LEZ 08

- Funz. Ripartizione

- **PROP** | Sia F una funzione di ripartizione su $\mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ $\exists$ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $X: (\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ t.c $F_X = F$

- **PROP** | Sia F funz. Ripartiz. su $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\exists$ $X: (\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ t.c $F_X(x) = \mathbb{P}\{X \le x\} = F(x)$

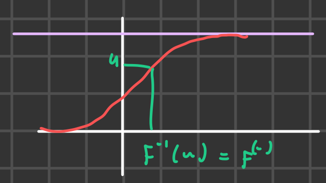
  - **Dim)** sia $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $X(\omega) = \omega$ è misurabile $\left(\underset{\mathbb{R}}{x} \mapsto \underset{\mathbb{R}}{x}\right)$, scegliamo misura $\mathbb{P}(A) = P_F(A)$ $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

    - per prop vista prima $\exists$ P_F t.c $P_F((-\infty, x]) = F(x)$
    - $\mathbb{P}\{\omega : X(\omega) \le x\} = \mathbb{P}\{\underset{\omega \in \mathbb{R}}{\omega \le x}\} = \mathbb{P}\{(-\infty, x]\} = P_F((-\infty, x]) = F(x)$

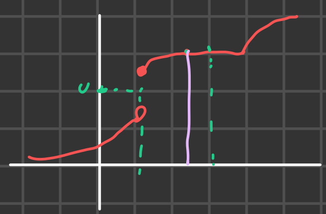
NON CHIEDE

- **Def)** Sia F funz. Rip, è detto Quantile (inversa generalizzata) $F^{(-)}: [0,1] \to \mathbb{R}$, $F^{(-)}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \ge u\}$

  - in particolare, se F è invertibile $\rightsquigarrow$ $F^{(-)}(u) = F^{-1}(u)$

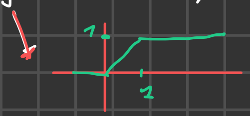


  - se non fosse invertibile



- (es) $F^{-1}(1/2) = m$ con $m : P_F\{(-\infty, m]\} = \frac{1}{2}$ $\rightsquigarrow$ m: mediana

- **prop)** F funz di ripartiz U v.a $U_{[0,1]}$ su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R})$



- posso definire $X := F^{(-)}(U)$ che è una v.a $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ $\Rightarrow$ in particolare $\mathbb{P}\{X \le x\} = F(x)$

  - **dimostrazione** | supponiamo F invertibile $\rightsquigarrow$ $X = F^{(-)}(U)$
    - $F_X(x) = \mathbb{P}\{F^{-1}(U) \le x\} \underset{\text{strett. monotona}}{=} \mathbb{P}\{U \le F(x)\} = F_U(F(x)) = F(x)$

- **Def)** sia X_i $(\Omega, \mathcal{F}; \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^D, \mathcal{B}(\mathbb{R}^D))$

  - $F_X : \mathbb{R}^D \to [0,1]$ $\rightsquigarrow$ $F_X(\underline{x}) = \mathbb{P}\{\omega : X_1(\omega) \le x_1 \cap X_2(\omega) \le x_2 \cdots X_D(\omega) \le x_D\}$ $\forall = (x_1, \dots, x_D)$

VARIABILI DISCRETE

$X: (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^D, \mathcal{B}(\mathbb{R}^D))$,

- **Def** | diciamo che X è discreta se $\exists$ C t.c $\mathbb{P}\{X \in C\} = 1$

  (C: insieme numerabile — il dado è certo o croce; supporto)

  - in particolare se X, con $D = 1$, posso descrivere C come insieme di punti $C \overset{\text{convenzione}}{=} \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ $\qquad$ $\mathbb{P}\{x \in A\} = ?$ $\quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

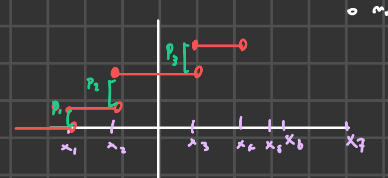
mi sono perso

- Posso concentrarmi su $A \in \mathcal{B}(C)$?

  - in questo caso $\underset{\substack{\text{misura indotta} \\ \leftrightarrow \\ legge \ immagine}}{\mathbb{P}\{X \in A\}} = \sum_{\substack{x \in C \\ \text{t.c } x \in A}} \mathbb{P}\{X = x\} = \sum_{i : x_i \in A} p_i$ $\qquad$ $\mathbb{P}\{X = x_i\} = p_i$ $\quad x_i \in C$ $\Rightarrow$ $p_i \ge 0$ e $\sum_{i=1}^{+\infty} p_i = 1$

densità discreta o massa di probabilità

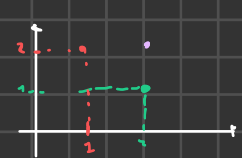
- $\mathbb{P}\{X = x_i\} = p_X(x_i)$ notazione $\Rightarrow$ mi aiuta $\forall x \in \mathbb{R}$ $F_X(x) = \mathbb{P}\{X \le x\} = \sum_{\{x_i : x_i \le x\}} p_X(x_i)$



