NELLA PUNTATA PRECEDENTE (24/10):

- Teorema dei Residui;
- Residuo all'infinito e "secondo teorema dei residui".

CENNI di ANALISI FUNZIONALE e SERIE di FOURIER

SPAZI di BANACH e di HILBERT

Se V è uno spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$), chiamiamo NORMA (su V) una QUALSIASI funzione $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ che soddisfa le proprietà seguenti:

(1) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in V$, e $\|x\| = 0 \iff x = 0_V$;

(2) $\|tx\| = |t| \cdot \|x\| \quad \forall x \in V,\ t \in \mathbb{R}$;

(3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE)

In tal caso, $(V, \|\cdot\|)$ è detto SPAZIO NORMATO.

Oss (!): Se $(V, \|\cdot\|)$ è uno sp. normato, la funzione

$$d_{\|\cdot\|}(x,y) = \|x-y\| \qquad (x,y \in V)$$

è una DISTANZA su V, e $(V, d_{\|\cdot\|})$ è uno spazio metrico.

Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno sp. normato, e sia $(x_n)_n$ una SUCCESSIONE in V (cioè $x: \mathbb{N} \to V$, $x(n) = x_n \in V$). Diciamo che:

- $(x_n)_n$ è CONVERGENTE AD $x_0 \in V$ (IN V), e scriviamo $x_n \to x_0$ per $n \to +\infty$, se $\lim\limits_{n \to +\infty} \underbrace{\|x_n - x_0\|}_{d_{\|\cdot\|}(x_n, x_0)} = 0$

. $(x_n)_n$ è DI CAUCHY (IN V) se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \underbrace{\|x_n - x_m\|}_{d_{\|\cdot\|}(x_n, x_m)} < \varepsilon \quad \forall n, m \geq \bar{n}.$$

In generale, SE $(x_n)_n$ è convergente (in V) ALLORA $(x_n)_n$ è di Cauchy (in V); NON VALE però il viceversa!

DEF (!): Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno sp. normato. Diciamo che $(V, \|\cdot\|)$ è uno SPAZIO DI BANACH se OGNI successione di Cauchy in V è convergente in V (cioè $(V, d_{\|\cdot\|})$ è uno sp. metrico COMPLETO).

ALCUNI ESEMPI.

(1) Posto $V = \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, la funzione

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \quad (\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n),$$

è una norma su V, e $(V, \|\cdot\|)$ è uno sp. di Banach.

(2) Posto $V = C^0([a,b])$ (con $a < b$), la funzione

$$\|f\| = \max_{[a,b]} |f| \quad (\forall f \in C^0([a,b]))$$

è una norma su V, e $(V, \|\cdot\|)$ è uno sp. di Banach. Se $(f_n)_n$ è una successione in V e $f_0 \in V$, allora:

$$f_n \to f_0 \text{ per } n \to +\infty \text{ (in V)} \iff \max_{[a,b]} |f_n - f_0| \to 0 \text{ per } n \to +\infty$$

$\iff$ $(f_n)_n$ converge UNIFORMEMENTE ad f_0 in $[a,b]$.

(3) Posto $V = C_b(\mathbb{R}) = \{ f \in C^0(\mathbb{R}) : f$ è LIMITATA in $\mathbb{R}\}$, la funzione

$$\|f\| = \sup_{\mathbb{R}} |f| \quad (\forall f \in C_b(\mathbb{R}))$$

è una norma su V, e $(V, \|\cdot\|)$ è uno sp. di Banach. Se $(f_n)_n$ è una successione in V e $f_0 \in V$, allora

$$f_n \to f_0 \text{ per } n \to +\infty \text{ in } V \iff \sup_{\mathbb{R}} |f_n - f_0| \to 0 \text{ per } n \to +\infty$$

$\iff (f_n)_n$ converge UNIFORMEMENTE ad f_0 in $\mathbb{R}$

(4) (!) Posto $V = C^0([a,b])$ (con $a < b$), la funzione

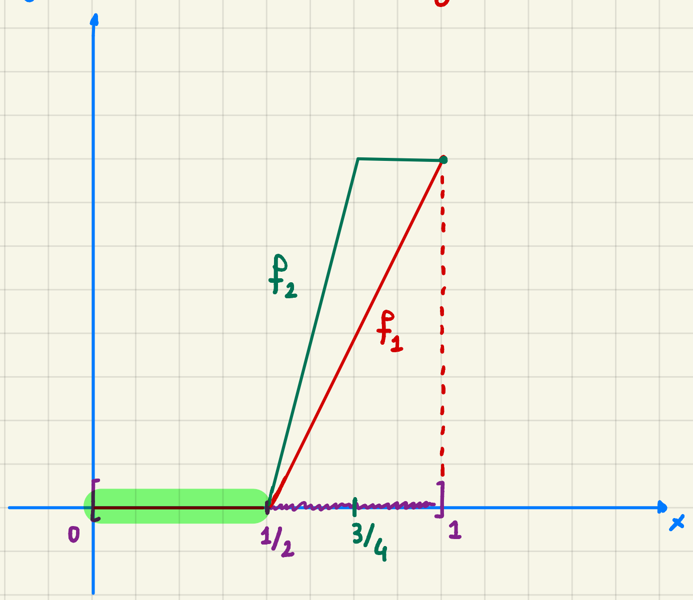
$$\|f\| = \int_a^b |f(x)|\,dx \quad (\forall f \in C^0([a,b])).$$

è una norma su V, MA $(V, \|\cdot\|)$ NON È uno sp. di Banach!

