $\mathbb{E}[X^+] < +\infty$, $\mathbb{E}[X^-] < +\infty \quad \leadsto \quad \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X^+] - \mathbb{E}[X^-]$

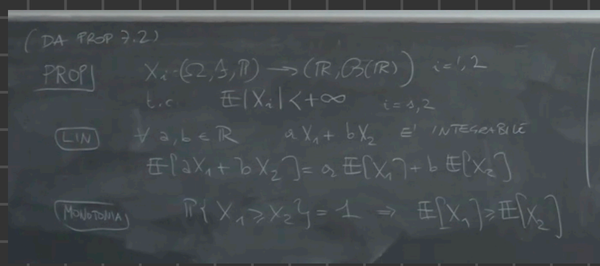


- definizione equivalente moreno
  - $X \geq 0 \quad \mathbb{E}[X] = \sup_{\substack{S \text{ semplice} \\ 0 \leq S(\omega) \leq X(\omega) \ \forall \omega}} \mathbb{E}[S]$ (+ generale)

  aggiungi la spiegazione a voce

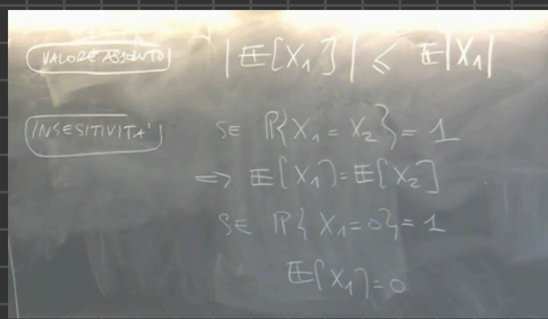
- $\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega)$ scritture equivalenti, una + esplicita di un'altra (in letteratura fisica $\langle X \rangle$)

- prop) (da prop 7.2)
  - linearità) preso $X_i : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ t.c $\mathbb{E}|X_i| < +\infty$ (v.a integrabili) con $i = 1, 2$



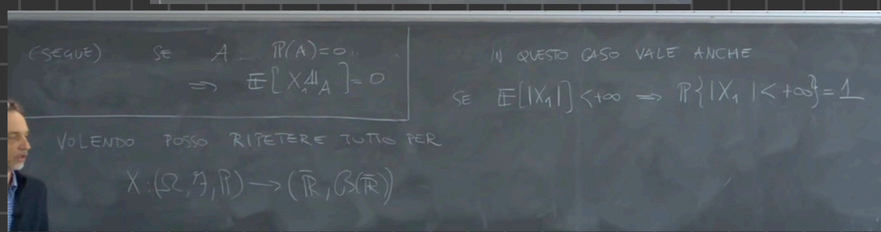
...

- valore assoluto) $|\mathbb{E}[X_1]| \leq \mathbb{E}|X_1|$
- insensitività) se $\mathbb{P}\{X_1 = X_2\} = 1 \quad \leadsto \quad \mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2]$, in particolare se $\mathbb{P}\{X_1 = 0\} = 1 \quad \leadsto \quad \mathbb{E}[X_1] = 0$



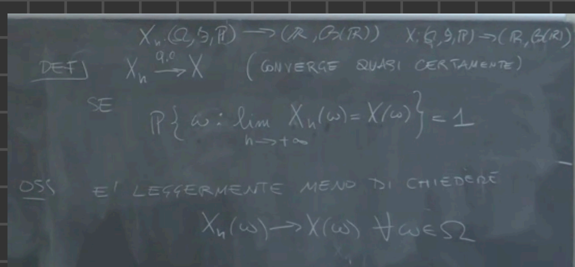
- (corollario) se $A : \mathbb{P}(A) = 0 \quad \leadsto \quad \mathbb{E}[X_1 \mathbb{1}_A] = 0$
- volendo posso ripetere tutto per v.a che possono assumere $\pm\infty$ $\quad X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$

  in questo caso vale anche se $\mathbb{E}[|X_1|] < +\infty \quad \leadsto \quad \mathbb{P}\{|X_1| < +\infty\} = 1$



- oss) $\mathbb{E}[X]$ dipende in "teoria" da tutto $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, X)$, vedremo che in realtà dipende solo da P_X

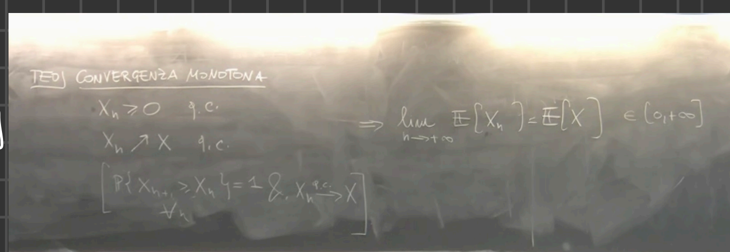
- def) supponiamo $X_n : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ $\quad X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (una candidata a limite)
  - $X_n \xrightarrow{q.c} X$ (converge quasi certamente) se $\mathbb{P}\{\omega : \lim_{n \to +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} = 1$



