Lez 04

- $A \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}}_{U}$ con costo $3(n-1)$ rispetto $\frac{2}{3}n^3$ $\sim \begin{cases} Ly=b & \text{bidiagonale inferiore} \\ Ux=y & \text{bidiagonale superiore} \end{cases}$

- $Ly=b$ $\begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \beta_2 & 1 & \cdot \\ \cdot & \beta_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

  - calcolo $y_1 = b_1$ • $\beta_2 y_1 + y_2 = b_2 \rightarrow y_2 = b_2 - \beta_2 y_1$ • $\beta_3 y_2 + y_3 = b_3 \rightarrow y_3 = b_3 - \beta_3 y_2$

  - per $(n \times n)$ • $y_1 = b_1$ per $i \geq 2$ fino a n $\sim y_i = b_i - \beta_i y_{i-1}$ costo $2(n-1)$

- $Ux = y$ $\begin{bmatrix} \alpha_1 & c_1 & \cdot \\ \cdot & \alpha_2 & c_2 \\ \cdot & \cdot & \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

  - (3×3) $\alpha_3 x_3 = y_3 \rightarrow x_3 = \frac{y_3}{\alpha_3}$, $\alpha_2 x_2 + c_2 x_3 = y_2 \rightarrow x_2 = \frac{1}{\alpha_2}\left[y_2 - c_2 x_3\right]$, $\alpha_1 x_1 + c_1 x_2 = y_1 \longrightarrow x_1 = \frac{1}{\alpha_1}\left[y_1 - c_1 x_2\right]$

  - $(n \times n)$ $x_n = \frac{y_n}{\alpha_n}$, $i = n-1, \dots, 1$ $x_i = \frac{1}{\alpha_i}\left[y_i - c_i x_{i+1}\right]$ ogni x_i costa 3 di cui ho una divisione costo: $\frac{3(n-1)}{3n-2}$

- fatt + risoluzione $\sim$ Algoritmo di Thomas : costo totale $= \underbrace{3(n-1)}_{} + \underbrace{2(n-1)}_{\text{Risoluzione tri}} + 3(n-1)+1 = 8(n-1)+1 = 8n-7$

  - domanda : metodo diretto migliore per una matrice tridiagonale

2 caso particolare

- matrici simmetriche definite positive A è SDP se faccio la fatt. $A = \underset{\triangle}{R^T}\,\underset{\nabla}{R}$ (fatt. Cholesky) costa la metà $\frac{n^3}{3}$: comando matlab $\mathrm{chol}(A)$

  tutte ~~le~~ gli elementi della diagonale ≥ 0 L perde gli uni

- $\begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$ matrice sparsa e ~~non~~ strutturata (densità il pattern) $\begin{bmatrix} * & & ** \\ * & * & * \end{bmatrix}$ matrice sparsa e non strutturata (rischiamo di perdere la sparsità) $\#nz_L + \#nz_U >> n$ problema del Fill IN

- abbiamo visto MEG + PIVOTING $\rightarrow$ LU accurata $:=$ $PA - LU = \underline{0}$ se LU è accurata $\sim x$ è una soluzione accurata di $Ax=b$

  $A_{n\times n} = b$ collezioni di $A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $x_n, b_n \in \mathbb{R}^n$ $A_n = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \\ \frac{1}{3} & \cdots & & \\ \vdots & & \cdots & \end{bmatrix}$ con $a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$

- la matrice di Hilbert è SDP

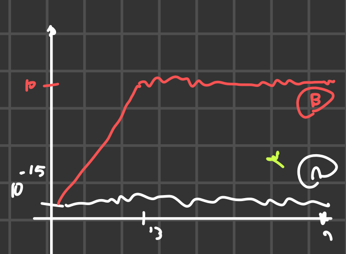
- b_n lo scelgo $x_n = [1, \dots, 1]^T$

= LU accurata

- $R_n = P_n A_n - L_n U_n \sim \max_{i,j} |r_{n,ij}| = (A)$ (mi serve per la prima freccia)