Ad esempio, la successione $(f_n)_n$ in $C^0([0,1])$ def. da

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 2^n(x - 1/2) & \text{se } \frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} \\ 1 & \text{se } \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} \le x \le 1 \end{cases}$$

è di Cauchy in V, MA NON converge in V.



In effetti, posto $f_0 = \begin{cases} 0 & se \ 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1 & se \ 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$, si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 |f_n(x) - f_0(x)|\, dx = 0 \quad \text{MA} \quad f_0 \notin V = C^0([0,1])\,!$$

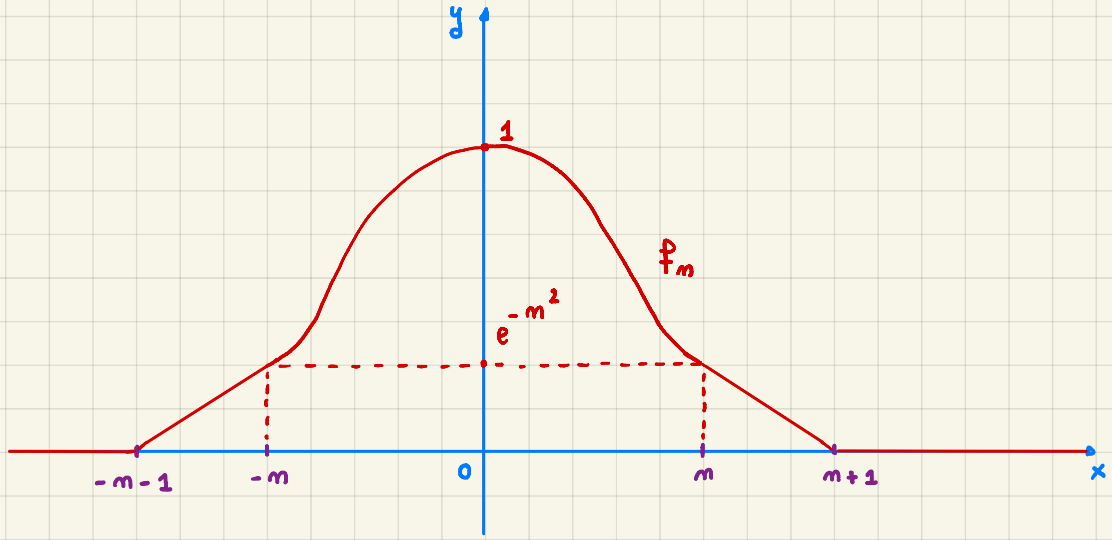
(5) (!) Posto $V = C_0(\mathbb{R}) = \{ f \in C(\mathbb{R}) : \exists\, M > 0 \text{ t.c. } f(x) = 0 \ \forall\, |x| > M \} \subseteq C_b(\mathbb{R})$,

la funzione $\|f\| = \sup_{\mathbb{R}} |f|$ è una norma su V (poiché lo è su $C_b(\mathbb{R}) \supseteq V$) MA $(V, \|\cdot\|)$ NON è uno sp. di Banach!

Ad esempio, la successione $(f_n)_n$ in V def. da

$$f_n(x) = \begin{cases} e^{-x^2}, & se \ |x| < n \\ e^{-n^2}(n+1-|x|) & se \ n \leq |x| \leq n+1 \\ 0, & se \ |x| > n+1 \end{cases}$$

è di Cauchy in V MA NON è convergente in V!



In effetti, posto $f_0(x) = e^{-x^2} \in C_b(\mathbb{R}) \setminus V$, si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{\mathbb{R}} |f_n - f_0| = 0\,.$$

DEF (!): Siano $(V_1, \|\cdot\|_1)$, $(V_2, \|\cdot\|_2)$ due sp. normati, e sia $L: V_1 \to V_2$.
Sia poi $x_0 \in V_1$. Diciamo che L è CONTINUA in x_0 se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \underbrace{\|L(x) - L(x_0)\|_2}_{d_{\|\cdot\|_2}(L(x), L(x_0))} < \varepsilon \quad \forall x \in V_1, \ \underbrace{\|x - x_0\|_1}_{d_{\|\cdot\|_1}(x, x_0)} < \delta .$$

Oss: Nelle ipotesi della definizione precedente, L è continua in x_0 SE e SOLO SE PER OGNI successione $(x_n)_n$ in V_1, $x_n \to x_0$ per $n \to +\infty$, si ha

$$L(x_n) \to L(x_0) \text{ per } n \to +\infty .$$

TEOR (CONTINUITÀ delle APP. LINEARI): Siano $(V_1, \|\cdot\|_1)$, $(V_2, \|\cdot\|_2)$ due sp. normati, e sia $L: V_1 \to V_2$ una applicazione LINEARE.
Sono EQUIVALENTI le seguenti affermazioni:

(1) L è continua IN OGNI punto di V_1;

(2) L è continua in 0_{V_1};

(3) $\exists M > 0$ t.c. $\|L(x)\|_2 \leq M \|x\|_1 \ \forall x \in V_1$ (L è LIMITATA).