- oss) è leggermente meno di chiedere che $X_n(\omega) \to X(\omega) \ \forall \omega \in \Omega$

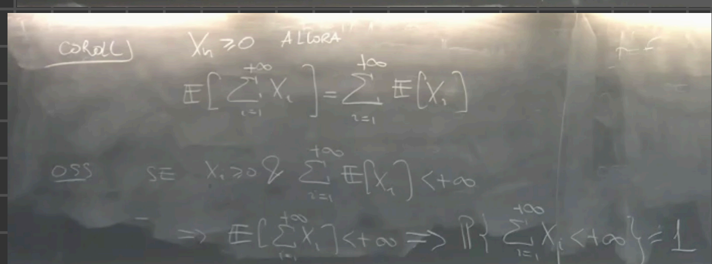
- Teo) Conv. monotona

$$\text{se} \begin{cases} X_n \geq 0 \quad q.c \\ X_n \nearrow X \quad q.c \quad [\mathbb{P}\{X_{n+1} \geq X_n\} = 1 \text{ e } X_n \xrightarrow{q.c} X \quad \forall n] \end{cases} \quad \leadsto \quad \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X] \in [0, +\infty]$$

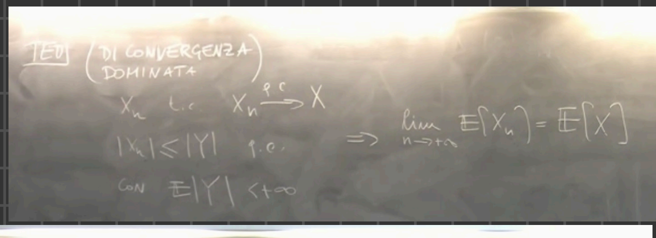


- corollario) $X_n \geq 0$ allora $\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{+\infty} X_i\right] = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{E}[X_i]$ pr

- conseguenza $\leadsto$ oss) se $X_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{E}[X_i] < +\infty \quad \leadsto \quad \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{+\infty} X_i\right] < +\infty \quad \leadsto \quad \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{+\infty} X_i < +\infty\right\} = 1$



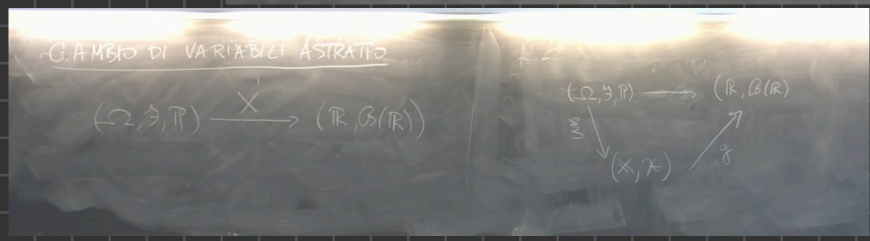
• Teorema di convergenza dominata, sia X_n t.c. $X_n \xrightarrow{q.c} X$ e $|X_n| \leq |Y|$ q.c con $\mathbb{E}|Y| < +\infty$ $\rightsquigarrow$ $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X]$

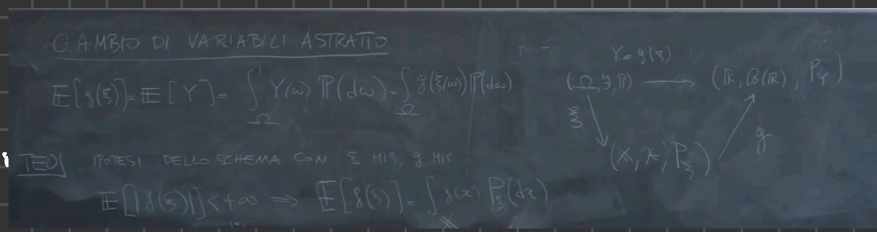


• adesso X_n non deve essere a positiva bensì fanlo per ogni n e Y devono essere integrabili

• X_n possono divergere? no, perché vale la monotonia

• cambio di variabili astratto



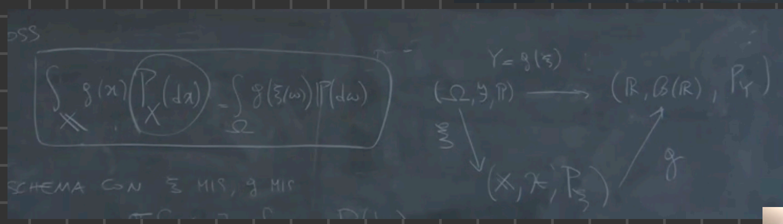


Teo

• nelle ipotesi dello schema con ξ mis, g mis; $\mathbb{E}[|g(\xi)|] < +\infty$ $\rightsquigarrow$ $\mathbb{E}[g(\xi)] = \int_{\mathcal{X}} g(x) \, \mathbb{P}_\xi(dx)$

dove $P_\xi(A) = \mathbb{P}\{\xi \in A\}$ $A \in \mathcal{X}$

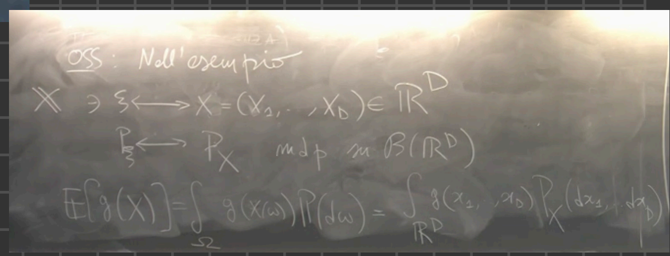
ossia $\rightsquigarrow$ $\int_{\mathcal{X}} g(x) \, P_x(dx) = \int_\Omega g(\xi(\omega)) \, \mathbb{P}(d\omega)$



