LEZ 09

- Funz ripartizione

- PROP | Sia F una funzione di ripartizione su $\mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ $\exists$ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $X: (\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ t.c $F_X = F$

- PROP | sia F funz ripartiz. su $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\exists$ $X: (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ t.c $F_X(x) = \mathbb{P}\{X \le x\} = F(x)$

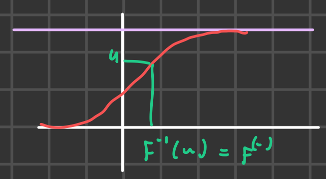
  - Dim) sia $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $X(w) = w$ è misurabile $\left(\underset{\mathbb{R}}{x} \mapsto \underset{\mathbb{R}}{x}\right)$, scegliamo misur $\mathbb{P}(A) = P_F(A)$ $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

    - per prop vista prima $\exists$ P_F t.c $P_F((-\infty, x]) = F(x)$
    - $\mathbb{P}\{w: X(w) \le x\} = \mathbb{P}\{\underset{w \in \mathbb{R}}{w \le x}\} = \mathbb{P}\{(-\infty, x]\} = P_F((-\infty, x]) = F(x)$

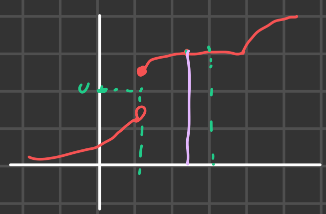
NON CHIEDE

- Def) Sia F funz. Rip, è detto Quantile (inversa generalizzata) $F^{(-)} : [0,1] \to \mathbb{R}$, $F^{(-)}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \ge u\}$

  - in particolare, se F è invertibile $\rightsquigarrow$ $F^{(-)}(u) = F^{-1}(u)$

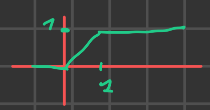


  - se non fosse invertibile



- (es) $F^{-1}(1/2) = m$ con $m: P_F\{(-\infty, m]\} = \frac{1}{2}$ $\rightsquigarrow$ m: mediana

- PROP) F funz di ripartiz U v.a $U_{[0,1]}$ su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R})$



  - posso definire $X := F^{(-)}(U)$ che è una v.a $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ $\Rightarrow$ in particolare $\mathbb{P}\{X \le x\} = F(x)$

  - dimostrazione | supponiamo F invertibile $\rightsquigarrow$ $X = F^{(-)}(U)$
    - $F_X(x) = \mathbb{P}\{F^{-1}(U) \le x\} \underset{\text{strett monotona}}{=} \mathbb{P}\{U \le F(x)\} = F_U(F(x)) = F(x)$ — w:

- Def) sia X_i $(\Omega, \mathcal{F}; \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^D, \mathcal{B}(\mathbb{R}^D))$

  - $F_X : \mathbb{R}^D \to [0,1]$ $\rightsquigarrow$ $F_X(x) = \mathbb{P}\{w: X_1(w) \le x_1 \cap X_2(w) \le x_2 \cdots X_D(w) \le x_D\}$ $\forall = (x_1, \dots, x_D)$

VARIABILI DISCRETE

$X. (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^D, \mathcal{B}(\mathbb{R}^D))$,

- Def | diciamo che X è discreta se $\exists$ C (insieme numerabile — il dado è certo o croce) (supporto) t.c $\mathbb{P}\{X \in C\} = 1$

mi sono perso

  - in particolare se X, con $D = 1$, posso descrivere C come insieme di punti $C \overset{\text{convenzione}}{=} \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ $\mathbb{P}\{x \in A\} = ?$ $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

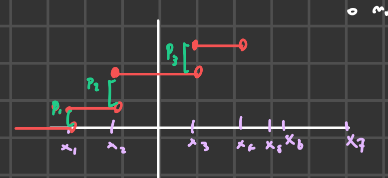
- posso concentrarmi su $A \in \mathcal{B}(C)$?

  - in questo caso $\mathbb{P}\{X \in A\} = \sum\limits_{\substack{x \in C \\ \text{t.c } x \in A}} \mathbb{P}\{X = x\} = \sum\limits_{i: x_i \in A} p_i$ $\mathbb{P}\{X = x_i\} = p_i$ $x_i \in C$ $\Rightarrow$ $p_i \ge 0$ e $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} p_i = 1$

misura indotta $\leftrightarrow$ legge univoca

densità discreta o massa di probabilità

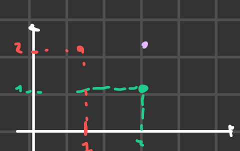
- $\mathbb{P}\{X = x_i\} = p_X(x_i)$ notazione $\Rightarrow$ mi dice $\forall x \in \mathbb{R}$ $F_X(x) = \mathbb{P}\{X \le x\} = \sum\limits_{\{x_i : x_i \le x\}} p_X(x_i)$



costante a tratti

- supponiamo $D > 1$ $C \subseteq \mathbb{R}^D$ $(D = 2)$

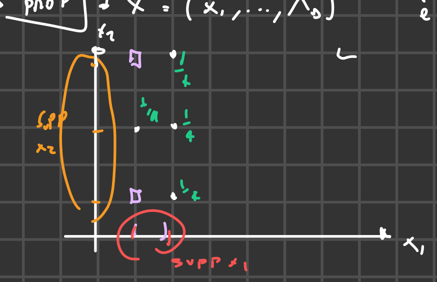
$\mathbb{P}\{X \in A\} = \sum\limits_{\substack{x \in C \\ \text{t.c } x_i \in A}} p_X(x_i)$ $p_X(x_i) = \mathbb{P}\{X = x_i\}$ $x_i \in \mathbb{R}^D$



