LEZ 10

- oggi finiamo gli iterativi
- sistemi rettangolari non ci sono al primo itinere
- matrice di Hillbert

- algoritmi: metodo del gradiente (A sdp)

Input $x^{(0)}$

$r^{0} = b - Ax^{(0)}$

for $k = 0, 1, \dots$

$$\alpha_k = \frac{[r^{(k)}]^T r^{(k)}}{[r^{(k)}]^T \cdot A r^{(k)}}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k r^{(k)}$$

$$r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha_k A r^{(k)}$$

end

$$\|e^{(k)}\|_A \leq \left[\frac{k_2(A)-1}{k_2(A)+1}\right]^k \|e^{(0)}\|_A$$

metodo del gradiente precondizionato (A sdp)

Input $x^{(0)}, P$

$r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$

for $k = 0, 1, \dots$

$$P z^{(k)} = r^{(k)}$$

$$\alpha_k = \frac{[z^{(k)}]^T r^{(k)}}{[z^{(k)}]^T A z^{(k)}}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k z^{(k)}$$

$$r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha_k A z^{(k)}$$

end

$$\|e^{(k)}\|_A \leq \left[\frac{k_2(P^{-1}A)-1}{k_2(P^{-1}A)+1}\right]^k \|e^{(0)}\|_A$$

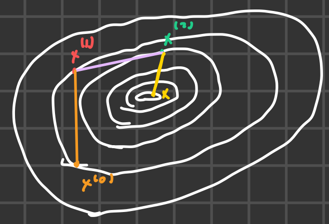
cosa noto: $r^{(k)}$ e $r^{(k+1)}$ sono $\perp$

- es. $r^{(k+1)} = b - Ax^{(k+1)} = b - A(x^{(k)} + \alpha_k r^{(k)}) = -r^{(k)} - \alpha_k A r^{(k)}$

per verificare $\perp$ calcolo $[r^{(k)}]^T \cdot r^{(k+1)} = [r^{(k)}]^T r^{(k)} - \alpha_k [r^{(k)}]^T A r^{(k)} = [r^{(k)}]^T r^{(k)} - \underbrace{\frac{[r^{(k)}]^T r^{(k)}}{\cancel{[r^{(k)}]^T A r^{(k)}}}}_{\alpha_k} \cancel{[r^{(k)}]^T A r^{(k)}} = 0$

- proprietà che vale per due $r^{(k)}$ consecutivi $\rightsquigarrow$ ma quelli pari e dispari sono due famiglie di vettori ortogonali

- ϕ



il vettore che unisce due soluzioni consecutive è una tangente che ...

$$\{x \in \mathbb{R}^2 .\ \phi(x) = \phi(x^{(k+1)})\}$$

- caso (2×2) $n=2$ $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$

- metodo del gradiente coniugato (A sdp) — non precondizionato

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k r^{(k)}$$

$r^{(k)} \to p^{(k)}$ (nuova direzione

- Def) direzioni A-coniugate

se $A = I$ ci sarebbe una norma normale

supponiamo di avere una collezione di vettori $\{p_0, p_1, \dots, p_l\}$ con $p_i \in \mathbb{R}^n$, le $(l+1)$ direzioni p_i sono A coniugate se soddisfano $p_i^T A p_j = 0 \ \forall i \neq j$

Inoltre se sono in questo contesto e supponiamo $B = \{p_0, p_1, \dots, p_{n-1}\}$ sono A-coniugate $(p_i \in \mathbb{R}^n) \rightsquigarrow B$ è una base di $\mathbb{R}^n$

- Dim) $a_0 p_0 + a_1 p_1 + \dots + a_{n-1} p_{n-1} = 0$

$$a_0 \underbrace{p_0^T A p_0}_{>0} + a_1 \underbrace{p_0^T A p_1}_{=0} + \dots + a_{n-1} \underbrace{p_0^T A p_{n-1}}_{=0} = 0 \quad (a_0 = 0)$$

- Input: $x^{(0)}$ — metodo del gradiente coniugato

$r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$, $p^{(0)} = r^{(0)}$

for $k = 0, 1, \dots$

$$\alpha_k = \frac{[p^{(k)}]^T r^{(k)}}{[p^{(k)}]^T A p^{(k)}}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)}$$

$$r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha_k A p^{(k)}$$

semplificazione finita

$$\beta_k = \frac{[p^{(k)}]^T A r^{(k+1)}}{[p^{(k)}]^T A p^{(k)}}$$

$$p^{(k+1)} = r^{(k+1)} - \beta_k p^{(k)}$$

end

- OSS1 Se $\beta_k = 0$, ho il metodo classico del gradiente

OSS2 $\Phi(x^{(k)} + \alpha_k \underset{\text{direzione}}{p^{(k)}}) \underset{\text{Taylor}}{=} \Phi(x^{(k)}) + \alpha \nabla\Phi(x^{(k)}) \cdot p^{(k)} + \frac{1}{2}\alpha^2 [p^{(k)}]^T A p^{(k)} := \varphi(\alpha)$

$\varphi'(\alpha) = \underbrace{\nabla \Phi(x^{(k)})}_{= -r^{(k)}} \cdot p^{(k)} + \alpha [p^{(k)}]^T A p^{(k)}$

