Lez 06

- metodi iterativi

  - per risolvere $Ax=b$ propongo una succ. $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$ Ⓐ
  - $x^{(k+1)} = (I - \alpha_k P^{-1}A)\, x^{(k)} + \alpha_k P^{-1} b = B_{\alpha_k} x^{(k)} + g_{\alpha_k} b$ con α_k stazionario / dinamico

  fisso x_0, $\forall k \geq 0$ Ⓑ

  - un modo di scrivere computazionalmente migliore $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k P^{-1} A x^{(k)} + \alpha_k P^{-1} b \rightsquigarrow x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k P^{-1}(b - Ax^{(k)}) = \underbrace{x^{(k)}}_{\text{precedente}} + \underbrace{\alpha_k P^{-1} r^{(k)}}_{\text{correzione di direzione}}$

    - sia $P^{-1} r^{(k)} = z^{(k)}$ ≡ residuo precondizionato e lo si calcola risolvendo $Pz^{(k)} = r^{(k)}$ (destabilizza ma possiamo attivare delle accortezze)
      - con una fattorizzazione LU basta pagare una volta
      - possiamo scegliere una matrice facile (diagonale, tridiagonali o triangolare) dato la arbitrarietà di P

- **metodo di Jacobi** richardson < dinamico / stazionario

  - (caso 3x3)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

ricavo dalla i eq la i incognita, con $a_{ii} \neq 0$

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3\right]$$
$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3\right]$$
$$x_3 = \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2\right]$$

  - decido che $x_1 = x_1^{(k+1)}$, $x_2 = x_2^{(k+1)}$, $x_3 = x_3^{(k+1)}$ e

$$\frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}\right]$$
$$\frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)}\right]$$
$$\frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)}\right]$$

> - per $(n \times n)$ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dato $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$
>
> $$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right] \quad \text{per } i = 1, \dots, n,\ k \geq 0,\ a_{ii} \neq 0$$

Metodo di Jacobi (per componenti)

  - si presta a un implementazione in parallelo, appena trovo $x_1^{(k+1)}$ posso trovare $x_1^{(k+2)}$ separatamente

- scriviamo in modo matriciale

  - introduco $D := \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$ e $x^{(k)} = [x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}]^T$ e $x^{(k+1)} = [x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)}]^T$

$$a_{ii}\left[x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right]\right] a_{ii} \qquad a_{ii}x_i^{(k+1)} = \left[b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right] \quad \text{con} \quad a_{ii}\cdot x_i^{(k+1)} = Dx^{(k+1)}$$

$$b_i = b$$
$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)} = A - D$$

  - notazione matriciale $Dx^{(k+1)} = b - (A-D)x^{(k)}$
  - $Dx^{(k+1)} = b - (A-D)x^{(k)} \rightsquigarrow x^{(k+1)} = D^{-1}b - D^{-1}(A-D)x^{(k)} = \underbrace{(I - D^{-1}A)}_{B_J} x^{(k)} + \underbrace{D^{-1}b}_{g_J}$ Ⓐ

$\rightsquigarrow x^{(k+1)} = x^{(k)} + D^{-1}b - D^{-1}Ax^{(k)} \rightarrow x^{(k+1)} = x^{(k)} + D^{-1}\underbrace{(b - Ax^{(k)})}_{r^{(k)}} = x^{(k+1)} = x^{(k)} + D^{-1}r^{(k)}$ Ⓑ è stazionario con $\alpha_k = 1$, $P = D$

  - $P_J = D$, $\alpha_k^J = \alpha_J = 1$ richardson < dinamico / stazionario → JACOBI

GAUSS-SEIDEL

- Idea: coinvolgere le componenti aggiornate al metodo di Jacobi

- (3×3)

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}\right]$$

perdo la parallelizzazione

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)}\right]$$

$$x_3 = \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)}\right]$$

- per $(n\times n)$ $\to$ $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ dato $x^{(0)}\in\mathbb{R}^n$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \underbrace{\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\,x_j^{(k+1)}}_{\text{nuovi}} + \underbrace{\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\,x_j^{(k)}}_{\text{vecchi}}\right]$$

per $i=1,\dots,n$
$k\geq 0$
$a_{ii}\neq 0$

- moltiplico tutto per a_{ii}
- decompongo A t.c.

$$A = \begin{bmatrix} \diagdown & A-D-(-E) \\ -E & D \ \diagdown \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

$a_{ii} = Dx^{(k+1)}$

$b_i = b$

$$-\underbrace{\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\,x_j^{(k+1)}}_{\text{nuovi}} = -(-Ex^{(k+1)}) = Ex^{(k+1)}$$

$$\underbrace{\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\,x_j^{(k)}}_{\text{vecchi}} = -(A-D+E)\,x^{(k)}$$

- con $(D-E)$ - è una triangolare inferiore?

