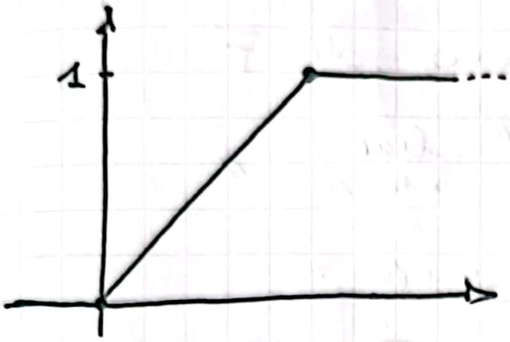
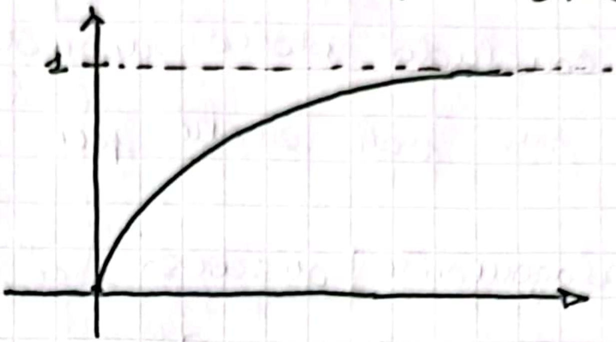
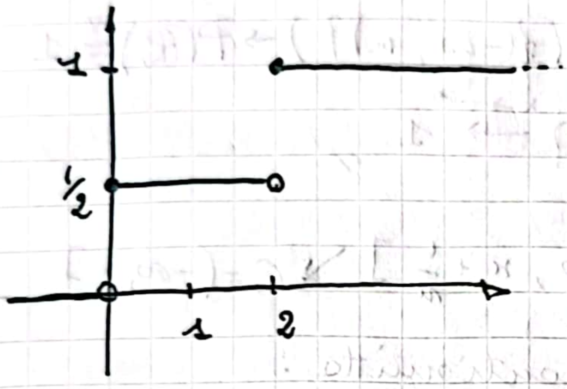
⇝ (e.g.)$_1$ $F_1(x)$



(e.g.)$_2$ $F_2(x) := \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$



(e.g.)$_3$ $F_3(x)$



$(-2,0) \subseteq (-\infty, 0)$

<u>obs</u>: $\mathbb{P}_{F_1}((-2,0)) \leq \mathbb{P}((-\infty,0)) \overset{\nabla}{=} 0$

$\rightsquigarrow \mathbb{P}_{F_1}((-2,0)) = 0$

Lez 8 prob

lun 03/03/2025 <u>obs</u>: $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{F}$

<u>recap</u>: (prop) F funzione di ripartizione

$\Rightarrow \exists!$ mdp su $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\mathbb{P}_F$ t.c.

(1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \mathbb{P}_F(\{(-\infty, x]\})$

(2) data una mdp $\mathbb{P}$ su $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$x \longmapsto \mathbb{P}(\{(-\infty, x]\}) =: F(x)$

è una funz. di ripartizione

dim (2)

$(-\infty, x] \subseteq (-\infty, y]$ per $x \leq y$

$\Rightarrow F(x) := \mathbb{P}\{(-\infty, x]\} \leq \mathbb{P}\{(-\infty, y]\} =: F(y)$

•) da cui la monotonia //

•) considero: $A_n := (-\infty, -n]$ $\quad A_{n+1} \subseteq A_n$

<u>obs</u>: $A_n \searrow \emptyset$

$\mapsto$ per continuità: $F(-n) \overset{\circ}{=} \mathbb{P}(\{(-\infty, -n)\}) \to \mathbb{P}\{\emptyset\} \overset{\circ}{=} 0$

concludo dalla monotonia di F

$\leadsto$ vale anche per il $\lim_{x \to -\infty}$ //

[analogamente] discorso per $x \to +\infty$:

$$B_n := [-\infty, n] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad B_n \nearrow \mathbb{R}$$

per continuità: $F(n) \overset{\circ}{=} \mathbb{P}(\{(-\infty, n)\}) \to \mathbb{P}(\mathbb{R}) \overset{\circ}{=} 1$

