lez 05

- $Ax=b$, $PA=LU$

- matlab va a risolvere un sistema perturbato

- abbiamo $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \underbrace{k(A)}_{\|A\|\|A^{-1}\|} \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$

- consideriamo un ipotesi + realistica ~ $\delta A \neq 0$ ~ si può dimostrare se $\|\delta A\| \|A^{-1}\| < 1$ allora $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \frac{k(A)}{1-k(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left[\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \right]$

  - il risultato nel caso $\delta A = 0$ ~~si spiega~~ è un caso specifico di questo

  - $\frac{\|\delta A\| \|A^{-1}\|}{\|A\| \|A^{-1}\|} < \frac{1}{\underbrace{\|A\| \|A^{-1}\|}_{k(A)}}$ ~ $\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} < \frac{1}{k(A)}$ $\overset{\cdot k(A)}{\sim}$ $k(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} < 1$

?? non troppo chiaro

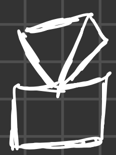
- $\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} = \frac{\|\tilde{r}\|}{\|b\|}$ con $\tilde{r}$:= residuo $r = b - A\tilde{x}$ ~ $\delta b = \underbrace{A\tilde{x}}_{b+\delta b} - \underbrace{Ax}_{b} = A\tilde{x} - b = -\tilde{r}$ ~ $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le k(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} = k(A)\frac{\|\tilde{r}\|}{\|b\|}$

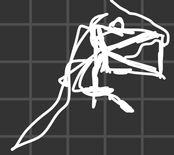
- domanda: che succede se ho una matrice mal condizionata

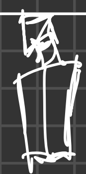
  - strumento: P → $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile (da non confondere con la matrice di permutazione)
    precondizionatore

  - se A dato ~ $k(P^{-1}A) \ll k(A)$ ~ e dovrò risolvere il sistema $\underbrace{P^{-1}A}_{A_{new}} x = \underbrace{P^{-1}b}_{b_{new}}$ (in un mondo ideale P sarebbe A)

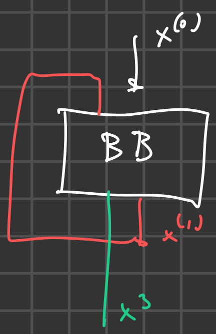
"si chiude il primo argomentino ..."







- METODI ITERATIVI

- 

  con $x^{(0)}$ guess iniziale $x^{(0)} \simeq x$ $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ ~ $x \approx x^{(i)} \in \mathbb{R}^n$ ~ $\{x^{(k)}\}_k$ $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, $x^{(k)} \simeq x$

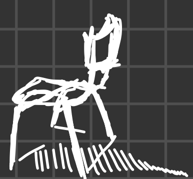
- due tipi di criteri di arresto
  1) numero max di iterazioni N_{max} (non so che accuratezza ottengo)
  2) k_{min} numero min di iterazioni t.c. $\|x - x^{(k_{min})}\|_s < S$ TOL $= 10^{-9}$
     differenza tra due approx successive AKA incremento oppure residuo
     devo stare attento → occorrerà studiare l'affidabilità dello stimatore

- vorrei che $x^{(k)} \to x$ per $k \to +\infty$ nel senso del vettore ~ $\lim_{k\to+\infty} x^{(k)} = x$ oppure con $e^{(k)} = x - x^{(k)}$ ~ conv $\lim_{k\to+\infty} e^{(k)} \to 0$
  in est dimensioni

- $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$ con $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $g \in \mathbb{R}^n$ ~ vedremo che B sarà legato ad A e g legato ad A e b
  conv. consist. stabilità

- introduco un altra proprietà impo. al calcolo scientifico: consistenza, un metodo numerico si dice consistente con il prob se riprendendo il

  se $x = Bx + g$ ~ $(I - B)x = g$ ~ $(I-B)A^{-1}b = g$

  scelta che rende il metodo consistente

- OSS: la sola consistenza non garantisce la convergenza. se $B = I$ e $g = 0$ ~ $x = Bx + g = x$ → $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g = x^{(k)}$ a meno di $x^{(0)} = x$ non vado avanti