2da freccia

- $(B) = \frac{\| x_n - \hat{x}_n \|}{\| x_n \|}$ $\overset{\text{soluzione esatta}}{}$ errore abs, err relativo meglio errore negativ



fatt accurata LU ma il suo nestieno

$E_n \geq 10 \sim$ errore del 1000%

- $Ax=b$ ⇝ risolviamo $\underbrace{(A+\delta A)(x+\delta x)=(b+\delta b)}_{\text{sistema perturbato}}$ — $\delta A, \delta b$ perturbazione sui dat, δx pert sulla soluzione ⇝ floating point e algoritmo stesso → sono date le perturb

$\delta A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\delta, b, \delta x \in \mathbb{R}^n$

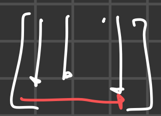
- $\dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}$ $\dfrac{\|\delta b\|}{\|b\|}$ $\dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|}$ quello che vorrei è che picc. perturb sui dati ci siano picc perturb sui risultati

- condizionamento della matrice $\equiv k(A)$

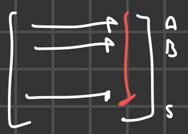
- $\|v\|_2 := \sqrt[2]{\sum v_i^2}$ per $v_i \in \mathbb{R}^n$

- $\|v\|_p = \sqrt[p]{\sum_i v_i^p}$ $v_i \in \mathbb{R}^n$ ⇝ $\|A\|_p = \sup \dfrac{\|Av\|_p}{\|v\|_p}$ (norma indotta dalla norma vettoriale) con $v \neq 0$, $v \in \mathbb{R}^n$ ⇝ si può dimostrare che $\|Av\|_p \le \|A\|_p \|v\|_p$ (compatibilità)

- 4 norme + importanti di matrici

- $\|A\|_1 =$ 

$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

$\|A\|_\infty =$ 

$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

esegui un esempio di una matrice SDP

ricordo una non singolare e lo moltiplico per la trasposta

$\|A\|_2 =$ norma spettrale $= \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$ se A è simmetrica definita positiva $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^2)} = \sqrt{[\lambda_{max}(A)]^2} = \lambda_{max}(A)$

frobenius

- $\|A\|_F = \sum_i \sum_j |a_{ij}|^2 =$

- $\delta A = 0$ ⇝ $\dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le k(A)$ "Ricapitolo, messo a posto le"

- sia $k_*(A) := \|A\|_* \|A^{-1}\|_*$ ⇝ si dimostra che $k(A) \ge 1$ → $1 = \|AA^{-1}\| \le \|A\| \|A^{-1}\| = k(A)$

  - ben condizionato $k(A)$ piccolo
  - calcola il condizionamento prima

- <u>MATLAB</u> cond(A) (di default $\| \|_2$), se voglio $\| \|_*$ cond(A

  condest(A) $\| \|_1$ (dedicato a matrici sparse)

- $k_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)} \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_{min}(A^T A)}} = \sqrt{\dfrac{\lambda_{max}(A^T A)}{\lambda_{min}(A^T A)}}$ se è SDP $k_2(A) = \dfrac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{min}(A)}$

- <u>Dimo</u> "siamo in presenza del nostro sistema esatto"

$\delta A = 0$ $\quad Ax=b$, $\quad A\tilde{x} = b+\delta b$ $\qquad \dfrac{\|x-\tilde{x}\|_2}{\|x\|_2} \le \overbrace{k_2(A)}^{\|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2} \dfrac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2}$

NUM

- $Ax=b$

  $A\tilde{x} = b+\delta b$

  $A(\tilde{x}-x) = \delta b$ ⇝ $\tilde{x}-x = A^{-1}\delta b$ → $\|\tilde{x}-x\|_2 = \|A^{-1}\delta b\|_2 \le \|A^{-1}\|_2 \|\delta b\|_2$

- $b = Ax$ → $\|b\|_2 = \|Ax\|_2 \le \|A\|_2 \|x\|_2$ ⇝ $\dfrac{1}{\|x\|} \le \dfrac{\|A\|_2}{\|b\|_2}$

$a \le b$, $c \le d$ ⇝ $ac \le bd$ se $a,c,b,d \ge 0$ ⇝ $\dfrac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|_2} \le \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 \dfrac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2}$