$\leadsto F(x) \xrightarrow{x \to -\infty} 0 \qquad F(x) \xrightarrow{x \to +\infty} 1$ //

∘) $\forall x \in \mathbb{R}$: $C_n := (-\infty, x + \frac{1}{n}] \searrow C = (-\infty, x]$

concludo sempre da continuità:

$$\lim_{x \to x_0^+} F(x) = \lim_{x \to x_0^+} \mathbb{P}(\{(-\infty, x + \tfrac{1}{n}]\})$$

$$= \mathbb{P}(\{(-\infty, x]\}) = F(x_0)$$

da cui ottengo, per monotonia, la continuità da dx. //

||**def**| sia $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ②

$$F_X(x) \triangleq \mathbb{P}\{\omega : X(\omega) \leq x\} \overset{\circ}{=} \mathbb{P}\{X \leq x\} = \mathbb{P}_X\{(-\infty, x]\}$$

<u>obs</u>: abbiamo già dim. che F_X è f.d.r. (per X)

$F_X(x)$ "=" funzione di ripartizione di X

||**N.B.**| Sia X v.a. reale con funzione di rip. F_X. allora:

(1) $\mathbb{P}(\{X > x\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X > x\}^c)$

$= 1 - \mathbb{P}(\{X \leq x\}) = 1 - F_X(x)$ //

(2) $\mathbb{P}(\{X \in (a,b]\}) = \mathbb{P}(\{(X\le b)\setminus(X\le a)\})$

$\boxed{\text{con } (X\le a) \subseteq (X\le b)}$ $\overset{(=)}{=} \mathbb{P}(\{(X\le b)\}) - \mathbb{P}(\{(X\le a)\})$

$\overset{\nabla}{=} F_X(b) - F_X(a)$

(3) $\mathbb{P}(\{X < x\}) = \lim_{y \nearrow x} F_X(y) \overset{\nabla}{=} F_X(x^-)$

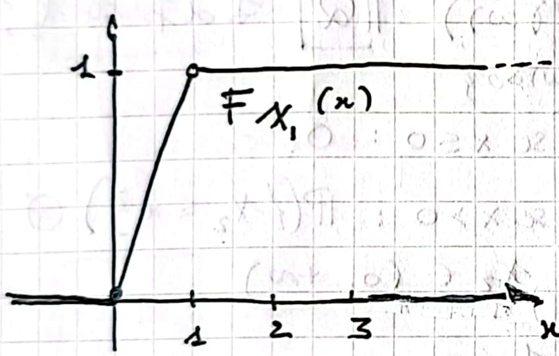
(4) $\mathbb{P}(\{X = x\}) = \mathbb{P}(\{(X\le x)\setminus(X<x)\})$

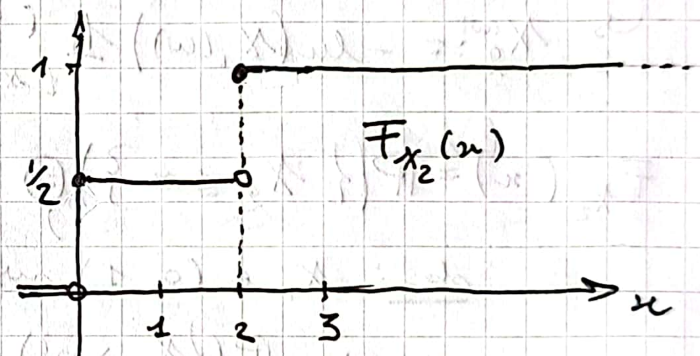
$\overset{\nabla}{=} F_X(x) - F_X(x^-)$

caso della discontinuità salto in x per F_X

⇝ se F_X è continua: $\mathbb{P}(\{X=x\})=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

obs: considero $(e.g)_2$ e $(e.g)_3$ di LEZ 7





$\mathbb{P}(\{X_1 = 3\}) = 0$

$\mathbb{P}(\{X_1 \le 3\}) = 1$

$\mathbb{P}(\{X_1 \in (0,1]\}) = F_{X_1}(1) - F_{X_1}(0) \overset{!}{=} 1 - 0 = 1$