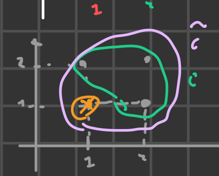
costante a tratti

- supponiamo $D > 1$ $\quad$ $C \subseteq \mathbb{R}^D$ $\quad$ $(D = 2)$

  $\mathbb{P}\{X \in A\} = \sum_{\substack{x \in C \\ \text{t.c } x_i \in A}} p_X(x_i)$ $\qquad$ $p_X(x_i) = \mathbb{P}\{X = x_i\}$ $\quad x_i \in \mathbb{R}^D$



$C = \{(1,1), (2,1), (2,2)\}$



$\tilde{C} = \{C_1 \times C_2\}$ con $C_1 = C_2 = \{1, 2\}$

- **prop** sia $X = (X_1, \dots, X_D)$ è discreto con supporto C [cartesiano] per ipotesi $\Rightarrow$ X_i è discreto $\forall i = 1, \dots, D$ e $p_{X_i}(x_j^{(i)}) = \sum_{\substack{(x_1,\dots,x_D) = x \in C \\ x_i = x_j^{(i)}}}$

$$p_{X_1}(1) = \sum_{\substack{x = (x_1, x_2) \\ x_1 = 1}} p_X(x_1, x_2) = p_X(1,1) + p_X(1,2) + p_X(1,3) \qquad p_{X_1}(2) = p_X(2,1) + p_X(2,2) + p_X(2,3)$$

- chi per def. $p_{X_1}(1) = \mathbb{P}\{X_1 = 1\} = \mathbb{P}\{(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) \cup (X_1 = 1 \cap X_2 = 2) \cup (X_1 = 1 \cap X_2 = 3)\} \overset{\text{sono indip}}{=} \mathbb{P}\{X_1 = 1, X_2 = 1\} + \mathbb{P}\{X_1 = 1, X_2 = 2\} + \mathbb{P}\{X_1 = 1, X_2 = 3\}$

- Notazione $\mathbb{P}(A, B) := \mathbb{P}(A \cap B)$

- caso $D = 2$ C finito $p_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2)$ $x_1 \in C_1$, $x_2 \in C_2$ se è finito

densità congiunta

valori di x_1

$C_1 = \{1, 3, 4\}$
$C_2 = \{1, 2, 3\}$

x_2 \ x_1	1	3	4
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
2	0	$\frac{1}{4}$	0
3	0	0	$\frac{1}{4}$

questo è densità di (1,1) $p_X(1,1)$

- qual è la prob $\mathbb{P}\{X_1 = 3, X_2 = 1\} = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}\{X_1 = 2, X_2 = 1\} = 0$

- posso dedurre la marginale di X_1

$$p_{X_1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{per } x = 1 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} & x = 3 \\ \frac{1}{4} & x = 4 \end{cases}$$

densità marginale

x_2 \ x_1	1	3	4	
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
2	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
3	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

- Se $p_{(X_1, X_2)}$ nota $\rightsquigarrow$ p_{X_1} p_{X_2} noto

- ma se ho $p_{X_1}, p_{X_2} \overset{?}{\Rightarrow} p_{X_1, X_2} = ?$

- (es)

				$\frac{1}{2}$
				$\frac{1}{4}$
				$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

$\rightsquigarrow$

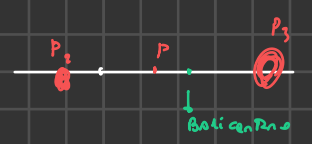
x_2 \ x_1	1	3	4	
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

•

VALORE ATTESO PER V.A DISCRETE (D=1)

- **Def)** sia $X: (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ discreta $[C, p_X$ ($C \subseteq \mathbb{R}$) se $\underbrace{\sum_{x \in C} |x| \, p_X(x) < +\infty}_{\text{convergente}}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in C} x \, p_X(x)$

- se $C = \{x_1, x_2, x_3\}$, $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1} x_i \, p_X(x_i)$



- (esercizio 1)

- sia X t.c. $\mathbb{P}\{X \in \mathbb{N}\} = 1$ $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ e $\mathbb{P}\{X = x\} =: p_x = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ $x \in \mathbb{N}$ $(\lambda > 0)$

- Nota $\sum_{k \geq 0} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda} \Rightarrow \sum_{x \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^{x} e^{-\lambda}}{x!} = 1$ variabile aleatoria discreta con legge di Poisson

(ese) ? $\mathbb{P}\{X > 1\} = ?$ e $\mathbb{E}[X] = ?$

- (ese 2) $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\underset{X_1: \Omega \to \{0,1\}}{\mathbb{P}\{\omega\} = \frac{1}{6}}$ $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) = \mathbb{I}\{\omega \leq 3\}$ (discreta perché assume solo 0, 1), $\sim$ legge $p_{X_1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x = 0 \\ \frac{1}{2} & x = 1 \end{cases}$

$\tilde{\Omega} = \{0, 1\}$, $\underset{X_2: \tilde{\Omega} \to \{0,1\}}{X(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega}}$, $\tilde{p}(\tilde{\omega}) = \frac{1}{2}$ $\forall \tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ legge uguale $p_{X_2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x = 0 \\ \frac{1}{2} & x = 1 \end{cases}$

- $\mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{2}$

$\mathbb{E}[X_2] = \frac{1}{2}$