- suppongo metodo cons. Quali sono le ip. che gar. conv.
  $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$ ⊛ ~ $x^{(k+1)} - x = Bx^{(k)} - Bx$ → $\dots = B(x^{(k)} - x) = Be^{(k)}$ ~ $e^{(k+1)} = Be^{(k)}$ ~ $\|e^{(k+1)}\|_2 = \|Be^{(k)}\|_2 \le \|B\|_2 \|e^{(k)}\|_2$
  $x = Bx + g$
  matrice di iterazione

→ posso anche $\|e^{(k)}\|_2 \le \|B\|_2 \, \|e^{(k-1)}\|_2 \rightsquigarrow \|B\|_2 \, \|e^{(k)}\|_2 \le \|B_2\|_2^2 \, \|e^{(k+1)}\| \le \dots \le \|B\|_2^{k+1} \, \|e^{(0)}\|_2$

- Possiamo ricavare una cond. sufficiente ⇝ se lo schema $(*)$ è consistente) e se $\|B\|_2 < 1$ ⇝ il metodo è convergente (vale per ogni norma)

"andiamo a dare il risultato forte"

- **TH** | sia ⊛ sia consistente allora si ha $\rho(B) < 1 \longleftrightarrow$ convergenza di ⊛ $\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ importante per le eq. diff. ed differenziali

  $\rho(B) \to \max|\lambda|$

  ↳ matlab max(abs(eig(A)))

- **Lemma** | a) data $C \in \mathbb{R}^{n \times n} \rightsquigarrow C^k \to 0$ sse $\rho(C) < 1$

  (b) $\rho(C) \le \|C\|_2 \quad \forall C \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- **Dimo TH** |

  - sol. $x^{(k+1)} - x = B(x^{(k)} - x) \rightsquigarrow e^{(k+1)} = B e^{(k)}$

    ⋮

    $e^{(k+1)} = B^{k+1} e^{(0)} \to 0$ sse $B^{k-1} \to 0$ sse (a) $\rho(B) < 1$

- **oss** |
  - Se $\|B\|_2 < 1 \rightsquigarrow \rho(B) < 1 \rightsquigarrow$ convergenza
  - Può succedere che $\rho(B) < 1$ con $\|B\|_2 > 1$

  - M_1: B_1 $\rho(B_1) = 0.9$, g_1 | M_2: B_2 $\rho(B_2) = 0.1$, g_2

- schema iterativo generico

  - $Ax = b \rightsquigarrow \alpha_k[\cdot = \cdot]\,\alpha_k$ con $\forall \alpha_k \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \alpha_k A = P - P + \alpha_k A = P - (P - \alpha_k A) \quad \forall P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile $\rightsquigarrow Px = (P - \alpha_k A)x + \alpha_k b$ (con $x \to x^{(k+1)}$ a sinistra e $x \to x^{(k)}$ a destra)

  ⇝ $Px^{(k+1)} = (P - \alpha_k A)x^{(k)} + \alpha_k b$ (abbiamo costruito uno schema consistente)

  - calcolare la ~~consistenza~~ convergenza? verif. cons $\begin{cases} \text{sol} \\ \text{consistenza} \end{cases}$ posso rispondere dicendo che sono consistenti per costruzione

  - ⇝ dato $x^{0} \in \mathbb{R}^n$ per $k \ge 0$ $\quad x^{(k+1)} = P^{-1}\left[(P - \alpha_k A)x + \alpha_k b\right) = \left(I - \alpha_k P^{-1} A\right) x^{(k)} + \alpha_k P^{-1} b = B_{\alpha_k} x^{(k)} + g_{\alpha_k}$

  - metodo di Richardson
    - stazionari → $\alpha_k = \alpha \in \mathbb{R} \ \forall k$
    - dinamici → α_k varia al variare di k