$\mathbb{P}(\{X_2 = 0\}) = F_{X_2}(0) - F_{X_2}(0^-) = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(\{X_2 = 2\}) = F_{X_2}(2) - F_{X_2}(2^-) \overset{!}{=} 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ $\mathbb{P}(\{X \in (a,b)\}) = ?$

$\mathbb{P}(\{X \in [a,b]\}) = ?$

$\boxed{F_X \overset{N}{=} \mathcal{U}_{[0,1]}}$

$\boxed{\text{def}}$ X v.a. con $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ x & x\in(0,1) \\ 1 & x\ge 1 \end{cases}$ dicesi

VAR. AL. con LEGGE uniforme su $(0,1)$

⇝ $\underline{\text{obs}}$: $\mathbb{P}(\{X \in (a,b] : 0 \leq a < b \leq 1\}) = b-a$ $\boxed{\mathbb{P} \text{ uniforme}}$

obs: $= Leb_{[0,1]}((a,b])$

$\boxed{\text{N.B.}}$ $\mathbb{P}(\{X \in (a,b] : a < b < 0\}) = 0 \neq Leb_{[0,1]}$

in generale: $\mathbb{P}(\{X \in A\}) = 0$ se $A \cap [0,1] = \emptyset$

poiché: $A \subseteq \mathbb{R} \setminus [0,1]$ ⇝ $\mathbb{P}(X \in A) =$

$= \mathbb{P}(X \in \mathbb{R} \setminus [0,1]))$

$\boxed{\text{ex}_2}$ $X_1 \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$ $\boxed{\text{monotonia dei complem.}}$ $= F_X(0) + 1 - F_X(1)$

ha come f.d.r. $\mathcal{U}$ $\underline{\mathbb{P}(X \in A)} = 0 + 0 = 0$

⇝ $X_2 := -\ln(X_1)$ per $X_1(\omega) > 0$

↳ $X_2^{(\omega)} := -\ln(X_1(\omega)) \mathbb{1}_{\{X_1(\omega) > 0\}}(X_1(\omega))$ $\boxed{Q}$ f.d.p di X_2?

$$F_{X_2}(x) \triangleq \mathbb{P}(\{X_2 \leq x\}) = \begin{cases} \text{se } x \leq 0 : 0 \\ \text{se } x > 0 : \mathbb{P}(\{X_2 \leq x\}) \ (*) \end{cases}$$

$\underline{\text{obs}}$: $X_1 \in (0,1)$ ⇝ $X_2 \in (0, +\infty)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(\{X_2 > 0\}) = 1$

$$\left(\begin{array}{l} \text{poiché: } A := \{\omega : X_1(\omega) \in (0,1)\} \Rightarrow \mathbb{P}(A) \overset{!}{=} 1 \\ \text{ma } A \subseteq \{-\ln(X_1(\omega)) > 0\} \\ \Rightarrow \mathbb{P}(\{X_2 > 0\}) = 1 \end{array} \right)$$

$(*)$ ⇝ cerco: per $x > 0$ la $\mathbb{P}(\{X_2 \leq x\})$

$$\mathbb{P}\{(X_2 \leq x) \cap (X_1 \in (0,1))\} \overset{!}{=} \mathbb{P}\{(-\ln(X_1) \leq x) \cap (\ldots)\} =$$

