LEZ 11

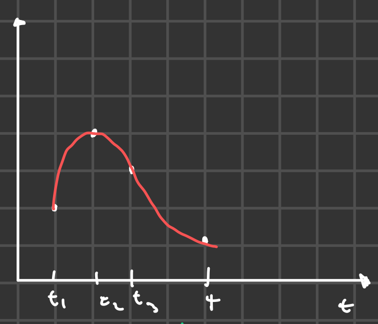
- approx di funzioni e dati

- Ipotesi per tutto $f \in C^0([a,b])$

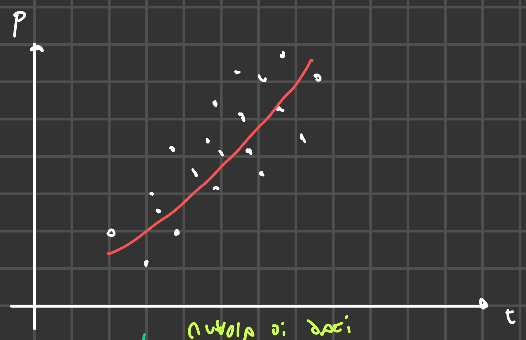
  - esempio misurazione : $\{(t_i, m_i)\}$

  - perché farlo? es. calcolare $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ ~ la rimpiazzo con $\tilde f$ t.c. $\tilde I(f) = \int_a^b \tilde f(x)\,dx$

  - dati raccolti, cosa vuol dire approssimare

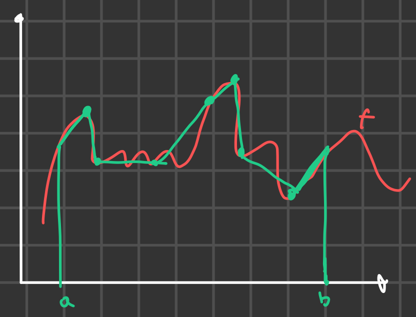
- 

interpolazione



nuvola di dati

appross. minimi quadrati



- Analisi ci offre Taylor
  - limiti : località (espansione che vale per un intorno piccolo) $\frac{1}{x}$ $x_0 = 1$ (intorno piccolo) e^x $x_0 = 0$ (intorno buono)
  - Regolarità c'è bisogno di $C^n([a,b])$ con n arbitrario

Interpolazione

supponendo

- $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ $(n+1)$ coppie di dati, con $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$ (x def di funzione si ha già

  (x_i, y_i)

  - "f" $x_i, y_i = f(x_i)$

    "dati" : $x_i = t_i$, $y_i = m_i = f(t_i)$

  - x_i = "nodi di interpolazione"

    y_i = "valori da interpolare"

    interpolare significa trovare $\tilde f$ t.c. $\tilde f(x_i) = y_i$ per $i = 0, \dots, n$ (condizioni di interpolazione)

  - $\tilde f$
    - polinomio, $\hat f \in \mathbb{P}_q = \{p_q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_q x^q,\ \text{con } a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, \dots, q\}$
    - trigonometrica (Fourier) $\hat f(x) = \sum_k a_k e^{ikx}$
    - Razionale (rapporto di due polinomi) $\tilde f(x) = \dfrac{P_k(x)}{q_s(x)} = \dfrac{a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k}{b_0 + b_1 x + \dots + b_s x^s}$ $a_i, b_i \in \mathbb{R}$

- Interpolazione polinomiale nella forma di Lagrange

  - Proposizione: si considerino le coppie di dati $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ con nodi x_i distinti. Allora $\exists!$ polinomio Π_n (per dati) di grado $\leq n$ t.c. $\Pi_n(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$ funzione $(\Pi_n f)$

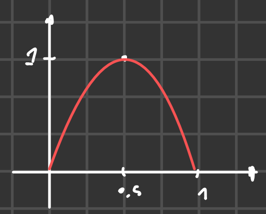
  - Dim (unicità)
    - (supponiamo non sia unica) $\Pi_n \in \mathbb{P}_n$ t.c. $\Pi_n(x_i) = y_i$ $i = 0, \dots, n$ e (per assurdo) $\Pi_n^* \in \mathbb{P}_n$ t.c. $\Pi_n^*(x_i) = y_i$ $i = 0, \dots, n$

      polinomio diff
    - sia $\Gamma_n(x) = \Pi_n(x) - \Pi_n^*(x) \in \mathbb{P}_n$ e in più $\Gamma(x_i) = \Pi_n(x_i) - \Pi_n^*(x_i) = y_i - y_i = 0$ per $i = 0, \dots, n$
    - $\to \Gamma_n(x) = 0$ $\Pi_n(x) - \Pi_n^*(x) = 0$ $\forall x$ assurdo

- Andiamo a costruire Π_n

a partire da 3 nodi e valori che

- $x_0 = 0 \quad x_1 = 0.5 \quad x_2 = 1$
  $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
  $y_0 = 0 \quad y_1 = 1 \quad y_2 = 0$