α_k t.c. $\alpha_k : \varphi'(\alpha_k) = 0 \quad \leadsto \quad \alpha_k = \dfrac{r^{(k)} \cdot p^{(k)}}{[p^{(k)}]^T A p^{(k)}} = \dfrac{[p^{(k)}]^T r^{(k)}}{[p^{(k)}]^T A p^{(k)}}$

OSS3 $r^{(k+1)} = b - Ax^{(k+1)} = b - A(x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)}) = \underbrace{b - Ax^{(k)}}_{r^{(k)}} - \alpha_k A p^{(k)}$

OSS4 : si verifica che $p^{(k)}$ è ortogonale al $r^{(k+1)}$

- $[p^{(k)}]^T r^{(k+1)} = [p^{(k)}]^T [r^{(k)} - \alpha_k A p^{(k)}] \overset{\text{espando } \alpha_k}{=} p^{(k)T} r^{(k)} - \dfrac{[p^{(k)}]^T r^{(k)}}{\underbrace{[p^{(k)}]^T A p^{(k)}}_{\alpha_k}} [p^{(k)}]^T A p^{(k)} = 0$

- da cui $\boxed{\text{Prop 1}}$ (x induzione) : $[p^{(i)}]^T r^{(k+1)} = 0 \quad \forall i = 0, \dots, k$

- OSS5 vogliamo ~~verificare~~ definire che $p^{(k+1)}$ è A-ortogonale a tutte le direzioni precedenti $\leadsto [p^{(j)}]^T A p^{(k+1)} = 0 \quad j = 0, \dots, k$

- $p^{(0)} = r^{(0)} \qquad p^{(k+1)} = r^{(k+1)} - \beta_k p^{(k)}$
- verifico per $j = k \leadsto [p^{(k)}]^T A [r^{(k+1)} - \beta p^{(k)}] = 0 \leadsto [p^k]^T A \cdot r^{(k+1)} - \beta [p^{(k)}]^T A p^{(k)} = 0 \rightarrow \beta_k = \dfrac{[p^{(k)}]^T A r^{(k+1)}}{[p^{(k)}]^T A p^{(k)}}$

- per proprietà 2 (x induzione) $[p^{(j)}]^T A p^{(k+1)} = 0 \qquad j = 0, \dots, k$

- $\boxed{\text{Teorema}}$ il gradiente coniugato converge alla soluzione esatta al più in n iterazioni

- vale la stima $\|e^{(k)}\|_A \le \left[\dfrac{2c^k}{1 + c^{2k}}\right] \|e^{(0)}\|$ dove $c = \dfrac{\sqrt{K_2(A)} - 1}{\sqrt{K_2(A)} + 1}$

↳ abbatte il precondizionamento

- "DIM"

- oss le mie direzioni $\{p^{(0)}, p^{(1)}, \dots, p^{(n-1)}\}$ (prime n) per Prop 2 sono A-ortogonali $\leadsto$ base per $\mathbb{R}^n$
- oss per Prop 1 $r^{(n)} \perp p^{(0)}, p^{(1)}, \dots, p^{(n-1)}$
- ne segue $r^{(n)} \perp \text{span}\{p^{(0)}, p^{(1)}, \dots, p^{(n-1)}\} = \mathbb{R}^n \leadsto r^{(n)} = 0 \leadsto x^{(n)} = x$

- $r^{(n)} = c_0 p^{(0)} + c_1 p^{(1)} + \dots + c_{n-1} p^{(n-1)} \leadsto p_i^{(T)} r^{(n)}$

- Gradiente coniugato precondizionato (A sdp)

- Input $x^{(0)}, P$

$r^{(0)} = b - Ax^{(0)}, \quad P z^{(0)} = r^{(0)}, \quad p^{(0)} = z^{(0)}$

for $k = 0, \dots$

$\alpha_k = \dfrac{[p^{(k)}]^T r^{(k)}}{[p^{(k)}]^T A p^{(k)}}$

$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)}$

$r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha_k A p^{(k)}$

$P z^{(k+1)} = r^{(k+1)}$

$\beta_k = \dfrac{[p^{(k)}]^T A z^{(k+1)}}{[p^{(k)}]^T A p^{(k)}}$

$p^{(k+1)} = z^{(k+1)} - \beta_k p^{(k)}$

end

$\|e^{(k)}\|_A \le \left[\dfrac{2\tilde{c}^k}{1 + \tilde{c}^{2k}}\right] \|e^0\|_A$ con $\tilde{c} = \dfrac{\sqrt{K_2(P^{-1}A)} - 1}{\sqrt{K_2(P^{-1}A)} + 1}$

- Hilbert

- $Ax = b$

$P = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$

$x^{(0)} = 0, \quad \text{ToL} = 10^{-6}$

n	$K(A_n)$	\	PG (con ∇) errore	PG (con ∇) #iter	$\bar{\nabla}$ PGG errore	$\bar{\nabla}$ PGG #iteraz
4	$O(10^4)$	$O(10^{-13})$	$O(10^{-3})$	995	$O(10^{-2})$	3
6	$O(10^6)$	$O(10^{-10})$	$O(10^{-3})$	1813	$O(10^{-3})$	4
8	⋮	⋮	⋮		⋮	4
10	⋮	⋮	⋮		⋮	
12			⋮			
14	$O(10^{17})$	$O(10)$	$O(10^{-3})$	1379 $\sim O(10^3)$	$O(10^{-3})$	5