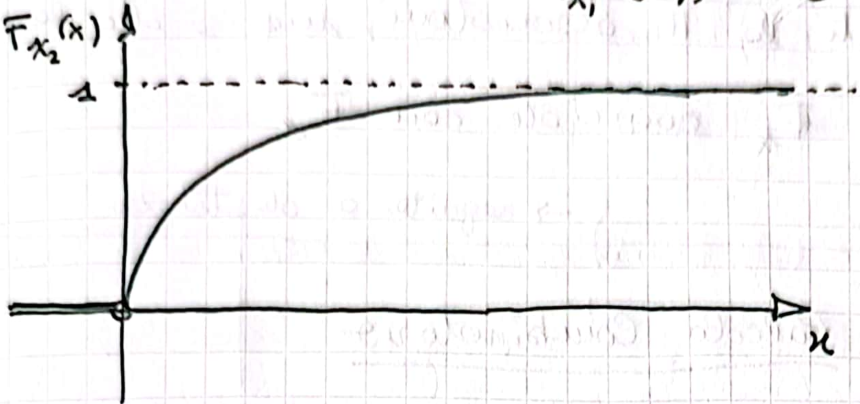
$$= \mathbb{P}((X_1 \geq e^{-x}) \cap (X_1 \in (0,1))\} = \mathbb{P}\{X_1 \geq e^{-x}\} =$$

$$= \mathbb{P}(\{X_1 > e^{-x}\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X_1 \leq e^{-x}\}) = 1 - F_{X_1}(e^{-x})$$

$\boxed{\mathbb{P}(\{X_1 = a\}) = 0 \ \forall a}$

↳ $\mathcal{U}$

$$\Rightarrow \quad F_{X_2}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - F_{X_1}(e^{x}), & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$



<u>obs</u>:

$\lim_{x \to -\infty} F_{X_2}(x) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} F_{X_2}(x) = 1$

monotona ✓

continua da dx ✓

$\boxed{\text{def}}$ [distribuzione esponenziale]

X v.a. ha la dist. exp ($X \sim \exp$) se la sua f.d.r. è $F_{X_2}(x)$

$\boxed{\text{prop}}$ se X_1 e X_2 sono v.a. t.c. $F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

allora: $\mathbb{P}(\{X_1 \in A\}) = \mathbb{P}(\{X_2 \in A\})$ $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\rightsquigarrow$ $\mathbb{P}_{X_1} = \mathbb{P}_{X_2}$

$\boxed{\text{N.B.}}$ $\not\Rightarrow$ $\mathbb{P}(\{X_1 = X_2\}) = 1$

↳ non necessariamente vero.

$\boxed{\text{ex}}$ $X_i \in \{0, 1\}$ $\quad \Omega := \{0, 1\}$ con $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathbb{P}(\{\omega = 0\}) := \mathbb{P}(\{\omega = 1\}) := \frac{1}{2}$

<u>obs</u>: $\mathbb{P}(\{X_1 = X_2\}) = 0$ (eventi disgiunti)

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ $\{F_{X_1}(x) \overset{?}{=} F_{X_2}(x)\} = 1$

$\boxed{\text{prop}}$ sia F una f.d.r. su $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $\exists X:$ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ t.c. $F_X = F$

↳ idea: non solo so, data una classe F di rip. trovarti la IP associatavi, ma so che la sua F_X coincide con F,

Es 2 prob → seguito a distanza

mer 04/03/2025

Calcolo Combinatorio

"Toolbox" eventi → distinti
↳ indistinguibili

def una permutazione è una biezione
$$f: \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$$

① ENIGMA → 6 lettere distinte

N.B. non una dimostrazione

□ □ □ □ □ □   # $password_1 = 6 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 1 \stackrel{?}{=} 6!$ $= 720$

6 scelte, 5 scelte ..., 1 scelta

1.② MATEMATICA **obs:** diverse lettere ripetute
↳ posso considerare tutte le permutazioni prima e dopo aver scambiato due "A"
↳ sono le stesse → divido per 2
ma le "A" sono 3! → divido per $3! = 6$

$$\#\text{ anagrammi} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\cdots k_m!} \quad \text{con } \sum_i k_i = n$$

$$\#\, password_2 = \frac{10!}{3!\,2!\,2!} = \frac{10!}{24} = 151'200$$

obs: $1! = 1$