- $\varphi_1 \in \mathbb{P}_2$ t.c. $\varphi_1(0) = 0 \quad \varphi_1(0.5) = 1 \quad \varphi_1(1) = 0$

$\rightsquigarrow \varphi_1(x) = (x-0)(x-1) \rightsquigarrow$ divido nel risultato $\rightsquigarrow \varphi_1(x) = \dfrac{(x-0)(x-1)}{(0.5-0)(0.5-1)} = \dfrac{x^2-x}{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})} = +4(x-x^2)$

- caso n nodi $\rightsquigarrow$

$x_0 \quad x_1 \quad \dots \quad x_{k-1} \quad x_k \quad x_{k+1} \quad \dots \quad x_n$

$0 \quad 0 \quad \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \quad 0$

- $\varphi_k \in \mathbb{P}_n$ t.c. $\varphi_k(x_j) = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases} = \delta_{jk}$

prodotto di n valori

$\downarrow$

- $\varphi_k(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} = \prod_{\substack{j=0,\dots,n \\ j\neq k}} \dfrac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)}$ polinomio caratteristico di Lagrange

$\chi(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \omega \\ 1 & x \in \omega \end{cases}$ $\quad \omega \in \mathbb{R}^d$

- voglio un caso + generico

- (caso $n=3$)

$x_0 \quad x_1 \quad x_2$
$y_0 \quad y_1 \quad y_2$

$\Pi_2 \in \mathbb{P}_2$ t.c. $\Pi_2(x_0) = y_0$, $\Pi_2(x_1) = y_1$, $\Pi_2(x_2) = y_2$, $\Pi_2(x) = a\,\varphi_0(x) + b\,\varphi_1(x) + c\,\varphi_2(x)$ con a, b, c?

- $\varphi_0(x_0) = 1 \quad \varphi_0(x_1) = 0 \quad \varphi_0(x_2) = 0$
  $\varphi_1(x_0) = 0 \quad \varphi_1(x_1) = 1 \quad \varphi(x_2) = 0$
  $\varphi_2(x_0) = 0 \quad \varphi(x_1) = 0 \quad \varphi(x_2) = 1$

$\rightsquigarrow \Pi_2(x_0) = a\,\underbrace{\varphi_0(x_0)}_{=1} + b\,\underbrace{\varphi_1(x_0)}_{=0} + c\,\underbrace{\varphi_2(x_0)}_{=0} = y_0 \rightsquigarrow a = y_0$

$\Pi_2(x_1) = a\,\underbrace{\varphi_0(x_1)}_{=0} + b\,\underbrace{\varphi_1(x_1)}_{=1} + c\,\underbrace{\varphi_2(x_1)}_{=0} = y_1 \rightsquigarrow b = y_1$

$\Pi_2(x_2) = a\,\underbrace{\varphi_0(x_2)}_{=0} + b\,\underbrace{\varphi_1(x_2)}_{=0} + c\,\underbrace{\varphi_2(x_2)}_{=1} = y_2 \rightsquigarrow c = y_2$

- $\Pi_2(x) = y_0\,\varphi_0(x) + y_1\,\varphi_1(x) + y_2\,\varphi_2(x)$

- generalizzando $\rightsquigarrow$ $x_0 \dots x_i \dots x_n$ / $y_0 \quad y_i \quad y_n$ $\rightsquigarrow$ $\Pi_n = y_0\,\varphi_0(x) + y_1\,\varphi_1(x) + \dots + y_n\,\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k\,\varphi_k(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \left[\prod_{\substack{j=0,\dots,n \\ j\neq k}} \dfrac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)} \right]$

- oppure faccio un sistema $\Pi_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ con $a_i \in \mathbb{R}$ per $i = 0, \dots, n$ $\quad \Pi_n(x_i) = y_i \quad i = 0, \dots, n$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + a_n x_n^n = y_n \end{cases} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \end{bmatrix}$$

con $a, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $x \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$

- per risolvere questo sistema devo accertarmi che sia non singolare, si dimostra che è non è singolare se gli x_i sono distinti $\rightsquigarrow$ matrice mal condizionata

ipotesi iniziale

- comandi matlab

coefficienti con $c(1)$ associato x^n
$\Pi_n f = c(1)x^n + \dots + c(n)x^{n-1}$

costruire polinomio interpolazione

- `c = polyfit(x, y, n)`
  nodi, valori, grado

`q = polyval(c, d)`
$q \in \mathbb{R}^n$
$q \in \mathbb{R}$
valuta polinomio
valuto in un punto diverso o una collezione di punti $d \in \mathbb{R}^n$ oppure $d \in \mathbb{R}$

Prop: sia $I = [x_0, x_n]$ e siano assegnate $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ con gli x_i distinti, se $f \in C^{n+1}(I)$

Allora $\forall x \in I \quad \exists\, \xi = \xi(x) \in I$ t.c. $E_n f(x) = f(x) - \Pi_n f(x) = \dfrac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(x)) \cdot \omega_{n+1}(x)$

con $\omega_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$

- $E_n f(x_i) = 0$