- portando a stessi lati stessi aggiornamenti $(D-E)\,x^{(k+1)} = b + (D-E-A)\,x^{(k)} \overset{D^{-1}}{\rightsquigarrow} x^{(k+1)} = (D-E)^{-1}b + \underbrace{(D-E)^{-1}}_{(D-E)^{-1}(D-E)=I}(D-E-A)\,x^{(k)}$

$$\rightsquigarrow x^{(k+1)} = \underbrace{(D-E)^{-1}b}_{g_{GS}} + \underbrace{\left(I-(D-E)^{-1}A\right)}_{B_{GS}}x^{(k)}$$

- $x^{(k+1)} = (D-E)^{-1}b + x^{(k)} - (D-E)^{-1}Ax^{(k)} = x^{(k)} + (D-E)^{-1}\underbrace{(b-Ax^{(k)})}_{r^{(k)}}$ $\rightsquigarrow$ $P_{GS} = (D-E)$

$\alpha_k^{GS} = \alpha_{GS} = 1$

- METODO di Rilassamento di Jacobi (JOR = Jacobi over relaxation)

- $x_i^{(k+1)} = \frac{w}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}\,x_j^{(k)}\right] + (1-w)\,x_i^{(k)}$ con w = "parametro di rilassamento" con $w\in(0,1)$ se è sotto rilassamento
$w\in(1,+\infty)$ sovra rilassamento
$w=1$ Jacobi standard

- moltiplico $\cdot a_{ii}$ $\quad a_{ii}x_i^{(k+1)} = w\left[b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}\,x_j^{(k)}\right] + (1-w)\,x_i^{(k)}\cdot a_{ii}$

- sarà quindi: $Dx^{(k+1)} = wb - w(A-D)\,x^{(k)} + (1-w)\,Dx^{(k)} \overset{\cdot D^{-1}}{\rightsquigarrow} x^{(k+1)} = wD^{-1}b + w(I-D^{-1}A)\,x^{(k)} = (1-w)\,x^{(k)} + (1-w)\,x^{(k)} \rightsquigarrow$

$$\to x^{(k+1)} = \underbrace{wD^{-1}b}_{g_{JOR}} + \underbrace{\left[wB_J + (1-w)I\right]}_{B_{J\text{-}R}}x^{(k)}$$

- $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \cancel{wx^{(k)}} + \underbrace{w}_{\alpha_k}D^{-1}\underbrace{(b-Ax^{(k)})}_{r^{(k)}} + \cancel{wx^{(k)}} = x^{(k)} + wD^{-1}r^{(k)}$ $\rightsquigarrow$ $P_{JOR} = P_J = D$

$\alpha_k^{JOR} = \alpha_{JOR} = w$

- Metodo di rilassamento di Gauss-Seidel (SOR ≡ successive over-relaxation)

- $x_i^{(k+1)} = \frac{w}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right] + (1-w) x_i^{(k)}$

  $w = 1$ GS
  $w < 1$ sotto rilass.
  $w > 1$ sovra rilass.

- $\sim \cdot a_{ii} \rightsquigarrow a_{ii} x_i^{(k+1)} = w \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right] + (1-w) x_i^{(k)} a_{ii}$

- $\rightarrow D x^{(k+1)} = w b + w E x^{(k+1)} - w(A - D + E) x^{(k)} + (1-w) D x^{(k)}$ (notaz. matriciale

- $\sim$ A $\rightarrow B_{SOR} = (I - wD^{-1}E)^{-1} \left[(1-w) I + w D^{-1} (D - E - A) \right]$

  $q_{SOR} = (I - wD^{-1}E)^{-1} w D^{-1} b$

  B $\sim \alpha_k^{SOR} = \alpha_{SOR} = w$

  $P_{SOR} = D - wE$

- convergenza di questi

- verifico consistenza: x costruzione (ricavandoli)
- $\rho(B_J) < 1$

  $\rho(B_{GS}) < 1$

  $\rho(B_{JOR}) < 1$

  $\rho(B_{SOR}) < 1$

- per Jacobi Gauss-Seidel si possono dedurre delle cond. suff. analizzando la matrice A

  - Jacobi: se A è a dominanza diag. stretta x righe / x colonne $\} \rightarrow$ Jacobi converge

  - Gauss-Seidel: se A è " " $\} \rightarrow$ GS converge

    se A è sdp $\rightsquigarrow$ GS converge