• oss: Nell'esempio

$\mathcal{X} \ni \xi \longleftrightarrow X = (X_1, \dots, X_D) \in \mathbb{R}^D$ $\qquad$ $\mathbb{E}[g(X)] = \int_\Omega g(X(\omega)) \, \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^D} g(x_1, \dots, x_D) \, P_x(dx_1, \dots, dx_D)$

$P_\xi \longleftrightarrow P_X$ mdp su $\mathcal{B}(\mathbb{R}^D)$



• oss 2

sia $\mathcal{X} \ni \xi \longleftrightarrow X \in \mathbb{R}$ e $g(x) = x$ $\Rightarrow$ $\mathbb{E}[X] \overset{\text{ossia}}{=} \int_\Omega X(\omega) \, \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} x \, P_x(dx)$ (uso la legge immagine)

• più in generale $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ $\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) \, P_x(dx)$

• "corollario" se $X \overset{\text{legge}}{=} Y$ e $\mathbb{E}|g(x)| < +\infty$ $\rightsquigarrow$ $\mathbb{E}[g(X)] = \mathbb{E}[g(Y)]$ (posso parlare di valore atteso)

$P_x = P_y$ $\leftrightarrow$ $\forall_B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^D)$ ie $\mathbb{P}\{X \in A\} = \mathbb{P}\{Y \in B\}$

• Due casi importanti:

• (1) $X = \mathbb{R}$ discreto $\Rightarrow$ $[g(x)] = \sum_{x \in \mathbb{R}^D} g(x) \, \underset{\text{densità discreta}}{p_x(x)}$ (se $\sum |g(x)| \, p_x(x) < +\infty$) non ha parlato

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

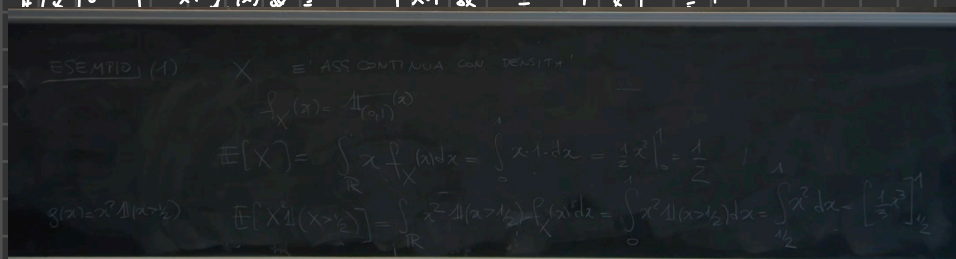
• (2) $X \in \mathbb{R}$ abs continua $\Rightarrow$ $\mathbb{E}[g(x)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) \, \underset{\text{densità}}{f_x(x)} \, dx$ se $\int_{\mathbb{R}} |g(x)| \, f_x(x) \, dx$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

• nel caso particolare $g = x$ $\quad$ $\mathbb{E}[X] = \int x \, f_x(x) \, dx$ se $\int_{\mathbb{R}} |x| \, f_x(x) \, dx < +\infty$

• Esempio (1) X è abs continua con densità $f_x(x) = \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$, se calcolo $\mathbb{E}[X] = \int x \cdot \mathbb{1}(x) \, dx = \int x \cdot 1 \cdot dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$ ($0 \notin (0,1)^c$, $1 \in (0,1)$)

$\mathbb{E}[X^2 \mathbb{1}(X > \frac{1}{2})]$



esempio 2 $\quad$ $X \sim Exp(3)$ $\quad$ $f_x = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$ con $\lambda = 3$

$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x \, f_x(x) = \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} \, dx \overset{\lambda = 3}{=} \int_0^{+\infty} 3x e^{-3x} \, dx$ = (lascia per compito)

$\mathbb{E}[g(X_1 \dots X_D)] = \int g(x_1, \dots, x_D) \, P_x(dx_1, \dots, dx_D)$ ma manca il caso analogo abs continuo $D = 1$ + assol. cont per $D > 1$

$\mathbb{P}\{X \in A\} = \int_{A \in \mathbb{R}} f_x(x) \, dx$ $\Rightarrow$ $\mathbb{E}[g(X_1, \dots, X_D)] = \int_{\mathbb{R}^D} g(x_1, \dots, x_D) \, f_x(x_1, \dots, x_D) \, dx_1 \dots dx_D$