$C = \{(1,1), (2,1), (2,2)\}$

$\tilde{C} = \{C_1 \times C_2\}$ con $C_1 = C_2 = \{1, 2\}$

• prop) Sia $X = (X_1, \dots, X_D)$ è discreto con supporto C[cartesiano] per ipotesi $\Rightarrow$ X_i è discreto $\forall i = 1, \dots, D$ e $p_{X_i}(x_j^{(i)}) = \sum_{\substack{(x_1,\dots,x_D) = x \in C \\ x_i = x_j^{(i)}}}$



$$p_{X_1}(1) = \sum_{\substack{x = (x_1, x_2) \\ x_1 = 1}} p_X(x_1, x_2) = p_X(1,1) + p_X(1,2) + p_X(1,3) \qquad p_{X_1}(2) = p_X(2,1) + p_X(2,2) + p_X(2,3)$$

• Infatti per def $p_{X_1}(1) = \mathbb{P}\{X_1 = 1\} = \mathbb{P}\{(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) \cup (X_1 = 1 \cap X_2 = 2) \cup (X_1 = 1 \cap X_2 = 3)\} \overset{\text{disgiunti}}{=} \mathbb{P}\{X_1 = 1, X_2 = 1\} + \mathbb{P}\{X_1 = 1, X_2 = 2\} + \mathbb{P}\{X_1 = 1, X_2 = 3\}$

• Notazione $\mathbb{P}(A, B) := \mathbb{P}(A \cap B)$

• caso $D = 2$ C finito $p_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2)$ $x_1 \in C_1$, $x_2 \in C_2$ se è finito

densità congiunta

valori di X_1: $C_1 = \{1, 3, 4\}$, $C_2 = \{1, 2, 3\}$

$X_2 \backslash X_1$	1	3	4
1	1/4	1/4	0
2	0	1/4	0
3	0	0	1/4

questo è densità di (1,1) $p_X(1,1)$

• qual è la prob $\mathbb{P}\{X_1 = 3, X_2 = 1\} = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}\{X_1 = 2, X_2 = 1\} = 0$

• posso dedurre la marginale di X_1 $\quad p_{X_1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{per } x = 1 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} & x = 3 \\ \frac{1}{4} & x = 4 \end{cases}$

densità marginale

$X_2 \backslash X_1$	1	3	4	
1	1/4	1/4	0	1/2
2	0	1/4	0	1/4
3	0	0	1/4	1/4
	1/4	1/2	1/4	

• Se $p_{(X_1, X_2)}$ nota $\rightsquigarrow$ p_{X_1} p_{X_2} note

• ma se ho $p_{X_1}, p_{X_2} \overset{?}{\Rightarrow} p_{X_1, X_2} = ?$

• (es)

			1/2
			1/4
			1/4
1/4	1/2	1/4	

$\rightsquigarrow$

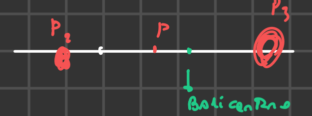
$X_2 \backslash X_1$	1	3	4	
1	1/8	1/4	1/8	1/2
2	1/16	1/8	1/16	1/4
3	1/16	1/8	1/16	1/4
	1/4	1/2	1/4	

•

VALORE ATTESO PER V.A DISCRETE (D=1)

• Def) sia $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ discreta $[C, p_X]$ ($C \subseteq \mathbb{R}$) se $\underbrace{\sum_{x \in C} |x| \, p_X(x) < +\infty}_{\text{convergente}} \Rightarrow \mathbb{E}[X] = \sum_{x \in C} x \, p_X(x)$

• se $C = \{x_1, x_2, x_3\}$, $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{3} x_i \, p_X(x_i)$



• (esercizio 1)

• sia X t.c. $\mathbb{P}\{X \in \mathbb{N}\} = 1$ $\quad \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ e $\mathbb{P}\{X = x\} = p_X = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ $x \in \mathbb{N}$ $(\lambda > 0)$

• Nota $\sum_{k \geq 0} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda} \Rightarrow \sum_{x \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = 1$ variabile aleatoria discreta con legge di Poisson

(es 2) ? $\mathbb{P}\{X > 1\} = ?$ e $\mathbb{E}[X] = ?$

• (es 2) $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathbb{P}\{\omega\} = \frac{1}{6}$ $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) = \mathbb{I}\{\omega \leq 3\}$ (discreta perché assume solo 0,1) $\rightsquigarrow$ legge $p_{X_1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x = 0 \\ \frac{1}{2} & x = 1 \end{cases}$

$X_1 : \Omega \to \{0, 1\}$

$\tilde{\Omega} = \{0, 1\}$, $X(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega}$, $\tilde{p}(\tilde{\omega}) = \frac{1}{2}$ $\forall \tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ $\quad$ legge uniforme $p_{X_2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x = 0 \\ \frac{1}{2} & x = 1 \end{cases}$

$X_2 : \tilde{\Omega} \to \{0, 1\}$

• $\mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{2}$

$\mathbb{E}[X_2] = \frac{1}{2}$